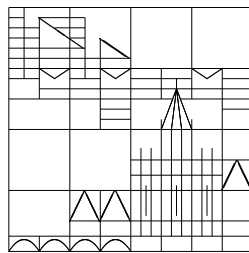


Skript zur Vorlesung

Pseudodifferentialoperatoren

Wintersemester 2007/08

Robert Denk, Jörg Seiler



Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 25. 11. 2007

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Einführung | 5 |
| | a) Motivation | 5 |
| | b) Fouriertransformation und Distributionen | 6 |
| 2 | Symbole und Pseudodifferentialoperatoren | 10 |
| 3 | Oszillator-Integrale | 16 |
| 4 | Doppelsymbole, Algebraeigenschaft und Elliptizität | 23 |
| 5 | Stetigkeit in Sobolevräumen | 30 |
| 6 | Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten | 37 |
| | a) Mannigfaltigkeiten: Eine schnelle Einführung | 37 |
| | b) Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten | 42 |

1. Einführung

1.1 Worum geht's? Hier wird kurz die Idee der Pseudodifferentialoperatoren erläutert. Hierbei spielt die Fourier-Transformation eine entscheidende Rolle; diese führt auf den Begriff des Symbols. Einige Resultate über den Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen bzw. seinen Dualraum, den Raum der temperierten Distributionen, werden kurz wiederholt.

a) Motivation

Die meisten Gleichungen der mathematischen Physik sind partielle Differentialgleichungen. Hier hat man es (im linearen Fall) mit einem Differentialoperator der Form

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

zu tun, wobei $a_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die Koeffizienten sind, und die übliche Multiindex-Schreibweise

$$D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

verwendet wird.

„Echte“ Gleichungen sind allerdings wesentlich komplizierter, etwa nichtlinear und nicht im ganzen Raum \mathbb{R}^n gegeben. Die Idee der Pseudodifferentialoperatoren lässt sich jedoch an obigem einfachem Beispiel am besten erläutern. Ein möglicher Zugang zu partiellen Differentialgleichungen verwendet die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

denn diese verwandelt partielle Ableitungen in punktweise Multiplikation mit der entsprechenden Kovariablen. Falls die Koeffizienten a_α nicht von x abhängen, so gilt

$$A(x, D)u = \mathcal{F}^{-1} a \mathcal{F} u$$

mit $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $a(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$. Die Funktion a , welche durch Ersetzen des Differentialoperators D^α durch die Multiplikation mit ξ^α entsteht, heißt das Symbol von $A(x, D)$.

Auch bei nichtkonstanten Koeffizienten ist das Symbol des Operators $A(x, D)$ gegeben durch

$$a(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Unter Verwendung der Inversionsformel für die Fourier-Transformation kann man (für hinreichend glatte Funktionen u) den Operator A schreiben in der Form

$$A(x, D)u = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) (\mathcal{F} u)(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

(Details siehe unten). Anschaulich ist das eine Beschreibung von $A(x, D)u$ als Überlagerung von Schwingungen $e^{ix\xi}$ im Frequenzbereich, wobei die Funktion bei der Frequenz ξ mit dem Faktor $a(x, \xi)$ verstärkt wird.

Falls $A = A(D)$ konstante Koeffizienten besitzt, so kann man den inversen Operator direkt angeben: Für das Symbol $p(\xi) := \frac{1}{a(\xi)}$ gilt offensichtlich $A(D)\mathcal{F}^{-1}p(\xi)\mathcal{F}u = u$, d.h. der zum Symbol p gehörige Operator $P = \text{op}(p)$ ist die Inverse zu A . Für eine Präzisierung dieser Aussage muss noch der zum formalen Differentialoperator gehörige Operator A definiert werden. Der Operator P , gegeben durch

$$Pf := \int_{\mathbb{R}^n} p(\xi)(\mathcal{F}f)(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

ist *kein* Differentialoperator mehr. Er gehört zur Klasse der Pseudodifferentialoperatoren (ψ do's).

Allgemein ist der zu einem Symbol $p(x, \xi)$ gehörige ψ do $P = P(x, D)$ gegeben durch

$$P = \mathcal{F}^{-1}p(x, \xi)\mathcal{F}, \text{ d.h. } Pf := \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi)e^{ix\xi}(\mathcal{F}f)(\xi)d\xi.$$

Als Ziele der Theorie der ψ do's wären unter anderem zu nennen:

- Untersuchung der Invertierbarkeit von Differentialoperatoren anhand ihres Symbols,
- Beschreibung der inversen Operatoren bzw. approximativer Inverser,
- Bestimmung des Abbildungsverhaltens eines ψ dos in Skalen von Funktionenräumen (etwa Sobolevräumen oder Hölderräumen),
- Aufbau eines Kalküls von Pseudodifferentialoperatoren, in welchem etwa die Komposition, der inverse Operator, der adjungierte Operator dargestellt werden kann.

Es ist klar, dass man hierzu zunächst die Symbolklassen definieren muss. Hier gibt es in der Literatur eine ganze Reihe von Klassen, wir werden uns in dieser Vorlesung auf die vielleicht bekannteste und wichtigste beschränken. Der Aufbau eines Kalküls ist technisch relativ aufwändig, aber zur Beschreibung des Lösungsoperators etwa einer partiellen Differentialgleichung unerlässlich.

b) Fouriertransformation und Distributionen

1.2 Bemerkung. Im folgenden sei $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Schwarz-Raum der schnell fallenden Funktionen, d.h. aller Funktionen $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche

$$\|u\|_k := \sup \left\{ |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| + |\beta| \leq k \right\} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1)$$

Mit den (Halb)normen aus (1.1) ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Fréchetraum.

Der topologische Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen besteht aus allen linearen stetigen Abbildungen $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Man beachte, dass eine lineare Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann stetig ist, falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert mit

$$|T(u)| \leq C \|u\|_k \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Statt $T(u)$ schreibt man auch oft $\langle T, u \rangle$. Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird mit der durch die Halbnormen

$$\|T\|_u = |\langle T, u \rangle| \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

gegebene lokalkonvexe Topologie versehen (schwach-* -Topologie).

Ableitungen temperierter Distributionen werden wie üblich durch

$$\langle \partial^\alpha T, u \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha u \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

definiert. Ist $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ von temperiertem Wachstum, d.h.

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists C \geq 0, N \in \mathbb{N} : \quad |\partial^\alpha a(x)| \leq C(1 + |x|)^N \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

so ist $aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\langle aT, u \rangle := \langle T, au \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$T \mapsto \partial^\alpha T$ und $T \mapsto aT$ sind stetige Abbildungen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Beispiel. a) Reguläre Distributionen: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar mit $(1 + |x|)^{-N} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\langle T_f, u \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x) dx \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Die sogenannte Dichte f von T_f ist durch T_f eindeutig bestimmt.¹ Die Abbildung

$$f \mapsto T_f : L_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

ist also injektiv; in diesem Sinne gilt $L_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

b) δ -Distribution(en): Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \delta_y, u \rangle := u(y) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

¹d.h. $T_f = 0$ impliziert $f = 0$ fast überall

c) Der Cauchysche Hauptwert:²

$$\left\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, u \right\rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{u(x)}{x} dx \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Wegen $\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{1}{x} dx = 0$ gilt

$$\left\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, u \right\rangle = \int_{|x| \leq 1} \frac{u(x) - u(0)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{u(x)}{x} dx.$$

1.4 Bemerkung. Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \widehat{u}(\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

ist linear und stetig: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $C \geq 0$ so, dass

$$\|\widehat{u}\|_k \leq C \|u\|_{k+n+1} \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.2)$$

Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv mit Inverser

$$\check{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(\xi) d\xi, \quad d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi.$$

Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert man $\mathcal{F}T := \widehat{T}$ mit

$$\langle \widehat{T}, u \rangle = \langle T, \widehat{u} \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig, linear und bijektiv mit Inverser $\mathcal{F}^{-1}T = \check{T}$, definiert durch

$$\langle \check{T}, u \rangle := \langle T, \check{u} \rangle \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

.

Die Fourier-Transformation ist in der Theorie partieller Differentialgleichungen von entscheidender Bedeutung, denn sie verwandelt partielle Ableitungen in punktweise Multiplikationen, siehe Teil a) des folgenden Satzes.

1.5 Satz. a) Es gilt $\widehat{\partial^\alpha T} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{T}$ und $\partial^\alpha \widehat{T} = (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{T}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

b) Ist $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ mit der Supremum-Norm versehen,³ so ist $\mathcal{F}: L_1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ stetig.⁴

²englisch: principal value

³dann ist $C_0(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum

⁴Lemma von Riemann-Lebesgue

d) Ist $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$ die Faltung von $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\widehat{g}.$$

2. Symbole und Pseudodifferentialoperatoren

2.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt wird die Klasse der Symbole definiert, welche wir in dieser Vorlesung betrachten werden. Symbole sind glatte Funktionen, für welche gewisse Abschätzungen für die Funktion selbst und alle Ableitungen gelten. Das Produkt von Symbolen ist wieder ein Symbol. Ein wichtiger Begriff ist die asymptotische Summe von Symbolen, und man kann zeigen, dass es zu einer asymptotischen Summe immer auch ein Symbol gibt, welches diese Asymptotik besitzt. Dies wird später von Bedeutung sein, wenn Inverse von Pseudodifferentialoperatoren betrachtet werden.

Die Symbole von Differentialoperatoren sind in der Symbolklasse enthalten, genauer handelt es sich hier um klassische Symbole. Dies sind Symbole, welche eine asymptotische Summe mit homogenen Symbolen besitzen.

Im folgenden schreiben wir

$$\langle y \rangle := \sqrt{1 + |y|^2} \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Offensichtlich ist $y \mapsto \langle y \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\langle y \rangle \leq (1 + |y|) \leq \sqrt{2} \langle y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

2.2 Definition. Es sei $\mu \in \mathbb{R}$. Mit $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir denjenigen Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ⁵, dessen Elemente folgende Eigenschaft haben: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\|p\|_k^{(\mu)} := \sup_{\substack{x, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{|\alpha| - \mu} < \infty. \quad (2.1)$$

Wir nennen solche p ein (Links-)Symbol der Ordnung μ . Setze

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} S^\mu(\mathbb{R}^n).$$

Die Symbolklasse $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ist ein Spezialfall einer allgemeineren Definition und ist in der Literatur oft als $S_{1,0}^\mu(\mathbb{R}^n)$ zu finden. Da wir jedoch Klassen der Form $S_{\alpha,\beta}^\mu(\mathbb{R}^n)$ nicht betrachten werden, verzichten wir auf den unteren Index.

2.3 Beispiel. Es sei $\mu \in \mathbb{N}_0$ und

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.2)$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung μ .

⁵dies ist der Raum aller glatten Funktionen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

2.4 Beispiel. Für $\mu \in \mathbb{R}$ ist $\langle \xi \rangle^\mu \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein von x unabhängiges Symbol. Denn per Induktion zeigt man: $\partial_\xi^\alpha \langle \xi \rangle^\mu$ ist eine endliche Linearkombination von Termen der Form $p_k(\xi) \langle \xi \rangle^{\mu-2l}$ mit Polynomen p_k vom Grad $\leq k$ und $2l - k \geq |\alpha|$. Also

$$|\partial_\xi^\alpha \langle \xi \rangle^\mu| \leq C \langle \xi \rangle^{\mu-(2l-k)} \leq C \langle \xi \rangle^{\mu-|\alpha|}.$$

2.5 Beispiel. Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ erfülle

$$p(x, t\xi) = t^\mu p(x, \xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall |\xi| \geq 1 \quad \forall t \geq 1$$

(man sagt p ist positiv homogen vom Grad μ für große ξ) und

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq 1} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung μ .

