Diplomarbeit

V-Topologien auf Körpererweiterungen

Katharina Dupont

Universität Konstanz

im Sommersemester 2010

Gutachter: Prof. Dr. Alexander Prestel
Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Nichttriviale Absolutbeträge und Bewertungen definieren Topologien mit gewissen Eigenschaften, die so genannten V-Topologien.

In dieser Arbeit werden wir uns mit Fortsetzungen von V-Topologien auf algebraische Körpererweiterungen beschäftigen. Dabei interessiert uns insbesondere, unter welchen Voraussetzungen sich eine V-Topologie eindeutig auf eine Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Im ersten Kapitel wollen wir zunächst einige Definitionen und Sätze formulieren, die wir im Folgenden verwenden werden, sowie einige Notationen einführen.

Wir werden im ersten Abschnitt zunächst definieren, was wir unter einer V-Topologie verstehen. Dabei werden wir V-Topologien über bestimmte Eigenschaften definieren. Für den Beweis, dass die so definierten Topologien gerade die von nichttrivialen Absolutbeträgen und Bewertungen definierten Topologien sind, verweisen wir auf [EnPr].

Der zweite Abschnitt zum Thema Filter dient vor allem dazu, einige Definitionen und Sätze zu formulieren, auf die wir später verweisen werden. Außerdem werden wir einige Notationen einführen.

Im letzten Abschnitt des Kapitels werden wir uns mit der Frage beschäftigen, wann zwei Bewertungen oder Absolutbeträge die gleiche Topologie definieren. Hierzu werden wir einige nützliche Äquivalenzen angeben. Außerdem werden wir zeigen, dass es keine Topologie gibt, die sowohl von einem archimedischen Absolutbetrag als auch von einer Bewertung definiert wird.

Im zweiten Kapitel werden wir uns mit Fortsetzungen von V-Topologien beschäftigen.

Dazu definieren wir im ersten Abschnitt zunächst, wann eine Topologie Fortsetzung einer V-Topologie ist. Außerdem zeigen wir unter anderem, dass Fortsetzungen von Bewertungen und Absolutbeträgen auf algebraische Körpererweiterungen immer auch Fortsetzungen der von ihnen definierten Topologien definieren. Hieraus werden wir im zweiten Abschnitt folgern, dass sich jede V-Topologie auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Im dritten Abschnitt untersuchen wir, welche Bedingungen wir an die Bewertungen beziehungsweise Absolutbeträge stellen müssen, damit sich die erzeugte Topologie eindeutig auf eine algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt. Für von Bewertungen definierte Topologien ist es ausreichend, die Existenz einer eindeutig fortsetzbaren Bewertung, die die Topologie definiert, zu fordern. Wird die Topologie von einem archimedischen

Absolutbetrag definiert, werden wir zunächst die eindeutige Fortsetzbarkeit aller Absolutbeträge fordern, die die Topologie definieren. Allerdings werden wir uns diesen Fall im dritten Kapitel noch genauer ansehen.

Für Bewertungen gilt, dass die eindeutige Fortsetzbarkeit auf alle algebraischen Körpererweiterungen äquivalent ist zur eindeutigen Fortsetzbarkeit auf alle separablen Körpererweiterungen sowie zur eindeutigen Fortsetzbarkeit auf alle endlichen Körpererweiterungen. Im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels werden wir uns überlegen, in wie weit wir für V-Topologien ähnliche Ergebnisse bekommen.

In den letzten drei Kapiteln werden wir uns mit Verallgemeinerungen des aus der Bewertungstheorie bekannnten Begriffs „henselsch“ auf V-topologische Körper beschäftigen.

Zunächst werden wir uns im dritten Kapitel den 1975 von F. Berrondo in [Be] eingeführten Begriff „topologisch henselsch“ ansehen. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die topologisch henselschen Körper gerade die sind, für die sich die Topologie auf jede algebraische Körpererweiterung eindeutig fortsetzen lässt. Für von Bewertungen definierte Topologien folgt dies sofort aus dem im zweiten Kapitel Gezeigten. Um die Äquivalenz auch für von archimedischen Absolutbeträgen definierte Topologien zeigen zu können, ist noch etwas Vorarbeit nötig.

Hierzu werden wir uns im ersten Abschnitt mit Einbettungen in die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und die so definierten Absolutbeträge beschäftigen. Es wird sich herausstellen, dass es zu jeder von einem Absolutbetrag definierten Topologie genau einen durch eine Einbettung nach $\mathbb{C}$ definierten Absolutbetrag gibt, der die Topologie definiert. Diese Absolutbeträge werden wir etwas genauer untersuchen. Insbesondere werden wir zeigen, dass eine von einem Absolutbetrag definierte Topologie sich genau dann eindeutig auf eine algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt, wenn der durch eine Einbettung definierte Absolutbetrag, der die Topologie definiert, sich eindeutig fortsetzen lässt.

Im zweiten Abschnitt werden wir uns mit Anordnungen beschäftigen. Wir werden durch archimedische Anordnungen definierte Topologien untersuchen, bei denen es sich um einen Spezialfall der durch archimedische Absolutbeträge definierten Topologien handelt. Außerdem werden wir den Begriff „reell abgeschlossen“ definieren und einige Äquivalenzen formulieren, da reell abgeschlossene Körper bei der Definition der topologisch henselschen Körper eine Rolle spielen werden.

Im letzten Abschnitt definieren wir den Begriff „topologisch henselsch“. Wir zeigen, dass die topologisch henselschen Körper gerade die V-topologischen Körper sind, deren Topologien sich eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lassen.

Anschließend werden wir uns im vierten Kapitel mit dem 1978 von A. Prestel und M. Ziegler in [PrZi] definierten Begriff „t-henselsch“ beschäftigen. Der Vorteil dieser Definition liegt darin, dass es sich um eine lokale Eigenschaft handelt. Dies bedeutet, dass jede Eigenschaft, die sich durch lokale Sätze ausdrücken lässt, genau dann in allen t-henselschen Körpern gilt, wenn es einen t-henselschen Körper gibt, in dem sie gilt.

Im ersten Abschnitt werden wir zunächst definieren, was ein lokaler Satz ist. Hierzu werden wir einige Begriffe aus der mathematischen Logik einführen. Außerdem werden wir den Begriff „ω-vollständig“ definieren. Wir werden zeigen, dass es zu jedem Körper mit Filter einen lokal äquivalenten Körper mit Filter gibt, der ω-vollständigen ist. Dieser Satz und einige weitere Sätze, die wir am Ende des Abschnitts zeigen, werden wir im nächsten Abschnitt brauchen.

Im zweiten Abschnitt werden wir zunächst den Begriff „t-henselsch“ definieren und anschließend einige Äquivalenzen zu diesem Begriff zeigen.

Im letzten Abschnitt werden wir definieren, wann eine Bewertung n-henselsch heißt. Für t-henselsche Körper, deren Topologien nicht von Absolutbeträgen definiert werden, zeigen wir, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine n-henselsche Bewertung gibt, die die Topologie definiert. Hieraus können wir folgern, dass sich die Topologien eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzen lassen.

Im fünften Kapitel werden wir die Definition von Berrondo mit der Definition von Prestel und Ziegler vergleichen.

Zunächst werden wir zeigen, dass jeder topologisch henselsche Körper auch t-henselsch ist.

Im zweiten Abschnitt werden wir sehen, dass ein Körper mit einer von einem Absolutbetrag definierten Topologie genau dann t-henselsch ist, wenn er topologisch henselsch ist. Mit dem im dritten und vierten Kapitel Gezeigten können wir aus dieser Äquivalenz folgern, dass sich bei allen t-henselschen Körpern die Topologie eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Anschließend konstruieren wir einen t-henselschen Körper, der nicht topologisch henselsch ist, und zeigen somit, dass es sich bei den topologisch henselschen Körpern um eine echte Teilklasse der t-henselschen Körper handelt.

1 Vorbereitungen

In diesem Kapitel wollen wir zunächst Definitionen für einige in dieser Arbeit wichtige Begriffe angeben und einige Notationen einführen. Wir werden außerdem einige zumeist wohlbekannte Begriffe und Sätze formulieren, um später darauf verweisen zu können. Abschließend beweisen wir noch ein einfaches Lemma.

1.1 V-Topologien

Wir werden zunächst definieren, was wir unter einer V-Topologie verstehen.

1.1.1 Definition und Satz. Sei K ein Körper. Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(K)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von K, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(V 1) $\bigcap \mathcal{B} := \bigcap_{U \in \mathcal{B}} U = \{0\}$ und $\{0\} \notin \mathcal{B}$

(V 2) $\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \exists W \in \mathcal{B} \quad W \subseteq U \cap V$

(V 3) $\forall U \in \mathcal{B} \quad \exists V \in \mathcal{B} \quad V - V \subseteq U$

(V 4) $\forall U \in \mathcal{B} \quad \forall x, y \in K \quad \exists V \in \mathcal{B} \quad (x + V)(y + V) \subseteq xy + U$

(V 5) $\forall U \in \mathcal{B} \quad \forall x \in K^\times \quad \exists V \in \mathcal{B} \quad (x + V)^{-1} \subseteq x^{-1} + U$

(V 6) $\forall U \in \mathcal{B} \quad \exists V \in \mathcal{B} \quad \forall x, y \in K \quad xy \in V \Rightarrow x \in U \vee y \in U$

Dann gilt

(a)
$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subseteq K \mid \forall x \in U \quad \exists V \in \mathcal{B} \quad x + V \subseteq U\}$$
ist eine Topologie auf K.
Eine solche Topologie nennen wir *V-Topologie.*
$(K, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ heißt *V-topologischer Körper.*
Wir sagen, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ist die *von $\mathcal{B}$ induzierte Topologie.*

(b) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ist eine nichttriviale Hausdorfftopologie.

(c) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ist eine Körpertopologie.

Wir definieren V-Topologien über Forderungen, die wir an den Filter der Nullumgebungen stellen. Aus den Forderungen $(V\,1)$ und $(V\,2)$ folgt, dass es sich um nichttriviale Hausdorfftopologien handelt. Nimmt man Forderung $(V\,3)$ bis $(V\,5)$ hinzu, so bekommt man die Stetigkeit der Körperoperationen $+$ und $\cdot$ sowie des Invertierens und damit die Eigenschaften einer Körpertopologie. Die Forderung $(V\,6)$ sagt aus, dass wenn ein Produkt zweier Körperelemente nahe bei Null liegt, bereits einer der Faktoren nahe bei Null liegt. Dies ist die Besonderheit der V-Topologien.

Der Begriff V-Topologie leitet sich vom englischen Wort „valuation“ für Bewertung her. Es lässt sich zeigen, dass die V-Topologien gerade die durch Bewertungen und Absolutbeträge definierten Topologien sind. Diese Tatsache erweist sich im Folgenden als überaus nützlich, da wir aus vielen für Bewertungen und Absolutbeträge bekannten Sätzen sehr einfach entsprechende Sätze für V-Topologien bekommen. Die eigentliche Definition werden wir nur an wenigen Stellen verwenden.

Den Beweis des folgenden Satzes findet man zum Beispiel bei [EnPr] in Anhang B (Satz B.1).

1.1.2 Satz. *Sei K ein Körper und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf K.*

$(K, \mathcal{T})$ ist genau dann ein V-topologischer Körper, wenn $\mathcal{T}$ durch einen nichttrivialen Absolutbetrag oder eine nichttriviale Bewertung auf K definiert wird.

1.2 Filter

Die Menge $\mathcal{B}$ aus Definition 1.1.1 ist eine Basis des Nullumgebungsfilters von $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Körpertopologien sind bereits durch die Menge der Nullumgebungen eindeutig bestimmt, wir können also zeigen, dass zwei Körpertopologien gleich sind, indem wir zeigen, dass die Nullumgebungsfilter gleich sind. Auch einige Definitionen beziehen sich auf die Nullumgebungsfilter. Wir definieren zum Beispiel in Definition 4.2.1 den Begriff „t-henselsch“ zunächst für Körper mit Filter und definieren dann, dass ein topologischer Körper t-henselsch ist, falls der Körper mit dem Nullumgebungsfilter t-henselsch ist. Dieses Vorgehen erweist sich besonders dann als sinnvoll, wenn Beweise mit den Methoden der mathematischen Logik geführt werden.

Wir definieren Filter allgemein wie folgt:

1.2.1 Definition. Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge, sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M.

$\mathcal{F}$ heißt *Filter* auf M, falls die folgenden Bedingungen gelten:

$(F\,1)$ $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \neq \emptyset$

$(F\,2)$ $\forall U, V \in \mathcal{P}(M) \quad U, V \in \mathcal{F} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{F}$

$(F\,3)$ $\forall U, V \in \mathcal{P}(M) \quad (U \in \mathcal{F} \wedge U \subseteq V) \Rightarrow V \in \mathcal{F}$

Wir zeigen nun, dass für jedes Element einer Menge die Umgebungen bezüglich einer Topologie einen Filter bilden. Damit ist insbesondere die Menge der Nullumgebungen ein Filter.

1.2.2 Lemma und Notation. Sei M eine nichtleere Menge und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M.

Dann ist zu jedem $x \in M$ die Menge der Umgebungen von x

$$\mathcal{U}_x := \{U \subseteq M \mid \exists V \in \mathcal{T} \quad (x \in V) \wedge (V \subseteq U)\}$$

ein Filter auf M.

Den Filter der Nullumgebungen $\mathcal{U}_0$ bezeichnen wir auch mit $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

Beweis: Sei $x \in M$. Wir zeigen, dass $\mathcal{U}_x$ die Bedingungen $(F\,1)$ bis $(F\,3)$ erfüllt.

$(F\,1)$ Für jedes $U \in \mathcal{U}_x$ gilt $x \in U$ und damit $U \neq \emptyset$.
Es ist $M \in \mathcal{U}_x$ und damit $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$.

$(F\,2)$ Sind $U, V \in \mathcal{U}_x$, dann gibt es $U_0, V_0 \in \mathcal{T}$ mit $x \in U_0$, $x \in V_0$, $U_0 \subseteq U$ und $V_0 \subseteq V$.
Es ist $U_0 \cap V_0 \in \mathcal{T}$ mit $U_0 \cap V_0 \subseteq U \cap V$ und $x \in U_0 \cap V_0$.
Also ist $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

$(F\,3)$ Seien $U \in \mathcal{U}_x$ und $V \supseteq U$. Es gibt ein $W \in \mathcal{T}$ mit $W \subseteq U$ und $x \in W$. Da $U \subseteq V$ ist, gilt auch $W \subseteq V$ und damit $V \in \mathcal{U}_x$. □

Um einen Filter eindeutig zu bestimmen, reicht es bereits aus, eine Filterbasis anzugeben. Eine Filterbasis ist eine Menge, die die Eigenschaft $(F\,1)$ und eine abgeschwächte Form der Eigenschaft $(F\,2)$ erfüllt. Zu jeder solchen Menge gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Filter, der diese Menge enthält.

1.2.3 Definition und Satz. Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge.
Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ mit

$(FB\,1)$ $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \neq \emptyset$

$(FB\,2)$ $\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \exists W \in \mathcal{B} \quad W \subseteq U \cap V$

Dann ist

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} := \{U \subseteq M \mid \exists V \in \mathcal{B} \quad V \subseteq U\}$$

ein Filter.

Wir sagen, $\mathcal{B}$ ist eine *Filterbasis.*

$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ heißt der *von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter.*

1.2.4 Definition und Lemma. Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf K. Dann wird durch

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subseteq K \mid \forall\, x \in U \quad \exists\, V \in \mathcal{B} \quad x + V \subseteq U\}$$

eine Körpertopologie auf K definiert.

Wir bezeichnen $\mathcal{B}$ als *Nullumgebungsbasis* von $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

1.2.5 Bemerkung. Jede Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(K)$, die $(V1)$ bis $(V6)$ aus Definition 1.1.1 erfüllt, ist eine Filterbasis.

Wir werden nun für Absolutbeträge, Bewertungen, Bewertungsringe und Anordnungen je eine Nullumgebungsbasis der definierten Topologie angeben.

Wie in der Bewertungstheorie üblich, werden wir an einigen Stellen mit Bewertungsringen anstelle von Bewertungen argumentieren. Hierfür ist es wichtig zu wissen, dass die von einer Bewertung erzeugte Topologie gleich der vom zugehörigen Bewertungsring erzeugten Topologie ist. Daher werden wir in Satz 1.2.8 zeigen, dass dies mit der Definition aus 1.2.6 gilt.

Durch archimedische Anordnungen definierte Topologien werden wir im Kapitel über topologisch henselsche Körper genauer untersuchen. Da jeder archimedisch angeordnete Körper in $\mathbb{R}$ eingebettet werden kann, wird durch jede archimedische Anordnung ein archimedischer Absolutbetrag definiert. Wir werden im vierten Kapitel sehen, dass die durch die Anordnung definierte Topologie und die durch den definierten Absolutbetrag definierte Topologie gleich sind. Es handelt sich also bei den durch archimedische Anordnungen definierten Topologien um einen Spezialfall der durch archimedische Absolutbeträge definierten Topologien.

1.2.6 Definition und Lemma. Sei K ein Körper.

(a) Sei $|\,.\,|$ ein nichttrivialer Absolutbetrag auf K. Dann ist

$$\mathcal{B}_{|\,.\,|} := \{\{x \in K \mid |x| < \varepsilon\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ mit } \varepsilon > 0\}$$

eine Filterbasis auf K. Den erzeugten Filter bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_{|\,.\,|}$, die erzeugte Körpertopologie mit $\mathcal{T}_{|\,.\,|}$.

(b) Sei $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf K mit Wertegruppe Γ. Dann ist

$$\mathcal{B}_v := \{\{x \in K \mid v(x) > \gamma\} \mid \gamma \in \Gamma\}$$

eine Filterbasis auf K. Den erzeugten Filter bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_v$, die erzeugte Körpertopologie mit $\mathcal{T}_v$.

(c) Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K. Dann ist

$$\mathcal{B}_{\mathcal{O}} := \{x\mathcal{O} \mid x \in K \setminus \{0\}\}$$

eine Filterbasis auf K. Den erzeugten Filter bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$, die erzeugte Körpertopologie mit $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$.

(*d*) Sei $<$ eine Ordnung auf K. Dann ist

$$\mathcal{B}_< := \{\{x \in K \mid -a < x < a\} \mid 0 < a \in K\}$$

eine Filterbasis auf K. Den erzeugten Filter bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_<$, die erzeugte Körpertopologie mit $\mathcal{T}_<$.

Im Beweis von Satz 1.2.8 ist die folgende allgemeine Aussage zu Bewertungen zu berücksichtigen:

1.2.7 Lemma. *Sei $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf einem Körper K.*

Existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $v(x) \leq \gamma$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$, so ist v die triviale Bewertung.

Beweis: Ist $v(x) \leq \gamma$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$, so ist insbesondere für x_0 mit $v(x_0) = \gamma$

$$v(x_0) = \gamma \geq v\left(x_0^2\right) = 2v(x_0)$$

und damit $\gamma = v(x_0) \leq 0$.

Also ist $v(x) \leq 0$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$. Da damit auch $-v(x) = v\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ ist, folgt $v(x) = 0$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$. □

1.2.8 Satz. *Sei $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine nichttriviale Bewertung auf einem Körper K und sei $\mathcal{O}$ der zugehörige Bewertungsring.*

Dann ist $\mathcal{F}_{\mathcal{O}} = \mathcal{F}_v$ und damit insbesondere $\mathcal{T}_{\mathcal{O}} = \mathcal{T}_v$.

Beweis: Um zu zeigen, dass zwei Filter gleich sind, genügt es zu zeigen, dass jedes Element einer Basis des einen Filters eine Teilmenge und eine Obermenge besitzt, die im anderen Filter liegen.

In unserem Fall heißt das:

Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ existieren $x_0,\ y_0 \in K$ mit

$$y_0\mathcal{O} \subseteq \{x \in K \mid v(x) > \gamma\} \subseteq x_0\mathcal{O}.$$

Sei $\gamma \in \Gamma$, dann existiert ein $x_0 \in K$ mit $v(x_0) = \gamma$.

Ist $a \in K$ mit $v(a) > \gamma = v(x_0)$, so gilt

$$v\left(\frac{a}{x_0}\right) = v(a) - v(x_0) > 0,$$

also $\frac{a}{x_0} \in \mathcal{O}$ und damit $a \in x_0\mathcal{O}$.

Somit ist

$$\{x \in K \mid v(x) > \gamma\} \subseteq x_0\mathcal{O}.$$

Da v nichttrivial ist, gibt es nach Lemma 1.2.7 ein $y_0 \in K \setminus \{0\}$ mit $v(y_0) > \gamma$.

Für $a \in y_0\mathcal{O}$ gilt $a = y_0 \cdot b$ für ein $b \in \mathcal{O}$, das heißt für ein b mit $v(b) \geq 0$.

Also ist
$$v(a) = v(y_0 \cdot b) = v(y_0) + v(b) \geq v(y_0) > \gamma$$
und damit $a \in \{x \in K \mid v(x) > \gamma\}$.

Insgesamt erhalten wir also
$$y_0\mathcal{O} \subseteq \{x \in K \mid v(x) > \gamma\} \subseteq x_0\mathcal{O}$$
und damit $\mathcal{F}_{\mathcal{O}} = \mathcal{F}_v$. □

1.3 Abhängige Absolutbeträge und Bewertungsringe

Unterschiedliche Bewertungsringe und unterschiedliche Absolutbeträge können die gleiche Topologie definieren. Hierzu gibt es einige nützliche Äquivalenzen, die wir hier angeben, um später darauf verweisen zu können.

1.3.1 Definition. Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Bewertungsringe auf einem Körper K.

$\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ heißen *abhängig*, falls es einen Ring $\mathcal{O} \subsetneq K$ gibt mit $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$.

Der folgende Satz wird zum Beispiel in [EnPr] als Satz 2.3.4 bewiesen.

1.3.2 Satz. *Zwei Bewertungsringe sind genau dann abhängig, wenn sie die gleiche Topologie definieren.*

1.3.3 Definition. Sei K ein Körper. Zwei Absolutbeträge auf K heißen *abhängig* oder *äquivalent*, wenn sie die gleiche Topologie definieren.

Den Beweis des folgenden Satzes findet man zum Beispiel in [Wa] (Satz 18.4).

1.3.4 Satz. *Zwei Absolutbeträge* $|\,.\,|_1$ *und* $|\,.\,|_2$ *sind genau dann äquivalent, wenn es ein* $\alpha > 0$ *mit* $|\,.\,|_1^\alpha = |\,.\,|_2$ *gibt.*

Es stellt sich nun die Frage, ob auch Absolutbeträge und Bewertungen die gleiche Topologie definieren können.

Bei Absolutbeträgen unterscheiden wir zwischen archimedischen Absolutbeträgen und nichtarchimedischen Absolutbeträgen. Archimedische Absolutbeträge sind dadurch gekennzeichnet, dass die Menge der natürlichen Zahlen nicht beschränkt ist.

Bei Bewertungen unterscheiden wir zwischen Bewertungen mit unterschiedlichem Rang. Dabei gibt der Rang die Anzahl der echten konvexen Untergruppen der Wertegruppe an.

Die nichtarchimedischen Absolutbeträge entsprechen genau den Rang-1-Bewertungen.

1.3.5 Bemerkung. Ist $|\,.\,|$ ein nichtarchimedischer Absolutbetrag auf einem Körper K, so wird durch

$$v(x) := \begin{cases} -\ln(|x|), & x \in K \setminus \{0\} \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

eine Rang-1-Bewertung v auf K definiert, die die gleiche Topologie wie $|\,.\,|$ definiert.

Durch

$$|x| := \begin{cases} e^{-v(x)}, & x \in K \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

bekommen wir analog zu jeder Rang-1-Bewertung v einen nichtarchimedischen Absolutbetrag $|\,.\,|$, der die gleiche Topologie definiert.

Gibt es zu einer V-Topologie eine Rang-1-Bewertung, die die Topologie definiert, so reicht es oft aus, diese Bewertung zu betrachten. Den Grund hierfür liefert folgendes Lemma:

1.3.6 Lemma. *Sei $\mathcal{O}$ ein nichttrivialer Bewertungsring auf einem Körper K.*

Dann hat $\mathcal{O}$ Rang-1 genau dann, wenn $\mathcal{O}$ ein maximaler echter Unterring von K ist.

Den Beweis zu diesem Lemma findet man in [EnPr] als Korollar 2.3.2.

Aus diesem Lemma bekommen wir sofort das folgende Korollar.

1.3.7 Korollar. *Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ zwei abhängige Bewertungsringe.*

Hat $\mathcal{O}_1$ Rang-1, so gilt $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$.

Es gibt Bewertungen mit verschiedenem Rang, die die gleiche Topologie definieren. Im folgenden Lemma werden wir zeigen, dass dies nicht für Bewertungen und archimedische Absolutbeträge gilt. Der Grund hierfür ist, dass bezüglich Bewertungen die natürlichen Zahlen beschränkt sind, archimedische Absolutbeträge aber gerade die Absolutbeträge sind, bezüglich derer die natürlichen Zahlen unbeschränkt sind, und sich diese Eigenschaft auch in der Topologie wiederfindet.

Im Folgenden wird es sich häufig als sinnvoll erweisen, Topologien, die von einem archimedischen Absolutbetrag definiert werden, und Topologien, die von Bewertungen definiert werden, getrennt zu betrachten. An einigen Stellen betrachten wir auch Topologien, die von einer Rang-1-Bewertung definiert werden, und Topologien, die nur von höherrangigen Bewertungen definiert werden, getrennt.

Der Begriff archimedisch lässt sich durch verschiedene, äquivalente Eigenschaften definieren. Wir legen hier die folgende Definition zugrunde.

1.3.8 Definition. Seien K ein Körper, $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag auf K.

$|\,.\,|$ heißt *archimedisch*, wenn die Menge

$$\{|n \cdot 1| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

unbeschränkt ist.

1.3.9 Bemerkung. Existiert auf einem Körper K ein archimedischer Absolutbetrag, so ist offensichtlich $\mathrm{char}\,(K) = 0$.

1.3.10 Lemma. *Sei K ein Körper und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf K.*

Gibt es einen archimedischen Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, so gibt es keine Bewertung, die ebenfalls $\mathcal{T}$ definiert.

Insbesondere wird $\mathcal{T}$ genau dann von einem archimedischen Absolutbetrag definiert, wenn $\mathrm{char}\,(K) = 0$ und

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

in $(K, \mathcal{T})$.

Beweis: Sei $|\,.\,|$ ein archimedischer Absolutbetrag mit $\mathcal{T}_{|\,.\,|} = \mathcal{T}$. Zu jeder Nullumgebung U, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\{x \in K \mid |x| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Da $\{|n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt ist, ist $\mathrm{char}\,(K) = 0$ und es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|n_0| > \frac{1}{\varepsilon}$ und somit $|\frac{1}{m}| < \varepsilon$ für alle $m \geq n_0$.

Es ist also $\frac{1}{m} \in U$ für alle $m \geq n_0$.

Daraus folgt

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Angenommen, v ist eine Bewertung, die ebenfalls $\mathcal{T}$ erzeugt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$v\,(n) \geq 0,$$

also

$$v\left(\frac{1}{n}\right) = -v\,(n) \leq 0.$$

Für alle $\gamma > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt somit

$$\frac{1}{n} \notin \{x \in K \mid v\,(x) > \gamma\} \in \mathcal{F}_v.$$

Also gilt

$$\frac{1}{n} \nrightarrow 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

□

In [EnPr], Proposition 2.3.5, finden wir eine Unterteilung der Äquivalenzklassen von Bewertungsringen in zwei disjunkte Klassen. Mit Hilfe dieses Lemmas können wir die V-Topologien in drei Klassen einteilen.

1.3.11 Lemma. *Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf einem Körper K. Sei $[\mathcal{O}]$ die Äquivalenzklasse der von $\mathcal{O}$ abhängigen Bewertungsringe auf K.*

Dann gilt genau einer der zwei folgenden Fälle:

(a) *$[\mathcal{O}]$ besitzt ein maximales Element $\mathcal{O}_1$.*

Für dieses maximale Element gilt dann: $\mathcal{O}_1$ ist ein maximaler nichttrivialer Oberring von $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$ hat Rang-1 und sein maximales Ideal ist der Schnitt über die maximalen Ideale aller Elemente von $[\mathcal{O}]$.

(b) *$\mathcal{O}$ besitzt keinen maximalen nichttrivialen Oberring.*

In diesem Fall bilden sowohl die maximalen Ideale der Elemente von $[\mathcal{O}]$ als auch die Menge der von (0) verschiedenen Primideale von $\mathcal{O}$ eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$.

1.3.12 Korollar. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper.*

Dann gilt genau einer der folgenden drei Fälle:

(a) *Es gibt einen archimedischen Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert.*

(b) *Es gibt einen maximalen Bewertungsring, der $\mathcal{T}$ definiert.*

Dieser Bewertungsring hat Rang-1 und sein maximales Ideal ist der Schnitt über die maximalen Ideale aller Bewertungsringe, die $\mathcal{T}$ definieren.

(c) *Es gibt keinen Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert.*

In diesem Fall bilden die maximalen Ideale der Bewertungsringe, die $\mathcal{T}$ definieren, eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}$.

Ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring, der $\mathcal{T}$ definiert, so bilden die von Null verschiedenen Primideale von $\mathcal{O}$ eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}$.

Beweis: Das Korollar folgt sofort aus Satz 1.3.2, Lemma 1.3.10 und Lemma 1.3.11 unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.3.5. □

2 Fortsetzungen von V-Topologien

In diesem Kapitel werden wir definieren, was wir unter der Fortsetzung einer V-Topologie verstehen. Wir werden zeigen, dass sich jede V-Topologie auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt. Außerdem werden wir untersuchen, wann diese Fortsetzung eindeutig ist.

2.1 Definition und erste Sätze

2.1.1 Definition. Sei L/K eine Körpererweiterung, sei $\mathcal{T}$ eine V-Topologie auf K und sei $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf L.

$\mathcal{T}'$ heißt *Fortsetzung von $\mathcal{T}$ auf L*, falls $\mathcal{T}'$ ebenfalls eine V-Topologie ist und $\mathcal{T}$ die Spurtopologie von $\mathcal{T}'$ auf K ist.

