Universität Konstanz
Fachbereich Chemie
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jürgen Maetzke

Vorkurs

zur

Mathematik für

Chemiker und Life Science

Kompaktkurs vor Beginn des ersten Studienjahres:
5 Tage mit abwechselnd je 2 x 1.5 Stunden Vorlesung und 2 x 1.5 Stunden betreute Übungen.

2., durchgesehene Auflage August 2003

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Skript begleitet einen fünftägigen Kompaktkurs, der für die Studienanfänger des Faches Chemie ab dem Studienjahr 2000/2001 in der Woche vor Beginn des Wintersemesters mit dem Ziel durchgeführt wird, einen Teil des mathematischen Schulstoffes aus den Tiefen des Vergessens wieder hochzuholen und etwas aufzufrischen.

Nicht wenige Studienanfänger, die glaubten, mit dem Abitur endlich die 'Mathe' ablegen zu können, sind erstaunt, gleich zu Beginn ihres Chemiestudiums schon wieder mit Mathematik konfrontiert zu werden.

Mit diesem mathematischen Vorkurs sollen nur zu einem sehr geringen Teil einige Grundkenntnisse vorweg vermittelt werden, die für die Anfänger–Vorlesungen und –Praktika nützlich sind. Das wesentliche Ziel diese Vorkurses ist, einen soliden Grund zu schaffen, auf dem dann die 'Mathematik für Chemiker' aufbauen kann. In unserer schnelllebigen und erfolgsorientierten Zeit müssen auch die Studiengänge gelegentlich gestrafft und von Ballast befreit werden: da bleibt insbesondere nicht mehr viel Zeit, Schulstoff zu wiederholen.

Das soll Sie aber nicht erschrecken: Sie werden nicht einfach nur ins kalte Wasser geworfen und dann Ihrem Schicksal überlassen; Sie werden stets Hilfen bekommen, wo das sinnvoll ist, z.B. in Form von vorlesungsbegleitenden Tutoraten oder eben mit diesem Kompakt–Vorkurs.

Ohne Zweifel fordert ein zügiges und zielstrebiges Studium die Studentinnen und Studenten, bietet aber auch von Anfang an Lern- und Orientierungshilfen. Wer diese Hilfen in Anspruch nimmt, muss nicht einst wie Doctor Faustus klagen:

"Habe nun ach! Philosophie, Juristerei und Medizin, und leider auch Theologie durchaus studiert, mit heißem Bemüh'n. Da steh' ich nun, ich armer Tor! Und bin so klug als wie zuvor..."

Jürgen Maetzke, August 2000

Vorwort zur zweiten Auflage.

Zu den "Abnehmern" sind die Studienanfänger der ***Life Science*** hinzugekommen. Besonders der zweite Teil der **'Mathematik für Life Science und Chemiker Lehramt'** setzt wesentlich den Inhalt dieses Vorkurses voraus.

Von kleinen Änderungen abgesehen, die das Verständnis des Textes erhöhen sollen, wurde am Konzept und Inhalt nichts verändert. Dagegen wurden die Lösungen der Übungsaufgaben in weiten Teilen viel ausführlicher als in der ersten Auflage dargestellt.

Jürgen Maetzke, August 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Trigonometrische Funktionen. 1

1.A Winkel. 1

1.B Das rechtwinklige Dreieck. 3

1.C Definition der trigonometrischen Funktionen. 4

1.D Einige Regeln. 7

1.E Übungsaufgaben zu Lektion 1. 10

2 Betrag, allgemeine Funktionen, Kreise und Ellipsen. 12

2.A Intervalle, Betrag und Abstand. 12

2.B Zum Funktionsbegriff. 15

2.C Verschiebung, Spiegelung und Streckung von Funktionsgraphen. 16

2.D Kreise und Ellipsen. 19

2.E Übungsaufgaben zu Lektion 2. 22

3 Rationale Funktionen. 24

3.A Geraden. 24

3.B Parabeln. 28

3.C Polynome. 32

3.D Gebrochen–rationale Funktionen. 36

3.E Übungsaufgaben zu Lektion 3. 39

4 Exponentialfunktion und Logarithmus. 41

4.A Allgemeine Exponentialfunktion. 41

4.B Allgemeiner Logarithmus. 42

4.C Rechenregeln. 44

4.D Übungsaufgaben zu Lektion 4. 46

5 Folgen und Konvergenz. 49

5.A Zum Begriff einer Folge. 49

5.B Konvergente Folgen. 51

5.C Rechenregeln für Folgen. 54

5.D Grenzwerte von Funktionen. 59

5.E Übungsaufgaben zu Lektion 5. 63

6 Vektoren. 66

6.A Die Vektoren des Anschauungsraumes. 66

6.B Summe und Vielfache von Vektoren. 69

6.C Geraden und Ebenen. 74

6.D Übungsaufgaben zu Lektion 6. 76

7 Skalarprodukt. 78

7.A Definition des Skalarproduktes. 78

7.B Rechenregeln. 80

7.C Orthogonale Zerlegung bzgl. eines Vektors. 83

7.D Übungsaufgaben zu Lektion 7. 85

8 Differentiation. 87

8.A Zur Definition der ersten Ableitung. 87

8.B Nützliche Ableitungsregeln. 89

8.C Einige wichtige Ableitungen. 93

8.D Ableitung von Vektoren. 95

8.E Übungsaufgaben zu Lektion 8. 98

9 Integration. 100

9.A Bestimmtes Integral. 100

9.B Nützliche Integrationsregeln. 101

9.C Stammfunktionen und der Hauptsatz. 103

9.D Einige wichtige Stammfunktionen. 107

9.E Übungsaufgaben zu Lektion 9. 108

10 Substitution und Trennung der Variablen. 110

10.A Integration mit Substitution. 110

10.B Trennung der Variablen. 113

10.C Integration längs eines Weges. 116

10.D Übungsaufgaben zu Lektion 10. 118

11 Nocheinmal alle Übungsaufgaben. 120

11.A Aufgaben. 120

11.B Ergebnisse der Übungsaufgaben. 136

Index 158

1 Trigonometrische Funktionen.

Stichpunkte: Winkel: Bogenmaß, Gradmaß, Orientierung. Satz von Pythagoras. Trigonometrische Funktionen: Definitionen am Dreieck und am Einheitskreis, Schaubilder, gängige Werte, Symmetrieeigenschaften, Periodizität, Pythagoras am Einheitskreis, Additionstheoreme für sin und cos.

1.A Winkel.

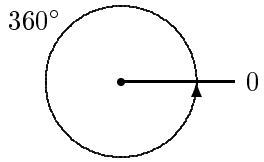


Abbildung 1.1: **voller Winkel**

In der elementaren Geometrie (z.B. in der Schule) werden Winkel im **Gradmaß** gemessen (engl.: degree, deg.) ; dabei wird der **volle Winkel** in $360°$ (360 **Grad**) unterteilt.

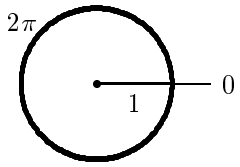


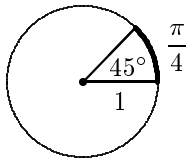
Abbildung 1.2: **voller Winkel**

Die Mathematiker und Naturwissenschaftler geben Winkel bevorzugt im **Bogenmaß** (radian, rad.) an ; hierbei entspricht dem vollen Winkel der **Umfang** 2π eines Kreises vom Radius 1 :
($\pi = 3.141592654\ldots$ = **Kreiszahl**)

Es ist also gleichgültig — und wird in Zukunft nicht mehr unterschieden —, ob (z.B.) vom <u>**Winkel** $45°$</u> oder vom <u>**Winkel** $\pi/4$</u> gesprochen wird:

$$45° \quad = \quad 1/8 \text{ von } 360°$$

$$\frac{\pi}{4} \quad = \quad 1/8 \text{ des Kreisumfanges } 2\pi$$

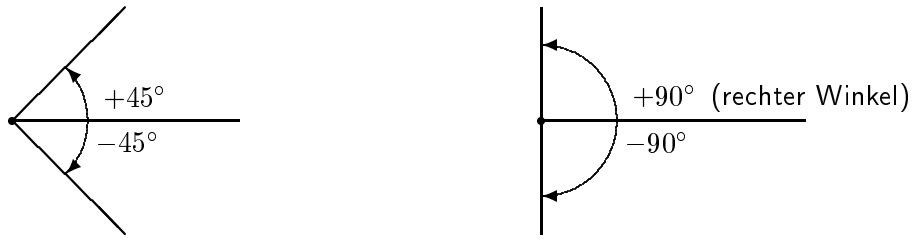


Aus dem einfach zu merkenden Verhältnis: $\boxed{\text{Gradmaß} : 360° = \text{Bogenmaß} : 2\pi}$
ergibt sich die **Umrechnungsformel** :

1.1
$$\boxed{\begin{aligned} \text{Bogenmaß} &= \text{Gradmaß} \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \text{bzw.} \\ \text{Gradmaß} &= \text{Bogenmaß} \cdot \frac{180}{\pi} \end{aligned}}$$

Will man den **Drehsinn** oder die **Orientierung** berücksichtigen, so gibt man dem Winkel ein **Vorzeichen**:

es ist üblich, den Drehsinn (die Orientierung) **positiv** zu nennen, wenn er dem Uhrzeiger entgegengesetzt ist, und **negativ**, wenn er im Uhrzeigersinn verläuft.



Zum Beispiel:

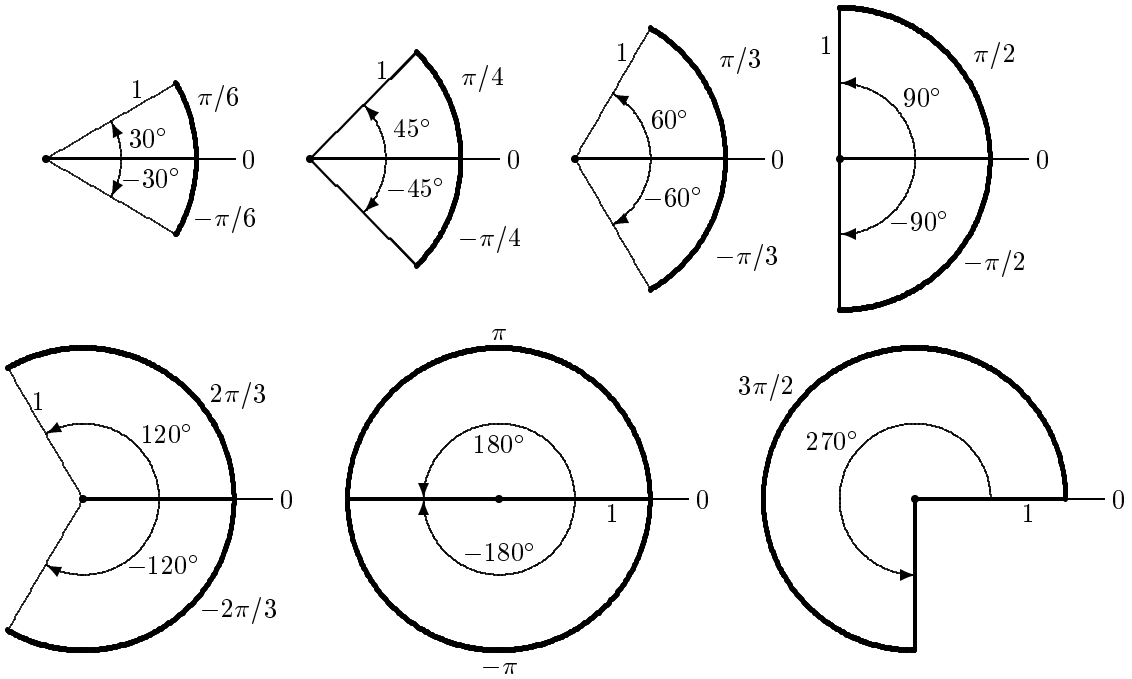
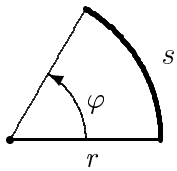


Abbildung 1.3 Bogenmaß und Gradmaß einiger Winkel

Bemerkung: Es ist üblich und bequem, **im Bogenmaß gemessene Winkel stets als Vielfache von** π anzugeben, also z.B vom Winkel $\alpha = \pi/4$ statt vom Winkel $\alpha = 0.785398$ zu reden.

1.2 An einem Kreisbogen vom Radius r besteht zwischen der **Bogenlänge** s und dem zugehörigen, ***im Bogenmaß*** gemessenen **Winkel** φ der Zusammenhang:

$$\boxed{s = r \cdot \varphi}\ .$$

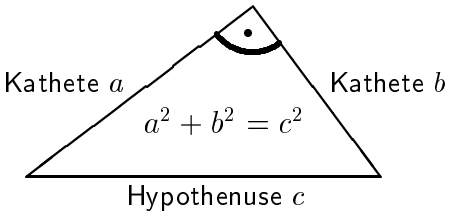


1.B Das rechtwinklige Dreieck.

Einer der berühmtesten und wichtigsten Sätze über das rechtwinklige Dreieck ist der

1.3 **Satz des Pythagoras.**
(5. Jahrhundert v. Chr.)

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypothenusenquadrat.

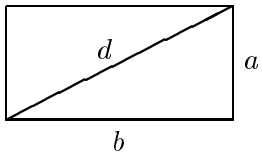


In der Praxis ist der Satz von Pythagoras immer wieder von Nutzen, z.B. bei der Berechnung von Längen und Abständen.

Zum Beispiel:

1. Für die **Länge d der Diagonale eines Rechtecks** mit den Seitenlängen a und b hat man: $d^2 = a^2 + b^2$, somit: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

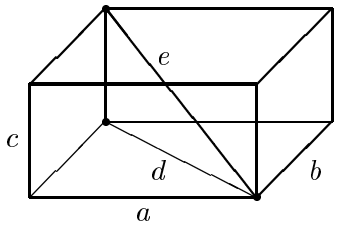
Insbesondere (mit $a = b$) hat die **Diagonale eines Quadrates** mit der Seitenlänge a die Länge $d = a\sqrt{2}$.



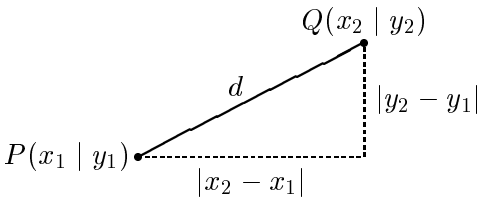
2. Zweifache Anwendung hiervon ergibt:

Die **Raumdiagonale** e eines Quaders mit den Seitenlängen a, b, c hat die Länge $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

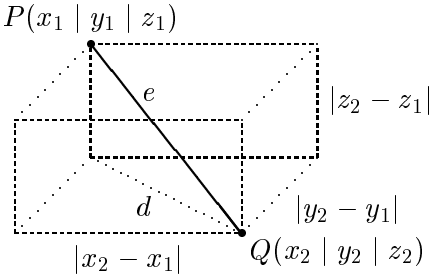
und (mit $a = b = c$): die **Raumdiagonale eines Würfels** mit der Kantenlänge a hat die Länge $e = a\sqrt{3}$.



3. Hiermit bekommt man in der (x, y)–Ebene (rechtwinklige cartesische Koordinaten) für zwei Punkte $P(x_1 \mid y_1)$, $Q(x_2 \mid y_2)$ ihren **Abstand** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ und



4. im Anschauungsraum (rechtwinklige caritesische Koordinaten x, y, z) für zwei Punkte $P(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$, $Q(x_2 \mid y_2 \mid z_2)$ deren Abstand $e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.



1.C Definition der trigonometrischen Funktionen.

Eine große Rolle spielen recktwinklige Dreiecke bei der elementar-geometrischen Definition der **trigonometrischen Funktionen:** (x sei ein Winkel — i.a. im Bogenmaß gemessen: s.o.)

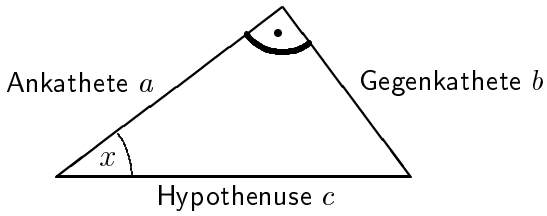
1.4

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$$

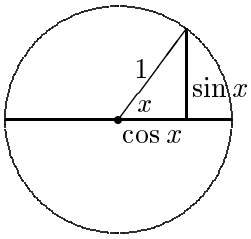
$$\cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a}$$

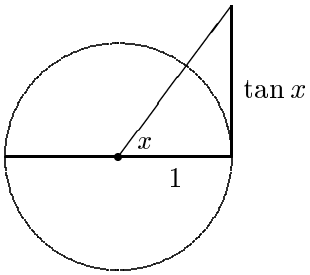
$$\cot x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{a}{b}$$



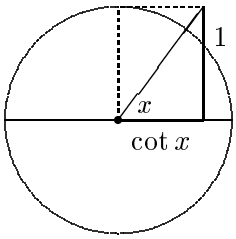
Etwas anschaulicher ist die **Darstellung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis** (= Kreis vom Radius $r = 1$):



die Hypothenuse
hat die Länge 1



die Ankathete
hat die Länge 1



die Gegenkathete
hat die Länge 1

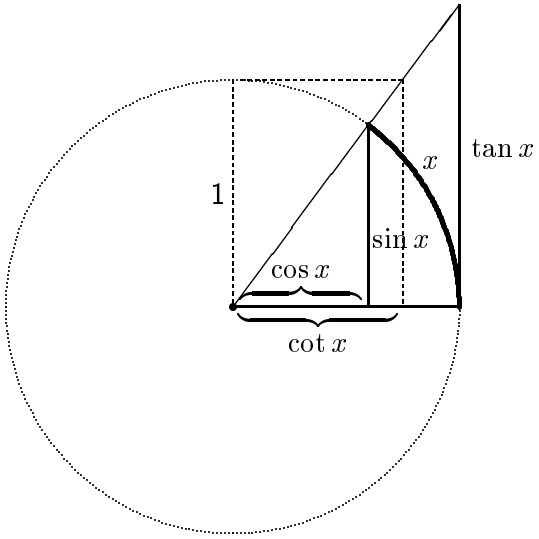


Abbildung 1.4
Darstellung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis

Hiermit kann der **Funktionsverlauf** der trigonometrischen Funktionen punktweise erhalten werden, z.B. $\sin x$:

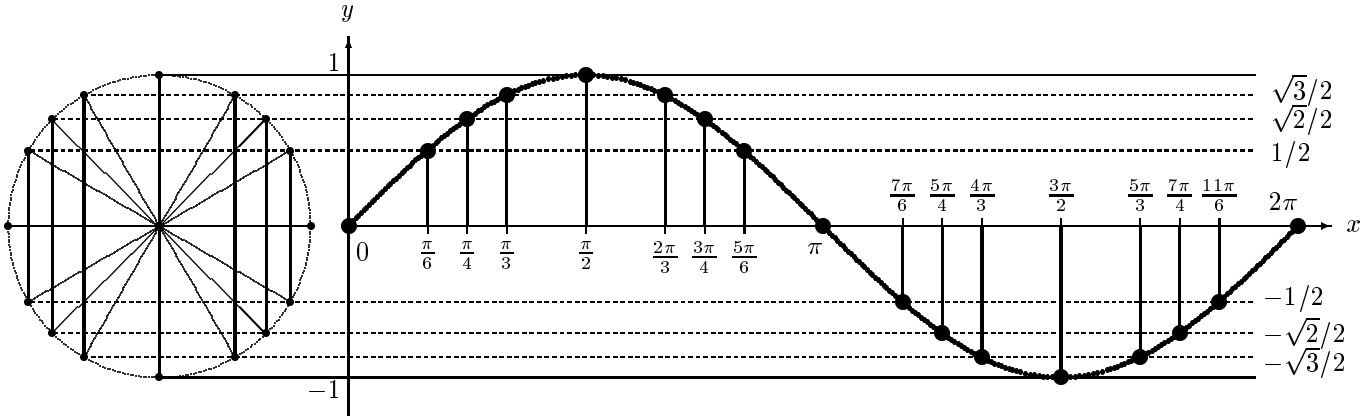


Abbildung 1.5 $y = \sin x$ für $0 \leq x \leq 2\pi$

Es ergeben sich folgende **Funktionsverläufe:**

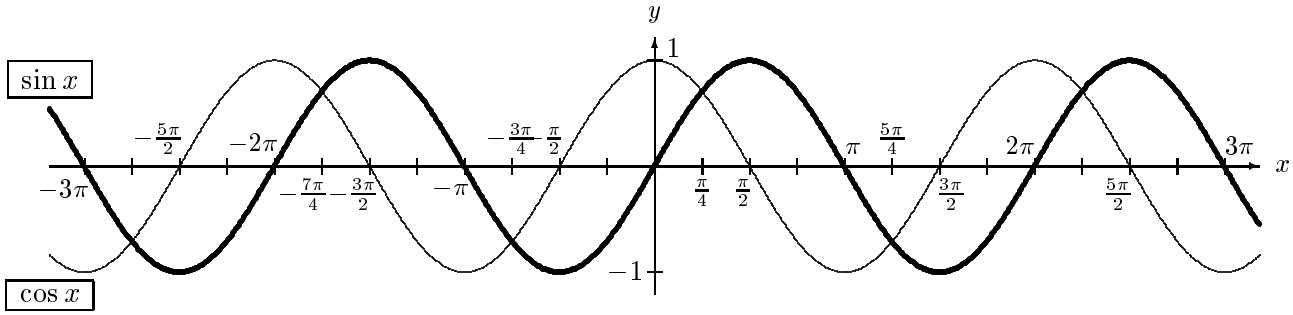


Abbildung 1.6 Sinus und Cosinus

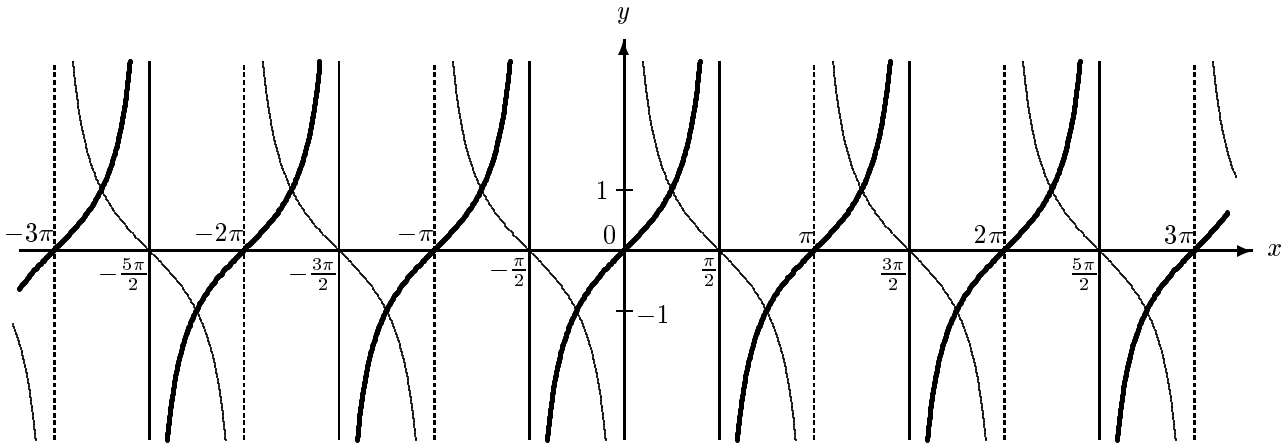


Abbildung 1.7 Tangens und Cotangens

Gängige Funktionswerte:

1.5

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	1	$\pm\infty$	-1	0
$\cot x$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	1	0	-1	$\pm\infty$

Die beiden folgenden Tabellenausschnitte können als **Eselsbrücke** dienen:

1.6

$\sin 0$	$=$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$=$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\tan 0$	$=$	0	$=$	$\cot\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{\pi}{6}$	$=$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$=$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\tan\frac{\pi}{6}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$=$	$\cot\frac{\pi}{3}$
$\sin\frac{\pi}{4}$	$=$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$=$	$\cos\frac{\pi}{4}$	$\tan\frac{\pi}{4}$	$=$	1	$=$	$\cot\frac{\pi}{4}$
$\sin\frac{\pi}{3}$	$=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=$	$\cos\frac{\pi}{6}$	$\tan\frac{\pi}{3}$	$=$	$\sqrt{3}$	$=$	$\cot\frac{\pi}{6}$
$\sin\frac{\pi}{2}$	$=$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$=$	$\cos 0$	$\tan\frac{\pi}{2}$	$=$	$\pm\infty$	$=$	$\cot 0$

Darüberhinaus kommt immer wieder vor:

1.7

$\sin(n\pi) = 0$ für *alle* ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ für *alle* $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $= \begin{cases} +1 & \text{für} \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ -1 & \text{für} \quad n = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$

$\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$ für alle *ungeraden* ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$

1.D Einige Regeln.

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man die folgende Formel, die oft von großem Nutzen ist:

1.8 $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ \ \forall x}$ **Satz des Pythagoras am Einheitskreis**

z.B.:

für $x \in [0, \pi]$ ist $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$,

für $x \in [-\pi, 0]$ ist $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$;

für $x \neq (2k+1) \cdot \pi/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,.$$

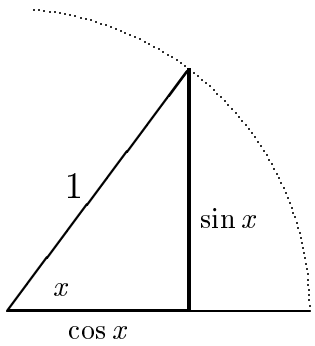


Abbildung 1.8: **Pythagoras am Einheitskreis.**

1.9

Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ sind 2π –***periodisch***, d.h. ***periodisch mit der Periode*** 2π: für alle $x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\left(x \pm 2\pi\right) &= \sin x \\ \cos\left(x \pm 2\pi\right) &= \cos x \end{aligned}}\,, \text{ und}$$

die Funktionen $\tan$ und $\cot$ sind π –***periodisch***, d.h. ***periodisch mit der Periode*** π: für alle $x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\left(x \pm \pi\right) &= \tan x \\ \cot\left(x \pm \pi\right) &= \cot x \end{aligned}}\,.$$

z.B.: $\sin \dfrac{19\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \dfrac{7\pi}{6}\right) = \sin \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$,

$\cos\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right) = \cos\left(-4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan \dfrac{19\pi}{6} = \tan\left(3\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\cot\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right) = \cot\left(-4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cot \dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

1.10

Die Funktionen $\sin$, $\tan$ und $\cot$ sind ***ungerade***, d.h. ihre Graphen sind **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**:

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist: $\boxed{\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}}$,

und die Funktion $\cos$ ist ***gerade***, d.h. ihr Graph ist **achsensymmetrisch zur Ordinate**:

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist: $\boxed{\cos(-x) = \cos x}$.

z.B.: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

In der Praxis (z.B. bei der Untersuchung von Schwingungen mit kleinem Ausschlag) wird häufig von der folgenden Tatsache Gebrauch gemacht:

1.11

$\boxed{\text{Für } x \approx 0 \text{ ist } \sin x \approx x}$

d.h. wenn der **im Bogenmaß (!) gemessene** Winkel x dem Betrage sehr klein ist, dann ist $\sin x$ ungefähr gleich x:

denn (siehe Abbildung 1.4): für $0 \le x \le \pi/2$ ist $\sin x \le x \le \tan x$, also: $\frac{\sin x}{x} \le 1$ *und* $x \le \frac{\sin x}{\cos x}$, bzw. $\cos x \le \frac{\sin x}{x}$; insgesamt: $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$: wegen $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$ gilt dies für alle x mit $0 \ne |x| \le \pi/2$, und da $\cos x \to 1$ für $x \to 0$, hat man insbesondere: $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$, d.h. aber: $\sin x \approx x$ für $|x| \ll 1$. ∎

Man kann das auch an den Graphen der beiden Funktionen $y = \sin x$ (mit dem Winkel x im *Bogenmaß*!) und $y = x$ erkennen:

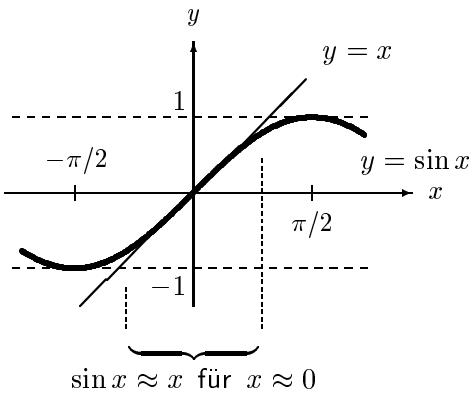


Abbildung 1.9: **Sinus nahe 0.**

z.B.: Für $|x| \ll 1$ ist $\frac{1-\sin(x^2)}{1-x} \approx \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$.

1.12

An der nebenstehenden Skizze kann man schließlich noch die ***Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus*** ablesen:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\Big(x+y\Big) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos\Big(x+y\Big) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}}$$

diese Additionstheoreme sind immer wieder sehr gut zu gebrauchen und mit ihrer Hilfe können viele weiteren Rechenregeln hergeleitet werden:

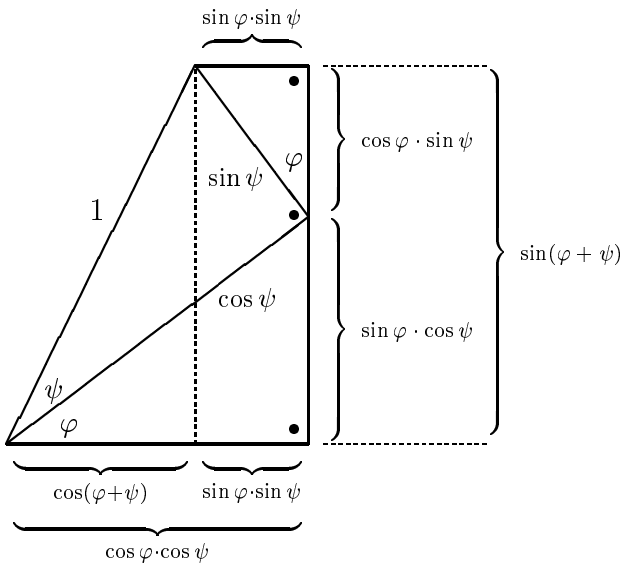


Abbildung 1.10 Additionstheoreme

Rechenbeispiele:

$\sin(x+\pi/2) = \sin x \cdot \cos\,\pi/2\; + \cos x \cdot \sin\,\pi/2\; = \sin x\;\cdot 0\; + \cos x\;\cdot 1\; = \cos x\,,$

$\cos(x+\pi/2) = \cos x \cdot \cos\,\pi/2\; - \sin x \cdot \sin\,\pi/2\; = \cos x\;\cdot 0\; - \sin x\;\cdot 1\; = -\sin x:$

1.13 $\boxed{\sin(x+\pi/2) = \cos x\,, \quad \cos(x+\pi/2) = -\sin x}$;

$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\,\cos y\; + \cos x\,\sin x = 2\sin x\cos x\,,$

$\cos 2x = \cos x\,\cos x\; - \sin x\,\sin x = \cos^2 x\; - \sin^2 x\; = \cos^2 x - \Big(1-\cos^2 x\Big) = 2\cos^2 x\; - 1\,,$ hiermit:

1.14 $$\boxed{\begin{aligned} \sin x \cdot \cos x\; &= \frac{1}{2}\,\sin 2x\,, \qquad \cos^2 x - \sin^2 x\; = \cos 2x \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}\Big(1+\cos 2x\Big)\;, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1-\cos 2x\Big) \end{aligned}}$$;

$\sin(x+y) = \sin x\;\cdot \cos y\; + \cos x\;\cdot \sin y\,,\;\; \sin(x-y) = \sin x\;\cdot \cos y\; - \cos x\;\cdot \sin y\,;$ Addition ergibt:

1.15 $\boxed{\sin x\;\cdot \cos y\; = \frac{1}{2}\Big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\Big)}$;

$\cos(x-y) = \cos x\;\cdot \cos y\; + \sin x\;\cdot \sin y\,,\;\; \cos(x+y) = \cos x\;\cdot \cos y\; - \sin x\;\cdot \sin y\,;$

Addition bzw. Subtraktion ergibt:

1.16 $$\boxed{\begin{aligned} \cos x\;\cdot \cos y\; &= \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \\ \sin x\;\cdot \sin y\; &= \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \end{aligned}}$$, usw..

1.E Übungsaufgaben zu Lektion 1.

Ü 1.1 [!!]

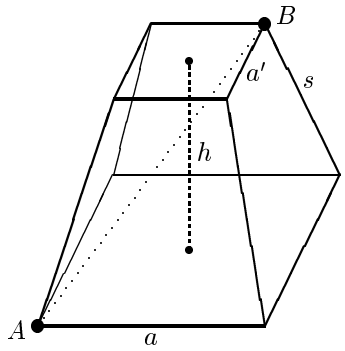
Ergänze die folgende Tabelle so, dass jeder Winkel sowohl im Bogenmaß (oben) als auch im Gradmaß (unten) angegeben ist:

Bogenm.:			$\frac{\pi}{18}$	0.31416		0.24π	1		2.82743	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{13}{6}\pi$
Gradm.:	$1°$	$7°$			$39°$			$144°$			$220°$	

Ü 1.2 [○]

Welche Innenwinkel γ und Aussenwinkel β hat ein 7–Eck? (Beide Winkel im Bogenmaß!)

Ü 1.3 [!!]



Welche Länge hat die Raumdiagonale AB des skizzierten, geraden und quadratischen Pyramidenstumpfes mit $a = h = 100\,[cm]$ und $a' = 50\,[cm]$?

Ü 1.4 [!]

Bestimme in dem Pyramidenstumpf der letzten Aufgabe die Winkel α (unten) und β (oben) und die Seitenlängen s und den Flächeninhalt F der Seitenflächen und bestimme außerdem den Winkel γ, den die Seitenflächen mit dem Grundquadrat einschließen.

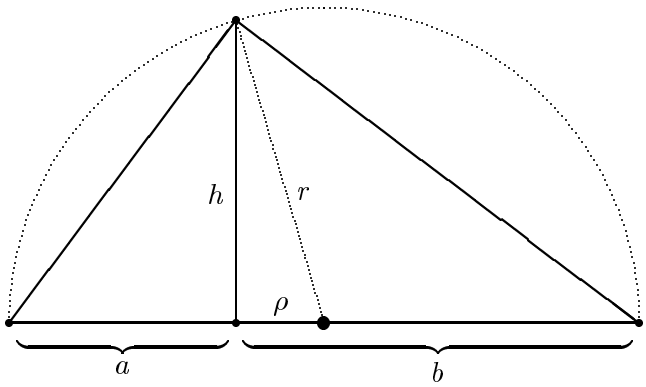
Ü 1.5 [!!]

An zwei gegenüberliegenden Seiten eines Sees befinden sich je ein 100 m hoher Mast. Wegen der Erdkrümmung kann man von der Spitze des einen Mastes gerade noch die Spitze des anderen Mastes erkennen. Eine Ente schwimmt auf dem kürzesten Weg von einem Mast zum anderen, und eine Möve fliegt auf dem kürzesten Weg von der einen Mastspitze zur anderen: wer von beiden hat den längeren Weg? (um wieviel länger?) [mittlerer Erdradius ≈ 6378 km]

Ü 1.6 [**]

Zeige mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, dass das skizzierte rechtwinklige Dreieck die Höhe $h = \sqrt{ab}$ hat und folgere daraus, dass für beliebige positive, reelle Zahlen a, b deren **geometrisches Mittel** $\sqrt{ab}$ *höchstens* so groß ist wie ihr **arithmetisches Mittel** $\frac{a+b}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}}\,.$$



Ü 1.7 $\boxed{\circ}$

Bestimme jeweils (exakt und *ohne* TR) $\sin x$ und $\cos x$ für

(a) $x = \pm\frac{\pi}{2}\,,\ \pm\frac{3\pi}{2}\,,\ \pm\frac{5\pi}{2}\,,\ \pm\frac{7\pi}{2}\,;$

(b) $x = \pm\frac{\pi}{4}\,,\ \pm\frac{3\pi}{4}\,,\ \pm\frac{5\pi}{4}\,,\ \pm\frac{7\pi}{4}\,;$

(c) $x = \pm\frac{\pi}{6}\,,\ \pm\frac{\pi}{3}\,,\ \pm\frac{2\pi}{3}\,,\ \pm\frac{5\pi}{6}\,;$

(d) $x = 4273\pi\,,\ 4274\pi\,.$

Ü 1.8 $\boxed{!!}$

Bestimme $\sin x$ und $\cos x$: **(a)** für $x = m\pi$ und **(b)** für $x = \frac{m\pi}{2}$ $(m \in \mathbb{Z})$.

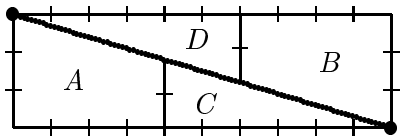
Ü 1.9 $\boxed{!!}$

Für welche t, x ist $\sin t = \cos t$ und $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$, und für welche φ ist (für alle t) $\sin t = \cos(t-\varphi)$?

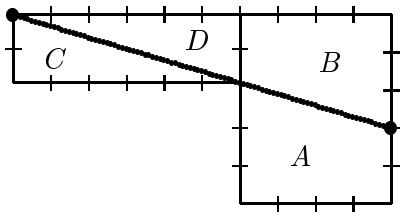
Ü 1.10 $\boxed{*}$

Was ist hier falsch?:

Wenn man in der oberen der gezeichneten Flächen die Teilflächen A und C vertauscht, bekommt man die untere Fläche.
Obwohl offenbar in beiden Abbildungen die vier gezeichneten Teilflächen A, B, C, D jeweils entsprechend gleich groß sind, scheint die untere Fläche (mit 32 [FE]) größer zu sein als die obere (mit 30 [FE]). Finde durch Berechnung geeigneter Winkel heraus, wo hier der Trugschluss liegt:



$F = 3 \cdot 10 = 30$ [FE]



$F = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 32$ [FE]

2 Betrag, allgemeine Funktionen, Kreise und Ellipsen.

Stichpunkte: Betrag, Abstand und Intervalle in $\mathbb{R}$. Funktionen: Definitions– und Wertebereich, Translationen. Kreise und Ellipsen: geschlossene Darstellung und übliche Parameterdarstellung.

2.A Intervalle, Betrag und Abstand.

Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ bezeichnet man mit

2.1

$[\,a,b\,]$	$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \right\}$	das ***abgeschlossene Intervall*** von a nach b,
$]\,a,b\,[$	$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \right\}$	das ***offene Intervall*** von a nach b und mit
$[\,a,b\,[$	$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \right\}$	das ***nach rechts*** bzw. ***nach links***
$]\,a,b\,]$	$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \right\}$	***halboffene Intervall*** von a nach b.

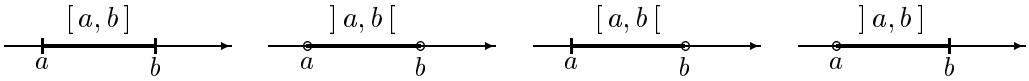


Abbildung 2.1 abgeschlossene, offene und halboffene Intervalle

Der **Betrag** (auch: **Absolut–Betrag**) $|a|$ einer reellen Zahl a ist anschaulich (auf der Zahlengeraden) der Abstand des Punktes a zum Punkt 0:

2.2

$$|\,a\,| = \left\{ \begin{array}{rl} a & \text{, wenn } a > 0 \\ 0 & \text{, wenn } a = 0 \\ -a & \text{, wenn } a < 0 \end{array} \right\} = \max\left\{ -a\,, a \right\}$$

Betrag von $a \in \mathbb{R}$:

Abbildung 2.2 Betrag einer reellen Zahl a

Etwas anschaulicher ist der **Graph der Betragsfunktion** :

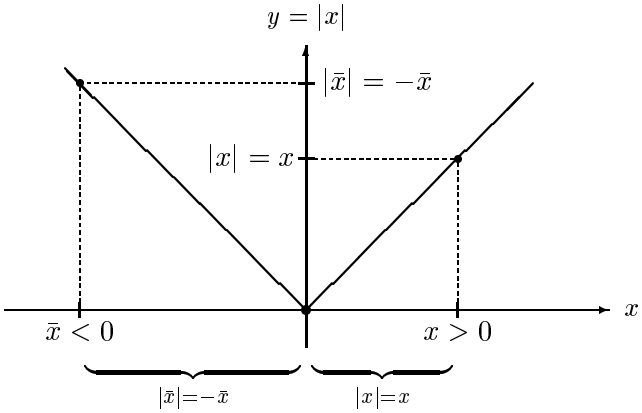


Abbildung 2.3
Betragsfunktion

2.3 Allgemeiner: für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|a-b|$ der **Abstand** zwischen a und b :

Abbildung 2.4 Abstand zwischen zwei reellen Zahlen a und b

Für beliebige reelle Zahlen a, b, c, x gilt:

2.4

(1) $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

(2) $|-a| = |a|$ und $|b-a| = |a-b|$,

(3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und $\left|1/a\right| = 1/|a|$.