2.6 Lemma (Einfache Eigenschaften). *Im folgenden seien $\mu, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}$.*

- $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ist ein Fréchetraum mit den (Halb-)Normen aus (2.1).
- $p \mapsto \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{\mu-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig.
- $(p, \tilde{p}) \mapsto p\tilde{p} : S^\mu(\mathbb{R}^n) \times S^{\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{\mu+\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n)$ ist bilinear und stetig.
- $S^{\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S^\mu(\mathbb{R}^n)$,⁶ falls $\tilde{\mu} \leq \mu$.

2.7 Beispiel. Es sei $p(x, \xi)$ wie in (2.3) und $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Differentialoperator gegeben durch

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x).$$

Wegen Satz 1.5.a) ist

$$\begin{aligned} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) &= a_\alpha(x) \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \widehat{u}(\xi))(x) = a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Also erhält man

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

⁶ $X \hookrightarrow Y$ meint hier, dass $X \subseteq Y$ und dass $x \mapsto x : X \rightarrow Y$ stetig ist, also dass die Topologie von X stärker ist als die Spurtopologie von X bzgl. Y .

2.8 Definition. Für ein Linkssymbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiere

$$[p(x, D)u](x) = [\text{op}(p)u](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$p(x, D) = \text{op}(p)$ heißt der Pseudodifferentialoperator (kurz: ψ do) mit Symbol $p(x, \xi)$.

2.9 Beispiel. Jeder Differentialoperator mit Koeffizienten aus $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein ψ do, vgl. Beispiel 2.7. Insbesondere gilt für den Laplace-Operatoren:

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2 = -D_{x_1}^2 - \dots - D_{x_n}^2 = p(D), \quad p(\xi) = -\xi_1^2 - \dots - \xi_n^2 = -|\xi|^2.$$

2.10 Satz. Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol. Dann ist

$$p(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

stetig und linear. Genauer: Zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $C \geq 0$ derart, dass

$$\|p(x, D)u\|_k \leq C \|p\|_k^{(\mu)} \|u\|_{k+2n+2+[\mu]} \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in S^\mu(\mathbb{R}^n),$$

wobei $[\mu]$ die kleinste natürliche Zahl mit $\max(\mu, 0) \leq [\mu]$ bezeichnet.

Beweis. Der Einfachheit halber sei $\mu \in \mathbb{N}_0$. Zunächst haben wir für beliebiges $q \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |[\text{op}(q)v](x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-n-1} |\langle \xi \rangle^{-\mu} q(x, \xi)| |\langle \xi \rangle^{\mu+n+1} \widehat{v}(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \|q\|_0^{(\mu)} \|\langle \xi \rangle^{\mu+n+1} \widehat{v}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-n-1} \, d\xi \\ &\leq C \|q\|_0^{(\mu)} \|\widehat{v}\|_{\mu+n+1} \stackrel{1.4}{\leq} C \|q\|_0^{(\mu)} \|v\|_{\mu+2n+2}. \end{aligned}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt nun

$$x^\alpha \partial_x^\beta [\text{op}(p)u](x) = \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} C_{\beta_1, \beta_2} x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (\partial_x^{\beta_2} p)(x, \xi) \xi^{\beta_1} \widehat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Verwendet man nun Satz 1.5.a), dass $x^\alpha e^{ix\xi} = D_\xi^\alpha e^{ix\xi}$ und partielle Integration, so folgt

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial_x^\beta [\text{op}(p)u](x) &= \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha}} C_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (\partial_x^{\beta_2} \partial_\xi^{\alpha_2} p)(x, \xi) \mathcal{F}(x_1^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} u)(\xi) \, d\xi \\ &= \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha}} C_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2} [\text{op}(\partial_x^{\beta_2} \partial_\xi^{\alpha_2} p)(x_1^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} u)](x). \end{aligned}$$

Anwenden obiger Abschätzung liefert

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta [\text{op}(p)u](x)| &\leq \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha}} C_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2} \|\partial_x^{\beta_2} \partial_\xi^{\alpha_2} p\|_0^{(\mu - |\alpha_2|)} \|x_1^\alpha \partial_x^{\beta_1} u\|_{\mu + 2n + 2} \\ &\leq C_{\alpha, \beta} \|p\|_{|\alpha| + |\beta|}^{(\mu)} \|u\|_{\mu + 2n + 2 + |\alpha| + |\beta|}. \end{aligned}$$

Summation über alle $|\alpha| + |\beta| \leq k$ ergibt die Behauptung. \square

2.11 Definition. Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ für $j \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$\mu = \mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -\infty.$$

Wir sagen, dass $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ die asymptotische Summe der p_j ist und schreiben $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$, falls

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Notation: $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt eine 0-Ausschneidefunktion, falls $\chi(\xi) = \begin{cases} 0 & : |\xi| \leq 1 \\ 1 & : |\xi| \geq 2 \end{cases}$.⁷

2.12 Satz. Es sei $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, mit $\mu_j \searrow -\infty$. Dann gibt es ein $p \in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$. Dieses p ist modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Existenz: Sei χ eine 0-Ausschneidefunktion und $0 < \varepsilon \leq 1$. Dann ist für $|\alpha| \geq 1$

$$|\partial_\xi^\alpha \chi(\varepsilon\xi)| \leq \begin{cases} C_\alpha \varepsilon^{|\alpha|} & : \xi \in \mathbb{R}^n \\ 0 & : |\xi| \leq \varepsilon^{-1} \text{ oder } 2\varepsilon^{-1} \leq |\xi| \end{cases}.$$

Da $\varepsilon \leq 2|\xi|^{-1} \leq 4\langle \xi \rangle^{-1}$ für $\varepsilon^{-1} \leq |\xi| \leq 2\varepsilon^{-1}$,⁸ folgt

$$|\partial_\xi^\alpha \chi(\varepsilon\xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad \forall 0 < \varepsilon \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.⁹ Es folgt

$$|\partial_x^\alpha \partial_x^\beta [\chi(\varepsilon\xi) p_j(x, \xi)]| \leq C_{j, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{\mu_j - |\alpha|} = (C_{j, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-1}) \langle \xi \rangle^{\mu_j + 1 - |\alpha|} \quad (2.4)$$

⁷Statt 1 bzw. 2 kann man auch beliebige Konstanten $0 < c_1 < c_2$ verwenden.

⁸Für $|\xi| \geq 1$ ist $\langle \xi \rangle^2 = 1 + |\xi|^2 \leq |\xi|^2$, also $|\xi|^{-1} \leq \sqrt{2} \langle \xi \rangle^{-1}$.

⁹d.h. $\{\chi(\varepsilon\xi) \mid 0 < \varepsilon \leq 1\}$ ist eine beschränkte Teilmenge in $S^0(\mathbb{R}^n)$.

Jetzt wähle eine Folge $1 \geq \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ mit

$$C_{j,\alpha,\beta} \varepsilon_j \leq 2^{-j} \quad \forall |\alpha| + |\beta| \leq j.$$

Da $\langle \xi \rangle^{-1} \leq |\xi|^{-1}$ und $\chi(\varepsilon_j \xi) = 0$ für alle ξ mit $|\xi|^{-1} \geq \varepsilon_j$,¹⁰ folgt aus (2.4), dass

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta [\chi(\varepsilon_j \xi) p_j(x, \xi)]| \leq 2^{-j} \langle \xi \rangle^{\mu_j + 1 - |\alpha|} \quad \forall (x, \xi) \quad \forall |\alpha| + |\beta| \leq j. \quad (2.5)$$

Jetzt definiere

$$p(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j(x, \xi).$$

Dies ist eine lokal endliche Summe, insbesondere $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Für beliebig gegebenes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j = \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} (\chi(\varepsilon_j \xi) - 1) p_j}_{\in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n), \text{ da } \equiv 0 \text{ für } |\xi| \geq 2\varepsilon_{N-1}^{-1}} + \underbrace{\sum_{j=N}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j}_{=: q_N(x, \xi)}.$$

Wir müssen zeigen, dass $q_N \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)$ ist. Seien dazu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig vorgegeben. Wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$j_0 \geq \max(N, |\alpha| + |\beta|) \text{ und } \mu_{j_0} + 1 \leq \mu_N.$$

Dann ist

$$q_N(x, \xi) = \underbrace{\sum_{j=N}^{j_0-1} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j}_{\in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)} + q_{j_0}(x, \xi).$$

Nach Wahl von j_0 und wegen (2.5) gilt

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_{j_0}(x, \xi)| \leq \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \right) \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|} \leq \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|}.$$

Daher ist

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_N(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|}.$$

Eindeutigkeit: Seien $p^{(1)}, p^{(2)} \in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ und $p^{(k)} \sim \sum p_j$. Dann ist

$$p^{(1)} - p^{(2)} = \left(p^{(1)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \right) + \left(p^{(2)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \right) \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n).$$

Also $p^{(1)} - p^{(2)} \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n) = S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. □

¹⁰also auch für alle ξ mit $\langle \xi \rangle^{-1} \geq \varepsilon_j^{-1}$

2.13 Definition. Das Symbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}$, heißt ein klassisches oder polyhomogenes Symbol, falls es $p_j \in S^{\mu-j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, gibt mit

$$p_j(x, t\xi) = t^{\mu-j} p_j(x, \xi) \quad \forall x \quad \forall |\xi| \geq 1 \quad \forall t \geq 1$$

und $p \sim \sum_j p_j$. Den Raum aller solcher Symbole nennen wir $S_{\text{cl}}^\mu(\mathbb{R}^n)$

2.14 Beispiel. a) $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha = \sum_{j=0}^{\mu} p_j(x, \xi)$ mit $p_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = \mu-j} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.

b) Es sei $p(\xi) = \langle \xi \rangle^{-2} = \frac{1}{1+|\xi|^2}$. Dann ist $p \in S^{-2}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\frac{1}{1+|\xi|^2} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} = (-1)^N \frac{1}{|\xi|^{2N}} \frac{1}{1+|\xi|^2} \quad \forall \xi \neq 0. \text{¹¹}$$

Sei χ eine 0-Ausschneidefunktion. Nach Beispiel 2.5 ist dann

$$p_j(\xi) = \chi(2\xi) \frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} \in S^{-2(1+j)}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$, da wegen oben und Lemma 2.6.c)

$$p(\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(\xi) = \frac{\chi(2\xi)}{|\xi|^{2N}} \frac{(-1)^N}{(1+|\xi|^2)} + \underbrace{(1-\chi)(2\xi)p(\xi)}_{\in C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)} \in S^{-2(N+1)}(\mathbb{R}^n).$$

¹¹Induktion!

3. Oszillator-Integrale

3.1 Worum geht's? Die Methode der Pseudodifferentialoperatoren ist vor allem deswegen erfolgreich, weil die Eigenschaften eines Kalküls gelten: So ist die Komposition zweier ψ do's wieder ein ψ do, und man kann das zugehörige Symbol auch (als asymptotische Summe) angeben. Dies erlaubt es in Anwendungen, z.B. die Inverse relativ gut zu bestimmen. Technisch ist beim Beweis dieser Aussagen zu beachten, dass mehrfachen Integrale mit komplexen Exponentialfaktoren auftauchen, was immer Konvergenzschwierigkeiten zur Folge hat. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu umgehen, liegt darin, einen etwas allgemeineren Integralbegriff zu verwenden, den der Oszillator-Integrale.

