Dual- und Three-Phase-Lag-Modelle: Zeitliche Asymptotik von Lösungen

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Karin Borgmeyer

an der

Universität Konstanz

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Sektion
Fachbereich Mathematik und Statistik

Tag der mündlichen Prüfung: 18. November 2016

Referenten: Prof. Dr. Reinhard Racke (Universität Konstanz)
Prof. Dr. Robert Denk (Universität Konstanz)

Konstanz, 2016

Konstanzer Online-Publikations-System (KOPS)
URL: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:352-0-380187

Dank

Mein großer Dank ergeht an Herrn Prof. Dr. Reinhard Racke für die Betreuung der Dissertation und seine stete Bereitschaft, Anregung und Hilfestellung zu geben. Die Mitarbeit an seinem Lehrstuhl erfolgte in allzeit angenehmer Atmosphäre und bot vielfältige Einblicke in interessante Themengebiete.

Herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. Robert Denk für bereichernde Diskussionen und Denkanstöße sowie die Erstellung des Zweitgutachtens.

Ein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. Heinrich Freistühler für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Einen lieben Dank sage ich meinen Freunden und Kollegen Dr. Marco Ritter und Dr. Alexander Schöwe, die mit mir nicht nur das Büro und dessen herrliche Aussicht auf den Bodensee, sondern auch Kummer und Freude teilten, sowie Dr. Martin Saal, Dr. Michael Pokojovy, Max Nendel, Felix Kammerlander, Felix Hummel, Dr. Johannes Schnur, Dr. Tim Seger, Dr. Patrick Kurth, Dr. Markus Kunze, Karsten Herth und Lisa Fischer, die mit ihrer fröhlichen und hilfsbereiten Art bereicherten.

Danken möchte ich auch den Sekretärinnen Frau Gerda Baumann und Frau Gisela Cassola sowie Herrn Rainer Janßen, die stets freundlichen Rat wussten.

Allen danke ich für die gute Zusammenarbeit, das freundschaftliche Arbeitsklima, die netten Gespräche und die immer offenen Türen auf „F5“.

Ganz besonders bedanke ich mich bei meinen Eltern und meinem Bruder. Ohne Euch wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Ihr habt mich auf meinem Weg begleitet und mir stets Zuspruch, Rückhalt und Unterstützung gegeben.

Konstanz, im November 2016 Karin Borgmeyer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Phase-Lag-Modelle **5**
1.1 Das Wärmeleitungsgesetz von Fourier . . . 6
1.2 Second Sound und das Gesetz von Cattaneo . . . 7
1.3 Dual-Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung . . . 9
1.4 Three-Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung . . . 12
1.5 Phase-Lag-Modelle der Thermoelastizität . . . 13
1.6 Sind die Modelle paradox? . . . 16
1.7 Mathematische Untersuchungen zu den Phase-Lag-Modellen . . . 17

2 Symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme **19**
2.1 Symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Anfangswertprobleme . . . 19
2.2 Wohlgestelltheit . . . 20
2.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit . . . 22
2.4 Stabilität . . . 23
2.5 Dissipativität . . . 24
2.5.1 Physikalische Sichtweisen . . . 24
2.5.2 Mathematische Sichtweisen . . . 27
2.6 Zeitliche Asymptotik . . . 30
2.6.1 Die Shizuta-Kawashima-Bedingung . . . 30
2.6.2 Bedingungen an die Matrizen . . . 32
2.6.3 Abschätzungen im Fourierraum . . . 34
2.6.4 L^p-L^q-Abschätzungen . . . 42
2.7 Symmetrisch-hyperbolische Systeme mit Nebenbedingungen . . . 48

3 Ein symmetrisch-hyperbolisches Phase-Lag-System **51**
3.1 Dual-Phase-Lag-Wärmeleitung DPLW (2,1) . . . 52
3.1.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisches System . . . 52
3.1.2 Zeitliche Asymptotik . . . 57
3.2 Asymptotik der Eigenwerte in einer Raumdimension . . . 61
3.2.1 Asymptotik für $|\xi| \to 0$ . . . 62
3.2.2 Asymptotik für $|\xi| \to \infty$ . . . 68

4 Symmetrisch-hyperbolische Phase-Lag-Systeme mit Nebenbedingungen **77**
4.1 Dual-Phase-Lag-Thermoelastizität DPLT (2,1) . . . 77
4.1.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisches System mit Nebenbedingung . 79
4.1.2 Zeitliche Asymptotik . . . 85

4.2 Three-Phase-Lag-Wärmeleitung TPLW (2,1,1) 90
4.2.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisches System mit Nebenbedingung . 91
4.2.2 Zeitliche Asymptotik 96

5 Symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Phase-Lag-Systeme 103
5.1 Dual-Phase-Lag-Wärmeleitung DPLW (2,2) 103
5.1.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System 104
5.1.2 Zeitliche Asymptotik 112
5.2 Three-Phase-Lag-Wärmeleitung TPLW (1,1,1) in einer Raumdimension 117
5.2.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System 117
5.2.2 Asymptotik der Eigenwerte 119
5.2.3 L^p-L^q-Abschätzungen 124

6 Nichterhaltung der Positivität für das Modell DPLW (2,2) 129
6.1 Lösung im Fourierraum 130
6.1.1 Berechnung der Lösung 131
6.1.2 Regularität der Lösung 140
6.2 Lösung des ursprünglichen Problems und ihre Nichtpositivität 149

7 Exponentielle Stabilität zur Three-Phase-Lag-Thermoelastizität im Intervall 155
7.1 Three-Phase-Lag-Thermoelastizität TPLT (1,1,1) 155
7.1.1 Homogene Dirichlet-Randbedingungen 157
7.1.2 Homogene Dirichlet-Neumann-Randbedingungen 174
7.1.3 Instabilität 177
7.2 Three-Phase-Lag-Thermoelastizität TPLT (2,1,1) 179
7.2.1 Homogene Dirichlet-Randbedingungen 180
7.2.2 Homogene Dirichlet-Neumann-Randbedingungen 197
7.2.3 Instabilität 198

Anhang 201
A.1 Notationen 201
A.2 Räume von Funktionen und Distributionen 201
A.3 Fourier-Transformation 208
A.4 Ungleichungen 210
A.5 Halbgruppentheorie 211
A.6 Störungstheorie für Polynome 212

Literaturverzeichnis 217

Einleitung

Räumliche Temperaturunterschiede führen dazu, dass Energie ausgetauscht wird. Dabei fließt die Energie von einem Ort höherer Temperatur hin zu einem Ort niedrigerer Temperatur. Beschrieben wird ein solcher Vorgang durch das Fouriersche Gesetz

$$q(t,x) = -\kappa \nabla \theta(t,x)\,,$$

nach welchem die Wärmestromdichte q und das Temperaturgefälle $-\nabla\theta$ entsprechend der Wärmeleitfähigkeit κ des Materials zum Zeitpunkt t im Ort x proportional zueinander sind. Durch Einführen zweier zeitlicher Verzögerungsparameter $\tau_q > 0$ und $\tau_\theta > 0$ ergibt sich daraus das Dual-Phase-Lag-Modell nach D. Y. Tzou [Tzo97]

$$q(t+\tau_q,x) = -\kappa \nabla \theta(t+\tau_\theta,x)\,.$$

Das Three-Pase-Lag-Modell nach S. K. Roy Choudhuri [Roy07] beruht auf einer Abwandlung des Fourierschen Gesetzes und einem zusätzlichen dritten Parameter $\tau_\nu > 0$, und lautet

$$q(t+\tau_q,x) = -\kappa \nabla \theta(t+\tau_\theta,x) - \kappa^* \nabla \nu(t+\tau_\nu,x) \quad \text{mit } \nu_t = \theta\,.$$

Da die Verzögerungsparameter als sehr klein angenommen werden, geht man über zu formalen Taylorapproximationen

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) = -\kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla\theta(t,x) \qquad \text{und}$$

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) = -\kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla\theta(t,x) - \kappa^* \sum_{j=0}^{m_\nu} \frac{\tau_\nu^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla\nu(t,x)$$

mit den Entwicklungsordnungen m_q, m_θ und $m_\nu \in \mathbb{N}$. Um ein vollständiges System an Gleichungen zu erhalten, kann man die Energiebilanz $\varrho c_v \theta_t(t,x) = -\operatorname{div} q(t,x)$ der Wärmeübertragung, die eine Elimination von q ermöglicht und zusammen mit dem Fourierschen Gesetz auf die klassische Wärmeleitungsgleichung führt, oder auch ein System von Thermoelastizitätsgleichungen hinzunehmen.

Mit den genannten Gleichungen sollen Phänomene der Wärmeübertragung unter extremen Bedingungen, beispielsweise bei Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts oder bei der Einwirkung eines Ultrakurzpulslasers, modelliert werden. Mögliche Anwendungsbereiche finden sich in der Materialbearbeitung (Präzisionsarbeiten) oder Medizintechnik (Laser-Operationen).

Mathematisch handelt es sich um Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, die von hoher Ordnung sein können. Typische Fragestellungen sind solche nach der Wohlgestelltheit zugehöriger Anfangs- und Anfangsrandwertprobleme und dem Langzeitverhalten von Lösungen. Da wir es bei den Phase-Lag-Modellen aufgrund der Wahlmöglichkeiten bei den Entwicklungsordnungen mit unzählig vielen verschiedenen Modellen zu tun haben, ist besonders auch die Frage danach

interessant, ob eine Eingliederung in eine übergeordnete, beispielsweise die hyperbolische oder die parabolische Theorie möglich ist und ob das Verhalten von Lösungen zu den einzelnen Modellen einem gewissen Schema unterliegt.

Die vorliegende Arbeit soll hierzu einen Beitrag leisten. Wir werden verschiedene Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung und Thermoelastizität herausgreifen und zeigen, dass sich diese in die Theorie symmetrisch-hyperbolischer und symmetrisch-hyperbolisch-parabolischer Systeme einordnen lassen. Dadurch ist die Wohlgestelltheit zugehöriger Anfangswertprobleme in Form der eindeutigen Lösbarkeit in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$ gesichert. Außerdem ergeben sich Aussagen zur Ausbreitungsgeschwindigkeit, was vor dem Hintergrund zu sehen ist, dass die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, die mit der klassischen Wärmeleitungsgleichung einhergeht, als ein Defizit des Modells angesehen wird. Darüber hinaus soll vor allem die zeitliche Asymptotik von Lösungen untersucht werden.

In Bezug auf das Ganzraumproblem im $\mathbb{R}^n$ bietet es sich an, zunächst die Asymptotik der transformierten Lösung im Fourierraum zu bestimmen. Aus dort erzielten Energieabschätzungen können anschließend L^p-L^q-Abschätzungen für die Lösung des Anfangswertproblems abgeleitet werden. Für symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme entwickelten S. Kawashima et al. in [SK85; UDK12] eine Methode, durch die sich die Suche nach einer geeigneten Energieabschätzung erübrigt, sofern die Matrizen des Systems gewisse Bedingungen erfüllen. Diese Methode möchten wir auf unsere eingeordneten Phase-Lag-Systeme anwenden. Wir werden dazu die Variante aus [UDK12] benötigen, die für ein symmetrisch-hyperbolisches System $A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^n A^j \partial_{x_j} V + LV = 0$ den Fall einer zwar positiv semidefiniten, aber nichtsymmetrischen Matrix L umfasst. Indem wir zwei zusätzliche Bedingungen ergänzen, können wir das Verfahren auch für entsprechende symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme $A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^n A^j \partial_{x_j} V + \sum_{j,k=1}^n B^{jk} \partial_{x_j}\partial_{x_k} V + LV = 0$ aufrechterhalten. Für die ausgewählten Phase-Lag-Systeme werden wir die erforderlichen Eigenschaften der Matrizen nachweisen und daraufhin Ergebnisse zum zeitlichen Abklingen der Lösungen erhalten. In zwei und drei Raumdimensionen wird für manche symmetrisch-hyperbolische Systeme auch die um eine Nebenbedingung erweiterte Methode aus [UDK12] zum Einsatz kommen. Die Nebenbedingung wird die Rotationsfreiheit einer Lösungskomponente erfassen und sich als ausschlaggebend für das Gelingen der Methode erweisen.

In bisherigen Arbeiten zur exponentiellen Stabilität in beschränkten Gebieten stellten R. Quintanilla und R. Racke [Qui02; Qui03; QR06a; QR06b; QR07; QR08; BQR14] fest, dass die Stabilität an gewisse Einschränkungen an die Parameter τ_q, τ_θ und τ_ν geknüpft ist. Dies ist besonders deshalb von Interesse, da von physikalischer Seite aus die Frage nach der genauen Bedeutung und experimentellen Bestimmbarkeit der Verzögerungsparameter noch unbeantwortet ist [Tzo97, S. 59; XSL08]. Die gefundenen Einschränkungen bestehen in Form von Vergleichsrelationen der Parameter untereinander. Dieselben werden uns auch bei den Ganzraumproblemen wiederbegegnen. Ob darin die strikte Ungleichung oder die Gleichheit gilt, kann entscheidend dafür sein, ob das Abklingverhalten vom Standard- oder vom Regularity-Loss-Typ ist. Letzterer zeichnet sich gegenüber dem Standard-Typ dadurch aus, dass zur selben Abklingrate in der L^p-L^q-Abschätzung eine höhere Regularität der Anfangsdaten erforderlich ist. Jedoch werden wir auch ein Beispiel sehen, dessen Grenzfall nicht mit einem Regularitätsverlust, sondern mit einer schlechteren Abklingrate einhergeht.

Für ein Dual-Phase-Lag-Modell der Wärmeleitung werden wir im Fall einer Raumdimension auch die zugrundeliegenden Eigenwerte charakterisieren und darüber zeigen, dass die mit der obigen Methode erzielte Abklingrate in der L^p-L^q-Abschätzung optimal ist und die Lösung gegen diejenige

der klassischen Wärmeleitungsgleichung konvergiert. Hierbei werden Elemente der Störungstheorie nach T. Kato [Kat66] und, zur expliziten Bestimmung der asymptotischen Entwicklung der Eigenwerte, Newton-Polygone gemäß [Wal62] zum Einsatz kommen. Durch eine Untersuchung der Eigenwerte werden wir auch eine L^p-L^q-Abschätzung für ein Three-Phase-Lag-Modell erhalten, für das die zuvor genannte Methode aufgrund des Vorhandenseins einer indefiniten Matrix L nicht greift. Dabei werden wir hinsichtlich der Einschränkungen an die Verzögerungsparameter eine Verbesserung gegenüber einem Ergebnis aus [DS13] erzielen.

Durch den Übergang zu hyperbolischen Wärmeleitungsmodellen mag eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit gewonnen werden, im Gegenzug geht jedoch die Erhaltung der Positivität, die dem parabolischen Modell zu eigen ist, verloren. Dies kann bedeuten, dass das System auf eine Wärmezufuhr hin mit einer lokalen und temporären Abkühlung reagiert. Ähnlich wie in [Ruk14] soll ein solches Verhalten für ein als symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch eingestuftes Dual-Phase-Lag-Modell gezeigt werden. Unter Vorgabe einer konkreten positivwertigen Wärmequelle werden wir eine explizite Lösungsdarstellung herleiten, wozu wir auf die Theorie der Distributionen und insbesondere auf [Zem65] zurückgreifen. Die zunächst nur distributionelle Lösung muss auf ihre Regularität hin untersucht werden, bevor eine punktweise Auswertung der Lösung und schließlich eine Aussage zu deren Vorzeichen möglich wird.

Hinsichtlich der Situation in beschränkten Gebieten können wir die erwähnte Ergebnisreihe von R. Quintanilla und R. Racke zur exponentiellen Stabilität um entsprechende Resultate für zwei eindimensionale Three-Phase-Lag-Modelle der Thermoelastizität unter homogenen Dirichlet- oder Dirichlet-Neumann-Randbedingungen ergänzen. Der Nachweis der exponentiellen Stabilität wird über aufwendige Energieabschätzungen erfolgen. Notwendig werden auch hier die schon bekannten Einschränkungen an die Verzögerungsparameter sein, denn andernfalls können instabile Lösungen auftreten.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Kapitel 1: Phase-Lag-Modelle. Ein historisch-physikalischer Überblick führt vom Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung über das Second-Sound-Phänomen und das Gesetz von Cattaneo hin zu den Dual- und Three-Phase-Lag-Modellen der Wärmeleitung und Thermoelastizität. Dies soll, ohne auf physikalische Details einzugehen, dem besseren Verständnis der Modelle dienen. Wir führen eine Nomenklatur für die Phase-Lag-Modelle ein und geben einen Überblick über schon bestehende Resultate zur Wohlgestelltheit, Stabilität und Asymptotik.

Kapitel 2: Symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme. Dieses Kapitel umfasst allgemeine Resultate für Anfangswertprobleme zu symmetrisch-hyperbolischen Systemen, solchen mit Nebenbedingungen und symmetrisch-hyperoblisch-parabolischen Systemen. Darunter finden sich Aussagen zur Wohlgestelltheit und zur Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie eine Methode zur Bestimmung der zeitlichen Asymptotik von Lösungen in Form von L^p-L^q-Abschätzungen, welche vom Standard- oder Regularity-Loss-Typ sein können.

Es gelingt, konkrete Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung und Thermoelastizität in diese Theorie einzuordnen. Dies geschieht in den Kapiteln 3, 4 und 5.

Kapitel 3: Ein symmetrisch-hyperbolisches Phase-Lag-System. Präsentiert wird ein Dual-Phase-Lag-Modell der Wärmeleitung, das sich mit einem symmetrisch-hyperbolischen System identifizieren lässt. Auf dieses wenden wir die Methode aus Kapitel 2 an. Eine Untersuchung der Eigenwerte gibt anschließend Auskunft über die Optimalität der erzielten Abklingrate und ermöglicht einen Vergleich mit der Lösung der klassischen Wärmeleitungsgleichung.

Kapitel 4: Symmetrisch-hyperbolische Phase-Lag-Systeme mit Nebenbedingungen. Ein Dual-Phase-Lag-Modell der Thermoelastizität sowie ein Three-Phase-Lag-Modell der Wärmeleitung stellen weitere Beispiele aus der symmetrisch-hyperbolischen Kategorie dar. Für das Gelingen der Methode zur Bestimmung der zeitlichen Asymptotik muss jedoch in zwei und drei Raumdimensionen die Rotationsfreiheit einer Lösungskomponente als Nebenbedingung aufgenommen werden.

Kapitel 5: Symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Phase-Lag-Systeme. Zwei weitere Wärmeleitungsmodelle, darunter ein Dual- und ein Three-Phase-Lag-Modell, fallen unter die symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systeme. Für das Dual-Phase-Lag-Modell ist die Methode aus Kapitel 2 zielführend, während die L^p-L^q-Abschätzung für das Three-Phase-Lag-Modell auf einer Untersuchung der Eigenwerte basiert.

Kapitel 6: Nichterhaltung der Positivität für das Modell DPLW (2,2). Unter Vorgabe einer konkreten Wärmequelle wird für das Dual-Phase-Lag-System aus Kapitel 5 die Nichterhaltung der Positivität gezeigt.

Kapitel 7: Exponentielle Stabilität zur Three-Phase-Lag-Thermoelastizität im Intervall. Für zwei Three-Phase-Lag-Modelle der Thermoelastizität, betrachtet auf einem Intervall, werden jeweils unter einer Bedingung an die Verzögerungsparameter die exponentielle Stabilität und bei Verletzung derselben die Instabilität nachgewiesen.

Anhang. Einige benötigte Hilfsmittel und Notationen sind im Anhang zusammengestellt.

1 Phase-Lag-Modelle

Ein historisch-physikalischer Einblick möchte uns ausgehend vom Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung, hinweg über das Second-Sound-Phänomen und das Gesetz von Cattaneo, hin zu den Dual- und Three-Phase-Lag-Modellen der Wärmeleitung und Thermoelastizität von D. Y. Tzou und S. K. Roy Choudhuri führen. Auf anschaulicher Ebene und ohne in die physikalischen Details einzusteigen, soll dies dem Verständnis der Modelle, ihrer Motivation und Einordnung dienen. Für die verschiedenen Phase-Lag-Modelle werden wir eine Nomenklatur DPLW $(\cdot,\cdot)$, DPLT $(\cdot,\cdot)$, TPLW $(\cdot,\cdot,\cdot)$, TPLT $(\cdot,\cdot,\cdot)$ einführen und einen Überblick über bereits vorhandene mathematische Resultate zur Wohlgestelltheit, Stabilität und Asymptotik geben. Des Weiteren finden sich einige Überlegungen zum Begriff des Paradoxons, der sich im Kontext von Wärmeleitungsmodellen, aufgebracht durch die Arbeiten von C. Cattaneo und P. Vernotte, etabliert hat.

Die folgende Zusammenstellung umfasst diejenigen physikalischen Größen, die im weiteren Verlauf der Arbeit auftreten. Größen, die nur im aktuellen Kapitel benötigt werden, sind nicht aufgelistet.

▸ Materialspezifische Größen, die als konstant angenommen werden:

Formelzeichen	Bedeutung	Einheit
c_v	spezifische Wärmekapazität	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$
γ	Spannungs-Temperatur-Modul	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^2}$
κ	Wärmeleitfähigkeit	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}$
κ^*		$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}$
λ	erste Lamé-Konstante	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
μ	zweite Lamé-Konstante	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
ϱ	Dichte	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
τ_q	Phase-Lag für die Wärmestromdichte	s
τ_θ	Phase-Lag für die Temperatur	s
τ_ν	Phase-Lag für die thermische Verschiebung	s
T_0	Referenztemperatur	K

▸ Größen, die Funktionen bezüglich der Zeit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und des Orts $x \in \mathbb{R}^n$ zu $n \in \{1,2,3\}$ bilden:

Formelzeichen	Bedeutung	Einheit
θ	absolute Temperatur oder Temperaturdifferenz zur Referenztemperatur T_0	K
ν	thermische Verschiebung	K·s
η	Wärmequelldichte	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}$
q	Wärmestromdichte	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
u	Verschiebungsvektor	m

1.1 Das Wärmeleitungsgesetz von Fourier

Schon in jungen Jahren entdeckte Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) (zu dessen Biografie siehe [Kah09]) sein Interesse an der Mathematik. Ausgebildet an der Militärschule in Auxerre, kehrte Fourier an diese nach einer Zeit als Novize als Lehrer zurück. In den ersten Jahren der Französischen Revolution zeigte er sich, sogar bishin zu einer Inhaftierung, politisch aktiv, beschloss dies aber und studierte und lehrte von 1794 bis 1797 an den neu gegründeten Hochschulen in Paris. Fourier wurde einer der Begleiter Napoleons auf der Ägyptischen Expedition von 1798 bis 1801 und verfasste das Vorwort zum umfangreichen Expeditionsbericht „*Description de l'Égypte*". Im Amt des Präfekten des Département Isère, das Fourier nach seiner Rückkehr bis 1815 innehatte, war er unter anderem verantwortlich für die Trockenlegung der Sümpfe bei Bourgoin und den Straßenausbau zwischen Grenoble und Turin.

Während dieser Zeit, als Präfekt in Grenoble fernab des wissenschaftlichen Lebens in Paris, schuf Fourier seine bedeutendsten Errungenschaften an der Schnittstelle von Physik und Mathematik. Im Jahr 1807 reichte Fourier eine erste Arbeit zur Wärmeübertragung am Institut de France ein. Mit einer überarbeiteten Fassung „*Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*" gewann er den vom Institut für das Jahr 1811 zum Thema „*Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur et comparer le résultat de cette théorie à des expériences exactes*" [Fou88, S. VII] ausgeschriebenen Grand Prix de Mathématiques, obgleich die Prüfungskommission, darunter Joseph-Louis de Lagrange und Pierre-Simon Laplace, nicht vollends zufriedengestellt war, denn sie lässt verlauten –

> "*Cette pièce [...] renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface ; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.*" [Fou88, S. VII f.]

– und verweigert zur Verärgerung Fouriers eine Veröffentlichung der Arbeit. 1817 wurde Fourier in einem zweiten Anlauf, nachdem die Aufnahme ein Jahr zuvor an der Zustimmung des Königs Louis XVIII gescheitert war, Mitglied der Académie des Sciences. Sein Werk, schließlich in Form der abermals überarbeiteten Fassung „*Théorie analytique de la chaleur*", konnte Fourier jedoch erst im Jahr 1822 veröffentlichen, nachdem er selbst Secrétaire perpétuel der Académie des Sciences für Mathematik geworden war. Den Hauptpunkt der Arbeit bildete die Entwicklung der Theorie der nach ihm benannten Fourier-Reihen. Dem voran ging eine Beschreibung der Wärmeausbreitung, die den Anlass zum Aufbau der mathematischen Theorie gab.

Erfahrungsgemäß versuchen sich unterschiedliche Temperaturen stets anzugleichen und die Wärme fließt dabei von einem Ort höherer Temperatur hin zu einem Ort niedrigerer Temperatur, es sei denn, man wendet Arbeit auf, um Gegenteiliges zu bewirken. Vor diesem Hintergrund mag uns das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz

$$q(t,x) = -\kappa \nabla \theta(t,x)\,, \tag{1.1}$$

schnell plausibel erscheinen: Der Temperaturgradient $\nabla\theta(t,x)$ im Ort x zum Zeitpunkt t zeigt in die Richtung des stärksten Temperaturanstiegs, also entsteht entgegengesetzt dazu eine je nach Wärmeleitfähigkeit κ des Materials proportionale Wärmestromdichte q. Ein herrschender Temperaturunterschied kann somit als Grund für den Austausch von Energie, die in dieser Situation als

Wärme bezeichnet wird, angesehen werden. Wie die Wärmeübertragung auf energetischer Ebene abläuft, beschreibt die Energiebilanz

$$\varrho c_v \theta_t(t,x) = -\operatorname{div} q(t,x) + \eta(t,x)\,, \tag{1.2}$$

die sich anschaulich folgendermaßen lesen lässt: Wenn sich die Temperatur innerhalb eines kleinen Volumenelementes um den Punkt x herum über die Zeit hinweg ändert, so bedeutet dies, dass Energie, die dem Term $\varrho c_v \theta_t$ entspricht, übertragen wird. Dies geschieht zum einen durch aus der Umgebung des Volumenelementes einströmende oder dorthin abfließende Energie, repräsentiert durch den Term $\operatorname{div} q$, und zum anderen durch innerhalb des Volumenelementes vorhandene Wärmequellen oder Wärmesenken η. Zusammengenommen ergeben die beiden Gleichungen (1.1) und (1.2) die klassische Wärmeleitungsgleichung

$$\varrho c_v \theta_t(t,x) - \kappa \Delta\theta(t,x) = \eta(t,x)\,,$$

die mathematisch zum Standardvertreter der parabolischen Differentialgleichungen geworden ist und physikalisch in vielen Situationen eine gute und dennoch einfache Modellierung zu Vorgängen der Wärmeübertragung bietet.

1.2 Second Sound und das Gesetz von Cattaneo

Das Wirken Fouriers lag mehr als hundert Jahre zurück, als zwei wissenschaftliche Strömungen zu einer neuen Sichtweise auf die Vorgänge bei der Wärmeübertragung und zu einer Hinterfragung des bestehenden mathematischen Modells führten.

Eine beruhte auf einem Phänomen, das Ende der 1930er Jahre im Helium-Isotop ^{4}He bei Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts experimentell beobachtet wurde. Bei unter 4,22 K ist ^{4}He flüssig, weiter darunter, bei Temperaturen unterhalb von 2,17 K, also -270,98 °C, entwickelt der in diesem Zustand Helium II genannte Stoff Merkmale eines Suprafluids. Suprafluide sind Flüssigkeiten ohne jegliche Viskosität. (Zum Vergleich: Der fließfähigste Stoff in unserem Alltag ist Wasser mit einer Viskosität zwischen 1,5 mPa·s bei etwa 5 °C und 0,3 mPa·s bei etwa 90 °C; eine noch etwas geringere Viskosität weist Aceton auf. Auf der Skala aufwärts ist beispielsweise Olivenöl bei etwa 100 mPa·s und Honig schon im Bereich von 10 Pa·s einzuordnen.) Suprafluide besitzen paradox anmutende Eigenschaften wie beispielsweise die Fähigkeit, sich entlang einer über den Flüssigkeitsspiegel hinausragenden Wand in Form eines dünnen Films aufwärts zu bewegen (Onnes-Effekt).

Zur Erklärung solcher Phänomene stellten László Tisza (1907-2009) und Lew D. Landau (1908-1968), der 1962 für seine Forschung zu flüssigem Helium mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde, das Zwei-Fluid-Modell auf (siehe [Don09] für einen kurzen Einblick). Nach diesem besteht Helium II aus einem normalflüssigen Anteil und einem suprafluiden Anteil, denen jeweils eine eigenständige Dichte und ein Geschwindigkeitsvektorfeld zugeordnet werden. Landau beschrieb 1941 das Modell in Form eines Systems von hydrodynamischen Gleichungen und erhielt daraus zwei Gleichungen für die Schallausbreitung, woraus er schloss, „*that there must be two velocities of sound in helium II*“ [Lan71, S. 227]. Die erste Gleichung beinhaltet als Größen den Druck und die Gesamtdichte und beschreibt eine Druck- oder Schallwelle, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit der herkömmlichen Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit entspricht, sozusagen einen „*first sound*“. Die zweite Gleichung beläuft sich auf eine Wellengleichung für die Temperatur

(vergleiche [Tzo97, S. 91]) und modelliert so einen „*second sound*“, also eine wellenförmige Ausbreitung von Wärme mit einer eigenständigen Ausbreitungsgeschwindigkeit (Tisza hatte bereits 1938 in [Tis38, S. 1036] von „*la vitesse des ondes de témperature*“ geschrieben). Wie von Landau aus seinen theoretischen Überlegungen heraus vorhergesagt, konnte das Auftreten eines Second Sound wenige Jahre später von V. Peshkov in [Pes71] experimentell bestätigt werden.

Während durch das Second-Sound-Phänomen Interesse am Wellencharakter der Wärmeausbreitung geweckt wurde, gab es eine davon unabhängige zweite Strömung, die das Fouriersche Gesetz infrage stellte. Grund ist die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, die mit der parabolischen Wärmeleitungsgleichung einhergeht (siehe [Eva10, S. 48 f.]). Diese Tatsache, dass sich eine Temperaturschwankung augenblicklich in noch so weiter räumlicher Entfernung auswirkt, wurde von Carlo Cattaneo (1911 -1979) und Pierre Vernotte (1898 -1970) als Paradoxon angesehen, woraufhin sie unabhängig voneinander – aber wie von Cattaneo 1958 in [Cat58] als Reaktion auf Vernottes Beitrag [Ver58b] angemerkt, sei er schon 1948 zu „exakt den gleichen Korrekturen“ gelangt – das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz durch

$$q(t,x) + \tau q_t(t,x) = -\kappa \nabla \theta(t,x) \tag{1.3}$$

mit einem positiven Parameter τ ersetzten. Genau genommen hatte bereits 1867 James C. Maxwell (1831 -1879) in einer vergleichbaren Situation einen derartigen Zeitableitungsterm erhalten, diesen aber in seinem Kontext als vernachlässigbar eingestuft [Max67, S. 86]. In gängigen Bezeichnungen des Modells (1.3) finden sich daher verschiedene Kombinationen aus den Namen Cattaneo, Vernotte und Maxwell wieder; der Kürze wegen entscheiden wir uns für den Ausdruck Gesetz von Cattaneo. Zusammen mit der Energiebilanz (1.2) führt das Gesetz von Cattaneo auf eine hyperbolische Gleichung in Form einer gedämpften Wellengleichung

$$\varrho c_v \tau \theta_{tt}(t,x) + \varrho c_v \theta_t(t,x) - \kappa \Delta \theta(t,x) = \eta(t,x) + \tau \eta_t(t,x)\,,$$

bei der die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch $\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau}}$ gegeben ist.

1948, also im selben Jahr, in dem Cattaneo das Wärmeleitungsgesetz aufgestellt hatte, wurde auch das Second-Sound-Phänomen in Helium II durch [BM48] mit der gedämpften Wellengleichung in Verbindung gebracht. Einen direkten Zusammenhang zwischen dem Gesetz von Cattaneo und dem Second-Sound-Phänomen stellte allerdings erst 1963 Marvin Chester in [Che63] her. Anlass hierfür waren Vermutungen über die Existenz von Second Sound in Festkörpern, die sich ergaben, nachdem man das Phänomen auf das Vorhandensein von Phononengas zurückgeführt hatte; sie wurden einige Jahre später experimentell bestätigt. Mit der Modellvorstellung, dass sich Phononen, also die Elementaranregungen der Gitterschwingungen, wie Teilchen eines idealen Gases verhalten, schloss sich der Kreis gewissermaßen, da Cattaneo und Vernotte ihr Gesetz ursprünglich nur auf ideale Gase bezogen hatten.

Das Interesse an einer tiefergehenden Erforschung der Wärmeausbreitung war damit endgültig geweckt. In den weiteren Jahren wurde eine Vielzahl von Modellen entwickelt, die theoretische Erklärungsansätze für experimentell beobachtete Phänomene boten, dabei aber stets selbst weitere Fragen, Unzulänglichkeiten und Vermutungen aufwarfen, die wiederum nach experimentellen Untersuchungen verlangten. Zur historischen Entwicklung der Theorie der Wärmewellen und für einen Überblick über bestehende Modelle sei auf [JP89] und [Str11] verwiesen. Im Folgenden greifen wir die Phase-Lag-Modelle heraus, die den Ausgangspunkt unserer mathematischen Betrachtungen bilden werden.

1.3 Dual-Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung

Aus mikroskopischer Sicht beruht der Transport von Wärme darauf, dass Energieträger (Elektronen, Phononen), die wir uns als winzige Teilchen vorstellen, miteinander kollidieren. Zwischen den einzelnen Kollisionen müssen die Energieträger eine gewisse Strecke, gemittelt in Form einer mittleren freien Weglänge d, zurücklegen, und benötigen dafür eine gewisse Zeit, die mittlere freie Flugzeit τ, auch Relaxationszeit genannt. Die Größenordnungen belaufen sich auf einen Bereich zwischen Nano- und Mikrometer (etwa $10^{-8}\,\mathrm{m}$ - $10^{-7}\,\mathrm{m}$) für d und auf einen Bereich von Pikosekunden ($10^{-12}\,\mathrm{s}$) für τ, wenn man die Geschwindigkeit $\frac{d}{\tau}$ der Energieträger um etwa $10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bis $10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ansetzt (siehe [Tzo97, S. 4]).

Solche Längen und Zeiten können alsdann nicht mehr vernachlässigt werden, wenn es um den Energietransport in Bezug auf extrem dünne Materialschichten oder hinsichtlich einer sehr kurzen Zeitdauer geht. Die technische Realisierung zu Letzterem bilden Ultrakurzpulslaser, mit denen Laserpulse von einer Dauer im Bereich von Piko- und sogar Femtosekunden erzeugt werden können. Sie kommen bei industriellen Präzisionsarbeiten in der Materialbearbeitung (präzises Schneiden, Bohren, Gravieren) und in der Medizintechnik (Augenoperationen) zum Einsatz. Ist die Einwirkungszeit des Laserpulses kürzer als die Relaxationszeit, so verdampft das angetroffene Material, ohne dabei Wärme an umliegendes Material abgegeben zu haben, was den enormen Vorteil der Ultrakurzpulslaser ausmacht. Auf diese Weise kann beispielsweise Gewebe gezielt durchtrennt werden, ohne das angrenzende Gewebe zu schädigen.

Es stellt sich die Frage nach einer mathematischen Modellierung, die die Wärmeübertragung bei solchen Vorgängen beschreibt und auftretenden mikrostrukturellen Effekten standhält. Um 1990 setzte D. Y. Tzou (siehe [Tzo97]) die der mikroskopischen Sichtweise entspringende Relaxationszeit τ in einen Bezug zum makroskopischen Fourierschen Gesetz (1.1), indem er dieses zu einer Delay-Gleichung, dem Single-Phase-Lag-Modell

$$q(t+\tau, x) = -\kappa \nabla \theta(t, x)$$

abwandelte. Hierin wird der Temperaturgradient als die Ursache und der Wärmestrom als die Wirkung verstanden. 1995 erweiterte Tzou in [Tzo95a] seine Theorie hin zum Dual-Phase-Lag-Modell

$$q(t+\tau_q, x) = -\kappa \nabla \theta(t+\tau_\theta, x) \tag{1.4}$$

mit zwei positiven Relaxationsparametern τ_q und τ_θ. Dieses lässt, nämlich für $\tau_\theta > \tau_q$, auch die umgekehrte Interpretation zu, also den Wärmestrom als die Ursache und den Temperaturgradienten als die Wirkung. Zum Fall $\tau_q > \tau_\theta$ sei erwähnt, dass ein mathematisch zunächst denkbarer Zeitshift $t^* = t + \tau_\theta$, der das Dual-Phase-Lag-Modell auf das Single-Phase-Lag-Modell zurückführen würde, hinsichtlich des weiteren Vorgehens problematisch ist (vergleiche dazu [Tzo95a, Appendix; Tzo97, S. 57]).

Um die Phase-Lag-Modelle mit der Energiebilanz (1.2) kombinieren zu können, nahm Tzou formale Taylorapproximationen vor. Für das Single-Phase-Lag-Modell führt eine solche der Ordnung eins gerade auf das Wärmeleitungsgesetz von Cattaneo (1.3). Generell können beliebige Entwicklungsordnungen betrachtet werden. Mit der Ordnung $m_q \in \mathbb{N}$ für den Wärmestrom und der Ordnung $m_\theta \in \mathbb{N}$ für den Temperaturgradienten ergibt sich so aus (1.4) das folgende Dual-Phase-Lag-Modell, welches wir mit DPL (m_q, m_θ) bezeichnen:

$$\underline{\mathrm{DPL}\,(m_q,m_\theta)}$$

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) = -\kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla\theta(t,x)\,. \tag{1.5}$$

Zusammen mit der Energiebilanz (1.2) bildet (1.5) das Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (m_q,m_θ) der Wärmeleitung

$$\underline{\mathrm{DPLW}\,(m_q,m_\theta)}$$

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) + \kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla\theta(t,x) = 0\,, \tag{1.6 a}$$

$$\varrho c_v \theta_t(t,x) + \operatorname{div} q(t,x) = \eta(t,x)\,. \tag{1.6 b}$$

In derselben Weise, in der man die klassische Wärmeleitungsgleichung aus dem Fourierschen Gesetz und der Energiebilanz erhält, kann man auch hier die beiden Gleichungen des Modells in einer einzigen Gleichung für die Temperatur zusammenfassen, indem man die Divergenz auf (1.6 a) anwendet und den Term $\operatorname{div} q$ sowie seine auftretenden zeitlichen Ableitungen mithilfe von (1.6 b) ausdrückt:

$$\underline{\mathrm{DPLW}\,(m_q,m_\theta)}$$

$$\varrho c_v \sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^{j+1}}{\partial t^{j+1}} \theta(t,x) - \kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \Delta\theta(t,x) = \sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \eta(t,x)\,. \tag{1.7}$$

Das spezielle Modell DPLW (1,1) entspricht dabei in der Form dem Wärmeleitungsmodell von Jeffrey (siehe [JP89; Tzo95b]).

Im Folgenden werden fünf Anwendungsbereiche für die Dual-Phase-Lag-Modelle vorgestellt. Die ersten vier gehen auf Tzou [Tzo95b; Tzo97] zurück, der damit die Anwendbarkeit des von ihm entwickelten Modells unterstrich. Das fünfte Beispiel stammt aus der Biologie, die das Phase-Lag-Konzept aufgriff.

▸ Metallbearbeitung durch Ultrakurzpulslaser: Ausgangspunkt ist das Two-Step-Modell, das auf der Vorstellung basiert, dass sich durch das Auftreffen eines Laserpulses in einem ersten Schritt die Temperatur θ_E des Elektronengases und daraufhin im zweiten Schritt die Temperatur des Metallgitters θ_M erhöht. Die mathematische Beschreibung erfolgt in Form zweier gekoppelter Differentialgleichungen für die beiden Temperaturen. Unter vereinfachten Annahmen kann man daraus ableiten, dass sowohl θ_E als auch θ_M die Differentialgleichung

$$(c_E + c_M)\theta_t(t,x) + \frac{c_E c_M}{g}\theta_{tt}(t,x) = \kappa\Delta\theta(t,x) + \kappa\frac{c_M}{g}\Delta\theta_t(t,x)$$

erfüllen, wobei c_E für die Wärmespeicherzahl $[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{K}}]$ des Elektronengases und c_M für diejenige des Metallgitters steht, g die Elektron-Phonon-Kopplungskonstante $[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{K}}]$ ist und κ die Wärmeleitfähigkeit $[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}]$ bezeichnet. Die Gleichung entspricht gerade dem Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (1,1) in der Form (1.7), wenn man $\varrho c_v = c_E + c_M$ und die Relaxationsparameter als

$$\tau_q = \frac{c_E c_M}{g(c_E + c_M)} \quad \text{und} \quad \tau_\theta = \frac{c_M}{g}$$

interpretiert (siehe [Tzo95a; Tzo95b; Tzo97, 5.4]). Ein ähnlicher Zusammenhang besteht nach [Tzo97, 10.1] zwischen dem Modell DPLW (2,1) und dem hyperbolischen Two-Step-Modell. Aus experimentellen Werten für c_E, c_M und g berechnete Tzou für Blei, Kupfer, Silber und Gold explizite Zahlen für die Relaxationsparameter τ_q und τ_θ (siehe [Tzo95a; Tzo97, S. 123, S. 279]).

▸ Second-Sound-Effekt in Helium II: Experimente um 1970 ließen den Second-Sound-Effekt bei Anregung von Helium II durch einen Wärmepuls als Graph auf dem Oszilloskop sichtbar werden. Neben der Tatsache, dass die Temperaturänderung innerhalb des Suprafluids verzögert abläuft, stellte man eine glockenförmige Gestalt der Temperaturwelle fest. Tzou verglich den experimentell erhaltenen Graphen mit Temperaturkurven, die sich aus der klassischen Wärmeleitungsgleichung ($\tau_q = \tau_\theta = 0$), dem Gesetz von Cattaneo ($\tau_\theta = 0$) und dem Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (1,1) bei Vorgabe eines Rechteckpulses ergeben. Es zeigte sich, dass das Gesetz von Cattaneo im Gegensatz zur klassischen Wärmeleitungsgleichung immerhin die Verzögerung modelliert, jedoch in Bezug auf die Gestalt die rechteckige Wellenform überdauert. Mit dem DPLW (1,1) Modell dagegen erreichte Tzou sowohl eine Erfassung der Verzögerungszeit durch den Parameter τ_q als auch eine glättende Wirkung hin zu einer glockenförmigen Kurve, die er dem neuen Parameter τ_θ zuschrieb (siehe [Tzo95b; Tzo97, 4.2-4.4]).

▸ Wärmeausbreitung in porösem Medium: In einem porösen Stoff wird Wärme nicht nur über den Feststoff, sondern auch durch die mit Luft gefüllten Hohlräume, also über eine gasförmige Phase hinweg ausgetauscht. Dabei besitzt der Feststoff in der Regel eine sehr viel höhere Wärmeleitfähigkeit als die Luft, sodass der Wärmeaustausch dort deutlich schneller vonstattengeht als über den Zwischenraum hinweg. Nachdem die Wärmeleitungsgesetze von Fourier und Cattaneo keine zufriedenstellende Beschreibung für Beobachtungen aus experimentellen Versuchen mit aufgeschüttetem Sand lieferten, übertrug Tzou das Two-Step-Modell aus dem ersten Anwendungsbeispiel und ersetzte darin die Temperatur des Elektonengases durch diejenige des im porösen Medium eingeschlossenen Gases (Luft) und die Temperatur des Metallgitters durch diejenige des Feststoffs (siehe [Tzo97, 6.4]).

▸ Wärmeausbreitung in amorphen Materialien: Amorphe Materialien sind Feststoffe, die im Gegensatz zu Kristallen keinerlei geordnete Struktur aufweisen. Beispielsweise können Metalle, Silizium, Siliziumdioxid (Glas) oder Kunststoffe in einem amorphen Zustand vorliegen. Durch die unregelmäßige Anordnung von Löchern und Zusammenballungen kann die Wärmeausbreitung keinem kontinuierlich ablaufenden Prozess folgen, sodass sowohl makroskopische als auch mikroskopische Modelle, die ein periodisches Gitter voraussetzen, unzulänglich erscheinen. Man kann der Diskontinuität des Gebietes mit Hilfsmitteln aus der fraktalen Geometrie begegnen. Eine Alternative dazu bietet das Dual-Phase-Lag-Konzept, indem man einen Bereich des amorphen Materials von ausreichend struktureller Vielfalt herausgreift und statt der Unstetigkeiten bezüglich des Orts die dadurch bedingte zeitlich verzögerte Ausbreitung modelliert (siehe [Tzo97, 7.4]).

▸ Wärmeübertragung der Haut: Aus biologischer Sicht ist die Wärmeübertragung von lebendem Gewebe und in Bezug auf Laser-Operationen besonders die der Haut von Interesse. Anders als bei den bisherigen Beispielen handelt es sich hierbei um eine höchst inhomogene Substanz, bestehend aus unterschiedlichen Schichten, die sich wiederum aus Zellen mit flüssigen und festen Anteilen zusammensetzen. Dass dadurch die Reaktion auf eine Wärmeeinwirkung verzögert eintritt, erscheint schlüssig, doch noch fehlt ein genaues Verständnis der biologischen Vorgänge und die bislang wenigen experimentellen Ergebnisse zu Verzögerungszeiten scheinen umstritten zu sein. Jedenfalls wird die Verzögerungszeit für biologisches Gewebe gegenüber derjenigen von Metallen deutlich darüber und durchaus im Sekundenbereich angesiedelt. Dies macht die nicht-Fourierschen Wärmeleitungsmodelle, darunter speziell auch das Dual-Phase-Lag-Modell, für die Biologie besonders interessant. Man siehe dazu [XSL08; XLS08] und unter dem Stichwort „*dual-phase-lag bio-heat transfer*“ finden sich eine Reihe von Arbeiten, die das Dual-Phase-Lag-Modell in den Kontext von Hautverbrennungen, Tumorbehandlungen und Lasertherapien rücken, beispielsweise [LC09; NS13; Sah14; Uda14].

1.4 Three-Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung

Nachdem das auf dem Fourierschen Gesetz basierende Dual-Phase-Lag-Modell (1.4) keine Möglichkeit bietet, um einen dritten zeitlichen Verzögerungsparameter einzuführen, muss dem Three-Phase-Lag-Modell ein anderer Ausgangspunkt zugrunde liegen.

Bekanntlich beschreibt das Integral $\int_{t_0}^{t} v(s,x)\,\mathrm{d}s$ über ein zeit- und ortsabhängiges Geschwindigkeitsfeld v den zwischen den Zeitpunkten t_0 und t zurückgelegten Weg, also eine räumliche Verschiebung. In Anlehnung daran und unter der Vorstellung, dass die Temperatur mit der Geschwindigkeit von Teilchen verknüpft ist, definierten Albert E. Green (1912-1999) und Paul M. Naghdi (1924-1994) in [GN91] die thermische Verschiebung zu einer Temperatur θ und einem Anfangswert ν_0 als

$$\nu(t,x) := \int_{t_0}^{t} \theta(s,x)\,\mathrm{d}s + \nu_0(x)\,.$$

Entgegen dem üblichen Ansatz einer Energiebilanz gingen sie von einer Entropiebilanz aus und entwickelten unter anderem das als Typ III bezeichnete Wärmeleitungsmodell

$$q(t,x) = -\kappa\nabla\theta(t,x) - \kappa^*\nabla\nu(t,x)\,.$$

Die neu auftretende Konstante κ^* wurde in [Bar13] als eine Materialkonstante der Einheit $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}$ identifiziert. Im Zusammenhang mit der Modellierung des Second-Sound-Phänomens wird der Vorschlag genannt, κ^* aus der experimentell gemessenen Ausbreitungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}$ zu berechnen.

S. K. Roy Choudhuri verband in [Roy07] das Typ-III-Modell von Green und Naghdi mit der Idee von Tzou und gelangte auf diese Weise zum Three-Phase-Lag-Modell

$$q(t+\tau_q,x) = -\kappa\nabla\theta(t+\tau_\theta,x) - \kappa^*\nabla\nu(t+\tau_\nu,x) \tag{1.8}$$

mit einem dritten Verzögerungsparameter $\tau_\nu > 0$ für die thermische Verschiebung. Als formale Taylorapproximation nannte Roy Choudhuri eine Entwicklung erster oder zweiter Ordnung für q zusammen mit einer Entwicklung erster Ordnung für sowohl $\nabla\theta$ als auch $\nabla\nu$. Allgemeiner können wir Entwicklungen der Ordnung $m_q \in \mathbb{N}$ für die Wärmestromdichte, $m_\theta \in \mathbb{N}$ für die Temperatur und $m_\nu \in \mathbb{N}$ für die thermische Verschiebung betrachten und das Three-Phase-Lag-Modell TPL (m_q,m_θ,m_ν) formulieren:

$$\underline{\text{TPL}\,(m_q,m_\theta,m_\nu)}$$

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) = -\kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\nabla\theta(t,x) - \kappa^* \sum_{j=0}^{m_\nu} \frac{\tau_\nu^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\nabla\nu(t,x)\,, \tag{1.9 a}$$

$$\nu_t(t,x) = \theta(t,x)\,. \tag{1.9 b}$$

Kombiniert mit der Energiebilanz (1.2) entsteht das Three-Phase-Lag-Modell TPLW (m_q,m_θ,m_ν) der Wärmeleitung

$$\underline{\text{TPLW}\,(m_q,m_\theta,m_\nu)}$$

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) + \kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\nabla\theta(t,x) + \kappa^* \sum_{j=0}^{m_\nu} \frac{\tau_\nu^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\nabla\nu(t,x) = 0\,, \tag{1.10 a}$$

$$\varrho c_v \theta_t(t,x) + \operatorname{div} q(t,x) = \eta(t,x)\,, \tag{1.10 b}$$

$$\nu_t(t,x) = \theta(t,x)\,. \tag{1.10 c}$$

Wenn man (1.10 a) nach der Zeit ableitet und den Divergenz-Operator anwendet, lässt sich das System auf eine Differentialgleichung für θ reduzieren:

$$\varrho c_v \sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^{j+2}}{\partial t^{j+2}} \theta(t,x) - \sum_{j=0}^{m} \tau_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \Delta\theta(t,x) = \sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^{j+1}}{\partial t^{j+1}} \eta(t,x)\,. \tag{1.11}$$

Hierbei sind $m := \max\{m_\theta + 1, m_\nu\}$, $\tau_0 := \kappa^*$ und die Koeffizienten τ_j für $j \in \{1, \ldots, m\}$ wie folgt gegeben: Im Fall $m_\nu \leq m_\theta + 1$ ist $\tau_j := \frac{\tau_\theta^{j-1}}{(j-1)!}\kappa + \frac{\tau_\nu^j}{j!}\kappa^*$ für $1 \leq j \leq m_\nu$, und $\tau_j := \frac{\tau_\theta^{j-1}}{(j-1)!}\kappa$ für $m_\nu + 1 \leq j \leq m_\theta + 1$, sofern $m_\nu \leq m_\theta$ gilt. Wenn $m_\nu > m_\theta + 1$ ist, setzt man $\tau_j := \frac{\tau_\theta^{j-1}}{(j-1)!}\kappa + \frac{\tau_\nu^j}{j!}\kappa^*$ für $1 \leq j \leq m_\theta + 1$ und $\tau_j := \frac{\tau_\nu^j}{j!}\kappa^*$ für $m_\theta + 2 \leq j \leq m_\nu$. Im Übrigen übernehmen wir von Roy Choudhuri die Notation

$$\tau_\nu^* := \kappa + \kappa^* \tau_\nu\,.$$

Was die Modellierung betrifft, bleiben für das Three-Phase-Lag-Modell gegenüber dem Dual-Phase-Lag-Modell einige Fragen offen. Roy Choudhuri führte in [Roy07] keine physikalischen Begründungen für das Modell an, weder gab er eine mögliche Interpretation für den neuen Phase-Lag-Parameter τ_ν noch nannte er Anwendungsgebiete. Es erfolgte lediglich eine Verknüpfung des Modells hin zu einem thermoelastischen System.

1.5 Phase-Lag-Modelle der Thermoelastizität

Die Dual- und Three-Phase-Lag-Modelle können auch zur Beschreibung der Wärmeübertragung innerhalb von thermoelastischen Vorgängen herangezogen werden. Dazu stellen wir zunächst die beiden Grundgleichungen der linearen Thermoelastizität vor.

Wir betrachten einen homogenen, isotropen Festkörper, der eine spannungsfreie Referenzkonfiguration mit konstanter Temperaturverteilung besitzt. In dieser Referenzkonfiguration nimmt der Körper ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für $n \in \{1, 2, 3\}$ ein, wobei gemäß der Kontinuumsmechanik jeder Materialpunkt des Festkörpers einem Element $x \in \Omega$ bijektiv zugeordnet ist. Unabhängig vom Ort herrscht eine absolute Temperatur $T_0 > 0$, die sogenannte Referenztemperatur, vor. Unter dieser Temperatur werden alle als zeitlich konstant angenommenen Materialeigenschaften wie beispielsweise die Dichte oder die spezifische Wärmeleitfähigkeit bestimmt. Da der Körper als homogen und isotrop angesehen wird, sind alle Materialeigenschaften unabhängig von Ort und Richtung.

Die Deformation des Körpers wird mithilfe einer Abbildung $u : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ beschrieben, die die Abweichung von der Referenzkonfiguration angibt, und zwar in der Form, dass sich der mit $x \in \Omega$ assoziierte Materialpunkt zum Zeitpunkt t am Ort $x + u(t,x)$ befindet, d. h. $u(t,x)$ bezeichnet den Vektor, in dessen Richtung und um dessen Länge der Materialpunkt zum Zeitpunkt t gegenüber seiner Lage in der Referenzkonfiguration verschoben ist. Für die $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion $u(t,\cdot)$ sind $\nabla u(t,\cdot)$ und $\Delta u(t,\cdot)$ für $n > 1$ komponentenweise definiert, also zum Beispiel für $n = 3$

$$\Delta u(t,\cdot) := \begin{pmatrix} \Delta u_1(t,\cdot) \\ \Delta u_2(t,\cdot) \\ \Delta u_3(t,\cdot) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla u(t,\cdot) := \begin{pmatrix} \partial_1 u_1(t,\cdot) & \partial_1 u_2(t,\cdot) & \partial_1 u_3(t,\cdot) \\ \partial_2 u_1(t,\cdot) & \partial_2 u_2(t,\cdot) & \partial_2 u_3(t,\cdot) \\ \partial_3 u_1(t,\cdot) & \partial_3 u_2(t,\cdot) & \partial_3 u_3(t,\cdot) \end{pmatrix}.$$

Der Verzerrungstensor, der in linearisierter Form $E(t,x) := \frac{1}{2}(\nabla u(t,x) + (\nabla u(t,x))^\mathsf{T})$ lautet, beschreibt anschaulich gesprochen, wie sehr der Körper im Bereich des zu x gehörigen Materialpunktes gestaucht, gedehnt oder gedreht ist. Solche Verzerrungen des Körpers wirken sich auf die

Spannungen im Material aus. Ausgedrückt wird dies durch einen Tensor vierter Stufe, den sogenannten Elastizitätstensor C, der den Verzerrungstensor auf den Spannungstensor, einen Tensor zweiter Stufe, dessen Einträge der Einheit $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ eine Kraft pro Fläche der Referenzkonfiguration beschreiben, abbildet. Durch die angenommene Isotropie des Festkörpers erhält die Abbildung eine vergleichsweise einfache Gestalt, nämlich $C(E(t,x)) = 2\mu E(t,x) + \lambda(\operatorname{spur} E(t,x))\mathrm{Id}$, wobei λ und μ in der Einheit $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ die erste und zweite Lamé-Konstante mit $\mu > 0$ und $2\mu + n\lambda > 0$ bezeichnen.

Die gesamten Spannungen im Material werden im ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $S(t,x)$ zusammengefasst. Während in der reinen Elastizitätstheorie die Beziehung $S(t,x) = C(E(t,x))$ zugrunde gelegt wird, geht man bei der Thermoelastizität davon aus, dass nicht nur Verzerrungen, sondern auch Temperaturänderungen zu Spannungen im Material führen. Deshalb wird die Gleichung um einen temperaturabhängigen Beitrag $\gamma(T(t,x) - T_0)\mathrm{Id}$ ergänzt:

$$S(t,x) = C(E(t,x)) + \gamma(T(t,x) - T_0)\mathrm{Id} = 2\mu E(t,x) + \lambda(\operatorname{spur} E(t,x))\mathrm{Id} + \gamma(T(t,x) - T_0)\mathrm{Id}\,.$$

Hierbei steht T (zur momentanen Unterscheidung von θ) für die absolute Temperatur und die Konstante ist $\gamma := \alpha(3\lambda + 2\mu)$ mit dem in $\frac{1}{\mathrm{K}}$ angegebenen Wärmeausdehnungskoeffizienten α.

Den Kern jedes physikalischen Modells bilden gewisse Bilanzgleichungen. Für die Thermoelastizität ist dies zum einen die Kräftebilanz

$$\varrho u_{tt}(t,x) - \operatorname{div} S(t,x) = f(t,x)\,,$$

wobei f eine vorgegebene Volumenkraftdichte ist, also eine pro Volumen der Referenzkonfiguration in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}$ angegebene Volumenkraft, die (im Gegensatz zu Oberflächenkräften) auf das Innere des Körpers wirkt. Zum anderen hat man eine Energiebilanz wie in (1.2), die hier jedoch um den linearisierten Term $\gamma T_0(\operatorname{spur} E_t)$ erweitert ist:

$$\varrho c_v T_t(t,x) = -\operatorname{div} q(t,x) + \gamma T_0\big(\operatorname{spur} E_t(t,x)\big) + \eta(t,x)\,.$$

Üblicherweise wird nun anstatt der absoluten Temperatur T die Temperaturdifferenz

$$\theta(t,x) := T(t,x) - T_0$$

betrachtet. Diese trägt weiterhin die Einheit Kelvin, kann aber im Gegensatz zu T auch negative Werte annehmen. Da T_0 eine Konstante ist, stimmen die Orts- und Zeitableitungen beider Funktionen überein. Nutzt man die Darstellung von S und die Definition von E, so ergeben sich aus den genannten Zusammenhängen die gekoppelten Gleichungen

$$\varrho u_{tt}(t,x) - \mu\Delta u(t,x) - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u(t,x) + \gamma\nabla\theta(t,x) = f(t,x)\,, \tag{1.12 a}$$

$$\varrho c_v \theta_t(t,x) + \operatorname{div} q(t,x) + \gamma T_0 \operatorname{div} u_t(t,x) = \eta(t,x) \tag{1.12 b}$$

als Beschreibung des thermoelastischen Systems. Für eine ausführliche Herleitung der Gleichungen verweisen wir auf den Buchbeitrag „Linear thermoelasticity“ von D. E. Carlson. Die genannten Gleichungen für den linearisierten, homogenen, isotropen Fall finden sich darin unter [Car84, S. 311, (8.2)]. Man beachte, dass Carlson den Begriff „*heat flux*“ wie auch die auftretenden Kraft-, Energie- und Entropiegrößen pro Volumeneinheit versteht (vergleiche [Car84, S. 300 f.]). In unseren Bezeichnungen haben wir dafür stets den Zusatz „-dichte“ gewählt, wie zum Beispiel Wärmestromdichte. Bei dem von Carlson als „*specific heat*“ bezeichneten Faktor muss es sich um die volumetrische Wärmekapazität, also dem Produkt ϱc_v aus der spezifischen Wärmekapazität und

der Dichte handeln, wie die Definition [Car84, S. 310, (7.22)] oder ein Blick auf die physikalischen Einheiten in der Gleichung (1.12 b) zeigen.

Das thermoelastische Modell beruht auf zwei wesentlichen Annahmen. Zum einen wird prinzipiell die Umkehrbarkeit der Abbildung $x \mapsto x + u(t,x)$, also insbesondere $\det(\mathrm{Id} + \nabla u(t,x)) \neq 0$ vorausgesetzt (siehe [Car84, S. 299]). Zum anderen liegen den vorgenommenen Linearisierungen die Annahmen zugrunde, dass $|\nabla u(t,x)|$, $|\nabla u_t(t,x)|$, $|T(t,x) - T_0|$, $|T_t(t,x)|$ und $|\nabla T(t,x)|$ jeweils hinreichend klein sind (siehe [Car84, S. 308, (7.5)]). Bei mathematischen Untersuchungen des Modells (1.12) finden diese Einschränkungen in der Regel keine Beachtung mehr. So werden beispielsweise beliebige Anfangsdaten, also auch „große“ oder solche mit $\det(\mathrm{Id} + \nabla u(0,x)) = 0$ betrachtet.

Zur Vollständigkeit des thermoelastischen Systems fehlt schließlich noch eine Beschreibung der Wärmeausbreitung. Ergänzt man (1.12) um das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz (1.1), so erhält man die klassischen linearen Thermoelastizitätsgleichungen wie in [Car84, S. 328]. Die Thermoelastizität mit Second Sound, in der stattdessen das Gesetz von Cattaneo (1.3) herangezogen wird, geht zurück auf Arbeiten von H. W. Lord und Y. Shulman sowie E. B. Popov aus dem Jahr 1967. Seitdem wurden eine Reihe verallgemeinerter Thermoelastizitätsmodelle entwickelt (siehe [Cha98; Str11]). Die Kombination des thermoelastischen Systems (1.12) mit den Phase-Lag-Modellen (1.5) oder (1.9) führt auf das Dual-Phase-Lag-Modell DPLT (m_q, m_θ) der Thermoelastizität

$$\underline{\mathrm{DPLT}\,(m_q, m_\theta)}$$

$$\varrho u_{tt}(t,x) - \mu \Delta u(t,x) - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u(t,x) + \gamma \nabla \theta(t,x) = f(t,x)\,, \tag{1.13 a}$$

$$\varrho c_v \theta_t(t,x) + \operatorname{div} q(t,x) + \gamma T_0 \operatorname{div} u_t(t,x) = \eta(t,x)\,, \tag{1.13 b}$$

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) + \kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla \theta(t,x) = 0\,, \tag{1.13 c}$$

oder auf das Three-Phase-Lag-Modell TPLT (m_q, m_θ, m_ν) der Thermoelastizität

$$\underline{\mathrm{TPLT}\,(m_q, m_\theta, m_\nu)}$$

$$\varrho u_{tt}(t,x) - \mu \Delta u(t,x) - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u(t,x) + \gamma \nabla \theta(t,x) = f(t,x)\,, \tag{1.14 a}$$

$$\varrho c_v \theta_t(t,x) + \operatorname{div} q(t,x) + \gamma T_0 \operatorname{div} u_t(t,x) = \eta(t,x)\,, \tag{1.14 b}$$

$$\sum_{j=0}^{m_q} \frac{\tau_q^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} q(t,x) + \kappa \sum_{j=0}^{m_\theta} \frac{\tau_\theta^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla \theta(t,x) + \kappa^* \sum_{j=0}^{m_\nu} \frac{\tau_\nu^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \nabla \nu(t,x) = 0\,, \tag{1.14 c}$$

$$\nu_t(t,x) = \theta(t,x)\,. \tag{1.14 d}$$

Den Thermoelastizitätsgleichungen liegt eine Referenztemperatur T_0 zugrunde. Zur Verdeutlichung haben wir bei der Herleitung der Gleichungen zwischen der absoluten Temperatur T und der Temperaturdifferenz $\theta = T - T_0$ unterschieden, wobei letztere bei der Beschreibung des Piola-Kirchhoff-Spannungstensors einging. In den schlussendlich erhaltenen Differentialgleichungen (1.12) spiegelt sich der Bedeutungsunterschied nicht mehr wider, da darin lediglich Ableitungen von θ auftreten und die Funktionen θ und T nur um die Konstante T_0 voneinander abweichen. Bei den reinen Wärmeleitungsmodellen wird die von uns mit θ bezeichnete Funktion meist als die absolute Temperatur T angesehen, aber auch dort spielt die Unterscheidung innerhalb der Differentialgleichungen keine Rolle. Lediglich für das Three-Phase-Lag-Modell wäre die Definition der thermischen Verschiebung anzupassen. Ins Gewicht fällt die Bedeutung von θ erst, wenn die Differentialgleichungen mit Anfangs- und Randwerten versehen werden. Negative Werte oder Nullwerte für θ erscheinen nur dann sinnvoll, wenn θ eine Temperaturdifferenz beschreibt.

1.6 Sind die Modelle paradox?

Kurioserweise schienen Cattaneo und Vernotte zufrieden zu sein, nachdem sie das Paradoxon der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit beseitigt hatten. Vernotte gab seiner Antwort auf Cattaneos Feststellung seines Zuvorkommens mit der Aufstellung der Gleichung sogar die Überschrift „*La véritable équation de la chaleur*“ [Ver58a]. Weder wunderten sie sich über den implizierten Wellencharakter der Wärmeausbreitung (dieser war aufgrund des zu diesem Zeitpunkt schon bekannten Second-Sound-Effekts zwar nicht abwegig, jedoch nahmen beide keinen Bezug auf dieses Phänomen), noch darüber, dass sie neue „Paradoxa“ geschaffen hatten, die der Hyperbolizität der Gleichung zuzuschreiben sind. Ein Beispiel hierfür ist das Overshooting-Phänomen (siehe [Tai72]). Darunter versteht man, dass im Inneren des Gebietes ohne Vorhandensein von Wärmequellen höhere Temperaturen erzielt werden können als die, die am Rand des Gebietes vorliegen, was mathematisch einem verletzten Maximumprinzip gleichkommt. Genauso wie Cattaneo und Vernotte das Fouriersche Gesetz als paradox einstuften, könnte man nun also ihre – und in Vernottes Worten die „wahre“ – Wärmeleitungsgleichung mit der Begründung der Paradoxität verwerfen.

Denkbar ist aber auch, dass das Overshooting-Phänomen möglicherweise auf mikrostruktureller Ebene auftritt und bislang lediglich eine experimentelle Bestätigung fehlt. Nach Tzou [Tzo97, 4.5] kann das Dual-Phase-Lag-Modell zu einer weiteren Erforschung des Phänomens beitragen, da dieses Modell mikrostrukturelle Effekte berücksichtigt. Aufgegriffen wurde dies in Arbeiten wie [JC98; Xu11], die für eine ausstehende experimentelle Rekonstruktion des Phänomens Vorhersagen bezüglich des anfänglichen Temperaturgradientens oder der benötigten Materialdicke trafen. Weitere auffällige Effekte des Dual-Phase-Lag-Modells DPLW (1,1) wurden auch in [SZ08] diskutiert.

Ein anderes fragwürdiges Phänomen ist die Nichterhaltung der Positivität, die in [KB98] für das Gesetz von Cattaneo und in [Ruk14] für das Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (1,1) festgestellt wurde. Gemeint ist, dass die Lösung θ unter einer positivwertigen Wärmequelle negative Werte annehmen kann. Wenn θ eine Temperaturdifferenz beschreibt, heißt dies, dass das System auf eine Wärmezufuhr hin zumindest kurzzeitig mit einer Abkühlung reagiert. Steht θ dagegen für die absolute Temperatur auf der Kelvin-Skala, so entspricht ein negativer Wert einer Temperatur unterhalb des absoluten Nullpunkts. Beide Möglichkeiten erscheinen paradox, aber selbst hier sollte man keine voreiligen Schlüsse ziehen. So zeigen Forschungsergebnisse in [Bra13], dass Zustände einer negativen absoluten Temperatur erreichbar und dabei „heißer“ als solche positiver Temperatur sind, d. h. ein System negativer Temperatur würde Wärme an ein System positiver Temperatur abgeben.

Wir wollen daher im Auge behalten, dass es sich bei dem Gesetz von Fourier ebenso wie bei dem von Cattaneo, und auch bei allen anderen mathematischen Beschreibungen der Wärmeleitung stets um Modelle handelt, die jeweils Vor- und Nachteile mit sich bringen und physikalische Begebenheiten je nach Situation und Rahmenbedingungen mehr oder weniger gut beschreiben. Scheinbare Paradoxa lassen sich häufig auf idealisierte Annahmen im Modell zurückführen. Manche Wissenschaftler treten daher allzu harschen Kritikern des Fourierschen Gesetzes entgegen. Beispielsweise wurde in [Fic92] auf eine wohlüberlegte Sichtweise auf das Fouriersche Gesetz seitens Maxwell hingewiesen und mit plausiblen Argumenten dargelegt, wie die klassische Wärmeleitungsgleichung aufzufassen ist und in diesem Verständnis eben keine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit impliziert. Auch ist es denkbar, dass sich widersprüchlich erscheinende Phänomene mit der voranschreitenden experimentellen Forschung und immer neuen technischen Möglichkeiten zukünftig belegen und erklären lassen.

1.7 Mathematische Untersuchungen zu den Phase-Lag-Modellen

Neben physikalischen Überlegungen und experimentellen Beobachtungen, die Argumente für oder gegen ein Modell liefern, kann die Mathematik klären, inwieweit die Modelle überhaupt zu mathematisch sinnvollen Systemen führen und welche Eigenschaften von Lösungen zu erwarten sind. Zentrale Fragestellungen sind solche nach der Wohlgestelltheit, Stabilität und Asymptotik.

Bei den Phase-Lag-Modellen steht besonders die Frage nach der Bedeutung der Verzögerungsparameter τ_q, τ_θ und τ_ν im Raum. In konkreten Situationen gelangte Tzou für das Dual-Phase-Lag-Modell zwar zu einer Interpretation für die Parameter τ_q und τ_θ und nannte sogar explizite Werte (siehe Abschnitt 1.3 sowie [Tzo95a; Tzo97]), jedoch beruhten diese auf einem Modellvergleich und einer Berechnung, und nicht auf experimentell ermittelten Werten, wie auch Tzou selbst in [Tzo97, S. 59] hervorhob. Für den Parameter τ_ν im Three-Phase-Lag-Modell fehlt jeglicher Erklärungsansatz und auch die Bedeutung der Materialkonstante κ^* scheint bis auf den in Abschnitt 1.4 erwähnten Vorschlag aus [Bar13] ungeklärt. Umso interessanter ist es, dass hier von mathematischer Seite aus Einschränkungen an die Parameter τ_q, τ_θ und $\tau_\nu^* = \kappa + \kappa^* \tau_\nu$ festzustellen sind.

Im Folgenden sind für einen kurzen Überblick einige bisher in der Literatur vorhandene Resultate zu den Dual- und Three-Phase-Lag-Modellen der Wärmeleitung und Thermoelastizität aufgelistet, die in den Bereich der Wohlgestelltheit, Stabilität und Asymptotik fallen.

▸ Nicht-Wohlgestelltheit

Die Dual- und Three-Phase-Lag-Modelle entstehen durch formale Taylorentwicklungen aus den Delay-Gleichungen (1.4) und (1.8). Untersuchungen in [DQR09] zeigten, dass die Delay-Gleichungen selbst nicht zu wohlgestellten Problemen führen und auch die resultierenden Systeme bei zu großer Diskrepanz der Entwicklungsordnung, konkret die Modelle DPLW (m_q,m_θ) aus (1.7) für $m_q \geq m_\theta + 2$ und TPLW (m_q,m_θ,m_ν) aus (1.11) für $m_q \geq \max\{m_\theta + 1, m_\nu\} + 1$, nicht wohlgestellt sind.

▸ Dual-Phase-Lag-Wärmeleitung: Wohlgestelltheit und zeitliche Asymptotik

Laut [Qui02] ist das Anfangsrandwertproblem zum Modell DPLW (2,1) unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen wohlgestellt. Lösungen sind für $2\tau_\theta > \tau_q$ exponentiell stabil und für $2\tau_\theta < \tau_q$ instabil. Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ ist das zugehörige charakteristische Polynom stabil, nach [BQR14] ist jedoch kein exponentielles, sondern ein langsameres zeitliches Abklingen von Lösungen zu erwarten. In [QR06a] wurden die Modelle DPLW (2,1) und DPLW (2,2) hinsichtlich der Stabilität ihres zugehörigen charakteristischen Polynoms verglichen. Das charakteristische Polynom zu DPLW (2,2) ist unter der Bedingung $\tau_\theta > (2-\sqrt{3})\tau_q$ stabil. Im Grenzfall $\tau_\theta = (2-\sqrt{3})\tau_q$ kann es nach [BQR14] abhängig vom Gebiet stabil oder schwach stabil sein. In [QR07] wurden für das System DPLW (2,2) die Wohlgestelltheit sowie unter der Voraussetzung $\tau_\theta > \tau_q$ die exponentielle Stabilität nachgewiesen.

▸ Three-Phase-Lag-Wärmeleitung: Wohlgestelltheit und zeitliche Asymptotik

Nach [Bor12; BQR14] ist das Anfangsrandwertproblem zum Modell TPLW (m_q,m_θ,m_ν) unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen wohlgestellt, wenn $(m_q, m) = (1, 2)$ oder $m_q = m$ gilt, wobei $m := \max\{m_\theta + 1, m_\nu\}$ ist. In [QR08; BQR14] wurden die Modelle TPLW (1,1,1) und TPLW (2,1,1) hinsichtlich der Stabilität untersucht. Es zeigte sich, dass Lösungen zu TPLW (1,1,1) für $\tau_\nu^* \geq \kappa^* \tau_q$ exponentiell stabil sind und dagegen für $\tau_\nu^* < \kappa^* \tau_q$ Gebiete mit instabilen Lösungen existieren. Lösungen des Systems TPLW (2,1,1) sind für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^* \tau_q$ exponentiell stabil. Im Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^* \tau_q$ ist das zugehörige charakteristische Polynom stabil, aber ein langsame-

res Abklingen zu erwarten. Für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} < \tau_\nu^*$ existieren stets instabile Lösungen. Wenn $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^*$, aber $\tau_\nu^* < \kappa^*\tau_q$ ist, gibt es zumindest Gebiete mit instabilen Lösungen. Die zeitliche Asymptotik für Phase-Lag-Modelle im Ganzraum wurde erstmals in [DS13] betrachtet. Untersucht wurden dort die Anfangswertprobleme zu den Systemen TPLW (1,1,1) und TPLW (2,1,1) im Fall einer Raumdimension und jeweils eine L^1-L^2-Abschätzung hergeleitet.

▸ Dual-Phase-Lag-Thermoelastizität: Wohlgestelltheit und zeitliche Asymptotik

In [QR06b] wurden für das Modell DPLT (2,1) im beschränkten Gebiet unter Dirichlet-Randbedingungen die Wohlgestelltheit und im eindimensionalen Fall die exponentielle Stabilität für $2\tau_\theta > \tau_q$ gezeigt. Für $2\tau_\theta < \tau_q$ treten nach [Qui03] unter homogenen Dirichlet-Neumann-Randbedingung instabile Lösungen auf. Die exponentielle Stabilität in drei Raumdimensionen wurde in [Kur08] untersucht. Allgemein für $m_q = m_\theta + 1$ wurde die Wohlgestelltheit des Systems DPLT (m_q, m_θ) im beschränkten Gebiet unter Dirichlet-Randbedingungen in [Wei09] bewiesen. Daneben wurden dort energetische Vergleiche gegenüber der Lösung des klassischen Thermoelastizitätsmodells durchgeführt, und auch orts- und zeitabhängigen Koeffizienten sowie eine eindimensionale nichtlineare Variante des Systems DPLT (2,1) betrachtet.

▸ Three-Phase-Lag-Thermoelastizität: Wohlgestelltheit

Nach [Bor12] sind die Anfangsrandwertprobleme zum Modell TPLT (m_q,m_θ,m_ν) in den Fällen $(m_q, m) = (1, 2)$ und $(m_q, m) = (2, 2)$ mit $m := \max\{m_\theta + 1, m_\nu\}$ unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen wohlgestellt.

▸ Räumliches Abklingverhalten

Das räumliche Abklingverhalten in einem halb-beschränkten Zylinder wurde für die Wärmeleitungsmodelle DPLW (2,1), DPLW (2,2), TPLW (1,1,1) und TPLW (2,1,1) in [HQ05; QR07; Qui08; Qui09] sowie allgemeiner in [QR15] untersucht. Das Thermoelastizitätsmodell DPLT (2,1) wurde in [QR06b] betrachtet.

▸ Nichterhaltung der Positivität

Hierzu findet sich ein Resultat in [Ruk14] für das System DPLW (1,1).

Die Kapitel 3 bis 7 der vorliegenden Arbeit werden neben der Einordnung von Phase-Lag-Modellen in die Theorie symmetrisch-hyperbolischer Systeme Aufschluss über die zeitliche Asymptotik zu verschiedenen Phase-Lag-Modellen im Ganzraum, über die Nichterhaltung der Positivität für das System DPLW (2,2) sowie über die exponentielle Stabilität in beschränkten Gebieten für die Three-Phase-Lag-Modelle TPLT (1,1,1) und TPLT (2,1,1) der Thermoelastizität geben.

2 Symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme

Ein Ziel wird sein, Dual- und Three-Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung und Thermoelastizität als symmetrisch-hyperbolische Systeme zu klassifizieren. In diesem Kapitel sollen dazu allgemeine Resultate aus der Theorie symmetrisch-hyperbolischer Systeme bereitgestellt werden. Dabei werden nicht nur rein symmetrisch-hyperbolische Systeme behandelt, sondern auch solche, die um einen parabolischen Anteil oder um eine Nebenbedingung ergänzt sind. Die Betrachtungen beschränken sich auf Anfangswertprobleme und umfassen Aussagen zur Wohlgestelltheit, zur Ausbreitungsgeschwindigkeit und zur zeitlichen Asymptotik von Lösungen in Form von L^p-L^q-Abschätzungen. Daneben wird in einem Exkurs der Begriff der Dissipativität beleuchtet.

2.1 Symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Anfangswertprobleme

Wir betrachten Anfangswertprobleme zu linearen Systemen von partiellen Differentialgleichungen der Form

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^{n} A^j \partial_{x_j} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{2.1 a}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,, \tag{2.1 b}$$

und

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^{n} A^j \partial_{x_j} V - \sum_{j,k=1}^{n} B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{2.2 a}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{2.2 b}$$

Hierbei sei $n \in \mathbb{N}$ die Raumdimension und A^0, A^j für $j \in \{1,\dots,n\}$, B^{jk} für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ und L seien Matrizen aus $\mathbb{R}^{m\times m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Vorgegeben sei ein Anfangswert $V_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gesucht ist eine Funktion $V : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ als Lösung des Problems. Wir nennen (2.1) ein symmetrisch-hyperbolisches und (2.2) ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches Anfangswertproblem, wenn es sich bei (2.1 a) um ein symmetrisch-hyperbolisches und bei (2.2 a) um ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System im folgenden Sinn handelt.

Definition 2.1 (Symmetrisch-hyperbolisch und symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch). *Ein System der Form* (2.1 a) *mit* $A^0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $A^j \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *für* $j \in \{1,\dots,n\}$ *und* $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *heißt ein symmetrisch-hyperbolisches System, wenn gilt:*

(i) A^0 *ist symmetrisch und positiv definit.*

(ii) Für $j \in \{1,\dots,n\}$ *ist* A^j *symmetrisch und es gilt* $A^j \neq 0$ *für mindestens ein* $j \in \{1,\dots,n\}$.

Ein System der Form (2.2 a) *mit* $A^0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $A^j \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *für* $j \in \{1,\dots,n\}$, $B^{jk} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *für* $j,k \in \{1,\dots,n\}$ *und* $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *heißt ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System, wenn*

die Matrizen A^0 und A^j die zuvor genannten Eigenschaften (i) und (ii) erfüllen und darüber hinaus Folgendes gilt:

(iii) Bei A^0 und B^{jk} für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ handelt es sich um Blockdiagonalmatrizen der Form

$$A^0 = \begin{pmatrix} A_1^0 & 0 \\ 0 & A_2^0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad B^{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2^{jk} \end{pmatrix}$$

mit $A_1^0 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$, $A_2^0 \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ und $B_2^{jk} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ für $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 + m_2 = m$. Dabei gilt $B_2^{jk} = B_2^{kj}$ für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ und für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ ist die Matrix $\sum_{j,k=1}^n B_2^{jk}\omega_j\omega_k$ symmetrisch und positiv definit.

Gemäß dieser Definition entsprechen die symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systeme der Normalform, wie sie von S. Kawashima und Y. Shizuta in [KS88, Definition 3.1], dort allgemeiner auch für quasilineare Systeme, genannt und von S. Kawashima in [Kaw83] zugrunde gelegt wurde.

In der Theorie symmetrisch-hyperbolischer Systeme (siehe etwa [BS07]) wird A^0 oft als die Einheitsmatrix gesetzt. Dies stellt keine Einschränkung dar, denn für eine symmetrische, positiv definite Matrix $A^0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sind $(A^0)^{\frac{1}{2}}$ und $(A^0)^{-\frac{1}{2}}$ in $\mathbb{R}^{m\times m}$ wohlerklärt, und für eine Funktion $V : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt: V ist genau dann eine Lösung von (2.1), wenn $(A^0)^{\frac{1}{2}}V$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t W + \sum_{j=1}^n (A^0)^{-\frac{1}{2}} A^j (A^0)^{-\frac{1}{2}} \partial_{x_j} W + (A^0)^{-\frac{1}{2}} L (A^0)^{-\frac{1}{2}} W = 0 \qquad & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \\ W(0,\cdot) = (A^0)^{\frac{1}{2}} V_0 \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.3}$$

löst. Entsprechendes gilt für das System (2.2). Die Wahl von A^0 als die Einheitsmatrix ist jedoch meistens nicht naheliegend, wenn das symmetrisch-hyperbolische System aus der Transformation einer konkreten, etwa aus der Physik kommenden, partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung auf ein System erster Ordnung resultiert.

2.2 Wohlgestelltheit

Symmetrisch-hyperbolische sowie symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Anfangswertprobleme sind in geeigneten Räumen wohlgestellt, d. h. sie besitzen eine eindeutige Lösung, die stetig von den Anfangsdaten abhängt. Wir wollen Lösungen betrachten, die bezüglich der Zeit klassisch differenzierbar sind und bezüglich des Orts in Sobolev- oder Besselpotential-Hilberträumen (siehe Anhang A.2) liegen. Eine Darstellung der Lösung ist in diesem Fall über die Theorie der Fourier-Transformation (siehe Anhang A.3) möglich. Durch eine zunächst formale Anwendung der Fourier-Transformation $\mathscr{F}$ auf das System (2.1) bzw. (2.2) ergibt sich ein von $\xi \in \mathbb{R}^n$ abhängiges Anfangswertproblem, das im symmetrisch-hyperbolischen Fall

$$A^0\partial_t \widehat{V}(t,\xi) + \big(iA(\xi) + L\big)\widehat{V}(t,\xi) = 0\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{2.4 a}$$

$$\widehat{V}(0,\xi) = \mathscr{F}V_0(\xi)\,, \tag{2.4 b}$$

und im symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Fall

$$A^0\partial_t \widehat{V}(t,\xi) + \big(iA(\xi) + B(\xi) + L\big)\widehat{V}(t,\xi) = 0\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{2.5 a}$$

$$\widehat{V}(0,\xi) = \mathscr{F}V_0(\xi) \tag{2.5 b}$$

lautet. Hierbei sind $A(\xi)$ und $B(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert als

$$A(\xi) := \sum_{j=1}^{n} A^j \xi_j \quad \text{und} \quad B(\xi) := \sum_{j,k=1}^{n} B^{jk} \xi_j \xi_k \,.$$

Da die Fourier-Transformation für $s \in \mathbb{R}$ einen isometrischen Isomorphismus zwischen dem Besselpotentialraum $H^s(\mathbb{R}^n) := \{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathscr{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$ und dem gewichteten L^2-Raum $L^2_s(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \,|\, (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$ darstellt (siehe Satz A.9 im Anhang), betrachtet man (2.4) bzw. (2.5) sinnvollerweise als ein Anfangswertproblem zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen im Raum $L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$. Aus dessen Lösung $\widehat{V} : [0,\infty) \to L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$ erhält man durch $V : [0,\infty) \to H^s(\mathbb{R}^n)^m$, $t \mapsto \mathscr{F}^{-1}(\widehat{V}(t))$ eine Lösung des Ausgangsproblems.

Satz 2.2 (Wohlgestelltheit). *Es sei $s \in \mathbb{R}$.*

(i) Das symmetrisch-hyperbolische System (2.1) *besitzt zu einem Anfangswert $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m$ eine eindeutige Lösung $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^m \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^m$. Diese ist für $t \in [0,\infty)$ gegeben durch $V(t) = \mathcal{S}(t)V_0$ mit*

$$\mathcal{S}(t) : \; H^s(\mathbb{R}^n)^m \to H^s(\mathbb{R}^n)^m \,, \quad v \mapsto \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}} e^{-(A^0)^{-\frac{1}{2}}(iA(\cdot)+L)(A^0)^{-\frac{1}{2}}t} (A^0)^{\frac{1}{2}} \mathscr{F} v \,.$$

Dabei bildet $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe. Für $\lfloor s \rfloor > \frac{n}{2} + 1$ ist $V \in \mathcal{C}^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)^m$.

(ii) Das symmetrisch-hyperbolisch-parabolische System (2.2) *besitzt zu einem Wert $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m$ eine eindeutige Lösung $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^m \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^m$. Diese ist für $t \in [0,\infty)$ gegeben durch $V(t) = \mathcal{S}(t)V_0$ mit*

$$\mathcal{S}(t) : \; H^s(\mathbb{R}^n)^m \to H^s(\mathbb{R}^n)^m \,, \quad v \mapsto \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}} e^{-(A^0)^{-\frac{1}{2}}(iA(\cdot)+B(\cdot)+L)(A^0)^{-\frac{1}{2}}t} (A^0)^{\frac{1}{2}} \mathscr{F} v \,.$$

Dabei bildet $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe. Für $\lfloor s \rfloor > \frac{n}{2} + 2$ ist $V \in \mathcal{C}^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)^m$.

Beweis: Für (i) setze man im Folgenden $B(\xi) := 0$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$, für (ii) sei $B(\xi) := \sum_{j,k=1}^n B^{jk}\xi_j\xi_k$. Da es sich bei der Fourier-Transformation $\mathscr{F} : H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2_s(\mathbb{R}^n)$ um einen isometrischen Isomorphismus handelt, ist $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^m$ genau dann eine Lösung von (2.1) bzw. (2.2), wenn $\mathscr{F}(V(\cdot)) \in \mathcal{C}^0([0,\infty), L^2_s(\mathbb{R}^n))^m$ eine Lösung von (2.4) bzw. (2.5) ist. Letzteres ist wiederum dazu äquivalent, dass $(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}(V(\cdot)) \in \mathcal{C}^0([0,\infty), L^2_s(\mathbb{R}^n))^m$ das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t W(t,\cdot) &= M(\cdot)W(t,\cdot) \,, \quad t \in (0,\infty) \,, \\ W(0,\cdot) &= (A^0)^{\frac{1}{2}} \mathscr{F} V_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

löst, wobei $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times m}$ durch $M(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}(iA(\xi) + B(\xi) + L)(A^0)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben ist. Die Matrix $M(\xi)$ erfüllt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{C}^m$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle M(\xi)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} &= -\mathrm{Re}\langle (iA(\xi) + B(\xi) + L)(A^0)^{-\frac{1}{2}}x, (A^0)^{-\frac{1}{2}}x\rangle_{\mathbb{C}^m} \\ &\leq -\mathrm{Re}\langle L(A^0)^{-\frac{1}{2}}x, (A^0)^{-\frac{1}{2}}x\rangle_{\mathbb{C}^m} \,, \end{aligned}$$

da $\langle A(\xi)(A^0)^{-\frac{1}{2}}x, (A^0)^{-\frac{1}{2}}x\rangle_{\mathbb{C}^m}$ aufgrund der Symmetrie von $A(\xi)$ reell und $B(\xi)$ positiv semidefinit ist. Es existiert also eine Konstante $\omega \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \mathbb{C}^m$ gilt:

$$\mathrm{Re}\langle M(\xi)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \leq \omega |x|^2 \,. \tag{2.7}$$

Insbesondere impliziert diese Abschätzung $\mathrm{Re}(\lambda(\xi)) \leq \omega$ für jeden Eigenwert $\lambda(\xi)$ von $M(\xi)$ und demnach ist $\lambda \mathrm{Id} - M(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > \omega$ surjektiv. Aus der Ungleichung

folgt auch $\operatorname{Re}\langle M(\cdot)v, v\rangle_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} \leq \omega\|v\|^2_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m}$ für alle $v \in L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > \omega$, so existiert zu $w \in L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$ aufgrund der Surjektivität von $\lambda\mathrm{Id} - M(\xi)$ eine Abbildung $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ mit $(\lambda\mathrm{Id} - M(\xi))v(\xi) = w(\xi)$ für fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Da $\|v\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} = \|(\lambda\mathrm{Id} - M(\cdot))^{-1}w\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} \leq \frac{1}{\lambda-\omega}\|w\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} < \infty$ gilt (siehe [Paz83, S. 14, Theorem 4.2]), liegt v in $L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$. Damit erfüllt die Abbildung $M : \{v \in L^2_s(\mathbb{R}^n)^m \mid M(\cdot)v \in L^2_s(\mathbb{R}^n)^m\} \to L^2_s(\mathbb{R}^n)^m,\ v \mapsto M(\cdot)v$ die Voraussetzungen des Satzes von Lumer-Phillips A.17 und wir schließen, dass M infinitesimaler Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(e^{M(\cdot)t})_{t\geq 0}$ mit

$$\|e^{M(\cdot)t}\|_{\mathscr{L}(L^2_s(\mathbb{R}^n)^m)} \leq e^{\omega t}$$

ist. Mit Satz A.18 folgt, dass das Problem (2.6) zu $\mathscr{F}V_0$ in $L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$, also zu V_0 in $H^s(\mathbb{R}^n)^m$, eine eindeutige Lösung $W \in \mathcal{C}^0([0,\infty), L^2_s(\mathbb{R}^n)^m)$ besitzt, die durch $W(t,\cdot) := e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0$ gegeben ist. Wie bereits begründet, stellt dann $V(t,\cdot) := \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}}W(t,\cdot) = \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0(\cdot)$ die eindeutige Lösung von (2.1) bzw. (2.2) in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^m$ dar. Im Fall eines symmetrisch-hyperbolischen Systems lesen wir aus der Differentialgleichung (2.1 a) zudem die Regularität $V \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^m$ ab. Für ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System können wir anhand von (2.2 a) zumindest $V \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^m$ schließen. Dass V für $\lfloor s\rfloor > \frac{n}{2} + 1$ bzw. $\lfloor s\rfloor > \frac{n}{2} + 2$ eine klassische Lösung in $\mathcal{C}^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)^m$ darstellt, folgt aus den stetigen Einbettungen $H^r(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\lfloor r\rfloor}(\mathbb{R}^n) = W^{\lfloor r\rfloor,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^n)$, die nach den Sätzen A.3 und A.4 für $r \in \mathbb{R}$ mit $\lfloor r\rfloor > \frac{n}{2}$ gelten. □

Symmetrisch-hyperbolische Systeme und die Wohlgestelltheit zugehöriger Anfangs- und Anfangsrandwertprobleme wurden in [BS07] ausführlich behandelt. Dort finden sich auch Aussagen zu Systemen mit nichtkonstanten Koeffizienten und quasilinearen Systemen. Zum symmetrisch-hyperbolischen Anfangswertproblem auf $L^p(\mathbb{R}^n)^m$ für $p \neq 2$ siehe man [Bre66]. Die Wohlgestelltheit für quasilineare symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Anfangswertprobleme wurde in [Kaw83] untersucht.

2.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Das Paradoxon der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit bei der klassischen Wärmeleitungsgleichung bildete mit einen Grund für den Übergang zu hyperbolischen Wärmeleitungsmodellen. Lösungen zu symmetrisch-hyperbolischen Systemen besitzen nun in der Tat eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Satz 2.3 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit). *Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ die C_0-Halbgruppe zum symmetrisch-hyperbolischen System* (2.1) *aus Satz 2.2 (i). Dann gilt: Ist $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m$ und gilt für den Träger* $\operatorname{supp} V_0 \subset \overline{B(0,r)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$ *für ein $r \in \mathbb{R}^+$, so liegt* $\operatorname{supp}\mathcal{S}(t)V_0$ *zum Zeitpunkt $t \in [0,\infty)$ in $\overline{B(0,r+ct)}$, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit c gegeben ist durch $c := \max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}\{|\lambda(\omega)| \mid \lambda(\omega)$ Eigenwert von $(A^0)^{-\frac{1}{2}}A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}}\}$.*

(Siehe [Rau12, S. 62-63].)

Für symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme ist hingegen keine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zu erwarten. Beispielsweise lässt sich das klassische Thermoelastizitätsmodell nach [JR00, S. 41, 81] als ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System schreiben, jedoch geht dieses Modell mit einer unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit einher, was einen Grund für die Entwicklung hyperbolischer Thermoelastizitätsmodelle darstellte (vergleiche [Str11, 2.1.1]).

2.4 Stabilität

Welches Vorzeichen für die Konstante ω in der Abschätzung (2.7) im Beweis zur Wohlgestelltheit erreicht werden kann, hängt ausschließlich von der Definitheitseigenschaft der Matrix L ab. Für eine indefinite Matrix L ist die Wahl $\omega := \|(A^0)^{-\frac{1}{2}} L (A^0)^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}$ naheliegend. Wenn L positiv semidefinit ist, ist die Ungleichung mit $\omega := 0$ erfüllt. Handelt es sich bei L um eine positiv definite Matrix, so kann, da auch $(A^0)^{-1}$ positiv definit ist, ein $\omega < 0$ gewählt werden. Die Matrix L ist folglich ausschlaggebend für die Stabilität der Lösung.

Satz 2.4 (Stabilität). *Ist L positiv definit, so erhält man in Satz 2.2 jeweils eine exponentiell stabile C_0-Halbgruppe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ und damit exponentiell stabile Lösungen, d. h.*

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \exists\, \omega \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \|\mathcal{S}(t)V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} \leq Ce^{-\omega t}\|V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}\,.$$

Die positive Semidefinitheit von L führt auf eine gleichmäßig beschränkte C_0-Halbgruppe und damit auf stabile Lösungen, d. h.

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \|\mathcal{S}(t)V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} \leq C\|V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}\,.$$

Beweis: Aufgrund des nach dem Satz von Plancherel (siehe Satz A.9) gültigen Zusammenhangs

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}(t)V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} &= \|(A^0)^{-\frac{1}{2}} e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\leq \|(A^0)^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}\|e^{M(\cdot)t}\|_{\mathscr{L}(L^2_s(\mathbb{R}^n)^m)}\|(A^0)^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}\|V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}\end{aligned}$$

ergibt sich die Behauptung aus der dem Beweis des Satzes 2.2 zu entnehmenden Abschätzung $\|e^{M(\cdot)t}\|_{\mathscr{L}(L^2_s(\mathbb{R}^n)^m)} \leq e^{\omega t}$ und der vorangestellten Überlegung zur Wahl der Konstante ω. □

Bemerkenswert ist, dass es, sofern die C_0-Halbgruppe nicht schon exponentiell stabil ist, keine Abschätzung der Form $\|\mathcal{S}(t)V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} \leq C(1+t)^{-\alpha}\|V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$, also in diesem Sinn keine nur asymptotisch oder polynomial stabile C_0-Halbgruppe geben kann. Dies beruht auf der Tatsache, dass „$\lim_{t\to\infty}\|\mathcal{S}(t)\|_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n)^m)} = 0 \iff (\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ exponentiell stabil“ gilt, wobei die nichttriviale Folgerungsrichtung „$\Rightarrow$“ der Halbgruppeneigenschaft zuzuschreiben ist (siehe [EN00, S. 299, Proposition 1.7]). Daraus resultiert jedoch nicht, dass es keine asymptotisch stabilen Lösungen gibt. So kann durchaus $\lim_{t\to\infty}\|\mathcal{S}(t)V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} = 0$ für alle $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m$ gelten. (In diesem Fall spricht man allgemein von einer stark stabilen C_0-Halbgruppe. Voraussetzungen, unter denen eine C_0-Halbgruppe stark stabil ist, werden in [EN00, S. 326, Theorem 2.21] genannt.) Insbesondere verhindert also eine positiv semidefinite Matrix L nicht zwangsläufig das zeitliche Abklingen von Lösungen.

Zwar ist eine Abschätzung der soeben genannten Form nicht möglich, dennoch aber kann man nach einer Abklingrate wie $(1+t)^{-\alpha}$ Ausschau halten. Zu suchen ist sie lediglich bezüglich anderer „Normen“. So kann etwa in halbgruppentheoretischer Herangehensweise eine von einem Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ auf einem Banachraum X erzeugte C_0-Halbgruppe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ auf polynomiale Stabilität im Sinne von $\|\mathcal{S}(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} = \mathcal{O}(t^{-\alpha})$ für $t \to \infty$ untersucht werden (siehe [Bát06; BT10]). Eine andere Möglichkeit, die von einer Lösung in $\mathcal{C}^0([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n)^m)$ ausgeht, besteht darin, L^p-L^q-Abschätzungen, wie zum Beispiel $\|\mathcal{S}(t)V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}\big(\|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} + \|V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}\big)$, herzuleiten. Solche Abschätzungen beschreiben ein bezüglich der Zeit polynomiales Abklingen von Lösungen. Als a-priori Abschätzungen bilden sie ein zentrales Hilfsmittel im Studium der globalen Wohlgestelltheit von Anfangswertproblemen zu nichtlinearen Differentialgleichungen, da mit

ihrer Hilfe lokale Lösungen fortgesetzt werden können (siehe [Rac15]). Zurück gehen die L^p-L^q-Abschätzungen auf R. Strichartz, der in [Str70] eine solche für die Lösung der Wellengleichung herleitete. Den L^p-L^q-Abschätzungen für symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme werden wir uns in Abschnitt 2.6.4 ausführlich widmen.

2.5 Dissipativität

Im Zusammenhang mit symmetrisch-hyperbolischen Systemen fallen häufig Begriffe wie Erhaltungsgleichung, Energie, Entropie und Dissipativität, die eigentlich der Physik zuzuordnen sind. Wir wollen versuchen, die Hintergründe etwas genauer zu beleuchten und die ein oder andere Anregung zur Motivation und Klärung der Begrifflichkeiten zu geben. Anstoß für den vorliegenden Abschnitt, der als Exkurs zu sehen ist, war besonders die nicht einheitliche, physikalisch und mathematisch teils konträre Verwendung der Bezeichnung „dissipativ“.

2.5.1 Physikalische Sichtweisen

Für $L \equiv 0$ stellt das symmetrisch-hyperbolische System (2.3) ein System von m linearen Erhaltungsgleichungen dar, denn wenn man für $k \in \{1, \dots, m\}$ und $w \in \mathbb{R}^m$

$$F_k(w) := \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{m} \big((A^0)^{-\frac{1}{2}} A^1 (A^0)^{-\frac{1}{2}}\big)_{kl} w_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{m} \big((A^0)^{-\frac{1}{2}} A^n (A^0)^{-\frac{1}{2}}\big)_{kl} w_l \end{pmatrix}$$

setzt, entspricht

$$\partial_t W_k(t,x) + \operatorname{div} F_k\big(W(t,x)\big) = 0 \tag{2.8}$$

der k-ten Zeile der Differentialgleichung

$$\partial_t W(t,x) + \sum_{j=1}^{n} (A^0)^{-\frac{1}{2}} A^j (A^0)^{-\frac{1}{2}} \partial_{x_j} W(t,x) = 0\,. \tag{2.9}$$

Der Begriff der Erhaltungsgleichung rührt daher, dass dem System eine sogenannte Erhaltungsgröße $\mathscr{E} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ zugrunde liegt. Integriert man ausgehend von (2.8) über ein beschränktes und glatt berandetes Gebiet $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, so ergibt sich mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega W_k(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} F_k\big(W(t,x)\big) \cdot n(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

wobei $n(x)$ den nach außen gerichteten Normalenvektor an $\partial\Omega$ im Punkt $x \in \partial\Omega$ bezeichnet. Das Randintegral kann physikalisch als Fluss durch die Oberfläche von Ω interpretiert werden. Die Gleichung besagt demnach, dass sich die physikalische Größe $\int_\Omega W_k(t,x)\,\mathrm{d}x$ (beispielsweise die Masse, W_k wäre dann die zugehörige Massendichte) nur dann in Abhängigkeit von t, also im Laufe der Zeit ändert, wenn über die Gebietsoberfläche entsprechende auf die physikalische Größe einflussnehmende Teilchen (im Beispiel Moleküle) ein- oder ausströmen. Ein solches Verhalten ist kennzeichnend für eine Erhaltungsgröße, weshalb man also $\mathscr{E} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \int_\Omega W(t,x)\,\mathrm{d}x$ als eine Erhaltungsgröße zu (2.9) und $W : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ als deren zugehörige Dichte ansehen kann. Wenn zwischen dem physikalischen System und seiner Umgebung keinerlei Austausch stattfindet, was durch die Dirichlet-Randbedingung $W(t,x) = 0$ für $(t,x) \in [0,\infty) \times \partial\Omega$ modelliert wird, dann

gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(t) = 0$. Demzufolge weist die Erhaltungsgröße einen konstanten Wert auf und zu einem gegebenen Anfangswert $W(0,x) = W_0(x)$ für $x \in \Omega$ ist $\mathscr{E}(t) = \int_\Omega W_0(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $t \in [0,\infty)$.

Man kann nun die Frage aufwerfen, ob das System (2.9) vielleicht noch mit einer weiteren, womöglich skalarwertigen Erhaltungsgröße (die sich nicht als Linearkombination aus den bisherigen ergibt) verknüpft ist. Dies taten K. O. Friedrichs und P. D. Lax in [FL71] und sie kamen zu dem Schluss, dass es gerade eine solche zusätzliche Erhaltungsgröße ist, die ein symmetrisch-hyperbolisches System ausmacht. Sie gaben diese konkret an, und zwar als $\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^m |W_k(\cdot,x)|^2\,\mathrm{d}x$ bzw. $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m |W_k(\cdot,\cdot)|^2$ als deren Dichte.

Die bekannteste physikalische Erhaltungsgröße ist die Energie. In simpler Anlehnung hieran könnte man also $\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^m |W_k(\cdot,x)|^2\,\mathrm{d}x$ als die Energie des Systems (2.9) und $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m |W_k(\cdot,\cdot)|^2$ als die zugehörige Energiedichte bezeichnen. Bei näherer Betrachtung muss man zugeben, dass der Begriff der Energie physikalisch nicht so einfach zu fassen ist. Es gibt verschiedene Formen von Energie und je nach Situation oder physikalischer Sichtweise (beispielsweise mechanisch betrachtet oder thermodynamisch, makroskopisch oder mikroskopisch) rückt ein anderer Aspekt in den Fokus. Für unsere Zwecke soll es genügen, zwei Arten von Energie zu unterscheiden: die mechanische Energie und die innere Energie.

Die mechanische Energie $E_{\mathrm{mech}} : [0,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie, die ein physikalisches System aufgrund seiner Bewegtheit besitzt, und der potentiellen Energie, die das System aufgrund seiner Lage in einem Kraftfeld, zum Beispiel dem Gravitationsfeld der Erde, aufweist. Sie verlangt demnach einen Bezugspunkt außerhalb des physikalischen Systems und die Betrachtung des Systems in seiner Gesamtheit als ein makroskopisches Objekt.

Die innere Energie $E_{\mathrm{in}} : [0,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ umfasst sämtliche andere Energieformen, die ein physikalisches System von innen heraus besitzt. Deren Ursachen sind auf Atomebene zu finden, etwa in der ungeordneten Bewegung der Atome oder Moleküle, in der Schwingung der Atome innerhalb eines Moleküls oder in den zwischen einem Atomkern und seinen Elektronen herrschenden Anziehungskräften. Mikroskopisch gesehen handelt es sich also wiederum um Formen der kinetischen und potentiellen Energie, die durch die Bewegung der kleinsten Teilchen und deren Lage zueinander hervorgerufen werden.

Grundsätzlich besagt der Energieerhaltungssatz, dass Energie nicht vernichtet oder geschaffen, wohl aber in andere Energieformen umgewandelt werden kann, zum Beispiel potentielle Energie in kinetische bei Herunterfallen eines Gegenstandes, oder über die Systemgrenze $\partial\Omega$ eines beschränkten Gebietes hinweg transportiert werden kann. Solch ein Energieaustausch erfolgt entweder auf mechanische Weise, etwa durch Kompression, oder er tritt infolge einer zwischen dem System und seiner Umgebung herrschenden Temperaturdifferenz auf. Im ersten Fall spricht man von Arbeit, im zweiten Fall bezeichnet man die übertragene Energiemenge als Wärme.

Physikalische Systeme, in denen die mechanische Energie über die Zeit hinweg erhalten bleibt, also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{mech}} = 0$ gilt, heißen konservativ. Die Erfahrung zeigt, dass es solche Systeme in der Realität nicht gibt. Durch das oft unerwünschte aber doch auch zum Glück vorhandene Phänomen der Reibung scheint mechanische und speziell kinetische Energie stets verloren zu gehen. Natürlich wird auch hier insgesamt gesehen keine Energie vernichtet, sondern es kommt lediglich zu einer Umwandlung von mechanischer Energie in innere Energie, was sich durch eine Temperaturänderung bemerkbar macht. Dass man trotzdem häufig von Energieverlust spricht, hat folgenden Hintergrund: Die Umwandlung zwischen bestimmten Energieformen unterliegt einer Besonderheit, nämlich der Irreversibilität, also der Unumkehrbarkeit. Formuliert ist dies im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Dieser gibt eine Umwandlungsrichtung vor, und zwar derart, dass eine weitere Systemgröße, die Entropie $S : [0,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$, nicht abnimmt, also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,\infty)$

gilt. Wird, wie es bei Reibungskräften der Fall ist, kinetische Energie in innere Energie umgewandelt, so ist ein Teil der mechanischen Energie tatsächlich „verloren“ in dem Sinn, dass dieser nicht mehr aus der inneren Energie zurückgewonnen werden kann, da eine derartige Umwandlung eine Abnahme der Entropie bedeuten würde. Physikalische Systeme, in denen es zu solchen irreversiblen Prozessen kommt, d. h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) > 0$ ist, nennt man dissipativ.

Wenn nun also E die mechanische Energie E_{mech} eines physikalischen Systems beschreibt, so ist ein konservatives System durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = 0$ und ein dissipatives System durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) < 0$ für alle $t \in [0, \infty)$ gekennzeichnet. E könnte auch für das Negative der Entropie des Systems, also $E = -S$, stehen (vergleiche dazu eine Anmerkung in [FL71, S. 1688]), dann wäre ein dissipatives System ebenfalls durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) < 0$ gekennzeichnet.

Auch für ein abstraktes symmetrisch-hyperbolisches System wie (2.1) können wir nach einer solchen Funktion $E : [0, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ Ausschau halten, die sich durch zeitliche Konstanz oder zeitliches Abklingen auszeichnet. In Anlehnung an den physikalischen Sachverhalt nennen wir sie Energie und sprechen von einem konservativen System, wenn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = 0$ ist, und einem dissipativen System, wenn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) < 0$ ist. Bezogen auf das Ganzraumproblem wäre wohl die Bezeichnung negative Entropie passender, da man andernfalls mit der physikalischen Motivation vor dem folgenden Widerspruch steht: Mangels einer Umgebung zum Universum $\mathbb{R}^3$ hapert einerseits die Gleichsetzung von E mit der mechanischen Energie, da diese einen Bezugspunkt außerhalb des Gebietes verlangen würde. Andererseits wäre, wenn man E als die Gesamtenergie versteht, die Tatsache $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) < 0$ widersprüchlich zur Energieerhaltung, die doch in der Gesamtheit des Universums gelten sollte. Wir wollen dennoch bei der Bezeichnung Energie bleiben und stellen uns diese als diejenigen Energieanteile vor, die zu einer Erhöhung der Entropie führen; in diesem Sinn kann „die Energie“ dann auch im Ganzraum abklingen. Im Übrigen hat auch der Begriff der Entropie Eingang in die mathematische Betrachtung von Erhaltungsgleichungen gefunden, siehe dazu beispielsweise [BHN07; KS88; KY04].

Schließlich wollen wir noch eine konkrete Energie für das symmetrisch-hyperbolische System (2.1) angeben. Dazu bilden wir für $s \in \mathbb{N}$ das H^s-Skalarprodukt der Gleichung mit $V(t) = \mathcal{S}(t)V_0$,

$$\langle A^0 \partial_t V(t), V(t)\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} + \sum_{j=1}^{n} \langle A^j \partial_{x_j} V(t), V(t)\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} + \langle LV(t), V(t)\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} = 0\,.$$

Wenn wir die Symmetrie der Matrizen A^0 und A^j sowie

$$\overline{\langle A^j \partial_{x_j} V(t), V(t)\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}} = \langle V(t), A^j \partial_{x_j} V(t)\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} = -\langle A^j \partial_{x_j} V(t), V(t)\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}$$

beachten, sehen wir, dass der Realteil der Gleichung aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\|(A^0)^{\frac{1}{2}} V(t)\big\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} = -2\,\mathrm{Re}\langle LV(t), V(t)\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}$$

besteht. Damit haben wir eine Energie zu (2.1) gefunden, nämlich

$$E: \quad [0, \infty) \to \mathbb{R}_0^+\,, \quad t \mapsto \big\|(A^0)^{\frac{1}{2}} \mathcal{S}(t)V_0\big\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}\,. \tag{2.10}$$

Für $L = 0$ ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = 0$ und damit das System im physikalischen Verständnis konservativ. Ist L positiv definit, so ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) < 0$, wonach es sich um ein dissipatives System handelt. Unter einer negativ definiten Matrix L würde eine stete Zunahme der Energie erfolgen, was physikalisch nicht zulässig ist. Im Fall $s = 0$ und $A^0 = \mathrm{Id}$ erkennen wir in $E = \|\mathcal{S}(\cdot)V_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}$ (bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ und das geänderte Gebiet) die Erhaltungsgröße $\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{k=1}^m |W_k(\cdot, x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|W(t, \cdot)\|^2_{L^2(\Omega)^m}$ wieder, wie K. O. Friedrichs und P. D. Lax sie für das System (2.9) angegeben hatten.

2.5.2 Mathematische Sichtweisen

Dissipativität im Sinne von Phillips

R. S. Phillips verstand, so geht es aus seiner Arbeit [Phi59] aus dem Jahr 1959 hervor, unter der Dissipativität die Eigenschaft, dass die Energie über die Zeit hinweg nicht zunimmt. Er schloss also den konservativen Fall mit ein, obwohl doch im physikalischen Verständnis die Dissipativität gewissermaßen den Gegensatz zur Konservativität bildet. Wenn die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = \mathcal{A}V(t) \quad \text{für } t \in (0,\infty) \quad \text{mit } V(0) = V_0 \tag{2.11}$$

ein physikalisches System beschreibt und die Lösung durch eine C_0-Halbgruppe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ auf einem Hilbertraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ gegeben ist, so würde laut Phillips die natürliche Wahl des Hilbertraums in der Art erfolgen, dass $\|S(t)V_0\|_X^2$ ein Maß für die physikalische Energie zum Zeitpunkt t darstellt. Die Dissipativität des Systems im Sinne von Phillips entspräche dann gerade der Eigenschaft, dass es sich bei $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ um eine Kontraktionshalbgruppe handelt, da dies

$$\|\mathcal{S}(t)V_0\|_X \leq \|V_0\|_X \quad \text{für alle } t \in [0,\infty) \text{ und alle } V_0 \in X \tag{2.12}$$

bedeutet. In der Situation von Satz 2.2 könnten wir den Raum $H^s(\mathbb{R}^n)^m$ anstatt mit dem herkömmlichen H^s-Skalarprodukt auch mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{A^0} := \langle (A^0)^{\frac{1}{2}}\cdot, (A^0)^{\frac{1}{2}}\cdot\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)^m}$ versehen. Dies würde zu der Energie passen, die wir in (2.10) gefunden haben. Unter diesem speziellen Skalarprodukt gilt dann für die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ des Anfangswertproblems (2.1) oder (2.2)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}(t)V_0\|_{A^0} &= \|(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathcal{S}(t)V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} = \|e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} \\ &\leq e^{\omega t}\|(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} = e^{\omega t}\|(A^0)^{\frac{1}{2}}V_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} = e^{\omega t}\|V_0\|_{A^0}\,.\end{aligned}$$

Wie wir im Beweis zu Satz 2.2 gesehen haben, ist diese Abschätzung für all diejenigen $\omega \in \mathbb{R}$ gültig, für die die Matrix

$$M(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}\big(iA(\xi) + L\big)(A^0)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{bzw.} \quad M(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}\big(iA(\xi) + B(\xi) + L\big)(A^0)^{-\frac{1}{2}}$$

die Bedingung (2.7), also $\mathrm{Re}\langle M(\xi)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \leq \omega|x|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \mathbb{C}^m$, erfüllt. Das System (2.1) bzw. (2.2) im Raum $H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m := (H^s(\mathbb{R}^n)^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_{A^0})$ ist also dissipativ im Sinne (2.12) von Phillips, wenn die Konstante ω gleich oder kleiner Null gewählt werden kann. Für diese Eigenschaft, übertragen auf allgemeinere Operatoren, vergab Phillips ebenfalls den Begriff dissipativ [Phi59, Definition 1.1]. Ein linearer Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ auf einem Hilbertraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ heißt dissipativ, wenn

$$\forall\, v \in D(\mathcal{A}) : \ \ \mathrm{Re}\langle \mathcal{A}v, v\rangle_X \leq 0 \tag{2.13}$$

gilt. Einen Zusammenhang zwischen der Dissipativität eines Operators $\mathcal{A}$ im Sinne von (2.13) und der Dissipativität des durch $\mathcal{A}$ beschriebenen Systems (2.11) im Sinne von (2.12) stellt der 1961 veröffentlichte Satz von Lumer-Phillips ([LP61, Theorem 3.1], siehe auch Satz A.17) her. Hingegen ist der Bezug zur physikalischen Auslegung des Begriffs verwischt. Immerhin findet man aber für den Spezialfall, dass $\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}v, v\rangle_X = 0$ für alle $v \in D(\mathcal{A})$ gilt, in [Fat83, S. 154] auch noch die dem Ursprung näherstehende Bezeichnung, dass der Operator $\mathcal{A}$ konservativ sei.

Um das symmetrisch-hyperbolische oder symmetrisch-hyperbolisch-parabolische System in der Form (2.11) auffassen zu können, müssen wir $\mathcal{A}$ als den Erzeuger der dann auf $H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m$ operierenden Lösungshalbgruppe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ wählen, also

$$\mathcal{S}(t) : \ \ H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m \to H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m\,, \quad v \mapsto \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}v$$

und dazu für (2.1) (für (2.2) analog) den Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{A}:\ &\{v \in H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m \mid \mathcal{A}v \in H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m\} \subset H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m \to H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m\,,\\ v \mapsto &\lim_{t\searrow 0}\frac{\mathcal{S}(t)v - v}{t} = -\sum_{j=1}^n (A^0)^{-\frac{1}{2}}A^j\partial_{x_j}v - (A^0)^{-\frac{1}{2}}Lv\,.\end{aligned}$$

Dann gelten in Bezug auf die Dissipativität die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}&\mathcal{A} \text{ ist dissipativ im Sinne von (2.13).}\\ \iff\ &\text{Das System (2.1) bzw. (2.2) ist dissipativ im Sinne von (2.12).}\\ \iff\ &\text{Für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ ist } \mu(M(\xi)) := \sup_{|x|=1}\operatorname{Re}\langle M(\xi)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \le 0\,.\\ \iff\ &\text{Für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ ist } M(\xi) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m \text{ dissipativ im Sinne von (2.13).}\end{aligned}$$

Beweis: Die erste Äquivalenz beruht auf dem Satz von Lumer-Phillips. Die letzte Äquivalenz gilt nach Definition. Die Folgerungsrichtung „$\Leftarrow$“ der verbleibenden Äquivalenz haben wir bereits begründet. Zu „$\Rightarrow$“ überlegt man sich Folgendes: Die Dissipativität im Sinne von (2.12) bedeutet $\|e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} = \|\mathcal{S}(t)V_0\|_{A^0} \le \|V_0\|_{A^0} = \|(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m}$ für alle $V_0 \in H^s_{A^0}(\mathbb{R}^n)^m$ und $t \in [0,\infty)$. Da der Operator $(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F} : H^s(\mathbb{R}^n)^m \to L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$ surjektiv ist, folgt daraus $\|e^{M(\cdot)t}f\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} \le \|f\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m}$ für alle $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)^m$ und $t \in [0,\infty)$. Demzufolge bildet die Menge $Z_{t,x} := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |e^{M(\xi)t}x| > |x|\}$ für jedes $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{C}^m$ eine Nullmenge, denn andernfalls würde $\|e^{M(\cdot)t}(x \cdot 1_{Z_{t,x}\cap B(0,N)})\|^2_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m} > \|x \cdot 1_{Z_{t,x}\cap B(0,N)}\|^2_{L^2_s(\mathbb{R}^n)^m}$ für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ einen Widerspruch zur vorherigen Aussage darstellen. Damit ist auch die Vereinigung aller $Z_{t,x}$ über $(t,x) \in ([0,\infty) \cap \mathbb{Q}) \times (\mathbb{Q}^m + i\mathbb{Q}^m)$ eine Nullmenge. Mit einem Dichtheitsargument folgt $|e^{M(\xi)t}x| \le |x|$ für alle $t \in [0,\infty)$, alle $x \in \mathbb{C}^m$ und fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, und aufgrund der Stetigkeit von $\xi \mapsto M(\xi)$ schließlich auch für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $\|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \le 1$ für alle $t \in [0,\infty)$ und dies ist nach dem folgenden Lemma 2.6 (ii) (oder abermals über den Satz von Lumer-Phillips) äquivalent zu $\mu(M(\xi)) \le 0$. □

Die Abbildung μ wird logarithmische Norm genannt. Bei dieser Gelegenheit wollen wir auch schon die später benötigten Begriffe der Spektral- und Wachstumsschranke einführen.