(4) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$,

(5) $|x-a| \leq c \Leftrightarrow a-c \leq x \leq a+c$:

$-c \leq x \leq c$:

$a-c \leq x \leq a+c$:

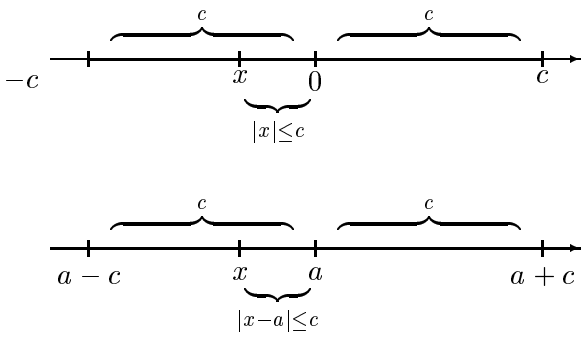


Abbildung 2.5
$|x| \leq c$ und
$|x-a| \leq c$

z.B.: 1. Genau dann ist $\boxed{|x-2| \leq 3}$, wenn der Abstand von x zu 2 kleiner oder gleich 3 ist, d.h. wenn $\boxed{-1 \leq x \leq 5}$:

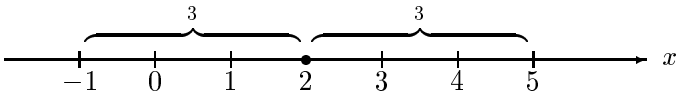


Abbildung 2.6
$|x-2| \leq 3$

2. genau dann ist $\boxed{|x+1| \leq 4}$, wenn der Abstand von x zu -1 (*minus!*) kleiner oder gleich 4 ist, d.h. wenn $\boxed{-5 \leq x \leq 3}$:

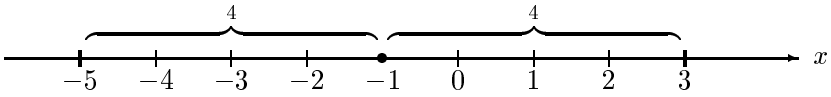


Abbildung 2.7
$|x+1| \leq 4$

3. und genau dann ist $\boxed{|x+2| > 3}$, wenn der Abstand von x zu -2 (*minus!*) größer als 3 ist, d.h. wenn $\boxed{x < -5 \text{ oder } x > 1}$:

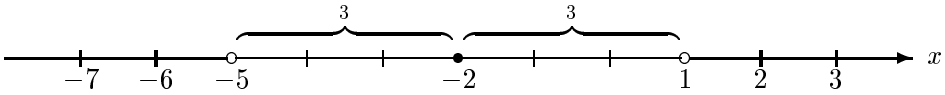


Abbildung 2.8
$|x+2| > 3$

4. Die Punkte der (x,y)-Ebene mit $\boxed{|x-y| \leq 2}$ sind genau die Punkte (x,y) mit $-2 \leq y-x \leq 2$, d.h. mit $\boxed{x-2 \leq y \leq x+2}$:

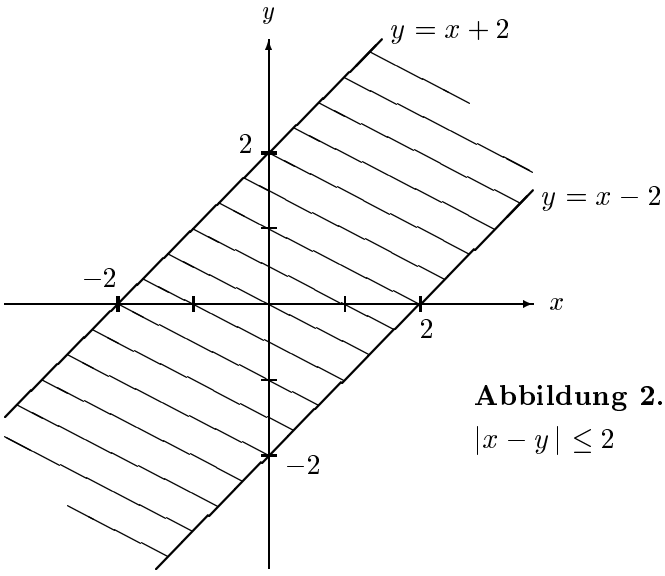


Abbildung 2.9
$|x-y| \leq 2$

In diesem Zusammenhang ist noch die **Dreiecksungleichung** von Interesse:

2.5 $\boxed{|a+b\,| \le |a| + |b|}$ **Dreiecksungleichung**

Diese ergibt sich sofort durch Addition der beiden stets gültigen Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} -|a| \le a \le |a| \\ -|b| \le b \le |b| \end{array}\right\} + : \; -\Big(|a|+|b|\Big) \le a+b \le \Big(|a|+|b|\Big)\,,$$

nach V 2.4(4) (mit $c = |a| + |b|$) also: $|a+b\,| \le |a| + |b|$. ∎

z.B.: Für beliebige Argumente x ist $-1 \le \sin x \le 1$ und $-1 \le \cos x \le 1$ (vgl. Abb. 1.6), also: $|\sin x| \le 1$ und $|\cos x| \le 1$. Damit hat man z.B. für die Funktion $\boxed{f(x) = 1.2\,\cos 3x\, - 0.8\,\sin 5x}$: für alle x ist $|f(x)| = \Big|1.2\,\cos 3x\, - 0.8\,\sin 5x\Big| \le \Big|1.2\,\cos 3x\Big| + \Big|0.8\,\sin 5x\Big| \le 1.2 + 0.8 = 2$, d.h. es ist stets $\boxed{-2 \le f(x) \le 2}$: wie die Skizze zeigt, ist das keine schlechte Abschätzung:

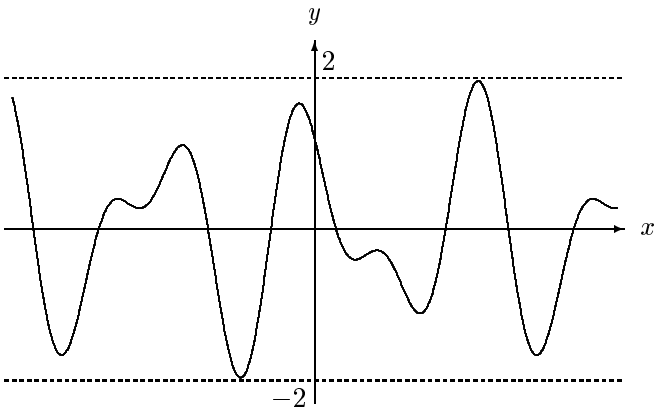


Abbildung 2.10 $f(x) = 1.2\,\cos 3x\, - 0.8\,\sin 5x$

2.B Zum Funktionsbegriff.

Durch eine auf einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ definierte **Funktion** $f : M \to \mathbb{R}$ wird den Elementen $x \in M$ **eindeutig (!)** ein Element $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet; M ist der **Urbildbereich** und $\mathbb{R}$ der **Zielbereich** von f .

$\mathcal{D}(f) := \{x \in M \mid f(x)$ ist eindeutig definiert $\}$ ist der **Definitionsbereich** und
$\mathcal{R}(f) := \{y = f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$ ist der **Bild–** oder **Wertebereich** von f .
manchmal wird der Bildbereich auch mit "im(f)" bezeichnet: "im" kommt von "image", $\mathcal{R}$ von "range".

Vereinbarung: wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, ist der Definitionsbereich stets größtmöglich anzunehmen! **z.B.:**

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\; \mathcal{R}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $f(x) = \sin x \;\Rightarrow\; \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,,\; \mathcal{R}(f) = [-1\,,\,1]$ (s. Abb. 1.6).

Wenn wir eine Funktion skizzieren, so zeichnen wir ihren **Graphen** (ihr Schaubild):
$\mathcal{G}(f) := \{(x,y) \mid x \in \mathcal{D}(f)\,,\ y = f(x)\}$.

> **Achtung!:** Obwohl bei einer Funktion f strikt zwischen f und $f(x)$ zu unterscheiden ist:
> f ist die **Bezeichnung** (der **Name**) der Abbildungs**vorschrift**, $y = f(x)$ sind die zugehörigen Funktions**werte**, ist es üblich, von einer "Funktion $f(x)$" oder sogar von einer "Funktion $f = f(x)$" zu sprechen: hiermit wird zum Ausdruck gebracht, daß f eine Funktion von x ist (oder sein soll)!

Beachte auch, daß "f" und "x" nur Namen sind: die in der Praxis auftretenden Funktionen haben nur selten den Namen "f" und die unabhängige Variable hat nur selten den Namen "x".

Ist z.B. $\vec{r} = (x\,,\ y\,,\ z)$ der Ortsvektoren eines sich bewegenden Teilchens, so sind die Komponenten von $\vec{r}$ Funktionen der Zeit t: $x = x(t)\,,\ y = y(t)\,,\ z = z(t)$.

Die **Einschränkung** $f|_M$ einer Funktion f auf eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ ist definiert durch:

$$\boxed{\mathcal{D}(f|_M) := M\,,\ f|_M(x) := f(x)\ \forall x \in M}\ .$$

$f|_M$ unterscheidet sich also von f nur dadurch, daß alle Werte x, $y = f(x)$ mit $x \notin M$ weggelassen werden.

> In der Regel umgeht man die meist etwas holprige Schreibweise "$f|_M$" für die Einschränkung von f: werden gewisse Eigenschaften von $f|_M$ untersucht, so betrachtet man diese Eigenschaften von f "**über** (oder **auf**) M".

z.B.: statt für die Funktion $f(x) = \sin x$ zu sagen: "die Einschränkung $f|_{[-\pi/2\,,\,\pi/2]}$ ist monoton wachsend", sagt man bequemer: "die Funktion $f(x) = \sin x$ ist über dem Intervall $[-\pi/2\,,\ \pi/2]$ monoton wachsend" (vgl. Abb. 1.6):

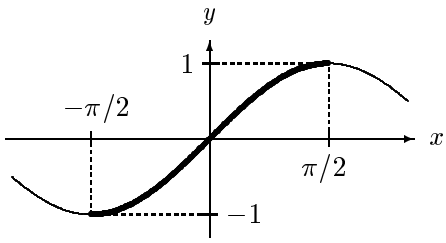


Abbildung 2.11 $f(x) = \sin x$ über $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right]$

2.C Verschiebung, Spiegelung und Streckung von Funktionsgraphen.

Häufig lässt sich das Schaubild (= der Graph) einer Funktion aus dem Schaubild einer bekannten, einfacheren Funktion $y = f(x)$ dadurch gewinnen, dass man dieses geeignet verschiebt oder spiegelt oder streckt. In der folgenden Tabelle sind die einfachsten Operationen dieser Art zusammengefasst, und im Anschluss daran nocheinmal an einer Skizze veranschaulicht:

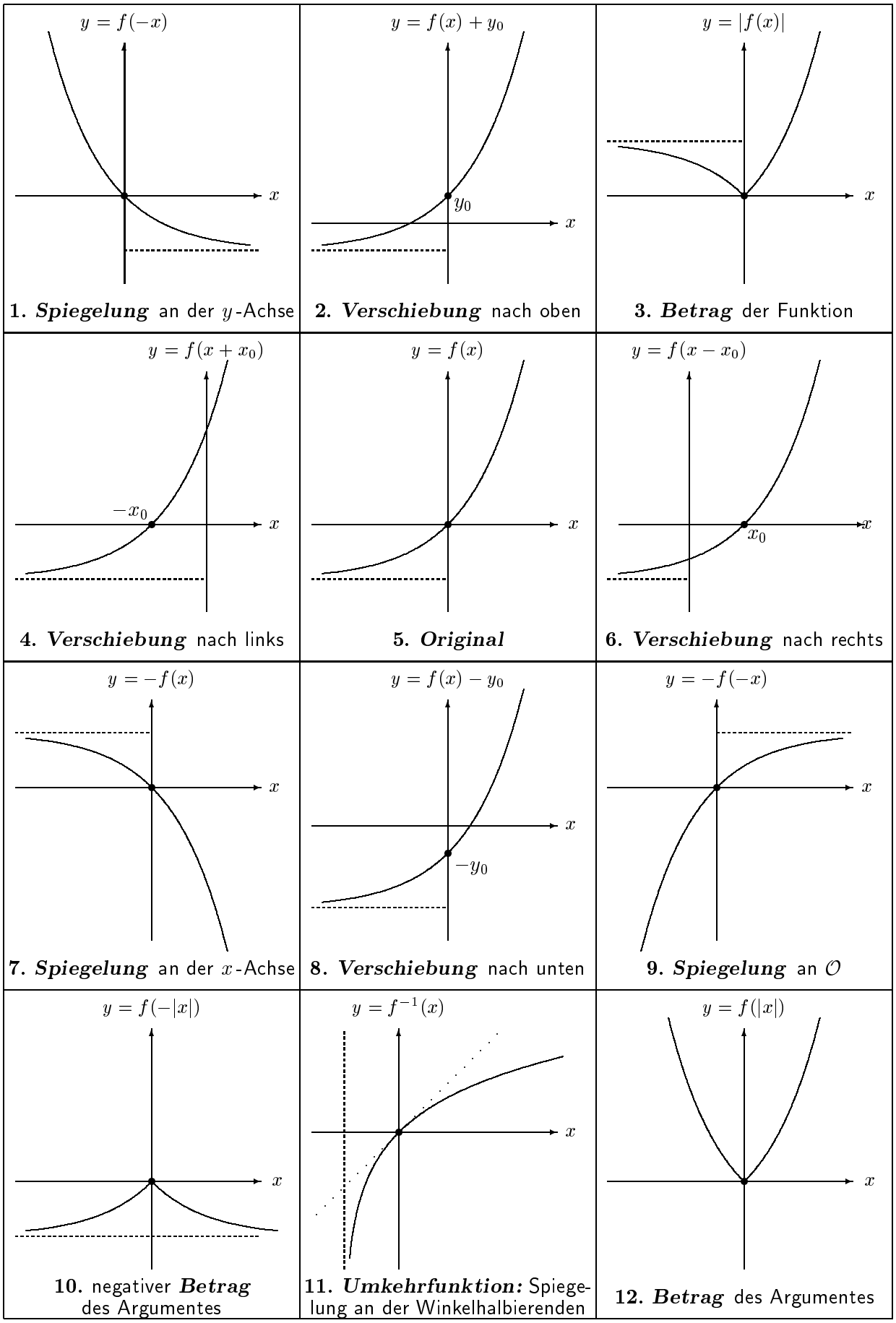
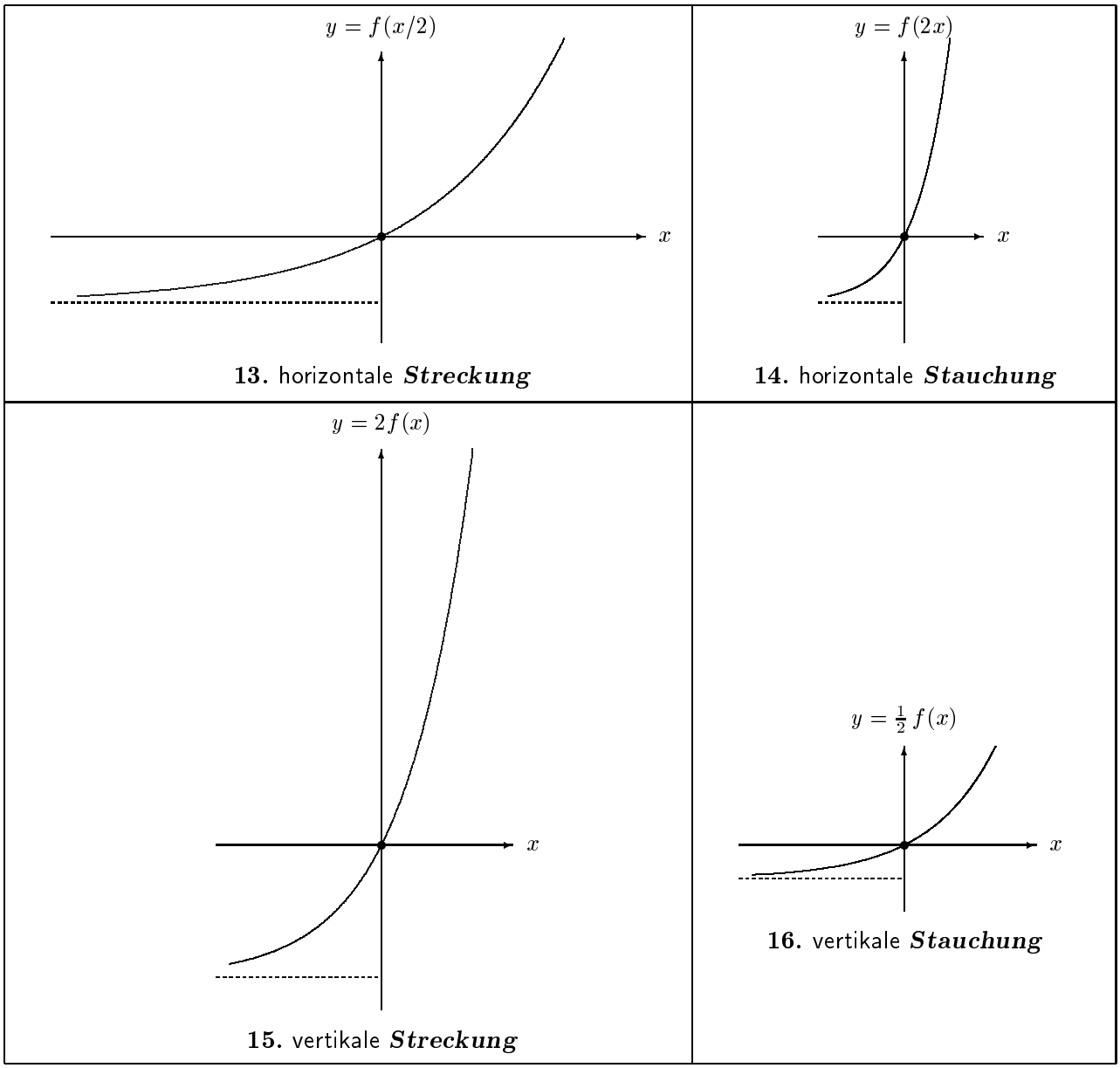


Abbildung 2.12 Verschiebungen und Spiegelungen.



13. horizontale ***Streckung***

14. horizontale ***Stauchung***

15. vertikale ***Streckung***

16. vertikale ***Stauchung***

Abbildung 2.13 Streckungen und Stauchungen

Zum Beispiel:

In den letzten Abbildungen 2.12 und 2.13 sind wir von der 'Originalfunktion' $\boxed{y = f(x) = e^x - 1}$ (Nr.5) ausgegangen. Ihre Umkehrfunktion in Nr.11 ergibt sich folgendermaßen:
$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = e^y - 1 \Leftrightarrow e^y = x + 1 \Leftrightarrow y = \ln(x+1)$, also: $\boxed{y = f^{-1}(x) = \ln(x+1)}$: das ist die Logarithmusfunktion $y = \ln x$ um 1 nach links verschoben.

Weiteres Beispiel:

2.6

$$\sin\left(x + \pi/2\right) = \cos x$$
$$\sin\left(x - \pi/2\right) = -\cos x$$
$$\cos\left(x - \pi/2\right) = \sin x$$

(siehe Abbildung 1.6)

Wenn man die **Sinus–Kurve** um $\pi/2$ *nach links* verschiebt, ergibt sich die **Cosinus–Kurve**, während Verschiebung um $\pi/2$ *nach rechts* die **negative Cosinus–Kurve** liefert; wenn man die **Cosinus–Kurve** um $\pi/2$ *nach rechts* verschiebt, erhält man wieder die **Sinus–Kurve**.

Das kann man auch nachrechnen: mit dem Additionstheorem 1.12 ergibt sich:

$\sin\Big(x \pm \pi/2\Big) = \sin x \cdot \cos\ \pi/2\ \pm \cos x \cdot \sin\ \pi/2\ = \sin x\ \cdot 0 \pm \cos x\ \cdot 1 = \pm \cos x\,,$

$\cos\Big(x - \pi/2\Big) = \cos x \cdot \cos\ \pi/2\ + \sin x \cdot \sin\ \pi/2\ = \cos x\ \cdot 0 + \sin x\ \cdot 1 = \sin x\,.$

2.7 $\boxed{\cot x = -\tan(x - \pi/2)}$ (siehe Abbildung 1.7)

Man erhält die **Cotangens–Kurve**, wenn man die **Tangens–Kurve** an der Abszisse *spiegelt* und um $\pi/2$ *nach rechts* verschiebt.

Nachrechnen bestätigt dies: $-\tan\Big(x - \pi/2\Big) = -\dfrac{\sin\Big(x - \pi/2\Big)}{\cos\Big(x - \pi/2\Big)} \overset{\text{s.o.}}{=} -\dfrac{-\cos x}{\sin x} = \cot x\,.$

2.D Kreise und Ellipsen.

I. Kreise.

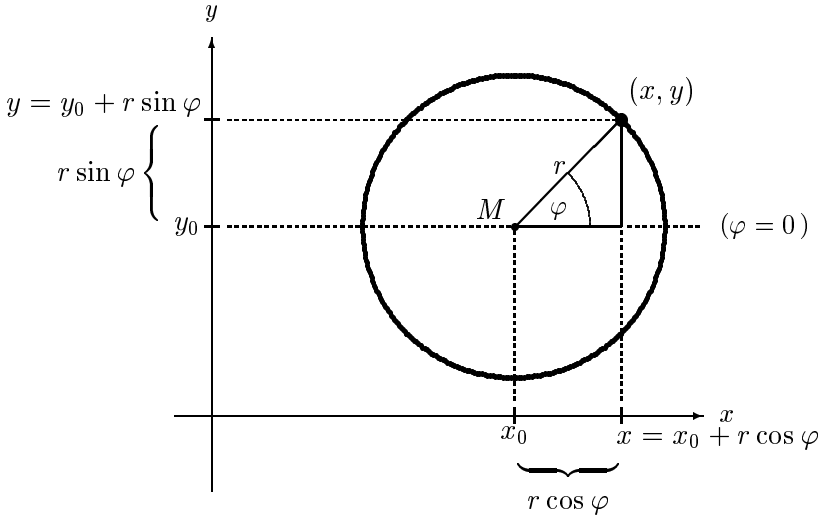


Abbildung 2.14
Kreis um $M(x_0 \mid y_0)$ vom Radius r

Der Satz von Pythagoras liefert für diesen Kreis die

2.8 Mittelpunktsgleichung: $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$.

Wenn man diese Gleichungen nach y bzw. x auflöst, bekommt man:

2.9

$$y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \quad \begin{cases} + & : \text{ oberer Halbkreis,} \\ - & : \text{ unterer Halbkreis;} \end{cases}$$

$$x = x_0 \pm \sqrt{R^2 - (y - y_0)^2} \quad \begin{cases} + & : \text{ rechter Halbkreis,} \\ - & : \text{ linker Halbkreis;} \end{cases}$$

und an der Skizze liest man unmittelbar die (übliche)

2.10 Parameterdarstellung: $\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{array}}$ $(\,0 \le \varphi \le 2\pi\,)$ ab.

Nimmt man alle Kreise vom Radius ρ mit $\rho \le r$ (bzw. $\rho \ge r$) zusammen, so bekommt man das **Innere** (bzw. das **Äußere**) des Kreises vom Radius r:

2.11 $\boxed{\begin{array}{ll} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le r^2 & \text{: das } \textbf{Innere} \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \ge r^2 & \text{: das } \textbf{Äußere} \end{array}}$ des Kreises um $M(x_0 \mid y_0)$ vom Radius r.

Die Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt dürften noch von der Schule her bekannt sein:

2.12 **Kreisumfang** und **Kreisfläche:** $\boxed{\begin{array}{c} U = 2\pi r \\ F = \pi r^2 \end{array}}$.

z.B.: 1. Der skizzierte halbmondförmige Bereich B_1 lässt sich am einfachsten mit cartesischen Koordinaten x, y beschreiben: $\boxed{B_1 :\ x^2 + y^2 \le 9 \le (x-3)^2 + y^2}$:

B_1 enthält alle Punkte (x, y), die ***sowohl innerhalb*** des Kreises um $(0,0)$ vom Radius 3 liegen:
$\boxed{x^2 + y^2 \le 9}$,

als auch außerhalb des Kreises um $(3,0)$ vom selben Radius:
$\boxed{(x-3)^2 + y^2 \ge 9}$.

B_1 hat den **Umfang** $U = 6\pi$.

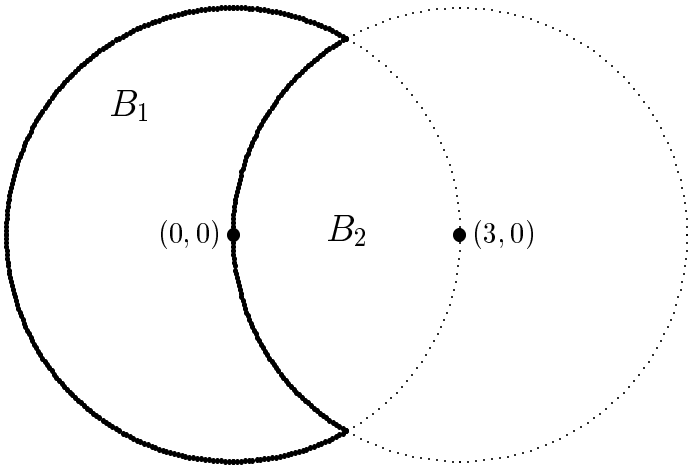


Abbildung 2.15: **Bereiche B_1 und B_2**

2. Der ***Durchschnitt*** B_2 dieser beiden Kreisbereiche lässt sich ebenfalls bequem mit cartesischen Koordinaten beschreiben: die beiden Kreise schneiden sich offenbar bei $x_0 = 3/2$; Einsetzen in eine der beiden Kreisgleichungen liefert: $y^2 = 9 - (3/2)^2 = 27/4$, also $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{27}$. Hiermit erhält man die

Darstellung: $\boxed{B_2 :\ -\frac{1}{2}\sqrt{27} \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{27},\ 3 - \sqrt{9-y^2} \le \sqrt{9-y^2}}$: denn:

für jedes y aus dem Intervall $\left[-\frac{\sqrt{27}}{2}, \frac{\sqrt{27}}{2}\right]$ läuft x von der linken Hälfte $x = 3 - \sqrt{9 - y^2}$ des rechten Kreises $(x-3)^2 + y^2 = 9$ bis zur rechten Hälfte $x = \sqrt{9 - y^2}$ des linken Kreises $x^2 + y^2 = 9$.

3. Dagegen wird der skizzierte Kreisflächenbereich B_3 bequemer mit Hilfe der üblichen Parameterdarstellung beschrieben:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{array}{l} 1 \le r \le 3 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right.} \; :$$

B_3 hat den **Flächeninhalt** $F = \frac{1}{8}(9\pi - \pi) = \pi$.

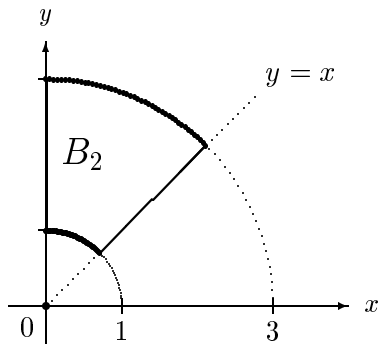


Abbildung 2.16: **Bereich** B_3

II. Ellipsen.

Wenn man einen Kreis vom Radius a (z.B.) in Ordinatenrichtung um den Faktor b/a streckt (oder staucht), erhält man eine **Ellipse** mit den **Halbachsenlängen** a in Abszissenrichtung und b in Ordinatenrichtung:

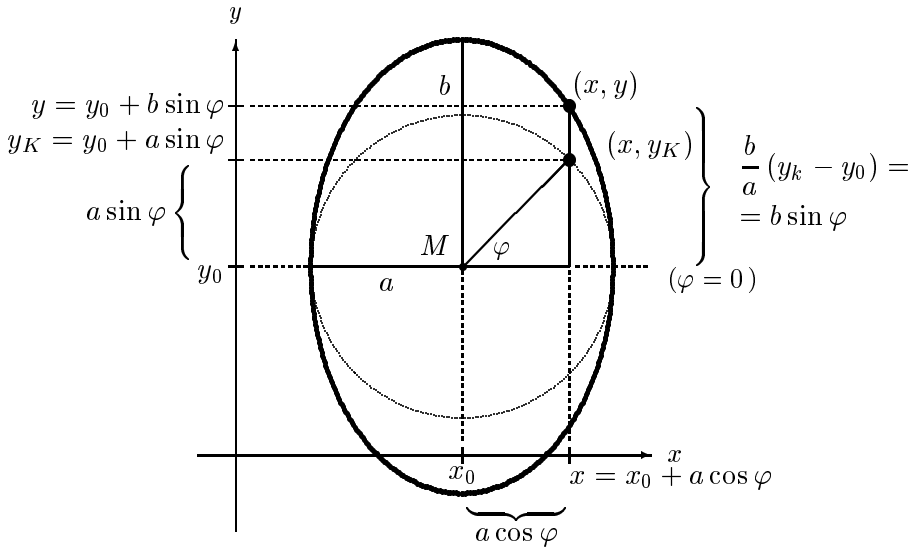


Abbildung 2.17
Ellipse um $M(x_0 \mid y_0)$ mit der x-Halbachse a und der y-Halbachse b.

Man bekommt einen Kreis vom Radius $r = 1$, wenn man diese Ellipse in x-Richtung um den Faktor $1/a$ und in y-Richtung um den Faktor $1/b$ staucht: damit hat man gemäß Nummer V 2.9 für die **Ellipse** die

2.13 Mittelpunktsgleichung: $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$,

und der Skizze entnimmt man wieder die übliche

2.14 Parameterdarstellung: $\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + a\cos\varphi \\ y = y_0 + b\sin\varphi \end{array}}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Auf diese Parameterdarstellung wird man auch durch den Vergleich der beiden Beziehungen:

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} & + & \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} & = & 1 \\ \cos^2\varphi & + & \sin^2\varphi & = & 1 \end{array}$$

geführt. **Beachte**, dass dieser Winkel φ *nicht* der Winkel ist, den die Richtung von M zum Ellipsenpunkt (x, y) mit der Horizontalen einschließt! Es bleibt noch zu erwähnen:

2.15 $\boxed{F = ab\pi}$ ist der **Flächeninhalt** der **Ellipse** und

2.16 $\boxed{\textbf{für den Ellipsenumfang gibt es keine Formel!}}$

(Wir werden im Kurs noch sehen, warum das so ist.)

2.E Übungsaufgaben zu Lektion 2.

Ü 2.1 $\boxed{\circ}$

Schreibe die drei Mengen jeweils als Intervall:

$M_1:\ |x-3| \le 2\,,\ \ M_2:\ |2+x| > 3\,,\ \ M_3:\ |x+0.5| < 0.5$ *und* $|x-1.5| < 2.5$.

Ü 2.2 $\boxed{!!}$

Skizziere die Kurve $y = f(x) = |x+2| - |x-2|$.

Ü 2.3 $\boxed{!!}$

Skizziere in der x, y–Ebene die vier Bereiche:

$B_1:\ |x| - 2 \le y \le 2 - |x|\,,\ \ B_2:\ |y| - 2 \le x \le 2 - |y|\,,$
$B_3:\ \max\Big\{|x+y|, |x-y|\Big\} \le 2\,,\ \ B_4:\ |x| + |y| \le 2\,.$

Ü 2.4 $\boxed{!}$

Skizziere (grob und freihändig) mit exakten Angaben über Lage und Wert der Extrema die Funktion $y = f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ und bestimme die Periode T, mit der $f(x)$ periodisch ist.

Ü 2.5 $\boxed{!!}$

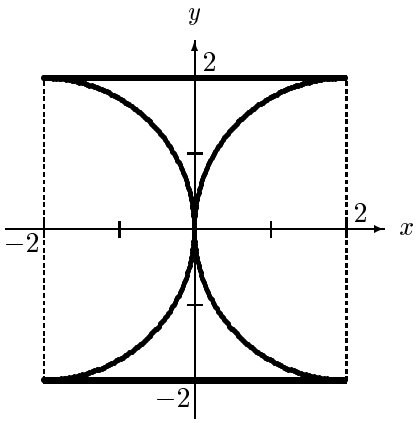
Stelle die Funktion $f(x) = \sin x + \cos x$ in der Form $f(x) = a\cos(x-\varphi)$ mit "geeigneten" $a > 0$ und $\varphi > 0$ dar und versuche, $y = f(x)$ (grob und freihändig) zu skizzieren.

Ü 2.6 $\boxed{!!}$

Skizziere die folgenden Kreis– und Ellipsenbögen und finde jeweils eine Parameterdarstellung:

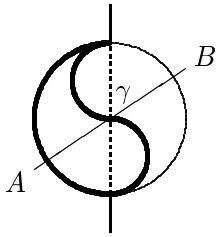
$C_1:\ (x+2)^2+(y-1)^2=4\,,\ x+2\geq 0\,,\ y-1\leq 0\,,$
$C_2:\ (x+2)^2+(y-1)^2=4\,,\ y\geq x+3\,,$
$C_3:\ (x+2)^2+4(y-1)^2=4\,,\ y\leq 1\,.$

Ü 2.7 $\boxed{*}$



Beschreibe den dickumrandeten Bereich der x,y–Ebene und bestimme seinen Flächeninhalt:

Ü 2.8 $\boxed{*}$



Yin und Yang teilen eine Kreisfläche in zwei gleichgroße Teile. Welchen Winkel γ schließt eine gerade Linie AB durch den Kreismittelpunkt mit der Vertikalen ein, die sowohl Yin als auch Yang in zwei flächengleiche Teile zerlegt?

Ü 2.9 $\boxed{!}$

Wenn ein Einspänner, dessen Räder in einem Abstand von 1.20 *m* an der Achse befestigt sind, auf seinem (kleinstmöglichen) Wendekreis chauffiert wird, drehen sich die äußeren Räder dreimal so schnell wie die inneren. Welche Umfänge haben die Kreise, den die äußeren und die inneren Räder hierbei vollziehen?

3 Rationale Funktionen.

Stichpunkte: Geraden: Anstieg, verschiedene Darstellungen; achsenparallele Parabeln; ganzrationale Funktionen, Polynomdivision; gebrochen–rationale Funktionen, Pole.

3.A Geraden.

(siehe unten die Zusammenfassung in Nr. 3.7)

3.1 Die **allgemeine Gleichung einer Geraden** in der x, y–Ebene hat die Form

$$\boxed{\alpha x + \beta y = \delta}\ ;$$

hier ist $d = \dfrac{|\delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ der **Abstand** der Geraden vom Koordinatenursprung.

Wenn die Gerade *nicht* durch den Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ geht und beide Koordinatenachsen schneidet, erhält man aus der allgemeinen Geradengleichung sofort die

3.2 **Achsenabschnittsgleichung** $\boxed{\dfrac{x}{x_s} + \dfrac{y}{y_s} = 1}$:

das ist die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(x_s \mid 0)$ und $(0 \mid y_s)$; diese hat den **Abstand** $d = \dfrac{|x_s\, y_s|}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}$ vom Koordinatenursprung.

Die Formeln für den Abstand d — die man sich *nicht merken*, sondern bei Bedarf kurz herleiten sollte! — ergeben sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: mit $\overline{AB} = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$ bekommt man für den Flächeninhalt F des Dreiecks $\mathcal{O}AB$:

$F = \dfrac{|x_s\, y_s|}{2} = \dfrac{d \cdot \overline{AB}}{2} = \dfrac{d\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}{2}$, somit:

$d = \dfrac{|x_s\, y_s|}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}$. Und wenn man hier $x_s = \dfrac{\delta}{\alpha}$, $y_s = \dfrac{\delta}{\beta}$ einsetzt, ergibt sich:

$$d = \frac{|\delta|^2}{|\alpha\beta|\sqrt{\delta^2/\alpha^2 + \delta^2/\beta^2}} = \frac{|\delta|^2\sqrt{\alpha^2\,\beta^2}}{|\alpha\beta|\sqrt{\delta^2\,(\alpha^2 + \beta^2)}} =$$

$$= \frac{|\delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\ .$$

∎

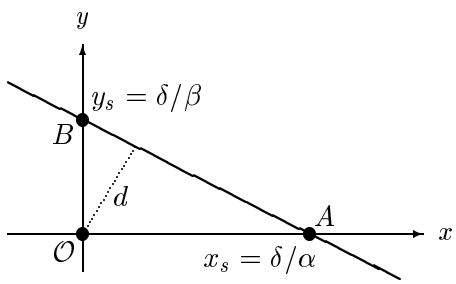


Abbildung 3.1
zur Achsenabschnittsgleichung

Je nach Gegebenheiten können für Geraden, die *nicht* parallel zur y–Achse sind (die also *nicht* den Anstieg $\pm\infty$ haben), auch die folgenden Darstellungen zweckmäßig sein:

3.3 $\boxed{y = mx + b}$ **Normalform** einer Geraden vom **Anstieg** m durch den Punkt $(0 \mid b)$ auf der y–Achse:

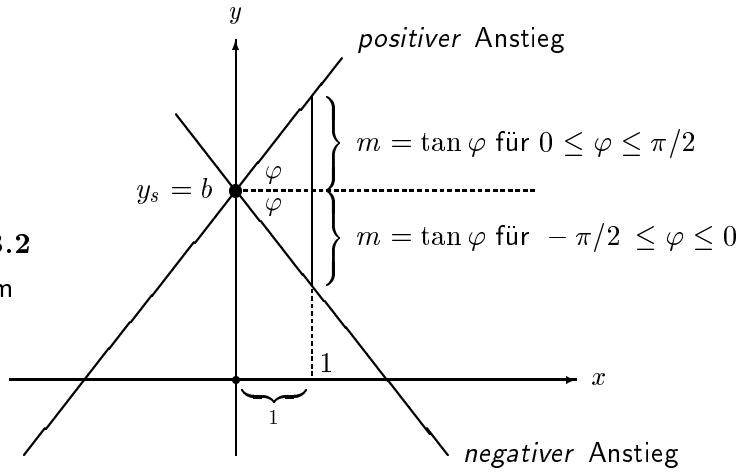
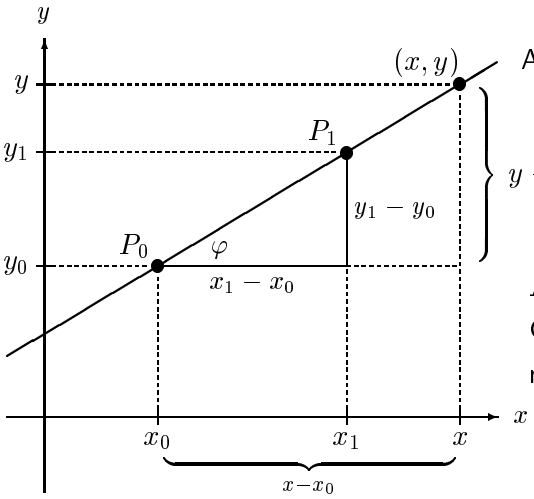


Abbildung 3.2
zur Normalform

3.4 $\boxed{\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m \text{, bzw. } \quad y = y_0 + m(x - x_0)}$ **Punkt–Steigungs–Gleichung:** Gerade vom **Anstieg** m durch den Punkt $P_0(x_0 \mid y_0)$.

3.5 $\boxed{\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$ **Gerade durch zwei Punkte** $P_0(x_0 \mid y_0)$, $P_1(x_1 \mid y_1)$: diese hat den **Anstieg** $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.



Anstieg $m = \tan\varphi = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Abbildung 3.3
Gerade durch vorgegebene Punkte mit vorgegebener Steigung

3.6 Die zur x–Achse parallele Gerade durch den Ordinatenpunkt $(0, b)$ hat die Gleichung: $\boxed{y = b}$ und die zur y–Achse parallele Gerade durch den Abszissenpunkt $(a, 0)$ hat die Gleichung: $\boxed{x = a}$.

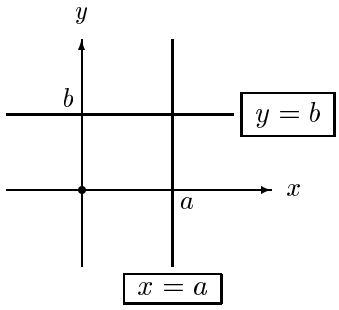


Abbildung 3.4 achsenparallele Geraden

Zusammenfassung (Geraden):

Für eine ***Gerade*** in der x, y-Ebene haben wir die verschiedenen Darstellungen:

3.7

$\boxed{\alpha x + \beta y = \delta}$ ***allgemeine Gleichung***; der Abstand vom Koordinatenursprung ist $d = \dfrac{|\delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$;

$\boxed{\dfrac{x}{x_s} + \dfrac{y}{y_s} = 1}$ ***Achsenabschnittsgleichung***: Gerade durch die Achsenpunkte $A(x_s \mid 0)$, $B(0 \mid y_s)$; (s. Abb. 3.1)

$\boxed{y = mx + b}$ ***Normalform***: Gerade vom Anstieg m durch den Ordinatenpunkt $B(0 \mid b)$; (s. Abb. 3.2)

$\boxed{y = m(x - x_0)}$ ***Nullstellen-Gleichung***: Gerade vom Anstieg m mit der Nullstelle $N(x_0 \mid 0)$: diese Darstellung ergibt sich durch ***Parallelverschiebung*** der Ursprungsgeraden $y = mx$ um den Wert x_0 ; (s. Nr. 2.6. (a))

$\boxed{\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m}$ ***Punkt-Steigungs-Gleichung***: Gerade vom Anstieg m durch den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$; (s. Abb. 3.3)

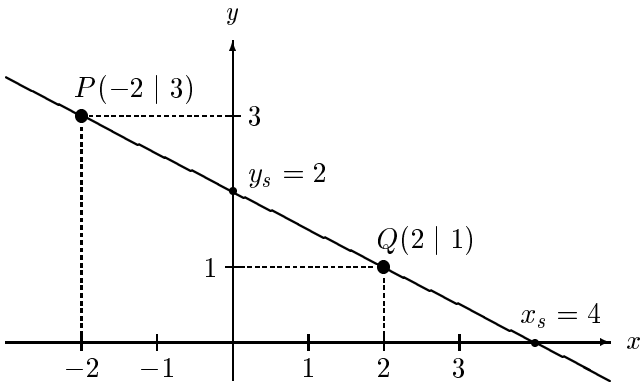
$\boxed{\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$ ***Zwei-Punkte-Gleichung***: Gerade durch die zwei Punkte $P(x_0 \mid y_0)$, $Q(x_1 \mid y_1)$; ihr Anstieg ist $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$; (s. Abb. 3.3)

$\boxed{y = b}$ ***Parallele zur x-Achse*** durch den Ordinatenpunkt $B(0 \mid b)$; (s.o. Abb. 3.4)

$\boxed{x = a}$ ***Parallele zur y-Achse*** durch den Abszissenpunkt $A(a \mid 0)$. (s.o. Abb. 3.4)

z.B.: Es gibt viele Möglichkeiten, für die skizzierte Gerade g eine Geradengleichung zu erhalten:

zunächst kann man ihren ***Anstieg*** bestimmen, z.B.: $m = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ (4 nach rechts, 2 nach unten).



(i) Mit der ***Nullstellengleichung*** $y = m(x - x_0)$: die Gerade g hat bei $x_s = 4$ ihre ***Nullstelle***, also bekommt man sie, wenn man die durch $\mathcal{O}(0 \mid 0)$ verlaufende Gerade $y = -\frac{1}{2}x$ um $x_x = 4$ ***nach rechts verschiebt***: $\boxed{y = -\frac{1}{2}(x-4)}$; hiermit ist: $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2}$.

(ii) Mit der ***Achsenabschnittsgleichung***: $\frac{x}{x_s} + \frac{y}{y_s} = 1$: die Gerade schneidet die x-Achse bei $x_s = 4$ und die y-Achse bei $y_s = 2$. Damit ist $\boxed{\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1}$, und erneut: $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2}$.

(iii) Mit der ***Normalform*** $y = mx + b$: die Gerade vom $m = -\frac{1}{2}$ durch den **Ordinatenpunkt** $(0, 2)$ hat die Gleichung: $\boxed{y = 2 - \frac{1}{2}x}$.

(iv) Mit der ***Punkt-Steigungs-Gleichung*** $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$: Gerade vom **Anstieg** $m = -\frac{1}{2}$ durch den **Punkt** $P(-2 \mid 3)$: $\boxed{\frac{y-3}{x+2} = -\frac{1}{2}}$, hiermit: $\boxed{y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2)}$, bzw. $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2}$.

(v) Nocheinmal mit der ***Punkt-Steigungs-Gleichung***: Gerade vom **Anstieg** $m = -\frac{1}{2}$ durch den **Punkt** $Q(2 \mid 1)$: $\boxed{\frac{y-1}{x-2} = -\frac{1}{2}}$, hiermit: $\boxed{y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2)}$, bzw. erneut $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2}$.

(vi) Mit der ***Zwei-Punkte-Gleichung*** $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$: die Gerade durch die beiden **Punkte** $P(-2 \mid 3)$ und $Q(2 \mid 1)$ ist: $\boxed{\frac{y-3}{x+2} = \frac{1-3}{2+2}}$ oder (gleichwertig): $\boxed{\frac{y-1}{x-2} = \frac{3-1}{-2-2}}$; mit dem Anstieg $m = \frac{1-3}{2+2} = \frac{3-1}{-2-2} = -\frac{1}{2}$ hat man wieder die Gleichung $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2}$.

(vii) In allen Fällen erhält man die ***allgemeine Form*** $\boxed{x + 2y = 4}$ und damit den ***Abstand vom Koordinatenursprung***: $d = \frac{4}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = 1.78885$.

Sie sollten diese verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten nicht auswendig lernen: in der Praxis genügt *eine* — *richtige!* — Darstellung!

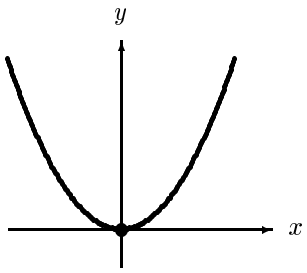
3.B Parabeln.