3.2 Bemerkung. Seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ und $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$[\text{op}(p_j)v](x) = \int \left(\int e^{i(x-x')\xi} p_j(x, \xi) v(x') dx' \right) d\xi.$$

Wir führen jetzt eine formale (und tatsächlich falsche) Rechnung zur Komposition zweier ψ do durch.

$$\begin{aligned} [\text{op}(p_1)(\text{op}(p_2)u)](x) &= \iint e^{i(x-x')\xi'} p_1(x, \xi') \left(\iint e^{i(x'-z)\xi} p_2(x', \xi) u(z) dz d\xi \right) dx' d\xi' \\ &= \iiint e^{i(x-z)\xi} e^{-i(x-x')(\xi-\xi')} p_1(x, \xi') p_2(x', \xi) u(z) dx' d\xi' dz d\xi. \end{aligned}$$

Nach Variablensubstitution $y = x' - x$ und $\eta = \xi' - \xi$ folgt

$$\begin{aligned} &= \iint e^{i(x-z)\xi} \underbrace{\left(\iint e^{-iy\eta} p_1(x, \xi + \eta) p_2(x + y, \xi) dy d\eta \right)}_{=: p(x, \xi)} u(z) dz d\xi \\ &= [\text{op}(p)u](x) \end{aligned}$$

Problem: Der Integrand in der Definition von p ist im allgemeinen nicht integrierbar.

Lösung: Verallgemeinerter Integralbegriff!

3.3 Definition (und Lemma). $A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ ($m, \tau \in \mathbb{R}$) sei der Raum aller glatter Funktionen $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|a\|_k^{m, \tau} := \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta| \leq k \\ y, \eta \in \mathbb{R}^n}} \{ |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \eta)| \langle y \rangle^{-\tau} \langle \eta \rangle^{-m} \} < \infty.$$

Die Elemente von $A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ heißen Amplitudenfunktionen. Dann ist $A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ ein Fréchetraum und $S^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A^{m, 0}(\mathbb{R}^n)$.

3.4 Satz. Es sei $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann existiert der Grenzwert

$$\text{Os}[a] = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy d\eta := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta) dy d\eta. \quad (3.1)$$

Für beliebige $l, l' \in \mathbb{N}_0$ mit $2l > n + m$ und $2l' > n + \tau$ ist

$$\text{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} [\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y, \eta)] dy d\eta. \quad (3.2)$$

Beweis. 1. Schritt: Setze $\chi_\varepsilon(y, \eta) = \chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta)$. Dann gilt

- i) $\chi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ für alle $\varepsilon > 0$,
- ii) $\sup \{ |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y, \eta)| \mid 0 < \varepsilon \leq 1, (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \} < \infty$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$,
- iii) $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y, \eta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1 & : |\alpha| + |\beta| = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ punktweise auf \mathbb{R}^{2n} .

2. Schritt: Es gilt

$$\langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} e^{-iy\eta} = e^{-iy\eta} = \langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l e^{-iy\eta}.$$

Bezeichnet I_ε die rechte Seite von (3.1), so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint e^{-iy\eta} \langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l (\chi_\varepsilon(y, \eta) a(y, \eta)) dy d\eta \\ &= \iint e^{-iy\eta} \underbrace{\langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} [\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l (\chi_\varepsilon(y, \eta) a(y, \eta))]}_{g_\varepsilon(y, \eta)} dy d\eta. \end{aligned}$$

Wegen $\langle \cdot \rangle^r \in S^r(\mathbb{R}^n)$, ii) und Produktregel gilt

$$|g_\varepsilon(y, \eta)| \leq C_{l,l'} \|a\|_{2l+2l'}^{m,\tau} \langle y \rangle^{\tau-2l'} \langle \eta \rangle^{m-2l}. \quad (3.3)$$

Also hat g_ε eine gleichmäßige L_1 -Majorante. Wegen iii) ist

$$g_\varepsilon(y, \eta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} [\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y, \eta)].$$

Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. \square

3.5 Korollar. Der Wert in (3.1) hängt nicht von der Wahl von $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ ab. Die Abbildung

$$a \mapsto \text{Os}[a] : A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

ist stetig (beachte (3.3)). Ist $a \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$, so ist

$$\text{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy d\eta.$$

3.6 Lemma. *Es sei $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten:*

- a) *Partielle Integration:* $\text{Os}[y^\alpha a] = \text{Os}[D_\eta^\alpha a]$, $\text{Os}[\eta^\beta a] = \text{Os}[D_y^\beta a]$.
- b) *Translationsinvarianz:* $\text{Os}[a] = \text{Os}[e^{-i(y\eta_0 + y_0\eta + y_0\eta_0)} a(y + y_0, \eta + \eta_0)]$.
- c) *Ist $a(y, \eta) = a(y)$, so ist $\text{Os}[e^{ix\eta} a] = a(x)$.*

Beweis. a) Es genügt, die erste Gleichheit zu beweisen. Wegen

$$y^\alpha e^{-iy\eta} = (-D_\eta)^\alpha e^{-iy\eta}$$

und partieller Integration ist

$$\begin{aligned} \text{Os}[y^\alpha a] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} D_\eta^\alpha (\chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta)) dy d\eta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Os}[D_\eta^\alpha (\chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta))]. \end{aligned}$$

Schreibe

$$\begin{aligned} D_\eta^\alpha (\chi_\varepsilon(y, \eta) a(y, \eta)) &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D_\eta^\beta \chi_\varepsilon)(y, \eta) (D_\eta^{\alpha-\beta} a)(y, \eta) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|} (D_\eta^\beta \chi)(\varepsilon y, \varepsilon \eta) (D_\eta^{\alpha-\beta} a)(y, \eta). \end{aligned}$$

Wegen

$$|(D_\eta^\beta \chi)(\varepsilon y, \varepsilon \eta)| \leq C_1(\alpha) \quad (y, \eta \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in (0, 1], |\beta| \leq |\alpha|)$$

und

$$|(D_\eta^{\alpha-\beta} a)(y, \eta)| \leq C_2(\alpha) \langle y \rangle^\tau \langle \eta \rangle^m \quad (y, \eta \in \mathbb{R}^n, \beta \leq \alpha)$$

folgt $D_\eta^\alpha (\chi_\varepsilon a) \rightarrow D_\eta^\alpha a$ gleichmäßig auf Kompakta und auch

$$\|D_\eta^\alpha (\chi_\varepsilon a) - D_\eta^\alpha a\|_0^{m,\tau} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Mit der gleichen Überlegung sieht man $D_\eta^\gamma D_y^\beta D_\eta^\alpha (\chi_\varepsilon a) \rightarrow D_\eta^\gamma D_y^\beta D_\eta^\alpha a$ gleichmäßig auf Kompakta und $\|D_\eta^\alpha (\chi_\varepsilon a) - D_\eta^\alpha a\|_k^{m,\tau} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$. Somit gilt $D_\eta^\alpha (\chi_\varepsilon a) \rightarrow D_\eta^\alpha a$ in der Topologie von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$, und nach Korollar 3.5 folgt a).

b) Wir substituieren

$$\begin{aligned} \text{Os}[a] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy'\eta'} \chi(\varepsilon y', \varepsilon \eta') a(y', \eta') dy' d\eta' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon(y + y_0), \varepsilon(\eta + \eta_0)) e^{-i(\eta y_0 + \eta_0 y + \eta_0 y_0)} a(y + y_0, \eta + \eta_0) dy d\eta. \end{aligned}$$

Genauso wie im Teil a) zeigt man, dass

$$\chi(\varepsilon(y+y_0), \varepsilon(\eta+\eta_0)) e^{-i(\eta y_0 + \eta_0 y + \eta_0 y_0)} a(y+y_0, \eta+\eta_0) \rightarrow e^{-i(\eta y_0 + \eta_0 y + \eta_0 y_0)} a(y+y_0, \eta+\eta_0)$$

in der Topologie von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

c) Wähle $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann

$$\begin{aligned} \text{Os}[e^{ix\eta} a] &= \text{Os} - \iint e^{i(x-y)\eta} a(y) dy d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(\varepsilon y) a(y) \left(\int e^{i(x-y)\eta} \chi(\varepsilon \eta) d\eta \right) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-n} \int \chi(\varepsilon y) a(y) (\mathcal{F}^{-1} \chi) \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(\varepsilon(x-\varepsilon z)) a(x-\varepsilon z) (\mathcal{F}^{-1} \chi)(z) dz \\ &= a(x) \int (\mathcal{F}^{-1} \chi)(z) dz = a(x) \chi(0) = a(x). \end{aligned}$$

□

3.7 Lemma. Es sei $0 \leq f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$.

- a) Ist $|a(y, \eta)| \leq C f(y) \langle \eta \rangle^m$, so gilt $\text{Os}[a] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon \eta) a(y, \eta) dy d\eta$.
- b) Ist $|a(y, \eta)| \leq C \langle y \rangle^\tau f(\eta)$, so gilt $\text{Os}[a] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y) a(y, \eta) dy d\eta$.
- c) Gilt in a) zusätzlich, dass $\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy \in L_1(\mathbb{R}_\eta^n)$, so ist

$$\text{Os}[a] = \int \left(\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy \right) d\eta.$$

- d) Gilt in b) zusätzlich, dass $\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) d\eta \in L_1(\mathbb{R}_y^n)$, so ist

$$\text{Os}[a] = \int \left(\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) d\eta \right) dy.$$

Beweis. Dies folgt jeweils mit majorisierter Konvergenz, da die jeweiligen Integrale existieren. □

3.8 Lemma (Ungleichung von Peetre). Es sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^{|s|} \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|} \quad \text{bzw.} \quad \langle \xi \rangle^s \leq 2^{|s|} \langle \xi - \eta \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|} \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$\langle y \rangle \leq (1 + |y|) \leq \sqrt{2} \langle y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad {}^{12}$$

Sei nun $s \geq 0$. Dann

$$1 + |\xi + \eta| \leq 1 + |\xi| + |\eta| \leq (1 + |\xi|)(1 + |\eta|) \implies \langle \xi + \eta \rangle^s \leq (1 + |\xi|)^s (1 + |\eta|)^s \leq 2^s \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^s.$$

Für $s \leq 0$ gilt analog

$$\langle \xi \rangle^{-s} \leq 2^{-s} \langle \xi + \eta \rangle^{-s} \langle -\eta \rangle^{-s} \iff \langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^{-s} \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{-s}. \quad \square$$

3.9 Satz (Fubini). *Es sei $a = a(y, y', \eta, \eta') \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^{n+k})$. Dann ist*

$$b(y, \eta) = \text{Os} - \iint e^{-iy'\eta'} a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta' \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta b(y, \eta) = \text{Os} - \iint e^{-iy'\eta'} \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta'.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \text{Os} - \iint e^{-i(y, y')(\eta, \eta')} a(y, y', \eta, \eta') d(y, y') d(\eta, \eta') \\ = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} \left(\text{Os} - \iint e^{-iy'\eta'} a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta' \right) dy d\eta. \end{aligned}$$

Beweis. OBdA $\tau, m \geq 0$. Wegen der Ungleichung von Peetre ist

$$\langle (y, y') \rangle^\tau \langle (\eta, \eta') \rangle^m \leq 2^{m+\tau} \langle y \rangle^\tau \langle y' \rangle^\tau \langle \eta \rangle^m \langle \eta' \rangle^m. \quad {}^{13}$$

Daher ist $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot) \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^k)$ mit

$$\|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot)\|_k^{m, \tau} \leq C_{k, m} \|a\|_{k+|\alpha|+|\beta|}^{m, \tau} \langle y \rangle^\tau \langle \eta \rangle^m$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Aus Korollar 3.5 (und (3.3)) folgt

$$|\text{Os}[\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot)]| \leq C \|a\|_{2(l+l')+|\alpha|+|\beta|}^{m, \tau} \langle y \rangle^\tau \langle \eta \rangle^m,$$

wobei $2l > n + k + m$ und $2l' > n + k + \tau$. Wegen der zweiten Darstellung des Oszillator-Integrals in Satz 3.4 und des Satzes von Lebesgue über Differenzierbarkeit von Parameterintegralen gilt

$$\text{Os}[\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot)] = \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \text{Os}[a(y, \cdot, \eta, \cdot)]$$

¹²Sieht man leicht durch Quadrieren.