Definition 2.5 (Logarithmische Norm, Spektralschranke, Wachstumsschranke). *Zu einer Matrix $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ definieren wir*

- *die logarithmische Norm* $\mu(M) := \sup_{|x|=1}\operatorname{Re}\langle Mx, x\rangle_{\mathbb{C}^m}$,
- *die Spektralschranke* $s(M) := \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda$ *Eigenwert von* $M\}$,
- *die Wachstumsschranke* $\omega(e^{M\cdot}) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists\, C \ge 1\ \forall\, t \in [0,\infty) : \|e^{Mt}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \le Ce^{\omega t}\}$.

Lemma 2.6 (Eigenschaften der logarithmischen Norm). *Es sei $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Dann gilt:*

(i) $\|e^{Mt}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \le e^{\mu(M)t}$ *für alle* $t \in [0,\infty)$,

(ii) $\|e^{Mt}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \le 1$ *für alle* $t \in [0,\infty) \iff \mu(M) \le 0$,

(iii) $\mu(M) = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda$ *Eigenwert von* $\frac{1}{2}(M + \overline{M^\intercal})\}$,

(iv) $\mu(M) \ge s(M) = \omega(e^{M\cdot})$.

(Siehe [Str75; EN00, Corollary 2.4].)

Wir halten fest, dass die Dissipativität im Sinne von Phillips in Bezug auf ein symmetrisch-hyperbolisches oder symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System laut obiger Äquivalenz mit der logarithmischen Norm der Matrix $M(\xi)$ verknüpft ist. Wie wir sogleich sehen werden, besteht genau hierin der Unterschied zur Dissipativität im Sinne von Shizuta-Kawashima.

Dissipativität im Sinne von Shizuta-Kawashima

Den Arbeiten von Y. Shizuta und S. Kawashima zum Abklingverhalten symmetrisch-hyperbolischer und symmetrisch-hyperbolisch-parabolischer Systeme, auf die wir später zurückgreifen werden, liegt nochmals eine andere Definition von Dissipativität zugrunde. In [SK85] wurde definiert: Das System (2.1 a) bzw. (2.2 a) heißt *strikt dissipativ*, wenn

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(\lambda(\xi)) < 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \text{ und alle } \lambda(\xi) \in \mathbb{C} \text{ mit } \det(\lambda(\xi)A^0 + iA(\xi) + L) = 0 \\ &\text{bzw. } \det(\lambda(\xi)A^0 + iA(\xi) + B(\xi) + L) = 0 \text{ gilt.}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Für eine spezielle Form der strikten Dissipativität wurde in [UDK12] eine eigene Bezeichnung vergeben: Das System (2.1 a) bzw. (2.2 a) heißt *gleichmäßig dissipativ vom Typ* (p, q) für $p, q \in \mathbb{N}$, wenn

$$\begin{aligned}&\text{ein } c \in \mathbb{R}^+ \text{ existiert, sodass } \operatorname{Re}(\lambda(\xi)) \leq -c\tfrac{|\xi|^{2p}}{(1+|\xi|^2)^q} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } \lambda(\xi) \in \mathbb{C} \\ &\text{mit } \det(\lambda(\xi)A^0 + iA(\xi) + L) = 0 \text{ bzw. } \det(\lambda(\xi)A^0 + iA(\xi) + B(\xi) + L) = 0 \text{ gilt.}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Die strikte Dissipativität bedeutet nichts anderes, als dass das charakteristische Polynom

$$p(\xi, \cdot): \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad \lambda \mapsto \det(\lambda A^0 + iA(\xi) + L) \quad \text{bzw.} \quad \lambda \mapsto \det(\lambda A^0 + iA(\xi) + B(\xi) + L)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ Hurwitz-stabil ist (siehe Definition A.20). Die möglichen Nullstellen $\lambda(\xi)$ von $p(\xi, \cdot)$ entsprechen wegen

$$0 = \det(\lambda(\xi)A^0 + iA(\xi) + L) = \det\big((A^0)^{\frac{1}{2}}\big)\det\big(\lambda(\xi)\operatorname{Id} - M(\xi)\big)\det\big((A^0)^{\frac{1}{2}}\big)$$

gerade den Eigenwerten der Matrix

$$M(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}(iA(\xi) + L)(A^0)^{-\frac{1}{2}} \ \text{ bzw. } \ M(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}(iA(\xi) + B(\xi) + L)(A^0)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Die Dissipativität im Sinne von Shizuta-Kawashima hängt demnach mit der Spektralschranke von $M(\xi)$ zusammen:

$$\begin{aligned}&\text{Das System (2.1) bzw. (2.2) ist strikt dissipativ im Sinne von (2.14)}\,. \\ \iff\quad &\text{Für alle } \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \text{ ist } s(M(\xi)) < 0\,.\end{aligned}$$

Zur logarithmischen Norm, die wir verbunden mit der Dissipativität im Sinne von Phillips gesehen haben, besteht nach Lemma 2.6 (iv) der Zusammenhang $\mu(M(\xi)) \geq s(M(\xi))$. Die Gleichheit würde nach Lemma 2.6 (iii) dann gelten, wenn $M(\xi)$ hermitesch wäre. Dies ist für $\xi \neq 0$ jedoch niemals der Fall, denn da $(A^0)^{-\frac{1}{2}}A(\xi)(A^0)^{-\frac{1}{2}}$ symmetrisch ist, umfasst der antihermitesche Anteil $\frac{1}{2}(M(\xi) - \overline{M(\xi)}^{\mathsf{T}})$ stets den Term $-i(A^0)^{-\frac{1}{2}}A(\xi)(A^0)^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Aus der strikten Dissipativität (2.14) folgt also keineswegs die Dissipativität von $M(\xi)$ im Sinne von (2.13). Wie in [SK85] gezeigt wurde, führt die strikte Dissipativität unter einer symmetrischen Matrix L allerdings zu Abschätzungen wie $\|\mathcal{S}(t)V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}(\|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} + \|V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m})$. Damit aber gelangt man wieder ein Stück weit zurück zur Dissipativität im physikalischen Sinn, denn wenn man $\|\mathcal{S}(t)V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}$ als die Energie des Systems zum Zeitpunkt t ansieht, bedeutet eine solche Ungleichung nichts anderes, als dass die Energie langfristig gesehen abklingt.

2.6 Zeitliche Asymptotik

Das Ziel sind Aussagen zur zeitlichen Asymptotik von Lösungen zu symmetrisch-hyperbolischen und symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systemen. Es wird sich herausstellen, dass sich die Frage nach dem Abklingverhalten von Lösungen auf die Frage reduzieren lässt, ob die Matrizen $A(\xi)$, L und gegebenenfalls $B(\xi)$ gewisse zusätzliche Eigenschaften besitzen. Insbesondere wird die Definitheit von Matrizen eine Rolle spielen, weshalb wir einige diesbezügliche Notationen und Zusammenhänge voranstellen möchten.

Für eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}^m$ schreiben wir $M > 0$ auf U bzw. $M \geq 0$ auf U, wenn M positiv definit auf U bzw. positiv semidefinit auf U ist, d. h. wenn $\operatorname{Re}\langle Mx, x\rangle_{\mathbb{C}^m} > 0$ für alle $x \in U\backslash\{0\}$ bzw. $\operatorname{Re}\langle Mx, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \geq 0$ für alle $x \in U$ gilt. Ist $M > 0$ bzw. $M \geq 0$ auf $\mathbb{C}^m$, so nennen wir M positiv definit bzw. positiv semidefinit. Wenn M ausschließlich reelle Einträge besitzt, schreiben wir $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, fassen die Matrix dabei aber dennoch als eine Abbildung von $\mathbb{C}^m$ nach $\mathbb{C}^m$ auf. Der Kern einer solchen Matrix ist die Menge $\ker(M) := \{x \in \mathbb{C}^m \mid Mx = 0\}$. Die orthogonale Projektion von $\mathbb{C}^m$ auf $\ker(M)$ wird mit $P_{\ker(M)}$ bezeichnet. Ist $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, so genügt es für die positive Definitheit bzw. positive Semidefinitheit $M > 0$ bzw. $M \geq 0$ auf $\mathbb{R}^m$ nachzuweisen. Der symmetrische Teil einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist durch $[M]_{\mathrm{sy}} := \frac{1}{2}(M + M^{\mathsf{T}})$ gegeben, der antisymmetrische Teil durch $[M]_{\mathrm{asy}} := \frac{1}{2}(M - M^{\mathsf{T}})$. Hierbei bezeichnet M^{T} die zu M transponierte Matrix. M ist genau dann positiv definit bzw. positiv semidefinit, wenn $[M]_{\mathrm{sy}}$ positiv definit bzw. positiv semidefinit ist, denn für $x \in \mathbb{C}^m$ ist $\operatorname{Re}\langle Mx, x\rangle_{\mathbb{C}^m} = \langle [M]_{\mathrm{sy}}x, x\rangle_{\mathbb{C}^m}$. Ist M symmetrisch, d. h. gilt $M = M^{\mathsf{T}}$, so ist $\langle Mx, x\rangle_{\mathbb{C}^m}$ für alle $x \in \mathbb{C}^m$ reell. Die positive Definitheit bzw. positive Semidefinitheit ist in diesem Fall äquivalent dazu, dass M ausschließlich positive bzw. nichtnegative Eigenwerte besitzt.

2.6.1 Die Shizuta-Kawashima-Bedingung

Die Shizuta-Kawashima-Bedingung wurde 1985 von Y. Shizuta und S. Kawashima in [SK85] formuliert und meint für ein symmetrisch-hyperbolisches oder symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System die folgende Eigenschaft.

Bedingung (SK) (Shizuta-Kawashima-Bedingung). Es sei $v \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ und erfülle $Lv = 0$ sowie gegebenenfalls $B(\omega)v = 0$ für ein $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann gilt $\lambda A^0 v + A(\omega)v \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Für ein symmetrisch-hyperbolisches System mit einer positiv semidefiniten Blockdiagonalmatrix L ist die Shizuta-Kawashima-Bedingung nach [BZ11] äquivalent zu der aus der Kontrolltheorie bekannten Kalman-Rangbedingung.

Bedingung (R) (Kalman-Rangbedingung). Für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} L & L(A^0)^{-1}A(\omega) & \dots & L\big((A^0)^{-1}A(\omega)\big)^{m-1}\end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = m\,.$$

Allein aus der Shizuta-Kawashima-Bedingung ergeben sich, sofern die Matrix L symmetrisch und positiv semidefinit ist, bedeutende Rückschlüsse auf die Dissipativität des Systems (2.1) bzw. (2.2). So wurde in [SK85; UKS84] gezeigt, dass die Shizuta-Kawashima-Bedingung, die strikte Dissipativität im Sinne von (2.14) und die gleichmäßige Dissipativität vom Typ (1,1) im Sinne von (2.15) äquivalent sind, und für eine Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))^m$ des symmetrisch-hyperbolischen oder symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Anfangswertproblems die folgende

Abschätzung implizieren:

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \left|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\right| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}\left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|.$$

Wir beachten dabei, dass es sich bezüglich ξ, auch wenn wir die Schreibweise $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$ verwenden, nur um eine fast überall geltende Eigenschaft handeln kann, da wir mit L^2-Lösungen arbeiten. Aus der genannten Ungleichung im Fourierraum kann man für hinreichend reguläre Anfangsdaten zum Beispiel eine L^1-L^2-Abschätzung der Form

$$\begin{aligned}&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty):\\ &\quad \left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq C_1(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}}\left\|V_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} + C_2e^{-ct}\left\|\partial_x^k V_0\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}\end{aligned}$$

folgern. Solch ein Abklingverhalten der Lösung fällt unter den sogenannten *Standard-Typ*.

Die Shizuta-Kawashima-Bedingung liefert also unmittelbare Aussagen zur zeitlichen Asymptotik von Lösungen. Eingeschränkt wird die Anwendbarkeit jedoch durch die an L geforderte Symmetrie. In weiterführenden Arbeiten [BZ11] und [BHN07] wurde L als nicht notwendigerweise symmetrisch hervorgehoben, allerdings scheint L dort für die Richtigkeit mancher Ergebnisse zumindest der Einschränkung $\ker(L) = \ker([L]_{\mathrm{sy}})$ unterliegen zu müssen. Dass auch diese noch zu restriktiv ist, belegte das Beispiel des Timoshenko-Systems aus [IHK08], welches zwar die Shizuta-Kawashima-Bedingung, nicht aber die Symmetriebedingung $\ker(L) = \ker([L]_{\mathrm{sy}})$ erfüllt, und dennoch ein Abklingen aufweist. Weitere Beispiele dieser Art finden sich in Form der Plattengleichung in [SK10] oder des Euler-Maxwell-Systems in [UK11]. In den folgenden Kapiteln werden wir sehen, dass auch Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung und Thermoelastizität in diese Kategorie fallen. All diesen Beispielen gemein ist ein Regularitätsverlust, der sich darin äußert, dass die Abschätzung im Fourierraum nun von der Form

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \left|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\right| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}\left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|$$

ist und die resultierende L^1-L^2-Abschätzung die Gestalt

$$\begin{aligned}&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty):\\ &\quad \left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq C_1(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}}\left\|V_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} + C_2(1+t)^{-\frac{l}{2}}\left\|\partial_x^{k+l} V_0\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}\end{aligned}$$

annimmt. Im Vergleich zum Standard-Typ ist zur selben Abklingrate eine höhere Regularität des Anfangswerts erforderlich, weshalb man hier vom *Regularity-Loss-Typ* spricht.

Die Beispiele legten die Vermutung nahe, dass der Regularitätsverlust mit der fehlenden Symmetrie der Matrix L einhergeht. Im Jahr 2012 gelang R. Duan, S. Kawashima und Y. Ueda in [UDK12] für symmetrisch-hyperbolische Systeme die Verallgemeinerung der knapp 30 Jahre zurückliegenden Arbeiten auf den Fall einer positiv semidefiniten Matrix L ohne jegliche Symmetrieeigenschaft. Die Autoren gingen nicht mehr von der Shizuta-Kawashima-Bedingung aus, sondern formulierten gewisse andere Bedingungen an die Matrizen. Mit ihrer Methode erfassten sie sowohl das aus den früheren Arbeiten bekannte Abklingverhalten vom Standard-Typ als auch dasjenige vom Regularity-Loss-Typ. Wir werden im nächsten Abschnitt darauf zurückkommen und eine Erweiterung der Methode auf symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme präsentieren.

Zu erwähnen bleibt, dass auch mit [UDK12] nur ein Spezialfall des Regularity-Loss-Typs erfasst wird. Bei der Abschätzung im Fourierraum ist für die Abklingrate allgemeiner (ähnlich wie bei dem Begriff (2.15) der gleichmäßigen Dissipativität) die Form $e^{-\beta(\xi)t}$ mit $\beta(\xi) = \frac{|\xi|^{2p}}{(1+|\xi|^2)^q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$ denkbar, wobei der Regularity-Loss-Typ mit $p < q$ korrespondiert. Man vergleiche dazu die Arbeit [UDK14], die über die Fälle $(p,q) = (1,1)$ und $(p,q) = (1,2)$ hinausgeht.

2.6.2 Bedingungen an die Matrizen

Für ein System der Form

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^{n} A^j \partial_{x_j} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{2.16 a}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2.16 b}$$

mit A^0, $A^1, \dots, A^n$, $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ wurden in [UDK12] die folgenden Bedingungen (A), (K), (S), (S_1) und (S_2) formuliert.

Bedingung (A). Die Matrizen A^0, $A^1, \dots, A^n$, $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ besitzen die folgenden Eigenschaften:

- A^j ist symmetrisch für alle $j \in \{0,\dots,n\}$,
- A^0 ist positiv definit,
- L ist positiv semidefinit und es gilt $\ker(L) \neq \{0\}$.

Die Bedingung (A) stellt insbesondere sicher, dass es sich bei (2.16) um ein symmetrisch-hyperbolisches Anfangswertproblem im Sinne der Definition 2.1 handelt. Genau genommen müssten wir noch ergänzen, dass A^j für mindestens ein $j \in \{1,\dots,n\}$ ungleich der Nullmatrix ist, dies ist aber indirekt in der dritten Eigenschaft der folgenden Bedingung (K) enthalten.

Bedingung (K). Es existiert eine Abbildung $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^{m\times m})$, sodass für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt:

- $K(-\omega) = -K(\omega)$,
- $\big(K(\omega)A^0\big)^\mathsf{T} = -K(\omega)A^0$,
- $[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} > 0$ auf $\ker(L)$.

Da die Abbildungen $\omega \mapsto K(\omega)$ und $\omega \mapsto A(\omega)$ stetig sind und die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt ist, liegt die positive Definitheit von $[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}$ auf $\ker(L)$ gleichmäßig bezüglich ω vor, d. h.

$$\exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\ \forall\, x \in \ker(L):\ \ \langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \geq c\,|x|^2\,. \tag{2.17}$$

An die Stelle der Bedingung (K) kann auch die Kalman-Rangbedingung (R) aus Abschnitt 2.6.1 treten, da diese, sofern (A) gewährleistet ist, die Bedingung (K) impliziert (siehe [UDK12, Theorem 4.3]). Wenn L symmetrisch ist, ist die Bedingung (K) zur Shizuta-Kawashima-Bedingung (SK) äquivalent, denn nach [UDK12, Remark 1.1] ist in diesem Fall (2.17) gleichwertig zu

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\ \forall\, x \in \mathbb{C}^m:\ \ \langle (\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} + L)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \geq c\,|x|^2\,. \tag{2.18}$$

Dies bedeutet, dass αK eine kompensierende Funktion für (2.16) im Sinne von [SK85, Definition 1.2] darstellt. Die Existenz einer solchen ist nach [SK85, Theorem 1.1] äquivalent zur Shizuta-Kawashima-Bedingung.

Bedingung (S). Es existiert eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- SA^0 ist symmetrisch,
- $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}$ ist positiv semidefinit,
- $\ker([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}) = \ker(L)$.

Hinzu kommt eine der beiden folgenden Bedingungen, die später maßgeblich für die Art des Abklingens – ob vom Regularity-Loss-Typ oder vom Standard-Typ – sein wird.

Bedingung ($\mathbf{S_1}$). Die Matrix S aus der Bedingung (S) erfüllt

- $i[SA(\omega)]_{\text{asy}} \geq 0$ auf $\ker([L]_{\text{sy}})$ für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Bedingung ($\mathbf{S_2}$). Die Matrix S aus der Bedingung (S) erfüllt

- $i[SA(\omega)]_{\text{asy}} \geq 0$ auf $\mathbb{C}^m$ für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Wenn $\ker(L) = \ker([L]_{\text{sy}})$ gilt, sind die Bedingungen (S), (S_1) und (S_2) trivialerweise mit der Nullmatrix erfüllt.

Die Untersuchungen in [UDK12] beschränkten sich auf symmetrisch-hyperbolische Systeme. Wir möchten die Methode auf Systeme der Form

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^{n} A^j \partial_{x_j} V - \sum_{j,k=1}^{n} B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{2.19 a}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2.19 b}$$

mit A^0, A^j, B^{jk}, $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ erweitern und ergänzen dazu zwei neue Bedingungen (B) und (BKS).

Bedingung (B). Die Matrizen $B^{jk} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ besitzen die folgenden Eigenschaften:

- Für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ gilt $B^{jk} = B^{kj}$.
- Für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist die Matrix $B(\omega) := \sum_{j,k=1}^{n} B^{jk}\omega_j\omega_k$ symmetrisch und positiv semidefinit.
- Für alle $\omega,\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $\{0\} \neq \ker(B(\omega)) = \ker(B(\eta)) \neq \mathbb{C}^m$. Die von $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ unabhängige Menge $\ker(B(\omega))$ bezeichnen wir als $\ker(B)$.

Wenn (A) und (B) gelten und darüber hinaus L symmetrisch ist, folgt für das System (2.19) wie zuvor im symmetrisch-hyperbolischen Fall aus der Bedingung (K) die Eigenschaft (SK), denn (2.18) und die positive Semidefinitheit von $B(\omega)$ implizieren

$$\exists\,\alpha \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\,\omega \in \mathbb{S}^{n-1}\ \forall\, x \in \mathbb{C}^m :\ \ \langle(\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\text{sy}} + B(\omega) + L)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \geq c\,|x|^2\,,$$

wonach es sich bei αK um eine kompensierende Funktion für das System (2.19) im Sinne von [SK85, Definition 1.2] handelt.

Bemerkung 2.7 (Zum Begriff symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch). Für ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System im Sinne der Definition 2.1 ist die Bedingung (B) stets erfüllt, denn dann ist $B^{jk} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2^{jk}\end{smallmatrix}\right)$ mit $B_2^{jk} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}$ für ein $m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_2 < m$, wobei $B_2^{jk} = B_2^{kj}$ für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ gilt und die Matrix $\sum_{j,k=1}^{n} B_2^{jk}\omega_j\omega_k$ für jedes $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ symmetrisch und positiv definit ist. Dies impliziert insbesondere $\{0\} \neq \ker(B(\omega)) = \ker(B(\eta)) \neq \mathbb{C}^m$ für alle ω, $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Die Eigenschaft

$$\forall\,\omega,\eta \in \mathbb{S}^{n-1} :\ \ \ker(B(\omega)) = \ker(B(\eta))$$

wird in [KS88] als Bedingung (N) bezeichnet. Erfüllen die Matrizen des Systems (2.19 a) die Bedingungen (A), die ersten zwei Forderungen ($B^{jk} = B^{kj}$ und $B(\omega) \geq 0$ symmetrisch) der Bedingung (B) sowie die Bedingung (N), so lässt sich (2.19 a) nach [KS88, Theorem 3.1] durch Multiplikation

mit einer geeigneten orthogonalen Matrix auf ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System im Sinne der Definition 2.1 transformieren. Der Begriff symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch ist also auch dann noch gerechtfertigt, wenn wir den Punkt (iii) der Definition 2.1 durch die Forderungen „$B^{jk} = B^{kj}$ *für* $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $B(\omega)$ *symmetrisch und positiv semidefinit für alle* $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ *und es gelte die Bedingung (N)*“ ersetzen. Da im Beweis von Satz 2.2 nur die positive Semidefinitheit von $B(\omega)$ einging, ist das Anfangswertproblem (2.19) unter den Bedingungen (A) und (B) ebenso wie in der Formulierung von Satz 2.2 (ii) wohlgestellt.

Bedingung (BKS).

- Die Abbildung K aus der Bedingung (K) erfüllt $-i[K(\omega)B(\omega)]_{\text{asy}} \geq 0$ auf $\ker(B)$ für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$.
- Die Matrix S aus der Bedingung (S) erfüllt $[SB(\omega)]_{\text{sy}} \geq 0$ auf $\mathbb{C}^m$ für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Aus der Bedingung (B) lässt sich eine genauere Beschreibung der positiven Semidefinitheit von $B(\omega)$ ableiten, und zwar in Form der folgenden bezüglich ω gleichmäßigen Abschätzung, die später nützlich sein wird.

Lemma 2.8 (Positive Semidefinitheit von $B(\omega)$). *Die Bedingung (B) impliziert*

$$\exists\, c \in \mathbb{R}^+ \;\forall\, \omega \in \mathbb{S}^{n-1} \;\forall\, x \in \mathbb{C}^m : \;\; \langle B(\omega)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \geq c \left|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x\right|^2 ,$$

wobei $P_{\ker(B)}$ *die orthogonale Projektion von* $\mathbb{C}^m$ *auf* $\ker(B)$ *ist und* I_m *die* $m \times m$*-Einheitsmatrix bezeichnet.*

Beweis: Die orthogonale Projektion $P_{\ker(B)}$ auf den abgeschlossenen Unterraum $\ker(B) \neq \{0\}$ ist wohlerklärt. Für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und alle $x \in \mathbb{C}^m$ liegt $\langle B(\omega)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m}$ in $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\langle B(\omega)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} &= \langle B(\omega)P_{\ker(B)}x, P_{\ker(B)}x\rangle_{\mathbb{C}^m} + \langle B(\omega)\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x, \big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x\rangle_{\mathbb{C}^m} \\
&\quad + \langle B(\omega)P_{\ker(B)}x, \big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x\rangle_{\mathbb{C}^m} + \langle B(\omega)\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x, P_{\ker(B)}x\rangle_{\mathbb{C}^m} \\
&= \langle B(\omega)\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x, \big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x\rangle_{\mathbb{C}^m} ,
\end{aligned}$$

da $B(\omega)$ symmetrisch ist und $P_{\ker(B)}x$ in $\ker(B) = \ker(B(\omega))$ liegt. Nachdem $\ker(B) \neq \mathbb{C}^m$ vorausgesetzt ist, ist $\ker(B)^\perp \neq \{0\}$ und demzufolge die Menge $Y := \{y \in \ker(B)^\perp \mid |y| = 1\}$ nicht leer. Aus der letzten Gleichheit folgt somit

$$\langle B(\omega)x, x\rangle_{\mathbb{C}^m} \geq \left|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)x\right|^2 \min\{\langle B(\omega)y, y\rangle_{\mathbb{C}^m} \mid \omega \in \mathbb{S}^{n-1},\; y \in Y\} ,$$

wobei das Minimum aufgrund der Kompaktheit der Menge $\mathbb{S}^{n-1} \times Y$ und der Stetigkeit der Abbildung $(\omega, y) \mapsto \langle B(\omega)y, y\rangle_{\mathbb{C}^m}$ angenommen wird und dabei, aufgrund der positiven Semidefinitheit von $B(\omega)$ und der Tatsache, dass $\langle B(\omega)y, y\rangle_{\mathbb{C}^m} = |(B(\omega))^{\frac{1}{2}}y|^2 \neq 0$ für alle $(\omega, y) \in \mathbb{S}^{n-1} \times Y$ gilt, einen positiven Wert liefert. □

2.6.3 Abschätzungen im Fourierraum

Unter der Bedingung (A) und gegebenenfalls (B) besitzt das System (2.16) bzw. (2.19) zu einem Anfangswert $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m$ für $s \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0, \infty), H^s(\mathbb{R}^n))^m$. Aus den Bedingungen (K), (S), (S_1), (S_2) und gegebenenfalls (B), (BKS) lassen sich nun Aussagen zur zeitlichen Asymptotik der Lösung herleiten. Dazu wird zunächst das Abklingverhalten der

entsprechenden Lösung $\widehat{V}(\cdot) := \mathscr{F}\mathcal{S}(\cdot)V_0$ im Fourierraum untersucht, die für fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ die Anfangsbedingung $\widehat{V}(0,\xi) = (\mathscr{F}V_0)(\xi)$ und die Differentialgleichung

$$A^0\partial_t\widehat{V}(t,\xi) + \big(iA(\xi) + L\big)\widehat{V}(t,\xi) = 0\,, \quad t \in (0,\infty)\,,$$

bzw.

$$A^0\partial_t\widehat{V}(t,\xi) + \big(iA(\xi) + B(\xi) + L\big)\widehat{V}(t,\xi) = 0\,, \quad t \in (0,\infty)\,, \tag{2.20}$$

erfüllt. Im Fall eines symmetrisch-hyperbolischen Systems finden wir das Ergebnis sowie eine Aussage zur Dissipativität im Sinne von Shizuta-Kawashima in [UDK12].

Satz 2.9 (Abschätzung im Fourierraum für symmetrisch-hyperbolische Systeme). *Es sei $s \in \mathbb{N}$. Das System* (2.16) *erfülle die Bedingungen (A), (K) und (S). $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ bezeichne die zugehörige C_0-Halbgruppe, wie sie in Satz 2.2 (i) gegeben ist. Dann gilt*

(i) unter der Bedingung (S_1): $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\big|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\big| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|\,. \tag{2.21}$$

(ii) unter der Bedingung (S_2): $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\big|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\big| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|\,. \tag{2.22}$$

(Siehe [UDK12, Theorem 2.2, Theorem 2.4].)

Satz 2.10 (Dissipativität für symmetrisch-hyperbolische Systeme). *Das System* (2.16) *erfülle die Bedingungen (A), (K) und (S). Dann ist das System unter der Bedingung (S_1) gleichmäßig dissipativ vom Typ* $(1,2)$ *und unter der Bedingung (S_2) gleichmäßig dissipativ vom Typ* $(1,1)$ *im Sinne von* (2.15). (Siehe [UDK12, Theorem 4.2].)

Entsprechende Resultate sollen nun für das symmetrisch-hyperbolisch-parabolische System (2.19) bewiesen werden.

Satz 2.11 (Abschätzung im Fourierraum für symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme). *Es sei $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$. Das System* (2.19) *erfülle die Bedingungen (A), (K), (S), (B) und (BKS). $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ bezeichne die zugehörige C_0-Halbgruppe, wie sie in Satz 2.2 (ii) gegeben ist. Dann gilt*

(i) unter der Bedingung (S_1): $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\big|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\big| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|\,. \tag{2.23}$$

(ii) unter der Bedingung (S_2): $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\big|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\big| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|\,. \tag{2.24}$$

Beweis: Wir folgen dem Beweis aus [UDK12] und richten unser Augenmerk auf die zusätzlichen Terme, die durch den parabolischen Anteil $B(\xi)\widehat{V}(t,\xi)$ in der Gleichung (2.20) hervorgerufen werden. Es sei $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m$ beliebig und $\widehat{V}(t,\cdot) := \mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)$ für $t \in [0,\infty)$. Die Voraussetzung $s \geq 2$ stellt sicher, dass $\widehat{V}(t,\cdot)$ und $\widehat{V}_t(t,\cdot)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)^m$ liegen. Für $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ist $\omega(\xi) := \frac{\xi}{|\xi|}$

in $\mathbb{S}^{n-1}$ und es gilt $A(\xi) = |\xi|A(\omega(\xi))$ und $B(\xi) = |\xi|^2 B(\omega(\xi))$. Zugunsten der Übersichtlichkeit schreiben wir im Folgenden ω statt $\omega(\xi)$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ statt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^m}$. Die nachfolgenden Aussagen gelten punktweise für alle $t \in [0,\infty)$ und fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Wenn wir in (2.20) das $\mathbb{C}^m$-Skalarprodukt mit $\widehat{V}(t,\xi)$ bilden, erhalten wir

$$\langle A^0\widehat{V}_t(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + i|\xi|\langle A(\omega)\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + \langle L\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + |\xi|^2\langle B(\omega)\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle = 0\,.$$

Da die Matrizen $A(\omega)$ und $B(\omega)$ symmetrisch sind, beläuft sich der Realteil dieser Gleichung auf

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + \langle [L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + |\xi|^2\langle B(\omega)\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle = 0\,. \tag{2.25}$$

Multipliziert man die Gleichung (2.20) vorab mit der Matrix S aus der Bedingung (S), ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&\langle SA^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + |\xi|\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &+ \langle [SL]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + |\xi|^2\langle [SB(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle = 0\,.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Multiplikation von (2.20) mit $-i|\xi|K(\omega)$, wobei K die Abbildung aus der Bedingung (K) meint, führt im Skalarprodukt auf den Realteil

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}|\xi|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&\langle iK(\omega)A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + |\xi|^2\langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &- |\xi|\langle i[K(\omega)L]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle - |\xi|^3\langle i[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle = 0\,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Aus [UDK12, Remark 2.1] wissen wir, dass die bezüglich $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gleichmäßige positive Definitheit von $[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}$ auf $\ker(L)$ aus der Bedingung (K) bzw. aus (2.17) äquivalent ist zu der Eigenschaft

$$\exists\,\alpha \in \mathbb{R}^+\ \exists\,c_1 \in \mathbb{R}^+\ \forall\,\omega \in \mathbb{S}^{n-1}\ \forall\,x \in \mathbb{C}^m:\ \langle(\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} + [SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}})x,x\rangle \geq c_1|x|^2\,. \tag{2.28}$$

Die Gleichungen (2.26) und (2.27) werden nun in der Form $(1+|\xi|^2)\cdot(2.26) + \alpha_2\alpha\cdot(2.27)$ zusammengesetzt, wobei α die Konstante aus (2.28) und $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ eine vorerst beliebige Konstante ist:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(1+|\xi|^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\langle SA^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle - \frac{\alpha_2|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle i\alpha K(\omega)A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\Big)\\ &= -(1+|\xi|^2)\langle [SL]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle - \alpha_2|\xi|^2\langle \alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &\quad - |\xi|(1+|\xi|^2)\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + \alpha_2|\xi|\langle i\alpha[K(\omega)L]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &\quad - |\xi|^2(1+|\xi|^2)\langle [SB(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle + \alpha_2|\xi|^3\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Für das weitere Vorgehen unterscheiden wir zwischen den Fällen (i) und (ii).

(i) Gilt die Bedingung (S_1), so fügt man die Gleichungen (2.25) und (2.29) gemäß der Vorschrift $(1+|\xi|^2)^2\cdot(2.25) + \alpha_1\cdot(2.29)$ mit einer vorerst beliebigen Konstanten $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$ zusammen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\langle A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\frac{\alpha_1}{1+|\xi|^2}\langle SA^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad\qquad-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|}{\left(1+|\xi|^2\right)^2}\langle i\alpha K(\omega)A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\Big)\\
&=-\left(1+|\xi|^2\right)^2\langle[L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle-|\xi|^2\left(1+|\xi|^2\right)^2\langle B(\omega)\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\quad-\alpha_1\left(1+|\xi|^2\right)\langle[SL]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle-\alpha_1\alpha_2|\xi|^2\langle\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\quad-\alpha_1|\xi|\left(1+|\xi|^2\right)\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\alpha_1\alpha_2|\xi|\langle i\alpha[K(\omega)L]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\quad-\alpha_1|\xi|^2\left(1+|\xi|^2\right)\langle[SB(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\quad+\alpha_1\alpha_2|\xi|^3\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Wir definieren die Energie E durch

$$
\begin{aligned}
E(t,\xi):=\langle A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle&+\frac{\alpha_1}{1+|\xi|^2}\langle SA^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|}{\left(1+|\xi|^2\right)^2}\langle i\alpha K(\omega)A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle
\end{aligned}
$$

und legen eine Reihe an Hilfsfunktionalen fest:

$$
\begin{aligned}
D_1(t,\xi)&:=\langle[L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\frac{\alpha_1}{1+|\xi|^2}\langle[SL]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad+\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^2}{\left(1+|\xi|^2\right)^2}\langle\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
D_2(t,\xi)&:=|\xi|^2\langle B(\omega)\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
D_3(t,\xi)&:=\frac{\alpha_1|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})}\widehat{V}(t,\xi),P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})}\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
D_4(t,\xi)&:=-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^3}{\left(1+|\xi|^2\right)^2}\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi),P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
&\qquad+\frac{\alpha_1|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\langle[SB(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
G_1(t,\xi)&:=\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|}{\left(1+|\xi|^2\right)^2}\langle i\alpha[K(\omega)L]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle-\frac{\alpha_1|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad+\frac{\alpha_1|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})}\widehat{V}(t,\xi),P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})}\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
G_2(t,\xi)&:=\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^3}{\left(1+|\xi|^2\right)^2}\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^3}{\left(1+|\xi|^2\right)^2}\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi),P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Dann schreibt sich (2.30) als

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,\xi)=-2D_1(t,\xi)-2D_2(t,\xi)-2D_3(t,\xi)-2D_4(t,\xi)+2G_1(t,\xi)+2G_2(t,\xi)\,. \tag{2.31}
$$

Die Energie erfüllt die Ungleichungen

$$a_1(\alpha_1,\alpha_2)\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \geq E(t,\xi) \geq a_2(\alpha_1,\alpha_2)\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \tag{2.32}$$

mit

$$\begin{aligned} a_1(\alpha_1,\alpha_2) &:= \|A^0\| + \alpha_1\|SA^0\| + \alpha_1\alpha_2\alpha \max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}\|K(\omega)A^0\|\,, \\ a_2(\alpha_1,\alpha_2) &:= c_0 - \alpha_1\|SA^0\| - \alpha_1\alpha_2\alpha \max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}\|K(\omega)A^0\|\,, \end{aligned}$$

wobei $c_0 \in \mathbb{R}^+$ eine geeignete Konstante gemäß der positiven Definitheit von A^0 ist. Damit stellt E eine zu $|\widehat{V}|^2$ äquivalente Funktion dar, sofern die Konstanten α_1 und α_2 hinreichend klein gewählt werden, also beispielsweise α_2 aus dem Intervall $(0,\frac{1}{2}]$ und α_1 aus $(0,d_1]$, wobei $d_1 := \min\{\frac{c_0}{4\|SA^0\|}, \frac{c_0}{2\alpha\max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}\|K(\omega)A^0\|}\}$ für $SA^0 \neq 0$ und $d_1 := \frac{c_0}{\alpha\max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}\|K(\omega)A^0\|}$ für $SA^0 = 0$ zu setzen ist.

Unser Ziel ist eine Abschätzung der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,\xi) \leq -c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}E(t,\xi)$ für ein $c \in \mathbb{R}^+$. Nach den Bedingungen (S_1) und (BKS) sind $D_3(t,\xi)$ und $D_4(t,\xi)$ positiv semidefinit, weshalb aus (2.31)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,\xi) \leq -2D_1(t,\xi) - 2D_2(t,\xi) + 2G_1(t,\xi) + 2G_2(t,\xi) \tag{2.33}$$

folgt. Analog zum Beweis von Lemma 2.8 begründet man, dass die positive Semidefinitheit von $[L]_{\mathrm{sy}}$ und $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}$ aus den Bedingungen (A) und (S) die folgenden Ungleichungen impliziert:

$$\begin{aligned} &\exists\, c_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, x \in \mathbb{C}^m :\ \langle([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}})x, x\rangle \geq c_2\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker(L)})x\big|^2\,, \\ &\exists\, c_3 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, x \in \mathbb{C}^m :\ \langle[L]_{\mathrm{sy}}x, x\rangle \geq c_3\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})})x\big|^2\,. \end{aligned}$$

Wie in [UDK12, (3.9)-(3.11)] erhalten wir damit

$$\begin{aligned} 2(1+|\xi|^2)^2 D_1(t,\xi) &= 2\alpha_1\alpha_2|\xi|^2\langle(\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} + [SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}})\widehat{V}(t,\xi), \widehat{V}(t,\xi)\rangle \\ &\quad + 2\alpha_1((1+|\xi|^2) - \alpha_2|\xi|^2)\langle([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}})\widehat{V}(t,\xi), \widehat{V}(t,\xi)\rangle \\ &\quad + 2(1+|\xi|^2)((1+|\xi|^2) - \alpha_1)\langle[L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi), \widehat{V}(t,\xi)\rangle \\ &\geq 2\alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 + \alpha_1 c_2(1+|\xi|^2)\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker(L)})\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \\ &\quad + c_3(1+|\xi|^2)^2\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})})\widehat{V}(t,\xi)\big|^2\,, \end{aligned} \tag{2.34}$$

sofern α_1 und α_2 aus dem Intervall $(0,\frac{1}{2}]$ sind. Wie in [UDK12, (3.12)-(3.14)] ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned} 2(1+|\xi|^2)^2 G_1(t,\xi) &= 2\alpha_1\alpha_2|\xi|\ \mathrm{Re}\,\langle i\alpha K(\omega)L(\mathrm{I}_m - P_{\ker(L)})\widehat{V}(t,\xi), \widehat{V}(t,\xi)\rangle \\ &\quad - 2\alpha_1|\xi|(1+|\xi|^2)\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})}\widehat{V}(t,\xi), (\mathrm{I}_m - P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})})\widehat{V}(t,\xi)\rangle \\ &\quad - 2\alpha_1|\xi|(1+|\xi|^2)\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}(\mathrm{I}_m - P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})})\widehat{V}(t,\xi), \widehat{V}(t,\xi)\rangle \\ &\leq \alpha_1\alpha_2\Big(\varepsilon_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}c_4\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker(L)})\widehat{V}(t,\xi)\big|^2\Big) \\ &\quad + 2\alpha_1\Big(\varepsilon_2|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}c_5(1+|\xi|^2)^2\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})})\widehat{V}(t,\xi)\big|^2\Big) \\ &= \alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 + 2\alpha_1\alpha_2\frac{c_4}{c_1}\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker(L)})\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \\ &\quad + 8\alpha_1\frac{c_5}{\alpha_2 c_1}(1+|\xi|^2)^2\big|(\mathrm{I}_m - P_{\ker([L]_{\mathrm{sy}})})\widehat{V}(t,\xi)\big|^2\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Hierbei wurden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung A.13 und die Youngsche Ungleichung A.12 mit $\varepsilon_1 := \frac{c_1}{2}$ und $\varepsilon_2 := \frac{\alpha_2 c_1}{4}$ verwendet. Die Konstanten können als $c_4 := \alpha \max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}} \|K(\omega)L\|^2$ und $c_5 := \max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}} \|[SA(\omega)]_{\text{asy}}\|^2$ gewählt werden. Aus den Abschätzungen (2.34), (2.35) und der Tatsache $1 \le 1 + |\xi|^2$ folgt

$$\begin{aligned}
2\big(1+|\xi|^2\big)^2\big(-D_1(t,\xi)+G_1(t,\xi)\big) &\le -\alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \\
&\quad - \alpha_1\Big(c_2 - 2\alpha_2\frac{c_4}{c_1}\Big)(1+|\xi|^2)\big|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(L)}\big)\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \\
&\quad - \Big(c_3 - 8\alpha_1\frac{c_5}{\alpha_2 c_1}\Big)\big(1+|\xi|^2\big)^2\big|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker([L]_{\text{sy}})}\big)\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \\
&\le -\alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 , \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

sofern man die Konstanten α_1 und α_2 so wählt, dass $0 < \alpha_2 \le \min\{\frac{1}{2}, d_2\}$ mit $d_2 := \frac{c_1 c_2}{2c_4}$ und $0 < \alpha_1 \le \min\{\frac{1}{2}, d_3(\alpha_2)\}$ mit $d_3(\alpha_2) := \frac{\alpha_2 c_1 c_3}{8c_5}$ gelten; dabei sei $\frac{1}{0} := \infty$, falls $c_4 = 0$ oder $c_5 = 0$ ist. Zudem wissen wir aus Lemma 2.8, dass eine Konstante $c_6 \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$2\big(1+|\xi|^2\big)^2 D_2(t,\xi) \ge 2c_6|\xi|^2\big(1+|\xi|^2\big)^2\big|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 . \qquad (2.37)$$

Die Abschätzung des Terms $G_2(t,\xi)$ erfolgt nach demselben Prinzip wie bei $G_1(t,\xi)$ mithilfe der Ungleichungen von Cauchy-Schwarz, Young und $\big|P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi)\big| \le \big|\widehat{V}(t,\xi)\big|$. Dies liefert

$$\begin{aligned}
2\big(1+|\xi|^2\big)^2 G_2(t,\xi) &= 2\alpha_1\alpha_2|\xi|^3\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\text{asy}} P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi), \big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)\widehat{V}(t,\xi)\rangle \\
&\quad + 2\alpha_1\alpha_2|\xi|^3\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\text{asy}}\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)\widehat{V}(t,\xi), \widehat{V}(t,\xi)\rangle \\
&\le 2\alpha_1\alpha_2\Big(\varepsilon_3|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 + \frac{1}{\varepsilon_3}c_7|\xi|^4\big|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)\widehat{V}(t,\xi)\big|^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 + 8\alpha_1\alpha_2\frac{c_7}{c_1}|\xi|^4\big|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

mit $c_7 := \alpha \max_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}} \|[K(\omega)B(\omega)]_{\text{asy}}\|^2$ und $\varepsilon_3 := \frac{c_1}{4}$. Zusammengefasst ergeben die vorangehenden Abschätzungen (2.36), (2.37) und (2.38)

$$\begin{aligned}
&2\big(1+|\xi|^2\big)^2\big(-D_1(t,\xi) - D_2(t,\xi) + G_1(t,\xi) + G_2(t,\xi)\big) \\
&\quad \le -\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 - 2|\xi|^2\Big(c_6\big(1+|\xi|^2\big)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\frac{c_7}{c_1}|\xi|^2\Big)\big|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \\
&\quad \le -\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 - 2|\xi|^2\Big(2c_6|\xi|^2 - 4\alpha_1\alpha_2\frac{c_7}{c_1}|\xi|^2\Big)\big|\big(\mathrm{I}_m - P_{\ker(B)}\big)\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \\
&\quad \le -\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 c_1|\xi|^2\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

für $0 < \alpha_2 \le \min\{\frac{1}{2}, d_2\}$ und $0 < \alpha_1 \le \min\{\frac{1}{2}, d_3(\alpha_2), \frac{c_1 c_6}{c_7}\}$. Um allen genannten Einschränkungen an α_1 und α_2 gerecht zu werden, fixieren wir die beiden Parameter nun so, dass die Ungleichungen $0 < \alpha_2 \le \min\{\frac{1}{2}, d_2\}$ und $0 < \alpha_1 \le \min\{\frac{1}{2}, d_1, d_3(\alpha_2), \frac{c_1 c_6}{c_7}\}$ erfüllt sind. Ausgehend von (2.33) führen dann (2.39) und (2.32) auf die Abschätzung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,\xi) \le -\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 c_1\frac{|\xi|^2}{\big(1+|\xi|^2\big)^2}\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2 \le -2c\frac{|\xi|^2}{\big(1+|\xi|^2\big)^2}E(t,\xi) \quad \text{mit } c := \frac{\alpha_1\alpha_2 c_1}{4a_1(\alpha_1,\alpha_2)} .$$

Mithilfe des Lemmas von Grönwall A.15 und nochmals der Ungleichung (2.32) folgt daraus

$$E(t,\xi) \le e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}E(0,\xi) \quad \text{und} \quad \big|\widehat{V}(t,\xi)\big| \le Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}\big|\widehat{V}(t,\xi)\big| \quad \text{mit } C := \sqrt{\frac{a_1(\alpha_1,\alpha_2)}{a_2(\alpha_1,\alpha_2)}} .$$

Da die Konstanten c und C nicht nur unabhängig von t und ξ, sondern auch unabhängig von $\widehat{V}$ und damit vom Anfangswert V_0 sind, ist die Behauptung unter der Bedingung (S_1) gezeigt.

(ii) Liegt die Bedingung (S_2) vor, so kann der Faktor $(1+|\xi|^2)^2$, mit dem die Gleichung (2.25) in der vorhergehenden Situation gewichtet wurde und der maßgeblich für die Abklingrate ist, um eine Potenz auf $(1+|\xi|^2)$ reduziert werden. Fügen wir also die Gleichungen (2.25) und (2.29) in der Form $(1+|\xi|^2)\cdot(2.25)+\alpha_1\cdot(2.29)$ mit einer vorerst beliebigen Konstante $\alpha_1\in\mathbb{R}^+$ zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1+|\xi|^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\langle A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\alpha_1\langle SA^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle i\alpha K(\omega)A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\Big)\\
&\quad=-(1+|\xi|^2)\langle[L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle-|\xi|^2(1+|\xi|^2)\langle B(\omega)\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad-\alpha_1(1+|\xi|^2)\langle[SL]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle-\alpha_1\alpha_2|\xi|^2\langle\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad-\alpha_1|\xi|(1+|\xi|^2)\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\alpha_1\alpha_2|\xi|\langle i\alpha[K(\omega)L]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad-\alpha_1|\xi|^2(1+|\xi|^2)\langle[SB(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\alpha_1\alpha_2|\xi|^3\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\quad\le(1+|\xi|^2)\big(-D_1(t,\xi)-D_2(t,\xi)-D_3(t,\xi)+G_1(t,\xi)+G_2(t,\xi)\big)\,.
\end{aligned}$$

Hierbei konnten die beiden Terme mit den Matrizen $i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}}$ und $[SB(\omega)]_{\mathrm{sy}}$ aufgrund der nach (S_2) und (BKS) geltenden positiven Semidefinitheit in der Abschätzung entfallen, und die verbleibenden Ausdrücke sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
D_1(t,\xi)&:=\langle[L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\alpha_1\langle[SL]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad+\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\langle\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
D_2(t,\xi)&:=|\xi|^2\langle B(\omega)\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
D_3(t,\xi)&:=-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^3}{1+|\xi|^2}\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi),P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
G_1(t,\xi)&:=\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle i\alpha[K(\omega)L]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,,\\
G_2(t,\xi)&:=\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^3}{1+|\xi|^2}\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\
&\qquad-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|^3}{1+|\xi|^2}\langle i\alpha[K(\omega)B(\omega)]_{\mathrm{asy}}P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi),P_{\ker(B)}\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Als Energie definieren wir

$$E(t,\xi):=\langle A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle+\alpha_1\langle SA^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle-\frac{\alpha_1\alpha_2|\xi|}{1+|\xi|^2}\langle i\alpha K(\omega)A^0\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\,.$$

Dann erfüllt E die Abschätzung aus (2.32)

$$a_1(\alpha_1,\alpha_2)\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2\ge E(t,\xi)\ge a_2(\alpha_1,\alpha_2)\big|\widehat{V}(t,\xi)\big|^2$$

mit den dort angegebenen und von $\alpha_1\in(0,d_1]$ und $\alpha_2\in(0,\frac{1}{2}]$ abhängigen Konstanten a_1 und a_2. Aufgrund der Bedingung (BKS) ist $D_3(t,\xi)$ positiv semidefinit und daher

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t,\xi)\le-2D_1(t,\xi)-2D_2(t,\xi)+2G_1(t,\xi)+2G_2(t,\xi)\,.$$

Die nachfolgend auftretenden Konstanten c_1, c_2 und c_4 seien wie unter (i) definiert. Statt (2.34) verwenden wir nun

$$\begin{aligned}2(1+|\xi|^2)D_1(t,\xi) &= 2\alpha_1\alpha_2|\xi|^2\langle(\alpha[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}+[SL]_{\mathrm{sy}}+[L]_{\mathrm{sy}})\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &\quad+2\alpha_1((1+|\xi|^2)-\alpha_2|\xi|^2)\langle([SL]_{\mathrm{sy}}+[L]_{\mathrm{sy}})\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &\quad+2(1-\alpha_1)(1+|\xi|^2)\langle[L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &\geq 2\alpha_1\alpha_2c_1|\xi|^2|\widehat{V}(t,\xi)|^2+\alpha_1c_2(1+|\xi|^2)|(\mathrm{I}_m-P_{\ker(L)})\widehat{V}(t,\xi)|^2\end{aligned}$$

für $\alpha_1,\alpha_2\in(0,\frac{1}{2}]$. Anders als in (i) ist hier die gröbere Abschätzung $\langle[L]_{\mathrm{sy}}\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\geq 0$ gemäß der positiven Semidefinitheit von $[L]_{\mathrm{sy}}$ ausreichend. Nach einer entsprechend verkürzten Variante von (2.35), vergleiche auch [UDK12, (3.22)], ist

$$\begin{aligned}2(1+|\xi|^2)G_1(t,\xi) &= 2\alpha_1\alpha_2|\xi|\,\mathrm{Re}\langle i\alpha K(\omega)L(\mathrm{I}_m-P_{\ker(L)})\widehat{V}(t,\xi),\widehat{V}(t,\xi)\rangle\\ &\leq \alpha_1\alpha_2c_1|\xi|^2|\widehat{V}(t,\xi)|^2+\alpha_1\alpha_2\frac{c_4}{c_1}|(\mathrm{I}_m-P_{\ker(L)})\widehat{V}(t,\xi)|^2\,.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$2(1+|\xi|^2)(-D_1(t,\xi)+G_1(t,\xi))\leq-\alpha_1\alpha_2c_1|\xi|^2|\widehat{V}(t,\xi)|^2$$

für $\alpha_1\in(0,\frac{1}{2}]$ und $0<\alpha_2\leq\min\{\frac{1}{2},d_2\}$ mit $d_2:=\frac{c_1c_2}{c_4}$. Für die Terme $D_2(t,\xi)$ und $G_2(t,\xi)$ können die Abschätzungen (2.37) und (2.38) übernommen werden, dabei ist lediglich $(1+|\xi|^2)^2$ durch $(1+|\xi|^2)$ zu ersetzen. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}&2(1+|\xi|^2)(-D_1(t,\xi)-D_2(t,\xi)+G_1(t,\xi)+G_2(t,\xi))\\ &\quad\leq-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2c_1|\xi|^2|\widehat{V}(t,\xi)|^2-2|\xi|^2\Big(c_6(1+|\xi|^2)-4\alpha_1\alpha_2\frac{c_7}{c_1}|\xi|^2\Big)|(\mathrm{I}_m-P_{\ker(B)})\widehat{V}(t,\xi)|^2\\ &\quad\leq-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2c_1|\xi|^2|\widehat{V}(t,\xi)|^2\,,\end{aligned}$$

sofern $0<\alpha_1\leq\min\{\frac{1}{2},\frac{c_1c_6}{2c_7}\}$ und $0<\alpha_2\leq\min\{\frac{1}{2},d_2\}$ gelten. Wenn wir die Parameter α_1 und α_2 schließlich so wählen, dass $0<\alpha_1\leq\min\{\frac{1}{2},d_1,\frac{c_1c_6}{2c_7}\}$ und $0<\alpha_2\leq\min\{\frac{1}{2},d_2\}$ erfüllt sind, folgt wie zuvor

$$|\widehat{V}(t,\xi)|\leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)}t}|\widehat{V}(t,\xi)|\quad\text{mit}\quad c:=\frac{\alpha_1\alpha_2c_1}{4a_1(\alpha_1,\alpha_2)}\quad\text{und}\quad C:=\sqrt{\frac{a_1(\alpha_1,\alpha_2)}{a_2(\alpha_1,\alpha_2)}}\,.$$

□

Neben der Abschätzung im Fourierraum erhalten wir auch ein Resultat zur Dissipativität im Sinne von Shizuta-Kawashima.

Satz 2.12 (Dissipativität für symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme). *Das System* (2.19) *erfülle die Bedingungen (A), (K), (S), (B) und (BKS). Dann ist das System unter der Bedingung (S_1) gleichmäßig dissipativ vom Typ* $(1,2)$ *und unter der Bedingung (S_2) gleichmäßig dissipativ vom Typ* $(1,1)$ *im Sinne von* (2.15).

Beweis: Die Aussage ließe sich wie in [UDK12, Theorem 4.2] begründen. Wir möchten einen alternativen Beweis angeben, der die Lösungsdarstellung aus Satz 2.2 nutzt. Es sei $\beta(\xi):=\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}$ im Fall der Bedingung (S_1) und $\beta(\xi):=\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}$ im Fall der Bedingung (S_2). Nach Satz 2.11 existieren zwei Konstanten $C,c\in\mathbb{R}^+$, sodass für alle $V_0\in H^2(\mathbb{R})^m$, alle $t\in[0,\infty)$ und fast alle $\xi\in\mathbb{R}^n$ gilt:

$$|(A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\xi)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}(\mathscr{F}V_0)(\xi)|=|\mathscr{F}\mathcal{S}(t)V_0(\xi)|\leq Ce^{-c\beta(\xi)t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,.$$

Da $|(A^0)^{\frac{1}{2}}\cdot|$ und $|\cdot|$ äquivalente Normen auf $\mathbb{C}^m$ bilden und $(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F} : H^2(\mathbb{R}^n)^m \to L^2_2(\mathbb{R}^n)^m$ surjektiv ist, folgt daraus $\left|e^{M(\xi)t}f(\xi)\right| \leq Ce^{-c\beta(\xi)t}\left|f(\xi)\right|$ für alle $f \in L^2_2(\mathbb{R}^n)^m$, alle $t \in [0,\infty)$ und fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, wobei die Konstante C entsprechend der Normenäquivalenz anzupassen ist. Insbesondere trifft diese Aussage auf jedes $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)^m$ zu und aus Gründen der Stetigkeit gilt die Abschätzung dann auch punktweise in $\xi \in \mathbb{R}^n$. Da zu einem $\xi \in \mathbb{R}^n$ und einem Vektor $x \in \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$ stets ein $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)^m$ mit $\xi \in \operatorname{supp}(f)$ und $f(\xi) = x$ existiert, muss schon $|e^{M(\xi)t}x| \leq Ce^{-c\beta(\xi)t}|x|$ für alle $x \in \mathbb{C}^m$, also $\|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \leq Ce^{-c\beta(\xi)t}$ gelten. Nach Definition der Wachstumsschranke ω und der Tatsache, dass diese mit der Spektralschranke s übereinstimmt (siehe Abschnitt 2.5.2), folgt daraus

$$\max\{\operatorname{Re}(\lambda(\xi)) \mid \lambda(\xi) \text{ Eigenwert von } M(\xi)\} = s(M(\xi)) = \omega(e^{M(\xi)\cdot}) \leq -c\beta(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dies entspricht jedoch gerade der gleichmäßigen Dissipativität im Sinne (2.15) von Shizuta-Kawashima. □

2.6.4 L^p-L^q-Abschätzungen

Aus den Abschätzungen im Fourierraum lassen sich eine L^2-L^2- und eine L^1-L^∞-Abschätzung sowie daraus durch Interpolation eine L^p-L^q-Abschätzung für die Lösung des Anfangswertproblems (2.16) bzw. (2.19) herleiten.

Wir legen dazu die folgenden Schreibweisen fest: Ist $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1,\infty]$ und $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)^m$, so soll der Ausdruck $\partial_x^k f \in L^p(\mathbb{R}^n)^m$ bedeuten, dass $\partial_x^\alpha f := (\partial_x^\alpha f_1, \ldots, \partial_x^\alpha f_m)^\mathsf{T}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ in $L^p(\mathbb{R}^n)^m$ liegt. Dabei ist $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Entsprechend ist mit $\mathscr{F}\partial_x^k f \in L^p(\mathbb{R}^n)^m$ gemeint, dass $\mathscr{F}(\partial_x^\alpha f) := (\mathscr{F}(\partial_x^\alpha f_1), \ldots, \mathscr{F}(\partial_x^\alpha f_m))^\mathsf{T}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ in $L^p(\mathbb{R}^n)^m$ liegt. Die Ausdrücke $\|\partial_x^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m}$ und $\|\mathscr{F}\partial_x^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m}$ sind zu lesen als

$$\|\partial_x^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} := \Big(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial_x^\alpha f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)^m}\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\mathscr{F}\partial_x^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} := \Big(\sum_{|\alpha|=k} \|\mathscr{F}(\partial_x^\alpha f)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)^m}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

für $p \in [1,\infty)$, und im Fall $p = \infty$

$$\|\partial_x^k f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m} := \max_{|\alpha|=k}\|\partial_x^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}, \quad \|\mathscr{F}(\partial_x^k f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m} := \max_{|\alpha|=k}\|\mathscr{F}(\partial_x^\alpha f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}.$$

Satz 2.13 (L^p-L^2-Abschätzung). *Es seien $s, s_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $s_0 \leq s$ und $p \in [1,2]$. Das System* (2.16) *bzw.* (2.19) *erfülle die Bedingungen (A), (K) und (S) bzw. (A), (K), (S), (B) und (BKS). $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ bezeichne die zugehörige C_0-Halbgruppe, wie sie in Satz 2.2 (i) bzw. (ii) gegeben ist. Dann liegt*

(i) unter der Bedingung (S_1) ein Abklingverhalten des folgenden Regularity-Loss-Typs vor:

$$\begin{aligned}
&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m \cap W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)^m\\
&\forall\, j,k,l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k+l \leq s \text{ und } j \leq \min\{n(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{2})+k, s_0\}\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\
&\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq C_1(1+t)^{-n\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}\right)-\frac{k-j}{2}}\|\partial_x^j V_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} + C_2(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}.
\end{aligned}$$

(ii) unter der Bedingung (S_2) ein Abklingverhalten des folgenden Standard-Typs vor:

$$\begin{aligned}
&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m \cap W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)^m\\
&\forall\, j,k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \leq s \text{ und } j \leq \min\{n(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{2})+k, s_0\}\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\
&\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq C_1(1+t)^{-n\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}\right)-\frac{k-j}{2}}\|\partial_x^j V_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} + C_2 e^{-ct}\|\partial_x^k V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}.
\end{aligned}$$

Beweis: In [UDK12, Theorem 2.2, 2.4] findet sich die Aussage für den Fall, dass ein symmetrisch-hyperbolisches System vorliegt und $s_0 = 0$ und $p = 1$ ist. Wir zeigen, ähnlich einem Beweis in [JR00, S. 43 f.], dass die hier formulierte Verallgemeinerung gilt. Vorerst sei $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$. Die folgenden Aussagen sind für alle $t \in [0, \infty)$ und beliebige $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m \cap W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)^m$ gültig.

Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq s$. Nach dem Satz von Plancherel A.8 und der Ungleichung A.11 (siehe Anhang A.3) gilt für eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}^+$, die wegen $k \leq s$ unabhängig von k gewählt werden kann,

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} &= \left\|\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq c_0 \left\||\cdot|^k \mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \\ &= c_0\left(\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k} \left|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2k} \left|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right).\end{aligned}$$

Für $|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)|$ haben wir die Abschätzungen aus Satz 2.9 bzw. Satz 2.11 zur Verfügung.

(i) Unter der Bedingung (S_1) ergibt sich mit der Abschätzung (2.21) aus Satz 2.9 bzw. (2.23) aus Satz 2.11

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq c_0\Bigg(&\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k} e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\ &+ \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2k} e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\Bigg). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Für $|\xi| \leq 1$ ist $\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2} \geq \frac{1}{4}|\xi|^2$ und daher

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k} e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \leq \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2(k-j)} e^{-\frac{c}{2}|\xi|^2 t} \left||\xi|^j (\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\,,$$

wobei wir ein beliebiges $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq \min\{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) + k, s_0\}$ wählen können. Mit der Hölderschen Ungleichung A.1 folgt daraus

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k} e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \leq c_1\left(\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2(k-j)\frac{p}{2-p}} e^{-\frac{c}{2}\frac{p}{2-p}|\xi|^2 t}\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{2-p}{p}} \left\||\cdot|^j (\mathscr{F}V_0)\right\|^2_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^n)^m}$$

für eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}^+$. Mithilfe der Ungleichungen A.11 und A.16 ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k} e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi &\leq c_2(1+t)^{-\left(\frac{2(k-j)\frac{p}{2-p}}{2} + \frac{n}{2}\right)\frac{2-p}{p}} \left\|\mathscr{F}(\partial_x^j V_0)\right\|^2_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^n)^m} \\ &= c_2(1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-(k-j)} \left\|\mathscr{F}(\partial_x^j V_0)\right\|^2_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^n)^m}\end{aligned}$$

für eine Konstante $c_2 \in \mathbb{R}^+$, die wegen $k \leq s$ und $j \leq s_0$ unabhängig von k und j gewählt werden kann. Da j nicht größer als s_0 ist, liegt $\partial_x^j V_0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)^m$; des Weiteren sind $p \in [1, 2]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$. Dies sind die Voraussetzungen, um mit der Ungleichung von Hausdorff-Young A.10 auf

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2k} e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \leq c_3(1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-(k-j)} \left\|\partial_x^j V_0\right\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} \tag{2.41}$$

mit einer Konstanten $c_3 \in \mathbb{R}^+$ schließen zu können. Für den zweiten Integralterm aus (2.40) ergibt sich mit $\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2} \geq \frac{1}{4|\xi|^2}$ für $|\xi| \geq 1$ sowie den Abschätzungen aus Lemma A.11 und Lemma A.16

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2k} e^{-2c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi &\leq \sup_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-2l} e^{-\frac{c}{2}|\xi|^{-2}t} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2(k+l)} \left|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\leq c_4(1+t)^{-l} \left\|\partial_x^{k+l} V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}\end{aligned} \tag{2.42}$$

für eine Konstante $c_4 \in \mathbb{R}^+$, sofern $l \in \mathbb{N}_0$ so gewählt wird, dass $k + l \leq s$ ist. Insgesamt haben wir damit

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} \leq c_0 c_3 (1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-(k-j)} \left\|\partial_x^j V_0\right\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} + c_0 c_4 (1+t)^{-l} \left\|\partial_x^{k+l} V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} .$$

Ziehen wir noch die Wurzel und verwenden die Ungleichung $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für $a, b \geq 0$, ergibt sich die behauptete Abschätzung.

(ii) Unter der Bedingung (S_1) wird das Abklingen im Fourierraum durch (2.22) aus Satz 2.9 bzw. (2.24) aus Satz 2.11 beschrieben. Die Abschätzungen (2.40) und (2.41) behalten ihre Gültigkeit, wenn man darin und in deren Herleitung $\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}$ durch $\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}$ ersetzt. Die Ungleichung (2.42) vereinfacht sich, da der dann auftretende Exponentialterm $e^{-2c\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}$ für $|\xi| \geq 1$ wegen $\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} \geq \frac{1}{2}$ direkt durch e^{-ct} abgeschätzt werden kann.

Für $s \in \{0, 1\}$ kann $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^m \cap W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)^m$ aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)^m$ durch eine Folge aus $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)^m$ approximiert werden. Da $\mathcal{S}(t)$ auf $H^s(\mathbb{R}^n)^m$ stetig ist, überträgt sich die für die Folgenglieder geltende Abschätzung auf V_0. □

Bemerkung 2.14 (Regularitätsanforderungen). In [XK15] wurde für den Fall einer symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix L unter der Shizuta-Kawashima-Bedingung gezeigt, dass die Regularität $L^2(\mathbb{R}^n)^m \cap \dot{B}^{-s}_{2,\infty}(\mathbb{R}^n)^m$ zu $s > 0$ ausreicht, um die Abklingrate $(1+t)^{-\frac{s}{2}}$ zu erzielen. Insbesondere gilt für den homogenen Besovraum die Einbettung $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^{-s}_{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ für $s = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$. Damit kann also die in der L^p-L^2-Abschätzung geforderte Regularität an die Anfangsdaten abgeschwächt werden. Andererseits kann eine etwas höhere Regularität der Anfangsdaten zu einer besseren Abklingrate führen. So wurde bei konkreten Gleichungen in [DS13; RS13] für Anfangsdaten aus $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}, (1+|x|)^\gamma \, \mathrm{d}x)$ mit $\gamma \in [0, 1]$ ein gegenüber Anfangsdaten aus $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ um den Faktor $(1+t)^{-\frac{\gamma}{2}}$ besseres Abklingen erreicht.

Satz 2.15 (L^1-L^∞-Abschätzung). *Es sei $s \in \mathbb{N}_0$ bzw. $s \in \mathbb{N}$ und das System* (2.16) *bzw.* (2.19) *erfülle die Bedingungen (A), (K) und (S) bzw. (A), (K), (S), (B) und (BKS). $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ bezeichne die zugehörige C_0-Halbgruppe, wie sie in Satz 2.2 (i) bzw. (ii) gegeben ist. Dann gilt*

(i) unter der Bedingung (S_1):

$$\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+ \; \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+ \; \forall\, V_0 \in W^{s+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m \; \forall\, k, l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k + l \leq s \;\; \forall\, t \in [0, \infty) :$$
$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m} \leq C_1 (1+t)^{-\frac{k+n}{2}} \|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} + C_2 (1+t)^{-\frac{l}{2}} \|V_0\|_{W^{k+l+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m} .$$

(ii) unter der Bedingung (S_2):

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+ \; \forall\, V_0 \in W^{s+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m \; \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \leq s \;\; \forall\, t \in [0, \infty) :$$
$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m} \leq C (1+t)^{-\frac{k+n}{2}} \|V_0\|_{W^{k+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m} .$$

Beweis: Der Ausdruck $\mathcal{S}(t)V_0$ ist für $V_0 \in W^{s+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m$ wohlerklärt und liegt in $H^{s+1}(\mathbb{R}^n)^m$, denn nach den Einbettungssätzen A.3 und A.4 ist $W^{s+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow W^{s+1,2}(\mathbb{R}^n)^m = H^{s+1}(\mathbb{R}^n)^m$. Ein Beweis in [JR00, S. 83] liefert die Begründung für die Abschätzung im Fall (ii). An diesem orientieren wir uns auch, wenn wir nun die Abschätzung für die Situation aus (i) beweisen. Die folgenden Aussagen gelten stets für beliebige $V_0 \in W^{s+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m$ und $t \in [0, \infty)$.

Es seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k + l \leq s$. Manche der im Folgenden auftretenden Konstanten hängen zunächst von k oder l ab, können jedoch dann wegen $k + l \leq s$ auch unabhängig von k und l (und nur noch abhängig von s) gewählt werden.

Unter der Bedingung (S_1) gilt im Fourierraum die Abschätzung (2.21) aus Satz 2.9 bzw. (2.23) aus Satz 2.11. Mit dieser und Lemma A.11 ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}(\partial_x^k\mathcal{S}(t)V_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} &\leq c_0\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^k e^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\ &= c_0\Big(\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^k e^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi+\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^k e^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\Big)\end{aligned}$$

für eine Konstante $c_0\in\mathbb{R}^+$. Für $|\xi|\leq 1$ ist $\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}\geq\frac{1}{4}|\xi|^2$ und für $|\xi|\geq 1$ gilt $\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}\geq\frac{1}{4|\xi|^2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{F}(\partial_x^k\mathcal{S}(t)V_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\quad\leq c_0\Big(\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^k e^{-\frac{c}{4}|\xi|^2t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi+\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{k+l}|\xi|^{-l}e^{-\frac{c}{4}|\xi|^{-2}t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\Big)\\ &\quad\leq c_1\Big(\|\mathscr{F}V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^k e^{-\frac{c}{4}|\xi|^2t}\,\mathrm{d}\xi+\sup_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{-l}e^{-\frac{c}{4}|\xi|^{-2}t}\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{k+l}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\Big)\end{aligned}$$

für eine Konstante $c_1\in\mathbb{R}^+$. Die Terme $\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^k e^{-\frac{c}{4}|\xi|^2t}\,\mathrm{d}\xi$ und $\sup_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{-l}e^{-\frac{c}{4}|\xi|^{-2}t}$ sind nach Lemma A.16 verantwortlich für die Abklingraten. Die Norm $\|\mathscr{F}V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}$ lässt sich nach der Ungleichung von Hausdorff-Young A.10 durch $\|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m}$ abschätzen. Demzufolge existieren zwei Konstanten $c_2,c_3\in\mathbb{R}^+$, sodass

$$\|\mathscr{F}(\partial_x^k\mathcal{S}(t)V_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m}\leq c_2(1+t)^{-\frac{k+n}{2}}\|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m}+c_3(1+t)^{-\frac{l}{2}}\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{k+l}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$$

gilt. Zu untersuchen bleibt noch der Ausdruck $\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{k+l}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$. Für diesen ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{k+l}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{k+l}(1+|\xi|)^{n+1}(1+|\xi|)^{-(n+1)}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{k+l+n+1}(1+|\xi|)^{-(n+1)}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\ &\leq c_4\|(1+|\cdot|)^{k+l+n+1}(\mathscr{F}V_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\leq 2^{k+l+n+1}c_4\sum_{j=0}^{k+l+n+1}\||\cdot|^j\mathscr{F}V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}\end{aligned}$$

für eine Konstante $c_4\in\mathbb{R}^+$, wobei im vorletzten Schritt die Höldersche Ungleichung A.1 sowie die Beschränktheit des Integrals $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{-(n+1)}\,\mathrm{d}\xi$ ausgenutzt wurden. Des Weiteren erhält man mithilfe von Lemma A.11

$$\sum_{j=0}^{k+l+n+1}\||\cdot|^j\mathscr{F}V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}\leq\sum_{j=0}^{k+l+n+1}\widetilde{c}_5(j)\|\mathscr{F}(\partial_x^jV_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}\leq c_5\sum_{j=0}^{k+l+n+1}\|\mathscr{F}(\partial_x^jV_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}$$

für eine Konstante $c_5\in\mathbb{R}^+$. Auf $\|\mathscr{F}(\partial_x^jV_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m}$ können wir für $j\in\{0,\dots,k+l+n+1\}$ noch die Ungleichung von Hausdorff-Young A.10 anwenden. So ergibt sich für das verbleibende Integral

$$\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{k+l}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\leq c_6\sum_{j=0}^{k+l+n+1}\|\partial_x^jV_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m}=c_6\|V_0\|_{W^{k+l+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m}$$

für eine Konstante $c_6 \in \mathbb{R}^+$. Insgesamt finden wir also zwei Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k + l \leq s$

$$\left\|\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} \leq C_1(1+t)^{-\frac{k+n}{2}} \|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} + C_2(1+t)^{-\frac{l}{2}} \|V_0\|_{W^{k+l+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m}$$

gilt. Wie anfangs begründet, liegt $\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0$ in $L^2(\mathbb{R}^n)^m$. Also ist $\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0 = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)$. Die letzte Ungleichung besagt nun aber insbesondere auch, dass $\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)^m$ liegt. Nach Satz A.7 ist die Fourier-Rücktransformation als Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig mit $\|\mathscr{F}^{-1}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^\infty(\mathbb{R}^n))} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$. Daher gilt

$$\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m} = \left\|\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\|\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m},$$

woraus sich zusammen mit der vorherigen Ungleichung die behauptete Abschätzung ergibt. □

Satz 2.16 (L^p-L^q-Abschätzung). *Es sei $s \in \mathbb{N}_0$ bzw. $s \in \mathbb{N}$ und das System* (2.16) *bzw.* (2.19) *erfülle die Bedingungen (A), (K) und (S) bzw. (A), (K), (S), (B) und (BKS). $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ bezeichne die zugehörige C_0-Halbgruppe, wie sie in Satz 2.2 (i) bzw. (ii) gegeben ist. Des Weiteren seien $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zu $q \in \{2,\infty\}$ sei $N := (n+1)(1-\frac{2}{q})$ und zu $q \in (2,\infty)$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > (n+1)(1-\frac{2}{q})$. Dann gilt*

(i) unter der Bedingung (S_1) die folgende L^p-L^q-Abschätzung vom Regularity-Loss-Typ:

$$\begin{aligned}&\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, k,l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k+l \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\ &\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^m} \leq C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \|V_0\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^m}.\end{aligned}$$

(ii) unter der Bedingung (S_2) die folgende L^p-L^q-Abschätzung vom Standard-Typ:

$$\begin{aligned}&\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^m\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\ &\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^m} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^m}.\end{aligned}$$

Beweis: Für $q \in \{2,\infty\}$ ergeben sich die Aussagen als unmittelbare Konsequenz aus den Sätzen 2.13 (mit $s_0 = s$, $p = 2$ und $j = 0$) und 2.15. Sei daher $q \in (2,\infty)$ und dazu $p = 1 - \frac{1}{q} \in (1,2)$. Wir beschränken uns auf den Beweis für den Fall (i); die Behauptung unter (ii) zeigt man analog. Aus der L^p-L^2-Abschätzung aus Satz 2.13 erhalten wir, wenn wir darin $j := 0$ und das dortige p als 2 wählen,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial_x^\alpha \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}^2\Big)^{\frac{1}{2}} &= \|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\leq C_1(1+t)^{-\frac{k}{2}} \|V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m} + C_2(1+t)^{-\frac{l}{2}} \|\partial_x^{k+l} V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\leq \max\{C_1,C_2\}(1+t)^{-\frac{\min\{k,l\}}{2}} \|V_0\|_{W^{k+l,2}(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\leq c_1(1+t)^{-\frac{\min\{k,l\}}{2}} \|V_0\|_{B^{k+l}_{2,2}(\mathbb{R}^n)^m}\end{aligned}$$

für eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}^+$. Die Ungleichung gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k+l \leq s$, für alle $t \in [0,\infty)$ und für alle $V_0 \in H^{k+l}(\mathbb{R}^n)^m = W^{k+l,2}(\mathbb{R}^n)^m = B^{k+l}_{2,2}(\mathbb{R}^n)^m$ (zur Identifikation der Räume siehe Satz A.3 (ii)). Anders formuliert bedeutet sie: Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ ist

$$\partial_x^\alpha \circ \mathcal{S}(t) \in \mathscr{L}(B^{k+l}_{2,2}(\mathbb{R}^n)^m, L^2(\mathbb{R}^n)^m) \quad \text{mit} \quad \|\partial_x^\alpha \circ \mathcal{S}(t)\|_{\mathscr{L}(B^{k+l}_{2,2}(\mathbb{R}^n)^m, L^2(\mathbb{R}^n)^m)} \leq c_1(1+t)^{-\frac{\min\{k,l\}}{2}}.$$

Zugleich ist auch

$$\begin{aligned}&\partial_x^\alpha \circ \mathcal{S}(t) \in \mathscr{L}\big(B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m, L^\infty(\mathbb{R}^n)^m\big)\\ &\quad\text{mit}\quad \big\|\partial_x^\alpha \circ \mathcal{S}(t)\big\|_{\mathscr{L}(B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m, L^\infty(\mathbb{R}^n)^m)} \le c_2(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}}\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ und eine Konstante $c_2 \in \mathbb{R}^+$, denn gemäß der L^1-L^∞-Abschätzung aus Satz 2.15 und der stetigen Einbettung $B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow W^{k+l+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m$ aus Satz A.3 (iii) gilt für alle $V_0 \in B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m$ und alle $t \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned}\big\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)^m} &\le C_1(1+t)^{-\frac{k+n}{2}}\|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)^m} + C_2(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|V_0\|_{W^{k+l+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\le \max\{C_1,C_2\}(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}}\|V_0\|_{W^{k+l+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m}\\ &\le c_2(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}}\|V_0\|_{B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m}\,.\end{aligned}$$

Wir ermitteln nun die benötigten Interpolationsräume zwischen $L^2(\mathbb{R}^n)^m$ und $L^\infty(\mathbb{R}^n)^m$ sowie zwischen $B_{2,2}^{k+l}(\mathbb{R}^n)^m$ und $B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m$ mithilfe von Satz A.5. Nachdem q vorgegeben ist, ist der Typ θ des komplexen Interpolationsfunktors zu bestimmen. Um den gewünschten Zusammenhang

$$L^q(\mathbb{R}^n)^m = \big[L^2(\mathbb{R}^n)^m, L^\infty(\mathbb{R}^n)^m\big]_\theta$$

zu erreichen, muss θ durch $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty} = \frac{1-\theta}{2}$, also $\theta := 1 - \frac{2}{q} \in (0,1)$ festgelegt werden. Die entsprechende Interpolation der Besovräume ergibt dann

$$\big[B_{2,2}^{k+l}(\mathbb{R}^n)^m, B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m\big]_{1-\frac{2}{q}} = B_{v,v}^r(\mathbb{R}^n)^m$$

mit $r = (1-(1-\frac{2}{q}))(k+l)+(1-\frac{2}{q})(k+l+n+1) = k+l+(n+1)(1-\frac{2}{q})$ und $\frac{1}{v} = \frac{1-(1-\frac{2}{q})}{2}+1-\frac{2}{q} = 1-\frac{1}{q}$, also $v = p$. Da $[\cdot,\cdot]_{1-\frac{2}{q}}$ ein exakter Interpolationsfunktor ist, folgt

$$\partial_x^\alpha \circ \mathcal{S}(t) \in \mathscr{L}\big(B_{p,p}^r(\mathbb{R}^n)^m, L^q(\mathbb{R}^n)^m\big)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$, wobei die Operatornorm durch

$$\begin{aligned}\big\|\partial_x^\alpha \circ \mathcal{S}(t)\big\|_{\mathscr{L}(B_{p,p}^r(\mathbb{R}^n)^m, L^q(\mathbb{R}^n)^m)} &\le \|\mathcal{S}(t)\|^{1-\theta}_{\mathscr{L}(B_{2,2}^{k+l}(\mathbb{R}^n)^m, L^2(\mathbb{R}^n)^m)}\|S(t)\|^{\theta}_{\mathscr{L}(B_{1,1}^{k+l+n+1}(\mathbb{R}^n)^m, L^\infty(\mathbb{R}^n)^m)}\\ &\le c_1^{(1-\theta)}(1+t)^{-\frac{\min\{k,l\}}{2}(1-\theta)}c_2^\theta(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\theta}\\ &= c_1^{\frac{2}{q}}c_2^{1-\frac{2}{q}}(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}}\end{aligned}$$

beschränkt ist. Dies bedeutet wiederum, wenn wir die wegen $k+l+N > r$ nach Satz A.3 (iv) geltende Einbettung

$$W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow B_{p,p}^r(\mathbb{R}^n)^m$$

beachten, dass eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass für alle $V_0 \in W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^m$

$$\big\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^m} \le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}}\|V_0\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^m}$$

gilt. Insbesondere ist diese Abschätzung für alle $V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^m$ gültig. Es sei noch ergänzt, dass aus den Einbettungen

$$B_{1,1}^{s+n+1}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow W^{s+n+1,1}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow W^{s+1,2}(\mathbb{R}^n)^m = H^{s+1}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)^m = B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n)^m$$

sowie der Definition eines Interpolationsfunktors die stetigen Inklusionen

$$W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow \big[B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n)^m, B_{1,1}^{s+n+1}(\mathbb{R}^n)^m\big]_{1-\frac{2}{q}} \hookrightarrow B_{2,2}^s(\mathbb{R}^n)^m + B_{1,1}^{s+n+1}(\mathbb{R}^n)^m \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)^m$$

folgen. Für $V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^m$ entspricht $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ also der Lösung aus Satz 2.2, denn wie dort gefordert und soeben begründet, liegt V_0 auch in $H^s(\mathbb{R}^n)^m$. □

2.7 Symmetrisch-hyperbolische Systeme mit Nebenbedingungen

Zum Abschluss des Kapitels über allgemeine symmetrisch-hyperbolische und symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Systeme betrachten wir noch eine spezielle Form von symmetrisch-hyperbolischen Systemen, nämliche solche, die zusätzlich einer Nebenbedingung unterliegen. Konkret geht es um Anfangswertprobleme der Form

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^n A^j \partial_{x_j} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{2.43 a}$$

$$RV + \sum_{j=1}^n Q^j \partial_{x_j} V = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{2.43 b}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{2.43 c}$$

Die Matrizen A^0, $A^1,\dots,A^n$ und L sollen in $\mathbb{R}^{m\times m}$ für ein $m\in\mathbb{N}$ mit $m\geq 2$ liegen und die Bedingung (A) aus Abschnitt 2.6.2 erfüllen, sodass (2.43 a) ein symmetrisch-hyperbolisches System darstellt. Die Gleichung (2.43 b) beschreibt eine Nebenbedingung. Dabei sollen R, $Q^1,\dots,Q^n$ aus $\mathbb{R}^{r\times m}$ für ein $r\in\mathbb{N}$ mit $r<m$ und mindestens eine dieser Matrizen ungleich der Nullmatrix sein. Für $\xi\in\mathbb{R}^n$ sei wie zuvor $A(\xi) := \sum_{j=1}^n A^j\xi_j$ und entsprechend $Q(\xi) := \sum_{j=1}^n Q^j\xi_j$. Alle $L^2(\mathbb{R}^n)^m$-Funktionen, die die Nebenbedingung erfüllen, fassen wir in der Menge

$$\mathcal{N} := \left\{ W\in L^2(\mathbb{R}^n)^m \;\middle|\; RW + \sum_{j=1}^n Q^j\partial_{x_j} W = 0 \right\}$$

zusammen. Derartige Systeme mit Nebenbedingungen wurden von R. Duan, S. Kawashima und Y. Ueda in [UDK12] mit einer angepassten Variante der in Abschnitt 2.6 beschriebenen Methode erfasst. So werden die Bedingungen (A) und (S) in der dortigen Formulierung übernommen und um eine weitere Bedingung (C) ergänzt. Die Bedingungen (K), (S_1) und (S_2) werden durch neue Bedingungen (K^*), (S_1^*) und (S_2^*) ersetzt, die die Eigenschaft (2.43 b) einer Lösung berücksichtigen.

Bedingung (A) und Bedingung (S). Siehe Seite 32.

Die neu hinzukommende Bedingung (C) stellt zusammen mit (A) die eindeutige Lösbarkeit des Systems (2.43) sicher.

Bedingung (C). Für alle $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$ erfüllen die Matrizen $Q(\omega)$ und R die Eigenschaften

- $Q(\omega)\big(A^0\big)^{-1}A(\omega) = 0\,,$
- $R\big(A^0\big)^{-1}L = 0\,,$
- $Q(\omega)\big(A^0\big)^{-1}L + R\big(A^0\big)^{-1}A(\omega) = 0\,.$

Satz 2.17 (Wohlgestelltheit symmetrisch-hyperbolischer Anfangswertprobleme mit Nebenbedingungen). *Es sei $s\in\mathbb{N}_0$ und $V_0\in H^s(\mathbb{R}^n)^m\cap\mathcal{N}$. Handelt es sich bei* (2.43 a) *um ein symmetrisch-hyperbolisches System im Sinne der Definition 2.1 (dies ist unter der Bedingung (A) der Fall) und erfüllen die Matrizen des Systems* (2.43) *die Bedingung (C), so existiert eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0\in\mathcal{C}^0([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^m$ mit $\mathcal{S}(t)V_0\in\mathcal{N}$ für alle $t\in[0,\infty)$.*

Beweis: Nach Satz 2.2 besitzt das System (2.43 a) unter der Anfangsbedingung (2.43 c) eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0\in\mathcal{C}^0([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^m$. Aufgrund der Bedingung (C) gilt, wie in [UDK12] gezeigt wurde, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\mathscr{F}\mathcal{S}(\cdot)V_0(\xi)+iQ(\xi)\mathscr{F}\mathcal{S}(\cdot)V_0(\xi))(t) = 0$ für alle $t\in(0,\infty)$ und fast alle $\xi\in\mathbb{R}^n$,

und nach Voraussetzung erfüllt der Anfangswert $R\mathscr{F}V_0(\xi)+iQ(\xi)\mathscr{F}V_0(\xi)=0$ für fast alle $\xi\in\mathbb{R}^n$. Damit muss aber schon $R\mathscr{F}\mathcal{S}(t)V_0(\xi)+iQ(\xi)\mathscr{F}\mathcal{S}(t)V_0(\xi)=0$ für alle $t\in[0,\infty)$ und fast alle $\xi\in\mathbb{R}^n$ gelten, woraus durch Anwenden der Fourier-Rücktransformation folgt, dass $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ die Nebenbedingung (2.43 b) erfüllt. □

Die Nebenbedingung birgt zusätzliche Informationen über die Lösung, die man sich bei der Untersuchung des zeitlichen Abklingens zunutze machen kann. Dies schlägt sich in den folgenden Bedingungen nieder, die eine Abschwächung der bisherigen Bedingungen (K), (S_1) und (S_2) darstellen. Es bezeichne darin $P_{\mathrm{im}(R)}\in\mathbb{R}^{r\times r}$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{C}^r$ auf das Bild $\mathrm{im}(R):=\{Rx\,|\,x\in\mathbb{C}^m\}$ unter der Matrix R.

Bedingung ($\mathbf{K}^*$). Es existiert eine Abbildung $K\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}^{m\times m})$, sodass für alle $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$ gilt:

- $K(-\omega)=-K(\omega)$,
- $\big(K(\omega)A^0\big)^\mathsf{T}=-K(\omega)A^0$,
- $[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}>0$ auf $\ker(L)\cap X_\omega$, mit $X_\omega:=\big\{z\in\mathbb{C}^m\;\big|\;(\mathrm{I}_r-P_{\mathrm{im}(R)})Q(\omega)z=0\big\}$.

Bedingung ($\mathbf{S_1^*}$). Zu der Matrix S aus der Bedingung (S) existiert eine Matrix $\widetilde{S}\in\mathbb{R}^{r\times r}$, sodass gilt:

- $[\widetilde{S}]_{\mathrm{sy}}\geq 0$ auf $\mathrm{im}(R)$,
- $i[SA(\omega)-(P_{\mathrm{im}(R)}Q(\omega))^\mathsf{T}\widetilde{S}R]_{\mathrm{asy}}\geq 0$ auf $\ker\big([L]_{\mathrm{sy}}\big)$ für alle $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$.

Bedingung ($\mathbf{S_2^*}$). Zu der Matrix S aus der Bedingung (S) existiert eine Matrix $\widetilde{S}\in\mathbb{R}^{r\times r}$, sodass gilt:

- $[\widetilde{S}]_{\mathrm{sy}}\geq 0$ auf $\mathrm{im}(R)$,
- $i[SA(\omega)-(P_{\mathrm{im}(R)}Q(\omega))^\mathsf{T}\widetilde{S}R]_{\mathrm{asy}}\geq 0$ auf $\mathbb{C}^m$ für alle $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$.

Aus den genannten Bedingungen lassen sich auf ähnliche Weise wie im Fall ohne Nebenbedingungen Aussagen zur Asymptotik in Form einer Abschätzung im Fourierraum und einer L^p-L^q-Abschätzung ableiten.

Satz 2.18 (Abschätzung im Fourierraum für symmetrisch-hyperbolische Systeme mit Nebenbedingungen). *Es sei $s\in\mathbb{N}$. Das System* (2.43) *erfülle die Bedingungen (A), (C), (K^*) und (S). $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ bezeichne die C_0-Halbgruppe aus Satz 2.2 (i), die nach Satz 2.17 die Lösung beschreibt. Dann gilt*

(i) unter der Bedingung (S_1^*): $\exists\,C\in\mathbb{R}^+\;\exists\,c\in\mathbb{R}^+\;\forall\,V_0\in H^s(\mathbb{R}^n)^m\cap\mathcal{N}\;\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n\;\forall\,t\in[0,\infty):$

$$\big|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\big|\leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|\,.$$

(ii) unter der Bedingung (S_2^*): $\exists\,C\in\mathbb{R}^+\;\exists\,c\in\mathbb{R}^+\;\forall\,V_0\in H^s(\mathbb{R}^n)^m\cap\mathcal{N}\;\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n\;\forall\,t\in[0,\infty):$

$$\big|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\big|\leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|\,.$$

(Siehe [UDK12, Theorem 5.2, Theorem 5.3].)

Satz 2.19 (L^p-L^q-Abschätzung für symmetrisch-hyperbolische Systeme mit Nebenbedingungen). *Es sei $s \in \mathbb{N}_0$ und das System* (2.43) *erfülle die Bedingungen (A), (C), (K^*) und (S). $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ bezeichne die zugehörige C_0-Halbgruppe aus Satz 2.2 (i), die nach Satz 2.17 die Lösung beschreibt. Des Weiteren seien $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Zu $q \in \{2,\infty\}$ sei $N := (n+1)(1-\frac{2}{q})$ und zu $q \in (2,\infty)$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > (n+1)(1-\frac{2}{q})$. Dann gilt*

(i) unter der Bedingung (S_1^*):

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+ \;\forall\, V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^m \cap \mathcal{N} \;\forall\, k,l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k+l \leq s \;\; \forall\, t \in [0,\infty) :$$
$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^m} \leq C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^m} .$$

(ii) unter der Bedingung (S_2^*):

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+ \;\forall\, V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^m \cap \mathcal{N} \;\forall\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \leq s \;\; \forall\, t \in [0,\infty) :$$
$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^m} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^m} .$$

Beweis: Die Beweise der Sätze 2.13, 2.15 und 2.16 bauten ausschließlich auf den Abschätzungen im Fourierraum aus Satz 2.9 bzw. Satz 2.11 auf. Diese Abschätzungen stehen uns mit Satz 2.18 in selber Form auch für die symmetrisch-hyperbolischen Systeme mit Nebenbedingungen zur Verfügung, sodass das Resultat gleicherweise folgt. Zu beachten ist nur, dass die Anfangsdaten zusätzlich aus der Menge $\mathcal{N}$ gewählt werden müssen, um die Wohlgestelltheit samt der Nebenbedingung zu gewährleisten. □

3 Ein symmetrisch-hyperbolisches Phase-Lag-System

Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit und das mögliche Auftreten einer wellenförmigen Wärmeausbreitung waren die zentralen Aspekte, die Anreiz und Rechtfertigung für neue Wärmeleitungsmodelle boten. Mathematisch gesehen machen sie für die entstehenden partiellen Differentialgleichungen, so auch für die Phase-Lag-Systeme, einen hyperbolischen Charakter wünschenswert. Im Gegensatz zum Wärmeleitungsmodell von Cattaneo, das auf eine gedämpfte Wellengleichung führt, ist bei den Dual- und Three-Phase-Lag-Gleichungen anhand der Struktur keineswegs mehr erkennbar, ob sich die Modelle einer hyperbolischen oder parabolischen Theorie zuordnen lassen. Schon Tzou, der das Dual-Phase-Lag-Modell entwickelt hatte, sprach jedoch in [Tzo97, S. 282, 284] von einem hyperbolischen und einem parabolischen Dual-Phase-Lag-Modell. Dies motivierte sich zum einen daraus, dass das Modell DPLW (2,1) mit dem sogenannten hyperbolischen Two-Step-Modell korrespondiert, welches wiederum auf dem Gesetz von Cattaneo basiert (siehe [Tzo97, 10.1]). Zum anderen beruhte es auf der Überlegung, dass die Dual-Phase-Lag-Gleichung (1.7) im Fall $m_q = m_\theta$ mit

$$\frac{\partial^{m_\theta}}{\partial t^{m_\theta}}\left(\varrho c_v \frac{\tau_q^{m_\theta}}{m_\theta!}\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) - \kappa\frac{\tau_\theta^{m_\theta}}{m_\theta!}\Delta\theta(t,x)\right) = \textit{Terme niedrigerer Ordnung}$$

die Form einer Wärmeleitungsgleichung, und im Fall $m_q = m_\theta + 1$ mit

$$\frac{\partial^{m_\theta}}{\partial t^{m_\theta}}\left(\varrho c_v \frac{\tau_q^{m_q}}{m_q!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(t,x) - \kappa\frac{\tau_\theta^{m_\theta}}{m_\theta!}\Delta\theta(t,x)\right) = \textit{Terme niedrigerer Ordnung}$$

die Gestalt einer Wellengleichung habe [Tzo97, S. 58 f.]. Entsprechend wurde in [QR08] für die Three-Phase-Lag-Modelle TPLW (1,1,1) und TPLW (2,1,1) argumentiert, wobei aber dort die Hyperbolizität des zweiten Modells durch Angabe der Eigenwerte auch mathematisch belegt wurde.

In diesem sowie in den folgenden Kapiteln 4 und 5 stellen wir eine Auswahl an Phase-Lag-Modellen vor, die sich mit einem symmetrisch-hyperbolischen System, einem solchen mit einer Nebenbedingung oder einem symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen System identifizieren lassen. Dadurch klärt sich zum einen die generelle Frage, welcher übergeordneten mathematischen Theorie die Phase-Lag-Modelle zuzuordnen sind. Zum anderen ergeben sich aus dieser Einstufung heraus konkrete Aussagen zur Wohlgestelltheit des Anfangswertproblems und zur Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie die Möglichkeit die zeitliche Asymptotik von Lösungen mithilfe der in Abschnitt 2.6 vorgestellten Methode zu untersuchen. Diese stellt eine Alternative zur herkömmlichen direkten Herleitung von Energieabschätzungen dar und wurde bislang nur auf das Timoshenko-System, das die Schwingung eines Balkens modelliert, und auf das Euler-Maxwell-System aus der Plasmaphysik angewendet (siehe [UDK12]). Mit den Phase-Lag-Systemen der Wärmeleitung und Thermoelastizität präsentieren wir neue Beispiele, die sich mit der Methode behandeln lassen.

Das vorliegende Kapitel 3 widmet sich dem Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (2,1) der Wärmeleitung, das sich als ein symmetrisch-hyperbolisches System darstellen lässt. Die sich ergebende Matrix L ist positiv semidefinit, aber nicht symmetrisch, weshalb die Shizuta-Kawashima-Bedingung

nicht zielführend ist. Mit den Resultaten aus Abschnitt 2.6.4 können wir jedoch zeigen, dass unter der Bedingung $2\tau_\theta > \tau_q$ ein Abklingverhalten vom Standard-Typ und für $2\tau_\theta = \tau_q$ ein Abklingverhalten vom Regularity-Loss-Typ vorliegt. Dieses Verhältnis zwischen den Parametern τ_q und τ_θ trat bereits in [Qui02; BQR14] im Zusammenhang mit der Stabilität in beschränkten Gebieten auf und begegnet uns also nun im Ganzraum wieder.

Im zweiten Teil des Kapitels wird für das Modell DPLW (2,1) in einer Raumdimension die Asymptotik der Eigenwerte untersucht. Diese gibt Aufschluss über die Optimalität der erzielten Abklingraten und zeigt auch, dass durch Abziehen gewisser Lösungsanteile die Abklingrate verbessert oder der Regularitätsverlust eingedämmt werden kann. Die Auswirkungen der unterschiedlichen Bedingungen $2\tau_\theta > \tau_q$ und $2\tau_\theta = \tau_q$ werden dabei nochmals besonders deutlich.

3.1 Dual-Phase-Lag-Wärmeleitung DPLW (2,1)

Wir betrachten das homogene Anfangswertproblem zum Modell (1.6) der Dual-Phase-Lag-Wärmeleitung mit der Entwicklungsordnung zwei für die Wärmestromdichte q und eins für den Temperaturgradienten $\nabla\theta$ zu vorgegebenen Anfangsdaten q_0, $q_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\theta_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\underline{\text{DPLW (2,1)}}$$

$$q + \tau_q q_t + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} = -\kappa\nabla\theta - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{3.1 a}$$

$$-\operatorname{div} q = \varrho c_v \theta_t \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{3.1 b}$$

$$q(0,\cdot) = q_0\,,\ q_t(0,\cdot) = q_1\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{3.1 c}$$

Als Raumdimension ist von mathematischer Seite aus $n \in \mathbb{N}$ zulässig, physikalisch bedeutsam ist sicherlich nur $n \in \{1,2,3\}$.

Unser Ziel ist es zunächst, das System auf ein symmetrisch-hyperbolisches Anfangswertproblem zu transformieren und einen sinnvollen Lösungsbegriff für (3.1) herauszuarbeiten.

3.1.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisches System

Wir verwenden die folgenden Notationen: Zu $n, m \in \mathbb{N}$ bezeichnet $0_{n\times m}$ die $n \times m$-Nullmatrix mit der Abkürzung $0_n := 0_{n\times n}$. I_n meint die $n \times n$-Einheitsmatrix. Für den j-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ für ein $j \in \{1,\dots,n\}$ schreiben wir e_n^j und sehen diesen als einen Spaltenvektor in $\mathbb{R}^{n\times 1}$ an; der entsprechende Zeilenvektor im $\mathbb{R}^{1\times n}$ ist $(e_n^j)^\mathsf{T}$. Ist X ein Funktionenraum und $f \in X^m$, so besteht f aus m Komponenten aufgefasst als Spaltenvektor $f = (f_1,\dots,f_m)^\mathsf{T}$. Sollen einzelne oder mehrere Komponenten der Funktion herausgegriffen werden, so kennzeichnen wir dies in der Form $f_{j,\dots,k} := (f)_{j,\dots,k} := (f_j,\dots,f_k)^\mathsf{T}$ für $j,k \in \{1,\dots,m\}$ mit $j \le k$.

Definition 3.1 (Matrizen zu DPLW (2,1)). *Für das System DPLW (2,1) definieren wir die Konstante $\tau := \tau_\theta^2 + (\tau_\theta - \tau_q)^2$ und die Matrizen*

$$A^0 := \begin{pmatrix} \frac{2\varrho c_v \tau_\theta}{\kappa\tau} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_q^2\tau}{4\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \quad A^j := \begin{pmatrix} 0 & (e_n^j)^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ e_n^j & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \textit{für } j \in \{1,\dots,n\}$$

$$\textit{und} \quad L := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_q \tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{4\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{\tau}{2\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Bezeichnungen handelt es sich bei

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^{n} A^j \partial_{x_j} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{3.2 a}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{3.2 b}$$

um ein symmetrisch-hyperbolisches Anfangswertproblem im Sinne der Definition 2.1. Dieses besitzt für $s \in \mathbb{N}$ zu einem Anfangswert $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^{2n+1}$ nach Satz 2.2 (i) eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{2n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{2n+1}$. Wie wir wissen, stimmt dies auch für $s \in \mathbb{R}$, jedoch wollen wir uns auf Lösungen beschränken, die bezüglich des Orts mindestens schwach differenzierbar sind, also im Sobolevraum $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}$ liegen, den wir mit dem Besselpotentialraum $H^s(\mathbb{R}^n)^{2n+1}$ identifizieren. Das Anfangswertproblem (3.2) ist zum ursprünglichen Dual-Phase-Lag-System (3.1) in folgendem Sinn äquivalent.

Satz 3.2 (Äquivalenz der Systeme). *Zu $s \in \mathbb{N}$ seien Anfangsdaten $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$, $q_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)^n$ und $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_1 + \kappa\tau_\theta \nabla\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ für (3.1) gegeben und dazu sei*

$$V_0 := \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0 \\ q_0 \\ \tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \end{pmatrix}.$$

(i) Ist $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{2n+1}$ die Lösung von (3.2) zum Anfangswert V_0, so wird durch

$$q(t) := V_{2,\dots,n+1}(t) \quad \textit{und} \quad \theta(t) := \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}V_1(t) \quad \textit{für } t \in [0,\infty)$$

eine Lösung (q,θ) von (3.1) beschrieben. Es gilt

$$\begin{aligned} &q \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,, \\ &\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big) \\ &\textit{und } \tfrac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,. \end{aligned}$$

(ii) Es sei (q,θ) eine Lösung von (3.1) mit $q \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$, $\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$ und $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$. Wir setzen

$$V(t) := \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta(t) \\ q(t) \\ \tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q(t) + \frac{\tau_q^2}{2}q_t(t) + \kappa\tau_\theta\nabla\theta(t) \end{pmatrix} \quad \textit{für } t \in [0,\infty)\,.$$

Dann ist V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{2n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{2n+1}$ und löst das Anfangswertproblem (3.2) zum Anfangswert V_0.

Beweis:

(i) Wie man an der Differentialgleichung (3.2 a) sieht, liegt V auch in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{2n+1}$ und so sind nach Definition

$$\begin{aligned} &q \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n \\ &\text{und } \theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)\,. \end{aligned}$$

Die erste Zeile des Systems (3.2 a) lautet

$$0 = \big(A^0\partial_t V\big)_1 + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_1 + \big(LV\big)_1 = \frac{2\varrho c_v \tau_\theta}{\kappa\tau}\partial_t V_1 + \operatorname{div} V_{2,\dots,n+1} = \varrho c_v \theta_t + \operatorname{div} q\,, \tag{3.3}$$

wonach (q,θ) die Differentialgleichung (3.1 b) erfüllt. Aus den Zeilen zwei bis $(n+1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_{2,\dots,n+1} + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_{2,\dots,n+1} + \big(LV\big)_{2,\dots,n+1} \\ &= \frac{\tau_q^2\tau}{4\tau_\theta^2}\partial_t V_{2,\dots,n+1} + \nabla V_1 + \frac{\tau_q\tau(2\tau_\theta-\tau_q)}{4\tau_\theta^3}V_{2,\dots,n+1} - \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}V_{n+2,\dots,2n+1} \\ &= \frac{\tau_q\tau(2\tau_\theta-\tau_q)}{4\tau_\theta^3}q + \frac{\tau_q^2\tau}{4\tau_\theta^2}q_t + \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\nabla\theta - \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}V_{n+2,\dots,2n+1}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Da neben q auch $V_{n+2,\dots,2n+1}$ in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ liegt, lesen wir aus der Gleichung die Regularität

$$\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n$$

ab. Wenn wir auf (3.4) den Operator $\frac{2\tau_\theta}{\tau}(\mathrm{Id} + \tau_\theta\partial_t)$ anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\tau_q(2\tau_\theta-\tau_q)}{2\tau_\theta^2}q + \Big(\frac{\tau_q(2\tau_\theta-\tau_q)}{2\tau_\theta} + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\Big)q_t + \kappa\nabla\theta + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) \\ &\quad - \frac{1}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1} - \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} \\ &= \frac{\tau_q(2\tau_\theta-\tau_q)}{2\tau_\theta^2}q + \tau_q q_t + \kappa\nabla\theta + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) - \frac{1}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1} - \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1}\,. \end{aligned}$$

Der Term $-\frac{1}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1} - \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1}$ lässt sich durch $\frac{\tau}{2\tau_\theta^2}q$ ausdrücken, denn die Zeilen $(n+2)$ bis $(2n+1)$ des Systems (3.2 a) ergeben

$$\begin{aligned} 0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_{n+2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_{n+2,\dots,2n+1} + \big(LV\big)_{n+2,\dots,2n+1} \\ &= \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}V_{2,\dots,n+1} + \frac{1}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1} = \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}q + \frac{1}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1}\,. \end{aligned}$$

Damit folgt, da $\frac{\tau_q(2\tau_\theta-\tau_q)+\tau}{2\tau_\theta^2} = 1$ ist,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\tau_q(2\tau_\theta-\tau_q)}{2\tau_\theta^2}q + \tau_q q_t + \kappa\nabla\theta + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) + \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}q \\ &= q + \tau_q q_t + \kappa\nabla\theta + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die Differentialgleichung (3.1 a) ist also im Sinne von (3.5) erfüllt (siehe dazu die Bemerkung 3.3). Aufgrund der Anfangsbedingung

$$V(0) = V_0 = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0 \\ q_0 \\ \tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \end{pmatrix}$$

gilt $q(0) = (V(0))_{2,\dots,n+1} = q_0$ und $\theta(0) = \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}(V(0))_1 = \theta_0$. Betrachten wir noch die Gleichung (3.4) an der Stelle $t = 0$,

$$0 = \frac{\tau_q\tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{4\tau_\theta^3}q(0) + \frac{\tau_q^2\tau}{4\tau_\theta^2}q_t(0) + \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\nabla\theta(0) - \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}(V(0))_{n+2,\dots,2n+1},$$

so liefert uns dies den verbleibenden Anfangswert

$$q_t(0) = -\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q^2}\nabla\theta(0) - \frac{2\tau_\theta - \tau_q}{\tau_q\tau_\theta}q(0) + \frac{2}{\tau_q^2}\Big(\tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0\Big) = q_1\,.$$

(ii) Für q und θ lassen sich die folgenden weiteren Regularitäten ableiten: Anhand von (3.1 b) folgt $\theta_t \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$, also $\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$, da $\operatorname{div} q$ in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ liegt. Da $\nabla\theta$ in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ und die Summe $\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta$ in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s}(\mathbb{R}^n))^n$ ist, muss q_t aus $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$, also q aus $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ sein. Die Differentialgleichung (3.1 a) impliziert daraufhin $\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$. Damit liegt V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s}(\mathbb{R}^n))^{2n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{2n+1}$ und erfüllt mit

$$V(0) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta(0) \\ q(0) \\ \tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q(0) + \frac{\tau_q^2}{2}q_t(0) + \kappa\tau_\theta\nabla\theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0 \\ q_0 \\ \tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \end{pmatrix} = V_0$$

die Anfangsbedingung. Außerdem löst V die Differentialgleichung (3.2 a), denn da (q,θ) eine Lösung von (3.1) ist, ergeben sich für V die Gleichungen

$$(A^0\partial_t V)_1 + \sum_{j=1}^n (A^j\partial_{x_j}V)_1 + (LV)_1 = \frac{2\varrho c_v\tau_\theta}{\kappa\tau}(\partial_t V)_1 + \operatorname{div} V_{2,\dots,n+1} = \varrho c_v\theta_t + \operatorname{div} q = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
&(A^0\partial_t V)_{2,\dots,n+1} + \sum_{j=1}^n (A^j\partial_{x_j}V)_{2,\dots,n+1} + (LV)_{2,\dots,n+1} \\
&\quad= \frac{\tau_q^2\tau}{4\tau_\theta^2}\partial_t V_{2,\dots,n+1} + \nabla V_1 + \frac{\tau_q\tau(2\tau_\theta-\tau_q)}{4\tau_\theta^3}V_{2,\dots,n+1} - \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}V_{n+2,\dots,2n+1} \\
&\quad= \frac{\tau_q^2\tau}{4\tau_\theta^2}q_t + \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\nabla\theta + \frac{\tau_q\tau(2\tau_\theta-\tau_q)}{4\tau_\theta^3}q - \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}\Big(\tau_q\Big(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\Big)q + \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&(A^0\partial_t V)_{n+2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^n (A^j\partial_{x_j}V)_{n+2,\dots,2n+1} + (LV)_{n+2,\dots,2n+1} \\
&\quad= \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}V_{2,\dots,n+1} + \frac{1}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1} \\
&\quad= \tau_q\Big(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\Big)q_t + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) + \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}q + \frac{1}{\tau_\theta}\Big(\tau_q\Big(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\Big)q + \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) \\
&\quad= q + \tau_q q_t + \kappa\nabla\theta + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) = 0\,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3 (Zur Differentialgleichung (3.1 a)). Die Differentialgleichung (3.1 a) ist zunächst im Sinne von (3.5) zu verstehen. Jedoch ist der Ausdruck q_{tt} zumindest in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^n$ erklärt, was daraus folgt, dass zum einen $\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta \nabla\theta$ in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ ist und zum anderen $\partial_t \nabla\theta = \nabla\theta_t$ aufgrund von $\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$ liegt. Damit ist also $q \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^n$ und $\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \kappa\tau_\theta \nabla\theta_t \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$. Daneben erhalten wir aus der Differentialgleichung (3.1 b) auch $\theta \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$. Für $s = 1$ verlassen wir hiermit allerdings den Bereich der schwachen Differenzierbarkeit. Insofern bildet aus mathematischer Sicht der Term $\partial_t(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta \nabla\theta)$ den gegenüber $\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \kappa\tau_\theta \nabla\theta_t$ natürlicheren Ausdruck. Gerade anders herum verhält es sich jedoch unter dem Blickwinkel der physikalischen Herleitung. Die Phase-Lag-Modelle gingen durch eine formale Taylorapproximation aus Delay-Gleichungen hervor. Dabei kam der Term $\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}$ als Glied zweiter Stufe aus der Taylorapproximation der Funktion $t \mapsto q(t+\tau_q, \cdot)$ zustande, während $\kappa\tau_\theta \nabla\theta_t$ dem Glied erster Stufe der Taylorreihe von $t \mapsto \kappa\nabla\theta(t+\tau_\theta, \cdot)$ entspricht. Die beiden Ausdrücke entspringen also zwei voneinander völlig unabhängigen Taylorapproximationen und so kann der Term $\partial_t(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta \nabla\theta)$ nicht als Glied einer einzigen Taylorreihe interpretiert werden.

Nachdem die Systeme (3.1) und (3.2) äquivalent sind und letzteres als ein symmetrisch-hyperbolisches Anfangswertproblem wohlgestellt ist, erhalten wir auch die eindeutige Lösbarkeit von (3.1).

Korollar 3.4 (Wohlgestelltheit für DPLW (2,1)). *Es seien $s \in \mathbb{N}$, $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$, $q_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)^n$ und $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\tau_q^2}{2} q_1 + \kappa\tau_\theta \nabla\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ gegeben. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (3.1) *eine eindeutige Lösung $(q,\theta) \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{n+1} \cap \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^{n+1}$ mit $\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta \nabla\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$. Für $s > \frac{n}{2} + 2$ handelt es sich um eine in Zeit und Ort klassische Lösung $(q,\theta) \in \mathcal{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)^{n+1}$.*

Beweis: Aufgrund der vorausgesetzten Regularität an die Anfangsdaten liegt V_0, definiert wie in Satz 3.2, in $H^s(\mathbb{R}^n)^{2n+1}$. Zu diesem Anfangswert besitzt das Problem (3.2) nach Satz 2.2 (i) eine eindeutige Lösung $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{2n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{2n+1}$, woraus mit Satz 3.2 (i) die Existenz einer Lösung (q,θ) von (3.1) mit der angegebenen Regularität folgt. Deren Eindeutigkeit ergibt sich aus dem zweiten Teil des Satzes zusammen mit der eindeutigen Lösbarkeit von (3.2). Die $\mathcal{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)^{n+1}$-Regularität für $s > \frac{n}{2} + 2$ erhält man mithilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes A.4. □

Die Lösung des symmetrisch-hyperbolischen Systems (3.2) weist nach Satz 2.3 eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit auf. Diese überträgt sich auf die Lösung (q,θ) von (3.1) und kann explizit berechnet werden.

Satz 3.5 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für DPLW (2,1)). *Zu $r \in \mathbb{R}^+$ seien Anfangsdaten q_0, q_1 und θ_0 mit der Regularität aus Korollar 3.4 gegeben und ihr Träger liege jeweils in $\overline{B(0,r)}$. Dann gilt für die Lösung (q,θ) von* (3.1) *für alle $t \in [0,\infty)$*

$$\operatorname{supp} q(t) \subset \overline{B(0, r + c\,t)} \quad \textit{und} \quad \operatorname{supp} \theta(t) \subset \overline{B(0, r + c\,t)}$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c := \sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}$.

Beweis: Nach Korollar 3.4 gibt es eine eindeutige Lösung (q,θ) des Systems (3.1) und dazu löst $V(t) := \big(\frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta(t)\,,\, q(t)\,,\, \tau_q(1 - \frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q(t) + \frac{\tau_q^2}{2} q_t(t) + \kappa\tau_\theta \nabla\theta(t)\big)^\mathsf{T}$ für $t \in [0,\infty)$ das Anfangswertproblem (3.2) zum Anfangswert $V(0)$. Dessen Träger liegt aufgrund der Voraussetzungen an q_0, q_1 und θ_0 in $\overline{B(0,r)}$. Mit Satz 2.3 folgt $\operatorname{supp} V(t) \subset \overline{B(0, r + c\,t)}$ und anhand der Gestalt von V

erkennt man, dass dies $\operatorname{supp} q(t) \subset \overline{B(0, r + c\,t)}$ und $\operatorname{supp} \theta(t) \subset \overline{B(0, r + c\,t)}$ für $t \in [0, \infty)$ impliziert. Dabei ist c der über alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ größte Eigenwert der Matrix $(A^0)^{-\frac{1}{2}} A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}}$. Zur Berechnung der Determinante von

$$\eta\,\mathrm{I}_{2n+1} - (A^0)^{-\frac{1}{2}} A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \eta & -\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}\,\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}\,\omega & \eta\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \eta\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

können wir für $\eta \neq 0$ die Formel $\det\left(\begin{smallmatrix} a & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(D)\det(a - BD^{-1}C)$ für $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^{1\times 2n}$, $C \in \mathbb{R}^{2n\times 1}$ und invertierbares $D \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ verwenden (siehe [HJ13, S. 24 (0.8.5.1)]). Damit erhalten wir

$$\det\Big(\eta\,\mathrm{I}_{2n+1} - (A^0)^{-\frac{1}{2}} A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}}\Big) = \det(\eta\,\mathrm{I}_{2n})\Big(\eta - \frac{1}{\eta}\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\omega|^2\Big) = \eta^{2n-1}\Big(\eta^2 - \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\Big)$$

und daraus die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Form der Nullstelle $c = \sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}$. □

Mit einem Blick auf die physikalischen Größen (siehe Seite 5) kann man sich überzeugen, dass es sich bei dem Ausdruck $c = \sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}$ tatsächlich um eine Geschwindigkeit handelt: Die Wärmeleitfähigkeit κ besitzt die Einheit $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}$, die Wärmespeicherzahl ϱc_v die Einheit $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{K}}$ und die Verzögerungszeiten τ_q und τ_θ werden in Sekunden s angegeben. Also trägt c die Einheit $\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}} \cdot \frac{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}} \cdot \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{m}{s}$ und damit die Einheit einer Geschwindigkeit.
Im nächsten Schritt sollen nun die Lösungen des Dual-Phase-Lag-Systems DPLW (2,1) auf ihre zeitliche Asymptotik hin untersucht werden. Dazu machen wir uns die erreichte Gestalt in Form des symmetrisch-hyperbolischen Systems zunutze.

3.1.2 Zeitliche Asymptotik

Wir haben das Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,1) auf die Form eines symmetrisch-hyperbolischen Systems gebracht. Die dabei entstandene Matrix L ist positiv semidefinit, aber nicht symmetrisch, weshalb die Methode aus [SK85; UKS84] über die Shizuta-Kawashima-Bedingung nicht anwendbar ist. Wohl aber können wir versuchen, das zeitliche Abklingverhalten von Lösungen mit der Methode aus den Abschnitten 2.6.2 - 2.6.4 zu bestimmen. Wir werden zeigen, dass das symmetrisch-hyperbolische System (3.2) unter der Voraussetzung

$$2\tau_\theta \geq \tau_q$$

den Bedingungen (A) und (K) genügt. Darüber hinaus werden wir sehen, dass im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ die Bedingungen (S) und (S_2) und im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ die Bedingungen (S) und (S_1) erfüllt sind. Die genannte Voraussetzung an die Parameter kennen wir bereits aus den Untersuchungen in [Qui02; BQR14] zur Stabilität in beschränkten Gebieten. Dort wurde für $2\tau_\theta > \tau_q$ die exponentielle Stabilität und für $2\tau_\theta < \tau_q$ die Instabilität von Lösungen nachgewiesen. Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ suggerierte die Stabilitätseigenschaft des charakteristischen Polynoms kein exponentielles, aber ein womöglich langsameres zeitliches Abklingen von Lösungen. Im Ganzraum wird sich dies nun in Form eines Abklingverhaltens vom Standard-Typ im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ und eines solchen vom Regularity-Loss-Typ im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ widerspiegeln.