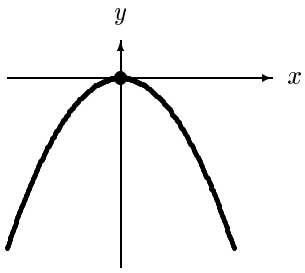
Wir werden es in diesem Kurs nur mit Parabeln zu tun haben, deren Achse zu einer der beiden Koordinatenachsen (x–Achse oder y–Achse) parallel ist. (s. u. die Zusammenfassung in Nr. 3.14)

Die einfachsten Parabeln dieser Art sind diejenigen mit Scheitel $S(0 \mid 0)$:

3.8

$\boxed{y = ax^2}$:

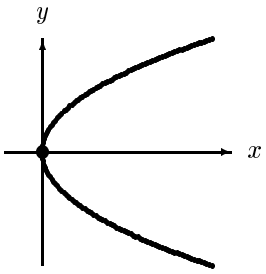




$\boxed{a > 0}$: Öffnung nach oben

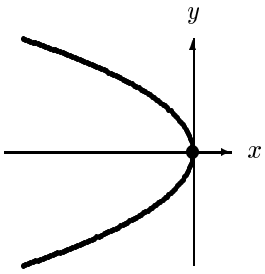
$\boxed{a < 0}$: Öffnung nach unten

$\boxed{y = \pm\sqrt{ax}}$:



$y = +\sqrt{ax}$

$y = -\sqrt{ax}$



$\boxed{a > 0}$: Öffnung nach rechts

$\boxed{a < 0}$: Öffnung nach links

Abbildung 3.5 achsenparallele Parabeln

Die Gleichungen der entsprechenden Parabeln mit Scheitel $S(x_0 \mid y_0)$ ergeben sich aus diesen Gleichungen durch die Parallelverschiebung $x \to (x - x_0)$, $y \to (y - y_0)$ (siehe Nummer 2.6, (a) und (b)):

3.9

$\boxed{y = y_0 + a\,(x - x_0)^2}$ **Scheitelpunktsgleichung** einer Parabel mit einer zur Ordinate parallelen Achse,

$\boxed{y = y_0 \pm \sqrt{a\,(x - x_0)}}$ **Scheitelpunktsgleichung** einer Parabel mit einer zur Abszisse parallelen Achse.

In beiden Fällen hat die Parabel den **Scheitel** bei $S(x_0 \mid y_0)$.

3.10 $\boxed{y = ax^2 + bx + c \text{ mit } a \neq 0}$: das ist die **allgemeine Gleichung** einer Parabel, deren Achse zur y–Achse parallel ist.

Will man sich einen Überblick über die Lage solch einer Parabel verschaffen, also die Lage des **Scheitels** $S(x_0 \mid y_0)$ und — gegebenenfalls — die Lage der (reellen) **Nullstellen**, d.h. die Schnittpunkte $N_1(x_1 \mid 0)$, $N_2(x_2 \mid 0)$ mit der x–Achse herausfinden, so kann man den Ausdruck: $y = ax^2 + bx + c$ **quadratisch ergänzen**:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) . \end{aligned}$$

An dieser Gleichung liest man unmittelbar ab:

3.11 Der **Scheitel** $S(x_0 \mid y_0)$ hat die Koordinaten $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = c - \frac{b^2}{4a}}$

Die Nullstellen ergeben sich aus der obigen Gleichung mit $y = 0$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{4a} - c\right), \text{ somit: } x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

und da das, was unter der Wurzel steht, nur im Fall $b^2 \geq 4ac$ nicht–negativ ist, haben wir:

3.12 Wenn $b^2 \geq 4ac$ ist, hat die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ die (reellen) **Nullstellen** $N_1(x_1 \mid 0)$, $N_2(x_2 \mid 0)$ mit $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$.

Im Fall $a = 1$ (und mit $b = p$, $c = q$) bekommt man hieraus noch die

3.13 **"p–q–Formel"** — auch **"Mitternachtsformel"** genannt —:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0 \text{ für } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} .$$

Mit den Nullstellen $x_{1,2}$ — und der dritten binomischen Formel: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — können wir die Rechnung von oben fortsetzen:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \overset{\text{s.o.}}{=} a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{4} - ac\right)\right] = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)\,. \end{aligned}$$

Zusammenfassung (Parabeln, deren Achse zur y-Achse parallel ist):

Für eine **Parabel**, deren Achse zur y–Achse parallel ist, haben wir die verschiedenen Darstellungen:

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ **allgemeine Gleichung**,

$\boxed{y = y_0 + a(x - x_0)}$ **Scheitelpunktsgleichung**,

$\boxed{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$ **Nullstellengleichung**.

$a \neq 0$ ist die **Öffnung** der Parabel, $S(x_0 \mid y_0)$ ist der **Scheitel**, somit
$\boxed{x = x_0}$ die Gleichung der **Parabelachse**,
und $N_1(x_1 \mid 0)$, $N_2(x_2 \mid 0)$ sind die **Nullstellen** der Parabel.

3.14 Die x-Koordinaten der **Nullstellen** sind:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{1}{a}\left(-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}\right) = x_0 \pm \sqrt{-\frac{y_0}{a}}}\,,$$

und für die **Scheitel-Koordinaten** (x_0, y_0) haben wir die Beziehungen:

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}\,,\quad y_0 = c - \frac{b^2}{4a}}$$

(die Parabelachse liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen).

Die Parabel hat nur genau dann (reelle) **Nullstellen**, wenn $b^2 \geq 4ac$ ist, bzw., anschaulicher, wenn $\frac{y_0}{a} \leq 0$ ist: wenn also entweder der Scheitel *oberhalb* der x-Achse liegt ($y_0 \geq 0$) und die Parabel *nach unten* geöffnet ist ($a < 0$), oder wenn der Scheitel *unterhalb* der x-Achse liegt ($y_0 \leq 0$) und die Parabel *nach oben* geöffnet ist.

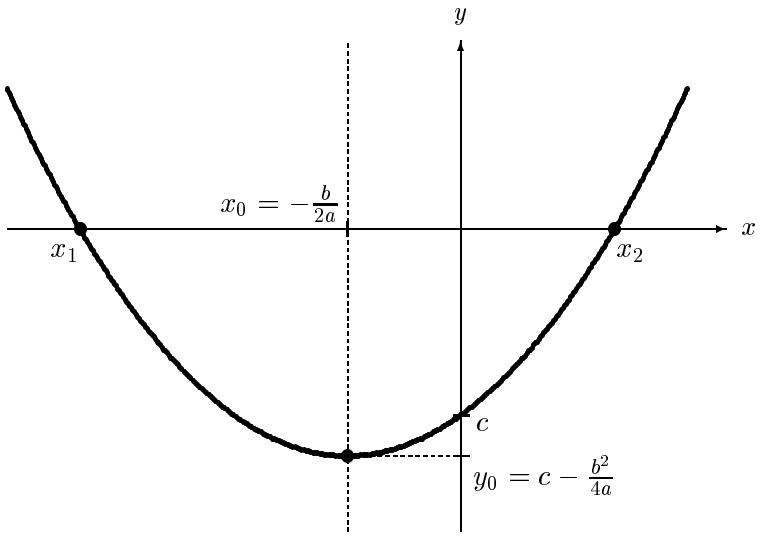
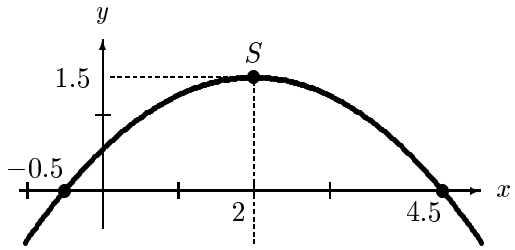


Abbildung 3.6 Parabel $y = ax^2 + bx + c$ (mit $a > 0$, $y_0 < 0$)

Bemerkung: Im Fall $b^2 < 4ac$ bzw. (gleichwertig) $\frac{y_0}{a} > 0$ sind die Nullstellen $x_{1,2}$ *nicht reell*: in diesem Fall hat die Parabel *keine Schnittpunkte* mit der x-Achse!

z.B.: Für den skizzierten Parabelbogen haben wir mehrere Möglichkeiten, eine Gleichung zu erhalten:



(i) **Mit der Scheitelgleichung**: der Scheitel liegt bei $S(2 \mid 1.5)$, also hat die Parabel eine Gleichung der Form: $\boxed{y = 1.5 + a(x-2)^2\,,\ a \text{ "passend"}}$:
man bekommt a durch Einsetzen eines gegebenen Punktes, z.B.:
$0 \overset{!}{=} y(-0.5) = 1.5 + a(-0.5-2)^2 = 1.5 + 6.25a$, also $a = -\frac{1.5}{6.25} = -0.24$. Somit:
$\boxed{y = 1.5 - 0.24(x-2)^2}$.

(ii) **Mit der Nullstellengleichung**: die Parabel hat die Nullstellen $N_1(-0.5 \mid 0)$, $N_2(4.5 \mid 0)$; daher hat sie eine Gleichung der Form: $\boxed{y = y(x+0.5)(x-4.5)\,,\ a \text{ "passend"}}$:
man bekommt a wieder durch Einsetzen eines gegebenen Punktes: hier bleibt uns nur noch der Scheitel: $1.5 \overset{!}{=} y(2) = a(2+0.5)(2-4.5) = -6.25a$, also erneut $a = -0.24$ und somit:
$\boxed{y = -0.24(x+0.5)(x-4.5)}$.

(iii) Am umständlichsten geht das hier mit der **allgemeienen Gleichung**:
$\boxed{y = ax^2 + bx + c\,,\ a, b, c \text{ "passend"}}$: durch Einsetzen der drei gegebenen Punkte bekommt man drei Gleichungen für die drei unbekannten Koeffizienten:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & 0 \overset{!}{=} y(-0.5) = 0.25a - 0.5b + c \\ 2. & 0 \overset{!}{=} y(4.5) = 20.25a + 4.5b + c \\ 3. & 1.5 \overset{!}{=} y(2) = 4a + 2b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2. - 1.: & b = -4a \ \Rightarrow \\ 1'. & 2.25a + c = 0 \\ 3'. & -4a + c = 1.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -0.24, \\ b = 0.96, \\ c = 0.54, \end{array}\right.$$

also: $\boxed{y = -0.24x^2 + 0.96x + 0.54}$.

3.C Polynome.

3.15

Ein **Polynom vom Grad** n, $n \in \mathbb{N}$, ist eine **ganzrationale Funktion** der Form $\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \text{ mit } \ a_n \neq 0}$.

Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind die **Koeffizienten** des Polynoms, und den Koeffizienten a_0 nennt man gelegentlich auch den **konstanten Term** oder das **konstante Glied** des Polynoms; offenbar ist $p(0) = a_0$.

Eine Zahl x_1 mit $p(x_1) = 0$ nennt man eine **Nullstelle** (auch: **Wurzel**) des Polynoms.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie man die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2 bestimmt (z.B. mit der "Mitternachtsformel"). Entsprechende Formeln für Polynome vom Grad 3 und 4 gibt es, aber diese sind so "unhandlich", dass sie kaum verwendet werden. **Für die Nullstellen von Polynomen höheren als 4. Grades gibt es keine Formeln!** (Das liegt nicht an der Untätigkeit oder Unfähigkeit der Mathematiker, sondern man kann *beweisen*, dass es solche Formeln *nicht geben kann*!) In der Praxis benutzt man zur Nullstellenbestimmung von Polynomen höheren Grades numerische Näherungsverfahren, wie z.B. das Horner–Schema, mit denen die Nullstellen in der Regel mit beliebiger Genauigkeit erhalten werden können. Für die Nullstellenbestimmung mit Hilfe eines PC's gibt es gute software.

3.16

Wenn man eine **Nullstelle** x_1 des Polynoms $p(x)$ vom Grad n bereits kennt (z.B. durch Erraten), kann man vom Polynom $p(x)$ den **Linearfaktor** $(x - x_1)$ **abspalten** und erhält auf diese Weise ein Polynom $q_1(x)$ vom *niedrigeren* Grad $n - 1$:

$\boxed{p(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)}$. Um weitere Nullstellen von $p(x)$ zu bekommen, muss man die Nullstellen von $q_1(x)$ bestimmen.

Wenn der Linearfaktor $(x - x_1)$ *mehrfach*, etwa genau k mal abgespalten werden kann, so dass also $\boxed{p(x) = (x - x_1)^k \cdot q_k(x)}$ mit einem Polynom $q_k(x)$ vom Grad $n - k$, so ist x_1 eine **mehrfache** bzw. k**-fache Nullstelle** von $p(x)$.

Die Polynome $q_1(x)$ bzw. $q_k(x)$ ergeben sich, wenn man das Polynom $p(x)$ durch das Polynom $(x - x_1)$ bzw. $(x - x_1)^k$ **dividiert** .

Wir wollen an einem **Beispiel** zeigen, wie diese **Polynomdivision** funktioniert und wie man hiermit schrittweise die Nullstellen eines Polynoms erhalten kann:

Es seien die Nullstellen des Polynoms $\boxed{p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12}$ bestimmen.

Die erste Nullstelle, nämlich $x_1 = 1$, "erraten" wir: $p(1) = 1 - 2 - 7 + 20 - 12 = 0$. Damit kann der Linearfaktor $(x - 1)$ durch Polynomdivision abgespalten werden.

Hierzu schreiben wir die beiden Polynome nebeneinander:

$$\boxed{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 \ : \ x - 1 \ = \cdots}$$

und betrachten auf beiden Seiten nur die ***höchsten Potenzen*** von x:

$$\boxed{\boxed{x^4} - \cdots \qquad\qquad : \ \boxed{x} - \cdots = \boxed{x^3} + \cdots} \ .$$

Als Nächstes (um den Rest zu bestimmen) schreiben wir das x^3–Fache des Polynoms $x - 1$ unter das linke Polynom und subtrahieren:

$$\begin{array}{lllll|lll}
\boxed{x^4} & -2x^3 & -7x^2 & +20x & -12 & : & x-1 & = x^3 + \cdots \\
\boxed{x^4} & -x^3 & & & & & & \\
\hline
 & -x^3 & -7x^2 & +20x & -12 & & &
\end{array}$$

Jetzt ist das Restpolynom $\boxed{-x^3} - 7x^2 + 20x - 12$ durch das Polynom $\boxed{x} - 1$ zu dividieren: hierzu betrachten wir von beiden Polynomen wieder nur die ***höchsten Potenzen*** von x: $\boxed{-x^3} : \boxed{x} = \boxed{-x^2}$.

Um den nächsten Rest zu bestimmen, schreiben wir das $(-x^2)$–Fache des Polynoms $x - 1$ unter das linke Polynom und subtrahieren:

$$\begin{array}{lllll|lll}
x^4 & -2x^3 & -7x^2 & +20x & -12 & : & x-1 & = x^3 - x^2 + \cdots \\
x^4 & -x^3 & & & & & & \\
\hline
 & \boxed{-x^3} & -7x^2 & +20x & -12 & & & \\
 & \boxed{-x^3} & +x^2 & & & & & \\
\hline
 & & -8x^2 & +20x & -12 & & &
\end{array}$$

Nun ist das Polynom $\boxed{-8x^2} + 20x - 12$ durch das Polynom $\boxed{x} - 1$ zu dividieren und wir betrachten hierzu von beiden Polynomen wieder nur die ***höchsten Potenzen*** von x: $\boxed{-8x^2} : \boxed{x} = \boxed{-8x}$.

Wir schreiben das $(-8x)$–Fache des Polynoms $x - 1$ unter das linke Polynom und subtrahieren:

$$
\begin{array}{lllll:l}
x^4 & -2x^3 & -7x^2 & +20x & -12 & x-1 \quad = x^3 - x^2 - 8x + \cdots \\
x^4 & -x^3 & & & & \\
\hline
 & \boxed{-x^3} & -7x^2 & +20x & -12 & \\
 & \boxed{-x^3} & +x^2 & & & \\
\hline
 & & \boxed{-8x^2} & +20x & -12 & \\
 & & \boxed{-8x^2} & +8x & & \\
\hline
 & & & 12x & -12 &
\end{array}
$$

Schließlich ist noch das Polynom $\boxed{12x} - 12$ durch das Polynom $\boxed{x} - 1$ zu dividieren und wir betrachten hierzu von beiden Polynomen erneut nur die ***höchsten Potenzen*** von x: $\boxed{12x} : \boxed{x} = \boxed{12}$.

Wir schreiben noch das 12–Fache von $x - 1$ unter das linke Poynom $12x - 12$, subtrahieren und stellen erfreut fest, dass diese Division "aufgeht" (das *muss* so sein, anderenfalls wäre $(x - 1)$ kein Linearfaktor und damit $x_1 = 1$ keine Nullstelle von $p(x)$):

$$
\begin{array}{lllll:l}
x^4 & -2x^3 & -7x^2 & +20x & -12 & x-1 \quad = x^3 - x^2 - 8x + 12 =: q_1(x) \\
x^4 & -x^3 & & & & \\
\hline
 & \boxed{-x^3} & -7x^2 & +20x & -12 & \\
 & \boxed{-x^3} & +x^2 & & & \\
\hline
 & & \boxed{-8x^2} & +20x & -12 & \\
 & & \boxed{-8x^2} & +8x & & \\
\hline
 & & & \boxed{12x} & -12 & \\
 & & & \boxed{12x} & -12 & \\
\hline
 & & & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

Wir erhalten als erstes Zwischenergebnis: $\boxed{p(x) = (x-1) \cdot (x^3 - x^2 - 8x + 12)}$.

Die weiteren (reellen) Nullstellen von $p(x)$ — sofern es welche gibt — sind die (reellen) Nullstellen von $q_1(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$. $x_1 = 1$ ist *keine* Nullstelle von $q_1(x)$, denn $q_1(1) = 1 - 1 - 8 + 12 \neq 0$, aber wir "erraten", dass $x_2 = 2$ eine Nullstelle von $q_1(x)$ ist: $q_1(2) = 8 - 4 - 16 + 12 = 0$. Damit kann von $q_1(x)$ der Linearfaktor $(x - 2)$ abgespalten werden, was in derselben Weise wie eben geschieht:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\boxed{x^3} & -x^2 & -8x & +12 & : \ \boxed{x} - 2 = x^2 + x - 6 \ =: \ q_2(x) \\
x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & \boxed{x^2} & -8x & +12 & \\
 & x^2 & -2x & & \\
\hline
 & & \boxed{-6x} & +12 & \\
 & & -6x & +12 & \\
\hline
 & & -- & -- &
\end{array}
$$

Wir bekommen: $\boxed{p(x) = (x-1)(x-2)\cdot(x^2+x-6)}$

und die weiteren (reellen) Nullstellen von $p(x)$ — sofern es welche gibt — sind die (reellen) Nullstellen des Polynoms $q_2(x) = x^2 + x - 6$; diese bestimmen wir am einfachsten mit der "Mitternachtsformel":

$$x^2 + x - 6 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

Damit erhalten wir für das Polynom $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$ die (*reelle*) **Faktorzerlegung**:

$\boxed{p(x) = (x-1)(x-2)^2(x+3)}$; $p(x)$ hat die beiden *einfachen* **Nullstellen** $x_1 = 1$, $x_3 = -3$

und die *doppelte* **Nullstelle** $x_2 = 2$.

3.17 Jedes Polynom vom Grad n mit reellen Koeffizienten hat *höchstens* n **reelle Nullstellen** (um die nicht–reellen Nullstellen kümmern wir uns — zunächst — nicht!); wenn n *ungerade* ist, wenn also $p(x)$ ein Polynom vom Grad $1, 3, 5, \ldots$ ist, dann besitzt $p(x)$ *mindestens eine* reelle Nullstelle, während es bei einem Polynom *geraden* Grades $2, 4, 6, \ldots$ vorkommen kann, dass es *keine* reellen Nullstellen hat.

Weitere **Beispiele**:

1. Das Polynom $\boxed{p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5}$ hat die (reelle) Faktorzerlegung:

$p(x) = (x^2+1)\cdot(x^2+4x+5)$ (das kann man z.B. durch Ausmultiplizieren der Klammern nachprüfen).

Die Nullstellen des ersten Faktors $p_1(x) = x^2 + 1$ sind: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$, also *nicht reell*, und für die Nullstellen des zweiten Faktors $p_2(x) = x^2 + 4x + 5$ ergibt sich mit der "Mitternachtsformel":

$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}$: diese sind ebenfalls *nicht reell*. $p(x)$ hat also *keine* reellen Nullstellen.

Wir hätten das auch bequemer einsehen können über die Darstellung:

$p(x) = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + 4 = (x+1)^4 + 4$: es ist $p(x) \geq 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere schneidet der Graph von $y = p(x)$ nicht die x-Achse.

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die **Potenzfunktion** $P_n(x) = x^n$ ein Polynom vom Grad n, das genau *eine*, dafür n–fache reelle Nullstelle $x_0 = 0$ besitzt:

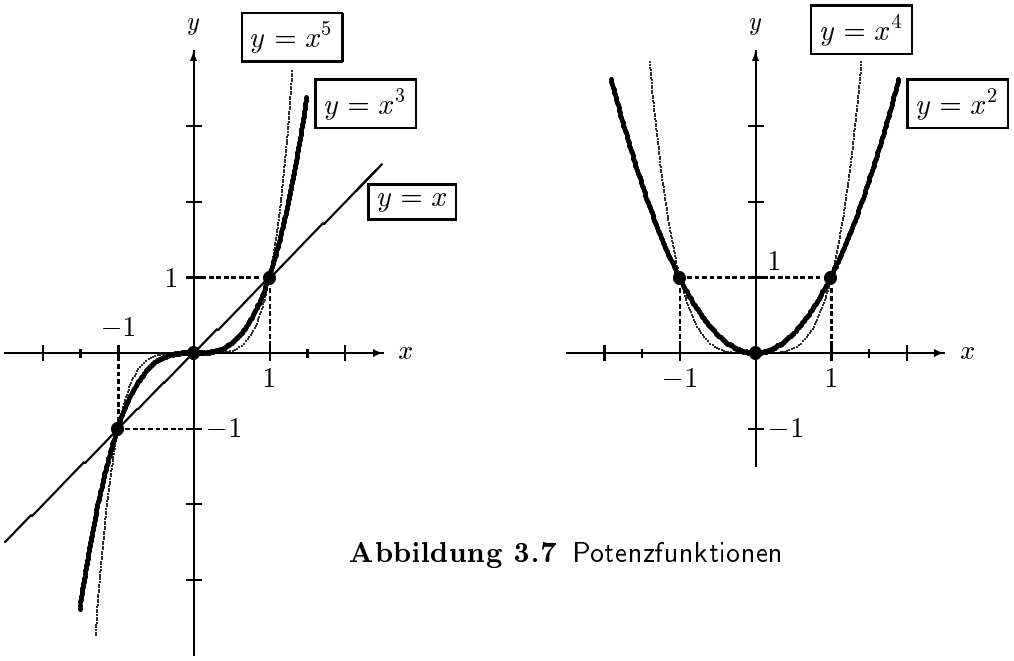


Abbildung 3.7 Potenzfunktionen

3.D Gebrochen–rationale Funktionen.

Polynome sind **ganz–rationale** Funktionen und gehören zur größeren Klasse der **rationalen** Funktionen.

3.18 Allgemein ist eine **rationale** Funktion eine Funktion der Form

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

also der Quotient von zwei Polynomen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ und $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.

Um zu betonen, dass es sich hierbei *i.a. nicht* um *ganz*–rationale Funktionen handelt, nennt man solche Funktionen auch **gebrochen–rational**.

Wenn der Zähler $P(x)$ und der Nenner $Q(x)$ der rationalen Funktion $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ eine *gemeinsame* Nullstelle x_0 haben, kann man bei beiden den Linearfaktor $(x - x_0)$ abspalten, also $R(x)$ in der Form $R(x) = \dfrac{(x - x_0) \cdot P_1(x)}{(x - x_0) \cdot Q_1(x)}$ schreiben und den gemeinsamen Faktor $(x - x_0)$ **wegkürzen**.
Das gilt entsprechend für gemeinsame Faktoren *beliebiger* Ordnung:

3.19 ***Wir vereinbaren***, dass wir im Fall eines *gemeinsamen* Faktors $F_0(x)$ von Zähler und Nenner einer rationalen Funktion $R(x)$ diesen stillschweigend ***wegkürzen***:

$$R(x) = \frac{F_0(x) \cdot P_1(x)}{F_0(x) \cdot Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Diese Vereinbarung ist für das praktische Rechnen mit gebrochen–rationalen Funktionen bequem, jedoch aus mathematischer Sicht nicht ganz korrekt:

die Funktion $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ ist nur an den Stellen $\bar{x}$ mit $Q_1(\bar{x}) = 0$ *nicht* definiert, während die Funktion $R(x) = \dfrac{F_0(x) \cdot P_1(x)}{F_0(x) \cdot Q_1(x)}$ darüberhinaus noch an den Stellen $\tilde{x}$ mit $F_0(\tilde{x}) = 0$ *nicht* definiert ist.

Den Praktiker stört das nicht sonderlich: er kürzt diese sogenannten *hebbaren Unstetigkeitsstellen* $\tilde{x}$ von $R(x)$ einfach weg!

3.20 Eine rationale Funktion $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, die sich *nicht weiter kürzen* lässt (s.o.), hat an der Stelle x_0:

eine k**–fache Nullstelle**, wenn der **Zähler** bei x_0 eine k–fache Nullstelle hat (da $R(x)$ gekürzt ist, hat der Nenner $Q(x)$ an dieser Stelle *keine* Nullstelle), und

einen k**–fachen Pol** (= **Pol der Ordnung** k), wenn der **Nenner** $Q(x)$ bei x_0 eine k–fache Nullstelle hat (der Zähler $P(x)$ hat, da $R(x)$ gekürzt sein soll, an dieser Stelle *keine* Nullstelle).

Beachte, dass die rationale Funktion $R(x)$ an ihren Polstellen *nicht definiert* ist!

3.21 Wir nennen eine gebrochen–rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \quad \textbf{echt gebrochen–rational},$$

wenn der Grad n des Zählers $P(x)$ echt ***kleiner*** ist als der Grad m des Nenners $Q(x)$ (also $n < m$).

3.22 Jede gebrochen–rationale Funktion $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, die *nicht echt* gebrochen–rational ist (also $n \geq m$), kann stets als Summe einer **ganz–rationalen** Funktion $G(x)$ und einer **echt gebrochen–rationalen** Funktion $\dfrac{P_0(x)}{Q(x)}$ geschrieben werden:

$$\boxed{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{P_0(x)}{Q(x)}},$$

wobei der Grad des Polynoms $P_0(x)$ echt ***kleiner*** ist als der Grad des Nenners $Q(x)$.

Man erhält die Polynome $G(x)$ und $P_0(x)$ mit Hilfe der Polynomdivision: wenn man $P(x)$ durch $Q(x)$ teilt und diese Division "nicht aufgeht", so ist $P_0(x)$ der verbleibende Rest.

z.B.: Wir wollen die rationale Funktion $\boxed{R(x) = \dfrac{x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 2x^3}{x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2}}$ untersuchen:

wenn man im Zähler x^3 und im Nenner x^2 ausklammert, kann man erkennen, dass beide bei $x = 1$ eine Nullstelle haben: Polynomdivision liefert:

$(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) : (x - 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$ und

$(x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x + 2) + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1)$; das ergibt:

$$R(x) = \frac{x^3(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2)}{x^2(x^4 + x^3 - x^2 + x - 2)} = \frac{x^3(x-1)(x^2+1)(x-2)}{x^2(x-1)(x^2+1)(x+2)} = \frac{x(x-2)}{x+2} = \frac{x^2 - 2x}{x+2}\,.$$

Mit einer weiteren Polynomdivision kann nun noch ein ganz–rationaler Term abgespalten werden:

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x \quad : (x+2) \quad = x - \dfrac{4x}{x+2}\,; \\ \underline{x^2 + 2x} \\ \quad -4x \end{array}$$

wir haben erhalten: $\boxed{R(x) = \dfrac{x(x-2)}{x+2} = x - \dfrac{4x}{x+2}}$:

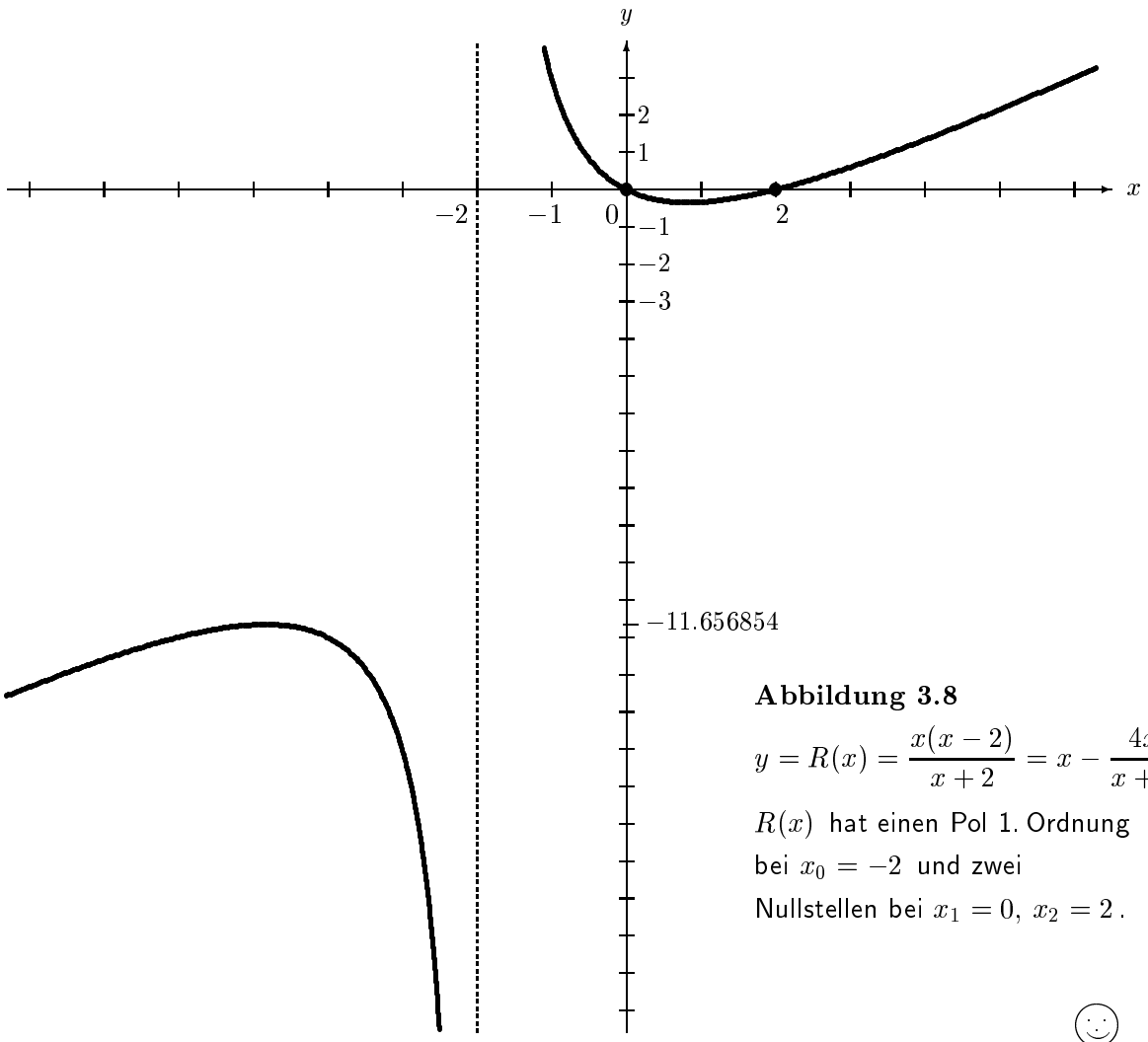


Abbildung 3.8

$y = R(x) = \dfrac{x(x-2)}{x+2} = x - \dfrac{4x}{x+2}$:

$R(x)$ hat einen Pol 1. Ordnung bei $x_0 = -2$ und zwei Nullstellen bei $x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

Die einfachste echt gebrochen–rationale Funktion ist die Funktion $\boxed{r(x) = \dfrac{1}{x}}$:

sie hat keine Nullstellen und hat einen einfachen Pol an der Stelle $x_0 = 0$:

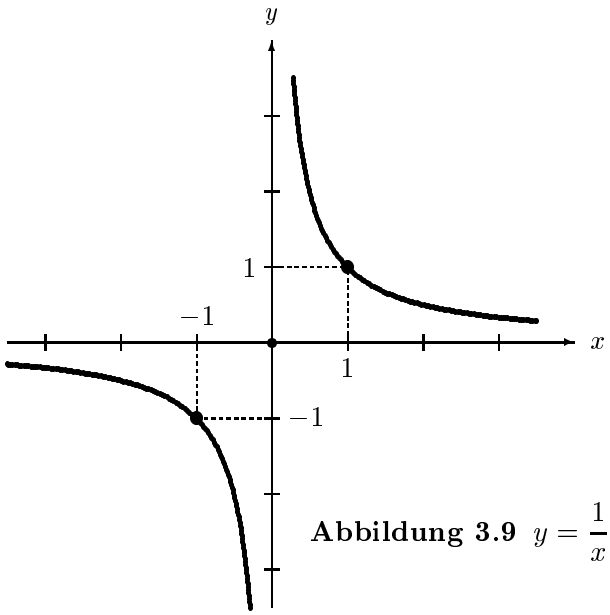


Abbildung 3.9 $y = \dfrac{1}{x}$

3.E Übungsaufgaben zu Lektion 3.

Ü 3.1 ○

Finde die Gleichungen (möglichst in der **Normalform** $y = mx + b$) der folgenden sechs Geraden:

$g_1 = \Big[$Gerade durch den Punkt $P_0(3 \mid 2)$ vom Anstieg $-1/2$ $\Big]$,

$g_2 = \Big[$Gerade durch die beiden Punkte $P(3 \mid 2)$ und $Q(-1 \mid 4)$ $\Big]$,

$g_3 = \Big[$Gerade, welche die x–Achse bei $x_0 = 7$ und die y–Achse bei $y_0 = 3.5$ schneidet$\Big]$,

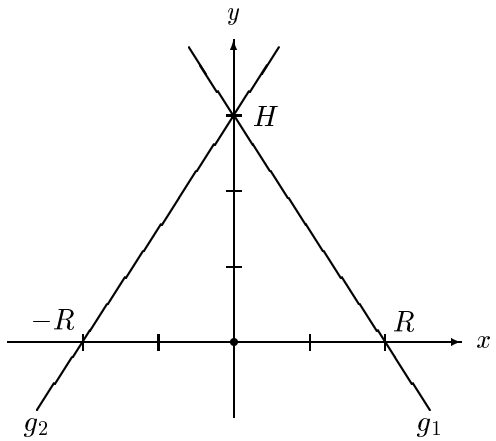
$g_4 = \Big[$Gerade durch $\bar{P}(3 \mid 2)$, die mit der pos. x–Achse den Winkel $\varphi = \pi/3$ einschließt$\Big]$,

$g_5 = \Big[$Parallele zur x–Achse durch den Punkt $R(7 \mid -2)$ $\Big]$ und

$g_6 = \Big[$Parallele zur y–Achse durch denselben Punkt $R(7 \mid -2)$ $\Big]$.

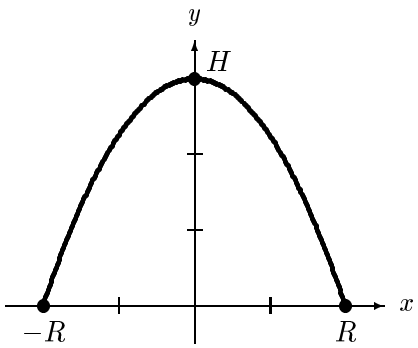
Ü 3.2 !!

Schreibe die Gleichungen der beiden skizzierten Geraden in der Form $y = mx + b$ und bestimme im Fall $H = 3$, $R = 2$ jeweils den Winkel φ_1 bzw. φ_2 , den sie mit der positiven x–Achse einschließen:



Ü 3.3 $\boxed{!!}$

Welche Gleichung hat der skizzierte Parabelbogen?:



Ü 3.4 $\boxed{!}$

Finde für die drei folgenden Parabeln jeweils die **Scheitelgleichung** $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, die Gleichung in der **allgemeinen Form** $y = ax^2 + bx + c$ und ggfs. die **Nullstellengleichung** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$P_1 = \Big[$Parabel mit dem Scheitel $S(1 \mid 3)$ und einer Nullstelle $N_1(-2 \mid 0)\Big]$,

$P_2 = \Big[$Parabel durch die drei Punkte $A(-3 \mid 0)$, $B(0 \mid -0.3)$, $C(2 \mid 0.5)\Big]$,

$P_3 = \Big[$Parabel mit dem Scheitel $S(1 \mid -3)$ durch den Punkt $Q(-1 \mid -7)\Big]$.

Ü 3.5 $\boxed{!!}$

Welche Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) hat das Polynom $P(x) = x^3 - 3x + 2$ (*eine* Nullstelle kann man raten!) ? Zerlege $P(x)$ in Linearfaktoren.

Ü 3.6 $\boxed{*}$

Bestimme ein Polynom $Q(x)$ so, dass

$-6x^7 + 13x^6 - 11x^5 + 19x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 2 = (3x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot Q(x)$.

Ü 3.7 $\boxed{!!}$

Schreibe die rationale Funktion $R(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - x - 1}$ als Summe

$R(x) = G(x) + \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)}$ einer ganzrationalen Funktion $G(x)$ und einer echt gebrochen–rationalen Funktion $R_0(x) = \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)}$ (in gekürzter Form!) und versuche, alle Nullstellen und Pole (einschließlich Vielfachheit) von $R(x)$ zu finden.

Ü 3.8 $\boxed{**}$

Von zwei gleichgroßen Gläsern ist das eine nahezu bis zum Rand mit Rotwein, das andere mit der gleichen Menge Wasser gefüllt.

Wenn man nun zunächst einen Löffel voll Flüssigkeit aus dem einen Glas in das andere Glas umfüllt und gut umrührt, und dann aus dem zweiten Glas ebensoviel Flüssigkeit wieder herausnimmt und in das erste Glas zurück füllt, enthalten beide Gläser offenbar die gleiche Menge Flüssigkeit.

Mit welchem der beiden Gläser muss man beginnen, damit sich hinterher im Wasserglas nicht mehr Rotwein befindet als Wasser im Rotweinglas?

4 Exponentialfunktion und Logarithmus.

Stichpunkte: a^x für $a > 0$, insbesondere e^x; allgemeine Logarithmen $\log_a x$, besonders der dekadische Logarithmus $\lg x$ und der natürliche Logarithmus $\ln x$; Schaubilder und die gängigsten Rechenregeln für Exponentialfunktionen und Logarithmen.

4.A Allgemeine Exponentialfunktion.

4.1 Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, ist die Funktion

$\boxed{f(x) = a^x \ , \quad x \in \mathbb{R}}$ die **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Unter den Exponentialfunktionen ist diejenige mit der Basiszahl e (e = **Euler'sche Zahl** $= 2.71828\ldots$) für Theorie und Praxis die Wichtigste; bei ihr lässt man den Zusatz "zur Basis e" meistens weg oder nennt sie (manchmal) auch die **natürliche Exponentialfunktion**:

4.2 Mit der **Euler'schen Zahl** $e = 2.71828\ldots$ ist

$\boxed{f(x) = e^x \ , \quad x \in \mathbb{R}}$ die **(natürliche) Exponentialfunktion**.

4.3 **Schreibweise**: für $a > 0$ und beliebige $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x} \ .$$

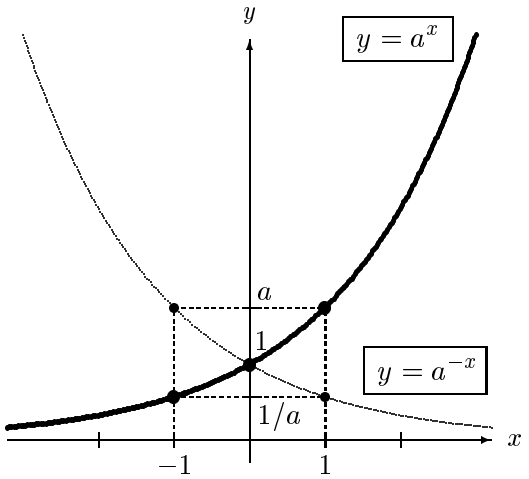


Abbildung 4.1
$y = a^x$ und $y = a^{-x}$
für $a > 1$
(Skizze: $a = 7/4$)

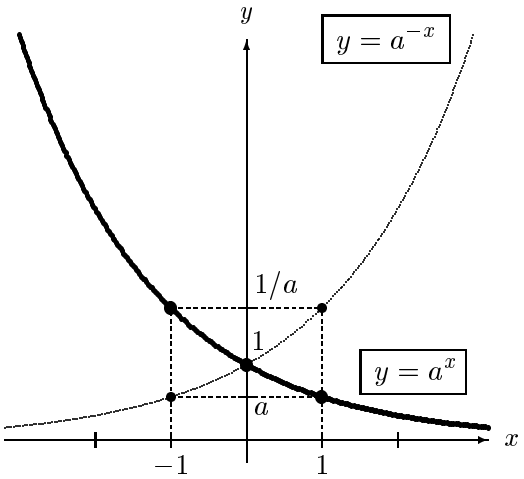


Abbildung 4.2
$y = a^x$ und $y = a^{-x}$
für $0 < a < 1$
(Skizze: $a = 4/7$)

Der Skizze kann man entnehmen:

4.4 Die Graphen der beiden Funktionen $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ sind zueinander spiegelsymmetrisch bzgl. der y–Achse,

4.5 für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $\boxed{a^x > 0}$ und

4.6
$$\begin{array}{lcl} a > 1 & \Rightarrow & a^x \to \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to +\infty \\ 0 & \text{für } x \to -\infty \end{cases} \\ 0 < a < 1 & \Rightarrow & a^x \to \begin{cases} 0 & \text{für } x \to +\infty \\ +\infty & \text{für } x \to -\infty \end{cases} \end{array}.$$

4.B Allgemeiner Logarithmus.