Wir zeigen nun, dass Fortsetzungen von Absolutbeträgen und Bewertungen auf algebraische Körpererweiterungen auch Fortsetzungen der erzeugten Topologien definieren. Hierbei ist der Fall des Absolutbetrages einfach und lässt sich für allgemeine Körpererweiterungen beweisen. Bei von Bewertungen erzeugten Topologien gilt der Satz nur für algebraische Körpererweiterungen. Den Grund hierfür liefert Lemma 2.1.3, das nur für algebraische Körpererweiterungen gilt. Für nicht algebraische Körpererweiterungen kann die Spurtopologie einer durch eine Bewertung definierten Topologie die triviale Topologie sein, auch wenn die Einschränkung der Bewertung nichttrivial ist.

Im Folgenden seien alle Absolutbeträge und Bewertungen nichttrivial.

2.1.2 Satz. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Sei $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag auf K und $|\,.\,|'$ eine Fortsetzung von $|\,.\,|$ auf L.*

Dann ist $\mathcal{T}_{|\,.\,|'}$ eine Fortsetzung von $\mathcal{T}_{|\,.\,|}$ auf L.

Beweis: Für alle $x \in K$ gilt $|x| = |x|'$, also ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\{x \in K \mid |x| < \varepsilon\} = \left\{x \in L \mid |x|' < \varepsilon\right\} \cap K.$$

Da

$$\mathcal{B}_{|\,.\,|'} = \left\{\left\{x \in L \mid |x|' < \varepsilon\right\} \mid \varepsilon > 0\right\},$$

eine Basis von $\mathcal{T}_{|\,.\,|'}$ ist, ist

$$\left\{\left\{x \in L \mid |x|' < \varepsilon\right\} \cap K \mid \varepsilon > 0\right\} = \{\{x \in K| \, |x| < \varepsilon\} \mid \varepsilon > 0\} = \mathcal{B}_{|\,.\,|}$$

eine Basis der Spurtopologie. Also ist $\mathcal{T}_{|\,.\,|}$ die Spurtopologie von $\mathcal{T}_{|\,.\,|'}$. $\square$

2.1.3 Lemma. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Seien $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf K und $w : L \twoheadrightarrow \Delta \cup \{\infty\}$ eine Fortsetzung von v auf L.*

Dann liegt Γ konfinal in Δ, das heißt zu jedem $\delta \in \Delta$ existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\delta \leq \gamma$.

Beweis:
Sei $\delta \in \Delta$ und sei $y \in L$ mit $w(y) = \delta$. Sei

$$\operatorname{Irr}(y/K) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in K[X]$$

das Minimalpolynom von y über K.
Wäre für alle $0 \leq i < j \leq n$ mit $a_i,\, a_j \neq 0$ auch $w\left(a_i y^i\right) \neq w\left(a_j y^j\right)$, so wäre

$$\begin{aligned} \infty &= w(0) \\ &= w\left(a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n\right) \\ &= \min_{0 \leq i \leq n} \{v(a_i) + i\delta\} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

was zu einem Widerspruch führt.
Also existieren $0 \leq i < j \leq n$ mit $a_i, a_j \neq 0$ und $w\left(a_i y^i\right) = w\left(a_j y^j\right)$.
Es gilt

$$\begin{aligned} & w\left(a_i y^i\right) &= &\; w\left(a_j y^j\right) \\ \Leftrightarrow\; & v(a_i) + i\delta &= &\; v(a_j) + j\delta \\ \Leftrightarrow\; & v(a_i) - v(a_j) &= &\; j\delta - i\delta \\ \Leftrightarrow\; & v\left(\frac{a_i}{a_j}\right) &= &\; (j-i)\,\delta \end{aligned}$$

Da $i < j$ ist, folgt $\Gamma \ni v\left(\frac{a_i}{a_j}\right) = (j-i)\,\delta \geq \delta$.
Es existiert also ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \geq \delta$. $\square$

2.1.4 Satz. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Seien $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf K und $w : L \twoheadrightarrow \Delta \cup \{\infty\}$ eine Fortsetzung von v auf L.*

Dann ist $\mathcal{T}_w$ eine Fortsetzung von $\mathcal{T}_v$ auf L.

Beweis: Da

$$\mathcal{B}_w = \{\{x \in L \mid w(x) > \delta\} \mid \delta \in \Delta\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_w$ ist, ist

$$\mathcal{B}' := \{\{x \in L \mid w(x) > \delta\} \cap K \mid \delta \in \Delta\}$$

eine Basis der Spurtopologie von $\mathcal{T}_w$.

Für $x \in K$ gilt $v(x) = w(x)$ und somit ist für $\gamma \in \Gamma$

$$\{x \in K \mid v(x) > \gamma\} = \{x \in L \mid w(x) > \gamma\} \cap K \in \mathcal{B}'.$$

Also ist $\mathcal{B}_v \subseteq \mathcal{B}'$.

Andererseits existiert nach Lemma 2.1.3 zu jedem $\delta \in \Delta$ ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \geq \delta$ und damit

$$\mathcal{B}_v \ni \{x \in K \mid v(x) > \gamma\} \subseteq \{x \in L \mid w(x) > \delta\} \cap K.$$

Also erzeugen

$$\mathcal{B}' = \{\{x \in L \mid w(x) > \delta\} \cap K \mid \delta \in \Delta\}$$

und

$$\mathcal{B}_v = \{\{x \in K \mid v(x) > \gamma\} \mid \gamma \in \Gamma\}$$

die gleiche Topologie, das heißt die Spurtopologie von $\mathcal{T}_w$ ist $\mathcal{T}_v$. □

Im Folgenden werden wir einige Male V-Topologien, die von Bewertungen erzeugt werden, und V-Topologien, die von archimedischen Absolutbeträgen definiert werden, getrennt betrachten. Hierfür ist es wichtig zu wissen, dass eine V-Topologie, die eine von einem archimedischen Absolutbetrag definierte Topologie fortsetzt, ebenfalls von einem archimedischen Absolutbetrag definiert wird und ebenso eine Fortsetzung einer von einer Bewertung definierten Topologie von einer Bewertung definiert wird. Dies zeigen wir im folgenden Lemma. Hierbei ist wieder zu beachten, dass die nichtarchimedischen Absolutbeträge gerade den Rang-1-Bewertungen entsprechen und somit nicht getrennt betrachtet werden müssen.

2.1.5 Satz. *Sei K ein Körper mit $char(K) = 0$. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf K und sei $\mathcal{T}'$ eine Fortsetzung von $\mathcal{T}$ auf L.*

$\mathcal{T}$ wird genau dann von einem archimedischen Absolutbetrag definiert, wenn $\mathcal{T}'$ von einem archimedischen Absolutbetrag definiert wird.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Sei $|\,.\,|$ ein archimedischer Absolutbetrag auf L, der $\mathcal{T}'$ erzeugt. Dann ist $|\,.\,||_K$ ein archimedischer Absolutbetrag auf K. Nach Satz 2.1.2 ist die von $|\,.\,||_K$ definierte Topologie $\mathcal{T}$.

„$\Rightarrow$“: Wird $\mathcal{T}$ von einem archimedischen Absolutbetrag definiert, so gilt in $(K, \mathcal{T})$ nach Lemma 1.3.10

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Da $\mathcal{T}$ die Spurtopologie von $\mathcal{T}'$ in K ist, ist für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{T}'$ in $(L, \mathcal{T}')$, $U \cap K \in \mathcal{T}$ eine Nullumgebung in $(K, \mathcal{T})$. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \in U \cap K$ für alle $m \geq n$, also insbesondere $\frac{1}{m} \in U$ für alle $m \geq n$.

Somit gilt

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

in $(L, \mathcal{T}')$. Wiederum mit Lemma 1.3.10 folgt, dass $\mathcal{T}'$ von einem archimedischen Absolutbetrag erzeugt wird. □

2.2 Existenz von Fortsetzungen

Wir zeigen nun, dass sich jede V-Topologie auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Nach Satz 1.1.2 wird jede V-Topologie entweder von einem Absolutbetrag oder von einer Bewertung definiert. Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass eine Fortsetzung einer Bewertung oder eines Absolutbetrages auf eine algebraische Körpererweiterung auch eine Fortsetzung der Topologie definiert.

Nun werden wir zeigen, dass sich sowohl Bewertungen, als auch Absolutbeträge auf algebraische Körpererweiterungen fortsetzen lassen. Aus dem bereits Gezeigten folgt dann die Fortsetzbarkeit der V-Topologien.

Die Fortsetzbarkeit von Bewertungen auf beliebige Körpererweiterung folgt aus dem Satz von Chevalley.

2.2.1 Satz. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Sei $\mathcal{O} \subseteq K$ ein Bewertungsring auf K.*

Dann existiert eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L.

Der Beweis ist zum Beispiel bei [EnPr] (Satz 3.1.2) zu finden.

Für Absolutbeträge bekommen wir einen ähnlichen Satz, wobei wir allerdings voraussetzen, dass die Körpererweiterung algebraisch ist. Um dies zu beweisen, brauchen wir ein Lemma für endliche Körpererweiterungen.

2.2.2 Lemma. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und sei $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag auf K.*

Dann existiert eine Fortsetzung von $|\,.\,|$ auf L.

Dieses Lemma wird bei [Wa] als Satz 26.6 bewiesen.

2.2.3 Satz. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und sei $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag auf K.*

Dann existiert eine Fortsetzung von $|\,.\,|$ auf L.

Beweis: Wir zeigen den Satz mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

Sei

$$\mathcal{Z} := \{(F, |\,.\,|_F) \mid F \text{ Zwischenkörper von } L/K,\ |\,.\,|_F \text{ Fortsetzung von } |\,.\,| \text{ auf } F\}.$$

Es ist $(K, |\,.\,|) \in \mathcal{Z}$ und damit $\mathcal{Z} \neq \emptyset$.

Wir definieren eine partielle Ordnung auf $\mathcal{Z}$ durch

$$(F_1, |\,.\,|_1) \leq (F_2, |\,.\,|_2) :\Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \text{ und } |\,.\,|_1 = |\,.\,|_2|_{F_1}.$$

Sei $((F_i, |\,.\,|_i))_{i \in I}$ eine Kette in $\mathcal{Z}$. Definiere $F' := \bigcup_{i \in I} F_i$ und $|\,.\,|'$ durch $|x|' := |x|_i$ für $x \in F_i$.

Dann ist $\left(F', |\,.\,|'\right) \in \mathcal{Z}$ eine obere Schranke von $((F_i, |\,.\,|_i))_{i \in I}$.

Nach dem Zornschen Lemma hat $\mathcal{Z}$ damit ein maximales Element $(F^*, |\,.\,|^*)$.

Angenommen, es gilt $F^* \neq L$.

Sei $x \in L \setminus F^*$. Dann ist $F^*(x)/F^*$ eine endliche Körpererweiterung. Nach Lemma 2.2.2 lässt sich $|\,.\,|^*$ auf $F^*(x)$ zu $|\,.\,|_1^*$ fortsetzen.

Es ist $(F^*(x), |\,.\,|_1^*) \in \mathcal{Z}$ mit $(F^*, |\,.\,|^*) < (F^*(x), |\,.\,|_1^*)$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $(F^*, |\,.\,|^*)$.

Also ist $F^* = L$ und somit $|\,.\,|^*$ eine Fortsetzung von $|\,.\,|$ auf L. □

Für V-Topologien bekommen wir damit folgenden Satz:

2.2.4 Satz. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und sei $\mathcal{T}$ eine V-Topologie auf K.*

Dann lässt sich $\mathcal{T}$ auf L fortsetzen.

Beweis: Nach Satz 1.1.2 wird jede V-Topologie entweder von einem Absolutbetrag oder von einer Bewertung definiert. Nach Satz 2.2.1 und Satz 2.2.3 lassen sich Absolutbeträge und Bewertungen auf algebraische Körpererweiterungen fortsetzen. Diese Fortsetzungen definieren nach Satz 2.1.4 und Satz 2.1.2 Fortsetzungen der Topologie. □

2.3 Eindeutigkeit der Fortsetzungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wann sich eine V-Topologie eindeutig auf eine algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Dabei erweist es sich als sinnvoll, Topologien, die von Bewertungen definiert werden, und Topologien, die von archimedischen Absolutbeträgen definiert werden, getrennt zu betrachten.

2.3.1 Von Bewertungen definierte Topologien

Ziel dieses Unterabschnittes ist es, zu zeigen, dass sich eine durch einen Bewertungsring definierte Topologie genau dann eindeutig auf eine algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt, wenn es eine Bewertung gibt, die die Topologie definiert und sich eindeutig auf die Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Um dies zu beweisen, verwenden wir Lokalisierungen von Bewertungsringen nach ihren Primidealen.

Lokalisierungen von einem Bewertungsring sind Oberringe des Ringes und damit wieder Bewertungsringe. Dabei bekommen wir als Lokalisierung nach dem Nullideal gerade den ganzen Körper und somit die triviale Bewertung, daher werden wir im Folgenden stets von Null verschiedene Primideale betrachten. Durch Lokalisierungen nach von Null verschiedenen Primidealen bekommen wir offensichtlich Bewertungsringe, die die gleiche Topologie wie der Ausgangsring definieren.

Zunächst werden wir zeigen, dass die Oberringe eines Bewertungsringes genau die Lokalisierungen nach seinen Primidealen sind.

2.3.1 Lemma. *Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ Bewertungsringe auf einem Körper K und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ ihre maximalen Ideale.*

Falls $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ ist, so gelten

(*a*) $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$

(*b*) $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_{\mathcal{M}'} := \left\{ x \in K \;\middle|\; x = \dfrac{a}{b} \text{ für } a, b \in \mathcal{O},\ b \notin \mathcal{M}' \right\}$

Beweis:

(*a*) Sei $x \in \mathcal{M}'$. Dann ist $\frac{1}{x} \notin \mathcal{O}'$, also, da $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$, auch $\frac{1}{x} \notin \mathcal{O}$ und damit $x \in \mathcal{M}$.

(*b*) „$\subseteq$“: Sei $x \in \mathcal{O}'$.

1. Fall: Ist $x \in \mathcal{O}$, dann gilt $x = \frac{x}{1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}'}$.
2. Fall: Ist $x \notin \mathcal{O}$, dann ist $x^{-1} \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{M}'$, also $x = \frac{1}{x^{-1}} \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}'}$.

„$\supseteq$“: Sei $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}'}$, das heißt $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathcal{O}$, $b \notin \mathcal{M}'$. Es sind a, $b^{-1} \in \mathcal{O}'$, denn $a \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ und $b \notin \mathcal{M}'$. Damit ist $x = a \cdot b^{-1} \in \mathcal{O}'$. □

2.3.2 Korollar. *Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zwei abhängige Bewertungen.*

Dann existiert ein gemeinsames Primideal $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ mit $\mathcal{O}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}'_\mathfrak{p}$.

Beweis: Da $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ abhängig sind, existiert ein gemeinsamer Oberring $\widetilde{\mathcal{O}} \subsetneq K$. Sei $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von $\widetilde{\mathcal{O}}$. Nach Lemma 2.3.1 (*b*) ist $\mathcal{O}_\mathfrak{p} = \widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}'_\mathfrak{p}$. □

2.3.3 Bemerkung. Korollar 2.3.2 lässt sich auf Bewertungsringe $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern.

2.3.4 Lemma. *Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf einem Körper K und sei $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ ein Primideal von $\mathcal{O}$.*

Dann ist $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ ein Bewertungsring auf K mit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\mathfrak{p}$.

Das maximale Ideal von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$.

Insbesondere definieren $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ die gleiche Topologie.

Beweis: Dass Oberringe von Bewertungsringen wieder Bewertungsringe sind, ist nach Definition klar.

Dass $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ die gleiche Topologie definieren, folgt sofort aus Satz 1.3.2.

Zu zeigen ist nur $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$.

Aus $1 \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ folgt sofort $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$.

Ist $x \notin \mathfrak{p}$, dann ist $\frac{1}{x} \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ und somit, da $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ Ideal von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ ist, $x \notin \mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Daraus folgt $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}$. □

2.3.5 Lemma. *Sei L/K eine Körpererweiterung, sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K, sei $\mathcal{O}'$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L und sei $\mathfrak{p}' \neq \{0\}$ ein Primideal von $\mathcal{O}'$. Sei $\mathfrak{p} := \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}'$.*

Dann ist $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'}$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$.

Beweis: Zu zeigen ist $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'} \cap K = \mathcal{O}_\mathfrak{p}$.

„$\supseteq$“: Klar.

„$\subseteq$“: Sei $x \in \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'} \cap K$.

1. Fall: Es ist $x \in \mathcal{O}$. Aus $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ folgt sofort $x \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$.
2. Fall: Es ist $x \notin \mathcal{O}$. Dann ist $x^{-1} \in \mathcal{O}$. Da $\mathfrak{p}'$ Ideal von $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'}$ und $x \in \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'}$ ist, ist $x^{-1} \notin \mathfrak{p}'$, also auch $x^{-1} \notin \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. Daraus folgt $x = \frac{1}{x^{-1}} \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$. □

Wir wollen nun zeigen, dass es zu jedem Primideal eines Bewertungsringes genau ein entsprechendes Primideal der Fortsetzung gibt.

In [EnPr] wird gezeigt, dass die Primideale eines Bewertungsringes gerade den konvexen Untergruppen der Wertegruppe der zugehörigen Bewertung entsprechen. Das folgende Lemma entspricht Lemma 2.3.1 aus [EnPr].

2.3.6 Lemma. *Seien K ein Körper, $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf K und $\mathcal{O} := \mathcal{O}_v$ der zugehörige Bewertungsring.*

Dann gibt es eine 1-1 Korrespondenz zwischen den konvexen Untergruppen Δ von Γ und den Primidealen $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}$.

Diese Korrespondenz wird gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta &\mapsto \mathfrak{p}_\Delta = \{x \in K \mid v(x) > \delta \text{ für alle } \delta \in \Delta\} \\ \mathfrak{p} &\mapsto \Delta_\mathfrak{p} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma, -\gamma < v(x) \text{ für alle } x \in \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

Die Anzahl der echten konvexen Untergruppen der Wertegruppe ist nach Definition gerade der Rang der Bewertung. Es folgt also, dass die Anzahl der von Null verschiedenen Primideale und somit die Anzahl der Oberringe eines Bewertungsringes gerade der Rang der Bewertung ist.

Betrachten wir eine Bewertung auf einem Körper und eine Fortsetzung der Bewertung auf eine algebraische Körpererweiterung, bekommen wir ebenfalls eine Korrespondenz der konvexen Untergruppen. Für den Beweis des Lemmas sei auf [EnPr] Satz 3.2.4 und Korollar 3.2.5 verwiesen.

2.3.7 Lemma. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf K und sei $w : L \twoheadrightarrow \widetilde{\Gamma} \cup \{\infty\}$ eine Fortsetzung von v auf L.*

Dann wird durch $\Delta \mapsto \Delta \cap \Gamma$ eine bijektive, inklusionserhaltende Korrespondenz zwischen den konvexen Untergruppen von $\widetilde{\Gamma}$ und Γ definiert.

Insbesondere haben v und w den gleichen Rang.

Aus diesen beiden Lemmata bekommen wir nun eine Korrespondenz zwischen den Primidealen eines Bewertungsringes und den Primidealen einer Fortsetzung des Bewertungsringes auf eine algebraische Körpererweiterung.

2.3.8 Korollar und Notation. Seien L/K eine algebraische Körpererweiterung, $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}$. Sei $\mathcal{O}'$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L.

Dann existiert genau ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathcal{O}'$ mit $\mathcal{O} \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.

Für diese Fortsetzung $\mathfrak{p}'$ schreiben wir $(\mathfrak{p})$, wenn klar ist, in welchem Ring wir uns befinden, und sagen, $(\mathfrak{p})$ ist das *von $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal.*

Das folgende Lemma findet sich in [Ri1] in Kapitel F als Proposition 1.

2.3.9 Lemma. *Seien L/K eine algebraische Körpererweiterung, $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}$.*

Dann ist jede Fortsetzung von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ auf L von der Gestallt $\mathcal{O}'_{(\mathfrak{p})}$ für eine Fortsetzung $\mathcal{O}'$ von $\mathcal{O}$ auf L.

Aus Lemma 2.3.9 und Lemma 2.3.5 bekommt man folgendes Korollar:

2.3.10 Korollar. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}$.*

Seien $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ alle Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf L und für $i \in I$ sei $\mathfrak{p}_i$ das eindeutig bestimmte Primideal von $\mathcal{O}_i$ mit $\mathfrak{p}_i \cap \mathcal{O} = \mathfrak{p}$.

Dann sind die Fortsetzungen von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ auf L gerade $\left((\mathcal{O}_i)_{\mathfrak{p}_i}\right)_{i\in I}$.

Insbesondere hat, falls $\mathcal{O}$ nur endlich viele Fortsetzungen besitzt, auch $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ nur endlich viele Fortsetzungen.

2.3.11 Bemerkung. In der Situation von Korollar 2.3.10 folgt aus $\mathcal{O}_i \neq \mathcal{O}_j$ nicht $(\mathcal{O}_i)_{\mathfrak{p}_i} \neq (\mathcal{O}_j)_{\mathfrak{p}_j}$.

2.3.12 Korollar. *Sei L/K eine Körpererweiterung, sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K und seien $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ alle Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf L.*

Sind $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ abhängig, so besitzen sie ein gemeinsames Primideal $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ für das

$$(\mathcal{O}_1)_{\mathfrak{p}} = \cdots = (\mathcal{O}_n)_{\mathfrak{p}}$$

die eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p} \cap K}$ auf L ist.

Beweis: Folgt aus Bemerkung 2.3.3 und Lemma 2.3.9 □

2.3.13 Korollar. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K. Seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \neq \{0\}$ Primideale von $\mathcal{O}$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.*

(*a*) *Seien $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}''$ Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf L mit $\mathcal{O}'_{(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}''_{(\mathfrak{p})}$.*
Dann ist $\mathcal{O}'_{(\mathfrak{q})} = \mathcal{O}''_{(\mathfrak{q})}$.

(*b*) *Ist $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ eindeutig auf L fortsetzbar, so ist auch $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$ eindeutig auf L fortsetzbar.*

Beweis:

(*a*) Aus $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt

$$\mathcal{O}'_{(\mathfrak{p})} \subseteq \mathcal{O}'_{(\mathfrak{q})}$$

und

$$\mathcal{O}''_{(\mathfrak{p})} \subseteq \mathcal{O}''_{(\mathfrak{q})}.$$

Also ist nach Lemma 2.3.1 und Lemma 2.3.4

$$\mathcal{O}'_{(\mathfrak{q})} = \left(\mathcal{O}'_{(\mathfrak{p})}\right)_{(\mathfrak{q})} = \left(\mathcal{O}''_{(\mathfrak{p})}\right)_{(\mathfrak{q})} = \mathcal{O}''_{(\mathfrak{q})}.$$

(*b*) Nach Lemma 2.3.9 sind alle Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$ von der Form $\mathcal{O}'_{(\mathfrak{q})}$ für eine Fortsetzung $\mathcal{O}'$ von $\mathcal{O}$. Seien also $\mathcal{O}'_{(\mathfrak{q})}$, $\mathcal{O}''_{(\mathfrak{q})}$ zwei Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}$. Wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ gilt

$$\mathcal{O}'_{(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}''_{(\mathfrak{p})}$$

und damit nach (*a*)

$$\mathcal{O}'_{(\mathfrak{q})} = \mathcal{O}''_{(\mathfrak{q})}.$$ □

2.3.14 Bemerkung. Falls $\widetilde{\mathcal{O}}$ und $\mathcal{O}$ Bewertungsringe auf einem Körper K sind mit $\widetilde{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}$ und $\widetilde{\mathcal{O}}$ sich eindeutig auf einen algebraischen Oberkörper L von K fortsetzen lässt, dann folgt mit Lemma 2.3.1 aus Korollar 2.3.13 (*b*) aus, dass sich auch $\mathcal{O}$ eindeutig auf L fortsetzen lässt.

Der folgende Satz stammt aus [Be]. Berrondo formuliert den Satz allgemein für V-Topologien, betrachtet im Beweis jedoch nur von Bewertungen definierte Topologien, weshalb der Satz hier auch zunächst nur für diese formuliert wird.

Im Folgenden schreiben wir wie in Korollar 2.3.8 definiert, $(\mathfrak{p})$ für das von $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal, wenn klar ist, in welchem Ring wir uns befinden.

2.3.15 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper, wobei $\mathcal{T}$ von einem Bewertungsring definiert wird. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung.*

$\mathcal{T}$ lässt sich genau dann eindeutig auf L fortsetzen, wenn es einen Bewertungsring $\mathcal{O}$ auf K gibt, der $\mathcal{T}$ definiert und sich eindeutig auf L fortsetzen lässt.

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring, der $\mathcal{T}$ definiert und sich eindeutig auf L fortsetzen lässt. Sei $\mathcal{O}'$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L.

Sei $\mathcal{T}'$ eine V-Topologie auf L, die $\mathcal{T}$ fortsetzt.

Wir zeigen, dass $\mathcal{T}'$ die von $\mathcal{O}'$ definierte Topologie ist.

Nach Satz 2.1.5 gibt es einen Bewertungsring $\mathcal{O}_1$, der $\mathcal{T}'$ definiert.

Sei $\overline{\mathcal{O}}_1 := \mathcal{O}_1 \cap K$. Nach Satz 2.1.4 ist die von $\overline{\mathcal{O}}_1$ definierte Topologie $\mathcal{T}$, also sind $\overline{\mathcal{O}}_1$ und $\mathcal{O}$ abhängig.

Nach Korollar 2.3.2 gibt es ein gemeinsames Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}$ und $\overline{\mathcal{O}}_1$, für das $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \left(\overline{\mathcal{O}}_1\right)_{\mathfrak{p}}$ ist.

Nach Korollar 2.3.8 existiert ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathcal{O}_1$ mit $\mathfrak{p}' \cap \overline{\mathcal{O}}_1 = \mathfrak{p}$. Nach Lemma 2.3.5 ist $(\mathcal{O}_1)_{\mathfrak{p}'}$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \left(\overline{\mathcal{O}}_1\right)_{\mathfrak{p}}$. Also existieren nach Lemma 2.3.9 eine Fortsetzung $\widetilde{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}$ und ein Primideal $\widetilde{\mathfrak{p}}$ von $\widetilde{\mathcal{O}}$ mit $(\mathcal{O}_1)_{\mathfrak{p}'} = \widetilde{\mathcal{O}}_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$.

Da $\mathcal{O}'$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L ist, muss $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}'$ sein.

Damit ist $(\mathcal{O}_1)_{\mathfrak{p}'} = \mathcal{O}'_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ ein gemeinsamer Oberring von $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}'$. Also sind $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}_1$ abhängig und $\mathcal{T}'$ ist die von $\mathcal{O}'$ definierte Topologie.

„$\Rightarrow$“: Wir betrachten zunächst den Fall, dass L/K eine endliche Körpererweiterung ist.

Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K, der $\mathcal{T}$ definiert. Da L/K endlich ist, gibt es nur endlich viele Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf L, diese bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_s$.

Da sich nach Voraussetzung $\mathcal{T}$ eindeutig auf L fortsetzen lässt, sind $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_s$ abhängig, also haben sie nach Korollar 2.3.12 ein gemeinsames Primideal $\mathfrak{p}'$ für das gilt: $(\mathcal{O}_1)_{\mathfrak{p}'} = \cdots = (\mathcal{O}_s)_{\mathfrak{p}'}$.

Setze $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}' \cap \mathcal{O}$.

Die Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ auf L sind nach Korollar 2.3.10 gerade $(\mathcal{O}_1)_{\mathfrak{p}'}, \ldots, (\mathcal{O}_s)_{\mathfrak{p}'}$. Da $(\mathcal{O}_1)_{\mathfrak{p}'} = \cdots = (\mathcal{O}_s)_{\mathfrak{p}'}$ ist, ist $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ eindeutig auf L fortsetzbar. $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ sind abhängig, also ist die von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ definierte Topologie gerade $\mathcal{T}$.

Sei nun L/K eine beliebige algebraische Körpererweiterung.

Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K, der $\mathcal{T}$ definiert, und sei

$$X := \operatorname{Spec}(\mathcal{O}) \setminus \{(0)\} = \{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O} \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal von } \mathcal{O},\ \mathfrak{p} \neq (0)\}$$

das Spektrum von $\mathcal{O}$ ohne das Nullideal.

X wird linear geordnet durch

$$\mathfrak{p}_1 \leq \mathfrak{p}_2 :\Leftrightarrow \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$$

(siehe hierzu [EnPr], Seite 43).

Da $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ ist, definiert $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} \in X$ ebenfalls $\mathcal{T}$. Es genügt also zu zeigen, dass es ein $\mathfrak{p} \in X$ gibt, für das $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ nur eine Fortsetzung auf L hat.

Angenommen, zu jedem $\mathfrak{p} \in X$ existieren mehrere Fortsetzungen von $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ auf L.

Sei $\overline{\mathcal{O}}$ eine beliebige Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L.

Wir zeigen in drei Schritten, dass es eine von $\overline{\mathcal{O}}$ unabhängige Fortsetzung von $\mathcal{O}$ auf L gibt.

1. Schritt: Wir definieren eine ordinale Folge

$$(\mathfrak{p}_\alpha,\, \Lambda_\alpha)_{\alpha<\lambda_0}$$

für eine Ordinalzahl λ_0 mit $\operatorname{card}(\lambda_0) \leq \operatorname{card}(X)$ so, dass $X' := \{\mathfrak{p}_\alpha \mid \alpha < \lambda_0\} \subseteq X$ konfinal in X ist und für alle $\alpha < \lambda_0$ die folgenden Bedingungen gelten:

- Λ_α ist ein Zwischenkörper von L/K
- $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ lässt sich eindeutig auf Λ_α fortsetzen
- $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ besitzt verschiedene Fortsetzungen auf $\Lambda_{\alpha'}$
- für $\alpha < \beta < \lambda_0$ gilt $\Lambda_\alpha \subsetneq \Lambda_\beta$.

Insbesondere ist dann $\widetilde{\Lambda} := \bigcup_{\alpha<\lambda_0} \Lambda_\alpha$ ein Zwischenkörper von L/K.

2. Schritt: Zu jedem $\alpha < \lambda_0$ wählen wir eine Fortsetzung $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ von $\mathcal{O}$ auf $\Lambda_{\alpha'}$ so, dass gelten

- $\mathcal{O}^{(\alpha)}_{(\mathfrak{p}_\alpha)} \neq \overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p}_\alpha)} \cap \Lambda_{\alpha'}$.
- für $\alpha < \beta < \lambda_0$ ist $\mathcal{O}^{(\beta)}$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ auf $\Lambda_{\beta'}$.

Insbesondere ist dann $\widetilde{\mathcal{O}} := \bigcup_{\alpha<\lambda_0} \mathcal{O}^{(\alpha)}$ ein Bewertungsring auf $\widetilde{\Lambda}$, der $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ für alle $\alpha < \lambda_0$ fortsetzt.