Den Wortlaut der Bedingungen (A), (K), (S), (S_1) und (S_2) entnehme man dem Abschnitt 2.6.2 beginnend auf Seite 32. Die Gestalt der Matrizen A^0, $A^1, \ldots, A^n$ und L findet sich unter der Definition 3.1 auf Seite 52. Für eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ führen wir noch die Bezeichnung $\operatorname{span} U$ für die lineare Hülle $\{\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j \mid \alpha_j \in \mathbb{C},\, x_j \in U,\, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}^m$ ein.

Bedingung (A). Die Matrizen A^0, $A^1, \dots, A^n$ sind symmetrisch und als Diagonalmatrix mit positiven Einträgen ist A^0 positiv definit. Da $2\tau_\theta \geq \tau_q$ vorausgesetzt ist, ist die Matrix

$$[L]_{\mathrm{sy}} = \frac{1}{2}(L + L^\mathsf{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_q \tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{4\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{1}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

positiv semidefinit. Damit folgt $\mathrm{Re}\langle Lx, x\rangle_{\mathbb{C}^{2n+1}} = \langle [L]_{\mathrm{sy}} x, x\rangle_{\mathbb{C}^{2n+1}} \geq 0$ für $x \in \mathbb{C}^{2n+1}$ und so ist auch L positiv semidefinit. Anhand der Gestalt von L sehen wir, dass sowohl im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ als auch im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$

$$\ker(L) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_q \tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{4\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{\tau}{2\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \mathrm{span}\{e^1_{2n+1}\} \neq \{0\}$$

gilt. Damit ist die Bedingung (A) von Seite 32 erfüllt. □

Bedingung (K). Wir definieren

$$K: \ \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}, \quad \omega \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{4\tau_\theta^2}{\tau_q^2 \tau}\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -\frac{\kappa\tau}{2\varrho c_v \tau_\theta}\omega & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)})$ und für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt $K(-\omega) = -K(\omega)$ sowie

$$\big(K(\omega)A^0\big)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -\omega & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ \omega & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix} = -K(\omega)A^0\,.$$

Die Matrix $A(\omega)$ lautet

$$A(\omega) = \sum_{j=1}^n A^j \omega_j = \begin{pmatrix} 0 & \omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ \omega & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

und für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\omega^\mathsf{T}\omega = 1$. So berechnet sich der erste obere linke Eintrag der Matrix $[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}$ zu $([K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}})_{11} = (K(\omega)A(\omega))_{11} = \frac{4\tau_\theta^2}{\tau_q^2\tau}$. Ein Vektor v aus $\ker(L) = \mathrm{span}\{e^1_{2n+1}\}$ ist von der Form $v = (v_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{2n+1}$. Also ergibt sich

$$\langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{2n+1}} = \big([K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\big)_{11} |v_1|^2 = \frac{4\tau_\theta^2}{\tau_q^2\tau}|v_1|^2\,.$$

Damit sind alle Eigenschaften aus der Bedingung (K) von Seite 32 erfüllt. □

Anstelle der Bedingung (K) hätten wir auch die Kalman-Rangbedingung (R) von Seite 30 überprüfen können, denn unter der Bedingung (A) gilt die Implikation „$(R) \Rightarrow (K)$“ (siehe [UDK12, Theorem 4.3]). In der Tat wäre auch (R) erfüllt, denn zum Beispiel für $n = 1$ berechnet man

$$L(A^0)^{-1}A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_q\tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{4\tau_\theta^3} & -\frac{\tau}{2\tau_\theta^2} \\ 0 & \frac{\tau}{2\tau_\theta^2} & \frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\kappa\tau}{2\varrho c_v \tau_\theta}\omega & 0 \\ \frac{4\tau_\theta^2}{\tau_q^2\tau}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{(2\tau_\theta - \tau_q)}{\tau_q\tau_\theta}\omega & 0 & 0 \\ \frac{2}{\tau_q^2}\omega & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L\big((A^0)^{-1}A(\omega)\big)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_q\tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{4\tau_\theta^3} & -\frac{\tau}{2\tau_\theta^2} \\ 0 & \frac{\tau}{2\tau_\theta^2} & \frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa\tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{2\varrho c_v \tau_q \tau_\theta^2} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa\tau}{\varrho c_v \tau_q^2 \tau_\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

und sieht, dass $\operatorname{Rang}\big(L\,,\,L(A^0)^{-1}A(\omega)\,,\,L\big((A^0)^{-1}A(\omega)\big)^2\big)^\mathsf{T} = 3$ für $\omega \in \mathbb{S}^1$ gilt. Entsprechendes lässt sich induktiv auch für höhere Dimensionen zeigen.

Nachdem die Bedingungen (A) und (K) erfüllt sind, sollen nun noch die Bedingungen (S) sowie (S_1) oder (S_2) nachgewiesen werden. Hierzu unterscheiden wir zwischen den Parameterbeziehungen $2\tau_\theta > \tau_q$ und $2\tau_\theta = \tau_q$.

Fall $2\tau_\theta > \tau_q$

Bedingung (S). Wir können $S := 0_{2n+1}$ wählen. Dann sind die Eigenschaften $(SA^0)^\mathsf{T} = SA^0$ und $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}} = [L]_{\mathrm{sy}} \geq 0$ erfüllt. Wie wir mit Blick auf die Gestalt der Matrix $[L]_{\mathrm{sy}}$ in (3.6) erkennen, stellt die Voraussetzung $2\tau_\theta > \tau_q$ die noch verbleibende Forderung der Bedingung (S) von Seite 32 in Form von $\ker\big([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}\big) = \ker\big([L]_{\mathrm{sy}}\big) = \operatorname{span}\{e^1_{2n+1}\} = \ker(L)$ sicher. □

Bedingung (S_2). Mit der Matrix $S := 0_{2n+1}$ ist $i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} \geq 0$ auf $\mathbb{C}^{2n+1}$ erfüllt. □

Fall $2\tau_\theta = \tau_q$

In diesem Fall ist $\tau = \tau_\theta^2 + (\tau_\theta - \tau_q)^2 = 2\tau_\theta^2$ und die Matrizen A^0 und L vereinfachen sich zu

$$A^0 := \begin{pmatrix} \frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_\theta} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \tau\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & -\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \mathrm{I}_n & \frac{1}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Nachdem nun

$$\ker\big([L]_{\mathrm{sy}}\big) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{1}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{e^1_{2n+1}, \ldots, e^{n+1}_{2n+1}\} \neq \ker(L) = \operatorname{span}\{e^1_{2n+1}\}$$

ist, kann S nicht wie zuvor als die Nullmatrix gewählt werden.

Bedingung (S). Wir setzen

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_\theta}{3}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{1}{6\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n & -\frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $SA^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_\theta}{3}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_\theta}{3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ symmetrisch und mit $SL = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_\theta}{3}\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & -\frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{1}{2\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_\theta}{3}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{1}{2\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Also ist $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}$ positiv semidefinit mit $\ker\big([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}\big) = \operatorname{span}\{e^1_{2n+1}\} = \ker(L)$. Damit besitzt die Matrix S alle der auf Seite 32 geforderten Eigenschaften. □

Bedingung (S_1). Für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ und die soeben definierte Matrix S berechnen wir

$$SA(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{6\tau_\theta}\omega & 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad [SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & -\frac{1}{12\tau_\theta}\omega^\mathsf{T} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{12\tau_\theta}\omega & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Angewendet auf einen Vektor $v \in \mathbb{C}^{2n+1}$ ergibt sich

$$[SA(\omega)]_{\text{asy}} v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12\tau_\theta}\omega^\mathsf{T} \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ \vdots \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} \\ 0_{n\times 1} \\ \frac{1}{12\tau_\theta}\omega v_1 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass für jedes $v = (v_1, \dots, v_{n+1}, 0, \dots, 0) \in \ker([L]_{\text{sy}}) = \operatorname{span}\{e^1_{2n+1}, \dots, e^{n+1}_{2n+1}\}$

$$\langle i[SA(\omega)]_{\text{asy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{2n+1}} = \left\langle i \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{n\times 1} \\ \frac{1}{12\tau_\theta}\omega v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ (v_2, \dots, v_{n+1})^\mathsf{T} \\ 0_{n\times 1} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{2n+1}} = 0$$

gilt und damit die Bedingung (S_1) von Seite 33 erfüllt ist. □

Wir haben also die Bedingungen (A), (K), (S) und (S_1) bzw. (S_2) für das symmetrisch-hyperbolische System (3.2) nachweisen können. Demzufolge treffen nun die Aussagen aus den Sätzen 2.9 (Abschätzung im Fourierraum), 2.10 (Dissipativität), 2.13 (L^p-L^2-Abschätzung), 2.15 (L^1-L^∞-Abschätzung) und 2.16 (L^p-L^q-Abschätzung) zu. Letztere wollen wir nochmals im Detail angeben.

Satz 3.6 (L^p-L^q-Abschätzung für DPLW (2,1)). *Es seien $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Zu $q \in \{2,\infty\}$ sei $N := (n+1)(1-\frac{2}{q})$ und zu $q \in (2,\infty)$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > (n+1)(1-\frac{2}{q})$. Das zeitliche Abklingen der Lösungen des Systems DPLW (2,1) lässt sich wie folgt beschreiben:*

(i) Im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ weisen die Lösungen ein Abklingverhalten vom Standard-Typ auf: Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le s$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}}.$$

Hierbei ist $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ die Lösung von (3.2). Für eine Lösung (q,θ) von (3.1) zu Anfangswerten q_0, q_1, θ_0 mit $V_0 := \left(\frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0\,,\, q_0\,,\, \tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0\right)^\mathsf{T} \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}$ ergeben sich daraus insbesondere die folgenden Abschätzungen mit jeweils einer von q_0, q_1, θ_0 unabhängigen Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$ für alle $t \in [0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x^k q(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} &\le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \quad \text{für } k \le s\,,\\
\left\|\partial_x^k \theta(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \quad \text{für } k \le s\,,\\
\left\|\partial_x^k \theta_t(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k+1}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+1+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \quad \text{für } k \le s-1\,.
\end{aligned}$$

(ii) Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ weisen die Lösungen ein Abklingverhalten vom Regularity-Loss-Typ auf: Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}$, für alle $k,l \in \mathbb{N}_0$ mit $k+l \le s$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}}.$$

Insbesondere gelten mit jeweils einer von q_0, q_1, θ_0 unabhängigen Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$ für alle $t \in [0,\infty)$ die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x^k q(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} &\le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \quad \text{für } k \le s\,,\\
\left\|\partial_x^k \theta(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \quad \text{für } k \le s\,,\\
\left\|\partial_x^k \theta_t(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+1+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k+1,l\}}{q}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+1+N,p}(\mathbb{R}^n)^{2n+1}} \quad \text{für } k \le s-1\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Durch die nachgewiesenen Bedingungen (A), (K), (S) und (S_1) bzw. (S_2) erhalten wir die Abschätzung für die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ des Systems (3.2) aus Satz 2.16. Satz 3.2 beschreibt den Zusammenhang zur Lösung (q,θ) von (3.1). Insbesondere gelten $\|\partial_x^k q(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} \leq \|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{2n+1}}$ und $\|\partial_x^k \theta(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{2n+1}}$ und demnach die behaupteten Abschätzungen für $\partial_x^k q$ und $\partial_x^k \theta$. Erstere liefert unter Beachtung der Differentialgleichung (3.1 b) auch eine Abschätzung für $\partial_x^k \theta_t$, denn es gilt $\|\partial_x^k \theta_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{\varrho c_v}\|\partial_x^k \operatorname{div} q(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{n}{\varrho c_v}\|\partial_x^{k+1} q(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. □

Wir stellen fest, dass sich im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ für die durch das Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,1) beschriebene Temperatur θ und deren Ortsableitungen $\partial_x^k \theta$ dieselben Abklingraten ergeben, wie sie für die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (vergleiche [Nis03, (1.6)]) oder der gedämpften Wellengleichung (vergleiche [Nis03, (1.7)]) vorliegen. Für die Zeitableitung $\partial_x^k \theta_t$ hingegen weicht die Rate um den Faktor $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ ab.

3.2 Asymptotik der Eigenwerte in einer Raumdimension

Die Beweise zur L^p-L^2-Abschätzung (Satz 2.13) und zur L^1-L^∞-Abschätzung (Satz 2.15) lassen erkennen, dass das Verhalten von $|\mathscr{F}\mathcal{S}(t)V_0(\xi)|$ für $|\xi| \to 0$ für die Abklingrate verantwortlich ist, während das Regularity-Loss-Phänomen dem Verhalten für $|\xi| \to \infty$ zuzuschreiben ist. Die entscheidende Konsequenz aus den im Fourierraum erzielten Abschätzungen

$$|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)| \quad \text{bzw.} \quad |\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)| \leq Ce^{-c\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|$$

(siehe Satz 2.9) war, dass sich $|\mathscr{F}(\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)|$ für $|\xi| \to 0$ in beiden Fällen wie $e^{-c|\xi|^2 t}$ verhält, jedoch für $|\xi| \to \infty$ im Standard-Fall wie e^{-ct} und im Regularity-Loss-Fall wie $e^{-c|\xi|^{-2}t}$ verläuft. Nachdem die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ eines symmetrisch-hyperbolischen Anfangswertproblems durch $\mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0$ gegeben ist (siehe Satz 2.2), ist es die Matrix $M(\xi)$, die das Abklingverhalten bestimmt. Alternativ zur bisherigen Methode ist also auch eine Untersuchung der Eigenwerte der Matrix $M(\xi)$ hinsichtlich deren Asymptotik für $|\xi| \to 0$ und $|\xi| \to \infty$ zielführend. Dieses Vorgehen liefert zusätzliche Erkenntnisse, beispielsweise zur Optimalität der Abklingrate oder zur Unterscheidung zwischen schneller und langsamer abklingenden Anteilen der Lösung.

Für das Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,1) in einer Raumdimension möchten wir auf diese Weise einigen weiteren Aussagen zur Asymptotik auf den Grund gehen und zeigen, wie sich das für $2\tau_\theta > \tau_q$ und $2\tau_\theta = \tau_q$ unterschiedliche Abklingverhalten der Lösung auf der Ebene der Eigenwerte widerspiegelt.

Wir betrachten also das System (3.2) für $n = 1$. Zu einem Anfangswert $V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3$ können wir die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))^3$ gemäß Satz 2.2 (i) für $t \in [0,\infty)$ darstellen als

$$\mathcal{S}(t)V_0 = \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}(\mathscr{F}V_0) \quad \text{mit} \quad M(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}\big(iA(\xi)+L\big)(A^0)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}\,,$$

wobei $A(\xi) := \xi A^1$ ist und die Matrizen A^0, A^1 und L aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ so lauten, wie sie in der Definition 3.1 angegeben sind, wenn man dort $n = 1$ setzt. Konkret berechnet sich das Matrixprodukt zu

$$M(\xi) = -(A^0)^{-\frac{1}{2}}\big(i\xi A^1 + L\big)(A^0)^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2\kappa\tau_\theta}}{\sqrt{\varrho c_v}\tau_q}i\xi & 0 \\ -\frac{\sqrt{2\kappa\tau_\theta}}{\sqrt{\varrho c_v}\tau_q}i\xi & \frac{\tau_q - 2\tau_\theta}{\tau_q\tau_\theta} & \frac{\sqrt{\tau}}{\tau_q\tau_\theta} \\ 0 & -\frac{\sqrt{\tau}}{\tau_q\tau_\theta} & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, das für $\xi \in \mathbb{R}$ durch

$$p_M(\xi,\cdot):\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}\,,\quad \lambda\mapsto \det(\lambda\,\mathrm{I}_3 - M(\xi)) = \lambda^3 + \frac{2}{\tau_q}\lambda^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\xi^2\right)\lambda + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}\xi^2 \tag{3.8}$$

gegeben ist. Eine Information über die Eigenwerte haben wir schon, denn da das System (3.2) die Bedingungen (A), (K), (S) und (S_1) bzw. (S_2) erfüllt, liegt nach Satz 2.10 die gleichmäßige Dissipativität im Sinne von Shizuta-Kawashima vor.

Satz 3.7 (Dissipativität für DPLW (2,1)). *Für $2\tau_\theta > \tau_q$ ist das System* (3.2) *gleichmäßig dissipativ vom Typ (1,1) und für $2\tau_\theta = \tau_q$ gleichmäßig dissipativ vom Typ (1,2) im Sinne von* (2.15).

Diese Eigenschaft bedeutet für die Eigenwerte der Matrix $M(\xi)$ aus (3.7), dass Folgendes gilt (vergleiche Seite 29):

$$\text{Für } 2\tau_\theta > \tau_q:\ \exists\, c\in\mathbb{R}^+\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}\ \forall\,\lambda(\xi)\text{ Eigenwert von } M(\xi):\ \mathrm{Re}\big(\lambda(\xi)\big) \le -c\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\,. \tag{3.9}$$

$$\text{Für } 2\tau_\theta = \tau_q:\ \exists\, c\in\mathbb{R}^+\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}\ \forall\,\lambda(\xi)\text{ Eigenwert von } M(\xi):\ \mathrm{Re}\big(\lambda(\xi)\big) \le -c\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\,. \tag{3.10}$$

Die nachstehenden Untersuchungen zur asymptotischen Entwicklung der Eigenwerte werden belegen, dass diese Aussage optimal ist, d. h. dass Eigenwerte mit $\mathrm{Re}(\lambda(\xi)) \sim -\xi^2$ für $|\xi|\to 0$ und $\mathrm{Re}(\lambda(\xi)) \sim -1$ bzw. $\mathrm{Re}(\lambda(\xi)) \sim -\xi^{-2}$ für $|\xi|\to\infty$ tatsächlich auftreten. Daraus lässt sich die Optimalität der für das eindimensionale System DPLW (2,1) erzielten L^p-L^q-Abschätzung ableiten. Es wird sich aber auch zeigen, dass es Eigenwerte gibt, die besser abklingen. Dadurch entsteht die Möglichkeit, die langsamer abklingenden Anteile herauszufiltern und so eine bessere Abklingrate oder einen geringeren Regularitätsverlust zu erzielen. Die technischen Hilfsmittel werden Resultate aus der Störungstheorie und Newton-Polygone sein (siehe dazu Anhang A.6).

3.2.1 Asymptotik für $|\xi| \to 0$

Wir betrachten zunächst die Situation für $|\xi|\to 0$. Neben der asymptotischen Entwicklung der Eigenwerte werden wir an manchen Stellen auch die Entwicklung der zugehörigen Eigenprojektion bestimmen, also der orthogonalen Projektion auf den zu einem Eigenwert $\lambda(\xi)$ gehörigen Eigenraum $\ker(M(\xi) - \lambda(\xi)\,\mathrm{I}_3)$. Zur Verwendung des Landau-Symbols $\mathcal{O}(\cdot)$ siehe Anhang A.6.4.

Satz 3.8 (Eigenwerte und Eigenprojektionen für $|\xi|\to 0$). *Es existieren drei stetige Funktionen $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, sodass $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ für $\xi\in\mathbb{R}$ die Eigenwerte gemäß ihrer Vielfachheit von $M(\xi)$ darstellen. Dabei gilt (ohne Einschränkung bezüglich der Indizierung)*

$$\lambda_1(\xi) = \frac{1}{\tau_q}(-1+i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^2\big)\,,\quad \lambda_2(\xi) = \frac{1}{\tau_q}(-1-i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^2\big)$$
$$\textit{und}\quad \lambda_3(\xi) = -\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 + \mathcal{O}\big(|\xi|^4\big)\quad \textit{für } |\xi|\to 0\,.$$

Für die zu $\lambda_3(\xi)$ gehörige Eigenprojektion $P_3(\xi)$ gilt

$$P_3(\xi) = P_{3,0} + \mathcal{O}\big(|\xi|\big)\quad \textit{für } |\xi|\to 0\quad \textit{mit}\quad P_{3,0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Beweis: Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (3.8) hängen stetig von $\xi \in \mathbb{R}$ ab. Nach Satz A.22 lassen sich daher die Nullstellen von $p_M(\xi,\cdot)$ und damit die Eigenwerte von $M(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}$ durch die Funktionswerte dreier stetiger Funktionen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ beschreiben. Im Punkt $\xi = 0$ lauten diese, wenn wir ohne Einschränkung eine Indizierung festlegen,

$$\lambda_1(0) = \frac{1}{\tau_q}(-1+i)\,, \quad \lambda_2(0) = \frac{1}{\tau_q}(-1-i) \quad \text{und} \quad \lambda_3(0) = 0\,.$$

Um die Störungstheorie aus Anhang A.6.2 anwenden zu können, ersetzen wir in (3.8) den Parameter ξ^2 durch ζ und lassen $\zeta \in \mathbb{C}$ zu, d. h. wir betrachten das Polynom

$$\widetilde{p}_M(\zeta,\cdot):\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad \eta \mapsto \eta^3 + \frac{2}{\tau_q}\eta^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta\right)\eta + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta\,.$$

Die Nullstellen von $p_M(\xi,\cdot)$ für $\xi \in \mathbb{R}$ entsprechen genau den Nullstellen von $\widetilde{p}_M(\xi^2,\cdot)$. Da $\widetilde{p}_M(0,\cdot)$ die drei bereits angegebenen, paarweise verschiedenen Nullstellen besitzt, handelt es sich bei $\zeta = 0$ um keinen kritischen Punkt. Dies bedeutet nach Satz A.23 (ii), dass sich die Nullstellen von $\widetilde{p}_M(\zeta,\cdot)$ in einer Umgebung von $\zeta = 0$ durch drei holomorphe Funktionen η_1, η_2 und η_3 mit $\eta_1(0) = \frac{1}{\tau_q}(-1+i)$, $\eta_2(0) = \frac{1}{\tau_q}(-1-i)$ und $\eta_3(0) = 0$ beschreiben lassen. Darüber hinaus nutzen wir, dass jede holomorphe Funktion als eine Potenzreihe darstellbar ist. Dies impliziert dann unmittelbar $\eta_1(\zeta) = \frac{1}{\tau_q}(-1+i) + \mathcal{O}(|\zeta|)$ und $\eta_2(\zeta) = \frac{1}{\tau_q}(-1-i) + \mathcal{O}(|\zeta|)$ für $|\zeta| \to 0$ und daher

$$\lambda_1(\xi) = \eta_1(\xi^2) = \frac{1}{\tau_q}(-1+i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^2\big) \quad \text{und} \quad \lambda_2(\xi) = \eta_2(\xi^2) = \frac{1}{\tau_q}(-1-i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^2\big) \quad \text{für } |\xi| \to 0\,.$$

Ebenso folgt auch $\lambda_3(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^2)$. Zur genaueren Auskunft wollen wir hier jedoch noch das erste Glied der Potenzreihe bestimmen. Dies soll über das Newton-Polygon-Verfahren geschehen, welches wir auf das Polynom $\widetilde{p}_M(\zeta,\eta) \in \mathbb{C}^*(\zeta)[\eta]$ anwenden. Für das Verfahren siehe man die Beschreibung in Anhang A.6.3 und die dort eingeführten Bezeichnungen. Alternativ zu dieser Methode wäre auch ein Potenzreihenansatz möglich.

Der in Abbildung 3.1 dargestellte Polygonzug zum charakteristischen Polynom $\widetilde{p}_M(\zeta,\cdot)$ besitzt ein Segment S_1 der Steigung -1, woraus wir den Exponenten $\gamma_{3,1} = 1$ erhalten. Das weitere Segment S_2 mit der Steigung 0 und der Länge 2 gehört zu dem schon beschriebenen Eigenwertpaar $\{\eta_1(\zeta), \eta_2(\zeta)\}$. Den Eckpunkten des Segements S_1 sind die Werte $a_{0,1} := \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}$ und $a_{1,0} := \frac{2}{\tau_q^2}$ zugeordnet. Aus $a_{1,0}\eta_{3,\gamma_{3,1}} + a_{0,1} = 0$ ergibt sich der zum Exponenten $\gamma_{3,1}$ gehörige Koeffizient $\eta_{3,\gamma_{3,1}} = \eta_{3,1} = -\frac{\kappa}{\varrho c_v}$. Da η_3 in einer Umgebung von $\zeta = 0$ holomorph ist, können wir $\eta_3(\zeta) = -\frac{\kappa}{\varrho c_v}\zeta + \mathcal{O}(|\zeta|^2)$ für $|\zeta| \to 0$ schließen und erhalten somit

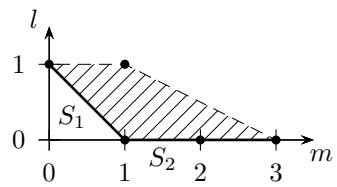

Abbildung 3.1: Newton-Polygon zu $\widetilde{p}_M(\zeta,\cdot)$

$$\lambda_3(\xi) = \eta_3(\xi^2) = -\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 + \mathcal{O}\big(|\xi|^4\big) \quad \text{für } |\xi| \to 0\,.$$

Nach Satz A.23 (ii) ist auch die zu $\lambda_3(\xi)$ gehörige Eigenprojektion $P_3(\xi)$ in einer Umgebung von $\xi = 0$ durch eine konvergente Potenzreihe beschreibbar. Es muss also

$$P_3(\xi) = P_{3,0} + \mathcal{O}\big(|\xi|\big) \quad \text{für } |\xi| \to 0$$

gelten, wobei $P_{3,0}$ die Eigenprojektion zum Eigenwert $\lambda_3(0) = 0$ der Matrix $M(0)$ ist. Der Eigenraum zu $\lambda_3(0)$ ist der Kern der Matrix $-(A^0)^{-\frac{1}{2}}L(A^0)^{-\frac{1}{2}}$. Dieser besteht gerade aus dem vom ersten Einheitsvektor in $\mathbb{C}^3$ aufgespannten Unterraum $\operatorname{span}\{e_3^1\}$. Daher lautet $P_{3,0}$ wie in der Behauptung angegeben. $\square$

Korollar 3.9 (Optimalität der Abklingraten). *Die Abklingraten in den L^p-L^q-Abschätzungen für $\partial_x^k \mathcal{S}(\cdot)V_0$ aus Satz 3.6 sind für $n = 1$ optimal.*

Beweis: Nach Satz 3.8 und unabhängig davon, ob $2\tau_\theta > \tau_q$ oder $2\tau_\theta = \tau_q$ ist, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sodass $\mathrm{Re}(\lambda_3(\xi)) \geq -\frac{2\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 \geq \mathrm{Re}(\lambda_j(\xi))$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < \varepsilon$ und $j \in \{1,2\}$ gilt. Damit folgt für die Wachstumsschranke (siehe Seite 28)

$$\omega(e^{M(\xi)\cdot}) = s(M(\xi)) = \max_{j\in\{1,2,3\}} \mathrm{Re}(\lambda_j(\xi)) \geq -\frac{2\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\,,$$

was nach Definition bedeutet, dass $\sup_{|x|=1}|e^{M(\xi)t}x| = \|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}}$ für $|\xi| \to 0$ nicht besser als gegen einen Term wie $Ce^{-c\xi^2 t}$ mit $C, c \in \mathbb{R}^+$ abgeschätzt werden kann. Da auch die Abschätzung

$$\left|(A^0)^{\frac{1}{2}}(\mathscr{F}\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)\right| = \left|e^{M(\xi)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right| \leq \sup_{|x|=1}\left|e^{M(\xi)t}x\right|\left|(A^0)^{\frac{1}{2}}(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|$$

optimal ist und $|\cdot|$ und $|(A^0)^{\frac{1}{2}}\cdot|$ äquivalente Normen auf $\mathbb{C}^3$ darstellen, folgt insgesamt, dass $|\mathscr{F}\mathcal{S}(t)V_0(\xi)|$ für $|\xi| \to 0$ nicht besser als gegen einen Ausdruck der Form $Ce^{-c\xi^2 t}|\mathscr{F}V_0(\xi)|$ mit $C, c \in \mathbb{R}^+$ abgeschätzt werden kann. Diese Abschätzung aber legt die Abklingrate fest, wie man anhand der Beweise zur L^p-L^2-Abschätzung (Satz 2.13) und zur L^1-L^∞-Abschätzung (Satz 2.15) feststellt. Infolgedessen sind die für das eindimensionale DPLW (2,1)-System erzielten Abklingraten optimal. □

An der asymptotischen Entwicklung der Eigenwerte aus Satz 3.8 erkennt man, dass eine stärkere Dissipativität als die in (3.9) bzw. (3.10) für $|\xi| \to 0$ durch den Eigenwert $\lambda_3(\xi)$ verhindert wird. Wie wir am Beispiel der L^1-L^2-Abschätzung zeigen möchten, kann durch Herausfiltern des entsprechenden Lösungsanteils die Abklingrate um den Faktor $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ verbessert werden. Als Orientierung für das Vorgehen dienen Untersuchungen, wie sie in [IHK08] für das dissipative Timoshenko-System durchgeführt wurden. Wir definieren für $V_0 \in L^2(\mathbb{R})^3$ und $t \in [0,\infty)$

$$\mathcal{S}_0(t)V_0 := \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}(\cdot)^2 t}P_{3,0}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0 = \mathscr{F}^{-1}e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}(\cdot)^2 t}P_{3,0}\mathscr{F}V_0\,.$$

Dann gilt $\mathcal{S}_0(t)V_0 = (T(t),0,0)^\mathsf{T}$, wobei T die Lösung der klassischen Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert $(V_0)_1 = (e_3^1)^\mathsf{T}V_0$ ist:

$$\begin{aligned} \varrho c_v T_t - \kappa T_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}\,,\\ T(0,\cdot) &= (V_0)_1 && \text{in } \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wir möchten eine Abschätzung für die Differenz $\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0$ herleiten und vergleichen daher zunächst die Matrizen $e^{M(\xi)t}$ und $e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}$.

Lemma 3.10 (Differenz der Matrizen).

(i) Ist $2\tau_\theta > \tau_q$, so existieren Konstanten $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, r \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq \begin{cases} c_1|\xi|e^{-d_1\xi^2 t} + c_2 e^{-d_2 t} & \text{für } |\xi| < r\,,\\ c_3 e^{-d_3 t} & \text{für } |\xi| \geq r\,. \end{cases}$$

(ii) Ist $2\tau_\theta = \tau_q$, so existieren Konstanten $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, r \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq \begin{cases} c_1|\xi|e^{-d_1\xi^2 t} + c_2 e^{-d_2 t} & \text{für } |\xi| < r\,,\\ c_3 e^{-d_3\xi^{-2} t} & \text{für } |\xi| \geq r\,. \end{cases}$$

Beweis: Wir betrachten die Situationen für $|\xi| < r$ und $|\xi| \geq r$ mit einem noch zu bestimmenden $r \in \mathbb{R}^+$. Der Unterschied zwischen den Fällen $2\tau_\theta > \tau_q$ und $2\tau_\theta = \tau_q$ wirkt sich erst im zweiten Teil aus.

▸ Zu $|\xi| < r$: Aus dem asymptotischen Verhalten aus Satz 3.8 schließen wir mithilfe der in Anhang A.6.4 zusammengestellten Rechenregeln zum Landau-Symbol:

$$\begin{aligned}
&\exists\, r_0 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}^+\ \forall\, \xi \in \mathbb{R},\ |\xi| < r_0 : \\
&\qquad \mathrm{Re}(\lambda_1(\xi)) = \mathrm{Re}(\lambda_2(\xi)) \leq -a_1\,, \quad \lambda_3(\xi) = \mathrm{Re}(\lambda_3(\xi)) \leq -a_3\xi^2\,, \quad \left|\lambda_3(\xi) + \frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\right| \leq a_2\xi^4 \\
&\qquad \text{und} \quad \left\|P_3(\xi) - P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq b|\xi|\,. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Dass $\mathrm{Re}(\lambda_1(\xi)) = \mathrm{Re}(\lambda_2(\xi))$ gilt und $\lambda_3(\xi)$ in $\mathbb{R}$ liegt, begründet sich darin, dass das Polynom $p_M(\xi, \cdot)$ aus (3.8) ausschließlich reelle Koeffizienten aufweist. Dadurch muss zu jeder Nullstelle aus $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ auch deren konjugiert komplexe Zahl eine Nullstelle sein. Da die Eigenwerte der Matrix $M(\xi)$ für $|\xi| < r_0$ insbesondere paarweise verschieden sind, lautet die Spektraldarstellung $M(\xi) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(\xi)P_j(\xi)$, wobei $P_j(\xi)$ die zu $\lambda_j(\xi)$ gehörige Eigenprojektion bezeichnet (siehe beispielsweise [Kat66, S. 41]). Daraus folgt $e^{M(\xi)t} = \sum_{j=1}^3 e^{\lambda_j(\xi)t}P_j(\xi)$ für $t \in [0, \infty)$ (siehe [Kat66, S. 45]), sodass sich der Ausdruck $\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}}$ für $|\xi| < r_0$ wie folgt aufteilen lässt:

$$\begin{aligned}
\left\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} &= \left\|\left(\sum_{j=1}^3 e^{\lambda_j(\xi)t}P_j(\xi)\right) - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^2 e^{\lambda_j(\xi)t}P_j(\xi)\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} + \left\|e^{\lambda_3(\xi)t}\big(P_3(\xi) - P_{3,0}\big)\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \\
&\quad + \left\|e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}\Big(e^{\left(\lambda_3(\xi) + \frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\right)t} - 1\Big)P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}}\,. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Für die ersten beiden Terme erhalten wir aus (3.12) sowie der Tatsache, dass für die orthogonalen Projektionen stets $\|P_j(\xi)\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} = 1$ gilt,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^2 e^{\lambda_j(\xi)t}P_j(\xi)\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} &\leq \sum_{j=1}^2 e^{\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi))t}\|P_j(\xi)\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq 2e^{-a_1 t}\,, \\
\|e^{\lambda_3(\xi)t}(P_3(\xi) - P_{3,0})\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} &= e^{\lambda_3(\xi)t}\|P_3(\xi) - P_{3,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq b|\xi|e^{-a_3\xi^2 t}\,.
\end{aligned}$$

Bezüglich des dritten Summanden aus (3.13) überlegen wir uns zunächst, dass nach dem Mittelwertsatz und der Abschätzung aus (3.12) für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \leq r := \min\{r_0, \sqrt{\frac{\kappa}{4a_2\varrho c_v}}\}$ und alle $t \in [0, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left|e^{\left(\lambda_3(\xi) + \frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\right)t} - 1\right| &\leq t \cdot \sup_{s\in[0,t]}\left|\Big(\lambda_3(\xi) + \frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\Big)e^{\left(\lambda_3(\xi) + \frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\right)s}\right| \\
&\leq a_2\xi^4 t e^{a_2\xi^4 t} \leq a_2\xi^4 t e^{\frac{\kappa}{4\varrho c_v}\xi^2 t} = \frac{4\varrho c_v}{\kappa}a_2\xi^2\Big(\frac{\kappa}{4\varrho c_v}\xi^2 t\Big)e^{\frac{\kappa}{4\varrho c_v}\xi^2 t} \quad \text{(nach Wahl von } r) \\
&\leq \frac{4\varrho c_v}{\kappa}a_2\xi^2 e^{\frac{\kappa}{4\varrho c_v}\xi^2 t}e^{\frac{\kappa}{4\varrho c_v}\xi^2 t} = \frac{4\varrho c_v}{\kappa}a_2\xi^2 e^{\frac{\kappa}{2\varrho c_v}\xi^2 t}\,.
\end{aligned}$$

Da $\|P_{3,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} = 1$ ist, folgt somit

$$\left\|e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}\Big(e^{\left(\lambda_3(\xi) + \frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\right)t} - 1\Big)P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} = e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}\left|e^{\left(\lambda_3(\xi) + \frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2\right)t} - 1\right| \leq \frac{4\varrho c_v}{\kappa}a_2\xi^2 e^{-\frac{\kappa}{2\varrho c_v}\xi^2 t}\,.$$

Wenn wir die genannten Abschätzungen in (3.13) einsetzen, ergibt sich

$$\left\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq 2e^{-a_1 t} + b|\xi|e^{-a_3\xi^2 t} + \frac{4\varrho c_v}{\kappa}a_2\xi^2 e^{-\frac{\kappa}{2\varrho c_v}\xi^2 t}$$

für alle $t \in [0,\infty)$ und alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \leq r$ und daraus die behauptete Ungleichung, wenn wir beispielsweise $c_1 := b + \frac{4\varrho c_v}{\kappa}a_2 r$, $d_1 := \min\{a_3, \frac{\kappa}{2\varrho c_v}\}$, $c_2 := 2$ und $d_2 := a_1$ wählen.

▸ Zu $|\xi| \geq r$: Hier nehmen wir die Ungleichung

$$\left\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq \left\|e^{M(\xi)t}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} + \left\|e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq \left\|e^{M(\xi)t}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} + e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}r^2 t} \tag{3.14}$$

als Ausgangspunkt. Die Dissipativität aus (3.9) bzw. (3.10) genügt nicht, um eine Abschätzung für $\|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}}$ herzuleiten (vergleiche Abschnitt 2.5.2). Jedoch wissen wir aus Abschnitt 3.1.2, dass das System (3.2) die Bedingungen (A), (K) und (S) sowie im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ die Bedingung (S_2) und im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ die Bedingung (S_1) erfüllt und somit die jeweilige Abschätzung im Fourierraum aus Satz 2.9 gültig ist. Wie im Beweis zu Satz 2.12 erhält man daraus

$$\left\|e^{M(\xi)t}\right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq Ce^{-c\beta(\xi)t}$$

für Konstanten $C, c \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta(\xi) := \frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}$ im Fall der Bedingung (S_1) und $\beta(\xi) := \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}$ im Fall der Bedingung (S_2).

(i) Für $2\tau_\theta > \tau_q$ ist $\|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq Ce^{-c\frac{\xi^2}{1+\xi^2}t} \leq Ce^{-\frac{c}{2}\min\{1,r^2\}t}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \geq r$. Zusammen mit (3.14) liefert dies die behauptete Abschätzung, wenn man zum Beispiel $c_3 := C + 1$ und $d_3 := \min\{\frac{c}{2}\min\{1, r^2\}, \frac{\kappa}{\varrho c_v}r^2\}$ wählt.

(ii) Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ lautet die Ungleichung $\|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \leq Ce^{-c\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}t}$. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \geq 1$ gilt $-\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \leq -\frac{1}{4\xi^2}$. Falls $r < 1$ ist, kann man für $\xi \in \mathbb{R}$ mit $1 > |\xi| \geq r$ die Ungleichung $-\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \leq -\frac{r^2}{4} = -\frac{r^4}{4r^2} \leq -\frac{r^4}{4\xi^2}$ nutzen, d. h. in jedem Fall ist $-\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \leq -\frac{\min\{1,r^4\}}{4}\xi^{-2}$. Bezüglich des zweiten Terms aus (3.14) $e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}r^2 t}$ überlegt man sich, dass für $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \geq r$ stets $-\frac{\kappa}{\varrho c_v}r^2 = -\frac{\kappa}{\varrho c_v}\frac{r^4}{r^2} \leq -\frac{\kappa}{\varrho c_v}\frac{r^4}{\xi^2} \leq -\frac{\kappa\min\{1,r^4\}}{\varrho c_v}\xi^{-2}$ gilt. Somit folgt die behauptete Abschätzung, wenn man beispielsweise $c_3 := C + 1$ und $d_3 := \min\{1, r^4\}\min\{\frac{1}{4}, \frac{\kappa}{\varrho c_v}\}$ setzt. □

In Abschnitt 3.1.2 haben wir gesehen, dass das symmetrisch-hyperbolische Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,1) die Bedingungen (A), (K), (S) und (S_1) bzw. (S_2) erfüllt. Demzufolge trifft insbesondere die L^1-L^2-Abschätzungen aus Satz 2.13 zu. Für die Differenz $\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0$ folgt nun eine L^1-L^2-Abschätzung, bei der die Abklingrate gegenüber derjenigen aus Satz 2.13 um $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ besser ist.

Satz 3.11 (L^1-L^2-Abschätzung, Konvergenz gegen Lösung der Wärmeleitungsgleichung). *Es sei* $s \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

(i) im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$*:*

$$\begin{aligned}&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3 \cap L^1(\mathbb{R})^3\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\ &\quad \left\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)\right\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \leq C_1(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\left\|V_0\right\|_{L^1(\mathbb{R})^3} + C_2e^{-ct}\left\|\partial_x^k V_0\right\|_{L^2(\mathbb{R})^3}.\end{aligned}$$

(ii) im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$*:*

$$\begin{aligned}&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3 \cap L^1(\mathbb{R})^3\ \forall\, k,l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k+l \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\ &\quad \left\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)\right\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \leq C_1(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\left\|V_0\right\|_{L^1(\mathbb{R})^3} + C_2(1+t)^{-\frac{l}{2}}\left\|\partial_x^{k+l} V_0\right\|_{L^2(\mathbb{R})^3}.\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt ähnlich wie in [IHK08, Theorem 5.1]. Nach dem Satz von Plancherel A.8 und mit $a := \|(A^0)^{-\frac{1}{2}}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}\|(A^0)^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}$ gilt

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} &= \Big\|(\cdot)^k\Big((A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\cdot)t} - (A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}(\cdot)^2 t}P_{3,0}\Big)(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\\ &\le a\int_{\mathbb{R}}\xi^{2k}\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,.\end{aligned}$$

Gemäß Lemma 3.10 kann das Integral in die Bereiche $|\xi| < r$ und $|\xi| \ge r$ für ein $r \in \mathbb{R}^+$ aufgeteilt und dort, je nachdem, ob $2\tau_\theta > \tau_q$ oder $2\tau_\theta = \tau_q$ ist, die entsprechende Abschätzung zu gewissen Konstanten $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}^+$ ausgenutzt werden. Für das erste Teilintegral ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|<r}\xi^{2k}\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\le \int_{|\xi|<r}\xi^{2k}\big(c_1|\xi|e^{-d_1\xi^2 t} + c_2 e^{-d_2 t}\big)^2|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\le 2\int_{|\xi|<r}\xi^{2k}\Big(c_1^2\xi^2 e^{-2d_1\xi^2 t} + c_2^2 e^{-2d_2 t}\Big)|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\le \|\mathscr{F}V_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})^3}\Big(2c_1^2\int_{|\xi|<r}\xi^{2k+2}e^{-2d_1\xi^2 t}\,\mathrm{d}\xi + 4c_2^2 r^{2k+1}e^{-2d_2 t}\Big)\,.\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Hausdorff-Young A.10, der Abschätzung aus Lemma A.16 (i) und der Tatsache, dass $4c_2^2 r^{2k+1}e^{-2d_2 t}$ gegen ein geeignetes Vielfaches von $(1+t)^{-\frac{3}{2}-k}$ abgeschätzt werden kann, erhalten wir daraus

$$\int_{|\xi|<r}\xi^{2k}\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \le C(1+t)^{-\frac{3}{2}-k}\|V_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})^3}$$

für eine geeignete Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, die wegen $k \le s$ unabhängig von k gewählt werden kann.

(i) Für $2\tau_\theta > \tau_q$ genügt das Integral über den Bereich $|\xi| \ge r$ der Ungleichung

$$\int_{|\xi|\ge r}\xi^{2k}\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \le c_3^2 e^{-2d_3 t}\|\partial_x^k V_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\,.$$

In diesem Fall folgt also

$$\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} \le aC(1+t)^{-\frac{3}{2}-k}\|V_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})^3} + ac_3^2 e^{-2d_3 t}\|\partial_x^k V_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}$$

und daraus durch Ziehen der Wurzel die behauptete Abschätzung.

(ii) Ist $2\tau_\theta = \tau_q$, so gilt für $l \in \mathbb{N}_0$ mit $k + l \le s$

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\ge r}\xi^{2k}\|e^{M(\xi)t} - e^{-\frac{\kappa}{\varrho c_v}\xi^2 t}P_{3,0}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi &\le c_3^2\int_{|\xi|\ge r}\xi^{2k}e^{-2d_3\xi^{-2}t}|(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &= c_3^2\int_{|\xi|\ge r}\xi^{-2l}e^{-2d_3\xi^{-2}t}|\xi^{k+l}(\mathscr{F}V_0)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\le c_3^2\sup_{|\xi|\ge r}\xi^{-2l}e^{-2d_3\xi^{-2}t}\|(\cdot)^{k+l}(\mathscr{F}V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\\ &\le b(1+t)^{-l}\|\partial_x^{k+l}V_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\end{aligned}$$

für eine von k und l unabhängige Konstante $b \in \mathbb{R}^+$ nach Lemma A.16 (ii). Damit ergibt sich

$$\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} \le aC(1+t)^{-\frac{3}{2}-k}\|V_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})^3} + ab(1+t)^{-l}\|\partial_x^{k+l}V_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\,,$$

woraus die behauptete Abschätzung folgt. □

Aus Satz 3.2 wissen wir, dass die erste Komponente von $\mathcal{S}(t)V_0$ die Temperatur und die zweite die Wärmestromdichte für das Dual-Phase-Lag-System (3.1) beschreibt:

$$(\mathcal{S}(t)V_0)_1 = \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta(t) \quad \text{und} \quad (\mathcal{S}(t)V_0)_2 = q(t)\,.$$

Nach Definition ist $(\mathcal{S}_0(\cdot)V_0)_1$ die Lösung T von (3.11) und $(\mathcal{S}_0(t)V_0)_2 = 0$. Der Satz 3.11 besagt also zum einen, dass die Wärmestromdichte q für sich genommen besser abklingt als die Gesamtlösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0$. Während für $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ bei der L^1-L^2-Abschätzung nach Satz 2.13 im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ die Abklingrate $(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}$ vorliegt, erhalten wir für q eine um $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ bessere Rate:

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k q(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)_2\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \\ &\le C_1(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\|V_0\|_{L^1(\mathbb{R})^3} + C_2 e^{-ct}\|\partial_x^k V_0\|_{L^2(\mathbb{R})^3}\,.\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$. Ähnliches ist bei anderer Wahl von „L^p-L^q“ zu erwarten, weshalb die Abklingrate für $\partial_x^k q$ aus Satz 3.6 nicht optimal ist. Zum anderen besagt der Satz 3.11, dass die durch das Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,1) modellierte Temperatur θ_{DPLW} gegen die durch die Wärmeleitungsgleichung beschriebene Temperatur θ_{W} konvergiert, denn es gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\partial_x^k\Big(\theta_{\mathrm{DPLW}}(t) - \theta_{\mathrm{W}}(t)\Big)\Big\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}\Big\|\partial_x^k\Big(\frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta(t) - T(t)\Big)\Big\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)_1\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\le \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_0(t)V_0)\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \le C_0(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}\end{aligned}$$

für eine von V_0 abhängige Konstante $C_0 \in \mathbb{R}^+$. Hierbei ist zu beachten, dass es sich physikalisch bei T aus (3.11) um eine skalierte Temperatur handelt, denn während $\theta_{\mathrm{DPLW}} = \theta$ aus dem Dual-Phase-Lag-System die tatsächliche Temperatur zum Anfangswert θ_0 meint, beschreibt T aus der Wärmeleitungsgleichung (3.11) eine „Temperatur“ zum Anfangswert $(V_0)_1 = \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0$. Die wirkliche physikalische Temperatur θ_{W} zum Anfangswert θ_0 wird hier also durch $\theta_{\mathrm{W}} = \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}T$ dargestellt.

3.2.2 Asymptotik für $|\xi| \to \infty$

Bei der Asymptotik der Eigenwerte für $|\xi| \to 0$, die die Abklingrate bestimmt, ließ sich kein Unterschied zwischen den Fällen $2\tau_\theta > \tau_q$ und $2\tau_\theta = \tau_q$ feststellen. Nun wollen wir überprüfen, welchen Einfluss das Verhalten der Eigenwerte für $|\xi| \to \infty$ nimmt. Die asymptotische Entwicklung der Eigenwerte lässt hier bereits erahnen, dass die Fälle $2\tau_\theta > \tau_q$ und $2\tau_\theta = \tau_q$ eine Rolle spielen.

Satz 3.12 (Eigenwerte für $|\xi| \to \infty$). *Die asymptotische Entwicklung der Eigenwerte von $M(\xi)$ für $|\xi| \to \infty$ lautet*

$$\lambda_3(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta} + \frac{\varrho c_v \tau}{2\kappa\tau_\theta^4}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3})$$

sowie im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$

$$\lambda_1(\xi) = \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i\xi - \frac{2\tau_\theta - \tau_q}{2\tau_q\tau_\theta} + \mathcal{O}(|\xi|^{-1})\,, \quad \lambda_2(\xi) = -\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i\xi - \frac{2\tau_\theta - \tau_q}{2\tau_q\tau_\theta} + \mathcal{O}(|\xi|^{-1})$$

und im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$

$$\begin{aligned}\lambda_1(\xi) &= \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}i\xi + \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q}}i\xi^{-1} - \frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3}) \\ \textit{und} \quad \lambda_2(\xi) &= -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}i\xi - \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q}}i\xi^{-1} - \frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3})\,.\end{aligned}$$

Beweis: Um das Verhalten der Eigenwerte der Matrix $M(\xi)$ aus (3.7) für $|\xi| \to \infty$ zu bestimmen, nutzen wir aus, dass für $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$M(\xi) = \xi N(\xi) \quad \text{mit} \quad N(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}(iA^1 + \xi^{-1}L)(A^0)^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2\kappa\tau_\theta}}{\sqrt{\varrho c_v}\tau_q}i & 0 \\ -\frac{\sqrt{2\kappa\tau_\theta}}{\sqrt{\varrho c_v}\tau_q}i & \frac{\tau_q - 2\tau_\theta}{\tau_q\tau_\theta}\xi^{-1} & \frac{\sqrt{\tau}}{\tau_q\tau_\theta}\xi^{-1} \\ 0 & -\frac{\sqrt{\tau}}{\tau_q\tau_\theta}\xi^{-1} & -\frac{1}{\tau_\theta}\xi^{-1} \end{pmatrix}$$

gilt und $\eta(\xi) \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von $N(\xi)$ ist, wenn $\xi\eta(\xi)$ ein Eigenwert von $M(\xi)$ ist. Auf $N(\xi)$ lässt sich die Störungstheorie anwenden, denn für betragsmäßig große Werte von ξ beschreibt darin $-(A^0)^{-\frac{1}{2}}\xi^{-1}L(A^0)^{-\frac{1}{2}}$ eine Störung der Matrix $-(A^0)^{-\frac{1}{2}}iA^1(A^0)^{-\frac{1}{2}}$ (vergleiche [Kat66, S. 73]). Wir betrachten für $\zeta \in \mathbb{C}$ das Polynom

$$p(\zeta, \cdot): \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \eta \mapsto \eta^3 + \frac{2}{\tau_q}\zeta\eta^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2}\zeta^2 + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\right)\eta + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta, \tag{3.15}$$

das für $\zeta = \xi^{-1}$ dem charakteristischen Polynom $\det(\eta\,\mathrm{I}_3 - N(\xi))$ von $N(\xi)$ entspricht. Dieses besitzt in $\zeta = 0$ die drei paarweise verschiedenen Nullstellen $\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i$, $-\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i$ und 0. Da demnach $\zeta = 0$ keinen kritischen Punkt darstellt, existieren nach Satz A.23 (ii) ein $r \in \mathbb{R}^+$ sowie $\eta_{j,k} \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ und $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\eta_1(\zeta) = \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i + \sum_{k=1}^{\infty}\eta_{1,k}\zeta^k, \quad \eta_2(\zeta) = -\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i + \sum_{k=1}^{\infty}\eta_{2,k}\zeta^k \quad \text{und} \quad \eta_3(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_{3,k}\zeta^k$$

für $\zeta \in B(0, r)$ die Nullstellen von $p(\zeta, \cdot)$ beschreiben. Damit repräsentieren

$$\lambda_1(\xi) = \xi\eta_1(\xi^{-1}) = \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i\xi + \sum_{k=1}^{\infty}\eta_{1,k}\xi^{1-k}, \quad \lambda_2(\xi) = \xi\eta_2(\xi^{-1}) = -\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i\xi + \sum_{k=1}^{\infty}\eta_{2,k}\xi^{1-k}$$

$$\text{und} \quad \lambda_3(\xi) = \xi\eta_3(\xi^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty}\eta_{3,k}\xi^{1-k}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| > \frac{1}{r}$ die Eigenwerte von $M(\xi)$. Es sollen nun jeweils noch weitere Glieder der Reihenentwicklung berechnet werden. Dazu wenden wir das Verfahren aus Anhang A.6.3 auf das Polynom $p(\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^*(\zeta)[\eta]$ aus (3.15) an. Dessen Newton-Polygon ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

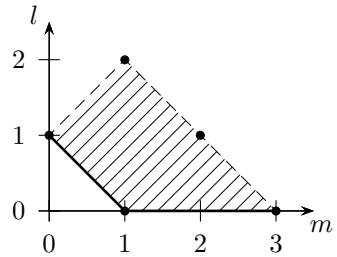

Abbildung 3.2: Newton-Polygon zu $p(\zeta, \eta)$ aus (3.15)

▸ $j = 3$: Das zugehörige Segment besitzt die Steigung -1, was den Exponenten $\gamma_{3,1} = 1$ liefert. Seinen Eckpunkten sind die Werte $a_{0,1} := \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}$ und $a_{1,0} := \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}$ zugeordnet. Der Koeffizient $\eta_{3,\gamma_{3,1}}$ berechnet sich aus $a_{1,0}\eta_{3,\gamma_{3,1}} + a_{0,1} = 0$ zu $\eta_{3,\gamma_{3,1}} = \eta_{3,1} = -\frac{1}{\tau_\theta}$. Gemäß der Iterationsvorschrift (A.1) von Seite 215 ist im darauffolgenden Schritt das Polynom

$$\begin{aligned} p_{3,1}(\zeta, \eta_3^{(1)}) &:= \zeta^{-1}p\Big(\zeta, \zeta\Big(-\frac{1}{\tau_\theta} + \eta_3^{(1)}\Big)\Big) \\ &= \zeta^2\Big(-\frac{1}{\tau_\theta^3} + \frac{3}{\tau_\theta^2}\eta_3^{(1)} - \frac{3}{\tau_\theta}\big(\eta_3^{(1)}\big)^2 + \big(\eta_3^{(1)}\big)^3\Big) + \frac{2}{\tau_q}\zeta^2\Big(\frac{1}{\tau_\theta^2} - \frac{2}{\tau_\theta}\eta_3^{(1)} + \big(\eta_3^{(1)}\big)^2\Big) \\ &\quad + \left(\frac{2}{\tau_q^2}\zeta^2 + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\right)\Big(-\frac{1}{\tau_\theta} + \eta_3^{(1)}\Big) + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \zeta^2\big(\eta_3^{(1)}\big)^3 + \left(-\frac{3}{\tau_\theta} + \frac{2}{\tau_q}\right)\zeta^2\big(\eta_3^{(1)}\big)^2 \\
&\quad + \left(\left(\frac{3}{\tau_\theta^2} + \frac{2}{\tau_q^2} - \frac{4}{\tau_q\tau_\theta}\right)\zeta^2 + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\right)\eta_3^{(1)} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{\tau_\theta^3} + \frac{2}{\tau_q\tau_\theta^2} - \frac{2}{\tau_q^2\tau_\theta}\right)\zeta^2
\end{aligned}
$$

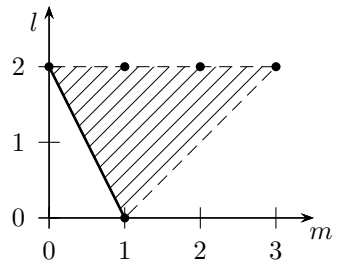

Abbildung 3.3: Newton-Polygon zu $p_{3,1}(\zeta, \eta_3^{(1)})$

zu betrachten. Aus der Abbildung 3.3 lesen wir $\gamma_{3,2} = 2$ ab. Der Koeffizient dazu ist $\eta_{3,3} = \eta_{3,\gamma_{3,1}+\gamma_{3,2}} = \frac{\varrho c_v \tau}{2\kappa\tau_\theta^4}$, was sich aus der Gleichung $a_{1,0}\eta_{1,\gamma_{3,1}+\gamma_{3,2}} + a_{0,2} = 0$ mit $a_{1,0} := \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}$ und $a_{0,2} := -\frac{1}{\tau_\theta^3} + \frac{2}{\tau_q\tau_\theta^2} - \frac{2}{\tau_q^2\tau_\theta} = -\frac{\tau}{\tau_q^2\tau_\theta^3}$ ergibt. Insgesamt erhalten wir also

$$
\lambda_3(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta} + \frac{\varrho c_v \tau}{2\kappa\tau_\theta^4}\xi^{-2} + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-3}\big) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.
$$

▸ $j \in \{1,2\}$: Nachdem wir $\eta_{1,0} := \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i$ zu $\gamma_{1,1} := 0$ und $\eta_{2,0} := -\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i$ zu $\gamma_{2,1} := 0$ bereits kennen, können wir direkt das folgende Polynom betrachten:

$$
\begin{aligned}
p_{j,0}\big(\zeta, \eta_j^{(0)}\big) &:= p\Big(\zeta, \eta_{j,0} + \eta_j^{(0)}\Big) \\
&= (\eta_{j,0})^3 + 3(\eta_{j,0})^2\eta_j^{(0)} + 3\eta_{j,0}\big(\eta_j^{(0)}\big)^2 + \big(\eta_j^{(0)}\big)^3 + \frac{2}{\tau_q}\zeta\Big((\eta_{j,0})^2 + 2\eta_{j,0}\eta_j^{(0)} + \big(\eta_j^{(0)}\big)^2\Big) \\
&\quad + \left(\frac{2}{\tau_q^2}\zeta^2 + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\right)\big(\eta_{j,0} + \eta_j^{(0)}\big) + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta \\
&= \big(\eta_j^{(0)}\big)^3 + \left(\frac{2}{\tau_q}\zeta + 3\eta_{j,0}\right)\big(\eta_j^{(0)}\big)^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2}\zeta^2 + \frac{4}{\tau_q}\eta_{j,0}\zeta - \frac{4\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\right)\eta_j^{(0)} \\
&\quad + \frac{2}{\tau_q^2}\eta_{j,0}\zeta^2 + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}\Big(1 - \frac{2\tau_\theta}{\tau_q}\Big)\zeta\,.
\end{aligned}
$$

▸ Fall $2\tau_\theta > \tau_q$: Das Newton-Polygon zu $p_{j,0}(\zeta, \eta_j^{(0)})$ besitzt die in Abbildung 3.4 dargestellte Form. Somit ist $\gamma_{j,2} = 1$ und aus $a_{1,0}\eta_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} + a_{0,1} = 0$ mit $a_{1,0} := -\frac{4\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}$ und $a_{0,1} := \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}(1 - \frac{2\tau_\theta}{\tau_q})$ folgt $\eta_{j,1} = \eta_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} = -\frac{2\tau_\theta - \tau_q}{2\tau_q\tau_\theta}$. Für die beiden verbleibenden Eigenwerte von $M(\xi)$ gilt also

$$
\lambda_1(\xi) = \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i\xi - \frac{2\tau_\theta - \tau_q}{2\tau_q\tau_\theta} + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-1}\big) \quad \text{und}
$$

$$
\lambda_2(\xi) = -\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}}i\xi - \frac{2\tau_\theta - \tau_q}{2\tau_q\tau_\theta} + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-1}\big) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.
$$

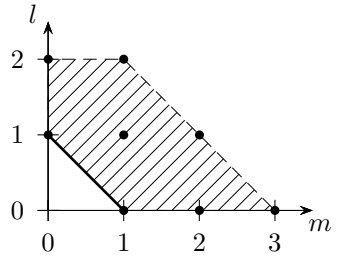

Abbildung 3.4: Newton-Polygon zu $p_{j,0}(\zeta, \eta_j^{(0)})$ für $2\tau_\theta > \tau_q$

▸ Fall $2\tau_\theta = \tau_q$: In dieser Situation ist im Polynom $p_{j,0}$ der Term $\frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}(1 - \frac{2\tau_\theta}{\tau_q})\zeta$ gleich Null, wodurch das Newton-Polygon die Form aus Abbildung 3.5 erhält. Nun ist also $\gamma_{j,2} = 2$ und aus der Gleichung $a_{1,0}\eta_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} + a_{0,2} = 0$ mit $a_{1,0} := -\frac{4\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2} = -\frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q}$ und $a_{0,2} := \frac{2}{\tau_q^2}\eta_{j,0}$ ergibt sich $\eta_{j,2} = \eta_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} = \frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q}\eta_{j,0}$. Nachdem

$$
\eta_{2,2} = \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q}}i \quad \text{und} \quad \eta_{3,2} = -\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q}}i
$$

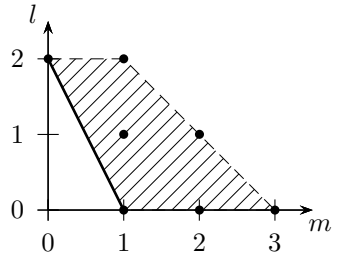

Abbildung 3.5: Newton-Polygon zu $p_{j,0}(\zeta, \eta_j^{(0)})$ für $2\tau_\theta = \tau_q$

rein imaginär sind und wir uns später für den Realteil der Eigenwerte interessieren, wollen wir noch einen weiteren Koeffizienten berechnen. Gemäß der Iterationsvorschrift (A.1) betrachten wir dazu das Polynom

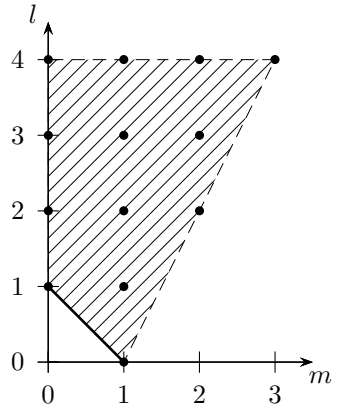

Abbildung 3.6: Newton-Polygon zu $p_{j,2}(\zeta,\eta_j^{(2)})$ für $2\tau_\theta = \tau_q$

$$
\begin{aligned}
p_{j,2}(\zeta,\eta_j^{(2)}) &:= \zeta^{-2} p_{j,0}\Big(\zeta,\zeta^2(\eta_{j,2}+\eta_j^{(2)})\Big)\\
&= \zeta^4\Big((\eta_{j,2})^3 + 3(\eta_{j,2})^2\eta_j^{(2)} + 3\eta_{j,2}\big(\eta_j^{(2)}\big)^2 + \big(\eta_j^{(2)}\big)^3\Big)\\
&\quad + \Big(\frac{2}{\tau_q}\zeta^3 + 3\eta_{j,0}\zeta^2\Big)\Big((\eta_{j,2})^2 + 2\eta_{j,2}\eta_j^{(2)} + \big(\eta_j^{(2)}\big)^2\Big)\\
&\quad + \Big(\frac{2}{\tau_q^2}\zeta^2 + \frac{4}{\tau_q}\eta_{j,0}\zeta - \frac{2\kappa}{\varrho c_v\tau_q}\Big)\Big(\eta_{j,2}+\eta_j^{(2)}\Big) + \frac{2}{\tau_q^2}\eta_{j,0}\\
&= \zeta^4\big(\eta_j^{(2)}\big)^3 + \Big(3\eta_{j,2}\zeta^4 + \frac{2}{\tau_q}\zeta^3 + 3\eta_{j,0}\zeta^2\Big)\big(\eta_j^{(2)}\big)^2\\
&\quad + \Big(3(\eta_{j,2})^2\zeta^4 + \frac{4}{\tau_q}\eta_{j,2}\zeta^3 + \Big(6\eta_{j,0}\eta_{j,2} + \frac{2}{\tau_q^2}\Big)\zeta^2 + \frac{4}{\tau_q}\eta_{j,0}\zeta - \frac{2\kappa}{\varrho c_v\tau_q}\Big)\eta_j^{(2)}\\
&\quad + (\eta_{j,2})^3\zeta^4 + \frac{2}{\tau_q}\big(\eta_{j,2}\big)^2\zeta^3 + \Big(3\eta_{j,0}(\eta_{j,2})^2 + \frac{2}{\tau_q^2}\eta_{j,2}\Big)\zeta^2 + \frac{4}{\tau_q}\eta_{j,0}\eta_{j,2}\zeta\,.
\end{aligned}
$$

Dem zugehörigen Newton-Polygon, dargestellt in Abbildung 3.6, entnehmen wir $\gamma_{j,3} = 1$. Aus der Gleichung $a_{1,0}\eta_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} + a_{0,1} = 0$ mit $a_{1,0} := -\frac{2\kappa}{\varrho c_v\tau_q}$ und $a_{0,1} := \frac{4}{\tau_q}\eta_{j,0}\eta_{j,2} = -\frac{4}{\tau_q^3}$ erhalten wir $\eta_{j,3} = \eta_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} = -\frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}$. Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
\lambda_2(\xi) &= \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v\tau_q}}\,i\xi + \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q}}\,i\xi^{-1} - \frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3})\\
\text{und}\quad \lambda_3(\xi) &= -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v\tau_q}}\,i\xi - \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q}}\,i\xi^{-1} - \frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3}) \quad \text{für } |\xi|\to\infty\,.
\end{aligned}
$$

□

Auf der Ebene der Eigenwerte stellen wir fest, dass sich im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$, der in Abschnitt 3.1.2 zu einem Abklingverhalten vom Standard-Typ führte, die Realteile aller drei Eigenwerte für $|\xi| \to \infty$ wie $\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi)) \sim -1$ verhalten. Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$, der zu einem Abklingverhalten vom Regularity-Loss-Typ führte, gilt für $j \in \{1,2\}$ nur noch $\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi)) \sim -\xi^{-2}$ für $|\xi| \to \infty$, während $\mathrm{Re}(\lambda_3(\xi)) \sim -1$ weiterhin besteht. Somit sind $\lambda_1(\xi)$ und $\lambda_2(\xi)$ für das Auftreten des Regularity-Loss-Phänomens verantwortlich. Ähnlich wie in Abschnitt 3.2.1, in dem durch die Subtraktion der Wärmeleitungshalbgruppe eine bessere Abklingrate erzielt wurde, kann nun im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ durch Abziehen geeigneter Anteile der Regularitätsverlust verringert werden. Um dies zu zeigen, benötigen wir zunächst noch die asymptotische Entwicklung der Eigenprojektionen.

Satz 3.13 (Eigenprojektionen für $|\xi| \to \infty$). *Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ gilt für die zum Eigenwert $\lambda_j(\xi)$ gehörige Eigenprojektion $P_j(\xi) = P_{j,0} + \mathcal{O}(|\xi|^{-1})$ für $|\xi| \to \infty$ und $j \in \{1,2,3\}$ mit*

$$
P_{1,0} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{2,0} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad P_{3,0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Beweis: Wenn $2\tau_\theta = \tau_q$ ist, reduziert sich die Matrix $M(\xi)$ aus (3.7) auf

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi & 0 \\ -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi & 0 & \sqrt{\frac{1}{\tau_q \tau_\theta}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{\tau_q \tau_\theta}} & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 3.12 existiert ein $R \in \mathbb{R}^+$, sodass die Eigenwerte $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ von $M(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| > R$ paarweise verschieden sind. Somit lässt sich zu $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| > R$ und $j \in \{1,2,3\}$ eine glatte geschlossene Kurve $\Gamma_j(\xi)$ in $\mathbb{C}$ finden, die den Eigenwert $\lambda_j(\xi)$, nicht aber die Eigenwerte $\lambda_k(\xi)$ für $k \in \{1,2,3\}\backslash\{j\}$ umschließt. Die zu $\lambda_j(\xi)$ gehörige Eigenprojektion lässt sich dann nach [Kat66, S. 39] und [HJ91, S. 401, 403] über

$$P_j(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j(\xi)} \big(M(\xi) - \zeta\big)^{-1} \,\mathrm{d}\zeta = \prod_{\substack{k \in \{1,2,3\} \\ k \neq j}} \frac{1}{\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi)} \big(M(\xi) - \lambda_k(\xi)\,\mathrm{I}_3\big)$$

berechnen. So erhalten wir für $j \in \{1,2,3\}$

$$P_j(\xi) = \frac{1}{\big(\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi)\big)\big(\lambda_j(\xi) - \lambda_l(\xi)\big)} Q_j(\xi)\,,$$

wobei k, l aus $\{1,2,3\}\backslash\{j\}$ mit $k \neq l$ sind und $Q_j(\xi) := \big(M(\xi) - \lambda_k(\xi)\,\mathrm{I}_3\big)\big(M(\xi) - \lambda_l(\xi)\,\mathrm{I}_3\big)$ durch

$$\begin{pmatrix} \lambda_k(\xi)\lambda_l(\xi) - \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 & \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi\big(\lambda_k(\xi) + \lambda_l(\xi)\big) & -\frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_\theta}} i\xi \\ \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi\big(\lambda_k(\xi) + \lambda_l(\xi)\big) & \lambda_k(\xi)\lambda_l(\xi) - \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 & -\sqrt{\frac{1}{\tau_q \tau_\theta}}\big(\lambda_k(\xi) + \lambda_l(\xi)\big) - \frac{1}{\tau_\theta}\sqrt{\frac{1}{\tau_q \tau_\theta}} \\ \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_\theta}} i\xi & \sqrt{\frac{1}{\tau_q \tau_\theta}}\big(\lambda_k(\xi) + \lambda_l(\xi)\big) + \frac{1}{\tau_\theta}\sqrt{\frac{1}{\tau_q \tau_\theta}} & \lambda_k(\xi)\lambda_l(\xi) + \frac{1}{\tau_\theta}\big(\lambda_k(\xi) + \lambda_l(\xi)\big) + \frac{1}{\tau_q \tau_\theta} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Anhand dieser Darstellung und der aus Satz 3.12 bekannten Asymptotik der Eigenwerte im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ können wir nun das Verhalten der Eigenprojektionen für $|\xi| \to \infty$ bestimmen. Die verwendeten Rechenregeln zum Landau-Symbol finden sich in Anhang A.6.4.

▸ $j = 3$: In der Matrix $Q_3(\xi)$ treten das Produkt und die Summe der Eigenwerte $\lambda_1(\xi)$ und $\lambda_2(\xi)$ auf. Es gilt

$$\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) = \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(1) \quad \text{und} \quad \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) = \mathcal{O}\big(|\xi|^{-2}\big) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,,$$

weshalb sich die einzelnen Einträge der Matrix $Q_3(\xi)$ wie

$$Q_3(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(|\xi|^{-1}) & \mathcal{O}(|\xi|) \\ \mathcal{O}(|\xi|^{-1}) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(1) & \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix} \quad \text{für } |\xi| \to \infty$$

verhalten. Zur Matrix $P_3(\xi)$ kommt noch der Vorfaktor $\frac{1}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}$ hinzu. Für die auftretenden Differenzen der Eigenwerte erhält man

$$\lambda_3(\xi) - \lambda_1(\xi) = -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi - \frac{1}{\tau_\theta} + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-1}\big) \quad \text{und} \quad \lambda_3(\xi) - \lambda_2(\xi) = \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi - \frac{1}{\tau_\theta} + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-1}\big)$$

und damit

$$\big(\lambda_3(\xi) - \lambda_1(\xi)\big)\big(\lambda_3(\xi) - \lambda_2(\xi)\big) = \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}\big(|\xi|\big) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.$$

Mithilfe der Rechenregel (vi) aus Lemma A.24 folgt daraus

$$\frac{1}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))} = \frac{\varrho c_v \tau_q}{\kappa}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3}) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.$$

Für $P_3(\xi)$ schließen wir also

$$\begin{aligned} P_3(\xi) &= \left(\frac{\varrho c_v \tau_q}{\kappa}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3})\right)\begin{pmatrix} \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(|\xi|^{-1}) & \mathcal{O}(|\xi|) \\ \mathcal{O}(|\xi|^{-1}) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(1) & \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix} \\ &= P_{3,0} + \mathcal{O}(|\xi|^{-1}) \quad \text{mit} \quad P_{3,0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,. \end{aligned}$$

▸ $j \in \{1,2\}$: Für $k \in \{1,2\}$ ist $\lambda_k(\xi)\lambda_3(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|)$ und es gilt

$$\lambda_1(\xi) + \lambda_3(\xi) = \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}\, i\xi + \mathcal{O}(1) \quad \text{und} \quad \lambda_2(\xi) + \lambda_3(\xi) = -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}\, i\xi + \mathcal{O}(1) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.$$

Demzufolge verhalten sich die Einträge der Matrizen $Q_1(\xi)$ und $Q_2(\xi)$ wie

$$\begin{aligned} Q_1(\xi) &= \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) \\ \frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & -\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) \\ \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad Q_2(\xi) &= \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & -\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) \\ -\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & -\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) \\ \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) & \mathcal{O}(|\xi|) \end{pmatrix} \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Vorfaktors ermitteln wir

$$\begin{aligned} \lambda_1(\xi) - \lambda_3(\xi) &= \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}\, i\xi + \mathcal{O}(1)\,, \quad \lambda_1(\xi) - \lambda_2(\xi) = 2\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}\, i\xi + \mathcal{O}(|\xi|^{-1})\,, \\ \lambda_2(\xi) - \lambda_3(\xi) &= -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}\, i\xi + \mathcal{O}(1)\,, \quad \lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi) = -2\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}}\, i\xi + \mathcal{O}(|\xi|^{-1}) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,. \end{aligned}$$

So ergibt sich für $j \in \{1,2\}$ und $k \in \{1,2\}\backslash\{j\}$

$$(\lambda_j(\xi) - \lambda_3(\xi))(\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi)) = -\frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|) \quad \text{für } |\xi| \to \infty$$

und damit

$$\frac{1}{(\lambda_j(\xi) - \lambda_3(\xi))(\lambda_j(\xi) - \lambda_k(\xi))} = -\frac{\varrho c_v \tau_q}{2\kappa}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3}) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.$$

Für $P_j(\xi)$ erhalten wir also

$$P_j(\xi) = \left(-\frac{\varrho c_v \tau_q}{2\kappa}\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3})\right)Q_j(\xi) = P_{j,0} + \mathcal{O}(|\xi|^{-1})$$

für $j \in \{1,2\}$ mit

$$P_{1,0} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,0} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Um die für $|\xi| \to \infty$ langsamer abklingenden Anteile herausfiltern zu können, definieren wir für $t \in [0,\infty)$ und $V_0 \in L^2(\mathbb{R})^3$

$$\mathcal{S}_\infty(t)V_0 := \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\cdot)t} P_{j,0}(A^0)^{\frac{1}{2}} \mathscr{F} V_0$$

mit

$$\begin{aligned}
\lambda_1^\infty(\xi) &:= \sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi + \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa \tau_q}} i\xi^{-1} - \frac{2\varrho c_v}{\kappa \tau_q^2}\xi^{-2}\,, \\
\lambda_2^\infty(\xi) &:= -\sqrt{\frac{\kappa}{\varrho c_v \tau_q}} i\xi - \frac{1}{\tau_q}\sqrt{\frac{\varrho c_v}{\kappa \tau_q}} i\xi^{-1} - \frac{2\varrho c_v}{\kappa \tau_q^2}\xi^{-2}
\end{aligned}$$

für $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Angestrebt ist eine L^1-L^2-Abschätzung für $\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_\infty(t)V_0$. Diese wird auf der folgenden Matrixabschätzung beruhen.

Lemma 3.14 (Differenz der Matrizen). *Es gelte $2\tau_\theta = \tau_q$. Dann existieren Konstanten c_1, c_2, c_3, $d_1, d_2, d_3, R \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt:*

$$\left\| e^{M(\xi)t} - \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t} P_{j,0} \right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le \begin{cases} c_1 e^{-d_1\xi^2 t} & \text{für } |\xi| \le R\,, \\ c_2|\xi|^{-1} e^{-d_2\xi^{-2}t} + c_3 e^{-d_3 t} & \text{für } |\xi| > R\,. \end{cases}$$

Beweis:

▸ Zu $|\xi| > R$: Aus den Sätzen 3.12 und 3.13 lassen sich die folgenden Aussagen ableiten:

$$\begin{aligned}
&\exists\, R_0 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}^+\ \forall\, \xi \in \mathbb{R},\ |\xi| > R_0 : \\
&\quad \operatorname{Re}(\lambda_j(\xi)) \le -a_1\xi^{-2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\lambda_j(\xi) - \lambda_j^\infty(\xi)) \le |\lambda_j(\xi) - \lambda_j^\infty(\xi)| \le a_2|\xi|^{-3} \quad \text{für } j \in \{1,2\}\,, \\
&\quad \lambda_3(\xi) = \operatorname{Re}(\lambda_3(\xi)) \le -a_3 \quad \text{und} \quad \|P_j(\xi) - P_{j,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le b|\xi|^{-1} \quad \text{für } j \in \{1,2\}\,.
\end{aligned}$$

Nachdem die Eigenwerte für $|\xi| > R_0$ paarweise verschieden sind, können wir wieder die Darstellung $e^{M(\xi)t} = \sum_{j=1}^{3} e^{\lambda_j(\xi)t} P_j(\xi)$ für $t \in [0,\infty)$ nutzen und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\left\| e^{M(\xi)t} - \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t} P_{j,0} \right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} &\le \left\| e^{\lambda_3(\xi)t} P_3(\xi) \right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} + \left\| \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j(\xi)t} (P_j(\xi) - P_{j,0}) \right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \\
&\quad + \left\| \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t} \Big(e^{\left(\lambda_j(\xi) - \lambda_j^\infty(\xi)\right)t} - 1 \Big) P_{j,0} \right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}}\,. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Die einzelnen Terme lassen sich wie folgt abschätzen: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j(\xi)t} (P_j(\xi) - P_{j,0}) \right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le \sum_{j=1}^{2} e^{\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi))t} \|P_j(\xi) - P_{j,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le 2b|\xi|^{-1} e^{-a_1\xi^{-2}t} \\
&\quad \text{und} \qquad \left\| e^{\lambda_3(\xi)t} P_3(\xi) \right\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} = e^{\operatorname{Re}(\lambda_3(\xi))t} \le e^{-a_3 t}\,.
\end{aligned}$$

Für den dritten Term nutzen wir für $j \in \{1,2\}$ die Abschätzung

$$\left| e^{\left(\lambda_j(\xi) - \lambda_j^\infty(\xi)\right)t} - 1 \right| \le t \cdot \sup_{s\in[0,t]} \left| (\lambda_j(\xi) - \lambda_j^\infty(\xi)) e^{\left(\lambda_j(\xi) - \lambda_j^\infty(\xi)\right)s} \right| \le a_2|\xi|^{-3} \cdot t \cdot e^{a_2|\xi|^{-3}t}$$

und die auf $x \le e^x$ für $x \in \mathbb{R}^+$, also $e^{-x} \le \frac{1}{x}$, beruhende Ungleichung

$$e^{\mathrm{Re}(\lambda_j^\infty(\xi))t} = e^{-\frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2}t} \le \frac{\kappa\tau_q^2}{\varrho c_v} \cdot \frac{\xi^2}{t} \cdot e^{-\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2}t}.$$

Damit folgt für $|\xi| \ge R := \max\{R_0, \frac{2\kappa\tau_q^2}{\varrho c_v}a_2\}$

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t}\Big(e^{\left(\lambda_j(\xi)-\lambda_j^\infty(\xi)\right)t} - 1\Big)P_{j,0}\Big\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} &\le \sum_{j=1}^{2} e^{\mathrm{Re}(\lambda_j^\infty(\xi))t}\Big|e^{\left(\lambda_j(\xi)-\lambda_j^\infty(\xi)\right)t} - 1\Big|\|P_{j,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \\
&\le \frac{\kappa\tau_q^2}{\varrho c_v} \cdot \frac{\xi^2}{t} \cdot e^{-\frac{\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2}t} \cdot a_2|\xi|^{-3} \cdot t \cdot e^{a_2|\xi|^{-3}t}\sum_{j=1}^{2}\|P_{j,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \\
&\le \frac{2\kappa\tau_q^2}{\varrho c_v}a_2|\xi|^{-1}e^{-\frac{\varrho c_v}{2\kappa\tau_q^2}\xi^{-2}t} \quad \text{(nach Wahl von } R\text{)}.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Abschätzungen gemäß (3.16) zusammen, so erhalten wir für alle $t \in [0,\infty)$ und alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \ge R$

$$\Big\|e^{M(\xi)t} - \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(i\xi)t}P_{j,0}\Big\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le e^{-a_3 t} + 2b|\xi|^{-1}e^{-a_1\xi^{-2}t} + \frac{2\kappa\tau_q^2}{\varrho c_v}a_2|\xi|^{-1}e^{-\frac{\varrho c_v}{2\kappa\tau_q^2}\xi^{-2}t}$$

und daraus die behauptete Abschätzung, wenn wir beispielsweise $c_2 := 2b + \frac{2\kappa\tau_q^2}{\varrho c_v}a_2$, $c_3 := 1$, $d_2 := \min\{a_1, \frac{\varrho c_v}{2\kappa\tau_q^2}\}$ und $d_3 := a_3$ wählen.

▸ Zu $|\xi| \le R$: In diesem Bereich verwenden wir die Ungleichung

$$\Big\|e^{M(\xi)t} - \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t}P_{j,0}\Big\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le \|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} + \sum_{j=1}^{2}\|e^{\lambda_j^\infty(\xi)t}P_{j,0}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le \|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} + 2e^{-\frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2}t}$$

sowie die Abschätzung (2.21) im Fourierraum aus Satz 2.9. Diese ist gültig, da das System (3.2) im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ die Bedingungen (A), (K), (S) und (S_1) erfüllt (siehe Abschnitt 3.1.2). Wie im Beweis zu Satz 2.12 und wegen $\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \ge \frac{\xi^2}{(1+R^2)^2}$ für $|\xi| \le R$ folgt daraus

$$\|e^{M(\xi)t}\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} \le Ce^{-c\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}t} \le Ce^{-\frac{c}{(1+R^2)^2}\xi^2 t}$$

für gewisse Konstanten $C, c \in \mathbb{R}^+$. Außerdem ist $\xi^{-2} \ge \xi^{-2}\frac{\xi^4}{R^4} = \frac{\xi^2}{R^4}$ für $|\xi| \le R$ und daher

$$e^{-\frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2}\xi^{-2}t} \le e^{-\frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2 R^4}\xi^2 t}.$$

Mit $c_1 := C + 2$ und $d_1 := \min\{\frac{c}{(1+R^2)^2}, \frac{2\varrho c_v}{\kappa\tau_q^2 R^4}\}$ gilt insgesamt die behauptete Abschätzung. □

Für die Differenz $\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_\infty(t)V_0$ gewinnen wir nun bei der L^1-L^2-Abschätzung im Vergleich zu derjenigen, die Satz 2.13 (i) für das eindimensionale Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,1) liefert, eine Regularitätsstufe.

Satz 3.15 (L^1-L^2-Abschätzung). *Es sei $s \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ gilt:*

$$\begin{aligned}
&\exists\, C_1, C_2, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3 \cap L^1(\mathbb{R})^3\ \forall\, k, l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 1 \le k + l \le s + 1 \text{ und } k \le s\ \forall\, t \in [0,\infty): \\
&\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_\infty(t)V_0)\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \le C_1(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\|V_0\|_{L^1(\mathbb{R})^3} + C_2(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l-1}V_0\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \\
&\qquad + C_3 e^{-ct}\|\partial_x^k V_0\|_{L^2(\mathbb{R})^3}.
\end{aligned}$$

Beweis: Nach dem Satz von Plancherel A.8 und mit $a := \|(A^0)^{-\frac{1}{2}}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}\|(A^0)^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}$ gilt

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_\infty(t)V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} &= \Big\|(\cdot)^k\Big((A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\cdot)t} - (A^0)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\cdot)t}P_{j,0}\Big)(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\\ &\le a\int_{\mathbb{R}} \xi^{2k}\Big\|e^{M(\xi)t} - \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t}P_{j,0}\Big\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi\,.\end{aligned}$$

Wir teilen das Integral gemäß Lemma 3.14 in die Bereiche $|\xi| \le R$ und $|\xi| > R$ auf und nutzen die jeweils gültige Abschätzung zu gewissen Konstanten $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}^+$. Mithilfe von Lemma A.16 (i) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le R} \xi^{2k}\Big\|e^{M(\xi)t} - \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t}P_{j,0}\Big\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi &\le \int_{|\xi|\le R} \xi^{2k}\big(c_1e^{-d_1\xi^2t}\big)^2\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\le c_1^2\|\mathscr{F}V_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})^3}\int_{|\xi|\le R}\xi^{2k}e^{-2d_1\xi^2t}\,\mathrm{d}\xi\\ &\le b_1\big(1+t\big)^{-\frac{1}{2}-k}\|V_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})^3}\end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante $b_1 \in \mathbb{R}^+$. Für das zweite Integral folgt mit Lemma A.16 (ii)

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|>R} \xi^{2k}\Big\|e^{M(\xi)t} - \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_j^\infty(\xi)t}P_{j,0}\Big\|^2_{\mathbb{C}^{3\times 3}}\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\le \int_{|\xi|>R}\xi^{2k}\big(c_2|\xi|^{-1}e^{-d_2\xi^{-2}t} + c_3e^{-d_3t}\big)^2\big|(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\le 2c_2^2\int_{|\xi|>R}\xi^{-2l}e^{-2d_2\xi^{-2}t}\big|\xi^{k+l-1}(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi + 2c_3^2e^{-2d_3t}\int_{|\xi|>R}\big|\xi^k(\mathscr{F}V_0)(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\quad\le 2c_2^2\sup_{|\xi|\ge R}\xi^{-2l}e^{-2d_2\xi^{-2}t}\|(\cdot)^{k+l-1}(\mathscr{F}V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} + 2c_3^2e^{-2d_3t}\|(\cdot)^k(\mathscr{F}V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\\ &\quad\le b_2\big(1+t\big)^{-l}\|\partial_x^{k+l-1}V_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} + 2c_3^2e^{-2d_3t}\|\partial_x^kV_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\end{aligned}$$

für $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \le k+l \le s+1$ und $k \le s$, und für eine geeignete Konstante $b_2 \in \mathbb{R}^+$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(\mathcal{S}(t)V_0 - \mathcal{S}_\infty(t)V_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} \le{}& ab_1\big(1+t\big)^{-\frac{1}{2}-k}\|V_0\|^2_{L^1(\mathbb{R})^3} + ab_2\big(1+t\big)^{-l}\|\partial_x^{k+l-1}V_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\\ &+ 2ac_3^2e^{-2d_3t}\|\partial_x^kV_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\end{aligned}$$

und daraus durch Ziehen der Wurzel die behauptete Abschätzung. □

Hiermit beschließen wir die Untersuchungen zum Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (2,1) der Wärmeleitung und wenden uns weiteren Phase-Lag-Modellen zu, darunter dem benachbarten Dual-Phase-Lag-Modell DPLT (2,1) der Thermoelastizität.

4 Symmetrisch-hyperbolische Phase-Lag-Systeme mit Nebenbedingungen

In diesem Kapitel werden das Dual-Phase-Lag-Modell DPLT (2,1) der Thermoelastizität und das Three-Phase-Lag-Modell TPLW (2,1,1) der Wärmeleitung behandelt, die sich in einer Raumdimension als ein symmetrisch-hyperbolisches System und im Fall von zwei oder drei Raumdimensionen als ein solches mit einer Nebenbedingung auffassen lassen. Die Nebenbedingung beschreibt für beide Modelle die Rotationsfreiheit einer Lösungskomponente, jedoch kommt sie auf unterschiedliche Weise zustande. Für das Thermoelastizitätsmodell DPLT (2,1) wird die Rotationsfreiheit dadurch erzwungen, dass die Funktion des Verschiebungsvektors gemäß der Helmholtz-Zerlegung in einen rotationsfreien und einen divergenzfreien Anteil aufgespalten wird. Für das Wärmeleitungsmodell TPLW (2,1,1) hingegen ergibt sich die Nebenbedingung in direkter Weise daraus, dass bei der Transformation auf ein System erster Ordnung eine Komponente des Lösungsvektors durch das Gradientenfeld $\nabla\nu$ gebildet wird, dessen Rotation stets Null ist.

Nach erfolgter Transformation der genannten Phase-Lag-Modelle auf ein symmetrisch-hyperbolisches System können die Resultate aus Kapitel 2 und unter Beachtung der Nebenbedingung insbesondere diejenigen aus Abschnitt 2.7 verwendet werden, um die zeitliche Asymptotik von Lösungen zu beschreiben. Die Nebenbedingung, die in Bezug auf die Wohlgestelltheit des zugehörigen Anfangswertproblems zunächst nicht von Bedeutung ist, erweist sich dabei als ausschlaggebend für das Gelingen der Methode.

Das Vorgehen zum Dual-Phase-Lag-Modell DPLT (2,1) der Thermoelastizität lässt sich teilweise auf die Untersuchungen für das entsprechende Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (2,1) der Wärmeleitung aus dem vorangehenden Kapitel 3 zurückführen. Wie dort werden wir unter der Voraussetzung $2\tau_\theta > \tau_q$ ein Abklingen vom Standard-Typ und für $2\tau_\theta = \tau_q$ ein Abklingen vom Regularity-Loss-Typ erhalten.

Für das Three-Phase-Lag-Modell TPLW (2,1,1) der Wärmeleitung werden wir im Fall, dass $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ gilt, ein Abklingen vom Standard-Typ und im Fall, dass $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ ist, ein Abklingen vom Regularity-Loss-Typ nachweisen können. Dies sind die Parameterbedingungen, wie wir sie schon aus den Untersuchungen in [QR08; BQR14] zur Stabilität in beschränkten Gebieten kennen.

4.1 Dual-Phase-Lag-Thermoelastizität DPLT (2,1)

Nachdem wir in Kapitel 3 das Modell DPLW (2,1) der Wärmeleitung studiert haben, möchten wir nun das entsprechende Dual-Phase-Lag-Modell der Thermoelastizität aus (1.13) mit der Entwicklungsordnung zwei für die Wärmestromdichte q und eins für den Temperaturgradienten $\nabla\theta$ untersuchen. Die Raumdimension sei $n \in \{1, 2, 3\}$ und es seien Anfangsdaten $q_0, q_1, u_0, u_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\theta_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vorgegeben.

$$\underline{\text{DPLT (2,1)}}$$

$$\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u - \gamma\nabla\theta = \varrho u_{tt} \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.1 a}$$

$$-\operatorname{div} q - \gamma T_0 \operatorname{div} u_t = \varrho c_v \theta_t \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.1 b}$$

$$q + \tau_q q_t + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} = -\kappa\nabla\theta - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.1 c}$$

$$q(0,\cdot) = q_0\,,\ q_t(0,\cdot) = q_1\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0\,,\ u(0,\cdot) = u_0\,,\ u_t(0,\cdot) = u_1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{4.1 d}$$

Ist $n \in \{2,3\}$, so nutzen wir, wie bei den klassischen Thermoelastizitätsgleichungen üblich (vergleiche [JR00]), die Helmholtz-Zerlegung (siehe Satz A.2 in Anhang A.2.2)

$$L^2(\mathbb{R}^n)^n = \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)} \oplus_\perp \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Gemäß dieser lässt sich die Funktion $u : [0,\infty) \to L^2(\mathbb{R}^n)^n$, die den Verschiebungsvektor beschreiben soll, in einen rotationsfreien (potentialen) Anteil u^{p} und einen divergenzfreien (solenoidalen) Anteil u^{s} aufteilen:

$$u(t) = u^{\mathrm{p}}(t) + u^{\mathrm{s}}(t) \quad \text{mit } u^{\mathrm{p}}(t) \in \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)} \text{ und } u^{\mathrm{s}}(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ für } t \in [0,\infty)\,.$$

Im $\mathbb{R}^2$ ist die Rotation definiert als

$$\operatorname{rot}(f) := \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \quad \text{für } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}(f) := \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f \\ -\partial_{x_1} f \end{pmatrix} \quad \text{für } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

und im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{rot}(f) := \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix} \quad \text{für } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,.$$

Da $\operatorname{div} u^{\mathrm{s}} = 0$ sowie $\Delta u^{\mathrm{p}} = \nabla \operatorname{div} u^{\mathrm{p}} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} u^{\mathrm{p}}$ und $\operatorname{rot} u^{\mathrm{p}} = 0$ gelten, lässt sich die Differentialgleichung (4.1 a) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \varrho u^{\mathrm{p}}_{tt} + \varrho u^{\mathrm{s}}_{tt} &= \mu\Delta u^{\mathrm{p}} + \mu\Delta u^{\mathrm{s}} + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u^{\mathrm{p}} + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u^{\mathrm{s}} - \gamma\nabla\theta \\ &= \mu\Delta u^{\mathrm{s}} + (\lambda+2\mu)\nabla \operatorname{div} u^{\mathrm{p}} - \gamma\nabla\theta\,. \end{aligned}$$

Nachdem $\nabla\theta(t)$ für $\theta(t) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ liegt, entstehen aus (4.1) zwei entkoppelte Systeme, nämlich eines für $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$,

$$(\lambda+2\mu)\nabla \operatorname{div} u^{\mathrm{p}} - \gamma\nabla\theta = \varrho u^{\mathrm{p}}_{tt} \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.2 a}$$

$$-\operatorname{div} q - \gamma T_0 \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_t = \varrho c_v \theta_t \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.2 b}$$

$$q + \tau_q q_t + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} = -\kappa\nabla\theta - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.2 c}$$

$$q(0,\cdot) = q_0\,,\ q_t(0,\cdot) = q_1\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0\,,\ u^{\mathrm{p}}(0,\cdot) = u^{\mathrm{p}}_0\,,\ u^{\mathrm{p}}_t(0,\cdot) = u^{\mathrm{p}}_1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,, \tag{4.2 d}$$

und eine Wellengleichung für u^{s},

$$\varrho u^{\mathrm{s}}_{tt} - \mu\Delta u^{\mathrm{s}} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.3 a}$$

$$u^{\mathrm{s}}(0,\cdot) = u^{\mathrm{s}}_0\,,\ u^{\mathrm{s}}_t(0,\cdot) = u^{\mathrm{s}}_1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{4.3 b}$$

Ist die Raumdimension $n = 1$, so stimmen die Systeme (4.1 a)-(4.1 c) und (4.2 a)-(4.2 c) überein. In diesem Fall identifizieren wir $u^{\mathrm{p}} := u$, $u^{\mathrm{p}}_0 := u_0$ und $u^{\mathrm{p}}_1 := u_1$.

4.1.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisches System mit Nebenbedingung

Wir zeigen, dass sich das System (4.2) als ein symmetrisch-hyperbolisches System der Form (2.43) mit einer Nebenbedingung auffassen lässt.

Definition 4.1 (Matrizen zu DPLT (2,1)). *Es sei* $\tau := \tau_\theta^2 + (\tau_\theta - \tau_q)^2$. *Zu* $n \in \{1,2,3\}$ *sollen* A_{W}^0, A_{W}^j *und* L_{W} *die zum Wärmeleitungsmodell DPLW (2,1) gehörenden Matrizen aus der Definition 3.1 bezeichnen:*

$$A_{\mathrm{W}}^0 := \begin{pmatrix} \frac{2\varrho c_v \tau_\theta}{\kappa\tau} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_q^2 \tau}{4\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \quad A_{\mathrm{W}}^j := \begin{pmatrix} 0 & (e_n^j)^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ e_n^j & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \textit{für } j \in \{1,...,n\}$$

$$\textit{und} \quad L_{\mathrm{W}} := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_q \tau(2\tau_\theta - \tau_q)}{4\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{\tau}{2\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau}{2\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Für das Thermoelastizitätsmodell DPLT (2,1) setzen wir dann

$$A^0 := \begin{pmatrix} \frac{2\varrho\tau_\theta}{\kappa\tau T_0}\,\mathrm{I}_n & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 2n} \\ 0_{1\times n} & \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta(\lambda+2\mu)} & 0 & 0_{1\times 2n} \\ 0_{1\times n} & 0 & & \\ 0_{2n\times n} & 0_{2n\times 1} & A_{\mathrm{W}}^0 & \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 2n} \\ 0_{1\times n} & 0 & 0 & 0_{1\times 2n} \\ 0_{1\times n} & 0 & & \\ 0_{2n\times n} & 0_{2n\times 1} & L_{\mathrm{W}} & \end{pmatrix}$$

$$\textit{und} \quad A^j := \begin{pmatrix} 0_n & -e_n^j & \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau} e_n^j & 0_{n\times 2n} \\ -(e_n^j)^\mathsf{T} & 0 & 0 & 0_{1\times 2n} \\ \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}(e_n^j)^\mathsf{T} & 0 & & \\ 0_{2n\times n} & 0_{2n\times 1} & A_{\mathrm{W}}^j & \end{pmatrix} \quad \textit{für } j \in \{1,...,n\}\,.$$

Zu $n \in \{2,3\}$ *legen wir außerdem die folgenden Matrizen fest:*

$$R := 0_{(2n-3)\times(3n+2)} \quad \textit{und} \quad Q^j := \begin{pmatrix} \widetilde{Q}^j & 0_{(2n-3)\times(2n+2)} \end{pmatrix} \quad \textit{für } j \in \{1,\ldots,n\}\,,$$

$$\textit{wobei} \quad \textit{für } n = 2: \quad \widetilde{Q}^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \widetilde{Q}^2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\textit{für } n = 3: \quad \widetilde{Q}^1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Q}^2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \widetilde{Q}^3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit den angegebenen Matrizen stellt

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^n A^j \partial_{x_j} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.4 a}$$

$$\text{wenn } n \in \{2,3\}: \qquad RV + \sum_{j=1}^n Q^j \partial_{x_j} V = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.4 b}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{4.4 c}$$

ein symmetrisch-hyperbolisches Anfangswertproblem dar, das im Fall von zwei oder drei Raumdimensionen eine Nebenbedingung in Form der Gleichung (4.4 b) umfasst. Um anzudeuten, dass es dabei unter die allgemeine Form symmetrisch-hyperbolischer Systeme mit Nebenbedingungen

aus Abschnitt 2.7 fällt, haben wir den Term RV explizit aufgeführt, obwohl dieser nach Definition von R natürlich gerade einem Nullvektor entspricht.

Nach Satz 2.2 besitzt das Anfangswertproblem (4.4 a)+(4.4 c) zu $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^{3n+2}$ für $s \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$. Dies gilt nicht nur für $n = 1$, sondern auch für $n \in \{2,3\}$. Wenn für $n \in \{2,3\}$ der Anfangswert V_0 zudem aus der Menge

$$\mathcal{N} := \left\{ W \in L^2(\mathbb{R}^n)^{3n+2} \;\middle|\; RW + \sum_{j=1}^{n} Q^j \partial_{x_j} W = 0 \right\} = \left\{ W \in L^2(\mathbb{R}^n)^{3n+2} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} Q^j \partial_{x_j} W = 0 \right\}$$

gewählt wird, ist nach Satz 2.17 auch das gesamte System (4.4) wohlgestellt, sofern die Bedingung (C) von Seite 48 erfüllt ist, was kurz zu überprüfen ist.

Bedingung (C). Es sei $n \in \{2,3\}$. Da R die Nullmatrix ist, belaufen sich die nachzuweisenden Eigenschaften auf $Q(\omega)(A^0)^{-1}A(\omega) = 0$ und $Q(\omega)(A^0)^{-1}L = 0$ für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Die Matrizen $A(\omega)$ und $Q(\omega)$ lauten

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 0_n & -\omega & \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\omega & 0_n & 0_n \\ -\omega^\mathsf{T} & 0 & 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\omega^\mathsf{T} & 0 & 0 & \omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ 0_n & 0_{n\times 1} & \omega & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q(\omega) = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}(\omega) & 0_{(2n-3)\times(2n+2)} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \widetilde{Q}(\omega) := \begin{pmatrix} -\omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix} \text{ für } n = 2 \quad \text{und} \quad \widetilde{Q}(\omega) := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n = 3\,.$$

Aufgrund der Gestalt von L erhält man $Q(\omega)(A^0)^{-1}L = \widetilde{Q}(\omega)0_{n\times(3n+2)} = 0_{(2n-3)\times(3n+2)}$, und da $\widetilde{Q}(\omega)\omega = 0_{(2n-3)\times 1}$ ist, gilt auch

$$Q(\omega)\big(A^0\big)^{-1}A(\omega) = \begin{pmatrix} 0_{(2n-3)\times n} & -\frac{\kappa\tau T_0}{2\varrho\tau_\theta}\widetilde{Q}(\omega)\omega & \frac{\gamma T_0}{\varrho}\widetilde{Q}(\omega)\omega & 0_{(2n-3)\times n} & 0_{(2n-3)\times n} \end{pmatrix} = 0_{(2n-3)\times(3n+2)}.$$

Damit ist die Bedingung (C) erfüllt. □

Eine anschaulichere Beschreibung der Menge $\mathcal{N}$ ist

$$\mathcal{N} = \left\{ W \in L^2(\mathbb{R}^n)^{3n+2} \;\middle|\; \operatorname{rot} W_{1,\dots,n} = 0 \right\},$$

denn nach Definition der Matrizen Q^j bedeutet die Aussage $\sum_{j=1}^n Q^j \partial_{x_j} W = 0$ nichts anderes als dass $\sum_{j=1}^n Q^j \partial_{x_j} W = \sum_{j=1}^n \widetilde{Q}^j \partial_{x_j} W_{1,\dots,n} = \operatorname{rot} W_{1,\dots,n} = 0$ ist. Die Nebenbedingung (4.4 b) soll also bei der Transformation der Gleichungen aus (4.2) auf ein System erster Ordnung die Information bewahren, dass $u^\mathrm{p}(t)$ in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ zu suchen ist.

Satz 4.2 (Äquivalenz der Systeme). *Es sei $n \in \{1,2,3\}$. Zu $s \in \mathbb{N}$ seien für* (4.2) *Anfangsdaten $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$, $q_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)^n$, $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_1 + \kappa\tau_\theta \nabla\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ sowie $u_0^\mathrm{p} \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ mit $\operatorname{div} u_0^\mathrm{p} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $u_1^\mathrm{p} \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ gegeben. Dazu sei*

$$V_0 := \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta} u_1^\mathrm{p} \\ (\lambda + 2\mu)\operatorname{div} u_0^\mathrm{p} \\ \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0 \\ q_0 \\ \tau_q\big(1 - \frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\big)q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \end{pmatrix}.$$

(i) Es sei $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$ *die Lösung von* (4.4 a)+(4.4 c) *zum Anfangswert* V_0. *Für* $t \in [0,\infty)$ *definieren wir*

$$q(t) := V_{n+3,\dots,2n+2}(t)\,, \quad \theta(t) := \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau} V_{n+2}(t) \quad \textit{und} \quad u^{\mathrm{p}}(t) := u_0^{\mathrm{p}} + \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau T_0}\int_0^t V_{1,\dots,n}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dann löst $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$ *das Anfangswertproblem* (4.2) *und es gilt:*

$$\begin{aligned}
&q \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,,\\
&\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)\,,\\
&u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^2\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,,\\
&\operatorname{div} u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)\,,\\
&\textit{und}\ \tfrac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta \nabla\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,.
\end{aligned}$$

Für $n \in \{2,3\}$ *gilt zudem: Wenn* u_0^{p} *aus* $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ *ist und* $V(t)$ *für alle* $t \in [0,\infty)$ *die Nebenbedingung* (4.4 b) *erfüllt, dann liegt* $u^{\mathrm{p}}(t)$ *für alle* $t \in [0,\infty)$ *in* $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$.

(ii) Es sei $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$ *eine Lösung von* (4.2) *mit* $q \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$, $\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$, $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$, $u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$, $\operatorname{div} u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$. *Wir setzen*

$$V(t) := \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta} u_t^{\mathrm{p}}(t) \\ (\lambda+2\mu)\operatorname{div} u^{\mathrm{p}}(t) \\ \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta(t) \\ q(t) \\ \tau_q(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta})q(t) + \frac{\tau_q^2}{2} q_t(t) + \kappa\tau_\theta\nabla\theta(t) \end{pmatrix} \quad \textit{für } t \in [0,\infty)\,. \tag{4.5}$$

Dann ist V *in* $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+2} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$ *und löst das Anfangswertproblem* (4.4 a)+(4.4 c) *zum Anfangswert* V_0.

Für $n \in \{2,3\}$ *gilt zudem: Wenn* $u^{\mathrm{p}}(t)$ *für alle* $t \in [0,\infty)$ *in* $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ *liegt, dann erfüllt* $V(t)$ *für alle* $t \in [0,\infty)$ *die Nebenbedingung* (4.4 b).

Beweis:

(i) Aufgrund der Regularität von V, die zusammen mit der Differentialgleichung (4.4 a) auch $V \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$ impliziert, ist $q \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ und $\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$. Aus der Art und Weise, wie u^{p} definiert ist, ergibt sich $u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ (siehe Satz A.19 in Anhang A.5). Die Anfangsbedingung $V(0) = V_0$ besagt $q(0) = q_0$ und $\theta(0) = \theta_0$ und nach Definition von u^{p} sind auch $u^{\mathrm{p}}(0) = u_0^{\mathrm{p}}$ und $u_t^{\mathrm{p}}(0) = \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau T_0} V_{1,\dots,n}(0) = u_1^{\mathrm{p}}$ erfüllt. Aus dem Beweis zu Satz 3.2 (i), dort unter der Gleichung (3.3), wissen wir, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_{n+2} + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_{n+2} + \big(LV\big)_{n+2}\\
&= \big(A_{\mathrm{W}}^0\partial_t V_{n+2,\dots,3n+2}\big)_1 + \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\operatorname{div} V_{1,\dots,n} + \sum_{j=1}^n \big(A_{\mathrm{W}}^j\partial_{x_j} V_{n+2,\dots,3n+2}\big)_1 + \big(L_{\mathrm{W}} V_{n+2,\dots,3n+2}\big)_1\\
&= \varrho c_v\theta_t + \operatorname{div} q + \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\operatorname{div} V_{1,\dots,n}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

gilt, sofern $\theta = \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau} V_{n+2}$ und $q = V_{n+3,\dots,2n+2}$ ist, was jedoch nach Definition von θ und q der Fall ist. Nach Definition von u^{p} ist außerdem $V_{1,\dots,n} = \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta} u_t^{\mathrm{p}}$. Die Gleichung (4.6) bedeutet also

gerade, dass $(q, \theta, u^{\mathrm{p}})$ die Differentialgleichung (4.2 b) löst. Der Beweis zu Satz 3.2 (i) zeigt auch, dass aus

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A^0 \partial_t V\right)_{n+3,\dots,3n+2} + \sum_{j=1}^{n} \left(A^j \partial_{x_j} V\right)_{n+3,\dots,3n+2} + \left(LV\right)_{n+3,\dots,3n+2} \\ &= \left(A^0_{\mathrm{W}} \partial_t V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(A^j_{\mathrm{W}} \partial_{x_j} V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{2,\dots,2n+1} + \left(L_{\mathrm{W}} V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{2,\dots,2n+1} \end{aligned}$$

die Gleichheit (4.2 c) und der Anfangswert $q_t(0) = q_1$ folgen, sofern, wie hier der Fall, die Zusammenhänge $\theta = \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau} V_{n+2}$ und $q = V_{n+3,\dots,2n+2}$ gelten. Die Zeile $(n+1)$ des Systems (4.4 a),

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A^0 \partial_t V\right)_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(A^j \partial_{x_j} V\right)_{n+1} + \left(LV\right)_{n+1} \\ &= \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta(\lambda+2\mu)} \partial_t V_{n+1} - \operatorname{div} V_{1,\dots,n} = \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta(\lambda+2\mu)} \partial_t V_{n+1} - \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta} \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_t \,, \end{aligned}$$

impliziert $\partial_t V_{n+1} = (\lambda+2\mu) \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_t$. Da sowohl V_{n+1} als auch $\operatorname{div} u^{\mathrm{p}}$ in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ liegen, bedeutet dies nach Satz A.19

$$\begin{aligned} V_{n+1}(t) &= V_{n+1}(0) + \int_0^t \partial_s V_{n+1}(s) \,\mathrm{d}s = V_{n+1}(0) + \int_0^t (\lambda+2\mu) \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_t(s) \,\mathrm{d}s \\ &= V_{n+1}(0) + (\lambda+2\mu) \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}(t) - (\lambda+2\mu) \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_0 = (\lambda+2\mu) \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}(t) \quad \text{für } t \in [0,\infty) \,. \end{aligned}$$

Damit gilt auch $\operatorname{div} u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$, da V_{n+1} in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$ liegt. Schließlich ergibt sich aus den ersten n Zeilen des Systems (4.4 a)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A^0 \partial_t V\right)_{1,\dots,n} + \sum_{j=1}^{n} \left(A^j \partial_{x_j} V\right)_{1,\dots,n} + \left(LV\right)_{1,\dots,n} \\ &= \frac{2\varrho\tau_\theta}{\kappa\tau T_0} \partial_t V_{1,\dots,n} - \nabla V_{n+1} + \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau} \nabla V_{n+2} = \varrho u^{\mathrm{p}}_{tt} - (\lambda+2\mu) \nabla \operatorname{div} u^{\mathrm{p}} + \gamma \nabla\theta \,, \end{aligned}$$

wonach (θ, u^{p}) die Differentialgleichung (4.2 a) erfüllt.

Wenn im Fall $n \in \{2,3\}$ u^{p}_0 aus $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ ist und V die Nebenbedingung (4.4 b) erfüllt, erhalten wir zudem

$$\operatorname{rot} u^{\mathrm{p}}(t) = \operatorname{rot} u^{\mathrm{p}}_0 + \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau T_0} \int_0^t \operatorname{rot} V_{1,\dots,n}(s) \,\mathrm{d}s = \operatorname{rot} u^{\mathrm{p}}_0 + \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau T_0} \int_0^t \sum_{j=1}^{n} Q^j \partial_{x_j} V(s) \,\mathrm{d}s = 0 \,.$$

Damit muss $u^{\mathrm{p}}(t)$ für $t \in [0,\infty)$ in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ liegen (vergleiche [Gal11, S. 143 f.]).

(ii) Da nach Voraussetzung $\nabla\theta$ und $\nabla \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}$ in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ liegen, erhalten wir aus der Differentialgleichung (4.2 a), dass u^{p} in $\mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ ist. Wegen $u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$ ist außerdem $\operatorname{div} u^{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$. Der Differentialgleichung (4.2 b) entnehmen wir die Regularität $\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$, da sowohl $\operatorname{div} q$ als auch $\operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_t$ aus $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ sind. Wie im Beweis zu Satz 3.2 (ii) ausgeführt, ergeben sich weiterhin $q \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ und $\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta \nabla\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$. Somit liegt die Funktion V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$ und $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$, und erfüllt nach Definition die Anfangsbedingung $V(0) = V_0$.

Da $V_{n+2,\dots,3n+2} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta \\ q \\ \tau_q\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q+\frac{\tau_q^2}{2}q_t+\kappa\tau_\theta\nabla\theta \end{pmatrix}$ ist, entnehmen wir dem Beweis zu Satz 3.2 (ii), dass

$$\begin{aligned}
&\left(A^0\partial_t V\right)_{n+3,\dots,3n+2} + \sum_{j=1}^n \left(A^j\partial_{x_j} V\right)_{n+3,\dots,3n+2} + \left(LV\right)_{n+3,\dots,3n+2} \\
&\quad = \left(A^0_{\mathrm{W}}\partial_t V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^n \left(A^j_{\mathrm{W}}\partial_{x_j} V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{2,\dots,2n+1} + \left(L_{\mathrm{W}} V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{2,\dots,2n+1} \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left(A^0\partial_t V\right)_{n+2} + \sum_{j=1}^n \left(A^j\partial_{x_j} V\right)_{n+2} + \left(LV\right)_{n+2} \\
&\quad = \left(A^0_{\mathrm{W}}\partial_t V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{1} + \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\operatorname{div} V_{1,\dots,n} + \sum_{j=1}^n \left(A^j_{\mathrm{W}}\partial_{x_j} V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{1} + \left(L_{\mathrm{W}} V_{n+2,\dots,3n+2}\right)_{1} \\
&\quad = \varrho c_v\theta_t + \operatorname{div} q + \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\operatorname{div} V_{1,\dots,n}
\end{aligned}$$

gelten. Letzteres ergibt ebenfalls Null, da nach Definition $\frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\operatorname{div} V_{1,\dots,n} = \gamma T_0 \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_t$ ist und $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$ die Differentialgleichung (4.2 b) löst. Aus (4.2 a) und der Definition von V erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(A^0\partial_t V\right)_{1,\dots,n} + \sum_{j=1}^n \left(A^j\partial_{x_j} V\right)_{1,\dots,n} + \left(LV\right)_{1,\dots,n} \\
&\quad = \frac{2\varrho\tau_\theta}{\kappa\tau T_0}\partial_t V_{1,\dots,n} - \nabla V_{n+1} + \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\nabla V_{n+2} = \varrho u^{\mathrm{p}}_{tt} - (\lambda+2\mu)\nabla\operatorname{div} u^{\mathrm{p}}(t) + \gamma\nabla\theta = 0\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
&\left(A^0\partial_t V\right)_{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(A^j\partial_{x_j} V\right)_{n+1} + \left(LV\right)_{n+1} \\
&\quad = \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta(\lambda+2\mu)}\partial_t V_{n+1} - \operatorname{div} V_{1,\dots,n} = \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta}\partial_t \operatorname{div} u^{\mathrm{p}} - \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta}\operatorname{div} u^{\mathrm{p}}_t = 0
\end{aligned}$$

ist auch die noch verbleibende Gleichung erfüllt, sodass V also insgesamt das Anfangswertproblem (4.4 a)+(4.4 c) löst. Wenn $n \in \{2,3\}$ ist und $u^{\mathrm{p}}_t(t)$ für $t \in [0,\infty)$ in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ liegt, erfüllt V aufgrund der Identität $\sum_{j=1}^n Q^j\partial_{x_j} V = \operatorname{rot} V_{1,\dots,n} = \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta}\operatorname{rot} u^{\mathrm{p}}_t$ die Nebenbedingung (4.4 b). □

Korollar 4.3 (Wohlgestelltheit für DPLT (2,1)). *Zu $s \in \mathbb{N}$ seien Anfangsdaten $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$, $q_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)^n$ und $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ sowie $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ mit $\operatorname{div} u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ und $u_1 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ gegeben. Dann besitzt das Anfangswertproblem (4.1) eine eindeutige Lösung (q,θ,u) mit $(q,\theta) \in \mathcal{C}^0([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^{n+1}$, $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^n$ sowie $\operatorname{div} u \in \mathcal{C}^0([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))$ und $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^n$ (weitere Regularitäten leiten sich daraus wie im Beweis zu Satz 4.2 (ii) ab).*

Beweis: Im Fall $n = 1$ seien $u^{\mathrm{p}}_0 := u_0$ und $u^{\mathrm{p}}_1 := u_1$. Für $n \in \{2,3\}$ zerlegen wir gemäß der Helmholtz-Zerlegung $u_0 = u^{\mathrm{p}}_0 + u^{\mathrm{s}}_0$ und $u_1 = u^{\mathrm{p}}_1 + u^{\mathrm{s}}_1$ mit $u^{\mathrm{p}}_0, u^{\mathrm{p}}_1 \in \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ und $u^{\mathrm{s}}_0, u^{\mathrm{s}}_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Aus diesen und den anderen gegebenen Anfangsdaten definieren wir V_0 wie in Satz 4.2. Dann liegt V_0 in $H^s(\mathbb{R}^n)^{3n+2}$ und für $n \in \{2,3\}$ zudem in $\mathcal{N}$. Das Anfangswertproblem (4.4) besitzt eine

eindeutige Lösung $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$, woraus man mit Satz 4.2 eine eindeutige Lösung $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$ von (4.2) erhält. Im Fall $n = 1$ stellt (q,θ,u) mit $u := u^{\mathrm{p}}$ die eindeutige Lösung von (4.1) dar. Ist $n \in \{2,3\}$, so liegt $u^{\mathrm{p}}(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$ in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$. Außerdem finden wir eine eindeutige Lösung $u^{\mathrm{s}} \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ zur Wellengleichung (4.3) mit $u^{\mathrm{s}}(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in [0,\infty)$. Für $n \in \{2,3\}$ beschreibt also (q,θ,u) mit $u := u^{\mathrm{p}} + u^{\mathrm{s}}$ die eindeutige Lösung von (4.1). □

Die Nebenbedingung ändert nichts an der Tatsache, dass es sich bei der Lösung um die eines symmetrisch-hyperbolischen Systems handelt. Somit greift das Resultat zur endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit aus Satz 2.3, woraus wir eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$ ableiten können. Der Anteil u^{s} besitzt gemäß der Wellengleichung (4.3) eine eigenständige Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Satz 4.4 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für DPLT (2,1)). *Zu $r \in \mathbb{R}^+$ seien Anfangsdaten q_0, q_1, θ_0, u_0 und u_1 mit der Regularität aus Korollar 4.3 gegeben und ihr Träger liege jeweils in $\overline{B(0,r)}$. Dann gilt für die Lösung (q,θ,u) von (4.1) für alle $t \in [0,\infty)$*

$$\operatorname{supp} q(t) \subset \overline{B(0,r+c\,t)}\,,\ \ \operatorname{supp}\theta(t) \subset \overline{B(0,r+c\,t)}\ \ \textit{und}\ \ \operatorname{supp} u(t) \subset \overline{B(0,r+c\,t)}$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c := \max\left\{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}, \sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2} + \frac{\gamma^2 T_0}{\varrho^2 c_v}}, \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}\right\}$.