In dem selben Sinne, wie das Quadratwurzelziehen die Umkehrung des Quadrierens ist: für $x > 0$ ist $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x$, definieren wir:

Der **Logarithmus zur Basis** $a > 0$ ist die **Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis** a:

4.7 für $x > 0$ ist

$\boxed{y = \log_a x} \Leftrightarrow \boxed{a^y = x}$

Da $a^y > 0$ ist für alle $y \in \mathbb{R}$, ist die Logarithmusfunktion

$\boxed{y = \log_a x}$

nur für $x > 0$ ***definiert!***:

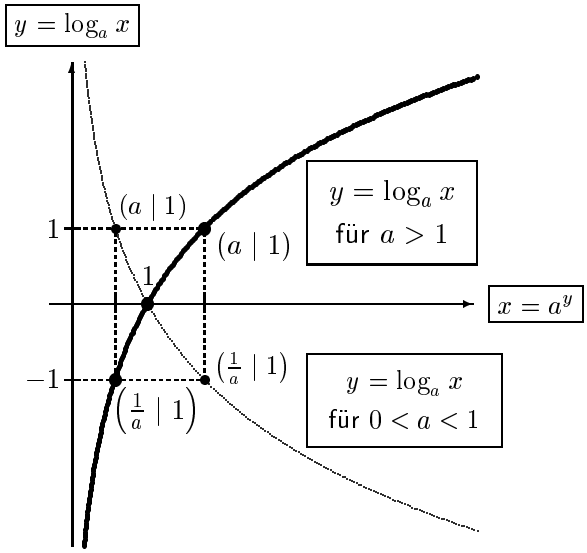


Abbildung 4.3 Logarithmus zur Basis $a > 0$ $(a \neq 1)$

4.8 Aufgrund der Definition: $\boxed{y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; a^y = x}$ erhält man die **Logarithmusfunktion** $y = \log_a x$:

- ***rechnerisch*** durch **Vertauschen** von x und y in der Gleichung $y = a^x$ und anschließendem **Auflösen der Gleichung** $x = a^y$ nach y, und
- ***graphisch*** durch **Spiegelung** des Graphen von $y = a^x$ an der Winkelhalbierenden $y = x$ (denn das bewirkt je gerade die Vertauschung von x und y):

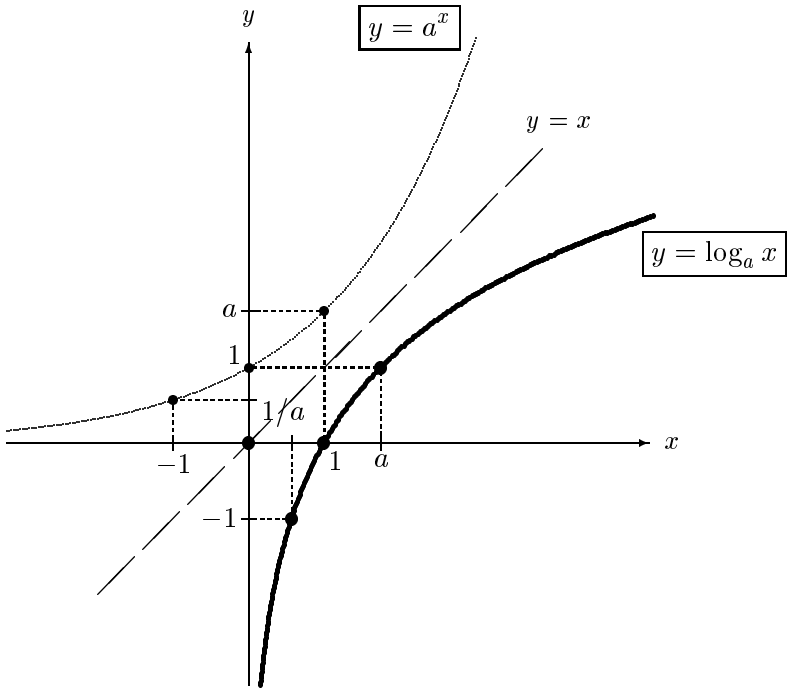


Abbildung 4.4 $y = a^x$ und $y = \log_a x$ (für $a > 1$)

Unter den Logarithmusfunktionen sind diejenigen mit der Basiszahl e (Euler'sche Zahl) und der Basiszahl $a = 10$ die Wichtigsten:

4.9 Den Logarithmus zur Basis e nennt man den **natürlichen Logarithmus** und bezeichnet ihn mit $\ln x$ statt $\log_e x$:

$\boxed{\ln x = \log_e x}$ **natürlicher Logarithmus** : $\boxed{y = \ln x} \Leftrightarrow \boxed{e^y = x}$.

4.10 Der Logarithmus zur Basis $a = 10$ ist der **dekadische** oder **Brigg'sche Logarithmus** (der **"Zehner–Logarithmus"**); wir bezeichnen ihn mit $\lg x$:

$\boxed{\lg x = \log_{10} x}$ **dekadischer Logarithmus** : $\boxed{y = \lg x} \Leftrightarrow \boxed{10^y = x}$.

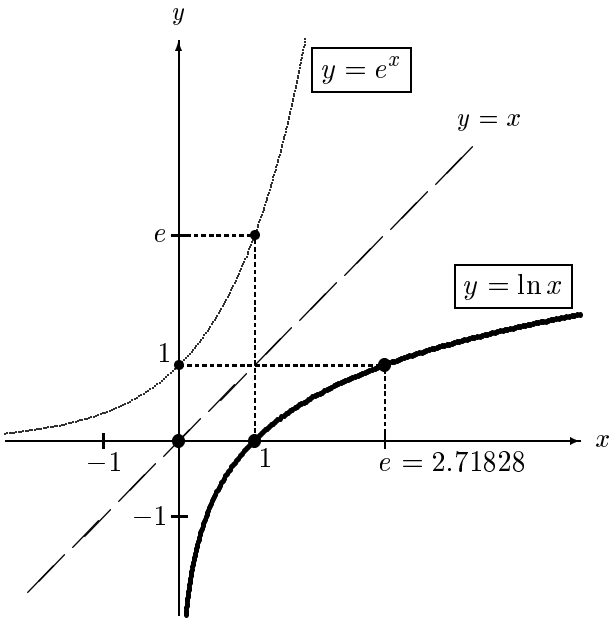
Beachte : die gebräuchlichen Bezeichnungen für den natürlichen und den dekadischen Logarithmus sind ***nicht einheitlich*** :

auf den Taschenrechnern und in älteren Schul–Formelsammlungen wird der ***dekadische*** Logarithmus $\lg x$ mit $\log x$ (ohne Basiszahl) bezeichnet, während die Mathematiker es vorziehen, den ***natürlichen*** Logarithmus $\ln x$ mit $\log x$ zu bezeichnen!

Wir werden — damit keine Missverständnisse aufkommen — die Bezeichnungen $\lg x$ und $\ln x$ verwenden und bei Bedarf bzw. im Zweifelsfall die Basiszahl des Logarithmus' angeben!

Naturwissenschaftler und Mathematiker verwenden bevorzugt die ***natürliche Exponentialfunktion*** $y = e^x$ und den ***natürlichen Logarithmus*** $y = \ln x$. Wir wollen diese wegen ihrer großen Bedeutung nocheinmal skizzieren: (beachte, dass die beiden Kurven auseinander hervorgehen, wenn man sie an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegelt, dass stets $e^x > 0$ ist und dass demzufolge der natürliche Logarithmus $y = \ln x$ nur für $x > 0$ definiert ist!)

Abbildung 4.5
Natürliche Exponentialfunktion $y = e^x$
und natürlicher Logarithmus $y = \ln x$.



4.C Rechenregeln.

Zunächst folgt aus der Definition: $\boxed{y = \log_a x} \Leftrightarrow \boxed{a^y = x}$ sofort:

4.11

Für alle $a > 0$ $(a \neq 1)$ ist

$\boxed{\log_a (a^y) = y}$ für alle $y \in \mathbb{R}$, und $\boxed{a^{(\log_a x)} = x}$ für alle $x > 0$.

Es gelten die üblichen **Rechenregeln** für die Exponentialfunktionen (die von der Schule her unter dem Namen "Potenzregeln" bekannt sein dürften) und die sich aus ihnen ergebenden Regeln für das Rechnen mit Logarithmen (für $a,\ x > 0$):

4.12

$1a:\quad a^0 = 1$	$1b:\quad \log_a 1 = 0$
$2a:\quad a^1 = a$	$2b:\quad \log_a a = 1$
$3a:\quad a^{x+y} = a^x\, a^y$	$3b:\quad \log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$
$4a:\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$4b:\quad \log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$
$5a:\quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$	$5b:\quad \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$6a:\quad \left(a^x\right)^b = a^{bx}$	$6b:\quad \log_a x^b = b\,\log_a x$

!

Dass sich die jeweils in einer Zeile stehenden Regeln *entsprechen*, ist einfach einzusehen:

Unmittelbar aus der Definition des Logarithmus' folgt:
$1:\ \log_a 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = a^0$ und $2:\ \log_a a = 1 \Leftrightarrow a = a^1$.

Für die weiteren Regeln sei $X := \log_a x$ (d.h. $a^X = x$) und $Y := \log_a y$ (d.h. $a^Y = y$):

Zu 3: $x\,y = a^X\,a^Y = a^{(X+Y)} \Rightarrow \log_a x\,y = X + Y = \log_a x + \log_a y$,
zu 4: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a^X} = a^{-X} \Rightarrow \log_a \dfrac{1}{x} = -X = -\log_a x$,
zu 5: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^X}{a^Y} = a^{X-Y} \Rightarrow \log_a \dfrac{x}{y} = X - Y = \log_a x - \log_a y$,
zu 6: $x^b = \left(a^X\right)^b = a^{bX} \Rightarrow \log_a x^b = bX = b\,\log_a x$. ∎

Beachte, dass sich aus $6a$ insbesondere die Regel

4.13 $\boxed{a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}}$ für $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$,

ergibt: denn: $a^{\frac{1}{m}\,m} = a^1 = a \Rightarrow a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, und dass sich $6b$ auch in der Form: $x^b = a^{b\,\log_a x}$ schreiben lässt: das gilt für alle $a > 0$, insbesondere auch mit $a = e$:

4.14 $\boxed{x^b = e^{b\,\ln x}}$: so *definieren* die Mathematiker beliebige "krumme" Potenzen x^b !

Schließlich ist noch eine Regel von Interesse, die beliebige Logarithmen z.B. auf den natürlichen Logarithmus (oder, bei Bedarf, auf den dekadischen Logarithmus) zurückführt (damit lassen sich dann auch beliebige Logarithmen mit dem Taschenrechner ausrechnen):

4.15 $$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\lg x}{\lg a}}$$

denn: für *beliebige* $b > 0$ gilt:

$y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; x = a^y \overset{(11)}{=} b^{\log_b a^y} \overset{(12,6b)}{=} b^{y \log_b a} \;\Leftrightarrow\; \log_b x = y \log_b a$, also: $\log_a x = y = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$:

Regel 15 erhält man hieraus mit $b = e$ bzw. $b = 10$. ∎

Einige **Rechenbeispiele** :

$\log_5 25 = 2$, denn $5^2 = 25$,

$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$,

$\log_5 25 = \dfrac{\ln 25}{\ln 5} = \dfrac{\ln(5 \cdot 5)}{\ln 5} = \dfrac{\ln 5 + \ln 5}{\ln 5} = 2$,

$\log_5 25 = \dfrac{\lg 25}{\lg 5} = \dfrac{\lg 5^2}{\lg 5} = \dfrac{2 \lg 5}{\lg 5} = 2$;

$\log_6 48 = \dfrac{\ln 48}{\ln 6} \overset{\text{TR}}{=} 2.160558422$ (Probe: $6^{2.160558422} = 48$).

Die Verwendung des von der Schule bekannten **dekadischen Logarithmus'** ist besonders dann angebracht, wenn Funktionen untersucht werden sollen, deren Wertebereich zugleich betragsmäßig sehr große und sehr kleine Werte umfasst (man kann z.B. — wie wir noch sehen werden — logathmisches Koordinatenpapier verwenden, um solche Funktionen zu skizzieren), oder wenn betragsmäßig sehr große und sehr kleine Zahlen zu multiplizieren sind, wie z.B.:

$(5000)^{500} = 5^{500} \cdot (10^3)^{500} = 10^{500 \lg 5 + 3 \cdot 500} = 10^{1849.485002\ldots} = 10^{0.48500216\ldots} \cdot 10^{1849} =$
$3.054936307 \cdot 10^{1849}$, oder: $(5000)^{500} \cdot 9^{-1940} = 10^{500 \lg 5 + 1500 - 1940 \lg 9} = 10^{-1.74546615} = 0.017969411$.

4.D Übungsaufgaben zu Lektion 4.

Ü 4.1 !!

Löse die folgenden Gleichungen nach x auf:

(i) $\ln|x| = 3.9$, (ii) $e^{(3x+1)} = 2.14$, (iii) $3^x \cdot 4^x = 5^{x+1}$, (iv) $3 \ln x^2 + 2 \ln x^3 = 12$,
(v) $e^{-1/x^2} = 1/2$.

Ü 4.2 ○

Bestimme (exakt und *ohne* Taschenrechner!) die Zahlenwerte:

$A = \ln\left(\dfrac{1}{e}\right)^3$, $B = e^{3 \ln 4}$, $C = \dfrac{\ln 32}{\ln 16}$, $D = \log_7 5 \cdot \log_5 49$,

Ü 4.3 $\boxed{!}$

Löse die vier Gleichungen nach y auf:
(i) $x = \ln \dfrac{1}{y+3} - 1$ (ii) $x = 2 - 2^{-y}$, (iii) $x = \log_{1/e}\left(\dfrac{1}{y}\right)$, (iv) $x = \log_{1/y}\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

Ü 4.4 $\boxed{!}$

Gibt es eine Zahl $\eta > 0$ so, dass $\ln x = \lg\left(x^{\eta}\right)$ für alle $x > 0$ und eine Zahl $\lambda > 0$ so, dass $10^x = e^{\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Ü 4.5 $\boxed{!!}$

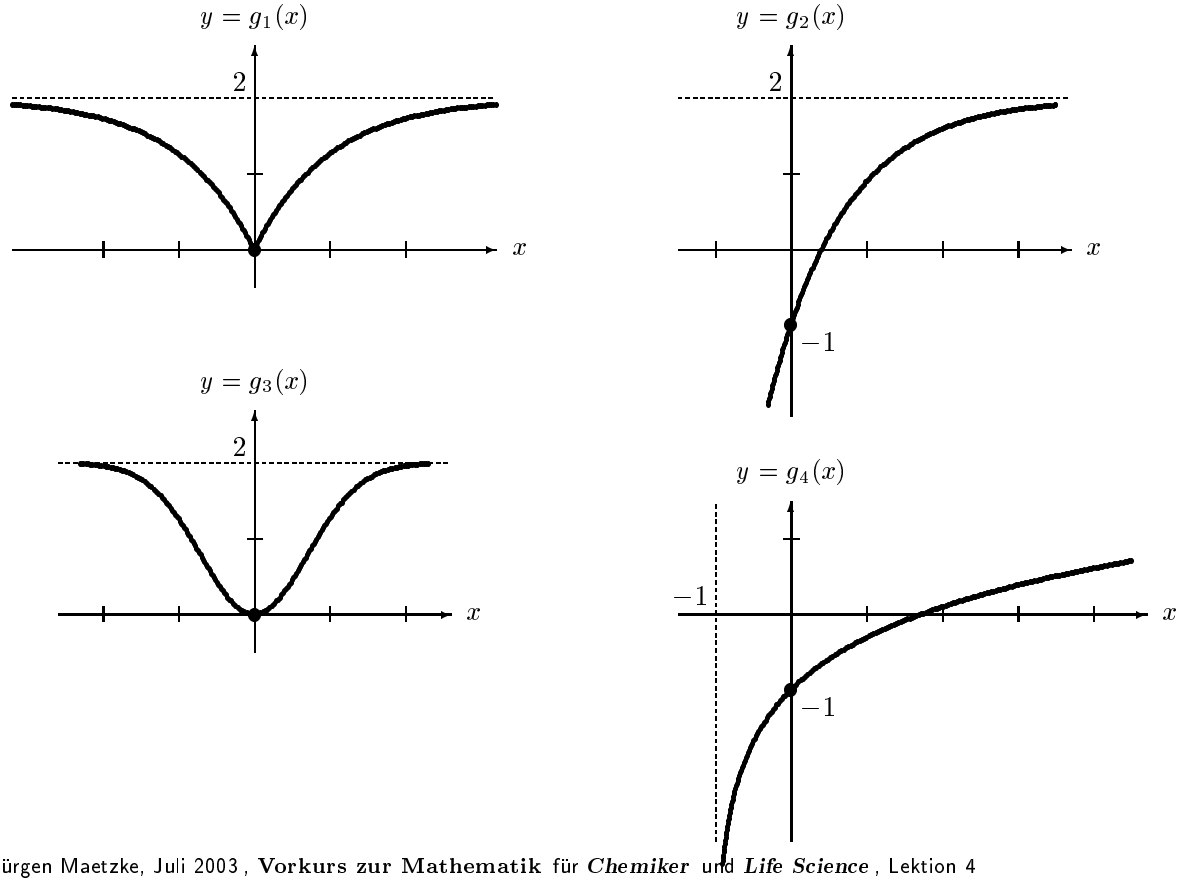
Skizziere (ungefähr und *ohne* Wertetabelle!) die Kurven:
$y = f_1(x) = e^{-|x|}$, $y = f_2(x) = 1 - e^{-x}$, $y = f_3(x) = e^{-x^2}$, $y = f_4(x) = \ln|x|$,
$y = f_5(x) = \left|\ln \dfrac{1}{1-x}\right|$, $y = f_6(x) = \log_{1/2} x^2$.

Ü 4.6 $\boxed{*}$

Versuche, mit Hilfe einer Skizze näherungsweise die Lösungen der Gleichung $e^x - 2 = \ln(x+2)$ herauszufinden.

Ü 4.7 $\boxed{!}$

Welche Funktionen könnten durch die folgenden Schaubilder dargestellt sein?:



Ü 4.8 $\boxed{*}$

Bestimme die Zahl $Z = 1234^{-5678}$ mit einer Genauigkeit von "einigen" Tausend Stellen hinter dem Komma.

Ü 4.9 $\boxed{!}$

Für den radioaktiven Zerfall gilt das statistische Zerfallsgesetz $\boxed{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}}$; hierbei bezeichnet $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t und N_0 die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atome; die "Zerfallskonstante" λ ist eine Materialkonstante.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Zerfallskonstenten λ und der Halbwertszeit t_h (das ist die Zeit, nach der etwa die Hälfte der radioaktiven Substanz zerfallen ist)?

Man kann dieses Zerfallsgesetz zur näherungsweisen Altersbestimmung verwenden: von einem Gegenstand, der eine radioaktive Substanz mit einer Halbwertszeit von 1590 [Jahren] enthält, wird behauptet, dass er aus der Gotik (13.– 15. Jahrh.) stammt: ist diese Zeitangabe glaubhaft, wenn Proben ergeben, dass von der zerfallenden radioaktiven Substanz bisher etwa $5\,\%$ zerfallen sind?

5 Folgen und Konvergenz.

Stichpunkte: Bildungsgesetz einer Folge, allgemeines Glied: explizit und rekursiv definierte Folge; Nullfolgen, konvergente und divergente Folgen; eigentliche und uneigentliche, ein– und zweiseitige Grenzwerte von Funktionen, Zusammensetzungsregeln für Grenzwerte, unbestimmte Formen.

5.A Zum Begriff einer Folge.

Eine ***(Zahlen–) Folge*** ist zunächst nur eine beliebige Aufeinanderfolge von gewissen Elementen einer (Zahlen–) Menge:

$$a\,,\ b\,,\ c\,,\ d\,,\ \ldots\,,$$

also eine (Zahlen–) Menge, deren Elemente einfach hintereinander geschrieben werden. Man nennt diese Elemente die ***Glieder*** der Folge.

Wir werden hier nur ***reelle Zahlenfolgen*** betrachten, deren Glieder ***reelle Zahlen*** sind.

Um die Reihenfolge festzuhalten, in der die Glieder der Folge nebeneinander angeordnet sind, kann man sie durchnumerieren; wenn man die Numerierung den natürlichen Zahlen $1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,\ldots$ entsprechend vornimmt:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a & , & b & , & c & , & d & , & \ldots \\ a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & \ldots\,, \end{array}\right\} \qquad \text{mit } a_1 = a\,,\ a_2 = b\,,\ a_3 = c\,,\ a_4 = d\,,\ \ldots\,,$$

kann man auch sagen:

5.1 eine (reelle) ***Zahlenfolge*** $(a_n)_{\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch kurz: $a_n = \ldots\,,\ n \in \mathbb{N}$, ist eine

$$\boxed{\textbf{\textit{Funktion}} \quad n \mapsto a_n \ \ (n \in \mathbb{N})}\,,$$

von der Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ in die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$, durch die jeder natürlichen Zahl n eine gewisse Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird:

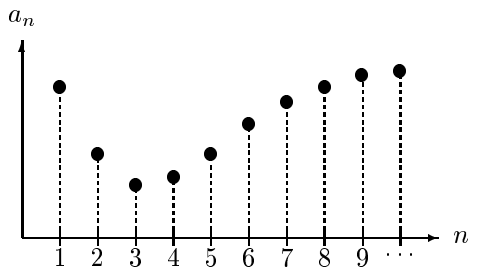


Abbildung 5.1 Folge $\mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto a_n$

Das allgemeine Glied a_n wird meistens durch eine Vorschrift, d.h. durch ein ***Bildungsgesetz*** gegeben. Wir unterscheiden zwischen einem ***expliziten*** und einem ***rekursiven*** Bildungsgesetz:

bei einem ***expliziten Bildungsgesetz*** sind die Folgenglieder durch eine direkte Vorschrift

$$\boxed{n \mapsto a_n\,,\ n \in \mathbb{N}}$$

gegeben, während bei einem ***rekursiven Bildungsgesetz*** die Glieder der Folge nur implizit durch eine Vorschrift der Art

$$\boxed{a_n\ =\ \text{Funktion von}\ \Big(a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\Big)}$$

gegeben sind, aus dem man (manchmal, in "gutartigen" Fällen) ein explizites Bildungsgesetz herleiten kann.

z.B.:

(a) Expizit definierte Zahlenfolgen:

1. $\boxed{a_n = 2n\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0}$: $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$ (die *geraden* Zahlen aus $\mathbb{N}_0$),

2. $\boxed{a_n = 2n+1\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0}$: $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$ (die *ungeraden* Zahlen aus $\mathbb{N}$),

3. $\boxed{a_n = (-1)^n\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0}$: $+1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ \ldots$ (*alternierende* Folge),

4. $\boxed{a_n = 2^{-n}\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0}$: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$ (*geometrische* Folge),

5. $\boxed{a_n = 3^n\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0}$: $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots$ (*geometrische* Folge),

6. $\boxed{a_0 = 1\,,\ a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdots n\,,\ \ n \in \mathbb{N}}$: $1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ \ldots$ (n-**Fakultät**).

(b) Rekursiv definierte Zahlenfolgen:

1. $\boxed{a_0 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2\,,\ \ n \in \mathbb{N}}$: $a_1 = 1+2 = 3\,,\ a_1 = 3+2 = 5\,,\ a_3 = 5+2 = 7\,,\ \ldots$:

   das sind wieder die *ungeraden* Zahlen $\boxed{a_n = 2n+1\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0}$,

2. $\boxed{a_0 = 1,\ a_n = \alpha \cdot n\, a_{n-1}\,,\ \ ; n \in \mathbb{N}}$: $a_1 = \alpha \cdot 1 \cdot 1\,,\ a_2 = \alpha^2 \cdot 1 \cdot 2\,,\ a_3 = \alpha^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\,,\ \ldots$:

   explizit: $\boxed{a_n = \alpha^n \cdot n!\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0}$,

3. $\boxed{a_0 = 1\,,\ a_1 = 1\,,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,,\ \ n \in \mathbb{N}}$: $a_2 = 1+1 = 2\,,\ a_3 = 2+1 = 3\,,$

   $a_4 = 3+2 = 5\,,\ a_5 = 5+3 = 8\,,\ a_6 = 8+5 = 13\,,\ \ldots$: das ist eine ***Fibonacci–Folge*** mit einem ziemlich "unhandlichen" expliziten Bildungsgesetz.

5.B Konvergente Folgen.

5.2 Eine Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$, deren Glieder a_n sich mit wachsendem n immer mehr dem Wert 0 nähern, nennt man eine **Nullfolge** und man schreibt und sagt hierfür:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \ \ (n \to \infty) \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{array}\right\} : \quad \begin{array}{l} a_n \ \textbf{konvergiert} \ \text{(oder } \textbf{strebt}\text{) gegen } 0 \text{ für } n \to \infty, \\ \text{die Folge } (a_n)_{\mathbb{N}} \text{ hat den } \textbf{Grenzwert} \ \text{(oder } \textbf{Limes}\text{) } 0. \end{array}$$

z.B.:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty) \ : \ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \ldots \to 0$$

$$a_n = 2^{-n} \to 0 \ \ (n \to \infty) \ : \ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots \to 0$$

Auch wenn diese Definition für sich spricht und anschaulich einleuchtet (und für unsere Bedürfnisse völlig ausreicht), formulieren die Mathematiker etwas vorsichtiger:

$(a_n)_{\mathbb{N}}$ ist eine **Nullfolge**, wenn es zu jeder (beliebig *kleinen*) Schranke $\varepsilon > 0$ einen Index n_ε so gibt, dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle Indices $n \geq n_\varepsilon$:

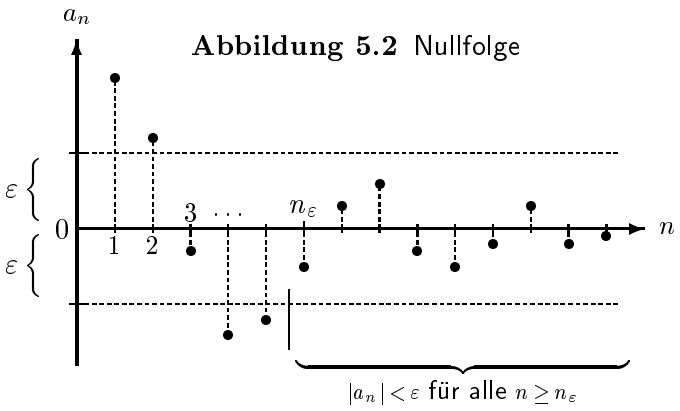


Abbildung 5.2 Nullfolge

5.3 Offenbar nähern sich die Glieder a_n einer Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ genau dann einem gewissen (*endlichen*) Wert a, wenn die Abstände $|a_n - a|$ zwischen a_n und a immer kleiner werden, also eine Nullfolge bilden; man schreibt und sagt hierfür:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to a \ \ (n \to \infty) \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \end{array}\right\} : \quad \begin{array}{l} a_n \ \textbf{konvergiert} \ \text{(oder } \textbf{strebt}\text{) gegen } a \text{ für } n \to \infty, \\ \text{die Folge } (a_n)_{\mathbb{N}} \text{ hat den } \textbf{Grenzwert} \ \text{(oder } \textbf{Limes}\text{) } a. \end{array}$$

Genau dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für einen *endlichen* Wert a, wenn es zu jeder (beliebig *kleinen*) Schranke $\varepsilon > 0$ einen Index n_ε so gibt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle Indices $n \geq n_\varepsilon$,:

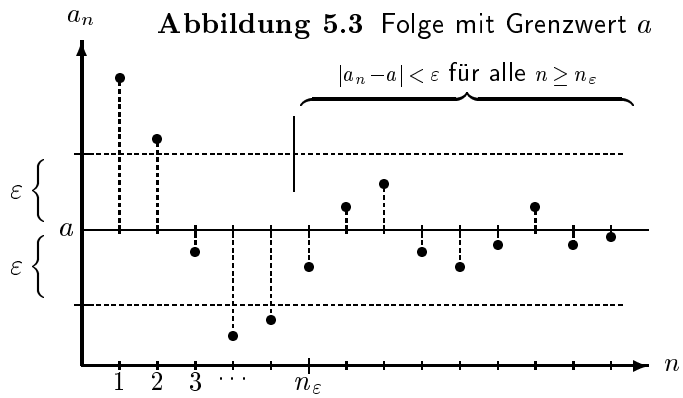


Abbildung 5.3 Folge mit Grenzwert a

5.4 Wenn die Glieder a_n der Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ mit wachsendem n *beliebig* groß werden (also größer als jede endliche Zahl), dann sagt man: die Folge a_n **konvergiert uneigentlich** gegen ∞ und schreibt: $a_n \to \infty \ (n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Entsprechend ist $(b_n)_{\mathbb{N}}$ eine **uneigentlich gegen** $-\infty$ **konvergente** Folge, wenn ihre Glieder mit wachsendem n kleiner werden als jede endliche negative Zahl; hiefür schreibt man: $b_n \to -\infty \ (n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Die Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert also **uneigentlich** gegen $+\infty$, wenn es zu jeder (beliebig *großen*) Zahl N einen Index n_N so gibt, dass $a_n > N$ für alle Indices $n \geq n_N$, und die Folge $(b_n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert **uneigentlich** gegen $-\infty$, wenn entsprechend $b_n < -N$ für alle $n \geq n_N$:

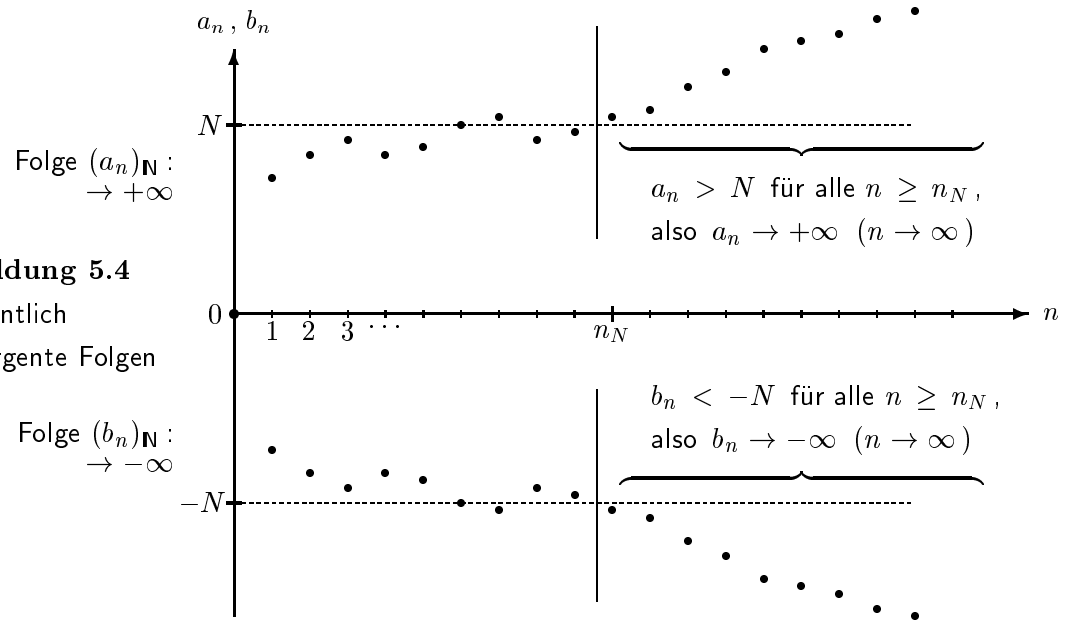


Abbildung 5.4
uneigentlich konvergente Folgen

Die **gebräuchlichen Bezeichnungen** für die verschiedenen Arten von konvergenten und nicht–konvergenten Folgen sind ziemlich seltsam:

5.5 Unter einer ***konvergenten*** Folge versteht man üblicherweise eine Folge, die einen *endlichen* Grenzwert besitzt, während alle anderen Folgen, also alle diejenigen Folgen, die *keinen endlichen* Grenzwert haben, ***divergent*** heißen; die ***uneigentlich konvergenten*** Folgen sind in diesem Sinne also ***divergent***, nur eben "nicht so schlimm" divergent; man sagt daher gelegentlich auch, sie sind (nur) ***bedingt divergent***.
Um zu betonen, dass eine ***konvergente*** Folge *"echt"* und nicht nur ***uneigentlich konvergiert***, sagt man auch, sie ist ***eigentlich konvergent***: ***eigentlich konvergente*** Folgen haben also einen *endlichen* Grenzwert.
Divergente Folgen, die *nicht* uneigentlich konvergent sind, nennt man ***wesentlich divergent*** (das sind die "schlimm"–divergenten Folgen).

z.B.:

1. $\boxed{a_n = \frac{n}{n+2}\,,\quad n \in \mathbb{N}_0}$: $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{9},\ \ldots\ \to\ 1$: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1}$,
(eigentlich) konvergent;

2. $\boxed{a_n = 1 + (-2)^{-n}\,,\quad n \in \mathbb{N}_0}$: $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{17}{16},\ \frac{31}{32},\ \ldots\ \to\ 1$: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + (-2)^{-n}\right) = 1}$,
(eigentlich) konvergent;

3. $\boxed{a_n = 2 - n\,,\quad n \in \mathbb{N}_0}$: $2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \ldots\ \to\ -\infty$, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} (2-n) = -\infty}$,
uneigentlich konvergent (= bedingt divergent) gegen $-\infty$;

4. $\boxed{a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\,,\quad n \in \mathbb{N}_0}$: $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \ldots\ \to\ 0$: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0}$,
Nullfolge, insbesondere ***(eigentlich) konvergent***,

5. $\boxed{a_n = 3^n\,,\quad n \in \mathbb{N}_0}$: $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots\ \to\ \infty$, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \infty}$,
uneigentlich konvergent (=bedingt divergent) gegen ∞;

6. $\left.\begin{array}{l} \boxed{a_n = (-1)^n\,,\quad n \in \mathbb{N}_0} \ :\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \pm\ldots \\ \boxed{a_n = (-2)^n\,,\quad n \in \mathbb{N}_0} \ :\ 1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \pm\ldots \end{array}\right\}$ ***wesentlich divergent***.

Man kann die drei letzten Beispiele zusammenfassen:

5.6 Die **geometrische Folge** $\boxed{a_n = q^n\,,\quad n \in \mathbb{N}_0}$: $1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots$ ist:

uneigentlich konvergent (= bedingt divergent) gegen $+\infty$ für $q > 1$,
konstant $=1$ (somit trivialerweise **eigentlich konvergent**) für $q = 1$,
eine ***Nullfolge*** für $|q| < 1$, und
wesentlich divergent für $q \le -1$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{für } q > 1 \quad (\text{s.o. } \underline{5.}) \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ 0 & \text{für } |q| < 1 \quad (\text{s.o. } \underline{4.}) \end{cases} \quad \textbf{existiert wesentlich nicht} \text{ für } q < -1\,.}$$

5.C Rechenregeln für Folgen.

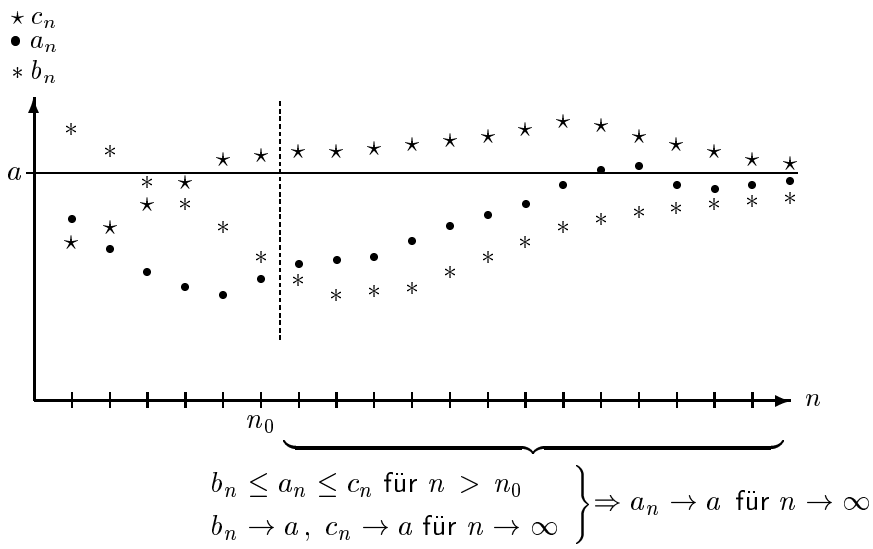
5.7 Jede ***konstante Folge*** $\boxed{a_n = a \text{ (für alle } n \in \mathbb{N})}$ ist trivialerweise **(eigentlich) konvergent** mit dem Grenzwert a: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a = a}$.

Manchmal sind schon einige Tricks nötig, um entscheiden zu können, ob eine Folge konvergiert und welches (gegebenfalls) der Grenzwert ist. Zu den "erfolgreichsten" Tricks dieser Art zählt der folgende **Vergleichstest** (auch **Majorantenkriterium** genannt): wenn eine Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ ab einem Index n_0 zwischen zwei Folgen $(b_n)_{\mathbb{N}}$, $(c_n)_{\mathbb{N}}$ "eingeklemmt" werden kann: $b_n \le a_n \le c_n$ für $n > n_0$, und wenn diese Folgen gegen *denselben* Grenzwert a konvergieren, dann bleibt der Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ garnichts anderes übrig, als ebenfalls gegen diesen Grenzwert a zu konvergieren:

5.8 **Vergleichstest für Folgen**:

Wenn $b_n \le a_n \le c_n$ für $n > n_0$, und wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ (eigentlich oder uneigentlich), dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Abbildung 5.5
Vergleichtest für Folgen:
ab dem Index n_0
ist die Folge a_n • • •
"eingeklemmt" zwischen
den beiden anderen Folgen



z.B.: Mit irgendeiner Zahl $\omega \in \mathbb{R}$ sei $\boxed{a_n = \dfrac{n - \sin(n\omega)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}}$. Dann ergibt sich:

$0 \le |a_n - 1| = \left|\dfrac{\sin(n\omega)}{n}\right| = \dfrac{|\sin(n\omega)|}{n} \le \dfrac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ (da stets $|\sin x| \le 1$), somit auch:

$a_n - 1 \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n - \sin(n\omega)}{n} = 1}$.

5.9

Wir sagen: eine Nullfolge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ nähert sich dem Wert 0

– ***von links***: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -0$ (oder $= 0-$), wenn $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ mit

$\boxed{a_n \leq 0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (***ab*** einem Index n_0),

– ***von rechts***: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +0$ (oder $= 0+$), wenn $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ mit

$\boxed{a_n \geq 0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (***ab*** einem Index n_0).

z.B.: $\dfrac{1}{n} \to +0$ und $\left(-\dfrac{1}{n}\right) \to -0$ für $n \to \infty$.

5.10

Für jede **Nullfolge** $(a_n)_{\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty\,.$$

z.B.: $\dfrac{1}{(1/n)} = n \to +\infty$ und $\dfrac{1}{(-1/n)} = -n \to -\infty$ für $n \to \infty$.

Die nächsten Regeln sind — was das Rechnen mit Folgen und deren Grenzwerten betrifft — von großem praktischen Nutzen:

5.11

Zusammensetzungsregeln:

Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ (eigentlich oder uneigentlich) existieren, dann existieren (eigentlich oder uneigentlich) auch die Grenzwerte:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \pm b_n\right) = a \pm b$ (*ausgenommen* die Fälle "$\infty - \infty$"),

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \cdot b_n\right) = a \cdot b$ (*ausgenommen* die Fälle "$0 \cdot \infty$"),

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ (*ausgenommen* die Fälle "$\dfrac{0}{0}$" und "$\dfrac{\infty}{\infty}$")

[zum Fall $b = 0$ siehe oben die letzte Nummer],

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$ (*ausgenommen* die Fälle "∞^0", "0^0", "1^∞").

Die ausgenommenen ***unbestimmten Formen*** müssen mit etwas verfeinerten Mitteln untersucht werden, z.B. mit der Regel von L'Hospital (das wird im Kurs geschehen).

Zunächst soll anhand einiger (weitgehend banaler) **Beispiele** demonstriert werden, dass sich die in der letzten Nummer ***ausgenommenen Fälle*** nicht so ohne weiteres entscheiden lassen:

1. $\boxed{\text{"}\,\infty-\infty\,\text{"}: a_n \to \infty\,,\ b_n \to \infty}$:

   $a_n = 2n\,,\ b_n = n \ \Rightarrow\ a_n - b_n = n \to \infty\,,$
   $a_n = n\,,\ b_n = 2n \ \Rightarrow\ a_n - b_n = -n \to -\infty\,,$
   $a_n = n + a + \frac{1}{n}\,,\ b_n = n \ \Rightarrow\ a_n - b_n = a + \frac{1}{n} \to a\,;$

2. $\boxed{\text{"}\,\infty\cdot 0\,\text{"}: a_n \to \infty\,,\ b_n \to 0}$:

   $a_n = n\,,\ b_n = \frac{a}{n} \ \Rightarrow\ a_n \cdot b_n = a$ (konstant),
   $a_n = n^2\,,\ b_n = \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ a_n \cdot b_n = n \to \infty\,,$
   $a_n = n\,,\ b_n = \frac{1}{n^2} \ \Rightarrow\ a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \to 0\,;$

3. $\boxed{\text{"}\,\frac{0}{0}\,\text{"}: a_n \to 0\,,\ b_n \to 0}$:

   $a_n = \frac{a}{n}\,,\ b_n = \frac{b}{n} \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (konstant),
   $a_n = \frac{1}{n}\,,\ b_n = \frac{1}{n^2} \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = n \to \infty\,,$
   $a_n = \frac{1}{n^2}\,,\ b_n = \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0\,,$

4. $\boxed{\text{"}\,\frac{\infty}{\infty}\,\text{"}: a_n \to \infty\,,\ b_n \to \infty}$:

   $a_n = a\cdot n\,,\ b_n = b\cdot n \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (konstant),
   $a_n = n^2\,,\ b_n = n \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = n \to \infty$
   $a_n = n\,,\ b_n = n^2 \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0\,;$

5. $\boxed{\text{"}\,\infty^{\,0}\,\text{"}: a_n \to \infty\,,\ b_n \to 0}$:

   $a_n = n^n\,,\ b_n = \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = \sqrt[n]{n^n} = n \to \infty\,,$
   $a_n = n\,,\ b_n = \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$ (s.u.),
   $a_n = n\,,\ b_n = \frac{\ln a}{\ln n}\ (a > 0,\ \neq 1) \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = n^{\frac{\ln a}{\ln n}} = n^{\log_n a} = a$ (konstant);

6. $\boxed{\text{"}\,0^{\,0}\,\text{"}: a_n \to 0\,,\ b_n \to 0}$:

   $a_n = \frac{1}{n}\,,\ b_n = \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = 1/\sqrt[n]{n} \to 1$ (s.u.),
   $a_n = \frac{1}{n^n}\,,\ b_n = \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = 1/\sqrt[n]{n^n} = \frac{1}{n} \to 0\,,$
   $a_n = \frac{1}{n}\,,\ b_n = -\frac{\ln a}{\ln n}\ (a > 0,\ \neq 1) \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = n^{\frac{\ln a}{\ln n}} = n^{\log_n a} = a$ (konstant);

7. $\boxed{\text{"}\,1^{\infty}\,\text{"}: a_n \to 1\,,\ b_n \to \infty}$:

   $a_n = 1$ (konstant), $b_n = n \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = 1$ (konstant),
   $a_n = (1 + \frac{1}{n})\,,\ b_n = n \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^n \to e$ (s.u. Übungsaufgabe 2), und hiermit schließlich:
   $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{-1}\,,\ b_n = n \ \Rightarrow\ a_n^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^{-n} \to \frac{1}{e}\,.$

Offensichtlich gilt:

5.12 Jede **Teilfolge** einer eigentlich oder uneigentlich konvergenten Folge ist eigentlich bzw. uneigentlich konvergent gegen denselben Grenzwert.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \cdots & a_n & \cdots & \cdots & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \; a \\ & & \| & & \| & & & \| & & & \| & & \\ & & b_1 & & b_2 & & & b_3 & \cdots & \cdots & b_k & \cdots & \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \; a \end{array}$$

Es folgen einige **Rechen– und Argumentationsbeispiele** (die auch übersprungen werden können):

8. $$a_n = \frac{6n^3 - \sqrt{2n^4 - 4n^2 + 17}}{4n^3 + 3n^2 - 5n + 26} = \frac{6 - \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^4} + \frac{17}{n^6}}}{4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{26}{n^3}} \to \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \;\; (n \to \infty),$$

9. $$\frac{-2n^2 + 4n - 17}{4n^3 + 3n^2 - 5n + 26} = \frac{-\frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{17}{n^3}}{4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{26}{n^3}} \to \frac{0}{4} = 0 \;\; (n \to \infty).$$

10. $$2 \pm \frac{1}{n} \to 2 \;\Rightarrow\; \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{2+\frac{1}{n}} \to 2^2 = 4 \;\; (n \to \infty).$$

11. $\boxed{\text{für beliebige } a > 0 \text{ ist } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$, denn mit: $\frac{1}{n} \ln a \to 0$ erhält man sofort:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln a} \to e^0 = 1 \;\; (n \to \infty).$$

12. Wir versuchen, für die rekursiv definierte Folge $\boxed{a_0 = \alpha,\; a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 1,\;\; n \in \mathbb{N}}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben) ein explizites Bildungsgesetz zu finden:

$$\left.\begin{array}{lcll} a_1 & = & \frac{\alpha}{2} + 1 & \\ a_2 & = & \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} + 1 & = \frac{\alpha}{2^2} + \frac{3}{2} \\ a_3 & = & \frac{\alpha}{8} + \frac{3}{2} + 1 & = \frac{\alpha}{2^3} + \frac{7}{4} \\ a_4 & = & \frac{\alpha}{16} + \frac{7}{8} + 1 & = \frac{\alpha}{2^4} + \frac{15}{8} \\ a_5 & = & \frac{\alpha}{32} + \frac{15}{16} + 1 & = \frac{\alpha}{2^5} + \frac{31}{16} \end{array}\right\}$$

usw.: man erkennt dass für $n \geq 1$ gilt:

$$\boxed{a_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \frac{\alpha}{2^n} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Damit haben wir *unabhängig* von α:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}.$$

13. Wenn man bereits *weiß*, dass eine rekursiv definierte Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ einen *endlichen (!)* Grenzwert a besitzt, kann man diesen meistens schon sofort aus der definierenden Beziehung erhalten, wenn man dort die Grenzwerte $a_n \to a$, $a_{n-1} \to a$, $a_{n-2} \to a$ $(n \to \infty)$ einsetzt. Z.B. ergibt sich aus der Beziehung $\boxed{a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 1, \quad n \in \mathbb{N}}$ der letzten Nummer: $a = \frac{a}{2} + 1$, also $a = 2$.