¹³Schreibe $(y, y') = (y, 0) + (0, y')$.

und damit $b \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin folgt, dass

$$\begin{aligned}
\text{Os} - \iint e^{-iy\eta} b(y, \eta) dy d\eta & \\
& \stackrel{3.4}{=} \int e^{-i(y,y')(\eta,\eta')} (\langle y \rangle \langle y' \rangle)^{-2l} ((1 - \Delta_\eta)(1 - \Delta_{\eta'}))^l \\
& \quad [(\langle \eta \rangle \langle \eta' \rangle)^{-2l} ((1 - \Delta_y)(1 - \Delta_{y'}))^l a(y, y', \eta, \eta')] \frac{d(y, y', \eta, \eta')}{(2\pi)^{n+k}} \\
& = \text{Os} - \iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')} (\langle \eta \rangle \langle \eta' \rangle)^{-2l} ((1 - \Delta_y)(1 - \Delta_{y'}))^l a(y, y', \eta, \eta') d(y, y') d(\eta, \eta') \\
& = \text{Os} - \iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')} a(y, y', \eta, \eta') d(y, y') d(\eta, \eta'),
\end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Gleichungen wegen Lemma 3.6.a) gelten. \square

3.10 Satz. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$[Pu](x) := \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x, \eta) u(x + y) dy d\eta, \quad u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),$$

eine stetige Abbildung $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$Pu = \text{op}(p)u \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Schreibe daher wieder $\text{op}(p) := P$.

Beweis. Für festes x und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist

$$a(y, \eta) := p(x, \eta)u(x + y) \in A^{\mu,0}(\mathbb{R}^n).$$

Also ist P wohldefiniert. Die Abbildungseigenschaft folgt dann mit der Darstellung aus Satz 3.4 ähnlich wie in Satz 2.10. Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned}
[\text{op}(p)u](x) &= \int \left(\int e^{i(x-y)\eta} p(x, \eta) u(y) dy \right) d\eta = \int \underbrace{\left(\int e^{-iy\eta} p(x, \eta) u(x + y) dy \right)}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\eta^n)} d\eta \\
& \stackrel{3.7.e)}{=} \text{Os}[p(x, \eta)u(x + y)]
\end{aligned}$$

\square

3.11 Folgerung. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$p(x, \xi) = e^{-ix\xi} [\text{op}(p)e^{i\xi \cdot}](x) \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere hat jeder ψ do ein eindeutig bestimmtes Linkssymbol.

Beweis. Es ist $e^{i\xi} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wegen Satz 3.10 gilt also

$$\begin{aligned}
e^{-ix\xi}[\text{op}(p)e^{i\xi}](x) &= \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} e^{iy\xi} p(x, \eta) \, dy \, d\eta \\
&\stackrel{3.6.b)}{=} \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x, \xi + \eta) \, dy \, d\eta \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y) \, dy \right) \chi(\varepsilon\eta) p(x, \xi + \eta) \, d\eta \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varepsilon^{-n} \widehat{\chi}(\eta/\varepsilon) \chi(\varepsilon\eta) p(x, \xi + \eta) \, d\eta \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \widehat{\chi}(\eta) \chi(\varepsilon^2\eta) p(x, \xi + \varepsilon\eta) \, d\eta \\
&= p(x, \xi) \int \widehat{\chi}(\eta) \, d\eta = p(x, \xi) \chi(0) = p(x, \xi),
\end{aligned}$$

wobei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$.

□

4. Doppelsymbole, Algebraeigenschaft und Elliptizität

4.1 Worum geht's? Die Theorie der Oszillatorintegrale erlaubt es, die formale Rechnung zur Komposition zweier Pseudodifferentialoperatoren zu gerechtfertigen. Damit kann einer der Hauptsätze dieser Vorlesung bewiesen werden: Die Komposition zweier Pseudodifferentialoperatoren ist wieder ein Pseudodifferentialoperator, und man kennt das Symbol in Form einer asymptotischen Entwicklung. Als Anwendung kann die Parametrix für elliptische Operatoren bestimmt werden.

4.2 Bemerkung. Nach Satz 3.10 ist

$$\text{op}(p)u(x) = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x, \eta) u(x + y) dy d\eta.$$

Eingesetzt erhalten wir für die Komposition:

$$\begin{aligned} & \text{op}(p_1) \circ \text{op}(p_2)u(x) \\ &= \text{Os} - \iint e^{-ix'\xi} p_1(x, \xi) (\text{op}(p_2)u)(x + x') dx' d\xi \\ &= \text{Os} - \iint e^{-ix'\xi} p_1(x, \xi) \left[\text{Os} - \iint e^{-ix''\xi'} p_2(x + x', \xi') u(x + x' + x'') dx'' d\xi' \right] dx' d\xi \\ &= \text{Os} - \iint \iint e^{-ix'\xi - ix''\xi'} p_1(x, \xi) p_2(x + x', \xi') u(x + x' + x'') dx'' d\xi' dx' d\xi \\ &= \text{Os} - \iint \iint e^{-iy\xi' - ix'\eta} p_1(x, \xi' + \eta) p_2(x + x', \xi') u(x + x', \xi') u(x + y) dx' d\xi' dy d\eta \\ &= \text{Os} - \iint e^{-iy\xi'} \left[\text{Os} - \iint e^{-ix'\eta} p_1(x, \xi' + \eta) p_2(x + x', \xi') dx' d\eta \right] u(x + y) dy d\xi' \\ &= \text{Os} - \iint e^{-iy\xi'} (p_1 \# p_2)(x, \xi') u(x + y) dy d\xi' \\ &= \text{op}(p_1 \# p_2)(u)(x) \end{aligned}$$

mit

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) := \text{Os} - \iint e^{-ix'\xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi') dx' d\xi'.$$

4.3 Definition. Es seien $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ den Raum aller glatten Funktionen $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|p\|_k^{\mu, \mu'} := \sup_{\substack{x, x', \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n, \\ |\alpha| + |\alpha'| + |\beta| + |\beta'| \leq k}} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x, \xi, x', \xi') \right| < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies ist ein Fréchetraum mit vorigen (Halb-)normen. Die Elemente nennen wir Doppelsymbole.

4.4 Satz. Es sei $p \in S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann definiert

$$Pu(x) := \text{Os} - \iint e^{-i(y, y')(\eta, \eta')} p(x, \eta, x + y, \eta') u(x + y + y') d(y, y') d(\eta, \eta')$$

einen stetigen Operatoren $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben wieder

$$P = \text{op}(p) = p(x, D_x, x', D_{x'}).$$

Es gilt

$$Pu(x) = \int e^{ix'\xi} \left(\int e^{-ix\xi} \left(\int e^{ix'\xi'} \left(\int e^{-ix''\xi'} p(x, \xi, x', \xi') u(x'') dx'' \right) d\xi' \right) dx' \right) d\xi.$$

Beweis. Für festes x ist

$$a(y, y', \eta, \eta') = p(x, \eta, x + y, \eta') u(x + y + y') \in A^{|\mu| + |\mu'|, 0}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Daher ist $Pu(x)$ wohldefiniert. Für die zweite Darstellung von $Pu(x)$ siehe Kumano-
go, Lemma 2.3 in Chapter 2. Die Abbildungseigenschaft von P folgt aus (4.2), siehe
unten. \square

4.5 Beispiel. Es seien $a_j(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $p_j(\xi) \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$p(x, \xi, x', \xi') = a_1(x) p_1(\xi) a_s(x') p_2(\xi') \in S^{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

und

$$\text{op}(p) = M_{a_1} \circ p_1(D) \circ M_{a_2} \circ p_2(D),$$

wobei M_{a_j} den Operator der Multiplikation mit a_j bezeichnet.

4.6 Beispiel. Es seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ ($j = 0, 1$) zwei Linkssymbole. Dann ist

$$p(x, \xi, x', \xi') := p_1(x, \xi) p_2(x', \xi') \in S^{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Nach Bemerkung 4.2 ist die formale Rechnung aus Bemerkung (3.2) korrekt ist, wenn man Oszillator-Integrale verwendet, d.h.

$$p(x, D_x, x', D_{x'}) u = (p_1(x, D) \circ p_2(x, D)) u, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

4.7 Satz. Für $p \in S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ setze

$$p_L(x, \xi) = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) dy d\eta.$$

Dann ist

$$p \mapsto p_L : S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu + \mu'}(\mathbb{R}^n) \quad (4.1)$$

eine stetige Abbildung und

$$p_L(x, D) = p(x, D_x, x', D_{x'}). \quad (4.2)$$

Weiterhin gilt die asymptotische Entwicklung

$$p_L(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_{x'}^{\alpha} p(x, \xi, x', \xi') \Big|_{x'=x, \xi'=\xi}. \quad (4.3)$$

Beweis. Zunächst ist wegen der Peetreschen Ungleichung und der Kettenregel

$$\left| \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} \partial_{\eta}^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) \right| \leq C \|p\|_{|\alpha|+|\beta|+|\alpha'|+|\beta'|}^{\mu, \mu'} \langle \eta \rangle^{|\mu|+|\alpha|} \langle \xi \rangle^{\mu + \mu' - |\alpha|} \quad (4.4)$$

mit $C = C(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \mu')$. Aus Satz 3.9 folgt,¹⁴ dass $p_L \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} p_L(x, \xi) = \text{Os}_{y, \eta} \left[\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) \right].$$

Aus der Stetigkeit von $\text{Os}[\cdot]$, vgl. Folgerung 3.5, und (4.4) folgt (4.1).

Per Taylor-Entwicklung gilt

$$\begin{aligned} p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) &= \sum_{|\alpha| < N} \frac{\eta^{\alpha}}{\alpha!} p_{\alpha}(x, \xi, x + y, \xi) + \\ &+ N \sum_{|\alpha|=N} \frac{\eta^{\alpha}}{\alpha!} \int_0^1 (1 - \theta)^{N-1} p_{\alpha}(x, \xi + \theta\eta, x + y, \xi) d\theta, \end{aligned}$$

wobei $p_{\alpha}(x, \xi, y, \eta) = \partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi, y, \eta)$. Wegen Lemma 3.6.a) ist also

$$\begin{aligned} p_L(x, \xi) &= \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \text{Os}_{y, \eta} [(D_{x'}^{\alpha} p_{\alpha})(x, \xi, x + y, \xi)] + \\ &+ N \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 \underbrace{\text{Os}_{y, \eta} [(D_{x'}^{\alpha} p_{\alpha})(x, \xi + \theta\eta, x + y, \xi)]}_{=: r_{\alpha, \theta}(x, \xi)} d\theta. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.6.c) gilt

$$\text{Os}_{y, \eta} [(D_{x'}^{\alpha} p_{\alpha})(x, \xi, x + y, \xi)] = (D_{x'}^{\alpha} p_{\alpha})(x, \xi, x, \xi).$$

Gleichmäßige Abschätzungen in $0 \leq \theta \leq 1$ wie oben in (4.4) zeigen, dass $\{r_{\alpha, \theta} \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$ eine beschränkte Menge in $S^{\mu + \mu' - |\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist. Das zeigt (4.3).