3. Schritt: Wir zeigen, dass $\overline{\mathcal{O}} \cap \widetilde{\Lambda}$ und $\widetilde{\mathcal{O}}$ nicht abhängig sind und somit unterschiedliche Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ auf $\widetilde{\Lambda}$ definieren. Da sich jede V-Topologie auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt und $\widetilde{\Lambda} \subseteq L$ ist, bekommen wir somit auch unterschiedliche Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ auf L.

1.Schritt: Wir definieren die ordinale Folge $(\mathfrak{p}_\alpha,\, \Lambda_\alpha)$ folgendermaßen:

„$\alpha = 0$“:

Setze $(\mathfrak{p}_0,\, \Lambda_0) := (\mathcal{M},\, K)$, wobei $\mathcal{M}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ sei.

„$\alpha \to \alpha'$“:

Nach Voraussetzung lässt sich $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ nicht eindeutig auf L fortsetzen. Wir können also ein $x \in L$ so wählen, dass es auf $\Lambda_\alpha(x)$ unterschiedliche Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ gibt. Definiere $\Lambda_{\alpha'} := \Lambda_\alpha(x)$.

$\Lambda_{\alpha'}/\Lambda_\alpha$ ist eine endliche Körpererweiterung. Also hat jede Fortsetzung von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ auf Λ_α nur endlich viele Fortsetzungen auf $\Lambda_{\alpha'}$. Da $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ eindeutig auf Λ_α fortsetzbar ist, hat damit $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ nur endlich viele Fortsetzungen auf $\Lambda_{\alpha'}$.

Die von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ definierte Topologie ist $\mathcal{T}$. Diese ist eindeutig auf L, also auch auf den Zwischenkörper $\Lambda_{\alpha'}$ von L/K, fortsetzbar. Also sind die Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ alle abhängig und besitzen somit nach Korollar 2.3.10 ein gemeinsames Primideal $\mathfrak{p}'$, für das $\left(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}\right)_{\mathfrak{p}'\cap K} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}'\cap K}$ eindeutig auf $\Lambda_{\alpha'}$ fortsetzbar ist. Setze $\mathfrak{p}_{\alpha'} := \mathfrak{p}' \cap K$.

„λ Limesordinalzahl“:

Definiere

$$(\mathfrak{p}_\lambda,\, \Lambda_\lambda) := \left(\bigcap_{\alpha<\lambda} \mathfrak{p}_\alpha,\, \bigcup_{\alpha<\lambda} \Lambda_\alpha \right).$$

1. Fall: Es ist $\bigcap_{\alpha<\lambda} \mathfrak{p}_\alpha = (0)$. Wir zeigen, dass $\{\mathfrak{p}_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ konfinal in X liegt.
Angenommen, es gibt ein $\mathfrak{p} \in X$ so, dass für kein $\alpha < \lambda$ gilt $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}_\alpha$, das heißt $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_\alpha$ für alle $\alpha < \lambda$.
Dann ist

$$\mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} \mathfrak{p}_\alpha = (0)$$

und damit $\mathfrak{p} = (0)$.
Dies ist aber ein Widerspruch zu $\mathfrak{p} \in X$.
In diesem Fall endet die Definition.
Wir setzen $\lambda_0 := \lambda$ und $X' := \{\mathfrak{p}_\alpha \mid \alpha < \lambda_0\}$.

2. Fall: Es ist $\bigcap_{\alpha<\lambda} \mathfrak{p}_\alpha \neq (0)$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{p}_\lambda$ ein Primideal von $\mathcal{O}$ ist, für das gilt: $\mathfrak{p}_\alpha < \mathfrak{p}_\lambda$ für alle $\alpha < \lambda$ und $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ lässt sich eindeutig auf den Körper Λ_λ fortsetzen.
Es gilt allgemein, dass beliebige Schnitte von Idealen wieder Ideale sind. Zu zeigen ist also, dass $\mathfrak{p}_\lambda$ Primideal ist.
Seien $x,\, y \in K$ mit $x \cdot y \in \mathfrak{p}_\lambda$. Ist $x \notin \mathfrak{p}_\lambda$, so gibt es ein $\alpha < \lambda$ mit $x \notin \mathfrak{p}_\alpha$.
Für $\beta \geq \alpha$ gilt $\mathfrak{p}_\beta \subseteq \mathfrak{p}_\alpha$ und damit $x \notin \mathfrak{p}_\beta$. Da $\mathfrak{p}_\beta$ prim ist, folgt daraus $y \in \mathfrak{p}_\beta$.
Für $\beta < \alpha$ folgt damit, da $\mathfrak{p}_\alpha \subseteq \mathfrak{p}_\beta$ ist, ebenfalls $y \in \mathfrak{p}_\beta$.
Insgesamt folgt also $y \in \mathfrak{p}_\beta$ für alle $\beta < \lambda$ und damit $y \in \mathfrak{p}_\lambda$. Also ist $\mathfrak{p}_\lambda$ ein Primideal.

Aus der Definition ist klar, dass für alle $\alpha < \lambda$ gilt $\mathfrak{p}_\alpha \leq \mathfrak{p}_\lambda$.
Angenommen, $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}_\lambda$ für ein $\alpha < \lambda$. Dann ist

$$\mathfrak{p}_{\alpha'} > \mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}_\lambda \geq \mathfrak{p}_{\alpha'}.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also gilt $\mathfrak{p}_\alpha < \mathfrak{p}_\lambda$ für alle $\alpha < \lambda$.
Angenommen, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ läßt sich nicht eindeutig auf Λ_λ fortsetzen.
Seien $\mathcal{O}'_{(p_\lambda)}$ und $\mathcal{O}''_{(p_\lambda)}$ zwei verschiedene Fortsetzungen. Sei

$$x \in \mathcal{O}'_{(\mathfrak{p}_\lambda)} \cup \mathcal{O}''_{(\mathfrak{p}_\lambda)} \setminus \mathcal{O}'_{(\mathfrak{p}_\lambda)} \cap \mathcal{O}''_{(\mathfrak{p}_\lambda)}.$$

Es ist $x \in \Lambda_\lambda$, also $x \in \Lambda_\alpha$ für ein $\alpha < \lambda$. Damit sind also $\mathcal{O}'_{(p_\lambda)} \cap \Lambda_\alpha$ und $\mathcal{O}''_{(p_\lambda)} \cap \Lambda_\alpha$ zwei verschiedene Fortsetzungen von $\mathcal{O}_{p_\lambda}$ auf Λ_α. Da $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ eindeutig auf Λ_α fortsetzbar ist und $\mathfrak{p}_\lambda \subseteq \mathfrak{p}_\alpha$ ist, ist nach Korollar 2.3.13 auch $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ eindeutig auf Λ_α fortsetzbar.
Dies ist ein Widerspruch.

Für eine Limesordinalzahl λ_0 mit $\operatorname{card}(\lambda_0) \leq \operatorname{card}(X)$ muss wegen $\mathfrak{p}_\alpha \neq \mathfrak{p}_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ und $\mathfrak{p}_\alpha \in X$ der erste Fall eintreten und somit die Definition enden.

2.Schritt: Wir definieren nun zu jedem $\mathfrak{p}_\alpha \in X'$ einen Bewertungsring $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ wie folgt:

“$\alpha = 0$“:

Nach Voraussetzung lässt sich $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_0}$ nicht eindeutig auf Λ_1 fortsetzen. Es existiert also eine Fortsetzung, die verschieden von $\overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p}_0)} \cap \Lambda_1$ ist. Diese ist nach Lemma 2.3.9 von der Form $\mathcal{O}^{(0)}_{(\mathfrak{p}_0)}$ für eine Fortsetzung $\mathcal{O}^{(0)}$ von $\mathcal{O}$ auf Λ_1.

„$\alpha \to \alpha'$“:

Nach Voraussetzung lässt sich $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_{\alpha'}}$ nicht eindeutig auf $\Lambda_{\alpha''}$ fortsetzen. Es gibt also eine Fortsetzung

$$\mathcal{O}' \neq \overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p}_{\alpha'})} \cap \Lambda_{\alpha''}$$

von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_{\alpha'}}$ auf $\Lambda_{\alpha''}$.

$\mathcal{O}' \cap \Lambda_{\alpha'}$ ist eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_{\alpha'}}$ auf $\Lambda_{\alpha'}$. Nach Lemma 2.3.5 ist $\mathcal{O}^{(\alpha)}_{(\mathfrak{p}_{\alpha'})}$ ebenfalls eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_{\alpha'}}$ auf $\Lambda_{\alpha'}$. Da $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_{\alpha'}}$ eindeutig auf $\Lambda_{\alpha'}$ fortsetzbar ist, muss damit

$$\mathcal{O}' \cap \Lambda_{\alpha'} = \mathcal{O}^{(\alpha)}_{(\mathfrak{p}_{\alpha'})}$$

gelten. $\mathcal{O}'$ ist somit Fortsetzung von $\mathcal{O}^{(\alpha)}_{(\mathfrak{p}_{\alpha'})}$.

Also existiert nach Lemma 2.3.9 eine Fortsetzung $\mathcal{O}^{(\alpha')}$ von $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ auf $\Lambda_{\alpha''}$ mit $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^{(\alpha')}_{(\mathfrak{p}_{\alpha'})}$.

„λ Limesordinalzahl“:

Nach Voraussetzung lässt sich $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ nicht eindeutig auf $\Lambda_{\lambda'}$ fortsetzen. Es gibt also eine Fortsetzung

$$\mathcal{O}' \neq \overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p}_\lambda)} \cap \Lambda_{\lambda'}$$

von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ auf $\Lambda_{\lambda'}$.

Sei

$$\widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)} := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{O}^{(\alpha)}.$$

Dann ist $\widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)}$ ein Bewertungsring auf Λ_λ, der $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ für alle $\alpha < \lambda$ fortsetzt.

Nach Lemma 2.3.5 ist $\widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)}_{(\mathfrak{p}_\lambda)}$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ auf Λ_λ. Da $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\lambda}$ eindeutig auf Λ_λ fortsetzbar ist, muss damit

$$\mathcal{O}' \cap \Lambda_\lambda = \widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)}_{(\mathfrak{p}_\lambda)}$$

gelten. $\mathcal{O}'$ ist somit eine Fortsetzung von $\widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)}$ auf $\Lambda_{\lambda'}$. Also existiert nach Lemma 2.3.9 eine Fortsetzung $\mathcal{O}^{(\lambda)}$ von $\widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)}_{(\mathfrak{p}_\lambda)}$ auf $\Lambda_{\lambda'}$ mit $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^{(\lambda)}_{(\mathfrak{p}_\lambda)}$.

Da $\widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)}$ für alle $\alpha < \lambda$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}^{(\alpha)}$ ist und $\mathcal{O}^{(\lambda)}$ eine Fortsetzung von $\widetilde{\mathcal{O}}^{(\lambda)}$ ist, ist $\mathcal{O}^{(\lambda)}$ für alle $\alpha < \lambda$ eine Fortsetzung von $\mathcal{O}^{(\alpha)}$.

3.Schritt: Wir zeigen, dass $\overline{\mathcal{O}} \cap \widetilde{\Lambda} = \overline{\mathcal{O}} \cap \left(\bigcup_{\alpha<\lambda_0} \Lambda_\alpha\right)$ und $\widetilde{\mathcal{O}} := \bigcup_{\alpha<\lambda_0} \mathcal{O}^{(\mathfrak{p}_\alpha)}$ nicht abhängig sind.

Für jedes $\alpha < \lambda_0$ gilt nach Konstruktion

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p}_\alpha)} \cap \Lambda_{\alpha'} = \mathcal{O}^{(\mathfrak{p}_\alpha)}_{(\mathfrak{p}_\alpha)} \neq \overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p}_\alpha)} \cap \Lambda_{\alpha'}.$$

Da $X' = \{\mathfrak{p}_\alpha \mid \alpha < \lambda_0\}$ konfinal in X liegt, existiert zu jedem $\mathfrak{p} \in X$ ein $\alpha < \lambda_0$ mit $\mathfrak{p}_\alpha \geq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_\alpha \subseteq \mathfrak{p}$.

Aus

$$\mathcal{O}^{(\mathfrak{p}_\alpha)}_{(\mathfrak{p}_\alpha)} \neq \overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p}_\alpha)} \cap \Lambda_{\alpha'}$$

folgt nach Korollar 2.3.13

$$\mathcal{O}^{(\mathfrak{p}_\alpha)}_{(\mathfrak{p})} \neq \overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p})} \cap \Lambda_{\alpha'}.$$

Wären $\widetilde{\mathcal{O}}$ und $\overline{\mathcal{O}} \cap \widetilde{\Lambda}$ abhängig, so gäbe es nach Korollar 2.3.2 ein gemeinsames Primideal $\mathfrak{p} \in X$ von $\widetilde{\mathcal{O}}$ und $\overline{\mathcal{O}} \cap \widetilde{\Lambda}$ mit

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p})} = \left(\overline{\mathcal{O}} \cap \widetilde{\Lambda}\right)_{(\mathfrak{p})}$$

und damit insbesondere

$$\mathcal{O}^{(\mathfrak{p}_\alpha)}_{(\mathfrak{p})} = \overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{p})} \cap \Lambda_{\alpha'}.$$

Also sind $\widetilde{\mathcal{O}}$ und $\overline{\mathcal{O}} \cap \widetilde{\Lambda}$ nicht abhängig.

Nach Satz 2.2.1 lässt sich $\widetilde{\mathcal{O}}$ zu einem Bewertungsring $\mathcal{O}^*$ auf L fortsetzen. $\mathcal{O}^*$ und $\overline{\mathcal{O}}$ definieren unterschiedliche Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ auf L. □

Für Topologien, die durch eine Rang-1-Bewertung definiert werden, reicht es aus, diese Bewertung zu betrachten. Es gilt folgendes Korollar:

2.3.16 Korollar. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper. Sei $\mathcal{O}$ eine Rang-1-Bewertung, die $\mathcal{T}$ definiert. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung.*

Dann ist $\mathcal{T}$ genau dann eindeutig auf L fortsetzbar, wenn $\mathcal{O}$ eindeutig auf L fortsetzbar ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Diese Richtung folgt sofort aus Satz 2.3.15.

„$\Rightarrow$“: Nach Satz 2.3.15 existiert ein Bewertungsring $\mathcal{O}'$, der $\mathcal{T}$ definiert und sich eindeutig auf L fortsetzen lässt.

Da $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ beide $\mathcal{T}$ definieren, folgt nach Korollar 1.3.7 schon $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$.

Nach Bemerkung 2.3.14 lässt sich damit $\mathcal{O}$ ebenfalls eindeutig auf L fortsetzen. □

2.3.2 Von Absolutbeträgen definierte Topologien

Wir werden uns nun mit durch Absolutbeträge definierten Topologien beschäftigen. Wir zeigen einen ähnlichen Satz wie für Bewertungen, allerdings werden wir hier zunächst die eindeutige Fortsetzbarkeit aller Absolutbeträge, die die Topologie definieren, voraussetzen.

Wir zeigen zunächst noch zwei Lemmata.

Ist $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag und $\alpha > 0$ eine reelle Zahl, so ist im Allgemeinen $|\,.\,|^\alpha$ kein Absolutbetrag. Um zu zeigen, dass $|\,.\,|^\alpha$ ein Absolutbetrag ist, müssen wir weitere Forderungen an $|\,.\,|$ oder α stellen. Im folgenden Lemma werden wir zeigen, dass falls $\alpha \leq 1$ ist, $|\,.\,|^\alpha$ ein Absolutbetrag ist. Ausführlicher wird diese Frage in [Wa] behandelt, wo insbesondere das folgende Lemma als Teil des Satzes 18.5 gezeigt wird.

2.3.17 Lemma. *Sei $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag auf einem Körper K. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha \leq 1$.*

Dann ist $|\,.\,|^\alpha$ ebenfalls ein Absolutbetrag auf K.

Beweis: Seien $x, y \in K$.

Es ist $|x|^\alpha = 0$ genau dann, wenn $|x| = 0$. Da $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag ist, ist dies äquivalent dazu, dass $x = 0$ ist.

Da $|\,.\,|$ Absolutbetrag ist, gilt außerdem

$$|x \cdot y|^\alpha = (|x| \cdot |y|)^\alpha = |x|^\alpha \cdot |y|^\alpha.$$

Zu zeigen bleibt die Dreiecksungleichung. Seien ohne Einschränkung x, $y \neq 0$.
Für jedes $c \in (0,1)$ gilt $0 < 1 - c < 1$ und damit, da $\alpha \leq 1$ ist,

$$c \leq c^{\alpha}$$

und

$$(1-c) \leq (1-c)^{\alpha}\,.$$

Also ist

$$1 = c + (1-c) \leq c^{\alpha} + (1-c)^{\alpha}\,.$$

Es ist

$$0 < |x| < |x| + |y|,$$

also ist für

$$c := |x| \cdot (|x| + |y|)^{-1}$$

$c \in (0,\, 1)$. Es ist also

$$1 \leq \Big(|x| \cdot (|x| + |y|)^{-1}\Big)^{\alpha} + \Big(1 - |x| \cdot (\,|x| + |y|\,)^{-1}\Big)^{\alpha}\,.$$

Multiplizieren wir die Ungleichung mit $(|x| + |y|)^{\alpha}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(|x| + |y|)^{\alpha} &\leq |x|^{\alpha} + \Big(\Big(1 - |x| \cdot (|x| + |y|)^{-1}\Big) \cdot \Big(|x| + |y|\Big)\Big)^{\alpha} \\
&= |x|^{\alpha} + (|x| + |y| - |x|)^{\alpha} \\
&= |x|^{\alpha} + |y|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Da $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag ist, gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

und somit

$$|x + y|^{\alpha} \leq (|x| + |y|)^{\alpha} \leq |x|^{\alpha} + |y|^{\alpha}.$$

Also ist $|\,.\,|^{\alpha}$ ein Absolutbetrag. □

Da wir uns im Folgenden mit Fortsetzungen von Topologien beschäftigen werden, stellt sich die Frage, ob zwei verschiedene Fortsetzungen eines Absolutbetrages die gleiche Topologie definieren können. Es wird sich herausstellen, dass verschiedene Fortsetzungen eines nichttrivialen Absolutbetrages nie äquivalent sind, also immer auch verschiedene Fortsetzungen der Topologie definieren.

2.3.18 Lemma. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Seien $|\,.\,|_1$ und $|\,.\,|_2$ äquivalente Absolutbeträge auf L, deren Einschränkung auf K nichttrivial ist.*

Ist $|\,.\,|_1|_K = |\,.\,|_2|_K$, so gilt schon $|\,.\,|_1 = |\,.\,|_2$.

Beweis: Da $|\,.\,|_1$ und $|\,.\,|_2$ äquivalent sind, gibt es nach Satz 1.3.4 ein $\alpha > 0$ mit $|\,.\,|_1^\alpha = |\,.\,|_2$. Sei $x \in K \setminus \{0\}$ mit $|x|_1 \neq 1$. Dann folgt aus

$$|x|_1 = |x|_2 = |x|_1^\alpha$$

schon $\alpha = 1$ und somit $|\,.\,|_1 = |\,.\,|_2$. □

2.3.19 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper, wobei $\mathcal{T}$ von einem archimedischen Absolutbetrag definiert wird. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung.*

$\mathcal{T}$ lässt sich genau dann eindeutig auf L fortsetzen, wenn sich jeder Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, eindeutig auf L fortsetzen lässt.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag auf K, der $\mathcal{T}$ definiert. Nach Satz 2.1.2 ist eine von einer Fortsetzung von $|\,.\,|$ definierte Topologie eine Fortsetzung von $\mathcal{T}$.

Da $\mathcal{T}$ eindeutig auf L fortsetzbar ist, sind alle Fortsetzungen von $|\,.\,|$ äquivalent und somit, nach Lemma 2.3.18, gleich.

„$\Leftarrow$“: Seien $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}^*$ Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ auf L. Nach Satz 2.1.5 werden $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}^*$ von Absolutbeträgen $|\,.\,|'$ und $|\,.\,|^*$ definiert.

Seien $|\,.\,|_1 := |\,.\,|'|_K$ und $|\,.\,|_2 := |\,.\,|^*|_K$ die Einschränkungen dieser Absolutbeträge auf K. Nach Satz 2.1.2 sind $|\,.\,|_1$ und $|\,.\,|_2$ Absolutbeträge, die $\mathcal{T}$ definieren, also sind sie äquivalent. Nach Satz 1.3.4 existiert also ein $\alpha > 0$ mit $|\,.\,|_1^\alpha = |\,.\,|_2$.

1. Fall: Es ist $\alpha \leq 1$. Nach Lemma 2.3.17 ist $|\,.\,|'^\alpha$ ein Absolutbetrag. $|\,.\,|'^\alpha$ setzt $|\,.\,|_1^\alpha = |\,.\,|_2$ fort. Da $|\,.\,|_2$ eindeutig fortsetzbar ist, muss also $|\,.\,|'^\alpha = |\,.\,|^*$ sein. Nach Satz 1.3.4 sind $|\,.\,|'$ und $|\,.\,|^*$ also äquivalent und damit $\mathcal{T}' = \mathcal{T}^*$.

2. Fall: Es ist $\alpha > 1$. Dann ist $\frac{1}{\alpha} < 1$ und wir bekommen analog zum ersten Fall mit der eindeutigen Fortsetzbarkeit von $|\,.\,|_1$, dass $(|\,.\,|^*)^{\frac{1}{\alpha}} = |\,.\,|'$ ist und damit, dass $\mathcal{T}' = \mathcal{T}^*$ ist. □

Ist der Grundkörper bezüglich eines Absolutbetrages vollständig, so ist der Absolutbetrag eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzbar. Wie wir gerade gesehen haben, folgt hieraus auch die eindeutige Fortsetzbarkeit der durch den Absolutbetrag definierten Topologie.

Nach [Wa], Satz 26.4, gilt:

2.3.20 Satz. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und sei $|\,.\,|$ ein nichttrivialer Absolutbetrag auf K. Sei K bezüglich $|\,.\,|$ vollständig.*

Dann gibt es einen eindeutigen Absolutbetrag $|\,.\,|'$ auf L, der $|\,.\,|$ fortsetzt.

2.3.21 Korollar. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei $\mathcal{T}$ eine von einem archimedischen Absolutbetrag definierte Topologie. Sei K vollständig bezüglich $\mathcal{T}$.*

Dann lässt sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf L fortsetzen.

Beweis: Ist $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, so ist K bezüglich $|\,.\,|$ vollständig. Nach Satz 2.3.20 lässt sich $|\,.\,|$ eindeutig auf L fortsetzen.

Jeder Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, lässt sich also eindeutig auf L fortsetzen und somit lässt sich $\mathcal{T}$ nach Satz 2.3.19 eindeutig auf L fortsetzen. □

2.4 Endliche, algebraische und separable Körpererweiterungen

Sind ein Absolutbetrag oder eine Bewertung eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzbar, so folgt auch die eindeutige Fortsetzbarkeit auf jede algebraische Körpererweiterung. Für Bewertungen können wir außerdem aus der eindeutigen Fortsetzbarkeit auf den separablen Abschluss auf die eindeutige Fortsetzbarkeit auf jede algebraische Körpererweiterung schließen.

Dies gilt für V-Topologien im Allgemeinen nicht. Wir wollen uns in diesem Abschnitt überlegen, unter welchen Voraussetzungen wir welche Äquivalenzen bekommen.

Für Bewertungen gelten folgende Äquivalenzen (vergleiche [EnPr], Seite 86):

2.4.1 Satz. *Sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\mathcal{O}$ lässt sich auf jede endliche Körpererweiterung von K eindeutig fortsetzen.*

(ii) *$\mathcal{O}$ lässt sich auf jede algebraische Körpererweiterung von K eindeutig fortsetzen.*

(iii) *$\mathcal{O}$ lässt sich auf den algebraischen Abschluss von K eindeutig fortsetzen.*

(iv) *$\mathcal{O}$ lässt sich auf jede separable Körpererweiterung von K eindeutig fortsetzen.*

(v) *$\mathcal{O}$ lässt sich auf den separablen Abschluss von K eindeutig fortsetzen.*

Für Absolutbeträge können wir das folgende Lemma zeigen.

2.4.2 Lemma. *Sei $(K, |\,.\,|)$ ein Körper mit Absolutbetrag.*

$|\,.\,|$ lässt sich genau dann auf jede algebraische Körpererweiterung eindeutig fortsetzen, wenn sich $|\,.\,|$ eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Klar.

„$\Leftarrow$“: Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Seien $|\,.\,|'$ und $|\,.\,|''$ verschiedene Fortsetzungen von $|\,.\,|$ auf L. Sei $x \in L$ mit $|x|' \neq |x|''$. Dann ist $K(x)/K$ eine endliche Körpererweiterung und $|\,.\,|'|_{K(x)}$ und $|\,.\,|''|_{K(x)}$ sind unterschiedliche Fortsetzungen von $|\,.\,|$ auf $K(x)$. □

Wir wollen nun untersuchen, in welchen Fällen sich dies auf V-Topologien verallgemeinern lässt.

Wir betrachten die Fälle, dass die Topologie durch einen archimedischen Absolutbetrag definiert wird, dass die Topologie durch eine Rang-1-Bewertung definiert wird und dass die Topologie durch höherrangige Bewertungen definiert wird, getrennt.

Zunächst zeigen wir, dass sich Lemma 2.4.2 auf durch Absolutbeträge definierte V-Topologien übertragen lässt.

2.4.3 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper. $\mathcal{T}$ werde von einem archimedischen Absolutbetrag definiert.*

Dann ist $\mathcal{T}$ genau dann eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung von K fortsetzbar, wenn $\mathcal{T}$ eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzbar ist.

Beweis: Nach Satz 2.3.19 lässt sich $\mathcal{T}$ genau dann eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen, wenn sich jeder Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Nach Lemma 2.4.2 lässt sich genau dann jeder Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen, wenn sich jeder Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Wiederum nach Satz 2.3.19 lässt sich genau dann jeder Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzen, wenn sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung fortsetzen lässt. □

Als nächstes zeigen wir, dass sich Satz 2.4.1 auf Topologien verallgemeinern lässt, die von einer Rang-1-Bewertung definiert werden.

2.4.4 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper. $\mathcal{T}$ werde von einer Rang-1-Bewertung definiert.*

Dann sind äquivalent:

(*i*) *$\mathcal{T}$ lässt sich auf jede endliche Körpererweiterung von K eindeutig fortsetzen.*

(*ii*) *$\mathcal{T}$ lässt sich auf jede algebraische Körpererweiterung von K eindeutig fortsetzen.*

(*iii*) *$\mathcal{T}$ lässt sich auf den algebraischen Abschluss von K eindeutig fortsetzen.*

(*iv*) *$\mathcal{T}$ lässt sich auf jede separable Körpererweiterung von K eindeutig fortsetzen.*

(*v*) *$\mathcal{T}$ lässt sich auf den separablen Abschluss von K eindeutig fortsetzen.*

Beweis: Der Satz folgt sofort aus Korollar 2.3.16 und Satz 2.4.1. □

Wir betrachten nun den Fall, dass es keinen Absolutbetrag gibt, der $\mathcal{T}$ definiert.

Lässt sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf den algebraischen Abschluss $\overline{K}^{alg}$ von K fortsetzen, so gibt es nach Satz 2.3.15 eine Bewertung, die $\mathcal{T}$ definiert und sich eindeutig auf $\overline{K}^{alg}$ fortsetzen lässt und damit henselsch ist.

Wissen wir nur, dass sich $\mathcal{T}$ auf jede endliche Körpererweiterung eindeutig fortsetzen lässt, folgt im Allgemeinen nicht, dass es eine henselsche Bewertung gibt, die $\mathcal{T}$ definiert. Mit Satz 2.3.15 bekommen wir zwar für jede endliche Körpererweiterung eine Bewertung, die $\mathcal{T}$ definiert und sich eindeutig auf die Körpererweiterung fortsetzen lässt, diese Bewertungen können jedoch für unterschiedliche Körpererweiterungen verschieden sein. Ist also L/K eine algebraische Körpererweiterung, so bekommen wir zu jedem Zwischenkörper $K \subseteq F \subseteq L$ mit F/K endlich einen Bewertungsring $\mathcal{O}_F$, der $\mathcal{T}$ definiert und sich eindeutig auf F fortsetzen lässt. Die Vereinigung über alle diese Bewertungsringe kann jedoch im Allgemeinen K sein.

Für von höherrangigen Bewertungen definierte Topologien bekommen wir somit nur folgende Äquivalenzen.

2.4.5 Satz. *Sei* $(K, \mathcal{T})$ *ein V-topologischer Körper. Es gebe keinen Absolutbetrag, der* $\mathcal{T}$ *definiert.*

Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{T}$ *lässt sich auf jede algebraische Körpererweiterung von* K *eindeutig fortsetzen.*

(ii) $\mathcal{T}$ *lässt sich auf den algebraischen Abschluss von* K *eindeutig fortsetzen.*

(iii) $\mathcal{T}$ *lässt sich auf jede separable Körpererweiterung von* K *eindeutig fortsetzen.*

(iv) $\mathcal{T}$ *lässt sich auf den separablen Abschluss von* K *eindeutig fortsetzen.*

Beweis: $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Klar.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Klar.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Klar.

$(iv) \Rightarrow (ii)$: Lässt sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf den separablen Abschluss $\overline{K}^s$ von K fortsetzen, so gibt es nach Satz 2.3.15 eine Bewertung v, die $\mathcal{T}$ definiert und sich eindeutig auf $\overline{K}^s$ fortsetzen lässt.

Nach Satz 2.4.1 lässt sich v auch eindeutig auf den algebraischen Abschluss $\overline{K}^{alg}$ von K fortsetzen.

Wiederum nach Satz 2.3.15 lässt sich somit auch $\mathcal{T}$ eindeutig auf $\overline{K}^{alg}$ fortsetzen. □

3 Topologisch henselsche Körper

Wir wollen in diesem Kapitel den Begriff „topologisch henselsch“ definieren.

Die Bezeichnung *corps topologiquement henséliens* stammt von F. Berrondo (siehe [Be]).

Berrondos Definition hatte zum Ziel, den Begriff „henselsch“ auf V-topologische Körper zu verallgemeinern. Henselsche Körper sind Körper mit einer Bewertung, die sich eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt. Es ist also naheliegend, die topologisch henselschen Körper als die V-topologischen Körper zu definieren, deren Topologie sich eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt.