    Beachte aber, dass diese Argumentation nur dann zulässig ist, wenn die betrachtete Folge einen ***endlichen Grenzwert*** a ***besitzt***!:

    Sei z.B. $a_n = 2a_{n-1}+1$ (s. Übungsaufgabe Nr. 5). Wenn $a_0 > 0$ ist, ist offenbar $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, während sich aus der Beziehung $a = 2a + 1$ der Wert $a = -1$ ergäbe.

14. Wenn wir die Quotienten $q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ der ersten Glieder a_n der rekursiv durch:

    $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}}$ definierten **Fibonacci–Folge** betrachten:

    $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13,\ a_7 = 21,\ a_8 = 34,\ a_9 = 55,$
    $a_{10} = 89, \ldots,$ somit:

    $q_1 = 1,\ q_2 = \frac{2}{1} = 2,\ q_3 = \frac{3}{2} = 1.5,\ q_4 = \frac{5}{3} = 1.667,\ q_5 = \frac{8}{5} = 1.6,\ q_6 = \frac{13}{8} = 1.625,$
    $q_7 = \frac{21}{13} = 1.615,\ q_8 = \frac{34}{21} = 1.61905,\ q_9 = \frac{55}{34} = 1.617647,\ q_{10} = \frac{89}{55} = 1.618182, \ldots,$

    so stellen wir fest, dass die Folge $(q_n)_{\mathbb{N}}$ offensichtlich gegen eine Zahl q konvergiert, die in der Nähe der Zahl 0.618 liegt. Den genauen Wert bekommen wir dann aus der definierenden Beziehung: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ bzw. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$, d.h.: $q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}$: wenn wir hier den Grenzwert q einsetzen, ergibt sich: $q = 1 + \frac{1}{q}$, somit: $q^2 - q - 1 = 0$, wegen $q > 0$ also: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$: das ist die Zahl des **goldenen Schnittes**.

15. Bei der rekursiv durch: $\boxed{a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 2}$ definierten Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ ist die zuletzt verwendete Methode unbrauchbar: für $n \to \infty$ ist $\frac{1}{n(n+1)} \to 0$; wenn die Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ also einen Grenzwert a hat, dann ergibt sich aus dem *rekursiven* Bildungsgesetz nur die zwar richtige, aber wenig informative Gleichung: $a = a$.

    Allerdings ist ein *explizites* Bildungsgesetz einfach zu finden:

    $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2},\ a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3},\ a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots,$
    $a_{n-1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n},\ a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$

    Wenn wir noch die stets gültige Zerlegung: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ verwenden, ergibt sich:

    $a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$. ☺

5.D Grenzwerte von Funktionen.

5.13 Sei $x_0, a \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Eine Funktion $f(x)$ **konvergiert** (oder **strebt**) **eigentlich** oder **uneigentlich** gegen a für $x \to x_0$: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a}$ oder $\boxed{f(x) \to a \text{ für } x \to x_0}$,
wenn ***für jede*** (eigentlich bzw. uneigentlich) gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x_0$ gilt: $\boxed{f(x_n) \to a, \quad n \to \infty}$.

(Es **genügt nicht**, dass dies *für eine* Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ gilt: *wie immer* x gegen x_0 strebt, müssen die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ gegen a streben!)

5.14 Der **Vergleichstest** (**Majorantenkriterium**) 5.8 und die **Zusammensetzungsregeln** 5.11 gelten entsprechend auch für (eigentliche oder uneigentliche) **Grenzwerte von Funktionen**!

Zum Beispiel:

1. $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 - 7x^3 + 2x}{x^5 + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{2}{x^4}} = \frac{3 - 0 + 0}{1 + 0} = 3:$$

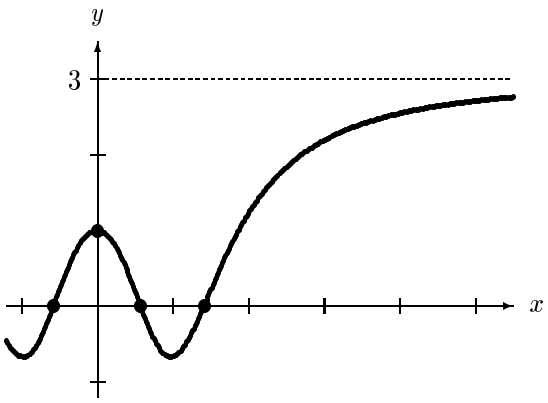


Abbildung 5.6 $y = \dfrac{3x^4 - 7x^2 + 2}{x^4 + 2}$

(In diesem, wie auch im nächsten Beispiel haben wir vereinbarungsgemäß (s. Nr. 3.19) zunächst gemeinsame Nullstellen von Zähler und Nenner *weggekürzt*!)

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} \overset{\text{Polynom-}}{\underset{\text{division}}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) = 3$:

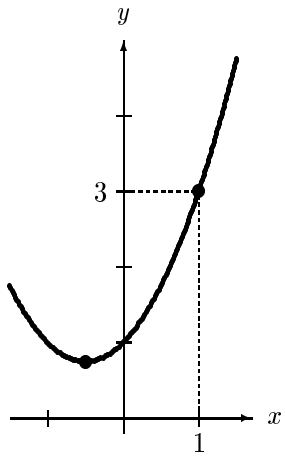


Abbildung 5.7 $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{|x|} = -1$, $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{|x|} = 1$ und

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{|x|} = -\infty$, denn:

für $x<0$ ist: $\dfrac{x-1}{|x|} = -1 + \dfrac{1}{x} \to$

$$\to \left\{ \begin{array}{lll} -\infty & \text{für} & x\to -0 \\ -1 & \text{für} & x\to -\infty \end{array} \right\},$$

und für $x>0$ ist: $\dfrac{x-1}{|x|} = 1 - \dfrac{1}{x} \to$

$$\to \left\{ \begin{array}{lll} -\infty & \text{für} & x\to +0 \\ 1 & \text{für} & x\to \infty \end{array} \right\}:$$

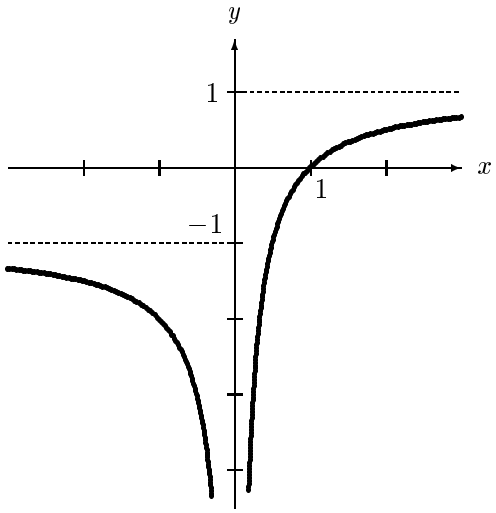


Abbildung 5.8 $y = \dfrac{x-1}{|x|}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, denn: $0 \le \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = \dfrac{|\sin x|}{|x|} \le \dfrac{1}{|x|} \to 0$ für $x\to \pm\infty$.

Um den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst die für $0 < x < \pi/2$ gültige Ungleichung $\sin x \le x \le \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (siehe Abb. 1.4):

aus: $x \le \dfrac{\sin x}{\cos x}$ folgt: $\cos x \le \dfrac{\sin x}{x}$, und aus: $\sin x \le x$ folgt: $\dfrac{\sin x}{x} \le 1$, insgesamt also:

$\boxed{\cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1}$. Das gilt zunächst nur für $0 < x < \pi/2$; da jedoch stets gilt:

$\dfrac{\sin(-x)}{(-x)} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ und $\cos(-x) = \cos x$ gilt diese Beziehung *für alle* $0 \ne x \in [-\pi/2\,,\,\pi/2]$, und da $\cos x \to 1$ für $x\to 0$, ergibt sich der gesuchte Grenzwert:

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$ (siehe Nr. 1.11 und Abb. 1.9):

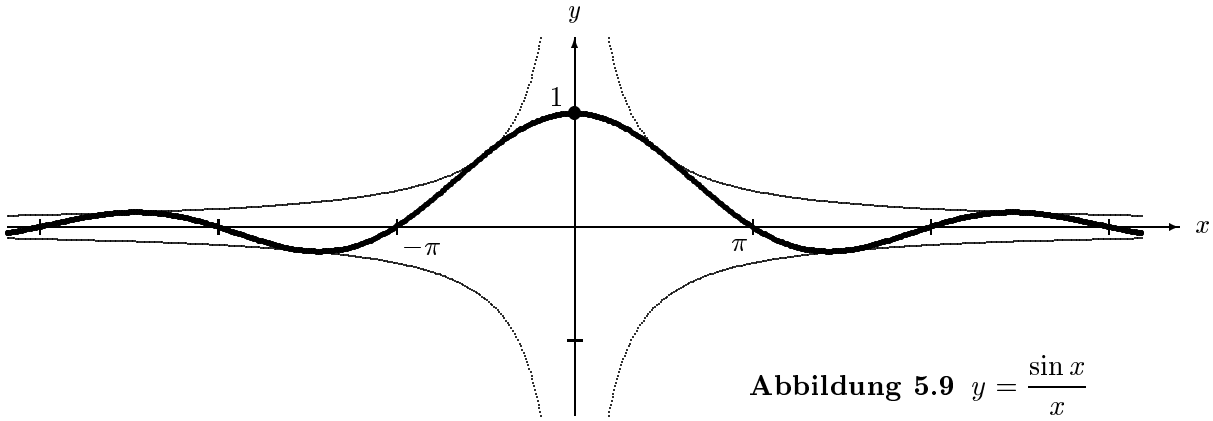


Abbildung 5.9 $y = \dfrac{\sin x}{x}$

5. Mit dem letzten Grenzwert haben wir insbesondere:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad \text{für } \textit{jede} \text{ Folge } (a_n)_{\mathbb{N}} \text{ mit } a_n \to 0 \ \ (n \to \infty)}\ .$$

Wir können diese Regel benutzen, um beispielsweise über den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n eines regelmäßigen n-Ecks im Grenzfall $n \to \infty$ den Umfang $U = U_\infty$ und Flächeninhalt $F = F_\infty$ eines Kreises zu erhalten:

wenn der Umkreis den Radius r hat, ist

$a_n = 2r\sin(\pi/n)$, folglich $U_n = n \cdot a_n = 2nr\sin(\pi/n)$ und

$h_n = r\cos(\pi/n)$, somit $F_n = n \cdot \frac{1}{2}\, a_n h_n = nr^2 \sin(\pi/n)\cos(\pi/n) \overset{(1.14)}{=} \frac{1}{2}\, nr^2 \sin(2\pi/n)$:

5.15

Ein **regelmäßiges n-Eck** mit dem Umkreisradius r hat den **Umfang**
$U_n = 2nr \cdot \sin(\pi/n)$
und den **Flächeninhalt**
$F_n = \frac{1}{2}\, nr^2 \cdot \sin(2\pi/n)$.

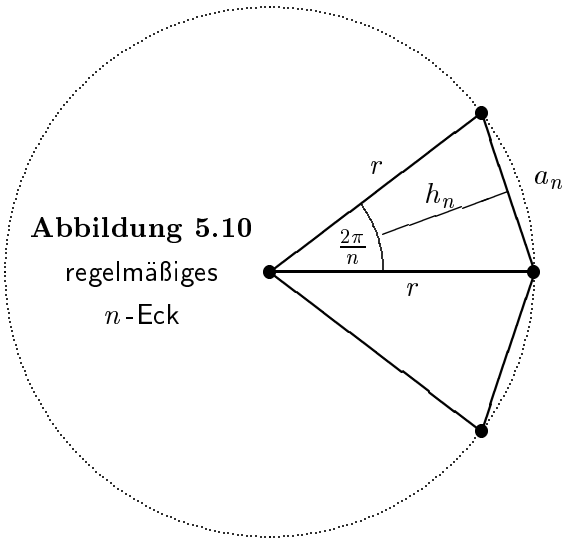


Abbildung 5.10
regelmäßiges
n-Eck

Im **Grenzfall** $n \to \infty$ ergibt sich hieraus für einen **Kreis vom Radius** r:

der **Kreisumfang**: $U = \lim\limits_{n\to\infty} (2nr \cdot \sin(\pi/n)) = 2\pi r \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = \underline{2\pi\, r}$,

und der **Flächeninhalt**: $F = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\, nr^2 \cdot \sin(2\pi/n)\right) = \pi r^2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} = \underline{\pi\, r^2}$.

(Dass sich hier der Kreisumfang $U = 2\pi\, r$ ergibt, ist natürlich nicht verwunderlich, da schließlich die Zahl π ***definiert*** wird als halber Umfang eines Kreises vom Radius 1: siehe Seite 1.1!)

5.16 Für einen endlichen Wert x_0 schreibt man:

$\boxed{x \to x_0 - \quad \text{oder} \quad x \to x_0 - 0}$, wenn sich x nur *von links* dem Wert x_0 nähert:

$x_0 > x \to x_0$, und

$\boxed{x \to x_0 + \quad \text{oder} \quad x \to x_0 + 0}$, wenn sich x nur *von rechts* dem Wert x_0 nähert:

$x_0 < x \to x_0$ (vgl. Nr. 5.9 und 10):

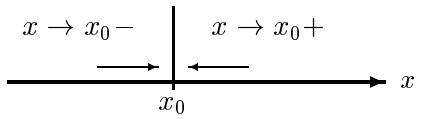


Abbildung 5.11
einseitige Grenzwerte

Hiermit bekommt man — sofern sie eigentlich oder uneigentlich existieren — die beiden

5.17 **einseitigen Grenzwerte:**

$\boxed{f(x_0 - 0) := \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)}$ **linksseitiger Grenzwert**

$\boxed{f(x_0 + 0) := \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)}$ **rechtsseitiger Grenzwert**

z.B.:

5. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + |x|\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{2} & \text{für } x > 0 \\ -\dfrac{x}{2} & \text{für } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow\ f(0-0) = \lim\limits_{x \to -0}\left(-\dfrac{x}{2}\right) = 0,\ f(0+0) = \lim\limits_{x \to +0}\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) = 1:$

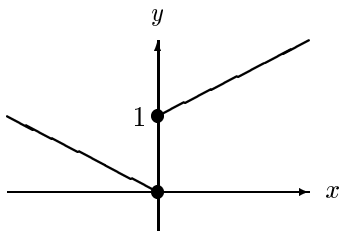


Abbildung 5.12
$y = \dfrac{1}{2}\left(1 + |x|\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$

5.18 Die Funktion $f(x)$ ist für $x \to x_0$ **wesentlich divergent** und der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **existiert wesentlich nicht**, wenn es *keinen* Wert $a \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ so gibt, dass $f(x_n) \to a$ *für jede* Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ mit $x_0 \neq x_n \to x_0$.

Das ist genau dann der Fall, wenn es entweder *mindestens eine* Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ mit $x_0 \neq x_n \to x_0$ gibt, für die die Folge $\big(f(x_n)\big)_{\mathbb{N}}$ *wesentlich nicht* konvergiert, oder wenn es mindestens *zwei verschiedene* Folgen $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $(\bar{x}_n)_{\mathbb{N}}$ mit $x_0 \neq x_n \to x_0$, $x_0 \neq \bar{x}_n \to x_0$ gibt, für die $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(\bar{x}_n)$.

z.B.: Jede Funktion $f(x)$ mit *verschiedenen einseitigen* Grenzwerten $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ ist an dieser Stelle x_0 sicher **wesentlich divergent**, aber es gibt "hässlichere" Formen von wesentlicher Divergenz: bei der Funktion $\boxed{f(x) = \sin\dfrac{1}{x}}$ existieren sogar die beiden einseitigen Grenzwerte $f(x-0)$ und $f(x+0)$ ***wesentlich nicht***:

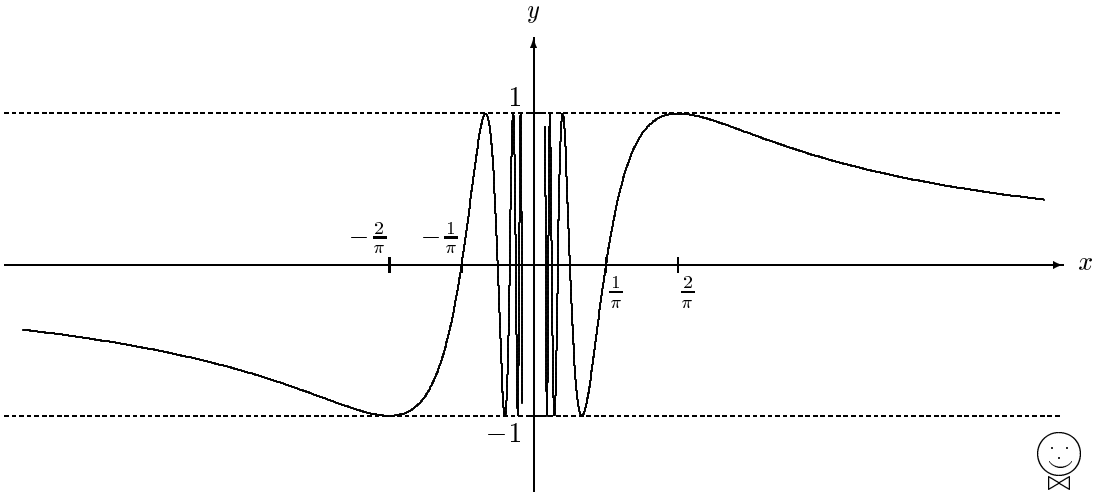


Abbildung 5.13 $y = \sin \frac{1}{x}$

5.E Übungsaufgaben zu Lektion 5.

Ü 5.1 [!!]

Bestimme die Grenzwerte:

(i): $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^3+72n^2+95}{4n^3-6n+5}}$, (ii): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-1}{n(2n+1)}$, (iii): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+n+n^2}-1}{n}$.

Ü 5.2 [○]

Mit Hilfe des Taschenrechners kann man feststellen, dass die Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ eigentlich konvergiert. Bestimme ihren Grenzwert mit einer Genauigkeit von 3 Stellen hinter dem Komma.

Ü 5.3 [!!]

Der Wert der meisten Waren (z.B. Autos) nimmt im Verlauf der Jahre ab. Welchen Wert w_n (in % des Neuwertes w_0) hat eine Ware nach n Jahren, deren Wert am Ende eines jeden Jahres nur noch 80% ihres Wertes zu Beginn des jeweiligen Jahres beträgt? Nach wieviel Jahren hat sie nur noch einen Wert von weniger als 1% ihres Neuwertes?

Ü 5.4 [!]

Bestimme die Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-0} e^{1/x}$, (iii) $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

(Tip zu (iv): erweitere mit $(\sqrt{\cdots}+1)$.).

Ü 5.5 [!]

Finde für die rekursiv definierte Folge $\boxed{a_0 = a\,,\ a_n = 2a_{n-1}+1\,,\ \ n\in\mathbb{N}}$ ein explizites Bildungsgesetz und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ü 5.6 $\boxed{!!}$

Bestimme mit dem Taschenrechner die Grenzwerte a der zwei rekursiv definierten Folgen:

(i) $\boxed{a_0 = 12345678\,,\ a_n = \sqrt{a_{n-1}}\,,\quad n \in \mathbb{N}}$ (wissen Sie schon vorher, was herauskommt?)

(ii) $\boxed{a_0 = 1\,,\ a_n = \cos a_{n-1}\,,\quad n \in \mathbb{N}}$

Können Sie die beiden Grenzwerte jeweils graphisch als Schnittpunkte von zwei geeigneten Kurven darstellen?

Ü 5.7 $\boxed{*}$

Man kann zeigen (das ist nicht schwer!), dass die rekursiv durch

$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)\,,\quad n \in \mathbb{N}_0}$ für beliebig vorgegebenes $A > 0$ und mit jedem Startwert $a_0 > 0$ eigentlich konvergiert. Bestimme den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (Um eine Idee zu bekommen, könnten Sie mit dem Taschenrechner die ersten Glieder dieser Folge einmal für $A = 9$ und ein zweites Mal für $A = 16$ bestimmen — in beiden Fällen z.B. mit dem Startwert $a_0 = 5$.)

Ü 5.8 $\boxed{*}$

Bestimme die Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{1+a^n} + \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^n}\right)$ (für $a > 0$), (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Ü 5.9 $\boxed{*}$

Finde für die beiden (eigentlich!) konvergenten Folgen:

$$a_0 = \frac{1}{1}\,,\ a_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}}\,,\ a_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}\,,\ a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}\,,\ \ldots,\ \text{und}$$

$$b_0 = \sqrt{1}\,,\ b_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}}\,,\ b_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\,,\ b_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}\,,\ \ldots$$

ein rekusives Bildungsgesetz und bestimme ihre Grenzwerte a bzw. b.

Ü 5.10 $\boxed{*}$

Im Spätherbst, bevor es Winter wird, hat Petrus im Himmel viel zu tun, weil er neben seiner Alltagsbeschäftigung der Frau Holle auch noch helfen muss, Schneeflocken zu basteln. Bei einem seiner vielen Schneeflockenmodellen geht er schrittweise vor: er beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge $a = 3$ [*mm*] und setzt über dem mittleren Drittel jeder Seite ein nach außen gerichtetes, gleichseitiges Dreieck an; dieses Verfahren wiederholt er etwa 40 bis 50 mal: bei jeder entstehenden Figur setzt er wieder über dem mittleren Drittel jeder Seite ein nach außen gerichtetes, gleichseitiges Dreieck an:

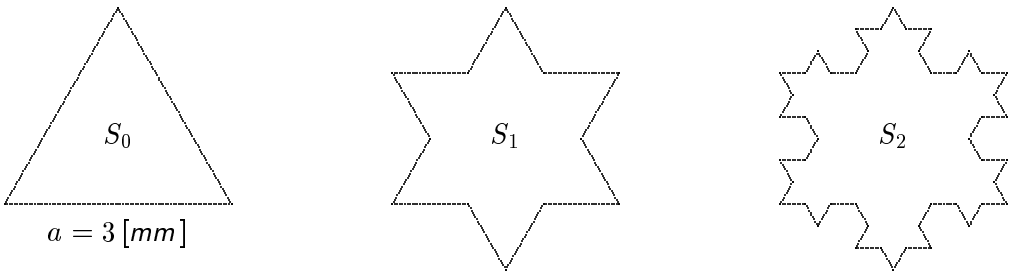


Abbildung 5.14 Entstehung einer "Schneeflocke" (10–fach vergrößert)

Im letzten Winter habe ich genau solch eine Schneeflocke gefunden, und die hatte einen Umfang von knapp über einem Kilometer!...

Könnte das wahr sein, wenn es nicht erfunden wäre?

6 Vektoren.

Stichpunkte: Vektorrechnung im 2- und 3-dimensionalen Anschauungsraum: Charakterisierung und Interpretation von Vektoren, Betrag und Richtung, Summe und skalare Vielfache, übliche Rechenregeln; vektorielle Darstellung von Geraden und Ebenen.

6.A Die Vektoren des Anschauungsraumes.

6.1

Ein **Vektor** $\vec{r}$ (auch: $\vec{x}$) ist charakterisiert durch die Angabe einer positiven Maßzahl $|\vec{r}\,|$ (oder $\|\vec{r}\,\|$) und einer **Richtung**.

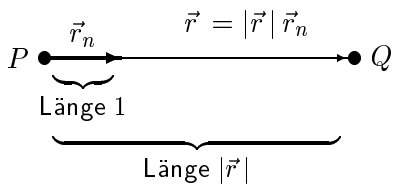
Die Maßzahl $|\vec{r}\,|$ nennt man den **Betrag** (oder **Länge** oder **Norm**) von $\vec{r}$, und die **Richtung** ist bestimmt durch den **Einheitsvektor** $\vec{r}_n$ **in Richtung von** $\vec{r}$: $\vec{r}_n$ hat definitionsgemäß die Länge 1, d.h. $|\vec{r}_n\,| = 1$, und dieselbe Richtung wie $\vec{r}$.

Jeder Vektor $\vec{r}$, der nicht gerade die Länge 0 hat (s.u.), ist somit (definitionsgemäß) das $|\vec{r}\,|$–Fache des Einheitsvektors $\vec{r}_n$: $\boxed{\vec{r} = |\vec{r}\,|\,\vec{r}_n}$.

Ursprünglich wurden Vektoren als Größen eingeführt, die geeignet sind, die Wirkung mechanischer Kräfte zu beschreiben: jede **Kraft** $\vec{K}$ wirkt (*unabhängig* vom Ansatzpunkt) mit einem gewissen Betrag in einer bestimmten Richtung.

Mathematisch korrekter stellt jeder Vektor eine **Verschiebung** dar, durch die alle Punkte der Ebene oder des Anschauungsraumes um einen gewissen Betrag in eine bestimmten Richtung verschoben werden.

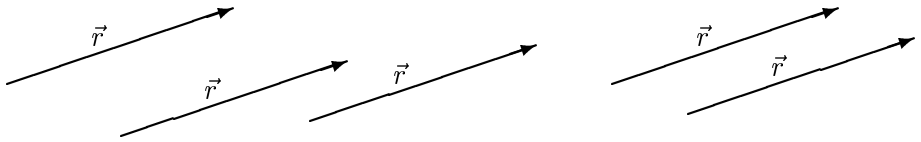
Es ist üblich, einen Vektor $\vec{r}$ geometrisch als "gerichtete Strecke" $\overrightarrow{PQ}$ ("Pfeil") zu veranschaulichen: als einen von einem Punkt P zu einem Punkt Q gerichteten **Vektor**, (der als **Verschiebung** des Punktes P in den Punkt Q oder z.B. als **Kraftvektor**, der an der Stelle P mit dem Betrag $\overline{PQ}$ in Richtung zum Punkt Q wirkt, gedeutet werden kann):



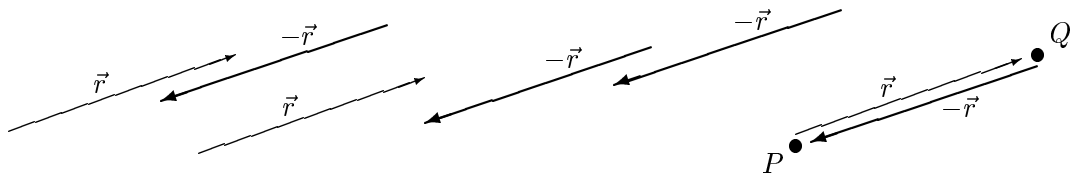
Zwei gerichtete Strecken stellen denselben Vektor dar, wenn sie dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben:

6.2

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie denselben Betrag und dieselbe Richtung haben.



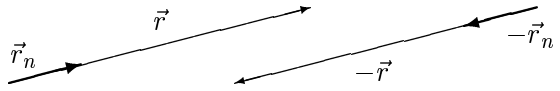
6.3 Mit $-\vec{r}$ bezeichnet man den Vektor, der ***dieselbe Länge***, aber ***entgegensetzte Richtung*** hat wie der Vektor $\vec{r}$; wenn $\vec{r}$ durch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{PQ}$ dargestellt wird, so wird $-\vec{r}$ durch die entgegengesetzt gerichtete Strecke $\overrightarrow{QP}$ dargestellt.



Damit hat man definitionsgemäß die Regeln:

6.4

$$\boxed{\begin{aligned} |-\vec{r}| &= |\vec{r}|\,, \\ \left(-\vec{r}\right)_n &= -\vec{r}_n\,, \\ -\vec{r} &= -|\vec{r}|\,\vec{r}_n\,. \end{aligned}}$$



6.5 Neben den Vektoren $\vec{r}$ mit positivem Betrag $|\vec{r}| > 0$ definiert man noch den **Nullvektor** $\vec{o}$: er hat als einziger Vektor den ***Betrag 0***, d.h. $|\vec{o}| = 0$, und hat ***keine ausgezeichnete Richtung*** (er ist nicht ungerichtet — ihm wird *jede* Richtung zugeordnet).

Ungerichtete Größen nennt man **Skalare** — im Gegensatz zu Vektoren.

6.6 Zeichnet man (in der Ebene oder im Raum) einen **Nullpunkt** $\mathcal{O}$ aus, so kann man jeden Vektor $\vec{r}$ als eine von $\mathcal{O}$ ausgehende gerichtete Strecke $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ darstellen.

Dadurch wird jeder Vektor *nur noch durch* ***eine*** gerichtete Strecke dargestellt, und es ist üblich, auch hier zwischen dem Vektor $\vec{r}$ und der entsprechenden gerichteten Strecke $\overrightarrow{\mathcal{O}P}$ *nicht* zu unterscheiden. Man nennt solche "gebundenen" Vektoren auch **Ortsvektoren** — im Gegensatz zu den bisher betrachteten "freien" Vektoren ohne festen Anfangspunkt.

6.7 **Wir werden im Folgenden — je nach Bedarf und Zweckmäßigkeit — Vektoren als ("gebundene") *Ortsvektoren* oder als "*freie*" *Vektoren* ansehen, ohne dies jeweils besonders hervorzuheben.**

6.8 Die Vektoren der Ebene nennt man auch ***ebene*** oder ***zwei–dimensionale*** Vektoren und die Vektoren des (3–dim.) Raumes auch ***räumliche*** oder ***drei–dimensionale*** Vektoren.

Damit die Länge und Richtung eines Vektors $\vec{r}$ ***beschrieben*** werden können, muss ein ***Bezugssystem*** gegeben sein. Am einfachsten ist es, wenn ein **Koordinatensystem** mit dem Nullpunkt $\mathcal{O}$ im Koordinatenursprung gegeben ist. Dann ist jeder Vektor $\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P}$ eindeutig durch die Koordinaten des Endpunktes P festgelegt:

6.9 Im Folgenden gehen wir davon aus, dass (wie in der Schule) in der Ebene ein rechtwinkliges cartesisches x, y–Koordinatensystem und im Raum ein rechtwinkliges cartesisches x, y, z–Koordinatensystem gegeben ist mit dem Nullpunkt $\mathcal{O}$ im Koordinatenursprung.
Ist dann $P(x|y)$ ein Punkt in der Ebene mit den Koordinaten (x, y), bzw. ist $P(x|y|z)$ ein Punkt im Raum mit den Koordinaten (x, y, z), so können wir — ***bzgl. dieses Koordinatensystems (!)*** — den Vektor $\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P}$ auch als **Spaltenvektor**
$\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ schreiben:
das ist die **Komponentenschreibweise** und x, y, z sind die **Komponenten** von $\vec{r}$ bzgl. dieses Koordinatensystems.

Wegen $\mathcal{O} = \mathcal{O}(0|0)$ bzw. $\mathcal{O} = \mathcal{O}(0|0|0)$ schreibt man für den Nullvektor entsprechend:
$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

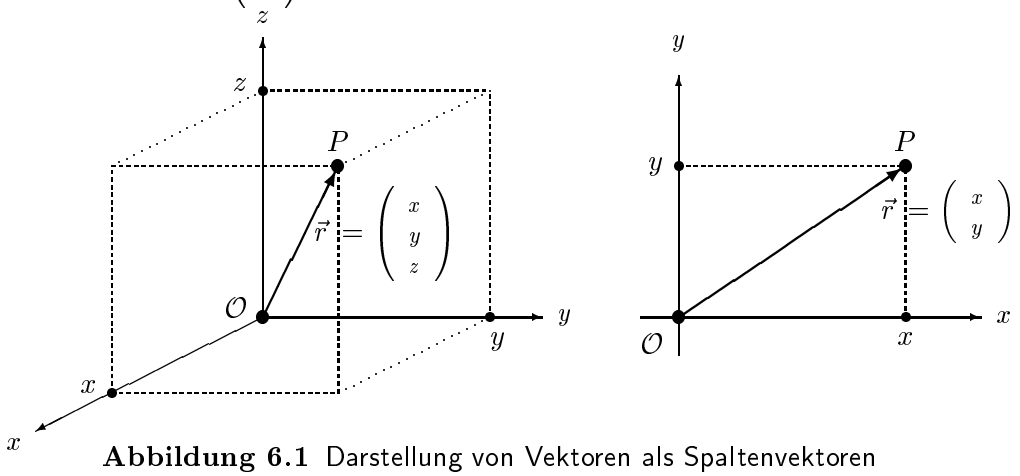


Abbildung 6.1 Darstellung von Vektoren als Spaltenvektoren

Bemerkung: Die **Schreibweise** der ***Punkte*** P als ***Zeilenvektoren***: $P = (x, y)$ bzw. $P = (x, y, z)$ und der entsprechenden **Vektoren** $\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P}$ als ***Spaltenvektoren***: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist (zunächst) völlig willkürlich und kann von Ihnen (zunächst) nach Belieben und Bequemlichkeit gehandhabt werden! (Nur später, wenn die Matrizenrechnung ins Spiel kommt, ist eine konsequente Unterscheidung zwischen Zeilen– und Spaltenvektoren wichtig.)

6.10 Der **Betrag** (= die **Länge**) eines Vektors $\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist der Pythagoräische Abstand der Punkte $\mathcal{O}$ und P:

$$\boxed{|\vec{r}| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{r}| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

6.11 Durch das rechtwinklige cartesische x, y – bzw. x, y, z –Koordinatensystem sind die ***zueinander orthogonalen*** **natürlichen Einheitsvektoren** vom ***Betrag 1*** :

$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (in der Ebene) bzw.

$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (im Raum) ausgezeichnet:

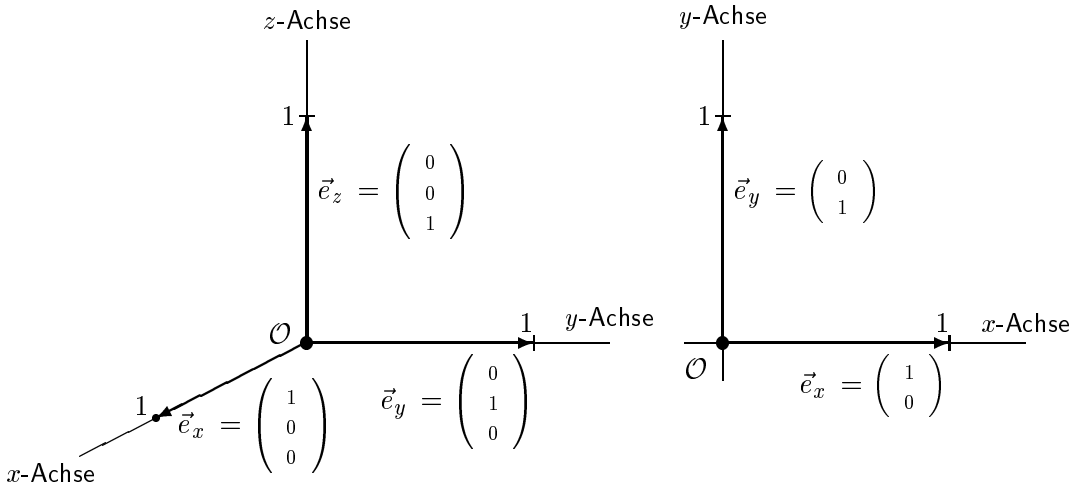
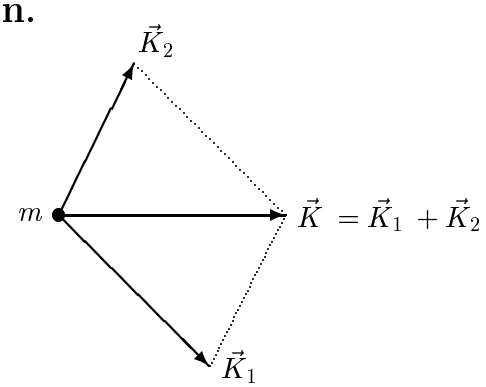


Abbildung 6.2 Die natürlichen Einheitsvektoren

6.B Summe und Vielfache von Vektoren.

Im Fall von zwei an einem Massenpunkt m angreifenden Kräften (Kraftvektoren) $\vec{K}_1$, $\vec{K}_2$ ist die **Vektorsumme** $\vec{K}_1 + \vec{K}_2$ gerade die **resultierende Kraft** , die im **Kräfteparallelogramm** als **Diagonalvektor** dargestellt wird:



6.12 Mathematisch korrekter versteht man unter der **Summe** $\vec{a} + \vec{b}$ von zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ (die wir als ***Verschiebung*** deuten) die **Gesamtverschiebung** , die durch die Hintereinanderausführung der beiden Einzelverschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entsteht.

Da hierbei die Reihenfolge der Einzelverschiebungen offenbar keine Rolle spielt, haben wir damit auch die für Vektoren stets gültige Regel:

$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$ **Kommutativgesetz der Vektoraddition.**

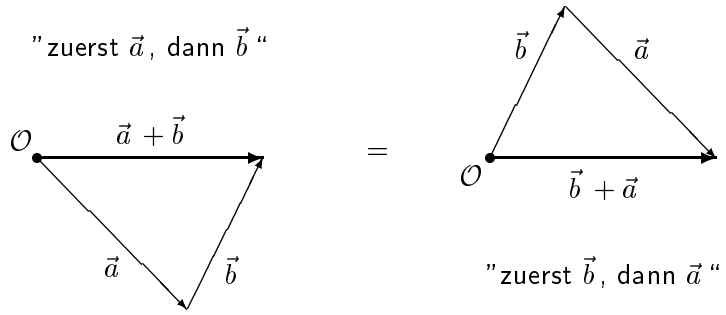


Abbildung 6.3 Zur Kommutativität der Vektoraddition

6.13 Der **Differenzvektor** $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $\vec{b}+\vec{x}=\vec{b}$, d.h. $\vec{a}-\vec{b}$ ist der Vektor, den man zum Vektor $\vec{b}$ addieren muss, um den Vektor $\vec{a}$ zu bekommen: $\boxed{\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}}$; es ist $\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$:

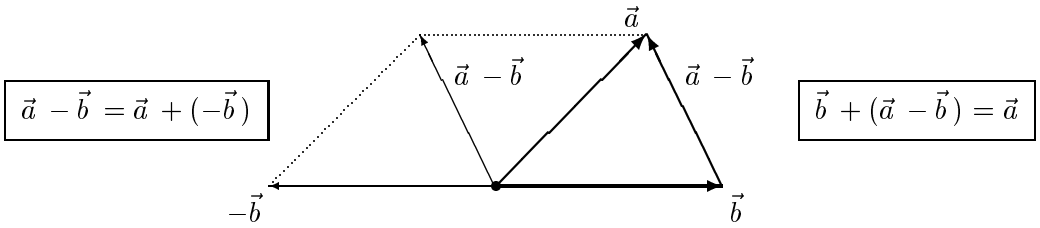


Abbildung 6.4 Zum Differenzvektor

6.14 Wenn man einen Vektor $\vec{r}$ mit einem Skalar λ multipliziert, bekommt man den **λ-fachen Vektor** $\lambda\vec{r}$ mit dem $|\lambda|$-fachen Betrag $\boxed{|\lambda\vec{r}|=|\lambda||\vec{r}|}$.

Der λ-fache Vektor $\lambda\vec{r}$ hat im Fall $\lambda>0$ *dieselbe*, im Fall $\lambda<0$ *entgegengesetzte* Richtung wie $\vec{r}$; im Fall $\lambda=0$ ergibt sich der Nullvektor: $0\,\vec{r}=\vec{o}$:

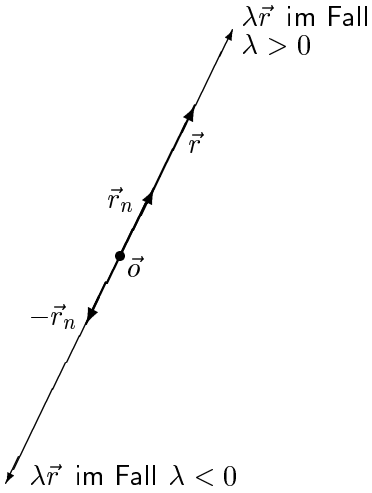


Abbildung 6.5
Zur Multiplikation mit Skalaren

6.15 Ein Vektor $\vec{r}$ heißt **normiert**, wenn er den **Betrag** 1 hat: $|\vec{r}|=1$. Man **normiert** einen Vektor $\vec{r}$, wenn man ihn "auf die Länge 1 bringt", d.h. wenn man ihn durch seinen Betrag teilt: dann ergibt sich der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$: $\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\vec{r}_n$.

z.B.: Der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat den Betrag $|\vec{r}\,| = \sqrt{4+1+4} = 3$; wenn man $\vec{r}$ **normiert**, ergibt sich der Einheitsvektor $\vec{r}_n = \frac{1}{3}\vec{r} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. Dieser Einheitsvektor hat (natürlich) den Betrag 1 (er ist **normiert**): $|\vec{r}_n\,| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$.

6.16 Für das Rechnen mit Vektoren gelten die üblichen **Rechenregeln**, z.B.:

1. $\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$ **Kommutativität der Vektoraddition** (s.o. V 6.11)

2. $\boxed{(\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}\,)}$ **Klammern dürfen beliebig** gesetzt werden — also darf man sie auch ganz weglassen!

3. $\boxed{\lambda\,(\vec{a} + \vec{b}\,) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}}$ $\boxed{(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}}$ **Klammerausdrücke** werden in der gewohnten Weise ausmultipliziert.