¹⁴als Analogon zu den klassischen über Differenzierbarkeit von Parameter-Integralen

Sein nun $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann ist

$$p_{L,\varepsilon}(x, \xi) := \chi(\varepsilon\xi) \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y) \chi(\varepsilon\eta) p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) dy d\eta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} p_L(x, \xi)$$

und, gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$|p_{L,\varepsilon}(x, \xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{|\mu| + \mu'} \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen dominierter Konvergenz ist also für beliebiges $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} [p_L(x, D)u](x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{ix\xi'} p_{L,\varepsilon}(x, \xi') \widehat{u}(\xi') d\xi' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{ix\xi} \left(\int e^{-ix'\xi} \left(\int e^{ix'\xi'} p_\varepsilon(x, \xi, x', \xi') \widehat{u}(\xi') d\xi' \right) dx' \right) d\xi \end{aligned}$$

mit

$$p_\varepsilon(x, \xi, x', \xi') = \chi(\varepsilon(\xi - \xi')) \chi(\varepsilon(x - x')) \chi(\varepsilon\xi') p(x, \xi, x', \xi').$$

Drei mal dominierte Konvergenz zeigt, dass man $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ ganz nach Innen ziehen kann.

(4.2) folgt dann aus Satz 4.4. \square

4.8 Satz. Für $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ setze

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p_1(x, \xi + \eta) p_2(x + y, \xi) dy d\eta. \quad ^{15}$$

Dann ist

$$(p_1, p_2) \mapsto p_1 \# p_2 : S^{\mu_1}(\mathbb{R}^n) \times S^{\mu_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu_1 + \mu_2}(\mathbb{R}^n) \quad (4.5)$$

bilinear und stetig und

$$\text{op}(p_1) \text{op}(p_2) = \text{op}(p_1 \# p_2).$$

Es gilt die asymptotische Entwicklung

$$p_1 \# p_2 \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha p_1) (D_x^\alpha p_2). \quad (4.6)$$

Beweis. Folgt sofort aus Beispiel 4.6 und Satz 4.7. \square

4.9 Folgerung. a) Sind $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$p_1 \# p_2 - p_1 p_2 \in S^{\mu_1 + \mu_2 - 1}(\mathbb{R}^n).$$

¹⁵ $p_1 \# p_2$ heißt das Leibniz-Produkt von p_1 mit p_2 .

b) Ist $[A, B] = AB - BA$ der Kommutator von A und B , so gilt

$$[\text{op}(p_1), \text{op}(p_2)] \in S^{\mu_1 + \mu_2 - 1}(\mathbb{R}^n).$$

c) Seien $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi, \psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi\psi = 0$. Dann ist

$$\varphi \circ \text{op}(p) \circ \psi \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

4.10 Definition. Das Symbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bzw. der Operator $\text{op}(p)$ heißen elliptisch, falls es $C, R \geq 0$ gibt derart, dass $p(x, \xi) \neq 0$ für alle $|\xi| \geq R$ und

$$\left| \frac{1}{p(x, \xi)} \right| \leq C \langle \xi \rangle^{-\mu} \quad \forall x \quad \forall |\xi| \geq R. \quad (4.7)$$

4.11 Beispiel. a) Δ ist elliptisch der Ordnung 2, da $\Delta = \text{op}(p)$ mit $p(\xi) = -|\xi|^2$.

b) Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $p' \in S^{\mu'}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu' < \mu$. Dann ist $p + p'$ elliptisch der Ordnung μ : Für $|\xi|$ hinreichend groß ist

$$p + p' = p(1 + p'/p) \quad \text{und} \quad |p'(x, \xi)/p(x, \xi)| \leq 1/2.$$

4.12 Satz. Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) p ist elliptisch.
- b) Es gibt ein $q_L \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 - q_L \# p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.
- c) Es gibt ein $q_R \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 - p \# q_R \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

q_L heißt eine Linksparemetrix, q_R eine Rechtsparemetrix.

Beweis. b) \Rightarrow a): Sei $r := 1 - q_L \# p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.9.a) gibt es dann ein $s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$1 - r = q_L \# p = q_L p + s \quad \Longrightarrow \quad q_L p = 1 - (r + s).$$

Da $t := r + s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ gibt es ein $R \geq 0$ mit

$$|t(x, \xi)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \quad \forall |\xi| \geq R.$$

Für $|\xi| \geq R$ gilt also

$$\frac{1}{p(x, \xi)} = \frac{1}{1 - t(x, \xi)} q_L(x, \xi).$$

Offenbar gilt dann (4.7).

a) \Rightarrow b): Wähle eine Ausscheidelfunktion χ mit $\chi(\xi) = 0$, falls $|\xi| \leq R$. Setze dann

$$q(x, \xi) := \chi(\xi) \frac{1}{p(x, \xi)} \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x, \xi) \equiv \chi(\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p(x, \xi)} \pmod{S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Per Induktion

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_k=\alpha \\ \beta_1+\dots+\beta_k=\beta}} C_{\alpha_1, \dots, \beta_k} (\partial_\xi^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} p) \cdots (\partial_\xi^{\alpha_k} \partial_x^{\beta_k} p) \left(\frac{1}{p}\right)^{1+k}.$$

Es folgt, dass $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.9.a) gibt es ein $\tilde{r} \in S^{-1}$ mit

$$q \# p = qp + \tilde{r} = \chi + \tilde{r} = 1 - \underbrace{((1 - \chi) - \tilde{r})}_{=: r \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Nach Satz 4.8 und Satz 2.12 gibt es ein $\tilde{q} \in S^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\tilde{q} \sim \sum_{j=0}^{\infty} r^{\#j}, \quad r^{\#j} = \underbrace{r \# \dots \# r}_{j\text{-mal}}.$$

Setze dann $q_L := \tilde{q} \# q$. Dann gilt

$$q_L \# p = \tilde{q} \# (1 - r) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} r^{\#j} \# (1 - r) = 1 - r^{\#N} \equiv 1 \pmod{S^{-N}(\mathbb{R}^n)}.$$

Da man $N \in \mathbb{N}$ beliebig wählen kann, gilt $q_L \# p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

a) \Leftrightarrow c): Analog. □

4.13 Folgerung. *Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch, so ist jede Linksparametrix auch eine Rechtsparametrix und umgekehrt. Wir sprechen daher nur von einer Parametrix.*

Beweis. Seien q_L und q_R die Links- bzw. Rechtsparametrix. Dann, modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$q_L = q_L \# 1 \equiv q_L \# (p \# q_R) = (q_L \# p) \# q_R \equiv 1 \# q_R = q_R.$$

Also folgt $p \# q_L \equiv p \# q_R \equiv 1$, sowie $q_R \# p \equiv q_L \# p \equiv 1$. □

4.14 Satz. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es genau ein Symbol $p^t \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bzw. $p^* \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\langle \text{op}(p)u, v \rangle = \langle u, \text{op}(p^t)v \rangle \quad \text{bzw.} \quad (\text{op}(p)u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (u, \text{op}(p^*)v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad 16$$

für alle $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$p^t(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha p)(x, -\xi), \quad p^*(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \overline{D_x^\alpha p(x, \xi)}.$$

$\text{op}(p^t)$ bzw. $\text{op}(p^*)$ heißen der transponierte bzw. formal adjungierte Operator von $\text{op}(p)$.

Beweis. Sei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$ und $\chi(-\xi) = \chi(\xi)$. Da $\chi(\varepsilon\xi)p(x, \xi) \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \text{op}(p)u, v \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\iint e^{i(x-y)\xi} \chi(\varepsilon\xi) p(x, \xi) u(y) dy d\xi \right) v(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\iint e^{i(y-x')\xi} \chi(\varepsilon\xi) \tilde{p}(x', \xi) v(x') dx' d\xi \right) u(y) dy = \langle u, \text{op}(\tilde{p})v \rangle \end{aligned}$$

mit dem (von x, ξ' unabhängigen) Doppelsymbol $\tilde{p}(x', \xi) = p(x', -\xi)$ (siehe nachfolgende Bemerkung). Nach Satz 4.7 gilt dann die Behauptung mit

$$p^t(x, \xi) = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} \tilde{p}(x+y, \xi+\eta) dy d\eta.$$

Die asymptotische Entwicklung ist gerade (4.3). Der formal adjungierte Operator geht analog. \square

4.15 Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde folgende Eigenschaft von Doppelsymbolen verwendet: Sei das Doppelsymbol $p(x, \xi, x', \xi')$ unabhängig von x und von ξ' , d.h. $p = p(x', \xi)$. Dann gilt

$$[p(x, D_x, x', D_{x'})u](x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{i(x-x')\xi} \chi(\varepsilon\xi) p(x', \xi) u(x') dx' d\xi.$$

Der Beweis wird dem Leser als Übung überlassen.

4.16 Korollar. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert*

$$\langle \text{op}(p)T, \varphi \rangle := \langle T, \text{op}(p^t)\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

eine Distribution $\text{op}(p)T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In diesem Sinne ist

$$\text{op}(p) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Die Einschränkung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ stimmen mit den Abbildungen aus Definition 2.8 bzw. Definition 3.10 überein.

¹⁶Dabei: $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x) dx$

5. Stetigkeit in Sobolevräumen

5.1 Worum geht's? Bisher wurden Pseudodifferentialoperatoren in den typischen lokalkonvexen Funktionenräumen wie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ betrachtet. In vielen Anwendungen ist man eher an Hilbertraum- oder Banachraumtheorie interessiert. Daher stellt sich die Frage, ob Pseudodifferentialoperatoren stetige Abbildungen in entsprechenden Sobolevräumen induzieren. Während der Beweis der Stetigkeit für L_2 -Sobolevräume relativ leicht beweisbar ist, ist die analoge Aussage für L_p -Sobolevräume wesentlich schwerer. Eine einfache aber wichtige Folgerung ist der Satz über elliptische Regularität.

5.2 Definition und Satz (L_2 -Sobolevräume). *Es sei $s \in \mathbb{R}$ und*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \widehat{u} \text{ ist regulär und } \|u\|_s := \left(\int \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Dann ist $H^s(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine dichte Teilmenge von $H^s(\mathbb{R}^n)$. Ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $s \in \mathbb{N}_0$ so gilt:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff \partial^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n) \quad \forall |\alpha| \leq s. \quad (5.1)$$

Jedes Funktional $T \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$ ist von der Form

$$u \mapsto (u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n).^{17}$$

Definieren wir

$$\Lambda^\mu := \langle D \rangle^\mu = \text{op}(\langle \xi \rangle^\mu) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

so gilt

$$\Lambda^0 = 1, \quad \Lambda^\mu \circ \Lambda^{\mu'} = \Lambda^{\mu+\mu'}.$$

Insbesondere induziert Λ^μ Isomorphismen

$$\Lambda^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Man nennt Λ^μ eine Ordnungs-Reduktion.