Berrondo definiert den Begriff „topologisch henselsch“ in [Be] über drei Äquivalenzen, von denen die dritte nur für nicht von Absolutbeträgen definierte Topologien gilt und hier nicht weiter untersucht werden soll. Die zweite Bedingung fordert gerade, dass die Topologie eindeutig auf den algebraischen Abschluss des Körpers fortsetzbar sein soll. Die erste Bedingung fordert, dass die Topologie von einer henselschen Bewertung erzeugt wird. Nach Satz 2.3.15 sind diese beiden Bedingungen für V-Topologien, die von Bewertungen definiert werden, äquivalent. Wir wollen allerdings den Begriff „topologisch henselsch“ so definieren, dass auch Körper mit von archimedischen Absolutbeträgen definierten Topologien topologisch henselsch heißen, falls sich die Topologie eindeutig auf den algebraischen Abschluss des Körpers fortsetzen lässt. Dazu müssen wir Berrondos erste Bedingung etwas ergänzen.

Wir werden einen V-topologischen Körper „topologisch henselsch“ nennen, falls die Topologie von einer henselschen Bewertung definiert wird oder falls die Topologie von einem archimedischen Absolutbetrag definiert wird und der Körper algebraisch abgeschlossen ist, oder der Körper reell abgeschlossen ist und die Topologie durch die Ordnung definiert wird. Diese Definition stammt aus [PrZi]. Wir werden im letzten Abschnitt des Kapitels zeigen, dass mit dieser Definition die topologisch henselschen Körper gerade die sind, die sich eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung fortstetzen lassen.

Um dies zu zeigen, werden wir uns im ersten Abschnitt zunächst mit Absolutbeträgen beschäftigen, die durch Einbettungen nach $\mathbb{C}$ definiert werden. Es wird sich zeigen, dass es zu jeder durch einen archimedischen Absolutbetrag definierten Topologie genau einen solchen Absolutbetrag gibt, der die Topologie definiert, und sich die Topologie genau dann eindeutig auf eine algebraische Körpererweiterung fortsetzen lässt, wenn sich dieser durch eine Einbettung definierte Absolutbetrag eindeutig fortsetzen lässt.

Im zweiten Abschnitt werden wir uns mit dem Thema Anordnungen und durch Anordnungen definierte Topologien beschäftigen. Außerdem werden wir einige Äquivalenzen dazu angeben, dass ein Körper reell abgeschlossen ist, die wir verwenden um im letzten Kapitel die angekündigte Äquivalenz zu zeigen.

3.1 Durch Einbettungen definierte Topologien

Im Folgenden werden wir den üblichen Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$ mit $|\,.\,|_0$ bezeichnen, also $|a+b\cdot i|_0 := \sqrt{a^2+b^2}$ für $a,\, b \in \mathbb{R}$. Die Einschränkungen auf Teilkörper, insbesondere auf $\mathbb{R}$, werden wir ebenfalls mit $|\,.\,|_0$ bezeichnen, wenn hierdurch keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Lässt sich ein Körper in einen Körper mit Absolutbetrag einbetten, so liefert die Einbettung einen Absolutbetrag auf dem Ausgangskörper. Andererseits können wir einen Körper mit archimedischem Absolutbetrag immer so in $\mathbb{C}$ einbetten, dass der durch die Einbettung und $|\,.\,|_0$ definierte Absolutbetrag zum ursprünglichen Absolutbetrag äquivalent ist, also insbesondere die gleiche Topologie definiert.

3.1.1 Lemma. *Seien K_1 und K_2 Körper. Sei $|\,.\,|_2$ ein Absolutbetrag auf K_2 und sei $\varphi : K_1 \hookrightarrow K_2$ eine Einbettung von K_1 in K_2.*

(*a*) *Durch $|x|_1 := |\varphi(x)|_2$ wird ein Absolutbetrag auf K_1 definiert.*

(*b*) *Ist $|\,.\,|_2$ archimedisch, so ist auch $|\,.\,|_1$ archimedisch.*

(*c*) *Seien L_1/K_1 und L_2/K_2 Körpererweiterungen, $|\,.\,|_2'$ eine Fortsetzung von $|\,.\,|_2$ und $\psi : L_1 \hookrightarrow L_2$ eine Einbettung, die φ fortsetzt.*

Dann wird durch $|x|_1' := |\psi(x)|_2'$ eine Fortsetzung von $|\,.\,|_1$ auf L_1 definiert.

Beweis:

(*a*) Dass
$$|x|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
gilt, folgt aus der Injektivität von φ. Die weiteren Eigenschaften folgen aus der Linearität von φ und den entsprechenden Eigenschaften von $|\,.\,|_2$.

(*b*) Es ist
$$|n\cdot 1|_1 = |\varphi(n\cdot 1)|_2 = |n\cdot 1|_2.$$
Da $|\,.\,|_2$ archimedisch, ist also
$$\{|n\cdot 1|_1 \mid n\in\mathbb{N}\} = \{|n\cdot 1|_2 \mid n\in\mathbb{N}\}$$
unbeschränkt und damit ist $|\,.\,|_1$ ebenfalls archimedisch.

(*c*) Für $x \in K_1$ gilt
$$|x|_1' = |\psi(x)|_2' = |\varphi(x)|_2' = |\varphi(x)|_2 = |x|_1. \qquad \square$$

3.1.2 Notation. Sei K ein Körper. Sei $\varphi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung. Wir bezeichnen mit $|\,.\,|_\varphi$ den durch $|x|_\varphi := |\varphi(x)|_0$ definierten Absolutbetrag auf K.

Die von $|\,.\,|_\varphi$ definierte Topologie bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_\varphi$.

Der folgende Satz ist als Einbettungssatz von Ostrowski bekannt. Den Beweis findet man zum Beispiel in [Wa] (Satz 26.14).

3.1.3 Satz (Einbettungssatz von Ostrowski)**.** *Sei $(K, |\,.\,|)$ ein Körper mit einem archimedischen Absolutbetrag. K sei vollständig bezüglich $|\,.\,|$.*

Dann existieren ein Isomorphismus φ von K nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und eine reelle Zahl $\alpha \in (0, 1]$ mit

$$|x| = |x|_\varphi^\alpha = |\varphi(x)|_0^\alpha$$

für alle $x \in K$.

Insbesondere definieren $|\,.\,|$ und $|\,.\,|_\varphi$ die gleiche Topologie.

3.1.4 Korollar. *Sei $(K, |\,.\,|)$ ein Körper mit einem archimedischen Absolutbetrag. Dann existiert eine Einbettung $\varphi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ so, dass $|\,.\,|$ äquivalent zu dem von φ erzeugten Absolutbetrag $|\,.\,|_\varphi$ ist, das heißt, es gibt eine reelle Zahl $\alpha \in (0, 1]$ mit*

$$|x| = |x|_\varphi^\alpha = |\varphi(x)|_0^\alpha$$

für alle $x \in K$.

Insbesondere gibt es zu jeder durch einen Absolutbetrag definierten Topologie $\mathcal{T}$ auf einem Körper K eine Einbettung $\varphi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\varphi$.

Beweis: Sei $\left(\widehat{K}, \widehat{|\,.\,|}\right)$ die Vervollständigung von $(K, |\,.\,|)$. Nach Satz 3.1.3 existieren eine Einbettung $\widehat{\varphi} : \widehat{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ und eine reelle Zahl $\alpha \in (0, 1]$ so, dass für alle $x \in \widehat{K}$ gilt $\widehat{|x|} = |\widehat{\varphi}(x)|_0^\alpha$ für ein $\alpha > 0$.

Definiere $\varphi := \widehat{\varphi}|_K$. □

3.1.5 Lemma. *Sei K ein Körper. Seien φ und ψ Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$.*

Sind $|\,.\,|_\varphi$ und $|\,.\,|_\psi$ abhängig, so sind sie schon gleich.

Beweis: Sind $|\,.\,|_\varphi$ und $|\,.\,|_\psi$ abhängig, so existiert nach Satz 1.3.4 ein $\alpha > 0$ so, dass für alle $x \in K$ gilt $|x|_\varphi = |x|_\psi^\alpha$. Insbesondere gilt für alle $q \in \mathbb{Q}$:

$$|q|_\psi^\alpha = |q|_\varphi = |\varphi(q)|_0 = |q|_0 = |\psi(q)|_0 = |q|_\psi.$$

Daraus folgt $\alpha = 1$ und somit $|\,.\,|_\varphi = |\,.\,|_\psi$. □

3.1.6 Lemma. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper mit einer von einem archimedischen Absolutbetrag definierten Topologie. Dann existiert genau ein Absolutbetrag $|\,.\,|$, der $\mathcal{T}$ definiert und für den gilt $|\,.\,| = |\,.\,|_\varphi$ für eine Einbettung $\varphi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$.*

Beweis: Sei $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert. Nach Korollar 3.1.4 existiert eine Einbettung φ von K nach $\mathbb{C}$ so, dass $|\,.\,|_\varphi$ zu $|\,.\,|$ äquivalent ist und somit $|\,.\,|_\varphi$ ebenfalls $\mathcal{T}$ definiert.

Sei ψ eine weitere Einbettung von K nach $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\psi$. Dann sind $|\,.\,|_\psi$ und $|\,.\,|_\varphi$ abhängig, also nach Lemma 3.1.5 gleich. □

Die Einbettung φ aus Lemma 3.1.6 ist nicht eindeutig bestimmt. Wir werden jedoch im folgenden Lemma sehen, dass es höchstens zwei Einbettungen geben kann, die den gleichen Absolutbetrag definieren.

Im Beweis des Lemmas verfahren wir ähnlich wie im Beweis von Satz **T** in [Ri2].

3.1.7 Lemma. *Sei K ein Körper. Seien φ und ψ verschiedene Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$.*

Dann ist $|\,.\,|_\varphi = |\,.\,|_\psi$ genau dann, wenn für alle $x \in K$ gilt $\varphi(x) = \overline{\psi(x)}$.

Insbesondere gibt es zu jedem Absolutbetrag höchstens zwei verschiedene Einbettungen, die diesen Absolutbetrag definieren.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Für alle $x \in K$ sei $\varphi(x) = \overline{\psi(x)}$. Dann gilt für alle $x \in K$:

$$|x|_\varphi = |\varphi(x)|_0 = |\overline{\varphi(x)}|_0 = |\psi(x)|_0 = |x|_\psi.$$

Und somit $|\,.\,|_\varphi = |\,.\,|_\psi$.

„$\Rightarrow$“: Sei $|\,.\,|_\psi = |\,.\,|_\varphi$.

1.Schritt: Für alle $x \in K$ gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ oder $\varphi(x) = \overline{\psi(x)}$.

Sei $x_0 \in K$.

Definiere

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbb{Q}(x_0) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\varphi(x_0)) \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{Q}(x_0) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\psi(x_0)) \\ x & \longmapsto & \psi(x)\,. \end{array}$$

Wir zeigen: $\sigma \circ \rho^{-1} : \mathbb{Q}(\psi(x_0)) \longrightarrow \mathbb{Q}(\varphi(x_0))$ ist stetig (bezüglich $|\,.\,|_0$).

Sei $\varepsilon > 0$ und seien $x, y \in \mathbb{Q}(\psi(x_0)) = \rho(\mathbb{Q}(x_0))$ mit $|x - y|_0 < \varepsilon$.

Sind $a, b \in \mathbb{Q}(x_0)$ mit $x = \rho(a)$ und $y = \rho(b)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sigma\circ\rho^{-1}(x)-\sigma\circ\rho^{-1}(y)\right|_0 &= \left|\sigma(a)-\sigma(b)\right|_0\\
&= \left|\sigma(a-b)\right|_0\\
&= \left|\varphi(a-b)\right|_0\\
&= |a-b|_\varphi\\
&= |a-b|_\psi\\
&= \left|\psi(a-b)\right|_0\\
&= \left|\rho(a-b)\right|_0\\
&= \left|\rho(a)-\rho(b)\right|_0\\
&= |x-y|_0\\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Also ist $\sigma\circ\rho^{-1}$ stetig und lässt sich somit stetig auf $\mathbb{R}(\psi(x_0))$ zu einem $\mathbb{R}$-Isomorphismus

$$\tau:\mathbb{R}(\psi(x_0))\longrightarrow\mathbb{R}(\varphi(x_0))$$

fortsetzen.

Es ist

$$\begin{aligned}
\tau(\psi(x_0)) &= \sigma\circ\rho^{-1}(\psi(x_0))\\
&= \sigma\circ\rho^{-1}(\rho(x_0))\\
&= \sigma(x_0)\\
&= \varphi(x_0)
\end{aligned}$$

und somit sind $\psi(x_0)$ und $\varphi(x_0)$ gleich oder konjugiert über $\mathbb{C}$, das heißt $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$ oder $\varphi(x_0)=\overline{\psi(x_0)}$.

2.Schritt: Für alle $x\in K$ gilt $\varphi(x)=\overline{\psi(x)}$.

Angenommen es gibt ein $x\in K$ mit $\varphi(x)\neq\overline{\psi(x)}$.

Dann folgt aus dem ersten Schritt, dass $\varphi(x)=\psi(x)$ ist. Da nach Voraussetzung $\varphi\neq\psi$ gilt, gibt es ein $y\in K$ mit $\varphi(y)\neq\psi(y)$. Wieder aus dem ersten Schritt folgt $\varphi(y)=\overline{\psi(y)}$.

Für $x+y$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \varphi(x)+\varphi(y)\\
&= \psi(x)+\varphi(y)\\
&\neq \psi(x)+\psi(y)\\
&= \psi(x+y)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi(x)+\varphi(y)\\ &= \varphi(x)+\overline{\psi(y)}\\ &\neq \overline{\psi(x)}+\overline{\psi(y)}\\ &= \overline{\psi(x)+\psi(y)}\\ &= \overline{\psi(x+y)}.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zum ersten Schritt. □

3.1.8 Lemma. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei $\mathcal{T}$ eine V-Topologie auf K, die durch einen archimedischen Absolutbetrag definiert wird und sei $\mathcal{T}'$ eine Fortsetzung von $\mathcal{T}$ auf L. Sei ψ eine Einbettung von L nach $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}'$.*

Dann ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\psi|_K}$.

Beweis: Nach Lemma 3.1.1 (c) ist $|\,.\,|_\psi$ eine Fortsetzung von $|\,.\,|_{\psi|_K}$. Nach Satz 2.1.2 ist damit $\mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}'$ eine Fortsetzung von $\mathcal{T}_{\psi|_K}$ und somit $\mathcal{T}_{\psi|_K} = \mathcal{T}$. □

3.1.9 Satz. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei $\mathcal{T}$ eine durch einen archimedischen Absolutbetrag definierte Topologie auf K. Sei φ eine Einbettung von K nach $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\varphi$.*

Dann ist $\mathcal{T}$ genau dann eindeutig auf L fortsetzbar, wenn $|\,.\,|_\varphi$ eindeutig auf L fortsetzbar ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Ist $\mathcal{T}$ eindeutig auf L fortsetzbar, dann ist nach Satz 2.3.19 jeder Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, eindeutig auf L fortsetzbar, also insbesondere $|\,.\,|_\varphi$.

„$\Leftarrow$“: Gibt es verschiedene Fortsetzungen $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}''$ von $\mathcal{T}$, so gibt es nach Korollar 3.1.4 Einbettungen ψ' und ψ'' von L nach $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\psi'}$ und $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{\psi''}$.

Nach Lemma 3.1.8 ist $\mathcal{T}_{\psi'|_K} = \mathcal{T}_{\psi''|_K} = \mathcal{T}$ und somit ist $|\,.\,|_{\psi'|_K} = |\,.\,|_{\psi''|_K} = |\,.\,|_\varphi$ der nach Lemma 3.1.6 eindeutige durch eine Einbettung nach $\mathbb{C}$ definierte Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert. Also sind $|\,.\,|_{\psi'}$ und $|\,.\,|_{\psi''}$ verschiedene Fortsetzungen von $|\,.\,|_\varphi$ auf L. □

3.1.10 Lemma. *Seien K_1 und K_2 Körper mit $\sqrt{-1} \notin K_1$. Sei $\varphi : K_1 \hookrightarrow K_2$ eine Einbettung. Seien*

$$\begin{aligned}\psi_\pm : K_1\left(\sqrt{-1}\right) &\longrightarrow K_2\left(\sqrt{-1}\right)\\ a + b\cdot\sqrt{-1} &\longmapsto \varphi(a) \pm \varphi(b)\cdot\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Dann sind $\psi_\pm$ Einbettungen, die φ fortsetzen und es gibt keine anderen Ringhomomorphismen von $K_1\left(\sqrt{-1}\right)$ in $K_2\left(\sqrt{-1}\right)$, die ebenfalls φ fortsetzen.

Beweis: Dass $\psi_\pm$ wohldefiniert sind, folgt aus $\sqrt{-1} \notin K_1$.

Dass $\psi_\pm$ Homomorphismen sind, lässt sich leicht überprüfen.

Nach Definition ist klar, dass $\psi_\pm$ Fortsetzungen von φ sind.

Für jeden Homomorphismus $\psi : K_1\left(\sqrt{-1}\right) \longrightarrow K_2\left(\sqrt{-1}\right)$ gilt

$$-1 = \psi(-1) = \psi\left(\sqrt{-1}\right)^2$$

und somit

$$\psi\left(\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}$$

oder

$$\psi\left(\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}.$$

Daraus folgt, dass für jede Fortsetzung $\psi : K_1\left(\sqrt{-1}\right) \longrightarrow K_2\left(\sqrt{-1}\right)$ von φ gilt

$$\psi\left(a + b \cdot \sqrt{-1}\right) = \psi(a) + \psi(b)\,\psi\left(\sqrt{-1}\right) = \varphi(a) \pm \varphi(b) \cdot \sqrt{-1}.$$

Wir zeigen nun, dass $\psi_\pm$ injektiv sind und somit Einbettungen.

Es ist

$$\psi_\pm\left(a + \sqrt{-1} \cdot b\right) = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) \pm \sqrt{-1} \cdot \varphi(b) = 0.$$

Sei $\psi_\pm\left(a + \sqrt{-1} \cdot b\right) = 0$.

Angenommen, $\varphi(b) \neq 0$. Dann ist

$$\sqrt{-1} = \mp\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} = \varphi\left(\frac{a}{b}\right) \in \varphi(K_1).$$

Also folgt, falls $\sqrt{-1} \notin \varphi(K_1)$ ist, aus $\psi_\pm(x) = 0$ schon $\varphi(b) = 0$. Da φ injektiv ist, folgt daraus $b = 0$ und damit $x \in K_1$. Wiederum, da φ injektiv ist und da $\psi_\pm|_{K_1} = \varphi$ ist, folgt $x = 0$. Also ist $\psi_\pm$ injektiv, falls $\sqrt{-1} \notin \varphi(K_1)$ ist.

Wäre aber $\sqrt{-1} \in \varphi(K_1)$, so gäbe es ein $x \in K_1$ mit $\varphi(x) = \sqrt{-1}$. Damit wäre

$$\begin{aligned} \varphi\left(x^2\right) &= \varphi(x)^2 \\ &= -1 \\ &= \varphi(-1). \end{aligned}$$

Aus der Injektivität von φ würde damit folgen $-1 = x^2 \in K_1^2$. Dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Also sind $\psi_\pm$ Einbettungen. $\square$

3.2 Anordnungen

Im Folgenden werden unter anderem Absolutbeträge, die durch Anordnungen auf einem Körper definiert werden, eine Rolle spielen. Daher werden wir nun einige wichtige Sätze aus der reellen Algebra zitieren und einige Lemmata beweisen, die wir im Folgenden brauchen werden.

3.2.1 Definition. Seien $(K_1, \leq_1)$ und $(K_2, \leq_2)$ angeordnete Körper. Sei $\varphi : K_1 \hookrightarrow K_2$ eine Einbettung.

Dann heißt φ *ordnungstreu* oder *Ordnungseinbettung*, falls für alle $x, y \in K_1$ gilt:

$$x \leq_1 y \Rightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y)$$

Der folgende Einbettungssatz aus der reellen Algebra wird zum Beispiel bei [DePr] als Satz 1.1.5 bewiesen.

3.2.2 Satz. *Sei $(K, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper.*

Dann gibt es eine ordnungstreue Einbettung von K nach $\mathbb{R}$.

3.2.3 Bemerkung. Durch eine Einbettung φ wie in Satz 3.2.2 wird insbesondere ein Absolutbetrag $|\,.\,|_\varphi$ auf K definiert.

3.2.4 Lemma. *Sei $(K, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper, sei $\varphi : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Ordnungseinbettung.*

Dann ist $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}_<$.

Beweis: Es sind

$$\mathcal{B}_< := \{\{x \in K \mid -a < x < a\} \mid a \in K \text{ mit } a > 0\}$$

eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_<$ und

$$\mathcal{B}_\varphi := \mathcal{B}_{|\,.\,|_\varphi} := \{\{x \in K \mid |x|_\varphi < \varepsilon\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ mit } \varepsilon > 0\}$$

eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}_\varphi$.

Es ist $\mathcal{B}_< \subseteq \mathcal{B}_\varphi$. Denn sei $a \in K$ mit $a > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \{x \in K \mid -a < x < a\} &= \{x \in K \mid -\varphi(a) < \varphi(x) < \varphi(a)\} \\ &= \{x \in K \mid |\varphi(x)|_0 < |\varphi(a)|_0\} \\ &= \{x \in K \mid |x|_\varphi < |a|_\varphi\}. \end{aligned}$$

Also ist $\{x \in K \mid -a < x < a\} = \{x \in K \mid |x|_\varphi < \varepsilon\}$ für $\varepsilon := |a|_\varphi > 0$.

Damit haben wir $\mathcal{T}_< \subseteq \mathcal{T}_\varphi$ gezeigt.

Wir zeigen nun, dass jedes Element aus $\mathcal{B}_\varphi$ eine Teilmenge aus $\mathcal{B}_<$ besitzt.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\{x \in K \mid |x|_\varphi < \varepsilon\} &\supseteq \left\{x \in K \;\middle|\; |x|_\varphi < \frac{1}{n} = \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \\
&= \left\{x \in K \;\middle|\; -\varphi\left(\frac{1}{n}\right) < \varphi(x) < \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \\
&= \left\{x \in K \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_<$ und damit $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}_<$. □

Der Beweis des folgenden Lemmas ist in [DePr] zu finden (Bemerkung 1.3.4).

3.2.5 Lemma. *Seien $(K_1, \leq_1)$ und $(K_2, \leq_2)$ angeordnete Körper. Sei $\varphi : K_1 \hookrightarrow K_2$ eine Einbettung.*

Ist die Anordnung auf K_1 eindeutig, so ist φ eine Ordnungseinbettung.

Wir werden nun den Begriff „reell abgeschlossen“ definieren und einige Äquivalenzen notieren.

3.2.6 Definition. Ein reeller Körper K heißt *reell abgeschlossen*, wenn er keine echte, algebraische, reelle Erweiterung hat.

Die Äquivalenzen (i) bis (iii) des folgenden Satzes wurden 1926 von Artin und Schreier bewiesen und finden sich zum Beispiel in [DePr] als Satz 1.2.10. Die Äquivalenz von (i) und (iv) findet man ebenfalls in [DePr] als Lemma 1.2.9.

3.2.7 Satz. *Sei K ein Körper. Dann sind äquivalent*

- (i) *K ist reell abgeschlossen.*
- (ii) *K^2 ist ein Positivbereich von K und jedes Polynom $f \in K[X]$ mit ungeradem Grad hat eine Nullstelle in K.*
- (iii) *$K \neq K\left(\sqrt{-1}\right)$ und $K\left(\sqrt{-1}\right)$ ist algebraisch abgeschlossen.*
- (iv) *K hat eine eindeutige Anordnung $\leq$ und $(K, \leq)$ ist maximal angeordnet.*

3.2.8 Lemma. *Sei $(K, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper.*

Dann ist $\mathcal{T}_<$ eindeutig auf $K\left(\sqrt{-1}\right)$ fortsetzbar.

Beweis: Nach Satz 3.2.2 existiert eine ordnungstreue Einbettung $\varphi : K \hookrightarrow \mathbb{R}$. Nach Lemma 3.2.4 ist $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}_<$.

Seien $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}''$ Fortsetzungen von $\mathcal{T}_<$ auf $K\left(\sqrt{-1}\right)$. Nach Lemma 3.1.6 existieren Einbettungen ψ' und ψ'' von $K\left(\sqrt{-1}\right)$ nach $\mathbb{C}$ so, dass $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\psi'}$ und $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}_{\psi''}$ ist. Seien $\varphi' := \psi'|_K$ und $\varphi'' := \psi''|_K$.

Nach Lemma 3.1.8 ist dann $\mathcal{T}_{\varphi'} = \mathcal{T}_{\varphi''} = \mathcal{T}_<$. Also muss nach Lemma 3.1.6 auch $|\,.\,|_\varphi = |\,.\,|_{\varphi'} = |\,.\,|_{\varphi''}$ gelten.

Sei $x \in K\left(\sqrt{-1}\right)$. Es ist $x = a + b\sqrt{-1}$ für gewisse $a,\, b \in K$.

Nach Lemma 3.1.10 gilt $\psi'(x) = \varphi'(a) + i\varphi'(b)$ oder $\psi'(x) = \varphi'(a) - i\varphi'(b)$ und analog $\psi''(x) = \varphi''(a) \pm i\varphi''(b)$.

Es ist

$$\begin{aligned}
|x|_{\psi'} &= |\psi'(x)|_0 \\
&= |\varphi'(a) \pm i\varphi'(b)|_0 \\
&= \sqrt{|\varphi'(a)|_0^2 + |\varphi'(b)|_0^2} \\
&= \sqrt{|a|_{\varphi'}^2 + |b|_{\varphi'}^2} \\
&= \sqrt{|a|_{\varphi''}^2 + |b|_{\varphi''}^2} \\
&= \sqrt{|\varphi''(a)|_0^2 + |\varphi''(b)|_0^2} \\
&= |\varphi''(a) \pm i\varphi''(b)|_0 \\
&= |\psi''(x)|_0 \\
&= |x|_{\psi''}.
\end{aligned}$$

Also ist $|\,.\,|_{\psi'} = |\,.\,|_{\psi''}$ und damit $\mathcal{T}' = \mathcal{T}''$. $\square$

3.3 Topologisch henselsche Körper

3.3.1 Definition. Seien K ein Körper und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf K.

$(K,\, \mathcal{T})$ heißt *topologisch henselscher Körper*, falls eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

(a) Es gibt einen archimedischen Absolutbetrag $|\,.\,|$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{|\,.\,|}$ und K ist algebraisch abgeschlossen oder K ist reell abgeschlossen und $\mathcal{T}_{|\,.\,|} = \mathcal{T}_<$, wobei $<$ die (eindeutige) Ordnung von K ist.

(b) Es gibt eine henselsche Bewertung v auf K mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_v$.

Im Beweis von Satz 3.3.3 verwenden wir folgendes allgemein bekanntes Lemma:

3.3.2 Lemma. *Sei K ein Körper mit $char(K) = 0$. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel.*

Dann ist f separabel.

3.3.3 Satz. *Seien K ein Körper und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf K.*

Dann ist $(K, \mathcal{T})$ genau dann topologisch henselsch, wenn sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung von K fortsetzen lässt.

Beweis:

(a) $\mathcal{T}$ wird von einem archimedischen Absolutbetrag definiert.

„$\Rightarrow$“: Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist nichts zu zeigen.

Ist K reell abgeschlossen, so folgt aus Satz 3.2.7, dass $K\left(\sqrt{-1}\right)$ die einzige echte algebraische Körpererweiterung von K ist. Nach Lemma 3.2.8 ist die Fortsetzung von $\mathcal{T}_<$ auf $K\left(\sqrt{-1}\right)$ eindeutig.

„$\Leftarrow$“: Sei K nicht algebraisch abgeschlossen und falls K reell abgeschlossen ist, so sei $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_<$. Wir zeigen, dass es eine algebraische Körpererweiterung von K gibt, auf die sich $\mathcal{T}$ nicht eindeutig fortsetzen lässt.

Sei $\varphi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung, die $\mathcal{T}$ definiert. Da K nicht algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein irreduzibles Polynom $f \in K[X]$ mit $\deg(f) \geq 2$.

1. Fall: Es existiert ein irreduzibles normiertes Polynom, $f \in K[X]$ mit $\deg(f) \geq 3$.

   Da $\operatorname{char}(K) = 0$ ist, ist f nach Lemma 3.3.2 separabel, es gibt also verschiedene Nullstellen $x_0, x_1, x_2 \in \overline{K}^{alg}$ von f. Zu diesen Nullstellen existieren K-Isomorphismen, $\psi_{1/2} : \overline{K}^{alg} \longrightarrow \overline{K}^{alg}$ mit $\psi_1(x_0) = x_1$ und $\psi_2(x_0) = x_2$.

   Nach Satz 2.2.4 lässt sich $\mathcal{T}$ auf $\overline{K}^{alg}$ fortsetzen. Nach Satz 2.1.5 wird die Fortsetzung wieder von einem archimedischen Absolutbetrag definiert, also gibt es nach Korollar 3.1.4 eine Einbettung $\widetilde{\varphi} : \overline{K}^{alg} \hookrightarrow \mathbb{C}$ so, dass $\mathcal{T}_{\widetilde{\varphi}}$ eine Fortsetzung von $\mathcal{T}$ ist.

   $\widetilde{\varphi} \circ \psi_1$ und $\widetilde{\varphi} \circ \psi_2$ sind dann ebenfalls Einbettungen, die Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ definieren. Aus der Injektivität von $\widetilde{\varphi}$ folgt, dass diese Einbettungen in x_0 unterschiedliche Werte annehmen. Nach Lemma 3.1.7 können diese drei Einbettungen nicht alle den gleichen Absolutbetrag definieren. Nach Lemma 3.1.5 gibt es damit unterschiedliche Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ auf $\overline{K}^{alg}$.

2. Fall: Für jedes irreduzible normierte Polynom $f \in K[X]$ ist $\deg(f) < 3$.

   Es folgt dann, dass jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in K hat. Nach Satz 3.2.7 (ii) folgt, dass K reell abgeschlossen ist oder dass K^2 kein Positivbereich von K ist.

2.1. Fall: Es exisitiere ein $x \in K$ mit $x \notin K^2$ und $-x \notin K^2$.
$K(\sqrt{x})$ ist eine algebraische Körpererweiterung von K. Wir definieren zwei Fortsetzungen von φ auf $K(\sqrt{x})$ durch $\psi_1(\sqrt{x}) := \sqrt{\varphi(x)}$ und $\psi_2(\sqrt{x}) := -\sqrt{\varphi(x)}$.
ψ_1 und ψ_2 definieren nach Lemma 3.1.7 verschiedene Fortsetzungen von $|\,.\,|_\varphi$ auf $K(\sqrt{x})$ und somit nach Lemma 3.1.6 auch unterschiedliche Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ auf $K(\sqrt{x})$.