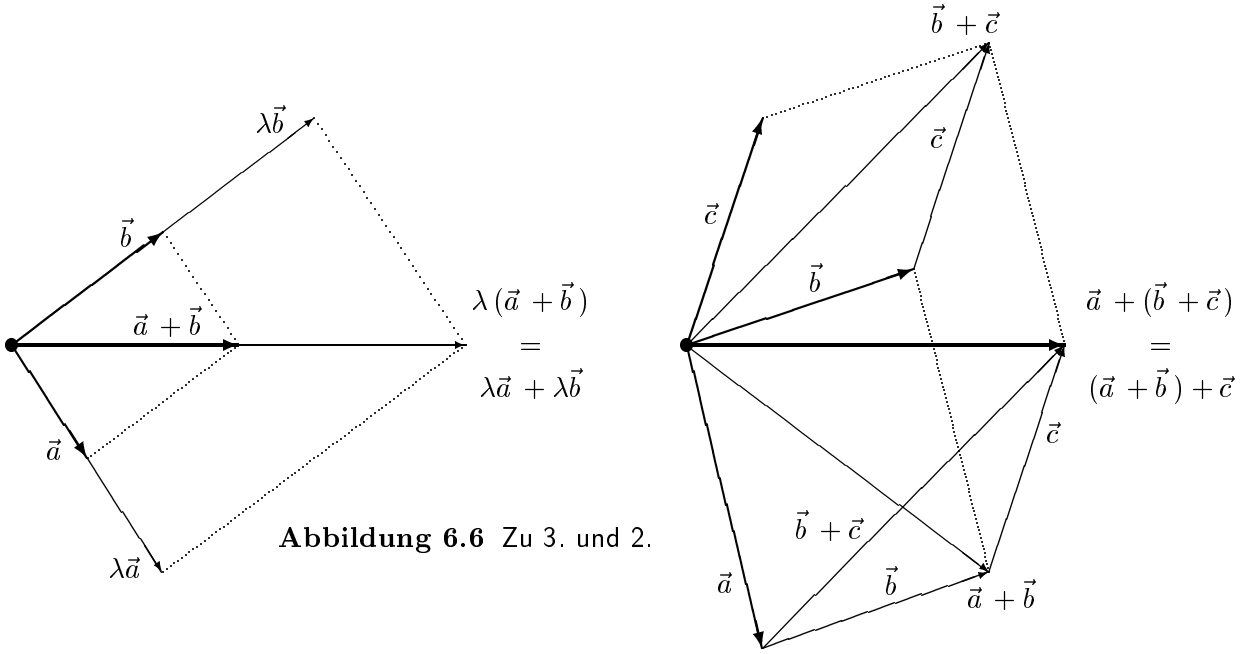


Abbildung 6.6 Zu 3. und 2.

Als erste Konsequenz der Rechenregeln für die Vektoraddition und die Multiplikation mit Skalaren ergibt sich mit der Komponentenschreibweise:

6.17 $\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\,, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$.

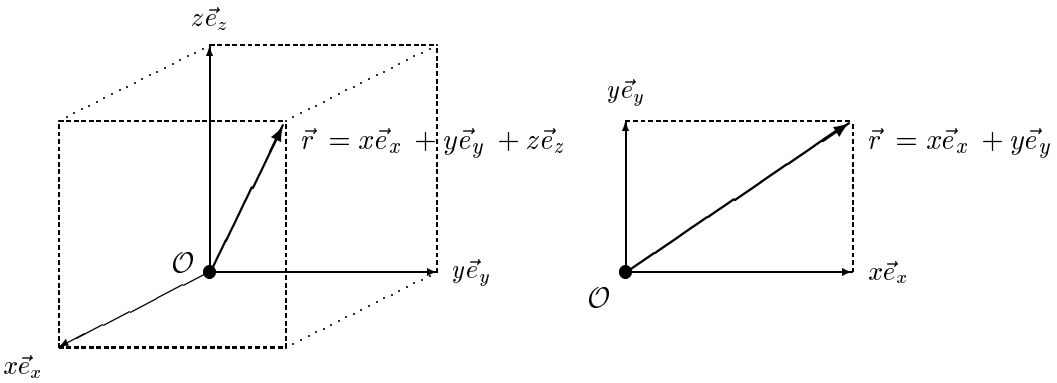


Abbildung 6.7 Zu Nr. 6.17: Zerlegung bzgl. der Koordinatenachsen

Hieraus erhalten wir eine ebenso einfache wie nützliche Rechenregel:

6.18 ***Vektoren werden komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert*** :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}},$$

$$\boxed{\lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix}}.$$

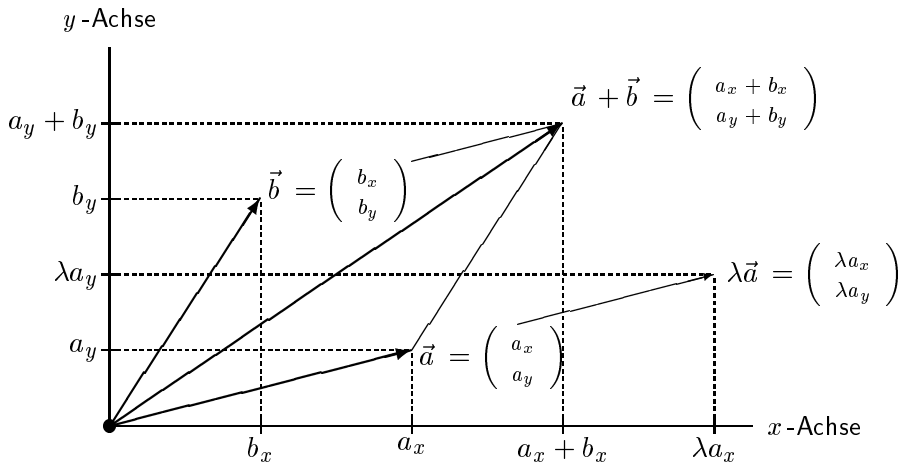
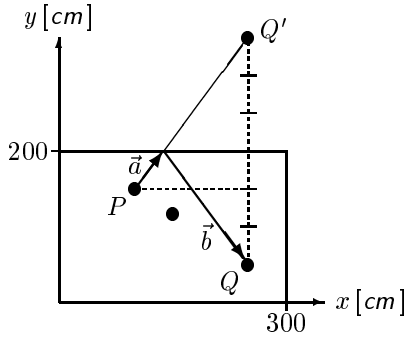


Abbildung 6.8 Komponentenweise Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren

Das ist ganz einfach einzusehen: wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, d.h. $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$ und $\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$, dann ist $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{e}_x + \lambda a_y\vec{e}_y + \lambda a_z\vec{e}_z$ und $\vec{a} + \vec{b} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z + b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z = (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z$, also $\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$.
(Für zwei-dimensionale Vektoren entsprechend). ∎

Zwei **Rechenbeispiele** :

1. Auf einem Billardtisch mit den Abmessungen 300×200 (in *cm*) befinden sich (bzgl. eines gedachten Koordinatensystems der skizzierten Art) an den Positionen $P(100|150)$ und $Q(250|50)$ je eine Kugel. Der direkte Weg zwischen ihnen ist durch eine weitere Kugel versperrt. Wir wollen herausfinden, längs welcher beiden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ die bei P liegende Kugel mit einem geeigneten Stoß in Richtung zur oberen Bande die Kugel bei Q erreichen kann:



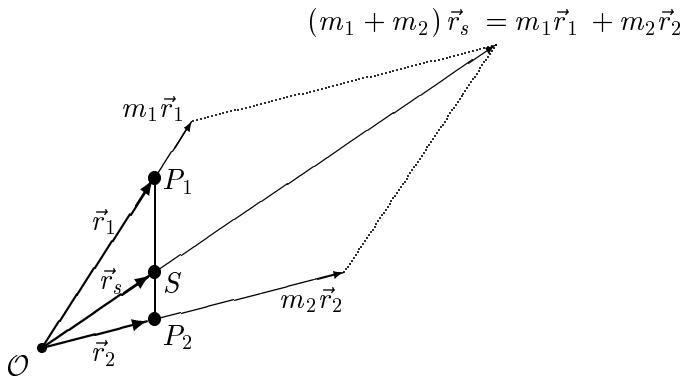
Wenn Q' das Spiegelbild von Q bzgl. der oberen Bande ist: $Q' = Q'(250|50+2\cdot 150) = Q'(250|350)$, dann hat $\vec{a}$ die Richtung des Vektors $\overrightarrow{PQ'} = \begin{pmatrix} 250-100 \\ 350-150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix}$; mit dem Strahlensatz (s. Nr. 6.14,3. und das linke Bild in Abb. 6.6) ergibt sich: $\vec{a} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{PQ'} = \begin{pmatrix} 37.5 \\ 50 \end{pmatrix}$, somit: $\vec{b} = \overrightarrow{PQ} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 250-100-37.5 \\ 50-150-50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112.5 \\ -150 \end{pmatrix}$.

2. An der Stelle P_1 mit Ortsvektor $\vec{r}_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}P_1}$ befinde sich ein Massenpunkt der Masse m_1 und an der Stelle P_2 mit Ortsvektor $\vec{r}_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}P_2}$ ein Massenpunkt der Masse m_2. Der **Massenschwerpunkt** S dieser beiden Massenpunkte mit Ortsvektor $\vec{r}_s = \overrightarrow{\mathcal{O}S}$ ist charakterisiert durch die Bedingung:

$\boxed{(m_1+m_2)\,\vec{r}_s = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}$. Wir wollen zunächst die Lage von S bestimmen:

Aus der Beziehung:
$(m_1+m_2)\,\vec{r}_s = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$ folgt:

$$\vec{r}_s = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r}_2 =$$
$$= \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}_1 + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} - 1\right)\vec{r}_2 =$$
$$= \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_2 =$$
$$= \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2):$$



damit ist zunächst gezeigt, dass der ***Massenschwerpunkt*** S ***auf der Verbindungsstrecke*** zwischen P_1 und P_2 liegt; darüberhinaus haben wir hiermit:

$\vec{r}_s - \vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ und $\vec{r}_s - \vec{r}_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, d.h. die Strecke $\overline{P_1P_2}$ wird durch den Massenschwerpunkt im Verhältnis $m_2 : m_1$ geteilt und es ist $\boxed{m_1 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_1| = m_2 \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}_2|}$:

hinter dieser Aussage verbirgt sich die (sicher schon in der Schule gehörte) Regel:

"Last mal Lastarm = Kraft mal Kraftarm".

6.C Geraden und Ebenen.

6.19 Unter einer **Parameterdarstellung** einer **Geraden** g (in der Ebene oder im Raum) versteht man eine **vektorielle Darstellung** der Form:

$g: \vec{r} = \vec{s} + t\vec{a} \ (t \in \mathbb{R})$;

jeder Wert des **Parameters** t liefert einen Ortsvektor $\vec{r} = \vec{s} + t\vec{a}$ auf der Geraden g (auf der Geraden g liegen hierbei nur die "Endpunkte" der Vektor–"Pfeile" $\vec{r}$, *nicht* die ganzen "Pfeile"!).

In dieser Parameterdarstellung ist $\vec{s}$ ein **Stützvektor** und $\vec{a}$ ein **Richtungsvektor** für die Gerade g; der Stützvektor $\vec{o}$ liefert die zu g parallele Gerade

$g_0: \vec{r} = t\vec{a} \ (t \in \mathbb{R})$

durch den Koordinatenursprung:

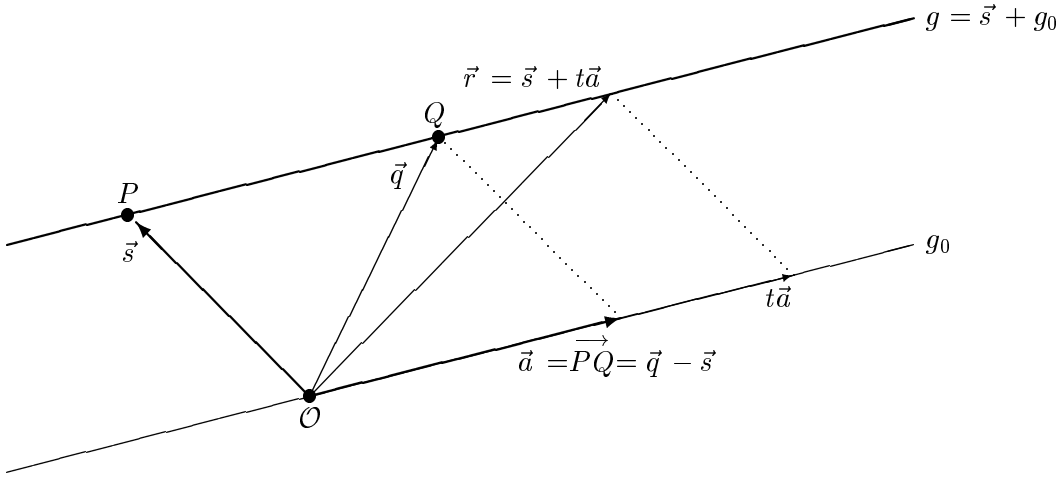


Abbildung 6.9 Zur Parameterdarstellung einer Geraden

6.20 Für die **Gerade** g **durch zwei Punkte** P (mit Ortsvektor $\vec{s}$) und Q (mit Ortsvektor $\vec{q}$) ist z.B. $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{s}$ ein Richtungsvektor und $\vec{s}$ ein Stützvektor.
Damit hat man für g (z.B.) die Parameterdarstellung:

$g: \vec{r} = \vec{s} + t(\vec{q} - \vec{s}) \ (t \in \mathbb{R})$.

z.B.: Ein Richtungsvektor für die Gerade g durch $P(3|1|2)$ und $Q(1|3|-1)$ ist z.B.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Damit haben wir die Parameterdarstellung: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Für die Ortsvektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{cases} x = 2 + t, \text{ d.h. } t = x - 2, \text{ somit:} \\ y = 1 + 3t = 1 + 3(x-2), \text{ d.h. } \boxed{y = 3x - 5}. \end{cases}$$

Eine **Parameterdarstellung** einer **Ebene** E ist eine **vektorielle Darstellung** der Form: $\boxed{E : \vec{r} = \vec{c} + s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s, t \in \mathbb{R})}$;

jeder Wert der beiden **Parameter** s, t liefert einen Ortsvektor $\vec{r} = \vec{c} + s\vec{a} + t\vec{b}$ auf der Ebene. $\vec{c}$ ist ein **Stützvektor** und $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind zwei **Richtungsvektoren** von E.

6.21 Die Ebene $\boxed{E_0 : \vec{r} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s, t \in \mathbb{R})}$ mit dem Stützvektor $\vec{o}$ ist die zu E parallele Ebene durch den Koordinatenursprung. (Damit die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ wirklich eine Ebene aufspannen — und keine Gerade —, müssen sie linear unabhängig sein, d.h. sie dürfen nicht Vielfache voneinander sein!)

Für die **Ebene** E **durch drei Punkte** P, Q, R ist z.B. $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$ ein Stützvektor und sind z.B. $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ zwei Richtungsvektoren.

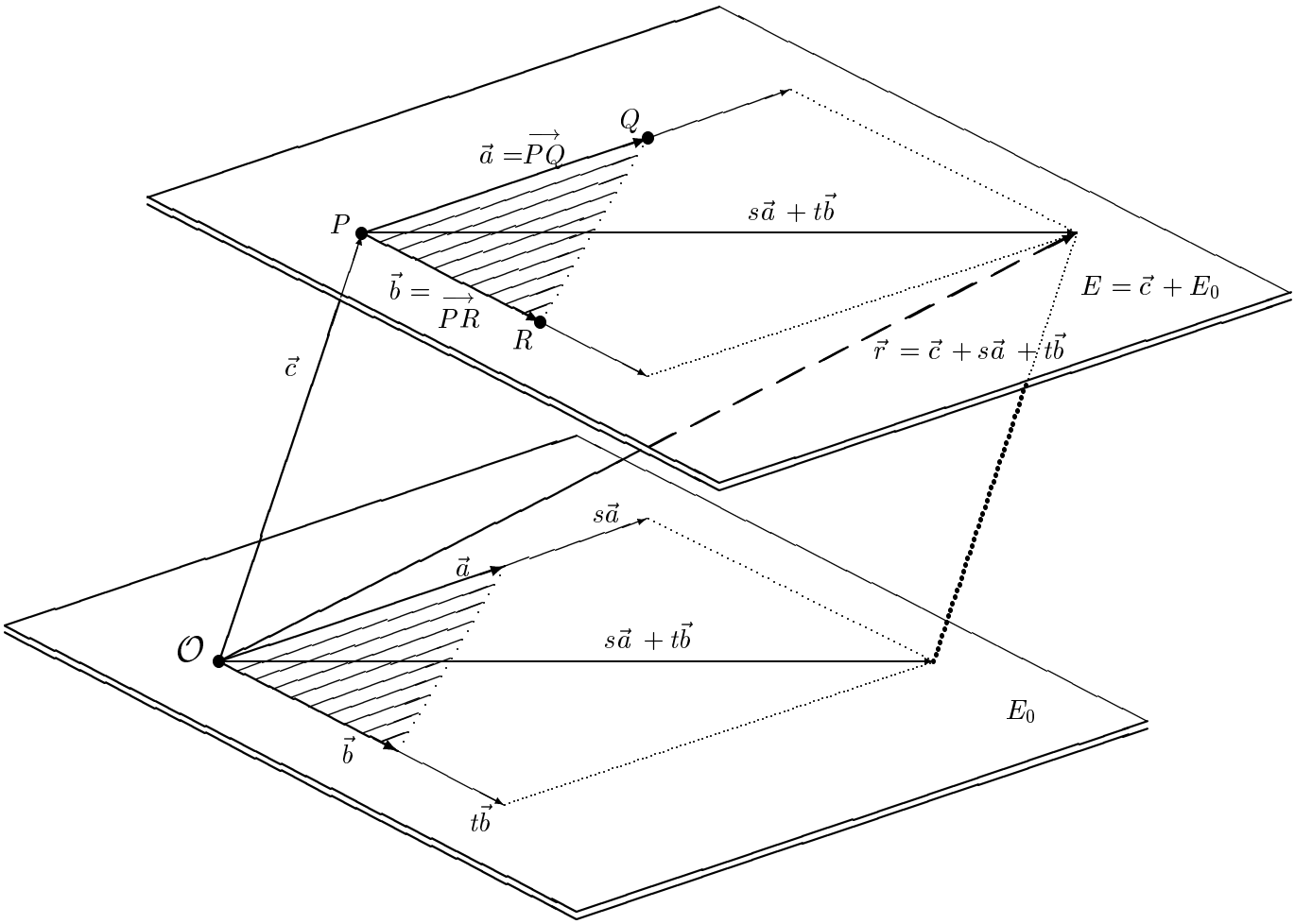


Abbildung 6.10 Zur Parameterdarstellung einer Ebene

z.B.: Für die Ebene E durch die drei Punkte $P(-1|1|-2)$, $Q(3|2|4)$, $R(-2|-1|1)$ haben wir z.B. den Stützvektor $\vec{c} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die beiden Richtungsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2-1 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ -1-1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Damit hat E (z.B.) die **Parameterdarstellung**

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Um für diese Ebene eine **Koordinatendarstellung** $E : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ zu erhalten, kann man z.B. (wir werden später eine bequemere Methode kennenlernen) die beiden Parameter s, t aus der Gleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eliminieren:

$$\left.\begin{array}{ll} (1): & x = -1 + 4s - t \\ (2): & y = 1 + s + 2t \\ (3): & z = -2 + 6s + 3t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{ll} (1)' = 2(1) + (2): & 2x + y = -1 + 9s \\ (2)' = 3(1) + (3): & 3x + z = -5 + 18s \end{array}\right\} \; 2(1)' - (2)' : \; E : x + 2y - z = 3\,.$$

Wir wollen umgekehrt für die Ebene $E : 2x - 3y + z = 4$ eine Parameterdarstellung finden. Hierzu lösen wir die Gleichung $2x - 3y + z = 4$ nach einer der Variablen, z.B. nach z auf: $z = 4 - 2x + 3y$.

Ein Vektor $\vec{r}$ liegt genau dann auf dieser Ebene, wenn $z = 4 - 2x + 3y$, d.h. wenn

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 4 - 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 3y \end{pmatrix}$, wenn also mit beliebigen $x = s$, $y = t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6.D Übungsaufgaben zu Lektion 6.

Ü 6.1 $\boxed{\circ}$

Für welche Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $5 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Ü 6.2 $\boxed{\circ}$

Welcher Vektor $\vec{r}$ vom Betrag 3 hat dieselbe Richtung wie der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Ü 6.3 $\boxed{!}$

Bestimme (rechnerisch und graphisch) zwei Punkte C und D, welche die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ der beiden Punkte $A(1|3)$ und $B(7|-1.5)$ in drei gleichlange Teilstücke unterteilt.

Ü 6.4 $\boxed{!!}$

Welche Punkte auf der Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ haben vom Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ den Abstand $d = 2\sqrt{5}$?

Ü 6.5 $\boxed{!!}$

An den Stellen $A(0|0)$, $B(7|0)$, $C(3|4)$ befinde sich jeweils ein Massenpunkt der Masse 1. Welche Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ergeben sich für diese Punkte, wenn das Koordinatensystem so parallel verschoben wird, dass der neue Koordinatenursprung im Massenschwerpunkt dieser drei Massenpunkte liegt? (Der Ortsvektor $\vec{r}_s$ des Massenschwerpunktes von drei Massenpunkten mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ und den Massen m_1, m_2, m_3 ist definiert durch die Beziehung: $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\,\vec{r}_s$: vgl. mit dem letzten Beispiel in Abschnitt 6.C.)

Ü 6.6 $\boxed{!!}$

Bestimme den Schnittpunkt P der beiden Geraden $g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und $g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ü 6.7 $\boxed{!!}$

Liegt der Punkt $P(1|2|3)$ auf der Ebene $E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Ü 6.8 $\boxed{!}$

Finde für die Schnittgerade g der beiden Ebenen $E_1 : x + y + z = 2$, $E_2 : x + 2y - z = 1$ eine Parameterdarstellung.

Ü 6.9 $\boxed{*}$

Bestimme die Gleichungen der vier Ebenen, die ein Tetraeder mit den vier Eckpunkten $A(1|1|1)$, $B(-1|1|1)$, $C(1|-1|1)$ und $D(1|1|-1)$ begrenzen.

Ü 6.10 $\boxed{**}$

Auf einem Mini–Billardtisch von 100 [*cm*] Länge und 60 [*cm*] Breite befindet sich (von der linken unteren Ecke aus gemessen) an der Stelle $P(8|12)$ eine Kugel, die mit *einem einzigen* Stoß längs eines Weges über drei verschiedene Banden in das Loch $Q(0|60)$ an der linken oberen Ecke geschossen werden soll. Beschreibe den Weg mit vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (so dass also $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$).

7 Skalarprodukt.

Stichpunkte: Winkel zwischen Vektoren, geometrische Definition des Skalarproduktes, Skalarprodukt und Betrag, einige Rechenregeln, koordinatenabhängige Darstellung des Skalarproduktes, orthogonale Projektion auf die Richtung eines Vektors, orthogonale Zerlegung bzgl. eines Vektors.

7.A Definition des Skalarproduktes.

7.1 Für zwei Vektoren $\vec{a}\,,\,\vec{b}$ bezeichnen wir mit $\sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b})$ den *kleineren* der beiden, von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ orientierten Winkel (wir setzen $\sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) = 0$, wenn $\vec{a} = \vec{o}$ oder $\vec{b} = \vec{o}$) :

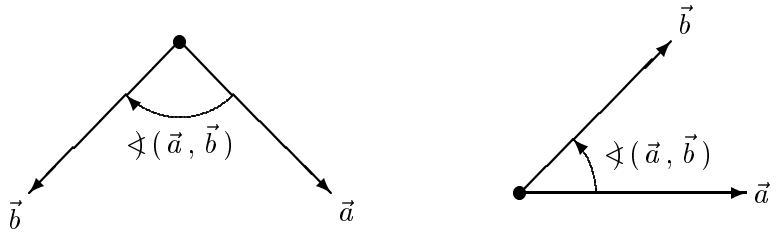


Abbildung 7.1 Winkel zwischen zwei Vektoren.

7.2 Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel und gleichgerichtet (in Zeichen: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), so ist $\sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) = 0$, und sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ antiparallel (in Zeichen: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), so ist $\sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) = \pi \;\; (= 180^\circ)$.

In allen anderen Fällen ist $0 < \sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) < \pi$.

Hiermit definiert man das **Skalarprodukt** (auch **inneres Produkt** genannt) für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

7.3 $$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\ \sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b})}$$

Definition des **Skalarproduktes** .

Merke: Das Skalarprodukt aus zwei Vektoren ist ein **Skalar** — daher auch der Name — und *kein* Vektor!

Für beliebige Winkel φ ist
$\cos\varphi = \cos(-\varphi) =$
$= \cos(2\pi \pm \varphi) = \ldots$:

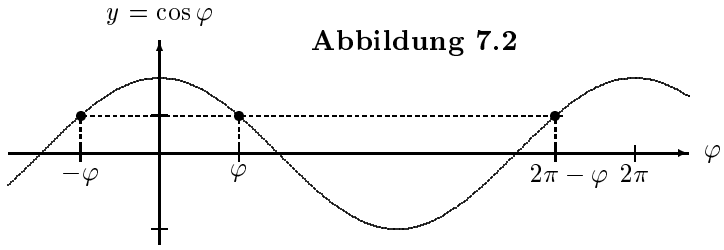


Abbildung 7.2

Daher gilt mit $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ stets:

7.4
$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(-\varphi) \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(2\pi-\varphi) \end{aligned}$$

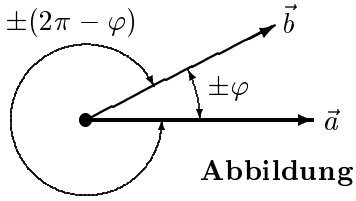


Abbildung 7.3

In der Definition des Skalarproduktes $\vec{a}\cdot\vec{b}$ spielt es also *keine* Rolle, welcher der beiden Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gewählt wird und wie dieser Winkel orientiert ist!

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, wie das Skalarprodukt bequem ausgerechnet werden kann. Zunächst wollen wir noch einige nützliche **Folgerungen** aus der Definition des Skalarproduktes festhalten:

1. Es ist $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ und $\cos\pi/2 = 0$. Mit 7.2 folgt:

7.5
$$\begin{aligned} &\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| && \text{genau dann, wenn } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \textbf{ \textit{parallel} } \text{sind:} && \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}, \\ &\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}| && \text{genau dann, wenn } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \textbf{ \textit{antiparallel} } \text{sind:} && \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}. \end{aligned}$$

und — das ist besonders wichtig:

7.6 $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ***orthogonal*** sind: $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}}$ **!**

2. Wegen $-1 \le \cos\varphi \le 1$, d.h. $|\cos\varphi| \le 1$, ist $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\varphi| \le |\vec{a}||\vec{b}|$, also:

7.7 Es ist stets: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ ***Schwarz'sche Ungleichung***.

3. Im Fall $\vec{a} = \vec{b}$ erhält man einen wichtigen **Zusammenhang zwischen Betrag und Skalarprodukt**:

7.8
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{, bzw.} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,.$$
!

7.B Rechenregeln.

7.9

Für beliebige ***reelle*** Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und ***reelle*** Skalare λ gilt:

(i) $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$ (das innere Produkt ist ***kommutativ***),

(ii) $\boxed{(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})}$,

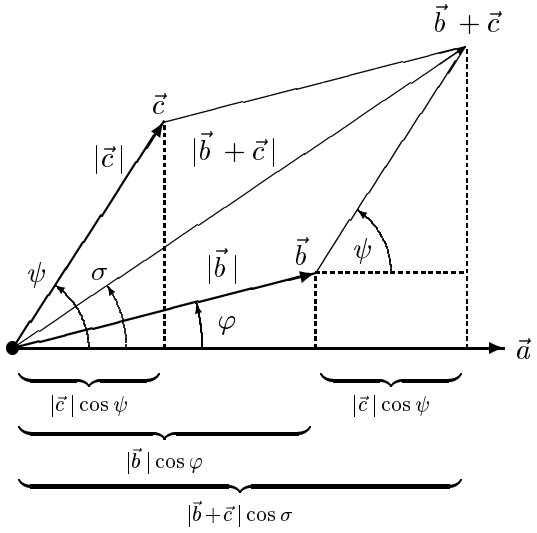
(iii) $\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$.

Diese Regeln sind einfach einzusehen:

Zu (i): Wenn $\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ ist, dann ist $\sphericalangle(\vec{b},\vec{a}) = -\varphi$, somit:
$\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(-\varphi) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

Zu (ii): Wenn $\lambda > 0$ ist, dann ist $|\lambda| = \lambda$ und $\lambda\vec{a}$ hat dieselbe Richtung wie $\vec{a}$:
dann ist $\sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \varphi$ und $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
Wenn $\lambda < 0$ ist, dann ist $|\lambda| = -\lambda$ und $\lambda\vec{a}$ hat entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$, d.h. es ist
$\sphericalangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi - \varphi$; da $\cos(\pi-\varphi) = \cos(\varphi-\pi) = -\cos\varphi$ ist, folgt:
$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\varphi) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\varphi) = -|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
Es ist also *stets* $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (i) auch die andere Aussage:
$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{b})\cdot\vec{a} = \lambda(\vec{b}\cdot\vec{a}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Zu (iii): Hier bedient man sich am bequemsten einer Skizze:



Aus der Skizze liest man ab:
$|\vec{b}+\vec{c}|\cos\sigma = |\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{c}|\cos\psi$.
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= |\vec{a}||\vec{b}+\vec{c}|\cos\sigma = \\ &= |\vec{a}|\Big(|\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{c}|\cos\psi\Big) = \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{a}||\vec{c}|\cos\psi = \\ &= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

Abbildung 7.4 zum Distributivgesetz 7.9 (iii) ∎

Mit Hilfe dieser Regeln kann man z.B. den aus der Schule wohlbekannten **Cosinus–Satz der Ebene** herleiten:

7.10 In jedem (beliebig "schrägen") Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem der Seite a gegenüberliegenden Winkel α ist

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha}\ :$$

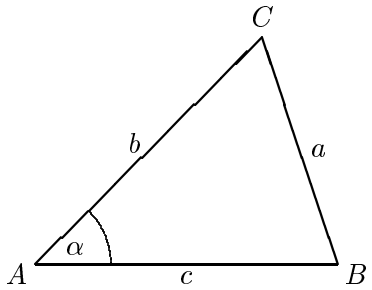
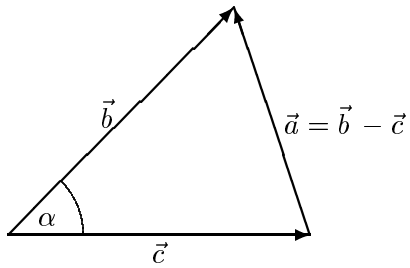


Abbildung 7.5
zum Cosinus-Satz

Wenn wir nämlich die Vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ betrachten, dann ist $|\vec{b}\,| = b$, $|\vec{c}| = c$ und $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ mit $|\vec{a}\,| = a$, und es folgt:

$$\begin{aligned} a^2 &= |\vec{b} - \vec{c}|^2 \overset{\text{V.7.8}}{=} (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \overset{\text{V.7.9}}{=} \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = \\ &= |\vec{b}\,|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\,(\vec{b} \cdot \vec{c}) = |\vec{b}\,|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\,|\vec{b}\,||\vec{c}|\cos\alpha = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \blacksquare \end{aligned}$$



Mit derselben Argumentation bekommen wir auch eine ***koordinatenabhängige Darstellung des Skalarprodukts***: für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}\,|^2 &= \left| \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \right|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = \\ &= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3 - 2a_3b_3 + b_3^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \\ &= |\vec{a}\,|^2 + |\vec{b}\,|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,; \end{aligned}$$

andererseits ist (s.o.): $|\vec{a} - \vec{b}\,|^2 = |\vec{a}\,|^2 + |\vec{b}\,|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}\,)$:

ein Vergleich dieser beiden Gleichungen ergibt: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

(bei zwei *ebenen* Vektoren bekommt man ein entsprechendes Ergebnis — man braucht nur jeweils die dritte Komponente wegzulassen):

7.11 Das **Skalarprodukt** aus zwei ***reellen*** Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ist:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$ bzw.

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2}\ .$$

Da sich hiermit das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ von zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sehr bequem berechnen lässt, können wir nun die Beziehung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, mit der wir ursprünglich das Skalarprodukt definiert haben, verwenden, um den **Winkel** $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zu bestimmen:

7.12
$$\boxed{\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}}\ ,$$

insbesondere kann hiermit einfach überprüft werden, ob zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ **orthogonal** sind:

7.13
$$\boxed{\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \ \Leftrightarrow\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}}\ .$$

Einige Rechenbeispiele:

1. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 + 2 + 6 = 0$, d.h. die beiden Vektoren stehen **senkrecht** aufeinander.

2. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 8 - 4 = 6 \neq 0$, also sind sie *nicht* orthogonal;

mit: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$ bekommen wir den **Winkel** $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ über die Beziehung:

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{6}{21}$: hieraus ergibt sich mit dem TR: $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{6}{21}\right) = 1.281 = \underline{0.4077\pi}$ $(= 73.4^\circ)$.

3. Die zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ 3 \end{pmatrix}$ sind **senkrecht**, wenn $c - 18 = 0$, d.h. für $c = 18$.

4. Ein Vektor $\vec{h}$ ist ein **Normalenvektor einer Ebene** E, wenn er auf der zu E parallelen Ebene E_0 durch den Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ senkrecht steht. Damit ist für jede Ebene $E: \ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ der Vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor, denn für alle $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus der zu E parallelen Ursprungsebene E_0 gilt:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\,.$$

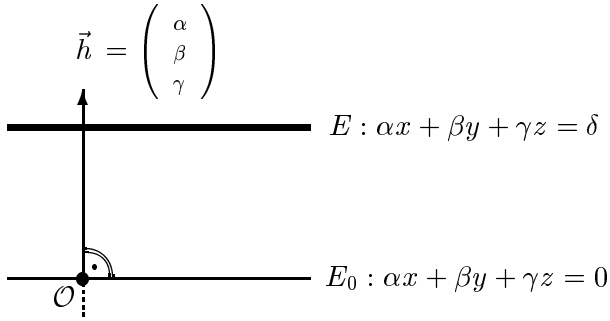


Abbildung 7.6 Normalenvektor einer Ebene

5. Der **Schnittwinkel** φ der beiden Ebenen $E_1: 2x - 3y + 2z = 4$ und $E_2: 4x + 6y - 2z = -3$ ist offenbar gerade der Winkel, den die beiden Normalenvektoren $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ einschließen: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2}{|\vec{h}_1|\,|\vec{h}_2|} = \dfrac{4 - 18 - 4}{\sqrt{1+9+4}\,\sqrt{16+36+4}} = \dfrac{-18}{\sqrt{784}} = -\dfrac{9}{14}$, somit (mit dem TR):

$\varphi = \cos^{-1}\left(-\dfrac{9}{14}\right) = 2.269 = \underline{0.72225\pi}$ $(= 130^\circ)$.

7.C Orthogonale Zerlegung bzgl. eines Vektors.

7.14

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}$ und mit dem Einheitsvektor $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ zu $\vec{a}$ ist:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{b}_a &= (\vec{e} \cdot \vec{b})\,\vec{e} \\ &= \frac{\vec{e} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \end{aligned}}$$

! die **orthogonale Projektion** des Vektors $\vec{b}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{a}$ und

$$\boxed{\vec{b}_a^{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_a}$$

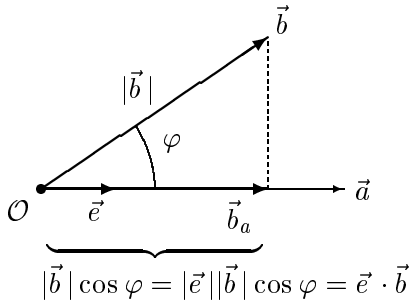
das zu $\vec{a}$ senkrechte **orthogonale Komplement** von $\vec{b}$ bzgl. $\vec{a}$; hiermit ist

$$\boxed{\vec{b} = \vec{b}_a + \vec{b}_a^{\perp}}$$

die **orthogonale Zerlegung** von $\vec{b}$ bzgl. $\vec{a}$: $\vec{b}_a$ ist ***parallel*** und $\vec{b}_a^{\perp}$ ist ***senkrecht*** zu $\vec{a}$.

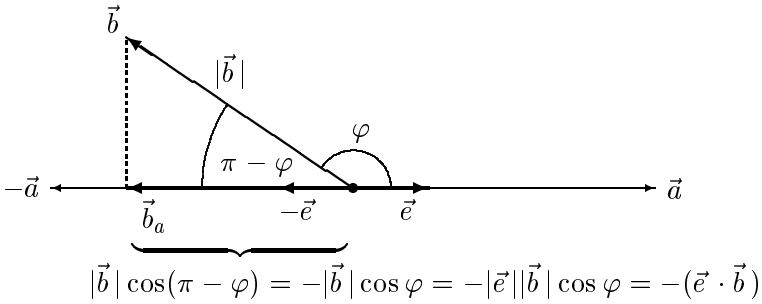
Die folgenden Skizzen illustrieren und erklären diese Sachverhalte:

Es sei jeweils $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|}$ der Einheitsvektor zu $\vec{a}$ ($\Rightarrow |\vec{e}\,| = 1$), und es sei $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ (die Orientierung von φ spielt gemäß Nr. 7.4 *keine* Rolle):



Im Fall $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ ist

$$\boxed{\vec{b}_a = (\vec{e}\cdot\vec{b}\,)\,\vec{e}}\,,$$

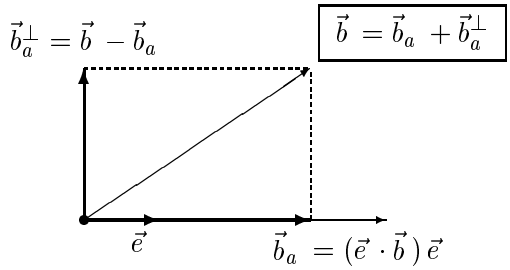


im Fall $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ ist
$\vec{b}_a = -(\vec{e}\cdot\vec{b}\,)\,(-\vec{e}\,)$, also erneut

$$\boxed{\vec{b}_a = (\vec{e}\cdot\vec{b}\,)\,\vec{e}}\,.$$

Abbildung 7.7 orthogonale Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Abbildung 7.8
orthogonale Zerlegung
des Vektors $\vec{b}$ bzgl. des Vektors $\vec{a}$.



Dass der Vektor $\vec{b}_a^{\perp}$ zu $\vec{a}$ **orthogonal** ist, kann man auch ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_a^{\perp}\cdot\vec{a} &= (\vec{b} - \vec{b}_a\,)\cdot|\vec{a}\,|\vec{e} = |\vec{a}\,|\,\Big((\vec{b}\cdot\vec{e}) - (\vec{b}_a\cdot\vec{e})\Big) = \\
&= |\vec{a}\,|\,\Big[(\vec{b}\cdot\vec{e}) - \Big(\big((\vec{e}\cdot\vec{b}\,)\,\vec{e}\big)\cdot\vec{e}\Big)\Big] = |\vec{a}\,|\,\Big((\vec{b}\cdot\vec{e}) - (\vec{e}\cdot\vec{b})(\vec{e}\cdot\vec{e})\Big) = \\
&= |\vec{a}\,|\,\Big((\vec{b}\cdot\vec{e}) - (\vec{e}\cdot\vec{b})\Big) = 0\,, \quad \text{d.h. es ist } \boxed{\vec{b}_a^{\perp}\perp\vec{a}}\,.
\end{aligned}$$

∎

z.B.: 1. Die orthogonalen Projektionen eines Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf die Koordinatenachsen sind — wie man das auch erwarten darf! —:

mit $\vec{e}_x \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\,,\ \vec{e}_y \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\,,\ \vec{e}_z \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z$:

$\vec{r}_x = (\vec{e}_x \cdot \vec{r})\,\vec{e}_x = x\vec{e}_x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_y = (\vec{e}_y \cdot \vec{r})\,\vec{e}_y = y\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_z = (\vec{e}_z \cdot \vec{r})\,\vec{e}_z = z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

2. Um die **Projektion** $\vec{b}_r$ des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu bekommen, wird zunächst $\vec{r}$ normiert: $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hiermit ist dann

$$\vec{b}_r = (\vec{e} \cdot \vec{b})\,\vec{e} = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6-2+8}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Das **orthogonale Komplement** von $\vec{b}$ bzgl. $\vec{r}$ ist $\vec{b}_r^{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_r = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

damit ist $\boxed{\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\parallel \vec{r}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\perp \vec{r}}}$ die **orthogonale Zerlegung** von $\vec{b}$ bzgl. $\vec{r}$.

7.D Übungsaufgaben zu Lektion 7.

Ü 7.1 $\boxed{!!}$

Welche Winkel α_x, α_y, α_z schließt der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den drei Koordinatenachsen ein?

Ü 7.2 $\boxed{\circ}$

Bestimme den Schnittwinkel φ und den Schnittpunkt S der beiden Geraden
$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und $g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$.

Ü 7.3 $\boxed{\circ}$

Bestimme den Schnittwinkel φ und die Schnittgerade $g : \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ $(t \in \mathbb{R})$ der beiden Ebenen $E_1 : 2x - y + 3z = 4$, $E_2 : x + 3y - 2z = -5$.

Ü 7.4 $\boxed{!!}$

Schreibe den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Summe von zwei Vektoren, von denen der eine *parallel*, der andere *senkrecht* zum Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist. Welchen Abstand d hat der Punkt $P(5|-2|-3)$ von der Geraden g durch $\mathcal{O}(0|0|0)$ und $Q(2|-1|-2)$?

Ü 7.5 $\boxed{!!}$

Schreibe den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Summe von zwei Vektoren, von denen der eine *parallel*, der andere *senkrecht* zur Ebene $E: 3x - 2y + z = 0$ ist. Welchen Abstand d hat der Punkt $P(1|2|3)$ von dieser Ebene?

Ü 7.6 $\boxed{!}$

Bestimme die Winkel α, β, γ des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-1|1|3)$, $B(2|1+\sqrt{2}|0)$, $C(1|1|1)$.

Ü 7.7 $\boxed{*}$

Welchen Abstand d_E haben die beiden Ebenen $E_0: 2x - 6y + 3z = 0$ und $E: 2x - 6y + 3z = 3$ voneinander und welche Abstände d_0, d hat der Punkt $P(1|2|1)$ jeweils von den beiden Ebenen?

Ü 7.8 $\boxed{!}$

Finde in den drei Koordinatenebenen jeweils einen Punkt A, B, C so, dass das Tetraeder $\mathcal{O}ABC$ gleichseitig ist (mit der Seitenlänge a) und bestimme den Winkel γ zwischen zwei Seiten.

Ü 7.9 $\boxed{**}$

Wie ist es möglich, dass ein Segelboot — *ohne* Motor, allein vom Wind angetrieben! — vorwärts fahren kann, obwohl der Wind fast von vorn kommt?: wieviel % der Windkraft bleibt z.B. wirksam, wenn der Wind in einem Winkel von $60°$ von vorn bläst und das Segel "dazwischen", in einem Winkel von $30°$ zur Fahrtrichtung steht?

8 Differentiation.

Stichpunkte: Erste und höhere Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen: Definition, Schreibweisen und anschauliche Deutung; nützliche Ableitungsregeln, nützliche Ableitungen; Ableitung von Vektoren, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

8.A Zur Definition der ersten Ableitung.

8.1

Die **1. Ableitung** $f'(x_0)$ einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 ist gleich dem **Anstieg der Tangente** an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $\big(x_0\,,\, f(x_0)\big)$.

Man nennt die 1. Ableitung auch den **Differentialquotienten** von $f(x)$ an der Stelle x_0 und verwendet die Schreibweisen $f'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx} = \dfrac{df}{dx}(x_0)$.