¹⁷Kurz gesagt: $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Zur Dichtheit: Die Abbildung $\Phi_s : u \mapsto \langle \cdot \rangle^s \widehat{u}$ ist ein isometrischer Isomorphismus $H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_s^{-1}(v) = \mathcal{F}^{-1}(\langle \cdot \rangle^{-s} v)$. Jetzt verwende, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $\Phi_s^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für (5.1) zeige allgemeiner:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u, D_1 u, \dots, D_n u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n).$$

Wegen $\langle \xi \rangle^2 = 1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ ist

$$|\langle \xi \rangle^{s+1} \widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle \xi \rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle \xi \rangle^s \xi_j \widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle \xi \rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle \xi \rangle^s \widehat{\partial_j u}(\xi)|^2.$$

Es folgt

$$\|u\|_{s+1}^2 = \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_s^2.$$

(5.2) folgt aus $\widehat{\Lambda^\mu u}(\xi) = \langle \xi \rangle^\mu \widehat{u}(\xi)$. □

5.3 Satz (Hauptsatz über die L_2 -Stetigkeit von Pseudodifferentialoperatoren). *Es sei $a \in C^{2n}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit*

$$\pi(a) := \sup_{\substack{x, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha, \beta \leq (1, \dots, 1)}} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| < \infty,$$

sowie

$$[\text{op}(a)u](x) := \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gibt es ein $C \geq 0$, das nicht von a abhängt, mit

$$\|\text{op}(a)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C \pi(a) \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere induziert $\text{op}(a)$ einen stetigen Operatoren

$$\text{op}(a) : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Wir verwenden folgende Notationen: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$(i+x)^\alpha = (i+x_1)^{\alpha_1} \cdots (i+x_n)^{\alpha_n}, \quad (i+D)^\alpha = (i+D_1)^{\alpha_1} \cdots (i+D_n)^{\alpha_n}.$$

Dann ist

$$(i+D_x)^\alpha e^{ixy} = (i+y)^\alpha e^{ixy}.$$

Wir setzen $\delta = (1, \dots, 1)$ und im folgenden sind $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Schritt: $\text{op}(a)u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, da nach partieller Integration

$$\text{op}(a)u(x) = \underbrace{(i+x)^{-\delta}}_{\in L_2(\mathbb{R}_x^n)} \underbrace{\int e^{ix\xi} (i - D_\xi)^\delta [a(x, \xi) \widehat{u}(\xi)] d\xi}_{\text{beschränkt}}.$$

Nach dem Satz von Riesz und wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\text{op}(a)u\|_{L_2} = \sup_{0 \neq v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \frac{(\text{op}(a)u, v)_{L_2}}{\|v\|_{L_2}}. \quad (5.3)$$

2. Schritt: Wir nehmen nun an, dass a kompakten Träger in \mathbb{R}^{2n} hat. Dann

$$\begin{aligned} (\text{op}(a)u, v)_{L_2} &= \iiint e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) \overline{v(x)} dy d\xi dx \\ &= \iiint \int e^{i(x-y)\xi - ix\eta} a(x, \xi) u(y) \overline{\widehat{v}(\eta)} dy d\xi dx d\eta. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} (\text{op}(a)u, v)_{L_2} &= \iiint \int e^{i(x-y)\xi - ix\eta} (i - D_x)^\delta \\ &\quad \left\{ (i - D_\xi)^\delta a(x, \xi) \frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta} \right\} \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta} dy d\xi dx d\eta. \end{aligned}$$

Aus

$$(i - D)^\delta (fg) = \sum_{\alpha \leq \delta} (-1)^{|\alpha|} ((i - D)^{\delta-\alpha} f) D^\alpha g$$

folgt dann

$$\begin{aligned} (\text{op}(a)u, v)_{L_2} &= \sum_{\alpha \leq \delta} \iiint \int e^{i(x-y)\xi - ix\eta} (-1)^{|\alpha|} \left\{ D_x^\alpha (i - D_\xi)^\delta a(x, \xi) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ (i - D_x)^{\delta-\alpha} \frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta} \right\} \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta} dy d\xi dx d\eta \\ &= \sum_{\alpha \leq \delta} \iint e^{ix\xi} \left\{ D_x^\alpha (i - D_\xi)^\delta a(x, \xi) \right\} f_\alpha(x, \xi) g(x, \xi) dx d\xi, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= g(x, \xi; v) = \int e^{-ix\eta} \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta} d\eta \\ f_\alpha(x, \xi) &= f_\alpha(x, \xi; u) = (-1)^{|\alpha|} \int e^{-iy\xi} (i - D_x)^{\delta-\alpha} \frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta} dy. \end{aligned}$$

Die Hölder-Ungleichung impliziert

$$|(\operatorname{op}(a)u, v)_{L_2}| \leq C \pi(a) \sum_{\alpha \leq \delta} \|f_\alpha\|_{L_2(\mathbb{R}^{2n})} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Wegen des Satzes von Plancherel ist

$$\|g(x, \xi)\|_{L_2(\mathbb{R}_x^n)}^2 = (2\pi)^n \left\| \frac{\widehat{v}(\eta)}{(i + \xi - \eta)^\delta} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_\eta^n)}^2$$

und

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^{2n})}^2 &= \int \|g(x, \xi)\|_{L_2(\mathbb{R}_x^n)}^2 d\xi = (2\pi)^n \iint \left| \frac{\widehat{v}(\eta)}{(i + \xi - \eta)^\delta} \right|^2 d\xi d\eta \\ &= (2\pi)^n \int \frac{1}{(i + \xi)^{2\delta}} d\xi \int |\widehat{v}(\eta)|^2 d\eta = C \|v\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

Analog hat man

$$\begin{aligned} \|f_\alpha\|_{L_2(\mathbb{R}^{2n})}^2 &= \int \|f_\alpha(x, \xi)\|_{L_2(\mathbb{R}_\xi^n)}^2 dx = (2\pi)^n \iint \left| (i - D_x)^{\delta-\alpha} \frac{u(y)}{(i + x - y)^\delta} \right|^2 dx dy \\ &= (2\pi)^n \int \left| (i - D_x)^{\delta-\alpha} \frac{1}{(i + x)^\delta} \right|^2 dx \int |u(y)|^2 dy = C_\alpha \|u\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$|(\operatorname{op}(a)u, v)_{L_2}| \leq C \pi(a) \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2}.$$

3. Schritt: Sei nun a allgemein. Wähle $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0, 0) = 1$ und setze

$$a_\varepsilon(x, \xi) = \chi(\varepsilon x, \varepsilon \xi) a(x, \xi), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Dann gilt

$$\pi(a_\varepsilon) \leq C_\chi \pi(a) \quad \forall 0 < \varepsilon \leq 1$$

und, nach Schritt 2,

$$(\operatorname{op}(a)u, v)_{L_2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\operatorname{op}(a_\varepsilon)u, v)_{L_2} \leq C_\chi \pi(a) \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2}.$$

Für die Konvergenz setze $b_\varepsilon = a_\varepsilon - a$. Dann ist

$$[\operatorname{op}(b_\varepsilon)u](x) = \int e^{ix\xi} b_\varepsilon(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

wegen dominierter Konvergenz und $\operatorname{op}(b_\varepsilon)u$ ist beschränkt, gleichmäßig in ε . Wieder mit dominierter Konvergenz folgt

$$(\operatorname{op}(b_\varepsilon)u, v)_{L_2} = \int (B_\varepsilon u)(x) \overline{v(x)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Aus (5.3) folgt die Behauptung. □

5.4 Satz. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\text{op}(p) : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R},$$

stetig und ebenso

$$p \mapsto \text{op}(p) : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Nach Satz 5.3 gelten die Behauptungen für $\mu = s = 0$. Im allgemeinen setzen wir

$$a_p(x, \xi) = \langle \xi \rangle^{s-\mu} \# (p(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-s}).$$

Dann ist

$$p \mapsto a_p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^0(\mathbb{R}^n)$$

stetig und

$$\text{op}(p) = \Lambda^{\mu-s} \circ \text{op}(a_p) \circ \Lambda^s.$$

Anders gesagt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{op}(a_p)} & L_2(\mathbb{R}^n) \\ \Lambda^s \uparrow & & \downarrow \Lambda^{\mu-s} \\ H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{op}(p)} & H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Da Ordnungsreduktionen stetig sind, folgt die Behauptung. \square

5.5 Korollar (Elliptische Regularität). *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch. Es sei $u \in \cup_{t \in \mathbb{R}} H^t(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\text{op}(p)u = f$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Sei $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ eine Parametrix von p . Dann ist $r := q\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\text{op}(q)f = \text{op}(q\#p)u = u - \text{op}(r)u.$$

Nach Satz 5.4 sind $\text{op}(q)f \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ und $\text{op}(r)u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$. \square

5.6 Korollar. a) *Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ harmonisch,¹⁸ so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

b) *Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $\mu > 0$. Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $Pu = \lambda u$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

¹⁸d.h. $\Delta u = 0$

5.7 Satz (A priori-Abschätzung). Sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch mit $\mu > 0$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ die a priori-Abschätzung

$$C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|\text{op}(p)u\|_{H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C'_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Dabei hängen die Konstanten C_s und C'_s von p und s , aber nicht von u ab.

Beweis. Sei q eine Parametrix von p und $r := q\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt

$$\|u\|_{H^s} \leq \|\text{op}(q)\text{op}(p)u\|_{H^s} + \|\text{op}(r)u\|_{H^s} \leq C_1 (\|\text{op}(p)u\|_{H^{s-\mu}} + \|u\|_{H^{s-1}}) \leq C_2 \|u\|_{H^s}.$$

□

5.8 Bemerkung. Wie man im Beweis sieht, kann in obiger a priori-Abschätzung $\|u\|_{H^{s-1}}$ durch $\|u\|_{H^{s-k}}$ für jedes $k \geq 0$ ersetzt werden, insbesondere durch $\|u\|_{H^{s-\mu}}$. Fasst man somit $A := \text{op}(p)$ als unbeschränkten Operator in $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $D(A) = H^\mu(\mathbb{R}^n)$, so besagt obiger Satz, dass die Graphennorm

$$\|u\|_A := \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

äquivalent zur Norm $\|u\|_{H^\mu(\mathbb{R}^n)}$ ist.

Wie bereits erwähnt, ist die L_p -Stetigkeit von Pseudodifferentialoperatoren wesentlich schwerer zu beweisen. Es gilt folgender Satz, der hier nicht bewiesen wird.

5.9 Satz (L_p -Stetigkeit von Pseudodifferentialoperatoren). Sei $p \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Dann induziert p einen stetigen linearen Operator

$$\text{op}(p): L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n).$$

Die Abbildung $S^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(L_p(\mathbb{R}^n))$, $p \mapsto \text{op}(p)$, ist stetig.

5.10 Korollar. Sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, und sei $1 < p < \infty$. Dann induziert p einen stetigen Operator auf den Bessel-Potentialräumen

$$\text{op}(p): H_p^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_p^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Dabei sind die Bessel-Potentialräume $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ definiert als die Menge aller temperierten Distributionen u , für welche

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} := \|\mathcal{F}^{-1}\langle \xi \rangle^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

endlich ist.

Beweis. Der Beweis folgt über Ordnungsreduktion genauso wie der Beweis von Satz 5.4, wobei die entsprechende Stetigkeit von Λ^s jetzt direkt aus der Definition der Norm der Bessel-Potentialräume folgt. \square

5.11 Bemerkung. Das letzte Korollar besagt im Falle $\mu \in \mathbb{Z}$ insbesondere die Stetigkeit in den Sobolevräumen $W_p^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_p^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$ für ganzzahliges s , da diese mit den Bessel-Potentialräumen übereinstimmen, wie man unter Verwendung des Satzes von Michlin sieht. Durch reelle Interpolation erhält man die Stetigkeit in den Besovräumen $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow B_{pq}^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$.

6. Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

6.1 Worum geht's? Pseudodifferentialoperatoren treten in Anwendungen häufig nicht im \mathbb{R}^n auf, sondern in Gebieten oder auf Mannigfaltigkeiten (etwa im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie oder bei Randwertproblemen, wobei hier der Rand die Mannigfaltigkeit ist). Daher stellt sich die Frage, wie das Konzept der Pseudodifferentialoperatoren, welches ganz wesentlich im \mathbb{R}^n definiert war, auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden kann. Man beachte, dass die Fourier-Transformation nur im Ganzraum definiert ist, eine direkte Übertragung also nicht möglich ist.

a) Mannigfaltigkeiten: Eine schnelle Einführung

6.2 Definition (Mannigfaltigkeit). *a) Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis der Topologie, welcher lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n ist, d.h. zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p und einen Homöomorphismus $\kappa: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Fall heißt (U, κ) eine Karte von M .*

b) Ein Atlas von M ist eine Menge von Karten $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$, für welche $\bigcup_{j \in J} U_j = M$ gilt. Ein Kartenwechsel ist die Abbildung $\kappa_j \kappa_k^{-1}: \kappa_k(U_j \cap U_k) \rightarrow \kappa_j(U_j \cap U_k)$.

c) Eine C^m -Mannigfaltigkeit mit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist eine Mannigfaltigkeit mit C^m -Struktur, d.h. mit Karten $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$, für welche gilt

$$(i) \bigcup_{j \in J} U_j = M,$$

(ii) für $j, k \in J$ ist der Kartenwechsel $\kappa_j \kappa_k^{-1} \in C^m(\kappa_k(U_j \cap U_k); \mathbb{R}^n)$,

(iii) die Menge $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$ ist maximal bezüglich der Eigenschaften (i) und (ii). Eine C^∞ -Mannigfaltigkeit heißt auch glatte Mannigfaltigkeit.

d) Eine Mannigfaltigkeit M heißt geschlossen, falls sie kompakt ist und keinen Rand besitzt.

6.3 Definition (C^∞ -Funktionen auf Mannigfaltigkeiten). *a) Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$. Eine Funktion $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}$ heißt C^∞ -Funktion, falls $\varphi \circ \kappa_j^{-1} \in C^\infty(U_j)$ für alle $j \in J$ gilt. Man schreibt $\varphi \in C^\infty(M)$.*

b) Sei nun zusätzlich N eine weitere C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{(V_m, \pi_m) : m \in M\}$. Dann heißt eine Abbildung $F: M \rightarrow N$ glatt, falls für jedes $x \in M$, jedes U_j mit $x \in U_j$ und jedes V_m mit $F(x) \in V_m$ die Abbildung

$$\pi_m \circ F \circ \kappa_j^{-1}: F^{-1}(V_m) \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$$

unendlich oft differenzierbar ist. Man schreibt $F \in C^\infty(M, N)$.

6.4 Definition (Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten). Sei M eine geschlossene C^∞ -Mannigfaltigkeit. Sei $M = \bigcup_{j=1}^N U_j$ eine Überdeckung von M mit zugehörigen Karten $\kappa_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^k$. Seien $\varphi_j \in C^\infty(M)$ mit $\text{supp } \varphi_j \subset U_j$ und $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$ auf M .

a) Für $s \in [0, \infty)$ und $1 < p < \infty$ definiert man den L^p -Sobolevraum $W_p^s(M)$ durch

$$W_p^s(M) := \left\{ u: M \rightarrow \mathbb{C} \mid (u \cdot \varphi_j) \circ \kappa_j^{-1} \in W_p^s(\mathbb{R}^n) \quad (j = 1, \dots, N) \right\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{W_p^s(M)} := \left(\sum_{j=1}^N \|(u \cdot \varphi_j) \circ \kappa_j^{-1}\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}.$$

b) Für $s < 0$ definiert man $W_p^s(M)$ als den topologischen Dualraum von $W_q^{-s}(M)$ bezüglich der dualen Paarung $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{L^2(M)}$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Im Falle $p = 2$ schreibt man auch $H^s(M) := W_2^s(M)$ für $s \in \mathbb{R}$.

6.5 Bemerkung. Bei anderer Wahl von U_j und φ_j erhält man eine andere, aber äquivalente Norm.

6.6 Definition und Satz (Kotangentenraum). Seien M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $a \in M$.

a) Falls für $f \in C^\infty(M)$ die Gleichheit $D(f \circ \kappa^{-1})(\kappa(a)) = 0$ für eine Karte κ gilt, so gilt dies für alle Karten. In diesem Fall sagt man, dass die Ableitung von f an der Stelle a verschwindet.

b) Die Menge Z_a aller Funktionen in $C^\infty(M)$, für welche die Ableitung an der Stelle a verschwindet, ist ein Untervektorraum von $C^\infty(M)$.

c) Der Kotangentenraum T_a^*M an der Stelle a ist definiert als $T_a^*M := C^\infty(M)/Z_a$. Die Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ an der Stelle a ist definiert als das Bild von f in diesem Quotientenraum und wird mit $(df)_a$ bezeichnet. Die Ableitung $(df)_a$ ist auch definiert, falls $f \in C^\infty(U)$ für eine Umgebung U von a .

Beweis. a) Sei $g := f \circ \kappa^{-1}$ und $h := f \circ \pi^{-1}$ für zwei Karten κ und π , welche an der Stelle a definiert sind. Dann gilt

$$g = f \circ \kappa^{-1} = f \circ \pi^{-1} \circ (\pi \circ \kappa^{-1}),$$

und somit $Dg(\kappa(a)) = Dh(\pi(a))(D\Phi)(\kappa(a))$ mit $\Phi := \pi \circ \kappa^{-1}$. Nach Definition einer differenzierbaren Struktur ist Φ und Φ^{-1} glatt, und damit ist $D\Phi(\kappa(a))$ invertierbar. Somit ist $Dg(\kappa(a)) = 0$ genau dann, wenn $Dh(\pi(a)) = 0$.

b) Dass Z_a ein Untervektorraum ist, ist sofort klar, da die Ableitung in lokalen Koordinaten linear ist. \square

6.7 Lemma. Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $a \in M$.

a) Der Kotangententialraum T_a^*M ist ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

b) Sei $\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte von M mit $a \in U$. Dann ist $\{(d\kappa_1)_a, \dots, (d\kappa_n)_a\}$ eine Basis von T_a^*M . Für $f \in C^\infty(M)$ ist

$$(df)_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}(\kappa(a)) \cdot (d\kappa_i)_a. \quad (6.1)$$

Beweis. In der Situation von Teil b) sei

$$g := f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial y_i}(\kappa(a)) \cdot \kappa_i.$$

Zu zeigen ist, dass die Ableitung von g an der Stelle a verschwindet. Nach Satz 6.6 ist diese Eigenschaft unabhängig von der gewählten Karte, wir dürfen also die Karte κ wählen. Es gilt

$$\begin{aligned} & [D(g \circ \kappa^{-1})](\kappa(a)) \\ &= D(f \circ \kappa^{-1})(\kappa(a)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}(\kappa(a)) \cdot D(\kappa_i \circ \kappa^{-1})(\kappa(a)) \\ &= D(f \circ \kappa^{-1})(\kappa(a)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}(\kappa(a)) e_i^t \\ &= \left[D(f \circ \kappa^{-1}) - \left(\frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_n} \right) \right](\kappa(a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Beachte hierbei, dass $\kappa_i \circ \kappa^{-1}(y) = y_i$ und damit $D(\kappa_i \circ \kappa^{-1})(y) = e_i^t$, wobei e_i den i -ten Einheitsvektor des \mathbb{R}^n bezeichnet. Somit gilt $(dg)_a = 0$, was (6.1) zeigt. Insbesondere ist $\text{span}\{(d\kappa_1)_a, \dots, (d\kappa_n)_a\} = Z_a$.

Falls andererseits $\sum_{i=1}^n \lambda_i (d\kappa_i)_a = 0$ gilt, so verschwindet die Ableitung von $\sum_{i=1}^n \lambda_i \kappa_i$ an der Stelle a . Unter den lokalen Koordinaten κ ist diese Ableitung aber gleich $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wie die obige Rechnung zeigt. Damit folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, d.h. $\{(d\kappa_1)_a, \dots, (d\kappa_n)_a\}$ ist linear unabhängig, und Z_a ist ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. \square

6.8 Bemerkung. a) Statt von einer Karte κ spricht man meist von lokalen Koordinaten und schreibt x . Man unterscheidet dann häufig nicht mehr zwischen der Funktion $f \in C^\infty(M)$ und der Darstellung $f \circ \kappa^{-1}$ in lokalen Koordinaten. In diesem Sinn lässt sich die Gleichheit (6.1) etwas ungenau schreiben als

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

b) Wir betrachten hier im Hinblick auf spätere Anwendungen nur den Kotangententialraum T_a^*M . Der Tangentialraum T_aM kann nun definiert werden als Dualraum von T_a^*M ; es gibt aber auch direkte Definitionen von T_aM , und dann kann der Kotangententialraum als Dualraum des Tangentialraums betrachtet werden.

6.9 Lemma (Koordinatenwechsel). Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $a \in M$. Seien weiter $\kappa: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Karten von M mit $a \in U \cap \tilde{U}$, und sei $\Phi := \kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1}: \tilde{U} \rightarrow U$ der zugehörige Kartenwechsel (Koordinatenwechsel). Dann gilt in T_a^*M die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^n y_i (d\kappa_i)_a = \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j (d\tilde{\kappa}_j)_a$$

mit

$$y = [(D\Phi)(\tilde{\kappa}(a))]^{-t} \tilde{y}.$$

Hierbei bezeichnet $(\cdot)^{-t}$ das Inverse der transponierten Matrix.

Beweis. Wir wenden Lemma 6.7 auf κ_i an und erhalten

$$(d\kappa_i)_a = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\kappa_i \circ \tilde{\kappa}^{-1})}{\partial x_j}(\tilde{\kappa}(a)) \cdot (d\tilde{\kappa}_j)_a.$$

Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i (d\kappa_i)_a &= \sum_{i,j=1}^n y_i \frac{\partial(\kappa_i \circ \tilde{\kappa}^{-1})}{\partial x_j}(\tilde{\kappa}(a)) \cdot (d\tilde{\kappa}_j)_a \\ &= \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j (d\tilde{\kappa}_j)_a \end{aligned}$$

mit $\tilde{y}^t = y^t (D\Phi)(\tilde{\kappa}(a))$, was zu zeigen war. \square

Das letzte Lemma zeigt uns, wie sich die Kotangententialräume bei einem Kartenwechsel verhalten. Dies ermöglicht es, den Kotangententialraum selbst mit der Struktur einer Mannigfaltigkeit zu versehen. Man erhält eine glatte $(2n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

6.10 Definition und Satz (Kotangentialbündel). a) Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist das Kotangentialbündel T^*M von M definiert durch $T^*M := \bigcup_{a \in M} T_a^*M$ (disjunkte Vereinigung), versehen mit folgenden Karten: Sei $\kappa: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte von U . Definiere dazu

$$\psi: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{a \in U} T_a^*M, (a, y) \mapsto \sum_{i=1}^n y_i (d\kappa_i)_a.$$

Dann ist ψ bijektiv, und

$$\Psi := (\varphi, \text{id}) \circ \psi^{-1}: V := \bigcup_{a \in U} T_a^*M \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

ist eine Karte für T^*M . Damit wird T^*M zu einer glatten $(2n)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, dem Kotangentialbündel über M .

b) Seien nun $\kappa: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Karten von M mit $a \in U \cap \tilde{U}$, und sei $\Phi := \tilde{\kappa}^{-1} \circ \kappa$ der zugehörige Kartenwechsel. Dann ist für die entsprechenden Karten $\Psi, \tilde{\Psi}$ von T^*M der Kartenwechsel gegeben durch

$$(\tilde{\Psi}^{-1} \circ \Psi)(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

mit

$$x = \Phi(\tilde{x}), \quad y = [(D\Phi)(\tilde{\kappa}(a))]^{-t} \tilde{y}.$$

Beweis. Die Bijektivität von ψ ist klar nach Lemma 6.7 b). Man beachte, dass $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist. Die Formel für den Kartenwechsel ergibt sich direkt aus Lemma 6.9. Man beachte, dass Φ glatt ist und somit auch der Kartenwechsel in T^*M glatt ist, d.h. man erhält eine glatte $(2n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. \square

Das Kotangentialbündel und das analog definierte Tangentialbündel TM sind Beispiele von Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M . Die entscheidende Eigenschaft ist dabei die Existenz einer (lokalen) Trivialisierung, wie sie in folgender Definition beschrieben ist.