2.2. Fall: Es ist $-1 \in K^2$ und für alle $x \in K$ ist $x \in K^2$ oder $-x \in K^2$.
Wir werden sehen, dass dieser Fall nicht eintreten kann.
Es ist $K^2 = K$, denn angenommen, es ist $x \in K \setminus K^2$. Dann ist $-x \in K^2$ und damit ist $x = (-1)(-x) \in K^2$. Dies ist ein Widerspruch.
Da K nicht algebraisch abgeschlossen ist, existieren $a, b \in K$ so, dass $X^2 + aX + b$ keine Nullstelle in K hat.
Es ist $\frac{a^2}{4} - b \in K^2$, also ist $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \in K$. Dies ist eine Nullstelle von $X^2 + aX + b$. Das ist aber ein Widerspruch zur Wahl von a und b.

2.3. Fall: Es ist $a^2 + b^2 \notin K^2$ für gewisse $a, b \in K$, $-1 \notin K^2$ und für alle $x \in K$ ist $x \in K^2$ oder $-x \in K^2$.
Aus $a^2 + b^2 \notin K^2$ folgt $-\left(a^2 + b^2\right) \in K^2$, es existiert also ein $c \in K$ mit $-\left(a^2 + b^2\right) = c^2$.
Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(a)^2 + \varphi(b)^2 &= \varphi\left(a^2 + b^2\right) \\ &= -\varphi\left(-\left(a^2 + b^2\right)\right) \\ &= -\varphi\left(c^2\right) \\ &= -\varphi(c)^2 . \end{aligned}$$

Angenommen, $\varphi(K) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $0 \leq \varphi(a)^2 + \varphi(b)^2 = -\varphi(c)^2 \leq 0$ und damit $\varphi(a)^2 + \varphi(b)^2 = 0$. Da $\varphi(a), \varphi(b) \in \mathbb{R}$ gilt, folgt damit aber schon $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Aus der Injektivität folgt dann $a = b = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $a^2 + b^2 \notin K^2$. Es existiert also ein $x \in K$ mit $\varphi(x) \notin \mathbb{R}$.
Definiere $\psi_\pm$ wie in Lemma 3.1.10. Nach Voraussetzung ist $\sqrt{-1} \notin K$. Es ist $\psi_+\left(\sqrt{-1}\right) = i \neq -i = \psi_-\left(\sqrt{-1}\right)$, also ist $\psi_+ \neq \psi_-$. Weiter gilt für $x \in K$ mit $\varphi(x) \notin \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= \varphi(x) \\ &\neq \overline{\varphi(x)} \\ &= \overline{\psi_-(x)}. \end{aligned}$$

Also ist nach Lemma 3.1.7 $|\,.\,|_{\psi_-} \neq |\,.\,|_{\psi_+}$ und damit nach Lemma 3.1.6 auch $\mathcal{T}_{\psi_-} \neq \mathcal{T}_{\psi_+}$.

2.4. Fall: K ist reell abgeschlossen und es ist $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_{<}$.
Nach Lemma 3.2.4 ist φ keine Ordnungseinbettung. Da K reell abgeschlossen ist, besitzt K nach Satz 3.2.7 eine eindeutige Anordnung. Also ist nach Lemma 3.2.5 $\varphi(K) \nsubseteq \mathbb{R}$.
Da K reell ist, ist $-1 \notin K^2$.
Wir können also wie in Fall 2.3 zeigen, dass $\mathcal{T}_{\psi_+}$ und $\mathcal{T}_{\psi_-}$ verschiedene Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ auf $K\left(\sqrt{-1}\right)$ sind.

(b) Für den Fall, dass $\mathcal{T}$ von einer Bewertung definiert wird, folgt die Behauptung sofort aus Satz 2.3.15. □

4 t-henselsche Körper

Eine weitere Verallgemeinerung des Begriffs „henselsch“ auf topologische Körper definieren A. Prestel und M. Ziegler in [PrZi]. Diesen wollen wir uns nun näher ansehen.

Der Begriff „t-henselsch“ wird dabei zunächst für Körper mit Filter definiert. Die t-henselschen Körper mit Filter sind Körper mit Filter, die zu einem Körper mit einem von einer henselschen Bewertung definierten Filter lokal äquivalent sind. V-topologische Körper heißen „t-henselsch“, wenn der Körper mit dem Filter der Nullumgebungen t-henselsch ist.

Dass zwei Körper mit Filter lokal äquivalent sind, bedeutet, dass in ihnen die gleichen lokalen Sätze gelten. Viele wichtige topologische Eigenschaften, insbesondere auch die Bedingungen $(V\,1)$ bis $(V\,6)$ aus Definition 1.1.1, lassen sich durch lokale Sätze ausdrücken.

Im ersten Abschnitt werden wir zunächst die Begriffe „lokaler Satz“, „lokal äquivalent“ und einige weitere wichtige Begriffe definieren.

Im zweiten Teil des Abschnittes werden wir den Begriff „ω-vollständig“ definieren und zeigen, dass es zu jedem Körper mit Filter einen ω-vollständigen Körper mit Filter gibt. Diesen Satz werden wir im zweiten Abschnitt verwenden, wenn wir in einem Beweis ohne Einschränkung annehmen, dass ein Körper ω-vollständig ist. Außerdem werden wir noch ein weiteres Lemma zeigen, das wir ebenfalls im zweiten Abschnitt benötigen, und hierzu noch einige weitere Begriffe einführen.

Im zweiten Abschnitt definieren wir den Begriff „t-henselsch“ und zeigen einige Äquivalenzen.

Im dritten Abschnitt definieren wir, was wir unter einer n-henselschen Bewertung verstehen wollen. Wir zeigen, dass die Topologien von t-henselschen Körpern entweder von Absolutbeträgen definiert werden oder es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine n-henselsche Bewertung gibt, die die Topologie definiert. Für t-henselsche Körper mit nicht von Absolutbeträgen definierten Topologien können wir daraus die eindeutige Fortsetzbarkeit der Topologie auf jede endliche Körpererweiterung folgern.

4.1 Lokale Sätze

4.1.1 Definitionen und erste Sätze

Seien im Folgenden stets K ein Körper und $\mathcal{F}$ ein Filter auf K.

Wir definieren uns nun eine geeignete formale Sprache, dabei unterscheiden wir stets Variablen und Mengenvariablen. Interpretieren wir später Formeln in Körpern mit Filter, werden Variablen als Körperelemente interpretiert und Mengenvariablen als Filterelemente.

4.1.1 Definition. (a) Wir definieren *Terme* iterativ wie folgt

(i) Die Konstanten 0, 1 sind Terme.

(ii) Die Variablen x, y sind Terme.

(iii) Sind t_1 und t_2 Terme, so sind auch $t_1 + t_2$, $t_1 - t_2$ und $t_1 \cdot t_2$ Terme.

(b) Wir definieren *Formeln* iterativ wie folgt:

(i) Sind t_1 und t_2 Terme und U eine Mengenvariable, so sind $t_1 \dot{=} t_2$ und $t_1 \in U$ Formeln, sogenannte *atomare Formeln*.

(ii) Sind φ, ψ Formeln, x eine Variable und U eine Mengenvariable, so sind auch $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\exists\, x\ \varphi$, $\forall\, x\ \varphi$, $\exists\, U\ \varphi$ und $\forall\, U\ \varphi$ Formeln.

(c) Ein *Satz* ist eine Formel ohne freie Variablen.

Im Folgenden bezeichnen stets x, y, z Variablen, U, V, W, X, Y Mengenvariablen und φ, ψ Formeln (jeweils auch mit Indizes).

4.1.2 Notation. Mit $\varphi\,(x_1, \ldots, x_n, X_1 \ldots X_m)$ bezeichnen wir eine Formel, die außer $x_1, \ldots, x_n$ und $X_1, \ldots, X_m$ keine freien Variablen enthält.

Ebenso bezeichnen wir mit $t\,(x_1, \ldots, x_n)$ einen Term, der außer $x_1, \ldots, x_n$ keine freien Variablen enthält.

Die Gültigkeit einer Formel wird analog zur Gültigkeit einer Formel in der Logik 1. Stufe definiert (siehe hierzu zum Beispiel [Pr]).

Unsere Strukturen bestehen hier stets aus einem Körper K und einer Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\,(K)$ (meistens ein Filter oder eine Filterbasis). Wir interpretieren stets $+$ und $\cdot$ durch die Körperoperationen, 0 als das neutrale Element der Addition und 1 als das neutrale Element der Multiplikation. Für die Interpretationen schreiben wir wieder $+$, $\cdot$, 0 und 1. Den Variablen werden Werte aus der Menge der Körperelemente zugeordnet, den Mengenvariablen werden Elemente aus $\mathcal{A}$ zugeordnet.

4.1.3 Notation. Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von K und seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $A_1, \ldots, A_m \subseteq K$.

(*a*) Sei $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ eine Formel.

Wir schreiben
$$(K, \mathcal{A}) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m),$$
wenn φ für $a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m$ in $(K, \mathcal{A})$ gilt.

(*b*) Sei $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term.

Wir schreiben $t^K(a_1, \ldots, a_n)$ für die Auswertung von t in K, bei der $x_1, \ldots, x_n$ durch $a_1, \ldots, a_n$ interpretiert werden.

4.1.4 Definition. Eine Formel hat *Negationsnormalform*, wenn das Negationszeichen nur vor atomaren Formeln auftritt.

4.1.5 Satz. *Zu jeder Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel in Negationsnormalform.*

Beweis: (Skizze) Der Satz folgt aus den folgenden Äquivalenzen, die für beliebige Formeln φ und ψ gelten:

$$\begin{array}{rcl}
\neg(\neg\varphi) & \leftrightarrow & \varphi \\
\neg(\varphi \vee \psi) & \leftrightarrow & \neg\varphi \wedge \neg\psi \\
\neg(\varphi \wedge \psi) & \leftrightarrow & \neg\varphi \vee \neg\psi \\
\neg(\forall x\ \varphi) & \leftrightarrow & \exists x\ \neg\varphi \\
\neg(\exists x\ \varphi) & \leftrightarrow & \forall x\ \neg\varphi \\
\neg(\forall U\ \varphi) & \leftrightarrow & \exists U\ \neg\varphi \\
\neg(\exists U\ \varphi) & \leftrightarrow & \forall U\ \neg\varphi
\end{array}$$

□

4.1.6 Definition. (*a*) Eine Formel in Negationsnormalform heißt *positiv* in U, wenn U in keiner negierten atomaren Unterformel vorkommt.

(*b*) Eine Formel in Negationsnormalform heißt *negativ* in U, wenn jede atomare Unterformel, in der U vorkommt, negiert wird.

4.1.7 Definition. Eine Formel heißt *lokale Formel*, wenn die zugehörige Negationsnormalform durch $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ aus negierten und nicht negierten atomaren Formeln gebildet werden kann, so dass gelten:

- $\exists U$ wird nur auf Formeln angewendet, die negativ in U sind.
- $\forall U$ wird nur auf Formeln angewendet, die positiv in U sind.

Ein *lokaler Satz* ist eine lokale Formel ohne freie Variablen.

Die folgende Bemerkung folgt aus den im Beweis von Satz 4.1.5 angegebenen Äquivalenzen.

4.1.8 Bemerkung. (*a*) Sei φ eine Formel in Negationsnormalform.

Ist φ positiv in U, so ist $\neg\varphi$ negativ in U.

Ist φ negativ in U, so ist $\neg\varphi$ positiv in U.

(*b*) Sei φ eine lokale Formel.

Dann ist $\neg\varphi$ ebenfalls eine lokale Formel.

4.1.9 Definition. Zwei Körper mit Filter heißen *lokal äquivalent*, wenn in ihnen die gleichen lokalen Sätze gelten.

4.1.2 ω-vollständige Körper

4.1.10 Definition. (*a*) Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *ω-vollständig*, wenn er unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist.

(*b*) $(K, \mathcal{F})$ heißt *ω-vollständig*, wenn $\mathcal{F}$ ω-vollständig ist.

4.1.11 Satz. (*a*) *Sei φ ein lokaler Satz, $(K, \mathcal{F})$ ein Körper mit Filter und sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{F}$.*

Dann gilt φ in $(K, \mathcal{F})$ genau dann, wenn φ in $(K, \mathcal{B})$ gilt.

(*b*) *Jeder Körper mit Filter ist lokal äquivalent zu einem ω-vollständigen Körper mit Filter.*

Um den Satz zu beweisen, brauchen wir noch ein Lemma.

4.1.12 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(K)$ und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ eine lokale Formel, die negativ in X_m ist. Dann gilt für alle $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $A_1, \ldots, A_m$, $A \subseteq K$ mit $A \subseteq A_m$:*

$$\begin{aligned} (K, \mathcal{A}) &\models \varphi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m) \\ \Rightarrow (K, \mathcal{A}) &\models \varphi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_{m-1}, A)\,. \end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen das Lemma durch Induktion über den Formelaufbau von φ.

Sei φ ohne Einschränkung in Negationsnormalform.

Es gelte

$$(K, \mathcal{A}) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m)\,.$$

Für den Induktionsanfang müssen wir zwei Fälle betrachten, für den Induktionsschritt unterscheiden wir sechs Fälle.

Induktionsanfang:

1. Fall: $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ ist atomar.

   Wäre X_m frei in φ, müsste φ von der Form $t \in X_m$ für einen Term t sein. Diese Formel ist aber nicht negativ in X_m. Also kann X_m nicht frei in φ sein und es ist nichts zu zeigen.

2. Fall: Es ist $\varphi = \neg\psi$ für eine atomare Formel $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$.

   Wenn X_m nicht in ψ vorkommt, ist nichts zu zeigen, also brauchen wir nur den Fall $\psi = t \in X_m$, also $\varphi = \neg(t \in X_m)$, betrachten.

   Es gilt
   $$(K, \mathcal{A}) \models \neg(t \in X_m)(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)$$
   genau dann, wenn $t^K(a_1, \ldots, a_n) \notin A_m$.

   Da $A \subseteq A_m$, gilt somit auch $t^K(a_1, \ldots, a_n) \notin A$ und damit
   $$(K, \mathcal{A}) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_{m-1}, A).$$

Induktionsschritt:

1. Fall: Es ist $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für zwei lokale Formeln $\psi_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ und $\psi_2 = \psi_2(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$.

   Es gilt
   $$(K, \mathcal{A}) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)$$
   genau dann, wenn für $i = 1, 2$ gilt
   $$(K, \mathcal{A}) \models \psi_i(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)$$
   Daraus folgt nach Induktionsannahme, dass für $i = 1, 2$ gilt
   $$(K, \mathcal{A}) \models \psi_i(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_{m-1}, A),$$
   woraus wiederum
   $$(K, \mathcal{A}) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_{m-1}, A)$$
   folgt.

2. Fall: Es ist $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ für zwei lokale Formeln $\psi_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ und $\psi_2 = \psi_2(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$.

   Dieser Fall wird analog zum ersten Fall bewiesen.

3. Fall: Es ist $\varphi = \exists\, y\ \psi$ für eine Formel $\psi\,(x_1, \ldots, x_n,\, y,\, X_1, \ldots, X_m)$.

Gilt
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n,\, A_1, \ldots, A_m)\,,$$
so gibt es ein $b \in K$ mit
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n,\, b,\, A_1, \ldots, A_m)\,.$$
Nach Induktionsvoraussetzung gilt damit auch
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n,\, b,\, A_1, \ldots, A_{m-1},\, A)\,.$$
Daraus folgt sofort
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n,\, A_1, \ldots, A_{m-1},\, A)\,.$$

4. Fall: Es ist $\varphi = \forall\, y\ \psi$ für eine Formel $\psi\,(x_1, \ldots, x_n,\, y,\, X_1, \ldots, X_m)$.

Dieser Fall wird analog zum dritten Fall bewiesen.

5. Fall: Es ist $\varphi = \exists\, Y\ \psi$ für eine Formel $\psi\,(x_1, \ldots, x_n,\, X_1, \ldots, X_m,\, Y)$.

Gilt
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n,\, A_1, \ldots, A_m)\,,$$
so gibt es ein $B \in \mathcal{A}$ mit
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n,\, A_1, \ldots, A_m,\, B)\,.$$
Aus der Induktionsannahme folgt
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n,\, A_1, \ldots, A_{m-1},\, A,\, B)\,.$$
Daraus folgt
$$(K,\, \mathcal{A}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n,\, A_1, \ldots, A_{m-1},\, A)\,.$$

6. Fall: Es ist $\varphi = \forall\, Y\ \psi$ für eine Formel $\psi\,(x_1, \ldots, x_n,\, X_1, \ldots, X_m,\, Y)$.

Dieser Fall wird analog zum fünften Fall bewiesen. $\square$

Wir definieren nun den Begriff „Ultrafilter“, den wir im Beweis des Satzes verwenden werden.

4.1.13 Definition. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge M.

Gilt für alle $A \subseteq M$, entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $M \setminus A \in \mathcal{F}$ ist, so heißt $\mathcal{F}$ *Ultrafilter* auf M.

Ist $a \in M$, so ist $\mathcal{F}_a := \{U \subseteq M \mid a \in M\}$ ein Ultrafilter.

$\mathcal{F}_a$ heißt *Hauptultrafilter*.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes 4.1.11.

Beweis:

(a) Wir zeigen durch Induktion über den Formelaufbau, dass für jede lokale Formel φ und alle $a_1, \ldots, a_n \in K$, $A_1, \ldots, A_m \subseteq K$

$$(K,\ \mathcal{F}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(K,\ \mathcal{B}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1 \ldots, A_m)$$

gilt.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass φ Negationsnormalform hat.

„$\Rightarrow$“: Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\,(K)$. In den folgenden Fällen gilt

$$(K,\ \mathcal{A}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)$$

unabhängig von $\mathcal{A}$:

φ ist atomare Formel oder negierte atomare Formel, $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, $\varphi = \exists\, y\ \psi$ und $\varphi = \forall\, y\ \psi$ für lokale Formeln ψ_1, ψ_2 und ψ.

Damit bleiben zwei Fälle zu betrachten:

1. Fall: Es ist $\varphi = \forall\, Y\ \psi$ für eine lokale Formel $\psi = \psi\,(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m, Y)$.
Es gelte

$$(K,\ \mathcal{F}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\,,$$

also

$$(K,\ \mathcal{F}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, A)$$

für alle $A \in \mathcal{F}$.
Da $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{F}$ ist und damit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, gilt also insbesondere

$$(K,\ \mathcal{F}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}$ und damit

$$(K,\ \mathcal{B}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\,.$$

2. Fall: Es ist $\varphi = \exists\, Y\ \psi$ für eine lokale Formel $\psi = \psi\,(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m, Y)$.
Es gelte

$$(K,\ \mathcal{F}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\,,$$

also

$$(K,\ \mathcal{F}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, A)$$

für ein $A \in \mathcal{F}$.

Da $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{F}$ ist, gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq A$.

Da φ lokale Formel ist, muss ψ negativ in Y sein. Mit Lemma 4.1.12 folgt also

$$(K,\ \mathcal{F}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, B)\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt damit

$$(K,\ \mathcal{B}) \models \psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, B)\,,$$

also

$$(K,\ \mathcal{B}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\,.$$

Wir haben somit gezeigt

$$\begin{gathered}(K, \mathcal{F}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\\ \Longrightarrow\\ (K, \mathcal{B}) \models \varphi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\end{gathered}$$

für jede lokale Formel $\varphi = \varphi\,(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$.

„$\Leftarrow$“: Der Induktionsanfang (φ ist atomare Formel oder negierte atomare Formel) sowie die Fälle $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, $\varphi = \exists\, y\ \psi$ und $\varphi = \forall\, y\ \psi$ für lokale Formeln ψ_1, ψ_2 und ψ sind wieder klar. Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ ist, ist außerdem der Fall $\varphi = \exists\, Y\ \psi$ für eine lokale Formel ψ klar.

Den Fall $\forall\, Y\ \psi$ zeigen wir über Kontraposition. Es gelte

$$(K,\ \mathcal{F}) \not\models \varphi.$$

Das heißt, es gibt ein $A \in \mathcal{F}$ mit

$$(K,\ \mathcal{F}) \vDash \neg\psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, A)\,,$$

also

$$(K,\ \mathcal{F}) \vDash \exists\, Y\ \neg\psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\,,$$

Da φ eine lokale Formel ist, ist ψ eine lokale Formel, die positiv in Y ist. Also ist $\neg\psi$ nach Bemerkung 4.1.8 eine lokale Formel, die negativ in Y ist. Daraus folgt, dass $\exists\, Y\ \neg\psi$ ebenfalls eine lokale Formel ist.

Aus dem bereits Gezeigten können wir damit folgern

$$(K,\ \mathcal{B}) \vDash \exists\, Y\ \neg\psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)\,.$$

Es gibt also $B \in \mathcal{B}$ mit

$$(K,\ \mathcal{B}) \vDash \neg\psi\,(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, B)\,,$$

und damit
$$(K,\ \mathcal{B}) \not\models \varphi.$$

Insgesamt folgt für jede lokale Formel φ
$$(K,\ \mathcal{F}) \models \varphi\,(a_1,\ldots,a_n,A_1,\ldots,A_m)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(K,\ \mathcal{B}) \models \varphi\,(a_1,\ldots,a_n,A_1,\ldots,A_m) \quad .$$

Insbesondere folgt daraus, falls φ lokaler Satz ist und somit keine freien Variablen enthält
$$(K,\ \mathcal{F}) \models \varphi \Leftrightarrow (K,\ \mathcal{B}) \models \varphi.$$

(b) Sei $(K,\ \mathcal{F})$ ein Körper mit Filter. Wir konstruieren einen ω-vollständigen Körper mit Filter, der zu $(K,\mathcal{F})$ lokal äquivalent ist.

Sei dazu $\mathcal{N}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, der kein Hauptultrafilter ist.

Definiere
$$M := \left\{a \in K^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \{i \mid a_i = 0\} \in \mathcal{N}\right\},$$
wobei zu $a, b, \ldots \in K^{\mathbb{N}}$ $a_i, b_i, \ldots \in K$ die i-ten Elemente der Folgen $a, b, \ldots$ bezeichnen.

Mit komponentenweiser Addition und Multiplikation wird $K^{\mathbb{N}}$ zu einem Ring. Wir zeigen, dass M ein maximales Ideal von $K^{\mathbb{N}}$ ist.

Seien $a \in M$ und $k \in K^{\mathbb{N}}$. Es gilt
$$(ka)_i = k_i \cdot a_i$$
und somit
$$\{i \mid (ka)_i = 0\} \supseteq \{i \mid a_i = 0\} \in \mathcal{N},$$
also wegen ($F\,3$) aus Definition 1.2.1
$$\{i \mid (ka)_i = 0\} \in \mathcal{N}$$
und damit $ka \in M$.

Seien $a,\ b \in M$. Es gilt
$$(a+b)_i = a_i + b_i,$$
also
$$a_i = b_i = 0 \Rightarrow (a+b)_i = 0$$
und damit
$$\{i \mid a_i = 0\} \cap \{i \,|\, b_i = 0\} \subseteq \{i \mid (a+b)_i = 0\}\,.$$
Es sind
$$\{i \mid a_i = 0\}\,,\ \{i \mid b_i = 0\} \in \mathcal{N},$$

also nach $(F\,2)$

$$\{i \mid a_i = 0\} \cap \{i \mid b_i = 0\} \in \mathcal{N}$$

und nach $(F\,3)$ damit auch

$$\{i \mid (a+b)_i = 0\} \in \mathcal{N}.$$

Also ist $(a+b) \in M$.

Insgesamt folgt, dass M ein Ideal ist.

Es bleibt zu zeigen, dass M maximal ist. Sei dazu $I \supsetneq M$ ein Ideal von $K^{\mathbb{N}}$.

Sei $a \in I \setminus M$. Aus $a \notin M$ folgt

$$\{i \mid a_i = 0\} \notin \mathcal{N}.$$

Da $\mathcal{N}$ Ultrafilter ist, ist dann aber

$$\{i \mid a_i \neq 0\} = \mathbb{N} \setminus \{i \mid a_i = 0\} \in \mathcal{N}.$$

Sei $k \in K^{\mathbb{N}}$ mit

$$k_i = \begin{cases} 0, & a_i = 0 \\ a_i^{-1}, & a_i \neq 0 \end{cases}.$$

Dann ist

$$(ka)_i = \begin{cases} 0, & a_i = 0 \\ 1, & a_i \neq 0 \end{cases}.$$

Da I Ideal, ist $ka \in I$.

Sei $b \in K^{\mathbb{N}}$ mit

$$b_i = \begin{cases} 1, & a_i = 0 \\ 0, & a_i \neq 0 \end{cases}.$$

Es ist

$$\{i \mid b_i = 0\} = \{i \mid a_i \neq 0\} \in \mathcal{N}.$$

Also ist $b \in M \subseteq I$ und damit auch $ka + b \in I$. Es ist aber $(ka+b)_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also gilt $1 \in I$ und damit $I = K^{\mathbb{N}}$.

Damit folgt, dass M ein maximales Ideal von $K^{\mathbb{N}}$ ist.

Wir bezeichnen den Körper $K^{\mathbb{N}}/M$ mit $\overline{K}$ und zu $a \in K^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{a}$ das Bild von a in $\overline{K}$ unter der Restklassenabbildung.

Zu jeder Folge von Filterelementen $U = (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$\overline{U} := \left\{ \overline{a} \in \overline{K} \mid \{i \mid a_i \in U_i\} \in \mathcal{N} \right\}.$$

$\overline{U}$ ist wohldefiniert. Denn seien a, $b \in K^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{a} = \overline{b}$ und $\overline{a} \in \overline{U}$, dann gelten

$$\{i \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{N}$$

und

$$\{i \mid a_i \in U_i\} \in \mathcal{N}.$$

Aus $(F\,2)$ folgt

$$\{i \mid a_i \in U_i\} \cap \{i \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{N}.$$

Und da

$$\{i \mid a_i \in U_i\} \cap \{i \mid a_i = b_i\} \subseteq \{i \mid b_i \in U_i\}\,,$$

folgt mit $(F\,3)$

$$\{i \mid b_i \in U_i\} \in \mathcal{N}$$

und somit $\overline{b} \in \overline{U}$.

Wir definieren nun

$$\mathcal{B}^* := \left\{ \overline{U} \;\middle|\; U \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{B}^*$ eine Filterbasis ist.

$\mathcal{B}^* \neq \emptyset$ folgt sofort aus $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Ist $U = (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, so gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $a_i \in U_i$. Es ist $\overline{(a_i)}_{i\in\mathbb{N}} \in \overline{U}$. Also ist $\overline{U} \neq \emptyset$ für alle $\overline{U} \in \mathcal{B}^*$. Damit ist $(FB\,1)$ aus Definition 1.2.3 erfüllt.

Seien $U = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}\,,\; V = (V_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Definiere $W := (U_i \cap V_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $\overline{W} \subseteq \overline{U} \cap \overline{V}$ ist. Da nach $(F\,2)$ gilt $U_i \cap V_i \in \mathcal{F}$, und damit $\overline{W} \in \mathcal{B}^*$ ist, folgt daraus, dass $(FB\,2)$ ebenfalls erfüllt ist und somit, dass $\mathcal{B}^*$ eine Filterbasis ist.

Sei $\overline{a} \in \overline{W}$. Es gilt

$$\overline{a} \in \overline{W} \Leftrightarrow \{i \mid a_i \in U_i \cap V_i\} \in \mathcal{N}.$$

Da

$$\{i \mid a_i \in U_i\} \supseteq \{i \mid a_i \in U_i \cap V_i\}$$

und

$$\{i \mid a_i \in V_i\} \supseteq \{i \mid a_i \in U_i \cap V_i\}\,,$$

ist, folgen mit $(F\,3)$

$$\{i \mid a_i \in U_i\} \in \mathcal{N}$$

und

$$\{i \mid a_i \in V_i\} \in \mathcal{N}.$$

Da

$$\begin{gathered} \overline{a} \in \overline{U} \cap \overline{V} \\ \Longleftrightarrow \\ \{i \mid a_i \in U_i\} \in \mathcal{N} \text{ und } \{i \mid a_i \in V_i\} \in \mathcal{N} \end{gathered}\quad.$$

folgt $\overline{a} \in \overline{U} \cap \overline{V}$.

Also ist $\overline{W} \subseteq \overline{U} \cap \overline{V}$.

Sei $\mathcal{F}^*$ der von $\mathcal{B}^*$ erzeugte Filter.

Wir zeigen, dass $\mathcal{F}^*$ ω-vollständig ist.

Nach Definition ist $\mathcal{F}^*$ ω-vollständig, wenn für alle $\overline{V}^{(1)}, \overline{V}^{(2)}, \dots \in \mathcal{F}^*$ gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}^{(n)} \in \mathcal{F}^*.$$

Zu $\overline{V}^{(1)}, \overline{V}^{(2)}, \dots \in \mathcal{F}^*$ existieren, da $\mathcal{B}^*$ eine Basis von $\mathcal{F}^*$ ist, $\overline{U}^{(1)}, \overline{U}^{(2)}, \dots \in \mathcal{B}^*$ mit $\overline{U}^{(n)} \subseteq \overline{V}^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}^{(n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}^{(n)}.$$

Nach $(F\,3)$ reicht es also zu zeigen, dass für $\overline{U}^{(1)}, \overline{U}^{(2)}, \dots \in \mathcal{B}^*$ gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}^{(n)} \in \mathcal{F}^*.$$

Dies ist, da $\mathcal{B}^*$ eine Basis von $\mathcal{F}^*$ ist, genau dann der Fall, wenn es ein $\overline{U} \in \mathcal{B}^*$ mit

$$\overline{U} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}^{(n)}$$

gibt.

Seien also $\overline{U}^{(1)}, \overline{U}^{(2)}, \dots \in \mathcal{B}^*$.

Da $\mathcal{N}$ kein Hauptultrafilter ist, gibt es $N_1, N_2, N_3, \ldots \in \mathcal{N}$ mit

$$\mathbb{N} = N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq N_3 \supsetneq \ldots$$

und

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} N_j = \emptyset.$$

Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ existiert also ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit $i \in N_{n_i} \setminus N_{n_i+1}$.