Beweis: Für $n = 1$ sei $u^{\mathrm{p}} := u$ und im Fall, dass $n \in \{2,3\}$ ist, zerlege man u in $u = u^{\mathrm{p}} + u^{\mathrm{s}}$ mit $u^{\mathrm{p}}(t) \in \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ und $u^{\mathrm{s}}(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ für $t \in [0,\infty)$. Wie wir in Satz 4.2 gesehen haben, löst V, definiert wie in (4.5), das Anfangswertproblem (4.4) zum Anfangswert $V(0)$, dessen Träger aufgrund der Voraussetzungen in $\overline{B(0,r)}$ liegt. Nach Satz 2.3 existiert ein $c^{\mathrm{p}} \in \mathbb{R}^+$, sodass $\operatorname{supp} V(t)$ für $t \in [0,\infty)$ in $\overline{B(0,r+c^{\mathrm{p}}t)}$ liegt. Gemäß der Gestalt von V impliziert dies $\operatorname{supp} q(t) \subset \overline{B(0,r+c^{\mathrm{p}}t)}$, $\operatorname{supp}\theta(t) \subset \overline{B(0,r+c^{\mathrm{p}}t)}$ und $\operatorname{supp} u_t^{\mathrm{p}}(t) \subset \overline{B(0,r+c^{\mathrm{p}}t)}$ für $t \in [0,\infty)$. Da $u^{\mathrm{p}}(t) = u_0^{\mathrm{p}} + \int_0^t u_t^{\mathrm{p}}(s)\,\mathrm{d}s$ gilt und der Träger von u_0^{p} nach Voraussetzung ebenfalls in $\overline{B(0,r)}$ liegt, folgt auch $\operatorname{supp} u^{\mathrm{p}}(t) \subset \overline{B(0,r+c^{\mathrm{p}}t)}$. Als den größten Eigenwert der Matrix $(A^0)^{-\frac{1}{2}} A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}}$ können wir c^{p} konkret berechnen. Zur Bestimmung der Determinante von

$$\eta\,\mathrm{I}_{3n+2} - (A^0)^{-\frac{1}{2}} A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \eta\,\mathrm{I}_n & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}\omega & -\frac{\gamma}{\varrho}\sqrt{\frac{T_0}{c_v}}\omega & 0_n & 0_n \\ \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}\omega^{\mathsf{T}} & \eta & 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ -\frac{\gamma}{\varrho}\sqrt{\frac{T_0}{c_v}}\omega^{\mathsf{T}} & 0 & \eta & -\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}\omega^{\mathsf{T}} & 0_{1\times n} \\ 0_n & 0_n & -\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}\omega & \eta\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_{n\times 1} & 0_n & \eta\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

nutzen wir die Formeln $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$ für $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ und invertierbares $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$ für invertierbares A (siehe [HJ13, S. 24 (0.8.5.1)]), und erhalten

$$\det\Big(\eta\,\mathrm{I}_{3n+2} - (A^0)^{-\frac{1}{2}} A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}}\Big) = \det(\eta\,\mathrm{I}_{2n})\det\begin{pmatrix} \eta\,\mathrm{I}_n & \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}\omega & -\frac{\gamma}{\varrho}\sqrt{\frac{T_0}{c_v}}\omega \\ \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}\omega^{\mathsf{T}} & \eta & 0 \\ -\frac{\gamma}{\varrho}\sqrt{\frac{T_0}{c_v}}\omega^{\mathsf{T}} & 0 & \eta - \frac{1}{\eta}\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\omega^{\mathsf{T}}\omega \end{pmatrix}$$

$$= \eta^{2n}\det(\eta\,\mathrm{I}_n)\det\begin{pmatrix} \eta - \frac{1}{\eta}\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\omega^{\mathsf{T}}\omega & 0 \\ 0 & \eta - \frac{1}{\eta}\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\omega^{\mathsf{T}}\omega - \frac{1}{\eta}\frac{\gamma^2 T_0}{\varrho^2 c_v}\omega^{\mathsf{T}}\omega \end{pmatrix}$$

$$= \eta^{3n-2}\left(\eta^2 - \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\right)\left(\eta^2 - \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2} - \frac{\gamma^2 T_0}{\varrho^2 c_v}\right).$$

Die maximale Nullstelle ist somit

$$c^{\mathrm{p}} = \max\left\{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}\,,\ \sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2} + \frac{\gamma^2 T_0}{\varrho^2 c_v}}\right\}.$$

Im Fall $n \in \{2,3\}$ tritt außerdem der Anteil u^{s} als Lösung der Wellengleichung (4.3) auf. Dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit ist durch

$$c^{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

gegeben. Insgesamt können wir also $c := \max\{c^{\mathrm{p}}, c^{\mathrm{s}}\}$ als die Ausbreitungsgeschwindigkeit für das System (4.1) ansehen. Anhand der physikalischen Einheiten (siehe Seite 5) kann man sich überzeugen, dass c tatsächlich eine Geschwindigkeit beschreibt. □

4.1.2 Zeitliche Asymptotik

Für $n \in \{2,3\}$ ermöglichte die Helmholtz-Zerlegung die Aufspaltung des Systems (4.1) in eine Wellengleichung (4.3) und ein symmetrisch-hyperbolisches System (4.4). Die zeitliche Asymptotik der Lösung der Wellengleichung ist aus [Rac15, Theorem 2.3] bekannt. So gilt für den Anteil u^{s} der Lösung (q,θ,u) des Dual-Phase-Lag-Systems DPLT (2,1)

$$\left\|\partial_x^k(u_t^{\mathrm{s}}(t), \nabla u^{\mathrm{s}}(t))\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{n(n+1)}} \le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}\left\|(u_1^{\mathrm{s}}, \nabla u_0^{\mathrm{s}})\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{n(n+1)}} \tag{4.7}$$

für alle $t \in [0,\infty)$ mit einer von t und von $u_0^{\mathrm{s}} \in W^{N+k+1,p}(\mathbb{R}^n)^n$, $u_1^{\mathrm{s}} \in W^{N+k,p}(\mathbb{R}^n)^n$ unabhängigen Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$. Hierbei sind $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $N := n(1-\frac{2}{q})$ für $q \in \{2,\infty\}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > n(1-\frac{2}{q})$ für $q \in (2,\infty)$.

Das Abklingverhalten des verbleibenden Lösungsanteils $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$ wollen wir in Form einer L^p-L^q-Abschätzung für die zugehörige Lösung des symmetrisch-hyperbolischen Systems beschreiben. Diese werden wir für $n \in \{2,3\}$ mithilfe von Satz 2.19 erhalten. Die Nebenbedingung (4.4 b), die für die Wohlgestelltheit des Systems nicht vonnöten war, wird nun von zentraler Bedeutung sein, denn für $n \in \{2,3\}$ wird sich für das System (4.4 a) nicht die Bedingung (K), wohl aber für das System (4.4 a)+(4.4 b) die Bedingung (K*) nachweisen lassen. In einer Raumdimension tritt dieses Phänomen nicht auf. Das System (4.4 a) wird für $n = 1$ in der Tat die Bedingung (K) erfüllen, sodass Satz 2.16 angewendet werden kann. Wie bereits bei dem Modell DPLW (2,1) der reinen Wärmeleitung gelte auch hier

$$2\tau_\theta \ge \tau_q\,.$$

Der Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ wird auf ein Abklingen vom Standard-Typ und der Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ auf ein Abklingen vom Regularity-Loss-Typ führen.

Bedingung (A). Die Matrizen A^0, $A^1, \ldots, A^n$ (siehe Definition 4.1) sind symmetrisch und A^0 ist positiv definit. Der nicht verschwindende Teil der Matrix L besteht aus der Matrix L_{W}, deren Eigenschaften wir bereits vom System DPLW (2,1) zur reinen Wärmeleitung her kennen (siehe Seite 58). Demzufolge ist L positiv semidefinit und es gilt $\ker(L) = \operatorname{span}\{e_{3n+2}^1, \ldots, e_{3n+2}^{n+2}\} \neq \{0\}$. □

Bedingung (K) bzw. (K*). Wir definieren $K : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{(3n+2)\times(3n+2)}$ für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ durch

$$K(\omega) := \begin{pmatrix} 0_n & 2\tau_\theta\gamma\varrho(\lambda+2\mu)\omega & 2\kappa\tau\varrho(\lambda+2\mu)\omega & 0_n & 0_n \\ -\frac{\gamma(\kappa\tau T_0)^2}{2\tau_\theta}\omega^\mathsf{T} & 0 & 0 & \kappa\tau T_0(T_0\gamma^2 - 2\varrho c_v(\lambda+2\mu))\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -2\kappa\tau\varrho c_v T_0(\lambda+2\mu)\omega^\mathsf{T} & 0 & 0 & 8\tau_\theta\varrho c_v\gamma T_0(\lambda+2\mu)\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ 0_n & \frac{\tau_q^2\tau(\lambda+2\mu)}{2\tau_\theta}(2\varrho c_v(\lambda+2\mu) - T_0\gamma^2)\omega & -\frac{\kappa\tau_q^2\tau^2\gamma T_0(\lambda+2\mu)}{\tau_\theta^2}\omega & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung liegt in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^{(3n+2)\times(3n+2)})$, sie erfüllt $K(-\omega) = -K(\omega)$ und für die Matrix $K(\omega)A^0$, die

$$\begin{pmatrix} 0_n & \kappa\tau\gamma\varrho T_0\omega & 4\tau_\theta\varrho^2 c_v(\lambda+2\mu)\omega & 0_n & 0_n \\ -\kappa\tau\gamma\varrho T_0\omega^\mathsf{T} & 0 & 0 & \frac{\kappa\tau_q^2\tau^2 T_0}{4\tau_\theta^2}(T_0\gamma^2 - 2\varrho c_v(\lambda+2\mu))\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -4\tau_\theta\varrho^2 c_v(\lambda+2\mu)\omega^\mathsf{T} & 0 & 0 & \frac{2\tau_q^2\tau\varrho c_v\gamma}{\tau_\theta}T_0(\lambda+2\mu)\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ 0_n & \frac{\kappa\tau_q^2\tau^2 T_0}{4\tau_\theta^2}(2\varrho c_v(\lambda+2\mu) - T_0\gamma^2)\omega & -\frac{2\tau_q^2\tau\varrho c_v\gamma}{\tau_\theta}T_0(\lambda+2\mu)\omega & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

lautet, gilt $(K(\omega)A^0)^\mathsf{T} = -K(\omega)A^0$. Die obere linke $(n+2)\times(n+2)$ Teilmatrix des Produkts von $K(\omega)$ mit der Matrix $A(\omega)$ berechnet sich zu

$$\big(K(\omega)A(\omega)\big)_{(1,\dots,n+2)\times(1,\dots,n+2)} = \begin{pmatrix} 2\tau_\theta\gamma\varrho(\lambda+2\mu)\omega\omega^\mathsf{T} & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & \frac{\gamma(\kappa\tau T_0)^2}{2\tau_\theta} & -2\kappa\tau\varrho c_v T_0(\lambda+2\mu) \\ 0_{1\times n} & 2\kappa\tau\varrho c_v T_0(\lambda+2\mu) & 4\tau_\theta\varrho c_v\gamma T_0(\lambda+2\mu) \end{pmatrix}.$$

Für $v = (v_1, \dots, v_{n+2}, 0, \dots, 0) \in \ker(L) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+2}, \dots, e^{n+2}_{3n+2}\} \subset \mathbb{C}^{3n+2}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+2}} &= \left\langle \big([K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}\big)_{(1,\dots,n+2)\times(1,\dots,n+2)} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{n+2}} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2\tau_\theta\varrho\gamma(\lambda+2\mu)\omega\omega^\mathsf{T} & 0_{n\times 1} & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & \frac{\gamma(\kappa\tau T_0)^2}{2\tau_\theta} & 0 \\ 0_{1\times n} & 0 & 4\tau_\theta\varrho c_v\gamma T_0(\lambda+2\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{n+2}} \\ &= 2\tau_\theta\varrho\gamma(\lambda+2\mu)\left\langle \omega\omega^\mathsf{T} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^n} + \frac{\gamma(\kappa\tau T_0)^2}{2\tau_\theta}|v_{n+1}|^2 + 4\tau_\theta\varrho c_v\gamma T_0(\lambda+2\mu)|v_{n+2}|^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

▸ Fall $n = 1$: Da in einer Raumdimension $\omega\omega^\mathsf{T} = 1$ gilt, folgt aus (4.8) direkt

$$\langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^5} \geq \min\left\{2\tau_\theta\varrho\gamma(\lambda+2\mu)\,,\ \frac{\gamma(\kappa\tau T_0)^2}{2\tau_\theta}\,,\ 4\tau_\theta\varrho c_v\gamma T_0(\lambda+2\mu)\right\}|v|^2$$

für $v \in \ker(L)$. Insgesamt ist somit die Bedingung (K) von Seite 32 erfüllt.

Für den Fall $n \in \{2, 3\}$ stellen wir das folgende Lemma voran.

Lemma 4.5 (Dyadisches Produkt). *Es sei $n \in \{2, 3\}$.*

(i) Zu einem Vektor $\omega \in \mathbb{R}^n$ heißt die Matrix $\omega\omega^\mathsf{T}$ das dyadische Produkt. Dieses ist stets symmetrisch und positiv semidefinit.

(ii) Das Kreuzprodukt eines Vektors $\omega \in \mathbb{R}^n$ mit einem Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ ist durch

$$\omega \times v := \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \quad \textit{für } n = 2 \qquad \textit{und} \qquad \omega \times v := \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3\omega_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \textit{für } n = 3$$

gegeben. Ist $\omega \times v = 0$, so gilt $\langle \omega\omega^\mathsf{T} v, v\rangle_{\mathbb{C}^n} = |\omega|^2|v|^2$.

Beweis: (i) Es gilt $(\omega\omega^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \omega\omega^\mathsf{T}$ und $\langle \omega\omega^\mathsf{T} v, v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \omega^\mathsf{T} v, \omega^\mathsf{T} v\rangle_{\mathbb{C}^n} = |\omega^\mathsf{T} v|^2 \geq 0$.

(ii) Ist $\omega = 0$ oder $v = 0$, so ist die Aussage klar. Andernfalls bedeutet $\omega \times v = 0$, dass ω und v linear abhängig sind. Damit lässt sich aber v als $v = \alpha\omega$ mit einem $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ darstellen, woraus man $\langle \omega\omega^\mathsf{T} v, v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \omega\omega^\mathsf{T}(\alpha\omega), \alpha\omega\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \alpha\omega(\omega^\mathsf{T}\omega), \alpha\omega\rangle_{\mathbb{C}^n} = |\omega|^2\langle \alpha\omega, \alpha\omega\rangle_{\mathbb{C}^n} = |\omega|^2|v|^2$ schließt. □

▸ Fall $n \in \{2,3\}$: Wir weisen die verbleibende Eigenschaft aus der Bedingung (K*) von Seite 49 nach. Sei $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ fest. In (4.8) werden jetzt nur noch Vektoren v aus $\ker(L) \cap X_\omega$ betrachtet. Dabei nimmt die Menge $X_\omega := \{z \in \mathbb{C}^{3n+2} \mid (\mathrm{I}_{2n-3} - P_{\mathrm{im}(R)})Q(\omega)z = 0\}$ die einfache Gestalt

$$X_\omega = \{z \in \mathbb{C}^{3n+2} \,\big|\, Q(\omega)z = 0\} = \Big\{z \in \mathbb{C}^{3n+2} \mid \omega \times (z_1, \ldots, z_n)^\mathsf{T} = 0\Big\}$$

an, denn wegen $R = 0_{(2n-3)\times(3n+2)}$ ist $\mathrm{I}_{2n-3} - P_{\mathrm{im}(R)} = \mathrm{I}_{2n-3}$ und nach Definition von $Q(\omega)$ (siehe Seite 80) entspricht $Q(\omega)z = \widetilde{Q}(\omega)(z_1, \ldots, z_n)^\mathsf{T}$ gerade dem Kreuzprodukt $\omega \times (z_1, \ldots, z_n)^\mathsf{T}$. Diese zusätzliche Einschränkung an v in Form von $v \in X_\omega$ bzw. $\omega \times (v_1, \ldots, v_n)^\mathsf{T} = 0$ stellt nach Lemma 4.5 (ii) die Eigenschaft

$$\left\langle \omega\omega^\mathsf{T} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^n} = |\omega|^2 \big|(v_1, \ldots, v_n)\big|^2 = \big|(v_1, \ldots, v_n)\big|^2$$

sicher. Diese ist wesentlich, denn nur so können wir in (4.8) weiter auf

$$\langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+2}} \geq \min\Big\{2\tau_\theta \varrho\gamma(\lambda + 2\mu)\,,\ \frac{\gamma(\kappa\tau T_0)^2}{2\tau_\theta}\,,\ 4\tau_\theta \varrho c_v \gamma(\lambda + 2\mu)T_0\Big\}|v|^2$$

schließen. Damit ist aber nun für $n \in \{2,3\}$ insgesamt die Bedingung (K*) erfüllt. □

Fall $2\tau_\theta > \tau_q$

Bedingungen (S) und ($\mathbf{S_2}$) bzw. ($\mathbf{S_2^*}$). Da für $2\tau_\theta > \tau_q$ die Nullräume von $[L]_{\mathrm{sy}}$ und L übereinstimmen, sind die Bedingungen (S) und (S_2) von Seite 32 erfüllt, wenn wir $S := 0_{3n+2}$ wählen. Im Fall $n \in \{2,3\}$ wäre aufgrund der dann vorhandenen Nebenbedingung die Bedingung (S_2^*) von Seite 49 anstelle von (S_2) zu zeigen. Da jedoch $R = 0_{(2n-3)\times(3n+2)}$ ist und somit die dort zu bestimmende Matrix $(P_{\mathrm{im}(R)}Q(\omega))^\mathsf{T}\widetilde{S}R$ stets der Nullmatrix 0_{3n+2} entspricht, fällt (S_2^*) mit der Bedingung (S_2) zusammen. □

Fall $2\tau_\theta = \tau_q$

Wenn $2\tau_\theta = \tau_q$ gilt, ist $\ker([L]_{\mathrm{sy}}) = \mathrm{span}\{e^1_{3n+2}, \ldots, e^{2n+2}_{3n+2}\}$ und damit ungleich dem Kern von L.

Bedingung (S). Wir können die für das Wärmeleitungsmodell DPLW (2,1) konstruierte Matrix $S_\mathrm{W} := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_\theta}{3}\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{1}{6\tau_\theta}\mathrm{I}_n & -\frac{1}{3}\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ aufgreifen und $S := \begin{pmatrix} 0_{(n+1)\times(n+1)} & 0_{(n+1)\times(2n+1)} \\ 0_{(2n+1)\times(n+1)} & S_\mathrm{W} \end{pmatrix}$ setzen. Dann ist $SA^0 = \begin{pmatrix} 0_{(n+1)\times(n+1)} & 0_{(n+1)\times(2n+1)} \\ 0_{(2n+1)\times(n+1)} & S_\mathrm{W}A^0_\mathrm{W} \end{pmatrix}$ und $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}} = \begin{pmatrix} 0_{(n+1)\times(n+1)} & 0_{(n+1)\times(2n+1)} \\ 0_{(2n+1)\times(n+1)} & [S_\mathrm{W}L_\mathrm{W}]_{\mathrm{sy}} + [L_\mathrm{W}]_{\mathrm{sy}} \end{pmatrix}$.

Aus den Untersuchungen von Seite 59 wissen wir, dass $S_\mathrm{W}A^0_\mathrm{W}$ symmetrisch ist und die Matrix $[S_\mathrm{W}L_\mathrm{W}]_{\mathrm{sy}} + [L_\mathrm{W}]_{\mathrm{sy}}$ positiv semidefinit ist und denselben Kern wie L_W besitzt. Damit ist auch SA^0 symmetrisch, $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}$ positiv semidefinit und $\ker([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}) = \ker(L)$. □

Bedingung ($\mathbf{S_1}$) bzw. ($\mathbf{S_1^*}$). Die im Fall $n \in \{2,3\}$ nachzuweisende Bedingung (S_1^*) stimmt wegen $R = 0_{(2n-3)\times(3n+2)}$ mit (S_1) überein. Mit der soeben festgelegten Matrix S ergibt sich

$$[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} = \begin{pmatrix} 0_{(n+1)\times(n+1)} & 0_{(n+1)\times(2n+1)} \\ 0_{(2n+1)\times(n+1)} & [S_{\mathrm{W}}A_{\mathrm{W}}(\omega)]_{\mathrm{asy}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_{\mathrm{W}}(\omega) := \sum_{j=1}^{n} A_{\mathrm{W}}^j \omega_j \quad \text{für } \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\,.$$

Ist nun $v = (v_1, \ldots, v_{2n+2}, 0, \ldots, 0)$ ein Element aus $\ker([L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e_{3n+2}^1, \ldots, e_{3n+2}^{2n+2}\} \subset \mathbb{C}^{3n+2}$, so liegt $\widetilde{v} := (v_{n+2}, \ldots, v_{2n+2}, 0, \ldots, 0)$ in $\ker([L_{\mathrm{W}}]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e_{2n+1}^1, \ldots, e_{2n+1}^{n+1}\} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ und für einen solchen Vektor wissen wir von Seite 60, dass $\langle i[S_{\mathrm{W}}A_{\mathrm{W}}(\omega)]_{\mathrm{asy}}\widetilde{v}, \widetilde{v}\rangle_{\mathbb{C}^{2n+1}} = 0$ gilt. Also ist die Bedingung (S_1) in Form von

$$\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+2}} = \left\langle i[S_{\mathrm{W}}A_{\mathrm{W}}(\omega)]_{\mathrm{asy}} \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ \vdots \\ v_{3n+2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ \vdots \\ v_{3n+2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{2n+1}} = 0 \quad \text{für } v \in \ker([L]_{\mathrm{sy}})$$

erfüllt. □

Nachdem wir im Fall einer Raumdimension die Bedingungen (A), (K), (S) sowie (S_1) für $2\tau_\theta = \tau_q$ und (S_2) für $2\tau_\theta > \tau_q$, und im Fall von zwei und drei Raumdimensionen die Bedingungen (A), (K^*), (S) sowie (S_1^*) für $2\tau_\theta = \tau_q$ und (S_2^*) für $2\tau_\theta > \tau_q$ nachweisen konnten, erhalten wir nun mit Satz 2.16 bzw. Satz 2.19 eine L^p-L^q-Abschätzung für die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ des Systems (4.4).

Satz 4.6 (L^p-L^q-Abschätzung zum System (4.4)). *Es seien $n \in \{1,2,3\}$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $q \in \{2,\infty\}$ sei $N := (n+1)(1-\frac{2}{q})$ und für $q \in (2,\infty)$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > (n+1)(1-\frac{2}{q})$. Im Fall $n = 1$ setzen wir $\mathcal{W} := W^{s+N,p}(\mathbb{R})^5$ und für $n \in \{2,3\}$ sei $\mathcal{W} := W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2} \cap \mathcal{N}$. Für das System (4.4) gilt:*

(i) Im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ weisen die Lösungen ein Abklingverhalten vom Standard-Typ auf: Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $V_0 \in \mathcal{W}$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le s$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} \le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}\,.$$

(ii) Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$ weisen die Lösungen ein Abklingverhalten vom Regularity-Loss-Typ auf: Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $V_0 \in \mathcal{W}$, für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k + l \le s$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} \le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}\,.$$

Zu einer Lösung (q,θ,u) des ursprünglichen Systems DPLT (2,1) aus (4.1) beschreibt Satz 4.6 das Abklingverhalten des Anteils $(q,\theta,u^{\mathrm{p}})$ und die Ungleichung (4.7) dasjenige von u^{s}. Daraus lassen sich Abschätzungen für die einzelnen Lösungskomponenten q, θ und u ableiten (vergleiche [JR00, S. 84 f.] und [Rac15, S. 161]). In Bezug auf u dominiert im Allgemeinen das langsamere Abklingen des Anteils u^{s}.

Korollar 4.7 (L^p-L^q-Abschätzung für DPLT (2,1)). *Es seien n, s, p, q und N wie in Satz 4.6 vorausgesetzt, wobei wir der Einfachheit halber den Fall $(p,q) = (1,\infty)$ ausschließen. Für eine Lösung (q,θ,u) des Systems (4.1) zu Anfangswerten q_0, q_1, θ_0, u_0, u_1 mit $u_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^n$ und $V_0 := \left(\frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta}u_1\,,\ (\lambda+2\mu)\operatorname{div} u_0\,,\ \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0\,,\ q_0\,,\ \tau_q\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_0 + \frac{1}{2}\tau_q^2 q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0\right)^{\mathsf{T}} \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}$ gelten die folgenden Abschätzungen für jeweils eine von q_0, q_1, θ_0, u_0 und u_1 unabhängige Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ und alle $t \in [0,\infty)$.*

(i) Im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$: Für $k \le s$ ist

$$\|\partial_x^k q(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^k \theta(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}$$

und für $k \le s-1$ ist

$$\|\partial_x^k \theta_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k+1}{2}} \|V_0\|_{W^{k+1+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} \,.$$

Ist $n=1$ oder liegen im Fall $n \in \{2,3\}$ die Anfangswerte u_0 und u_1 in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$, so gilt

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} \le C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}$$

für $k \le s$. Andernfalls ist für $k \le s-1$

$$\begin{aligned}&\|\partial_x^k u_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n}\\ &\quad\le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)} \Big(\|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} + \|u_0\|_{W^{k+1+N,p}(\mathbb{R}^n)^n}\Big)\,.\end{aligned}$$

(ii) Im Fall $2\tau_\theta = \tau_q$: Für $k+l \le s$ ist

$$\|\partial_x^k q(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^k \theta(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \|V_0\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}$$

und für $k+l \le s-1$

$$\|\partial_x^k \theta_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+1+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k+1,l\}}{q}} \|V_0\|_{W^{k+1+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} \,.$$

Ist $n=1$ oder liegen im Fall $n \in \{2,3\}$ die Anfangswerte u_0 und u_1 in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$, so gilt

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} \le C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{q}} \|V_0\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}$$

für $k+l \le s$. Andernfalls ist für $k+l \le s$ mit $k \le s$

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k u_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} &\le C(1+t)^{-\min\left\{\frac{n-1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right),\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)+\frac{\min\{k,l\}}{q}\right\}}\\ &\quad\cdot \Big(\|V_0\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} + \|u_0\|_{W^{k+1+N,p}(\mathbb{R}^n)^n}\Big)\,.\end{aligned}$$

Beweis: Es sei $V_0^{\mathrm{p}} := \left(\frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta} u_1^{\mathrm{p}},\ (\lambda+2\mu)\operatorname{div} u_0^{\mathrm{p}},\ \frac{\kappa\tau}{2\tau_\theta}\theta_0,\ q_0,\ \tau_q\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_0 + \frac{1}{2}\tau_q^2 q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0\right)^{\mathsf{T}}$ (man beachte hierbei die Einbettung $W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ und die verallgemeinerte Helmholtz-Zerlegung auf L^p für $p \in (1,2] \subset (1,\infty)$ nach [Gal11, Theorem III.1.2]). Im Fall $n=1$ sind $u^{\mathrm{s}} := 0$, $u^{\mathrm{p}} := u$ und $V_0^{\mathrm{p}} := V_0$ zu setzen. Wenn $n \in \{2,3\}$ ist, und u_0 und u_1 in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ liegen, bilden $u_0^{\mathrm{s}} = 0$ und $u_1^{\mathrm{s}} = 0$ die Anfangswerte zur Wellengleichung (4.3). Auch in diesem Fall gilt also $u^{\mathrm{s}} = 0$ und $V_0^{\mathrm{p}} = V_0$. Die Aussagen ergeben sich nun aus Satz 4.6 sowie der Abschätzung (4.7) auf Grundlage der folgenden nach Satz 4.2 geltenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k q(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} &\le \|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0^{\mathrm{p}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}\,, \qquad \|\partial_x^k \theta(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau}\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0^{\mathrm{p}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}\,,\\
\|\partial_x^k \theta_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\le \frac{1}{\varrho c_v}\|\partial_x^k \operatorname{div} q(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \frac{\gamma T_0}{\varrho c_v}\|\partial_x^k \operatorname{div} u_t^{\mathrm{p}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{(gemäß (4.2 b))}\\
&\le \frac{n}{\varrho c_v}\max\Big\{1, \frac{2\gamma\tau_\theta}{\kappa\tau}\Big\}\|\partial_x^{k+1}\mathcal{S}(t)V_0^{\mathrm{p}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}\,,\\
\|\partial_x^k u_t(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} &\le \|\partial_x^k u_t^{\mathrm{p}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^k u_t^{\mathrm{s}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n}\\
&\le \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau T_0}\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0^{\mathrm{p}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} + \|\partial_x^k u_t^{\mathrm{s}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n}\,,
\end{aligned}$$

und außerdem nach [Rac15, S. 84], da $q \in [2,\infty) \subset (1,\infty)$ ist,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} &\le \|\partial_x^{k+1} u^{\mathrm{p}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} + \|\partial_x^{k+1} u^{\mathrm{s}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} \\ &\le c\|\partial_x^k \operatorname{div} u^{\mathrm{p}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_x^{k+1} u^{\mathrm{s}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n} \qquad \text{für eine Konstante } c \in \mathbb{R}^+ \\ &\le \frac{c}{\lambda+2\mu}\|\partial_x^k \mathcal{S}(t) V_0^{\mathrm{p}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} + \|\partial_x^{k+1} u^{\mathrm{s}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n}\,.\end{aligned}$$

Im Fall, dass $V_0^{\mathrm{p}} \neq V_0$ ist, führen die Abschätzungen von $\|\partial_x^k \mathcal{S}(t) V_0^{\mathrm{p}}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}$, $\|\partial_x^k u_t^{\mathrm{s}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n}$ und $\|\partial_x^{k+1} u^{\mathrm{s}}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^n}$ zunächst nur auf die Terme $\|V_0^{\mathrm{p}}\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}$ bzw. $\|V_0^{\mathrm{p}}\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}$ und $\|(u_1^{\mathrm{s}}, \nabla u_0^{\mathrm{s}})\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{n(n+1)}}$. Jedoch gilt nach [Gal11, Remark III.1.1, Theorem III.1.2]

$$\begin{aligned}\|u_1^{\mathrm{s}}\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^n} \le \|u_1\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^n} \le \frac{2\tau_\theta}{\kappa\tau T_0}\|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} \qquad &\text{und} \\ \|\nabla u_0^{\mathrm{s}}\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{n\cdot n}} \le c\|u_0^{\mathrm{s}}\|_{W^{k+1+N,p}(\mathbb{R}^n)^n} \le c\|u_0\|_{W^{k+1+N,p}(\mathbb{R}^n)^n} \qquad &\text{für eine Konstante } c \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Wegen $V_0^{\mathrm{p}} = V_0 - \left(\frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta} u_1^{\mathrm{s}}, 0, 0, 0, 0\right)^{\mathsf{T}}$ ergibt sich dann auch

$$\|V_0^{\mathrm{p}}\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} \le \|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}} + \frac{\kappa\tau T_0}{2\tau_\theta}\|u_1^{\mathrm{s}}\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^n} \le 2\|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+2}}\,. \qquad \square$$

Die Abklingraten, die wir für das Dual-Phase-Lag-Modell DPLT (2,1) im Fall $2\tau_\theta > \tau_q$ erhalten haben, stimmen mit denjenigen aus der klassischen Thermoelastizität (siehe [JR00; Rac15]) und denen aus der Thermoelastizität mit Second Sound (siehe [YW06; WY06]) überein.

4.2 Three-Phase-Lag-Wärmeleitung TPLW (2,1,1)

Auch das Modell TPLW (2,1,1) der Three-Phase-Lag-Wärmeleitung lässt sich als ein symmetrisch-hyperbolisches System mit einer Nebenbedingung auffassen und wieder wird die Nebenbedingung die Rotationsfreiheit einer Lösungskomponente beschreiben. Im Gegensatz zum Thermoelastizitätsmodell des vorangehenden Abschnitts, bei dem die Nebenbedingung durch Zerlegen des Verschiebungsvektors in den potentialen und den solenoidalen Anteil gewissermaßen künstlich erzeugt wurde, ergibt sie sich hier jedoch auf direktem Wege, und zwar daraus, dass der Gradient der thermischen Verschiebung $\nabla\nu$ bei der Transformation auf ein System erster Ordnung einen Bestandteil des Lösungsvektors bildet.

Das zu betrachtende Anfangswertproblem besteht aus den Gleichungen (1.10) mit der Entwicklungsordnung zwei für q und jeweils eins für $\nabla\theta$ und $\nabla\nu$ in der Raumdimension $n \in \{1,2,3\}$ zu vorgegebenen Anfangsdaten $q_0, q_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\theta_0, \nu_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

<u>TPLW (2,1,1)</u>

$$q + \tau_q q_t + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} = -\tau_\nu^* \nabla\theta - \kappa\tau_\theta \nabla\theta_t - \kappa^* \nabla\nu \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.9 a}$$

$$-\operatorname{div} q = \varrho c_v \theta_t \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.9 b}$$

$$\nu_t = \theta \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.9 c}$$

$$q(0,\cdot) = q_0\,,\ q_t(0,\cdot) = q_1\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0\,,\ \nu(0,\cdot) = \nu_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{4.9 d}$$

4.2.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisches System mit Nebenbedingung

Definition 4.8 (Matrizen zu TPLW (2,1,1)). *Für das System TPLW (2,1,1) definieren wir*

$$\tau_1 := \kappa\tau_\theta - \frac{1}{2}\kappa^*\tau_q^2\,, \quad \tau_2 := \kappa\tau_\theta - \frac{1}{2}\tau_q\tau_\nu^* \quad \textit{und} \quad \tau_3 := \frac{1}{2}\tau_q\tau_\nu^* - \frac{1}{2}\kappa^*\tau_q^2\,,$$

wobei wir $\tau_1 = \tau_2 + \tau_3 > 0$ voraussetzen. Es sei $n \in \{1,2,3\}$ und die Matrizen seien

$$A^0 := \begin{pmatrix} \frac{\varrho c_v \tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\kappa^*\tau_1}\,\mathrm{I}_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{2\tau_3}{\tau_q\tau_1}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

$$\textit{und} \quad A^j := \begin{pmatrix} 0 & -(e_n^j)^\mathsf{T} & (e_n^j)^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -e_n^j & 0_n & 0_n & 0_n \\ e_n^j & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \textit{für } j \in \{1,...,n\}\,.$$

Zu $n \in \{2,3\}$ legen wir außerdem

$$R := 0_{(2n-3)\times(3n+1)} \quad \textit{und} \quad Q^j := \begin{pmatrix} 0_{(2n-3)\times 1} & \widetilde{Q}^j & 0_{(2n-3)\times 2n} \end{pmatrix} \quad \textit{für } j \in \{1,\dots,n\}$$

fest, wobei die Matrizen $\widetilde{Q}^j$ wie in der Definition 4.1 lauten.

Bei den bisher betrachteten Modellen DPLW (2,1) und DPLT (2,1) waren in Bezug auf die Wohlgestelltheit keine zusätzlichen Annahmen an die (lediglich positiven) Parameter τ_θ und τ_q nötig. Für das System TPLW (2,1,1) müssen wir hingegen $\kappa\tau_\theta - \frac{1}{2}\kappa^*\tau_q^2 > 0$ fordern, um die positive Definitheit der Matrix A^0 zu gewährleisten. Nachdem in [Bor12] die Wohlgestelltheit in beschränkten Gebieten unabhängig von den Parametern gezeigt wurde, deutet dies daraufhin, dass die hier gewählte Transformation möglicherweise nicht optimal ist. Da jedoch später im Zusammenhang mit der zeitlichen Asymptotik $\kappa\tau_\theta - \frac{1}{2}\kappa^*\tau_q^2 > 0$ ohnehin vorausgesetzt werden muss, sehen wir dies hier als keine Einschränkung an. Mit den angegebenen Matrizen erhalten wir ein symmetrisch-hyperbolisches Anfangswertproblem, zusammen mit einer Nebenbedingung, falls die Raumdimension zwei oder drei ist:

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^n A^j\partial_{x_j}V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.10 a}$$

$$\text{wenn } n \in \{2,3\}: \qquad RV + \sum_{j=1}^n Q^j\partial_{x_j}V = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{4.10 b}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{4.10 c}$$

Das System erfüllt die Bedingung (C) von Seite 48, die für $n \in \{2,3\}$ die Wohlgestelltheit sicherstellt.

Bedingung (C). Es sei $n \in \{2,3\}$. Da $R = 0_{(2n-3)\times(3n+1)}$ ist, sind nur $Q(\omega)(A^0)^{-1}A(\omega) = 0$ und $Q(\omega)(A^0)^{-1}L = 0$ zu zeigen, wobei die Matrizen $A(\omega)$ und $Q(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ durch

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^\mathsf{T} & \omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -\omega & 0_n & 0_n & 0_n \\ \omega & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q(\omega) = \begin{pmatrix} 0_{(2n-3)\times 1} & \widetilde{Q}(\omega) & 0_{(2n-3)\times 2n} \end{pmatrix}$$

gegeben sind und $\widetilde{Q}(\omega)$ wie auf Seite 80 lautet. In der Tat sind die genannten Beziehungen erfüllt, denn es ist $Q(\omega)(A^0)^{-1}L = \widetilde{Q}(\omega)0_{n\times(3n+1)} = 0_{(2n-3)\times(3n+1)}$ und mit $\widetilde{Q}(\omega)\omega = 0_{(2n-3)\times 1}$ ergibt sich

$$Q(\omega)\big(A^0\big)^{-1}A(\omega) = \Big(-\widetilde{Q}(\omega)\tfrac{\kappa^*\tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2}\omega \quad 0_{(2n-3)\times n} \quad 0_{(2n-3)\times n} \quad 0_{(2n-3)\times n}\Big) = 0_{(2n-3)\times(3n+1)}\,. \qquad \square$$

Mithilfe von Satz 2.2 und Satz 2.17 schließen wir, dass das symmetrisch-hyperbolische Anfangswertproblem (4.10) für $s \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ besitzt, sofern der Anfangswert V_0 aus $H^s(\mathbb{R}^n)^{3n+1}$ und für $n \in \{2,3\}$ zusätzlich aus der Menge

$$\mathcal{N} := \Big\{W \in L^2(\mathbb{R}^n)^{3n+1} \;\Big|\; RW + \sum_{j=1}^n Q^j\partial_{x_j}W = 0\Big\} = \Big\{W \in L^2(\mathbb{R}^n)^{3n+1} \mid \operatorname{rot} W_{2,\dots,n+1} = 0\Big\}$$

gewählt wird. Die Äquivalenz zwischen dem System (4.10) und dem ursprünglichen System (4.9) ist keineswegs offensichtlich. Der Beweis des folgenden Satzes macht deutlich, wie verschachtelt die Transformation abläuft.

Satz 4.9 (Äquivalenz der Systeme). *Zu $s \in \mathbb{N}$ seien für (4.9) Anfangsdaten $\nu_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$, $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ und $q_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)^n$ mit $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ gegeben. Dazu sei*

$$V_0 := \begin{pmatrix} \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1}\theta_0 \\ \kappa^*\nabla\nu_0 \\ q_0 + \kappa^*\nabla\nu_0 \\ \frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q_0+\kappa^*\nabla\nu_0\big) + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \end{pmatrix}.$$

(i) Es sei $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ die Lösung von (4.10) zum Anfangswert V_0. Dann ist durch

$$q(t) := V_{n+2,\dots,2n+1}(t) - V_{2,\dots,n+1}(t)\,, \quad \theta(t) := \frac{\tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2}V_1(t)$$
$$\text{und} \quad \nu(t) := \nu_0 + \int_0^t \theta(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für } t \in [0,\infty)$$

eine Lösung (q,θ,ν) von (4.9) gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} &q \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,,\\ &\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)\,,\\ &\nu \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)\\ &\text{und } \tfrac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,. \end{aligned}$$

(ii) Es sei (q,θ,ν) eine Lösung von (4.9) mit $q \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$, $\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$, $\nu \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$ und $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$. Wir setzen

$$V(t) := \begin{pmatrix} \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1}\theta(t) \\ \kappa^*\nabla\nu(t) \\ q(t) + \kappa^*\nabla\nu(t) \\ \frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q(t)+\kappa^*\nabla\nu(t)\big) + \frac{\tau_q^2}{2}q_t(t) + \kappa\tau_\theta\nabla\theta(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0,\infty)\,.$$

Dann liegt V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ und löst das Anfangswertproblem (4.10) zum Anfangswert V_0.

Beweis:

(i) Nach Wahl des Anfangswerts V_0 sind mit

$$q(0) = V_{n+2,\dots,2n+1}(0) - V_{2,\dots,n+1}(0) = q_0 + \kappa^*\nabla\nu_0 - \kappa^*\nabla\nu_0 = q_0\,,$$
$$\theta(0) = \frac{\tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2}V_1(0) = \theta_0 \quad \text{und} \quad \nu(0) = \nu_0$$

die Anfangsbedingungen (4.9 d) erfüllt; einzig offen bleibt $q_t(0) = q_1$, was sich jedoch im Laufe des Beweises ergeben wird. Aus der Regularität von V, die aufgrund der Differentialgleichung (4.10 a) auch $V \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ mit sich bringt, erhalten wir, dass q in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ und θ in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ liegen. Letzteres impliziert zusammen mit Satz A.19, dass ν aus $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$ ist und dabei die Identität (4.9 c) gilt. Die erste Zeile des Systems (4.10 a)

$$\begin{aligned}0 &= \left(A^0\partial_t V\right)_1 + \sum_{j=1}^n \left(A^j\partial_{x_j}V\right)_1 + \left(LV\right)_1\\ &= \frac{\varrho c_v\tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2}\left(\partial_t V\right)_1 - \operatorname{div} V_{2,\dots,n+1} + \operatorname{div} V_{n+2,\dots,2n+1} = \varrho c_v\theta_t + \operatorname{div} q\end{aligned}$$

zeigt, dass (q,θ) die Differentialgleichung (4.9 b) erfüllt. Die darauffolgenden Zeilen der Nummern zwei bis $(n+1)$,

$$\begin{aligned}0 &= \left(A^0\partial_t V\right)_{2,\dots,n+1} + \sum_{j=1}^n \left(A^j\partial_{x_j}V\right)_{2,\dots,n+1} + \left(LV\right)_{2,\dots,n+1}\\ &= \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\kappa^*\tau_1}\partial_t V_{2,\dots,n+1} - \nabla V_1 = \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\kappa^*\tau_1}\partial_t V_{2,\dots,n+1} - \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1}\nabla\theta\,,\end{aligned}$$

liefern den Zusammenhang

$$\partial_t V_{2,\dots,n+1} = \kappa^*\nabla\theta\,. \tag{4.11}$$

Da einerseits $V_{2,\dots,n+1}$ in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ liegt und sich andererseits aus den schon gefundenen Eigenschaften von ν auch $\nabla\nu \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ mit $\partial_t\nabla\nu = \nabla\theta$ ableiten lässt, folgt aus (4.11) durch zweimaliges Anwenden von Satz A.19 (iii) für $t \in [0,\infty)$

$$V_{2,\dots,n+1}(t) = V_{2,\dots,n+1}(0) + \int_0^t \left(\partial_s V\right)_{2,\dots,n+1}(s)\,\mathrm{d}s = \kappa^*\nabla\nu_0 + \int_0^t \kappa^*\nabla\theta(s)\,\mathrm{d}s = \kappa^*\nabla\nu(t)\,. \tag{4.12}$$

Nachdem $V_{2,\dots,n+1}$ außerdem in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$ liegt, muss dies auch für $\nabla\nu$ gelten und somit ist $\nu \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$. Aus den Zeilen $(n+2)$ bis $(2n+1)$ von (4.10 a) erhalten wir, wenn wir die Definitionen von q und θ sowie die Zusammenhänge (4.11) und (4.12) beachten,

$$\begin{aligned}0 &= \left(A^0\partial_t V\right)_{n+2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^n \left(A^j\partial_{x_j}V\right)_{n+2,\dots,2n+1} + \left(LV\right)_{n+2,\dots,2n+1}\\ &= \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} + \nabla V_1 + \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}V_{n+2,\dots,2n+1} - \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}V_{2n+2,\dots,3n+1}\\ &= \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\left(q_t + \partial_t V_{2,\dots,n+1}\right) + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1}\nabla\theta + \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}\left(q + V_{2,\dots,n+1}\right) - \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}V_{2n+2,\dots,3n+1}\\ &= \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\left(q_t + \kappa^*\nabla\theta\right) + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1}\nabla\theta + \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}\left(q + \kappa^*\nabla\nu\right) - \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}V_{2n+2,\dots,3n+1}\,.\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{2}\kappa^*\tau_q^2 + \tau_1 = \kappa\tau_\theta$ ist, bedeutet dies

$$V_{2n+2,\dots,3n+1} = \frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta \nabla\theta + \frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q + \kappa^*\nabla\nu\big)\,.$$

Hieraus folgt zum einen $\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$, da sowohl $V_{2n+2,\dots,3n+1}$ als auch q und $\nabla\nu$ diese Regularität aufweisen. Zum anderen ergibt sich der verbleibende Anfangswert

$$q_t(0) = \frac{2}{\tau_q^2} V_{2n+2,\dots,3n+1}(0) - \frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q^2}\nabla\theta(0) - \frac{2\tau_2}{\tau_q\tau_1}\big(q(0) + \kappa^*\nabla\nu(0)\big) = q_1\,.$$

Schließlich schauen wir uns noch die letzten n Zeilen von (4.10 a) an:

$$\begin{aligned}
0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_{2n+2,\dots,3n+1} + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_{2n+2,\dots,3n+1} + \big(LV\big)_{2n+2,\dots,3n+1} \\
&= \partial_t V_{2n+2,\dots,3n+1} + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2} V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{2\tau_3}{\tau_q\tau_1} V_{2n+2,\dots,3n+1} \\
&= \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta + \frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q+\kappa^*\nabla\nu\big)\Big) + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\big(q + V_{2,\dots,n+1}\big) \\
&\quad + \frac{2\tau_3}{\tau_q\tau_1}\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta + \frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q+\kappa^*\nabla\nu\big)\Big) \\
&= \frac{\tau_2^2+\tau_3^2+2\tau_2\tau_3}{\tau_1^2} q + \frac{\tau_q(\tau_2+\tau_3)}{\tau_1} q_t + \frac{\kappa^*\tau_q\tau_2 + \kappa\tau_\theta\frac{2\tau_3}{\tau_q}}{\tau_1}\nabla\theta + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2+2\tau_2\tau_3}{\tau_1^2}\kappa^*\nabla\nu \\
&\quad + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big)\,.
\end{aligned}$$

Da die Konstanten τ_1, τ_2 und τ_3 in den folgenden Beziehungen zueinander stehen,

$$\tau_2 + \tau_3 = \tau_1 \quad \text{und} \quad \kappa^*\tau_q\tau_2 + \kappa\tau_\theta\frac{2\tau_3}{\tau_q} = \tau_1\tau_\nu^*\,, \tag{4.13}$$

besagt die Gleichung gerade, dass

$$0 = q + \tau_q q_t + \tau_\nu^*\nabla\theta + \kappa^*\nabla\nu + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big)$$

gilt. In diesem Sinne (vergleiche dazu die Bemerkung 3.3) ist die Differentialgleichung (4.9 a) erfüllt.

(ii) Aus den für q, θ und ν vorgegebenen Regularitäten leitet man $q \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ und anhand der Differentialgleichungen (4.9) auch $\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$, $\nu \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$ und $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^n$ ab. Demzufolge liegt V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+2} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))^{3n+2}$. V erfüllt die Anfangsbedingung $V(0) = V_0$ und für $n \in \{2,3\}$ die Nebenbedingung (4.10 b), denn es ist

$$\sum_{j=1}^n Q^j\partial_{x_j} V = \operatorname{rot} V_{2,\dots,n+1} = \kappa^*\operatorname{rot}\nabla\nu = 0\,.$$

Da für (q,θ,ν) die Gleichungen aus (4.9) gelten, löst V das System (4.10 a):

$$\begin{aligned}
&\big(A^0\partial_t V\big)_1 + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_1 + \big(LV\big)_1 \\
&\quad = \frac{\varrho c_v\tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2}\partial_t V_1 - \operatorname{div} V_{2,\dots,n+1} + \operatorname{div} V_{n+2,\dots,2n+1} = \varrho c_v\theta_t + \operatorname{div} q = 0\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\big(A^0\partial_t V\big)_{2,\dots,n+1} + \sum_{j=1}^{n}\big(A^j\partial_{x_j}V\big)_{2,\dots,n+1} + \big(LV\big)_{2,\dots,n+1}\\
&\quad= \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\kappa^*\tau_1}\partial_t V_{2,\dots,n+1} - \nabla V_1 = \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1}\big(\partial_t\nabla\nu - \nabla\theta\big) = 0\,,\\
&\big(A^0\partial_t V\big)_{n+2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^{n}\big(A^j\partial_{x_j}V\big)_{n+2,\dots,2n+1} + \big(LV\big)_{n+2,\dots,2n+1}\\
&\quad= \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} + \nabla V_1 + \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}V_{n+2,\dots,2n+1} - \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}V_{2n+2,\dots,3n+1}\\
&\quad= \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\big(q_t + \kappa^*\partial_t\nabla\nu\big) + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1}\nabla\theta + \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}\big(q+\kappa^*\nabla\nu\big)\\
&\qquad - \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\Big(\frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q+\kappa^*\nabla\nu\big) + \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big)\\
&\quad= \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\Big(\frac{1}{2}\kappa^*\tau_q^2 + \tau_1 - \kappa\tau_\theta\Big)\nabla\theta = 0 \qquad \text{(nach Definition von } \tau_1\text{)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\big(A^0\partial_t V\big)_{2n+2,\dots,3n+1} + \sum_{j=1}^{n}\big(A^j\partial_{x_j}V\big)_{2n+2,\dots,3n+1} + \big(LV\big)_{2n+2,\dots,3n+1}\\
&\quad= \partial_t V_{2n+2,\dots,3n+1} + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{2\tau_3}{\tau_q\tau_1}V_{2n+2,\dots,3n+1}\\
&\quad= \partial_t\Big(\frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q+\kappa^*\nabla\nu\big) + \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\big(q+\kappa^*\nabla\nu\big)\\
&\qquad + \frac{2\tau_3}{\tau_q\tau_1}\Big(\frac{\tau_q\tau_2}{\tau_1}\big(q+\kappa^*\nabla\nu\big) + \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big)\\
&\quad= \frac{\tau_2^2+\tau_3^2+2\tau_2\tau_3}{\tau_1^2}q + \frac{\tau_q\big(\tau_2+\tau_3\big)}{\tau_1}q_t + \frac{\kappa^*\tau_q\tau_2 + \kappa\tau_\theta\frac{2\tau_3}{\tau_q}}{\tau_1}\nabla\theta + \frac{\tau_2^2+\tau_3^2+2\tau_2\tau_3}{\tau_1^2}\kappa^*\nabla\nu\\
&\qquad + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big)\\
&\quad= q + \tau_q q_t + \tau_\nu^*\nabla\theta + \kappa^*\nabla\nu + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \kappa\tau_\theta\nabla\theta\Big) = 0\,,
\end{aligned}
$$

wobei nochmals die unter (4.13) angeführten Zusammenhänge genutzt wurden. □

Korollar 4.10 (Wohlgestelltheit für TPLW (2,1,1)). *Zu $s \in \mathbb{N}$ seien Anfangsdaten $\nu_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$, $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ und $q_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)^n$ mit $\frac{1}{2}\tau_q^2 q_1 + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ gegeben. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (4.9) *eine eindeutige Lösung (q,θ,ν) mit der in Satz 4.9 genannten Regularität.*

Das in der reduzierten Form (1.11), also als alleinige Gleichung für die Temperatur vorliegende System TPLW (2,1,1) war bereits in [QR07] als ein hyperbolisches System eingestuft worden, mit einem Beleg im Fall einer Raumdimension. In diesem Zusammenhang wurde dort auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet und der Wert $\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q^2}}$ erzielt. Unsere Untersuchungen, die von der ursprünglichen Form (1.10) des Modells ausgehen, bestätigen diesen nun auch für zwei oder drei Raumdimensionen.

Satz 4.11 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für TPLW (2,1,1)). *Zu $r \in \mathbb{R}^+$ seien Anfangsdaten ν_0, θ_0, q_0 und q_1 mit der Regularität aus Korollar 4.10 gegeben und ihr Träger liege jeweils in $\overline{B(0,r)}$. Dann gilt für die Lösung (q,θ,ν) von (4.9) für alle $t \in [0,\infty)$*

$$\operatorname{supp} q(t) \subset \overline{B(0,r+c\,t)}\,, \quad \operatorname{supp}\theta(t) \subset \overline{B(0,r+c\,t)} \quad \textit{und} \quad \operatorname{supp}\nu(t) \subset \overline{B(0,r+c\,t)}$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c := \sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}$.

Beweis: Für die zugehörige Lösung V des symmetrisch-hyperbolischen Systems (4.10) gilt nach Satz 2.3 $\operatorname{supp} V(t) \subset \overline{B(0,r+c\,t)}$ für alle $t \in [0,\infty)$. Zur Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit nutzen wir die Formel $\det\left(\begin{smallmatrix} a & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(D)\det(a - BD^{-1}C)$ für $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^{1\times 3n}$, $C \in \mathbb{R}^{3n\times 1}$ und invertierbares $D \in \mathbb{R}^{3n\times 3n}$. Damit finden wir

$$\det\Big(\eta\,\mathrm{I}_{3n+1} - (A^0)^{-\frac{1}{2}} A(\omega)(A^0)^{-\frac{1}{2}}\Big) = \det\begin{pmatrix} \eta & \sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\omega^\mathsf{T} & -\sqrt{\frac{2\tau_1}{\varrho c_v \tau_q^2}}\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ \sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\omega & \eta\,\mathrm{I}_n & 0_n & 0_n \\ -\sqrt{\frac{2\tau_1}{\varrho c_v \tau_q^2}}\omega & 0_n & \eta\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \eta\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

$$= \eta^{3n}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\frac{\kappa^*}{\varrho c_v} - \frac{1}{\eta}\frac{2\tau_1}{\varrho c_v \tau_q^2}\right) = \eta^{3n-1}\left(\eta^2 - \frac{\kappa^*}{\varrho c_v} - \frac{2\tau_1}{\varrho c_v \tau_q^2}\right)$$

und somit als maximalen Nullstelle

$$c = \sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v} + \frac{2\tau_1}{\varrho c_v \tau_q^2}} = \sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}\,.$$

Nach Satz 4.9 gelten die Zusammenhänge $q(t) = V_{n+2,\dots,2n+1}(t) - V_{2,\dots,n+1}(t)$, $\theta(t) = \frac{\tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2} V_1(t)$ und $\nu(t) = \nu_0 + \int_0^t \theta(s)\,\mathrm{d}s$. Daher überträgt sich die Lage des Trägers von V auf q, θ und ν. □

Mit $\sqrt{\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}}$ haben wir für das Three-Phase-Lag-Modell TPLW (2,1,1) dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit wie für das Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (2,1) (siehe Satz 3.5) nachgewiesen. Der zusätzliche Parameter τ_ν bzw. $\tau_\nu^* = \kappa + \kappa^*\tau_\nu$ des Three-Phase-Lag-Modells scheint also keine Auswirkungen auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu haben.

4.2.2 Zeitliche Asymptotik

Für das in der Form (1.11) vorliegende Modell TPLW (2,1,1) haben L. Djouamai und B. Said-Houari in [DS13] unter der Annahme $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ bereits eine L^1-L^2-Abschätzung vom Standard-Typ im Fall einer Raumdimension bewiesen. Die Herleitung erfolgte dort durch eine Energieabschätzung im Fourierraum. Eine solche ersparen wir uns, wenn wir uns dem System TPLW (2,1,1) mit der allgemeinen Methode aus den Abschnitten 2.6 und 2.7 für symmetrisch-hyperbolische Systeme nähern. Dies bietet auch den Vorteil, dass die höheren Raumdimensionen $n \in \{2,3\}$ mit eingeschlossen sind und lediglich einer leichten Abwandlung des Falls $n = 1$ in Form der hinzutretenden Nebenbedingung bedürfen. Nicht zuletzt können wir mit der Methode auch den Grenzfall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ erfassen, der unter das Regularity-Loss-Phänomen fällt. Im Folgenden überprüfen wir also für das zu TPLW (2,1,1) äquivalente System (4.10) die Bedingungen an die Matrizen. Hierfür setzen wir

$$\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} \geq \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q \quad \text{oder} \quad \frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q\,,$$

also wie zuvor $\tau_1 > 0$ und nun zusätzlich $\tau_2 > 0$ oder $\tau_3 > 0$ voraus.

Bedingung (A). Die Matrizen $A^0, A^1, \dots, A^n$ (siehe Definition 4.8) sind symmetrisch und wegen $\tau_1 > 0$ ist A^0 positiv definit. Nach Voraussetzung sind τ_2 und τ_3 in jedem Fall nicht negativ, sodass

$$[L]_{\mathrm{sy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{2\tau_3}{\tau_q\tau_1}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit und damit auch die Matrix L positiv semidefinit ist. Da τ_2 und τ_3 nicht zugleich Null werden, gilt außerdem

$$\ker(L) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \tau_q\tau_2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{2\tau_3}{\tau_q\tau_1}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}, \dots, e^{n+1}_{3n+1}\} \neq \{0\}\,.$$

Damit ist die Bedingung (A) von Seite 32 erfüllt. □

Bedingung (K) bzw. (K*). Wir definieren die Abbildung

$$K:\ \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{(3n+1)\times(3n+1)}, \quad \omega \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \kappa\omega^\mathsf{T} & 2\kappa\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -\frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\kappa^*\tau_1^2}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{\kappa\tau_q^2(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\tau_1^3}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Diese liegt in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^{(3n+1)\times(3n+1)})$ und erfüllt für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ die Eigenschaft $K(-\omega) = -K(\omega)$. Auch gilt $(K(\omega)A^0)^\mathsf{T} = -K(\omega)A^0$, denn es ist

$$K(\omega)A^0 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\kappa^*\tau_1}\omega^\mathsf{T} & \kappa\tau_q^2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\omega^\mathsf{T} & 0_{1\times n} \\ -\kappa\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\kappa^*\tau_1}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \\ -\kappa\tau_q^2\frac{\tau_2^2+\tau_3^2}{\tau_1^2}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Bilden wir das Produkt von $K(\omega)$ mit der Matrix $A(\omega)$, so erhalten wir

$$K(\omega)A(\omega) = \begin{pmatrix} \kappa & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\kappa^*\tau_1^2}\omega\omega^\mathsf{T} & -\frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\kappa^*\tau_1^2}\omega\omega^\mathsf{T} & 0_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{\kappa\tau_q^2(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\tau_1^3}\omega\omega^\mathsf{T} & -\frac{\kappa\tau_q^2(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\tau_1^3}\omega\omega^\mathsf{T} & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix},$$

wobei sich der erste Eintrag wegen $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ zu $-\kappa\omega^\mathsf{T}\omega + 2\kappa\omega^\mathsf{T}\omega = \kappa\omega^\mathsf{T}\omega = \kappa$ berechnet hat. Für $v = (v_1, \dots, v_{n+1}, 0, \dots, 0) \in \ker(L) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}, \dots, e^{n+1}_{3n+1}\} \subset \mathbb{C}^{3n+1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} &= \left\langle \begin{pmatrix} \kappa & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\kappa^*\tau_1^2}\omega\omega^\mathsf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{n+1}} \\ &= \kappa|v_1|^2 + \frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v\kappa^*\tau_1^2}\left\langle \omega\omega^\mathsf{T}\begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

▸ Fall $n = 1$: In einer Raumdimension gilt $\omega\omega^\mathsf{T} = 1$, sodass (4.14) direkt die positive Definitheit von $[K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}}$ auf $\ker(L)$ in Form von

$$\langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^4} = \kappa|v_1|^2 + \frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v \kappa^* \tau_1^2}|v_2|^2 \geq \min\left\{\kappa\,,\, \frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v \kappa^* \tau_1^2}\right\}|v|^2 \quad \text{für } v \in \ker(L)$$

liefert. Insgesamt sind so alle Anforderungen der Bedingung (K) von Seite 32 erfüllt.

▸ Fall $n \in \{2,3\}$: Wir zeigen die verbleibende Eigenschaft aus der Bedingung (K*) von Seite 32. Sei dazu $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ fest. In (4.14) betrachten wir nur noch Vektoren v aus $\ker(L) \cap X_\omega$ mit

$$X_\omega = \{z \in \mathbb{C}^{3n+1} \mid Q(\omega)z = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^{3n+1} \mid \omega \times (z_2, \ldots, z_{n+1})^\mathsf{T} = 0\}\,.$$

Diese zusätzliche Einschränkung stellt nach Lemma 4.5

$$\left\langle \omega\omega^\mathsf{T} \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^n} = |\omega|^2 |(v_2, \ldots, v_{n+1})|^2 = |(v_2, \ldots, v_{n+1})|^2$$

sicher, sodass sich also für $v \in \ker(L) \cap X_\omega$

$$\langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} = \kappa|v_1|^2 + \frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v \kappa^* \tau_1^2}|(v_2, \ldots, v_{n+1})|^2 \geq \min\left\{\kappa\,,\, \frac{\kappa(\tau_2^2+\tau_3^2)^2}{\varrho c_v \kappa^* \tau_1^2}\right\}|v|^2$$

ergibt. Damit ist insgesamt die Bedingung (K*) erfüllt. □

Der Nachweis der weiteren Bedingungen gelingt im Folgenden nur für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} \geq \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$. Eine Bemerkung zum Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ findet sich im Anschluss.

Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$

Bedingungen (S) und (S_2) bzw. (S_2^*). Unter der Voraussetzung $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ gilt sowohl $\tau_2 > 0$ als auch $\tau_3 > 0$. Wenn wir uns die im Zusammenhang mit der Bedingung (A) angegebene Gestalt von $[L]_{\mathrm{sy}}$ vor Augen führen, sehen wir, dass dies $\ker([L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}, \ldots, e^{n+1}_{3n+1}\}$ und damit $\ker([L]_{\mathrm{sy}}) = \ker(L)$ impliziert. Die unter (S) und (S_2) auf Seite 32 geforderten Bedingungen sind also erfüllt, wenn wir $S := 0_{3n+1}$ wählen. Da die Matrix R für $n \in \{2,3\}$ eine Nullmatrix ist, fällt im Übrigen (S_2^*) von Seite 49 mit der Bedingung (S_2) zusammen. □

Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$

In dieser Situation ist $\tau_2 = 0$ und $\tau_1 = \tau_3 > 0$. Daher bestehen die Matrizen A^0 und L nur noch aus

$$A^0 := \begin{pmatrix} \frac{\varrho c_v}{\tau_1} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_1}{\kappa^*}\mathrm{I}_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_q^2}{2}\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & -\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \mathrm{I}_n & \frac{2}{\tau_q}I_n \end{pmatrix}.$$

Der Kern des symmetrischen Anteils von L ist $\ker([L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}, \ldots, e^{2n+1}_{3n+1}\}$ und demnach eine echte Obermenge des Kerns von L, der aus $\operatorname{span}\{e^1_{3n+1}, \ldots, e^{n+1}_{3n+1}\}$ besteht.

Bedingung (S).

Wir wählen $S := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\tau_q}{6}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{1}{3\tau_q}\,\mathrm{I}_n & -\frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Dann ist $SA^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\tau_q}{6}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_q}{6}\,\mathrm{I}_n & -\frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ symmetrisch. Außerdem ergibt sich $SL = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_q}{6}\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & -\frac{1}{3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{1}{\tau_q}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Somit ist die Matrix $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{\tau_q}{6}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{1}{\tau_q}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ positiv semidefinit und ihr Kern stimmt mit demjenigen von L überein, denn es ist $\ker([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}, \ldots, e^{n+1}_{3n+1}\} = \ker(L)$. Damit erfüllt S die Eigenschaften aus der Bedingung (S) von Seite 32. □

Bedingung ($\mathbf{S_1}$) bzw. ($\mathbf{S_1^*}$).

Für $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ erhält man $[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & -\frac{1}{6\tau_q}\omega^{\mathsf{T}} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{1}{6\tau_q}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$. Bei Anwendung dieser Matrix auf einen Vektor $v = (v_1, \ldots, v_{3n+1}) \in \mathbb{C}^{3n+1}$ ergibt sich $[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6\tau_q}\omega^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} v_{2n+2} \\ \vdots \\ v_{3n+1} \end{pmatrix} \\ 0_{2n\times 1} \\ \frac{1}{6\tau_q}\omega v_1 \end{pmatrix}$.

Wenn der Vektor aus $\ker([L]_{\mathrm{sy}})$ stammt, ist er von der Form $v = (v_1, \ldots, v_{2n+1}, 0, \ldots, 0)$ und es folgt $\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} = \left\langle i \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{2n\times 1} \\ \frac{1}{6\tau_q}\omega v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ (v_2, \ldots, v_{2n+1})^{\mathsf{T}} \\ 0_{n\times 1} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} = 0$. Damit ist die Bedingung (S_1) von Seite 32 erfüllt, welche für $n \in \{2, 3\}$ wegen $R = 0_{(2n-3)\times(3n+1)}$ mit der Bedingung (S_1^*) von Seite 49 zusammenfällt. □

Interessanterweise weist der Grenzfall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ des Systems TPLW (2,1,1) starke Ähnlichkeit mit dem Grenzfall $2\tau_\theta = \tau_q$ des Systems DPLW (2,1) auf, obwohl die beiden Modelle an sich nicht zusammenhängen. Die hier vorliegende Matrix L und die gewählte Matrix S entsprechen bis auf zusätzliche Nullzeilen und -spalten denjenigen, wie sie für das System DPLW (2,1) auftraten, wenn man dort $2\tau_\theta = \tau_q$ beachtet (siehe Seite 59).

Bemerkung 4.12 (Zu den Fällen $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ und $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$).

(i) Im Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt $\tau_1 = \tau_2 > 0$ und $\tau_3 = 0$. Wie wir gesehen haben, sind die Bedingungen (A) und (K) bzw. (K*) auch in dieser Situation erfüllt. Da sich die Matrix L dann jedoch auf

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \tau_q\,\mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix} \text{ mit } \ker([L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}, \ldots, e^{n+1}_{3n+1}, e^{2n+2}_{3n+1}, \ldots, e^{3n+1}_{3n+1}\}$$

reduziert, scheint es nicht möglich, eine Matrix S zu finden, die sowohl die Eigenschaften

der Bedingung (S) aufweist als auch $i[SA(\omega)]_{\mathrm{sy}} \geq 0$ auf $\ker([L]_{\mathrm{sy}})$ (oder auf $\mathbb{C}^{3n+1}$) erfüllt. Wir wollen dies im Fall $n = 1$ veranschaulichen:

Man könnte die Matrix S mit einem noch zu bestimmenden $s \in \mathbb{R}$ als $S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_q s \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\tau_q} s & 0 \end{pmatrix}$ wählen. Dann wäre zum einen $SA^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_q s \\ 0 & 0 & -\tau_q s & 0 \end{pmatrix}$ symmetrisch. Zum anderen wäre $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_q s + \tau_q & -s \\ 0 & 0 & -s & \frac{2}{\tau_q} s \end{pmatrix}$ für ein hinreichend kleines $s \in \mathbb{R}^+$ positiv semidefinit und der Kern dieser Matrix würde mit $\ker(L) = \operatorname{span}\{e_4^1, e_4^2\}$ übereinstimmen. Damit wäre also die Bedingung (S) erfüllt. Jedoch erhielte man $[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_q} s\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_q} s\omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit für jedes Element $v = (v_1, v_2, 0, v_4) \in \ker([L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e_4^1, e_4^2, e_4^4\}$

$$\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^4} = \frac{1}{\tau_q} is\omega\big(v_4\overline{v_1} - v_1\overline{v_4}\big) = -\frac{2}{\tau_q} s\omega \operatorname{Im}(v_4\overline{v_1})\,.$$

Dieser Ausdruck ergäbe stets Null, wenn v_1 und v_4 aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ wären. Da jedoch v stellvertretend für $(\mathscr{F}\mathcal{S}(t)V_0)(\xi)$ steht (vergleiche den Beweis zu Satz 2.11), ist im Allgemeinen von beliebigen komplexen Zahlen auszugehen, sodass $\langle i[SA(\omega)]_{\mathrm{asy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^4} \geq 0$ für $\omega \in \{-1, 1\}$ nicht zu erreichen ist.

In beschränkten Gebieten wurde für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ in [QR08] die exponentielle Stabilität nachgewiesen, während für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ nach [BQR14] kein exponentielles, sonderen ein langsameres Abklingen zu erwarten ist. Im Ganzraum werden wir sogleich (siehe Satz 4.13) für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ ein Abklingen vom Standard-Typ und im Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ ein Abklingen vom Regularity-Loss-Typ festhalten können. Der Vergleich ließe also vermuten, dass im Ganzraum auch für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ ein Abklingverhalten vom Standard-Typ folgen sollte. Möglicherweise kann dies durch eine geschicktere Transformation auf ein System erster Ordnung erreicht werden.

(ii) Gilt $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$, so handelt es sich bei TPLW (2,1,1) um eine Wellengleichung für die Funktion $\theta + \tau_q\theta_t + \frac{1}{2}\tau_q^2\theta_{tt}$, denn in der Form (1.11) lautet das System

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho c_v\theta_{tt} + \varrho c_v\tau_q\theta_{ttt} + \varrho c_v\frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tttt} - \kappa^*\Delta\theta - \tau_\nu^*\Delta\theta_t - \kappa\tau_\theta\Delta\theta_{tt} \\ &= \varrho c_v\partial_{tt}\Big(\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}\Big) - \kappa^*\Delta\Big(\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}\Big)\,. \end{aligned}$$

Auf Grundlage der nachgewiesenen Bedingungen gelten für das System (4.4) im Fall $n = 1$ die Aussagen der Sätze 2.9, 2.10, 2.13, 2.15 und 2.16 und im Fall $n \in \{2, 3\}$ die Aussagen der Sätze 2.18 und 2.19. Insbesondere ergibt sich die folgende L^p-L^q-Abschätzung.

Satz 4.13 (L^p-L^q-Abschätzung für TPLW (2,1,1)). *Es seien $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, 2]$ und $q \in [2, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $N := (n+1)(1-\frac{2}{q})$ für $q \in \{2, \infty\}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > (n+1)(1-\frac{2}{q})$ für $q \in (2, \infty)$. Im Fall $n = 1$ setzen wir $\mathcal{W} := W^{s+N,p}(\mathbb{R})^4$ und für $n \in \{2, 3\}$ sei $\mathcal{W} := W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+1} \cap \mathcal{N}$. Für das System (4.10) gilt:*

(i) Im Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ weisen die Lösung ein Abklingverhalten vom Standard-Typ auf: Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $V_0 \in \mathcal{W}$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq s$ und alle $t \in [0, \infty)$ gilt:

$$\|\partial_x^k\mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+1}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}}\|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+1}}\,.$$

(ii) Für $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ *weisen die Lösung ein Abklingverhalten vom Regularity-Loss-Typ auf: Es existiert eine Konstante* $C \in \mathbb{R}^+$*, sodass für alle* $V_0 \in \mathcal{W}$*, für alle* $k, l \in \mathbb{N}_0$ *mit* $k + l \leq s$ *und alle* $t \in [0, \infty)$ *gilt:*

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+1}} \leq C(1+t)^{-\frac{\min\{k+n,l\}}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{\min\{k,l\}}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+l+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+1}} .$$

Wie schon bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit stellen wir auch in Bezug auf die Abklingrate für das Three-Phase-Lag-Modell TPLW (2,1,1) keinen Unterschied gegenüber dem Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (2,1) (siehe Satz 3.6) fest.

Auf Grundlage der gemäß Satz 2.18 geltenden Fourierraum-Abschätzung ließe sich auch für die symmetrisch-hyperbolischen Systeme mit Nebenbedingungen eine L^1-L^2-Abschätzung wie in Satz 2.13 herleiten (vergleiche den Beweis zu Satz 2.19). Auf diese Weise würde man also für das System TPLW (2,1,1) eine L^1-L^2-Abschätzung erzielen und dabei im Fall $n = 1$ und $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ die Abklingrate wie in [DS13] erhalten. Allerdings sind wir im Gegensatz zu [DS13] von der ursprünglichen Form (1.10) des Modells ausgegangen. Dadurch lässt unser Ergebnis, da $\|\partial_x^k\theta(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\tau_1}{\tau_2^2+\tau_3^2}\|\partial_x^k\mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+1}}$ gilt, insbesondere auch Rückschlüsse auf das Abklingen der Temperatur θ selbst zu. Die Untersuchungen in [DS13], die auf der Form (1.11) basierten, führten dagegen nur zu Aussagen über Kombinationen von Orts- und Zeitableitungen von θ, nicht aber von θ selbst.

Der Nachweis der erforderlichen Bedingungen an die Matrizen mag auf den ersten Blick weniger aufwendig erscheinen als die Herleitung geeigneter Energieabschätzungen. Nicht zu vergessen ist jedoch, dass diese Methode unbedingt die Form eines symmetrisch-hyperbolischen Systems erfordert. Den Phase-Lag-Modellen ist eine solche Gestalt nicht anzusehen, weshalb die Anwendbarkeit der Methode im Vorfeld völlig unklar war. Das Auffinden einer Transformation in der Art, dass das entstehende System den Anforderungen genügt, kann, wie etwa am Beweis von Satz 4.9 zu sehen, eine nicht zu unterschätzende Schwierigkeit bedeuten. Herkömmliche Ansätze zur Transformation auf ein System erster Ordnung sind hier nicht ausreichend, stattdessen ist eine geschickte Wahl der Komponenten des Lösungsvektors nötig. Belohnt wird der Aufwand dadurch, dass man auf diese Weise direkt auch Aussagen zur Wohlgestelltheit, zum hyperbolischen Charakter und zur Ausbreitungsgeschwindigkeit gewinnt und generell die Theorie symmetrisch-hyperbolischer Systeme greift.

5 Symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Phase-Lag-Systeme

In diesem Kapitel präsentieren wir zwei Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung, die sich jeweils mit einem symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen System identifizieren lassen. Für beide wird das bei den symmetrisch-hyperbolischen Phase-Lag-Modellen beobachtete Regularity-Loss-Phänomen nicht auftreten.

Das Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,2) bildet ein Beispiel für die Anwendbarkeit unserer gegenüber [UDK12] erweiterten Methode aus Abschnitt 2.6, entspricht aber in zwei und drei Raumdimensionen keinem symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen System im Sinne der Definition 2.1. Wir zeigen, dass sich die Verwendung des Begriffs dennoch rechtfertigen lässt, und beweisen für $\tau_\theta > \tau_q$ ein Abklingverhalten vom Standard-Typ. Für $\tau_\theta = \tau_q$ geht das System in ein rein parabolisches System über.

Das Three-Phase-Lag-System TPLW (1,1,1), welches wir nur in einer Raumdimension betrachten werden, entspricht einem symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen System im Sinne der Definition 2.1. Jedoch lässt es sich nicht mit der Methode aus Abschnitt 2.6 behandeln, da die entstehende Matrix L nicht positiv semidefinit ist. Anhand der Asymptotik der Eigenwerte können wir dennoch eine L^p-L^q-Abschätzung im Fall $\tau_\nu^* \geq \kappa^* \tau_q$ herleiten. Hinsichtlich der Bedingung an die Parameter stellt dies eine Verbesserung gegenüber einem Resultat aus [DS13] dar, bei dem $\tau_\nu^* \geq \frac{\kappa\tau_\theta}{\tau_q} + \kappa^*\tau_q$ vorausgesetzt wurde. Sowohl für $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ als auch für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ weist die Lösung ein Abklingverhalten vom Standard-Typ auf, allerdings ist der Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ mit einer langsameren Abklingrate verbunden.

5.1 Dual-Phase-Lag-Wärmeleitung DPLW (2,2)

Wir untersuchen in der Raumdimension $n \in \{1, 2, 3\}$ das Dual-Phase-Lag-System

<u>DPLW (2,2)</u>

$$q + \tau_q q_t + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} = -\kappa\nabla\theta - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t - \kappa\frac{\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_{tt} \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{5.1 a}$$

$$-\operatorname{div} q = \varrho c_v \theta_t \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{5.1 b}$$

$$q(0,\cdot) = q_0\,,\ q_t(0,\cdot) = q_1\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\,, \tag{5.1 c}$$

zu vorgegebenen Anfangsdaten $q_0, q_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\theta_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Im Vergleich zum Modell DPLW (2,1), das wir in Kapitel 3 als ein symmetrisch-hyperbolisches System eingestuft haben, ist hier die Entwicklungsordnung für $\nabla\theta$ auf zwei erhöht. Dadurch gewinnt das System an parabolischem Charakter. Heuristisch lässt sich dies daran festmachen, dass es sich bei dem System DPLW (2,2), wenn wir es in der Form (1.7) betrachten, im Spezialfall $\tau_\theta = \tau_q$ um eine Wärmelei-

tungsgleichung für $\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}$ handelt:

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_t + \tau_q\theta_{tt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{ttt} - \kappa\Delta\theta - \kappa\tau_\theta\Delta\theta_t - \kappa\frac{\tau_\theta^2}{2}\Delta\theta_{tt} \\ &= \partial_t\Big(\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}\Big) - \kappa\Delta\Big(\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}\Big)\,. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir sehen, dass für $\tau_\theta > \tau_q$, was in [QR07] die Bedingung für die exponentielle Stabilität in beschränkten Gebieten war, die Bezeichnung hyperbolisch-parabolisch für das System DPLW (2,2) gerechtfertigt ist.

5.1.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System

Wir zeigen zunächst, das sich das System DPLW (2,2) auf die Form

$$A^0\partial_t V + \sum_{j=1}^n A^j\partial_{x_j}V - \sum_{j,k=1}^n B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{5.2 a}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{5.2 b}$$

bringen lässt.

Definition 5.1 (Matrizen zu DPLW (2,2)). *Es seien $\tau_1 := \tau_\theta - \tau_q$ und $\tau_2 := \tau_q^2 + \tau_1^2$, wobei wir $\tau_1 > 0$ voraussetzen. Für das System DPLW (2,2) definieren wir die Matrizen*

$$A^0 := \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\varrho c_v & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{2}{\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\tau_q^2\tau_1^2}{2\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}, \qquad L := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & -\frac{2}{\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{2}{\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{2}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & -\frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n & -\frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2}\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix},$$

$$A^j := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}(e_n^j)^\mathsf{T} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}e_n^j & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \textit{für } j\in\{1,...,n\} \quad \textit{sowie}$$

$$B^{jk} := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\big(\frac{1}{2}e_n^j(e_n^k)^\mathsf{T} + \frac{1}{2}e_n^k(e_n^j)^\mathsf{T}\big) \end{pmatrix} \quad \textit{für } j,k\in\{1,...,n\}\,.$$

Mithilfe der Matrizen B^{jk} wird im Wesentlichen der Operator $\nabla\,\mathrm{div}$ ausgedrückt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 5.2 (Bedeutung der Matrizen B^{jk}).

(i) Für $W\in H^2(\mathbb{R}^n)^{3n+1}$ ist $\displaystyle\sum_{j,k=1}^n B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{n\times 1} \\ 0_{n\times 1} \\ \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\,\mathrm{div}\,W_{2n+2,\dots,3n+1} \end{pmatrix}.$

(ii) Für $\xi\in\mathbb{R}^n$ ist $\displaystyle B(\xi) := \sum_{j,k=1}^n B^{jk}\xi_j\xi_k = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\xi\xi^\mathsf{T} \end{pmatrix}.$

Beweis: Wir beweisen lediglich die erste Aussage, diejenige unter (ii) ergibt sich analog. Für $W \in H^2(\mathbb{R}^n)^{3n+1}$ gilt $\partial_{x_j}\partial_{x_k} W = \partial_{x_k}\partial_{x_j} W$ für $j,k \in \{1,\dots,n\}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j,k=1}^n B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} W\Big)_{2n+2,\dots,3n+1} &= \frac{\kappa\tau_1^2}{4\varrho c_v}\sum_{j,k=1}^n \big(e_n^j(e_n^k)^\mathsf{T} + e_n^k(e_n^j)^\mathsf{T}\big)\partial_{x_j}\partial_{x_k} W_{2n+2,\dots,3n+1}\\ &= \frac{\kappa\tau_1^2}{4\varrho c_v}\Big(\sum_{j=1}^n e_n^j\partial_{x_j}\sum_{k=1}^n \partial_{x_k} W_{2n+1+k} + \sum_{k=1}^n e_n^k\partial_{x_k}\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} W_{2n+1+j}\Big)\\ &= \frac{\kappa\tau_1^2}{4\varrho c_v}\Big(2\sum_{l=1}^n e_n^l\partial_{x_l}\operatorname{div} W_{2n+2,\dots,3n+1}\Big) = \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} W_{2n+2,\dots,3n+1}\,.\end{aligned}$$

□

Die Matrix $B(\omega)$ ist für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ positiv semidefinit, da das dyadische Produkt $\omega\omega^\mathsf{T}$ nach Lemma 4.5 stets positiv semidefinit ist. Allerdings ist die Matrix $\omega\omega^\mathsf{T}$ nicht positiv definit, wenn $n > 1$ ist. Wohlgemerkt handelt es sich bei (5.2) im Fall von zwei oder drei Raumdimensionen also nicht um ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System im Sinne der Definition 2.1. Auch die Auslegung des Begriffs über die Bedingung (N) aus der Bemerkung 2.7 trifft nicht zu, da im Allgemeinen $\ker(B(\omega)) \neq \ker(B(\eta))$ für $\eta,\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\eta \neq \omega$ gilt.

Die Wohlgestelltheit des Systems (5.2) ist dennoch gewährleistet, denn die Matrizen $A^0, A^1, \dots, A^n$ sind symmetrisch, A^0 ist aufgrund der Voraussetzung $\tau_\theta > \tau_q$ positiv definit und $B(\xi)$ ist in jedem Fall symmetrisch und positiv semidefinit, wodurch der Beweis zu Satz 2.2 seine Gültigkeit behält. Das System (5.2) besitzt also für $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$ zu einem Anfangswert $V_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^{3n+1}$ eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$.

Bevor wir uns der Frage widmen, inwieweit die Bezeichnung symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch für das System (5.2) dennoch gerechtfertigt ist, überprüfen wir die Äquivalenz zum ursprünglichen System DPLW (2,2). Diese ist keineswegs offensichtlich und beruht auf einer aufwendigen Transformation.

Satz 5.3 (Äquivalenz der Systeme). *Es sei $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$. Für* (5.1) *seien Anfangsdaten $\theta_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$, $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ und $q_1 \in H^{s-2}(\mathbb{R}^n)^n$ mit $\tau_q^2 q_1 - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ gegeben. Dazu sei für* (5.2)

$$V_0 := \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \frac{\tau_q^2}{2}q_0 + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_0 \\ \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

(i) Es sei $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ die Lösung von (5.2) *zum Anfangswert V_0. Dann wird durch*

$$q(t) := V_{2n+2,\dots,3n+1}(t) \quad \textit{und} \quad \theta(t) := V_1(t) \quad \textit{für } t \in [0,\infty)$$

eine Lösung (q,θ) von (5.1) *beschrieben. Es gilt*

$$\begin{aligned}&q \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,,\\ &\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)\,,\\ &\tau_q^2 q + \kappa\tau_\theta^2\nabla\theta \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^2\big([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n)\big)^n\\ &\textit{und } \tfrac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q + \tfrac{\tau_q^2}{2}q_t + \tfrac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n\,.\end{aligned}$$

(ii) Es sei (q,θ) eine Lösung von (5.1), wobei $q \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^n$, $\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$ und $\tau_q^2 q_t + \kappa\tau_\theta^2 \nabla\theta_t \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^n$ gelte. Wir setzen

$$V(t) := \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \frac{\tau_q^2}{2} q(t) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta(t) \\ \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q(t) + \frac{\tau_q^2}{2} q_t(t) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0,\infty)\,.$$

Dann liegt V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ und löst das Anfangswertproblem (5.2) zum Anfangswert V_0.

Beweis:

(i) Aus der vorausgesetzten $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$-Regularität und der Tatsache, dass V die Gleichung (5.2 a) löst, können wir aufgrund der Gestalt der Matrizen A^j und B^{jk} schließen, dass V_1 in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$, $V_{2,\dots,2n+1}$ in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))^{2n}$ und insgesamt die Funktion V in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ liegt. Für q und θ bedeutet dies gemäß deren Definition

$$\begin{aligned} &q \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n)\big)^n \\ &\text{und } \theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)\big)\,. \end{aligned}$$

Aus $V(0) = V_0$ folgen $q(0) = q_0$ und $\theta(0) = \theta_0$. Dass die Funktionen der Differentialgleichung (5.1 b) genügen, ergibt sich aus der ersten Zeile des Systems (5.2 a)

$$\begin{aligned} 0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_1 + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_1 - \sum_{j,k=1}^n \big(B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V\big)_1 + \big(LV\big)_1 \\ &= \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\varrho c_v \partial_t V_1 + \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1} = \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\big(\varrho c_v\theta_t + \operatorname{div} q\big)\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist damit $\theta_t(0) = -\frac{1}{\varrho c_v}\operatorname{div} q_0$. Um die Gültigkeit von (5.1 a) überprüfen zu können, wollen wir zunächst zeigen, dass

$$q = \frac{2}{\tau_q^2} V_{2,\dots,n+1} - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta \tag{5.3}$$

ist. Dazu beginnen wir mit den letzten n Zeilen des Systems (5.2 a), den Zeilen der Nummern $(2n+2)$ bis $(3n+1)$. Dass $\sum_{j,k=1}^n (B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V)_{2n+2,\dots,3n+1} = \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1}$ gilt, haben wir in Lemma 5.2 gezeigt. Außerdem wissen wir bereits, dass $-\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1} = -\operatorname{div} q = \varrho c_v\theta_t$ ist. So ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_{2n+2,\dots,3n+1} + \sum_{j=1}^n \big(A^j\partial_{x_j} V\big)_{2n+2,\dots,3n+1} - \sum_{j,k=1}^n \big(B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V\big)_{2n+2,\dots,3n+1} \\ &\quad + \big(LV\big)_{2n+2,\dots,3n+1} \\ &= \frac{\tau_q^2\tau_1^2}{2\tau_\theta^2}\partial_t V_{2n+2,\dots,3n+1} + \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\nabla V_1 - \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1} \\ &\quad - \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3} V_{2,\dots,n+1} - \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2} V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3} V_{2n+2,\dots,3n+1} \\ &= \frac{\tau_q^2\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} q_t + \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\nabla\theta + \frac{\kappa\tau_1^2}{2}\nabla\theta_t + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3} q - \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3} V_{2,\dots,n+1} - \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2} V_{n+2,\dots,2n+1}\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Zudem liefern die Zeilen zwei bis $(n+1)$ des Systems (5.2 a)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A^0\partial_t V\right)_{2,\dots,n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(A^j\partial_{x_j}V\right)_{2,\dots,n+1} - \sum_{j,k=1}^{n}\left(B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}V\right)_{2,\dots,n+1} + \left(LV\right)_{2,\dots,n+1} \\ &= \frac{2}{\tau_\theta^2}\partial_t V_{2,\dots,n+1} - \frac{2}{\tau_\theta^2}V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3}V_{2n+2,\dots,3n+1}\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Mit dem Ziel (5.3) vor Augen bietet es sich an, die Differenz $q_t - (\frac{2}{\tau_q^2}\partial_t V_{2,\dots,n+1} - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta_t)$ zu untersuchen, nachdem sich die Ausdrücke $\nabla\theta_t$ und $\partial_t V_{2,\dots,n+1}$ nun mithilfe der beiden vorangehenden Gleichungen darstellen lassen. Aus (5.4) und (5.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta_t &= -q_t - \frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q\tau_1}\nabla\theta - \frac{2\tau_2}{\tau_q\tau_\theta\tau_1}q + \frac{4}{\tau_q\tau_\theta\tau_1}V_{2,\dots,n+1} + \frac{2}{\tau_q^2}V_{n+2,\dots,2n+1} \qquad \text{und} \\ \frac{2}{\tau_q^2}\partial_t V_{2,\dots,n+1} &= \frac{2}{\tau_q^2}V_{n+2,\dots,2n+1} - \frac{2\tau_1}{\tau_q\tau_\theta}q\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Damit können wir die zu betrachtende Funktion wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} q_t - \frac{2}{\tau_q^2}\partial_t V_{2,\dots,n+1} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta_t &= q_t - \frac{2}{\tau_q^2}V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{2\tau_1}{\tau_q\tau_\theta}q \\ &\quad - q_t - \frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q\tau_1}\nabla\theta - \frac{2\tau_2}{\tau_q\tau_\theta\tau_1}q + \frac{4}{\tau_q\tau_\theta\tau_1}V_{2,\dots,n+1} + \frac{2}{\tau_q^2}V_{n+2,\dots,2n+1} \\ &= \frac{2\tau_1^2 - 2\tau_2}{\tau_q\tau_\theta\tau_1}q - \frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q\tau_1}\nabla\theta + \frac{4}{\tau_q\tau_\theta\tau_1}V_{2,\dots,n+1} \\ &= -\frac{2\tau_q}{\tau_\theta\tau_1}\Big(q - \frac{2}{\tau_q^2}V_{2,\dots,n+1} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta\Big) \qquad (\text{da } \tau_1^2 = \tau_2 - \tau_q^2). \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass dies einer gewöhnlichen Differentialgleichung entspricht. Da die Funktionen q und $\frac{2}{\tau_q^2}V_{2,\dots,n+1} - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta$ wegen

$$q(0) - \Big(\frac{2}{\tau_q^2}V_{2,\dots,n+1}(0) - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta(0)\Big) = q_0 - \Big(\frac{2}{\tau_q^2}\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_0 + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_0\Big) - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta_0\Big) = 0$$

in $t=0$ übereinstimmen und die Banachraum-wertige Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = -\frac{2\tau_q}{\tau_\theta\tau_1}f(t)$ zum Anfangswert $f(0)=0$ die eindeutige Lösung $f=0$ besitzt, müssen die Funktionen bereits auf dem gesamten Intervall $[0,\infty)$ identisch sein. Damit haben wir die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} q &= \frac{2}{\tau_q^2}V_{2,\dots,n+1} - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta \qquad (\text{also wie gewünscht (5.3)}) \\ \text{und} \quad \tau_q q_t &= \frac{2}{\tau_q}\partial_t V_{2,\dots,n+1} - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q}\nabla\theta_t = \frac{2}{\tau_q}V_{n+2,\dots,2n+1} - \frac{2\tau_1}{\tau_\theta}q - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q}\nabla\theta_t \end{aligned} \tag{5.7}$$

hergeleitet. Die letzte Gleichheit ergab sich dabei durch Einsetzen von (5.6). Wie wir anfangs gesehen haben, liegen $V_{2,\dots,n+1}$ und $V_{n+2,\dots,2n+1}$ in $\mathcal{C}^1([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^n$. Folglich trifft diese Regularität auch auf $\tau_q^2 q + \kappa\tau_\theta^2\nabla\theta$ und $\frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q + \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t$ zu, d. h. es sind

$$\tau_q^2 q + \kappa\tau_\theta^2\nabla\theta \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n \quad \text{und} \quad \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q + \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n.$$

Da q in $\mathcal{C}^0([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^n \cap \mathcal{C}^1([0,\infty),H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^n$ liegt, folgen daraus auch

$$\begin{aligned}&\nabla\theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n)\big)^n\,, \quad \text{also } \theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty),H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\big)\\ &\text{und} \quad \tau_q^2 q + \kappa\tau_\theta^2\nabla\theta \in \mathcal{C}^2\big([0,\infty),H^{s-2}(\mathbb{R}^n)\big)^n\,.\end{aligned}$$

Darüber hinaus ist mit

$$\begin{aligned}q_t(0) &= \frac{2}{\tau_q^2}V_{n+2,\dots,2n+1}(0) - \frac{2\tau_1}{\tau_q\tau_\theta}q(0) - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\nabla\theta_t(0)\\ &= \frac{2}{\tau_q^2}\Big(\frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q_0 + \frac{\tau_q^2}{2}q_1 - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} q_0\Big) - \frac{2\tau_1}{\tau_q\tau_\theta}q_0 + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v\tau_q^2}\nabla\operatorname{div} q_0 = q_1\end{aligned}$$

der verbleibende Anfangswert aus (5.1 c) erfüllt. Schließlich wenden wir uns noch dem Nachweis der Differentialgleichung (5.1 a) zu. Dazu betrachten wir die Ableitung des Terms $\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t$, die nach (5.7) durch

$$\partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) = \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} - \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q_t$$

gegeben ist. Aufgrund der Zeilen $(n+2)$ bis $(2n+1)$ des Systems (5.2 a)

$$\begin{aligned}0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_{n+2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^n\big(A^j\partial_{x_j}V\big)_{n+2,\dots,2n+1} - \sum_{j,k=1}^n\big(B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}V\big)_{n+2,\dots,2n+1} + \big(LV\big)_{n+2,\dots,2n+1}\\ &= \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{2}{\tau_\theta^2}V_{2,\dots,n+1} + \frac{2}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2}V_{2n+2,\dots,3n+1}\end{aligned}$$

können wir $\partial_t V_{n+2,\dots,2n+1}$ durch die anderen Komponenten von V ausdrücken und wiederum deren Darstellung über q, $\nabla\theta$ und q_t, $\nabla\theta_t$ aus (5.7) sowie die Definition von q nutzen:

$$\begin{aligned}\partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} &= -\frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2}q - \frac{2}{\tau_\theta^2}V_{2,\dots,n+1} - \frac{2}{\tau_\theta}V_{n+2,\dots,2n+1}\\ &= -\frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2}q - \frac{2}{\tau_\theta^2}\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta\Big) - \frac{2}{\tau_\theta}\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big)\\ &= -q - \kappa\nabla\theta - \frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}q_t - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t \qquad (\text{da } \tau_1^2 + \tau_q^2 + 2\tau_q\tau_1 = \tau_\theta^2).\end{aligned}$$

Also ist

$$\partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) = -q - \kappa\nabla\theta - \frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}q_t - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t - \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q_t\,.$$

Addieren wir noch $q + \tau_q q_t$, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}q + \tau_q q_t + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) &= q + \tau_q q_t - q - \kappa\nabla\theta - \frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}q_t - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t - \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}q_t\\ &= -\kappa\nabla\theta - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t\,.\end{aligned}$$

In diesem Sinn (vergleiche dazu die Bemerkung 3.3) ist die Differentialgleichung (5.1 a) erfüllt.

(ii) Neben der angegebenen Regularität für q und θ leitet man aus den Differentialgleichungen (5.1 b) und (5.1 a) $\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty),H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ und $\tau_q^2 q_t + \kappa\tau_\theta^2\nabla\theta_t \in \mathcal{C}^1([0,\infty),H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^n$ ab. Folglich liegt V nach Definition in $\mathcal{C}^0([0,\infty),H^s(\mathbb{R}^n))^{3n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty),H^{s-2}(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$. Aus Gründen der Stetigkeit gilt wegen (5.1 b) auch $\nabla\theta_t(0) = -\frac{1}{\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} q_0$, was auf

$$V(0) = \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \frac{\tau_q^2}{2} q(0) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta(0) \\ \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q(0) + \frac{\tau_q^2}{2} q_t(0) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \frac{\tau_q^2}{2} q_0 + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_0 \\ \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q_0 + \frac{\tau_q^2}{2} q_1 - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2\varrho c_v}\nabla \operatorname{div} q_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = V_0$$

führt. Die Funktion V löst die Differentialgleichung (5.2 a), denn da (q,θ) eine Lösung von (5.1) ist, ergeben sich für V die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(A^0\partial_t V)_1 + \sum_{j=1}^n (A^j\partial_{x_j} V)_1 - \sum_{j,k=1}^n (B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V)_1 + (LV)_1 \\
&\quad = \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\varrho c_v \partial_t V_1 + \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1} = \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\big(\varrho c_v\theta_t + \operatorname{div} q\big) = 0\,, \\
&(A^0\partial_t V)_{2,\dots,n+1} + \sum_{j=1}^n (A^j\partial_{x_j} V)_{2,\dots,n+1} - \sum_{j,k=1}^n (B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V)_{2,\dots,n+1} + (LV)_{2,\dots,n+1} \\
&\quad = \frac{2}{\tau_\theta^2}\partial_t V_{2,\dots,n+1} - \frac{2}{\tau_\theta^2} V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3} V_{2n+2,\dots,3n+1} \\
&\quad = \frac{2}{\tau_\theta^2}\partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta\Big) + \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3} q - \frac{2}{\tau_\theta^2}\Big(\frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q + \frac{\tau_q^2}{2} q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) = 0\,, \\
&(A^0\partial_t V)_{n+2,\dots,2n+1} + \sum_{j=1}^n (A^j\partial_{x_j} V)_{n+2,\dots,2n+1} - \sum_{j,k=1}^n (B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V)_{n+2,\dots,2n+1} + (LV)_{n+2,\dots,2n+1} \\
&\quad = \partial_t V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{2}{\tau_\theta^2} V_{2,\dots,n+1} + \frac{2}{\tau_\theta} V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2} V_{2n+2,\dots,3n+1} \\
&\quad = \partial_t\Big(\frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q + \frac{\tau_q^2}{2} q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) + \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2} q + \frac{2}{\tau_\theta^2}\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta\Big) + \frac{2}{\tau_\theta}\Big(\frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q + \frac{\tau_q^2}{2} q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) \\
&\quad = \frac{\tau_1^2 + \tau_q^2 + 2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^2} q + \frac{\tau_q}{\tau_\theta}(\tau_1 + \tau_q) q_t + \kappa\nabla\theta + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) \\
&\quad = q + \tau_q q_t + \kappa\nabla\theta + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t + \partial_t\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) = 0\,,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&(A^0\partial_t V)_{2n+2,\dots,3n+1} + \sum_{j=1}^n (A^j\partial_{x_j} V)_{2n+2,\dots,3n+1} - \sum_{j,k=1}^n (B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V)_{2n+2,\dots,3n+1} + (LV)_{2n+2,\dots,3n+1} \\
&\quad = \frac{\tau_q^2\tau_1^2}{2\tau_\theta^2}\partial_t V_{2n+2,\dots,3n+1} + \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\nabla V_1 - \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1} \\
&\qquad - \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3} V_{2,\dots,n+1} - \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2} V_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3} V_{2n+2,\dots,3n+1} \\
&\quad = \frac{\tau_q^2\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} q_t + \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\nabla\theta - \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} q + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3} q - \frac{2\tau_q\tau_1}{\tau_\theta^3}\Big(\frac{\tau_q^2}{2} q + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta\Big) \\
&\qquad - \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2}\Big(\frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q + \frac{\tau_q^2}{2} q_t + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t\Big) \\
&\quad = -\frac{\kappa\tau_1^2}{2}\Big(\frac{1}{\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} q + \nabla\theta_t\Big) + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2 - \tau_q^3\tau_1 - \tau_1^3\tau_q}{\tau_\theta^3} q = 0\,,
\end{aligned}$$

da der Koeffizient vor q nach Definition von τ_1 und τ_2 gerade Null ergibt. □

Korollar 5.4 (Wohlgestelltheit für DPLW (2,2)). *Es sei $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$ und es seien Anfangsdaten $\theta_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$, $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ und $q_1 \in H^{s-2}(\mathbb{R}^n)^n$ mit $\tau_q^2 q_1 - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v}\nabla \operatorname{div} q_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ gegeben. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (5.1) *eine eindeutige Lösung (q,θ) mit der in Satz 5.3 genannten Regularität.*

Wie wir bereits festgestellt haben, entspricht das System (5.2) für $n \in \{2,3\}$ nicht der Form eines symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systems im Sinne der Definition 2.1, da die Teilmatrix $\frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\omega\omega^\mathsf{T}$ von $B(\omega)$ nicht positiv definit ist. Aus Lemma 4.5 wissen wir jedoch, dass das dyadische Produkt $\omega\omega^\mathsf{T}$ immerhin auf der Menge $\{v \in \mathbb{C}^n \,|\, \omega \times v = 0\}$ positiv definit ist. Hieraus entspringt die Idee, die Helmholtz-Zerlegung $L^2(\mathbb{R}^n)^n = \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)} \oplus_\perp \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ heranzuziehen, die schon im Zusammenhang mit dem Thermoelastizitätsmodell DPLT (2,1) zum Einsatz kam.

Satz 5.5 (Zerlegung des Systems). *Es sei $n \in \{2,3\}$.*

(i) Es sei (q,θ) eine Lösung des Systems (5.1) *mit der Regularität $q \in \mathcal{C}^2([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))^n$ und $\theta \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^n))$. Für $t \in [0,\infty)$ sei $q(t)$ gemäß $L^2(\mathbb{R}^n)^n = \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)} \oplus_\perp \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ zerlegt in $q(t) = q^\mathrm{p}(t) + q^\mathrm{s}(t)$ mit $q^\mathrm{p}(t) \in \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$ und $q^\mathrm{s}(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann löst (q^p,θ) das System*

$$\begin{aligned} q^\mathrm{p} + \tau_q q_t^\mathrm{p} + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}^\mathrm{p} &= -\kappa\nabla\theta - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t - \kappa\frac{\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_{tt} && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,,\\ -\operatorname{div} q^\mathrm{p} &= \varrho c_v \theta_t && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,,\\ q^\mathrm{p}(0,\cdot) = q_0^\mathrm{p}\,,\ q_t^\mathrm{p}(0,\cdot) &= q_1^\mathrm{p}\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0 && \text{in } \mathbb{R}^n\,, \end{aligned}$$

und der Anteil q^s erfüllt

$$q^\mathrm{s} + \tau_q q_t^\mathrm{s} + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}^\mathrm{s} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{5.8 a}$$

$$q^\mathrm{s}(0,\cdot) = q_0^\mathrm{s}\,,\ q_t^\mathrm{s}(0,\cdot) = q_1^\mathrm{s} \qquad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{5.8 b}$$

(ii) Es sei $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^n))^{3n+1} \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))^{3n+1}$ eine Lösung des Systems (5.2). *Für $t \in [0,\infty)$ sei $V(t)$ gemäß $L^2(\mathbb{R}^n)^{3n+1} = (L^2(\mathbb{R}^n) \times \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}^3) \oplus_\perp (\{0\} \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^3)$ zerlegt in $V(t) = V^\mathrm{p}(t) + V^\mathrm{s}(t)$ mit $V^\mathrm{p}(t) = (V_1(t), V^\mathrm{p}_{2,\dots,3n+1}(t))^\mathsf{T} \in L^2(\mathbb{R}^n) \times \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}^3$ und $V^\mathrm{s}(t) = (0, V^\mathrm{s}_{2,\dots,3n+1}(t))^\mathsf{T} \in \{0\} \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^3$. Dann löst V^p das System*

$$A^0\partial_t V^\mathrm{p} + \sum_{j=1}^n A^j \partial_{x_j} V^\mathrm{p} - \sum_{j,k=1}^n B_\mathrm{p}^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V^\mathrm{p} + LV^\mathrm{p} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \tag{5.9 a}$$

$$V^\mathrm{p}(0,\cdot) = V_0^\mathrm{p} \qquad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{5.9 b}$$

wobei B_p^{jk} für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ durch

$$B_\mathrm{p}^{jk} := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \quad \text{für } j = k \quad \text{und} \quad B_\mathrm{p}^{jk} := 0_{3n+1} \quad \text{für } j \neq k$$

definiert ist. Der Anteil V^s erfüllt

$$A^0\partial_t V^\mathrm{s} + LV^\mathrm{s} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n\,, \tag{5.10 a}$$

$$V^\mathrm{s}(0,\cdot) = V_0^\mathrm{s} \qquad \text{in } \mathbb{R}^n\,. \tag{5.10 b}$$

Beweis: (i) Mit der Zerlegung $q = q^{\mathrm{p}} + q^{\mathrm{s}}$ lautet die Differentialgleichung (5.1 a)

$$q^{\mathrm{p}} + \tau_q q_t^{\mathrm{p}} + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}^{\mathrm{p}} + q^{\mathrm{s}} + \tau_q q_t^{\mathrm{s}} + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}^{\mathrm{s}} = -\kappa \nabla\theta - \kappa\tau_\theta \nabla\theta_t - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_{tt}\,.$$

Da $\theta \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^n))$ vorausgesetzt ist, liegen sowohl $-\kappa\nabla\theta(t) - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t(t) - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_{tt}(t)$ als auch $q^{\mathrm{p}}(t) + \tau_q q_t^{\mathrm{p}}(t) + \frac{1}{2}\tau_q^2 q_{tt}^{\mathrm{p}}(t)$ in $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}$, während $q^{\mathrm{s}}(t) + \tau_q q_t^{\mathrm{s}}(t) + \frac{1}{2}\tau_q^2 q_{tt}^{\mathrm{s}}(t)$ aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist. Die beiden Räume haben nur den Nullraum gemein, weshalb

$$q^{\mathrm{p}} + \tau_q q_t^{\mathrm{p}} + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}^{\mathrm{p}} = -\kappa\nabla\theta - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t - \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_{tt} \quad \text{und} \quad q^{\mathrm{s}} + \tau_q q_t^{\mathrm{s}} + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}^{\mathrm{s}} = 0$$

folgt. Die Differentialgleichung (5.1 b) wirkt, nachdem $\operatorname{div} q^{\mathrm{s}} = 0$ ist, nur auf den rotationsfreien Anteil:

$$\varrho c_v \theta_t = -\operatorname{div} q = -\operatorname{div} q^{\mathrm{p}} - \operatorname{div} q^{\mathrm{s}} = -\operatorname{div} q^{\mathrm{p}}\,.$$

(ii) Mit der angegebenen Zerlegung $V = V^{\mathrm{p}} + V^{\mathrm{s}}$ ergibt sich, da $\operatorname{div} V^{\mathrm{s}}_{2n+2,\dots,3n+1} = 0$ ist,

$$\sum_{j=1}^n A^j \partial_{x_j} V(t) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1}(t) \\ 0_{2n\times 1} \\ \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\nabla V_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\operatorname{div} V^{\mathrm{p}}_{2n+2,\dots,3n+1}(t) \\ 0_{2n\times 1} \\ \frac{\kappa\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\nabla V_1(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n A^j \partial_{x_j} V^{\mathrm{p}}(t)\,.$$

Der Ausdruck liegt in $L^2(\mathbb{R}^n) \times \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}^3$, denn aufgrund der vorausgesetzten Regularität von V sind $V_1(t) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1}(t) \in H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit der Darstellung aus Lemma 5.2 und nachdem $\Delta = \nabla\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}$ und $\operatorname{rot} V^{\mathrm{p}}_{2n+2,\dots,3n+1} = 0$ gelten, folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^n B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V(t) &= \begin{pmatrix} 0_{(2n+1)\times 1} \\ \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{(2n+1)\times 1} \\ \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\nabla\operatorname{div} V^{\mathrm{p}}_{2n+2,\dots,3n+1}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_{(2n+1)\times 1} \\ \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\Delta V^{\mathrm{p}}_{2n+2,\dots,3n+1}(t) \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^n B_{\mathrm{p}}^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V^{\mathrm{p}}(t)\,,\end{aligned}$$

wobei B_{p}^{jk} wie angegeben definiert ist. Da $\operatorname{div} V_{2n+2,\dots,3n+1}(t)$ aus $H^1(\mathbb{R}^n)$ ist, liegt auch dieser Ausdruck in $L^2(\mathbb{R}^n) \times \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}^3$. Insgesamt ergibt sich also für die Lösung V von (5.2)

$$\begin{aligned} 0 &= A^0\partial_t V(t) + \sum_{j=1}^n A^j\partial_{x_j} V(t) - \sum_{j,k=1}^n B^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V(t) + LV(t) \\ &= \underbrace{A^0\partial_t V^{\mathrm{p}}(t) + \sum_{j=1}^n A^j\partial_{x_j} V^{\mathrm{p}}(t) - \sum_{j,k=1}^n B_{\mathrm{p}}^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k} V^{\mathrm{p}}(t) + LV^{\mathrm{p}}(t)}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)\times\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}^3} + \underbrace{A^0\partial_t V^{\mathrm{s}}(t) + LV^{\mathrm{s}}(t)}_{\in \{0\}\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^3}\,. \end{aligned}$$

Dass die Komponenten $(LV^{\mathrm{s}})_1$ und $(A^0\partial_t V^{\mathrm{s}})_1$ Null sind, beruht auf der Gestalt von L und darauf, dass gemäß unserer gewählten Zerlegung $V_1^{\mathrm{s}} = 0$ ist. Aufgund der Orthogonalität der Räume $L^2(\mathbb{R}^n) \times \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)}^3$ und $\{0\} \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^3$ müssen die beiden umklammerten Ausdrücke für sich genommen bereits Null ergeben, d. h. V^{p} löst das System (5.9) und V^{s} das System (5.10). □

Das System (5.9) für $V^{\mathrm{p}} = (V_1, V^{\mathrm{p}}_{2,\dots,3n+1})^{\mathsf{T}}$ stellt nun ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System im Sinne der Definition 2.1 dar. Der verbleibende Anteil $V^{\mathrm{s}} = (0, V^{\mathrm{s}}_{2,\dots,3n+1})^{\mathsf{T}}$ erfüllt mit (5.10) eine gewöhnliche Differentialgleichung. Vor diesem Hintergrund ist die Bezeichnung

symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch im Fall $n \in \{2,3\}$ auch für das ursprüngliche System (5.2) vertretbar. Im Fall $n = 1$ ist das System ohnehin symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch im Sinne der Definition 2.1. Der Begriff parabolisch, wie Tzou ihn in [Tzo97, S. 284] im Zusammenhang mit dem System DPLW (2,2) verwendet, erscheint uns aus mathematischer Sicht hingegen nicht angebracht.

5.1.2 Zeitliche Asymptotik

Wir wollen für $n = 1$ das System (5.2) und für $n \in \{2,3\}$ das System (5.9) betrachten. Nachdem die Matrix L nicht symmetrisch ist, lassen sich die Resultate aus [SK85; UKS84] zur Bestimmung der zeitlichen Asymptotik nicht anwenden. Jedoch greift die von [UDK12] ausgehende Methode, die wir in Abschnitt 2.6 auf den Fall eines symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systems übertragen haben. Neben den aus dem symmetrisch-hyperbolischen Fall bekannten Bedingungen (A), (K), (S) und (S_1) oder (S_2) sind die Bedingungen (B) und (BKS) zu zeigen.

Bedingung (A). Die Matrizen A^0, $A^1, \dots, A^n$ (siehe Definition 5.1) sind symmetrisch und da $\tau_1 = \tau_\theta - \tau_q > 0$ vorausgesetzt ist, sind sowohl A^0 als auch

$$[L]_{\mathrm{sy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & \frac{2}{\tau_\theta}\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

und damit L positiv semidefinit. Außerdem stellt man fest, dass die Zeilen zwei bis $3n+1$ von L linear unabhängig sind und demnach $\ker(L) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}\} \neq \{0\}$ gilt. Damit ist die Bedingung (A) von Seite 32 erfüllt. □

Bedingung (K). Wir definieren die Abbildung $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^{(3n+1)\times(3n+1)})$ durch

$$K:\ \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{(3n+1)\times(3n+1)}, \quad \omega \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & \frac{2\tau_\theta}{\tau_q\tau_1}\omega^\mathsf{T} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{1}{\kappa\varrho c_v}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $K(-\omega) = -K(\omega)$ und man berechnet

$$K(\omega)A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\omega^\mathsf{T} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad K(\omega)A(\omega) = \begin{pmatrix} 2\kappa & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & -\frac{\tau_q\tau_1}{\varrho c_v\tau_\theta}\omega\omega^\mathsf{T} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $(K(\omega)A^0)^\mathsf{T} = -K(\omega)A^0$ und die Matrix $K(\omega)A(\omega)$ ist symmetrisch. Für ein Element $v = (v_1, 0, \dots, 0)$ aus $\ker(L) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}\}$ ergibt sich

$$\langle [K(\omega)A(\omega)]_{\mathrm{sy}} v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} = \langle K(\omega)A(\omega)v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} = 2\kappa|v_1|^2\,.$$

Insgesamt weist die Abbildung K damit alle der unter der Bedingung (K) auf Seite 32 geforderten Eigenschaften auf. □

Der Nachweis der Bedingung (S) gestaltet sich aufwendiger als es bei den bisherigen Systemen der Fall war.

Bedingung (S). Wir zeigen, dass ein $s \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & s\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_\theta^2}{2} s\,\mathrm{I}_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

alle unter der Bedingung (S) auf Seite 32 genannten Eigenschaften besitzt. Zunächst ist festzustellen, dass die Symmetrie der Matrix $SA^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & s\,\mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & s\,\mathrm{I}_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ vorliegt. Mit $SL = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{2}{\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n & \frac{2}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & -s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{2}{\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & (\frac{2}{\tau_\theta} - s)\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & \frac{\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen, wann $\ker([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}) = \ker(L)$, also $\ker([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}\}$ gilt. Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \ker([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{2} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_1^2}{4\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & (\frac{2}{\tau_\theta} - \frac{3}{2}s)\,\mathrm{I}_n & (\frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} - \frac{\tau_1^2}{4\tau_\theta}) s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & (\frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} - \frac{\tau_1^2}{4\tau_\theta}) s\,\mathrm{I}_n & (\frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3} - \frac{\tau_1^4}{8\tau_\theta^2} s)\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & \frac{1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{2} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_1^2}{4\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & (8 - 6\tau_\theta s)\,\mathrm{I}_n & (2\tau_q - \tau_1)\tau_1 s\,\mathrm{I}_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 2(2\tau_q - \tau_1)\tau_1\tau_\theta^2 s\,\mathrm{I}_n & (8\tau_q\tau_2 - \tau_1^3\tau_\theta s)\tau_1\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

So sehen wir, dass $\ker([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}) = \operatorname{span}\{e^1_{3n+1}\}$ genau dann gilt, wenn $s \neq 0$ und

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det \begin{pmatrix} (8 - 6\tau_\theta s)\,\mathrm{I}_n & (2\tau_q - \tau_1)\tau_1 s\,\mathrm{I}_n \\ 2(2\tau_q - \tau_1)\tau_1\tau_\theta^2 s\,\mathrm{I}_n & (8\tau_q\tau_2 - \tau_1^3\tau_\theta s)\tau_1\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \\ &= \det\Big((8 - 6\tau_\theta s)(8\tau_q\tau_2 - \tau_1^3\tau_\theta s)\tau_1\,\mathrm{I}_n - 2(2\tau_q - \tau_1)^2\tau_1^2\tau_\theta^2 s^2\,\mathrm{I}_n\Big) \\ &= \big(p(s)\big)^n \quad \text{mit} \quad p(s) := (6\tau_1^2 - 2(2\tau_q - \tau_1)^2)\tau_1^2\tau_\theta^2 s^2 - 8(\tau_1^3 + 6\tau_q\tau_2)\tau_\theta\tau_1 s + 64\tau_q\tau_1\tau_2 \end{aligned}$$

ist. Wir brauchen die Nullstellen des Polynoms p nicht zu berechnen. Es genügt zu wissen, dass p maximal zwei verschiedene Nullstellen hat und diese reell sein können. Mit ihnen darf s nicht zusammenfallen. Die erste Einschränkung an s lautet also

$$s \neq 0 \quad \text{und} \quad p(s) \neq 0\,.$$

Des Weiteren zeigen wir, dass die Matrix $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}$ für hinreichend kleine $s \in \mathbb{R}^+$ positiv semidefinit ist. Für $v \in \mathbb{C}^{3n+1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}})v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{2}{\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n & \frac{1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n \\ \frac{1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & (\frac{2}{\tau_\theta} - s)\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n \\ \frac{\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} s\,\mathrm{I}_n & \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix} v_{2,\dots,3n+1}\,,\ v_{2,\dots,3n+1} \right\rangle_{\mathbb{C}^{3n}} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{2}{\tau_\theta^2} s v_{2,\dots,n+1} + \frac{1}{\tau_\theta} s v_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} s v_{2n+2,\dots,3n+1} \\ \frac{1}{\tau_\theta} s v_{2,\dots,n+1} + (\frac{2}{\tau_\theta} - s) v_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} s v_{2n+2,\dots,3n+1} \\ \frac{\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} s v_{2,\dots,n+1} + \frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} s v_{n+2,\dots,2n+1} + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3} v_{2n+2,\dots,3n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{2,\dots,n+1} \\ v_{n+2,\dots,2n+1} \\ v_{2n+2,\dots,3n+1} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^{3n}} \\
&= \frac{2}{\tau_\theta^2} s |v_{2,\dots,n+1}|^2 + \Big(\frac{2}{\tau_\theta} - s\Big)|v_{n+2,\dots,2n+1}|^2 + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3}|v_{2n+2,\dots,3n+1}|^2 \\
&\quad + \frac{2}{\tau_\theta} s\,\mathrm{Re}\langle v_{n+2,\dots,2n+1}, v_{2,\dots,n+1}\rangle_{\mathbb{C}^n} + \frac{\tau_1^2}{\tau_\theta^2} s\,\mathrm{Re}\langle v_{2n+2,\dots,3n+1}, v_{2,\dots,n+1}\rangle_{\mathbb{C}^n} \\
&\quad + \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} s\,\mathrm{Re}\langle v_{2n+2,\dots,3n+1}, v_{n+2,\dots,2n+1}\rangle_{\mathbb{C}^n}\,.
\end{aligned}$$

Mithilfe der Ungleichungen von Cauchy-Schwarz A.13 und Young A.12 lässt sich der Ausdruck für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\langle([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}})v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} \\
&\quad \geq \frac{2}{\tau_\theta^2} s |v_{2,\dots,n+1}|^2 + \Big(\frac{2}{\tau_\theta} - s\Big)|v_{n+2,\dots,2n+1}|^2 + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{\tau_\theta^3}|v_{2n+2,\dots,3n+1}|^2 \\
&\qquad - \frac{1}{\tau_\theta} s\Big(\varepsilon|v_{2,\dots,n+1}|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|v_{n+2,\dots,2n+1}|^2\Big) - \frac{\tau_1^2}{2\tau_\theta^2} s\Big(\varepsilon|v_{2,\dots,n+1}|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|v_{2n+2,\dots,3n+1}|^2\Big) \\
&\qquad - \frac{\tau_q\tau_1}{2\tau_\theta} s\Big(|v_{n+2,\dots,2n+1}|^2 + |v_{2n+2,\dots,3n+1}|^2\Big) \\
&\quad = \frac{1}{2\tau_\theta^2}(4 - \varepsilon(2\tau_\theta + \tau_1^2)) s |v_{2,\dots,n+1}|^2 + \frac{1}{\tau_\theta}\Big(2 - \frac{2\tau_\theta\varepsilon + 2 + \tau_q\tau_1\varepsilon}{2\varepsilon} s\Big)|v_{n+2,\dots,2n+1}|^2 \\
&\qquad + \frac{\tau_1}{\tau_\theta^2}\Big(\frac{\tau_q\tau_2}{\tau_\theta} - \frac{\tau_1 + \tau_q\tau_\theta\varepsilon}{2\varepsilon} s\Big)|v_{2n+2,\dots,3n+1}|^2\,.
\end{aligned}$$

Nun wählen wir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\varepsilon < \frac{2}{2\tau_\theta + \tau_1^2}$ ist, und anschließend $s \in \mathbb{R}^+$ derart, dass zum einen die zuvor gefundene Einschränkung $p(s) \neq 0$ erfüllt ist und zum anderen

$$s < \min\left\{\frac{2\varepsilon}{2\tau_\theta\varepsilon + 2 + \tau_q\tau_1\varepsilon}\,,\ \frac{\tau_q\tau_2\varepsilon}{\tau_\theta(\tau_1 + \tau_q\tau_\theta\varepsilon)}\right\}$$

gilt. Dann ist $[SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}}$ durch

$$\langle([SL]_{\mathrm{sy}} + [L]_{\mathrm{sy}})v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} \geq \frac{1}{\tau_\theta^2} s |v_{2,\dots,n+1}|^2 + \frac{1}{\tau_\theta}|v_{n+2,\dots,2n+1}|^2 + \frac{\tau_q\tau_1\tau_2}{2\tau_\theta^3}|v_{2n+2,\dots,3n+1}|^2$$

positive semidefinit. Insgesamt weist die Matrix S nun alle Eigenschaften auf, die in der Bedingung (S) gefordert werden. □

Bedingung ($\mathbf{S_2}$). Nachdem die Matrix S aus der Bedingung (S) in der ersten und den letzten n Spalten nur Nullen enthält, gilt $SA(\omega) = 0_{3n+1}$, womit die Bedingung (S_2) von Seite 33 erfüllt ist. □

Wir kommen nun zur Überprüfung der im Fall eines symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systems zusätzlich nötigen Bedingungen (B) und (BKS). Für $j,k \in \{1,\dots,n\}$ seien B_{p}^{jk} die Matrizen, wie sie für $n \in \{2,3\}$ in Satz 5.5 definiert wurden. Diese Definition übernehme man auch für den Fall $n=1$ bzw. setze man hier $B_{\mathrm{p}}^{jk} := B^{jk}$, wobei B^{jk} die Matrix aus der Definition 5.1 bezeichnet.