6.11 Definition (Vektorbündel). Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, V eine weitere Mannigfaltigkeit und $\pi: V \rightarrow M$ eine stetige Abbildung. Dann heißt V ein (komplexes) Vektorbündel der Dimension d über M , falls gilt:

- (i) Für jedes $x \in M$ ist $V_x := \pi^{-1}(\{x\})$ ein komplexer Vektorraum der Dimension d . Der Raum V_x heißt Fiber über x .
- (ii) Es existiert eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{j \in J'} M_j$ von M so, dass V trivial über jedem M_j ist, d.h. es gibt Homöomorphismen („Trivialisierungen“)

$$h_j: \pi^{-1}(M_j) \rightarrow M_j \times \mathbb{C}^d$$

mit $h_j(V_x) = \{x\} \times \mathbb{C}^d$ für alle $x \in M_j$, wobei die induzierte Abbildung $\text{pr}_{\mathbb{C}^d} \circ h_j: V_x \rightarrow \mathbb{C}^d$ ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen ist. Hierbei ist $\text{pr}_{\mathbb{C}^d}: V_j \times \mathbb{C}^d, (x, v) \rightarrow v$.

Falls M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit ist, so heißt das Vektorbündel V glatt, falls

$$h_k h_j^{-1}: (M_j \cap M_k) \times \mathbb{C}^d \rightarrow (M_j \cap M_k) \times \mathbb{C}^d$$

Ersetzt man \mathbb{C}^d durch \mathbb{R}^d , so erhält man ein reelles Vektorbündel.

b) Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

6.12 Satz (Koordinatentransformation). Seien $\mu \in \mathbb{R}$, $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$, $P := \text{op}(p)$. Es existiere ein $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ mit $P = \varphi P(\varphi \cdot)$, d.h. P sei lokalisiert in U . Sei $\Phi: \tilde{U} \rightarrow U$ ein C^∞ -Diffeomorphismus. Betrachte den pull-back $\Phi^*P := [P(\cdot \circ \Phi^{-1})] \circ \kappa$ von P unter Φ . Dann ist Φ^*P wieder ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ , und der führende Term in der Asymptotik des Symbols von Φ^*P ist $p(\Phi(x), (D\Phi(x))^{-t}\xi)$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mu < -n$ gilt, d.h. dass die Integrale existieren; im allgemeinen Fall muss man Oszillatorintegrale verwenden, d.h. mit einer Funktion $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ regularisieren. Für $B = \Phi^*P$ gilt

$$\begin{aligned} Bu(x) &= \iint e^{i(\Phi(x)-y)\xi} p(\Phi(x), \xi) u(\Phi^{-1}(y)) dy d\xi \\ &= \iint e^{i(\Phi(x)-\Phi(z))\xi} p(\Phi(x), \xi) u(z) |\det D\Phi(z)| dz d\xi, \end{aligned}$$

wobei $z = \Phi^{-1}(y)$ substituiert wurde. Schreibe nun

$$\begin{aligned} \Phi(x) - \Phi(z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi(z + t(x-z)) dt \\ &= \int_0^1 D\Phi(z + t(x-z)) dt (x-z) =: \Psi(x, z) \cdot (x-z), \end{aligned}$$

wobei $\Psi \in C^\infty(V \times V; C^{n \times n})$ mit $\Psi(z, z) = D\kappa(z)$. Ohne Einschränkung sei $\Psi(x, z)$ für alle $x, z \in V$ invertierbar (sonst verkleinere man V durch eine Partition der Eins). Substituiere in obigem Integral $\eta = \Psi(x, z)^t \xi$ und erhalte

$$Bu(x) = \iint e^{i(x-z)\eta} p(\Phi(x), [\Psi(x, z)^{-1}]^t \eta) |\det D\Phi(z)| \cdot |\det \Psi(x, z)|^{-1} dz d\eta.$$

Somit ist B ein Pseudodifferentialoperator mit dem Doppelsymbol

$$q(x, \xi, x') = p(\Phi(x), [\Psi(x, x')^{-1}]^t \eta) \cdot |\det D\Phi(x')| \cdot |\det \Psi(x, z)|^{-1}.$$

Damit erhält man die asymptotische Entwicklung für das Symbol $b(x, \xi)$ von B :

$$b(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} D_\xi^\alpha \partial_{x'}^\alpha q(x, \xi, x') \Big|_{x'=x}.$$

Für $\alpha = 0$ ist der Term gegeben durch $p(\Phi(x), (D\Phi(x))^{-t}\xi)$. □

6.13 Definition (Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten). Sei M eine geschlossene n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein Operator $P: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ist ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $\mu \in \mathbb{R}$, falls gilt:

- (i) Für $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ mit $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$ ist $\varphi P(\psi \cdot)$ ein Integraloperator mit C^∞ -Kern.
- (ii) Sei $\kappa: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M . Dann ist für $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(U)$ der Operator $\kappa_*[\varphi P(\psi \cdot)]$ ein Pseudodifferentialoperator in \mathbb{R}^n der Ordnung μ .
Dabei ist $\kappa_*[\varphi P(\psi u)](x) := [\varphi P(\psi \cdot (u \circ \kappa))](\kappa^{-1}(x))$ der push-forward von $\varphi P(\psi \cdot)$ unter κ .

Die Menge aller Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung μ auf M wird mit $\Psi^\mu(M)$ bezeichnet. Falls alle auftretenden Pseudodifferentialoperatoren in \mathbb{R}^n klassisch sind, heißt auch P ein klassischer Pseudodifferentialoperator auf M ; Schreibweise $P \in \Psi_{\text{cl}}(M)$.

6.14 Bemerkung. a) Man kann zeigen, dass für einen linearen Operator $A: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) A ist ein Integraloperator mit C^∞ -Kern,
- (ii) $A: H^{-s}(M) \rightarrow H^s(M)$ ist stetig für alle $s \geq 0$,
- (iii) A ist Pseudodifferentialoperator der Ordnung $-\infty$.

Falls diese Aussagen gelten, heißt A ein glättender Operator auf M .

b) Da bei Kartenwechsel nach Satz 6.12 die Klasse der Pseudodifferentialoperatoren invariant bleibt, ist die Definition 6.13 korrekt.

6.15 Bemerkung. Sei nun P ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ auf M . Dann existieren folgende Darstellungen von P :

(i) Sei $\{\varphi_j : j = 1, \dots, N\}$ eine Partition von M , wobei wir annehmen können, dass $\text{supp } \varphi_j$ und $\text{supp } \varphi_k$ entweder disjunkt sind oder in einer gemeinsamen Koordinatenumgebung liegen, d.h. im Definitionsbereich einer Karte. Dann gilt $P = \sum_{j,k=1}^N \varphi_j P \varphi_k$, und $\varphi_j P \varphi_k$ ist Integraloperator mit C^∞ -Kern, falls $\text{supp } \varphi_j \cap \text{supp } \varphi_k = \emptyset$, und $\kappa_*(\varphi_j P \varphi_k)$ ist Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ auf \mathbb{R}^k , falls $\text{supp } \varphi_j \cup \text{supp } \varphi_k \subset U$ für eine Karte $\kappa: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ gilt.

(ii) Sei $M = \bigcup_{j=1}^N U_j$ eine offene Überdeckung mit Karten $\kappa_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\{\varphi_j : j = 1, \dots, N\}$ eine zugehörige C^∞ -Partition der Eins und $\psi_j \in \mathcal{D}(U_j)$ mit $\psi_j = 1$ auf $\text{supp } \varphi_j$. Dann gilt

$$Pu = \sum_{j=1}^N \varphi_j P[(\psi_j + (1 - \psi_j))u] = \sum_{j=1}^N \varphi_j P(\psi_j u) + Tu,$$

wobei $(\kappa_j)_*[\varphi_j P \psi_j]$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ auf \mathbb{R}^n ist und T ein glättender Operator auf M ist.

6.16 Satz. *Sei M eine geschlossene C^∞ -Mannigfaltigkeit.*

a) *Sei $P \in \Psi^\mu(M)$. Dann besitzt P eine stetige Fortsetzung $P: H^s(M) \rightarrow H^{s-\mu}(M)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

b) *Seien $P_1 \in \Psi^{\mu_1}(M)$, $P_2 \in \Psi^{\mu_2}(M)$. Dann ist $P_1 P_2 \in \Psi^{\mu_1 + \mu_2}(M)$.*

c) *Sei $P \in \Psi^\mu(M)$ und $P^*: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ein linearer Operator mit*

$$\langle Pu, v \rangle_{L^2(M)} = \langle u, P^*v \rangle_{L^2(M)} \quad (u, v \in C^\infty(M)).$$

Dann ist $P^ \in \Psi^\mu(M)$.*

Beweis. Dies folgt mit Partition der Eins aus den jeweiligen Aussagen im \mathbb{R}^n . \square

6.17 Definition (Elliptische Pseudodifferentialoperatoren). a) *Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, und sei $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$ ein Atlas von M . Definiere φ_j und ψ_j wie in Bemerkung 6.15 (ii) und betrachte zu $P \in \Psi(M)$ die Symbole p_j von $(\kappa_j)_*[\varphi_j P \psi_j] \in \Psi(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die Familie $\{p_j : j \in J\}$ das (komplette) Symbol von P .*

b) *Falls in der Situation von a) sogar $P \in \Psi_{\text{cl}}(M)$ gilt, so heißt die durch die Familie $\{p_{j0} : j = 1, \dots, N\}$ der Hauptsymbole gegebene Abbildung $p_0: T^*M \rightarrow \mathbb{C}$ das Hauptsymbol von P .*

c) *Sei nun M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $P \in \Psi_{\text{cl}}(M)$. Dann heißt P elliptisch, falls*

$$p_0(x, \xi) \neq 0 \quad ((x, \xi) \in T^*M \setminus \{0\}).$$

6.18 Bemerkung. Man beachte in obiger Definition, dass das Hauptsymbol eines klassischen Pseudodifferentialoperators $Q \in \Psi_{\text{cl}}(\mathbb{R}^n)$ der führende homogene Teil in der asymptotischen Entwicklung des Symbols ist. Nach Satz 6.12 ist das Hauptsymbol invariant unter Koordinatenwechsel auf T^*M und damit als globale Funktion auf T^*M definiert. Die 0 in T^*M ist dabei definiert durch den Wert 0 als Element von T_a^*M für jedes $a \in M$ (der sogenannte Nullschnitt in T^*M).