Wir definieren $U := (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ durch

$$U_i := U_i^{(1)} \cap \ldots \cap U_i^{(n_i)} = \bigcap_{\{n \,|\, i \in N_n\}} U_i^{(n)}.$$

Es gilt dann für alle $i \in N_n$:

$$a_i \in U_i \Rightarrow a_i \in U_i^{(n)}.$$

Für $a \in K^{\mathbb{N}}$ gilt damit

$$\{i \mid a_i \in U_i\} \cap N_n \subseteq \left\{ i \,\middle|\, a_i \in U_i^{(n)} \right\}.$$

Aus $(F\,2)$ und $(F\,3)$ folgt, da $N_n \in \mathcal{N}$ ist,

$$\begin{aligned} & \{i \mid a_i \in U_i\} \in \mathcal{N} \\ \Rightarrow\ & \{i \mid a_i \in U_i\} \cap N_n \in \mathcal{N} \\ \Rightarrow\ & \left\{ i \,\middle|\, a_i \in U_i^{(n)} \right\} \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

und damit

$$\overline{a} \in \overline{U} \Rightarrow \overline{a} \in \overline{U^{(n)}}.$$

Es ist also

$$\overline{U} \subseteq \overline{U^{(n)}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus

$$\overline{U} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U^{(n)}}$$

folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass $(K, \mathcal{F})$ und $\left(\overline{K}, \mathcal{F}^*\right)$ lokal äquivalent sind.

Zunächst zeigen wir, dass für jede Formel $\varphi = \varphi\,(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$ und alle $a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \in K^{\mathbb{N}}$ und $U^{(1)}, \dots, U^{(m)} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ gilt

$$\begin{gathered} \left(\overline{K}, \mathcal{B}^*\right) \vDash \varphi\left(\overline{a^{(1)}}, \dots, \overline{a^{(n)}}, \overline{U^{(1)}}, \dots, \overline{U^{(m)}}\right) \\ \Longleftrightarrow \\ \left\{ i \,\middle|\, (K, \mathcal{F}) \vDash \varphi\left(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \dots, U_i^{(m)}\right) \right\} \quad \in \mathcal{N}. \end{gathered}$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass φ keine Allquantoren und keine Disjunktionen enthält, da wir für diesen Beweis nicht voraussetzen müssen, dass φ lokal ist.

Den Beweis führen wir per Induktion über den Formelaufbau. Es sind zwei Fälle für den Induktionsanfang, sowie vier Fälle für den Induktionsschritt zu unterscheiden.

Induktionsanfang:

1. Fall: Es ist $\varphi = \varphi\,(x, X) = x \in X$.
   Aus der Definition von $\overline{U}$ folgt sofort

$$\begin{aligned} & (K, \mathcal{B}^*) \vDash \varphi\left(\overline{a}, \overline{U}\right) \\ \Leftrightarrow\ & (K, \mathcal{B}^*) \vDash \overline{a} \in \overline{U} \\ \Leftrightarrow\ & \{i \mid a_i \in U_i\} \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

   womit die Behauptung für diesen Fall gezeigt ist.

2. Fall: Es ist $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = t_1 \dot{=} t_2$ für Terme t_1 und t_2.
Es ist

$$t_j^{\overline{K}}\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}}\right) = \overline{t_j^K\left(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\right)}$$

($j = 1, 2$), also gilt wegen

$$\overline{t_1^K\left(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\right)} = \overline{t_2^K\left(a(1), \ldots, a^{(n)}\right)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{i \;\middle|\; t_1^K\left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}\right) = t_2^K\left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}\right)\right\} \quad \in \mathcal{N}$$

die Behauptung.

Induktionsschritt:

1. Fall: Es ist $\varphi = \neg\psi$ für eine Formel $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$.
Es gilt

$$\begin{aligned} & \left(\overline{K}, \mathcal{B}^*\right) \vDash \varphi\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}}, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\overline{K}, \mathcal{B}^*\right) \nvDash \psi\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}}, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\left(\overline{K}, \mathcal{B}^*\right) \nvDash \psi\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}}, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{i \;\middle|\; (K, \mathcal{F}) \vDash \psi\left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \quad \notin \mathcal{N}.$$

Da $\mathcal{N}$ Ultrafilter ist, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \left\{i \;\middle|\; (K, \mathcal{F}) \vDash \neg\psi\left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \\ = \quad & \left\{i \;\middle|\; (K, \mathcal{F}) \nvDash \psi\left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung.

2. Fall: Es ist $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für zwei Formeln $\psi_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$ und $\psi_2 = \psi_2(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m)$.

$$\left(\overline{K}, \mathcal{B}^*\right) \vDash \varphi\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}}, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right)$$

ist äquivalent zu

$$\left(\overline{K}, \mathcal{B}^*\right) \vDash \psi_1\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}}, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right)$$

und
$$\left(\overline{K},\, \mathcal{B}^*\right) \models \psi_2 \left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}}, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right).$$
Nach Induktionsvoraussetzung gilt dies genau dann, wenn
$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi_1 \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}$$
und
$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi_2 \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}.$$
Es ist
$$\begin{aligned} & \left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \varphi \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \\ = & \left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi_1 \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \\ & \cap \left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi_2 \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\}, \end{aligned}$$
also wegen $(F\,2)$ und $(F\,3)$
$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \varphi \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}$$
genau dann, wenn
$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi_1 \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}$$
und
$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi_2 \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)}, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}.$$
Damit gilt die Behauptung.

3. Fall: Es ist $\varphi = \exists\, y\ \psi$ für eine Formel $\psi = \psi\,(x_1, \ldots, x_n, y, X_1, \ldots, X_m)$.
Gilt
$$\left(\overline{K},\, \mathcal{B}^*\right) \models \varphi \left(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)},\, U^{(1)}, \ldots, U^{(m)}\right),$$
dann gibt es $b \in K^{\mathbb{N}}$ mit
$$\left(\overline{K},\, \mathcal{B}^*\right) \models \psi \left(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)},\, b,\, U^{(1)}, \ldots, U^{(m)}\right).$$
Nach Induktionsvoraussetzung gilt
$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)},\, b_i,\, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}$$
und da
$$\begin{aligned} & \left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \psi \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)},\, b_i,\, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \\ \subseteq & \left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \exists\, y\ \psi \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)},\, y,\, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \\ = & \left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \varphi \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)},\, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\}, \end{aligned}$$

gilt mit $(F\,3)$ auch

$$\left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \varphi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}.$$

Sei andererseits

$$\begin{aligned} & \left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \exists\, y\;\psi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,y,\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\} \\ = & \left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \varphi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Wähle zu jedem

$$j \in \left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \varphi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\}$$

ein $b_j \in K$ mit

$$(K,\,\mathcal{F}) \vDash \psi\left(a_j^{(1)},\dots,a_j^{(n)},\,b_j,\,U_j^{(1)},\dots,\,U_j^{(m)}\right)$$

und setze $b_j = 0$ für alle

$$j \notin \left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \varphi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} & \left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \exists\, y\;\psi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,y,\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\} \\ = & \left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \psi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,b_i,\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\} \end{aligned}$$

Für $b := (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt dann nach Induktionsvoraussetzung

$$\left(\overline{K},\,\mathcal{B}^*\right) \vDash \psi\left(\overline{a^{(1)}},\dots,\overline{a^{(n)}},\,\overline{b},\,\overline{U^{(1)}},\dots,\overline{U^{(m)}}\right)$$

und damit

$$\left(\overline{K},\,\mathcal{B}^*\right) \vDash \varphi\left(\overline{a^{(1)}},\dots,\overline{a^{(n)}},\,\overline{U^{(1)}},\dots,\overline{U^{(m)}}\right).$$

4. Fall: Es ist $\varphi = \exists\, Y\;\psi$ für eine Formel $\psi = \psi\,(x_1,\dots,x_n,X_1,\dots,X_m,Y)$. Dieser Fall wird analog zum dritten Fall bewiesen.

Damit ist die Induktion abgeschlossen.

Aus (a) folgt damit für lokale Formeln auch

$$\begin{aligned} & \left(\overline{K},\,\mathcal{F}^*\right) \vDash \varphi\left(\overline{a^{(1)}},\dots,\overline{a^{(n)}},\,\overline{U^{(1)}},\dots,\overline{U^{(m)}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left\{i \;\middle|\; (K,\,\mathcal{F}) \vDash \varphi\left(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(n)},\,U_i^{(1)},\dots,U_i^{(m)}\right)\right\} \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Sei φ nun ein lokaler Satz mit

$$\left(\overline{K},\, \mathcal{F}^*\right) \models \varphi\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}},\, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right).$$

Es ist dann wegen $(F\,1)$

$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \varphi\left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)},\, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} \neq \emptyset.$$

Da φ keine freien Variablen enthält, gilt damit aber schon

$$(K,\, \mathcal{F}) \models \varphi.$$

Gilt andererserseits

$$(K,\, \mathcal{F}) \models \varphi,$$

so ist

$$\left\{i \;\middle|\; (K,\, \mathcal{F}) \models \varphi\left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(n)},\, U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(m)}\right)\right\} = \mathbb{N} \in \mathcal{N}$$

und damit

$$\left(\overline{K},\, \mathcal{F}^*\right) \models \varphi\left(\overline{a^{(1)}}, \ldots, \overline{a^{(n)}},\, \overline{U^{(1)}}, \ldots, \overline{U^{(m)}}\right).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

4.1.14 Bemerkung. $(V\,1)$ bis $(V\,6)$ aus Definition 1.1.1 lassen sich durch lokale Sätze ausdrücken.

Nach Satz 4.1.11 (a) sind damit $(V\,1)$ bis $(V\,6)$ genau dann für eine Filterbasis $\mathcal{B}$ erfüllt, wenn sie für den erzeugten Filter $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ erfüllt sind.

Eine Topologie $\mathcal{T}$ ist damit genau dann eine V-Topologie, wenn $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ $(V\,1)$ bis $(V\,6)$ erfüllt.

4.1.15 Definition. Sei $\mathcal{T}$ eine V-Topologie

Wir sagen, $(K,\, \mathcal{T})$ ist *ω-vollständig*, wenn $(K,\, \mathcal{F}_\mathcal{T})$ ω-vollständig ist.

Wir definieren nun den Begriff „Bewertungsideal“. Wir werden zeigen, dass jeder ω-vollständige, V-topologische Körper eine Filterbasis aus Bewertungsidealen besitzt. In Satz 4.1.17 werden wir sehen, dass jedes Bewertungsideal maximales Ideal eines Bewertungsringes ist. Dies erklärt, woher der Begriff Bewertungsideal kommt.

4.1.16 Definition. Sei K ein Körper.

Eine Teilmenge M von K heißt *Bewertungsideal* von K, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$(BI\ 1)$ $M + M \subseteq M$

$(BI\ 2)$ $M \cdot M \subseteq M$

$(BI\ 3)$ $1 \notin M$

$(BI\ 4)$ $\forall\, x, y \in K\ x \cdot y \in M \Rightarrow x \in M$ oder $y \in M$

4.1.17 Definition und Satz. Seien K ein Körper und $M \subseteq K$ ein Bewertungsideal von K. Dann ist

$$\mathcal{O}_M := \{x \in K \mid x^{-1} \notin M\}$$

ein Bewertungsring mit maximalem Ideal M.

M heißt *henselsch*, wenn $\mathcal{O}_M$ henselsch ist.

4.1.18 Definition. Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper.

Eine Menge $S \subseteq K$ heißt *beschränkt* bezüglich $\mathcal{T}$, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ ein $V \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ mit $VS \subseteq U$ gibt.

Das folgende Lemma wird bei [EnPr] als Lemma B.3 (1) bewiesen.

4.1.19 Lemma. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper. Sei $S \subseteq K$.*

Dann ist S genau dann beschränkt, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ ein $x \in K^\times$ mit $xS \subseteq U$ gibt.

4.1.20 Korollar. *Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K.*

Dann ist $\mathcal{O}$ bezüglich $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ beschränkt.

Beweis: Sei $U \in \mathcal{F}_\mathcal{O}$. Da $\mathcal{B}_\mathcal{O} = \{x\mathcal{O} \mid x \in K \setminus \{0\}\}$ eine Basis von $\mathcal{F}_\mathcal{O}$ ist, gibt es ein $x \in K \setminus \{0\}$ mit $x\mathcal{O} \subseteq U$. Nach Lemma 4.1.19 ist $\mathcal{O}$ somit beschränkt. □

Korollar 4.1.23 folgt sofort aus den beiden vorangestellten Lemmata, die wir hier ohne Beweis angeben.

4.1.21 Lemma. *Sei K ein Körper. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ V-Topologien auf K.*

Enthält $\mathcal{T}_2$ eine bezüglich $\mathcal{T}_1$ beschränkte Menge, dann gilt $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

4.1.22 Lemma. *Sei K ein Körper. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ V-Topologien auf K.*

Gilt $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, so enthält $\mathcal{T}_1$ eine bezüglich $\mathcal{T}_2$ beschränkte Menge.

4.1.23 Korollar. *Sei K ein Körper und seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ V-Topologien auf K.*

Enthält $\mathcal{T}_1$ eine bezüglich $\mathcal{T}_2$ beschränkte Menge, so gilt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Im folgenden Lemma brauchen wir eine einfache Folgerung aus $(V\,3)$, die zum Beispiel im Anhang B von [EnPr] in Formel (B.2) zu finden ist.

4.1.24 Bemerkung. Aus $(V\,3)$ folgt

$$(V\,3b)\ \ \forall U \in \mathcal{B} \quad \exists V \in \mathcal{B} \quad V + V \subseteq U.$$

4.1.25 Lemma. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein ω-vollständiger, V-topologischer Körper. Dann besitzt $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ eine Basis $\mathcal{M}$ aus Bewertungsidealen.*

Für alle $M \in \mathcal{M}$ ist die von $\mathcal{O}_M$ induzierte Topologie $\mathcal{T}$.

Beweis: Nach $(V\,1)$ gibt es ein $V \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ mit $1 \notin V$. Zu jedem $U \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ gibt es nach $(V\,2)$ ein $U_0 \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ mit $U_0 \subseteq U \cap V$, also ein $U_0 \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ mit $U_0 \subseteq U$ und $1 \notin U_0$.

Mit Hilfe von $(V\,2)$, $(V\,3b)$, $(V\,4)$ und $(V\,6)$ konstruieren wir eine absteigende Kette $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ mit

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$$

$$U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subseteq U_n$$

$$\forall\, x,\, y \in K \;\; x \cdot y \in U_{n+1} \Rightarrow x \in U_n \vee y \in U_n.$$

Definiere

$$M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Da $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ ω-vollständig ist, ist $M \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$. Nach Konstruktion erfüllt M außerdem $(BI\ 1)$ bis $(BI\ 4)$ aus Definition 4.1.16 und ist somit Bewertungsideal.

Es bleibt zu zeigen, dass die von M induzierte Topologie $\mathcal{T}$ ist.

Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_M := \{x \in K \mid x^{-1} \notin M\}$ der nach 4.1.17 zu M gehörige Bewertungsring und $\mathcal{F}_\mathcal{O}$ der zugehörige Filter.

Es ist $M \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ und $M \subseteq \mathcal{O}$, also gilt nach $(F\,3)$ aus Definition 1.2.1 auch $\mathcal{O} \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$.

Nach Korollar 4.1.20 ist $\mathcal{O}$ beschränkt bezüglich $\mathcal{T}_\mathcal{O}$. Nach Korollar 4.1.23 ist damit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{O}$.

Wir erhalten auf diese Weise zu jedem $U \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ ein Bewertungsideal $M \subseteq U$.

Die Menge aller dieser Bewertungsideale ist die gesuchte Basis $\mathcal{M}$. □

4.2 t-henselsche Körper

Wir wollen uns nun die Definition „t-henselsch“ aus [PrZi] ansehen.

4.2.1 Definition. (a) Ein Körper mit Filter heißt *t-henselsch*, wenn es einen lokal äquivalenten Körper mit einem durch eine henselsche Bewertung erzeugten Filter gibt.

(b) Ein V-topologischer Körper $(K, \mathcal{T})$ heißt *t-henselsch*, wenn $(K, \mathcal{F}_\mathcal{T})$ t-henselsch ist.

4.2.2 Bemerkung. Ist $(K, \mathcal{F})$ ein t-henselscher Körper, so ist die von $\mathcal{F}$ erzeugte Topologie eine V-Topologie, denn nach Bemerkung 4.1.14 lassen sich $(V\,1)$ bis $(V\,6)$ durch lokale Sätze ausdrücken.

Der folgende Satz für henselsche Körper wird in [EnPr] als Satz 4.1.3 bewiesen. Wir werden ihn verwenden, um einen ähnlichen Satz für t-henselsche Körper zu beweisen.

4.2.3 Satz. *Seien* $(K, \mathcal{O})$ *ein bewerteter Körper,* $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ *die zu* $\mathcal{O}$ *gehörende Bewertung,* $\mathfrak{m}$ *das maximale Ideal von* $\mathcal{O}$*,* $\overline{K} = K/\mathfrak{m}$ *der Restklassenkörper und* $a \mapsto \overline{a}$ *die Restklassenabbildung.*

Dann sind äquivalent:

(i) $(K, \mathcal{O})$ *ist henselsch.*

(ii) *Zu jedem* $f \in \mathcal{O}[X]$ *und* $a \in \mathcal{O}$ *mit* $\overline{f(a)} = 0$ *und* $\overline{f'(a)} \neq 0$ *gibt es ein* $\alpha \in \mathcal{O}$ *mit* $f(\alpha) = 0$ *und* $\overline{\alpha} = \overline{a}$.

(iii) *Zu jedem* $f \in \mathcal{O}[X]$ *und* $a \in \mathcal{O}$ *mit* $v(f(a)) > 2v(f'(a))$ *existiert ein* $\alpha \in \mathcal{O}$ *mit* $f(\alpha) = 0$ *und* $\overline{\alpha} = \overline{a}$.

(iv) *Jedes Polynom*

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}[X],$$

mit $a_{n-1} \in \mathcal{O}^\times$ *und* $a_i \in \mathfrak{m}$ *für* $0 \leq i \leq n-2$ *hat eine Nullstelle in* K.

(v) *Jedes Polynom*

$$f = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}[X]$$

mit $a_i \in \mathfrak{m}$ *für* $0 \leq i \leq n-2$ *hat eine Nullstelle in* K.

Bevor wir zum Satz über t-henselsche Körper kommen, führen wir noch eine Notation ein.

4.2.4 Notation. Sei K ein Körper und sei $M \subseteq K$. Wir bezeichnen mit $M[X]^n$ die Polynome aus $K[X]$ vom Grad n mit Koeffizienten aus M.

Ähnlich wie in Satz 4.2.3 für henselsche Körper bekommen wir auch für t-henselsche Körper einige äquivalente Charakterisierungen.

4.2.5 Satz. (a) *Sei* $(K, \mathcal{T})$ *ein V-topologischer Körper.*

Es sind äquivalent:

(i) $(K, \mathcal{T})$ *ist t-henselsch.*

(ii) *Zu jedem* $n \geq 2$ *gibt es ein* $U \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ *so, dass jedes Polynom*

$$f = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$$

mit $a_i \in U$ *für* $0 \leq i \leq n-2$ *eine Nullstelle in* K *hat.*

(*iii*) *Zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *ist die Menge aller Polynome*

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

mit $a_i \in K$ *für* $0 \leq i \leq n-1$, *die eine einfache Nullstelle in* K *haben, offen. Das heißt, zu jedem solchen* f *gibt es* $U \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ *so, dass jedes* $g \in f + U[X]^{n-1}$ *eine einfache Nullstelle in* K *hat.*

(*b*) *Sei* $(K, \mathcal{T})$ *ein* ω*-vollständiger, t-henselscher Körper. Dann besitzt* $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ *eine Basis* $\mathcal{M}$ *aus henselschen Bewertungsidealen.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass sich (*ii*) und (*iii*) durch lokale Sätze ausdrücken lassen.

Für (*ii*) bekommen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ folgenden Satz:

$$\begin{array}{l} \exists\, U\ \forall\, y_{n-2}, \ldots, y_0 \\ \big(y_{n-2} \in U \wedge \ldots \wedge y_0 \in U \rightarrow \exists\, x\ x^n + x^{n-1} + y_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + y_0 \doteq 0\big)\,. \end{array}$$

Berücksichtigen wir, dass für zwei Formeln φ und ψ der Ausdruck $\varphi \rightarrow \psi$ eine Abkürzung für $\neg\varphi \vee \psi$ ist und dass $\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m)$ für Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ äquivalent ist zu $\neg\varphi_1 \vee \cdots \vee \neg\varphi_m$, bekommen wir folgende äquivalente Formel in Negationsnormalform:

$$\begin{array}{l} \exists\, U\ \forall\, y_{n-2}, \ldots, y_0 \\ \big((\neg y_{n-2} \in U \vee \ldots \vee \neg y_0 \in U) \vee \big(\exists\, x\ x^n + x^{n-1} + y_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + y_0 \doteq 0\big)\big)\,. \end{array}$$

Dies ist offensichtlich ein lokaler Satz.

Für (*iii*) bekommen wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ folgenden Satz:

$$\begin{array}{ll} & \forall\, y_{n-1}, \ldots, y_0 \\ & \big(\exists\, x\ \ \big(x^n + y_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + y_0 \doteq 0 \\ \wedge & \ \neg\big(n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot y_{n-1} \cdot x^{n-2} + \cdots + y_1 \doteq 0\big)\big) \\ \rightarrow & \exists\, U\ \ (\forall\, z_{n-1}, \ldots, z_0\ \ ((z_{n-1} \in U \wedge \ldots \wedge z_0 \in U) \\ \rightarrow & \ \ \exists\, v\ \ \big(v^n + (z_{n-1} + y_{n-1}) \cdot v^{n-1} + \cdots + (z_0 + y_0) \doteq 0 \\ \wedge & \ \ \ \neg\big(n \cdot v^{n-1} + (n-1) \cdot (z_{n-1} + y_{n-1}) \cdot v^{n-2} + \cdots + (z_1 + y_1) \doteq 0\big)\big)\big)\big)\big) \end{array}$$

Wir bekommen die folgende äquivalente Formel in Negationsnormalform, wobei hier noch zu beachten ist, dass $\neg(\exists\, x\ \varphi)$ äquivalent ist zu $\forall\, x\ \neg\varphi$ und dass $\neg(\neg\varphi)$ zu φ äquivalent ist.

$$\begin{array}{ll} & \forall\, y_{n-1}, \ldots, y_0 \\ & \big(\forall\, x\ \ \big(\neg\big(x^n + y_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + y_0 \doteq 0\big) \\ \vee & n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot y_{n-1} \cdot x^{n-2} + \cdots + y_1 \doteq 0\big) \\ \vee & \exists\, U\ \ (\forall\, z_{n-1}, \ldots, z_0\ \ ((\neg z_{n-1} \in U \vee \ldots \vee \neg z_0 \in U) \\ \vee & \ \exists\, v\ \ \big(v^n + (z_{n-1} + y_{n-1}) \cdot v^{n-1} + \cdots + (z_0 + y_0) \doteq 0 \\ \wedge & \ \ \neg\big(n \cdot v^{n-1} + (n-1) \cdot (z_{n-1} + y_{n-1}) \cdot v^{n-2} + \cdots + (z_1 + y_1) \doteq 0\big)\big)\big)\big)\big) \end{array}$$

Auch dies ist ein lokaler Satz.

Wir beweisen nun die Äquivalenzen aus Teil (a).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Wegen Satz 4.1.11 und da (ii) sich durch lokale Sätze ausdrücken lässt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathcal{T}$ ω-vollständig ist.

Zu jedem $n \geq 2$ wählen wir eine Menge $U_n \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ so, dass U_n Aussage (ii) für alle Polynome vom Grad n erfüllt. Da $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ ω-vollständig ist, gilt auch

$$U := \bigcap_{n \geq 2} U_n \in \mathcal{F}_\mathcal{T}.$$

Nach Lemma 4.1.25 hat $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ eine Basis aus Bewertungsidealen. Es gibt also ein Bewertungsideal $M \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ mit $M \subseteq U$. Satz 4.2.3 (v) ist für $\mathfrak{m} = M$ erfüllt, also ist die zugehörige Bewertung henselsch. Da die von M induzierte Topologie $\mathcal{T}$ ist, ist damit $(K, \mathcal{T})$ t-henselsch.

Bevor wir den Beweis von (a) beenden, zeigen wir zunächst Teil (b) des Satzes.

Dies folgt aber sofort aus $(ii) \Rightarrow (i)$ mit den dort im letzten Schritt gewählten Bewertungsidealen.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Da (iii) sich durch lokale Sätze ausdrücken lässt, können wir wieder ohne Einschränkung annehmen, dass $(K, \mathcal{T})$ ω-vollständig ist. Nach (b) besitzt $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ eine Basis aus henselschen Bewertungsidealen.

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$$

habe eine einfache Nullstelle $\alpha \in K$, also $f(\alpha) = 0$ und $f'(\alpha) \neq 0$. Dann gibt es nach (b) ein henselsches Bewertungsideal $M \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$ mit $f'(\alpha) \notin M$ und $a_i^{-1} \notin M$, falls $a_i \neq 0$, für $0 \leq i \leq n-1$ und $\alpha^{-1} \notin M$, falls $\alpha \neq 0$.

Es ist $\mathcal{O}_M := \left\{x \in K | x^{-1} \notin M\right\}$. Also gilt $a_i \in \mathcal{O}_M$ für $0 \leq i \leq n-1$ und damit $f \in \mathcal{O}_M[X]$. Außerdem gilt $\alpha \in \mathcal{O}_M$.

Sei $g \in f + M[X]^{n-1}$. Da $M \subseteq \mathcal{O}_M$ und $f \in \mathcal{O}_M[X]$, ist $g \in \mathcal{O}_M[X]$. Sei $a \mapsto \overline{a}$ die Restklassenabbildung von $\mathcal{O}_M$ nach $\mathcal{O}_M/M$. Es gelten

$$\overline{g(\alpha)} = \overline{f(\alpha)} = \overline{0}$$

und

$$\overline{g'(\alpha)} = \overline{f'(\alpha)} \neq \overline{0}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 4.2.3 (ii) erfüllt. Da $(K, \mathcal{O}_M)$ henselsch ist, gibt es also ein $\beta \in \alpha + M$ mit $g(\beta) = 0$. Offensichtlich ist $g'(\beta) \neq 0$, also ist β eine einfache Nullstelle von g in K. Damit ist M eine offene Umgebung von f, die ganz in der Menge liegt.

(iii) ⇒ *(ii)*: Sei
$$f = X^n + X^{n-1}.$$
Es ist $-1 \in K$ eine einfache Nullstelle von f.

Nach *(iii)* gibt es also ein $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ so, dass jedes $h \in f + M[X]^{n-1}$ eine einfache Nullstelle in K hat.

Sei
$$g = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$$
mit $a_0, \dots, a_{n-2} \in M$.

Es ist
$$g = f + 0 \cdot X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in f + M[X]^{n-1}.$$
Also hat g nach *(iii)* eine einfache Nullstelle in K und somit ist *(ii)* für M erfüllt. □

4.3 n-henselsche Bewertungen

Ist $(K, \mathcal{T})$ ein t-henselscher Körper, so muss es keinen henselschen Bewertungsring geben, der $\mathcal{T}$ definiert. Schwächen wir die Bedingung *(v)* aus Satz 4.2.3 jedoch ab, bekommen wir den Begriff n-henselsch für $n \in \mathbb{N}$. Es lässt sich zeigen, dass wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine n-henselsche Bewertung finden, die $\mathcal{T}$ definiert, falls $\mathcal{T}$ nicht von einem Absolutbetrag definiert wird. Hieraus lässt sich die eindeutige Fortsetzbarkeit von $\mathcal{T}$ auf endliche Körpererweiterungen folgern.

4.3.1 Definition. Sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper und sei $\mathcal{M}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

$(K, \mathcal{O})$ heißt *n-henselsch*, falls jedes Polynom
$$f = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}[X]^n$$
mit $a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathcal{M}$ eine Nullstelle in K hat.

4.3.2 Bemerkung. *(a)* $(K, \mathcal{O})$ ist genau dann n-henselsch, wenn jedes Polynom
$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathcal{O}[X]^n$$
mit $a_{n-1} \notin \mathcal{M}$ und $a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathcal{M}$ eine Nullstelle in K hat. (Dies folgt sofort aus dem Beweis der Äquivalenz von *(iv)* und *(v)* in Satz 4.2.3. Siehe hierzu [EnPr].)

(b) Aus *(v)* in Satz 4.2.3 sieht man sofort, dass $(K, \mathcal{O})$ genau dann henselsch ist, wenn $(K, \mathcal{O})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ n-henselsch ist.

(c) Ist $(K, \mathcal{O}_1)$ ein n-henselscher bewerteter Körper und ist $\mathcal{O}_2 \supseteq \mathcal{O}_1$ ein weiterer Bewertungsring auf K, so ist $(K, \mathcal{O}_2)$ ebenfalls n-henselsch. (Dies folgt sofort aus $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$ für $\mathcal{O}_2 \supseteq \mathcal{O}_1$.)

Sei $(K, \mathcal{T})$ ein t-henselscher Körper mit einer nicht von einem Absolutbetrag definierten Topologie. Wir wollen zeigen, dass sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf jede endliche Körpererweiterung von K fortsetzen lässt. Dazu zeigen wir zunächst, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine n-henselsche Bewertung gibt, die $\mathcal{T}$ definiert.

4.3.3 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper.*

Gibt es keinen Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, so ist $(K, \mathcal{T})$ genau dann t-henselsch, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ einen n-henselschen Bewertungsring $\mathcal{O}_n$ gibt, der $\mathcal{T}$ definiert.

Dabei kann $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_3 \subseteq \ldots$ erreicht werden.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Nach Satz 4.2.3 (ii) gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ eine Nullumgebung $U_n \in \mathcal{T}$ so, dass für alle $a_{n-2}, \ldots, a_0 \in U_n$

$$f = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$$

eine Nullstelle in K hat.

Nach Korollar 1.3.12 (c) bilden die maximalen Ideale der Bewertungsringe, die $\mathcal{T}$ definieren, eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{T}$. Es existiert also ein Bewertungsring $\mathcal{O}_n$, der $\mathcal{T}$ definiert, mit $\mathcal{M}_n \subseteq U_n$, wobei $\mathcal{M}_n$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_n$ ist.

Für alle $a_{n-2}, \ldots, a_0 \in \mathcal{M}_n$ hat

$$f = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$$

eine Nullstelle in K. Also ist $(K, \mathcal{O}_n)$ n-henselsch.

Die zusätzliche Forderung $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_3 \subseteq \ldots$ erreichen wir, indem wir für $n \geq 3$ $\mathcal{M}_n \subseteq U_n \cap \mathcal{M}_{n-1}$ wählen.