Bedingung (B). Es gilt $B_{\mathrm{p}}^{jk} = B_{\mathrm{p}}^{kj}$ für $j,k \in \{1,\dots,n\}$. Die Matrix

$$B_{\mathrm{p}}(\omega) = \sum_{j,k=1}^{n} B_{\mathrm{p}}^{jk}\omega_j\omega_k = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & 0 & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & \frac{\kappa\tau_1^2}{2\varrho c_v}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und positiv semidefinit mit $\{0\} \neq \ker(B_{\mathrm{p}}(\omega)) = \operatorname{span}\{e_{3n+1}^1,\dots,e_{3n+1}^{2n+1}\} \neq \mathbb{C}^{3n+1}$ für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Damit ist die Bedingung (B) von Seite 33 erfüllt. □

Bedingung (BKS). Der antisymmetrische Anteil der Matrix $K(\omega)B_{\mathrm{p}}(\omega)$, wobei K die Abbildung aus der Bedingung (K) bezeichnet, lautet

$$[K(\omega)B_{\mathrm{p}}(\omega)]_{\mathrm{asy}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & \frac{\kappa\tau_\theta\tau_1}{2\varrho c_v\tau_q}\omega^{\mathsf{T}} \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_{n\times 1} & 0_n & 0_n & 0_n \\ -\frac{\kappa\tau_\theta\tau_1}{2\varrho c_v\tau_q}\omega & 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Da $v \in \ker(B_{\mathrm{p}}) := \operatorname{span}\{e_{3n+1}^1,\dots,e_{3n+1}^{2n+1}\}$ stets die Form $v = (v_1,\dots,v_{2n+1},0,\dots,0)$ besitzt, erhält man

$$\langle -i[K(\omega)B_{\mathrm{p}}(\omega)]_{\mathrm{asy}}v, v\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} = -i\langle \begin{pmatrix} 0_{(2n+1)\times 1} \\ -\frac{\kappa\tau_\theta\tau_1}{2\varrho c_v\tau_q}\omega v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (v_1,\dots,v_{2n+1})^{\mathsf{T}} \\ 0_{n\times 1} \end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}^{3n+1}} = 0\,,$$

womit die Eigenschaft $-i[K(\omega)B_{\mathrm{p}}(\omega)]_{\mathrm{asy}} \geq 0$ auf $\ker(B_{\mathrm{p}})$ erfüllt ist. Mit der unter der Bedingung (S) konstruierten Matrix gilt $SB_{\mathrm{p}}(\omega) = 0$, sodass auch $[SB_{\mathrm{p}}(\omega)]_{\mathrm{sy}} \geq 0$ auf $\mathbb{C}^{3n+1}$ für alle $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gewährleistet ist. Damit ist die Bedingung (BKS) von Seite 34 erfüllt. □

Wir haben also die Bedingungen (A), (K), (S), (S_2), (B) und (BKS) aus Abschnitt 2.6.2 für das symmetrisch-hyperbolisch-parabolische System (5.2) für $n=1$ und (5.9) für $n \in \{2,3\}$ nachgewiesen. Folglich gelten die Aussagen aus den Sätzen 2.11 (Abschätzung im Fourierraum), 2.12 (Dissipativität), 2.13 (L^p-L^2-Abschätzung), 2.15 (L^1-L^∞-Abschätzung) und 2.16 (L^p-L^q-Abschätzung). Im Fall $n \in \{2,3\}$ liefert dies Informationen über den Anteil (q^{p},θ) der Lösung (q,θ) des Systems DPLW (2,2). Der verbleibende Anteil q^{s} genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung (5.8). Als ein System erster Ordnung lautet die Gleichung

$$\begin{pmatrix} q_t^{\mathrm{s}} \\ q_{tt}^{\mathrm{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{\tau_q^2} & -\frac{2}{\tau_q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^{\mathrm{s}} \\ q_t^{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} q^{\mathrm{s}}(0) \\ q_t^{\mathrm{s}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^{\mathrm{s}} \\ q_1^{\mathrm{s}} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der auftretenden Matrix sind $-\frac{1}{\tau_q} \pm \frac{1}{\tau_q}i$. Somit gilt (vergleiche Lemma 2.6 (iv)) für $s \in \mathbb{N}_0$ mit einer von $q_0^{\mathrm{s}}, q_1^{\mathrm{s}} \in H^s(\mathbb{R}^n)^n$ unabhängigen Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$:

$$\forall\, t \in [0,\infty): \quad \|(q^{\mathrm{s}}(t), q_t^{\mathrm{s}}(t))\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^{2n}} \leq Ce^{-\frac{1}{\tau_q}t}\|(q_0^{\mathrm{s}}, q_1^{\mathrm{s}})\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^{2n}}\,.$$

Insgesamt erhalten wir damit nun die folgende L^p-L^q-Abschätzung für die Lösung des Dual-Phase-Lag-Systems DPLW (2,2).

Satz 5.6 (L^p-L^q-Abschätzung für DPLW (2,2)). *Es gelte $\tau_\theta > \tau_q$ und es sei $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 4$. Ferner seien $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $N := (n+1)(1-\frac{2}{q})$ für $q \in \{2,\infty\}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > (n+1)(1-\frac{2}{q})$, falls $q \in (2,\infty)$ ist. Es sei (q,θ) eine Lösung von (5.1) mit der Regularität aus Satz 5.3. Für $t \in [0,\infty)$ setzen wir*

$$V(t) := \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \frac{\tau_q^2}{2} q(t) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta(t) \\ \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q(t) + \frac{\tau_q^2}{2} q_t(t) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V^{\mathrm{p}}(t) := \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \frac{\tau_q^2}{2} q^{\mathrm{p}}(t) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta(t) \\ \frac{\tau_q\tau_1}{\tau_\theta} q^{\mathrm{p}}(t) + \frac{\tau_q^2}{2} q_t^{\mathrm{p}}(t) + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_t(t) \\ q^{\mathrm{p}}(t) \end{pmatrix},$$

wobei man im Fall $n = 1$ die Definition $q^{\mathrm{p}} := q$ nehme. Liegt nun $V_0^{\mathrm{p}} := V^{\mathrm{p}}(0)$ in $W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+1}$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq s$ und alle $t \in [0,\infty)$

$$\left\|\partial_x^k V^{\mathrm{p}}(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)^{3n+1}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \left\|V_0^{\mathrm{p}}\right\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+1}}$$

mit einer von V_0^{p} und k unabhängigen Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$. Damit weist dieser Lösungsanteil ein Abklingverhalten vom Standard-Typ auf. Im Fall $n \in \{2,3\}$ gilt zudem

$$\left\|(q^{\mathrm{s}}(t), q_t^{\mathrm{s}}(t))\right\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^n)^{2n}} \leq Ce^{-\frac{1}{\tau_q}t} \left\|(q_0^{\mathrm{s}}, q_1^{\mathrm{s}})\right\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^n)^{2n}}$$

für alle $t \in [0,\infty)$ mit einer von $q^{\mathrm{s}}(0)$ und $q_t^{\mathrm{s}}(0)$ unabhängigen Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$.

Beweis: Nach den Sätzen 5.3 und 5.5 (ii) löst V das System (5.2) und dazu V^{p} das symmetrisch-hyperbolisch-parabolische Anfangswertproblem (5.9) für $n \in \{2,3\}$ bzw. (5.2) für $n = 1$ zum Anfangswert $V_0^{\mathrm{p}} \in W^{s+N,p}(\mathbb{R}^n)^{3n+1}$. Aufgrund der nachgewiesenen Bedingungen an die Matrizen trifft für V^{p} die L^p-L^q-Abschätzung aus Satz 2.16 (ii) zu. Da $s \geq 4$ ist, kann man aus der Differentialgleichung (5.1 b) $\theta \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-3}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{C}^2([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^n))$ und damit aus (5.1 a) $q \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-4}(\mathbb{R}^n))^n \subset \mathcal{C}^2([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))^n$ ableiten. Folglich gilt auch die Zerlegung gemäß Satz 5.5 (i). Die Abschätzung für den Anteil q^{s} haben wir im Vorfeld des Satzes begründet. Dabei richtet sich die Regularität nach dem Wert $q_t^{\mathrm{s}}(0)$, der nach Voraussetzung in $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)^n$ liegt. □

Im Vergleich zu den bisher betrachteten symmetrisch-hyperbolischen Modellen stellen wir zwei wesentliche Unterschiede fest.

Augenscheinlich ist, dass das Phänomen des Regularity-Loss für das symmetrisch-hyperbolisch-parabolische System DPLW (2,2) nicht auftritt. Für $\tau_\theta > \tau_q$ liegt ein Abklingverhalten vom Standard-Typ vor. Der Grenzfall der Parameterbedingung $\tau_\theta = \tau_q$ führt dazu, dass das System in ein rein parabolisches System umschlägt, nämlich in eine Wärmeleitungsgleichung für $\theta + \tau_q\theta_t + \frac{1}{2}\tau_q^2\theta_{tt}$ (vergleiche Seite 104). Damit bleibt ein Abklingverhalten vom Standard-Typ gewahrt (siehe etwa die L^p-L^q-Abschätzung für die Wärmeleitungsgleichung in [Rac15]). Hingegen verursachten entsprechende Grenzfälle bei den symmetrisch-hyperbolischen Systemen DPLW (2,1), DPLT (2,1) und TPLW (2,1,1) ein Abklingverhalten vom Regularity-Loss-Typ.

Ein weiterer Unterschied findet sich im Zusammenhang mit dem Nachweis der Bedingung (S). Bei den symmetrisch-hyperbolischen Systemen galt unter der Parameterbedingung, die zu einem Abklingverhalten vom Standard-Typ führte, stets $\ker(L) = \ker([L]_{\mathrm{sy}})$, wodurch die Matrix S aus der Bedingung (S) als die Nullmatrix gewählt werden konnte. Dass die Nullmatrix nicht ausreichte, kam jeweils nur in den Grenzfällen der Parameterbedingungen vor, die mit dem Regularity-Loss-Typ korrespondierten. Für das symmetrisch-hyperbolisch-parabolische System DPLW (2,2) aber trat die Situation $\ker(L) \neq \ker([L]_{\mathrm{sy}})$ ein, obwohl die Beziehung $\tau_\theta > \tau_q$ zu einem Abklingverhalten vom Standard-Typ führte.

5.2 Three-Phase-Lag-Wärmeleitung TPLW (1,1,1) in einer Raumdimension

Bei allen bislang betrachteten Modellen haben wir dieselben Einschränkungen an die Parameter τ_θ, τ_q und gegebenenfalls τ_ν^* erhalten, wie sie schon aus den Untersuchungen zur exponentiellen Stabilität bekannt waren. Dies veranlasst uns zur Hinterfragung eines Resultats aus [DS13] zum Three-Phase-Lag-Modell der Wärmeleitung mit der Entwicklungsordnung eins für jeweils q, $\nabla\theta$ und $\nabla\nu$ in einer Raumdimension.

$$\underline{\text{TPLW (1,1,1)}}$$

$$q + \tau_q q_t = -\tau_\nu^* \theta_x - \kappa\tau_\theta \theta_{tx} - \kappa^* \nu_x \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}\,, \tag{5.11 a}$$

$$-q_x = \varrho c_v \theta_t \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}\,, \tag{5.11 b}$$

$$\nu_t = \theta \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}\,, \tag{5.11 c}$$

$$q(0,\cdot) = q_0\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0\,,\ \nu(0,\cdot) = \nu_0 \quad \text{in } \mathbb{R}\,. \tag{5.11 d}$$

Ausgehend von der in der Form (1.11) dargestellten Gleichung bewiesen L. Djouamai und B. Said-Houari in [DS13] für die Lösung unter der Voraussetzung $\tau_\nu^* > \frac{\kappa\tau_\theta}{\tau_q} + \kappa^*\tau_q$ eine L^1-L^2-Abschätzung. Aus [QR08; BQR14] wissen wir, dass in beschränkten Gebieten die exponentielle Stabilität für $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ vorliegt. Das Ergebnis aus [DS13] scheint daher hinsichtlich der Forderung an die Parameter den möglichen Spielraum nicht auszuschöpfen. Im Folgenden wird es uns in der Tat gelingen, eine L^p-L^q-Abschätzung vom Standard-Typ für $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ nachzuweisen.

5.2.1 Darstellung als symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System

Zunächst stellen wir fest, dass das System TPLW (1,1,1) in die Kategorie eines symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systems fällt.

Definition 5.7 (Matrizen zu TPLW (1,1,1)). *Für das System TPLW (1,1,1) definieren wir die Matrizen*

$$A^0 := \begin{pmatrix} \varrho c_v \tau_\nu^* & 0 & 0 \\ 0 & \varrho c_v \tau_\nu^* & 0 \\ 0 & 0 & \tau_q \end{pmatrix}, \quad A^1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_\nu^* \\ 0 & \tau_\nu^* & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{11} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v} \end{pmatrix}$$

$$\textit{und} \quad L := \begin{pmatrix} \varrho c_v \kappa^* & -\varrho c_v \kappa^* & 0 \\ \varrho c_v \kappa^* & -\varrho c_v \kappa^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Bezeichnungen handelt es sich bei

$$A^0\partial_t V + A^1\partial_x V - B^{11}\partial_{xx} V + LV = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}\,, \tag{5.12 a}$$

$$V(0,\cdot) = V_0 \quad \text{in } \mathbb{R}\,, \tag{5.12 b}$$

um ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches Anfangswertproblem im Sinne der Definition 2.1. Etwas fragwürdig erscheint uns daraufhin eine Stelle in [QR08, S. 25], in der im Zusammenhang mit dem System TPLW (1,1,1) von einem parabolischen Typ gesprochen wird.

Das Anfangswertproblem (5.12) besitzt nach Satz 2.2 für $s \in \mathbb{N}_0$ und $V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3$ eine eindeutige Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))^3$ und ist zum ursprünglichen System (5.11) äquivalent.

Satz 5.8 (Äquivalenz der Systeme). *Es seien $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$ und Anfangswerte $q_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R})$ und $\nu_0 \in H^s(\mathbb{R})$ für* (5.11) *und dazu $V_0 := (\frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\nu_0, \theta_0 + \frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\nu_0, q_0)^\mathsf{T}$ für* (5.12) *gegeben.*

(i) Ist $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))^3$ die Lösung von (5.12) *zum Anfangswert V_0, so wird durch*

$$\nu(t) := \frac{\tau_\nu^*}{\kappa^*} V_1(t)\,, \quad \theta(t) := V_2(t) - V_1(t) \quad \textit{und} \quad q(t) := V_3(t) \quad \textit{für } t \in [0,\infty)$$

eine Lösung (q, θ, ν) von (5.11) *beschrieben und es gilt*

$$q \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R})\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R})\big)\,, \quad \theta \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R})\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R})\big)\,,$$
$$\nu \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^s(\mathbb{R})\big) \cap \mathcal{C}^2\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R})\big) \quad \textit{und} \quad \tau_q q + \kappa\tau_\theta \theta_x \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R})\big)\,.$$

(ii) Es sei (q, θ, ν) eine Lösung von (5.11) *mit $q \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))$, $\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))$ und $\nu \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))$. Wir setzen $V(t) := (\frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\nu(t), \theta(t) + \frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\nu(t), q(t))^\mathsf{T}$ für $t \in [0,\infty)$. Dann liegt V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))^3 \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}))^3$ und löst das Anfangswertproblem* (5.12) *zum Anfangswert V_0.*

Beweis:

(i) Wie man anhand der Differentialgleichung (5.12 a) und der Gestalt der Matrizen A^1 und B^{11} sieht, liegen V_1 in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))$, V_2 in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ und V_3 in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}))$. Daher besitzen q und θ die angegebene Regularität und ν liegt in $\mathcal{C}^1([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))$. Nach Definition erfüllen q, θ und ν die Anfangsbedingungen (5.11 d). Die einzelnen Gleichungen aus (5.12 a) bedeuten

$$\begin{aligned} 0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_1 + \big(A^1\partial_x V\big)_1 - \big(B^{11}\partial_{xx} V\big)_1 + \big(LV\big)_1 = \varrho c_v \tau_\nu^* \partial_t V_1 + \varrho c_v \kappa^* V_1 - \varrho c_v \kappa^* V_2 \\ &= \varrho c_v \kappa^* \nu_t - \varrho c_v \kappa^* \theta\,, \end{aligned}$$

d. h. es gilt $\nu_t = \theta$ und damit insbesondere auch $\nu \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}))$,

$$\begin{aligned} 0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_2 + \big(A^1\partial_x V\big)_2 - \big(B^{11}\partial_{xx} V\big)_2 + \big(LV\big)_2 = \varrho c_v \tau_\nu^* \partial_t V_2 + \tau_\nu^* \partial_x V_3 + \varrho c_v \kappa^* V_1 - \varrho c_v \kappa^* V_2 \\ &= \varrho c_v \tau_\nu^* \theta_t + \varrho c_v \kappa^* \nu_t + \tau_\nu^* q_x - \varrho c_v \kappa^* \theta = \varrho c_v \tau_\nu^* \theta_t + \tau_\nu^* q_x\,, \end{aligned}$$

d. h. es gilt $-q_x = \varrho c_v \theta_t$, und schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= \big(A^0\partial_t V\big)_3 + \big(A^1\partial_x V\big)_3 - \big(B^{11}\partial_{xx} V\big)_3 + \big(LV\big)_3 = \tau_q \partial_t V_3 + \tau_\nu^* \partial_x V_2 - \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v}\partial_{xx} V_3 + V_3 \\ &= \tau_q q_t + \tau_\nu^* \theta_x + \kappa^* \nu_x - \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v} q_{xx} + q = q + \tau_q q_t + \tau_\nu^* \theta_x + \kappa\tau_\theta \theta_{tx} + \kappa^* \nu_x\,, \end{aligned}$$

d. h. es ist $\tau_q q + \kappa\tau_\theta \theta_x \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ und insgesamt löst (q, θ, ν) das System (5.11).

(ii) Aus (5.11) leitet man $\theta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ und $q \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}))$ ab. Damit liegt V in $\mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))^3 \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}))^3$. V genügt der Anfangsbedingung $V(0) = V_0$ und erfüllt aufgrund derselben Zusammenhänge wie in (i) die Differentialgleichung (5.12 a). □

Korollar 5.9 (Wohlgestelltheit für TPLW (1,1,1)). *Zu $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$ und vorgegebenen Anfangsdaten $q_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $\theta_0 \in H^s(\mathbb{R})$ und $\nu_0 \in H^s(\mathbb{R})$ besitzt das Problem* (4.9) *eine eindeutige Lösung (q, θ, ν) mit der in Satz 5.8 genannten Regularität.*

Das System (5.12) stellt zwar ein symmetrisch-hyperbolisch-parabolisches System dar, jedoch ist die Matrix L indefinit. Nachdem die Methode aus Abschnitt 2.6 an dieser Stelle eine positiv semidefinite Matrix erforderte, lässt sich die Methode nicht anwenden. Wohl aber können wir wie in Abschnitt 3.2 die Asymptotik der Eigenwerte untersuchen.

5.2.2 Asymptotik der Eigenwerte

Die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 \in \mathcal{C}^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}))^3$ von (5.12) zu einem Anfangswert $V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3$ besitzt die Darstellung

$$\mathcal{S}(t)V_0 = \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}} e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0 \quad \text{für } t \in [0,\infty)$$

mit der Matrix

$$M(\xi) := -(A^0)^{-\frac{1}{2}}(i\xi A^1 + \xi^2 B^{11} + L)(A^0)^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*} & \frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*} & 0 \\ -\frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*} & \frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*} & -i\xi\sqrt{\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q}} \\ 0 & -i\xi\sqrt{\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q}} & -\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 - \frac{1}{\tau_q} \end{pmatrix} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Die Eigenwerte von $M(\xi)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_M(\xi,\cdot): \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \ \ \lambda \mapsto \det(\lambda\,\mathrm{I}_3 - M(\xi)) = \lambda^3 + \left(\frac{1}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2\right)\lambda^2 + \frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2\lambda + \frac{\kappa^*}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2\,. \quad (5.13)$$

Wie wir zunächst feststellen, weisen die Eigenwerte für alle $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ einen negativen Realteil auf. Anschließend werden wir ihr Verhalten für $|\xi| \to 0$ und $|\xi| \to \infty$ untersuchen.

Satz 5.10 (Dissipativität für TPLW (1,1,1)). *Es gelte $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$. Ist $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und λ eine Nullstelle von $p_M(\xi,\cdot)$, so gilt* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. *Damit ist das System* (5.12) *strikt dissipativ im Sinne* (2.14) *von Shizuta-Kawashima.*

Beweis: Es sei $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Die Hauptminoren der zu $p_M(\xi,\cdot)$ gehörigen Hurwitz-Matrix (siehe Anhang A.6.1) sind positiv, denn sie lauten

$$\begin{aligned} h^{(1)}(\xi) &:= \frac{1}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 > 0\,, \\ h^{(2)}(\xi) &:= \left(\frac{1}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2\right)\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 - \frac{\kappa^*}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 = \frac{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}{\varrho c_v \tau_q^2}\xi^2 + \frac{\kappa\tau_\theta\tau_\nu^*}{(\varrho c_v \tau_q)^2}\xi^4 > 0\,, \ \text{ da } \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q\,, \\ h^{(3)}(\xi) &:= \frac{\kappa^*}{\varrho c_v \tau_q}\xi^2 h^{(2)}(\xi) > 0\,. \end{aligned}$$

Mit dem Hurwitz-Kriterium A.21 (i) folgt daraus $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p_M(\xi,\lambda) = 0$. Diese Eigenschaft entspricht aufgrund der Äquivalenz

$$p_M(\xi,\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{I}_3 - M(\xi)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\lambda A^0 + i\xi A^1 + \xi^2 B^{11} + L) = 0$$

der Dissipativität im Sinne (2.14) von Shizuta-Kawashima. □

Satz 5.11 (Asymptotik der Eigenwerte für $|\xi| \to 0$). *Es existieren drei stetige Funktionen λ_1, λ_2 und λ_3 aus $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, sodass $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von $M(\xi)$ in Anzahl ihrer Vielfachheit darstellen. Dabei gilt (ohne Einschränkung bezüglich der Indizierung)*

$$\lambda_3(\xi) = -\frac{1}{\tau_q} + \mathcal{O}(\xi^2) \quad \textit{für } |\xi| \to 0$$

sowie für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$

$$\begin{aligned} \lambda_1(\xi) &= i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi - \frac{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}{2\varrho c_v}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|^3)\,, \\ \lambda_2(\xi) &= -i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi - \frac{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}{2\varrho c_v}\xi^2 + \mathcal{O}(|\xi|^3) \quad \textit{für } |\xi| \to 0\,, \end{aligned}$$

und für $\tau_\nu^* = \kappa^* \tau_q$

$$\lambda_1(\xi) = i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi + i\frac{\kappa\tau_\theta}{2\varrho c_v}\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi^3 - \frac{\kappa\tau_\theta\tau_\nu^*}{2(\varrho c_v)^2}\xi^4 + \mathcal{O}(|\xi|^5)\,,$$

$$\lambda_2(\xi) = -i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi - i\frac{\kappa\tau_\theta}{2\varrho c_v}\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi^3 - \frac{\kappa\tau_\theta\tau_\nu^*}{2(\varrho c_v)^2}\xi^4 + \mathcal{O}(|\xi|^5) \quad \textit{für } |\xi| \to 0\,.$$

Beweis: Da die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (5.13) stetig von $\xi \in \mathbb{R}$ abhängen, lassen sich die Nullstellen von $p_M(\xi,\cdot)$ und damit die Eigenwerte von $M(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}$ nach Satz A.22 durch die Funktionswerte dreier stetiger Funktionen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ beschreiben. Dabei muss, wenn wir ohne Einschränkung eine Indizierung festlegen,

$$\lambda_1(0) = 0\,, \quad \lambda_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_3(0) = -\frac{1}{\tau_q}$$

gelten. Anhand des auf einen Parameter aus $\mathbb{C}$ erweiterten Polynoms

$$\widetilde{p}_M(\zeta,\cdot):\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad \eta \mapsto \eta^3 + \left(\frac{1}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q}\zeta\right)\eta^2 + \frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q}\zeta\eta + \frac{\kappa^*}{\varrho c_v \tau_q}\zeta$$

überlegt man sich außerdem Folgendes (siehe dazu Anhang A.6.2): Bei $\zeta = 0$ handelt es sich um einen kritischen Punkt, da hier zwei Nullstellen zusammenfallen. Als Nullstelle einfacher Vielfachheit kann $-\frac{1}{\tau_q}$ keinen Verzweigungspunkt hervorrufen, weshalb sich eine der Nullstellen von $\widetilde{p}_M(\zeta,\cdot)$ in einer Umgebung von $\zeta = 0$ durch eine holomorphe Funktion η_3 mit $\eta_3(0) = -\frac{1}{\tau_q}$ beschreiben lässt. Insbesondere muss damit $\eta_3(\zeta) = -\frac{1}{\tau_q} + \mathcal{O}(|\zeta|)$ für $|\zeta| \to 0$ gelten. Für die Nullstelle $\lambda_3(\xi) = \eta_3(\xi^2)$ von $p_M(\xi,\cdot)$ für $\xi \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$\lambda_3(\xi) = -\frac{1}{\tau_q} + \mathcal{O}(\xi^2) \quad \text{für } |\xi| \to 0\,.$$

Die doppelte Nullstelle vom Wert 0 kann maximal einen Verzweigungspunkt erster Ordnung hervorrufen, d. h. entweder sind die verbleibenden Nullstellen $\eta_1(\zeta)$ und $\eta_2(\zeta)$ von $\widetilde{p}_M(\zeta,\cdot)$ in einer Umgebung von $\zeta = 0$ als holomorphe Funktionen darstellbar oder es handelt sich um die beiden Zweige einer zweiwertigen analytischen Funktion, die von der Form $\eta_1(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty a_k|\zeta|^{\frac{k}{2}} e^{\frac{ik\arg(\zeta)}{2}}$ und $\eta_2(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty a_k(-1)^k|\zeta|^{\frac{k}{2}} e^{\frac{ik\arg(\zeta)}{2}}$ mit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ sind. In jedem der Fälle handelt es sich dann aber bei $\lambda_1(\xi) = \eta_1(\xi^2)$ und $\lambda_2(\xi) = \eta_2(\xi^2)$ für betragsmäßig hinreichend kleine $\xi \in \mathbb{R}$ um eine konvergente Potenzreihe der Form

$$\lambda_j(\xi) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_{j,k}\xi^k \quad \text{mit } (\lambda_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \text{ für } j \in \{1,2\}\,.$$

Zur Bestimmung der ersten Glieder der Potenzreihe wenden wir das Newton-Polygon-Verfahren (siehe Anhang A.6.3) auf das Polynom $p_M(\xi,\lambda) \in \mathbb{C}^*(\xi)[\lambda]$ aus (5.13) an.

Dem ersten, zur doppelten Nullstelle gehörigen Segment des Newton-Polygons zu $p_M(\xi,\lambda)$, dargestellt in Abbildung 5.1, entnehmen wir $\gamma_{j,1} = 1$ für $j \in \{1,2\}$ als das Negative der Steigung. Aus $a_{2,0}\lambda_{j,\gamma_{j,1}}^2 + a_{0,2} = 0$ mit $a_{2,0} := \frac{1}{\tau_q}$ und $a_{0,2} := \frac{\kappa^*}{\varrho c_v \tau_q}$ ergeben sich

$$\lambda_{1,1} = \lambda_{1,\gamma_{1,1}} = i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}} \quad \text{und} \quad \lambda_{2,1} = \lambda_{1,\gamma_{2,1}} = -i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\,.$$

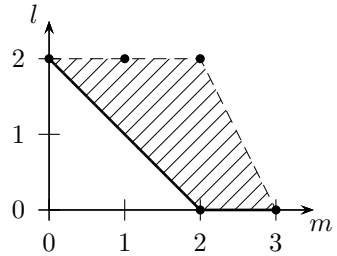

Abbildung 5.1: Newton-Polygon zu $p_M(\xi,\lambda)$ aus (5.13)

Im nächsten Schritt ist gemäß der Iterationsvorschrift (A.1) von

Seite 215 das folgende Polynom zu betrachten:

$$
\begin{aligned}
p_{M,j,1}(\xi,\lambda_j^{(1)}) &:= \xi^{-2} p_M\Big(\xi,\xi(\lambda_{j,1}+\lambda_j^{(1)})\Big)\\
&= \xi\Big(\lambda_{j,1}^3+3\lambda_{j,1}^2\lambda_j^{(1)}+3\lambda_{j,1}(\lambda_j^{(1)})^2+(\lambda_j^{(1)})^3\Big)+\Big(\frac{1}{\tau_q}+\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\xi^2\Big)\Big(\lambda_{j,1}^2+2\lambda_{j,1}\lambda_j^{(1)}+(\lambda_j^{(1)})^2\Big)\\
&\quad+\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}\xi\Big(\lambda_{j,1}+\lambda_j^{(1)}\Big)+\frac{\kappa^*}{\varrho c_v\tau_q}\\
&= \xi(\lambda_j^{(1)})^3+\Big(\frac{1}{\tau_q}+3\lambda_{j,1}\xi+\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\xi^2\Big)(\lambda_j^{(1)})^2+\Big(\frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,1}+\Big(3\lambda_{j,1}^2+\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}\Big)\xi+\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}\xi^2\Big)\lambda_j^{(1)}\\
&\quad+\Big(\lambda_{j,1}^3+\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}\Big)\xi+\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}^2\xi^2\,. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Dabei unterscheiden wir ab nun zwischen dem Fall $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und dem Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$.

▸ Fall $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$: Das Newton-Polygon zu $p_{M,j,1}(\xi,\lambda_j^{(1)})$ ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Der Punkt $(m,l)=(0,1)$ beruht auf der Voraussetzung $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$, da diese $\lambda_{j,1}^2+\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}\neq 0$ sicherstellt. Gemäß des hiervon ausgehenden Segments stellen wir $\gamma_{j,2}=1$ fest und berechnen aus $a_{1,0}\lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}}+a_{0,1}=0$ mit $a_{1,0}:=\frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,1}$ und $a_{0,1}:=\lambda_{j,1}^3+\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}$ den Wert

$$\lambda_{j,2}=\lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}}=-\frac{\tau_\nu^*-\kappa^*\tau_q}{2\varrho c_v}\,.$$

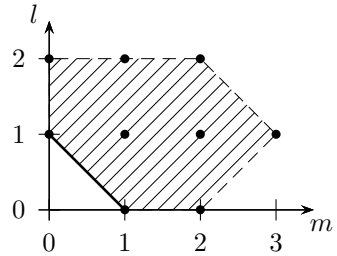

Abbildung 5.2: Newton-Polygon zu $p_{M,j,1}(\xi,\lambda_j^{(1)})$ für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$

Für $|\xi|\to 0$ folgt also, nachdem wir die Konvergenz schon zuvor begründet haben,

$$\lambda_1(\xi)=i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi-\frac{\tau_\nu^*-\kappa^*\tau_q}{2\varrho c_v}\xi^2+\mathcal{O}(|\xi|^3)\quad\text{und}\quad\lambda_2(\xi)=-i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi-\frac{\tau_\nu^*-\kappa^*\tau_q}{2\varrho c_v}\xi^2+\mathcal{O}(|\xi|^3)\,.$$

▸ Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$: Unter dieser Bedingung ist $\lambda_{j,1}^2+\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}=0$, wodurch sich das Polynom $p_{M,j,1}(\xi,\lambda_j^{(1)})$ aus (5.14) auf

$$
\begin{aligned}
p_{M,j,1}(\xi,\lambda_j^{(1)}) &= \xi(\lambda_j^{(1)})^3+\Big(\frac{1}{\tau_q}+3\lambda_{j,1}\xi+\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\xi^2\Big)(\lambda_j^{(1)})^2\\
&\quad+\Big(\frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,1}+2\lambda_{j,1}^2\xi+\frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}\xi^2\Big)\lambda_j^{(1)}+\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}^2\xi^2
\end{aligned}
$$

reduziert und das Newton-Polygon die Form aus Abbildung 5.3 erhält. Wir lesen $\gamma_{j,2}=2$ ab und erhalten aus der Gleichung $a_{1,0}\lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}}+a_{0,2}=0$ mit $a_{1,0}:=\frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,1}$ und $a_{0,2}:=\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}^2$ den Koeffizienten

$$\lambda_{j,3}=\lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}}=-\frac{\kappa\tau_\theta}{2\varrho c_v}\lambda_{j,1}\,.$$

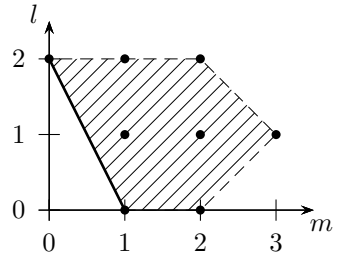

Abbildung 5.3: Newton-Polygon zu $p_{M,j,1}(\xi,\lambda_j^{(1)})$ für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$

Das Polynom im darauffolgenden Schritt lautet gemäß der Iterationsvorschrift (A.1)

$$
\begin{aligned}
p_{M,j,3}(\xi,\lambda_j^{(3)}) &:= \xi^{-2} p_{M,j,1}\Big(\xi,\xi^2(\lambda_{j,3}+\lambda_j^{(3)})\Big)\\
&= \xi^5\Big(\lambda_{j,3}^3 + 3\lambda_{j,3}^2\lambda_j^{(3)} + 3\lambda_{j,3}(\lambda_j^{(3)})^2 + (\lambda_j^{(3)})^3\Big)\\
&\quad + \xi^2\Big(\frac{1}{\tau_q} + 3\lambda_{j,1}\xi + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\xi^2\Big)\Big(\lambda_{j,3}^2 + 2\lambda_{j,3}\lambda_j^{(3)} + (\lambda_j^{(3)})^2\Big)\\
&\quad + \Big(\frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,1} + 2\lambda_{j,1}^2\xi + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}\xi^2\Big)(\lambda_{j,3}+\lambda_j^{(3)}) + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,1}^2\\
&= \xi^5(\lambda_j^{(3)})^3 + \Big(\frac{1}{\tau_q}\xi^2 + 3\lambda_{j,1}\xi^3 + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\xi^4 + 3\lambda_{j,3}\xi^5\Big)(\lambda_j^{(3)})^2\\
&\quad + \Big(\frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,1} + 2\lambda_{j,1}^2\xi - \frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,3}\xi^2 + 6\lambda_{j,1}\lambda_{j,3}\xi^3 + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,3}\xi^4 + 3\lambda_{j,3}^2\xi^5\Big)\lambda_j^{(3)}\\
&\quad + 2\lambda_{j,1}^2\lambda_{j,3}\xi - \frac{3}{\tau_q}\lambda_{j,3}^2\xi^2 + 3\lambda_{j,1}\lambda_{j,3}^2\xi^3 + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\lambda_{j,3}^2\xi^4 + \lambda_{j,3}^3\xi^5\,.
\end{aligned}
$$

Wie die Abbildung 5.4 zeigt, ist $\gamma_{j,3} = 1$ und aus der Gleichung $a_{1,0}\lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} + a_{0,1} = 0$ mit $a_{1,0} := \frac{2}{\tau_q}\lambda_{j,1}$ und $a_{0,1} := 2\lambda_{j,1}^2\lambda_{j,3}$ ergibt sich

$$
\lambda_{j,4} = \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} = -\tau_q\lambda_{j,1}\lambda_{j,3} = \frac{\kappa\tau_\theta\tau_q}{2\varrho c_v}\lambda_{j,1}^2 = -\frac{\kappa\tau_\theta\tau_\nu^*}{2(\varrho c_v)^2}\,.
$$

Im Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt für $|\xi| \to 0$ also

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(\xi) &= i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi - i\frac{\kappa\tau_\theta}{2\varrho c_v}\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi^3 - \frac{\kappa\tau_\theta\tau_\nu^*}{2(\varrho c_v)^2}\xi^4 + \mathcal{O}(|\xi|^5)\,,\\
\lambda_2(\xi) &= -i\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi + i\frac{\kappa\tau_\theta}{2\varrho c_v}\sqrt{\frac{\kappa^*}{\varrho c_v}}\xi^3 - \frac{\kappa\tau_\theta\tau_\nu^*}{2(\varrho c_v)^2}\xi^4 + \mathcal{O}(|\xi|^5)\,.
\end{aligned}
$$

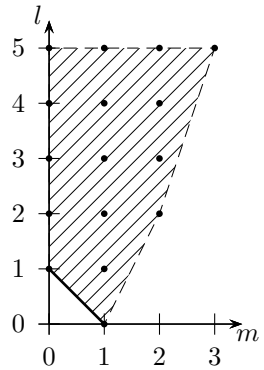

Abbildung 5.4: Newton-Polygon zu $p_{M,j,3}(\xi,\lambda_j^{(3)})$ für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$

□

Satz 5.12 (Asymptotik der Eigenwerte für $|\xi| \to \infty$). *Die asymptotische Entwicklung der Eigenwerte von $M(\xi)$ für $|\xi| \to \infty$ lautet (bis auf eine Permutation der Indizes)*

$$
\lambda_1(\xi) = -\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta} + \sqrt{\Big(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta}\Big)^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}} + \mathcal{O}(|\xi|^{-1})\,,\quad \lambda_2(\xi) = -\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta} - \sqrt{\Big(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta}\Big)^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}} + \mathcal{O}(|\xi|^{-1})
$$

$$
\textit{und}\quad \lambda_3(\xi) = -\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\xi^2 + \mathcal{O}(1)\,.
$$

Beweis: Für $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $M(\xi) = \xi^2 N(\xi)$ mit

$$
N(\xi) := \begin{pmatrix} -\frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\xi^{-2} & \frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\xi^{-2} & 0\\ -\frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\xi^{-2} & \frac{\kappa^*}{\tau_\nu^*}\xi^{-2} & -i\xi^{-1}\sqrt{\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}}\\ 0 & -i\xi^{-1}\sqrt{\frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}} & -\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q} - \frac{1}{\tau_q}\xi^{-2}\end{pmatrix}
$$

und es gilt, dass $\eta(\xi) \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von $N(\xi)$ ist, wenn $\xi^2\eta(\xi)$ ein Eigenwert von $M(\xi)$ ist. Die Koeffizienten des zu $N(\xi)$ gehörigen charakteristischen Polynoms

$$
p_N(\xi,\cdot):\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}\,,\quad \eta \mapsto \det(\eta\,\mathrm{I}_3 - N(\xi)) = \eta^3 + \Big(\frac{1}{\tau_q}\xi^{-2} + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\Big)\eta^2 + \frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}\xi^{-2}\eta + \frac{\kappa^*}{\varrho c_v\tau_q}\xi^{-4}
$$

hängen stetig von $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ab. Nach Satz A.22 lassen sich die Nullstellen von $p_N(\xi,\cdot)$ durch drei stetige Funktionen η_1, η_2, $\eta_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\backslash\{0\},\mathbb{C})$ beschreiben, wobei ohne Einschränkung bezüglich der Indizierung

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \eta_1(\xi) = 0\,, \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \eta_2(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \eta_3(\xi) = -\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q}$$

gelten muss. Wie im Beweis zu Satz 5.11 überlegt man sich anhand des Polynoms

$$\widetilde{p}_N(\zeta,\cdot):\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}\,, \quad \widetilde{\eta}\mapsto \widetilde{\eta}^3 + \left(\frac{1}{\tau_q}\zeta + \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}\right)\widetilde{\eta}^2 + \frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q}\zeta\widetilde{\eta} + \frac{\kappa^*}{\varrho c_v\tau_q}\zeta^2\,,$$

dass dessen Nullstellenfunktion $\widetilde{\eta}_3(\cdot)$ zu $\widetilde{\eta}_3(0) = -\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}$ in einer Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ holomorph ist und die anderen beiden Nullstellenfunktionen maximal Zweige einer zweiwertigen analytischen Funktion sein können. Daraus folgt, dass

$$\eta_3(\xi) = \widetilde{\eta}_3(\xi^{-2}) = -\frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q} + \mathcal{O}(\xi^{-2}) \quad \text{für } |\xi|\to\infty$$

gilt und $\eta_1(\xi) = \widetilde{\eta}_1(\xi^{-2})$ und $\eta_2(\xi) = \widetilde{\eta}_2(\xi^{-2})$ für betragsmäßig hinreichend große $\xi \in \mathbb{R}$ Potenzreihen in ξ darstellen. Den jeweils ersten Term dieser Potenzreihe bestimmen wir ausgehend von $p_N(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^*(\xi^{-1})[\eta]$ mit dem Newton-Polygon-Verfahren. Wie die Abbildung 5.5 zeigt, ist $\gamma_{j,1} = 2$ für $j \in \{1,2\}$ zu wählen. Aus $a_{2,0}\eta_{j,\gamma_{j,1}}^2 + a_{1,2}\eta_{j,\gamma_{j,1}} + a_{0,4} = 0$ mit $a_{2,0} := \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v\tau_q}$, $a_{1,2} := \frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v\tau_q}$ und $a_{0,4} := \frac{\kappa^*}{\varrho c_v\tau_q}$ ergeben sich

$$\eta_{1,2} = \eta_{1,\gamma_{1,1}} = -\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta} + \sqrt{\left(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta}\right)^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}}$$

$$\text{und} \quad \eta_{2,2} = \eta_{2,\gamma_{2,1}} = -\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta} - \sqrt{\left(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta}\right)^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}}\,.$$

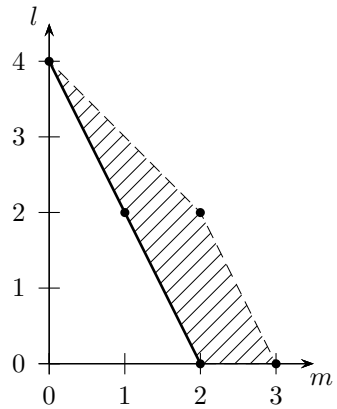

Abbildung 5.5: Newton-Polygon zu $p_N(\xi,\eta)$

Demnach gilt für $|\xi|\to\infty$

$$\eta_1(\xi) = \left(-\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta} + \sqrt{\left(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta}\right)^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}}\right)\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3})$$

$$\text{und} \quad \eta_2(\xi) = \left(-\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta} - \sqrt{\left(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta}\right)^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}}\right)\xi^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-3})\,.$$

Da die Eigenwertfunktionen η_1, η_2 und η_3 für $|\xi|\to\infty$ stetig sind, erhalten wir über die Beziehung $\lambda_j(\xi) = \xi^2\eta_j(\xi)$ die behauptete asymptotische Entwicklung für die Eigenwerte $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ von $M(\xi)$. □

Wie wir an der asymptotischen Entwicklung der Eigenwerte aus den Sätzen 5.11 und 5.12 erkennen, wird das Verhalten sowohl für $|\xi|\to 0$ als auch für $|\xi|\to\infty$ maßgeblich durch die beiden Funktioen λ_1 und λ_2 bestimmt.

In folgendem Korollar wollen wir die Abschätzungen für die Eigenwerte der Matrix $M(\xi)$ nochmals in der Form zusammenfassen, wie wir sie anschließend für die Herleitung der L^p-L^q-Abschätzungen benötigen.

Korollar 5.13 (Abschätzung der Eigenwerte).

(i) Ist $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$, so existieren $r, R \in \mathbb{R}^+$ sowie $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$, sodass die Eigenwerte für alle $\xi \in (B(0,r)\backslash\{0\}) \cup (\mathbb{R}\backslash B(0,R))$ paarweise verschieden sind und für alle $j \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ |\xi| < r: &\quad \mathrm{Re}\big(\lambda_j(\xi)\big) \le -a_1\xi^2\,, \\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ |\xi| > R: &\quad \mathrm{Re}\big(\lambda_j(\xi)\big) \le -a_2\,, \\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ r \le |\xi| \le R: &\quad \mathrm{Re}\big(\lambda_j(\xi)\big) \le -a_3\,. \end{aligned}$$

(ii) Ist $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$, so existieren $r, R \in \mathbb{R}^+$ sowie $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$, sodass die Eigenwerte für alle $\xi \in (B(0,r)\backslash\{0\}) \cup (\mathbb{R}\backslash B(0,R))$ paarweise verschieden sind und für alle $j \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ |\xi| < r: &\quad \mathrm{Re}\big(\lambda_j(\xi)\big) \le -a_1\xi^4\,, \\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ |\xi| > R: &\quad \mathrm{Re}\big(\lambda_j(\xi)\big) \le -a_2\,, \\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,,\ r \le |\xi| \le R: &\quad \mathrm{Re}\big(\lambda_j(\xi)\big) \le -a_3\,. \end{aligned}$$

Beweis: Die Existenz eines $r \in \mathbb{R}^+$ und die Aussage für $|\xi| < r$ leitet man aus Satz 5.11 ab. Aus Satz 5.12 folgen die Existenz eines $R \in \mathbb{R}^+$ und die Aussage für $|\xi| > R$. Man beachte hierbei, dass $\mathrm{Re}\big(-\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta} \pm \sqrt{(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta})^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}}\big) < 0$ wegen $\tau_\nu^* > 0$ und $\kappa^* > 0$ (bzw. zwangsläufig auch nach Aussage des Satzes 5.10) sowohl für $(\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta})^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta} \le 0$ als auch für $0 < (\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta})^2 - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta} < (\frac{\tau_\nu^*}{2\kappa\tau_\theta})^2$ zutrifft. Die negative obere Schranke der Realteile für $r \le |\xi| \le R$ ergibt sich aus den Tatsachen, dass die Menge $\{\xi \in \mathbb{R} \,|\, r \le \xi \le R\}$ kompakt ist, die Funktionen λ_j nach Satz 5.11 stetig sind und nach Satz 5.10 $\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi)) < 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ erfüllen. □

5.2.3 L^p-L^q-Abschätzungen

Im Vergleich mit dem Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,1), für das wir in Abschnitt 3.2 die Asymptotik der Eigenwerte untersucht haben, stellen wir einen interessanten Punkt fest. Beim System DPLW (2,1) führten die Voraussetzungen $2\tau_\theta > \tau_q$ und $2\tau_\theta = \tau_q$ auf Unterschiede im Verhalten der Eigenwerte für $|\xi| \to \infty$, während sich hier beim System TPLW (1,1,1) die Bedingungen $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ auf die Situation für $|\xi| \to 0$ auswirken. Dies wird sogleich den Grund dafür stellen, dass sich für das System TPLW (1,1,1) auch im Grenzfall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ ein Abklingverhalten vom Standard-Typ ergibt und das Regularity-Loss-Phänomen nicht auftritt.

Um die Asymptotik der Eigenwerte für die Herleitung von L^p-L^q-Abschätzungen nutzen zu können, benötigen wir für die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0 = \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}}e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0$ des symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Systems (5.12) noch eine Darstellung, die die Eigenwerte ins Spiel bringt. Dazu stellen wir fest, dass die drei Eigenwerte der Matrix $M(\xi)$ im Allgemeinen, denn nach Korollar 5.13 auf jeden Fall für $\xi \in B(0,r)\backslash\{0\}$ und $\xi \in \mathbb{R}\backslash B(0,R)$, paarweise verschieden sind. Die Menge derjenigen $\xi \in \mathbb{R}$, für die die Matrix $M(\xi)$ weniger als drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt, muss damit eine Lebesgue-Nullmenge sein, da nach Satz A.23 (i) die Menge der kritischen Punkte lokal endlich ist. Daraus resultiert, wie wir [Kat66, S. 41] entnehmen können, dass die Matrizen $M(\xi)$ und $e^{M(\xi)t}$ für fast alle $\xi \in \mathbb{R}$ durch

$$M(\xi) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j(\xi)P_j(\xi) \quad \text{und} \quad e^{M(\xi)t} = \sum_{j=1}^{3} e^{\lambda_j(\xi)t}P_j(\xi)$$

beschrieben werden, wobei $P_j(\xi)$ die zu $\lambda_j(\xi)$ gehörige Eigenprojektion bezeichnet. Damit ergibt sich für $t \in [0,\infty)$ die Darstellung

$$\mathcal{S}(t)V_0 = \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}} e^{M(\cdot)t}(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0 = \mathscr{F}^{-1}(A^0)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{3} e^{\lambda_j(\cdot)t} P_j(\cdot)(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\,. \tag{5.15}$$

Zusammen mit den Abschätzungen für die Realteile der Eigenwerte aus Korollar 5.13 können wir daraus eine L^p-L^2-Abschätzung, eine L^1-L^∞-Abschätzung und eine L^p-L^q-Abschätzung für die Lösung des eindimensionalen Three-Phase-Lag-Systems TPLW (1,1,1) herleiten.

Satz 5.14 (L^p-L^2-Abschätzung für TPLW (1,1,1)). *Es seien $s, s_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $s_0 \le s$ und $p \in [1,2]$. Die Lösung $\mathcal{S}(\cdot)V_0$ von (5.12) zu $V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3 \cap W^{s_0,p}(\mathbb{R})^3$ weist sowohl im Fall $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ als auch im Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ ein Abklingverhalten vom Standard-Typ auf, jedoch mit unterschiedlichen Abklingraten:*

(i) Für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3 \cap W^{s_0,p}(\mathbb{R})^3\\
&\forall\, j,k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \le s \text{ und } j \le \min\{k, s_0\}\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\
&\big\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\big\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \le C_1(1+t)^{-\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}\right)-\frac{k-j}{2}}\big\|\partial_x^j V_0\big\|_{L^p(\mathbb{R})^3} + C_2 e^{-ct}\big\|\partial_x^k V_0\big\|_{L^2(\mathbb{R})^3}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, C_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in H^s(\mathbb{R})^3 \cap W^{s_0,p}(\mathbb{R})^3\\
&\forall\, j,k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \le s \text{ und } j \le \min\{k, s_0\}\ \ \forall\, t \in [0,\infty):\\
&\big\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\big\|_{L^2(\mathbb{R})^3} \le C_1(1+t)^{-\left(\frac{1}{4p}-\frac{1}{8}\right)-\frac{k-j}{4}}\big\|\partial_x^j V_0\big\|_{L^p(\mathbb{R})^3} + C_2 e^{-ct}\big\|\partial_x^k V_0\big\|_{L^2(\mathbb{R})^3}\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le s$. Mit dem Satz von Plancherel A.8, der Lösungsdarstellung (5.15) und der Eigenschaft $\|P_l(\xi)\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} = 1$ der Eigenprojektion zum Eigenwert $\lambda_l(\xi)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\big\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} &= \big\|\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} = \Big\|(\cdot)^k (A^0)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{3} e^{\lambda_l(\cdot)t} P_l(\cdot)(A^0)^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}V_0\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\\
&\le c_0 \sum_{l=1}^{3} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t}\big|\mathscr{F}V_0(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

für eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}^+$. Wir teilen das Integral gemäß Korollar 5.13 in die Bereiche $|\xi| < r$, $r \le |\xi| \le R$ und $|\xi| > R$ auf, in denen wir jeweils eine Abschätzung für die Realteile der Eigenwerte zu Konstanten a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}^+$ kennen:

$$\begin{aligned}
\big\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} \le c_0 \sum_{l=1}^{3} \Bigg(&\int_{|\xi|<r} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t}\big|\mathscr{F}V_0(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi + \int_{r\le|\xi|\le R} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t}\big|\mathscr{F}V_0(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi\\
&+ \int_{|\xi|>R} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t}\big|\mathscr{F}V_0(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi\Bigg)\,.
\end{aligned}$$

Sowohl im Fall $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ als auch im Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt für $l \in \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|>R} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t}\big|\mathscr{F}V_0(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi &\le e^{-2a_2 t}\big\|\partial_x^k V_0\big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\,,\\
\int_{r\le|\xi|\le R} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t}\big|\mathscr{F}V_0(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi &\le e^{-2a_3 t}\big\|\partial_x^k V_0\big\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}\,.
\end{aligned}$$

Für das verbleibende Integral nutzen wir die Abschätzung $\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi)) \leq -a_1\xi^m$ aus Korollar 5.13, wobei $m := 2$ für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $m := 4$ für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ zu wählen ist. Damit ergibt sich für $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq \min\{k, s_0\}$

$$\int_{|\xi|<r} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t} \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \leq \int_{|\xi|<r} \xi^{2(k-j)} e^{-2a_1\xi^m t} \left|\xi^j(\mathscr{F}V_0)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\,.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung A.1, der Abschätzung aus Lemma A.16 (i) und der Ungleichung von Hausdorff-Young A.10 schließen wir

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|<r} \xi^{2k} e^{2\operatorname{Re}(\lambda_l(\xi))t} \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi &\leq c\Big(\int_{|\xi|<r} \xi^{2(k-j)\frac{p}{2-p}} e^{-2a_1\frac{p}{2-p}\xi^m t}\,\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{2-p}{p}} \left\|(\cdot)^j(\mathscr{F}V_0)\right\|^2_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})^3} \\
&\leq c(1+t)^{-\left(\frac{2(k-j)\frac{p}{2-p}}{m}+\frac{1}{m}\right)\frac{2-p}{p}} \left\|\mathscr{F}(\partial_x^j V_0)\right\|^2_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})^3} \\
&\leq c(1+t)^{-\left(\frac{2}{mp}-\frac{1}{m}\right)-\frac{2(k-j)}{m}} \left\|\partial_x^j V_0\right\|^2_{L^p(\mathbb{R})^3}\,,
\end{aligned}$$

wobei c in jedem Schritt eine geeignete positive Konstante bezeichnet, die wegen $j, k \leq s$ unabhängig von j und k gewählt werden kann. Insgesamt erhalten wir

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3} \leq c_0 c(1+t)^{-\left(\frac{2}{mp}-\frac{1}{m}\right)-\frac{2(k-j)}{m}} \left\|\partial_x^j V_0\right\|^2_{L^p(\mathbb{R})^3} + 2c_0 e^{-\min\{a_2,a_3\}t} \left\|\partial_x^k V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})^3}$$

und daraus durch Ziehen der Wurzel die behauptete Abschätzung für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$. □

Satz 5.15 (L^1-L^∞-Abschätzung für TPLW (1,1,1)). *Es sei $s \in \mathbb{N}_0$.*

(i) Für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ gilt: $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in W^{s+2,1}(\mathbb{R})^3\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ *mit* $k \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})^3} \leq C(1+t)^{-\frac{k+1}{2}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+2,1}(\mathbb{R})^3}\,.$$

(ii) Für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt: $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in W^{s+2,1}(\mathbb{R})^3\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ *mit* $k \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\left\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})^3} \leq C(1+t)^{-\frac{k+1}{4}} \left\|V_0\right\|_{W^{k+2,1}(\mathbb{R})^3}\,.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)$ in $L^1(\mathbb{R})^3$ liegt. In den Abschätzungen ist mit c jeweils eine geeignete positive Konstante gemeint. Wie im vorherigen Beweis nutzen wir die Lösungsdarstellung (5.15), die Eigenschaft $\|P_j(\xi)\|_{\mathbb{C}^{3\times 3}} = 1$ sowie die Aufteilung gemäß Korollar 5.13 und erhalten

$$\begin{aligned}
\left\|\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\right\|_{L^1(\mathbb{R})^3} &= \Big\|(\cdot)^k (A^0)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^3 e^{\lambda_j(\cdot)t} P_j(\cdot)(A^0)^{\frac{1}{2}} \mathscr{F}V_0\Big\|_{L^1(\mathbb{R})^3} \\
&\leq c\sum_{j=1}^3 \Big(\int_{|\xi|<r} |\xi|^k e^{\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi))t} \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right| \mathrm{d}\xi + \int_{r\leq|\xi|\leq R} |\xi|^k e^{\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi))t} \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right| \mathrm{d}\xi \\
&\qquad + \int_{|\xi|>R} |\xi|^k e^{\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi))t} \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right| \mathrm{d}\xi\Big)\,.
\end{aligned}$$

Für $j \in \{1,2,3\}$ und $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|>R} |\xi|^k e^{\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi))t} \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right| \mathrm{d}\xi &\leq e^{-a_2 t} \int_{|\xi|>R} |\xi|^k \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right| \mathrm{d}\xi \leq c\, e^{-a_2 t} \left\|V_0\right\|_{W^{k+2,1}(\mathbb{R})^3}\,, \\
\int_{r\leq|\xi|\leq R} |\xi|^k e^{\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi))t} \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right| \mathrm{d}\xi &\leq e^{-a_3 t} \int_{r\leq|\xi|\leq R} |\xi|^k \left|\mathscr{F}V_0(\xi)\right| \mathrm{d}\xi \leq c\, e^{-a_3 t} \left\|V_0\right\|_{W^{k+2,1}(\mathbb{R})^3}\,,
\end{aligned}$$

wobei die Abschätzung gegen $\|V_0\|_{W^{k+2,1}(\mathbb{R})^3}$ wie im Beweis von Satz 2.16 folgt. Außerdem ist $\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi)) \leq -a_1\xi^m$ mit $m := 2$ für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $m := 4$ für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$. Daraus folgt zusammen mit der Abschätzung aus Lemma A.16 (i) und der Ungleichung von Hausdorff-Young

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|<r} |\xi|^k e^{\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi))t} |\mathscr{F}V_0(\xi)| \,\mathrm{d}\xi &\leq \int_{|\xi|<r} |\xi|^k e^{-a_1\xi^m t} |(\mathscr{F}V_0)(\xi)| \,\mathrm{d}\xi \\ &\leq \|\mathscr{F}V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})^3} \int_{|\xi|<r} |\xi|^k e^{-a_1|\xi|^m t} \,\mathrm{d}\xi \\ &\leq c\,(1+t)^{-\frac{k+1}{m}} \|\mathscr{F}V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})^3} \leq c\,(1+t)^{-\frac{k+1}{m}} \|V_0\|_{L^1(\mathbb{R})^3} \\ &\leq c\,(1+t)^{-\frac{k+1}{m}} \|V_0\|_{W^{k+2,1}(\mathbb{R})^3}\,.\end{aligned}$$

Nachdem auch $e^{-a_2 t} + e^{-a_3 t} \leq c(1+t)^{-\frac{k+1}{m}}$ gilt, folgt

$$\|\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\|_{L^1(\mathbb{R})^3} \leq C(1+t)^{-\frac{k+1}{m}} \|V_0\|_{W^{k+2,1}(\mathbb{R})^3}$$

für eine gewisse Konstante $C \in \mathbb{R}^+$. Wie im Beweis von Satz 2.16 begründet man zudem

$$\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})^3} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathscr{F}(\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0)\|_{L^1(\mathbb{R})^3}\,,$$

sodass sich insgesamt die behauptete Abschätzung ergibt. □

Satz 5.16 (L^p-L^q-Abschätzung für TPLW (1,1,1)). *Es seien $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $q \in \{2,\infty\}$ sei $N := 2(1-\frac{2}{q})$ und für $q \in (2,\infty)$ sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2(1-\frac{2}{q})$.*

(i) Für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ gilt: $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R})^3\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R})^3} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{2}} \|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R})^3}\,.$$

(ii) Für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt: $\exists\, C \in \mathbb{R}^+\ \forall\, V_0 \in W^{s+N,p}(\mathbb{R})^3\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq s\ \ \forall\, t \in [0,\infty)$:

$$\|\partial_x^k \mathcal{S}(t)V_0\|_{L^q(\mathbb{R})^3} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{4}} \|V_0\|_{W^{k+N,p}(\mathbb{R})^3}\,.$$

Beweis: Für $q \in \{2,\infty\}$ folgen die Aussagen direkt aus den Sätzen 5.14 (mit $s_0 = s$ und $j = 0$) und 5.15. Sei nun $q \in (2,\infty)$ und dazu $p = 1 - \frac{1}{q} \in (1,2)$. Wir setzen $m := 2$ für $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $m := 4$ für $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$. Der Beweis erfolgt analog zu Satz 2.16, weshalb wir nur die wesentlichen Punkte angeben. Aus der L^p-L^2-Abschätzung aus Satz 5.14 erhalten wir, wenn wir das dortige p als 2 und $j := 0$ wählen,

$$\partial_x^k \circ \mathcal{S}(t) \in \mathscr{L}(B_{2,2}^k(\mathbb{R})^3, L^2(\mathbb{R})^3) \quad \text{mit} \quad \|\partial_x^k \circ \mathcal{S}(t)\|_{\mathscr{L}(B_{2,2}^k(\mathbb{R})^3, L^2(\mathbb{R})^3)} \leq c_1(1+t)^{-\frac{k}{m}}$$

für eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}^+$. Die L^1-L^∞-Abschätzung aus Satz 5.15 impliziert

$$\partial_x^k \circ \mathcal{S}(t) \in \mathscr{L}(B_{1,1}^{k+2}(\mathbb{R})^3, L^\infty(\mathbb{R})^3) \quad \text{mit} \quad \|\partial_x^k \circ \mathcal{S}(t)\|_{\mathscr{L}(B_{1,1}^{k+2}(\mathbb{R})^3, L^\infty(\mathbb{R})^3)} \leq c_2(1+t)^{-\frac{k+1}{m}}$$

für eine Konstante $c_2 \in \mathbb{R}^+$. Durch Interpolation folgt $\partial_x^k \circ \mathcal{S}(t) \in \mathscr{L}(B_{p,p}^r(\mathbb{R})^3, L^q(\mathbb{R})^3)$ mit

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k \circ \mathcal{S}(t)\|_{\mathscr{L}(B_{p,p}^r(\mathbb{R})^3, L^q(\mathbb{R})^3)} &\leq \|\mathcal{S}(t)\|^{1-\theta}_{\mathscr{L}(B_{2,2}^k(\mathbb{R})^3, L^2(\mathbb{R})^3)} \|S(t)\|^{\theta}_{\mathscr{L}(B_{1,1}^{k+2}(\mathbb{R})^3, L^\infty(\mathbb{R})^3)} \\ &\leq c_1^{(1-\theta)}(1+t)^{-\frac{k}{m}(1-\theta)} c_2^\theta (1+t)^{-\frac{k+1}{m}\theta} \\ &= c_1^{\frac{2}{q}} c_2^{1-\frac{2}{q}} (1+t)^{-\frac{1}{m}\left(1-\frac{2}{q}\right)-\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

für $\theta := 1 - \frac{2}{q} \in (0,1)$ und $r = k + 2(1-\frac{2}{q})$. □

Mit dem Three-Phase-Lag System TPLW (1,1,1) der Wärmeleitung sind zwei interessante Aspekte zutage getreten.

Zum einen haben wir gesehen, dass sich das Modell mit einem symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen System identifizieren lässt, dieses jedoch mit einer indefiniten Matrix L, sodass die Methode aus Abschnitt 2.6 nicht angewendet werden konnte. Dennoch konnten wir für die Lösungen unter der Voraussetzung $\tau_\nu^* \geq \kappa^* \tau_q$ ein Abklingen vom Standard-Typ nachweisen und für $\tau_\nu^* > \kappa^* \tau_q$ haben wir dieselben Abklingraten erhalten, wie es die Resultate des Abschnitts 2.6 liefern würden. Jene stellten aufgrund der nicht mehr notwendigen Symmetrie der Matrix L bereits eine Erweiterung gegenüber den ursprünglichen Aussagen aus [SK85; UKS84] dar. Das Beispiel des Systems TPLW (1,1,1) lässt nun aber vermuten, dass auch die Forderung nach der positiven Semidefinitheit der Matrix L im Allgemeinen noch zu restriktiv ist.

Zum anderen haben die Untersuchungen zum System TPLW (1,1,1) gezeigt, dass das Regularity-Loss-Phänomen, so wie es die Ergebnisse der vorherigen Kapitel zu den Modellen DPLW (2,1), DPLT (2,1) und TPLW (2,1,1) vermuten lassen könnten, im Grenzfall der Parameterbeziehung nicht auftreten muss. Sowohl für $\tau_\nu^* > \kappa^* \tau_q$ als auch für $\tau_\nu^* = \kappa^* \tau_q$ haben wir ein Abklingverhalten vom Standard-Typ erhalten, das ohne zusätzliche Forderungen an die Regularität der Anfangsdaten auskommt. Der Unterschied bestand lediglich, aber doch auch überraschenderweise darin, dass sich für den Grenzfall $\tau_\nu^* = \kappa^* \tau_q$ ein langsameres Abklingen ergab. Die Rate ist gegenüber derjenigen im Fall $\tau_\nu^* > \kappa^* \tau_q$ genau um eine Wurzelstufe reduziert, also beispielsweise $(1+t)^{-\frac{1}{4}}$ statt $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$.

Für das zuvor betrachtete Modell aus der symmetrisch-hyperbolisch-parabolischen Kategorie, dem System DPLW (2,2), war weder das Regularity-Loss-Phänomen noch ein Verlust in der Abklingrate aufgetreten, da dort der Grenzfall auf eine Wärmeleitungsgleichung führte. Somit konnten wir das Regularity-Loss-Phänomen nur bei den symmetrisch-hyperbolischen Phase-Lag-Systemen aus den Kapiteln 3 und 4 beobachten.

6 Nichterhaltung der Positivität für das Modell DPLW (2,2)

Auch wenn Belege für allgemeine Entwicklungsordnungen fehlen, lassen die Beispiele aus den Kapiteln 3, 4 und 5 doch vermuten, dass die Dual- und Three-Phase-Lag-Modelle generell der symmetrisch-hyperbolischen Theorie und keiner parabolischen Theorie zuzuordnen sind. Für das in Abschnitt 5.1 als symmetrisch-hyperbolisch-parabolisch klassifizierte Dual-Phase-Lag-System DPLW (2,2) haben wir jedoch gesehen, dass dieses für $\tau_\theta = \tau_q$, also im Grenzfall der Parameterbedingung, einer parabolischen Gleichung entspricht. Daher wäre es denkbar, dass die ein oder andere parabolische Eigenschaft auch für $\tau_\theta > \tau_q$ erhalten bleibt, und sich dem System auf diese Weise doch ein Stück parabolischen Charakters, wie er von Tzou in [Tzo97, S. 284] gesehen wird, zusprechen ließe. Eine im Zusammenhang mit der Wärmeleitung erwünschte und typisch parabolische Eigenschaft ist die Erhaltung der Positivität. In diesem Kapitel soll nun gezeigt werden, dass diese für das symmetrisch-hyperbolisch-parabolische System DPLW (2,2) für $\tau_\theta > \tau_q$ nicht gegeben ist. Ähnliche Untersuchungen wurden in [KB98] für das Modell von Cattaneo und in [Ruk14] für das Dual-Phase-Lag-System DPLW (1,1) durchgeführt.

Wir betrachten das inhomogene Modell DPLW (2,2) in drei Raumdimensionen

$$\begin{aligned} q + \tau_q q_t + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} &= -\kappa \nabla\theta - \kappa\tau_\theta \nabla\theta_t - \kappa \frac{\tau_\theta^2}{2} \nabla\theta_{tt} && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3\,, \\ \operatorname{div} q + \varrho c_v \theta_t &= \eta && \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3\,, \end{aligned}$$

mit einer Wärmequelle $\eta : [0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. In der reduzierten Form (1.7) lautet die Gleichung

$$\varrho c_v \theta_t + \varrho c_v \tau_q \theta_{tt} + \varrho c_v \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{ttt} - \kappa\Delta\theta - \kappa\tau_\theta\Delta\theta_t - \kappa\frac{\tau_\theta^2}{2}\Delta\theta_{tt} = \eta + \tau_q\eta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\eta_{tt} \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3\,. \tag{6.1}$$

Diese stellt für $\tau_\theta = \tau_q$ eine Wärmeleitungsgleichung für $\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}$ dar, denn dann ist

$$\partial_t\Big(\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}\Big) - \frac{\kappa}{\varrho c_v}\Delta\Big(\theta + \tau_q\theta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tt}\Big) = \frac{1}{\varrho c_v}\Big(\eta + \tau_q\eta_t + \frac{\tau_q^2}{2}\eta_{tt}\Big)\,. \tag{6.2}$$

Eine Lösung hierzu ist bei ausreichender Regularität von η durch

$$\theta(t,x) = \int_0^t \frac{\sqrt{\varrho c_v}}{(4\pi\kappa(t-s))^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\varrho c_v |x-y|^2}{4\kappa(t-s)}} \eta(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \qquad \text{für } (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$$

gegeben, da diese Funktion nach [Eva10, S. 49 f.] die klassische Wärmeleitungsgleichung

$$\theta_t - \frac{\kappa}{\varrho c_v}\Delta\theta = \frac{1}{\varrho c_v}\eta \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3\,, \qquad \lim_{t\searrow 0}\theta(t,\cdot) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3\,,$$

löst, und damit auch $\tau_q\partial_t(\theta_t - \frac{\kappa}{\varrho c_v}\Delta\theta) = \frac{\tau_q}{\varrho c_v}\eta_t$ und $\frac{\tau_q^2}{2}\partial_{tt}(\theta_t - \frac{\kappa}{\varrho c_v}\Delta\theta) = \frac{\tau_q^2}{2\varrho c_v}\eta_{tt}$ sowie dann in der Summe die Gleichung (6.2) erfüllt. Anhand der Darstellung erkennt man, dass $\theta(t,x) \geq 0$

für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ gilt, sofern die vorgegebene Funktion η eine solche Positivität, also $\eta(t,x) \geq 0$ für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$, aufweist. Diese Eigenschaft ist aus physikalischer Sicht erwünscht, denn sie bedeutet, dass im modellierten System, für das θ die absolute Temperatur oder die Temperaturdifferenz zu einer Referenztemperatur beschreibt, die Temperatur ansteigt, wenn Wärme zugeführt wird.

Wir möchten zeigen, dass diese Eigenschaft aus dem Fall $\tau_\theta = \tau_q$ verloren geht, wenn wir $\tau_\theta > \tau_q$ wählen. Dazu werden wir eine konkrete Wärmequelle $\eta : [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+$ angeben und zeigen, dass eine Lösung θ zu nichtnegativen Anfangsdaten sowie ein $t \in (0,\infty)$ und ein $x \in \mathbb{R}^3$ existieren, sodass $\theta(t,x) < 0$ gilt. Dies wäre so zu deuten, dass das System auf eine Wärmezufuhr hin zumindest temporär und lokal mit einer Abkühlung reagiert. Wenn θ statt einer Temperaturdifferenz die absolute Temperatur auf der Kelvin-Skala beschreibt, hieße es, dass eine Temperatur jenseits des absoluten Nullpunkts erreicht würde. Mit dem Verweis auf [Bra13] möchten wir dieses mathematische Phänomen nicht voreilig als physikalisch paradox einstufen, sicher trägt es aber zur Hinterfragung des Modells bei (vergleiche Abschnitt 1.6).

Die Wärmequelle wählen wir wie in [Ruk14] so, dass die Möglichkeit zu einer expliziten Berechnung der Lösung von (6.1) besteht. Zu $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und $t_0 \in \mathbb{R}^+$ sei

$$\eta_{\sigma,t_0} : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad (t,x) \mapsto \frac{1}{\sigma^3 t_0}(H(t) - H(t-t_0))e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}\,,$$

wobei H die Heaviside-Funktion

$$H : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0\,, \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

bezeichne. Anschaulich handelt es sich also um eine Wärmequelle, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet und zum Zeitpunkt $t = t_0$ ausgeschaltet wird, und während ihrer Dauer radialsymmetrisch die Form einer Gaußschen Glockenkurve besitzt.

Nachteilig ist, dass damit nun die Gleichung (6.1) bezüglich der Zeit im distributionellen Sinn, beispielsweise in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^3))$ verstanden werden muss, da Zeitableitungen von η_{σ,t_0} und damit Diracsche Delta-Distributionen auftreten. Dadurch werden eine Reihe an Überlegungen zur Regularität nötig, um schlussendlich, am Ziel zu $\theta(t,x) < 0$, überhaupt eine Auswertung der Funktion in einem Punkt (t,x) vornehmen zu können.

6.1 Lösung im Fourierraum

Das Pendant zur Differentialgleichung (6.1), wobei nun $\eta \equiv \eta_{\sigma,t_0}$ sei, bildet im Fourierraum die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} f_{\sigma,t_0} + \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f_{\sigma,t_0} + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\sigma,t_0} + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 f_{\sigma,t_0} = g_{\sigma,t_0}(\xi) \quad (6.3)$$

für $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} g_{\sigma,t_0}(\xi) &:= \frac{2}{\varrho c_v \tau_q^2}\left[(\mathscr{F}\eta_{\sigma,t_0})(\cdot,\xi)\right] + \frac{2}{\varrho c_v \tau_q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\mathscr{F}\eta_{\sigma,t_0})(\cdot,\xi)\right] + \frac{1}{\varrho c_v}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[(\mathscr{F}\eta_{\sigma,t_0})(\cdot,\xi)\right] \\ &= \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\left(\frac{2}{\tau_q^2}([H] - [H(\cdot - t_0)]) + \frac{2}{\tau_q}(\delta_0 - \delta_{t_0}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{t_0}\right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Hierin bezeichnet δ_a zu $a \in \mathbb{R}$ die Diracsche Delta-Distribution $\delta_a : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \varphi(a)$ und $[h]$ für $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ die von h erzeugte Distribution (siehe Anhang A.2.3). Die Gestalt von g_{σ,t_0} wurde aus $\eta_{\sigma,t_0}(t,x) = \frac{1}{\sigma^3 t_0}(H(t) - H(t-t_0))\exp(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2})$ anhand der nach [Wal94, S. 167, (14)] bekannten Fourier-Transformation

$$(\mathscr{F} e^{-\frac{|\cdot|^2}{2\sigma^2}})(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} = \sigma^3 e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}$$

und aus den distributionellen Ableitungen der Heaviside-Funktion berechnet.

Für ein festes $\xi \in \mathbb{R}^3$ ist die Gleichung (6.3) im distributionellen Sinn, also als Gleichheit in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, wohlerklärt. Wir gehen nun so vor, dass wir zunächst eine Lösung $f_{\sigma,t_0}(\xi) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ von (6.3) bestimmen und anschließend zeigen, dass f_{σ,t_0} in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ liegt und

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} f_{\sigma,t_0} + \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\cdot|^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f_{\sigma,t_0} + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\cdot|^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\sigma,t_0} + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\cdot|^2 f_{\sigma,t_0} = g_{\sigma,t_0} \tag{6.5}$$

als Gleichheit in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ erfüllt ist.

6.1.1 Berechnung der Lösung

Da $g_{\sigma,t_0}(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^3$ im Raum $\mathscr{D}'_R(\mathbb{R})$ der rechtsseitigen Distributionen (siehe Anhang A.2.3) liegt, können wir aus [Zem65, S. 267] schließen, dass die Differentialgleichung (6.3) zu jedem $\xi \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Lösung $f_{\sigma,t_0}(\xi) \in \mathscr{D}'_R(\mathbb{R})$ besitzt. Die zugrunde liegende Lösungstheorie stützt sich auf Verallgemeinerungen der Faltung und der Laplace-Transformation auf Distributionen.

Die Laplace-Transformation $\mathscr{L}$ (siehe [Zem65, 8.3]) kann zu gewissen rechtsseitigen Distributionen definiert werden, nämlich zu solchen $h \in \mathscr{D}'_R(\mathbb{R})$, für die ein $d \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $e^{-d\cdot}h$ im Raum der temperierten Distributionen $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ liegt. Man wählt dazu eine Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften, dass ihr Träger nach links hin beschränkt ist, d. h. es existiere ein $b \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset [b,\infty)$, und dass $\psi(t) = 1$ für $t \in \operatorname{supp} h$ gilt. Dann stellt $t \mapsto \psi(t)e^{-(s-d)t}$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > d$ eine Funktion aus dem Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dar, woraufhin

$$(\mathscr{L}h)(s) := (e^{-d\cdot}h)(\psi(\cdot)e^{-(s-d)\cdot})$$

wohlerklärt ist. Die Definition ist unabhängig von der zu $h \in \mathscr{D}'_R(\mathbb{R})$ getroffenen Wahl von ψ und d, sofern $d > \inf\{c \in \mathbb{R} \mid e^{-c\cdot}h \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})\}$ ist. Ähnlich wie die Fourier-Transformation verwandelt die Laplace-Transformation eine (Zeit-)Ableitung in eine Multiplikation, so ist beispielsweise $(\mathscr{L}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\delta_0)(s) = s^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$.

Das zweite Standbein bildet die Faltung (siehe [Zem65, Kap. 5]) mit der für $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ geltenden Eigenschaft $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\delta_0 * h = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}h$. Dieser zufolge kann eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auch als eine Faltungsgleichung aufgefasst werden. In dieser Form lautet unsere Gleichung (6.3) dann

$$(\mathcal{D}(\xi)\delta_0) * f_{\sigma,t_0}(\xi) = g_{\sigma,t_0}(\xi)$$

mit dem von $\xi \in \mathbb{R}^3$ abhängigen Differentialoperator

$$\mathcal{D}(\xi) := \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} + \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\mathrm{Id}\,. \tag{6.6}$$

Nun verhält es sich so, dass zu $\mathcal{D}(\xi)\delta_0$ ein bezüglich der Faltung inverses Element $(\mathcal{D}(\xi)\delta_0)^{*-1}$ existiert und dieses durch

$$\big(\mathcal{D}(\xi)\delta_0\big)^{*-1} = \mathscr{L}^{-1}\frac{1}{\mathscr{L}(\mathcal{D}(\xi)\delta_0)}$$

gegeben ist (siehe [Zem65, S. 267]). Der Ausdruck $\mathscr{L}(\mathcal{D}(\xi)\delta_0)$ stellt in unserem Fall ein Polynom mit reellen und von $|\xi|$ abhängigen Koeffizienten dar:

$$p(s,\xi) := (\mathscr{L}(\mathcal{D}(\xi)\delta_0))(s) = s^3 + \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)s^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)s + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 .$$

Unser Ziel ist es, die Lösung

$$f_{\sigma,t_0}(\xi) = \big(\mathcal{D}(\xi)\delta_0\big)^{*-1} * g_{\sigma,t_0}(\xi) = \left(\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{\mathscr{L}(\mathcal{D}(\xi)\delta_0)}\right) * g_{\sigma,t_0}(\xi) = \left(\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{p(\cdot,\xi)}\right) * g_{\sigma,t_0}(\xi)$$

von (6.3) explizit zu berechnen und Aussagen über deren Regularität bezüglich t und ξ zu treffen. Ermöglicht wird dies durch die relativ einfache Gestalt der Distribution $g_{\sigma,t_0}(\xi)$, die auf unsere Wahl von η_{σ,t_0} zurückgeht. Die Darstellung der Lösung wird in Abhängigkeit von den Nullstellen des Polynoms $p(\cdot,\xi)$ erfolgen. Daher wollen wir in einem ersten Schritt die später benötigten Eigenschaften dieser Nullstellen zusammenstellen.

Satz 6.1 (Eigenschaften der Nullstellen). *Es sei $\tau_\theta > \tau_q$. Zu*

$$p:\ \mathbb{C}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}\,,\quad (s,\xi)\mapsto s^3 + \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)s^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)s + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2$$

existieren drei stetige Funktionen $\lambda_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, $\lambda_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ und $\lambda_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, sodass

$$p(s,\xi) = \prod_{j=1}^{3}(s - \lambda_j(\xi))$$

für alle $(s,\xi) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}^3$ gilt. Sie besitzen die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Menge $\mathcal{N} := \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \#\{s \in \mathbb{C} \mid p(s,\xi) = 0\} \le 2\}$ ist abgeschlossen und eine Lebesgue-Nullmenge, d. h. für fast alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ sind die Nullstellen $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ paarweise verschieden. Dabei gehört der Punkt $\xi = 0$ nicht zu $\mathcal{N}$.

(ii) Für $j \in \{1,2,3\}$ und $\xi \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ gilt $\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi)) < 0$. Insbesondere ist $\lambda_j(\xi) \neq 0$ für $\xi \neq 0$.

(iii) Für $|\xi| \to \infty$ gilt (ohne Einschränkung bezüglich der Indizierung)

$$\lambda_1(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1-i) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})\,,\ \ \lambda_2(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1+i) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})\ \ \textit{und}\ \ \lambda_3(\xi) = -\frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)\,.$$

Beweis: Da die Koeffizienten des Polynoms $p(\cdot,\xi)$ nur von $|\xi| \in \mathbb{R}_0^+$ abhängen, lassen sich die nachzuweisenden Eigenschaften auf die Abbildung

$$\widetilde{p}:\ \mathbb{C}\times\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}\,,\quad (s,r)\mapsto s^3 + \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}r\right)s^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}r\right)s + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}r$$

zurückführen. Bei $\widetilde{p}$ handelt es sich um ein Polynom in s mit Koeffizienten aus $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R})$. Nach Satz A.22 existieren drei stetige Funktionen $\widetilde{\lambda}_1 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$, $\widetilde{\lambda}_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ und $\widetilde{\lambda}_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$, sodass

$\widetilde{p}(s,r) = \prod_{j=1}^{3}(s - \widetilde{\lambda}_j(r))$ für alle $(s,r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_0^+$ gilt. Wir setzen $\lambda_j(\xi) := \widetilde{\lambda}_j(|\xi|^2)$ für $\xi \in \mathbb{R}^3$ und $j \in \{1,2,3\}$. Dann ist λ_j stetig und für $(s,\xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^3$ ergibt sich

$$p(s,\xi) = \widetilde{p}(s,|\xi|^2) = \prod_{j=1}^{3}\Big(s - \widetilde{\lambda}_j(|\xi|^2)\Big) = \prod_{j=1}^{3}(s - \lambda_j(\xi))\,.$$

Dass die Eigenschaften (i) bis (iii) erfüllt sind, sieht man wie folgt:

(i) Wir erweitern den Definitionsbereich von $\widetilde{p}$ auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und betrachten also die Abbildung

$$\widetilde{p}\colon\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad (s,\zeta) \mapsto s^3 + \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta\right)s^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta\right)s + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta\,.$$

Als Polynom dritten Grades besitzt $\widetilde{p}(\cdot,\zeta)$ für $\zeta \in \mathbb{C}$ maximal drei verschiedene Nullstellen. Der Maximalfall tritt auf, denn für $\zeta = 0$ lauten die Nullstellen $0\,,\ \frac{1}{\tau_q}(-1+i)$ und $\frac{1}{\tau_q}(-1-i)$. Damit bildet $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \#\{s \in \mathbb{C} \mid \widetilde{p}(s,\zeta) = 0\} \le 2\}$ die Menge der kritischen Punkte von $\widetilde{p}$. Sie ist nach Satz A.23 (i) lokal endlich und als eine Teilmenge hiervon ist insbesondere die Menge $M := \{r \in \mathbb{R}_0^+ \mid \#\{s \in \mathbb{C} \mid \widetilde{p}(s,r) = 0\} \le 2\}$ lokal endlich. Nachdem $p(\cdot,\xi)$ und $\widetilde{p}(\cdot,|\xi|^2)$ für $\xi \in \mathbb{R}^3$ dieselben Nullstellen besitzen, lässt sich die in der Behauptung definierte Menge $\mathcal{N}$ als Vereinigung einer lokal endlichen Familie abgeschlossener Nullmengen (Hyperflächen) darstellen. Als solche ist sie ebenfalls eine Nullmenge und nach [Bou66, S. 22] abgeschlossen:

$$\mathcal{N} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \#\{s \in \mathbb{C} \mid p(s,\xi) = 0\} \le 2\} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi|^2 \in M\} = \bigcup_{r \in M}\{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi|^2 = r\}\,.$$

(ii) Die Aussage lässt sich mit dem Hurwitz-Kriterium A.21 (i) überprüfen. Für alle $\xi \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ sind die führenden Hauptminoren der zu $p(\cdot,\xi)$ gehörigen Hurwitz-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 & \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 & 0 \\ 1 & \frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 & \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 \end{pmatrix}$$

positiv: $h^{(1)}(\xi) := \dfrac{2}{\tau_q} + \dfrac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 > 0\,,$

$$h^{(2)}(\xi) := \left(\frac{2}{\tau_q} + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right)\left(\frac{2}{\tau_q^2} + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2\right) - \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 > \frac{2\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^4}|\xi|^2 - \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 > 0\,,$$

da $\tau_\theta > \tau_q$,

und $h^{(3)}(\xi) := \dfrac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 \cdot h^{(2)}(\xi) > 0\,.$

Daraus folgt, dass jede Nullstelle von $p(\cdot,\xi)$ einen negativen Realteil aufweist.

(iii) Um das Verhalten der Nullstellen für $|\xi| \to \infty$ zu bestimmen, betrachten wir die Abbildung

$$\widetilde{q}\colon\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad (s,\zeta) \mapsto s^3 + \left(\frac{2}{\tau_q}\zeta + \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}\right)s^2 + \left(\frac{2}{\tau_q^2}\zeta^2 + \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta\right)s + \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}\zeta^2\,,$$

die sich durch den Zusammenhang $\widetilde{p}(\zeta s,\zeta) = \zeta^3\widetilde{q}(s,\zeta^{-1})$ auszeichnet. Für $\widetilde{q}(\cdot,0)$ erhalten wir in Anzahl der Vielfachheit die Nullstellen $\widetilde{\eta}_1(0) = 0\,,\ \widetilde{\eta}_2(0) = 0$ und $\widetilde{\eta}_3(0) = -\frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}$. Die weitere Argumentation beruht nun auf Satz A.23. Als Nullstelle einfacher Vielfachheit kann $\widetilde{\eta}_3(0)$ keinen Verzweigungspunkt hervorrufen. Somit existieren ein $r \in \mathbb{R}^+$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{\eta}_3 : B(0,r) \to \mathbb{C}$, die für $\zeta \in B(0,r)$ eine der Nullstellen von $\widetilde{q}(\cdot,\zeta)$ beschreibt, und es folgt

$$\widetilde{\eta}_3(\zeta) = -\frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2} + \mathcal{O}(|\zeta|) \quad \text{für } |\zeta| \to 0\,.$$

Die doppelte Nullstelle $\widetilde{\eta}_1(0) = \widetilde{\eta}_2(0) = 0$ kann maximal einen Verzweigungspunkt der Ordnung eins hervorrufen, d. h. die Funktionen $\widetilde{\eta}_1$ und $\widetilde{\eta}_2$, die die verbleibenden Nullstellen von $\widetilde{q}(\cdot,\zeta)$ beschreiben, sind entweder in $B(0,r)$ für ein hinreichend kleines $r \in \mathbb{R}^+$ holomorph oder sie bilden dort die beiden Zweige einer zweiwertigen analytischen Funktion. Wir wollen zeigen, dass Letzteres nicht sein kann und zu den, dann also holomorphen, Funktionen $\widetilde{\eta}_1$ und $\widetilde{\eta}_2$ den ersten nicht verschwindenden Term ihrer Potenzreihendarstellung bestimmen.

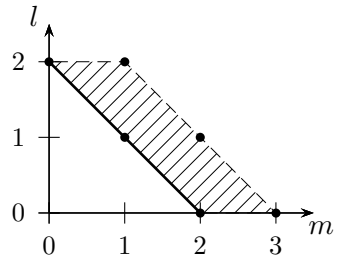

Abbildung 6.1: Newton-Polygon zu $\widetilde{q}(s,\zeta)$

Anhand des Newton-Polygons zu $\widetilde{q}$ aus Abbildung 6.1 erkennen wir, dass für $j \in \{1,2\}$ der jeweils erste Exponent $\gamma_{j,1} = 1$ lautet. Die zugehörigen Koeffizienten lassen sich aus der Gleichung $a_{2,0}\widetilde{\eta}_{j,\gamma_{j,1}}^2 + a_{1,1}\widetilde{\eta}_{j,\gamma_{j,1}} + a_{0,2} = 0$ mit $a_{2,0} := \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}$, $a_{1,1} := \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}$ und $a_{0,2} := \frac{2\kappa}{\varrho c_v \tau_q^2}$ bestimmen. Wir erhalten $\widetilde{\eta}_{1,1} = -\frac{1}{\tau_\theta}(1-i)$ und $\widetilde{\eta}_{2,1} = -\frac{1}{\tau_\theta}(1+i)$. Angenommen, die Funktionen $\widetilde{\eta}_1$ und $\widetilde{\eta}_2$ wären in $B(0,r)$ für ein hinreichend kleines $r \in \mathbb{R}^+$ die beiden Zweige einer zweiwertigen analytischen Funktion. Dann gäbe es eine holomorphe Funktion $F : B(0,r) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $\widetilde{\eta}_j(\zeta) = F\big(\sqrt{|\zeta|}e^{j\pi i}e^{\frac{i}{2}\arg(\zeta)}\big)$ für $j \in \{1,2\}$. Insbesondere müsste dann aber $\widetilde{\eta}_{j,1} = c_2 = \widetilde{\eta}_{j,2}$ gelten, was nach den errechneten Werten nicht der Fall ist und somit die Annahme zum Widerspruch führt. Insgesamt folgt also

$$\widetilde{\eta}_1(\zeta) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1-i)\zeta + \mathcal{O}\big(|\zeta|^2\big) \quad \text{und} \quad \widetilde{\eta}_2(\zeta) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1+i)\zeta + \mathcal{O}\big(|\zeta|^2\big) \quad \text{für } |\zeta| \to 0\,.$$

Aufgrund des bestehenden Zusammenhangs zwischen den Polynomen p, $\widetilde{p}$ und $\widetilde{q}$ stellt nun $\zeta\widetilde{\eta}_j(\zeta^{-1})$ für $j \in \{1,2,3\}$ eine Nullstelle von $\widetilde{p}(\cdot,\zeta)$ und damit $|\xi|^2\widetilde{\eta}_j(|\xi|^{-2})$ eine Nullstelle von $p(\cdot,\xi)$ dar. Damit erhalten wir für $|\xi| \to \infty$

$$\lambda_1(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1-i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-2}\big)\,,\ \ \lambda_2(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1+i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-2}\big) \ \text{ und } \ \lambda_3(\xi) = -\frac{\kappa\tau_\theta^2}{\varrho c_v \tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)\,.$$

□

Ist ξ aus $\mathcal{N}$, so kann das Polynom $p(\cdot,\xi)$ entweder zwei verschiedene Nullstellen, darunter eine einfache und eine doppelte, oder eine einzige dreifache Nullstelle besitzen. Zur Unterscheidung dieser beiden Fälle zerlegen wir im Folgenden die Menge $\mathcal{N}$ disjunkt in

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \quad &\text{mit} \quad \mathcal{N}_1 := \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \#\{s \in \mathbb{C} \mid p(s,\xi) = 0\} = 2\} \\ &\text{und} \quad \mathcal{N}_2 := \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \#\{s \in \mathbb{C} \mid p(s,\xi) = 0\} = 1\}\,. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zur Berechnung der Lösung $f_{\sigma,t_0}(\xi)$ der Differentialgleichung (6.3). Zu ihrer Darstellung benötigen wir zwei Hilfsfunktionen F_{t_0} und G_{t_0}, deren Definition wir der Übersichtlichkeit halber voranstellen.

Definition 6.2 (Funktion F_{t_0}). *Zu $t_0 \in \mathbb{R}^+$ definieren wir $F_{t_0} : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch*

$$F_{t_0}(t,\lambda) := \frac{2}{\tau_q^2\lambda}\Big((e^{\lambda t}-1)H(t) - (e^{\lambda(t-t_0)}-1)H(t-t_0)\Big) + \Big(\frac{2}{\tau_q}+\lambda\Big)\Big(e^{\lambda t}H(t) - e^{\lambda(t-t_0)}H(t-t_0)\Big)$$

für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$ und $F_{t_0}(t,0) := \dfrac{2}{\tau_q^2}(tH(t) - (t-t_0)H(t-t_0)) + \dfrac{2}{\tau_q}(H(t) - H(t-t_0))\,.$

Definition 6.3 (Funktion G_{t_0}). *Zu $t_0 \in \mathbb{R}^+$ definieren wir die Funktion $G_{t_0} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ wie folgt: Für $t \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{N}$ sei*

$$G_{t_0}(t,\xi) := \frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_2(\xi))}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_3(\xi))}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))},$$

wobei $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ die Nullstellen von $p(\cdot,\xi)$ bezeichnen. Für $\xi \in \mathcal{N}_1$ sei

$$G_{t_0}(t,\xi) := \frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}(t,z)}{z-\lambda_1(\xi)}\bigg|_{z=\lambda_2(\xi)},$$

wobei $\lambda_1(\xi)$ die einfache und $\lambda_2(\xi)$ die doppelte Nullstelle von $p(\cdot,\xi)$ bezeichne. Für $\xi \in \mathcal{N}_2$ sei

$$G_{t_0}(t,\xi) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}F_{t_0}(t,z)\bigg|_{z=\lambda(\xi)}, \quad \text{wobei } \lambda(\xi) \text{ die dreifache Nullstelle von } p(\cdot,\xi) \text{ bezeichne.}$$

Lemma 6.4 (Wertebereich von G_{t_0}). *Für $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}^3$ liegt $G_{t_0}(t,\xi)$ in $\mathbb{R}$.*

Beweis: Die Funktion G_{t_0} ist wohldefiniert; die Existenz der in der Definition auftretenden Ableitungen ergibt sich daraus, dass die Funktion $F_{t_0}(t,\cdot)$ holomorph ist (siehe Lemma 6.8 (i)). Da das Polynom $p(\cdot,\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^3$ ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt, sind entweder alle drei Nullstellen reell oder es gibt eine reelle und zwei echt komplexe, zueinander komplex konjugierte Nullstellen. Im ersten Fall liegt $G_{t_0}(t,\xi)$ in $\mathbb{R}$, da $F_{t_0}|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ offensichtlich nach $\mathbb{R}$ abbildet. Der zweite Fall kann nur für $\xi \in \mathbb{R}^3\backslash\mathcal{N}$, also wenn die Nullstellen $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ paarweise verschieden sind, auftreten. Dann liegt $G_{t_0}(t,\xi)$ aber ebenfalls in $\mathbb{R}$, denn wie man leicht sieht, gilt $F_{t_0}(t,\overline{\lambda}) = \overline{F_{t_0}(t,\lambda)}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, und wenn wir ohne Einschränkung bezüglich der Indizierung $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ mit $\lambda_2(\xi) = \overline{\lambda_1(\xi)}$ und $\lambda_3(\xi) \in \mathbb{R}$ annehmen, ergibt sich mit der für $\xi \in \mathbb{R}^3\backslash\mathcal{N}$ geltenden Darstellung

$$\begin{aligned}
G_{t_0}(t,\xi) &= \frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\overline{\lambda_1(\xi)})(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{F_{t_0}(t,\overline{\lambda_1(\xi)})}{(\overline{\lambda_1(\xi)}-\lambda_1(\xi))(\overline{\lambda_1(\xi)}-\lambda_3(\xi))} \\
&\quad + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_3(\xi))}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\overline{\lambda_1(\xi)})} \\
&= \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}(\lambda_1(\xi))}\left(\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)} - \overline{\left(\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)}\right)}\right) + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_3(\xi))}{|\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi)|^2} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Im}(\lambda_1(\xi))}\,\mathrm{Im}\left(\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)}\right) + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_3(\xi))}{|\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi)|^2} \quad \in \mathbb{R}\,. \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

□

Mithilfe von G_{t_0} können wir nun die Lösung der Differentialgleichung (6.3) beschreiben.

Satz 6.5 (Lösung der Differentialgleichung (6.3)). *Zu $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \mathbb{R}^3$ besitzt die Differentialgleichung (6.3) eine eindeutige Lösung in $\mathscr{D}'_R(\mathbb{R})$. Diese ist regulär und ihre erzeugende Funktion $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist gegeben durch*

$$f_{\sigma,t_0} : \ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (t,\xi) \mapsto \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} G_{t_0}(t,\xi)\,.$$

Beweis: Dass f_{σ,t_0} nach $\mathbb{R}$ abbildet, beruht auf der entsprechenden Eigenschaft der Abbildung G_{t_0}, die in Lemma 6.4 gezeigt wurde. Ausgehend von der Definition von G_{t_0} ließe sich nachrechnen, dass die angegebene Abbildung die Differentialgleichung erfüllt, jedoch möchten wir stattdessen den konstruktiven Beweis angeben, der das Zustandekommen der Funktion G_{t_0} erklärt. Der Beweis gliedert sich in die Fälle $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash (\mathcal{N} \cup \{0\})$, $\xi = 0$, $\xi \in \mathcal{N}_1$ und $\xi \in \mathcal{N}_2$.

▸ Fall $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash (\mathcal{N} \cup \{0\})$

Für $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash (\mathcal{N} \cup \{0\})$ sind die Nullstellen $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ und $\lambda_3(\xi)$ von $p(\cdot,\xi)$ paarweise sowie von Null verschieden. Es gilt $p(s,\xi) = (s-\lambda_1(\xi))(s-\lambda_2(\xi))(s-\lambda_3(\xi))$ und über eine Partialbruchzerlegung erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(s,\xi)} &= \frac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))} \cdot \frac{1}{s-\lambda_1(\xi)} + \frac{1}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))} \cdot \frac{1}{s-\lambda_2(\xi)} \\ &\quad + \frac{1}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))} \cdot \frac{1}{s-\lambda_3(\xi)} \,.\end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung $f_{\sigma,t_0}(\xi) \in \mathscr{D}'_R(\mathbb{R})$ von (6.3) ist nach [Zem65, S. 267] durch

$$f_{\sigma,t_0}(\xi) = [H(\cdot)h(\cdot,\xi)] * g_{\sigma,t_0}(\xi)$$

gegeben, wobei $h(\cdot,\xi)$ auf Grundlage der Nullstellen von $p(\cdot,\xi)$ und der berechneten Koeffizienten der Partialbruchzerlegung wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}h(t,\xi) := &\frac{e^{\lambda_1(\xi)t}}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{e^{\lambda_2(\xi)t}}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))} \\ &+ \frac{e^{\lambda_3(\xi)t}}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Da sich $g_{\sigma,t_0}(\xi)$, siehe die Gestalt unter (6.4), aus den Distributionen $[H]$, $[H(\cdot - t_0)]$, δ_0, δ_{t_0}, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{t_0}$ zusammensetzt, können wir das Faltungsprodukt explizit berechnen. Die auftretenden regulären Distributionen lassen sich auf der Ebene ihrer Erzeuger im klassischen Sinn falten (siehe [Zem65, S. 126]). So ergeben sich für $j \in \{1,2,3\}$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Big((e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)) * H(\cdot)\Big)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_j(\xi)r}H(r)H(t-r)\,\mathrm{d}r = \left\{\begin{array}{cl} 0\,, & \text{falls } t \le 0\,, \\ \int_0^t e^{\lambda_j(\xi)r}\,\mathrm{d}r\,, & \text{falls } t > 0\,, \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_j(\xi)}(e^{\lambda_j(\xi)t}-1)H(t) \\ \text{und} \quad \Big((e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)) * H(\cdot - t_0)\Big)(t) &= \frac{1}{\lambda_j(\xi)}(e^{\lambda_j(\xi)(t-t_0)}-1)H(t-t_0)\,.\end{aligned}$$

Die Faltungen der von $e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)$ erzeugten Distribution mit der δ-Distribution und deren Ableitung sind (siehe [Zem65, S. 127])

$$\begin{aligned}&[e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \delta_0 = [e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)]\,, \qquad [e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \delta_{t_0} = [e^{\lambda_j(\xi)(\cdot - t_0)}H(\cdot - t_0)] \\ &[e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)] = \lambda_j(\xi)[e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)] + e^{\lambda_j(\xi)\cdot}\delta_0 = \lambda_j(\xi)[e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)] + \delta_0 \\ &\text{und} \quad [e^{\lambda_j(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{t_0} = \lambda_j(\xi)[e^{\lambda_j(\xi)(\cdot - t_0)}H(\cdot - t_0)] + \delta_{t_0}\,.\end{aligned}$$

Nachdem die Faltung distributiv ist, können wir daraus das Ergebnis zusammensetzen:

$$
\begin{aligned}
f_{\sigma,t_0}(\xi) &= [H(\cdot)h(\cdot,\xi)] * g_{\sigma,t_0}(\xi) \\
&= \Big[\tfrac{e^{\lambda_1(\xi)\cdot}}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))}H(\cdot) + \tfrac{e^{\lambda_2(\xi)\cdot}}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))}H(\cdot) + \tfrac{e^{\lambda_3(\xi)\cdot}}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}H(\cdot)\Big] \\
&\quad * \tfrac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Big(\tfrac{2}{\tau_q^2}([H]-[H(\cdot-t_0)]) + \tfrac{2}{\tau_q}(\delta_0-\delta_{t_0}) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_0 - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{t_0}\Big) \\
&= \tfrac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Bigg(\tfrac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))}\cdot\tfrac{2}{\tau_q^2\lambda_1(\xi)}\Big[(e^{\lambda_1(\xi)\cdot}-1)H(\cdot)-(e^{\lambda_1(\xi)(\cdot-t_0)}-1)H(\cdot-t_0)\Big] \\
&\qquad + \tfrac{1}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))}\cdot\tfrac{2}{\tau_q^2\lambda_2(\xi)}\Big[(e^{\lambda_2(\xi)\cdot}-1)H(\cdot)-(e^{\lambda_2(\xi)(\cdot-t_0)}-1)H(\cdot-t_0)\Big] \\
&\qquad + \tfrac{1}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}\cdot\tfrac{2}{\tau_q^2\lambda_3(\xi)}\Big[(e^{\lambda_3(\xi)\cdot}-1)H(\cdot)-(e^{\lambda_3(\xi)(\cdot-t_0)}-1)H(\cdot-t_0)\Big] \\
&\qquad + \tfrac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))}\Big(\tfrac{2}{\tau_q}+\lambda_1(\xi)\Big)\Big[e^{\lambda_1(\xi)\cdot}H(\cdot)-e^{\lambda_1(\xi)(\cdot-t_0)}H(\cdot-t_0)\Big] \\
&\qquad + \tfrac{1}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))}\Big(\tfrac{2}{\tau_q}+\lambda_2(\xi)\Big)\Big[e^{\lambda_2(\xi)\cdot}H(\cdot)-e^{\lambda_2(\xi)(\cdot-t_0)}H(\cdot-t_0)\Big] \\
&\qquad + \tfrac{1}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}\Big(\tfrac{2}{\tau_q}+\lambda_3(\xi)\Big)\Big[e^{\lambda_3(\xi)\cdot}H(\cdot)-e^{\lambda_3(\xi)(\cdot-t_0)}H(\cdot-t_0)\Big] \\
&\quad + \underbrace{\Big(\tfrac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))}+\tfrac{1}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))}+\tfrac{1}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}\Big)}_{=0}(\delta_0-\delta_{t_0})\Bigg).
\end{aligned}
$$

Demzufolge handelt es sich bei $f_{\sigma,t_0}(\xi)$ um eine reguläre Distribution. Erzeugt wird sie von der ebenfalls mit f_{σ,t_0} bezeichneten Funktion $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)$, die für $t \in \mathbb{R}$ (bis auf Abänderung auf einer Nullmenge) durch

$$
\begin{aligned}
f_{\sigma,t_0}(t,\xi) := \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Bigg(&\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_2(\xi))}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))} \\
&+ \frac{F_{t_0}(t,\lambda_3(\xi))}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}\Bigg)
\end{aligned}
$$

gegeben ist, wobei F_{t_0} die Funktion aus der Definition 6.2 ist. Dass $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ liegt, erkennt man leicht anhand der Gestalt von F_{t_0}.

▸ Fall $\xi = 0$

Das Polynom $p(\cdot,0)$ besitzt zwar ebenfalls drei paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$ und $\lambda_3(0)$, jedoch ist eine davon identisch Null (vergleiche den Beweis zu Satz 6.1 (i)); ohne Einschränkung wählen wir $\lambda_3(0) = 0$. Für diese ist dann $((e^{\lambda_3(0)\cdot}H(\cdot)) * H(\cdot))(t) = tH(t)$ und $((e^{\lambda_3(0)\cdot}H(\cdot)) * H(\cdot-t_0))(t) = (t-t_0)H(t-t_0)$, wodurch sich das vorherige Ergebnis zu

$$
f_{\sigma,t_0}(t,0) := \frac{1}{\varrho c_v t_0}\Bigg(\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(0))}{(\lambda_1(0)-\lambda_2(0))\lambda_1(0)} + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_2(0))}{(\lambda_2(0)-\lambda_1(0))\lambda_2(0)} + \frac{F_{t_0}(t,0)}{\lambda_1(0)\lambda_2(0)}\Bigg)
$$

mit $F_{t_0}(t,0) := \frac{2}{\tau_q^2}(tH(t)-(t-t_0)H(t-t_0)) + \frac{2}{\tau_q}(H(t)-H(t-t_0))$ abwandelt.

▸ Fall $\xi \in \mathcal{N}_1$

Es bezeichne $\lambda_1(\xi)$ die einfache und $\lambda_2(\xi)$ die doppelte Nullstelle von $p(\cdot,\xi)$. Dann gilt

$$
\frac{1}{p(s,\xi)} = \frac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2}\cdot\Bigg(\frac{1}{s-\lambda_1(\xi)} - \frac{1}{s-\lambda_2(\xi)}\Bigg) + \frac{1}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)}\cdot\frac{1}{(s-\lambda_2(\xi))^2}
$$

und dementsprechend ist in der Lösungsdarstellung $f_{\sigma,t_0}(\xi) = [H(\cdot)h(\cdot,\xi)] * g_{\sigma,t_0}(\xi)$ die Funktion $h(\cdot,\xi)$ laut [Zem65, S. 267] als

$$h(t,\xi) := \frac{e^{\lambda_1(\xi)t} - e^{\lambda_2(\xi)t}}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2} + \frac{te^{\lambda_2(\xi)t}}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

zu setzen. Von neuer Gestalt treten Faltungen mit $\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot}$ auf. Diese berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
&\Big((\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)) * H(\cdot)\Big)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} re^{\lambda_2(\xi)r} H(r)H(t-r)\,\mathrm{d}r = \Big(\frac{te^{\lambda_2(\xi)t}}{\lambda_2(\xi)} + \frac{1-e^{\lambda_2(\xi)t}}{\lambda_2(\xi)^2}\Big)H(t)\\
&\quad\text{und}\quad \Big((\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)) * H(\cdot - t_0)\Big)(t) = \Big(\frac{(t-t_0)e^{\lambda_2(\xi)(t-t_0)}}{\lambda_2(\xi)} + \frac{1-e^{\lambda_2(\xi)(t-t_0)}}{\lambda_2(\xi)^2}\Big)H(t-t_0)\,,\\
&[\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] * \delta_0 = [\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] \quad\text{und}\quad [\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] * \delta_{t_0} = [(\cdot - t_0)e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)} H(\cdot - t_0)]\,,\\
&[\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_0 = [e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] + \lambda_2(\xi)[\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] + \cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot}\delta_0\\
&\qquad\qquad = [e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] + \lambda_2(\xi)[\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)]\\
&\quad\text{und}\quad [\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot)] * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{t_0} = [e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)} H(\cdot - t_0)] + \lambda_2(\xi)[(\cdot - t_0)e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)} H(\cdot - t_0)]\,.
\end{aligned}$$

Somit lautet die Lösung

$$\begin{aligned}
f_{\sigma,t_0}(\xi) &= \Big[\frac{e^{\lambda_1(\xi)\cdot} - e^{\lambda_2(\xi)\cdot}}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2} H(\cdot) + \frac{\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot}}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)} H(\cdot)\Big]\\
&\quad * \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Big(\frac{2}{\tau_q^2}([H] - [H(\cdot - t_0)]) + \frac{2}{\tau_q}(\delta_0 - \delta_{t_0}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{t_0}\Big)\\
&= \tfrac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Big(\tfrac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2}\cdot\Big(\tfrac{2}{\tau_q^2\lambda_1(\xi)}\Big[(e^{\lambda_1(\xi)\cdot} - 1)H(\cdot) - (e^{\lambda_1(\xi)(\cdot - t_0)} - 1)H(\cdot - t_0)\Big]\\
&\qquad\qquad - \tfrac{2}{\tau_q^2\lambda_2(\xi)}\Big[(e^{\lambda_2(\xi)\cdot} - 1)H(\cdot) - (e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)} - 1)H(\cdot - t_0)\Big]\Big)\\
&\quad + \tfrac{1}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)}\cdot\tfrac{2}{\tau_q^2}\Big[\Big(\tfrac{\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot}}{\lambda_2(\xi)} + \tfrac{1-e^{\lambda_2(\xi)\cdot}}{\lambda_2(\xi)^2}\Big)H(\cdot) - \Big(\tfrac{(\cdot - t_0)e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)}}{\lambda_2(\xi)} + \tfrac{1-e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)}}{\lambda_2(\xi)^2}\Big)H(\cdot - t_0)\Big]\\
&\quad + \tfrac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2}\Big(\Big(\tfrac{2}{\tau_q} + \lambda_1(\xi)\Big)\Big[e^{\lambda_1(\xi)\cdot} H(\cdot) - e^{\lambda_1(\xi)(\cdot - t_0)} H(\cdot - t_0)\Big]\\
&\qquad\qquad - \Big(\tfrac{2}{\tau_q} + \lambda_2(\xi)\Big)\Big[e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot) - e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)} H(\cdot - t_0)\Big]\Big)\\
&\quad + \tfrac{1}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)}\Big(\tfrac{2}{\tau_q} + \lambda_2(\xi)\Big)\Big[\cdot e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot) - (\cdot - t_0)e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)} H(\cdot - t_0)\Big]\\
&\quad + \tfrac{1}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)}\Big[e^{\lambda_2(\xi)\cdot} H(\cdot) - e^{\lambda_2(\xi)(\cdot - t_0)} H(\cdot - t_0)\Big]\Big)
\end{aligned}$$

und ihre erzeugende Funktion $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist für $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f_{\sigma,t_0}(t,\xi) := \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Bigg(&\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi)) - F_{t_0}(t,\lambda_2(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2}\\
&+ \frac{1}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)}\cdot\frac{2}{\tau_q^2}\Bigg(\Big(\frac{te^{\lambda_2(\xi)t}}{\lambda_2(\xi)} + \frac{1-e^{\lambda_2(\xi)t}}{\lambda_2(\xi)^2}\Big)H(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad - \Big(\frac{(t-t_0)e^{\lambda_2(\xi)(t-t_0)}}{\lambda_2(\xi)} + \frac{1-e^{\lambda_2(\xi)(t-t_0)}}{\lambda_2(\xi)^2}\Big)H(t-t_0)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)}\Big(\frac{2}{\tau_q}+\lambda_2(\xi)\Big)\Big(te^{\lambda_2(\xi)t}H(t) - (t-t_0)e^{\lambda_2(\xi)(t-t_0)}H(t-t_0)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)}\Big(e^{\lambda_2(\xi)t}H(t) - e^{\lambda_2(\xi)(t-t_0)}H(t-t_0)\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi)) - F_{t_0}(t,\lambda_2(\xi)) + (\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))\frac{\partial}{\partial z}F_{t_0}(t,z)|_{z=\lambda_2(\xi)}}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2} \qquad (6.8) \\
&= \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \left(\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}(t,z)}{z-\lambda_1(\xi)}\Big|_{z=\lambda_2(\xi)} \right).
\end{aligned}
$$

▸ Fall $\xi \in \mathcal{N}_2$

Es bezeichne $\lambda(\xi)$ die dreifache Nullstelle von $p(\cdot,\xi)$. Dann gilt $\frac{1}{p(s,\xi)} = \frac{1}{(s-\lambda(\xi))^3}$ und die Lösung ist durch $f_{\sigma,t_0}(\xi) = [H(\cdot)h(\cdot,\xi)] * g_{\sigma,t_0}(\xi)$ mit

$$
h(t,\xi) := \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda(\xi)t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}
$$

gegeben (in [Zem65, S. 267, (6)], worauf wir uns beziehen, ist der Faktor $\frac{1}{(\nu-1)!}$ zu ergänzen, vergleiche [Zem65, S. 239, (10)]). Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\Big((\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)) * H(\cdot)\Big)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{\lambda(\xi)r} H(r)H(t-r)\,\mathrm{d}r \\
&= \Big(\frac{t^2 e^{\lambda(\xi)t}}{\lambda(\xi)} - \frac{2te^{\lambda(\xi)t}}{\lambda(\xi)^2} + 2\frac{e^{\lambda(\xi)t}-1}{\lambda(\xi)^3}\Big)H(t) \\
\text{und} \quad \Big((\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)) * H(\cdot-t_0)\Big)(t) & \\
&= \Big(\frac{(t-t_0)^2 e^{\lambda(\xi)(t-t_0)}}{\lambda(\xi)} - \frac{2(t-t_0)e^{\lambda(\xi)(t-t_0)}}{\lambda(\xi)^2} + 2\frac{e^{\lambda(\xi)(t-t_0)}-1}{\lambda(\xi)^3}\Big)H(t-t_0)\,, \\
[\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \delta_0 &= [\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] \quad \text{und} \quad [\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \delta_{t_0} = [(\cdot-t_0)^2 e^{\lambda(\xi)(\cdot-t_0)}H(\cdot-t_0)]\,, \\
[\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_0 &= 2[\cdot e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] + \lambda(\xi)[\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] + \cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}\delta_0 \\
&= 2[\cdot e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] + \lambda(\xi)[\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] \\
\text{und} \quad [\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{t_0} &= 2[(\cdot-t_0)e^{\lambda(\xi)(\cdot-t_0)}H(\cdot-t_0)] + \lambda(\xi)[(\cdot-t_0)^2 e^{\lambda(\xi)(\cdot-t_0)}H(\cdot-t_0)]\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich, dass $f_{\sigma,t_0}(\xi) = \frac{1}{2}[\cdot^2 e^{\lambda(\xi)\cdot}H(\cdot)] * g_{\sigma,t_0}(\xi)$ von der folgenden $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$-Funktion $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)$ erzeugt wird:

$$
\begin{aligned}
f_{\sigma,t_0}(t,\xi) = \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \cdot \frac{1}{2}\Bigg(& \frac{4}{\tau_q^2\lambda(\xi)^3}\Big((e^{\lambda(\xi)t}-1)H(t) - (e^{\lambda(\xi)(t-t_0)}-1)H(t-t_0)\Big) \\
&+ \Big(\frac{2}{\tau_q^2\lambda(\xi)} + \frac{2}{\tau_q} + \lambda(\xi)\Big)\Big(t^2 e^{\lambda(\xi)t}H(t) - (t-t_0)^2 e^{\lambda(\xi)(t-t_0)}H(t-t_0)\Big) \\
&+ \Big(2 - \frac{4}{\tau_q^2\lambda(\xi)^2}\Big)\Big(te^{\lambda(\xi)t}H(t) - (t-t_0)e^{\lambda(\xi)(t-t_0)}H(t-t_0)\Big)\Bigg) \qquad (6.9) \\
= \frac{1}{2\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} & \frac{\partial^2}{\partial z^2}F_{t_0}(t,z)\Big|_{z=\lambda(\xi)}\,.
\end{aligned}
$$

□

6.1.2 Regularität der Lösung

Im vorangehenden Abschnitt haben wir die Differentialgleichung (6.3) zu einem festen $\xi \in \mathbb{R}^3$ gelöst und eine Darstellung für die Lösung $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)$ hergeleitet. Im nächsten Schritt wollen wir die Regularität der Lösung untersuchen. Anhand der Definition von F_{t_0} ist zu erkennen, dass es sich bei $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)$ bezüglich des Zeitparameters t um eine glatte Lösung auf dem Intervall (t_0,∞) handelt. Um später auf $f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)$ die Fourier-Rücktransformation anwenden zu können, benötigen wir vor allem aber auch Informationen über die Regularität bezüglich ξ.