$f'(x_0)$ ist die **Änderung** von $f(x)$ an der Stelle x_0 pro x–Einheit.

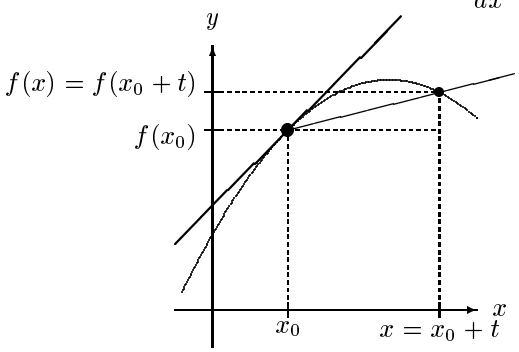
Die ***symbolische Schreibweise*** der 1. Ableitung als Differential***quotient*** $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ soll daran erinnern, dass sich die 1. Ableitung als **Grenzwert eines Differenzenquotienten** ergibt: als Grenzwert der Anstiege der durch den Punkt $\big(x_0\,,\, f(x_0)\big)$ verlaufenden ***Sekanten*** :

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}}$$

(Das "d" im Differentialquotient $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ist "anschaulich" als "sehr kleines" *Delta*, d.h. als "sehr kleine" *Differenz* zu deuten: $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, und man bezeichnet den symbolisch als Quotient geschriebenen *Differential*quotienten $\dfrac{df}{dx}$ *nicht* wie einen Bruch mit "df durch dx", sondern mit "df **nach** dx.)

Anstieg der **Tangente:** (Differentialquotient)

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$



Anstieg der **Sekante:** (Differenzenquotient)

$$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$

Abbildung 8.1
Differenzen– und Differentialquotient

8.2 Eine Funktion $f(x)$ ist ***differenzierbar an der Stelle*** x_0, wenn an dieser Stelle die Ableitung $f'(x_0)$ *existiert*: die Kurve $y = f(x)$ darf dann an dieser Stelle ***weder eine Sprungstelle noch einen Knick*** haben.

Die Funktion $f(x)$ ist ***differenzierbar***, wenn sie *an jeder Stelle* (ihres Definitionsbereiches) eine Ableitung besitzt: in diesem Fall wird durch $x \mapsto f'(x)$ eine neue Funktion $f'(x)$ definiert: das ist die **erste Ableitung**

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x)\,.$$

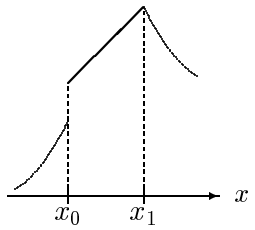


Abbildung 8.2
an Sprungstellen x_0
und Knicken x_1
existiert keine Tangente.

z.B.: 1. Für $y = f(x) = ax + b$ ist

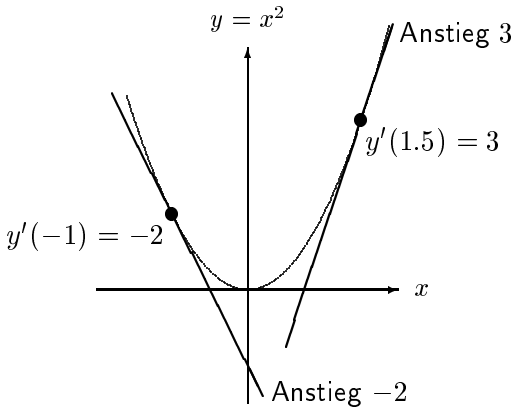
$$y' = f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\Big(a(x+t)+b\Big) - (ax+b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{ax + at + b - ax - b}{t} = a\,,$$

also: $\boxed{(ax+b)' = a}$: das war zu erwarten: die **Gerade** $y = ax + b$ hat den konstanten Anstieg $y' = a$.

2. Für die **Normalparabel** $y = x^2$ ergibt sich:

$$y' = f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^2 - x^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x^2 + 2tx + t^2 - x^2}{t} = \lim_{t\to 0}(2x+t) = 2x\,:$$

$\boxed{\left(x^2\right)' = 2x}$: die **Parabel** $y = x^2$ hat an jeder Stelle x den Anstieg $y' = 2x$.



8.3 Wenn man die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ erneut ableitet, bekommt man die ***zweite Ableitung*** $f''(x) = \Big(f'(x)\Big)'$, diese abgeleitet ergibt die ***dritte Ableitung*** $f'''(x) = \Big(f''(x)\Big)'$, usw.. Bei höheren Ableitungen empfiehlt sich die bequemere Schreibweise $f^{(n)}(x)$ (lies: "f ***oben*** n") statt der schwerfälligen Schreibweise $f'''^{\cdots\prime}(x)$ mit n Strichen. (Bitte verwechseln Sie nicht die **n–te Ableitung** $f^{(n)}(x)$ mit der **n–ten Potenz** $f^n(x)$!)

8.B Nützliche Ableitungsregeln.

(Für Rechenbeispiele zu diesen Regeln siehe den nachfolgenden Abschnitt!)

8.4

$\boxed{c' = 0 \ \ (c \text{ konstant})}$: jede ***konstante*** Funktion hat überall den Anstieg 0;

umgekehrt: wenn die Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $I = [\,a, b\,]$ *stetig* ist (d.h. wenn der Graph von $y = f(x)$ über I "keine Sprünge" macht und ohne Abzusetzen gezeichnet werden kann), dann gilt:

$\boxed{f'(x) = 0 \ \text{ für } \ x \in I \ \Rightarrow \ f(x) = c \ (\text{konstant}) \text{ auf } I}$.

(Da die Ableitung $f'(x)$ die *Änderung* von $f(x)$ beschreibt, kann man ganz grob sagen: ***eine Funktion, die sich nicht ändert, muss konstant sein***.)

8.5

1. $\boxed{\Big(c \cdot f(x)\Big)' = c \cdot f'(x) \ \ (c \text{ konstant})}$: die Ableitung eines ***Vielfachen*** ist das ***Vielfache*** der Ableitung.

2. $\boxed{\Big(f(x) \pm g(x)\Big)' = f'(x) \pm g'(x)}$: die Ableitung einer ***Summe*** oder ***Differenz*** ist die ***Summe*** bzw. ***Differenz*** der Ableitungen.

8.6

1. $\boxed{\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$ **Produktregel**

2. $\boxed{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$ **Quotientenregel**

8.7

$\boxed{\Big(f\,\big(g(x)\big)\Big)' = f'\,\big(g(x)\big) \cdot g'(x)}$ **Kettenregel**

($f'\,\big(g(x)\big)$ ist die ***äussere Ableitung*** an der Stelle $g(x)$ und $g'(x)$ ist die ***innere Ableitung***.)

8.8 Die **Ableitung der Umkehrfunktion** $x = f^{-1}(y)$ einer Funktion $y = f(x)$

ist: $$\boxed{\frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}\,.$$

Eine differenzierbare Funktion $f(x)$ ist offenbar genau dann über einem Intervall $I = [a, b]$ ***monoton wachsend*** (d.h. $f(x) \leq f(\tilde{x})$ für $x \leq \tilde{x}$ aus I), wenn die Tangenten an die Kurve $y = f(x)$ über diesem Intervall stets ***positiven Anstieg*** haben: dann "nimmt $f(x)$ zu", und entsprechend genau dann ***monoton fallend*** über I, (d.h. $f(x) \geq f(\tilde{x})$ für $x \leq \tilde{x}$ aus I), wenn die Tangenten ***negativen Anstieg*** haben: dann "nimmt $f(x)$ ab":

8.9 Wenn die Funktion $f(x)$ über einem Intervall I differenzierbar ist (wenn also die Kurve $y = f(x)$ überall über I eine Tangente *besitzt*), dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f'(x) \geq 0 \text{ auf } I & \Leftrightarrow & f(x) \textbf{ monoton wachsend über } I \\ f'(x) \leq 0 \text{ auf } I & \Leftrightarrow & f(x) \textbf{ monoton fallend über } I\,. \end{array}}$$

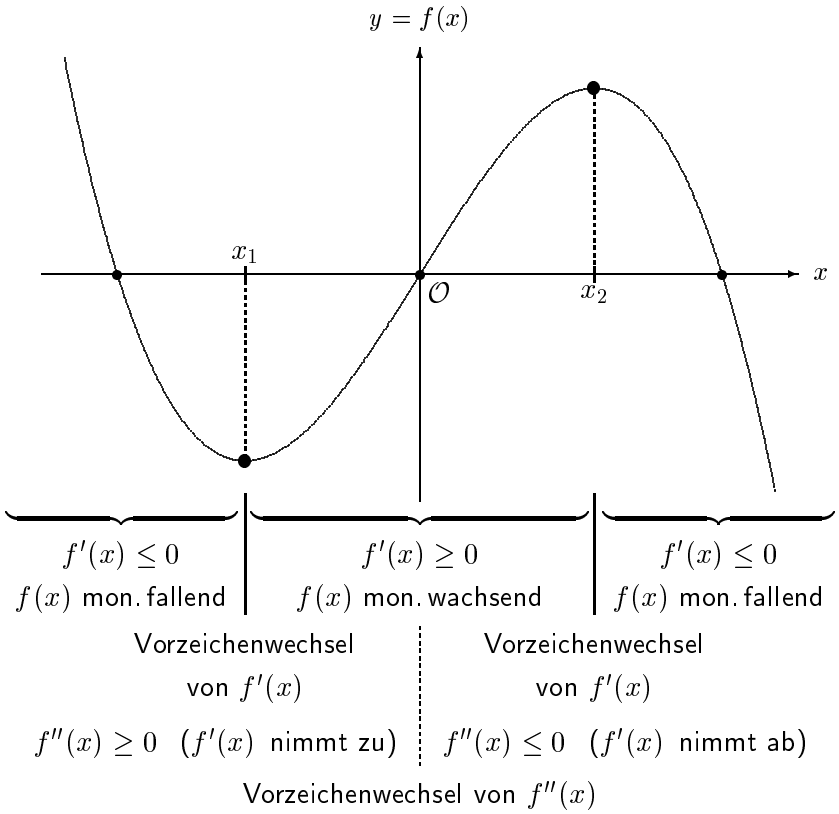


Abbildung 8.3 zu Nummer 8.9 und 10.

In der Schule haben Sie gelernt:

(1) Eine differenzierbare Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 ein

lokales Extremum, wenn $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) \neq 0}$, und zwar:

ein **lokales Minimum** (einen **Tiefpunkt**), wenn

$\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0}$, und

ein **lokales Maximum** (einen **Hochpunkt**), wenn

$\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0}$; und:

(2) $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**, wenn

$\boxed{f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0}$.

Das *Wesentliche* an diesen beiden Aussagen ist *nicht*, dass an der Stelle x_0 die erste bzw. zweite Ableitung den Wert 0 hat (es ist sehr wohl möglich, dass $f'(x_0)$ bzw. $f''(x_0)$ garnicht existieren!), sondern das *Wesentliche* ist der ***Vorzeichenwechsel*** von $f'(x)$ bzw. $f''(x)$ an dieser Stelle (siehe hierzu die letzte Abbildung):

8.10

(3) Ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig und beiderseits von x_0 (in einer Umgebung von x_0) differenzierbar, so hat $f(x)$ ***genau dann*** an dieser Stelle ein **lokales Extremum**, wenn ***die erste Ableitung*** $f'(x)$ ***bei*** x_0 ***ihr Vorzeichen wechselt***: $f(x)$ hat bei x_0

ein **lokales Minimum** (einen **Tiefpunkt**), wenn

$\boxed{f'(x) < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } f'(x) > 0 \text{ für } x > x_0}$: $\searrow \nearrow$

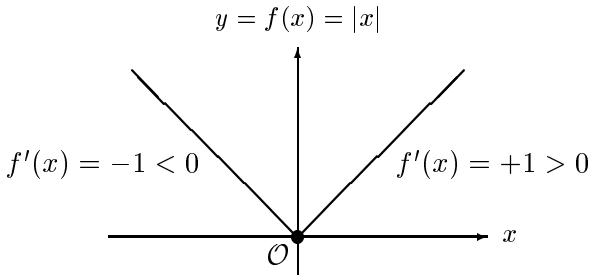
und ein **lokales Maximum** (einen **Hochpunkt**), wenn

$\boxed{f'(x) > 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } f'(x) < 0 \text{ für } x > x_0}$: $\nearrow \searrow$;

(4) $f(x)$ hat ***genau dann*** an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**, wenn ***die zweite Ableitung*** $f''(x)$ ***bei*** x_0 ***ihr Vorzeichen wechselt***.

Beachte: in **(3)** wird nicht gefordert, dass $f'(x_0)$ existiert (die Kurve $y = f(x)$ kann an dieser Stelle einen Knick haben): wenn jedoch $f'(x_0)$ existiert, dann muss $f'(x_0) = 0$ sein! Ebenso wird in **(4)** nicht gefordert, dass $f''(x_0)$ existiert: wenn jedoch $f''(x_0)$ existiert, dann muss $f''(x_0) = 0$ sein!

z.B.: 1. Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ hat offenbar im Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ ein (sogar globales) **Minimum**, obwohl ihre Ableitung $f'(x)$ an keiner Stelle den Wert 0 hat ($f'(0)$ existiert nicht!); aber die Ableitung $f'(x)$ wechselt bei $\mathcal{O}$ ihr Vorzeichen: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ +1 & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$

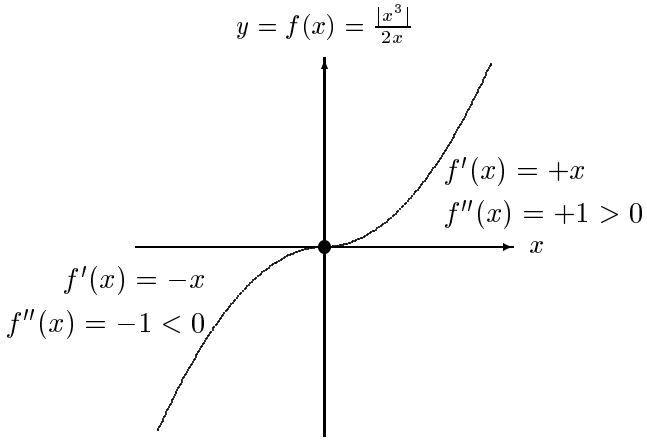


Minimum im Koordinatenursprung

2. Die Funktion

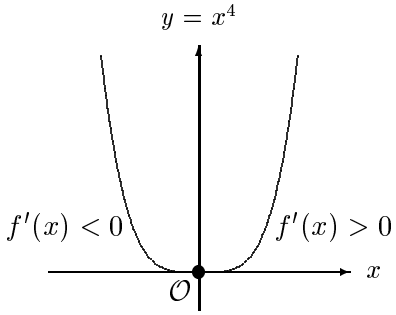
$$f(x) = \frac{|x^3|}{2x} = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} & \text{für} \quad x < 0 \\ +\dfrac{x^2}{2} & \text{für} \quad > 0 \end{cases}$$

hat offensichtlich im Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ einen **Wendepunkt**, obwohl ihre 2. Ableitung $f''(x)$ an keiner Stelle den Wert 0 hat ($f''(0)$ existiert nicht!); aber die 2. Ableitung $f''(x)$ wechselt bei $\mathcal{O}$ ihr Vorzeichen: $f''(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ +1 & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$



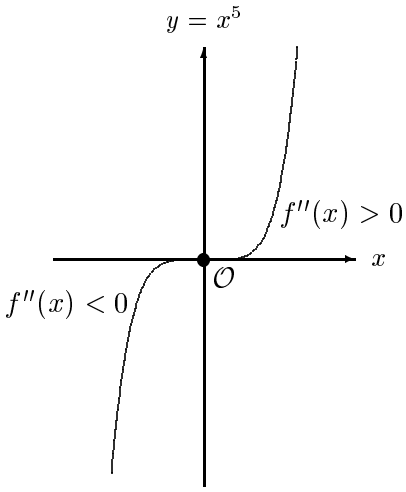
Wendepunkt im Koordinatenursprung

3. Die Funktion $f(x) = x^4$ hat im Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ ein **Minimum**, obwohl die zweite Ableitung an dieser Stelle den Wert 0 hat: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, somit $f'(0) = 0$ *und* $f''(0) = 0$; wir haben jedoch:
$f'(x) = 4x^3 \left\{ \begin{array}{lll} < 0 & \text{für} & x < 0 \\ > 0 & \text{für} & x > 0, \end{array} \right\}$, d.h. die 1. Ableitung $f'(x)$ wechselt bei $x_0 = 0$ ihr Vorzeichen.
Gemäß Nr. 8.10,(3), hat $f(x)$ bei $x_0 = 0$ ein **Minimum**.



Minimum im Koordinatenursprung

4. Die Funktion $f(x) = x^5$ hat die Ableitungen
$f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$, also ist $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$. Trotzdem hat $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach Nr. 8.10,(4), einen **Wendepunkt**, denn $f''(x) = 20x^3 \left\{ \begin{array}{lll} < 0 & \text{für} & x < 0 \\ > 0 & \text{für} & x > 0\,. \end{array} \right.$



Wendepunkt im Koordinatenursprung

8.C Einige wichtige Ableitungen.

Wir beschränken uns auf einige wenige Standard–Ableitungen, die auch in jeder Schul–Formelsammlung zu finden sind:

8.11

Die ***wichtigste aller Ableitungen*** ist sicher die der **Exponentialfunktion** e^x, über die *alle anderen* Ableitungen — nicht nur die hier aufgelisteten — erhalten werden können (das werden wir im ersten Semester sehen):

(1) $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$ Die e–Funktion e^x ist die *einzige* Funktion $f(x)$ mit $f(0) = 1$ ist, die ***mit ihrer Ableitung übereinstimmt***!

(2) $\boxed{\left(x^a\right)' = a\,x^{a-1}}$ für beliebige Konstanten a,

insbesondere, mit $a = -1$ bzw. $a = \frac{1}{2}$:

(3) $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$,

(4) $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ für $x > 0$.

(5) $\boxed{\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}}$ für $x > 0$.

(6) $\boxed{\left(\sin x\right)' = \cos x}$ für alle x, und hiermit noch:

(7) $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$ für alle x (beachte das Minuszeichen!).

Als Argumentationsübung wollen wir zumindest zeigen, wie sich die Ableitung des natürliche Logarithmus' mit Hilfe der Ableitung der e–Funktion ergibt. Darüberhinaus wollen wir die Ableitung des Sinus *unabhängig* von e^x bestimmen — auf eine recht "handwerkliche", dafür einfach nachvollziehbare Weise:

Zu (5): Sei $y = f(x) = e^x$. Dann ist $y > 0$ und $\ln y = f^{-1}(y) = x$ und die Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion (V 8.8) ergibt:

$\dfrac{d\left(\ln y\right)}{dy} = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$; damit ist: $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$ für $x > 0$.

Zu (6) und (7):

$$\begin{aligned}
\left(\sin x\right)' &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x+t) - \sin x}{t} = \quad \text{(s. Nr. 1.12)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos t + \cos x \cdot \sin t}{t} = \\
&= \sin x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} + \cos x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \quad \text{mit} \\
\frac{\sin t}{t} &\to 1 \text{ für } t \to 0 \text{ (s. Beispiel 4 in Abschnitt 5.D und Abb. 5.9) und} \\
\frac{\cos t - 1}{t} &= \frac{1}{t}\left(\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) - 1\right) = \quad \text{(s. Nr. V 1.12)} \\
&= \frac{1}{t}\left(\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} - 1\right) = \frac{1}{t}\left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} - 1\right) = \quad \text{(s. Nr. V 1.8)} \\
&= \frac{1}{t}\left(\left[1 - \sin^2\frac{t}{2}\right] - \sin^2\frac{t}{2} - 1\right) = -\frac{2}{t}\sin^2\frac{t}{2} = \\
&= -\sin(t/2) \cdot \frac{\sin(t/2)}{t/2} \to 0 \cdot 1 = 0 \text{ für } t \to 0, \text{ somit also:} \\
\left(\sin x\right)' &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.
\end{aligned}$$

Hiermit bekommt man auch gleich die nächste Ableitung:

Wenn man die Sinuskurve um $\pi/2$ *nach links* verschiebt, ergibt sich die Cosinuskurve, und wenn man diese ebenfalls um $\pi/2$ *nach links* verschiebt, erhält man die *negative* Sinuskurve (vgl. Abb. 1.6):

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$. Damit haben wir sofort:

$\left(\cos x\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$. ∎

Mit diesen Standard–Ableitungen und den Ableitungsregeln lassen sich sämtliche Ableitungen bestimmen.

Rechenbeispiele:

1. $\left(\sin^2 3x\right)' = 2\sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6\sin 3x \cdot \cos 3x$, **2.** $\left(e^{-5x^2}\right)' = e^{-5x^2} \cdot (-5) \cdot 2x = -10x\, e^{-5x^2}$,

3. $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

4. $(\cot x)' = \left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\tan^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = -\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (beachte das Minuszeichen!),

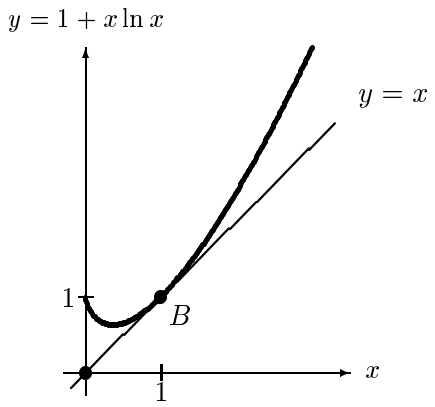
5. $\Big(\ln(x^3+x^2)\Big)' = \dfrac{1}{x^3+x^2}\cdot(3x^2+2x) = \dfrac{3x+2}{x^2+x}$, **6.** $(\ln\cos x)' = \dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\tan x$,

7. $\left(\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)' = \Big(\big(1+x^2\big)^{-3/2}\Big)' = -\dfrac{3}{2}\big(1+x^2\big)^{-5/2}\cdot 2x = \dfrac{-3x}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$,

8. $\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$.

9. $\big(2^x\big)' = \big(e^{x\ln 2}\big)' = \big(e^{x\ln 2}\big)'\cdot\ln 2 = 2^x\ \ln 2$, **10.** $\big(\lg x\big)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \dfrac{1}{\ln 10}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\ \lg e$.

11. Wir wollen vom Koordinatenursprung aus die Tangente $y = ax$ an die Kurve $y = f(x) = 1 + x\ln x$ $(x > 0)$ legen und den Berührpunkt $B(x_0|ax_0)$ bestimmen:
die beiden Bedingungen: (1) $a = f'(x_0)$ (die Anstiege sind gleich) und (2) $ax_0 = f(x_0)$ (der Punkt B liegt auf beiden Kurven) liefern:
(1) $a = \ln x_0 + 1$, d.h. $x_0 = e^{a-1}$, und
(2) $a\,e^{a-1} = 1+e^{a-1}\,(a-1) = 1+a\,e^{a-1}-e^{a-1}$, d.h. $e^{a-1} = 1$,
also $a = 1$. Damit haben wir die **Tangente** $y = x$ und den **Berührpunkt** $B(1|1)$.



8.D Ableitung von Vektoren.

Die **Ableitung** eines variablen Vektors $\vec{r}\,(t) = \Big(x(t),\, y(t),\, z(t)\Big)$ wird wie im Fall skalarer Funktionen definiert: (Wir schreiben die Vektoren aus Platzgründen als Zeilenvektoren.)

8.12 $$\boxed{\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}\,(t+h)-\vec{r}\,(t)}{h}}$$

Wegen: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}\,(t+h)-\vec{r}\,(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Big(x(t+h),\, y(t+h),\, z(t+h)\Big)-\Big(x(t),\, y(t),\, z(t)\Big)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h},\ \frac{y(t+h)-y(t)}{h},\ \frac{z(t+h)-z(t)}{h}\right) = \Big(x'(t),\, y'(t),\, z'(t)\Big)$$ gilt:

8.13 ***Vektoren werden komponentenweise abgeleitet*:**

$$\boxed{\vec{r}\,'(t) = \Big(x(t),\, y(t),\, z(t)\Big)' = \Big(x'(t),\, y'(t),\, z'(t)\Big)}\,.$$

z.B.: $\left(t^2\,,\,1-t\,,\,3t\right)' = (2t,\,-1,\,3)\,,\quad \left(t\,,\,e^{3t}\,,\,\sin 2t\right)' = (1,\,3e^{3t},\,2\cos 2t)\;,\quad (6,t)' = (0,1)\,.$

Die **Ableitungsregeln für Vektoren** entsprechen denen für skalare Funktionen (s. Abschnitt 8.B):

8.14

1. $\left(c\,\vec{r}\,(t)\right)' = c\,\vec{r}\,'(t)$ (c konstant),
2. $\left(\vec{x}\,(t)\,\pm\,\vec{y}\,(t)\right)' = \vec{x}\,'(t)\,\pm\,\vec{y}\,'(t)\,;$

8.15

1. $\boxed{\left(f(t)\,\vec{r}\,(t)\right)' = f'(t)\,\vec{r}\,(t) + f(t)\vec{r}\,'(t)}$ **Produktregel** für die Multiplikation mit skalaren Funktionen,
2. $\boxed{\left(\vec{x}\,(t)\cdot\vec{y}\,(t)\right)' = \vec{x}\,'(t)\cdot\vec{y}\,(t) + \vec{x}\,(t)\cdot\vec{y}\,'(t)}$ **Produktregel** für das Skalarprodukt;

8.16 $\boxed{\left(\vec{r}\,\left(f(t)\right)\right)' = f'(t)\,\vec{r}\,'\left(f(t)\right)}$ **Kettenregel**.

z.B.: **1.** $\left(e^{-2t}\,(t^2,\,1+3t)\right)' = -2e^{-2t}\,(t^2,\,1+3t) + e^{-3t}(2t,\,3) = e^{-3t}\,(2t-2t^2,\,1-6t)\,.$

2. Für $\vec{r}\,(t) = (1+2t,\,t^2)$ ist $\vec{r}\,'\,(t) = (2,\,2t)$, somit: $\left(\vec{r}\,(\cos t)\right)' = -\sin t\,(2,\,2\cos t)\,.$

3. Die folgende nützliche Tatsache ergibt sich aus der Produktregel für das Skalarprodukt:

8.17 Wenn $|\vec{r}\,(t)| = c$ ***konstant*** ist, dann ist $\vec{r}\,'\,(t)\perp\vec{r}\,(t)\,.$

Denn: mit $|\vec{r}\,(t)| = c$ ist auch $|\vec{r}\,(t)|^2 = c^2$ konstant, somit:
$0 = (c^2)' = \left(|\vec{r}\,(r)|^2\right)' = \left(\vec{r}\,(t)\cdot\vec{r}\,(t)\right)' = \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,(t) + \vec{r}\,(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = 2\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,(t)$, also:
$\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,(t) = 0$, d.h. $\vec{r}\,'\,(t)\perp\vec{r}\,(t)$. ∎

Jeder "ordentliche" **Kurvenbogen** im Raum kann in der Form $C : \vec{r} = \vec{r}\,(t)\,,\ t_1 \le t \le t_2$, beschrieben werden: die zulässigen Werte des **Parameters** t liefern dann die Punkte $\vec{r}\,(t)$ auf C; und ist t die Zeit, so kann $\vec{r} = \vec{r}\,(r)$ zugleich als **Ortsvektor** eines Körpers aufgefasst werden, der sich auf der **Bahnkurve** C bewegt.

Damit ist der **Geschwindigkeitsvektor** $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ ein **Tangentialvektor** an die Kurve C mit dem **Tangenteneinheitsvektor** $\vec{t}(t) = \dfrac{\vec{v}}{v}$ und der (skalaren) **Momentangeschwindigkeit** $v = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}\,'(t)|$.

Da $\vec{t}(t)$ die konstante Länge 1 hat, ist (gemäß Nr. 8.17) der Vektor $\vec{n}(t) = \dfrac{\vec{t}\,'(t)}{|\vec{t}\,'(t)|}$ der **(Haupt–) Normaleneinheitsvektor** von C an der Stelle $\vec{r}(t)$.

Der Vektor $\vec{b}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$ ist der **Beschleunigungsvektor**.

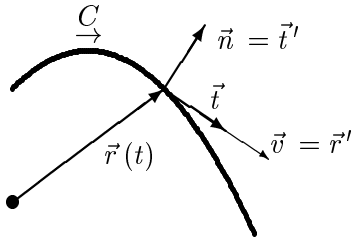


Abbildung 8.4
Orts–, Tangential– und Normalenvektor.

z.B.: Wir betrachten den **Kurvenbogen** $C: x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3$ mit $t \geq 0$, den wir auch als die **Bahnkurve** eines sich bewegenden Körpers auffassen können. Zu jedem Zeitpunkt t haben wir dann:

(1) den **Kurvenpunkt** auf C bzw. den **Ortsvektor** des Körpers: $\vec{r}(t) = \left(t,\, t^2,\, \frac{2}{3}t^3\right)$,

(2) den **Tangentialvektor** von C an der Stelle $\vec{r}(t)$ bzw. die **vektorielle Geschwindigkeit** des Körpers: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (1,\, 2t,\, 2t^2)$,

(3) die **skalare Momentangeschwindigkeit** $v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 1 + 2t^2$,

(4) den **Tangenteneinheitsvektor** von C an der Stelle $\vec{r}(t)$:

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v} = \frac{1}{1+2t^2}\left(1,\, 2t,\, 2t^2\right) \text{ mit der Ableitung}$$

$$\vec{t}\,'(t) = -\frac{4t}{(1+2t^2)^2}\left(1,\, 2t,\, 2t^2\right) + \frac{1}{1+2t^2}(0,\, 2,\, 4t) = \frac{2}{(1+2t^2)^2}\left(-2t,\, 1-2t^2,\, 2t\right)$$

und $|\vec{t}\,'(t)| = \dfrac{2}{(1+2t^2)^2}\sqrt{4t^2 + (1-2t^2)^2 + 4t^2} = \dfrac{2}{1+2t^2}$,

(5) den **Hauptnormaleneinheitsvektor** zu C an der Stelle $\vec{r}(t)$:

$$\vec{n}(t) = \frac{\vec{t}\,'(t)}{|\vec{t}\,'(t)|} = \frac{1}{1+2t^2}\left(-2t,\, 1-2t^2,\, 2t\right) \text{ und}$$

(6) die **vektorielle Beschleunigung** des Körpers: $\vec{b}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = (0,\, 2,\, 4t)$.

8.E Übungsaufgaben zu Lektion 8.

Ü 8.1 $\boxed{\circ}$

Bestimme die Ableitungen:

(i) : $\left(e^{2x^2-1}\right)'$, **(ii)** : $\left(e^{2x^2-1}\right)''$, **(iii)** : $\left(\dfrac{\tan^2 x}{2} + \ln\cos x\right)'$, **(iv)** : $\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'$.

Ü 8.2 $\boxed{!!}$

Bestimme die Gleichungen der beiden Tangenten g_{T_1}, g_{T_2} an die Kurve
$2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ im Punkt $\big(1,\, y(1)\big)$.
(Man muss diese Gleichung *nicht* zunächst nach y auflösen, um $y(1)$ und $y'(1)$ zu erhalten!)

Ü 8.3 $\boxed{!}$

Finde eine Formel für die n–te Ableitung $\left(x^n\right)^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Ü 8.4 $\boxed{!!}$

Bestimme alle Extrema und Wendepunkte von
(i) : $f(x) = (x-2)^{25}$ und **(ii)** : $g(x) = (x-2)^{26}$.

Ü 8.5 $\boxed{!}$

Bestimme alle Extrema und Wendepunkte von
(i) : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - |x|$, **(ii)** : $g(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x$ und **(iii)** : $h(x) = \dfrac{x^3\,(8-x)}{100}$.
(Versuche jeweils eine grobe Skizze.)

Ü 8.6 $\boxed{!}$

Vergleiche die beiden Kurven $y = f(x) = e^{-x^2}$ und $y = g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ mit einer groben Skizze und bestimme ihre Wendepunkte.

Ü 8.7 $\boxed{*}$

Welche Gerade g durch den Koordinatenursprung berührt die Kurve $y = \ln x$? Bestimme den Berührungspunkt B.

Ü 8.8 $\boxed{*}$

Bestimme die Ableitung $g(u) = f'(x)$ der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan x}$ in Abhängigkeit von $u = \tan x$.

Ü 8.9 $\boxed{!!}$

Der Ortsvektor eines sich in der Ebene bewegenden Teilchens sei $\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$. Für welche t ist die Momentangeschwindigkeit $v = |\vec{r}\,'(t)|$ maximal bzw. minimal und welche Momentanbeschleunigung $b = |\vec{r}\,''(t)|$ ergibt sich für diese t?

Ü 8.10 $\boxed{!!}$

Aus drei gleichbreiten Brettern soll für eine Berghütte eine Dachrinne gezimmert werden. Welchen Neigungswinkel α (von der Horizontalen aus gemessen) müssen die Seitenbretter haben, damit die Dachrinne möglichst viel Wasser fasst?

Ü 8.11 $\boxed{**}$

In einer Altstadt mit engen Gassen soll ein Narrenbaum durch eine $5\,[m]$ breite Gasse in eine senkrecht abbiegende, $3\ [m]$ breite Gasse geschleppt werden. Wie lang darf der Narrenbaum höchstens sein?

9 Integration.

Stichpunkte: Das bestimmte Integral als Summationsprozess, insbesondere als vorzeichenbehafteter Flächeninhalt; Integrationsregeln; Stammfunktion und unbestimmtes Integral als Umkehrung der Differentiation, der Hauptsatz; einige wichtige Stammfunktionen.

9.A Bestimmtes Integral.

9.1 Das **bestimmte Integral** $F = \int_a^b f(x)\,dx$ einer ("halbwegs anständigen") Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$ ist der ***Grenzwert aller Summen*** der Form $f(x_0)\,\Delta x_0 + f(x_1)\,\Delta x_1 + \cdots + f(x_m)\,\Delta x_m$, genommen über alle ("möglichst feinen") Unterteilungen des Intervalls $[a,b]$ in Teilintervalle $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = b$ der Teilintervall–Längen $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

9.2 Wenn x und $y = f(x)$ die Dimension einer ***Länge*** haben, dann ist das **bestimmte Integral** $F = \int_a^b f(x)\,dx$ der ***vorzeichenbehaftete* Flächeninhalt** zwischen dem Kurvenbogen $y = f(x)$, $a \le x \le b$, und dem Intervall $[a,b]$; "vorzeichenbehaftet", weil hierbei *unterhalb* der x–Achse gelegene Flächenteile einen *negativen* Flächeninhalt haben (da ja in diesem Fall $\Delta F_j = f(x_j)\,\Delta x_j \le 0$ ist).

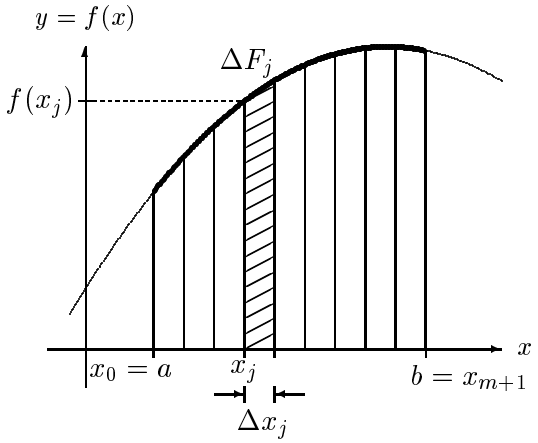


Abbildung 9.1
das bestimmte Integral als Flächeninhalt

So ist z.B. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$, da die beiden oberhalb und unterhalb der x–Achse gelegenen Teilflächen dem Betrage nach denselben Flächeninhalt haben (s. Abbildung 1.5).

Beachte, dass das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ **a priori kein Flächeninhalt *ist***, sondern nur **als Flächeninhalt *interpretiert*** werden kann! Das ***Wesentliche*** am bestimmten Integral ist seine Definition als **Grenzwert eines *Summationsprozesses***:

als Grenzwert einer Summenbildung ist es — salopp formuliert — ***eine "Summe", die aus unendlich vielen unendlich kleinen Summanden besteht.*** (Gerade diese letzte Bemerkung hilft, das bestimmte Integral zu verstehen und sinnvoll einzusetzen!)

Zum Beispiel:

1. Wird z.B. auf der Abszisse die **Zeit** t [*sec*] und auf der Ordinate die **Momentangeschwindigkeit** $y = v(t)$ [*m/sec*] eines sich bewegenden Teilchens aufgetragen, so ist $dL = v(t)\,dt$ die zur Zeit t im Zeitabschnitt dt zurückgelegte Weglänge; "Addition" dieser Teilwege dL liefert die **Gesamt-Länge L des Weges**, den das Teilchen in dem Zeitintervall $a \le t \le b$ zurücklegt: $L = \int_a^b v(t)\,dt$ [*m*] .

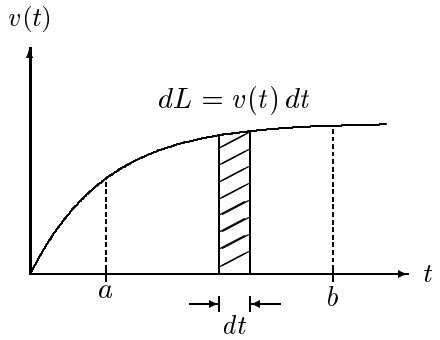


Abbildung 9.2
Geschwindigkeit · Zeit = Weg

2. Bezeichnet die Abszisse die **Zeit** T in [*Tagen*] und wird auf der Ordinate der **Tagesgewinn** (Einnahmen minus Ausgaben) $G(T)$ [*DM/Tag*] abgetragen (*unterhalb* der Abszisse gelegene Flächenteile kennzeichnen hierbei die Tage mit *negativem* Gewinn, also die Tage mit *Verlust*), so ist $d\mathcal{V} = G(T)\,dT$ der Verdienst im Zeitabschnitt dT. Werden diese Teilverdienste "aufaddiert", ergibt sich der **Gesamt-Verdienst** $\mathcal{V}$ im Zeitraum der ersten T_1 Tage: $\mathcal{V} = \int_0^{T_1} G(T)\,dT$ [*DM*] .

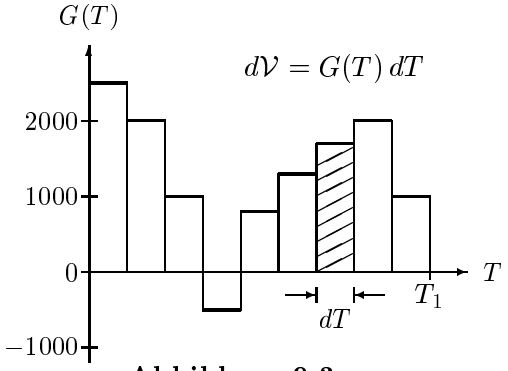


Abbildung 9.3
Tagesgewinn · Tage = Verdienst

Die letzten Bemerkungen und Beispiele machen deutlich:

9.3

1. Die ***Bezeichnung*** der **Integrationsvariablen** x eines bestimmten Integrals spielt keine Rolle und kann nach Belieben geändert werden (wesentlich ist nur die ***Bedeutung***):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi = \ldots$$

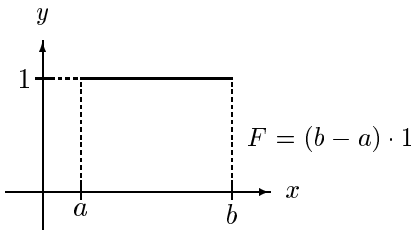
2. Das symbolische dx, dt, $d\xi$, ... kann — etwas salopp — als "sehr kleines" Δx, Δt, bzw. $\Delta \xi$ (also jeweils als "sehr kleine" Differenz) gedeutet werden.

9.B Nützliche Integrationsregeln.

(Die meisten dieser Regeln sind sofort einzusehen, wenn man das bestimmte Integral als Flächeninhalt oder als Summe deutet.)

9.4

$$\boxed{\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a}$$



Hiermit ergibt sich:

9.5
$$\int_b^a dx = a - b = -\int_a^b dx\,, \text{ allgemein:}$$
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

die ***Umkehrung des Integrationsweges*** eines bestimmten Integrals bewirkt eine ***Vorzeichenänderung*** des Integrals.

Trivialerweise gilt:

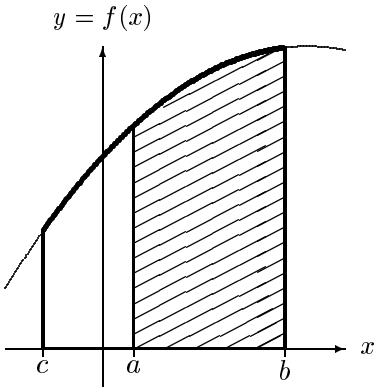
9.6
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

9.7
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Der Integrationsweg "von a nach b" darf — mit einem beliebigen Wert c innerhalb oder außerhalb des Intervalls $[a,b]$ — durch den ***zusammengesetzten Integrationsweg*** "von a nach c", dann "von c nach b" ersetzt werden.

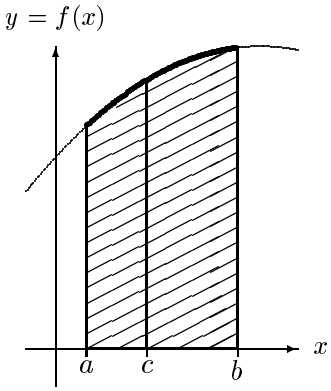
(Hierbei muss natürlich gewährleistet sein, dass der Integrand $f(x)$ auf jedem der Teilwege definiert und "einigermaßen anständig" ist — so, dass die Integrale dort Sinn geben.)

Die Aussage ergibt sich mühelos mit der zweiten Regel in Nr. 9.5 :



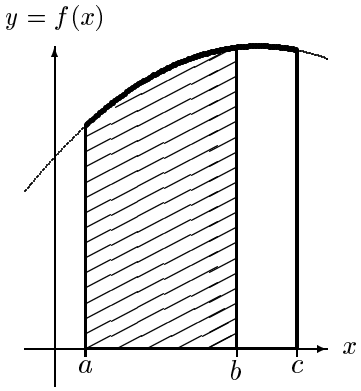
$c \le a < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$



$a \le c \le b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$



$a < b \le c$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

9.8 Ist $f(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

9.9

1. $\displaystyle\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx\,,$

2. $\displaystyle\int_a^b (f(x)\pm g(x))\;dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,,$

aber: (!)

3. $\displaystyle\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\;dx \overset{\text{i.a.}}{\neq} \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$

9.C Stammfunktionen und der Hauptsatz.

Wir wollen uns überlegen, wie das ***Integrieren*** und das ***Differenzieren*** zusammenhängen. Hierzu definieren wir zunächst (für eine *stetige* Funktion $f(x)$):

9.10 Für jeden beliebigen, aber fest vorgegebenen Wert x_0 wird die Funktion $I(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$ als **Integralfuktion** von $f(x)$ bezeichnet (x_0 natürlich nur insoweit beliebig, als dieses Integral noch definiert sein muss!).