„$\Leftarrow$“: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist das maximale Ideal $\mathcal{M}_n$ von $\mathcal{O}_n$ eine Nullumgebung, für die Satz 4.2.5 (ii) erfüllt ist, und somit ist $(K, \mathcal{T})$ t-henselsch. □

4.3.4 Bemerkung. Ist in Satz 4.3.3

$$\widetilde{\mathcal{O}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n \neq K,$$

so ist $\widetilde{\mathcal{O}}$ ein Bewertungsring, der $\mathcal{T}$ definiert und für jedes $n \in \mathbb{N}$ n-henselsch ist. Also ist $\widetilde{\mathcal{O}}$ ein henselscher Bewertungsring, der $\mathcal{T}$ definiert.

Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $(K, \mathcal{T})$ ω-vollständig ist, da dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n \in \mathcal{T}$$

und damit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n \neq \{0\}$$

Ideal von $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist.

Wir beweisen nun ein Lemma, um anschließend Teile des Satzes 4.2.3 auf n-henselsche Bewertungen verallgemeinern zu können.

4.3.5 Lemma. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung, sei $\alpha \in L$ und sei*

$$f := Irr(\alpha/K)$$

das Minimalpolynom von α über K.

Dann gilt

$$deg(f) \leq [L:K].$$

Beweis: Es gilt

$$\deg(f) = [K(\alpha):K].$$

Da

$$[L:K] = [L:K(\alpha)] \cdot [K(\alpha):K]$$

ist, gilt

$$[K(\alpha):K] \leq [L:K]$$

und somit

$$\deg(f) \leq [L:K].$$

□

Für den Beweis von Lemma 4.3.8 brauchen wir außerdem noch den schwachen Approximationssatz, der in [EnPr] als Satz 3.2.7 (3) bewiesen wird und das anschließende Lemma, das ebenfalls in [EnPr] als Lemma 3.2.8 bewiesen wird.

4.3.6 Satz. *[Schwacher Approximationssatz] Seien $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ Bewertungsringe in K und seien $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ ihre maximalen Ideale. Sei $\mathcal{O}_i \nsubseteq \mathcal{O}_j$ für $i \neq j$. Sei $R := \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$. Seien $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $a_1 \in \mathcal{O}_1, \dots, a_n \in \mathcal{O}_n$.*

Dann gibt es ein $a \in R$ mit $a - a_i \in \mathcal{M}_i$ für $1 \leq i \leq n$.

4.3.7 Lemma. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K. Seien $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}''$ Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf L.*

Falls $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}''$, dann ist schon $\mathcal{O}' = \mathcal{O}''$.

4.3.8 Lemma. *Sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Sei $(K, \mathcal{O})$ für alle $n \leq n_0$ n-henselsch.*

Dann lässt sich $\mathcal{O}$ eindeutig auf jede endliche Galoiserweiterung N/K mit $[N:K] \leq n_0$ fortsetzen.

Beweis: Angenommen, N/K ist eine endliche Galoiserweiterung mit $[N:K] \leq n_0$ und $\mathcal{O}$ lässt sich nicht eindeutig auf N fortsetzen.

Sei $G(N/K)$ die Galoisgruppe von N/K.

Seien $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$ die verschiedenen Fortsetzungen von $\mathcal{O}$ auf N, wobei $m \geq 2$ ist.

Sei

$$H := \{\sigma \in G(N/K) \mid \sigma(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_1\}$$

und sei

$$L := \mathrm{Fix}(H) = \{x \in N \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } x \in H\} \subseteq N.$$

Da $\mathcal{O}_1$ nicht die einzige Fortsetzung von $\mathcal{O}$ ist, ist $H \subsetneq G(N/K)$ und damit auch $L \subsetneq N$.

Für $1 \leq i \leq m$ sei $\mathcal{O}'_i := \mathcal{O}_i \cap L$.

$R := \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}'_i$ ist ein Unterring von L.

Nach Lemma 4.3.7 sind die Voraussetzungen des schwachen Approximationssatzes 4.3.6 erfüllt. Ist also $\mathcal{M}_i$ für $1 \leq i \leq m$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_i$, so existiert ein $\beta \in R$ mit $\beta - 1 \in \mathcal{M}_1$ und $\beta \in \mathcal{M}_i$ für $2 \leq i \leq m$.

Es ist $\beta \notin K$, denn sonst wäre $\beta \in K \cap \mathcal{M}_2 = K \cap \mathcal{M}_1$ und damit $1 = \beta - (\beta - 1) \in \mathcal{M}_1$.

Sei

$$f = \mathrm{Irr}(\beta/K) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$$

das Minimalpolynom von β über K. Seien $\beta_1 = \beta$, $\beta_2, \ldots \beta_n$ die verschiedenen Nullstellen von f in N. Es ist dann

$$f = \prod_{i=1}^{n} (X - \beta_i).$$

Wir zeigen, dass $a_{n-1} \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{M}$ ist, wobei $\mathcal{M}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ bezeichnet.

Es ist $a_{n-1} = -(\beta_1 + \cdots + \beta_n)$ und damit $1 + a_{n-1} = -(\beta_1 - 1) - \beta_2 - \cdots - \beta_n$.

Nach Wahl von β_1 ist $\beta_1 - 1 \in \mathcal{M}_1$.

Für $2 \leq i \leq n$ ist $\beta_i = \tau(\beta)$ für ein $\tau \in G(N/K)$. Da $\beta_i \neq \beta$ und $\beta \in L = \mathrm{Fix}(H)$ ist, ist $\tau \notin H$.

Es ist $\tau^{-1}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_j$ für ein $j \in \{2, \ldots, m\}$.

Nach Wahl von β ist $\beta_i = \tau(\beta) \in \tau(\mathcal{M}_j) = \mathcal{M}_1$.

Also ist $1 + a_{n-1} = -(\beta_1 - 1) - \beta_2 - \cdots - \beta_n \in \mathcal{M}_1$ und damit $a_{n-1} \in \mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{M}_1$. Da $a_{n-1} \in K$ ist, ist somit $a_{n-1} \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{M}$.

Wir zeigen nun, dass für $0 \leq i \leq n-2$ gilt: $a_i \in \mathcal{M}$.

Die Koeffizienten $a_{n-2}, \ldots, a_0$ sind von der Form $\sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_s \leq n} \beta_{k_1} \cdots \beta_{k_s}$ für ein $s \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq s \leq n$. Es gilt insbesondere $2 \leq k_2 \leq n$, also wie oben gezeigt $\beta_{k_2} \in \mathcal{M}_1$. Somit ist $a_i \in \mathcal{M}_1$ für $0 \leq i \leq n-2$ und da $a_i \in K$ für $0 \leq i \leq n-2$, folgt $a_i \in \mathcal{M}$ für $0 \leq i \leq n-2$.

Nach Lemma 4.3.5 ist, da $\beta \in N$ ist, $n \leq [N : K] \leq n_0$. Also hat f, da $(K, \mathcal{O})$ nach Voraussetzung n-henselsch ist, nach Bemerkung 4.3.2 eine Nullstelle in K. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\beta \notin K$. □

4.3.9 Korollar. *Sei $(K, \mathcal{O})$ ein bewerteter Körper. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $(K, \mathcal{O})$ für alle $n \leq n_0!$ n-henselsch ist .*

Dann lässt sich $\mathcal{O}$ eindeutig auf jede endliche Erweiterung L/K mit $[L : K] \leq n_0$ fortsetzen.

Beweis: Wir nehmen an es gibt eine endliche Körpererweiterung L/K mit $[L : K] \leq n_0$, auf die sich $\mathcal{O}$ nicht eindeutig fortsetzen lässt. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass L/K separabel ist (siehe [EnPr], Korollar 3.2.10). Weiter können wir annehmen, dass $L = K(x)$ für ein $x \in L$ ist.

Sei N der Zerfällungskörper von $\mathrm{Irr}(x/K)$. Dann ist N/K eine Galoiserweiterung. Weiter gilt

$$\begin{aligned} N/K &\leq \deg(\mathrm{Irr}(x/K))! \\ &\leq [L : K]! \\ &\leq n_0!. \end{aligned}$$

Da $K(x) \subseteq N$ ist, lässt sich $\mathcal{O}$ nicht eindeutig auf N fortsetzen. Dies widerspricht aber Lemma 4.3.8. □

Da wir für t-henselsche Körper, deren Topologie nicht von einem Absolutbetrag definiert wird, für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine n-henselsche Bewertung finden, die die Topologie definiert, können wir in diesem Fall die eindeutige Fortsetztbarkeit auf jede endliche Erweiterung folgern. Es gilt:

4.3.10 Korollar. *Sei $(K, \mathcal{T})$ t-henselsch und es gebe keinen Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert. Dann lässt sich $\mathcal{T}$ auf jede endliche Körpererweiterung eindeutig fortsetzen.*

Beweis: Nach Satz 4.3.3 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Bewertungsring $\mathcal{O}_n$, der $\mathcal{T}$ definiert und für alle $m \leq n!$ m-henselsch ist. Nach Korollar 4.3.9 lässt sich $\mathcal{O}_n$ auf jede endliche Erweiterung vom Grad $\leq n$ eindeutig fortsetzen. Nach Satz 2.3.15 lässt sich damit $\mathcal{T}$ auf jede endliche Erweiterung eindeutig fortsetzen. □

Wird eine Topologie von einer Rang-1-Bewertung definiert, so gibt es genau dann eine n-henselsche Bewertung, die die Topologie definiert, wenn die Rang-1-Bewertung, die die Topologie definiert n-henselsch ist.

4.3.11 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper. Sei $\mathcal{O}$ eine Rang-1-Bewertung, die $\mathcal{T}$ definiert.*

Dann gibt es genau dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine n-henselsche Bewertung, die $\mathcal{T}$ definiert, wenn $\mathcal{O}$ henselsch ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Ist $\mathcal{O}$ henselsch, so ist $\mathcal{O}$ auch n-henselsch für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit ist die Aussage klar.

„$\Rightarrow$“: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{O}_n$ ein n-henselscher Bewertungsring, der $\mathcal{T}$ definiert. Nach Lemma 1.3.6 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}$ ist. Nach Bemerkung 4.3.2 (c) ist $\mathcal{O}$ damit für jedes $n \in \mathbb{N}$ n-henselsch und somit nach Bemerkung 4.3.2 (b) henselsch. □

5 Vergleich der Begriffe „topologisch henselsch“ und „t-henselsch“

Wir wollen nun die Definition von Berrondo und die Definition von Prestel und Ziegler vergleichen.

Im ersten Abschnitt werden wir zeigen, dass jeder topologisch henselsche Körper t-henselsch ist.

Anschließend werden wir zeigen, dass für von Absolutbeträgen definierte Topologien auch die Umkehrung gilt.

Im letzten Abschnitt werden wir dann einen Körper konstruieren, der t-henselsch aber nicht topologisch henselsch ist.

5.1 Topologisch henselsche Körper als Teilklasse der t-henselschen Körper

5.1.1 Satz. *Jeder topologisch henselsche Körper ist t-henselsch.*

Beweis: Sei $(K, \mathcal{T})$ ein topologisch henselscher Körper.

Erfüllt $(K, \mathcal{T})$ Definition 3.3.1 (b), also $\mathcal{T} = \mathcal{T}_v$ für eine henselsche Bewertung v auf K, so ist $(K, \mathcal{T})$ offensichtlich auch t-henselsch.

Erfüllt $(K, \mathcal{T})$ Definition 3.3.1 (a), so ist K entweder algebraisch abgeschlossen oder reell abgeschlossen. In beiden Fällen ist Satz 4.2.5 (a) (ii) erfüllt.

Für K algebraisch abgeschlossen ist dies klar.

Ist K reell abgeschlossen, so ist für ungerade $n \in \mathbb{N}$ Satz 4.2.5 (a) (ii) nach Satz 3.2.7 erfüllt.

Ist n gerade, so wenden wir den verallgemeinerten Zwischenwertsatz an.

Nach [DePr], Satz 1.2.12, gilt:

Sei K ein reell abgeschlossener Körper und sei $\leq$ die eindeutige Ordnung auf K.

Sei $f \in K[X]$ und seien $a, b \in K$ mit $a < b$ und $f(a) < 0 < f(b)$, dann gibt es ein $c \in K$ mit $a < c < b$ und $f(c) = 0$.

Wir zeigen nun, dass für

$$U = \left\{ x \in K \;\middle|\; \frac{1}{-2^n \cdot n} < x < \frac{1}{2^n \cdot n} \right\}$$

zu jedem

$$f = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in K[X]$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-2} \in U$ Elemente $a, b \in K$ mit $a < b$ und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ existieren und f somit eine Nullstelle in K hat.

Da

$$f(x) \longrightarrow \infty \quad (x \to \infty)$$

für alle $f \in K[X]$ mit geradem Grad, bekommen wir zu jedem solchen f ein $b \in K$ mit $b > 0$ und $f(b) > 0$.

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + a_{n-2}\frac{1}{2^{n-2}} - a_{n-3}\frac{1}{2^{n-3}} + \cdots + a_0 \\ &< \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n \cdot n} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \cdots + 1\right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n \cdot n} \cdot (n-1) \\ &= -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n \cdot n} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Also hat f eine Nullstelle und damit ist Satz 4.2.5 (a) (ii) erfüllt.

Dies ist aber äquivalent dazu, dass $(K, \mathcal{T})$ t-henselsch ist. □

5.2 Von Absolutbeträgen definierte Topologien

Wir wollen nun zeigen, dass für eine von einem Absolutbetrag definierte Topologie $\mathcal{T}$ gilt: $(K, \mathcal{T})$ ist genau dann t-henselsch, wenn $(K, \mathcal{T})$ topologisch henselsch ist.

Hierfür brauchen wir noch einige Lemmata.

Im Folgenden bezeichnen $\left(\widehat{K}, \widehat{\mathcal{T}}\right)$, $\left(\widehat{K}, \widehat{|\,.\,|}\right)$ und $\left(\widehat{K}, \widehat{v}\right)$ die Vervollständigungen von $(K, \mathcal{T})$, $(K, |\,.\,|)$ und (K, v).

5.2.1 Definition. Sei L/K eine Körpererweiterung.

(a) K heißt *relativ separabel abgeschlossen* in L, falls für alle $x \in L$ aus x separabel über K schon $x \in K$ folgt. Dabei heißt x *separabel* über K, falls x algebraisch über K ist und das Minimalpolynom von x nur einfache Nullstellen im algebraischen Abschluss von K hat.

(*b*) K heißt *relativ algebraisch abgeschlossen* in L, falls für alle $x \in L$ aus x algebraisch über K schon $x \in K$ folgt.

Das folgende Lemma wird in [PrZi] als Korollar 7.7 bewiesen.

5.2.2 Lemma. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein t-henselscher Körper, sei $\left(\widehat{K}, \widehat{\mathcal{T}}\right)$ die Vervollständigung von $(K, \mathcal{T})$.*

Dann ist K relativ separabel abgeschlossen in $\widehat{K}$.

Korollar 5.2.3 folgt aus der Definition von „separabel abgeschlossen“ und Lemma 3.3.2.

5.2.3 Korollar. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Sei $char(K) = char(L) = 0$.*

Ist K in L relativ separabel abgeschlossen, so ist K in L schon relativ algebraisch abgeschlossen.

Lemma 5.2.4 folgt sofort aus [Bo], Kapitel V, Proposition 2.

5.2.4 Lemma. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Sei L algebraisch abgeschlossen. Sei K in L relativ algebraisch abgeschlossen.*

Dann ist K algebraisch abgeschlossen.

Folgendes Lemma wird in [DePr] als Lemma 1.3.20 bewiesen:

5.2.5 Lemma. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Sei L reell abgeschlossen. Sei K in L relativ algebraisch abgeschlossen.*

Dann ist K reell abgeschlossen.

Das folgende Lemma wird in [DePr] als Korollar 4.1.5 bewiesen.

5.2.6 Lemma. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Sei K relativ separabel abgeschlossen in L. Seien $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K und $\mathcal{O}'$ eine Erweiterung von $\mathcal{O}$ auf L.*

Ist $(L, \mathcal{O}')$ henselsch, so ist $(K, \mathcal{O})$ ebenfalls henselsch.

5.2.7 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper, wobei $\mathcal{T}$ durch einen Absolutbetrag definiert werde.*

Dann ist $(K, \mathcal{T})$ genau dann t-henselsch, wenn $(K, \mathcal{T})$ topologisch henselsch ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Folgt sofort aus Satz 5.1.1.

„$\Leftarrow$“: Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $|\,.\,|$ ist archimedisch. Nach Lemma 5.2.2 ist K in $\widehat{K}$ relativ separabel abgeschlossen. Da $\operatorname{char}(K) = 0$ ist, ist nach Korollar 5.2.3 K in $\widehat{K}$ relativ algebraisch abgeschlossen.

   Nach Satz 3.1.3 ist $\widehat{K}$ isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Mit Lemma 5.2.5 folgt im ersten Fall, dass K reell abgeschlossen ist und mit Lemma 5.2.4 folgt im zweiten Fall, dass K algebraisch abgeschlossen ist. Dass im ersten Fall $\mathcal{T} = \mathcal{T}_<$ ist, folgt daraus, dass $|\,.\,|_0$ auf $\mathbb{R}$ gerade die von der Ordnung definierte Topologie induziert und die Einbettung, da K nur eine Ordnung besitzt, nach Lemma 3.2.5 ordnungserhaltend ist.

   Insgesamt folgt, dass $(K, \mathcal{T})$ topologisch henselsch ist.

2. Fall: $|\,.\,|$ ist nichtarchimedisch. Dann gibt es nach Bemerkung 1.3.5 eine Rang-1-Bewertung v, die ebenfalls $\mathcal{T}$ definiert. $\left(\widehat{K}, \widehat{v}\right)$ ist henselsch. Nach Lemma 5.2.2 ist K in $\widehat{K}$ relativ separabel abgeschlossen und damit ist (K, v) nach Lemma 5.2.6 ebenfalls henselsch.

   Also ist $(K, \mathcal{T})$ topologisch henselsch.

□

Wir können nun also die Erkenntnisse, die wir für topologisch henselsche Körper gewonnen haben, auf t-henselsche Körper mit von Absolutbeträgen definierten Topologien übertragen. Es gilt:

5.2.8 Korollar. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein t-henselscher Körper.*

Gibt es einen Absolutbetrag, der $\mathcal{T}$ definiert, so lässt sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf jede algebraische Körpererweiterung von K fortsetzen.

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Satz 5.2.7 und Lemma 3.3.3. □

Zusammen mit dem, was wir im letzten Kapitel für t-henselsche Körper mit nicht von Absolutbeträgen definierten Topologien gezeigt haben, erhalten wir:

5.2.9 Korollar. *Sei $(K, \mathcal{T})$ ein t-henselscher Körper. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung.*

Dann lässt sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf L fortsetzen.

Beweis: Die Aussage folgt aus Korollar 5.2.8 und Korollar 4.3.10. □

5.3 t-henselsche Körper, die nicht topologisch henselsch sind

Wir wollen nun zeigen, dass die Umkehrung von Satz 5.1.1 im Allgemeinen nicht gilt.

Dazu zunächst einige Vorbereitungen.

5.3.1 Definition. Seien K und L Körper und sei ∞ ein formales Symbol. Wir erweitern die Addition und die Multiplikation folgendermaßen von L auf $L \cup \{\infty\}$:

Wir setzen für $a \in L$ und $b \in L \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \infty + a &:= a + \infty := \infty \\ \infty \cdot b &:= b \cdot \infty := \infty \\ \infty \cdot \infty &:= \infty \end{aligned}$$

Nicht definiert bleiben $\infty + \infty$, $\infty \cdot 0$ und $0 \cdot \infty$.

Eine Abbildung

$$\varphi : K \longrightarrow L \cup \{\infty\}$$

heißt *Stelle* von K, wenn für alle $x, y \in K$ die folgenden Bedingungen gelten, falls die rechten Seiten definiert sind:

(*i*) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(*ii*) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

(*iii*) $\varphi(1) = 1$.

5.3.2 Satz. *Sei K ein Körper.*

(*a*) *Ist L ein Körper und ist $\varphi : K \longrightarrow L \cup \{\infty\}$ eine Stelle von K, so ist*

$$\mathcal{O} := \varphi^{-1}(L)$$

ein Bewertungsring auf K mit maximalem Ideal

$$\mathcal{M} = \varphi^{-1}(\{0\})$$

und Restklassenkörper

$$\mathcal{O}/\mathcal{M} \cong \varphi(\mathcal{O}).$$

(*b*) *Ist $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathcal{M}$, so induziert die Restklassenabbildung*

$$\widetilde{\varphi} : \mathcal{O} \twoheadrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{M}$$

eine Stelle

$$\varphi : K \longrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{M} \cup \{\infty\}$$

von K, indem wir für alle $x \in K$ definieren

$$\varphi(x) := \begin{cases} \widetilde{\varphi}(x), & x \in \mathcal{O} \\ \infty \quad, & x \notin \mathcal{O} \end{cases}.$$

Beweis:

(a)
- $\mathcal{O}$ ist ein Ring:
  Es ist $\varphi(1) = 1 \in L$, also $1 \in \varphi^{-1}(L) = \mathcal{O}$.
  Seien $x, y \in \mathcal{O}$. Dann sind $\varphi(x) \in L$ und $\varphi(y) \in L$.
  Da φ eine Stelle ist, ist

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \in L$$

  und somit

$$x + y \in \varphi^{-1}(L) = \mathcal{O}.$$

  Ebenso folgt

$$x \cdot y \in \varphi^{-1}(L) = \mathcal{O}$$

  aus

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \in L.$$

  Also ist $\mathcal{O}$ ein Ring.
- $\mathcal{O} := \varphi^{-1}(L)$ ist ein Bewertungsring:
  Sei $x \in K$.
  Ist $x \notin \mathcal{O}$, so ist nach Definition $x \notin \varphi^{-1}(L)$, also $\varphi(x) = \infty$.
  Angenommen, es ist $\varphi\left(x^{-1}\right) \neq 0$. Dann ist $\infty \cdot \varphi\left(x^{-1}\right)$ definiert und somit

$$\begin{aligned} \infty &= \infty \cdot \varphi\left(x^{-1}\right) \\ &= \varphi(x) \cdot \varphi\left(x^{-1}\right) \\ &= \varphi\left(x \cdot x^{-1}\right) \\ &= \varphi(1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

  Dies ist ein Widerspruch.
  Also ist $\varphi\left(x^{-1}\right) = 0 \in L$ und somit $x \in \varphi^{-1}(L) = \mathcal{O}$.
- $\mathcal{M}$ ist ein Ideal von $\mathcal{O}$:
  Die Abbildung

$$\varphi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \longrightarrow L$$

  ist ein Ringhomomorphismus mit

$$\begin{aligned} \ker\left(\varphi|_{\mathcal{O}}\right) &= \varphi|_{\mathcal{O}}^{-1}(\{0\}) \\ &= \varphi^{-1}(\{0\}) \\ &= \mathcal{M}. \end{aligned}$$

  Also ist $\mathcal{M}$ ein Ideal von $\mathcal{O}$.

- $\mathcal{M}$ ist ein maximales Ideal von $\mathcal{O}$:
  Es ist $\varphi(1) = 1 \neq 0$, also $1 \notin \varphi^{-1}(\{0\})$.
  Sei I ein Ideal von $\mathcal{O}$ mit $\mathcal{M} \subsetneq I$.
  Sei $x \in I \setminus \mathcal{M}$. Nach Definition von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{O}$ ist $\varphi(x) \in L \setminus \{0\}$.
  Da $0 \in \mathcal{M}$ ist, ist $x \neq 0$. Somit ist $\varphi(x) \cdot \varphi\left(x^{-1}\right)$ definiert.
  Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \varphi\left(x^{-1}\right) &= \varphi\left(x \cdot x^{-1}\right) \\ &= \varphi(1) \\ &= 1 \\ &= \varphi(x) \cdot \varphi(x)^{-1}. \end{aligned}$$

  Aus der Eindeutigkeit des Inversen folgt $\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi(x)^{-1} \in L$. Also ist $x^{-1} \in \mathcal{O}$ und somit $1 = x^{-1} \cdot x \in I$.
  Also ist $I = \mathcal{O}$ und somit ist $\mathcal{M}$ maximal.
- $\mathcal{O}/\mathcal{M} \cong \varphi(\mathcal{O})$:
  Es ist $\varphi(\mathcal{O}) = \varphi|_{\mathcal{O}}(\mathcal{O})$.

$$\varphi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \longrightarrow \varphi|_{\mathcal{O}}(\mathcal{O})$$

  ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern $\mathcal{M}$. Also ist nach dem Homomorphiesatz $\mathcal{O}/\mathcal{M} \cong \varphi(\mathcal{O})$.

(*b*) Wir zeigen zunächst, dass die Bedingungen (*i*) und (*ii*) aus Definition 5.3.1 für alle $x, y \in K$ erfüllt sind.

1. Fall: Es gilt $x, y \in \mathcal{O}$. Dieser Fall ist nach Definition klar.

2. Fall: Es sind $x, y \in K \setminus \mathcal{O}$. In Bedingung (*i*) ist die rechte Seite nicht definiert und damit nichts zu zeigen.
Da $\mathcal{O}$ Bewertungsring ist, sind $x^{-1}, y^{-1} \in \mathcal{O}$ und damit $x \cdot y \notin \mathcal{O}$. Also gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x \cdot y) &= \infty \\ &= \infty \cdot \infty \\ &= \varphi(x) \cdot \varphi(y). \end{aligned}$$

Damit ist Bedingung (*ii*) erfüllt.

3. Fall: Es sind $x \in \mathcal{O}$ und $y \in K \setminus \mathcal{O}$. Es gilt $x + y \notin \mathcal{O}$, da aus $x \in \mathcal{O}$ folgt $-x \in \mathcal{O}$ und nach Voraussetzung $y \notin \mathcal{O}$ ist.
Es ist also

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \infty \\ &= \varphi(x) + \infty \\ &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

Also ist Bedingung (i) erfüllt.

Ist $\varphi(x) = 0$, so ist die rechte Seite aus Bedingung (ii) nicht definiert und somit nichts zu zeigen. Ist $\varphi(x) \neq 0$, so ist nach Definition $x \notin \mathcal{M}$ und damit $x^{-1} \in \mathcal{O}$. Also folgt in diesem Fall aus $y \notin \mathcal{O}$ schon $x \cdot y \notin \mathcal{O}$, also

$$\begin{aligned} \varphi(x \cdot y) &= \infty \\ &= \varphi(x) \cdot \infty \\ &= \varphi(x) \cdot \varphi(y). \end{aligned}$$

Damit ist auch in diesem Fall Bedingung (ii) erfüllt.

4. Fall: Es sind $x \in K \setminus \mathcal{O}$ und $y \in \mathcal{O}$. Dieser Fall folgt analog zum vorherigen Fall.

Damit sind die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 5.3.1 für alle $x, y \in K$ erfüllt, falls sie definiert sind.

Es ist $1 \in \mathcal{O}$ und $\varphi(1) = \widetilde{\varphi}(1) = 1$. Also ist auch Bedingung (iii) erfüllt.

Insgesamt folgt, dass φ eine Stelle von K ist. □

Wir konstruieren uns einen t-henselschen Körper, der nicht topologisch henselsch ist, als inversen Limes n-henselscher Körper, die nicht henselsch sind. Die Existenz dieser Körper zeigen wir in Lemma 5.3.4. Bevor wir zum Lemma kommen, werden wir zunächst an das Eisenstein-Kriterium erinnern, das wir im Beweis des Lemmas verwenden werden.

5.3.3 Satz (Eisenstein-Kriterium)**.** *Sei A ein faktorieller Ring. Sei $K := Quot(A)$. Sei $p \in A$ prim und sei*

$$f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in A[X]$$

mit $a_n \neq 0$.

Gibt es ein Primelement $p \in A$ mit

- *p teilt nicht a_n*
- *p teilt a_i für $0 \leq i \leq n-1$*
- *p^2 teilt nicht a_0,*

dann ist f irreduzibel über K.

5.3.4 Lemma. *Sei $K(X)/K$ eine transzendente Körpererweiterung. Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring auf $K(X)$ mit $K \subseteq \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{M}$, wobei $\mathcal{M}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ ist. Sei $\left(H, \mathcal{O}^h\right)$ die Henselisierung von $(K(X), \mathcal{O})$. Sei $n \in \mathbb{N}$.*

Dann existiert ein Zwischenkörper $K(X) \subseteq L \subsetneq H$ so, dass für jedes Polynom

$$f = T^m + a_{m-1}T^{m-1} + \cdots + a_0 \in L[T]^m$$

mit $m = deg(f) \leq n$ jede Nullstelle von f in H bereits in L liegt.

Beweis: Wir konstruieren den Körper L als minimale Erweiterung von $K(X)$ in H, die unter Erweiterungen vom Grad $\leq n$ abgeschlossen ist.

Wir definieren L als Vereinigung einer Kette von Körpern wie folgt:

Setze $L_0 := K(X)$.

Ist für $i \in \mathbb{N}$ der Körper L_{i-1} bereits definiert, so definiere

$$L_i := L_{i-1}\left(\{x \in H \mid \operatorname{Irr}(x/L_{i-1}) \leq n\}\right).$$

Definiere

$$L := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i.$$

Nach Konstruktion ist L ein Zwischenkörper von $H/K(X)$.

Sei $m \leq n$. Sei

$$f = T^m + a_{m-1}T^{m-1} + \cdots + a_0 \in L[T]^m.$$

Sei $y \in H$ eine Nullstelle von f. Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $a_{m-1}, \ldots, a_0 \in L_i$. Für dieses i ist $\deg(\operatorname{Irr}(y/L_i)) \leq \deg(f) = m$. Also gilt nach Konstruktion $y \in L_{i+1}$ und damit $y \in L$.

Wir zeigen nun, dass es ein $y \in H \setminus L$ gibt. Wähle dazu eine Primzahl $p > n$.

Sei

$$g = T^p + (X+1)T^{p-1} + (X+1)XT^{p-2} + \cdots + (X+1)XT + (X+1)X \in K[X][T]$$

Nach Definition von $\mathcal{O}$ ist $X \in \mathcal{M}$ und damit $a_{p-1} = (X+1) \in \mathcal{O}^\times$ und für $0 \leq i \leq p-2$ $a_i = (X+1)X \in \mathcal{M}$. Da H die Henselisierung von $K(X)$ ist, existiert eine Nullstelle $y \in H$ von g.

g ist irreduzibel über $K(X)$ nach Satz 5.3.3, denn $(X+1) \in K[X]$ ist Primelement von $K[X]$, für das gilt: $(X+1)$ teilt a_i für $0 \leq i \leq p-1$ und $(X+1)^2$ teilt nicht a_0.