Der Übersichtlichkeit halber stellen wir zunächst Aussagen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit für die Funktionen F_{t_0} und G_{t_0} zusammen, die den wesentlichen Bestandteil der Funktion f_{σ,t_0} ausmachen. Zuvor führen wir noch den Begriff der lokal bezüglich t gleichmäßigen Stetigkeit ein.

Definition 6.6 (Lokal bezüglich t gleichmäßige Stetigkeit). *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ oder $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $h : I \times U \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Es sei $x \in U$. Wir nennen $h(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in x, falls gilt:*

$$\forall\, K \subset I \text{ kompakt } \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall\, y \in U,\ |y-x| < \delta,\ \forall\, t \in K:\ \ |h(t,y) - h(t,x)| < \varepsilon\,.$$

Alternativ hierzu schreiben wir $\lim_{y\to x} h(t,y) = h(t,x)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$, oder $h(t,y) \to h(t,x)$ für $y \to x$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$. Ist $h(t,\cdot)$ für alle $x \in U$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in x, so sagen wir, dass $h(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig ist.

Lemma 6.7 (Eigenschaften der lokal bezüglich t gleichmäßigen Stetigkeit). *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $U \subseteq \mathbb{C}$ oder $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $h,\ h_1,\ h_2 : I \times U \to \mathbb{K}$ Abbildungen.*

(i) Es seien $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ und $x \in U$. Sind $h_1(t,\cdot)$ und $h_2(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in x, so ist auch $\alpha h_1(t,\cdot) + \beta h_2(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in x.

(ii) Es seien $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $g \in \mathcal{C}^0(V,\mathbb{C})$ mit $g(V) \subset U \subseteq \mathbb{C}$ und $y \in V$. Ist $h(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in $g(y)$, so ist die Abbildung $h(t,g(\cdot))$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in y.

(iii) Es seien $g \in \mathcal{C}^0(U,\mathbb{K})$ und $x \in U$. Ist $h(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in x und existiert für jede kompakte Teilmenge $K \subset I$ ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|h(t,x)| \le c$ für alle $t \in K$, so ist $g(\cdot)h(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in x.

(iv) Ist $h(\cdot,x) \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$ für alle $x \in U$ und $h(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig, so ist $h \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I} \times U,\mathbb{K})$.

Beweis: Die ersten beiden Aussagen folgen anhand der Definition der lokal bezüglich t gleichmäßigen Stetigkeit unter Verwendung der Dreiecksungleichung bei (i) und unter Beachtung der Stetigkeit von g bei (ii). Die Aussage (iii) basiert auf der Abschätzung

$$|g(y)h(t,y) - g(x)h(t,x)| \le |g(y)||h(t,y) - h(t,x)| + |h(t,x)||g(y) - g(x)|$$

und den vorausgesetzten Eigenschaften, dass g stetig und damit auf einer kompakten Menge auch beschränkt ist, $h(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in x und $h(\cdot,x)$ auf jeder kompakten Teilmenge von I beschränkt ist. Die Aussage (iv) ergibt sich aus der Ungleichung

$$|h(t,x) - h(s,y)| \le |h(t,x) - h(s,x)| + |h(s,x) - h(s,y)|$$

unter Ausnutzung der Stetigkeit von $h(\cdot,x)$ und der lokal bezüglich $t \in I$ gleichmäßigen Stetigkeit von $h(t,\cdot)$. □

Lemma 6.8 (Regularität von F_{t_0}). *Es sei $t_0 \in \mathbb{R}^+$ und F_{t_0} die Funktion aus der Definition 6.2. Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir*

$$F_{t_0}^k : \ (t_0, \infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad (t, \lambda) \mapsto \left(\frac{2}{\tau_q^2}\lambda^{k-1} + \frac{2}{\tau_q}\lambda^k + \lambda^{k+1}\right)\left(e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-t_0)}\right).$$

Dann gilt:

(i) Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $F_{t_0}(t, \cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph.

(ii) Es sei $l \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ kompakt. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}(t, \lambda)| \leq c$ für alle $(t, \lambda) \in K$.

(iii) Für $l \in \mathbb{N}_0$ ist $\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}(t, \cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in \mathbb{R}$ stetig.

(iv) Für $l \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\backslash\{0, t_0\}, \mathbb{C})$.

(v) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $F_{t_0}^k \in \mathcal{C}^\infty((t_0, \infty) \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Insbesondere gelten für $F_{t_0}^k$ in entsprechend angepasster Formulierung die Aussagen (i) bis (iii).

(vi) Es ist $F_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{C}} \in \mathcal{C}^\infty((t_0, \infty) \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{C}} = \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

(i) Für $t \leq 0$ gilt $H(t) = H(t - t_0) = 0$, woraufhin $F_{t_0}(t, \cdot)$ der Nullfunktion entspricht und demnach holomorph auf $\mathbb{C}$ ist. Sei nun $t > 0$. Dass die Funktion $F_{t_0}(t, \cdot)$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph ist, erkennt man anhand ihrer Zusammensetzung aus einzelnen auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphen Funktionen wie $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$ und $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$. Im Punkt $\lambda = 0$ ist $F_{t_0}(t, \cdot)$ aufgrund der Grenzwerte $\lim_{\lambda\to 0} \frac{2}{\tau_q^2}\frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda} = \frac{2}{\tau_q^2} t$ und $\lim_{\lambda\to 0}(\frac{2}{\tau_q} + \lambda)e^{\lambda t} = \frac{2}{\tau_q}$ sowie denselbigen mit $t - t_0$ anstelle von t, sofern $t > t_0$ ist, zumindest stetig. Mit dem Riemannschen Fortsetzungssatz (siehe beispielsweise [RS02, Satz 7.3.3]) folgt daraus, dass $F_{t_0}(t, \cdot)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

(ii) Da die Heaviside-Funktion nur die Werte 0 und 1 annimmt, gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |F_{t_0}(t, \lambda)| &\leq \frac{2}{\tau_q^2}\Big(|h(t, \lambda)| + |h(t - t_0, \lambda)|\Big) + \Big(\frac{2}{\tau_q} + |\lambda|\Big)\Big(|e^{\lambda t}| + |e^{\lambda(t-t_0)}|\Big) \\ \text{mit} \qquad h : \ \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad (t, \lambda) &\mapsto \begin{cases} \frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda} & \text{für } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,, \\ t & \text{für } \lambda = 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktionen $(t, \lambda) \mapsto h(t, \lambda)$, $(t, \lambda) \mapsto h(t - t_0, \lambda)$, $(t, \lambda) \mapsto e^{\lambda t}$ und $(t, \lambda) \mapsto e^{\lambda(t-t_0)}$ sind auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ stetig und somit auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ beschränkt. Damit folgt die behauptete Aussage für $l = 0$. Sei nun $l \in \mathbb{N}$ und $K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ kompakt. Wir wählen ein $R \in \mathbb{R}^+$ so, dass $B(0, R) \supset K_2$ gilt. Da $F_{t_0}(t, \cdot)$ für $t \in K_1$ nach (i) holomorph ist, folgt mit der Cauchyschen Integralformel (siehe beispielsweise [Ahl79, S. 120])

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}(t, \lambda)\right| \leq \frac{l!}{2\pi}\left|\int_{\partial B(0,2R)} \frac{F_{t_0}(t, \lambda)}{(\zeta - \lambda)^{l+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{l!}{2\pi} \cdot 4\pi R \cdot \frac{1}{R^{l+1}} \max_{\substack{t\in K_1,\\ \eta\in\overline{B(0,2R)}}} |F_{t_0}(t, \eta)|$$

für alle $(t, \lambda) \in K$. Dass das Maximum existiert, wissen wir aufgrund der zuvor gezeigten Aussage für $l = 0$. Damit ist die Behauptung auch für $l \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(iii) Dass $\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}(t, \cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in \mathbb{R}$ stetig ist, beruht auf der Abschätzung

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}(t, \lambda) - \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} F_{t_0}(t, \eta)\right| \leq |\lambda - \eta| \max_{s\in[0,1]}\left|\frac{\partial^{l+1}}{\partial \lambda^{l+1}} F_{t_0}\big(t, \lambda + s(\eta - \lambda)\big)\right|$$

und der nach (ii) vorliegenden Beschränktheit von $\frac{\partial^{l+1}}{\partial \lambda^{l+1}} F_{t_0}$ auf einem Kompaktum.

(iv) Auf $\mathbb{R}\backslash\{0,t_0\}$, also abgesehen von den Sprungstellen der auftretenden Heaviside-Funktionen, ist $F_{t_0}(\cdot,\lambda)$ für $\lambda\in\mathbb{C}$ stetig. Dies gilt auch für die Ableitung $\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}F_{t_0}(\cdot,\lambda)$, bei der weitere Terme von ähnlicher Gestalt mit Faktoren t^m und $(t-t_0)^m$ für $m\in\{0,\dots,l\}$ hinzukommen.

(v) Anhand der Gestalt von $F_{t_0}^k$ wird schnell klar, dass es sich bei $F_{t_0}^k$ um eine beliebig glatte Funktion handelt.

(vi) Für $t>t_0$ gilt $H(t)=H(t-t_0)=1$, woraufhin die Funktion F_{t_0} eingeschränkt auf die Menge $(t_0,\infty)\times\mathbb{C}$ die Gestalt

$$F_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{C}}:\ (t_0,\infty)\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\,,\quad (t,\lambda)\mapsto\begin{cases}\left(\frac{2}{\tau_q^2\lambda}+\frac{2}{\tau_q}+\lambda\right)\left(e^{\lambda t}-e^{\lambda(t-t_0)}\right) & \text{für } \lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}\,,\\ \frac{2}{\tau_q^2}t_0 & \text{für } \lambda=0\end{cases}$$

annimmt. Für $k\in\mathbb{N}$ ist $\frac{\partial^k}{\partial t^k}F_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{C}}(\cdot,\lambda)=F_{t_0}^k(\cdot,\lambda)$ für $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, und auch in $\lambda=0$ ist diese Gleichheit gültig, denn es ist $\frac{\partial^k}{\partial t^k}F_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{C}}(\cdot,0)=0=F_{t_0}^k(\cdot,0)$. Zusammen mit den vorangehenden Eigenschaften kann daraus die Behauptung gefolgert werden. □

Satz 6.9 (Regularität von G_{t_0} bezüglich t). *Es sei $t_0\in\mathbb{R}^+$ und G_{t_0} die Funktion aus der Definition 6.3. Dann gilt: Für $\xi\in\mathbb{R}^3$ sind $G_{t_0}(\cdot,\xi)\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $G_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{R}^3}(\cdot,\xi)\in\mathcal{C}^\infty((t_0,\infty),\mathbb{R})$.*

Beweis: Nach Lemma 6.4 bildet die Funktion G_{t_0} nach $\mathbb{R}$ ab. Dass $G_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{R}^3}(\cdot,\xi)$ für $\xi\in\mathbb{R}^3$ in $\mathcal{C}^\infty((t_0,\infty),\mathbb{R})$ liegt, folgt aus der Differenzierbarkeit der Abbildung $\frac{\partial^l}{\partial z^l}F_{t_0}|_{(t_0,\infty)\times\mathbb{C}}(\cdot,z)|_{z=\lambda_j(\xi)}$ für $l\in\{0,1,2\}$ und $j\in\{1,2,3\}$ nach Lemma 6.8 (vi). Da $\frac{\partial^l}{\partial z^l}F_{t_0}(\cdot,z)|_{z=\lambda_j(\xi)}$ nach Lemma 6.8 (iv) in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}\backslash\{0,t_0\},\mathbb{C})$ liegt, ist $G_{t_0}(\cdot,\xi)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0,t_0\}$ stetig. Zu untersuchen bleibt die Stetigkeit in den Punkten $t=0$ und $t=t_0$. Dazu unterscheiden wir die Fälle $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash(\mathcal{N}\cup\{0\})$, $\xi=0$, $\xi\in\mathcal{N}_1$ und $\xi\in\mathcal{N}_2$.

▸ Fall $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash(\mathcal{N}\cup\{0\})$

Anhand der Definition 6.2 von F_{t_0} stellt man für $j\in\{1,2,3\}$ und $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ die rechtsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{t\searrow 0}F_{t_0}(t,\lambda_j(\xi))=\frac{2}{\tau_q}+\lambda_j(\xi)\qquad\text{und}$$
$$\lim_{t\searrow t_0}F_{t_0}(t,\lambda_j(\xi))=\frac{2}{\tau_q^2\lambda_j(\xi)}\left(e^{\lambda_j(\xi)t_0}-1\right)+\left(\frac{2}{\tau_q}+\lambda_j(\xi)\right)\left(e^{\lambda_j(\xi)t_0}-1\right)$$

sowie die linksseitigen Grenzwerte

$$\lim_{t\nearrow 0}F_{t_0}(t,\lambda_j(\xi))=0\quad\text{und}\quad\lim_{t\nearrow t_0}F_{t_0}(t,\lambda_j(\xi))=\frac{2}{\tau_q^2\lambda_j(\xi)}\left(e^{\lambda_j(\xi)t_0}-1\right)+\left(\frac{2}{\tau_q}+\lambda_j(\xi)\right)e^{\lambda_j(\xi)t_0}$$

fest. Außerdem gilt für $\xi\notin\mathcal{N}$

$$\tfrac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))}+\tfrac{1}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))}+\tfrac{1}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}=0$$

und

$$\tfrac{\lambda_1(\xi)}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))}+\tfrac{\lambda_2(\xi)}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))}+\tfrac{\lambda_3(\xi)}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))}=0\,.$$

Zusammen mit der Definition 6.3 von G_{t_0} erhält man daraus

$$\lim_{t\searrow 0}G_{t_0}(\cdot,\xi)=\lim_{t\nearrow 0}G_{t_0}(\cdot,\xi)\quad\text{und}\quad\lim_{t\searrow t_0}G_{t_0}(\cdot,\xi)=\lim_{t\nearrow t_0}G_{t_0}(\cdot,\xi)\,.$$

Somit ist $G_{t_0}(\cdot,\xi)$ für $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash(\mathcal{N}\cup\{0\})$ in den Punkten $t=0$ und $t=t_0$ stetig.

▸ Fall $\xi = 0$

Wie aus dem Beweis zu Satz 6.1 (i) ersichtlich, ist für $\xi = 0$ genau eine Nullstelle, ohne Einschränkung wählen wir $\lambda_3(\xi)$, identisch Null. Für $F_{t_0}(\cdot, \lambda_1(\xi))$ und $F_{t_0}(\cdot, \lambda_2(\xi))$ gelten dann dieselben Grenzwerte wie zuvor. Für $\lambda_3(\xi) = 0$ ergeben sich

$$\lim_{t\searrow 0} F(t, \lambda_3(\xi)) = \lim_{t\searrow 0} F(t, 0) = \frac{2}{\tau_q} \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\searrow t_0} F(t, \lambda_3(\xi)) = \lim_{t\searrow t_0} F(t, 0) = \frac{2}{\tau_q^2} t_0$$

sowie

$$\lim_{t\nearrow 0} F(t, \lambda_3(\xi)) = \lim_{t\nearrow 0} F(t, 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\nearrow t_0} F(t, \lambda_3(\xi)) = \lim_{t\nearrow t_0} F(t, 0) = \frac{2}{\tau_q^2} t_0 + \frac{2}{\tau_q}\,.$$

Zusammen mit

$$\tfrac{1}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))\lambda_1(\xi)} + \tfrac{1}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))\lambda_2(\xi)} + \tfrac{1}{\lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi)} = 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{\lambda_1(\xi)}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))\lambda_1(\xi)} + \tfrac{\lambda_2(\xi)}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))\lambda_2(\xi)} = 0$$

folgt daraus die Stetigkeit von $G_{t_0}(\cdot, 0)$ in den Punkten $t = 0$ und $t = t_0$.

▸ Fall $\xi \in \mathcal{N}_1$

Aus (6.8) entnimmt man die Darstellung

$$G_{t_0}(t, \xi) = \frac{F_{t_0}(t, \lambda_1(\xi)) - F_{t_0}(t, \lambda_2(\xi)) + (\lambda_2(\xi) - \lambda_1(\xi)) \frac{\partial}{\partial z} F_{t_0}(t, z)|_{z=\lambda_2(\xi)}}{(\lambda_1(\xi) - \lambda_2(\xi))^2}$$

und anhand der zu (6.8) vorangehenden Gleichheit bestimmt man die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t\searrow 0} \frac{\partial}{\partial z} F_{t_0}(t, z)\Big|_{z=\lambda_2(\xi)} &= 1\,,\\
\lim_{t\searrow t_0} \frac{\partial}{\partial z} F_{t_0}(t, z)\Big|_{z=\lambda_2(\xi)} &= \frac{2}{\tau_q^2}\left(\frac{t_0 e^{\lambda_2(\xi)t_0}}{\lambda_2(\xi)} + \frac{1 - e^{\lambda_2(\xi)t_0}}{\lambda_2(\xi)^2}\right) + \left(\frac{2}{\tau_q} + \lambda_2(\xi)\right) t_0 e^{\lambda_2(\xi)t_0} + e^{\lambda_2(\xi)t_0} - 1\,,\\
\lim_{t\nearrow 0} \frac{\partial}{\partial z} F_{t_0}(t, z)\Big|_{z=\lambda_2(\xi)} &= 0\,,\\
\lim_{t\nearrow t_0} \frac{\partial}{\partial z} F_{t_0}(t, z)\Big|_{z=\lambda_2(\xi)} &= \frac{2}{\tau_q^2}\left(\frac{t_0 e^{\lambda_2(\xi)t_0}}{\lambda_2(\xi)} + \frac{1 - e^{\lambda_2(\xi)t_0}}{\lambda_2(\xi)^2}\right) + \left(\frac{2}{\tau_q} + \lambda_2(\xi)\right) t_0 e^{\lambda_2(\xi)t_0} + e^{\lambda_2(\xi)t_0}\,.
\end{aligned}$$

Für $F_{t_0}(\cdot, \lambda_1(\xi))$ und $F_{t_0}(\cdot, \lambda_2(\xi))$ sind in den Punkten $t = 0$ und $t = t_0$ die unter dem Fall $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash (\mathcal{N} \cup \{0\})$ genannten rechts- und linksseitigen Grenzwerte gültig. Insgesamt sieht man damit leicht, dass $\lim_{t\searrow 0} G_{t_0}(\cdot, \xi) = \lim_{t\nearrow 0} G_{t_0}(\cdot, \xi)$ und $\lim_{t\searrow t_0} G_{t_0}(\cdot, \xi) = \lim_{t\nearrow t_0} G_{t_0}(\cdot, \xi)$ gilt.

▸ Fall $\xi \in \mathcal{N}_2$

Aus (6.9) greift man eine alternative Darstellung von $G_{t_0}(\cdot, \xi)$ heraus und überprüft anhand dieser die Übereinstimmung der rechts- und linksseitigen Grenzwerte. □

Satz 6.10 (Regularität von G_{t_0} bezüglich ξ). *Es sei $t_0 \in \mathbb{R}^+$ und G_{t_0} die Funktion aus der Definition 6.3. Dann gilt: $G_{t_0}(t, \cdot)$ ist lokal gleichmäßig bezüglich $t \in \mathbb{R}$ stetig und für $k \in \mathbb{N}$ ist $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t, \cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in (t_0, \infty)$ stetig.*

Beweis: Aus beweistechnischen Gründen führen wir die Notation $F_{t_0}^0 := F_{t_0} : I_0 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $I_0 := \mathbb{R}$ ein und für $k \in \mathbb{N}$ sei $F_{t_0}^k : I_k \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $I_k := (t_0, \infty)$ wie in Lemma 6.8 definiert. Die folgenden Aussagen gelten dann jeweils für $k \in \mathbb{N}_0$.

Der Nachweis der lokal bezüglich $t \in I_k$ gleichmäßigen Stetigkeit von $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t, \cdot)$ im Punkt $\xi \in \mathbb{R}^3$ erfolgt unterteilt nach dessen Lage in der Menge $\mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_1$ oder $\mathcal{N}_2$.

▸ Fall $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{N}$

Auf der Menge $I_k \times \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{N}$ ist $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}$ durch

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,\xi) = \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_2(\xi))}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_3(\xi))}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))} \tag{6.10}$$

gegeben. Nach Lemma 6.8 ist die Funktion $F_{t_0}^k$ auf jedem Kompaktum beschränkt und $F_{t_0}^k(t,\cdot)$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I_k$ stetig. Aus Satz 6.1 entnehmen wir außerdem, dass die Nullstellenfunktionen λ_1, λ_2 und λ_3 als Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{C}$ stetig sind und die Menge $\mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{N}$ offen ist. Als Zusammensetzung aus den genannten Funktionen ist dann $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,\cdot)$ nach Lemma 6.7 lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I_k$ stetig in ξ für $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{N}$.

▸ Fall $\xi \in \mathcal{N}_1$

In solch einem ξ fallen genau zwei Nullstellen zusammen, sagen wir, es sei $\lambda_1(\xi) \neq \lambda_2(\xi) = \lambda_3(\xi)$. Dann haben wir im Punkt ξ für $t \in I_k$ die Darstellung

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,\xi) = \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(\xi)}\bigg|_{z=\lambda_2(\xi)} . \tag{6.11}$$

Wir wollen zeigen, dass $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,x)$ für $x \to \xi$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I_k$ gegen $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,\xi)$ konvergiert, und begründen dazu zunächst, dass es genügt $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,x)$ im Grenzprozess von der Form (6.10) anzunehmen. Anhand des Beweises zu Satz 6.1 (i) lässt sich erkennen, dass zu $\xi \in \mathcal{N}_1$ ein $r \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass $B(\xi,r) \subset \mathbb{R}^3 \backslash (\mathcal{N}_2 \cup \{0\})$ gilt. Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ eine Folge mit $x_n \to \xi$ für $n \to \infty$, so können wir zunächst ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\xi,r)$ ist. Noch aber kann die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder endlich oder unendlich viele Folgenglieder aus $\mathcal{N}_1$ aufweisen. Im ersten Fall wähle man $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in B(\xi,r)\backslash\mathcal{N}_1$ für alle $n \geq n_0$ gilt, und betrachte statt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq n_0} \subset B(\xi,r)\backslash\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}^3\backslash(\mathcal{N}\cup\{0\})$. Im zweiten Fall umfasst die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_1$ mit $x_{n_m} \to \xi$ für $m \to \infty$. Da $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,x_{n_m})$ von der Form (6.11) ist, folgt die lokal bezüglich $t \in I_k$ gleichmäßige Konvergenz $\lim_{m\to\infty} \frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,x_{n_m}) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,\xi)$ mithilfe von Lemma 6.7 und Lemma 6.8 und es verbleibt die Konvergenz für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\backslash(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}} \subset B(\xi,r)\backslash\mathcal{N}_1$, sofern diese nicht schon endlich ist. Daher können wir im Folgenden ohne Einschränkung $x \in \mathbb{R}^3\backslash(\mathcal{N}\cup\{0\})$ und damit $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,x)$ von der Form (6.10) annehmen.

Ausgehend von (6.10) erhält man mithilfe von Lemma 6.7 und Lemma 6.8

$$\lim_{x\to\xi} \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{(\lambda_1(x)-\lambda_2(x))(\lambda_1(x)-\lambda_3(x))} = \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))^2} \quad \text{lokal gleichmäßig bezüglich } t \in I_k .$$

Somit bleibt nachzuweisen, dass

$$\lim_{x\to\xi}\left(\frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_2(x))}{(\lambda_2(x)-\lambda_1(x))(\lambda_2(x)-\lambda_3(x))} + \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_3(x))}{(\lambda_3(x)-\lambda_1(x))(\lambda_3(x)-\lambda_2(x))}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(\xi)}\bigg|_{z=\lambda_2(\xi)} \quad \text{lokal gleichmäßig bezüglich } t \in I_k \tag{6.12}$$

gilt. Sei dazu $I \subset I_k$ kompakt. Für $t \in I$ ist die Funktion $F_{t_0}^k(t,\cdot)$ nach Lemma 6.8 (i) und (v) holomorph, sodass wir die Taylorentwicklung holomorpher Funktionen nutzen können. Wir definieren $R := \frac{|\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi)|}{4}$ und wählen $a \in B(\lambda_1(\xi),\frac{R}{2})$ und $b \in B(\lambda_2(\xi),\frac{R}{2})$ beliebig. Dann ist die

Funktion $z \mapsto \frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-a}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\overline{B(\lambda_1(\xi),R)} \supset \overline{B(\lambda_2(\xi),2R)} \supset \overline{B(b,R)}$ und lässt sich dort in eine Taylorreihe um den Punkt b entwickeln. Nach der Restgliedabschätzung (siehe beispielsweise [Ahl79, S. 179]) gilt für alle $z \in B(\lambda_2(\xi), \frac{R}{4}) \subset B(b, \frac{3}{4}R)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-a} - \frac{F_{t_0}^k(t,b)}{b-a} - (z-b)\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-a}\bigg|_{z=b}\right)\right| &\leq \frac{|z-b|^2}{R(R-|z-b|)} \max_{\zeta\in\partial B(b,R)}\left|\frac{F_{t_0}^k(t,\zeta)}{\zeta-a}\right| \\ &\leq \frac{4|z-b|^2}{R^2} \max_{\substack{t\in I,\\ \zeta\in\partial B(\lambda_2(\xi),2R)}} \left|F_{t_0}^k(t,\zeta)\right| \cdot \frac{1}{R} = c\,|z-b|^2 \quad \text{mit} \quad c := \frac{4}{R^3} \max_{\substack{t\in I,\\ \zeta\in\partial B(\lambda_2(\xi),2R)}} \left|F_{t_0}^k(t,\zeta)\right|,\end{aligned}$$

wobei das angegebene Maximum aufgrund von Lemma 6.8 (ii) und (v) existiert. Wenn wir für $z \neq b$ durch $|z-b|$ dividieren, erhalten wir

$$\left|\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{(z-a)(z-b)} - \frac{F_{t_0}^k(t,b)}{(b-a)(z-b)} - \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-a}\bigg|_{z=b}\right)\right| \leq c\,|z-b| \tag{6.13}$$

für alle $t \in I$. Entscheidend ist nun, dass auf diese Weise die Konstante c nicht nur unabhängig von $t \in I$, sondern auch unabhängig von der Wahl der Punkte $a \in B(\lambda_1(\xi), \frac{R}{2})$, $b \in B(\lambda_2(\xi), \frac{R}{2})$ und $z \in B(\lambda_2(\xi), \frac{R}{4})$ ist, da wir an deren Stelle sogleich $\lambda_1(x)$, $\lambda_3(x)$ und $\lambda_2(x)$ setzen möchten. Hierzu ist noch anzumerken, dass wegen $\lim_{x\to\xi}\lambda_1(x) = \lambda_1(\xi)$ und $\lim_{x\to\xi}\lambda_2(x) = \lambda_2(\xi) = \lim_{x\to\xi}\lambda_3(x)$ ein $r \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass für alle $x \in B(\xi,r)$ zum einen $\lambda_1(x)$ in $B(\lambda_1(\xi), \frac{R}{2})$ liegt und zum anderen $\lambda_2(x)$ in $B(\lambda_2(\xi), \frac{R}{2})$ und $\lambda_3(x)$ in $B(\lambda_2(\xi), \frac{R}{4})$ liegen. Aus der Abschätzung (6.13) erhalten wir dann für $x \in B(\xi,r)\backslash\{\xi\}$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_2(x))}{(\lambda_2(x)-\lambda_1(x))(\lambda_2(x)-\lambda_3(x))} + \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_3(x))}{(\lambda_3(x)-\lambda_1(x))(\lambda_3(x)-\lambda_2(x))} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(\xi)}\bigg|_{z=\lambda_2(\xi)}\right| \\ &\leq \left|\frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_2(x))}{(\lambda_2(x)-\lambda_1(x))(\lambda_2(x)-\lambda_3(x))} - \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_3(x))}{(\lambda_3(x)-\lambda_1(x))(\lambda_2(x)-\lambda_3(x))} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(x)}\bigg|_{z=\lambda_3(x)}\right| \\ &\quad + \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(x)}\bigg|_{z=\lambda_3(x)} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(\xi)}\bigg|_{z=\lambda_2(\xi)}\right| \\ &\leq c\left|\lambda_2(x)-\lambda_3(x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(x)}\bigg|_{z=\lambda_3(x)} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(\xi)}\bigg|_{z=\lambda_2(\xi)}\right| \longrightarrow 0 \quad \text{für } x \to \xi\,.\end{aligned}$$

Die Konvergenz liegt gleichmäßig bezüglich $t \in I$ vor, da die Abbildung $x \mapsto \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)}{z-\lambda_1(x)}\big|_{z=\lambda_3(x)}$ nach Lemma 6.7 und Lemma 6.8 (iii) und (v) lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I_k$ und damit insbesondere gleichmäßig bezüglich $t \in I$ stetig in ξ ist. Nachdem I beliebig war, ist also die Gültigkeit von (6.12) gezeigt. Demzufolge stimmen $\lim_{x\to\xi}\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0}(t,x)$ und $\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0}(t,\xi)$ überein und so ist $\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0}(t,\cdot)$ auch für $\xi \in \mathcal{N}_1$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I_k$ stetig in ξ.

▸ Fall $\xi \in \mathcal{N}_2$

In dieser Situation ist $\lambda_1(\xi) = \lambda_2(\xi) = \lambda_3(\xi) =: \lambda(\xi)$ und es gilt $G_{t_0}(t,\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}F_{t_0}(t,z)|_{z=\lambda(\xi)}$. Mit einer analogen Begründung wie zuvor können wir $\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0}(t,x)$ für $x \to \xi$ ohne Einschränkung von der Form (6.10) annehmen. Wenn wir diese Darstellung umschreiben zu

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0}(t,x) = \frac{\dfrac{F_{t_0}^k(t,\lambda_2(x)) - F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{\lambda_2(x)-\lambda_1(x)} - \dfrac{F_{t_0}^k(t,\lambda_3(x)) - F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{\lambda_3(x)-\lambda_1(x)}}{\lambda_2(x)-\lambda_3(x)}\,,$$

erkennen wir eine Art Differenzenquotienten zweiter Ordnung. Wir wenden die Taylorentwicklung mit der Darstellung des Restglieds aus [Ahl79, S. 126, 179] auf die Funktion $z \mapsto \frac{F_{t_0}^k(t,z)-F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{z-\lambda_1(x)}$ an, die wir uns in $z=\lambda_1(x)$ durch $\frac{\partial}{\partial z}F_{t_0}^k(t,z)\big|_{z=\lambda_1(x)}$ holomorph fortgesetzt vorstellen. Ferner sei $R \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $\lambda_j(x)$ für $x \to \xi$ und $j \in \{1,2,3\}$ in $B(\lambda(\xi),R)$ liegt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0}(t,x) &= \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_{t_0}^k(t,z)-F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{z-\lambda_1(x)}\right)\Bigg|_{z=\lambda_3(x)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}(\lambda_2(x)-\lambda_3(x))\int_{\partial B(\lambda(\xi),R)}\frac{F_{t_0}^k(t,\zeta)-F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{(\zeta-\lambda_3(x))^2(\zeta-\lambda_2(x))(\zeta-\lambda_1(x))}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \Bigg(\frac{\partial}{\partial z}\Bigg(\left(\frac{\partial}{\partial z}F_{t_0}^k(t,z)\Big|_{z=\lambda_1(x)}\right)+\frac{1}{2}(z-\lambda_1(x))\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}F_{t_0}^k(t,z)\Big|_{z=\lambda_1(x)}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi i}(z-\lambda_1(x))^2\int_{\partial B(\lambda(\xi),R)}\frac{F_{t_0}^k(t,\zeta)}{(\zeta-\lambda_1(x))^3(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta\Bigg)\Bigg)\Bigg|_{z=\lambda_3(x)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}(\lambda_2(x)-\lambda_3(x))\int_{\partial B(\lambda(\xi),R)}\frac{F_{t_0}^k(t,\zeta)-F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{(\zeta-\lambda_3(x))^2(\zeta-\lambda_2(x))(\zeta-\lambda_1(x))}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}F_{t_0}^k(t,z)\Big|_{z=\lambda_1(x)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial z}(z-\lambda_1(x))^2\int_{\partial B(\lambda(\xi),R)}\frac{F_{t_0}^k(t,\zeta)}{(\zeta-\lambda_1(x))^3(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta\right)\Bigg|_{z=\lambda_3(x)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}(\lambda_2(x)-\lambda_3(x))\int_{\partial B(\lambda(\xi),R)}\frac{F_{t_0}^k(t,\zeta)-F_{t_0}^k(t,\lambda_1(x))}{(\zeta-\lambda_3(x))^2(\zeta-\lambda_2(x))(\zeta-\lambda_1(x))}\,\mathrm{d}\zeta \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}F_{t_0}^k(t,z)\Big|_{z=\lambda(\xi)} = G_{t_0}(t,\xi) \quad \text{für } x \to \xi \text{ lokal gleichmäßig bezüglich } t \in I_k,
\end{aligned}$$

denn für den Grenzübergang $x \to \xi$ gilt $\lambda_1(x) \to \lambda(\xi)$, $\lambda_3(x)-\lambda_1(x) \to 0$, $\lambda_2(x)-\lambda_3(x) \to 0$, und die Restglieder sowie die Abbildung $x \mapsto \frac{\partial^2}{\partial z^2}F_{t_0}^k(t,z)\big|_{z=\lambda_1(x)}$ sind lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I_k$ stetig in ξ. Damit ist also gezeigt, dass die Funktion $\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0}(t,\cdot)$ auch für $\xi \in \mathcal{N}_2$ lokal gleichmäßig bezüglich $t \in I_k$ stetig in ξ ist. □

Korollar 6.11 (Regularität von G_{t_0}). *Es sei $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $G_{t_0} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ und für $k \in \mathbb{N}$ ist $\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_{t_0} \in \mathcal{C}^0((t_0,\infty)\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.*

Beweis: Gemäß Lemma 6.7 (iv) handelt es sich bei der Aussage um eine direkte Konsequenz aus den Sätzen 6.9 und 6.10. □

Die Lösung $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)$ der Differentialgleichung (6.3) aus Satz 6.5 wurde bislang für ein festes $\xi \in \mathbb{R}^3$ als eine $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$-Funktion angesehen. Wie wir nun begründen können, weist die Funktion deutlich mehr Regularitätseigenschaften auf, insbesondere dann, wenn der Zeitpunkt t_0 des Abschaltens der Wärmequelle überschritten ist. Generell stellt $f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)$ eine stetige Lösung dar. Dies war nach [Zem65, S. 163] im Vorfeld zu erwarten, da $g_{t_0,\sigma}$ eine Distribution der Ordnung eins und die Differentialgleichung bezüglich des Zeitparameters von der Ordnung drei ist. Außerdem liegt $f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)$ für $t \in \mathbb{R}$ in $L^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}^3)$. Dies benötigen wir, um später die Fourier-Rücktransformierte von $f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)$ erklären zu können.

Satz 6.12 (Regularität von f_{σ,t_0}). *Es seien $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$ und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(i) $f_{\sigma,t_0} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *und* $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0} \in \mathcal{C}^0((t_0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *für* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_{\sigma,t_0} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty), L^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty), L^2_s(\mathbb{R}^3))$.

(iii) Die von f_{σ,t_0} erzeugte Distribution $[f_{\sigma,t_0}]$ liegt in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ und löst die Differentialgleichung (6.5).

Beweis:

(i) Aufgrund des Zusammenhangs $f_{\sigma,t_0}(t,\xi) = \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} G_{t_0}(t,\xi)$ folgt die Aussage aus Korollar 6.11.

(ii) Wie im Beweis von Satz 6.10 setzen wir $F^0_{t_0} := F_{t_0}$ sowie $I_0 := \mathbb{R}$ und $I_k := (t_0,\infty)$ für $k \in \mathbb{N}$, sodass die folgenden Aussagen jeweils für $k \in \mathbb{N}_0$ gelten.

Für $t \in I_k$ ist die Funktion $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)$ nach Teil (i) stetig und damit messbar. Um zu zeigen, dass die $L^1(\mathbb{R}^3)$- und $L^2_s(\mathbb{R}^3)$-Norm existieren, verwenden wir für ein noch zu bestimmendes hinreichend großes $R \in \mathbb{R}^+$ die Aufteilung

$$\Big\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\cdot) \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \int_{|\xi|\le R} \Big| \frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) \Big| \,\mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|>R} \Big| \frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) \Big| \,\mathrm{d}\xi$$

und

$$\Big\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\cdot) \Big\|^2_{L^2_s(\mathbb{R}^3)} = \int_{|\xi|\le R} \big(1+|\xi|^2\big)^s \Big| \frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) \Big|^2 \,\mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|>R} \big(1+|\xi|^2\big)^s \Big| \frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) \Big|^2 \,\mathrm{d}\xi \,.$$

Da die Abbildung $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}$ nach Teil (i) in $\mathcal{C}^0(I_k \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ liegt, sind die Terme $\int_{|\xi|\le R} |\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)| \,\mathrm{d}\xi$ und $\int_{|\xi|\le R} (1+|\xi|^2)^s |\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$ für ein festes $R \in \mathbb{R}^+$ auf jeder kompakten Teilmenge I von I_k unabhängig von $t \in I$ beschränkt. Wir zeigen, dass auch die Integrale über den Bereich $|\xi| > R$ einen endlichen Wert annehmen und nutzen dazu die in Satz 6.1 (iii) beschriebene asymptotische Entwicklung der Nullstellen λ_1, λ_2 und λ_3 für $|\xi| \to \infty$, die folgendermaßen lautete:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1-i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-2}\big)\,, \quad \lambda_2(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1+i) + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-2}\big) \\ &\text{und} \quad \lambda_3(\xi) = -\frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Insbesondere erkennen wir, dass ein $r_0 \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass ξ für $|\xi| > r_0$ nicht in $\mathcal{N}$ liegt und da $\lambda_1(\xi)$ und $\lambda_2(\xi)$ echt komplex sind, muss $\lambda_2(\xi) = \overline{\lambda_1(\xi)}$ und damit zwangsläufig $\lambda_3(\xi) \in \mathbb{R}$ sein. Auch wissen wir nach Satz 6.1 (ii), dass $\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi)) < 0$ ist für $j \in \{1,2,3\}$. Daher gelten $|e^{\lambda_j(\xi)t}| = e^{\mathrm{Re}(\lambda_j(\xi))t} \le 1$ für $t > 0$ und $|e^{\lambda_j(\xi)(t-t_0)}| \le 1$ für $t > t_0$. Anhand der Gestalt von $F^k_{t_0}$ (siehe Definition 6.2 und Lemma 6.8) schließen wir dann

$$\big|F^k_{t_0}(t,\lambda_j(\xi))\big| \le 2\Big(\frac{2}{\tau_q^2}\frac{1}{|\lambda_j(\xi)|} + \frac{2}{\tau_q} + |\lambda_j(\xi)|\Big)|\lambda_j(\xi)|^k$$

für $j \in \{1,2,3\}$ und alle $t \in I_k$. (Im Fall $k = 0$ beachte man, dass für $t < t_0$ zwar gewisse Anteile Null ergeben, etwa $F^0_{t_0}(t,\lambda_j(\xi)) = 0$ für $t \le 0$, die Abschätzung aber dennoch gültig ist.) Wenn wir noch die Darstellung von $\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,\xi)$ für $\xi \notin \mathcal{N}$ heranziehen (siehe (6.10) oder Definition 6.3),

erhalten wir für $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)$ die folgende Abschätzung für $t \in I_k$ und $|\xi| > r_0$:

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\Big| &= \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \Big|\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_{t_0}(t,\xi)\Big| \\
&= \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \Bigg| \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_1(\xi))}{(\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi))(\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi))} + \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_2(\xi))}{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi))} \\
&\qquad + \frac{F_{t_0}^k(t,\lambda_3(\xi))}{(\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi))(\lambda_3(\xi)-\lambda_2(\xi))} \Bigg| \\
&\le \frac{2}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \Bigg(2\Big(\frac{2}{\tau_q^2}\frac{1}{|\lambda_1(\xi)|} + \frac{2}{\tau_q} + |\lambda_1(\xi)|\Big) \cdot \frac{|\lambda_1(\xi)|^k}{|\lambda_1(\xi)-\lambda_2(\xi)||\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)|} \\
&\qquad + \Big(\frac{2}{\tau_q^2}\frac{1}{|\lambda_3(\xi)|} + \frac{2}{\tau_q} + |\lambda_3(\xi)|\Big) \cdot \frac{|\lambda_3(\xi)|^k}{|\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)||\lambda_2(\xi)-\lambda_3(\xi)|} \Bigg). \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass aufgrund von $\lambda_2(\xi) = \overline{\lambda_1(\xi)}$ zum einen $|\lambda_1(\xi)| = |\lambda_2(\xi)|$ und zum anderen wegen $\lambda_3(\xi) \in \mathbb{R}$ auch $|\lambda_2(\xi) - \lambda_3(\xi)| = |\lambda_1(\xi) - \lambda_3(\xi)|$ gilt. Für die in (6.15) auftretenden Beträge der λ_j leiten wir aus (6.14) mithilfe der Rechenregeln zum Landau-Symbol aus Lemma A.24 die folgenden Ungleichungen ab:

- Für $j \in \{1,2\}$ ist $|\lambda_j(\xi)| = \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta} + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})$, d. h. es existiert ein $r_1 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| \ge \max\{r_0, r_1\}$ gilt: $\frac{1}{\tau_\theta} \le |\lambda_j(\xi)| \le \frac{2}{\tau_\theta}$.
- Es ist $|\lambda_1(\xi) - \lambda_2(\xi)| = |2i \operatorname{Im} \lambda_1(\xi)| = \frac{2}{\tau_\theta} + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})$, d. h. es existiert ein $r_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| \ge \max\{r_0, r_2\}$ gilt: $|\lambda_1(\xi) - \lambda_2(\xi)| \ge \frac{1}{\tau_\theta}$.
- Es ist $|\lambda_3(\xi)| = \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)$, d. h. es existiert ein $r_3 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| \ge \max\{r_0, r_3\}$ gilt: $\frac{\kappa\tau_\theta^2}{2\tau_q^2}|\xi|^2 \le |\lambda_3(\xi)| \le \frac{2\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2$.
- Für $j \in \{1,2\}$ ist $|\lambda_j(\xi) - \lambda_3(\xi)| = \frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)$, d. h. es existiert ein $r_4 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| \ge \max\{r_0, r_4\}$ gilt: $|\lambda_j(\xi) - \lambda_3(\xi)| \ge \frac{\kappa\tau_\theta^2}{2\tau_q^2}|\xi|^2$.

Wir wählen nun $R := \max\{1, r_0, r_1, r_2, r_3, r_4\}$. Wenn wir die genannten Abschätzungen in (6.15) einsetzen und $|\xi|^{-2} \le 1 \le |\xi|^{2k}$ ausnutzen, erhalten wir für alle $t \in I_k$ und $|\xi| \ge R$

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\Big| &\le \frac{2}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \Bigg(2\Big(\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2} + \frac{2}{\tau_q} + \frac{2}{\tau_\theta}\Big) \cdot \Big(\frac{2}{\tau_\theta}\Big)^k \cdot \tau_\theta \cdot \frac{2\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2} \\
&\qquad + \Big(\frac{2}{\tau_q^2} \cdot \frac{2\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2} + \frac{2}{\tau_q} + \frac{2\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2\Big) \cdot \Big(\frac{2\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}\Big)^k |\xi|^{2k} \cdot \Big(\frac{2\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta^2}\Big)^2 |\xi|^{-4} \Bigg) \\
&\le c_k |\xi|^{2k} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}
\end{aligned}$$

für eine geeignete, von ξ unabhängige Konstante $c_k \in \mathbb{R}^+$. Folglich gilt auch

$$(1+|\xi|^2)^s \Big|\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\Big|^2 \le c_k^2 (1+|\xi|^2)^s |\xi|^{4k} e^{-\sigma^2|\xi|^2}$$

für $|\xi| \ge R$. Bei den Abbildungen $\xi \mapsto c_k|\xi|^{2k}e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}$ und $\xi \mapsto c_k^2(1+|\xi|^2)^s|\xi|^{4k}e^{-\sigma^2|\xi|^2}$ handelt es sich um Schwartzfunktionen (siehe Anhang A.2.4). Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \subset L^1(\mathbb{R}^3)$ ist, haben wir mit diesen jeweils eine geeignete Majorante gefunden und schließen

$$\int_{|\xi|>R} \Big|\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\Big| \,\mathrm{d}\xi \le c_k \int_{|\xi|>R} |\xi|^{2k} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \,\mathrm{d}\xi \le c_k \Big\| |\cdot|^{2k} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\cdot|^2} \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} < \infty$$

und

$$\int_{|\xi|>R} (1+|\xi|^2)^s \Big|\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\Big|^2 \,\mathrm{d}\xi \le c_k^2 \int_{|\xi|>R} (1+|\xi|^2)^s |\xi|^{4k} e^{-\sigma^2|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi$$
$$\le c_k^2 \Big\|(1+|\cdot|^2)^s |\cdot|^{4k} e^{-\sigma^2|\cdot|^2}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} < \infty\,.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)$ in $L^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2_s(\mathbb{R}^3)$ liegt. Nachdem die gefundene Majorante nicht von t abhängt und, wie wir anfangs gesehen haben, das Integral über den Bereich $|\xi|\le R$ auf jeder kompakten Teilmenge I von I_k unabhängig von $t\in I$ beschränkt ist, folgt mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz auch, dass die Funktion $\frac{\partial^k}{\partial t^k} f_{\sigma,t_0}$ in $\mathcal{C}^0(I_k, L^1(\mathbb{R}^3))\cap\mathcal{C}^0(I_k, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ liegt.

(iii) Nach dem Vorhergehenden liegt f_{σ,t_0} in der Menge $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^3))\cap\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$, die eine Teilmenge von $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^3))\cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ darstellt. Demnach ist die von f_{σ,t_0} erzeugte Distribution $[f_{\sigma,t_0}]$ aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^3))\cap\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ (siehe Anhang A.2.3). Nach Satz 6.5 erfüllt $[f_{\sigma,t_0}(\cdot,\xi)]\in\mathscr{D}'_R(\mathbb{R})\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^3$ die Gleichung (6.3) im Sinne von

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\mathcal{D}(\xi)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \big(g_{\sigma,t_0}(\xi)\big)(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$$

mit dem in (6.6) definierten Differentialoperator $\mathcal{D}(\xi)$. Dies impliziert für $X\in\{L^1(\mathbb{R}^3), L^2_s(\mathbb{R}^3)\}$

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}} f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)\mathcal{D}(\cdot)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \big(g_{\sigma,t_0}(\cdot)\big)(\varphi)\Big\|_X = 0\,,$$

was bedeutet, dass $[f_{\sigma,t_0}]$ die Differentialgleichung (6.5) in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^3))\cap\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ löst. □

Für das angestrebte Resultat zur Nichterhaltung der Positivität wird schließlich noch die gleichmäßige Beschränktheit von f_{σ,t_0} bezüglich des Parameters σ relevant sein.

Satz 6.13 (Gleichmäßige Beschränktheit bezüglich σ). *Es seien $t_0\in\mathbb{R}^+$ und $t>t_0$. Dann gilt*

$$\forall\, K\subset\mathbb{R}^3 \textit{ kompakt } \exists\, C\in\mathbb{R}^+\ \forall\,\sigma\in\mathbb{R}^+:\ \max_{\xi\in K}\big|f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\big|\le C\,.$$

Beweis: Entscheidend ist, dass die Funktion G_{t_0} nicht von σ abhängt. Da $G_{t_0}(t,\cdot)$ nach Satz 6.10 stetig ist, nimmt $|G_{t_0}(t,\cdot)|$ auf einer kompakten Teilmenge K von $\mathbb{R}^3$ ein Maximum an. Außerdem gilt $e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\le 1$ für alle $\sigma\in\mathbb{R}^+$ und $\xi\in\mathbb{R}^3$. Daher folgt für alle $\xi\in K$

$$\big|f_{\sigma,t_0}(t,\xi)\big| = \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\big|G_{t_0}(t,\xi)\big| \le \frac{1}{\varrho c_v t_0}\max_{\xi\in K}\big|G_{t_0}(t,\xi)\big|\,.$$

□

6.2 Lösung des ursprünglichen Problems und ihre Nichtpositivität

Nachdem wir mit f_{σ,t_0} eine hinreichend reguläre Lösung der distributionellen Gleichung im Fourierraum gefunden haben, können wir nun zum ursprünglichen Problem (6.1) mit $\eta\equiv\eta_{\sigma,t_0}$ zurückkehren:

$$\varrho c_v\theta_t + \varrho c_v\tau_q\theta_{tt} + \varrho c_v\frac{\tau_q^2}{2}\theta_{ttt} - \kappa\Delta\theta - \kappa\tau_\theta\Delta\theta_t - \kappa\frac{\tau_\theta^2}{2}\Delta\theta_{tt} = \eta_{\sigma,t_0} + \tau_q\big(\eta_{\sigma,t_0}\big)_t + \frac{\tau_q^2}{2}\big(\eta_{\sigma,t_0}\big)_{tt}\,. \quad (6.16)$$

Eine stetige Lösung $\theta_{\sigma,t_0}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dieser Gleichung wird durch die Fourier-Rücktransformierte von f_{σ,t_0} beschrieben. Inbesondere stellt dann θ_{σ,t_0} eine Lösung auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ dar und da $\theta_{\sigma,t_0}|_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^3}=0$ gilt, erfüllt θ_{σ,t_0} nichtnegative Anfangswerte im Sinne von $\theta_{\sigma,t_0}(0,\cdot)=0$, $\lim_{t\nearrow 0}\partial_t\theta_{\sigma,t_0}(t,\cdot)=0$ und $\lim_{t\nearrow 0}\partial_{tt}\theta_{\sigma,t_0}(t,\cdot)=0$.

Satz 6.14 (Lösung des ursprünglichen Problems). *Zu $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und $t_0 \in \mathbb{R}^+$ definieren wir*

$$\theta_{\sigma,t_0}(t) := \mathscr{F}^{-1}(f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}\,.$$

Dann ist $\theta_{\sigma,t_0} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty), H^s(\mathbb{R}^3))$ für $s \in \mathbb{N}_0$ mit $\theta_{\sigma,t_0}|_{(-\infty,0]} = 0$, und die von θ_{σ,t_0} erzeugte Distribution $[\theta_{\sigma,t_0}]$ löst die Differentialgleichung (6.16) in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^3))$. Insbesondere können wir θ_{σ,t_0} als den stetigen Repräsentanten in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty)\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ mit

$$\theta_{\sigma,t_0}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) e^{i\langle\xi,x\rangle}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$$

wählen.

Beweis: Nach Satz 6.12 (ii) liegt f_{σ,t_0} für $s \in \mathbb{N}_0$ in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty), L^2_s(\mathbb{R}^3))$. Da die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : H^s(\mathbb{R}^3) \to L^2_s(\mathbb{R}^3)$ gemäß Satz A.9 einen isometrischen Isomorphismus darstellt, ist θ_{σ,t_0} wohldefiniert und es gilt $\theta_{\sigma,t_0} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty), H^s(\mathbb{R}^3))$. Nachdem f_{σ,t_0} zugleich auch in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty), L^1(\mathbb{R}^3))$ liegt, können wir θ_{σ,t_0} nach Satz A.7 (oder alternativ, da $s \in \mathbb{N}_0$ beliebig gewählt werden kann, mit dem Sobolevschen Einbettungssatz A.4) als den stetigen Repräsentanten $\theta_{\sigma,t_0} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty((t_0,\infty)\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ wählen. Dieser besitzt laut Satz A.7 die Darstellung

$$\theta_{\sigma,t_0}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) e^{i\langle\xi,x\rangle}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\,.$$

Da $[f_{\sigma,t_0}]$ nach Satz 6.12 (iii) die Differentialgleichung (6.5) in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^3))$ löst, bildet die von θ_{σ,t_0} erzeugte Distribution $[\theta_{\sigma,t_0}] \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^3))$ eine Lösung der Differentialgleichung (6.16). Für $t \le 0$ ist $f_{\sigma,t_0}(t,\cdot) = 0$ und daher $\theta_{\sigma,t_0}(t,\cdot) = 0$. □

Satz 6.15 (Annahme negativer Werte). *Es sei $\tau_\theta > \tau_q$. Dann existieren ein $\sigma \in \mathbb{R}^+$, ein $t_0 \in \mathbb{R}^+$, ein $t \in (t_0,\infty)$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x \in B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$ gilt:*

$$\theta_{\sigma,t_0}(t,x) < 0\,.$$

Beweis: Zunächst benötigen wir zu $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und $t_0 \in \mathbb{R}^+$ eine noch etwas handlichere Darstellung von

$$\theta_{\sigma,t_0}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) e^{i\langle\xi,x\rangle}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Unsere Schreibweise $f_{\sigma,t_0}(t,\xi)$ täuscht ein wenig darüber hinweg, dass die Funktion $f_{\sigma,t_0}(t,\cdot)$ lediglich vom Betrag von ξ abhängt. Aus dem Beweis zu Satz 6.1 geht jedoch hervor, dass für die Nullstellen $\lambda_j(\xi_1) = \lambda_j(\xi_2)$ für alle ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi_1| = |\xi_2|$ gilt. Wie man daraufhin anhand der Gestalt von f_{σ,t_0} (siehe Satz 6.5 und Definition 6.3) erkennt, stimmen $f_{\sigma,t_0}(t,\xi_1)$ und $f_{\sigma,t_0}(t,\xi_2)$ für alle ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi_1| = |\xi_2|$ überein. Damit ist die Abbildung

$$\widetilde{f}_{\sigma,t_0} : \ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}\,, \quad (t,r) \mapsto f_{\sigma,t_0}(t,\xi) \quad \text{für ein } \xi \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } |\xi| = r$$

wohldefiniert. Mithilfe der Kugelkoordinaten lässt sich $\theta_{\sigma,t_0}(t,x)$ nun über $\widetilde{f}_{\sigma,t_0}$ darstellen. Speziell für $x = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\theta_{\sigma,t_0}(t,0) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) e^{i\langle 0,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \widetilde{f}_{\sigma,t_0}(t,r) r^2 \sin(\psi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}r \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widetilde{f}_{\sigma,t_0}(t,r) r^2\,\mathrm{d}r\,. \qquad (6.17)\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass ein $t_0 \in \mathbb{R}^+$ und ein $t > t_0$ existieren, sodass $\widetilde{f}_{\sigma,t_0}(t,r)$ für alle hinreichend großen $r \in \mathbb{R}^+$ ein negatives Vorzeichen trägt. Dazu nutzen wir die aus Satz 6.1 (iii) bekannte Asymptotik der Nullstellen für $|\xi| \to \infty$

$$\lambda_1(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1-i) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})\,, \;\; \lambda_2(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1+i) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}) \;\text{ und }\; \lambda_3(\xi) = -\frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)\,.$$

Insbesondere gilt damit $\lambda_2(\xi) = \overline{\lambda_1(\xi)} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\lambda_3(\xi) \in \mathbb{R}$ und $\xi \notin \mathcal{N}$ für $|\xi| \to \infty$. Wie wir aus (6.7) und der Definition 6.2 von F_{t_0} entnehmen, impliziert dies

$$\begin{aligned} f_{\sigma,t_0}(t,\xi) &= \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Bigg(\frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))}\operatorname{Im}\Bigg(\frac{F_{t_0}(t,\lambda_1(\xi))}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)}\Bigg) + \frac{F_{t_0}(t,\lambda_3(\xi))}{|\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi)|^2}\Bigg) \\ &= \frac{1}{\varrho c_v t_0} e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\Bigg(\frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))}\operatorname{Im}\Bigg(\frac{1}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)}\Bigg(\frac{2}{\tau_q^2\lambda_1(\xi)} + \frac{2}{\tau_q} + \lambda_1(\xi)\Bigg)\Big(e^{\lambda_1(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big)\Bigg) \\ &\qquad + \frac{1}{|\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi)|^2}\Bigg(\frac{2}{\tau_q^2\lambda_3(\xi)} + \frac{2}{\tau_q} + \lambda_3(\xi)\Bigg)\Big(e^{\lambda_3(\xi)t} - e^{\lambda_3(\xi)(t-t_0)}\Big)\Bigg) \end{aligned} \tag{6.18}$$

für $t > t_0$ und $|\xi| \to \infty$. Für die einzelnen Bestandteile dieses Ausdrucks ergeben sich mithilfe der Rechenregeln zum Landau-Symbol aus Lemma A.24 die folgenden asymptotischen Beschreibungen für $|\xi| \to \infty$:

- $\dfrac{1}{\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))} = \tau_\theta + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})\,,$
- $\lambda_1(\xi) - \lambda_3(\xi) = \dfrac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)\,,$ also $\dfrac{1}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)} = \dfrac{\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-4})$
  und $\dfrac{1}{|\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi)|^2} = \mathcal{O}(|\xi|^{-4})\,,$
- $\dfrac{1}{\lambda_1(\xi)} = -\dfrac{\tau_\theta}{1-i} + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}) = -\dfrac{\tau_\theta}{2}(1+i) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau_q^2\lambda_1(\xi)} + \frac{2}{\tau_q} + \lambda_1(\xi) &= -\frac{\tau_\theta}{\tau_q^2}(1+i) + \frac{2}{\tau_q} - \frac{1}{\tau_\theta}(1-i) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}) \\ &= -\frac{(\tau_\theta-\tau_q)^2}{\tau_q^2\tau_\theta} - \frac{\tau_\theta^2-\tau_q^2}{\tau_q^2\tau_\theta}i + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})\,, \end{aligned}$$

- $\dfrac{1}{\lambda_3(\xi)} = \mathcal{O}(|\xi|^{-2})$ und damit $\dfrac{2}{\tau_q^2\lambda_3(\xi)} + \dfrac{2}{\tau_q} + \lambda_3(\xi) = -\dfrac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)\,.$

Daraus erhalten wir

$$\frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))}\cdot\frac{1}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)}\Bigg(\frac{2}{\tau_q^2\lambda_1(\xi)} + \frac{2}{\tau_q} + \lambda_1(\xi)\Bigg) = -\frac{(\tau_\theta-\tau_q)^2}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2} - \frac{\tau_\theta^2-\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta^2}i|\xi|^{-2} + \mathcal{O}(|\xi|^{-4})$$

und $$\frac{1}{|\lambda_3(\xi)-\lambda_1(\xi)|^2}\Bigg(\frac{2}{\tau_q^2\lambda_3(\xi)} + \frac{2}{\tau_q} + \lambda_3(\xi)\Bigg) = \mathcal{O}(|\xi|^{-2}) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.$$

Da $\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi)) < 0$ und $\lambda_3(\xi) = -\frac{\kappa\tau_\theta^2}{\tau_q^2}|\xi|^2 + \mathcal{O}(1)$ ist, gelten außerdem

$$e^{\lambda_1(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)} = \mathcal{O}(1) \quad \text{und} \quad e^{\lambda_3(\xi)t} - e^{\lambda_3(\xi)(t-t_0)} = \mathcal{O}\Big(t_0|\xi|^2 e^{-\frac{\kappa\tau_\theta}{2\tau_q^2}(t-t_0)|\xi|^2}\Big) \quad \text{für } |\xi| \to \infty\,.$$

Letzteres beruht auf der Abschätzung $\lambda_3(\xi) \leq -\frac{\kappa\tau_\theta}{2\tau_q^2}|\xi|^2$ für $|\xi| \to \infty$, die zusammen mit dem Mittelwertsatz

$$\left|e^{\lambda_3(\xi)t} - e^{\lambda_3(\xi)(t-t_0)}\right| \leq \left|\lambda_3(\xi)\right| t_0 e^{\lambda_3(\xi)(t-t_0)} \leq \frac{\kappa\tau_\theta}{2\tau_q^2} t_0 |\xi|^2 e^{-\frac{\kappa\tau_\theta}{2\tau_q^2}(t-t_0)|\xi|^2}$$

impliziert. Von (6.18) aus schließen wir damit insgesamt

$$\begin{aligned}
&f_{\sigma,t_0}(t,\xi) \\
&= \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}}{\varrho c_v t_0}\Bigg(\frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))}\operatorname{Re}\Bigg(\frac{1}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)}\Bigg(\frac{2}{\tau_q^2\lambda_1(\xi)}+\frac{2}{\tau_q}+\lambda_1(\xi)\Bigg)\Bigg)\operatorname{Im}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))}\operatorname{Im}\Bigg(\frac{1}{\lambda_1(\xi)-\lambda_3(\xi)}\Bigg(\frac{2}{\tau_q^2\lambda_1(\xi)}+\frac{2}{\tau_q}+\lambda_1(\xi)\Bigg)\Bigg)\operatorname{Re}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) \\
&\qquad + \mathcal{O}\Big(t_0 e^{-\frac{\kappa\tau_\theta}{2\tau_q^2}(t-t_0)|\xi|^2}\Big)\Bigg) \\
&= \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}}{\varrho c_v t_0}\Bigg(-\frac{(\tau_\theta-\tau_q)^2}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2}\operatorname{Im}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) - \frac{\tau_\theta^2-\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2}\operatorname{Re}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) \\
&\qquad + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-4}\big) + \mathcal{O}\Big(t_0 e^{-\frac{\kappa\tau_\theta}{2\tau_q^2}(t-t_0)|\xi|^2}\Big)\Bigg) \\
&= \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}}{\varrho c_v t_0}\Bigg(-\frac{\tau_\theta-\tau_q}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2}\Big((\tau_\theta-\tau_q)\operatorname{Im}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) + (\tau_\theta+\tau_q)\operatorname{Re}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big)\Big) \\
&\qquad + \mathcal{O}\big(|\xi|^{-4}\big) + \mathcal{O}\Big(t_0 e^{-\frac{\kappa\tau_\theta}{2\tau_q^2}(t-t_0)|\xi|^2}\Big)\Bigg).
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Nach Voraussetzung ist $\tau_\theta > \tau_q$. Wir möchten zeigen, dass ein $t_0 \in \mathbb{R}^+$, ein $t > t_0$, ein $c \in \mathbb{R}^+$ und ein $R_0 \in \mathbb{R}^+$ existieren, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| > R_0$

$$(\tau_\theta-\tau_q)\operatorname{Im}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) + (\tau_\theta+\tau_q)\operatorname{Re}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) > c$$

gilt, denn dann folgt aus (6.19), dass $f_{\sigma,t_0}(t,\xi)$ für alle betragsmäßig hinreichend großen $\xi \in \mathbb{R}^3$ negativ ist. Zunächst formen wir den Ausdruck um:

$$\begin{aligned}
&(\tau_\theta-\tau_q)\operatorname{Im}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) + (\tau_\theta+\tau_q)\operatorname{Re}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t}-e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) \\
&= (\tau_\theta-\tau_q)\Big(e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\sin\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))t\big) - e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)}\sin\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)\big)\Big) \\
&\quad + (\tau_\theta+\tau_q)\Big(e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\cos\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))t\big) - e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)}\cos\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)\big)\Big).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Da $\lambda_1(\xi) = -\frac{1}{\tau_\theta}(1-i) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2})$ gilt, existiert ein $R_0 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| > R_0$

$$\frac{19}{20\tau_\theta} < \operatorname{Im}(\lambda_1(\xi)) < \frac{21}{20\tau_\theta} \quad \text{und} \quad -\frac{21}{20\tau_\theta} < \operatorname{Re}(\lambda_1(\xi)) < -\frac{19}{20\tau_\theta}$$

ist. Wir legen nun

$$t_0 := \frac{1}{2}\tau_\theta\pi \quad \text{und} \quad t := \frac{7}{4}\tau_\theta\pi$$

fest. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| > R_0$

$$\pi < \frac{19}{16}\pi = \frac{19}{20\tau_\theta} \cdot \frac{5}{4}\tau_\theta\pi < \operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))(t-t_0) < \frac{21}{20\tau_\theta} \cdot \frac{5}{4}\tau_\theta\pi = \frac{21}{16}\pi < \frac{3}{2}\pi$$

und

$$\frac{3}{2}\pi < \frac{133}{80}\pi = \frac{19}{20\tau_\theta} \cdot \frac{7}{4}\tau_\theta\pi < \operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))t < \frac{21}{20\tau_\theta} \cdot \frac{7}{4}\tau_\theta\pi = \frac{147}{80}\pi < 2\pi\,.$$

Für den Sinus und Cosinus von $\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)$ bzw. $\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))t$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} = \cos\Big(\tfrac{1}{3}\pi\Big) < \cos\Big(\tfrac{5}{16}\pi\Big) = -\cos\Big(\tfrac{21}{16}\pi\Big) < -\cos\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)\big) < -\cos\Big(\tfrac{19}{16}\pi\Big) < 1\,,\\
\tfrac{1}{2} = \cos\Big(\tfrac{1}{3}\pi\Big) < \cos\Big(\tfrac{5}{16}\pi\Big) = -\sin\Big(\tfrac{19}{16}\pi\Big) < -\sin\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)\big) < -\sin\Big(\tfrac{21}{16}\pi\Big) < 1\,,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 < \cos\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big) = \cos\Big(\tfrac{133}{80}\pi\Big) < \cos\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))t\big) < \cos\Big(\tfrac{147}{80}\pi\Big) < 1\,,\\
-1 < -\sin\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big) = \sin\Big(\tfrac{133}{80}\pi\Big) < \sin\big(\operatorname{Im}(\lambda_1(\xi))t\big) < \sin\Big(\tfrac{147}{80}\pi\Big) < 0\,.
\end{aligned}$$

Nutzen wir diese Ungleichungen in (6.20) aus, so erhalten wir für $t_0 = \frac{1}{2}\tau_\theta\pi$, $t = \frac{7}{4}\tau_\theta\pi$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| > R_0$

$$\begin{aligned}
&(\tau_\theta - \tau_q)\operatorname{Im}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) + (\tau_\theta + \tau_q)\operatorname{Re}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big)\\
&\quad > (\tau_\theta - \tau_q)\Big(-e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\sin\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big) + e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)}\cos\Big(\tfrac{5}{16}\pi\Big)\Big)\\
&\qquad + (\tau_\theta + \tau_q)\Big(e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\cos\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big) + e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)}\cos\Big(\tfrac{5}{16}\pi\Big)\Big)\\
&\quad = \tau_q e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\sin\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big) + (\tau_\theta + \tau_q)e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\cos\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big)\\
&\qquad + \tau_\theta\Big(2e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)}\cos\Big(\tfrac{5}{16}\pi\Big) - e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\sin\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big)\Big)\\
&\quad > \tau_q e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\sin\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big) + (\tau_\theta + \tau_q)e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\cos\Big(\tfrac{27}{80}\pi\Big) + \tau_\theta\Big(e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)} - e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Nachdem $\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi)) < 0$ und $t > t - t_0$ ist, gilt $e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))(t-t_0)} - e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t} > 0$. Außerdem ist gemäß unserer Wahl $e^{\operatorname{Re}(\lambda_1(\xi))t} > e^{-\frac{21}{20\tau_\theta}\cdot\frac{7}{4}\tau_\theta\pi} = e^{-\frac{147}{80}\pi}$. Damit folgt also für $t_0 = \frac{1}{2}\tau_\theta\pi$, $t = \frac{7}{4}\tau_\theta\pi$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| > R_0$

$$(\tau_\theta - \tau_q)\operatorname{Im}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) + (\tau_\theta + \tau_q)\operatorname{Re}\Big(e^{\lambda_1(\xi)t} - e^{\lambda_1(\xi)(t-t_0)}\Big) > c$$

wobei $c := \tau_q e^{-\frac{147}{80}\pi}\sin\big(\frac{27}{80}\pi\big) + (\tau_\theta + \tau_q)e^{-\frac{147}{80}\pi}\cos\big(\frac{27}{80}\pi\big) > 0$ ist. Zusammen mit (6.19) bedeutet dies, dass ein $R \in \mathbb{R}^+$ mit $R > R_0$ existiert, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ mit $|\xi| > R$ gilt:

$$f_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}\big(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi,\xi\big) \le -\frac{2}{\varrho c_v\tau_\theta\pi}e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}\cdot\frac{\tau_\theta - \tau_q}{\kappa\tau_\theta^2}|\xi|^{-2}\cdot\frac{1}{2}c \le -a|\xi|^{-2}e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2} \quad \text{mit} \quad a := \frac{c(\tau_\theta - \tau_q)}{\varrho c_v\kappa\tau_\theta^3\pi}\,.$$

Wohlgemerkt sind dabei a und R unabhängig von σ. Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ mit $r > R$ und alle $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ist also nun

$$\widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}\big(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r\big) \le -ar^{-2}e^{-\frac{\sigma^2}{2}r^2}\,. \tag{6.21}$$

Nachdem wir nun Auskunft über die Negativität von $\widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\frac{7}{4}\tau_\theta\pi, r)$ haben, können wir zurückkehren zum Integral aus (6.17). Wir zerlegen dieses in

$$\begin{aligned}\theta_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, 0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r) r^2 \,\mathrm{d}r \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^R \widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r) r^2 \,\mathrm{d}r + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_R^\infty \widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r) r^2 \,\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

Das erste Integral lässt sich unabhängig von $\sigma \in \mathbb{R}^+$ abschätzen, denn nach Satz 6.13 existiert ein $C \in \mathbb{R}^+$ sodass für alle $\sigma \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\int_0^R \widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r) r^2 \,\mathrm{d}r &\le \sup_{r\le R}\big|\widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r)\big| \int_0^R r^2 \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}R^3 \max_{\xi\in\overline{B(0,R)}}\big|f_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, \xi)\big| \le \frac{1}{3}CR^3\end{aligned}$$

gilt. Für das zweite Integral verwenden wir die Ungleichung (6.21) und erhalten

$$\int_R^\infty \widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r) r^2 \,\mathrm{d}r \le -a\int_R^\infty r^{-2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}r^2} r^2 \,\mathrm{d}r = -a\int_R^\infty e^{-\frac{\sigma^2}{2}r^2} \,\mathrm{d}r\,.$$

Dabei gilt

$$\int_R^\infty e^{-\frac{\sigma^2}{2}r^2} \,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\int_{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}R}^\infty e^{-s^2} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(1 - \operatorname{erf}(\tfrac{\sigma}{\sqrt{2}}R)\Big)\,,$$

wobei $\operatorname{erf}(\cdot)$ die Gaußsche Fehlerfunktion bezeichnet. Insgesamt erhalten wir also

$$\theta_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \widetilde{f}_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, r) r^2 \,\mathrm{d}r \le \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}CR^3 - \frac{a}{\sigma}\Big(1 - \operatorname{erf}(\tfrac{\sigma}{\sqrt{2}}R)\Big)\,.$$

Dieser Ausdruck strebt jedoch für $\sigma \to 0$ gegen $-\infty$, da $\operatorname{erf}(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}R)$ gegen Null konvergiert und a, C und R unabhängig von σ sind. Demzufolge können wir $\sigma \in \mathbb{R}^+$ so klein wählen, dass

$$\theta_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{4}\tau_\theta\pi, 0) < 0$$

gilt. Aufgrund der Stetigkeit von $\theta_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\frac{7}{4}\tau_\theta\pi, \cdot)$ existiert dann auch ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$\theta_{\sigma,\frac{1}{2}\tau_\theta\pi}(\tfrac{7}{2}\tau_\theta\pi, x) < 0$$

für alle $x \in B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Anschaulich lässt sich das Ergebnis folgendermaßen interpretieren: Anfänglich herrscht eine konstante Referenztemperatur vor. Die Wärmequelle der Form $x \mapsto \frac{1}{\sigma^3 t_0}\exp(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2})$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ angeschaltet und zum Zeitpunkt $t_0 = \frac{1}{2}\tau_\theta\pi$ wieder abgeschaltet. Da τ_θ als sehr klein angenommen wird, handelt es sich nur um eine sehr kurze Dauer. Während dieser erzeugt die Wärmequelle um den Punkt $x = 0$ herum eine, nachdem auch σ klein ist, sehr hohe Temperatur, nämlich $\frac{1}{\sigma^3 t_0} \sim \frac{1}{\sigma^3\tau_\theta}$. Für die Differenz zur Referenztemperatur würde das Dual-Phase-Lag-Modell DPLW (2,2) hierzu eine Temperaturentwicklung vorhersagen, die über die Zeit hinweg (vermutlich) oszilliert und dabei, beispielsweise im Punkt $x = 0$ zum Zeitpunkt $t = \frac{7}{4}\tau_\theta\pi$, in den negativen Bereich ausschlägt. So käme es also bei solch einer extremen Wärmezufuhr zeitweise zu einer Abkühlung.

7 Exponentielle Stabilität zur Three-Phase-Lag-Thermoelastizität im Intervall

Für die Three-Phase-Lag-Modelle der Wärmeleitung TPLW (1,1,1) und TPLW (2,1,1) bewiesen R. Quintanilla und R. Racke in [QR08] unter der Voraussetzung $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ für TPLW (1,1,1) und $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ für TPLW (2,1,1) die exponentielle Stabilität von Lösungen auf beschränkten Gebieten. Wie in [BQR14] gezeigt wurde, führen die Grenzfälle $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ und $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ ebenfalls auf exponentiell stabile Lösungen, hingegen ist nach [BQR14; QR08] keine exponentielle Stabilität oder sogar Instabilität zu erwarten, wenn die Bedingungen verletzt sind.

In diesem Kapitel sollen nun die entsprechenden Three-Phase-Lag-Modelle der Thermoelastizität TPLT (1,1,1) und TPLT (2,1,1) untersucht werden. Während zur klassischen Thermoelastizität und zu derjenigen mit Second Sound eine Reihe an Resultaten zur exponentiellen Stabilität vorliegen (siehe etwa [JR00; Rac02; Rac03]), wurde aus der Kategorie der Phase-Lag-Modelle dahingehend bisher nur das Dual-Phase-Lag-System DPLT (2,1) betrachtet (siehe [Kur08; Qui03; QR06b; Wei09]). In den Ergebnissen aus [Qui03; QR06b] finden sich dieselben Bedingungen an die Parameter τ_θ und τ_q wieder, wie sie schon im Zusammenhang mit der Stabilität des zugehörigen Wärmeleitungsmodells DPLW (2,1) in [Qui02] auftauchten. Daher ist davon auszugehen, dass auch für die Thermoelastizitätsmodelle TPLT (1,1,1) und TPLT (2,1,1) die von den Wärmeleitungsmodellen TPLW (1,1,1) und TPLW (2,1,1) her bekannten Voraussetzungen $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ und $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ eine Rolle spielen werden. Der Nachweis der exponentiellen Stabilität wird mithilfe aufwendiger Energieabschätzungen gelingen, während die Instabilität durch einen Fourierreihenansatz belegbar ist. Behandelt wird lediglich die eindimensionale Situation mit einem Intervall als Gebiet, welches wir ohne Einschränkung als $(0, L)$ mit $L \in \mathbb{R}^+$ annehmen. Aus den Untersuchungen zur klassischen und hyperbolischen Thermoelastizität in [JR00; Rac03] sowie zum System DPLT (2,1) in [Kur08] ist bekannt, dass eine Übertragung auf höhere Raumdimensionen nicht ohne Weiteres möglich ist und zusätzliche Anforderungen wie beispielsweise die Radialsymmetrie des Gebiets erforderlich sind, um exponentielle Stabilität zu erhalten.

7.1 Three-Phase-Lag-Thermoelastizität TPLT (1,1,1)

Das allgemeine Modell zur Three-Phase-Lag-Thermoelastizität finden wir in (1.14). Wir betrachten davon das System

TPLT (1,1,1)

$$\varrho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0, L)\,, \tag{7.1 a}$$

$$\varrho c_v \theta_t + q_x + \gamma T_0 u_{tx} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0, L)\,, \tag{7.1 b}$$

$$q + \tau_q q_t + \kappa\theta_x + \kappa\tau_\theta\theta_{tx} + \kappa^*\nu_x + \kappa^*\tau_\nu\nu_{tx} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0, L)\,, \tag{7.1 c}$$

$$\nu_t = \theta \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0, L)\,. \tag{7.1 d}$$

Die Funktionen u und θ einer auf $[0,\infty)\times[0,L]$ hinreichend glatten Lösung (u,θ,q,ν) lösen auch das reduzierte System

$$\varrho u_{tt} - (\lambda+2\mu)u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times(0,L)\,, \tag{7.2 a}$$
$$\varrho c_v \mathcal{D}_1\theta_t + \gamma T_0 \mathcal{D}_1 u_{tx} - \mathcal{D}_2\theta_{xx} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times(0,L)\,, \tag{7.2 b}$$

mit den Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_1 := \partial_t + \tau_q\partial_{tt} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_2 := \kappa^*\mathrm{Id} + \tau_\nu^*\partial_t + \kappa\tau_\theta\partial_{tt}\,.$$

Dieses ergibt sich, wenn man den Operator $\mathcal{D}_1$ auf die Gleichung (7.1 b) anwendet und den Ausdruck $\mathcal{D}_1 q_x$ laut der nach x differenzierten Gleichung (7.1 c) sowie die Zeitableitungen von ν gemäß dem Zusammenhang (7.1 d) ersetzt. Die Funktionen u und θ sollen gewisse Anfangsbedingungen

$$u(0,\cdot) = u_0\,,\ \ u_t(0,\cdot) = u_1\,,\ \ \theta(0,\cdot) = \theta_0\,,\ \ \theta_t(0,\cdot) = \theta_1\,,\ \ \theta_{tt}(0,\cdot) = \theta_2 \quad \text{in } (0,L)$$

und homogene Dirichlet- oder Dirichlet-Neumann-Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{und} \quad \theta(t,0) = \theta(t,L) = 0 \quad \text{oder} \quad \theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0 \quad \text{für } t\in[0,\infty)$$

erfüllen. Unser Ziel ist es, unter der Voraussetzung

$$\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$$

die exponentielle Stabilität der Lösung (u,θ) in der Art

$$\exists\, C\in\mathbb{R}^+\ \exists\, c\in\mathbb{R}^+\ \forall\, t\in[0,\infty):\ \ \|\theta(t)\|_{L^2((0,L))} + \|u(t)\|_{L^2((0,L))} \leq Ce^{-ct}$$

zu zeigen. Das System (7.2) wird handhabbarer, wenn die gekoppelten Gleichungen eine ähnliche Struktur und Ableitungsordnung aufweisen. Dies erreichen wir, wenn wir auf (7.2 a) den Operator $\mathcal{D}_1$ anwenden:

$$\varrho\mathcal{D}_1 u_{tt} - (\lambda+2\mu)\mathcal{D}_1 u_{xx} + \gamma\mathcal{D}_1\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L)\,, \tag{7.3 a}$$
$$\varrho c_v \mathcal{D}_1\theta_t + \gamma T_0 \mathcal{D}_1 u_{tx} - \mathcal{D}_2\theta_{xx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L)\,. \tag{7.3 b}$$

Wir werden die exponentielle Stabilität zunächst für das System (7.3) in Form der Eigenschaft

$$\exists\, D\in\mathbb{R}^+\ \exists\, d\in\mathbb{R}^+\ \forall\, t\in[0,\infty):\ \ \mathscr{E}(t) \leq D\mathscr{E}(0)e^{-dt}$$

nachweisen. Dabei wird $\mathscr{E}$ eine geeignete Gesamtenergie des Systems sein, die sich aus Quadraten der L^2-Norm der Lösungskomponenten $\mathcal{D}_1 u$ und θ und jeweiligen Ableitungen zusammensetzt. Nachdem es schwierig ist, die genannte Abschätzung für $\mathscr{E}$ direkt zu zeigen, werden wir ein sogenanntes Lyapunov-Funktional $\mathscr{L}$ konstruieren, das sich dadurch auszeichnet, dass es zum einen äquivalent zu $\mathscr{E}$ ist, d. h.

$$\exists\, b_1\in\mathbb{R}^+\ \exists\, b_2\in\mathbb{R}^+\ \forall\, t\in[0,\infty):\ \ b_1\mathscr{E}(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq b_2\mathscr{E}(t)\,,$$

und dass es zum anderen die Abschätzung

$$\exists\, b_3\in\mathbb{R}^+\ \forall\, t\in[0,\infty):\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \leq -b_3\mathscr{E}(t)$$

erfüllt. Aus diesen Eigenschaften kann mithilfe des Lemmas von Grönwall (siehe Lemma A.15 in Anhang A.4) das exponentielle Abklingen der Gesamtenergie und damit insbesondere das von $\|\mathcal{D}_1 u(t)\|_{L^2((0,L))}$ und $\|\theta(t)\|_{L^2((0,L))}$ gefolgert werden. Über die ursprüngliche Differentialgleichung (7.2 a) und die Variation-der-Konstanten-Formel werden wir im Anschluss auch das exponentielle Abklingen für $\|u(t)\|_{L^2((0,L))}$ erhalten. Die vorliegenden Randbedingungen werden sich bei den Energieabschätzungen weitestgehend ähnlich behandeln lassen. Unter der homogenen Dirichlet-Randbedingungen für θ wird im Gegensatz zur Neumann-Randbedingung ein Randterm auftreten, der allerdings wie in [QR06b] aufgefangen werden kann. Wir werden mit dem Fall homogener Dirichlet-Randbedingungen für u und θ beginnen und daraus anschließend die Ergebnisse für den Fall, dass θ einer homogenen Neumann-Randbedingung unterliegt, ableiten.

Zur abkürzenden Schreibweise legen wir fest, dass im Folgenden $\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2((0,L),\mathbb{R})}$ das reelle L^2-Skalarprodukt auf $(0,L)$ und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm bezeichne.

7.1.1 Homogene Dirichlet-Randbedingungen

Wir gehen von zwei hinreichend glatten und reellwertigen Funktionen $u : [0,\infty)\times[0,L] \to \mathbb{R}$ und $\theta : [0,\infty)\times[0,L] \to \mathbb{R}$ aus, die das System (7.2) und damit auch das System (7.3) zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{und} \quad \theta(t,0) = \theta(t,L) = 0 \quad \text{für } t \in [0,\infty) \tag{7.4}$$

lösen.

Bemerkung 7.1 (Wohlgestelltheit). Die Wohlgestelltheit des Systems (7.3) unter Anfangsbedingungen und homogenen Dirichlet-Randbedingungen wurde in [Bor12], dort auch für zwei und drei Raumdimensionen, bewiesen. Über die Transformation $V = (\mathcal{D}_1 u, \mathcal{D}_1 u_t, \theta, \theta_t, \theta_{tt})^\mathsf{T}$ erfolgte die Formulierung in Fom eines abstrakten Cauchy-Problems $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = \mathcal{A}V(t)$, $V(0) = V_0$ im Hilbertraum $\mathcal{H} := H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Für $\Omega := (0,L)$ ist

$$\mathcal{A}:\ D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,, \quad V \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\partial_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\varrho}\partial_x & -\frac{\gamma\tau_q}{\varrho}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\gamma T_0}{\varrho c_v \tau_q}\partial_x & \frac{\kappa^*}{\varrho c_v \tau_q}\partial_{xx} & \frac{\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q}\partial_{xx} & \frac{\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q}\partial_{xx} - \frac{1}{\tau_q} \end{pmatrix} V$$

$$\text{mit } D(\mathcal{A}) := \left\{ V \in H_0^1(\Omega)^5 \;\middle|\; \partial_{xx}V_1 \in L^2(\Omega)\,,\ \kappa^*\partial_{xx}V_3 + \tau_\nu^*\partial_{xx}V_4 + \kappa\tau_\theta\partial_{xx}V_5 \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Es wurde gezeigt, dass $\mathcal{A}$ dicht definiert und abgeschlossen ist und der Operator $\mathcal{A} - \omega\mathrm{Id}$ für hinreichend große $\omega > 0$ dissipativ und surjektiv ist. Aus diesen Eigenschaften folgte mit dem Satz von Lumer-Phillips, dass $\mathcal{A}$ eine C_0-Halbgruppe erzeugt und somit das zugehörige Cauchy-Problem wohlgestellt ist. Für den Nachweis der Dissipativität war die Wahl des Skalarproduktes auf $\mathcal{H}$ von zentraler Bedeutung. Im Fall einer Raumdimension lautete dieses

$$\langle V, W\rangle_{\mathcal{H}} := \frac{\lambda+2\mu}{\tau_q}\langle\partial_x V_1, \partial_x W_1\rangle + \frac{\varrho}{\tau_q}\langle V_2, W_2\rangle + \langle\partial_x V_3, \partial_x W_3\rangle + \frac{\tau_\nu^*}{T_0}\langle\partial_x V_4, \partial_x W_4\rangle + \frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\langle V_5, W_5\rangle\,.$$

Die positive Definitheit stellte dabei die erste Poincarésche Ungleichung sicher.

Das im Zusammenhang mit der Wohlgestelltheit entwickelte Skalarprodukt soll uns wie in [QR06b] als Ausgangspunkt für die Energieabschätzungen dienen. Als ein Bestandteil der zu konstruierenden Gesamtenergie $\mathscr{E}$ bietet sich diejenige Energie an, die mit der von dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ induzierten Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ korrespondiert.

Definition 7.2 (Energie $E_{\mathcal{H}}$). *Als die von $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ induzierte Energie definieren wir für $t \in [0,\infty)$*

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) &:= \frac{1}{2}\big\|(\mathcal{D}_1 u(t), \mathcal{D}_1 u_t(t), \theta(t), \theta_t(t), \theta_{tt}(t))\big\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\varrho}{\tau_q}\|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + \frac{\lambda+2\mu}{\tau_q}\|\mathcal{D}_1 u_x(t)\|^2 + \frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\|\theta_{tt}(t)\|^2 + \|\theta_x(t)\|^2 + \frac{\tau_\nu^*}{T_0}\|\theta_{tx}(t)\|^2\Big)\,. \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, suchen wir eine Gesamtenergie $\mathscr{E}$, die $\mathscr{E}(t) \le D\mathscr{E}(0)e^{-dt}$ für gewisse positive Konstanten D und d erfüllt. Sofern $D = 1$ wäre, würde die Abschätzung mithilfe des Lemmas von Grönwall aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(t) \le -d\mathscr{E}(t)$ folgen. Da $E_{\mathcal{H}}$ Bestandteil der Gesamtenergie $\mathscr{E}$ sein soll, liegt es daher nahe, in einem ersten Schritt zu untersuchen, was sich über $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t)$ aussagen lässt.

Für die nachfolgenden Energieabschätzungen wollen wir vereinbaren, dass eine auftretende Konstante c_{P_1} bzw. c_{P_2} stets anzeigt, dass die erste bzw. zweite Poincarésche Ungleichung aus Satz A.14 verwendet wurde. Aufsteigend nummerierte ε-Konstanten wie ε_1, ε_2 usw. entspringen der Youngschen Ungleichung A.12. Sie sind zunächst beliebig aus $\mathbb{R}^+$, werden aber im Laufe der Beweise in geeigneter Weise fixiert werden. Häufig vernachlässigen wir den Faktor $\frac{1}{2}$ in der Youngschen Ungleichung und verwenden diese in der gröberen Variante $ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$. Weitere positive Konstanten, deren genaue Gestalt nicht von Bedeutung ist, bezeichnen wir mit indizierten Varianten des Großbuchstabens C, die andeuten sollen, zu welchem Funktional die Konstante gehört und ob, und wenn ja zu welchen ε-Konstanten eine Abhängigkeit besteht, also etwa $C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ oder $C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2)$. Wie diese Konstanten konkret festzulegen sind, wird aus den Beweisen ersichtlich. Manche Konstanten, die unmittelbarer in das Endergebnis einfließen, werden konkret angegeben oder erhalten eigene Bezeichnungen. Zugunsten der Übersichtlichkeit verzichten wir innerhalb der Beweise auf die Argumente der Funktionen und schreiben beispielsweise $\mathcal{D}_1 u$ statt $\mathcal{D}_1 u(t)$, $\|\theta\|$ statt $\|\theta(t)\|$ und $\langle \mathcal{D}_1 u, \theta\rangle$ statt $\langle \mathcal{D}_1 u(t), \theta(t)\rangle$. Alle Gleichungen und Ungleichungen gelten stets für alle $t \in [0,\infty)$. Die auftretenden Konstanten sind jeweils unabhängig von t und auch unabhängig von den Funktionen u und θ.

Lemma 7.3 (Eigenschaft der Energie $E_{\mathcal{H}}$). *Für $t \in [0,\infty)$ gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) \le -\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}(t)\|^2 + \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + \varepsilon_2\|\theta_x(t)\|^2 + C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\theta_{tx}(t)\|^2 \\ + C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2)\|\theta_{ttx}(t)\|^2\,, \end{aligned}$$

wobei ε_1, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden können und abhängig davon $C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2) \in \mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Wir bilden das L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.3 a) mit $\frac{1}{\tau_q}\mathcal{D}_1 u_t$. Nachdem $\mathcal{D}_1 u_t(t,0) = \mathcal{D}_1 u_t(t,L) = 0$ ist, treten bei der partiellen Integration keine Randterme auf und wir erhalten mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz A.13, Young A.12 und Poincaré A.14 (i)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\frac{\varrho}{\tau_q}\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + \frac{\lambda+2\mu}{\tau_q}\|\mathcal{D}_1 u_x\|^2\Big) &= \frac{\gamma}{\tau_q}\langle \theta_t, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle + \gamma\langle \theta_{tt}, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \\ &\le \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\Big(\frac{\gamma}{\tau_q}\Big)^2 c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tx}\|^2 + \gamma\langle \theta_{tt}, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle\,. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Für ε_1 kann dabei ein beliebiger Wert in $\mathbb{R}^+$ gewählt werden. Aus dem L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.3 b) mit $\frac{1}{T_0}\theta_{tt}$,

$$\frac{\varrho c_v}{T_0}\langle \theta_{tt} + \tau_q\theta_{ttt}, \theta_{tt}\rangle + \gamma\langle \mathcal{D}_1 u_{tx}, \theta_{tt}\rangle - \frac{1}{T_0}\langle \kappa^*\theta_{xx} + \tau_\nu^*\theta_{txx} + \kappa\tau_\theta\theta_{ttxx}, \theta_{tt}\rangle = 0\,,$$

ergibt sich mittels partieller Integration, da $\theta_{tt}(t,0) = \theta_{tt}(t,L) = 0$ ist,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 + \frac{\tau_\nu^*}{T_0}\|\theta_{tx}\|^2\Big) &= -\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 - \frac{\kappa\tau_\theta}{T_0}\|\theta_{ttx}\|^2 - \frac{\kappa^*}{T_0}\langle\theta_x,\theta_{ttx}\rangle - \gamma\langle\mathcal{D}_1 u_{tx},\theta_{tt}\rangle \\ &\le -\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\|\theta_x\|^2 + C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2)\|\theta_{ttx}\|^2 - \gamma\langle\mathcal{D}_1 u_{tx},\theta_{tt}\rangle \end{aligned} \tag{7.6}$$

für ein beliebiges $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ und $C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) := \frac{1}{2\varepsilon_2}\big(\frac{\kappa^*}{T_0}\big)^2$. Außerdem ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\|\theta_x\|^2 = \langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle \le \frac{\varepsilon_2}{2}\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}\|\theta_{tx}\|^2 . \tag{7.7}$$

Aus (7.5)-(7.7) folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_\mathcal{H}(u,\theta;t) \le -\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 + \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \varepsilon_2\|\theta_x\|^2 + C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\theta_{tx}\|^2 + C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2)\|\theta_{ttx}\|^2$$

mit $C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) := \frac{1}{\varepsilon_1}\big(\frac{\gamma}{\tau_q}\big)^2 c_{\mathrm{P}_1} + \frac{1}{2\varepsilon_2}$. □

Im eben geführten Beweis haben wir die Differentialgleichung (7.3 b) mit θ_{tt} multipliziert, um den Term $\|\theta_{tt}\|^2$, der in der Energie $E_\mathcal{H}(u,\theta)$ auftritt, zu erhalten. Ausgehend von der Form von (7.3 b) ist es jedoch naheliegender, den Multiplikator $\mathcal{D}_1\theta$ zu verwenden. Hieraus motiviert sich das Einführen einer weiteren Energie.

Definition 7.4 (Energie E). *Wir definieren für $t \in [0,\infty)$*

$$\begin{aligned}E(u,\theta;t) := \frac{1}{2}\Big(&\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_x(t)\|^2 + \varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta(t)\|^2 + \kappa^*\|\theta_x(t)\|^2 \\ &+ (\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta)\|\theta_{tx}(t)\|^2\Big) + \kappa^*\tau_q\langle\theta_x(t),\theta_{tx}(t)\rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}E(u_t,\theta_t;t) := \frac{1}{2}\Big(&\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_{tt}(t)\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + \varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 + \kappa^*\|\theta_{tx}(t)\|^2 \\ &+ (\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta)\|\theta_{ttx}(t)\|^2\Big) + \kappa^*\tau_q\langle\theta_{tx}(t),\theta_{ttx}(t)\rangle .\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu $E_\mathcal{H}(u,\theta)$ sind die Energien $E(u,\theta)$ und $E(u_t,\theta_t)$ direkter mit dem System (7.3) verknüpft und besonders gut an dessen Struktur angepasst. Wie der folgende Satz 7.5 zeigt, sind ihre ersten Zeitableitungen zu einem Ausdruck negativen Vorzeichens identisch, wobei die Voraussetzung

$$\tau_\nu^* \ge \kappa^*\tau_q$$

von Bedeutung ist. Dies wird später von Vorteil sein, denn so können wir $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t))$ mit einem beliebig großen Faktor multiplizieren und dadurch entsprechende Terme positiven Vorzeichens aus den Abschätzungen zu anderen Funktionalen auffangen, ohne dabei anderweitige Störterme zu generieren. Die Tatsache, dass $E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)$ monoton fällt, birgt zugleich auch erste Informationen zur Beschränktheit der Lösung. Allerdings lässt $E(u,\theta)$ keine Rückschlüsse auf die Funktion θ, sondern nur auf deren Zeitableitungen zu (vergleiche die Abschätzung (i) in Satz 7.5). An dieser Stelle ist die Energie $E_\mathcal{H}(u,\theta)$ aussagekräftiger, da sie den Term $\|\theta_x\|^2$ umfasst, der nach der ersten Poincaréschen Ungleichung den Term $\|\theta\|^2$ dominiert.

Satz 7.5 (Eigenschaften der Energie E). *Es gelte $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$.*

(i) Es existiert eine Konstante $C_E \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t) \geq C_E\Big(\|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tt}(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_x(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 + \|\theta_{tx}(t)\|^2 + \|\theta_{ttx}(t)\|^2\Big).$$

(ii) Für $t \in [0,\infty)$ ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\big) = -(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}(t)\|^2 - (\kappa\tau_\theta\tau_q + \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{ttx}(t)\|^2 - \kappa\tau_\theta\tau_q\|\theta_{tttx}(t)\|^2.$$

Da insbesondere $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(E(u,\theta;t)+E(u_t,\theta_t;t)\big) \leq 0$ gilt, ist $E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t)$ durch die Anfangsenergie zum Zeitpunkt $t=0$ beschränkt: $E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t) \leq E(u,\theta;0) + E(u,\theta;0)$.

Beweis:

(i) Wenn wir die Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young in der Form

$$\kappa^*\tau_q\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle \geq -\frac{\kappa^*}{2}\|\theta_x\|^2 - \frac{\kappa^*\tau_q^2}{2}\|\theta_{tx}\|^2 \quad \text{und} \quad \kappa^*\tau_q\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle \geq -\frac{\kappa^*}{2}\|\theta_{tx}\|^2 - \frac{\kappa^*\tau_q^2}{2}\|\theta_{ttx}\|^2$$

verwenden, ergibt sich, nachdem $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ vorausgesetzt ist,

$$\frac{\kappa^*}{2}\|\theta_x\|^2 + \frac{\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta}{2}\|\theta_{tx}\|^2 + \kappa^*\tau_q\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle \geq \frac{\tau_\nu^*\tau_q - \kappa^*\tau_q^2 + \kappa\tau_\theta}{2}\|\theta_{tx}\|^2 \geq \frac{\kappa\tau_\theta}{2}\|\theta_{tx}\|^2$$

und

$$\frac{\kappa^*}{2}\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta}{2}\|\theta_{ttx}\|^2 + \kappa^*\tau_q\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle \geq \frac{\tau_\nu^*\tau_q - \kappa^*\tau_q^2 + \kappa\tau_\theta}{2}\|\theta_{ttx}\|^2 \geq \frac{\kappa\tau_\theta}{2}\|\theta_{ttx}\|^2.$$

Demzufolge erhalten wir die behauptete Abschätzung mit $C_E := \frac{1}{2}\min\{\varrho T_0, (\lambda+2\mu)T_0, \varrho c_v, \kappa\tau_\theta\}$.

(ii) Wir wenden auf die Differentialgleichung (7.3 b) den dazu naheliegenden Multiplikator $\mathcal{D}_1\theta$ an, was den Ansatz für das Zustandekommen der Energie E bildete. Aufgrund der Randwerte $\mathcal{D}_1 u_t(t,0) = \mathcal{D}_1 u_t(t,L) = 0$ und $\mathcal{D}_1\theta(t,0) = \mathcal{D}_1\theta(t,L) = 0$ ergibt sich durch partielle Integration

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta\|^2 = \gamma T_0\langle\mathcal{D}_1 u_t, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle - \langle\mathcal{D}_2\theta_x, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle. \tag{7.8}$$

Gemäß der Gestalt der Operatoren $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ lässt sich der Term $\langle\mathcal{D}_2\theta_x, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle$ darstellen als

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{D}_2\theta_x, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle &= \langle\kappa^*\theta_x + \tau_\nu^*\theta_{tx} + \kappa\tau_\theta\theta_{ttx}, \theta_{tx} + \tau_q\theta_{ttx}\rangle \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\kappa^*\|\theta_x\|^2 + (\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta)\|\theta_{tx}\|^2 + 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle\Big) \\ &\quad - \kappa^*\tau_q\|\theta_{tx}\|^2 + \tau_\nu^*\|\theta_{tx}\|^2 + \kappa\tau_\theta\tau_q\|\theta_{ttx}\|^2.\end{aligned}$$

Damit geht (7.8) über in

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta\|^2 + \kappa^*\|\theta_x\|^2 + (\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta)\|\theta_{tx}\|^2 + 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle\Big) \\ &\quad = -(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - \kappa\tau_\theta\tau_q\|\theta_{ttx}\|^2 + \gamma T_0\langle\mathcal{D}_1 u_t, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle.\end{aligned}$$

Das L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.3 a) mit $T_0\mathcal{D}_1 u_t$ führt auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_x\|^2\Big) = -\gamma T_0\langle \mathcal{D}_1\theta_x, \mathcal{D}_1 u_t\rangle\,.$$

Nehmen wir die letzten beiden Gleichungen zusammen, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u,\theta;t) = -(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - \kappa\tau_\theta\tau_q\|\theta_{ttx}\|^2\,.$$

Auf analoge Weise folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u_t,\theta_t;t) = -(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{ttx}\|^2 - \kappa\tau_\theta\tau_q\|\theta_{tttx}\|^2\,.$$

□

Wir können uns weiterhin von der Vorstellung leiten lassen, dass wir eine Abschätzung der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(t) \le -d\mathscr{E}(t)$ suchen, auch wenn dies nicht unmittelbar die Ungleichung ist, die wir schlussendlich werden zeigen können, und der Weg vielmehr über ein Lyapunov-Funktional führen wird. Die Gesamtenergie $\mathscr{E}$ soll sich aus den zwischenzeitlich definierten Energien $E_{\mathcal{H}}(u,\theta)$ und $E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t)$ zusammensetzen. Aus den bisherigen Resultaten aus Lemma 7.3 und Satz 7.5 erhalten wir für die Abschätzung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(t)$ auf der rechten Seite der kleiner-gleich-Relation die negativen Terme $-\|\theta_{tt}\|^2$, $-\|\theta_{tx}\|^2$, $-\|\theta_{ttx}\|^2$ und $-\|\theta_{tttx}\|^2$. Ein Blick auf die Definition der Energien $E_{\mathcal{H}}$ und E zeigt jedoch, dass an dieser Stelle weitere Terme wie beispielsweise $-\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2$ und $-\|\theta_x\|^2$ notwendig sind. Daher geben wir im Folgenden drei Hilfsfunktionale G_1, G_2 und G_3 an, die später Bestandteil des Lyapunov-Funktionals werden und die benötigten Terme negativen Vorzeichens liefern. Allerdings werden damit zugleich weitere unerwünschte Terme positiven Vorzeichens geschaffen. Sofern diese gegen $\|\theta_{tx}\|^2$, $\|\theta_{ttx}\|^2$ und $\|\theta_{tttx}\|^2$ abschätzbar sind, stellen sie kein Problem dar, da sie später durch ein entsprechend großes Vielfaches von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t)\big)$ ausgeglichen werden können. Andernfalls versuchen wir, die Terme möglichst klein zu halten. Im Fall, dass $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ ist, ist die Situation noch etwas ungünstiger, da unter Punkt (ii) des Satzes 7.5 der Term $-\|\theta_{tx}\|^2$ entfällt und somit auf künstlichem Weg geschaffen werden muss. Vorerst aber erfolgt keine Unterscheidung zwischen den Fällen $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$, sie wird erst gegen Ende des Abschnitts eine Rolle spielen.

Lemma 7.6 (Hilfsfunktional G_1). *Für $t\in[0,\infty)$ definieren wir*

$$G_1(t) := \frac{\tau_\nu^*}{\kappa^*}\|\theta_x(t)\|^2 + \frac{2\gamma T_0}{\kappa^*}\langle \mathcal{D}_1 u_x(t), \theta(t)\rangle\,.$$

Dann gilt für alle $t\in[0,\infty)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_1(t) \le -\|\theta_x(t)\|^2 + \varepsilon_3 c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 + C_{G_1}^3(\varepsilon_3)\|\theta_{tx}(t)\|^2 + C_{G_1}^2\|\theta_{ttx}(t)\|^2 + C_{G_1}^1\|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2\,,$$

wobei $\varepsilon_3\in\mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden kann und die hiervon abhängige Konstante $C_{G_1}^3(\varepsilon_3)$ sowie die von ε_3 unabhängigen Konstanten $C_{G_1}^1$ und $C_{G_1}^2$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Das L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.3 b) mit $\frac{2}{\kappa^*}\theta$ lautet

$$\frac{2\varrho c_v}{\kappa^*}\langle \mathcal{D}_1\theta_t, \theta\rangle + \frac{2\gamma T_0}{\kappa^*}\langle \mathcal{D}_1 u_{tx}, \theta\rangle - \frac{2}{\kappa^*}\langle \kappa^*\theta_{xx} + \tau_\nu^*\theta_{txx} + \kappa\tau_\theta\theta_{ttxx}, \theta\rangle = 0$$

und führt durch partielle Integration unter den Randwerten $\theta(t,0)=\theta(t,L)=0$ auf

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\tau_\nu^*}{\kappa^*}\|\theta_x\|^2+\frac{2\gamma T_0}{\kappa^*}\langle\mathcal{D}_1u_x,\theta\rangle\right)&=\frac{2\gamma T_0}{\kappa^*}\langle\mathcal{D}_1u_x,\theta_t\rangle-2\|\theta_x\|^2-\frac{2\varrho c_v}{\kappa^*}\langle\mathcal{D}_1\theta_t,\theta\rangle-\frac{2\kappa\tau_\theta}{\kappa^*}\langle\theta_{ttx},\theta_x\rangle\\&\le-2\|\theta_x\|^2+\varepsilon_3\|\mathcal{D}_1u_x\|^2+\frac{1}{\varepsilon_3}\Big(\frac{\gamma T_0}{\kappa^*}\Big)^2\|\theta_t\|^2+\delta_1\|\theta\|^2\\&\quad+\frac{1}{\delta_1}\Big(\frac{\varrho c_v}{\kappa^*}\Big)^2\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2+\delta_2\|\theta_x\|^2+\frac{1}{\delta_2}\Big(\frac{\kappa\tau_\theta}{\kappa^*}\Big)^2\|\theta_{ttx}\|^2\,,\end{aligned}\tag{7.9}$$

wobei δ_1, δ_2 sowie ε_3 bei der jeweils verwendeten Youngschen Ungleichung beliebig aus $\mathbb{R}^+$ gewählt werden können. Die Terme $\|\theta\|^2$ und $\|\theta_t\|^2$ lassen sich mit der ersten Poincaréschen Ungleichung gegen $c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_x\|^2$ bzw. $c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tx}\|^2$ abschätzen. Aufgrund der homogenen Dirichlet-Randbedingung für u und der Tatsache, dass die Raumdimension eins ist, erhält man

$$\int_0^L\mathcal{D}_1u_x\,\mathrm{d}x=(\mathcal{D}_1u)(L)-(\mathcal{D}_1u)(0)=0\,,\tag{7.10}$$

sodass die zweite Poincarésche Ungleichung A.14 (ii)

$$\|\mathcal{D}_1u_x\|^2\le c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2$$

liefert. Mit diesen Abschätzungen gehen wir zurück zu (7.9) und schließen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\tau_\nu^*}{\kappa^*}\|\theta_x\|^2+\frac{2\gamma T_0}{\kappa^*}\langle\mathcal{D}_1u_x,\theta\rangle\right)&\le(-2+\delta_1c_{\mathrm{P}_1}+\delta_2)\|\theta_x\|^2+\varepsilon_3c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2+\frac{1}{\delta_1}\Big(\frac{\varrho c_v}{\kappa^*}\Big)^2\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2\\&\quad+\frac{c_{\mathrm{P}_1}}{\varepsilon_3}\Big(\frac{\gamma T_0}{\kappa^*}\Big)^2\|\theta_{tx}\|^2+\frac{1}{\delta_2}\Big(\frac{\kappa\tau_\theta}{\kappa^*}\Big)^2\|\theta_{ttx}\|^2\,.\end{aligned}$$

Wenn wir δ_1 und δ_2 als $\delta_1:=\frac{1}{2c_{\mathrm{P}_1}}$ und $\delta_2:=\frac{1}{2}$ festlegen und $C_{G_1}^1:=\frac{1}{\delta_1}(\frac{\varrho c_v}{\kappa^*})^2$, $C_{G_1}^2:=\frac{1}{\delta_2}(\frac{\kappa\tau_\theta}{\kappa^*})^2$ und $C_{G_1}^3(\varepsilon_3):=\frac{c_{\mathrm{P}_1}}{\varepsilon_3}(\frac{\gamma T_0}{\kappa^*})^2$ setzen, entspricht dies der behaupteten Ungleichung. □

Lemma 7.7 (Hilfsfunktional G_2). *Für $t\in[0,\infty)$ definieren wir*

$$G_2(t):=6\varrho\langle\mathcal{D}_1u_x(t),\mathcal{D}_1u_{tx}(t)\rangle.$$

Dann gilt bei Wahl einer geeigneten Konstanten $C_{G_2}\in\mathbb{R}^+$ für alle $t\in[0,\infty)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t)\le-5(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1u_{xx}(t)\|^2+6\varrho\|\mathcal{D}_1u_{tx}(t)\|^2+C_{G_2}\|\mathcal{D}_1\theta_x(t)\|^2\,.$$

Beweis: Das L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.3 a) mit $6\mathcal{D}_1u_{xx}$ ergibt

$$6\varrho\langle\mathcal{D}_1u_{tt},\mathcal{D}_1u_{xx}\rangle-6(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2+6\gamma\langle\mathcal{D}_1\theta_x,\mathcal{D}_1u_{xx}\rangle=0\,,$$

also ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}6\varrho\langle\mathcal{D}_1u_x,\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle=-6(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2+6\varrho\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+6\gamma\langle\mathcal{D}_1\theta_x,\mathcal{D}_1u_{xx}\rangle\,.$$

Für den letzten Term verwenden wir die Youngsche Ungleichung in der Form

$$6\gamma\langle\mathcal{D}_1\theta_x,\mathcal{D}_1u_{xx}\rangle\le(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2+C_{G_2}\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2\quad\text{mit}\quad C_{G_2}:=\frac{9\gamma^2}{\lambda+2\mu}$$

und erhalten damit die behauptete Abschätzung. □

Lemma 7.8 (Hilfsfunktional G_3). *Für $t \in [0,\infty)$ definieren wir*

$$G_3(t) := \frac{12\varrho}{T_0(\lambda+2\mu)}\Big(\frac{\varrho}{\gamma}\langle \mathcal{D}_1 u_{tt}(t), \mathcal{D}_2\theta_x(t)\rangle + \langle \mathcal{D}_1\theta_x(t), \mathcal{D}_2\theta_x(t)\rangle\Big)\,.$$

Dann gilt für alle $t \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_3(t) \le{}& (-11\varrho + 24\varrho^2\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + (\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2\\ &+ 12\varepsilon_4\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + C^1_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 + C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_2\theta_x(t)\|^2\\ &+ C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t)\|^2\,,\end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_4 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden kann und die davon abhängigen Konstanten $C^1_{G_3}(\varepsilon_4)$ und $C^2_{G_3}(\varepsilon_4)$ sowie die von ε_4 unabhängige Konstante $C^3_{G_3}$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Wenn wir das L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.3 b) mit $\frac{12\varrho}{\gamma T_0}\mathcal{D}_1 u_{tx}$ bilden, erhalten wir

$$\frac{12\varrho^2 c_v}{\gamma T_0}\langle \mathcal{D}_1\theta_t, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle + 12\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - \frac{12\varrho}{\gamma T_0}\langle \mathcal{D}_2\theta_{xx}, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle = 0\,.$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}_2\theta_{xx}, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle &= \int_0^L (\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_{xx})\,\mathrm{d}x = \big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\big]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L (\mathcal{D}_1 u_{txx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\,\mathrm{d}x\\ &= \big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\big]_{x=0}^{x=L} + \langle \mathcal{D}_1 u_{xx}, \mathcal{D}_2\theta_{tx}\rangle - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathcal{D}_1 u_{xx}, \mathcal{D}_2\theta_x\rangle\\ &= \big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\big]_{x=0}^{x=L} + \langle \mathcal{D}_1 u_{xx}, \mathcal{D}_2\theta_{tx}\rangle - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\lambda+2\mu}\langle \varrho\mathcal{D}_1 u_{tt} + \gamma\mathcal{D}_1\theta_x, \mathcal{D}_2\theta_x\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Zusammenhang aus der Differentialgleichung (7.3 a) verwendet wurde. Auf den durch die Dirichlet-Randbedingungen verursachten Randterm werden wir gleich zurückkommen. Vorerst bleibt festzuhalten, dass

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{12\varrho}{T_0(\lambda+2\mu)}\Big(\frac{\varrho}{\gamma}\langle \mathcal{D}_1 u_{tt}, \mathcal{D}_2\theta_x\rangle + \langle \mathcal{D}_1\theta_x, \mathcal{D}_2\theta_x\rangle\Big)\\ &\quad= -12\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - \frac{12\varrho^2 c_v}{\gamma T_0}\langle \mathcal{D}_1\theta_t, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle + \frac{12\varrho}{\gamma T_0}\langle \mathcal{D}_1 u_{xx}, \mathcal{D}_2\theta_{tx}\rangle + \frac{12\varrho}{\gamma T_0}\big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\big]_{x=0}^{x=L}\end{aligned}$$

gilt. Die Youngsche Ungleichung ermöglicht

$$\begin{aligned}&-\frac{12\varrho^2 c_v}{\gamma T_0}\langle \mathcal{D}_1\theta_t, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \le \varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \Big(\frac{6\varrho c_v}{\gamma T_0}\Big)^2\varrho\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \quad \text{und}\\ &\frac{12\varrho}{\gamma T_0}\langle \mathcal{D}_1 u_{xx}, \mathcal{D}_2\theta_{tx}\rangle \le (\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 \quad \text{mit} \quad C^3_{G_3} := \frac{1}{\lambda+2\mu}\Big(\frac{6\varrho}{\gamma T_0}\Big)^2,\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{12\varrho}{T_0(\lambda+2\mu)}\Big(\frac{\varrho}{\gamma}\langle \mathcal{D}_1 u_{tt}, \mathcal{D}_2\theta_x\rangle + \langle \mathcal{D}_1\theta_x, \mathcal{D}_2\theta_x\rangle\Big)\\ &\quad\le -11\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + (\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \Big(\frac{6\varrho c_v}{\gamma T_0}\Big)^2\varrho\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \frac{12\varrho}{\gamma T_0}\big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\big]_{x=0}^{x=L}\\ &\qquad + C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 \qquad (7.11)\end{aligned}$$

folgt. Den Randterm können wir wie in [QR06b] behandeln. Zunächst schätzen wir

$$\begin{aligned}\frac{12\varrho}{\gamma T_0}\big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\big]_{x=0}^{x=L} &\le \frac{24\varrho}{\gamma T_0}\max_{x\in\{0,L\}}\big|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,x)\big|\max_{x\in\{0,L\}}\big|\mathcal{D}_2\theta_x(t,x)\big| \\ &\le 12\varepsilon_4\Big(\max_{x\in\{0,L\}}\big|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,x)\big|\Big)^2 + \frac{12}{\varepsilon_4}\Big(\frac{\varrho}{\gamma T_0}\Big)^2\Big(\max_{x\in\{0,L\}}\big|\mathcal{D}_2\theta_x(t,x)\big|\Big)^2\end{aligned}$$

für ein beliebiges $\varepsilon_4 \in \mathbb{R}^+$ ab. Es ist

$$\Big(\max_{x\in\{0,L\}}\big|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,x)\big|\Big)^2 = \max_{x\in\{0,L\}}\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,x)\big)^2 \le \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2$$

und mit der in einer Raumdimension geltenden Soboleveinbettung $W^{1,1}((0,L)) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,L])$ (siehe Satz A.4) erhalten wir für eine positive Konstante c_{S}

$$\begin{aligned}\Big(\max_{x\in\{0,L\}}\big|\mathcal{D}_2\theta_x(t,x)\big|\Big)^2 &\le \max_{x\in[0,L]}\big(\mathcal{D}_2\theta_x(t,x)\big)^2 \\ &\le c_{\mathrm{S}}\|(\mathcal{D}_2\theta_x)^2\|_{W^{1,1}((0,L))} = c_{\mathrm{S}}\Big(\|(\mathcal{D}_2\theta_x)^2\|_{L^1((0,L))} + \|\partial_x(\mathcal{D}_2\theta_x)^2\|_{L^1((0,L))}\Big) \\ &= c_{\mathrm{S}}\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2_{L^2((0,L))} + 2c_{\mathrm{S}}\|(\mathcal{D}_2\theta_x)(\mathcal{D}_2\theta_{xx})\|_{L^1((0,L))}\,.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mithilfe der Ungleichungen von Hölder und Young sowie unter Beachtung der Differentialgleichung (7.3 b)

$$\begin{aligned}\Big(\max_{x\in\{0,L\}}\big|\mathcal{D}_2\theta_x(t,x)\big|\Big)^2 &\le c_{\mathrm{S}}\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2_{L^2((0,L))} + \frac{c_{\mathrm{S}}^2}{\varepsilon_4^2}\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2_{L^2((0,L))} + \varepsilon_4^2\|\mathcal{D}_2\theta_{xx}\|^2_{L^2((0,L))} \\ &= \Big(1+\frac{c_{\mathrm{S}}}{\varepsilon_4^2}\Big)c_{\mathrm{S}}\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2 + \varepsilon_4^2\|\varrho c_v\mathcal{D}_1\theta_t + \gamma T_0\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 \\ &\le \Big(1+\frac{c_{\mathrm{S}}}{\varepsilon_4^2}\Big)c_{\mathrm{S}}\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2 + 2\varepsilon_4^2(\gamma T_0)^2\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + 2\varepsilon_4^2(\varrho c_v)^2\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2\,.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt nun

$$\begin{aligned}\frac{12\varrho}{\gamma T_0}\big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)\big]_{x=0}^{x=L} &\le 24\varrho^2\varepsilon_4\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + 12\varepsilon_4\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) \\ &\quad + 24\varepsilon_4\Big(\frac{\varrho^2 c_v}{\gamma T_0}\Big)^2\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2\end{aligned}$$

mit $C^2_{G_3}(\varepsilon_4) := \frac{12c_{\mathrm{S}}}{\varepsilon_4}(\frac{\varrho}{\gamma T_0})^2(1+\frac{c_{\mathrm{S}}}{\varepsilon_4^2})$. Wenn wir diese Abschätzung in (7.11) einsetzen und die Koeffizienten vor dem Term $\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2$ in der Konstante $C^1_{G_3}(\varepsilon_4) := (\frac{6\varrho c_v}{\gamma T_0})^2\varrho + 24\varepsilon_4(\frac{\varrho^2 c_v}{\gamma T_0})^2$ zusammenfassen, erhalten wir die behauptete Ungleichung. □

Um den Term $(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0))^2 + (\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L))^2$, der bei der Abschätzung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_3$ entstanden ist, kompensieren zu können, konstruieren wir noch ein weiteres Funktional G_4, wobei wir die Idee aus [QR06b] übernehmen.

Lemma 7.9 (Hilfsfunktional G_4). *Für $t \in [0,\infty)$ definieren wir*

$$G_4(t) := 4\varrho\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}(t), \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\rangle \quad \textit{mit} \quad \Phi:\ [0,L]\to\mathbb{R}\,,\ \ x\mapsto \frac{1}{2}-\frac{x}{L}\,.$$

Dann gilt für alle $t \in [0,\infty)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_4(t) \le -(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + \Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{L} + \varepsilon_5\Big)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + \frac{4(\lambda+2\mu)^2}{L\varrho}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 + C^1_{G_4}\|\mathcal{D}_1\theta_x(t)\|^2 + C^2_{G_4}(\varepsilon_5)\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}(t)\|^2\,,$$

wobei $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden kann und die davon abhängige Konstante $C^2_{G_4}(\varepsilon_5)$ sowie die von ε_5 unabhängige Konstante $C^1_{G_4}$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Die Funktion Φ besitzt die folgenden im Laufe des Beweises nützlichen Eigenschaften: Es gilt $|\Phi(x)| \le \frac{1}{2}$ für alle $x \in [0,L]$, wobei $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ und $\Phi(L) = -\frac{1}{2}$ ist, und Φ ist differenzierbar mit $\Phi_t(x) = 0$ und $\Phi_x(x) = -\frac{1}{L}$ für alle $x \in [0,L]$. Ausgangspunkt für die nachzuweisende Ungleichung ist das L^2-Skalarprodukt der nach t differenzierten Differentialgleichung (7.3 a) mit $4\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}$

$$4\varrho\langle\mathcal{D}_1 u_{ttt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle - 4(\lambda+2\mu)\langle\mathcal{D}_1 u_{txx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle + 4\gamma\langle\mathcal{D}_1\theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle = 0\,. \tag{7.12}$$

Die ersten beiden Skalarprodukte können wie folgt umgeformt werden: Zum einen ist

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{D}_1 u_{ttt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle &= -\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \partial_t(\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx})\rangle + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle\\ &= -\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{ttx}\rangle + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle\\ &= -\frac{1}{2L}\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei sich $\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{ttx}\rangle = \frac{1}{2L}\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2$ wegen $\Phi_x = -\frac{1}{L}$ aus

$$-\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{ttx}\rangle = -\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \partial_x(\Phi\mathcal{D}_1 u_{tt})\rangle - \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 = \langle\mathcal{D}_1 u_{ttx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tt}\rangle - \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2$$

ergibt. Zum anderen haben wir

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{D}_1 u_{txx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle &= \langle\Phi\mathcal{D}_1 u_{txx}, \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle = \langle\partial_x(\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}), \mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle + \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\\ &= \big[(\mathcal{D}_1 u_{tx})^2\Phi\big]_{x=0}^{x=L} - \langle\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}, \mathcal{D}_1 u_{txx}\rangle + \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\\ &= -\frac{1}{2}\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) - \langle\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}, \mathcal{D}_1 u_{txx}\rangle + \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\,,\end{aligned}$$

also

$$\langle\mathcal{D}_1 u_{txx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle = -\frac{1}{4}\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + \frac{1}{2L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\,.$$

Mit diesen beiden Darstellungen folgt aus (7.12)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}4\varrho\langle\mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle = -(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + \frac{2(\lambda+2\mu)}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \frac{2\varrho}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 - 4\gamma\langle\mathcal{D}_1\theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle\,.$$

Wenn wir darin $\mathcal{D}_1 u_{tt}$ gemäß der Differentialgleichung (7.3 a) ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}4\varrho\langle\mathcal{D}_1 u_{tt},\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle &= -(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2+\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big)+\frac{2(\lambda+2\mu)}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\\ &\quad+\frac{2\varrho}{L}\Big\|\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\mathcal{D}_1 u_{xx}-\frac{\gamma}{\varrho}\mathcal{D}_1\theta_x\Big\|^2-4\gamma\langle\mathcal{D}_1\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle\\ &\le -(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2+\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big)+\frac{2(\lambda+2\mu)}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\\ &\quad+\frac{4(\lambda+2\mu)^2}{L\varrho}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2+C^1_{G_4}\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2-4\gamma\langle\mathcal{D}_1\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \qquad (7.13)\end{aligned}$$

mit $C^1_{G_4} := \frac{4\gamma^2}{L\varrho}$. Im Gegensatz zum späteren Abschnitt 7.2, in dem das System TPLT (2,1,1) behandelt wird, reicht es in der vorliegenden Situation zum System TPLT (1,1,1) aus, den Term $\langle\mathcal{D}_1\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle$ mit der Youngschen Ungleichung abzuschätzen. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}4\varrho\langle\mathcal{D}_1 u_{tt},\Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle &\le -(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2+\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big)+\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{L}+\varepsilon_5\Big)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\\ &\quad+\frac{4(\lambda+2\mu)^2}{L\varrho}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2+C^1_{G_4}\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2+C^2_{G_4}(\varepsilon_5)\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2\end{aligned}$$

für ein beliebiges $\varepsilon_5\in\mathbb{R}^+$ und $C^2_{G_4}(\varepsilon_5) := \frac{\gamma^2}{\varepsilon_5}$. □

Im folgenden Korollar fassen wir die Abschätzungen für die Hilfsfunktionale G_1, G_2, G_3 und G_4 aus den Lemmata 7.6 bis 7.9 zusammen. Dabei werden die Funktionale geeignet gewichtet und die Konstanten ε_3, ε_4 und ε_5 derart festgelegt, dass der durch G_3 verursachte Randterm wegfällt und ein negatives Vielfaches der Terme $\|\theta_x\|^2$, $\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2$ und $\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2$ erhalten bleibt. Alle übrigen positiven Terme werden gegen die durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t))$ leicht auszugleichenden Ausdrücke $\|\theta_{tx}\|^2$, $\|\theta_{ttx}\|^2$ und $\|\theta_{tttx}\|^2$ abgeschätzt.

Korollar 7.10 (Zusammenfassen der Hilfsfunktionale). *Wir legen die folgenden Werte fest:*

$$\begin{aligned}&\varepsilon_4 := \min\Big\{\frac{1}{24\varrho},\frac{L\varrho}{48}\Big\},\quad \varepsilon_5 := \frac{\varrho(\lambda+2\mu)}{12\varepsilon_4},\quad a_4 := \frac{12}{\lambda+2\mu}\varepsilon_4\\ &a_1 := 2+3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\kappa^{*2}\quad \textit{und}\quad \varepsilon_3 := \frac{\lambda+2\mu}{c_{\mathrm{P}_2}a_1}.\end{aligned}$$

Dann existiert eine Konstante $C_G\in\mathbb{R}^+$, sodass für alle $t\in[0,\infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4)(t) &\le -2\|\theta_x(t)\|^2-2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2-2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2\\ &\quad+C_G\Big(\|\theta_{tx}(t)\|^2+\|\theta_{ttx}(t)\|^2+\|\theta_{tttx}(t)\|^2\Big).\end{aligned}$$

Beweis: Wie wir in den vorangehenden Lemmata 7.7, 7.8 und 7.9 gezeigt haben, gilt für beliebige ε_4, $\varepsilon_5\in\mathbb{R}^+$ und einem vorerst ebenfalls beliebigen $a_4\in\mathbb{R}^+$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G_2+G_3+a_4G_4)\\ &\quad\le -5(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2+6\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2+C_{G_2}\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2\\ &\qquad+(-11\varrho+24\varrho^2\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2+(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2\\ &\qquad+12\varepsilon_4\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2+\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big)+C^1_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2+C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2+C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- a_4(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + a_4\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{L} + \varepsilon_5\Big)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 \\
&+ a_4\frac{4(\lambda+2\mu)^2}{L\varrho}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + a_4 C^1_{G_4}\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + a_4 C^2_{G_4}(\varepsilon_5)\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2 \\
= &\Big(-5\varrho + 24\varrho^2\varepsilon_4 + a_4\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{L} + \varepsilon_5\Big)\Big)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + 4(\lambda+2\mu)\Big(-1 + a_4\frac{\lambda+2\mu}{L\varrho}\Big)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 \\
&+ C^1_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + (C_{G_2} + a_4 C^1_{G_4})\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + a_4 C^2_{G_4}(\varepsilon_5)\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2 + C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2 \\
&+ C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 + (12\varepsilon_4 - a_4(\lambda+2\mu))\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big). \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

Wählen wir konkret $\varepsilon_4 := \min\{\frac{1}{24\varrho}, \frac{L\varrho}{48}\}$, $\varepsilon_5 := \frac{\varrho(\lambda+2\mu)}{12\varepsilon_4}$ und $a_4 := \frac{12\varepsilon_4}{\lambda+2\mu}$, so sind

$$
24\varrho^2\varepsilon_4 \le \varrho\,, \quad a_4\frac{2(\lambda+2\mu)}{L} \le \frac{\varrho}{2} < \varrho\,, \quad a_4\varepsilon_5 = \varrho\,, \quad a_4\frac{\lambda+2\mu}{L\varrho} \le \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad 12\varepsilon_4 = a_4(\lambda+2\mu)\,.
$$

Dadurch lässt sich (7.14) zusammenfassen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G_2 + G_3 + a_4 G_4) &\le -2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 3(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2 \\
&\quad + c_1\Big(\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2\Big) \\
&\le -2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 3(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + 3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\kappa^{*2}\|\theta_x\|^2 \\
&\quad + c_2\Big(\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big).
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt beruht auf den Ungleichungen $\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2 \le 3\kappa^{*2}\|\theta_x\|^2 + 3\tau_\nu^{*2}\|\theta_{tx}\|^2 + 3(\kappa\tau_\theta)^2\|\theta_{ttx}\|^2$ und $\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 \le 3\kappa^{*2}\|\theta_{tx}\|^2 + 3\tau_\nu^{*2}\|\theta_{ttx}\|^2 + 3(\kappa\tau_\theta)^2\|\theta_{tttx}\|^2$, die sich aus der Gestalt des Operators $\mathcal{D}_2$ ergeben. Als Konstanten können wir $c_1 := \max\{C^1_{G_3}(\varepsilon_4), C_{G_2} + a_4 C^1_{G_4}, C^3_{G_3}, a_4 C^2_{G_4}(\varepsilon_5)\}$ und $c_2 := \max\{c_1, 3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\tau_\nu^{*2} + 3c_1\kappa^{*2}, 3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)(\kappa\tau_\theta)^2 + 3c_1\tau_\nu^{*2}, 3c_1(\kappa\tau_\theta)^2\}$ wählen. Nun fügen wir noch $a_1 G_1$ aus Lemma 7.6 mit einem sogleich festzulegenden $a_1 \in \mathbb{R}^+$ hinzu:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1 G_1 + G_2 + G_3 + a_4 G_4) \\
&\quad \le -a_1\|\theta_x\|^2 + a_1\varepsilon_3 c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + a_1 C^3_{G_1}(\varepsilon_3)\|\theta_{tx}\|^2 + a_1 C^2_{G_1}\|\theta_{ttx}\|^2 + a_1 C^1_{G_1}\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \\
&\qquad - 2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 3(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + 3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\kappa^{*2}\|\theta_x\|^2 \\
&\qquad + c_2\Big(\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big).
\end{aligned}
$$

Um im Gesamten negative Vorzeichen vor den Termen $\|\theta_x\|^2$ und $\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2$ zu erreichen, wählen wir $a_1 := 2 + 3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\kappa^{*2}$ und $\varepsilon_3 := \frac{\lambda+2\mu}{c_{\mathrm{P}_2} a_1}$. Dann ist, mit $c_3 := c_2 + a_1\max\{C^1_{G_1}, C^2_{G_1}, C^3_{G_1}(\varepsilon_3)\}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1 G_1 + G_2 + G_3 + a_4 G_4) &\le -2\|\theta_x\|^2 - 2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 \\
&\quad + c_3\Big(\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big).
\end{aligned}
$$

Wenn wir noch die aus der Gestalt $\mathcal{D}_1 = \partial_t + \tau_q\partial_{tt}$ resultierenden Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \le 2\|\theta_{tt}\|^2 + 2\tau_q^2\|\theta_{ttt}\|^2 \le 2c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{ttx}\|^2 + 2\tau_q^2 c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tttx}\|^2\,, \\
&\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 \le 2\|\theta_{tx}\|^2 + 2\tau_q^2\|\theta_{ttx}\|^2 \quad \text{und} \quad \|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2 \le 2\|\theta_{ttx}\|^2 + 2\tau_q^2\|\theta_{tttx}\|^2
\end{aligned}
$$

verwenden, erhalten wir schließlich mit $C_G := c_3\max\{3, 3 + 2(c_{\mathrm{P}_1} + \tau_q^2), 1 + 2\tau_q^2(c_{\mathrm{P}_1} + 1)\}$ das gewünschte Ergebnis. □

Bevor wir zur Definition des Lyapunov-Funktionals kommen, soll noch gezeigt werden, dass das Hilfsfunktional $a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4$ durch die Energie $E_{\mathcal{H}}(u,\theta)+E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t)$ beschränkt wird.

Lemma 7.11 (Beschränkung des Hilfsfunktionals durch die Energie). *Es existiert eine Konstante $C_{GE}\in\mathbb{R}^+$, sodass für alle $t\in[0,\infty)$ gilt:*

$$\big|a_1G_1(t)+G_2(t)+G_3(t)+a_4G_4(t)\big|\le C_{GE}\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t)+E(u,\theta;t)+E(u_t,\theta_t;t)\big)\,.$$

Beweis: Nach Definition von G_1, G_2, G_3 und G_4 lautet der Ausdruck

$$\begin{aligned}a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4&=a_1\left(\frac{\tau_\nu^*}{\kappa^*}\|\theta_x\|^2+\frac{2\gamma T_0}{\kappa^*}\langle\mathcal{D}_1u_x,\theta\rangle\right)+6\varrho\langle\mathcal{D}_1u_x,\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle\\&\quad+\frac{12\varrho}{T_0(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\varrho}{\gamma}\langle\mathcal{D}_1u_{tt},\mathcal{D}_2\theta_x\rangle+\langle\mathcal{D}_1\theta_x,\mathcal{D}_2\theta_x\rangle\right)+4a_4\varrho\langle\mathcal{D}_1u_{tt},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle\,.\end{aligned}$$

Mithilfe der Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young und der Eigenschaft $|\Phi|\le\frac{1}{2}$ ergibt sich, beispielsweise mit $c_1:=\max\{a_1\frac{\tau_\nu^*}{\kappa^*},a_1\frac{\gamma T_0}{\kappa^*}+3\varrho,(3+a_4)\varrho,\frac{6\varrho^2}{T_0\gamma(\lambda+2\mu)}+a_4\varrho,\frac{6\varrho}{T_0(\lambda+2\mu)}(1+\frac{\varrho}{\gamma})\}$,

$$\begin{aligned}&\big|a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4\big|\\&\quad\le c_1\Big(\|\mathcal{D}_1u_{tt}\|^2+\|\mathcal{D}_1u_x\|^2+\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+\|\theta\|^2+\|\theta_x\|^2+\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2+\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2\Big)\,.\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen $\|\theta\|^2\le c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_x\|^2$ und $\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2\le 3\kappa^{*2}\|\theta_x\|^2+3\tau_\nu^{*2}\|\theta_{tx}\|^2+3(\kappa\tau_\theta)^2\|\theta_{ttx}\|^2$ folgt – als Zwischenschritt für später –

$$\begin{aligned}&\big|a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4\big|\\&\quad\le c_2\Big(\|\mathcal{D}_1u_{tt}\|^2+\|\mathcal{D}_1u_x\|^2+\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2+\|\theta_x\|^2+\|\theta_{tx}\|^2+\|\theta_{ttx}\|^2\Big)\end{aligned}\tag{7.15}$$

für eine geeignete Konstante wie etwa $c_2:=c_1\max\{1+c_{\mathrm{P}_1}+3\kappa^{*2},3\tau_\nu^{*2},3(\kappa\tau_\theta)^2\}$. Zudem ist

$$\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2\le 2\|\theta_{tx}\|^2+2\tau_q^2\|\theta_{ttx}\|^2\,,$$

sodass wir mit $c_3:=c_2\max\{3,1+2\tau_q^2\}$

$$\big|a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4\big|\le c_3\Big(\|\mathcal{D}_1u_{tt}\|^2+\|\mathcal{D}_1u_x\|^2+\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+\|\theta_x\|^2+\|\theta_{tx}\|^2+\|\theta_{ttx}\|^2\Big)$$

erhalten. Mit Ausnahme des Terms $c_3\|\theta_x\|^2$ kann der Ausdruck durch ein geeignetes Vielfaches von $E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t)$ abgeschätzt werden, denn nach Satz 7.5 (i) ist

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{D}_1u_t\|^2+\|\mathcal{D}_1u_{tt}\|^2+\|\mathcal{D}_1u_x\|^2+\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+\|\mathcal{D}_1\theta\|^2+\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2+\|\theta_{tx}\|^2+\|\theta_{ttx}\|^2\\&\quad\le\frac{1}{C_E}\big(E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t)\big)\,.\end{aligned}$$

Der verbleibende Term $\|\theta_x\|^2$ ist Bestandteil der Energie $E_{\mathcal{H}}$ und es gilt $\|\theta_x\|^2\le 2E_{\mathcal{H}}(u,\theta)$, wie ein Blick auf die Definition 7.2 zeigt. Insgesamt haben wir mit $C_{GE}:=c_3\max\{\frac{1}{C_E},2\}$ eine Konstante gefunden, sodass

$$\big|a_1G_1(t)+G_2(t)+G_3(t)+a_4G_4(t)\big|\le C_{GE}\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t)+E(u,\theta;t)+E(u_t,\theta_t;t)\big)$$

für alle $t\in[0,\infty)$ gilt. □

Wir kommen nun zur Festlegung einer Gesamtenergie $\mathscr{E}$ und eines Lyapunov-Funktionals $\mathscr{L}$. Zwischen diesen beiden sollen die Zusammenhänge

$$b_1\mathscr{E}(t) \le \mathscr{L}(t) \le b_2\mathscr{E}(t) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \le -b_3\mathscr{E}(t)$$

für geeignete positive Konstanten b_1, b_2 und b_3 und alle $t \in [0,\infty)$ bestehen. Hierzu unterscheiden wir ab jetzt die Fälle $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$.

Fall $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$

Für diese Situation haben wir mit den bisher bereitgestellten Resultaten alles beisammen, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 7.12 (Lyapunov-Funktional). *Es gelte $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$. Wir legen die folgenden Werte fest:*

$$a_2 := 1 + C_{GE} \quad \textit{sowie} \quad \varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}\,, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{a_2} \quad \textit{und}$$
$$a_3 := 1 + \max\left\{C_{GE}, \frac{a_2 C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G}{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}\,, \frac{a_2 C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) + C_G}{\kappa\tau_\theta\tau_q + \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}\,, \frac{C_G}{\kappa\tau_\theta\tau_q}\right\}.$$

Das Lyapunov-Funktional $\mathscr{L}$ und die Gesamtenergie $\mathscr{E}$ definieren wir für $t \in [0,\infty)$ durch

$$\mathscr{L}(t) := a_2 E_\mathcal{H}(u,\theta;t) + a_3\big(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\big) + a_1 G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) + a_4 G_4(t)$$
$$\textit{und} \quad \mathscr{E}(t) := E_\mathcal{H}(u,\theta;t) + E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\,.$$

Dann ist zum einen $\mathscr{L}$ äquivalent zu $\mathscr{E}$, d. h. $\exists\, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : b_1\mathscr{E}(t) \le \mathscr{L}(t) \le b_2\mathscr{E}(t)$, und zum anderen gilt: $\exists\, b_3 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \le -b_3\mathscr{E}(t)$.

Beweis: Um absehen zu können, wie wir die verbleibenden Konstanten ε_1 und ε_2 sowie die Faktoren a_2 und a_3 zur Gewichtung der Energieterme zu wählen haben, tragen wir die bislang erarbeiteten Ergebnisse zusammen. So gilt zum einen nach Lemma 7.3, Satz 7.5 (ii) und Korollar 7.10

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} &\le a_2\Big(-\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 + \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \varepsilon_2\|\theta_x\|^2 + C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\theta_{tx}\|^2 + C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2)\|\theta_{ttx}\|^2\Big)\\
&\quad + a_3\Big(-(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - (\kappa\tau_\theta\tau_q + \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{ttx}\|^2 - \kappa\tau_\theta\tau_q\|\theta_{tttx}\|^2\Big)\\
&\quad - 2\|\theta_x\|^2 - 2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + C_G\Big(\|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big)\\
&= (-2\varrho + a_2\varepsilon_1)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 - a_2\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2\\
&\quad + (-2 + a_2\varepsilon_2)\|\theta_x\|^2 + \big(-a_3(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q) + a_2 C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G\big)\|\theta_{tx}\|^2\\
&\quad + \big(-a_3(\kappa\tau_\theta\tau_q + \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q) + a_2 C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) + C_G\big)\|\theta_{ttx}\|^2 + \big(-a_3\kappa\tau_\theta\tau_q + C_G\big)\|\theta_{tttx}\|^2. \qquad (7.16)
\end{aligned}$$

Zum anderen folgen aus Lemma 7.11

$$\mathscr{L} \le (a_2 + C_{GE})E_\mathcal{H}(u,\theta;t) + (a_3 + C_{GE})\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big) \qquad (7.17)$$

und

$$\mathscr{L} \ge (a_2 - C_{GE})E_\mathcal{H}(u,\theta;t) + (a_3 - C_{GE})\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big)\,. \qquad (7.18)$$

Damit in (7.18) die Positivität des Lyapunov-Funktionals gewahrt bleibt, sollte zunächst einmal $a_2 > C_{GE}$, also etwa $a_2 := 1 + C_{GE}$ sein. Nachdem wir a_2 fixiert haben, legen wir ε_1 und ε_2 mit Blick auf (7.16) als $\varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}$ und $\varepsilon_2 := \frac{1}{a_2}$ fest. Aufgrund von (7.18) sollte außerdem $a_3 > C_{GE}$ gelten und um in (7.16) negative Koeffizienten vor den Termen $\|\theta_{tx}\|^2$, $\|\theta_{ttx}\|^2$ und $\|\theta_{tttx}\|^2$ zu erlangen, muss a_3 hinreichend groß sein. All dies erreichen wir, wenn wir a_3 als

$$a_3 := 1 + \max\left\{C_{GE}, \frac{a_2 C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G}{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}, \frac{a_2 C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2) + C_G}{\kappa\tau_\theta\tau_q + \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}, \frac{C_G}{\kappa\tau_\theta\tau_q}\right\}$$

wählen. Durch diese Festlegungen vereinfacht sich (7.16) zu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} &\le -\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 - a_2\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 - \|\theta_x\|^2\\ &\quad - (\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - (\kappa\tau_\theta\tau_q + \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{ttx}\|^2 - \kappa\tau_\theta\tau_q\|\theta_{tttx}\|^2\\ &\le -c_1\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \|\theta_{tt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big)\,, \end{aligned} \tag{7.19}$$

wobei $c_1 := \min\{\varrho, 2(\lambda+2\mu), a_2\frac{\varrho c_v}{T_0}, 1, \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q, \kappa\tau_\theta\tau_q\}$ ist. Die Ungleichungen (7.17) und (7.18) bedeuten gerade, dass $\mathscr{L}$ und $\mathscr{E}$ äquivalent sind:

$$\forall\, t \in [0,\infty): \ \min\{a_2 - C_{GE}, a_3 - C_{GE}\}\mathscr{E}(t) \le \mathscr{L}(t) \le \max\{a_2 + C_{GE}, a_3 + C_{GE}\}\mathscr{E}(t)\,.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Für den zweiten Teil bleibt noch nachzuweisen, dass sich (7.19) weiterhin gegen die negative Gesamtenergie abschätzen lässt. Die Gesamtenergie $\mathscr{E}$ setzt sich laut Definition (siehe die Definitionen 7.2 und 7.4) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\varrho}{\tau_q}\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + \frac{\lambda+2\mu}{\tau_q}\|\mathcal{D}_1 u_x\|^2 + \frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \frac{\tau_\nu^*}{T_0}\|\theta_{tx}\|^2\Big)\\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_x\|^2 + \varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta\|^2 + \kappa^*\|\theta_x\|^2 + (\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta)\|\theta_{tx}\|^2\Big)\\ &\quad + \kappa^*\tau_q\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle\\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \kappa^*\|\theta_{tx}\|^2 + (\tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta)\|\theta_{ttx}\|^2\Big)\\ &\quad + \kappa^*\tau_q\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle\\ &\le c_2\Big(\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_x\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2\\ &\qquad + \|\theta_{tt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2\Big) + \kappa^*\tau_q\big(\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle + \langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle\big)\end{aligned}$$

für $c_2 := \frac{1}{2}\max\{\varrho(\frac{1}{\tau_q}+T_0), (\lambda+2\mu)(\frac{1}{\tau_q}+T_0), \frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}, 1+\kappa^*, \frac{\tau_\nu^*}{T_0} + \tau_\nu^*\tau_q + \kappa\tau_\theta + \kappa^*, \varrho c_v\}$. Des Weiteren haben wir die folgenden Ungleichungen zur Verfügung:

$$\begin{gathered}\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 \le c_{\mathrm{P}_1}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\,, \quad \|\mathcal{D}_1 u_x\|^2 \le c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2\,, \text{ denn wie unter (7.10) ist } \int_0^L \mathcal{D}_1 u_x\,\mathrm{d}x = 0\,,\\ \|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 \le 2\Big(\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\Big)^2\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + 4\Big(\frac{\gamma}{\varrho}\Big)^2\Big(\|\theta_{tx}\|^2 + \tau_q^2\|\theta_{ttx}\|^2\Big)\,,\\ \|\mathcal{D}_1\theta\|^2 \le 2\|\theta_t\|^2 + 2\tau_q^2\|\theta_{tt}\|^2 \le 2c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tx}\|^2 + 2\tau_q^2\|\theta_{tt}\|^2\,,\\ \|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \le 2\|\theta_{tt}\|^2 + 2\tau_q^2\|\theta_{ttt}\|^2 \le 2\|\theta_{tt}\|^2 + 2\tau_q^2 c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tttx}\|^2\,,\\ \langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle + \langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle \le \frac{1}{2}\|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_{ttx}\|^2\,.\end{gathered} \tag{7.20}$$

Sie ergeben sich mithilfe der Ungleichungen von Poincaré, Cauchy-Schwarz und Young sowie anhand der Gestalt des Operators $\mathcal{D}_1$ und des Zusammenhangs aus der Differentialgleichung (7.3 a). Für eine hinreichend große Konstante $c_3 \in \mathbb{R}^+$ genügt $\mathscr{E}$ folglich der Abschätzung

$$\mathscr{E} \leq c_3\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \|\theta_{tt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big)\,.$$

Zusammen mit (7.19) impliziert dies $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \leq -\frac{c_1}{c_3}\mathscr{E}(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$. □

Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$

Wenn $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt, entfällt in Satz 7.5 (ii) der Ausdruck $-\|\theta_{tx}\|^2$, sodass wir diesen auf künstlichem Weg konstruieren müssen. Wie in [BQR14] liefert das folgende Funktional H den gewünschten Term.

Lemma 7.13 (Hilfsfunktional H). *Für $t \in [0,\infty)$ definieren wir $H(t) := -\langle\theta_x(t), \theta_{tx}(t)\rangle$. Dann gilt für alle $t \in [0,\infty)$*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t) \leq -\|\theta_{tx}(t)\|^2 + \frac{\varepsilon_6}{2}\|\theta_x(t)\|^2 + C_H(\varepsilon_6)\|\theta_{ttx}(t)\|^2$$

und

$$\big|H(t)\big| \leq \varepsilon_7 E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + C_{HE}(\varepsilon_7)\big(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\big)\,,$$

wobei ε_6 und $\varepsilon_7 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden können und die davon abhängigen Konstanten $C_H(\varepsilon_6)$ und $C_{HE}(\varepsilon_7)$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Nach den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young gilt für ein beliebiges $\varepsilon_6 \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H = -\|\theta_{tx}\|^2 - \langle\theta_x, \theta_{ttx}\rangle \leq -\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\varepsilon_6}{2}\|\theta_x\|^2 + C_H(\varepsilon_6)\|\theta_{ttx}\|^2 \quad \text{mit } C_H(\varepsilon_6) := \frac{1}{2\varepsilon_6}\,.$$

Außerdem ergibt sich für ein frei zu wählendes $\varepsilon_7 \in \mathbb{R}^+$

$$|H| \leq \frac{\varepsilon_7}{2}\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_7}\|\theta_{tx}\|^2 \leq \varepsilon_7 E_{\mathcal{H}}(u,\theta) + C_{HE}(\varepsilon_7)\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big) \quad \text{mit } C_{HE}(\varepsilon_7) := \frac{1}{2\varepsilon_7 C_E}$$

gemäß der Definition 7.2 von $E_{\mathcal{H}}$ und der Eigenschaft von E aus Satz 7.5 (i). □

Satz 7.14 (Lyapunov-Funktional). *Es gelte $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$. Wir legen die folgenden Werte fest:*

$$a_2 := 2 + C_{GE}\,, \quad \varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}\,, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{2a_2}\,, \quad a_5 := 1 + a_2 C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G\,, \quad \varepsilon_6 := \frac{1}{a_5}\,, \quad \varepsilon_7 := \frac{1}{a_5}$$

$$\textit{und} \quad a_3 := 1 + \max\left\{C_{GE} + a_5 C_{HE}(\varepsilon_7)\,,\ \frac{a_2 C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2) + C_G + a_5 C_H(\varepsilon_6)}{\kappa\tau_\theta\tau_q}\,,\ \frac{C_G}{\kappa\tau_\theta\tau_q}\right\}.$$

Die Gesamtenergie $\mathscr{E}$ sei wie zuvor als $\mathscr{E}(t) := E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)$ definiert. Als Lyapunov-Funktional $\mathscr{L}$ wählen wir für $t \in [0,\infty)$

$$\mathscr{L}(t) := a_2 E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + a_3\big(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\big) + a_1 G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) + a_4 G_4(t) + a_5 H(t)\,.$$

Dann ist zum einen $\mathscr{L}$ äquivalent zu $\mathscr{E}$, d. h. $\exists\, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : b_1\mathscr{E}(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq b_2\mathscr{E}(t)$, und zum anderen gilt: $\exists\, b_3 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \leq -b_3\mathscr{E}(t)$.

Beweis: Die Ungleichungen (7.16), (7.17) und (7.18) aus dem Beweis von Satz 7.12 müssen hier jeweils noch um die durch $a_5 H$ hervorgerufenen Beiträge aus Lemma 7.13 ergänzt werden, zugleich entfallen diejenigen Terme, die den Faktor $\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q = 0$ umfassen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} \leq{}& (-2\varrho + a_2\varepsilon_1)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 - a_2\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 \\ &+ \left(-2 + a_2\varepsilon_2 + a_5\frac{\varepsilon_6}{2}\right)\|\theta_x\|^2 + (-a_5 + a_2 C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G)\|\theta_{tx}\|^2 \\ &+ (-a_3\kappa\tau_\theta\tau_q + a_2 C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) + C_G + a_5 C_H(\varepsilon_6))\|\theta_{ttx}\|^2 + (-a_3\kappa\tau_\theta\tau_q + C_G)\|\theta_{tttx}\|^2 \end{aligned} \tag{7.21}$$

sowie

$$\mathscr{L} \leq (a_2 + C_{GE} + a_5\varepsilon_7)E_\mathcal{H}(u,\theta) + \big(a_3 + C_{GE} + a_5 C_{HE}(\varepsilon_7)\big)\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big) \tag{7.22}$$

und

$$\mathscr{L} \geq (a_2 - C_{GE} - a_5\varepsilon_7)E_\mathcal{H}(u,\theta) + \big(a_3 - C_{GE} - a_5 C_{HE}(\varepsilon_7)\big)\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big)\,. \tag{7.23}$$

Als Erstes müssen ein geeignetes a_2 und daraufhin ε_1 und ε_2 festgelegt werden, was durch die Wahl $a_2 := 2 + C_{GE}$, $\varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}$ und $\varepsilon_2 := \frac{1}{2a_2}$ geschieht. Dann können wir $a_5 := 1 + a_2 C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G$ setzen, um in (7.21) einen negativen Faktor vor dem Term $\|\theta_{tx}\|^2$ zu erlangen. Dass zugleich die gewünschten Vorzeichen vor $E_\mathcal{H}$ in (7.23) und vor $\|\theta_x\|^2$ in (7.21) gewahrt bleiben, stellen $\varepsilon_6 := \frac{1}{a_5}$ und $\varepsilon_7 := \frac{1}{a_5}$ sicher. Schließlich ist noch a_3 hinreichend groß zu wählen, etwa

$$a_3 := 1 + \max\left\{C_{GE} + a_5 C_{HE}(\varepsilon_7)\,,\ \frac{a_2 C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) + C_G + a_5 C_H(\varepsilon_6)}{\kappa\tau_\theta\tau_q}\,,\ \frac{C_G}{\kappa\tau_\theta\tau_q}\right\}.$$

Insgesamt erreichen wir damit die Äquivalenz von $\mathscr{L}$ und $\mathscr{E}$ durch (7.22) und (7.23) sowie

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} &\leq -\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 - a_2\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 - \|\theta_x\|^2 - \|\theta_{tx}\|^2 \\ &\quad - \kappa\tau_\theta\tau_q\big(\|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\big) \\ &\leq -c\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \|\theta_{tt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big)\end{aligned}$$

für $c := \min\{\varrho, 2(\lambda+2\mu), a_2\frac{\varrho c_v}{T_0}, 1, \kappa\tau_\theta\tau_q\}$, woraus die Abschätzung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \leq -b_3\mathscr{E}(t)$ für ein geeignetes $b_3 \in \mathbb{R}^+$ und alle $t \in [0,\infty)$ wie im Beweis von Satz 7.12 gefolgert werden kann. □

Als Konsequenz aus den Sätzen 7.12 und 7.14 können wir nun die Frage nach der exponentiellen Stabilität des Systems (7.2) bzw. (7.3) unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen beantworten. Die Fälle $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $\tau_\nu^* = \tau_q$ fassen wir hierbei wieder zusammen.

Satz 7.15 (Exponentielle Stabilität für TPLT (1,1,1) unter Dirichlet-Randbedingungen). *Es gelte $\tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ und es sei (u,θ) eine hinreichend glatte Lösung von* (7.2) *unter der Randbedingung* (7.4). *Dann klingt die Gesamtenergie $\mathscr{E} := E_\mathcal{H}(u,\theta) + E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)$ exponentiell ab, d. h.*

$$\exists\, D \in \mathbb{R}^+\ \exists\, d \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \mathscr{E}(t) \leq D\mathscr{E}(0)e^{-dt}\,.$$

Insbesondere gilt:

$$\exists\, D_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, D_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \|\theta(t)\| \leq D_1 e^{-\frac{d}{2}t} \quad \textit{und} \quad \|u(t)\| \leq D_2 e^{-\min\{\frac{1}{\tau_q},\frac{d}{2}\}t}\,.$$

Beweis: Die Gesamtenergie $\mathscr{E}$ ist zunächst einmal mit dem System (7.3) assoziiert, da jedoch (u,θ) als hinreichend glatte Lösung von (7.2) auch die Differentialgleichungen unter (7.3) erfüllt, ist $\mathscr{E}$ wohldefiniert. Die Sätze 7.12 für den Fall $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und 7.14 für den Fall $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ beschreiben die Existenz eines Lyapunov-Funktionals $\mathscr{L}$ mit den Eigenschaften

$$b_1\mathscr{E}(t) \le \mathscr{L}(t) \le b_2\mathscr{E}(t) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \le -b_3\mathscr{E}(t) \le -\frac{b_3}{b_2}\mathscr{L}(t) \quad \text{für alle } t \in [0,\infty)\,.$$

Hieraus schließen wir mit dem Lemma von Grönwall A.15

$$\forall\, t \in [0,\infty): \quad \mathscr{E}(t) \le \frac{1}{b_1}\mathscr{L}(t) \le \frac{1}{b_1}\mathscr{L}(0)e^{-dt} \le D\mathscr{E}(0)e^{-dt} \quad \text{mit} \quad D := \frac{b_2}{b_1} \quad \text{und} \quad d := \frac{b_3}{b_2}\,.$$

Dies entspricht dem ersten Teil der Behauptung. Aufgrund der ersten Poincaréschen Ungleichung und der Tatsache, dass der Term $\|\theta_x\|^2$ Bestandteil von $E_{\mathcal{H}}(u,\theta)$ (vergleiche Definition 7.2) und damit Bestandteil der Gesamtenergie $\mathscr{E}$ ist, folgt aus der Abschätzung für $\mathscr{E}$ auch unmittelbar das exponentielle Abklingen für die Temperatur θ:

$$\|\theta(t)\|^2 \le c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_x(t)\|^2 \le 2c_{\mathrm{P}_1}E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) \le 2c_{\mathrm{P}_1}\mathscr{E}(t) \le 2c_{\mathrm{P}_1}D\mathscr{E}(0)e^{-dt}\,, \tag{7.24}$$

also

$$\|\theta(t)\| \le D_1 e^{-\frac{d}{2}t} \quad \text{für } D_1 := \sqrt{2c_{\mathrm{P}_1}D\mathscr{E}(0)} \text{ und alle } t \in [0,\infty)\,.$$

Eine entsprechende Aussage für die Funktion u ist nicht ganz so schnell ersichtlich, denn in der Energie $\mathscr{E}$ treten zwar Terme wie $\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2$, nicht aber $\|u\|^2$ oder $\|u_x\|^2$ auf. Dies hängt damit zusammen, dass das abgewandelte System (7.3) den Ausgangspunkt für die Energieabschätzungen bildete. Dennoch lassen unsere Ergebnisse Rückschlüsse auf ein exponentiell stabiles Verhalten von u zu: Wir schreiben $\mathcal{D}_0 := \mathrm{Id} + \tau_q\partial_t$. Mit der ersten und zweiten Poincaréschen Ungleichung ergibt sich

$$\|\mathcal{D}_0 u\|^2 \le c_{\mathrm{P}_1}\|\mathcal{D}_0 u_x\|^2 \le c_{\mathrm{P}_1}c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_0 u_{xx}\|^2, \quad \text{da} \int_0^L \mathcal{D}_0 u_x \,\mathrm{d}x = (\mathcal{D}_0 u)(L) - (\mathcal{D}_0 u)(0) = 0 \text{ ist.}$$

Wenn wir den Operator $\mathcal{D}_0$ auf die Differentialgleichung (7.2 a) anwenden, erhalten wir die Darstellung $\frac{\varrho}{\lambda+2\mu}\mathcal{D}_0 u_{tt} + \frac{\gamma}{\lambda+2\mu}\mathcal{D}_0\theta_x$ für $\mathcal{D}_0 u_{xx}$, wobei nach Definition der Operatoren $\mathcal{D}_0$ und $\mathcal{D}_1$ gerade $\mathcal{D}_0 u_{tt} = \mathcal{D}_1 u_t$ und $\mathcal{D}_0\theta_x = \theta_x + \tau_q\theta_{tx}$ gilt. Damit folgt

$$\|\mathcal{D}_0 u\|^2 \le c_{\mathrm{P}_1}c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_0 u_{xx}\|^2 \le c_1\Big(\|\mathcal{D}_0 u_{tt}\|^2 + \|\mathcal{D}_0\theta_x\|^2\Big) \le c_2\Big(\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2\Big)$$

für $c_1 := \frac{2c_{\mathrm{P}_1}c_{\mathrm{P}_2}}{(\lambda+2\mu)^2}\max\{\varrho^2,\gamma^2\}$ und $c_2 := 2c_1\max\{1,\tau_q^2\}$. Die drei Terme der rechten Seite sind Teil der Energie $\mathscr{E}$, denn nach Definition 7.2 gilt $c_3(\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2) \le E_{\mathcal{H}}(u,\theta) \le \mathscr{E}$ für $c_3 := \frac{1}{2}\min\{\frac{\varrho}{\tau_q}, 1, \frac{\tau_\nu^*}{T_0}\}$. Von der Gesamtenergie $\mathscr{E}$ wiederum wissen wir schon, dass sie exponentiell abklingt. So folgt

$$\|\mathcal{D}_0 u(t)\|^2 \le \frac{c_2}{c_3}\mathscr{E}(t) \le \frac{c_2}{c_3}D\mathscr{E}(0)e^{-dt}\,, \quad \text{also} \quad \|\mathcal{D}_0 u(t)\| \le \sqrt{\frac{c_2}{c_3}D\mathscr{E}(0)}e^{-\frac{d}{2}t} \quad \text{für } t \in [0,\infty)\,.$$

Der Zusammenhang zwischen $\mathcal{D}_0 u$ und u kann als eine gewöhnliche Differentialgleichung zum Anfangswert $u_0 := u(0)$ aufgefasst werden,

$$\begin{aligned} u(t) + \tau_q u_t(t) &= \mathcal{D}_0 u(t)\,, \quad t \in (0,\infty)\,, \\ u(0) &= u_0\,. \end{aligned}$$

Dies führt nach Satz A.18 zu der Darstellung

$$u(t) = e^{-\frac{1}{\tau_q}t}u_0 + \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_q}(t-s)}\mathcal{D}_0 u(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Insgesamt erhalten wir nun, wenn wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $d \neq \frac{2}{\tau_q}$ ist,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\|u_0\| + \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_q}(t-s)}\|\mathcal{D}_0 u(s)\|\,\mathrm{d}s \leq e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\|u_0\| + \sqrt{\frac{c_2}{c_3}D\mathscr{E}(0)}\int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_q}(t-s)}e^{-\frac{d}{2}s}\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\|u_0\| + \sqrt{\frac{c_2}{c_3}D\mathscr{E}(0)}\frac{1}{\frac{1}{\tau_q}-\frac{d}{2}}\big(e^{-\frac{d}{2}t} - e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\big) \\
&\leq D_2 e^{-\min\{\frac{1}{\tau_q},\frac{d}{2}\}t} \quad \text{mit} \quad D_2 := \|u_0\| + \frac{4\tau_q}{|2-d\tau_q|}\sqrt{\frac{c_2}{c_3}D\mathscr{E}(0)}\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass auch ein exponentielles Abklingen für u vorliegt. □

Bemerkung 7.16. Wir haben wie in [QR06b] die Energie $E_{\mathcal{H}}$ als Ausgangspunkt genommen, die aus dem für den Beweis der Wohlgestelltheit genutzten Skalarprodukt hervorgeht und somit die „natürliche Energie“ einer Lösung darstellt (vergleiche Abschnitt 2.5.2). Wenn man die vorangehenden Rechnungen überprüft, stellt man allerdings fest, dass an die Stelle von $E_{\mathcal{H}}$ wohl auch einfach nur $\frac{1}{2}\|\theta_x\|^2$ mit der Abschätzung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\|\theta_x\|^2 \leq \frac{\varepsilon_2}{2}\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}\|\theta_{tx}\|^2$ treten kann.

7.1.2 Homogene Dirichlet-Neumann-Randbedingungen

Die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt lassen sich übertragen, wenn wir für θ statt der Dirichlet-Randbedingung eine homogene Neumann-Randbedingung annehmen. Wir werden sehen, dass sich das Vorgehen dabei sogar vereinfacht.

Die Randbedingungen zu den Systemen (7.2) und (7.3) sollen also ab jetzt

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{und} \quad \theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0 \quad \text{für } t \in [0,\infty) \tag{7.25}$$

lauten. Bildet man in der Differentialgleichung (7.3 b) das Integral über das Intervall $(0,L)$, so stellt man fest, dass nun

$$0 = \varrho c_v \int_0^L \mathcal{D}_1\theta_t(t,x)\,\mathrm{d}x + \gamma T_0 \int_0^L \mathcal{D}_1 u_{tx}(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_0^L \mathcal{D}_2\theta_{xx}(t,x)\,\mathrm{d}x = \varrho c_v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \mathcal{D}_1\theta(t,x)\,\mathrm{d}x$$

gilt, d. h. für alle $t \in [0,\infty)$ ist

$$\int_0^L \mathcal{D}_1\theta(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L \mathcal{D}_1\theta(0,x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.26}$$

Nachdem $\int_0^L \mathcal{D}_1\theta(t,x)\,\mathrm{d}x \leq \|\mathcal{D}_1\theta(t)\|_{L^1((0,L))} \leq L\|\mathcal{D}_1\theta(t)\|_{L^2((0,L))}$ ist, bedeutet dies, dass für $\mathcal{D}_1\theta$ im Allgemeinen kein zeitliches Abklingen zu erwarten ist. Solch ein Verhalten ist für Neumann-Randbedingungen typisch, siehe beispielsweise [Daf68; JR00; Rac02] für Entsprechendes in der klassischen Thermoelastizität und derjenigen mit Second Sound.

Wir überlegen uns, welche Bedeutung (7.26) für die Funktion θ selbst hat. Aus $\theta + \tau_q\theta_t = \mathcal{D}_0\theta$ und $\partial_t\mathcal{D}_0\theta = \mathcal{D}_1\theta$ erhalten wir (vergleiche den Beweis zu Satz 7.15) die Darstellung

$$\begin{aligned}
\theta(t,x) &= e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\theta_0(x) + \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_q}(t-s)}\mathcal{D}_0\theta(s,x)\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\theta_0(x) + \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_q}(t-s)}\Big(\mathcal{D}_0\theta(0,x) + \int_0^s \mathcal{D}_1\theta(r,x)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Beachtung der Gleichung (7.26)

$$\begin{aligned}
\int_0^L \theta(t,x)\,\mathrm{d}x &= e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\int_0^L \theta_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_q}(t-s)}\Big(\int_0^L \mathcal{D}_0\theta(0,x)\,\mathrm{d}x + \int_0^s\int_0^L \mathcal{D}_1\theta(r,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\int_0^L \theta_0(x)\,\mathrm{d}x + \tau_q\big(1-e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\big)\int_0^L \mathcal{D}_0\theta(0,x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_q}(t-s)}s\int_0^L \mathcal{D}_1\theta(0,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\int_0^L \theta_0(x)\,\mathrm{d}x + \tau_q\big(1-e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\big)\int_0^L \theta_0(x)+\tau_q\theta_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \tau_q\big(t-\tau_q+\tau_q e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\big)\int_0^L \theta_1(x)+\tau_q\theta_2(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Da $\|\theta(t)\|_{L^2((0,L))} \geq \frac{1}{L}\|\theta(t)\|_{L^1((0,L))} \geq \frac{1}{L}\int_0^L \theta(t,x)\,\mathrm{d}x$ gilt, ist demnach die L^2-Norm der Funktion θ im Allgemeinen nicht einmal beschränkt. Um diese Möglichkeit auszuschließen, betrachten wir im Folgenden nur solche θ mit der Eigenschaft

$$\int_0^L \theta(t,x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } t\in[0,\infty)\,.$$

Alternativ dazu wäre an die Stelle von θ die Funktion

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}(t,x) := \theta(t,x) - \frac{1}{L}\Big(&e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\int_0^L \theta_0(x)\,\mathrm{d}x + \tau_q\big(1-e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\big)\int_0^L \theta_0(x)+\tau_q\theta_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&+ \tau_q\big(t-\tau_q+\tau_q e^{-\frac{1}{\tau_q}t}\big)\int_0^L \theta_1(x)+\tau_q\theta_2(x)\,\mathrm{d}x\Big)
\end{aligned}$$

zu setzen. Diese würde zusammen mit u ebenfalls die Differentialgleichungen (7.2) und (7.3) lösen und die Randbedingung (7.25) sowie $\int_0^L \widetilde{\theta}(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$ erfüllen.
Im Übrigen sehen wir, dass $\int_0^L \theta(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$ dann gilt, wenn die Anfangswerte θ_0, θ_1 und θ_2 diese Eigenschaft besitzen. Es genügt also,

$$\int_0^L \theta_0(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,\quad \int_0^L \theta_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^L \theta_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{7.27}$$

zu fordern.

Bemerkung 7.17 (Wohlgestelltheit). Hinsichtlich der Wohlgestelltheit sollte es möglich sein, das unter der Bemerkung 7.1 erwähnte Vorgehen aus dem Fall reiner Dirichlet-Randbedingungen zu übertragen. Dazu ersetze man den Raum $\mathcal{H}$ auf $\Omega := (0,L)$ durch

$$\mathcal{H} := H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times H_*^1(\Omega)\times H_*^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \quad \text{mit} \quad H_*^1(\Omega) := \big\{v\in H^1(\Omega)\;\big|\;\langle v,1\rangle_{L^2(\Omega)} = 0\big\}$$

und den Definitionsbereich des Operators durch

$$D(\mathcal{A}) := \Big\{V\in H_0^1(\Omega)^2\times\big(H_*^1(\Omega)\cap H_N^1(\Omega)\big)^3 \;\big|\; \partial_{xx}V_1,\ \kappa^*\partial_{xx}V_3+\tau_\nu^*\partial_{xx}V_4+\kappa\tau_\theta\partial_{xx}V_5\in L^2(\Omega)\Big\}$$

$$\text{mit } H_N^1(\Omega) := \Big\{v\in H^1(\Omega)\;\Big|\;\exists\, f\in L^2(\Omega)\;\forall\,\varphi\in H^1(\Omega): \int_0^L v_x(x)\varphi_x(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^L f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big\}\,.$$

Die in der Bemerkung 7.1 angegebene Sesquilinearform bildet dann wiederum ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$, wobei sich die positive Definitheit nun mithilfe der zweiten Poincaréschen Ungleichung ergibt.

Die zweite Poincarésche Ungleichung aus Satz A.14 (ii) ist auch das Stichwort, mit dem wir die Ungleichungen für θ in der Argumentation aus Abschnitt 7.1.1 aufrechterhalten können. Darüber hinaus ist zu prüfen, ob die durchgeführten partiellen Integrationen ihre Gültigkeit behalten.

Lemma 7.18 (Energien $E_{\mathcal{H}}, E$ und Hilfsfunktionale G_1, G_2). *Die Energien $E_{\mathcal{H}}$ und E sowie die Funktionale G_1 und G_2 seien wie in Abschnitt 7.1.1 definiert. Die Aussagen von Lemma 7.3, Satz 7.5, Lemma 7.6 und Lemma 7.7 behalten unter der Randbedingung* (7.25) *und der Voraussetzung* (7.27) *ihre Gültigkeit.*

Beweis: Die durchgeführten partiellen Integrationen

- $\langle \theta_{xx}, \theta_{tt} \rangle = -\langle \theta_x, \theta_{ttx} \rangle$, $\langle \theta_{txx}, \theta_{tt} \rangle = -\langle \theta_{tx}, \theta_{ttx} \rangle$ und $\langle \theta_{ttxx}, \theta_{tt} \rangle = -\|\theta_{ttx}\|^2$ im Beweis von Lemma 7.3 im Vorfeld zu (7.6),
- $\langle \mathcal{D}_2\theta_{xx}, \mathcal{D}_1\theta \rangle = -\langle \mathcal{D}_2\theta_x, \mathcal{D}_1\theta_x \rangle$ im Beweis von Satz 7.5 unter (7.8),
- $\langle \theta_{xx}, \theta \rangle = -\|\theta_x\|^2$, $\langle \theta_{txx}, \theta \rangle = -\langle \theta_{tx}, \theta_x \rangle$ und $\langle \theta_{ttxx}, \theta \rangle = -\langle \theta_{ttx}, \theta_x \rangle$ im Beweis von Lemma 7.6 im Vorfeld zu (7.9),

sind alle auch dann noch gültig, wenn $\theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0$ ist. Da wir $\int_0^L \theta(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$ annehmen, greift die zweite Poincarésche Ungleichung, wo zuvor die erste Poincarésche Ungleichung zum Einsatz kam. Es ist

$$\|\theta\|^2 \le c_{\mathrm{P}_2}\|\theta_x\|^2 \quad \text{und} \quad \|\theta_t\|^2 \le c_{\mathrm{P}_2}\|\theta_{tx}\|^2 ,$$

sodass in den Beweisen von Lemma 7.3 und Lemma 7.6 lediglich die Poincaré-Konstante c_{P_1} durch c_{P_2} zu ersetzen ist. Im Beweis von Lemma 7.7 gingen die Randbedingungen an θ nicht ein. □

Die Vereinfachung gegenüber dem Fall reiner Dirichlet-Randbedingungen ergibt sich durch Wegfallen des Randterms in der Abschätzung für G_3. Das Funktional G_4, das dem Ausgleich des Randterms diente, wird daraufhin nicht mehr benötigt.

Lemma 7.19 (Hilfsfunktional G_3). *Das Funktional G_3 sei wie in Lemma 7.8 definiert. Unter der Randbedingung* (7.25) *und der Voraussetzung* (7.27) *existieren Konstanten $C^1_{G_3}$, $C^3_{G_3} \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_3(t) \le -11\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + (\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 + C^1_{G_3}\|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 + C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t)\|^2 .$$

Beweis: Unter homogenen Neumann-Randbedingungen für θ ist $[(\mathcal{D}_1 u_{tx})(\mathcal{D}_2\theta_x)]_0^L = 0$. Damit verschwindet der Randterm im Beweis von Lemma 7.8. Die Abschätzung für G_3 ist durch (7.11) gegeben, woraufhin wir $C^1_{G_3}$ als $(\frac{6\varrho c_v}{\gamma T_0})^2\varrho$ wählen können. □

Korollar 7.20 (Zusammenfassen der Hilfsfunktionale). *Unter der Randbedingung* (7.25) *und der Voraussetzung* (7.27) *existieren Konstanten C_G, $C_{GE} \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(2G_1(t)+G_2(t)+G_3(t)\big) &\le -2\|\theta_x(t)\|^2 - 2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 \\ &\quad + C_G\Big(\|\theta_{tx}(t)\|^2 + \|\theta_{ttx}(t)\|^2 + \|\theta_{tttx}(t)\|^2\Big)\end{aligned}$$

$$\textit{und} \quad \big|2G_1(t)+G_2(t)+G_3(t)\big| \le C_{GE}\mathscr{E}(t) \quad \textit{mit} \quad \mathscr{E}(t) := E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t) .$$

Beweis: Nach Lemma 7.19 sowie gemäß der Lemmata 7.6 und 7.7, deren Aussagen wir nach Lemma 7.18 übernehmen können, gilt für ein beliebiges $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(2G_1(t) + G_2(t) + G_3(t)\big) \\
&\quad \le -2\|\theta_x\|^2 + 2\varepsilon_3 c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + 2C^3_{G_1}(\varepsilon_3)\|\theta_{tx}\|^2 + 2C^2_{G_1}\|\theta_{ttx}\|^2 + 2C^1_{G_1}\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \\
&\qquad - 5(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + 6\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + C_{G_2}\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 \\
&\qquad - 11\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + (\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + C^1_{G_3}\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 \\
&\quad = -2\|\theta_x\|^2 - 5\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \big(-4(\lambda+2\mu) + 2\varepsilon_3 c_{\mathrm{P}_2}\big)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 \\
&\qquad + 2C^3_{G_1}(\varepsilon_3)\|\theta_{tx}\|^2 + 2C^2_{G_1}\|\theta_{ttx}\|^2 + \big(2C^1_{G_1} + C^1_{G_3}\big)\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + C_{G_2}\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + C^3_{G_3}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 .
\end{aligned}$$

Wir können $\varepsilon_3 := \frac{1}{c_{\mathrm{P}_2}}$ wählen und die Terme $\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2$ und $\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2$ wie im Beweis von Korollar 7.10 abschätzen. Auf $\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \le 2\|\theta_{tt}\|^2 + 2\tau_q^2\|\theta_{ttt}\|^2$ ist die zweite Poincarésche Ungleichung anzuwenden, die $\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \le 2c_{\mathrm{P}_2}\|\theta_{ttx}\|^2 + 2\tau_q^2 c_{\mathrm{P}_2}\|\theta_{tttx}\|^2$ liefert. Die Tatsache $-5\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 \le -2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2$ nutzen wir lediglich, um dieselbe Form wie zuvor zu erreichen, nachdem wir die Definitionen der Hilfsfunktionale unverändert lassen wollten. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich wie im Beweis von Lemma 7.11, nur mit dem Unterschied, dass die zweite Poincarésche Ungleichung $\|\theta\|^2 \le c_{\mathrm{P}_2}\|\theta_x\|^2$ zum Einsatz kommt. □

Satz 7.21 (Exponentielle Stabilität für TPLT (1,1,1) unter Dirichlet-Neumann-Randbedingungen). *Es gelte $\tau_\nu^* \ge \kappa^*\tau_q$ und es sei (u,θ) eine hinreichend glatte Lösung von* (7.2) *unter der Randbedingung* (7.25) *und der Voraussetzung* (7.27). *Dann existieren $d, D, D_1, D_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:*

$$\mathscr{E}(t) \le D\mathscr{E}(0)e^{-dt}\,, \quad \|\theta(t)\| \le D_1 e^{-\frac{d}{2}t} \quad \textit{und} \quad \|u(t)\| \le D_2 e^{-\min\{\frac{1}{\tau_q},\frac{d}{2}\}t}\,.$$

Beweis: Durch Korollar 7.20 behalten alle Beweisschritte zu Satz 7.12, falls $\tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ ist, bzw. Satz 7.14, falls $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ ist, ihre Gültigkeit, wenn wir den Term $a_1G_1 + G_2 + G_3 + a_4G_4$ im Lyapunov-Funktional $\mathscr{L}$ durch $2G_1 + G_2 + G_3$ ersetzen. Auch der Beweis von Satz 7.15 bleibt bestehen. Zu beachten ist lediglich, dass die Abschätzungen (7.20) und (7.24) nun durch die zweite Poincarésche Ungleichung erfolgen. □

7.1.3 Instabilität

Wie wir gesehen haben, sind Lösungen zu dem System TPLT (1,1,1) exponentiell stabil, sofern $\tau_\nu^* \ge \kappa^*\tau_q$ gilt. An einem Beispiel möchten wir demonstrieren, dass für $\tau_\nu^* < \kappa^*\tau_q$ keine Stabilität zu erwarten ist. Wir betrachten das System (7.2) im Intervall $(0, 2\pi)$,

$$\varrho u_{tt} - (\lambda+2\mu)u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times(0,2\pi)\,, \tag{7.28 a}$$

$$\varrho c_v\big(\theta_{tt} + \tau_q\theta_{ttt}\big) - \kappa^*\theta_{xx} - \tau_\nu^*\theta_{txx} - \kappa\tau_\theta\theta_{ttxx} = -\gamma T_0\big(u_{ttx} + \tau_q u_{tttx}\big) \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,2\pi)\,, \tag{7.28 b}$$

unter homogenen Dirichlet-Neumann-Randbedingungen wie in Abschnitt 7.1.2

$$u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \theta_x(t,0) = \theta_x(t,2\pi) = 0 \quad \text{für } t \in [0,\infty)\,. \tag{7.28 c}$$

Als Ansatz für eine Lösung wählen wir wie in [Qui03], worin eine entsprechende Untersuchung für das Dual-Phase-Lag-Modell DPLT (2,1) erfolgte,

$$u(t,x) = ae^{\omega t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) \quad \text{und} \quad \theta(t,x) = be^{\omega t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$$

für Werte $a, b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Den Hintergrund hierfür bildet die Tatsache, dass die Menge $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Id}, (\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}, (\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}\}$ nach [Wer11, S. 232] ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2((0,2\pi),\mathbb{R})$ darstellt. Die Funktionen u und θ erfüllen die Randbedingung (7.28 c). Die Differentialgleichungen (7.28 a) und (7.28 b) lösen sie, wenn

$$\begin{aligned}(\varrho\omega^2 + (\lambda+2\mu)n^2)a - \gamma n b &= 0\,,\\ \gamma T_0 n(\omega^2+\tau_q\omega^3)a + (\varrho c_v\omega^2 + \varrho c_v\tau_q\omega^3 + \kappa^* n^2 + \tau_\nu^* n^2\omega + \kappa\tau_\theta n^2\omega^2)b &= 0\,,\end{aligned}$$

gilt, bzw. in Matrixschreibweise

$$M_{\omega,n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad M_{\omega,n} := \begin{pmatrix}\varrho\omega^2+(\lambda+2\mu)n^2 & -\gamma n\\ \gamma T_0 n(\omega^2+\tau_q\omega^3) & \varrho c_v\tau_q\omega^3 + (\varrho c_v + \kappa\tau_\theta n^2)\omega^2 + \tau_\nu^* n^2\omega + \kappa^* n^2\end{pmatrix}.$$

Wir suchen eine Lösung $(a,b) \neq (0,0)$ und fordern daher $\det M_{\omega,n} = 0$, also

$$\begin{aligned}0 &= \varrho^2 c_v\tau_q\omega^5 + \varrho(\varrho c_v + \kappa\tau_\theta n^2)\omega^4 + (\varrho\tau_\nu^* + \varrho c_v\tau_q(\lambda+2\mu) + \gamma^2 T_0\tau_q)n^2\omega^3\\ &\quad + (\varrho\kappa^* + \varrho c_v(\lambda+2\mu) + \gamma^2 T_0 + \kappa\tau_\theta(\lambda+2\mu)n^2)n^2\omega^2 + \tau_\nu^*(\lambda+2\mu)n^4\omega + \kappa^*(\lambda+2\mu)n^4\\ &=: p_n(\omega)\,.\end{aligned}$$

Nach dem verallgemeinerten Hurwitz-Kriterium A.6.1 (ii) besitzt das Polynom p_n genau dann eine Nullstelle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\omega) > 0$, wenn die zugehörige Hurwitz-Matrix einen negativen Hauptminor aufweist. Wir verzichten auf die Angabe der Hurwitz-Matrix (siehe Definition A.20) und greifen nur die benötigten Hauptminoren heraus. Der erste Hauptminor ist $h_n^{(1)} := \varrho(\varrho c_v + \kappa\tau_\theta n^2)$ und damit stets positiv. Der Hauptminor zweiter Ordnung lautet

$$\begin{aligned}h_n^{(2)} &:= \det\begin{pmatrix}\varrho(\varrho c_v + \kappa\tau_\theta n^2) & (\varrho\kappa^* + \varrho c_v(\lambda+2\mu) + \gamma^2 T_0 + \kappa\tau_\theta(\lambda+2\mu)n^2)n^2\\ \varrho^2 c_v\tau_q & (\varrho\tau_\nu^* + \varrho c_v\tau_q(\lambda+2\mu) + \gamma^2 T_0\tau_q)n^2\end{pmatrix}\\ &= \varrho^3 c_v(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)n^2 + \varrho\kappa\tau_\theta(\varrho\tau_\nu^* + \gamma^2 T_0\tau_q)n^4\,.\end{aligned}$$

Wenn wir beispielsweise $n = 1$ wählen, so sehen wir, dass der Hauptminor $h_1^{(2)}$ einen negativen Wert annehmen kann, nämlich dann, wenn die Parameter die Ungleichungen

$$\tau_\nu^* < \kappa^*\tau_q \quad \text{und} \quad \kappa\tau_\theta(\varrho\tau_\nu^* + \gamma^2 T_0\tau_q) < \varrho^2 c_v(\kappa^*\tau_q - \tau_\nu^*)$$

erfüllen. Die zweite Ungleichung ist zum Beispiel dann gegeben, wenn τ_θ sehr viel kleiner ist als die beiden anderen Parameter τ_q und τ_ν^*. Dass dann in dieser Situation die Nulllösung zu (7.28) nicht L^2-stabil ist, sieht man wie folgt: Nachdem $h_1^{(2)} < 0$ ist, existiert ein $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\omega) > 0$ und $p_1(\omega) = 0$. Letzteres bedeutet $\det(M_{\omega,1}) = 0$, wonach es eine Lösung $(a,b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ zu $M_{\omega,1}(a,b)^\mathsf{T} = 0$ gibt. Damit gilt aber auch $M_{\omega,1}(ra,rb)^\mathsf{T} = 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Nach Konstruktion bilden (u^r,θ^r) mit $u^r(t,x) := rae^{\omega t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x)$ und $\theta^r(t,x) := rbe^{\omega t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x)$ für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nichttriviale Lösungen von (7.28). Aufgrund von $\mathrm{Re}(\omega) > 0$ gilt

$$\forall\, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}: \quad \big\|(u^r(t),\theta^r(t))\big\|^2_{L^2((0,2\pi))^2} = (|ra|^2 + |rb|^2)e^{2\,\mathrm{Re}(\omega)t} \to \infty \quad \text{für } t \to \infty\,,$$

obwohl die Anfangswerte

$$\big\|(u^r(0),\theta^r(0))\big\|^2_{L^2((0,2\pi))^2} = |ra|^2 + |rb|^2 \to 0 \quad \text{für } r \to 0$$

erfüllen. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem betragsmäßig noch so kleinen r, d. h. selbst wenn die Anfangswerte $(u^r(0),\theta^r(0))$ und $(0,0)$ beliebig nah beinander liegen, finden wir also ein $t > 0$,

sodass $\|(u^r(t), \theta^r(t)) - (0,0)\|_{L^2((0,2\pi))^2} > \varepsilon$ ist. Dies bedeutet, dass die Nulllösung des Systems (7.28) nicht stabil ist.

Ob der Fall $\tau_\nu^* < \kappa^* \tau_q$, unter dem es zu instabilen Lösungen kommt, physikalisch überhaupt relevant ist, bleibt fraglich, solange die genaue Bedeutung der Phase-Lag-Parameter und der Materialkonstante κ^* nicht geklärt ist (vergleiche Kapitel 1). Aus der Modellierung heraus werden die Parameter τ_q, τ_θ und τ_ν gegenüber allen anderen physikalischen Größen als sehr klein angenommen. Nach Definition von τ_ν^* ist $\tau_\nu^* = \kappa + \kappa^* \tau_\nu$, wobei κ die Wärmeleitfähigkeit, also eine in jedem Fall bekannte Größe bezeichnet. Die Einschränkung $\tau_\nu^* < \kappa^* \tau_q$ bedeutet insbesondere $\tau_\nu < \tau_q$ und $\kappa < \kappa^* \tau_q$. Letztere würde für einen sehr kleinen Parameter τ_q nur dann einen plausiblen Eindruck erwecken, wenn κ^* dementsprechend groß, etwa $\kappa^* \sim \frac{1}{\tau_q}$ wäre.

7.2 Three-Phase-Lag-Thermoelastizität TPLT (2,1,1)

Als ein zweites Modell zur Three-Phase-Lag-Thermoelastizität untersuchen wir das System

$$\underline{\text{TPLT (2,1,1)}}$$

$$\varrho u_{tt} - (\lambda + 2\mu) u_{xx} + \gamma \theta_x = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.29 a}$$

$$\varrho c_v \theta_t + q_x + \gamma T_0 u_{tx} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.29 b}$$

$$q + \tau_q q_t + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \kappa \theta_x + \kappa \tau_\theta \theta_{tx} + \kappa^* \nu_x + \kappa^* \tau_\nu \nu_{tx} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.29 c}$$

$$\nu_t = \theta \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.29 d}$$

das sich gegenüber dem System TPLT (1,1,1) durch den zusätzlichen Term $\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}$ auszeichnet. Wir passen den Operator $\mathcal{D}_1$ entsprechend an und setzen

$$\mathcal{D}_1 := \partial_t + \tau_q \partial_{tt} + \frac{\tau_q^2}{2} \partial_{ttt}\,.$$

$\mathcal{D}_2$ sei wie zuvor durch $\mathcal{D}_2 := \kappa^* \mathrm{Id} + \tau_\nu^* \partial_t + \kappa \tau_\theta \partial_{tt}$ definiert. Die Funktionen u und θ einer hinreichend glatten Lösung (u, θ, q, ν) von (7.29) lösen auch die reduzierten Systeme

$$\varrho u_{tt} - (\lambda + 2\mu) u_{xx} + \gamma \theta_x = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.30 a}$$

$$\varrho c_v \mathcal{D}_1 \theta_t + \gamma T_0 \mathcal{D}_1 u_{tx} - \mathcal{D}_2 \theta_{xx} = 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.30 b}$$

und

$$\varrho \mathcal{D}_1 u_{tt} - (\lambda + 2\mu) \mathcal{D}_1 u_{xx} + \gamma \mathcal{D}_1 \theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.31 a}$$

$$\varrho c_v \mathcal{D}_1 \theta_t + \gamma T_0 \mathcal{D}_1 u_{tx} - \mathcal{D}_2 \theta_{xx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times (0,L)\,, \tag{7.31 b}$$

und erfüllen gewisse Anfangswerte

$$u(0,\cdot) = u_0\,,\ u_t(0,\cdot) = u_1\,,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0\,,\ \theta_t(0,\cdot) = \theta_1\,,\ \theta_{tt}(0,\cdot) = \theta_2\,,\ \theta_{ttt}(0,\cdot) = \theta_3 \quad \text{in } (0,L)\,.$$

Wie zuvor werden wir zunächst homogene Dirichlet-Randbedingungen betrachten und die Ergebnisse im Anschluss auf den Fall einer homogenen Dirichlet-Neumann-Randbedingung übertragen. Die Systeme (7.30) und (7.31) besitzen dieselbe Struktur wie die TPLT (1,1,1)-Systeme (7.2) und (7.3) und unterscheiden sich lediglich in Bezug auf die Definition des Operators $\mathcal{D}_1$. Daher lassen sich einige Ergebnisse aus Abschnitt 7.1.1 unmittelbar übernehmen, nämlich diejenigen, bei denen die Gestalt von $\mathcal{D}_1$ nicht einging. Als Bedingung an die Parameter setzen wir

$$\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^* \tau_q$$

voraus.

7.2.1 Homogene Dirichlet-Randbedingungen

Wir gehen von zwei hinreichend glatten und reellwertigen Funktionen $u : [0,\infty) \times [0,L] \to \mathbb{R}$ und $\theta : [0,\infty) \times [0,L] \to \mathbb{R}$ aus, die das System (7.30) und damit auch das System (7.31) lösen und den homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{und} \quad \theta(t,0) = \theta(t,L) = 0 \quad \text{für } t \in [0,\infty) \tag{7.32}$$

genügen.

Bemerkung 7.22 (Wohlgestelltheit). Das System (7.31) lässt sich zu Anfangs- und homogenen Dirichlet-Randbedingungen mithilfe der Transformation $V = (\mathcal{D}_1 u, \mathcal{D}_1 u_t, \theta, \theta_t, \theta_{tt}, \theta_{ttt})^\mathsf{T}$ als ein Cauchy-Problem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t) = \mathcal{A}V(t)$, $V(0) = V_0$ im Hilbertraum $\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ auf $\Omega := (0,L)$ auffassen. Der Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist durch

$$\mathcal{A}V := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\varrho}(\lambda+2\mu)\partial_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\varrho}\partial_x & -\frac{\gamma\tau_q}{\varrho}\partial_x & -\frac{\gamma\tau_q^2}{2\varrho}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\gamma T_0}{\varrho c_v \tau_q^2}\partial_x & \frac{2\kappa^*}{\varrho c_v \tau_q^2}\partial_{xx} & \frac{2\tau_\nu^*}{\varrho c_v \tau_q^2}\partial_{xx} & \frac{2\kappa\tau_\theta}{\varrho c_v \tau_q^2}\partial_{xx} - \frac{2}{\tau_q^2} & -\frac{2}{\tau_q} \end{pmatrix} V$$

$$\text{mit } D(\mathcal{A}) := \left\{ V \in H_0^1(\Omega)^6 \mid \partial_{xx} V_1 \in L^2(\Omega),\ \kappa^* \partial_{xx} V_3 + \tau_\nu^* \partial_{xx} V_4 + \kappa\tau_\theta \partial_{xx} V_5 \in L^2(\Omega) \right\}$$

definiert. Die Transformation stammt aus [Bor12], wo die Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems gezeigt wurde. Das zugrunde liegende Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ lautet

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle_{\mathcal{H}} := {} & \frac{2(\lambda+2\mu)}{\tau_q^2} \langle \partial_x V_1, \partial_x W_1 \rangle + \frac{2\varrho}{\tau_q^2} \langle V_2, W_2 \rangle + \frac{5\kappa^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} \langle \partial_x V_3, \partial_x W_3 \rangle + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} \langle \partial_x V_4, \partial_x W_4 \rangle \\ & + \frac{\kappa\tau_\theta}{T_0} \langle \partial_x V_5, \partial_x W_5 \rangle + \frac{\kappa^*}{T_0} \left(\langle \partial_x V_3, \partial_x W_5 \rangle + \langle \partial_x V_5, \partial_x W_3 \rangle \right) \\ & + \frac{\tau_\nu^*}{T_0} \left(\langle \partial_x V_4, \partial_x W_5 \rangle + \langle \partial_x V_5, \partial_x W_4 \rangle \right) + \frac{\varrho c_v \tau_q^2}{2T_0} \langle V_6, V_6 \rangle . \end{aligned}$$

Dieses im Zusammenhang mit der Wohlgestelltheit entworfene Skalarprodukt soll uns wieder als Ausgangspunkt für die Festlegung einer Energie dienen.

Definition 7.23 (Energie $E_{\mathcal{H}}$). *Als die von $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ induzierte Energie definieren wir für $t \in [0,\infty)$*

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) := \frac{1}{2} \Bigg(& \frac{2\varrho}{\tau_q^2} \|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\tau_q^2} \|\mathcal{D}_1 u_x(t)\|^2 + \frac{\varrho c_v \tau_q^2}{2T_0} \|\theta_{ttt}(t)\|^2 + \frac{5\kappa^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} \|\theta_x(t)\|^2 \\ & + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} \|\theta_{tx}(t)\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta}{T_0} \|\theta_{ttx}(t)\|^2 + \frac{2\kappa^*}{T_0} \langle \theta_x(t), \theta_{ttx}(t) \rangle + \frac{2\tau_\nu^*}{T_0} \langle \theta_{tx}(t), \theta_{ttx}(t) \rangle \Bigg) \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) := \frac{1}{2} \Bigg(& \frac{2\varrho}{\tau_q^2} \|\mathcal{D}_1 u_{tt}(t)\|^2 + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\tau_q^2} \|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + \frac{\varrho c_v \tau_q^2}{2T_0} \|\theta_{tttt}(t)\|^2 + \frac{5\kappa^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} \|\theta_{tx}(t)\|^2 \\ & + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} \|\theta_{ttx}(t)\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta}{T_0} \|\theta_{tttx}(t)\|^2 + \frac{2\kappa^*}{T_0} \langle \theta_{tx}(t), \theta_{tttx}(t) \rangle + \frac{2\tau_\nu^*}{T_0} \langle \theta_{ttx}(t), \theta_{tttx}(t) \rangle \Bigg) . \end{aligned}$$

Anders als für das System TPLT (1,1,1) haben wir hier zur Energie erster Stufe $E_{\mathcal{H}}(u,\theta)$ noch eine Energie zweiter Stufe $E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t)$ definiert. Im Laufe des Beweises wird sich zeigen, dass wir ohne die Energie zweiter Stufe nicht auskommen würden.

Satz 7.24 (Eigenschaften der Energie $E_{\mathcal{H}}$).

(i) Es existiert eine Konstante $C_{E_{\mathcal{H}}} \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) \geq C_{E_{\mathcal{H}}}\big(&\|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tt}(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_x(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 \\ &+ \|\theta_{ttt}(t)\|^2 + \|\theta_{tttt}(t)\|^2 + \|\theta_x(t)\|^2 + \|\theta_{tx}(t)\|^2 \\ &+ \|\theta_{ttx}(t)\|^2 + \|\theta_{tttx}(t)\|^2\big)\,. \end{aligned}$$

(ii) Für $t \in [0,\infty)$ definieren wir

$$G_0(t) := \frac{1}{2}\frac{\varrho c_v}{T_0}\Big(\|\theta_{tt}(t)\|^2 + \|\theta_{ttt}(t)\|^2\Big)\,.$$

Dann gilt für alle $t \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) + G_0(t)\big) \\ &\quad\leq -\frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}(t)\|^2 - \frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\|\theta_{tttt}(t)\|^2 + \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + \varepsilon_2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 \\ &\qquad + \varepsilon_0\|\theta_x(t)\|^2 + C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\|\theta_{tx}(t)\|^2 + C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\theta_{ttx}(t)\|^2 + C^3_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2)\|\theta_{tttx}(t)\|^2\,, \end{aligned}$$

wobei ε_0, ε_1, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden können und die davon abhängigen Konstanten $C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1)$, $C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ und $C^3_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2)$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis:

(i) Dies hängt mit der positiven Definitheit des in Bemerkung 7.22 erwähnten Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ zusammen (siehe dazu [Bor12, S. 75]).

(ii) Wir beginnen mit der Abschätzung für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathcal{H}}(u,\theta)$ und bilden zunächst das L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.31 a) mit $\frac{2}{\tau_q^2}\mathcal{D}_1 u_t$. Da $\mathcal{D}_1 u_t(t,0) = \mathcal{D}_1 u_t(t,L) = 0$ ist, können wir partiell integrieren, ohne dass dabei Randterme auftreten. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\bigg(\frac{2\varrho}{\tau_q^2}\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\tau_q^2}\|\mathcal{D}_1 u_x\|^2\bigg) &= \frac{2\gamma}{\tau_q^2}\langle\theta_t,\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle + \frac{2\gamma}{\tau_q}\langle\theta_{tt},\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle + \gamma\langle\theta_{ttt},\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \\ &\leq \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \frac{2}{\varepsilon_1}\Big(\frac{\gamma}{\tau_q^2}\Big)^2 c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{2}{\varepsilon_1}\Big(\frac{\gamma}{\tau_q}\Big)^2 c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{ttx}\|^2 + \gamma\langle\theta_{ttt},\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \end{aligned} \tag{7.33}$$

für ein beliebiges $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ nach den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz, Young und Poincaré. Das L^2-Skalarprodukt von (7.31 b) mit $\frac{1}{T_0}\theta_{ttt}$ führt auf

$$\frac{\varrho c_v}{T_0}\langle\theta_{tt} + \tau_q\theta_{ttt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tttt},\theta_{ttt}\rangle + \gamma\langle\mathcal{D}_1 u_{tx},\theta_{ttt}\rangle - \frac{1}{T_0}\langle\kappa^*\theta_{xx} + \tau_\nu^*\theta_{txx} + \kappa\tau_\theta\theta_{ttxx},\theta_{ttt}\rangle = 0\,.$$

Durch partielle Integration, wobei aufgrund der homogenen Dirichlet-Randbedingungen an θ auch

hier keine Randterme entstehen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho c_v \tau_q^2}{2T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta}{T_0}\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{2\kappa^*}{T_0}\langle\theta_x,\theta_{ttx}\rangle + \frac{2\tau_\nu^*}{T_0}\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 \\
&\quad = -\frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 + \frac{\tau_\nu^*}{T_0}\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{\kappa^*}{T_0}\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle - \gamma\langle\mathcal{D}_1 u_{tx},\theta_{ttt}\rangle \\
&\quad \le -\frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 + \frac{\kappa^*}{T_0}\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\tau_\nu^*+\kappa^*}{T_0}\|\theta_{ttx}\|^2 - \gamma\langle\mathcal{D}_1 u_{tx},\theta_{ttt}\rangle\,. \qquad (7.34)
\end{aligned}$$

In der Summe mit (7.33) heben sich so die Terme $-\gamma\langle\mathcal{D}_1 u_{tx},\theta_{ttt}\rangle$ und $\gamma\langle\theta_{ttt},\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle$ gerade auf. Zudem haben wir für ein beliebiges $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\frac{5\kappa^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_x\|^2 &= \frac{5\kappa^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle \le \varepsilon_0\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{5\kappa^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\right)^2\|\theta_{tx}\|^2\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{tx}\|^2 &= \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta^2}\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle \le \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{ttx}\|^2\,.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (7.33) und (7.34) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathcal{H}}(u,\theta) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{tt}\|^2 \le{}& -\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 + \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \varepsilon_0\|\theta_x\|^2 \\
&+ c_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\|\theta_{tx}\|^2 + c_2(\varepsilon_1)\|\theta_{ttx}\|^2 \qquad (7.35)
\end{aligned}$$

für

$$c_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1) := \frac{2}{\varepsilon_1}\left(\frac{\gamma}{\tau_q^2}\right)^2 c_{\mathrm{P}_1} + \frac{\kappa^*}{T_0} + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{5\kappa^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\right)^2 + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\,,\ c_2(\varepsilon_1) := \frac{2}{\varepsilon_1}\left(\frac{\gamma}{\tau_q}\right)^2 c_{\mathrm{P}_1} + \frac{\tau_\nu^*+\kappa^*}{T_0} + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\,.$$

Für die Zeitableitung der Energie zweiter Stufe $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t)$ könnte man ebenso verfahren und erhielte (7.35) mit θ_{ttt}, θ_{tttt}, $\mathcal{D}_1 u_{ttx}$, θ_{tx}, θ_{ttx} und θ_{tttx} anstelle von θ_{tt}, θ_{ttt}, $\mathcal{D}_1 u_{tx}$, θ_x, θ_{tx} und θ_{ttx}. Allerdings wäre der Term $\|\mathcal{D}_1 u_{ttx}\|^2$ auf der rechten Seite im weiteren Verlauf hinderlich, da in $\mathcal{D}_1 u_{ttx}$ Ableitungen sechster Ordnung vorkommen und sich diese Ableitungsordnungen als zu hoch erweisen. Aus diesem Grund suchen wir für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t)$ eine geeignetere Abschätzung.

Wenn wir auf die Differentialgleichung (7.31 a) den Zeitableitungsoperator ∂_t anwenden und anschließend das L^2-Skalarprodukt mit $\frac{2}{\tau_q^2}\mathcal{D}_1 u_{tt}$ bilden, ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\left(\frac{2\varrho}{\tau_q^2}\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\tau_q^2}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\right) = -\frac{2\gamma}{\tau_q^2}\langle\theta_{ttx},\mathcal{D}_1 u_{tt}\rangle - \frac{2\gamma}{\tau_q}\langle\theta_{tttx},\mathcal{D}_1 u_{tt}\rangle + \gamma\langle\theta_{tttt},\mathcal{D}_1 u_{ttx}\rangle\,.$$

Gemäß derselben Differentialgleichung lässt sich $\mathcal{D}_1 u_{tt}$ durch $\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\mathcal{D}_1 u_{xx} - \frac{\gamma}{\varrho}\mathcal{D}_1\theta_x$ ersetzen. Dies führt für ein beliebiges $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ auf

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\left(\frac{2\varrho}{\tau_q^2}\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\tau_q^2}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2\right) \\
&\quad = -\frac{2\gamma(\lambda+2\mu)}{\varrho\tau_q^2}\langle\theta_{ttx},\mathcal{D}_1 u_{xx}\rangle - \frac{2\gamma(\lambda+2\mu)}{\varrho\tau_q}\langle\theta_{tttx},\mathcal{D}_1 u_{xx}\rangle + \frac{2\gamma^2}{\varrho\tau_q^2}\langle\theta_{ttx},\mathcal{D}_1\theta_x\rangle \\
&\qquad + \frac{2\gamma^2}{\varrho\tau_q}\langle\theta_{tttx},\mathcal{D}_1\theta_x\rangle + \gamma\langle\theta_{tttt},\mathcal{D}_1 u_{ttx}\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varepsilon_2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \frac{\gamma^2}{\varrho\tau_q}\Big(\frac{1}{\tau_q}+1\Big)\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + \frac{\gamma^2}{\varrho}\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{\varepsilon_2\varrho\tau_q^4}+\frac{1}{\tau_q^2}\Big)\|\theta_{ttx}\|^2 \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{\varrho}\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{\varepsilon_2\varrho\tau_q^2}+\frac{1}{\tau_q}\Big)\|\theta_{tttx}\|^2 + \gamma\langle\theta_{tttt},\mathcal{D}_1 u_{ttx}\rangle \\
&\leq \varepsilon_2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \frac{3\gamma^2}{\varrho\tau_q}\Big(\frac{1}{\tau_q}+1\Big)\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\gamma^2}{\varrho}\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{\varepsilon_2\varrho\tau_q^4}+\frac{1}{\tau_q^2}+3+3\tau_q\Big)\|\theta_{ttx}\|^2 \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{\varrho}\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{\varepsilon_2\varrho\tau_q^2}+\frac{1}{\tau_q}+\frac{3}{4}\tau_q^2+\frac{3}{4}\tau_q^3\Big)\|\theta_{tttx}\|^2 + \gamma\langle\theta_{tttt},\mathcal{D}_1 u_{ttx}\rangle\,. \qquad (7.36)
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir die sich aus der Gestalt von $\mathcal{D}_1$ ergebende Ungleichung

$$
\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 \leq 3\|\theta_{tx}\|^2 + 3\tau_q^2\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{3}{4}\tau_q^4\|\theta_{tttx}\|^2
$$

verwendet. Ausgehend von der nach t differenzierten Gleichung (7.31 b) erhalten wir durch Multiplikation mit $\frac{1}{T_0}\theta_{ttt}$ analog zu (7.34)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\frac{\varrho c_v\tau_q^2}{2T_0}\|\theta_{tttt}\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta}{T_0}\|\theta_{tttx}\|^2 + \frac{2\kappa^*}{T_0}\langle\theta_{tx},\theta_{tttx}\rangle + \frac{2\tau_\nu^*}{T_0}\langle\theta_{ttx},\theta_{tttx}\rangle\Big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 \\
&\quad \leq -\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{tttt}\|^2 + \frac{\kappa^*}{T_0}\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{\tau_\nu^*+\kappa^*}{T_0}\|\theta_{tttx}\|^2 - \gamma\langle\mathcal{D}_1 u_{ttx},\theta_{tttt}\rangle\,. \qquad (7.37)
\end{aligned}
$$

Nehmen wir (7.36), (7.37) sowie die Abschätzung

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\frac{5\kappa^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{ttx}\|^2\Big) \leq \frac{5\kappa^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{5(\kappa^{*2}+\tau_\nu^{*2})}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{tttx}\|^2
$$

zusammen, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\frac{\varrho c_v}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 &\leq -\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{tttt}\|^2 + \varepsilon_2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + c_3\|\theta_{tx}\|^2 \\
&\quad + c_4(\varepsilon_2)\|\theta_{ttx}\|^2 + C^3_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2)\|\theta_{tttx}\|^2 \qquad (7.38)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
c_3 &:= \frac{3\gamma^2}{\varrho\tau_q}\Big(\frac{1}{\tau_q}+1\Big) + \frac{5\kappa^*}{T_0\kappa\tau_\theta}\,, \quad c_4(\varepsilon_2) := \frac{\gamma^2}{\varrho}\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{\varepsilon_2\varrho\tau_q^4}+\frac{1}{\tau_q^2}+3+3\tau_q\Big) + \frac{\kappa^*}{T_0} + \frac{5(\kappa^{*2}+\tau_\nu^{*2})}{T_0\kappa\tau_\theta}\,, \\
C^3_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2) &:= \frac{\gamma^2}{\varrho}\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{\varepsilon_2\varrho\tau_q^2}+\frac{1}{\tau_q}+\frac{3}{4}\tau_q^2+\frac{3}{4}\tau_q^3\Big) + \frac{\tau_\nu^*+\kappa^*}{T_0} + \frac{5\tau_\nu^{*2}}{T_0\kappa\tau_\theta}\,.
\end{aligned}
$$

Aus (7.35) und (7.38) folgt schließlich die behauptete Ungleichung, wenn wir die dortigen Konstanten als $C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1) := c_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1) + c_3$ und $C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) := c_2(\varepsilon_1) + c_4(\varepsilon_2)$ wählen. □

Wie zuvor für das Modell TPLT (1,1,1) benötigen wir auch hier wieder eine Energie E, die mit dem System unmittelbar verknüpft ist und sich durch ihre charakteristische Zeitableitung auszeichnet. Entscheidend ist hierbei die Voraussetzung

$$
\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q\,.
$$

Definition 7.25 (Energie E). *Wir definieren für $t \in [0,\infty)$*

$$\begin{aligned} E(u,\theta;t) := \frac{1}{2}\Big(&\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_x(t)\|^2 + \varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta(t)\|^2 + \kappa^*\|\theta_x(t)\|^2 \\ &+ \Big(\kappa\tau_\theta + \tau_q\Big(\tau_\nu^* - \frac{\kappa^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{tx}(t)\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta\tau_q^2}{2}\|\theta_{ttx}(t)\|^2 \\ &+ 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_x(t),\theta_{tx}(t)\rangle + \kappa^*\tau_q^2\langle\theta_x(t),\theta_{ttx}(t)\rangle + \tau_\nu^*\tau_q^2\langle\theta_{tx}(t),\theta_{ttx}(t)\rangle\Big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E(u_t,\theta_t;t) := \frac{1}{2}\Big(&\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_{tt}(t)\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + \varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 + \kappa^*\|\theta_{tx}(t)\|^2 \\ &+ \Big(\kappa\tau_\theta + \tau_q\Big(\tau_\nu^* - \frac{\kappa^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta\tau_q^2}{2}\|\theta_{tttx}(t)\|^2 \\ &+ 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_{tx}(t),\theta_{ttx}(t)\rangle + \kappa^*\tau_q^2\langle\theta_{tx}(t),\theta_{tttx}(t)\rangle + \tau_\nu^*\tau_q^2\langle\theta_{ttx}(t),\theta_{tttx}(t)\rangle\Big). \end{aligned}$$

Satz 7.26 (Eigenschaften der Energie E). *Es gelte $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$.*

(i) Es existiert eine Konstante $C_E \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\begin{aligned} E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t) \geq C_E\Big(&\|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tt}(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_x(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 \\ &+ \|\mathcal{D}_1\theta(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_0\theta_x(t)\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_x(t)\|^2 \\ &+ \|\theta_{tx}(t)\|^2 + \|\theta_{ttx}(t)\|^2 + \|\theta_{tttx}(t)\|^2\Big). \end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathcal{D}_0 := \mathrm{Id} + \tau_q\partial_t + \frac{\tau_q^2}{2}\partial_{tt}$.

(ii) Für $t \in [0,\infty)$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)) = &-(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}(t)\|^2 \\ &- \Big(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q + \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{ttx}(t)\|^2 \\ &- \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\|\theta_{tttx}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Da insbesondere $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E(u,\theta;t)+E(u_t,\theta_t;t)) \leq 0$ gilt, ist $E(u,\theta)+E(u_t,\theta_t)$ durch die Anfangsenergie zum Zeitpunkt $t=0$ beschränkt: $E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t) \leq E(u,\theta;0) + E(u,\theta;0)$.

Beweis:

(i) Zu untersuchen ist die Nichtnegativität des Ausdrucks

$$\begin{aligned} w(\theta) := \kappa^*\|\theta_x\|^2 + \Big(\kappa\tau_\theta + \tau_q\Big(\tau_\nu^* - \frac{\kappa^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta\tau_q^2}{2}\|\theta_{ttx}\|^2 \\ + 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle + \kappa^*\tau_q^2\langle\theta_x,\theta_{ttx}\rangle + \tau_\nu^*\tau_q^2\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle. \end{aligned}$$

Mithilfe der Identität

$$\begin{aligned} \kappa^*\|\mathcal{D}_0\theta\|^2 &= \kappa^*\Big\|\theta_x + \tau_q\theta_{tx} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{ttx}\Big\|^2 \\ &= \kappa^*\|\theta_x\|^2 + \kappa^*\tau_q^2\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\kappa^*\tau_q^4}{4}\|\theta_{ttx}\|^2 + 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_x,\theta_{tx}\rangle + \kappa^*\tau_q^2\langle\theta_x,\theta_{ttx}\rangle + \kappa^*\tau_q^3\langle\theta_{tx},\theta_{ttx}\rangle \end{aligned}$$

lässt sich der fragliche Term umschreiben zu

$$w(\theta) = \kappa^* \|\mathcal{D}_0\theta_x\|^2 + \Big(\kappa\tau_\theta + \tau_q\Big(\tau_\nu^* - \frac{\kappa^*\tau_q}{2}\Big) - \kappa^*\tau_q^2\Big)\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\tau_q^2}{2}\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\kappa^*\tau_q^2}{2}\Big)\|\theta_{ttx}\|^2$$
$$+ \tau_q^2(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\langle\theta_{tx}, \theta_{ttx}\rangle\,.$$

Wenn wir darin das Skalarprodukt mit der Youngschen Ungleichung in der Form

$$\tau_q^2(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\langle\theta_{tx}, \theta_{ttx}\rangle \geq -\tau_q(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - \frac{\tau_q^3}{4}(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{ttx}\|^2$$

abschätzen, erhalten wir

$$w(\theta) \geq \kappa^*\|\mathcal{D}_0\theta_x\|^2 + \Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\kappa^*\tau_q^2}{2}\Big)\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\tau_q^2}{2}\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\|\theta_{ttx}\|^2$$
$$\geq c\Big(\|\mathcal{D}_0\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2\Big) \quad \text{mit} \quad c := \min\Big\{\kappa^*\,,\ \kappa\tau_\theta - \frac{\kappa^*\tau_q^2}{2}\,,\ \frac{\tau_q^2}{2}\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\Big\}\,.$$

Dabei ist $c > 0$, da $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ vorausgesetzt ist. Analog ergibt sich

$$w(\theta_t) \geq c\Big(\|\mathcal{D}_0\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big) = c\Big(\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big)\,.$$

Insgesamt folgt damit die behauptete Abschätzung, wenn wir $C_E := \frac{1}{2}\min\{\varrho T_0, (\lambda+2\mu)T_0, \varrho c_v, c\}$ wählen.

(ii) Das L^2-Skalarprodukt der Differentialgleichung (7.31 a) mit $T_0\mathcal{D}_1 u_t$ führt auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\varrho T_0\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + (\lambda+2\mu)T_0\|\mathcal{D}_1 u_x\|^2\Big) = -\gamma T_0\langle\mathcal{D}_1\theta_x, \mathcal{D}_1 u_t\rangle\,.$$

Die Differentialgleichung (7.31 b) multiplizieren wir mit $\mathcal{D}_1\theta$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta\|^2 = \gamma T_0\langle\mathcal{D}_1 u_t, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle - \langle\mathcal{D}_2\theta_x, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle\,. \tag{7.39}$$

Indem wir den Term $\langle\mathcal{D}_2\theta_x, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle$ umschreiben zu

$$\langle\mathcal{D}_2\theta_x, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle = \langle\kappa^*\theta_x + \tau_\nu^*\theta_{tx} + \kappa\tau_\theta\theta_{ttx}, \theta_{tx} + \tau_q\theta_{ttx} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tttx}\rangle$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\Big(\kappa^*\|\theta_x\|^2 + \Big(\kappa\tau_\theta + \tau_q\Big(\tau_\nu^* - \frac{\kappa^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta\tau_q^2}{2}\|\theta_{ttx}\|^2$$
$$+ 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_x, \theta_{tx}\rangle + \kappa^*\tau_q^2\langle\theta_x, \theta_{ttx}\rangle + \tau_\nu^*\tau_q^2\langle\theta_{tx}, \theta_{ttx}\rangle\Big)$$
$$+ (\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 + \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\|\theta_{ttx}\|^2\,,$$

erhalten wir

$$\frac{1}{2}\Big(\varrho c_v\|\mathcal{D}_1\theta\|^2 + \kappa^*\|\theta_x\|^2 + \Big(\kappa\tau_\theta + \tau_q\Big(\tau_\nu^* - \frac{\kappa^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{tx}\|^2 + \frac{\kappa\tau_\theta\tau_q^2}{2}\|\theta_{ttx}\|^2$$
$$+ 2\kappa^*\tau_q\langle\theta_x, \theta_{tx}\rangle + \kappa^*\tau_q^2\langle\theta_x, \theta_{ttx}\rangle + \tau_\nu^*\tau_q^2\langle\theta_{tx}, \theta_{ttx}\rangle\Big)$$
$$= -(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\|\theta_{ttx}\|^2 + \gamma T_0\langle\mathcal{D}_1 u_t, \mathcal{D}_1\theta_x\rangle\,.$$

Durch Addition der ersten Gleichung folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u,\theta) = -(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - \tau_q\left(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\right)\|\theta_{ttx}\|^2$$

und analog zeigt man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u_t,\theta_t) = -(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{ttx}\|^2 - \tau_q\left(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\right)\|\theta_{tttx}\|^2 .$$

□

Die Hilfsfunktionale G_1, G_2 und G_3 und deren Abschätzungen können wir unverändert aus Abschnitt 7.1.1 übernehmen. Um die Ergebnisse bei der Hand zu haben, stellen wir sie hier nochmals zusammen.

Lemma 7.27 (Hilfsfunktionale G_1, G_2, G_3). *Die Funktionale*

$$G_1(t) := \frac{\tau_\nu^*}{\kappa^*}\|\theta_x(t)\|^2 + \frac{2\gamma T_0}{\kappa^*}\langle \mathcal{D}_1 u_x(t), \theta(t)\rangle , \quad G_2(t) := 6\varrho\langle \mathcal{D}_1 u_x(t), \mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\rangle$$
$$\textit{und} \quad G_3(t) := \frac{12\varrho}{T_0(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\varrho}{\gamma}\langle \mathcal{D}_1 u_{tt}(t), \mathcal{D}_2\theta_x(t)\rangle + \langle \mathcal{D}_1\theta_x(t), \mathcal{D}_2\theta_x(t)\rangle\right)$$

erfüllen für $t \in [0,\infty)$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_1(t) &\le -\|\theta_x(t)\|^2 + \varepsilon_3 c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 + C_{G_1}^3(\varepsilon_3)\|\theta_{tx}(t)\|^2 + C_{G_1}^2\|\theta_{ttx}(t)\|^2 + C_{G_1}^1\|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 ,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t) &\le -5(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 + 6\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + C_{G_2}\|\mathcal{D}_1\theta_x(t)\|^2 ,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_3(t) &\le (-11\varrho + 24\varrho^2\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 + (\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2\\
&\quad + 12\varepsilon_4\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + C_{G_3}^1(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1\theta_t(t)\|^2 + C_{G_3}^2(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_2\theta_x(t)\|^2\\
&\quad + C_{G_3}^3\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t)\|^2 ,
\end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$ und $\varepsilon_4 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden können und die Konstanten $C_{G_1}^1$, $C_{G_1}^2$, $C_{G_1}^3(\varepsilon_3)$, C_{G_2}, $C_{G_3}^1(\varepsilon_4)$, $C_{G_3}^2(\varepsilon_4)$ und $C_{G_3}^3$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Die Systeme (7.3) und (7.31) unterscheiden sich lediglich in der Definition von $\mathcal{D}_1$. Während für das TPLT (1,1,1)-System $\mathcal{D}_1 = \partial_t + \tau_q\partial_{tt}$ war, ist nun $\mathcal{D}_1 = \partial_t + \tau_q\partial_{tt} + \frac{\tau_q^2}{2}\partial_{ttt}$. Nachdem aber die Gestalt von $\mathcal{D}_1$ in den Beweisen der Lemmata 7.6, 7.7 und 7.8 nicht einging, behalten alle dortigen Abschätzungen auch für den um $\frac{\tau_q^2}{2}\partial_{ttt}$ erweiterten Operator $\mathcal{D}_1$ ihre Gültigkeit. □

Das weitere Funktional G_4 aus Lemma 7.9 bedarf einer Anpassung, da die dortige Abschätzung einen Term $\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2$ enthält. Solange $\mathcal{D}_1 = \partial_t + \tau_q\partial_{tt}$ war, konnte dieser Term durch $-\|\theta_{ttx}\|^2$ und $-\|\theta_{tttx}\|^2$, welche durch die Energie E gemäß Satz 7.5 (ii) bereitgestellt wurden, problemlos aufgefangen werden. Da nun aber $\mathcal{D}_1 = \partial_t + \tau_q\partial_{tt} + \frac{\tau_q^2}{2}\partial_{ttt}$ ist, bräuchten wir, um analog zu verfahren, zusätzlich einen Term der Form $-\|\theta_{ttttx}\|^2$. Allerdings haben wir einen solchen nach Satz 7.26 nicht zur Verfügung und es besteht keine Möglichkeit, ihn zu schaffen, ohne dass dabei neue hinderliche Terme entstehen. Nichtsdestotrotz können wir den Ansatz aus Lemma 7.9 übernehmen, denn es gelingt, die Abschätzung zu verfeinern und so den Ausdruck $\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2$ zu umgehen.

Lemma 7.28 (Hilfsfunktional G_4). *Für $t \in [0,\infty)$ definieren wir*

$$G_4(t) := 4\varrho\langle \mathcal{D}_1 u_{tt}(t), \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\rangle + \frac{2\tau_q^2}{T_0}\Big(\langle \theta_{tttx}(t), \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}(t)\rangle + \frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\langle \theta_{ttx}(t), \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}(t)\rangle + \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\langle \theta_{tx}(t), \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}(t)\rangle\Big),$$

wobei $\Phi : [0,L] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{x}{L}$ ist. Dann gilt für alle $t \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_4(t) \le{}& -(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + \Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{L} + \varepsilon_5\Big)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 \\ &+ \frac{4(\lambda+2\mu)^2}{L\varrho}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 + C_{G_4}^1\|\mathcal{D}_1\theta_x(t)\|^2 + C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t)\|^2 \\ &+ C_{G_4}^3(\varepsilon_5)\|\theta_{ttx}(t)\|^2 + C_{G_4}^4(\varepsilon_5)\|\theta_{tttx}(t)\|^2 + C_{G_4}^5\|\theta_{tttt}(t)\|^2,\end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden kann und die hiervon abhängigen Konstanten $C_{G_4}^3(\varepsilon_5)$ und $C_{G_4}^4(\varepsilon_5)$ sowie die von ε_5 unabhängigen Konstanten $C_{G_4}^1$, $C_{G_4}^2$ und $C_{G_4}^5$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Wir können den Beweis zu Lemma 7.9 bis zur Ungleichung (7.13) übernehmen. Diese besagt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}4\varrho\langle \mathcal{D}_1 u_{tt}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \le{}& -(\lambda+2\mu)\Big(\big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,0)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_1 u_{tx}(t,L)\big)^2\Big) + \frac{2(\lambda+2\mu)}{L}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 \\ &+ \frac{4(\lambda+2\mu)^2}{L\varrho}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + C_{G_4}^1\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 - 4\gamma\langle \mathcal{D}_1\theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle. \qquad (7.40)\end{aligned}$$

Nachdem die Abschätzung $-4\gamma\langle \mathcal{D}_1\theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \le \varepsilon_5\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_5}\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2$, die dort im Anschluss vorgenommen wurde, nicht mehr zielführend ist, müssen wir den Ausdruck $-4\gamma\langle \mathcal{D}_1\theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle$ genauer untersuchen. Dabei können wir wie in [QR06b] vorgehen. Wenn wir $\mathcal{D}_1\theta_{tx}$ in die einzelnen Summanden $\theta_{ttx} + \tau_q\theta_{tttx} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{ttttx}$ zerlegen, erhalten wir für ein beliebiges $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}-4\gamma\langle \mathcal{D}_1\theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle &= -4\gamma\langle \theta_{ttx} + \tau_q\theta_{tttx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle - 2\gamma\tau_q^2\langle \theta_{ttttx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \\ &\le \frac{\varepsilon_5}{2}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \frac{8\gamma^2}{\varepsilon_5}\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{8\gamma^2\tau_q^2}{\varepsilon_5}\|\theta_{tttx}\|^2 - 2\gamma\tau_q^2\langle \theta_{ttttx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \qquad (7.41)\end{aligned}$$

und sehen, dass nur der Term $\langle \theta_{ttttx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle$ problematisch ist. Wir greifen diesen heraus und drücken darin $\mathcal{D}_1 u_{tx}$ durch $\frac{1}{\gamma T_0}\mathcal{D}_2\theta_{xx} - \frac{\varrho c_v}{\gamma T_0}\big(\theta_{tt} + \tau_q\theta_{ttt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tttt}\big)$ aus, wie es die Differentialgleichung (7.31 b) vorgibt:

$$\begin{aligned}-2\gamma\tau_q^2\langle \theta_{ttttx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle ={}& -\frac{2\tau_q^2}{T_0}\langle \theta_{ttttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle + \frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\langle \theta_{ttttx}, \Phi(\theta_{tt} + \tau_q\theta_{ttt})\rangle \\ &+ \frac{\varrho c_v\tau_q^4}{T_0}\langle \theta_{ttttx}, \Phi\theta_{tttt}\rangle. \qquad (7.42)\end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden schreiben wir wie folgt um, wobei wir $\Phi_t = 0$ und bei den partiellen Integrationen $\Phi_x = -\frac{1}{L}$ berücksichtigen:

$$-\frac{2\tau_q^2}{T_0}\langle \theta_{ttttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{2\tau_q^2}{T_0}\langle \theta_{tttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\Big) + \frac{2\tau_q^2}{T_0}\langle \theta_{tttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle, \qquad (7.43\,\mathrm{a})$$

$$\begin{aligned}\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{ttttx},\Phi(\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt})\rangle &= -\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{tttt},\partial_x\big(\Phi(\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt})\big)\rangle\\ &= \frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{LT_0}\langle\theta_{tttt},\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt}\rangle - \frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{tttt},\Phi(\theta_{ttx}+\tau_q\theta_{tttx})\rangle\,, \qquad (7.43\,\mathrm{b})\\ \frac{\varrho c_v\tau_q^4}{T_0}\langle\theta_{ttttx},\Phi\theta_{tttt}\rangle &= \frac{\varrho c_v\tau_q^4}{2LT_0}\|\theta_{tttt}\|^2\,, \qquad (7.43\,\mathrm{c})\\ &\text{da } \langle\theta_{ttttx},\Phi\theta_{tttt}\rangle = \frac{1}{L}\|\theta_{tttt}\|^2 - \langle\theta_{tttt},\Phi\theta_{ttttx}\rangle \text{ ist}\,.\end{aligned}$$

Der in (7.43 a) entstandene Ausdruck $\frac{2\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle$ wird abermals umgeformt. Dazu nutzt man den Zusammenhang $\theta_{tttx} = \frac{1}{\kappa\tau_\theta}\mathcal{D}_2\theta_{tx} - \frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\theta_{ttx} - \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\theta_{tx}$, der aufgrund der Definition des Operators $\mathcal{D}_2$ als $\kappa^*\mathrm{Id} + \tau_\nu^*\partial_t + \kappa\tau_\theta\partial_{tt}$ besteht:

$$\frac{2\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle = \frac{2\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\mathcal{D}_2\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle - \frac{2\tau_\nu^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle - \frac{2\kappa^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle\,. \tag{7.44}$$

Die Summanden dieses Ausdrucks lassen sich darstellen als

$$-\frac{2\tau_\nu^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\tau_\nu^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\right) + \frac{2\tau_\nu^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\,, \tag{7.45 a}$$

$$-\frac{2\kappa^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\kappa^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\right) + \frac{2\kappa^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\,, \tag{7.45 b}$$

$$\frac{2\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\mathcal{D}_2\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle = -\frac{\tau_q^2}{2T_0\kappa\tau_\theta}\Big(\big(\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,L)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,0)\big)^2\Big) + C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 \tag{7.45 c}$$

mit $C_{G_4}^2 := \frac{\tau_q^2}{LT_0\kappa\tau_\theta}$, wobei die letzte Gleichheit durch

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{D}_2\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{txx}\rangle &= \langle\mathcal{D}_2\theta_{tx},\partial_x(\Phi\mathcal{D}_2\theta_{tx})\rangle + \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2\\ &= \big[(\mathcal{D}_2\theta_{tx})^2\Phi\big]_{x=0}^{x=L} - \langle\mathcal{D}_2\theta_{txx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{tx}\rangle + \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2\\ &= -\frac{1}{2}\Big(\big(\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,L)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,0)\big)^2\Big) - \langle\mathcal{D}_2\theta_{txx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{tx}\rangle + \frac{1}{L}\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2\end{aligned}$$

begründet ist. Setzen wir die Darstellungen aus (7.45) in (7.44), den entstehenden Ausdruck in (7.43 a) und die Ergebnisse aus (7.43) in (7.42) ein, erhalten wir für den zu untersuchenden Term $-2\gamma\tau_q^2\langle\theta_{ttttx},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle$:

$$\begin{aligned}-2\gamma\tau_q^2\langle\theta_{ttttx},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle = &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\right)\\ &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\tau_\nu^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\right) + \frac{2\tau_\nu^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\\ &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\kappa^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\right) + \frac{2\kappa^*\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\\ &-\frac{\tau_q^2}{2T_0\kappa\tau_\theta}\Big(\big(\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,L)\big)^2 + \big(\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,0)\big)^2\Big) + C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2\\ &+\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{LT_0}\langle\theta_{tttt},\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt}\rangle - \frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{tttt},\Phi(\theta_{ttx}+\tau_q\theta_{tttx})\rangle\\ &+\frac{\varrho c_v\tau_q^4}{2LT_0}\|\theta_{tttt}\|^2\,.\end{aligned}$$

Aus dieser Umformung heraus lässt sich der Ausdruck nun geeignet nach oben abschätzen. Den Randterm $-\frac{\tau_q^2}{2T_0\kappa\tau_\theta}\big((\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,L))^2+(\mathcal{D}_2\theta_{tx}(t,0))^2\big)$ können wir aufgrund seines negativen Vorzeichens vernachlässigen. Mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz, Young und Poincaré und mit $|\Phi|\le\frac{1}{2}$ ergeben sich

$$\begin{aligned}
\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{LT_0}\langle\theta_{tttt},\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt}\rangle &\le \frac{\varrho c_v\tau_q^2}{LT_0}\|\theta_{tttt}\|^2+\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{LT_0}c_{\mathrm{P}_1}\Big(\|\theta_{ttx}\|^2+\tau_q^2\|\theta_{tttx}\|^2\Big)\,,\\
\text{und}\quad -\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\langle\theta_{tttt},\Phi(\theta_{ttx}+\tau_q\theta_{tttx})\rangle &\le \frac{\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\|\theta_{tttt}\|^2+\frac{\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\Big(\|\theta_{ttx}\|^2+\tau_q^2\|\theta_{tttx}\|^2\Big)\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
-2\gamma\tau_q^2\langle\theta_{ttttx},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle \le{}& -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2\tau_q^2}{T_0}\Big(\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\Big)\\
&+C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2+\frac{2\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\kappa^*\theta_{ttx}+\tau_\nu^*\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\\
&+c_1\|\theta_{ttx}\|^2+c_2\|\theta_{tttx}\|^2+c_3\|\theta_{tttt}\|^2
\end{aligned}$$

für $c_1:=\frac{\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\big(\frac{2c_{\mathrm{P}_1}}{L}+1\big)$, $c_2:=\frac{\varrho c_v\tau_q^4}{T_0}\big(\frac{2c_{\mathrm{P}_1}}{L}+1\big)$ und $c_3:=\frac{\varrho c_v\tau_q^2}{T_0}\big(\frac{1}{L}+1+\frac{\tau_q^2}{2L}\big)$. Anstelle von $\mathcal{D}_2\theta_{xx}$ können wir aufgrund der Differentialgleichung (7.31 b) auch $\varrho c_v\big(\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt}+\frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tttt}\big)+\gamma T_0\mathcal{D}_1u_{tx}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
-2\gamma\tau_q^2\langle\theta_{ttttx},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle \le{}& -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2\tau_q^2}{T_0}\Big(\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\Big)\\
&+C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2+\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\kappa^*\theta_{ttx}+\tau_\nu^*\theta_{tttx},\Phi(\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt})\rangle\\
&+\frac{\varrho c_v\tau_q^4}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\kappa^*\theta_{ttx}+\tau_\nu^*\theta_{tttx},\Phi\theta_{tttt}\rangle+\frac{2\gamma\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta}\langle\kappa^*\theta_{ttx}+\tau_\nu^*\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle\\
&+c_1\|\theta_{ttx}\|^2+c_2\|\theta_{tttx}\|^2+c_3\|\theta_{tttt}\|^2\,.
\end{aligned}$$

Für die entstandenen Skalarprodukte nutzen wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\frac{2\varrho c_v\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\kappa^*\theta_{ttx}+\tau_\nu^*\theta_{tttx},\Phi(\theta_{tt}+\tau_q\theta_{ttt})\rangle &\le \frac{\varrho c_v\tau_q^2}{T_0\kappa\tau_\theta}\Big(\big(\kappa^{*2}+c_{\mathrm{P}_1}\big)\|\theta_{ttx}\|^2+\big(\tau_\nu^{*2}+\tau_q^2c_{\mathrm{P}_1}\big)\|\theta_{tttx}\|^2\Big)\,,\\
\frac{\varrho c_v\tau_q^4}{T_0\kappa\tau_\theta}\langle\kappa^*\theta_{ttx}+\tau_\nu^*\theta_{tttx},\Phi\theta_{tttt}\rangle &\le \frac{\varrho c_v\tau_q^4}{T_0\kappa\tau_\theta}\|\theta_{tttt}\|^2+\frac{\varrho c_v\tau_q^4}{T_0\kappa\tau_\theta}\Big(\kappa^{*2}\|\theta_{ttx}\|^2+\tau_\nu^{*2}\|\theta_{tttx}\|^2\Big)\\
\text{und}\quad \frac{2\gamma\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta}\langle\kappa^*\theta_{ttx}+\tau_\nu^*\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle &\le \frac{\varepsilon_5}{2}\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+\frac{1}{\varepsilon_5}\Big(\frac{\gamma\tau_q^2}{\kappa\tau_\theta}\Big)^2\Big(\kappa^{*2}\|\theta_{ttx}\|^2+\tau_\nu^{*2}\|\theta_{tttx}\|^2\Big)\\
&\qquad\text{mit demselben } \varepsilon_5 \text{ wie in (7.41)}\,.
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
-2\gamma\tau_q^2\langle\theta_{ttttx},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle \le{}& -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2\tau_q^2}{T_0}\Big(\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\Big)\\
&+\frac{\varepsilon_5}{2}\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2+c_1(\varepsilon_5)\|\theta_{ttx}\|^2+c_2(\varepsilon_5)\|\theta_{tttx}\|^2\\
&+C_{G_4}^5\|\theta_{tttt}\|^2\,,
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten

$$C_{G_4}^5 := \frac{\varrho c_v \tau_q^4}{T_0 \kappa \tau_\theta} + c_3\,, \quad c_1(\varepsilon_5) := \frac{\varrho c_v \tau_q^2}{T_0 \kappa \tau_\theta}(\kappa^{*2} + c_{\mathrm{P}_1}) + \frac{\varrho c_v \tau_q^4 \kappa^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} + \frac{1}{\varepsilon_5}\big(\frac{\gamma \kappa^* \tau_q^2}{\kappa \tau_\theta}\big)^2 + c_1$$
$$\text{und} \quad c_2(\varepsilon_5) := \frac{\varrho c_v \tau_q^2}{T_0 \kappa \tau_\theta}(\tau_\nu^{*2} + \tau_q^2 c_{\mathrm{P}_1}) + \frac{\varrho c_v \tau_q^4 \tau_\nu^{*2}}{T_0 \kappa \tau_\theta} + \frac{1}{\varepsilon_5}\big(\frac{\gamma \tau_\nu^* \tau_q^2}{\kappa \tau_\theta}\big)^2 + c_2$$

lauten. Die Abschätzung, die wir nun für den Term $-2\gamma\tau_q^2\langle \theta_{ttttx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle$ erhalten haben, setzen wir in (7.41) ein. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}
-4\gamma\langle \mathcal{D}_1\theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_1 u_{tx}\rangle \leq{}& \frac{\varepsilon_5}{2}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \frac{8\gamma^2}{\varepsilon_5}\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{8\gamma^2\tau_q^2}{\varepsilon_5}\|\theta_{tttx}\|^2 \\
&- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2\tau_q^2}{T_0}\Big(\langle \theta_{tttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle + \frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\langle \theta_{ttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle + \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\langle \theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\Big) \\
&+ \frac{\varepsilon_5}{2}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 + c_1(\varepsilon_5)\|\theta_{ttx}\|^2 + c_2(\varepsilon_5)\|\theta_{tttx}\|^2 \\
&+ C_{G_4}^5\|\theta_{tttt}\|^2 \\
={}& -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2\tau_q^2}{T_0}\Big(\langle \theta_{tttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle + \frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\langle \theta_{ttx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle + \frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\langle \theta_{tx}, \Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\Big) \\
&+ \varepsilon_5\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 + C_{G_4}^3(\varepsilon_5)\|\theta_{ttx}\|^2 + C_{G_4}^4(\varepsilon_5)\|\theta_{tttx}\|^2 \\
&+ C_{G_4}^5\|\theta_{tttt}\|^2
\end{aligned}$$

mit den Konstanten $C_{G_4}^3(\varepsilon_5) := \frac{8\gamma^2}{\varepsilon_5} + c_1(\varepsilon_5)$ und $C_{G_4}^4(\varepsilon_5) := \frac{8\gamma^2\tau_q^2}{\varepsilon_5} + c_2(\varepsilon_5)$. Schließlich kombinieren wir dieses Ergebnis mit der anfänglichen Ungleichung (7.40) und erhalten so die gewünschte Abschätzung. □

Nachdem sich gegenüber dem System TPLT (1,1,1) nur die Gestalt des Funktionals G_4 geändert hat, können wir im weiteren Verlauf von den ausgearbeiteten Resultaten aus Abschnitt 7.1.1 profitieren.