Es ist also $p = \deg(\operatorname{Irr}(y/K(X))) = [K(X)(y) : K(X)]$.

Angenommen, $y \in L$. Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $y \in L_i$ und $y \notin L_{i-1}$.

Sei $F_{i-1} := L_{i-1}(y)$. Es ist

$$[F_{i-1} : L_{i-1}] = \deg(\operatorname{Irr}(y/L_{i-1}))$$

Da L_i aus L_{i-1} durch Erweiterungen vom Grad $\leq n$ entstanden ist, ist $\deg(\operatorname{Irr}(y/L_{i-1}))$ Produkt natürlicher Zahlen $\leq n$.

Seien $a_1, \ldots, a_k \in L_{i-1}$ die Koeffizienten des Minimalpolynoms von y über K_{i-1}. Definiere $F_{i-2} := L_{i-2}(a_1, \ldots, a_k, y)$. Es ist

$$\operatorname{Irr}(y/L_{i-1}) = \operatorname{Irr}(y/L_{i-2}(a_1, \ldots, a_k))$$

und damit

$$\begin{aligned} & [F_{i-2} : L_{i-2}] \\ = \; & [F_{i-2} : L_{i-2}(a_1, \ldots, a_k)] \, [L_{i-2}(a_1, \ldots, a_k) : L_{i-2}] \\ = \; & \deg(\operatorname{Irr}(y/L_{i-1})) \, [L_{i-2}(a_1, \ldots, a_k) : L_{i-2}] \, . \end{aligned}$$

Es ist auch L_{i-1} aus L_{i-2} durch Erweiterungen vom Grad $\leq n$ entstanden und somit ist auch $[L_{i-2}(a_1, \ldots, a_k) : L_{i-2}]$ Produkt natürlicher Zahlen $\leq n$. Es folgt also, dass $[F_{i-2} : L_{i-2}]$ ebenfalls Produkt natürlicher Zahlen $\leq n$ ist.

Wir definieren nun F_{i-3} indem wir y, $a_1, \ldots, a_n$ und die Koeffizienten der Minimalpolynome von $a_1, \ldots, a_n$ zu L_{i-3} adjungieren. So machen wir weiter bis wir F_0 definiert haben.

Es ist dann $[F_0 : L_0] = [F_0 : K(X)]$ ein Produkt natürlicher Zahlen $\leq n$. Da $p > n$ und prim ist, folgt, dass p den Körpergrad $[F_0 : L_0]$ nicht teilt.

Andererseits ist $y \in F_0$ und somit

$$\begin{aligned} [F_0 : K(X)] &= [F_0 : K(X)(y)] \, [K(X)(y) : K(X)] \\ &= [F_0 : K(X)(y)] \cdot p. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.

□

5.3.5 Konstruktion. Sei $K_{-1} := \mathbb{R}$.

Ist K_{m-1} für ein $m \in \mathbb{N}$ bereits definiert, so definieren wir K_m wie folgt:

Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring auf $K_{m-1}(X_m)$ mit $K_{m-1} \subseteq \mathcal{O}$ und $X_m \in \mathcal{M}$.

Sei $\left(K_{m-1}(X_m)^h, \mathcal{O}^h\right)$ die Henselisierung von $(K_{m-1}(X_m), \mathcal{O})$.

Sei K_m ein Körper mit

$$K_{m-1}(X_m) \subseteq K_m \subsetneq K_{m-1}(X_m)^h ,$$

wie in Lemma 5.3.4.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Fortsetzung $\mathcal{O}^h \cap K_m$ von $\mathcal{O}$ auf K_m mit $\mathcal{O}_m$ und das maximale Ideal von $\mathcal{O}_m$ mit $\mathcal{M}_m$.

Die Erweiterung

$$(K_{m-1}(X_m), \mathcal{O}) \subseteq \left(K_{m-1}(X_m)^h, \mathcal{O}^h\right)$$

ist unmittelbar (siehe zum Beispiel [EnPr], Satz 5.2.5), also ist, da

$$\begin{aligned} (K_{m-1}(X_m), \mathcal{O}) &\subseteq (K_m, \mathcal{O}_m) \\ &\subseteq \left(K_{m-1}(X_m)^h, \mathcal{O}^h\right), \end{aligned}$$

auch

$$(K_{m-1}(X_m), \mathcal{O}) \subseteq (K_m, \mathcal{O}_m)$$

unmittelbar und damit insbesondere

$$\mathcal{O}/\mathcal{M} \cong \mathcal{O}_m/\mathcal{M}_m.$$

Es ist $\mathcal{O}$ so gewählt, dass $\mathcal{O}/\mathcal{M} \cong K_{m-1}$ ist. Damit folgt insgesamt $\mathcal{O}_m/\mathcal{M}_m \cong K_{m-1}$.
Sei $\varphi_m : \mathcal{O}_m \twoheadrightarrow \mathcal{O}_m/\mathcal{M}_m$ der Restklassenhomomorphismus.
Sei ∞ ein formales Symbol wie in Definition 5.3.1.
Wir definieren für $i \geq j \geq 1$ die Abbildung

$$\psi_{i,j} : K_i \cup \{\infty\} \twoheadrightarrow K_j \cup \{\infty\}$$

wie folgt:
Für $i = j$ sei

$$\psi_{i,i} := id_{K_i \cup \{\infty\}}.$$

Für $j = i - 1$ sei $\psi_{i,i-1}$ definiert durch

$$\psi_{i,i-1}(x) := \begin{cases} \varphi_i(x), & x \in \mathcal{O}_i \\ \infty \quad , & x \notin \mathcal{O}_i \end{cases}$$

für jedes $x \in K_i \cup \{\infty\}$.
Für $0 \leq j \leq i - 1$ sei

$$\psi_{i,j} := \psi_{j,j-1} \circ \cdots \circ \psi_{i,i-1}.$$

Sei

$$I := \varprojlim (K_m \cup \{\infty\}) := \left\{ (x_m)_m \in \prod_{m \in \mathbb{N}} (K_m \cup \{\infty\}) \;\middle|\; \psi_{i,j}(x_i) = x_j \text{ für alle } j \leq i \right\}$$

der inverse Limes.
Sei $K := I \setminus \{(\infty)\}$.
Wir definieren die Addition auf K wie folgt:
Seien $(x_i), (y_i) \in K$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \neq \infty$ und $y_n \neq \infty$ ist.
Für $i \geq n$ definiere $z_i := x_i + y_i$, für $i < n$ definiere $z_i := \psi_{n,i}(x_n + y_n)$.
Offensichtlich ist $(z_i) \in K$. Definiere $(x_i) + (y_i) := (z_i)$.
Dass (z_i) unabhängig von der Wahl von n ist, folgt sofort aus

$$\psi_{i\,j}(a + b) = \psi_{i,j}(a) + \psi_{i,j}(b)$$

für alle $i \leq j \leq 1$ und der Definition von K.

Analog definieren wir die Multiplikation.

Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die Projektion

$$\begin{array}{rlcl} s_m: & K & \longrightarrow & K_m \cup \{\infty\} \\ & (x_n)_n & \mapsto & x_m. \end{array}$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist s_m eine Stelle. Also ist nach Satz 5.3.2

$$\mathcal{O}_m^* := s_m^{-1}(K_m)$$

ein Bewertungsring auf K.

Wir definieren

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\mathcal{O}_1^*}$$

Damit ist $(K, \mathcal{T})$ ein V-topologischer Körper.

Um zu zeigen, dass der gerade konstruierte Körper tatsächlich ein Beispiel für einen t-henselschen Körper ist, der nicht topologisch henselsch ist, werden wir zunächst einige Eigenschaften des Körpers zeigen.

5.3.6 Lemma. *Sei $(K, \mathcal{T})$ der V-topologischer Körper aus Konstruktion 5.3.5 und für $m \in \mathbb{N}$ seien $\mathcal{O}_m^*$ die Bewertungsringe aus der Konstruktion.*

Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{M}_m^*$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_m^*$ und $\overline{K}^m$ der Restklassenkörper.

Sei $(x_i) \in K$.

Dann gelten:

(a) *Zu jedem $x \in K_m$ existiert ein $y \in K$ mit $s_m(y) = x$.*

(b) *Es ist $(x_i) \in \mathcal{O}_m^*$ genau dann, wenn $x_{m+1} \in \mathcal{O}_{m+1}$ ist.*

(c) *Ist $x_m \in \mathcal{O}_m$, so ist $x_n \in \mathcal{O}_n$ für alle $n \geq m$.*

(d) *Es ist $(x_i) \in \mathcal{M}_m^*$ genau dann, wenn $x_{m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}$ ist.*

(e) *Ist $x_m = 0$, so ist $x_n = 0$ für alle $n \leq m$.*
Insbesondere ist $x_n = 0$ für alle $n \leq m$, falls $(x_i) \in \mathcal{M}_m^*$ ist.

(f) *Ist $x_m = \infty$, so ist $x_n = \infty$ für alle $n \leq m$.*
Insbesondere ist $x_n = \infty$ für alle $n \leq m$, falls $(x_i) \notin \mathcal{O}_m^*$ ist.

(g) *Es ist $\mathcal{O}_m^*/\mathcal{M}_m^* \cong \mathcal{O}_{m+1}/\mathcal{M}_{m+1} \cong K_m$.*

(h) *Es sind*

$$\mathcal{O}_1^* \subseteq \mathcal{O}_2^* \subseteq \dots$$

und

$$\mathcal{M}_1^* \supseteq \mathcal{M}_2^* \supseteq \dots .$$

(i) *Es ist*

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_m^* = \{0\}$$

und

$$\{\mathcal{M}_m^* \mid m \in \mathbb{N}\}$$

ist eine Basis von $\mathcal{T}$.

(j) *Es ist* $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_m^*} = \mathcal{T}$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$.

(k) *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $(K, \mathcal{O}_n^*)$ *n-henselsch.*

Beweis:

(a) Definiere $y_n := \psi_{m,n}(x) \in K_n$ für $n \leq m$. Für $n > m$ sei $y_{n-1} \in K_{n-1}$ bereits definiert. Da $\psi_{i,j}$ surjektiv ist, gibt es ein $y_n \in K_n$ mit $\psi_{n,n-1}(y_n) = y_{n-1}$.

Es ist dann $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} =: y \in K$ und $s_m(y) = y_m = x$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}(x_i) \in \mathcal{O}_m^* := s_m^{-1}(K_m) \quad &\Leftrightarrow \quad x_m = s_m((x_i)) \in K_m \\ &\Leftrightarrow \quad x_m \neq \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \psi_{m,m+1}(x_{m+1}) \neq \infty \\ &\Leftrightarrow \quad x_{m+1} \in \mathcal{O}_{m+1}.\end{aligned}$$

(c) Induktion über n:

Für $n = m$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung.

Ist $x_n \in \mathcal{O}_n$, so ist insbesondere $\psi_{n+1,n}(x_{n+1}) = x_n \neq \infty$. Nach Definition von $\psi_{n+1,n}$ folgt daraus, dass $x_{n+1} \in \mathcal{O}_{n+1}$ ist.

(d) Es ist

$$\begin{aligned}(x_i) \in \mathcal{M}_m^* = s_m^{-1}(\{0\}) \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{m+1,m}(x_{m+1}) = x_m = s_m((x_i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_{m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}\end{aligned}$$

(e) Induktion über n.

Für $n = m$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung.

Ist $x_{n+1} = 0$, so ist $x_n = \psi_{n+1,n}(x_{n+1}) = \psi_{n+1,n}(0) = 0$.

Ist $(x_i) \in \mathcal{M}_m^*$, so ist nach ($d$) $x_{m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}$ und damit $x_m = \psi_{m+1,m}(x_{m+1}) = 0$.

(*f*) Ist $x_{n+1} = \infty$, so ist $x_n = \psi_{n+1,\,n}(x_{n+1}) = \psi_{n+1,\,n}(\infty) = \infty$.

(*g*) Nach Satz 5.3.2 gilt

$$s_m(O_m^*) \cong \mathcal{O}_m^*/\mathcal{M}_m^* =: \overline{K}^m.$$

Zu zeigen ist also

$$\mathcal{O}_{m+1}/\mathcal{M}_{m+1} = s_m(\mathcal{O}_m^*).$$

Aus der Definition von $\psi_{m+1,\,m}$ sieht man sofort, dass gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{m+1}/\mathcal{M}_{m+1} &= \psi_{m+1,\,m}(\mathcal{O}_{m+1}) \\ &= \{x \in K_m \mid x = \psi_{m+1,\,m}(y) \text{ für ein } y \in \mathcal{O}_{m+1}\}\end{aligned}$$

Sei $x \in K_m$ und sei $y \in \mathcal{O}_{m+1}$ mit $\psi_{m+1,\,m}(y) = x$. Nach (*a*) gibt es ein $a \in K$ mit $s_{m+1}(a) = y$. Aus $a \in K$ folgt $s_m(a) = \psi_{m+1,\,m}(s_{m+1}(a)) = \psi_{m+1,\,m}(y) = x$. Da $s_{m+1}(a) = y \in \mathcal{O}_{m+1}$ ist, gilt nach (*b*), dass $a \in \mathcal{O}_m^*$ ist und damit, dass $x \in s_m(\mathcal{O}_m^*)$ ist. Also ist $\mathcal{O}_{m+1}/\mathcal{M}_{m+1} \subseteq s_m(\mathcal{O}_m^*)$.

Andererseits gibt es zu jedem $x \in s_m(\mathcal{O}_m^*)$ ein $a \in \mathcal{O}_m^*$ mit $s_m(a) = x$. Nach Definition von K ist $\psi_{m+1,\,m}(s_{m+1}(a)) = x$ und nach (*b*) ist $s_{m+1}(a) \in \mathcal{O}_{m+1}$.

Also ist, nach Definition von $\psi_{i+1,\,i}$, $x \in \mathcal{O}_{m+1}/\mathcal{M}_{m+1}$. Es gilt also auch $s_m(\mathcal{O}_m^*) \subseteq \mathcal{O}_{m+1}/\mathcal{M}_{m+1}$.

Da nach Wahl von $(K_{m+1}, \mathcal{O}_{m+1})$ klar ist, dass $\mathcal{O}_{m+1}/\mathcal{M}_{m+1} \cong K_m$ ist, folgt insgesamt die Behauptung.

(*h*) Es gilt

$$\begin{aligned}(x_i) \in \mathcal{O}_m^* &\overset{(b)}{\iff} x_{m+1} \in \mathcal{O}_{m+1} \\ &\overset{(c)}{\implies} x_n \in \mathcal{O}_n \text{ für alle } n \geq m+1 \\ &\overset{(b)}{\iff} (x_i) \in \mathcal{O}_n^* \text{ für alle } n \geq m\end{aligned}$$

und damit $\mathcal{O}_m^* \subseteq \mathcal{O}_n^*$ für alle $n \geq m$.

Nach Lemma 2.3.1 gilt damit auch $\mathcal{M}_m^* \supseteq \mathcal{M}_n^*$ für alle $n \geq m$.

(*i*) Sei $(x_i) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n^*$. Angenommen, $x_m \neq 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Dann folgt aus (*e*), dass $x_n \neq 0$ für alle $n \geq m$. Ebenfalls mit (*e*) folgt $(x_i) \notin \mathcal{M}_n^*$ für alle $n \geq m$ und damit $(x_i) \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n^*$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von (x_i).

Also ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n^* = \{0\}$$

(*j*) Folgt sofort aus (*h*).

(*k*) Sei
$$f = T^n + T^{(n-1)} + a^{(n-2)}T^{n-2} + \cdots + a^{(0)} \in K[T]^n$$
mit $a^{(n-2)}, \cdots, a^{(0)} \in \mathcal{M}_n^*$.

Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ seien $a_i^{(n-2)} = s_i\left(a^{(n-2)}\right), \ldots, a_i^{(0)} = s_i\left(a^{(0)}\right) \in K_i$ und
$$f_i = T^n + T^{n-1} + a_i^{(n-2)}T^{n-2} + \cdots + a_i^{(0)}$$

Wir finden eine Nullstelle $y \in K$ von f wie folgt:

Nach (*e*) gilt $a_i^{(n-2)} = \cdots = a_i^{(0)} = 0$ und damit $f_i = T^n + T^{n-1}$ für alle $i \leq n$. Setze $y_i = -1$ für $i \leq n$. Dann ist y_i eine einfache Nullstelle von f_i und für $0 \leq j \leq i \leq n$ ist $\psi_{i,j}(y_i) = y_j$.

Sei $i > n$. Wir nehmen an, dass wir $y_{i-1} \in K_{i-1}$ bereits so definiert haben, dass y_{i-1} eine einfache Nullstelle von f_{i-1} ist und $\psi_{i-1,j}(y_i - 1) = y_j$ für $0 \leq j \leq i-1$ ist.

Nach (*d*) gilt $a_{n+1}^{(n-2)}, \cdots, a_{n+1}^{(0)} \in \mathcal{M}_{n+1}$, also insbesondere $a_{n+1}^{(n-2)}, \cdots, a_{n+1}^{(0)} \in \mathcal{O}_{n+1}$ und damit nach (*c*): $a_i^{(n-2)}, \cdots, a_i^{(0)} \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \geq n+1$.

Wir bezeichnen mit $\overline{a}$ das Bild von $a \in \mathcal{O}_i$ unter der Restklassenabbildung. Nach Definition von $\psi_{i,i-1}$ gilt für alle $a \in \mathcal{O}_i$: $\psi_{i,i-1}(a) = \overline{a}$ und damit gilt für alle $(x_j) \in K$: $\overline{x_i} = x_{i-1}$. Es ist somit
$$\begin{aligned}\overline{f_i} &= T^n + T^{n-1} + \overline{a_i^{(n-2)}}T^{n-2} + \cdots + \overline{a_i^{(0)}} \\ &= T^n + T^{n-1} + \psi_{i,i-1}\left(a_i^{(n-2)}\right)T^{n-2} + \cdots + \psi\left(a_i^{(0)}\right) \\ &= T^n + T^{n-1} + a_{i-1}^{(n-2)}T^{n-2} + \cdots + a_{i-1}^{(0)} \\ &= f_{i-1}\end{aligned}$$

f_{i-1} hat eine einfache Nullstelle $y_{i-1} \in K_{i-1}$. Also hat nach Satz 4.2.3 (*ii*) f_i eine einfache Nullstelle y_i in der Henselisierung von K_i, für die gilt $\overline{y_i} = y_{i-1}$. Da $K_{i-1}(X) \subseteq K_i \subseteq K_{i-1}(X)^h$ und $K_{i-1}(X)^h$ die Henselisierung von $K_{i-1}(X)$ ist, ist $K_{i-1}(X)^h$ offensichtlich auch die Henselisierung von K_i. Wir haben K_i aber gerade so gewählt, dass jede Nullstelle eines Polynoms vom Grad $\leq i$, die in $K_{i-1}(X)^h$ liegt, schon in K_i liegt. Aus $\overline{y_i} = y_{i-1}$, $\psi_{i-1,j}(y_{i-1}) = y_j$ für $0 \leq j \leq i-1$ und der Definition von $\psi_{i,j}$ folgt sofort, dass $\psi_{i,j}(y_i) = y_j$ für alle $0 \leq j \leq i$ ist.

Sei $y = (y_i)$. Dann ist y eine Nullstelle von f und es ist $y \in K$. □

5.3.7 Satz. *Sei $(K, \mathcal{T})$ der V-topologische Körper aus Konstruktion 5.3.5. Dann gelten:*

(*a*) *$(K, \mathcal{T})$ ist t-henselsch.*

(*b*) *$(K, \mathcal{T})$ ist nicht topologisch henselsch.*

Beweis:

(a) Nach Lemma 5.3.6 (j) und (k) gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine n-henselsche Bewertung, die $\mathcal{T}$ definiert. Also ist $(K, \mathcal{T})$ nach Satz 4.3.3 t-henselsch.

(b) $\mathcal{T}$ wird von einer Bewertung definiert, also ist $(K, \mathcal{T})$ genau dann topologisch henselsch, wenn es eine henselsche Bewertung auf K gibt, die $\mathcal{T}$ definiert.

Angenommen, $\mathcal{O}$ ist ein henselscher Bewertungsring auf K, der $\mathcal{T}$ definiert, und $\mathcal{M}$ ist das maximale Ideal von $\mathcal{O}$. Da

$$\{\mathcal{M}_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}$ ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{M}_n^* \subseteq \mathcal{M}$ und somit $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_n^*$.

$(K, \mathcal{O}_n^*)$ ist auch henselsch.

Wir zeigen, dass $(K_{n+1}, \mathcal{O}_{n+1})$ dann auch henselsch sein muss, was der Konstruktion widerspricht.

Sei

$$X^m + X^{m-1} + a_{m-2}X^{m-2} + \cdots + a_0 \in K_{n+1}[X]$$

mit $a_{m-1}, \ldots, a_0 \in \mathcal{M}_{n+1}$.

Da s_{n+1} surjektiv ist, gibt es $b_{m-1}, \ldots, b_0 \in K$ mit $s_{n+1}(b_i) = a_i$ für $0 \leq i \leq m-1$.

Nach Lemma 5.3.6 (d) gilt $b_{m-1}, \ldots, b_0 \in \mathcal{M}_n^*$.

Da $(K, \mathcal{O}_n^*)$ henselsch ist, existiert ein $x \in \mathcal{O}_n^*$ mit

$$x^m + x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0 = 0.$$

Nach Lemma 5.3.6 (b) ist $s_{n+1}(x) \in \mathcal{O}_{n+1}$ und es ist

$$\begin{aligned} 0 &= s_{n+1}(0) \\ &= s_{n+1}\left(x^m + x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0\right) \\ &= s_{n+1}(x)^m + s_{n+1}(x)^{m-1} + s_{n+1}(b_{m-2})\, s_{n+1}(x)^{m-2} + \cdots + s_{n+1}(b_0) \\ &= s_{n+1}(x)^m + s_{n+1}(x)^{m-1} + a_{m-2}s_{n+1}(x)^{m-2} + \cdots + a_0. \end{aligned}$$

Also ist $s_{n+1}(x)$ Nullstelle von

$$X^m + X^{m-1} + a_{m-2}X^{m-2} + \cdots + a_0 \in K_{n+1}[X]$$

und somit ist $(K_{n+1}, \mathcal{O}_{n+1})$ henselsch. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $(K_{n+1}, \mathcal{O}_{n+1})$. □

Aus Satz 2.3.15 folgt, dass ein V-topologischer Körper $(K, \mathcal{T})$ genau dann topologisch henselsch ist, wenn sich $\mathcal{T}$ eindeutig auf den algebraischen Abschluss von K fortsetzen lässt.

Für den Körper $(K, \mathcal{T})$ aus Konstruktion 5.3.5 können wir also folgern, dass es eine algebraische Körpererweiterung von K gibt, auf die sich $\mathcal{T}$ nicht eindeutig fortsetzen lässt. Um diese verschiedenen Fortsetzungen von $\mathcal{T}$ zu finden, müssen wir unabhängige Fortsetzungen von $\mathcal{O}_n^*$ für ein $n \in \mathbb{N}$ finden.

Notationen

Im Folgenden seien M eine Menge, K ein Körper, $x \in M$, $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf M beziehungsweise K, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M beziehungsweise K, $|\,.\,|$ ein Absolutbetrag auf K, $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf K, $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring auf K, $<$ eine Anordnung auf K, L/K eine Körpererweiterung und $y \in L$.

Wir verwenden folgende Notationen:

$\mathcal{P}(M) := \{U \mid U \subseteq M\}$	Potenzmenge von M
$\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{P}(M) \mid \exists V \in \mathcal{T}\ (x \in V) \wedge (V \subseteq U)\}$	Menge der Umgebungen von x bezüglich $\mathcal{T}$
$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} := \mathcal{U}_0$	Menge der Nullumgebungen bezüglich $\mathcal{T}$
$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} := \{U \in \mathcal{P}(M) \mid \exists V \in \mathcal{B} \quad V \subseteq U\}$	von $\mathcal{B}$ erzeugter Filter
$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subseteq K \mid \forall x \in U\ \exists V \in \mathcal{B} \quad x + V \subseteq U\}$	von $\mathcal{B}$ erzeugte Körpertopologie
$\mathcal{B}_{\|\,.\,\|} := \{\{x \in K \mid \|x\| < \varepsilon\} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ mit } \varepsilon > 0\}$	von $\|\,.\,\|$ erzeugte Filterbasis
$\mathcal{F}_{\|\,.\,\|} := \mathcal{F}_{\mathcal{B}_{\|\,.\,\|}}$	von $\|\,.\,\|$ erzeugter Filter
$\mathcal{T}_{\|\,.\,\|} := \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\|\,.\,\|}}$	von $\|\,.\,\|$ erzeugte Körpertopologie
$\mathcal{B}_v := \{\{x \in K \mid v(x) > \gamma\} \mid \gamma \in \Gamma\}$	von v erzeugte Filterbasis
$\mathcal{F}_v := \mathcal{F}_{\mathcal{B}_v}$	von v erzeugter Filter
$\mathcal{T}_v := \mathcal{T}_{\mathcal{B}_v}$	von v erzeugte Körpertopologie
$\mathcal{B}_{\mathcal{O}} := \{x\mathcal{O} \mid x \in K \setminus \{0\}\}$	von $\mathcal{O}$ erzeugte Filterbasis
$\mathcal{F}_{\mathcal{O}} := \mathcal{F}_{\mathcal{B}_{\mathcal{O}}}$	von $\mathcal{O}$ erzeugter Filter
$\mathcal{T}_{\mathcal{O}} := \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{O}}}$	von $\mathcal{O}$ erzeugte Körpertopologie
$\mathcal{B}_< := \{\{x \in K \mid -a < x < a\} \mid a \in K \text{ mit } a > 0\}$	von $<$ erzeugte Filterbasis
$\mathcal{F}_< := \mathcal{F}_{\mathcal{B}_<}$	von $<$ erzeugter Filter
$\mathcal{T}_< := \mathcal{T}_{\mathcal{B}_<}$	von $<$ erzeugte Körpertopologie
$\operatorname{card}(M)$	Kardinalität von M
$Irr\,(y/K)$	Minimalpolynom von y über K
$\|\,.\,\|_0$	Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$ definiert durch $\|a + bi\|_0 := \sqrt{a^2 + b^2}$ für $a,\, b \in \mathbb{R}$
$\overline{K}^{alg}$	algebraischer Abschluss von K
$\operatorname{char}(K)$	Charakteristik von K
$\left(\widehat{K},\, \widehat{\mathcal{T}}\right)$	Vervollständigung von $(K,\, \mathcal{T})$
$\left(\widehat{K},\, \widehat{v}\right)$	Vervollständigung von $(K,\, v)$
$\left(\widehat{K},\, \widehat{\|\,.\,\|}\right)$	Vervollständigung von $(K,\, \|\,.\,\|)$

Literaturverzeichnis

[Be] *F. Berrondo*, Corps topologiquement henséliens, C.R. Acad. Sc. Paris **281**, Série A (1975), Seite 305-307

[Bo] *N. Bourbaki*, Elements of Mathematics, Algebra II Chapters 4-7, Springer Verlag, (1990)

[DePr] *C.N. Delzell, A. Prestel*, Positive Polynominals, Springer Verlag, (2001)

[DüKo] *H. Dürbaum, H.-J. Kowalski*, Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien, J. reine angew. Math. **191** (1953), Seite 135-152

[EnPr] *A.J. Engler, A. Prestel*, Valued Fields, Springer Verlag, (2005)

[Pr] *A. Prestel*, Einführung in die Mathematische Logik, vieweg Verlag, (1986)

[PrZi] *A. Prestel, M. Ziegler*, Model theoretic methods in the theory of topological fields, J. reine angew. Math. **299/300** (1978), Seite 318-341

[Ri1] *P. Ribenboim*, Théorie des Valuations, Les Presses del'Université de Montréal, (1964/1968)

[Ri2] *P. Ribenboim*, The Theory of Classical Valuations, Springer Verlag, (1999)

[Wa] *S. Warner*, Topological Fields, Elsevier Science Publishers B.V., (1989)

[Wi] *W. Wieslaw*, Topological Fields, Pure and Applied Mathematics, Dekker, (1988)

Danksagung

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle zunächst bei Prof. Dr. Alexander Prestel für die hervorragende Betreuung und für die Zeit, die er sich genommen hat.

Bei Sven Wagner möchte ich mich dafür bedanken, dass er mein Interesse für V-Topologien geweckt hat.

Aller Anfang ist schwer und daher möchte ich mich auch bei Prof. Dr. Robert Denk und Prof. Dr. Claus Scheiderer, die in ihren Grundstudiumsvorlesungen ein sehr gutes Fundament an mathematischem Wissen geschaffen haben, und bei Olaf Schubert, der mir über ein paar Anfangsschwierigkeiten bei der Benutzung von LaTeX hinweggeholfen hat.

Frau Gisela Cassola und Herrn Rainer Janßen möchte ich dafür danken, dass sie immer für die Studierenden da sind und sich darum kümmern, dass auch organisatorisch alles klappt.

Anne Leber, Teresa Wissmann, Susanne Münn, Eva Wiesemann, Christine Früh, Marie-Hélène Lefevre, Theresia Winkler, Hannah Keding und Stefanie Nopper möchte ich für offene, ehrliche und motivierende Gespräche danken.

Annabelle Medebach möchte ich für Eis, gemeinsame Erlebnisse und ihre Hilfsbereitschaft danken.

Martin Gubisch möchte ich dafür danken, dass er mir unzählige Male geholfen hat, meine Motivation wiederzufinden, dafür, dass er mit mir über Formulierungen, Optisches und Anderes diskutiert hat und auch dafür, dass er mich auf andere Gedanken gebracht hat und viel Geduld bewiesen hat.

Angelika Bruns möchte ich dafür danken, dass sie mit mir gemeinsam durchs Studium gegangen ist und mir nicht nur im Bezug auf die Diplomarbeit oft praktische Hilfe geleistet hat.

Außerdem möchte ich Martin und Angelika auch dafür danken, dass sie nach Tippfehlern, Kommafehlern und Ähnlichem gesucht haben.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern, Sabine Dupont und Friedbert Weber-Dupont, die mich in den letzten Jahren nicht nur finanziell unterstützt haben und immer an mich geglaubt haben.

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Diplomarbeit mit dem Thema

„V-Topologien auf Körpererweiterungen“

selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Die Stellen, die aus anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall durch Angabe der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Konstanz, den 1.September 2010.

Katharina Dupont