Korollar 7.29 (Zusammenfassen der Hilfsfunktionale). *Wir legen die folgenden Werte fest:*

$$\varepsilon_4 := \min\Big\{\frac{1}{24\varrho}, \frac{L\varrho}{48}\Big\}, \quad \varepsilon_5 := \frac{\varrho(\lambda+2\mu)}{12\varepsilon_4}, \quad a_4 := \frac{12}{\lambda+2\mu}\varepsilon_4\,,$$
$$a_1 := 2 + 3C_{G_3}^2(\varepsilon_4)\kappa^{*2} \quad \textit{und} \quad \varepsilon_3 := \frac{\lambda+2\mu}{c_{\mathrm{P}_2} a_1}\,.$$

Dann existiert eine Konstante $C_G \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1 G_1 + G_2 + G_3 + a_4 G_4)(t) \leq{}& -2\|\theta_x(t)\|^2 - 2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}(t)\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}(t)\|^2 \\
&+ C_G\Big(\|\theta_{tx}(t)\|^2 + \|\theta_{ttx}(t)\|^2 + \|\theta_{tttx}(t)\|^2 + \|\theta_{tttt}(t)\|^2\Big)\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir können auf den Beweis zu Korollar 7.10 zurückgreifen und diesen entsprechend abwandeln. Die grundlegende Abschätzung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G_2 + G_3 + a_4 G_4)$ unter (7.14) gestaltet sich dahingehend um, dass an die Stelle von $a_4 C_{G_4}^1\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + a_4 C_{G_4}^2(\varepsilon_5)\|\mathcal{D}_1\theta_{tx}\|^2$ nun der Ausdruck $a_4 C_{G_4}^1\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + a_4 C_{G_4}^2\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2 + a_4 C_{G_4}^3(\varepsilon_5)\|\theta_{ttx}\|^2 + a_4 C_{G_4}^4(\varepsilon_5)\|\theta_{tttx}\|^2 + a_4 C_{G_4}^5\|\theta_{tttt}\|^2$ tritt, wie es Lemma 7.28 im Unterschied zu Lemma 7.9 mit sich bringt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G_2+G_3+a_4G_4)\\
&\quad\le \Big(-5\varrho+24\varrho^2\varepsilon_4+a_4\Big(\frac{2(\lambda+2\mu)}{L}+\varepsilon_5\Big)\Big)\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+4(\lambda+2\mu)\Big(-1+a_4\frac{(\lambda+2\mu)}{L\varrho}\Big)\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2\\
&\qquad+C^1_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2+(C_{G_2}+a_4C^1_{G_4})\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2+C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2+(C^3_{G_3}+a_4C^2_{G_4})\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2\\
&\qquad+a_4C^3_{G_4}(\varepsilon_5)\|\theta_{ttx}\|^2+a_4C^4_{G_4}(\varepsilon_5)\|\theta_{tttx}\|^2+a_4C^5_{G_4}\|\theta_{tttt}\|^2\\
&\qquad+\big(12\varepsilon_4-a_4(\lambda+2\mu)\big)\Big(\big(\mathcal{D}_1u_{tx}(t,0)\big)^2+\big(\mathcal{D}_1u_{tx}(t,L)\big)^2\Big).
\end{aligned}
$$

Die Wahl der Konstanten ε_4, ε_5 und a_4 können wir beibehalten, ebenso die Abschätzungen für $\|\mathcal{D}_2\theta_x\|^2$ und $\|\mathcal{D}_2\theta_{tx}\|^2$, da die Gestalt des Operators $\mathcal{D}_2$ unverändert ist. So erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G_2+G_3+a_4G_4)\le{}&-2\varrho\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2-3(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2+3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\kappa^{*2}\|\theta_x\|^2\\
&+c_2\Big(\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2+\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2+\|\theta_{tx}\|^2+\|\theta_{ttx}\|^2+\|\theta_{tttx}\|^2+\|\theta_{tttt}\|^2\Big)
\end{aligned}
$$

für eine Konstante $c_2\in\mathbb{R}^+$. Durch Hinzunahme von a_1G_1 mit $a_1:=2+3C^2_{G_3}(\varepsilon_4)\kappa^{*2}$ ergibt sich wie im Beweis zu Korollar 7.10

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4)\le{}&-2\|\theta_x\|^2-2\varrho\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2-2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1u_{xx}\|^2\\
&+c_3\Big(\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2+\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2+\|\theta_{tx}\|^2+\|\theta_{ttx}\|^2+\|\theta_{tttx}\|^2+\|\theta_{tttt}\|^2\Big)
\end{aligned}
$$

für eine Konstante $c_3\in\mathbb{R}^+$. Im darauffolgenden Schritt müssen wir die geänderte Gestalt des Operators $\mathcal{D}_1$ berücksichtigen, wodurch sich die Ungleichungen wie folgt erweitern:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2\le 3\|\theta_{tt}\|^2+3\tau_q^2\|\theta_{ttt}\|^2+\frac{3\tau_q^4}{4}\|\theta_{tttt}\|^2\le 3c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{ttx}\|^2+3\tau_q^2c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tttx}\|^2+\frac{3\tau_q^4}{4}\|\theta_{tttt}\|^2,\\
&\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2\le 3\|\theta_{tx}\|^2+3\tau_q^2\|\theta_{ttx}\|^2+\frac{3\tau_q^4}{4}\|\theta_{tttx}\|^2.
\end{aligned}
$$

Für eine geeignete Konstante $C_G\in\mathbb{R}^+$ gilt nun insgesamt die behauptete Abschätzung. □

Lemma 7.30 (Beschränkung des Hilfsfunktionals durch die Energie). *Es existiert eine Konstante $C_{GE}\in\mathbb{R}^+$, sodass für alle $t\in[0,\infty)$ gilt:*

$$
\big|a_1G_1(t)+G_2(t)+G_3(t)+a_4G_4(t)\big|\le C_{GE}\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t)+E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t)+E(u,\theta;t)+E(u_t,\theta_t;t)\big).
$$

Beweis: Nach Definition von G_4 (siehe Lemma 7.28) ist

$$
\begin{aligned}
&\big|a_1G_1+G_2+G_3+a_4G_4\big|\le\big|a_1G_1+G_2+G_3+4a_4\varrho\langle\mathcal{D}_1u_{tt},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle\big|+\big|\widetilde{G}_4\big|\\
&\text{mit}\quad \widetilde{G}_4:=a_4\frac{2\tau_q^2}{T_0}\Big(\langle\theta_{tttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{ttx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle+\frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta}\langle\theta_{tx},\Phi\mathcal{D}_2\theta_{xx}\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

Für den ersten Summanden wurde im Beweis zu Lemma 7.11, siehe dort die Ungleichung (7.15), gezeigt, dass eine Konstante $c_2\in\mathbb{R}^+$ existiert, sodass

$$
\begin{aligned}
&\big|a_1G_1+G_2+G_3+4a_4\varrho\langle\mathcal{D}_1u_{tt},\Phi\mathcal{D}_1u_{tx}\rangle\big|\\
&\quad\le c_2\Big(\|\mathcal{D}_1u_{tt}\|^2+\|\mathcal{D}_1u_x\|^2+\|\mathcal{D}_1u_{tx}\|^2+\|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2+\|\theta_x\|^2+\|\theta_{tx}\|^2+\|\theta_{ttx}\|^2\Big)
\end{aligned}
$$

gilt. Der zweite Summand $|\widetilde{G}_4|$ erfüllt nach den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz, Young und $|\Phi| \leq \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$|\widetilde{G}_4| \leq c_3\Big(\|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2 + \|\mathcal{D}_2\theta_{xx}\|^2\Big)$$

mit $c_3 := a_4\frac{\tau_q^2}{2T_0}(1+\frac{\tau_\nu^*}{\kappa\tau_\theta}+\frac{\kappa^*}{\kappa\tau_\theta})$. Wenn wir für $\mathcal{D}_2\theta_{xx}$ den Zusammenhang aus der Differentialgleichung (7.31 b) ausnutzen, erhalten wir

$$\|\mathcal{D}_2\theta_{xx}\|^2 \leq 2(\varrho c_v)^2\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + 2(\gamma T_0)^2\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 .$$

Damit ergibt sich für $c_4 := c_3 \max\{1, 2(\varrho c_v)^2, 2(\gamma T_0)^2\}$

$$|\widetilde{G}_4| \leq c_4\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big) .$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}|a_1G_1 + G_2 + G_3 + a_4G_4| &\leq (c_2+c_4)\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_x\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \\ &\qquad + \|\mathcal{D}_1\theta_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big) \\ &\leq C_{GE}\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t) + E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big)\end{aligned}$$

für $C_{GE} := (c_2+c_4)(\frac{1}{C_{E_{\mathcal{H}}}} + \frac{1}{C_E})$, wobei die letzte Ungleichung auf den Sätzen 7.24 (i) und 7.26 (i) beruht. □

Für die Festsetzung des Lyapunov-Funktionals unterscheiden wir zwischen den beiden Fällen $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ und $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$.

Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$

Solange die Parameter der strikten Ungleichung genügen, reichen die bisher zusammengestellten Funktionale aus, um ein geeignetes Lyapunov-Funktional zu konstruieren.

Satz 7.31 (Lyapunov-Funktional). *Es gelte $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$. Wir legen die folgenden Werte fest:*

$$a_2 := 1 + \max\left\{\frac{T_0}{\varrho c_v\tau_q}C_G, C_{GE}\right\} \quad \textit{sowie} \quad \varepsilon_0 := \frac{1}{a_2}, \quad \varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{a_2} \quad \textit{und}$$

$$a_3 := 1 + \max\left\{C_{GE}, \frac{a_2C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1) + C_G}{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}, \frac{a_2C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G}{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q + \tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\big)}, \frac{a_2C^3_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2) + C_G}{\tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\big)}\right\}.$$

Das Lyapunov-Funktional $\mathscr{L}$ und die Gesamtenergie $\mathscr{E}$ definieren wir für $t \in [0,\infty)$ durch

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(t) &:= a_2\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) + G_0(t)\big) + a_3\big(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\big) \\ &\quad + a_1G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) + a_4G_4(t) \\ \textit{und} \quad \mathscr{E}(t) &:= E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) + G_0(t) + E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t) .\end{aligned}$$

Dann ist zum einen $\mathscr{L}$ äquivalent zu $\mathscr{E}$, d. h. $\exists\, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : b_1\mathscr{E}(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq b_2\mathscr{E}(t)$, und zum anderen gilt: $\exists\, b_3 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \leq -b_3\mathscr{E}(t)$.

Beweis: Die Ergebnisse aus Satz 7.24 (ii), Satz 7.26 (ii) und Korollar 7.29 besagen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} \leq\ & a_2\Big(-\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 - \frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{tttt}\|^2 + \varepsilon_1\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \varepsilon_2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \varepsilon_0\|\theta_x\|^2 \\
& \quad + C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\|\theta_{tx}\|^2 + C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|\theta_{ttx}\|^2 + C^3_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2)\|\theta_{tttx}\|^2\Big) \\
& + a_3\Big(-(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - \Big(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q + \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{ttx}\|^2 \\
& \quad - \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\|\theta_{tttx}\|^2\Big) \\
& - 2\|\theta_x\|^2 - 2\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - 2(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + C_G\Big(\|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2 + \|\theta_{tttt}\|^2\Big) \\
=\ & (-2\varrho + a_2\varepsilon_1)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + (-2 + a_2\varepsilon_2)(\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 - a_2\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 \\
& + \Big(-a_2\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0} + C_G\Big)\|\theta_{tttt}\|^2 + (-2 + a_2\varepsilon_0)\|\theta_x\|^2 \\
& + \Big(-a_3(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q) + a_2 C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1) + C_G\Big)\|\theta_{tx}\|^2 \\
& + \Big(-a_3\Big(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q + \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\Big) + a_2 C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G\Big)\|\theta_{ttx}\|^2 \\
& + \Big(-a_3\tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big) + a_2 C^3_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) + C_G\Big)\|\theta_{tttx}\|^2 . \qquad (7.46)
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.30 gelten außerdem

$$\mathscr{L} \leq (a_2 + C_{GE})\big(E_\mathcal{H}(u,\theta) + E_\mathcal{H}(u_t,\theta_t)\big) + a_2 G_0 + (a_3 + C_{GE})\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big) \qquad (7.47)$$

und

$$\mathscr{L} \geq (a_2 - C_{GE})\big(E_\mathcal{H}(u,\theta) + E_\mathcal{H}(u_t,\theta_t)\big) + a_2 G_0 + (a_3 - C_{GE})\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big) . \qquad (7.48)$$

Damit einerseits der Term $\|\theta_{tttt}\|^2$ in (7.46) ein negatives Vorzeichen erhält und andererseits in (7.48) die Positivität aufrechterhalten werden kann, muss a_2 hinreichend groß gewählt werden. Wir legen $a_2 := 1 + \max\{\frac{T_0}{\varrho c_v\tau_q}C_G, C_{GE}\}$ fest und setzen $\varepsilon_0 := \frac{1}{a_2}$, $\varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}$ und $\varepsilon_2 := \frac{1}{a_2}$. Anschließend fixieren wir

$$a_3 := 1 + \max\left\{C_{GE}, \frac{a_2 C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1) + C_G}{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q}, \frac{a_2 C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G}{\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q + \tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\big)}, \frac{a_2 C^3_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) + C_G}{\tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\big)}\right\}.$$

Zum einen sind damit nun $\mathscr{L}$ und $\mathscr{E}$ wegen (7.47) und (7.48) äquivalent:

$$\forall\, t \in [0,\infty): \ \min\{a_2 - C_{GE}, a_3 - C_{GE}\}\mathscr{E}(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq \max\{a_2 + C_{GE}, a_3 + C_{GE}\}\mathscr{E}(t) .$$

Zum anderen reduziert sich die Abschätzung (7.46) auf

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} \leq\ & -\varrho\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 - (\lambda+2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 - a_2\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2 - \frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0}\|\theta_{tttt}\|^2 - \|\theta_x\|^2 \\
& - (\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q)\|\theta_{tx}\|^2 - \Big(\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q + \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\Big)\|\theta_{ttx}\|^2 - \tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big)\|\theta_{tttx}\|^2 \\
\leq\ & -c_1\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \|\theta_{ttt}\|^2 + \|\theta_{tttt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big)
\end{aligned} \qquad (7.49)$$

für $c_1 := \min\{\varrho, \lambda+2\mu, \frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}, 1, \tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q, \tau_q(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2})\} > 0$. Anhand der Definitionen von $E_{\mathcal{H}}$, E und G_0 (siehe Definition 7.23, Satz 7.24 und Definition 7.25) sieht man leicht, dass eine Konstante $c_2 \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$\begin{aligned}\mathscr{E} \le c_2\Big(&\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_x\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\theta_{tt}\|^2 + \|\theta_{ttt}\|^2 + \|\theta_{tttt}\|^2 \\ &+ \|\mathcal{D}_1\theta\|^2 + \|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big).\end{aligned}$$

Daraufhin nutzen wir noch die Ungleichungen

$$\|\mathcal{D}_1 u_t\|^2 \le c_{\mathrm{P}_1}\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2, \quad \|\mathcal{D}_1 u_x\|^2 \le c_{\mathrm{P}_2}\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2, \text{ da } \int_0^L \mathcal{D}_1 u_x \,\mathrm{d}x = 0, \quad \|\theta_{tt}\|^2 \le c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{ttx}\|^2,$$

$$\|\mathcal{D}_1\theta\|^2 \le 3\|\theta_t\|^2 + 3\tau_q^2\|\theta_{tt}\|^2 + \frac{3\tau_q^4}{4}\|\theta_{ttt}\|^2 \le 3c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{tx}\|^2 + 3\tau_q^2 c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{3\tau_q^4}{4}\|\theta_{ttt}\|^2,$$

$$\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2 \le 3\|\theta_{tt}\|^2 + 3\tau_q^2\|\theta_{ttt}\|^2 + \frac{3\tau_q^4}{4}\|\theta_{tttt}\|^2 \le 3c_{\mathrm{P}_1}\|\theta_{ttx}\|^2 + 3\tau_q^2\|\theta_{ttt}\|^2 + \frac{3\tau_q^4}{4}\|\theta_{tttt}\|^2,$$

$$\|\mathcal{D}_1 u_{tt}\|^2 \le 2\Big(\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\Big)^2\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + 6\Big(\frac{\gamma}{\varrho}\Big)^2\Big(\|\theta_{tx}\|^2 + \tau_q^2\|\theta_{ttx}\|^2 + \frac{\tau_q^4}{4}\|\theta_{tttx}\|^2\Big),$$

die sich mithilfe der Ungleichungen von Poincaré, Cauchy-Schwarz und Young sowie anhand der Gestalt von $\mathcal{D}_1$ und des Zusammenhangs aus der Differentialgleichung (7.31 a) ergeben. Für eine hinreichend große Konstante $c_3 \in \mathbb{R}^+$ folgt dann

$$\mathscr{E} \le c_3\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \|\theta_{ttt}\|^2 + \|\theta_{tttt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big).$$

Dies zusammen mit (7.49) ergibt $\mathscr{L}(t) \le -\frac{c_1}{c_3}\mathscr{E}(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$. □

Wir erkennen nun auch die Ursache für die Notwendigkeit der Energie zweiter Stufe $E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t)$, die im Zusammenhang mit dem System TPLT (1,1,1) nicht bestand. Die Funktionale G_1 und G_3 (siehe Lemma 7.27) rufen in der Abschätzung ihrer Zeitableitungen die Terme $C^1_{G_1}\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2$ und $C^1_{G_3}(\varepsilon_4)\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2$ hervor. Dadurch, dass der Differentialoperator $\mathcal{D}_1$ gegenüber der Situation für TPLT (1,1,1) um den Term $\frac{\tau_q^2}{2}\partial_{ttt}$ erweitert ist, reichen die durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E(u,\theta)+E(u_t,\theta))$ geschaffenen Terme $-\|\theta_{tx}\|^2$, $-\|\theta_{ttx}\|^2$ und $-\|\theta_{tttx}\|^2$ nicht mehr zur Kompensation von $\|\mathcal{D}_1\theta_t\|^2$ aus. Die Lücke wird durch die Energie zweiter Stufe geschlossen, da sie den Term $-\|\theta_{tttt}\|^2$ beisteuert.

Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$

Wenn $\tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ gilt, trägt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)$, wie aus Satz 7.26 (ii) ersichtlich, weiterhin die Anteile $-\|\theta_{ttx}\|^2$ und $-\|\theta_{tttx}\|^2$ bei, nicht aber mehr den Term $-\|\theta_{tx}\|^2$. Wie wir schon im Zusammenhang mit dem System TPLT (1,1,1) gesehen haben, können wir diesen jedoch durch ein weiteres Funktional H erzeugen.

Lemma 7.32 (Hilfsfunktional H). *Für $t \in [0,\infty)$ definieren wir $H(t) := -\langle\theta_x(t), \theta_{tx}(t)\rangle$. Dann gilt für alle $t \in [0,\infty)$*

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t) \le -\|\theta_{tx}(t)\|^2 + \frac{\varepsilon_6}{2}\|\theta_x(t)\|^2 + C_H(\varepsilon_6)\|\theta_{ttx}(t)\|^2 \\ \text{und}\quad &|H(t)| \le \varepsilon_7\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t)\big) + C_{HE}(\varepsilon_7)\big(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\big),\end{aligned}$$

wobei ε_6 und $\varepsilon_7 \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt werden können und die davon abhängigen Konstanten $C_H(\varepsilon_6)$, $C_{HE}(\varepsilon_7)$ in $\mathbb{R}^+$ geeignet festzulegen sind.

Beweis: Die Abschätzung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)$ entspricht derjenigen aus Lemma 7.13. Geändert hat sich nur die Definition der Energien. Nach Satz 7.24 (i) und Satz 7.26 (i) gilt jedoch

$$\|\theta_x\|^2 \leq \frac{1}{C_{E_{\mathcal{H}}}}\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t)\big) \quad \text{und} \quad \|\theta_{tx}\|^2 \leq \frac{1}{C_E}\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big)\,,$$

sodass zusammen mit $|H| \leq C_{E_{\mathcal{H}}}\varepsilon_7\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{4C_{E_{\mathcal{H}}}\varepsilon_7}\|\theta_{tx}\|^2$ die behauptete Abschätzung folgt. □

Satz 7.33 (Lyapunov-Funktional). *Es gelte $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$. Wir legen die folgenden Werte fest:*

$$\begin{aligned}
&a_2 := 2 + \max\left\{\frac{T_0}{\varrho c_v \tau_q}C_G, C_{GE}\right\}, \quad \varepsilon_0 := \frac{1}{2a_2}\,, \quad \varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}\,, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{a_2}\,,\\
&a_5 := 1 + a_2 C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1) + C_G\,, \quad \varepsilon_6 := \frac{1}{a_5}\,, \quad \varepsilon_7 := \frac{1}{a_5} \quad \textit{und}\\
&a_3 := 1 + \max\left\{C_{GE} + a_5 C_{HE}(\varepsilon_7)\,,\ \frac{a_2 C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G + C_H(\varepsilon_6)}{\tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\big)}\,,\ \frac{a_2 C^3_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2) + C_G}{\tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\big)}\right\}.
\end{aligned}$$

Die Gesamtenergie $\mathscr{E}$ sei wie zuvor für $t \in [0,\infty)$ durch

$$\mathscr{E}(t) := E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + G_0(t) + E(u_t,\theta_t;t) + E(u_t,\theta_t;t)$$

definiert. Als Lyapunov-Funktional wählen wir

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(t) := {}& a_2\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) + G_0(t)\big) + a_3\big(E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)\big)\\
&+ a_1 G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) + a_4 G_4(t) + a_5 H(t)\,.
\end{aligned}$$

Dann ist zum einen $\mathscr{L}$ äquivalent zu $\mathscr{E}$, d. h. $\exists\, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : b_1\mathscr{E}(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq b_2\mathscr{E}(t)$, und zum anderen gilt: $\exists\, b_3 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \leq -b_3\mathscr{E}(t)$.

Beweis: Die Ungleichungen (7.46), (7.47) und (7.48) aus dem Beweis zu Satz 7.31 ändern sich durch $\tau_\nu^* - \kappa^*\tau_q = 0$ und die Hinzunahme von $a_5 H$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} \leq {}& (-2\varrho + a_2\varepsilon_1)\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + (-2 + a_2\varepsilon_2)(\lambda + 2\mu)\|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 - a_2\frac{\varrho c_v \tau_q}{T_0}\|\theta_{ttt}\|^2\\
&+ \left(-a_2\frac{\varrho c_v\tau_q}{T_0} + C_G\right)\|\theta_{tttt}\|^2 + \left(-2 + a_2\varepsilon_0 + a_5\frac{\varepsilon_6}{2}\right)\|\theta_x\|^2\\
&+ (-a_5 + a_2 C^1_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_0,\varepsilon_1) + C_G)\|\theta_{tx}\|^2\\
&+ \left(-a_3\tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big) + a_2 C^2_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + C_G + C_H(\varepsilon_6)\right)\|\theta_{ttx}\|^2\\
&+ \left(-a_3\tau_q\Big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^*\tau_q}{2}\Big) + a_2 C^3_{E_{\mathcal{H}}}(\varepsilon_2) + C_G\right)\|\theta_{tttx}\|^2
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} \leq {}& (a_2 + C_{GE} + a_5\varepsilon_7)\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t)\big) + a_2 G_0\\
&+ \big(a_3 + C_{GE} + a_5 C_{HE}(\varepsilon_7)\big)\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} \geq {}& (a_2 - C_{GE} - a_5\varepsilon_7)\big(E_{\mathcal{H}}(u,\theta) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t)\big) + a_2 G_0\\
&+ \big(a_3 - C_{GE} - a_5 C_{HE}(\varepsilon_7)\big)\big(E(u,\theta) + E(u_t,\theta_t)\big)\,.
\end{aligned}$$

Die Reihenfolge, in der die noch offenen Konstanten zu wählen sind, kennen wir schon. Zunächst fixieren wir $a_2 := 2 + \max\{\frac{T_0}{\varrho c_v \tau_q} C_G, C_{GE}\}$ und $\varepsilon_0 := \frac{1}{2a_2}$, $\varepsilon_1 := \frac{\varrho}{a_2}$ und $\varepsilon_2 := \frac{1}{a_2}$. Dann legen wir $a_5 := 1 + a_2 C^1_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) + C_G$ fest und passen dazu $\varepsilon_6 := \frac{1}{a_5}$ und $\varepsilon_7 := \frac{1}{a_5}$ an. Schließlich setzen wir noch

$$a_3 := 1 + \max\left\{ C_{GE} + a_5 C_{HE}(\varepsilon_7), \frac{a_2 C^2_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + C_G + C_H(\varepsilon_6)}{\tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^* \tau_q}{2}\big)}, \frac{a_2 C^3_{E_\mathcal{H}}(\varepsilon_2) + C_G}{\tau_q\big(\kappa\tau_\theta - \frac{\tau_\nu^* \tau_q}{2}\big)} \right\}.$$

Wie im Beweis zu Satz 7.31 ergibt sich damit zum einen die Äquivalenz von $\mathscr{L}$ und $\mathscr{E}$ und zum anderen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L} \le -c\Big(\|\mathcal{D}_1 u_{tx}\|^2 + \|\mathcal{D}_1 u_{xx}\|^2 + \|\theta_{ttt}\|^2 + \|\theta_{tttt}\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{tx}\|^2 + \|\theta_{ttx}\|^2 + \|\theta_{tttx}\|^2\Big) \le b_3 \mathscr{E}$$

für geeignete Konstanten c und b_3 aus $\mathbb{R}^+$. □

Anhand der Sätze 7.31 und 7.33 können wir nun für das System TPLT (2,1,1) die exponentielle Stabilität unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen folgern.

Satz 7.34 (Exponentielle Stabilität für TPLT (2,1,1) unter Dirichlet-Randbedingungen). *Es gelte* $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \ge \kappa^* \tau_q$ *und es sei* (u, θ) *eine hinreichend glatte Lösung von* (7.30) *unter der Randbedingung* (7.32). *Dann klingt die Gesamtenergie* $\mathscr{E} := E_\mathcal{H}(u,\theta) + E_\mathcal{H}(u_t, \theta_t) + G_0(t) + E(u,\theta) + E(u_t, \theta_t)$ *exponentiell ab, d. h.*

$$\exists\, D \in \mathbb{R}^+\ \exists\, d \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \mathscr{E}(t) \le D\mathscr{E}(0)e^{-dt}\,.$$

Insbesondere gilt:

$$\exists\, D_1 \in \mathbb{R}^+\ \exists\, D_2 \in \mathbb{R}^+\ \forall\, t \in [0,\infty):\ \ \|\theta(t)\| \le D_1 e^{-\frac{d}{2}t} \quad \textit{und} \quad \big\|(u(t), u_t(t))\big\| \le D_2 e^{-\min\{\frac{1}{\tau_q}, \frac{d}{2}\}t}\,.$$

Beweis: Wie im Beweis zu Satz 7.15 folgt das exponentielle Abklingen für $\mathscr{E}$ mithilfe des Lemmas von Grönwall aus Satz 7.31, sofern $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* > \kappa^*\tau_q$ ist, und aus Satz 7.33, falls $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* = \kappa^*\tau_q$ ist. Unter Beachtung von Satz 7.24 (i) bringt dies auch das exponentielle Abklingen für θ mit sich. Wie im Beweis zu Satz 7.15 ausgeführt, erhalten wir $\|\mathcal{D}_0 u\|^2 \le c_1(\|\mathcal{D}_0 u_{tt}\|^2 + \|\mathcal{D}_0 \theta_x\|^2)$, wobei der Operator $\mathcal{D}_0$ nun aber als $\mathcal{D}_0 := \mathrm{Id} + \tau_q \partial_t + \frac{\tau_q^2}{2}\partial_{tt}$ definiert ist. Weiter ergibt sich daraus für $c_2 := 3c_1 \max\{1, \tau_q^2, \frac{\tau_q^4}{4}\}$ unter Berücksichtigung von Satz 7.24 (i)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_0 u(t)\|^2 &\le c_2\Big(\|\mathcal{D}_1 u_t(t)\|^2 + \|\theta_x(t)\|^2 + \|\theta_{tx}(t)\|^2 + \|\theta_{ttx}(t)\|^2\Big)\\ &\le \frac{c_2}{C_{E_\mathcal{H}}}\big(E_\mathcal{H}(u,\theta;t) + E_\mathcal{H}(u_t,\theta_t;t)\big) \le \frac{c_2}{C_{E_\mathcal{H}}}\mathscr{E}(t) \le \frac{c_2}{C_{E_\mathcal{H}}} D\mathscr{E}(0)e^{-dt}\,.\end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen $\mathcal{D}_0 u$ und u wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den Anfangswerten $u_0 := u(0)$ und $u_1 := u_t(0)$ beschrieben:

$$\begin{aligned} u(t) + \tau_q u_t(t) + \frac{\tau_q^2}{2} u_{tt}(t) &= \mathcal{D}_0 u(t)\,, \quad t \in (0,\infty)\,,\\ u(0) = u_0\,,\ u_t(0) &= u_1\,.\end{aligned}$$

Als System erster Ordnung lautet das Problem

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ u_t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_0 u\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{\tau_q^2} & -\frac{2}{\tau_q}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ u_t(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1\end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind $-\frac{1}{\tau_q} \pm \frac{1}{\tau_q} i$. Demnach gilt $\|e^{At}\|_{\mathbb{C}^{2\times 2}} \leq c e^{-\frac{1}{\tau_q} t}$ für ein $c \in \mathbb{R}^+$ und alle $t \in [0, \infty)$ (vergleiche Lemma 2.6 (iv)). Zusammen mit der nach Satz A.18 gültigen Darstellung

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_0 u(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

folgt wie im Beweis zu Satz 7.15

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{L^2((0,L))^2} \leq D_2 e^{-\min\{\frac{1}{\tau_q}, \frac{d}{2}\} t}$$

für eine von u_0, u_1 und $\mathscr{E}(0)$ abhängige Konstante $D_2 \in \mathbb{R}^+$. □

7.2.2 Homogene Dirichlet-Neumann-Randbedingungen

Wie für das System TPLT (1,1,1) übertragen sich auch hier die Resultate, wenn wir die Randbedingungen zu den Systemen (7.30) und (7.31) abwandeln zu

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{und} \quad \theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0 \quad \text{für } t \in [0,\infty)\,. \tag{7.50}$$

Aufgrund der Differentialgleichung (7.31 b) bedeutet dies, dass für alle $t \in [0, \infty)$

$$\int_0^L \mathcal{D}_1 \theta(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L \mathcal{D}_1 \theta(0,x)\,\mathrm{d}x$$

gilt. Zusammen mit der Darstellung

$$\begin{pmatrix} \theta(t,x) \\ \theta_t(t,x) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} \theta_0(x) \\ \theta_1(x) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_0 \theta(0,x) \end{pmatrix} + \int_0^s \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_1 \theta(r,x) \end{pmatrix} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s\,,$$

wobei die Matrix A wie im Beweis von Satz 7.34 definiert sei, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \int_0^L \begin{pmatrix} \theta(t,x) \\ \theta_t(t,x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x &= e^{At} \int_0^L \begin{pmatrix} \theta_0(x) \\ \theta_1(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x + \int_0^t e^{A(t-s)}\,\mathrm{d}s \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_0 \theta(0,x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^t s e^{A(t-s)}\,\mathrm{d}s \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_1 \theta(0,x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten daher nur solche Anfangswerte, die

$$\int_0^L \theta_0(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \int_0^L \theta_1(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \int_0^L \theta_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^L \theta_3(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{7.51}$$

erfüllen, womit dann $\int_0^L \theta(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $t \in [0,\infty)$ gilt.

Lemma 7.35 (Energien und Hilfsfunktionale). *Die Energien $E_{\mathcal{H}}$ und E sowie die Funktionale G_1, G_2 und G_3 seien wie in Abschnitt 7.2.1 definiert. Unter der Randbedingung* (7.50) *und der Voraussetzung* (7.51) *gilt: Die Aussagen von Satz 7.24 und Satz 7.26 behalten ihre Gültigkeit. Gleiches gilt für die Aussagen aus Lemma 7.27 zu den Funktionalen G_1 und G_2. Für G_3 trifft die Aussage aus Lemma 7.19 zu. Für $2G_1 + G_2 + G_3$ gilt die Aussage aus Korollar 7.20, wobei $\mathscr{E}$ als $\mathscr{E}(t) := E_{\mathcal{H}}(u,\theta;t) + E_{\mathcal{H}}(u_t,\theta_t;t) + G_0(t) + E(u,\theta;t) + E(u_t,\theta_t;t)$ zu setzen ist.*

Beweis: Gilt $\theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0$, so kommt im Beweis von Satz 7.24 bei (7.33) die zweite Poincarésche Ungleichung zum Einsatz. Es bleibt dabei, dass bei den partiellen Integrationen bei (7.34) und (7.37) im Beweis von Satz 7.24 sowie bei (7.39) im Beweis von Satz 7.26 keine Randterme auftreten. Die Aussagen von Satz 7.24 und Satz 7.26 sind damit weiterhin gültig. Die Übernahme der Aussagen zu G_1, G_2 und G_3 erschließt sich aus den Beweisen zu Lemma 7.19, Korollar 7.20, Lemma 7.27 und Lemma 7.30. □

Auf der Grundlage von Lemma 7.35 leitet man wie im Beweis zu Satz 7.21 die exponentielle Stabilität unter Dirichlet-Neumann-Randbedingungen ab.

Satz 7.36 (Exponentielle Stabilität für TPLT (2,1,1) unter Dirichlet-Neumann-Randbedingungen). *Es gelte* $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ *und es sei* (u,θ) *eine hinreichend glatte Lösung von* (7.30) *unter der Randbedingung* (7.50) *und der Voraussetzung* (7.51). *Dann existieren* $d, D, D_1, D_2 \in \mathbb{R}^+$, *sodass für alle* $t \in [0,\infty)$ *gilt:*

$$\mathscr{E}(t) \leq D\mathscr{E}(0)e^{-dt}\,, \quad \|\theta(t)\| \leq D_1 e^{-\frac{d}{2}t} \quad \textit{und} \quad \big\|(u(t),u_t(t))\big\| \leq D_2 e^{-\min\{\frac{1}{\tau_q},\frac{d}{2}\}t}\,.$$

7.2.3 Instabilität

Wir wollen zeigen, dass im Allgemeinen keine Stabilität zu erwarten ist, wenn die Bedingung $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^*\tau_q$ verletzt ist, und betrachten dazu das System (7.30)

$$\begin{aligned} \varrho u_{tt} - (\lambda+2\mu)u_{xx} + \gamma\theta_x &= 0 \\ \varrho c_v\Big(\theta_{tt} + \tau_q\theta_{ttt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{tttt}\Big) - \kappa^*\theta_{xx} - \tau_\nu^*\theta_{txx} - \kappa\tau_\theta\theta_{ttxx} &= -\gamma T_0\Big(u_{ttx} + \tau_q u_{tttx} + \frac{\tau_q^2}{2}u_{ttttx}\Big) \end{aligned}$$

in $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ unter homogenen Dirichlet-Neumann-Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \theta_x(t,0) = \theta_x(t,2\pi) = 0 \quad \text{für } t \in [0,\infty)\,.$$

Wir gehen wie in Abschnitt 7.1.3 vor und wählen als Ansatz für eine Lösung

$$u(t,x) = ae^{\omega t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) \quad \text{und} \quad \theta(t,x) = be^{\omega t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$$

für Werte a, $b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit die Differentialgleichungen erfüllt sind, muss

$$M_{\omega,n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

mit $\quad M_{\omega,n} := \begin{pmatrix} \varrho\omega^2 + (\lambda+2\mu)n^2 & -\gamma n \\ \gamma T_0 n(\omega^2 + \tau_q\omega^3 + \frac{\tau_q^2}{2}\omega^4) & \varrho c_v\frac{\tau_q^2}{2}\omega^4 + \varrho c_v\tau_q\omega^3 + (\varrho c_v + \kappa\tau_\theta n^2)\omega^2 + \tau_\nu^* n^2\omega + \kappa^* n^2 \end{pmatrix}$

gelten. Dieses Gleichungssystem besitzt eine Lösung $(a,b) \neq (0,0)$, wenn $\det M_{\omega,n} = 0$ ist, d. h.

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho^2 c_v\tfrac{\tau_q^2}{2}\omega^6 + \varrho^2 c_v\tau_q\omega^5 + \Big(\varrho^2 c_v + (\varrho c_v\tfrac{\tau_q^2}{2}(\lambda+2\mu) + \gamma^2 T_0\tfrac{\tau_q^2}{2} + \varrho\kappa\tau_\theta)n^2\Big)\omega^4 \\ &\quad + (\varrho\tau_\nu^* + \varrho c_v\tau_q(\lambda+2\mu) + \gamma^2 T_0\tau_q)n^2\omega^3 \\ &\quad + (\varrho\kappa^* + \varrho c_v(\lambda+2\mu) + \gamma^2 T_0 + \kappa\tau_\theta(\lambda+2\mu)n^2)n^2\omega^2 + \tau_\nu^*(\lambda+2\mu)n^4\omega + \kappa^*(\lambda+2\mu)n^4 \\ &=: p_n(\omega)\,. \end{aligned}$$

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen p_n eine Nullstelle mit positivem Realteil besitzt, lässt sich mithilfe des Hurwitz-Kriteriums beantworten. Der erste Hauptminor $h_n^{(1)} := \varrho^2 c_v \tau_q$ der zu p_n gehörigen Hurwitz-Matrix ist stets positiv. Die Hauptminoren zweiter und dritter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} h_n^{(2)} &:= \det \begin{pmatrix} \varrho^2 c_v \tau_q & (\varrho \tau_\nu^* + \varrho c_v \tau_q(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 \tau_q) n^2 \\ \varrho^2 c_v \frac{\tau_q^2}{2} & \varrho^2 c_v + (\varrho c_v \frac{\tau_q^2}{2}(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 \frac{\tau_q^2}{2} + \varrho \kappa \tau_\theta) n^2 \end{pmatrix} \\ &= \varrho^3 c_v \tau_q \Big(\kappa \tau_\theta - \frac{\tau_q \tau_\nu^*}{2}\Big) n^2 + \varrho^4 c_v^2 \tau_q \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_n^{(3)} &:= \det \begin{pmatrix} \varrho^2 c_v \tau_q & (\varrho \tau_\nu^* + \varrho c_v \tau_q(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 \tau_q\big) n^2 & \tau_\nu^*(\lambda + 2\mu) n^4 \\ \varrho^2 c_v \frac{\tau_q^2}{2} & \varrho^2 c_v + \big(\varrho c_v \frac{\tau_q^2}{2}(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 \frac{\tau_q^2}{2} + \varrho \kappa \tau_\theta\big) n^2 & (\varrho \kappa^* + \varrho c_v(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 + \kappa \tau_\theta(\lambda + 2\mu) n^2) n^2 \\ 0 & \varrho^2 c_v \tau_q & (\varrho \tau_\nu^* + \varrho c_v \tau_q(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 \tau_q) n^2 \end{pmatrix} \\ &= (\varrho \tau_\nu^* + \varrho c_v \tau_q(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 \tau_q) n^2 h_n^{(2)} \\ &\quad - \varrho^4 c_v^2 \tau_q^2 \Big((\varrho \kappa^* + \varrho c_v(\lambda + 2\mu) + \gamma^2 T_0 + \kappa \tau_\theta(\lambda + 2\mu) n^2) n^2 - \frac{\tau_q \tau_\nu^*}{2}(\lambda + 2\mu) n^4 \Big) \\ &= \varrho^3 c_v \tau_q \big(\varrho \tau_\nu^* + \gamma^2 T_0 \tau_q\big) \Big(\kappa \tau_\theta - \frac{\tau_q \tau_\nu^*}{2}\Big) n^4 + \varrho^5 c_v^2 \tau_q (\tau_\nu^* - \kappa^* \tau_q) n^2. \end{aligned}$$

Wenn nun $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} < \tau_\nu^*$ ist, ist $h_n^{(2)} < 0$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Im Fall $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} = \tau_\nu^* < \kappa^* \tau_q$ ist $h_n^{(2)} > 0$, aber $h_n^{(3)} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In beiden Fällen folgt mithilfe des Hurwitz-Kriteriums A.6.1 (ii), dass p_n für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\omega) > 0$ besitzt. Daraus lässt sich wie in Abschnitt 7.1.3 die Instabilität begründen.

Die Ergebnisse, die wir zur exponentiellen Stabilität der Modelle TPLT (1,1,1) und TPLT (2,1,1) erhalten haben, waren auf Grundlage der bisherigen Arbeiten [BQR14; Qui02; Qui03; QR06a; QR06b; QR07; QR08] zu erwarten. Insbesondere war davon auszugehen, dass die von den Wärmeleitungsmodellen TPLW (1,1,1) und TPLW (2,1,1) bekannten Parameterbedingungen $\tau_\nu^* \geq \kappa^* \tau_q$ und $\frac{2\kappa\tau_\theta}{\tau_q} > \tau_\nu^* \geq \kappa^* \tau_q$ eine Rolle spielen. Die konkreten Rechnungen bei den Energieabschätzungen mussten individuell durchgeführt werden, jedoch ließen sich Ideen zur Behandlung des Randterms und des Grenzfalls der Parameterbedingung aus [QR06b] und [BQR14] übernehmen. Somit fügen sich unsere Untersuchungen zu den beiden Three-Phase-Lag-Modellen der Thermoelastizität in die Reihe der bisherigen Arbeiten ein.

Anhang

A.1 Notationen

Es sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die Mengen der natürlichen, reellen und komplexen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}_0^+$ die Mengen der positiven bzw. nichtnegativen reellen Zahlen. $\lfloor \cdot \rfloor$ bezeichnet die Abrundungsfunktion. Zu einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ bezeichnen $\overline{z}$ deren konjugiert komplexe Zahl, $\mathrm{Re}(z)$ den Realteil und $\mathrm{Im}(z)$ den Imaginärteil. Die imaginäre Einheit ist $i := \sqrt{-1}$.

Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und sind $(X_j, \|\cdot\|_{X_j})$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ normierte Räume, so bezeichnet $X_1 \times \ldots \times X_m$ das kartesische Produkt und X^m das m-fache kartesische Produkt von X mit sich selbst. Ein Element $x \in X_1 \times \ldots \times X_m$ wird in der Form $x = (x_1, \ldots, x_m)^\intercal$ dargestellt, wobei $\intercal$ die Transponierung kennzeichnet. Auf dem Produktraum sind die folgenden p-Normen untereinander äquivalent:

$$\|\cdot\|_{X_1 \times \ldots \times X_m;\, p} : \; X_1 \times \ldots \times X_m \to \mathbb{R}_0^+ , \quad x \mapsto \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^m \|x_j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1, \infty) , \\ \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\|_{X_j} & \text{für } p = \infty . \end{cases}$$

Sind $(X_j, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X_j})$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ Hilberträume, so wählen wir auf dem Produktraum das Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_1 \times \ldots \times X_m} : \; (X_1 \times \ldots \times X_m) \times (X_1 \times \ldots \times X_m) \to \mathbb{C} , \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^m \langle x_j, y_j \rangle_{X_j}$$

und die davon induzierte Norm $\|\cdot\|_{X_1 \times \ldots \times X_m;\, 2}$. Die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ zur Raumdimension $n \in \mathbb{N}$ sind mit dem durch $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} := \sum_{j=1}^n x_j y_j$ bzw. $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^n} := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ definierten Skalarprodukt und der davon induzierten euklidischen Norm $|\cdot|$ ausgestattet.

Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gelten die Schreibweisen $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ sowie $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ für $x \in \mathbb{C}^n$ und $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, wobei ∂_{x_j} die partielle Ableitung nach der j-ten Komponente bezeichnet. Als weitere Ableitungsoperatoren treten der Nabla-Operator ∇, die Divergenz div, die Rotation rot und der Laplace-Operator Δ auf.

A.2 Räume von Funktionen und Distributionen

A.2.1 Stetige und differenzierbare Funktionen

Zu einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und einem Banachraum X bezeichnen $\mathcal{C}^0(U, X)$ den Raum der stetigen Funktionen und $\mathcal{C}^k(U, X)$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ den Raum der k-mal stetig (Fréchet)-differenzierbaren Funktionen von U nach X. Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist $\mathcal{C}^k(\overline{U}, X)$ die Menge aller $f \in \mathcal{C}^k(U, X)$, für die $\partial_x^\alpha f$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{U}$ besitzt.

$\mathscr{L}(X, Y)$ ist der Raum der stetigen linearen Abbildungen von X in einen Banachraum Y und ist ausgestattet mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,Y)} : \mathscr{L}(X, Y) \to \mathbb{R}_0^+$, $f \mapsto \sup_{\|x\|_X = 1} \|f(x)\|_Y$. Dabei ist $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, X)$. Auf dem zu $\mathscr{L}(\mathbb{C}^m)$ isomorphen Raum $\mathbb{C}^{m \times m}$ der komplexen $(m \times m)$-Matrizen wählen wir die Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} := \|\cdot\|_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^m)}$.

Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$, deren Träger $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in \Omega \,|\, \varphi(x) \neq 0\}}$ eine kompakte Teilmenge von Ω bildet. Nimmt man für Folgen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ den Konvergenzbegriff

$$\varphi_k \to 0 \text{ für } k \to \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, K \subset \Omega \text{ kompakt } \forall\, k \in \mathbb{N}: \ \operatorname{supp}\varphi_k \subset K \quad \text{und} \\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n: \ \sup\limits_{x\in K} \big|\partial_x^\alpha \varphi_k(x)\big| \to 0 \text{ für } k \to \infty \end{cases}$$

hinzu, so wird daraus der Raum der Testfunktionen $\mathscr{D}(\Omega)$.

Ferner tritt noch der Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^{m\times m})$ auf, der aus den auf der glatten Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| = 1\}$ beliebig oft differenzierbaren $\mathbb{R}^{m\times m}$-wertigen Abbildungen besteht.

A.2.2 L^p-Räume

Zugrunde liegt der Maßraum $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$ mit der von den offenen Teilmengen eines Gebiets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ erzeugten Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ und dem Lebesgue-Maß $\lambda : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$. Der L^p-Raum ist für $p \in [1, \infty]$ durch

$$L^p(\Omega) := \big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} \,\big|\, \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \big\}$$

$$\text{mit} \quad \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : \ L^p(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+ , \quad f \mapsto \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1, \infty) , \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} |f(x)| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

definiert. Seine Elemente, obwohl im Sprachgebrauch als Funktionen bezeichnet, sind im Sinne von Äquivalenzklassen zu verstehen, wobei eine Äquivalenzklasse von all denjenigen Funktionen gebildet wird, die bezüglich des Lebesgue-Maßes fast überall übereinstimmen. Auf dem Produktraum $L^p(\Omega)^m := (L^p(\Omega))^m$ wählen wir (vergleiche Anhang A.1) die mit p verträgliche Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)^m} : L^p(\Omega)^m \to \mathbb{R}_0^+ ,\ f \mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)^m;\,p}$.

Satz A.1 (Höldersche Ungleichung). *Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wobei $\frac{1}{\infty} := 0$ ist. Sind $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)^m$, so ist $fg \in L^1(\Omega)^m$ und erfüllt die Abschätzung $\|fg\|_{L^1(\Omega)^m} \leq c\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)^m}$ mit einer von f und g unabhängigen Konstanten $c \in \mathbb{R}^+$.*

Beweis: Für $m = 1$ ist dies die Höldersche Ungleichung, wie sie etwa in [Wer11, Satz I.1.10] zu finden ist. Die Konstante c kann in diesem Fall als 1 gewählt werden. Für $m \geq 2$ beruht die Konstante c auf der Äquivalenz von Normen auf dem Produktraum (vergleiche Anhang A.1):

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)^m} = \sum_{j=1}^m \|fg_j\|_{L^1(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^m \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g_j\|_{L^q(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)^m;\,1} \leq c\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)^m}. \qquad \square$$

Der Raum der lokal p-integrierbaren Funktionen ist definiert als

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} \,\Big|\, \forall\, K \subset \Omega \text{ kompakt} : \int_K |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty \Big\} .$$

Auf dem Raum $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, der eine Obermenge aller $L^p(\Omega)$-Räume bildet, wird der Begriff der schwachen Differenzierbarkeit eingeführt: Existiert zu einer Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und einem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ eine Funktion $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f(x)\partial_x^\alpha \varphi(x) \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) ,$$

so heißt $\partial_x^\alpha f := g$ die schwache Ableitung von f der Ordnung α.

Der Raum $L^2(\Omega)$ bildet mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)} : \; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}\,, \quad (f,g) \mapsto \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

einen Hilbertraum. Für $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}$ definieren wir dazu den gewichteten L^2-Raum

$$L^2_s(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$$

(vergleiche [BS07, S. 7]) mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_s(\mathbb{R}^n)} := \langle (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot, (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Satz A.2 (Helmholtz-Zerlegung). *Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt die orthogonale Zerlegung*

$$L^2(\mathbb{R}^n)^n = \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)} \oplus_\perp \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{mit}$$
$$\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^n)} := \overline{\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \mid \exists\, g \in H^1(\mathbb{R}^n) : \; f = \nabla g \}} \;\; \textit{und} \;\; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} f = 0 \}\,.$$

(Siehe [Gal11, S. 145, Theorem III.1.1].)

In der Definition des L^p-Raums kann an die Stelle des Wertebereichs $\mathbb{C}$ auch ein beliebiger Banachraum X treten, wobei dann die Norm durch $f \mapsto \|\|f\|_X\|_{L^p(\Omega)}$ gegeben ist. Den Hintergrund hierzu bildet die Theorie des Bochner-Integrals (siehe [Are11, Abschnitt 1.1]), mit der beispielsweise der Ausdruck $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine geeignete Funktion $f : \Omega \to X$ erklärt werden kann. Wir benötigen speziell nur den Raum der lokal integrierbaren Funktionen mit Werten in X, der definiert ist als

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, X) := \Big\{ f : \Omega \to X \text{ messbar} \mid \forall\, K \subset \Omega \text{ kompakt} : \int_K \|f(x)\|_X \,\mathrm{d}x < \infty \Big\}\,.$$

A.2.3 Distributionen

Die Elemente des topologischen Dualraums zum Raum der Testfunktionen $\mathscr{D}(\Omega)$ (siehe Anhang A.2.1)

$$\mathscr{D}'(\Omega) := \{ f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \mid f \text{ linear und stetig} \}$$

heißen Distributionen. Allgemeiner kann man als Wertebereich statt $\mathbb{C}$ auch einen beliebigen Banachraum X zulassen und erhält so die Menge

$$\mathscr{D}'(\Omega, X) := \{ f : \mathscr{D}(\Omega) \to X \mid f \text{ linear und stetig} \}$$

der X-wertigen Distributionen. Ist $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, X)$, so stellt die Abbildung

$$[h] : \; \mathscr{D}(\Omega) \to X\,, \quad \varphi \mapsto \int_\Omega h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei das Integral gegebenenfalls als ein Bochner-Integral zu verstehen ist, eine Distribution dar und heißt die von h erzeugte Distribution. Eine Distribution $f \in \mathscr{D}'(\Omega, X)$ heißt regulär, wenn ein $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, X)$ mit $f = [h]$ existiert. Nicht jede Distribution ist regulär, so etwa die Diracsche Delta-Distribution $\delta_a : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \varphi(a)$ zu $a \in \mathbb{R}$ (siehe [Wal94, S. 23]). Distributionen sind beliebig oft differenzierbar, da die distributionelle Ableitung zu einem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ für $f \in \mathscr{D}'(\Omega, X)$ per Definition durch

$$\partial^\alpha f : \; \mathscr{D}(\Omega) \to X\,, \quad \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} f(\partial_x^\alpha \varphi)$$

gegeben ist (siehe [Wal94, S. 63]). Auch kann eine Distribution $f \in \mathscr{D}'(\Omega, X)$ mit einer Funktion $g \in C^\infty(\Omega)$ multipliziert werden, indem man

$$g \cdot f : \ \mathscr{D}(\Omega) \to X\,, \quad \varphi \mapsto f(g\varphi)$$

setzt (siehe [Wal94, S. 29]). Den Träger einer Distribution $f \in \mathscr{D}'(\Omega, X)$ bildet die Menge

$$\operatorname{supp} f := \{x \in \Omega \mid \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ mit } \operatorname{supp}\varphi \subset B(x,\varepsilon) : \ f(\varphi) \neq 0\}$$

(siehe [Wal94, S. 32]). Alle Distributionen aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R}) = \mathscr{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, deren Träger nach links hin beschränkt sind, werden im Raum der rechtsseitigen Distributionen

$$\mathscr{D}'_R(\mathbb{R}) := \{f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \mid \exists\, b \in \mathbb{R} : \ \operatorname{supp} f \subset [b, \infty)\}$$

zusammengefasst (siehe [Zem65, 5.6]). Beispiele für rechtsseitige Distributionen sind die von der Heaviside-Funktion

$$H : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0\,, \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

erzeugte Distribution $[H]$, die um $a \in \mathbb{R}$ verschobene Variante $[H(\cdot - a)]$ und auch all ihre Ableitungen wie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[H(\cdot - a)] = \delta_a$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[H(\cdot - a)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_a$. Die Faltung zweier rechtsseitiger Distributionen $f, g \in \mathscr{D}'_R(\mathbb{R})$ ist durch

$$f * g : \ \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}\,, \quad \varphi \mapsto f(G_\varphi) \quad \text{mit } G_\varphi(t) := g\big(\varphi(t + \cdot)\big) \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

definiert (siehe [Zem65, Kap. 5]).

A.2.4 Schwartzraum und Raum der temperierten Distributionen

Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \Big\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \forall\, k \in \mathbb{N}_0\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^k)|\partial_x^\alpha \varphi(x)| < \infty\Big\}\,.$$

Ein Beispiel für eine Schwartzfunktion ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x)e^{-\sigma|x|^2}$ für $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und ein Polynom $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ (siehe [Wal94, S. 168]). Für alle $p \in [1, \infty)$ liegt $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ (siehe [Wer11, S. 214]). Der Schwartzraum wird mit der von den Halbnormen $\{\varphi \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n}(1 + |x|^k)|\partial_x^\alpha \varphi(x)| \mid k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ erzeugten Topologie versehen (siehe [Wer11, S. 399]). Den topologischen Dualraum zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ bildet dann der Raum der temperierten Distributionen

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \mid f \text{ linear und stetig}\}\,,$$

der mit der von der Familie $\{f \mapsto |f(\varphi)| \mid \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\}$ erzeugten schwach-*-Topologie ausgestattet wird. Es gilt $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und damit $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Für eine temperierte Distribution $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\partial^\alpha f : \ \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\,, \quad \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} f(\partial_x^\alpha \varphi)$$

die distributionelle Ableitung. Das Produkt von $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit einer Funktion g aus der Menge $\{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists\, c \in \mathbb{R}^+\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : |\partial^\alpha g(x)| \leq c(1 + |x|^k)\}$ ist

$$g \cdot f : \ \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\,, \quad \varphi \mapsto f(g\varphi)$$

(siehe [Wal94, S. 176]). Die Schreibweise $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und ein $p \in [1,\infty]$ bedeutet, dass f eine reguläre temperierte Distribution ist, d. h.

$$\exists\, h \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n):\quad f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Andersherum kann eine beliebige Funktion $h \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ über $[h](\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ mit einer temperierten Distribution $[h] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ identifiziert werden.

A.2.5 Besselpotentialräume

Für $s \in \mathbb{R}$ ist der Besselpotentialraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}^n) &:= \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ \text{mit}\quad \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}:\ & H^s(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_0^+\,,\quad f \mapsto \big\|\mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}f\big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

definiert (vergleiche [Tri83, S. 26]), wobei $\mathscr{F}$ die Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet (siehe Anhang A.3). Auf dem Produktraum $H^s(\mathbb{R}^n)^m := (H^s(\mathbb{R}^n))^m$ wählen wir die Norm $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m} : H^s(\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}_0^+\,,\ f \mapsto \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)^m;\,2}\,.$

A.2.6 Sobolevräume

Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$ ist der Sobolevraum $W^{s,p}(\Omega)$ durch

$$\begin{aligned} W^{s,p}(\Omega) &:= \{f \in L^p(\Omega) \mid \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } 0 \le |\alpha| \le s:\ \partial_x^\alpha f \in L^p(\Omega)\} \\ \text{mit}\quad \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}:\ & W^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+\,,\quad f \mapsto \begin{cases} \Big(\sum\limits_{0\le|\alpha|\le s} \|\partial_x^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1,\infty)\,, \\ \max\limits_{0\le|\alpha|\le s} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{für } p = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

definiert (siehe [AF03, S. 60]). Darin bezeichnet ∂_x^α die schwache Ableitung (siehe Anhang A.2.2). Auf dem Produktraum $W^{s,p}(\Omega)^m := (W^{s,p}(\Omega))^m$ wählen wir die mit p verträgliche Norm $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)^m} : W^{s,p}(\Omega)^m \to \mathbb{R}_0^+\,,\ f \mapsto \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)^m;\,p}\,.$ Der Sobolevraum $W^{s,2}(\Omega)$ bildet zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{W^{s,2}(\Omega)}:\ W^{s,2}(\Omega)\times W^{s,2}(\Omega) \to \mathbb{C}\,,\quad (f,g) \mapsto \sum_{0\le|\alpha|\le s} \langle \partial_x^\alpha f, \partial_x^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)}$$

einen Hilbertraum (siehe [AF03, Theorem 3.6]).

A.2.7 Besovräume

Für $s \in \mathbb{R}$ und $p,q \in [1,\infty]$ sei $l^s_q(L^p(\mathbb{R}^n)) := \{(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset L^p(\mathbb{R}^n) \mid \|(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\|_{l^s_q(L^p(\mathbb{R}^n))} < \infty\}$ mit der Norm

$$\|\cdot\|_{l^s_q(L^p(\mathbb{R}^n))}:\ l^s_q(L^p(\mathbb{R}^n)) \to \mathbb{R}_0^+\,,\quad (f_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \mapsto \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{ksq}\|f_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{\frac{1}{q}} & \text{für } q \in [1,\infty)\,, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{ks}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & \text{für } q = \infty \end{cases}$$

versehen. Man wähle eine Funktion $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften $\psi(\xi) \ge 0$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$\operatorname{supp}\psi \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$, $\psi(\xi) > 0$ für $\frac{1}{\sqrt{2}} < |\xi| < \sqrt{2}$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2^{-k}\xi) = 1$ für $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, und definiere eine Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch $\psi_k(\xi) := \psi(2^{-k}\xi)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\psi_0 := 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \psi(2^{-j}\xi)$. Für $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1, \infty]$ ist dann der Besovraum $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$$
$$\text{mit} \quad \|\cdot\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} : \; B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+_0 \,, \quad f \mapsto \left\|(\mathscr{F}^{-1}\psi_k \mathscr{F} f)_{k\in\mathbb{N}_0}\right\|_{l^s_q(L^p(\mathbb{R}^n))}$$

gegeben, wobei $\mathscr{F}$ die Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet (siehe Anhang A.3). Dies ist die Definition des Besovraums nach [Tri83, S. 45]. Sie entspricht denjenigen in [BL76] und [Tri78] bis auf Normenäquivalenz (siehe [BL76, S. 151] und [Tri78, S. 172], wobei man $\mathscr{F}^{-1}\psi_k \mathscr{F} f = f * \varphi_k$ mit $\varphi_k := \mathscr{F}^{-1}\psi_k$ beachte) und ist, ebenfalls bis auf Normenäquivalenz, unabhängig von der Wahl der Funktion ψ. Auf dem Produktraum $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)^m := B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)^m$ wählen wir die mit q verträgliche Norm $\|\cdot\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)^m} : B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}^+_0 \,,\; f \mapsto \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)^m;\, q}$.

A.2.8 Einbettungssätze

Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, so schreiben wir $X \hookrightarrow Y$, falls X in Y stetig eingebettet werden kann, d. h. X ist eine Teilmenge von Y und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$, sodass $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt. $X = Y$ bedeutet, dass sowohl $X \hookrightarrow Y$ als auch $Y \hookrightarrow X$ ist. In diesem Fall stimmen X und Y als Mengen überein und die Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ sind äquivalent. In der vorliegenden Arbeit werden die folgenden Einbettungen benötigt:

Satz A.3 (Einbettungen zwischen Besselpotential-, Besov- und Sobolevräumen).

(i) Für $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $s_1 > s_2$ ist $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Für $s \in \mathbb{N}_0$ ist $B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Für $s \in \mathbb{N}$ ist $B^s_{1,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{s,1}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Für $s_1 \in \mathbb{N}_0$, $s_2 \in \mathbb{R}$ mit $s_1 > s_2$ und $p \in (1, \infty)$ ist $W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_2}_{p,p}(\mathbb{R}^n)$.

(Siehe: (i) [Tri83, S. 26]; (ii) [Tri78, S. 172, S. 177] oder [Tri83, S. 88], wobei man jeweils die dort vorliegende Definition der Räume beachte; (iii) [Tri83, S. 90, (10)]; (iv) [Tri78, S. 180, (9)].)

Satz A.4 (Sobolevscher Einbettungssatz). *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das die Kegelbedingung erfüllt. Es seien $s \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$, und es gelte entweder $mp > n$ oder $m = n$ und $p = 1$.*

(i) Es ist $W^{s+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^s_b(\Omega)$. Wenn das Gebiet Ω beschränkt ist und die starke lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt, gilt auch $W^{s+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^s(\overline{\Omega})$.

(ii) Für alle $q \in [p, \infty]$ ist $W^{s+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,q}(\Omega)$. (Siehe [AF03, Theorem 4.12].)

Die Räume $C^s_b(\Omega) := \{f \in C^s(\Omega) \,|\, \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n_0,\, |\alpha| \leq s : \|\partial^\alpha_x f\|_\infty < \infty\}$ und $C^s(\overline{\Omega})$ sind dabei jeweils mit der Norm $f \mapsto \max_{0\leq|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha_x f\|_\infty$ versehen, wobei $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ die Supremumsnorm bezeichnet.

A.2.9 Interpolationsräume

Im Folgenden seien X_0, X_1, Y_0, Y_1 komplexe Banachräume. Zwei solcher Räume bilden ein Interpolationspaar (X_0, X_1), wenn ein Hausdorffraum Z mit $X_0 \hookrightarrow Z$ und $X_1 \hookrightarrow Z$ existiert. In diesem Fall stellen auch die Räume $X_0 \cap X_1 := \{z \in Z \,|\, z \in X_0 \wedge z \in X_1\}$ versehen mit der Norm

$z \mapsto \|z\|_{X_0 \cap X_1} := \max\{\|z\|_{X_0}, \|z\|_{X_1}\}$, und $X_0 + X_1 := \{z \in Z \,|\, \exists\, x_0 \in X_0\ \exists\, x_1 \in X_1 : z = x_0 + x_1\}$ versehen mit der Norm $z \mapsto \|z\|_{X_0+X_1} := \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \,|\, x_0 \in X_0,\, x_1 \in X_1 : z = x_0 + x_1\}$ Banachräume dar. Die Schreibweise $T \in \mathscr{L}(X_0, Y_0) \cap \mathscr{L}(X_1, Y_1)$ bedeutet, dass $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ ein linearer Operator mit $T|_{X_0} \in \mathscr{L}(X_0, Y_0)$ und $T|_{X_1} \in \mathscr{L}(X_1, Y_1)$ ist.

Ein Interpolationsfunktor ist eine Abbildung $[\cdot,\cdot]$, die jedem Interpolationspaar (X_0, X_1) einen Banachraum $[X_0, X_1]$, den Interpolationsraum zwischen X_0 und X_1, zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt: Für alle Interpolationspaare (X_0, X_1) gilt $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow [X_0, X_1] \hookrightarrow X_0 + X_1$, und sind (X_0, X_1), (Y_0, Y_1) zwei Interpolationspaare und ist $T \in \mathscr{L}(X_0, Y_0) \cap \mathscr{L}(X_1, Y_1)$, so ist auch $T \in \mathscr{L}([X_0, X_1], [Y_0, Y_1])$. Ein Interpolationsfunktor $[\cdot,\cdot]$ heißt exakt vom Typ $\theta \in [0,1]$, falls

$$\|T\|_{\mathscr{L}([X_0,X_1],[Y_0,Y_1])} \le \|T\|^{1-\theta}_{\mathscr{L}(X_0,Y_0)} \|T\|^{\theta}_{\mathscr{L}(X_1,Y_1)}$$

für alle Interpolationspaare (X_0, X_1), (Y_0, Y_1) und jeden Operator $T \in \mathscr{L}(X_0, Y_0) \cap \mathscr{L}(X_1, Y_1)$ gilt. Verschiedene Methoden führen auf eine explizite Beschreibung eines Interpolationsfunktors. Bei der sogenannten komplexen Interpolation geht man wie folgt vor: Für $S := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ und ein Interpolationspaar (X_0, X_1) ist

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(X_0, X_1) := \{f : \overline{S} \to X_0 + X_1 \text{ stetig und beschränkt} \,|\\ &\qquad\qquad f|_S : S \to X_0 + X_1 \text{ holomorph}, \ t \mapsto f(j + it) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, X_j) \text{ für } j \in \{0,1\}\ \}\\ &\text{mit} \quad \|\cdot\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} : \ \mathcal{F}(X_0, X_1) \to \mathbb{R}_0^+ , \ \ f \mapsto \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{X_0} , \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{X_1}\} \end{aligned}$$

ein Banachraum. Setzt man für $\theta \in (0,1)$

$$\begin{aligned} &[X_0, X_1]_\theta := \{x \in X_0 + X_1 \,|\, \exists\, f \in \mathcal{F}(X_0, X_1) \text{ mit } x = f(\theta)\}\\ &\text{mit} \quad \|\cdot\|_{[X_0,X_1]_\theta} : \ [X_0, X_1]_\theta \to \mathbb{R}_0^+ , \ \ x \mapsto \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \,|\, f \in \mathcal{F}(X_0, X_1) \text{ mit } f(\theta) = x\} , \end{aligned}$$

so handelt es sich bei der Abbildung

$$[\cdot,\cdot]_\theta : \ (X_0, X_1) \mapsto [X_0, X_1]_\theta$$

um einen exakten Interpolationsfunktor vom Typ θ (siehe [BL76, Theorem 4.1.2] oder [Tri78, S. 59]). Es schließt sich die Frage nach einer handhabbareren Beschreibung des sich ergebenden Interpolationsraumes an. Gesucht ist ein Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ mit $[X_0, X_1]_\theta = X$, wobei die Identität in Form der Mengengleichheit und Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{[X_0,X_1]_\theta}$ und $\|\cdot\|_X$ zu verstehen ist. Für L^p- und Besselpotentialräume gibt der folgende Satz Auskunft über derartige Zusammenhänge.

Satz A.5 (Interpolationsräume). *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und es gelte die Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$.*

(i) Für $p_0 \in [1,\infty)$, $p_1 \in [1,\infty]$ und $\theta \in (0,1)$ ist

$$\big[L^{p_0}(\mathbb{R}^n)^m, L^{p_1}(\mathbb{R}^n)^m\big]_\theta = L^p(\mathbb{R}^n)^m \quad \textit{mit} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} .$$

(ii) Für $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1,\infty]$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ mit $s_0 \neq s_1$ und $\theta \in (0,1)$ ist

$$\big[B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n)^m, B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)^m\big]_\theta = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)^m ,$$

$$\textit{wobei} \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1 , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \textit{und} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad \textit{gelten.}$$

Beweis: Ist $m = 1$, so finden wir die Aussage (i) in [BL76, Theorem 5.1.2] oder [Tri78, S. 128, Theorem; S. 129, Remark 3], und die Aussage (ii) in [BL76, Theorem 6.4.5, (6)] oder [Tri83, S. 69]. Wie [Ama95, Proposition 2.3.3] zeigt, sind die Interpolationsresultate auf Produkträume übertragbar. Somit sind die Aussagen auch für $m \ge 2$ gültig. □

A.3 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation $\mathscr{F}$ und die inverse Fourier-Transformation $\mathscr{F}^{-1}$ sind für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(\mathscr{F}\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}x \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n$$
$$\text{und} \quad (\mathscr{F}^{-1}\varphi)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}\xi \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

definiert. Sie sind linear, stetig und bijektiv von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{F}^{-1}$ beschreibt gerade die Umkehrabbildung von $\mathscr{F}$. Die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation lassen sich zu Abbildungen auf dem Raum der temperierten Distributionen erweitern, indem man

$$\mathscr{F}: \ \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \ f \mapsto \mathscr{F}f \qquad \text{und} \qquad \mathscr{F}^{-1}: \ \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \ f \mapsto \mathscr{F}^{-1}f$$

für $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(\mathscr{F}f)(\varphi) := f(\mathscr{F}\varphi) \qquad \text{und} \qquad (\mathscr{F}^{-1}f)(\varphi) := f(\mathscr{F}^{-1}\varphi) \qquad \text{für } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

definiert (siehe beispielsweise [Wal94, § 11]).

Satz A.6 (Fourier-Transformation in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$).

(i) Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \mathscr{F}f$ und die inverse Fourier-Transformation $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \mathscr{F}^{-1}f$ sind linear, stetig und bijektiv und zueinander invers, d. h. es gilt $\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F} = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)}$.

(ii) Für $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha \mathscr{F}f$. (Siehe [Wal94, S. 179 f.].)

Wenn man den Definitionsbereich $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ der Fourier-Transformation und der inversen Fourier-Transformation auf Teilmengen wie $L^1(\mathbb{R}^n)$ oder $L^2(\mathbb{R}^n)$ (unter Identifikation einer $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$-Funktion mit der von ihr erzeugten regulären Distribution) einschränkt, ergeben sich weitere wichtige Aussagen.

Satz A.7 (Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$, Lemma von Riemann-Lebesgue). *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gelten die Darstellungen*

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}x \quad \textit{und} \quad (\mathscr{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}\xi\,.$$

Sowohl $\mathscr{F}f$ als auch $\mathscr{F}^{-1}f$ liegen im Raum $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) := \{g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \,|\, g(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty\}$ und es gilt $\|\mathscr{F}f\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ und $\|\mathscr{F}^{-1}f\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, d. h. die Abbildungen $\mathscr{F}|_{L^1(\mathbb{R}^n)} : L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{F}^{-1}|_{L^1(\mathbb{R}^n)} : L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ sind stetig.

(Siehe [Wer11, Satz V.2.2].)

Satz A.8 (Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, Satz von Plancherel). *Die Fourier-Transformation ist ein isometrischer Automorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, d. h. die Abbildung $\mathscr{F}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv, ihre Umkehrabbildung ist $\mathscr{F}^{-1}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ und für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|\mathscr{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.* (Siehe [Wer11, S. 218].)

Satz A.9 (Fourier-Transformation auf $H^s(\mathbb{R}^n)$). *Es sei $s \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathscr{F}|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ stellt einen isometrischen Isomorphismus zwischen dem Besselpotentialraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ und dem gewichteten L^2-Raum $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ dar, d. h. die Abbildung $\mathscr{F}|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2_s(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv, ihre Umkehrabbildung ist $\mathscr{F}^{-1}|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)} : L^2_s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ und für $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|\mathscr{F}f\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.*

Beweis: Die Aussage ist eine einfache Konsequenz aus dem Satz von Plancherel A.8 und der Definition der Räume $H^s(\mathbb{R}^n)$ und $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ (siehe Anhang A.2). □

Die folgende Ungleichung von Hausdorff-Young kann als eine Verallgemeinerung des Lemmas von Riemann-Lebesgue und des Satzes von Plancherel angesehen werden.

Satz A.10 (Fourier-Transformation auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, Ungleichung von Hausdorff-Young). *Es seien $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{F}f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und es gilt die Abschätzung $\|\mathscr{F}f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, d. h. die Abbildung $\mathscr{F}|_{L^p(\mathbb{R}^n)} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.* (Siehe [Wer11, Satz V.2.10].)

Für $f = (f_1, \ldots, f_m)^\mathsf{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)^m$ ist die Fourier-Transformation komponentenweise anzuwenden, d. h. $\mathscr{F}f := (\mathscr{F}f_1, \ldots, \mathscr{F}f_m)^\mathsf{T}$. Die Schreibweisen $\partial_x^k f$, $\mathscr{F}\partial_x^k f$, $\|\partial_x^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m}$ und $\|\mathscr{F}(\partial_x^k f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ haben wir auf Seite 42 definiert. Es gilt die folgende technische Abschätzung.

Lemma A.11 (Normen-Abschätzung). *Es seien $k \in \mathbb{N}_0$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1,\infty]$. Dann existieren zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $f \in H^k(\mathbb{R}^n)^m$ mit $\mathscr{F}(\partial_x^k f) \in L^p(\mathbb{R}^n)^m$ gilt:*

$$c_1 \big\||\cdot|^k \mathscr{F}f\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} \leq \big\|\mathscr{F}(\partial_x^k f)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} \leq c_2 \big\||\cdot|^k \mathscr{F}f\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)^m}.$$

Beweis: Wir wollen die Aussage nur für $p \in [1,\infty)$ zeigen, der Beweis für $p = \infty$ verläuft ähnlich. Es bezeichne $|\cdot|_p$ die p-Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m;\,p}$ auf $\mathbb{C}^m$ bzw. $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n;\,p}$ auf $\mathbb{R}^n$ (siehe Anhang A.1). Dann gelten nach Definition

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathscr{F}(\partial_x^k f)\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} = \sum_{|\alpha|=k} \big\|i^{|\alpha|}(\cdot)^\alpha \mathscr{F}f\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{|\alpha|=k} |\xi^\alpha|^p\Big) |(\mathscr{F}f)(\xi)|_p^p \,\mathrm{d}\xi \\
&\text{und} \quad \big\||\cdot|^k \mathscr{F}f\big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)^m} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{pk} |\mathscr{F}f(\xi)|_p^p \,\mathrm{d}\xi\,.
\end{aligned}$$

Die Normen $|\cdot|_p$ und $|\cdot|$ sind äquivalent. Nach dem Multinomialtheorem (mit der Schreibweise $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$) gilt außerdem

$$|\xi|_p^{pk} = \Big(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\Big)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \begin{pmatrix} |\xi_1|^p \\ \vdots \\ |\xi_n|^p \end{pmatrix}^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |\xi^\alpha|^p\,,$$

und für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ ist $\frac{k!}{(k!)^n} \leq \frac{k!}{\alpha!} \leq k!$. Daher existieren zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$c_1 |\xi|^{pk} \leq \sum_{|\alpha|=k} |\xi^\alpha|^p \leq c_2 |\xi|^{pk}$$

gilt. Aus dieser Abschätzung und den zuvor genannten Darstellungen folgt insgesamt die behauptete Ungleichung. □

A.4 Ungleichungen

Lemma A.12 (Youngsche Ungleichung). *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$.*
(Siehe [Eva10, S. 706].)

Lemma A.13 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ ein Hilbertraum. Dann gilt für alle $x, y \in X$: $|\langle x, y\rangle_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X$.* (Siehe [Eva10, S. 720].)

Satz A.14 (Erste und zweite Poincarésche Ungleichung). *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.*

(i) Erste Poincarésche Ungleichung: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}\,.$$

(ii) Zweite Poincarésche Ungleichung: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $u \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\Big\|u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x\Big\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}\,.$$

(Siehe [Eva10, S. 280, S. 290].)

Im Zusammenhang mit den Energieabschätzungen wird der folgende Spezialfall des Lemmas von Grönwall benötigt.

Lemma A.15 (Lemma von Grönwall). *Ist $f \in \mathcal{C}^1([0,\infty), \mathbb{R}_0^+)$ und gilt $f'(t) \leq af(t)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und alle $t \in (0,\infty)$, so folgt $f(t) \leq e^{at}f(0)$ für alle $t \in [0,\infty)$.* (Siehe [Eva10, S. 708].)

Die Abklingraten bei den L^p-L^q-Abschätzungen basieren auf den folgenden Ungleichungen.

Lemma A.16 (Abklingraten). *Es sei $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Es seien $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\int_{\{\xi\in\mathbb{R}^n \,|\, |\xi|\leq b\}} |\xi|^k e^{-a|\xi|^m t}\,\mathrm{d}\xi \leq c\,(1+t)^{-\frac{k+n}{m}}\,.$$

(ii) Es seien $k, m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n,\\ |\xi|\geq 1}} |\xi|^{-k} e^{-a|\xi|^{-m} t} \leq c\,(1+t)^{-\frac{k}{m}}\,.$$

Beweis: (i) Der Flächeninhalt der $(n-1)$-Sphäre vom Radius r ist $\frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, wobei Γ die Gammafunktion bezeichnet. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq b} |\xi|^k e^{-a|\xi|^m t}\,\mathrm{d}\xi &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^b r^{k+n-1} e^{-ar^m t}\,\mathrm{d}r \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{ab^m}\int_0^b r^{k+n-1} e^{-ar^m(1+t)}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{ab^m}\int_0^{b(a(1+t))^{\frac{1}{m}}} \big(a(1+t)\big)^{-\frac{k+n-1}{m}} s^{k+n-1} e^{-s^m} \big(a(1+t)\big)^{-\frac{1}{m}}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{ab^m} a^{-\frac{k+n}{m}} (1+t)^{-\frac{k+n}{m}} \int_0^\infty s^{k+n-1} e^{-s^m}\,\mathrm{d}s = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{ab^m} a^{-\frac{k+n}{m}} \frac{\Gamma(\frac{k+n}{m})}{m} \cdot (1+t)^{-\frac{k+n}{m}}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Für $|\xi| \to \infty$ strebt $\left(1 + \frac{ma}{k|\xi|^m}t\right)^{\frac{k|\xi|^m}{mat}}$ von unten gegen e, also gilt, sofern $|\xi|$ hinreichend groß ist, $1 < \left(1 + \frac{ma}{k|\xi|^m}t\right)^{\frac{k|\xi|^m}{mat}} \leq e$ und damit $e^{-a|\xi|^{-m}t} \leq \left(1 + \frac{ma}{k|\xi|^m}t\right)^{-\frac{k}{m}}$. Daraus folgt

$$\sup_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-k} e^{-a|\xi|^{-m}t} \leq \sup_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-k} \left(1 + \frac{ma}{k|\xi|^m}t\right)^{-\frac{k}{m}} \leq c \sup_{|\xi|\geq 1} \left(|\xi|^m + t\right)^{-\frac{k}{m}} \leq c(1+t)^{-\frac{k}{m}}$$

für eine von a, k und m abhängige Konstante $c \in \mathbb{R}^+$. □

A.5 Halbgruppentheorie

Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ ein Hilbertraum. Eine Operatorfamilie $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(X)$ mit den Eigenschaften $\mathcal{S}(0) = \mathrm{Id}$, $\mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)$ für $s, t \geq 0$ und $\lim_{t\searrow 0} \mathcal{S}(t)x = x$ für $x \in X$ heißt C_0-Halbgruppe. Der durch $\{x \in X \mid \lim_{t\searrow 0} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} \text{ existiert}\} \subset X \to X$, $x \mapsto \lim_{t\searrow 0} \frac{\mathcal{S}(t)x-x}{t}$ gegebene lineare Operator wird infinitesimaler Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ genannt. Ein linearer Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ heißt dissipativ, wenn $\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}x, x\rangle_X \leq 0$ für alle $x \in D(\mathcal{A})$ gilt. (Siehe [Paz83].)

Satz A.17 (Lumer-Phillips). *Es sei $\omega \in \mathbb{R}$. Ein linearer Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$, dessen Definitionsbereich $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ erfüllt, ist genau dann infinitesimaler Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ mit $\|\mathcal{S}(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq e^{\omega t}$ für $t \geq 0$, wenn $\mathcal{A} - \omega\mathrm{Id}$ dissipativ ist und ein $\lambda > \omega$ existiert, sodass $\lambda\mathrm{Id} - \mathcal{A}$ surjektiv ist.* (Siehe [Paz83, S. 14, Theorem 4.3].)

Satz A.18 (Wohlgestelltheit). *Es sei $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ ein infinitesimaler Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$. Für $V_0 \in D(\mathcal{A})$ und $F \in \mathcal{C}^1([0,\infty), X)$ besitzt das Problem*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t) &= \mathcal{A}V(t) + F(t)\,, \quad t \in (0,\infty)\,, \\ V(0) &= V_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), X)$, die für $t \in [0,\infty)$ durch

$$V(t) = \mathcal{S}(t)V_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)F(s)\,\mathrm{d}s$$

gegeben ist. (Siehe [Paz83, S. 109, Corollary 2.11].)

Der Ausdruck $\int_0^t \mathcal{S}(t-s)F(s)\,\mathrm{d}s$ ist im Sinne eines Bochner-Integrals zu verstehen. Wir verwenden die folgenden Eigenschaften des Bochner-Integrals.

Satz A.19 (Eigenschaften des Bochner-Integrals). *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

(i) Eine Funktion $f : I \to X$ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn f messbar ist und $\int_I \|f(t)\|_X\,\mathrm{d}t$ existiert. In diesem Fall gilt $\|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X\,\mathrm{d}t$.

(ii) Es sei $f \in \mathcal{C}^0([0,\infty), X)$ und $F(t) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ für $t \in [0,\infty)$. Dann ist $F \in \mathcal{C}^1([0,\infty), X)$ und es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = f(t)$ für $t \in [0,\infty)$.

(iii) Ist $f \in \mathcal{C}^1([0,\infty), X)$, so gilt $f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s)\,\mathrm{d}s$ für $t \in [0,\infty)$.

(Siehe [Are11, Theorem 1.1.4, Proposition 1.2.2, Proposition 1.2.3].)

A.6 Störungstheorie für Polynome

A.6.1 Hurwitz-Stabilität

Definition A.20 (Hurwitz-stabil, Hurwitz-Matrix). *Es sei $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. P heißt (Hurwitz-)stabil, falls $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda) = 0$ gilt. Gilt $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda) = 0$, so heißt P schwach (Hurwitz-)stabil. Die zu P gehörige Hurwitz-Matrix H ist definiert durch*

$$H := \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_{n-2n+3} & a_{n-2n+1} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_{n-2n+4} & a_{n-2n+2} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_{n-2n+5} & a_{n-2n+3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & a_{n-2n+6} & a_{n-2n+4} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \textit{mit } a_j := 0 \textit{ für } j < 0\,.$$

Satz A.21 (Hurwitz-Kriterium). *Es sei $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und es gelte $a_n > 0$. Dann gilt:*

(i) Das Polynom P ist genau dann stabil, wenn alle führenden Hauptminoren der zugehörigen Hurwitz-Matrix H positiv sind, d. h. wenn $\det(H_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,m}} > 0$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

(ii) Das Polynom P ist genau dann schwach stabil, wenn alle führenden Hauptminoren der zugehörigen Hurwitz-Matrix H nichtnegativ sind, d. h. wenn $\det(H_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,m}} \geq 0$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

(Siehe [HP05, Theorem 3.4.71] für (i) und [Yan02] für (ii).)

A.6.2 Beschreibung von Nullstellen

Es geht um die Beschreibung der Nullstellen eines von $\zeta \in \mathbb{C}$ abhängigen Polynoms der Form

$$p(\zeta, \cdot): \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\zeta) z^j\,,$$

wobei $a_0, \dots, a_{n-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen sind. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ besitzt $p(\zeta, \cdot)$ als Polynom n-ten Grades maximal n paarweise verschiedene Nullstellen. Sofern ζ nur über den reellen Zahlen variiert, sind die Nullstellen als stetige Funktionen darstellbar.

Satz A.22 (Stetigkeit). *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$. Zu $\xi \in \mathrm{I}$ sei $p(\xi, \cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\xi) z^j$. Dann existieren n stetige Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ aus $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, sodass für alle $\xi \in \mathrm{I}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt: $p(\xi, z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j(\xi))$.*

(Siehe [HP05, Proposition 4.1.19] oder [Kat66, S. 109, Theorem 5.2].)

Die tatsächliche Anzahl der paarweise verschiedenen Nullstellen kann mit ζ variieren. Ein Punkt $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ heißt kritischer Punkt von p, wenn gilt:

$$\exists\, \zeta \in \mathbb{C}: \ \#\{\lambda \in \mathbb{C} \mid p(\zeta_0, \lambda) = 0\} < \#\{\lambda \in \mathbb{C} \mid p(\zeta, \lambda) = 0\}\,.$$

Das Zeichen # steht hierbei für die Mächtigkeit der Menge. Die Menge aller kritischen Punkte von p bezeichnen wir mit C_p. Die Entwicklung der Nullstellen in einer Umgebung von $\zeta \in \mathbb{C}$ hängt davon ab, ob es sich bei ζ um einen kritischen Punkt handelt oder nicht.

Satz A.23 (Holomorphie). *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zu $\zeta \in \mathbb{C}$ sei $p(\zeta, \cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\zeta) z^j$. Dann gilt:*

(i) Die Menge C_p aller kritischen Punkte von p ist lokal endlich, d. h. für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ ist die Menge $K \cap C_p$ endlich.

(ii) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C} \backslash C_p$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existieren n holomorphe Funktionen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \Omega \to \mathbb{C}$, sodass für $\zeta \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt: $p(\zeta, z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j(\zeta))$. Zwei solcher Funktionen sind entweder identisch oder auf ganz Ω verschieden.
Es sei $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die maximale Menge, sodass die Funktionen λ_j für $j \in J$ paarweise verschieden sind. Wenn es sich bei $p(\zeta, \cdot)$ um das charakteristische Polynom zu einer Matrix $M(\zeta) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ handelt, stellen $\lambda_1(\zeta), \ldots, \lambda_n(\zeta)$ gerade die Eigenwerte von $M(\zeta)$ entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit und $\lambda_j(\zeta)$ für $j \in J$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $M(\zeta)$ dar. In dieser Situation gilt:
Zu $j \in J$ existiert eine holomorphe Funktion $P_j : \Omega \to \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass $P_j(\zeta)$ für $\zeta \in \Omega$ die zu $\lambda_j(\zeta)$ gehörige Eigenprojektion, also die orthogonale Projektion auf den zu $\lambda_j(\zeta)$ gehörigen Eigenraum $\ker(M(\zeta) - \lambda_j(\zeta)\, \mathrm{I}_n)$, darstellt.

(iii) Es sei $\zeta_0 \in C_p$ und $r \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\overline{B(\zeta_0, r)} \cap C_p = \{\zeta_0\}$ gilt. Das Polynom $p(\zeta_0, \cdot)$ besitzt m paarweise verschiedene Nullstellen $\eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathbb{C}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Dabei weist die Nullstelle η_j für $j \in \{1, \ldots, m\}$ die Vielfachheit $\alpha_j \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = n$ auf. Es gilt: Zu $j \in \{1, \ldots, m\}$ existieren ein $\beta_j \in \mathbb{N}$ mit $\beta_j \leq \alpha_j$ und dazu $q_{j,1}, \ldots, q_{j,\beta_j} \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{\beta_j} q_{j,k} = \alpha_j$ sowie β_j holomorphe Funktionen $F_{j,k} : B(0, r^{1/q_{j,k}}) \to \mathbb{C}$ für $k \in \{1, \ldots, \beta_j\}$ mit $F_{j,k}(0) = \eta_j$, sodass für alle $\zeta \in B(\zeta_0, r)$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$p(\zeta, z) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{\beta_j} \prod_{l=1}^{q_{j,k}} (z - \lambda_{j,k,l}(\zeta)) \quad \textit{mit} \quad \lambda_{j,k,l}(\zeta) := F_{j,k}\Big(|\zeta - \zeta_0|^{\frac{1}{q_{j,k}}} e^{\frac{2l\pi i}{q_{j,k}}} e^{\frac{i \arg(\zeta - \zeta_0)}{q_{j,k}}} \Big),$$

wobei man $\arg(\zeta - \zeta_0)$ aus $[0, 2\pi)$ wähle.

(Siehe: (i) [HP05, Theorem 4.1.14]; (ii) [HP05, Theorem 4.1.14] und [Kat66, S. 68]; (iii) [HP05, S. 379-382] und [Kat66, S. 63-66].)

Gilt $q_{j,k} = 1$, so ist $\lambda_{j,k,q_{j,k}}$ in $B(\zeta_0, r)$ holomorph. Ist $q_{j,k} \geq 2$, so nennt man die Menge $\{\lambda_{j,k,l} \,|\, l \in \{1, \ldots, q_{j,k}\}\}$ einen Zyklus und dazu ζ_0 einen Verzweigungspunkt der Ordnung $q_{j,k} - 1$. Eine Nullstelle der Vielfachheit $\alpha_j \geq 2$ kann maximal einen Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha_j - 1$ hervorrufen (vergleiche [Kat66, S. 71]). Ein Zyklus beschreibt eine $q_{j,k}$-wertige analytische Funktion und die Elemente des Zyklus stehen für einen Zweig dieser Funktion. Die Menge aller von η_j ausgehenden Zyklen $\{\lambda_{j,k,l} \,|\, k \in \{1, \ldots, \beta_j\}, l \in \{1, \ldots, q_{j,k}\}\}$ heißt η_j-Gruppe. Ist $F_{j,k}(\zeta) = \eta_j + \sum_{s=1}^{\infty} f_{j,k,s} \zeta^l$ mit $(f_{j,k,s})_{s \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ die Potenzreihendarstellung der holomorphen Funktion $F_{j,k}$ in $B(0, r^{1/q_{j,k}})$, so handelt es sich bei $\lambda_{j,k,(\cdot)}$ formal um eine Newton-Puiseux-Reihe in $(\zeta - \zeta_0)$ von der Gestalt

$$\lambda_{j,k,(\cdot)}(\zeta) = F_{j,k}\Big((\zeta - \zeta_0)^{\frac{1}{q_{j,k}}} \Big) = \eta_j + \sum_{s=1}^{\infty} f_{j,k,s} (\zeta - \zeta_0)^{\frac{s}{q_{j,k}}} .$$

Die Koeffizienten $f_{j,k,1}$, $f_{j,k,2}$ usw. lassen sich mithilfe von Newton-Polygonen bestimmen.

A.6.3 Newton-Polygone und Newton-Puiseux-Reihen

Wir möchten das Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten einer Newton-Puiseux-Reihe über Newton-Polygone kurz vorstellen. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf [Wal62].

Für $n \in \mathbb{N}$ und ein Symbol ζ sei $\mathbb{C}[\zeta^{\frac{1}{n}}]'$ die Menge aller formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ in der Unbestimmten $\zeta^{\frac{1}{n}}$. $\mathbb{C}(\zeta^{\frac{1}{n}})'$ bezeichne den Quotientenkörper von $\mathbb{C}[\zeta^{\frac{1}{n}}]'$ und es sei $\mathbb{C}(\zeta)^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}(\zeta^{\frac{1}{n}})'$. Die Menge aller formalen Polynome in der mit dem Symbol λ bezeichneten Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}(\zeta)^*$ wird mit $\mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda]$ notiert. Ein zentrales Resultat besagt nun, dass $\mathbb{C}(\zeta)^*$ algebraisch abgeschlossen ist. Dies bedeutet, dass für jedes Element $p(\zeta,\lambda)$ aus $\big(\mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda]\big)\backslash\mathbb{C}(\zeta)^*$ ein Element $\lambda(\zeta) \in \mathbb{C}(\zeta)^*$ existiert, sodass $p(\zeta,\lambda(\zeta)) = 0$ ist. Der Beweis dieser Aussage kann mithilfe sogenannter Newton-Polygone wie in [Wal62, S. 98 ff.] erfolgen und liefert dabei ein explizites Verfahren zur Konstruktion der Nullstellen in Form einer Newton-Puiseux-Reihe

$$\lambda(\zeta) = \sum_{k=p}^{\infty} \lambda_{\frac{k}{n}} \zeta^{\frac{k}{n}} \quad \text{für ein } p \in \mathbb{Z}\,, \text{ ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda_{\frac{k}{n}} \in \mathbb{C}\,.$$

Die iterative Berechnung der einzelnen Glieder vollzieht sich wie folgt: Es sollen für ein Element $p(\zeta,\lambda) \in \mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda]$, welches wir der Einfachheit halber vom Grad $d \in \mathbb{N}$ und von der Form

$$p(\zeta,\lambda) = \sum_{m=0}^{d} \sum_{l=0}^{d_m} a_{m,l}\zeta^l\lambda^m \quad \text{mit } d_m \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a_{m,l} \in \mathbb{C} \text{ für } m \in \{0,\dots,d\} \text{ und } l \in \{0,\dots,d_m\}$$

annehmen, die Nullstellen $\lambda_j(\zeta)$ für $j \in \{1,\dots,d\}$ in der Art

$$\begin{aligned}\lambda_j(\zeta) &= \lambda_{j,\gamma_{j,1}}\zeta^{\gamma_{j,1}} + \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}}\zeta^{\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} + \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}}\zeta^{\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} + \dots \\ &= \zeta^{\gamma_{j,1}}\big(\lambda_{j,\gamma_{j,1}} + \lambda_j^{(\gamma_{j,1})}(\zeta)\big) \quad \text{mit} \quad \lambda_j^{(\gamma_{j,1})}(\zeta) := \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}}\zeta^{\gamma_{j,2}} + \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}}\zeta^{\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} + \dots\end{aligned}$$

bestimmt werden. Gesucht sind die Exponenten $\gamma_{j,1}$ aus $\mathbb{Q}$ und $\gamma_{j,2}$, $\gamma_{j,3}$ usw. aus $\mathbb{Q}^+$ sowie die zugehörigen Koeffizienten $\lambda_{j,\gamma_{j,1}}$, $\lambda_{j,\gamma_{j,2}}$, $\lambda_{j,\gamma_{j,3}}$ usw. aus $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Alle in $p(\zeta,\lambda)$ auftretenden Terme sind von der Form $a_{m,l}\zeta^l\lambda^m$. Zu jedem $a_{m,l} \neq 0$ wird der entsprechende Punkt (m,l) in ein Koordinatensystem eingetragen. Die Abbildung A.1 zeigt hierzu ein Beispiel. Die konvexe Hülle all dieser Punkte heißt Newton-Polygon, das wir schraffiert darstellen. Das Newton-Polygon wird durch einen Polygonzug nach unten hin beschränkt. Dieser setzt sich aus einzelnen Geradenabschnitten, den Segmenten $S_1,\dots,S_s$ für ein $s \in \{1,\dots,d\}$ zusammen, wobei jedes Segment aus zwei benachbarten Eckpunkten und deren Verbindungsstrecke besteht. Wir greifen ein solches Segment $S \in \{S_1,\dots,S_s\}$ heraus. Die Gerade, auf der das Segment liegt, besitzt die Steigung γ und schneidet die vertikale l-Achse in einem Punkt $(0,\beta)$. Die Länge der Projektion des Segments auf die horizontale m-Achse entspricht der Mächtigkeit der Menge $\{j \in \{1,\dots,d\} \mid \gamma_{j,1} = -\gamma\}$. Man wählt nun entsprechend viele und noch nicht im Zusammenhang mit einem anderen Segment vergebene Indizes j aus. Für diese setzt man $\gamma_{j,1} := -\gamma$ und $\beta_{j,1} := \beta$. Die zugehörigen Koeffizienten $\lambda_{j,\gamma_{j,1}}$ berechnen sich aus

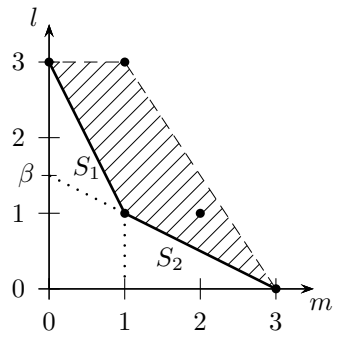

Abbildung A.1: Newton-Polygon zu $\lambda^3 + 3\zeta\lambda^2 + (\zeta^3 + 2\zeta)\lambda + 5\zeta^3$

$$\sum_{(m,l)\in S} a_{m,l}\big(\lambda_{j,\gamma_{j,1}}\big)^m = 0\,,$$

wobei Nulllösungen ausgeschlossen werden. Auf diese Weise verfährt man mit jedem der Segmente $S_1, \ldots, S_s$ und erhält so die Exponenten $\gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{d,1}$ und Koeffizienten $\lambda_{1,\gamma_{1,1}}, \ldots, \lambda_{d,\gamma_{d,1}}$. Um $\gamma_{j,2}$ und $\lambda_{j,\gamma_{j,2}}$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$ zu bestimmen, wird das Verfahren für

$$p_{j,\gamma_{j,1}}(\zeta, \lambda_j^{(\gamma_{j,1})}) := \zeta^{-\beta_{j,1}} p\Big(\zeta, \zeta^{\gamma_{j,1}}(\lambda_{j,\gamma_{j,1}} + \lambda_j^{(\gamma_{j,1})})\Big) \in \mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda_j^{(\gamma_{j,1})}]$$

wiederholt. Allerdings werden nun nur noch diejenigen Segmente des Polygonzugs betrachtet, die eine negative Steigung aufweisen. Sukzessive kann das Vorgehen für

$$\begin{aligned} p_{j,\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k}}(\zeta, \lambda_j^{(\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k})}) &:= \zeta^{-\beta_{j,k}} p_{j,\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k-1}}\Big(\zeta, \zeta^{\gamma_{j,k}}(\lambda_{j,\gamma_{j,k}} + \lambda_j^{(\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k})})\Big) \\ &\in \mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda_j^{(\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k})}] \end{aligned} \tag{A.1}$$

mit $p_{j,\gamma_{j,0}} := p$ und $\lambda_j^{(\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k})}(\zeta) := \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k+1}} \zeta^{\gamma_{j,k+1}} + \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\ldots+\gamma_{j,k+2}} \zeta^{\gamma_{j,k+1}+\gamma_{j,k+2}} + \ldots$ für $k \in \mathbb{N}$ fortgeführt werden.

A.6.4 Landau-Symbol

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für Funktionen $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{C}^{m\times m}$ und $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+$ vereinbaren wir die folgende Verwendung des Landau-Symbols $\mathcal{O}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) + \mathcal{O}(\psi(x)) \ \text{ für } |x| \to 0 \quad &:\Longleftrightarrow \quad \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \in \mathcal{O}_0(\psi) \\ \text{mit} \quad \mathcal{O}_0(\psi) &:= \{\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \mid \exists\, c \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \ \forall\, x \in \mathbb{K}^n,\ |x| < r :\ \varphi(x) \le c\,\psi(x)\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) + \mathcal{O}(h(x)) \ \text{ für } |x| \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \in \mathcal{O}_\infty(\psi) \\ \text{mit} \quad \mathcal{O}_\infty(\psi) &:= \{\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \mid \exists\, c \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, R \in \mathbb{R}^+ \ \forall\, x \in \mathbb{K}^n,\ |x| > R :\ \varphi(x) \le c\,\psi(x)\}\,. \end{aligned}$$

Lemma A.24 (Rechenregeln). *Es seien $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{C}$ und $\psi, \psi_1, \psi_2 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = g(x) + \mathcal{O}(\psi(x))$, $f_1(x) = g_1(x) + \mathcal{O}(\psi_1(x))$ und $f_2(x) = g_2(x) + \mathcal{O}(\psi_2(x))$ für $x \to 0$ bzw. $x \to \infty$. Dann gelten:*

(i) $\mathcal{O}_0(a\psi) = \mathcal{O}_0(\psi)$ *und* $\mathcal{O}_\infty(a\psi) = \mathcal{O}_\infty(\psi)$ *für* $a \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $\mathcal{O}_0(\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{O}_0(\psi_1)$ *für* $\psi_2 \in \mathcal{O}_0(\psi_1)$ *und* $\mathcal{O}_\infty(\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{O}_\infty(\psi_1)$ *für* $\psi_2 \in \mathcal{O}_\infty(\psi_1)$.

(iii) $f(x) = \mathcal{O}(|g(x)| + \psi(x))$.

(iv) $\mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(g(x)) + \mathcal{O}(\psi(x))$ *und* $\mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(g(x)) + \mathcal{O}(h(x))$.

(v) $|f(x)| = |g(x)| + \mathcal{O}(\psi(x))$.

(vi) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} + \mathcal{O}\big(\frac{\psi(x)}{|g(x)|^2}\big)$, *sofern zu jedem* $c \in \mathbb{R}^+$ *ein* $r \in \mathbb{R}^+$ *existiert, sodass* $\psi(x) \le \frac{1}{2c}|g(x)|$ *für alle* $x \in \mathbb{K}^n$ *mit* $|x| < r$ *bzw.* $|x| > r$ *gilt.*

(vii) $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x) + \mathcal{O}(\psi_1(x) + \psi_2(x))$.

(viii) $f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x) + \mathcal{O}(\psi_1(x)|g_2(x)| + \psi_2(x)|g_1(x)| + \psi_1(x)\psi_2(x))$.

Beweis: Die Aussagen sind leicht zu zeigen, exemplarisch begründen wir diejenige unter (vi): Nach Voraussetzung existieren ein $c \in \mathbb{R}^+$ und ein $r \in \mathbb{R}^+$, sodass $|f(x) - g(x)| \le c\psi(x)$ und $|f(x)| \ge |g(x)| - |f(x) - g(x)| \ge |g(x)| - c\psi(x) \ge \frac{1}{2}|g(x)|$ für $|x| < r$ bzw. $|x| > r$ gelten. Damit folgt

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x) - f(x)|}{|f(x)g(x)|} \le \frac{c\,\psi(x)}{|f(x)||g(x)|} \le 2c\frac{\psi(x)}{|g(x)|^2}\,. \qquad \square$$

Literaturverzeichnis

[AF03] Adams, Robert A.; Fournier, John J. F. *Sobolev spaces.* 2. Aufl. Pure Appl. Math., Vol. 140. Amsterdam: Academic Press, 2003.

[Ahl79] Ahlfors, Lars V. *Complex analysis.* 3. Aufl. New York: McGraw-Hill, 1979.

[Ama95] Amann, Herbert. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I: Abstract linear theory.* Monogr. Math., Vol. 89. Basel: Birkhäuser, 1995.

[Are11] Arendt, Wolfgang; Batty, Charles J. K.; Hieber, Matthias; Neubrander, Frank. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* 2. Aufl. Monogr. Math., Vol. 96. Basel: Birkhäuser, 2011.

[BM48] Band, William; Meyer, Lothar. Second sound and the heat conductivity in helium II. *Phys. Rev.* 1948, 73(3), 226–229.

[Bar13] Bargmann, Swantje. Remarks on the Green-Naghdi theory of heat conduction. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2013, 38(2), 101–118.

[Bát06] Bátkai, András; Engel, Klaus-Jochen; Prüss, Jan; Schnaubelt, Roland. Polynomial stability of operator semigroups. *Math. Nachr.* 2006, 279(13-14), 1425–1440.

[BZ11] Beauchard, Karine; Zuazua, Enrique. Large time asymptotics for partially dissipative hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2011, 199(1), 177–227.

[BS07] Benzoni-Gavage, Sylvie; Serre, Denis. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations. First-order systems and applications.* Oxford Math. Monogr. New York: Oxford University Press, 2007.

[BL76] Bergh, Jöran; Löfström, Jörgen. *Interpolation spaces. An introduction.* Grundlehren Math. Wiss., Bd. 223. Berlin: Springer, 1976.

[BHN07] Bianchini, Stefano; Hanouzet, Bernard; Natalini, Roberto. Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy. *Comm. Pure Appl. Math.* 2007, 60(11), 1559–1622.

[Bor12] Borgmeyer, Karin. *Wärmeleitung und Thermoelastizität - Wohlgestelltheit von Three-Phase-Lag-Modellen.* Diplomarbeit. Universität Konstanz, 2012.

[BQR14] Borgmeyer, Karin; Quintanilla, Ramón; Racke, Reinhard. Phase-lag heat conduction: decay rates for limit problems and well-posedness. *J. Evol. Equ.* 2014, 14(4), 863–884.

[BT10] Borichev, Alexander; Tomilov, Yuri. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. Ann.* 2010, 347(2), 455–478.

[Bou66] Bourbaki, Nicolas. *General topology, part 1.* Reading: Addison-Wesley, 1966.

[Bra13] Braun, S.; Ronzheimer, J. P.; Schreiber, M.; Hodgman, S. S.; Rom, T.; Bloch, I.; Schneider, U. Negative absolute temperature for motional degrees of freedom. *Science.* 2013, 339(6115), 52–55.

[Bre66] Brenner, Philip. The Cauchy problem for symmetric hyperbolic systems in L_p. *Math. Scand.* 1966, 19, 27–37.

[Car84] Carlson, Donald E. Linear thermoelasticity. In: *Mechanics of solids, Vol. II.* Hrsg. von Truesdell, C. Berlin: Springer, 1984, 297–345.

[Cat58] Cattaneo, Carlo. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.* 1958, 247(1), 431–433.

[Cha98] Chandrasekharaiah, D. S. Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature. *Appl. Mech. Rev.* 1998, 51(12), 705–729.

[Che63] Chester, Marvin. Second sound in solids. *Phys. Rev.* 1963, 131(5), 2013–2015.

[Daf68] Dafermos, Constantine M. On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1968, 29(4), 241–271.

[DS13] Djouamai, Leila; Said-Houari, Belkacem. Decay property for solutions in the three-phase-lag heat conduction. *Commun. Math. Anal.* 2013, 15(1), 99–114.

[Don09] Donnelly, Russell J. The two-fluid theory and second sound in liquid helium. *Physics Today.* 2009, 62(10), 34–39.

[DQR09] Dreher, Michael; Quintanilla, Ramón; Racke, Reinhard. Ill-posed problems in thermomechanics. *Appl. Math. Lett.* 2009, 22(9), 1374–1379.

[EN00] Engel, Klaus-Jochen; Nagel, Rainer. *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Grad. Texts in Math., Vol. 194. New York: Springer, 2000.

[Eva10] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations.* 2. Aufl. Grad. Stud. Math., Vol. 19. Providence: American Mathematical Society, 2010.

[Fat83] Fattorini, Hector O. *The Cauchy problem.* Encyclopedia Math. Appl., Vol. 18. Reading: Addison-Wesley, 1983.

[Fic92] Fichera, Gaetano. Is the Fourier theory of heat propagation paradoxical? *Rend. Circ. Mat. Palermo (2).* 1992, 41(1), 5–28.

[Fou88] Fourier, Jean B. J. *Œuvres de Fourier.* Hrsg. von Darboux, Gaston. Paris: Gauthier-Villars, 1888.

[FL71] Friedrichs, Kurt O.; Lax, Peter D. Systems of conservation equations with a convex extension. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1971, 68(8), 1686–1688.

[Gal11] Galdi, G. P. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Steady-state problems.* 2. Aufl. Springer Monogr. Math, New York: Springer, 2011.

[GN91] Green, Albert E.; Naghdi, Paul M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proc. R. Soc. A.* 1991, 432(1885), 171–194.

[HP05] Hinrichsen, Diederich; Pritchard, Anthony J. *Mathematical systems theory I. Modelling, state space analysis, stability and robustness.* Texts Appl. Math., Vol. 48. Berlin: Springer, 2005.

[HQ05] Horgan, Cornelius O.; Quintanilla, Ramón. Spatial behaviour of solutions of the dual-phase-lag heat equation. *Math. Methods Appl. Sci.* 2005, 28(1), 43–57.

[HJ91] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. *Topics in matrix analysis.* Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[HJ13] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. *Matrix analysis.* 2. Aufl. New York: Cambridge University Press, 2013.

[IHK08] Ide, Kentaro; Haramoto, Kazuo; Kawashima, Shuichi. Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2008, 18(5), 647–667.

[JR00] Jiang, Song; Racke, Reinhard. *Evolution equations in thermoelasticity.* Monogr. Surv. Pure Appl. Math., Vol. 112. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000.

[JP89] Joseph, Daniel D.; Preziosi, Luigi. Heat waves. *Rev. Modern Physics.* 1989, 61(1), 41–73.

[JC98] Jou, D.; Criado-Sancho, M. Thermodynamic stability and temperature overshooting in dual-phase-lag heat transfer. *Phys. Lett. A.* 1998, 248(2-4), 172–178.

[Kah09] Kahane, Jean-Pierre. Fourier, un mathématicien inspiré par la physique. *Images de la physique.* CNRS, 2009, 3–10.

[Kat66] Kato, Tosio. *Perturbation theory for linear operators.* Grundlehren Math. Wiss., Bd. 132. Berlin: Springer, 1966.

[Kaw83] Kawashima, Shuichi. *Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics.* Dissertation. Universität Kyoto, 1983.

[KS88] Kawashima, Shuichi; Shizuta, Yasushi. On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws. *Tohoku Math. J. (2).* 1988, 40(3), 449–464.

[KY04] Kawashima, Shuichi; Yong, W.-A. Dissipative structure and entropy for hyperbolic systems of balance laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2004, 174(3), 345–364.

[KB98] Körner, C.; Bergmann, H. W. The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation. *Appl. Phys. A.* 1998, 67(4), 397–401.

[Kur08] Kurth, Patrick. *Thermoelastische Systeme mit „dual-phase-lag“.* Diplomarbeit. Universität Konstanz, 2008.

[Lan71] Landau, Lev D. The theory of superfluidity of helium II. In: Galasiewicz, Zygmunt M. *Helium 4.* Oxford: Pergamon Press, 1971, 191–233.

[LC09] Liu, Kuo-Chi; Chen, Han-Taw. Analysis for the dual-phase-lag bio-heat transfer during magnetic hyperthermia treatment. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2009, 52(5-6), 1185–1192.

[LP61] Lumer, Gunter; Phillips, Ralph S. Dissipative operators in Banach spaces. *Pacific J. Math.* 1961, 11(2), 679–698.

[Max67] Maxwell, James C. On the dynamical theory of gases. *Philos. Trans. R. Soc.* 1867, 157, 49–88.

[NS13] Narasimhan, Arunn; Sadasivam, Sridhar. Non-Fourier bio heat transfer modelling of thermal damage during retinal laser irradiation. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2013, 60, 591–597.

[Nis03] Nishihara, Kenji. L^p-L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application. *Math. Z.* 2003, 244(3), 631–649.

[Paz83] Pazy, Amnon. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Corr. 2. print. Appl. Math. Sci., Vol. 44. New York: Springer, 1983.

[Pes71] Peshkov, V. Determination of the velocity of propagation of the second sound in helium II. In: Galasiewicz, Zygmunt M. *Helium 4.* Oxford: Pergamon Press, 1971, 166–187.

[Phi59] Phillips, Ralph S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1959, 90, 193–254.

[Qui02] Quintanilla, Ramón. Exponential stability in the dual-phase-lag heat conduction theory. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2002, 27(3), 217–227.

[Qui03] Quintanilla, Ramón. A condition on the delay parameters in the one-dimensional dual-phase-lag thermoelastic theory. *J. Thermal Stresses.* 2003, 26(7), 713–721.

[Qui08] Quintanilla, Ramón. End effects in three-phase-lag heat conduction. *Appl. Anal.* 2008, 87(8), 943–955.

[Qui09] Quintanilla, Ramón. Spatial behaviour of solutions of the three-phase-lag heat equation. *Appl. Math. Comput.* 2009, 213(1), 153–162.

[QR06a] Quintanilla, Ramón; Racke, Reinhard. A note on stability in dual-phase-lag heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2006, 49(7-8), 1209–1213.

[QR06b] Quintanilla, Ramón; Racke, Reinhard. Qualitative aspects in dual-phase-lag thermoelasticity. *SIAM J. Appl. Math.* 2006, 66(3), 977–1001.

[QR07] Quintanilla, Ramón; Racke, Reinhard. Qualitative aspects in dual-phase-lag heat conduction. *Proc. R. Soc. A.* 2007, 463, 659–674.

[QR08] Quintanilla, Ramón; Racke, Reinhard. A note on stability in three-phase-lag heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2008, 51(1-2), 24–29.

[QR15] Quintanilla, Ramón; Racke, Reinhard. Spatial behavior in phase-lag heat conduction. *Differential Integral Equations.* 2015, 28(3/4), 291–308.

[Rac02] Racke, Reinhard. Thermoelasticity with second sound – exponential stability in linear and non-linear 1-d. *Math. Methods Appl. Sci.* 2002, 25(5), 409–441.

[Rac03] Racke, Reinhard. Asymptotic behavior of solutions in linear 2-or 3-d thermoelasticity with second sound. *Quart. Appl. Math.* 2003, 61(2), 315–328.

[Rac15] Racke, Reinhard. *Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems.* 2. Aufl. Cham: Birkhäuser, 2015.

[RS13] Racke, Reinhard; Said-Houari, Belkacem. Decay rates and global existence for semilinear dissipative Timoshenko systems. *Quart. Appl. Math.* 2013, 71(2), 229–266.

[Rau12] Rauch, Jeffrey. *Hyperbolic partial differential equations and geometric optics.* Grad. Stud. Math., Vol. 133. Providence: American Mathematical Society, 2012.

[RS02] Remmert, Reinhold; Schumacher, Georg. *Funktionentheorie 1.* 5. Aufl. Berlin: Springer, 2002.

[Roy07] Roy Choudhuri, S. K. On a thermoelastic three-phase-lag model. *J. Thermal Stresses.* 2007, 30(3), 231–238.

[Ruk14] Rukolaine, Sergey A. Unphysical effects of the dual-phase-lag model of heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2014, 78, 58–63.

[Sah14] Sahoo, Nilamani; Ghosh, Soham; Narasimhan, Arunn; Das, Sarit K. Investigation of non-Fourier effects in bio-tissues during laser assisted photothermal therapy. *Int. J. Thermal Sci.* 2014, 76, 208–220.

[SZ08] Shen, B.; Zhang, P. Notable physical anomalies manifested in non-Fourier heat conduction under the dual-phase-lag model. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2008, 51(7-8), 1713–1727.

[SK85] Shizuta, Yasushi; Kawashima, Shuichi. Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation. *Hokkaido Math. J.* 1985, 14(2), 249–275.

[Str11] Straughan, Brian. *Heat waves.* Appl. Math. Sci., Vol. 177. New York: Springer, 2011.

[Str70] Strichartz, Robert S. Convolutions with kernels having singularities on a sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1970, 148, 461–471.

[Str75] Ström, Torsten. On logarithmic norms. *SIAM J. Numer. Anal.* 1975, 12(5), 741–753.

[SK10] Sugitani, Yousuke; Kawashima, Shuichi. Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 2010, 7(3), 471–501.

[Tai72] Taitel, Yehuda. On the parabolic, hyperbolic and discrete formulation of the heat conduction equation. *Int. J. Heat Mass Transf.* 1972, 15(2), 369–371.

[Tis38] Tisza, László. Sur la supraconductibilité thermique de l'hélium II liquide et la statistique de Bose-Einstein. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.* 1938, 207(2), 1035–1037.

[Tri78] Triebel, Hans. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* North-Holland Math. Library, Vol. 18. Amsterdam: North-Holland, 1978.

[Tri83] Triebel, Hans. *Theory of function spaces.* Monogr. Math., Vol. 78. Basel: Birkhäuser, 1983.

[Tzo95a] Tzou, Da Yu. A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scales. *J. Heat Transf.* 1995, 117(1), 8–16.

[Tzo95b] Tzou, Da Yu. Experimental support for the lagging behavior in heat propagation. *J. Thermophys. Heat Transf.* 1995, 9(4), 686–693.

[Tzo97] Tzou, Da Yu. *Macro- to microscale heat transfer. The lagging behavior.* Washington, DC: Taylor & Francis, 1997.

[Uda14] Udayraj; Talukdar, P.; Alagirusamy, R.; Das, A. Heat transfer analysis and second degree burn prediction in human skin exposed to flame and radiant heat using dual phase lag phenomenon. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2014, 78, 1068–1079.

[UDK12] Ueda, Yoshihiro; Duan, Renjun; Kawashima, Shuichi. Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation and its application. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2012, 205(1), 239–266.

[UDK14] Ueda, Yoshihiro; Duan, Renjun; Kawashima, Shuichi. Decay structure of two hyperbolic relaxation models with regularity-loss. 2014. arXiv: `1407.6449v1`.

[UK11] Ueda, Yoshihiro; Kawashima, Shuichi. Decay property of regularity-loss type for the Euler-Maxwell system. *Methods Appl. Anal.* 2011, 18(3), 245–267.

[UKS84] Umeda, Tomio; Kawashima, Shuichi; Shizuta, Yasushi. On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics. *Japan J. Appl. Math.* 1984, 1(2), 435–457.

[Ver58a] Vernotte, Pierre. La véritable équation de la chaleur. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.* 1958, 247(2), 2103–2105.

[Ver58b] Vernotte, Pierre. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci.* 1958, 246(2), 3154–3155.

[Wal62] Walker, Robert J. *Algebraic curves.* New York: Dover, 1962.

[Wal94] Walter, Wolfgang. *Einführung in die Theorie der Distributionen.* 3. Aufl. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag, 1994.

[WY06] Wang, Ya-Guang; Yang, Lin. L^p-L^q decay estimates for Cauchy problems of linear thermoelastic systems with second sound in three dimensions. *Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A*. 2006, 136(1), 189–207.

[Wei09] Weinmann, Olaf. *Dual-Phase-Lag Thermoelastizität*. Dissertation. Universität Konstanz, 2009.

[Wer11] Werner, Dirk. *Funktionalanalysis*. 7. Aufl. Berlin: Springer, 2011.

[XLS08] Xu, F.; Lu, T. J.; Seffen, K. A. Biothermomechanical behavior of skin tissue. *Acta Mech. Sin.* 2008, 24(1), 1–23.

[XSL08] Xu, F.; Seffen, K. A.; Lu, T. J. Non-Fourier analysis of skin biothermomechanics. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2008, 51(9-10), 2237–2259.

[XK15] Xu, Jiang; Kawashima, Shuichi. The optimal decay estimates on the framework of Besov spaces for generally dissipative systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2015, 218(1), 275–315.

[Xu11] Xu, Mingtian; Guo, Jiangfeng; Wang, Liqiu; Cheng, Lin. Thermal wave interference as the origin of the overshooting phenomenon in dual-phase-lagging heat conduction. *Int. J. Thermal Sci.* 2011, 50(5), 825–830.

[YW06] Yang, Lin; Wang, Ya-Guang. L^p-L^q decay estimates for the Cauchy problem of linear thermoelastic systems with second sound in one space variable. *Quart. Appl. Math.* 2006, 64(1), 1–15.

[Yan02] Yang, Xiaojing. Generalized form of Hurwitz-Routh criterion and Hopf bifurcation of higher order. *Appl. Math. Lett.* 2002, 15(5), 615–621.

[Zem65] Zemanian, Armen H. *Distribution theory and transform analysis. An introduction to generalized functions with applications*. New York: McGraw-Hill, 1965.