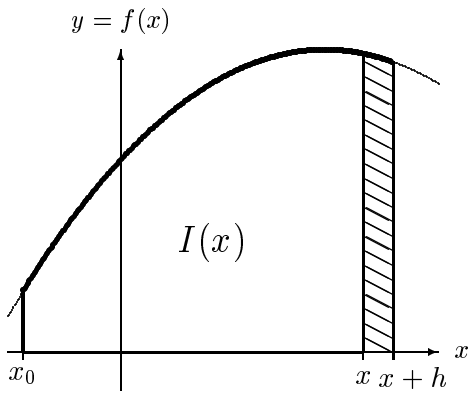


Abbildung 9.4 Integralfunktion $I(x)$

Wie man an der Skizze sehen kann, ist für kleine h:

$f(x)\cdot h \approx \Delta I(x) = I(x+h) - I(x)$, umso genauer, je mehr sich h dem Wert 0 nähert, und damit:

$f(x) \approx \dfrac{I(x+h)-I(x)}{h} \to I'(x)$ für $h\to 0$, d.h.:

9.11 $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi\right) = I'(x) = f(x)}$

Die ***Ableitung*** eines bestimmten Integrals nach der **oberen Grenze** ergibt den **Integranden** an der oberen Grenze.

Integralfunktionen gehören zur Klasse der **Stammfunktionen**:

9.12 Eine Funktion $F(x)$ ist eine **Stammfunktion zu** $f(x)$ **über einem Intervall** $[a,b]$, wenn $F(x)$ über $[a,b]$ differenzierbar ist mit der Ableitung $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

Nr. 9.11 besagt demnach: ***jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion***.

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $[a,b]$, so auch $G(x) = F(x)+c$ für jede Konstante c: denn mit $F'(x) = f(x)$ ist auch $G'(x) = \Big(F(x)+c\Big)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Umgekehrt: **Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Stammfunktionen zu $f(x)$ über $[a,b]$, so gibt es eine Konstante c mit $G(x) = F(x) + c$**: denn mit $F'(x) = G'(x) = f(x)$ ist $\Big(G(x) - F(x)\Big)' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, und damit ist die Funktion $G(x) - F(x) = c$ konstant. (s. Nr. 8.4)

Wir können diese beiden Aussagen zusammenfassen:

9.13

Man kennt *alle* **Stammfunktionen** einer Funktion $f(x)$ über $[a,b]$, wenn man *eine* kennt:

ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $[a,b]$, so ist

$\boxed{\Big\{F(x)+c \mid c \text{ konstant}\Big\}}$ die **Gesamtheit aller Stammfunktionen** zu $f(x)$ über $[a,b]$.

Man schreibt diese Gesamtheit *symbolisch* als **unbestimmtes Integral**:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c \ \ (c \text{ beliebig konstant})}\ .$$

Definitionsgemäß haben wir also:

9.14

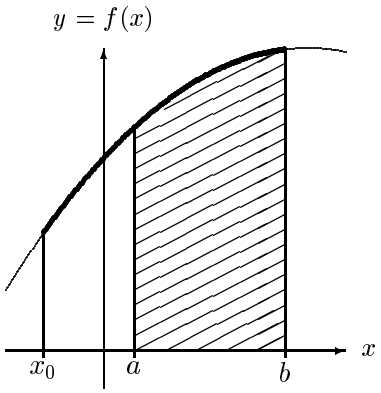
1. $$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = F'(x) = f(x)}$$

2. $$\boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) + c \ \ (c \text{ konst.})}$$

Das unbestimmte Integral ist die Umkehrung der Ableitung.

(Aus diesem Grund nennt man das unbestimmte Integral gelegentlich auch die "Aufleitung".)

Ist nun $f(x)$ *stetig* und $F(x)$ (irgend–) eine Stammfunktion zu $f(x)$, so ist die Integralfunktion $I(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$ ebenfalls eine Stammfunktion (9.10) und es gibt eine Konstante c so, dass $I(x) = F(x) + c$. Damit gilt:



$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\overset{(9.7)}{=} \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx = \\
&\overset{(9.5)}{=} \int_{x_0}^b f(x)\,dx - \int_{x_0}^a f(x)\,dx \\
&\overset{(9.3,1.)}{=} I(b) - I(a) = \\
&= \Big(F(b) + c\Big) - \Big(F(a) + c\Big) = \\
&= F(b) - F(a)\,.
\end{aligned}$$

Wir haben erhalten:

9.15

Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung:

Ist $f(x)$ *stetig* und $F(x)$ (irgend–) eine **Stammfunktion** zu $f(x)$ über $[\,a,b\,]$, so ist

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^b = F(x)\Big|_{x=a}^b = F(b) - F(a)}\,.$$

Für $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^b$ oder $F(x)\Big|_{x=a}^b$ sagt man: "$F(x)$ *in den Grenzen* $x = a$ bis b ".

Dieser Hauptsatz ist einer der nützlichsten Sätze zur Berechnung bestimmter Integrale !
Es sind jedoch noch zwei **Bemerkungen** angebracht:

9.16

Niemals über "Problemstellen" des Integranden oder der Stammfunktion hinwegintegrieren! :

wenn es z.B. im Integrationsintervall $[\,a,b\,]$ eine Problemstelle c gibt, ***unterteilt*** man das Intervall $[\,a,b\,]$ an dieser Stelle c in zwei Teilintervalle (so dass also $f(x)$ im Inneren der beiden Teilintervalle *stetig* ist!) :

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Ist dann

$F_1(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $[\,a,c\,]$ und

$F_2(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $[\,c,b\,]$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \Big(F_1(c) - F_1(a)\Big) + \Big(F_2(b) - F_2(c)\Big)\,.$$

9.17

Bei der Bestimmung der Werte einer Stammfunktion $F(x)$ an der unteren und oberen Grenze: $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b} = F(x)\Big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)$

gibt es folgende **Konventionen** :

In den Fällen $a = -\infty$, $b = \infty$ ist

$\boxed{F(-\infty) = \lim\limits_{a\to-\infty} F(a)\,,\ F(\infty) = \lim\limits_{b\to\infty} F(b)}$, und wenn

$F(x)$ bei a oder b unstetig ist (eine Pol– oder Sprungstelle hat), dann ist

$\boxed{F(a) = \lim\limits_{x\to a+0} F(x)\,,\ F(b) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x)}$.

z.B.: 1. Es ist

$$f(x) = 2(x+1) - \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2x+3 & \text{für} \quad x<0 \\ 2x+1 & \text{für} \quad x>0 \end{cases}$$

und $(x^2+3x)' = 2x+3\,,\ (x^2+x)' = 2x+1\,.$

Damit ist $F_1(x) = x^2+3x$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $]-\infty, 0[$ und $F_2(x) = x^2+x$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $]0,\infty[$, und wir haben z.B.:

$$\int_{-1.5}^{1.5} \left(2(x+1) - \frac{|x|}{x}\right) dx =$$
$$= \int_{-1.5}^{0} (2x+3)\,dx + \int_{0}^{1.5} (2x+1)\,dx =$$
$$= \Big[x^2+3x\Big]_{x=-1.5}^{0} + \Big[x^2+x\Big]_{x=0}^{1.5} =$$
$$-(2.25-4.5) + (2.25+1.5) = 6\,.$$

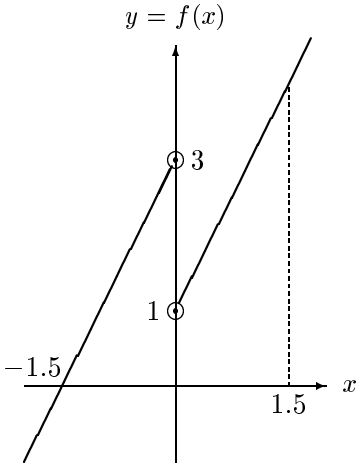


Abbildung 9.5
$f(x) = 2(x+1) - \dfrac{|x|}{x}$

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}$, also ist $F(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$ eine **Stammfunktion** zu $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{\cos x}{x}$, d.h. es ist $\displaystyle\int \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right) dx = -\frac{\sin x}{x} + c$ (c konstant), und wir haben z.B.

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right) dx = -\left[\frac{\sin x}{x}\right]_0^{\pi/2} = -\left(\frac{1}{\pi/2} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = -\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \quad (= 0.36338)\,.$$

3. Wegen $\left(e^{-x^2}\right)' = -2x\,e^{-x^2}$ ist $F(x) = -e^{-x^2}$ eine **Stammfunktion** zu $f(x) = 2x\,e^{-x^2}$,

d.h. es ist $\displaystyle\int 2x\,e^{-x^2}\,dx = -e^{x^2} + c$ (c konstant), und (z.B.)

$$\int_0^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} - e^0\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}\,.$$

9.D Einige wichtige Stammfunktionen.

Wenn man einige Standard–Ableitungen kennt, lassen sich mit Hilfe der Ableitungsregeln *sämtliche* Ableitungen weitgehend problemlos erhalten. Das Integrieren geht nicht so einfach, denn es gibt zwar einige Integrationsmethoden, die beim Integrieren helfen können, aber es gibt keine Regel, die angibt, *welche* Methode im konkreten Fall anzuwenden ist: das Ziel beim Interieren ist ja, ***eine Funktion zu finden, die genau den Integranden als Ableitung hat***; hierzu muss dieser häufig so "manipuliert" werden (durch Substitution und andere Integrations–"Tricks"), dass er einer bekannten, "passenden" Ableitung ähnlich wird. (Siehe auch die nächste Lektion, Abschnitt 10.1: Integration mit Substitution!)

Während das Differenzieren ein Handwerk ist, ist das Integrieren eine Kunst, die Fingerspitzengefühl und vor allem Erfahrung voraussetzt.

c ist jeweils eine ***beliebige Konstante***:

9.18 $$\boxed{\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)}$$

denn für $a \neq -1$ ist:
$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{(a+1)\,x^a}{a+1} = x^a\,.$$

(Zum hier ausgeschlossenen Fall $a = -1$ siehe die nächste Nummer!)

z.B.:

$a = 7 \quad : \quad \int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c\,,$

$a = \frac{1}{2} \quad : \quad \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{3/2} + c = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + c\,,$

$a = -\frac{1}{2} \quad : \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c\,,$

$a = -4 \quad : \quad \int \frac{dx}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3} + c\,.$

$a = 1 \quad : \quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c\,,$

$a = \frac{1}{3} \quad : \quad \int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\,x^{4/3} + c = \frac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x} + c\,,$

$a = -2 \quad : \quad \int \frac{dx}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c\,,$

9.19

$$\boxed{\begin{array}{c|c} (i) & \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0) \\ \hline (ii) & \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right| + c \end{array}}$$

Denn: (i) für $x > 0$ ist $|x| = x$, somit $\Big(\ln|x|\Big)' = \Big(\ln x\Big)' = \frac{1}{x}$, und für $x < 0$ ist $|x| = -x$, somit $\Big(\ln|x|\Big)' = \Big(\ln(-x)\Big)' = \frac{1}{-x}\,(-1) = \frac{1}{x}$, also für $x \neq 0$ *stets* $\Big(\ln|x|\Big)' = \frac{1}{x}$.

(ii) Die zweite Regel folgt hieraus mit Hilfe der Kettenregel der Differentialrechnung:

$\Big(\ln|f(x)|\Big)' = \frac{1}{f(x)}\,f'(x)$, also: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right| + c\,.$ ∎

z.B.: 1. Wegen $(\cos x)' = -\sin x$ ist $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$;
2. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c = \ln\sqrt{x^2+1} + c$.

Für $a > 0$ und beliebige λ ist $\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}$ und $\left(a^{\lambda x}\right)' = \left(e^{\lambda x \ln a}\right)' = \left(e^{\lambda x \ln a}\right)\lambda \ln a = \lambda a^{\lambda x}\ln a$, damit:

9.20

(i)	$\int e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + c \quad (\lambda \neq 0)$
(ii)	$\int a^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}a^{\lambda x}\ln a + c$

z.B.: 3. $\int \left(e^{3x} + e^{-3x}\right)dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + c = \frac{1}{3}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) + c$,
4. $\int 2^{-x/3}\,dx = 3\cdot 2^{-x/3}\ln 2 + c$, **5.** $\int \frac{1+e^{4x}}{e^x}\,dx = \int \left(e^{-x} + e^{3x}\right)dx = -e^{-x} + \frac{1}{3}e^{3x} + c$.

9.21

(i)	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
(ii)	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

denn: $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$.

z.B.: 6. $\int \left(\sin 3x - \cos 5x\right)dx = -\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\sin 5x + c$.

9.E Übungsaufgaben zu Lektion 9.

Ü 9.1 $\boxed{\circ}$

Berechne die Integrale:

$I_1 = \int_{-3}^{5} 7\,dx$, $I_2 = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)dx$, $I_3 = \int_1^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx - \int_8^{10} t^{-1/3}\,dt$.

Ü 9.2 $\boxed{\circ}$

Berechne die Integrale:

$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$, $I_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx$, $I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$,

$I_5 = \int_{-\pi/2}^{0} \cos x\,dx$, $I_6 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$. Warum bekommt man jedesmal dasselbe Ergebnis?

Ü 9.3 $\boxed{!!}$

Berechne die Integrale:

$I_1 = \int_0^1 x^{-\lambda}\,dx$ für $\lambda < 1$, $I_2 = \int_{1/e}^{e} x^{-\lambda}\,dx$ für $\lambda = 1$, $I_3 = \int_1^{\infty} x^{-\lambda}\,dx$ für $\lambda > 1$.

Ü 9.4 $\boxed{!}$

Berechne die Integrale:

$$I_1 = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} 3\,e^{-|x|}\,dx\,,\quad I_2 = \int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx\,,\quad I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx\,,\quad I_4 = \int_{-1}^{1}\left(2+\frac{|x|}{x}\right)dx\,.$$

Ü 9.5 $\boxed{!!}$

Bestimme die Integrale: (beachte dabei: $\Big(\ln|f(x)|\Big)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ und $\Big(f(x)^2\Big)' = 2f(x)f'(x)$):

$$I_1 = \int \frac{3-x^2}{9x-x^3}\,dx\,,\quad I_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{3-x^2}{9x-x^3}\,dx\,,\quad I_3 = \int \frac{dx}{x\,\ln x}\,,\quad I_4 = \int_e^{e^3} \frac{dx}{x\,\ln x}\,,$$

$$I_5 = \int \sin 2x\,\cos 2x\,dx\,,\quad I_6 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x\,\cos 2x\,dx\,,\quad I_7 = \int \frac{\ln x}{x}\,dx\,,\quad I_8 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx\,.$$

Ü 9.6 $\boxed{**}$

Finde (z.B. mit Hilfe einer Skizze für die Funktion $y = \frac{1}{x}$) für das Integral $I = \displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{x}$ eine Abschätzung der Form: $a = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots < I < \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots = b$ und vergleiche die hiermit gewonnene Näherung $I \approx \dfrac{a+b}{2}$ mit dem exakten Wert des Integrals.

Ü 9.7 $\boxed{!}$

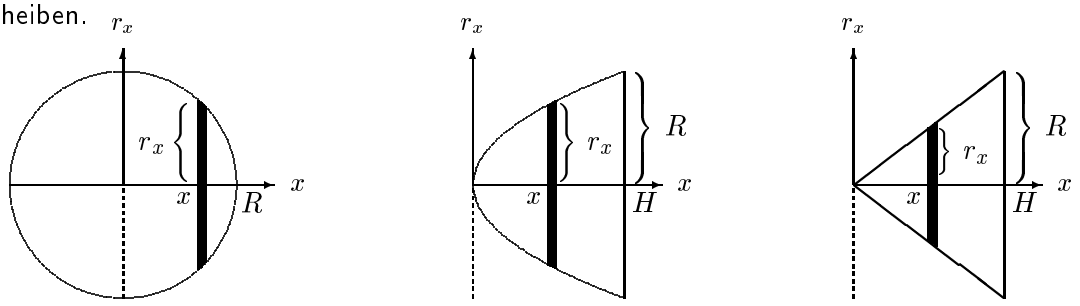
Die Erdbeschleunigung ist auf der Erdoberfläche näherungsweise konstant: $g = 9.81\ [m/sec^2]$. Welche Tiefe L hat demnach ein Brunnenschacht, wenn ein Stein genau $1.9\ [sec]$ benötigt, um unten anzukommen, und mit welcher Geschwindigkeit trifft er unten auf?

Ü 9.8 $\boxed{*}$

Welche Masse m in $[kg]$ hat ein Stab mit der Länge $L = 200\ [cm]$ und der Querschnittsfläche $q = 100\pi\ [cm^2]$, wenn die Dichte des Stab–Materials näherungsweise durch $\rho(x) = 2 + x^2 \cdot 10^{-4}\ [g/cm^3]$ beschrieben werden kann (x = Abstand in $[cm]$ von einem der Stab–Enden: $0 \le x \le 200$) ? Mit welcher konstanten Dichte ρ_0 käme man auf dieselbe Gesamtmasse?

Ü 9.9 $\boxed{*}$

Bestimme das Volumen (i) einer Kugel vom Radius R und (ii) eines Rotationsparaboloides, (iii) eines geraden Kreiskegels, beide der Höhe H und mit dem Grundkreisradius R. Schneide hierzu jeweils den Körper in "sehr dünne Scheiben" der Dicke dx und "addiere" die Rauminhalte dV dieser "dünnen" Scheiben.



Kugel Paraboloid Kegel

10 Substitution und Trennung der Variablen.

Stichpunkte: Verwendung der symbolischen Differentialquotienten wie echte Quotienten: Integration bestimmter und unbestimmter Integrale mit Hilfe geeigneter Substitutionen, Lösen von einfachen Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen, Berechnung von Integralen längs eines Weges.

Der Inhalt dieser letzten Lektion des Vorkurses lässt sich (nicht ganz im Sinne der Mathematiker, wohl aber nach bewährter Praktiker–Art) im Wesentlichen in der folgenden Feststellung zusammenfassen:

10.1 Man kann mit jedem gewöhnlichen Differentialquotienten $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ ("dy nach dx") rechnen, als wäre er ein echter Bruch ("dy durch dx"); die Differentiale dx und $dy = y'(x)\,dx$ können hierbei als "sehr kleine" Delta, d.h. als "sehr kleine" Differenzen oder Änderungen interpretiert werden.

("gewöhnlich" bedeutet hier, dass die abgeleiteten Funktionen *nur eine* unabhängige Veränderliche haben. Für nicht–gewöhnliche, d.h. partielle Differentialquotienten ist 10.1 *nicht* richtig!)

Wir wollen den Nutzen dieser Feststellung — jeweils nur in einfachen Fällen — in drei Anwendungsbereichen aufzeigen (die unabhängig hiervon auch ganz gute Übungen zur Integration sind).

10.A Integration mit Substitution.

10.2 Ein bestimmtes oder unbestimmtes Integral lässt sich mitunter einfacher berechnen, wenn man statt der alten Integrationsvariablen x eine "geeignete" neue Integrationsvariable u einführt: hierbei ist

entweder die alte Variable x eine Funktion der neuen Variablen u: $\boxed{x = x(u)}$,

oder die neue Variable u ist eine Funktion der alten Variablen x: $\boxed{u = u(x)}$.

In beiden Fällen ist statt des Differentials dx das neue Differential du einzuführen (nicht einfach nur zu ersetzen!):

10.3 Im Fall der **Substitution** $\boxed{x = x(u)}$ ist $\dfrac{dx}{du} = x'(u)$, somit $\boxed{dx = x'(u)\,du}$,

im Fall der **Substitution** $\boxed{u = u(x)}$ ist $\dfrac{du}{dx} = u'(x)$, somit $\boxed{u'(x)\,dx = du}$.

Zum Beispiel: Es gibt sehr trickreiche Substitutionen, auf die man, wenn man sie nicht gerade kennt, auf Anhieb nicht kommt. Wir wollen hier die Substitutionsregel nur anwenden, um Integrale, die bekannten Integralen sehr ähnlich sind, in solche umzuformen: (im Folgenden sei stets c eine beliebige Konstante.)

1. $\boxed{\int \frac{dx}{2x+1}}$: die Substitution $\boxed{u = 2x+1}$ liefert: $\frac{du}{dx} = 2$, also: $\boxed{dx = 2\,du}$; hiermit ist

$$\int \frac{dx}{2x+1} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + c = 2\ln|2x+1| + c\,.$$

2. $\boxed{\int \tan\left(3\pi x\right) dx}$: die Substitution $\boxed{u = 3\pi x}$ liefert: $\frac{du}{dx} = 3\pi$, also: $\boxed{dx = \frac{du}{3\pi}}$, und damit:

$$\int \tan\left(3\pi x\right) dx = \frac{1}{3\pi}\int \tan u\,du = -\frac{1}{3\pi}\,\ln|\cos u| + c = -\frac{1}{3\pi}\,\ln|\cos 3\pi x| + c\,.$$

(siehe das 1. Beispiel zu Nr. 9.19)

3. $\boxed{\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx}$: die Substitution $\boxed{x = \ln u}$ bzw. (gleichwertig) $\boxed{u = e^x}$ liefert: $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$, somit:

$\boxed{dx = \frac{du}{u}}$, und: $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{u-1}{u+1}\,\frac{du}{u}$; wenn man den letzten Bruch aufspaltet:

$\frac{u-1}{(u+1)\,u} = \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}$, bekommt man:

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = 2\int \frac{du}{u+1} - \int \frac{du}{u} = 2\ln|u+1| - \ln|u| + c = 2\ln\left(e^x+1\right) - x + c\,.$$

10.4

Faustregel:

Wenn der Integrand von der Form: $\boxed{g'(x)\cdot \text{Funktion von } g(x)}$ ist, dann

empfiehlt sich oft die Substitution $\boxed{u = g(x)}$:

denn dann ist $\frac{du}{dx} = g'(x)$, also $g'(x)\,dx = du$.

4. $\boxed{\int \cos x\,\sqrt{\sin x}\,dx}$: die Substitution $\boxed{u = \sin x}$ ergibt: $\frac{du}{dx} = \cos x$, folglich: $\boxed{\cos x\,dx = du}$

und damit: $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\,u^{3/2} + c = \frac{2}{3}\,u\,\sqrt{u} + c = \frac{2}{3}\,\sin x\,\sqrt{\sin x} + c\,.$

Wenn ein ***bestimmtes Integral*** $\int_a^b f(x)\,dx$ mit Hilfe einer Substitution $u = u(x)$ oder $x = x(u)$ zu lösen ist, kann man

(i) zunächst das *unbestimmte* Integral in der gezeigten Weise ermitteln:
$\int f(x)\,dx = \cdots = G(u) + c = F(x) + c$, und kann *danach* ***die gegebenen Grenzen*** einsetzen: $\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b}$, oder

(ii) ***man rechnet die Grenzen um*** (in Grenzen für die *neue* Variable u):

10.5

$$\int_a^b \cdots\, dx = \int_{u_a}^{u_b} \cdots\, du \text{ , wobei}$$

im Fall $u = u(x)$: $u_a = u(a)$, $u_b = u(b)$, und
im Fall $x = x(u)$: u_a , u_b durch die Gleichungen $x(u_a) = a$, $x(u_b) = b$ gegeben sind .

Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(u)\Big]_{u=u_a}^{u_b}$.
(Eine Rücksubstitution ist in diesem Fall nicht mehr nötig!)

Zum Beispiel: Wir nehmen wieder die Integrale von eben:

5. (s.o. Beispiel **1.**): $\boxed{u = 2x + 1}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} = 2\int_1^3 \frac{du}{u} = 2\Big[\ln|u|\Big]_{u=1}^{3} = 2\Big(\ln 3 - \ln 1\Big) = 2\ln 3\,,$$

(denn: $u_a = u(0) = 1$, $u_b = u(1) = 3$) oder, gleichwertig:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} = 2\Big[\ln|2x+1|\Big]_{x=0}^{1} = 2\Big(\ln 3 - \ln 1\Big) = 2\ln 3\,.$$

6. (s.o. Beispiel **2.**): $\boxed{u = 3\pi x}$

$$\int_0^{1/12} \tan\Big(3\pi x\Big)\, dx = \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi/4} \tan u\, du = -\frac{1}{3\pi}\Big[\ln|\cos u|\Big]_{u=0}^{\pi/4} =$$
$$= -\frac{1}{3\pi}\Big(\ln\cos\pi/4 \;-\ln\cos 0\Big) = -\frac{1}{3\pi}\Big(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1\Big) = \frac{1}{3\pi}\ln\sqrt{2}\,,$$

(denn: $u_a = u(0) = 0$, $u_b = u(1/12) = \pi/4$) oder, gleichwertig:

$$\int_0^{1/12} \tan\Big(3\pi x\Big)\, dx = -\frac{1}{3\pi}\Big[\ln|\cos(3\pi x)|\Big]_{x=0}^{1/12} = -\frac{1}{3\pi}\Big(\ln\cos\pi/4 \;-\ln\cos 0\Big) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{3\pi}\ln\sqrt{2}\,.$$

7. (s.o. Beispiel **3.**): $\boxed{x = \ln u}$ bzw. $\boxed{u = e^x}$

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \int_1^5 \left(\frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}\right) du = \Big[2\ln|u+1| - \ln|u|\Big]_{u=1}^5 =$$

$$= 2\ln 6 - \ln 5 - 2\ln 2 = \ln 36 - \ln 5 - \ln 4 = \ln\frac{36}{5\cdot 4} = \ln(9/5)\,,$$

(denn: $u_a = e^0 = 1\,,\ u_b = e^{\ln 5} = 5$) oder, gleichwertig:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \Big[2\ln(e^x + 1) - x\Big]_{x=0}^{\ln 5} = 2\ln 6 - \ln 5 - 2\ln 2 \;=\; \ln(9/5)\,.$$

8. (s.o. Beispiel **4.**): $\boxed{u = \sin x}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,\sqrt{\sin x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}\,\Big[u\sqrt{u}\Big]_{u=0}^1 = \frac{2}{3}\,(1-0) = \frac{2}{3}\,,$$

(denn: $u_a = \sin 0 = 0\,,\ u_b = \sin \pi/2 \;= 1$) oder, gleichwertig:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,\sqrt{\sin x}\, dx = \frac{2}{3}\,\Big[\sin x\,\sqrt{\sin x}\Big]_{x=0}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\,\left(\sin\frac{\pi}{2}\,\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - 0\right) = \frac{2}{3}\,.$$

10.B Trennung der Variablen.

Eine **Differentialgleichung der Ordnung 1** für eine (gesuchte) Funktion $y = y(x)$ hat im allgemeinsten Fall die Form: $\boxed{F\Big(x, y(x), y'(x)\Big) = 0}$.

Wenn man diese Gleichung nach $y'(x)$ auflösen kann — was keineswegs immer möglich ist —, ergibt sich eine Differentialgleichung 1. Ordnung der etwas spezielleren Form: $\boxed{y' = f(x,y)}$.

Den einfachen Sonderfall hiervon: $\boxed{y' = f(x)}$ haben wir mit den unbestimmten Integralen bereits "erledigt": die Lösungen sind: $y(x) = \int f(x)\, dx \;+ c$.

Wir wollen hier kurz auf einen anderen, nicht ganz so einfachen Sonderfall eingehen:

10.6 Eine Differentialgleichung 1. Ordnung der Art: (*) $\boxed{y' = f(x)\,g(y)}$ kann, wenn die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ "einigermaßen gutartig" sind, durch ***Trennung der Variablen*** gelöst werden:

hierzu fasst man den Differentialquotienten $y' = \dfrac{dy}{dx}$ als echten Bruch auf und "sortiert": alles mit y nach links, alles mit x nach rechts (so, dass dy und dx *nicht* im Nenner stehen!): $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$: (die Variablen sind getrennt)

Jetzt werden beide Seiten integriert: (**) $\boxed{\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + c}$.

10.7

Ist $H(y)$ eine Stammfunktion der Funktion $\dfrac{1}{g(y)}$ und $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$, so liefert die Gleichung (**), wenn man die Integrationskonstanten von beiden Seiten zu einer Konstanten c auf der rechten Seite zusammenfasst:

$\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix}$ $\boxed{H(y) = F(x) + c}$.

Durch diese Gleichung sind die **Lösungen** $y = y(x)$ der ursprünglichen Differentialgleichung (*) $\boxed{y' = f(x)\,g(y)}$ *implizit* gegeben.

Um die Lösungen *explizit* zu bekommen, muss man die Gleichung $\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix}$ noch nach $y = y(x)$ auflösen — was mitunter gelingt.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass dieser Lösungsweg "legal" ist und wirklich die Lösungen der Differentialgleichung (*) liefert: Aus der Gleichung $H(y) = F(x) + c$ folgt nämlich mit Hilfe der Kettenregel:
$f(x) = F'(x) = \dfrac{d}{dx}\,H\left(y(x)\right) = H'(y)\,y' = \dfrac{y'}{g(y)}$, somit: $y' = f(x)\,g(y)$. ∎

Diese Methode der ***Trennung der Variablen*** ist in der Regel (sofern sie anwendbar ist) die ***einfachste Lösungsmethode*** für Differentialgleichungen der Form (*) $\boxed{y' = f(x)\,g(y)}$.

z.B.: (c , c_0 , c_1 , ... sind jeweils *beliebige* Konstanten)

1. $\boxed{y' = \dfrac{y}{x}}$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c_0 \Rightarrow$

$|y| = e^{c_0 + \ln|x|} = e^{c_0}\,|x| \Rightarrow y = \pm e^{c_0}\,x$, d.h. $\boxed{y = cx}$ (c bel. konst.).

2. $\boxed{yy' = e^{-x}}$: $y\,\dfrac{dy}{dx} = e^{-x} \Rightarrow y\,dy = e^{-x}\,dx \Rightarrow \displaystyle\int y\,dy = \int e^{-x}\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -e^{-x} + c_0 \Rightarrow$

$y^2 = c - 2e^{-x} \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{c - 2e^{-x}}}$.

3. $\boxed{xy' = \dfrac{1-y^2}{y}}$: $x\,\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{y} \Rightarrow \dfrac{y}{1+y^2}\,dy = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}\,\ln\left(1+y^2\right) = \ln|x| + c_0 \Rightarrow \ln\left(1+y^2\right) = 2\ln|x| + c_1 = \ln x^2 + c_1 \Rightarrow$

$1 + y^2 = e^{c_1 + \ln x^2} = e^{c_1}\,x^2 \Rightarrow y^2 = cx^2 - 1$, d.h. $\boxed{y = \pm\sqrt{cx^2 - 1}}$; wenn die Lösung $y(x)$ mit $y(1) = -1$ gesucht ist, muss die Konstante c entsprechend bestimmt werden:

$-1 \overset{!}{=} y(1) = \pm\sqrt{c-1} \Rightarrow c = 2$ und $\boxed{y = -\sqrt{2x^2-1}}$.

4. $\boxed{y' = \tan x \, \tan y}$: $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \, \tan y \Rightarrow \dfrac{dy}{\tan y} = \tan x \, dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{\tan y} = \int \tan x \, dx$, d.h.

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \Rightarrow \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + c_0 = \ln\frac{1}{|\cos x|} + c_0 \Rightarrow$$

$$|\sin y| = e^{c_0}\,\frac{1}{|\cos x|} \Rightarrow \sin y = \frac{c}{\cos x}\text{, somit: } \boxed{y = \sin^{-1}\left(\frac{c}{\cos x}\right)} .$$

Wenn die Lösung $y(x)$ mit $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ gesucht ist, muss wieder c passend bestimmt werden:

$$\frac{\pi}{4} \overset{!}{=} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{c}{\cos\,\pi/4}\right) = \sin^{-1}\left(c\sqrt{2}\right) \Rightarrow c\sqrt{2} = \sin\,\pi/4 = 1/\sqrt{2}\text{, also: } c = 1/2\text{, und}$$

damit $\boxed{y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2\cos x}\right)}$.

5. Bemerkung zur Exponentialfunktion :

Wachstums– und **Zerfallsprozesse** werden erfahrungsgemäß durch Funktionen $f(t)$ beschrieben, deren ***relative Änderung in einem kurzen Zeitintervall*** Δt ***näherungsweise proportional zur Länge des Zeitintervalls*** ist; mit einer Proportionalitätskonstanten γ ist also:

(i) $\boxed{\dfrac{\Delta f(t)}{f(t)} \approx \gamma\,\Delta t}$, somit auch: $\dfrac{\Delta f(t)}{\Delta t} \approx \gamma\, f(t)$.

Das gilt umso genauer, je kürzer die Zeitintervalle werden: im Grenzfall $\Delta t \to 0$ hat man demnach Gleichheit:

$$\gamma\, f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)\,;$$

wenn man diese Funktion noch "normiert": (ia) $\boxed{f'(0) = f(0) = 1}$, so hat man die Bedingungen:

(ii) $\boxed{f'(t) = f(t) \text{ und } f(0) = 1}$.

Trennung der Variablen liefert nun sofort: $\dfrac{df}{dt} = f \Rightarrow \dfrac{df}{f} = dt \Rightarrow \displaystyle\int \frac{df}{f} = \int dt \Rightarrow$

$$\ln|f| = t + c_0 \Rightarrow |f| = e^{t+c_0} = e^{t_0}\, e^t \Rightarrow f(t) = c\, e^t \text{ mit } 1 \overset{!}{=} f(0) = c\,.$$

Wir erhalten als ***eindeutig bestimmte Lösung*** des Problems (i), (ia) bzw. (ii) die

Exponentialfunktion $\boxed{\boxed{f(t) = e^t}}$.

10.C Integration längs eines Weges.

Die Feststellung 10.1 vom Anfang dieser Lektion schließt sinngemäß auch Vektoren ein:

10.8 Ist $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ein variabler Vektor (z.B. ein von der Zeit t abhängiger Orstvektor), so kann man mit dem gewöhnlichen Differentialquotienten $\vec{r}\,'(t) = \dfrac{\vec{r}(t)}{dt}$ ("$d\vec{r}$ nach dt") rechnen, als wäre er ein echter Bruch ("$d\vec{r}$ durch dt"): das vektorielle Differential $\boxed{d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,dt}$ kann hierbei als die "sehr kleine" vektorielle Differenz oder Änderung interpretiert werden, die sich aus der Änderung dt von t ergibt.

Denn: mit $\vec{r} = (x, y, z)$ und $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ ist

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) = \left(\frac{dx}{dt}\,dt,\ \frac{dy}{dt}\,dt,\ \frac{dz}{dt}\,dt\right) = \Big(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\Big)\ dt = \vec{r}\,'(t)\,dt\,. \qquad \blacksquare$$

Hiermit lassen sich z.B. allgemeine Wegintegrale definieren und berechnen:

10.9 Das allgemeine **Wegintegral** (**=Linien–** oder **Kurvenintegral**) einer vektorwertigen Funktion $\vec{K}(\vec{r}) = \Big(P(\vec{r}),\ Q(\vec{r}),\ R(\vec{r})\Big)$ längs eines Weges $C:\ \vec{r} = \vec{r}(t) = \Big(x(t),\ y(t),\ z(t)\Big)\ ,\ \ a \le t \le b\,,$ ist:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{K}\cdot d\vec{r} &= \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \\ &= \int_a^b \vec{K}\Big(\vec{r}(t)\Big)\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \\ &= \int_a^b \Big(P\Big(\vec{r}(t)\Big)\,x'(t) + Q\Big(\vec{r}(t)\Big)\,y'(t) + R\Big(\vec{r}(t)\Big)\,z'(t)\Big)\ dt\,.\end{aligned}$$

Diese Wegintegrale werden am bequemsten und anschaulichsten physikalisch gedeutet:

Ist $\vec{K}$ ein **Kraftvektor** (z.B. die Schwerkraft), so ist $A = \int_C \vec{K}\cdot d\vec{r}$ die von der Kraft $\vec{K}$ bei der Bewegung eines Massenpunktes längs des Weges C geleistete **Arbeit**,

oder ist C ein **elektrischer Leiter** und $\vec{K}$ ein **elektrisches Feld**, so ist $U = \int_C \vec{K}\cdot d\vec{r}$ die **Spannung** zwischen dem Anfang $\vec{a} = \vec{r}(a)$ und Ende $\vec{b} = \vec{r}(b)$ des elektrischen Leiters.

z.B.: Ein schwerer Massenpunkt M der Masse m (mit Ortsvektor $\vec{r}$) bewege sich unter dem Einfluss einer Kraft $\vec{K}$ vom Punkt $P(1|0|h)$ längs einer Windung C einer Schraubenlinie mit der Ganghöhe h und dem Radius 1, mit der z–Achse als Schraubenachse, abwärts bis zum Punkt $Q(1|0|0)$. Wir wollen ausrechnen, welche Arbeit die Kraft $\vec{K}$ hierbei leistet, wenn sich $\vec{K}$ zusammensetzt aus der Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ und einer zum Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ hin gerichteten, elastischen, also zum Abstand $\mathcal{O}M$ proportionalen Zugkraft $-\lambda\vec{r}$ (g die Erdbeschleunigung und $\lambda > 0$ eine Proportionalitätskonstante):

Zunächst benötigen wir eine Darstellung der Schraubenlinienwindung C:
$C:\ x = \cos t\,,\ y = \sin t\,,\ z = \frac{h}{2\pi}\,t$ mit $2\pi \geq t \geq 0$
(M bewegt sich von oben nach unten!)

Auf C ist dann:
$dx = -\sin t\,dt\,,\ dy = \cos t\,dt\,,\ dz = \frac{h}{2\pi}\,dt$, und es ist

$$\vec{K}\cdot d\vec{r} = \Big(-mg\vec{e}_z - \lambda\vec{r}\Big)\cdot d\vec{r} =$$
$$= \begin{pmatrix} -\lambda x \\ -\lambda y \\ -mg-\lambda z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$
$$= -\lambda x\,dx - \lambda y\,dy - (mg+\lambda z)\,dz\,.$$

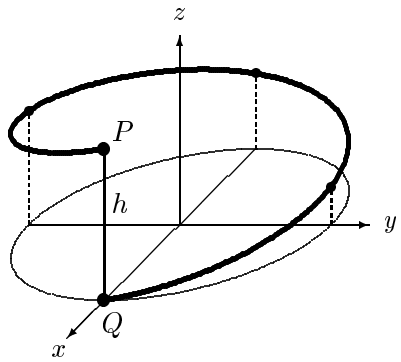


Abbildung 10.1
eine Windung einer Schraubenlinie mit der Ganghöhe h

Damit ist $A = \int_C \vec{K}\cdot d\vec{r} =$

$$= -\int_C \lambda x\,dx + \lambda y\,dy + (mg+\lambda z)\,dz =$$
$$= -\int_{2\pi}^{0}\left(-\lambda\cos t\,\sin t + \lambda\sin t\,\cos t + \left(\lambda\frac{ht}{2\pi} + mg\right)\frac{h}{2\pi}\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\lambda h^2}{4\pi^2}\,t + \frac{mgh}{2\pi}\right)dt =$$
$$= \left[\frac{\lambda h^2}{8\pi^2}\,t^2 + \frac{mgh}{2\pi}\,t\right]_{t=0}^{2\pi} = \frac{\lambda}{2}\,h^2 + mgh\,.$$

Dieselbe Arbeit verrichtet $\vec{K}$, wenn man statt der Schraubenwindung C den *direkten Weg* C_0 von P nach Q wählt: Mit $C_0: x = 1,\ y = 0,\ h \geq z \geq 0$ ist $dx = dy = 0$ und somit

$$A = -\int_h^0 \Big(\lambda z + mg\Big)\,dz = \left[\frac{\lambda}{2}\,z^2 + mgz\right]_{z=0}^{h} = \frac{\lambda}{2}\,h^2 + mgh\,.$$

(Das ist nicht immer so, dass die Arbeit, die eine Kraft leistet, nicht vom Weg abhängt, sondern nur vom Anfangs– und Endpunkt des Weges: das trifft (definitionsgemäß) nur auf Kräfte zu, die *konservativ* sind!)

10.D Übungsaufgaben zu Lektion 10.

Ü 10.1 $\boxed{!!}$

Berechne die Integrale mit der angegebenen Substitution $u = u(x)$:

$$(i) \quad I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,, \qquad \begin{cases} 1. & u = \sqrt{1+x^2}\,, \\ 2. & u = 1+x^2\,; \end{cases}$$

$$(i) \quad I_2 = \int_4^\infty \frac{x^2}{(x-3)^{10}}\,dx\,, \quad u = x-3\,;$$

$$(iii) \quad I_3 = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx\,, \quad u = 1+x^3\,;$$

$$(iv) \quad I_4 = \int_0^7 x\,\sqrt[3]{x+1}\,dx\,, \qquad u = x+1\,.$$

Ü 10.2 $\boxed{!}$

Berechne die unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Substitution:

$$(i) \quad F_1(x) = \int \sin x\,\cos^3 x\,dx\,,$$

$$(ii) \quad F_2(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx\,,$$

$$(iii) \quad F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx\,,$$

$$(iv) \quad F_4(x) = \int x\sqrt{4-3x^2}\,dx\,,$$

$$(v) \quad F_5(x) = \int \frac{dx}{3+4x}\,.$$

Ü 10.3 $\boxed{!!}$

Berechne die Integrale mit der angegebenen Substitution $x = x(u)$:

$$(i) \quad I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad x = \sin u\,,$$

$$(ii) \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,, \qquad x = \tan u\,,$$

$$(iii) \quad I_3 = \int_0^{3/2} \sqrt{4+x^2}\,dx\,, \qquad x = e^u - e^{-u} \ \text{(Rechenhilfe: } u = \ln 2 \Rightarrow x = ?\text{)}\,,$$

$$(iv) \quad I_4 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{2+e^{2x}+e^{-2x}}\,, \quad x = \ln\sqrt{u-1}\,.$$

Ü 10.4 $\boxed{!!}$

Bestimme mit Hilfe der Methode der "Trennung der Variablen" die Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichungen (jeweils unter Berücksichtigung der angegebenen Anfangsbedingung):

(i) $\quad y'\,e^{x+y} = 1\,, \qquad y(0) = 0\,,$

(ii) $\quad x^2\,y' = y^2\,(1-x^2)\,, \quad y(1) = 1/4\,,$

(iii) $\quad y' = xy - \dfrac{x}{y^2}\,, \qquad y(0) = 2\,.$

Ü 10.5 $\boxed{!!}$

Sei $\vec{K} = (y,\, -x,\, z)$. Berechne das Wegintegral $\displaystyle\int_C \vec{K}\cdot d\vec{r}$:

(i) längs der Verbindungsstrecke von $Q(1|0|0)$ nach $P(1|0|h)$ $(\,h>0\,)$,

(ii) längs einer Windung (aufwärts von Q nach P) der Schraubenlinie aus Abbildung 10.1 (mit der Ganghöhe $h>0$).

Ü 10.6 $\boxed{*}$

Das skalare Bogenelement ds eines ebenen Kurvenbogens $C: x = x(t),\, y = y(t),\, a \le t \le b$, bekommt man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (dt)^2} = \\ &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,. \end{aligned}$$

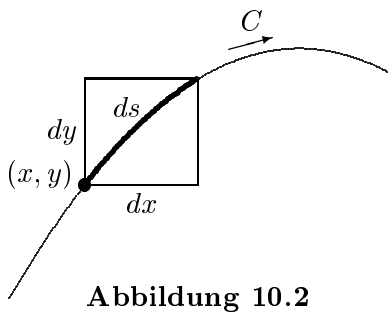


Abbildung 10.2
das skalare Bogenelement ds
eines ebenen Kurvenbogens

(i) Welche skalare Momentangeschwindigkeit $v = |\vec{r}\,'(t)| = \dfrac{ds}{dt}$ hat ein Teilchen mit dem von der Zeit t abhängigen Ortsvektor $\vec{r}\,(t) = \Big(x(t),\, y(t)\Big) = (t^2,\, t^3\,)$? Berechne die Länge $L_1 = \displaystyle\int_C ds$ des von dem Teilchen im Zeitintervall $0 \le t \le \sqrt{5}$ zurückgelegten Weges (x, y in [m], t in [sec]).

(ii) Welche Länge L_2 hat eine Windung der Schraubenlinie aus Abbildung 10.1 (von Q bis P)? (Wie wird wohl das skalare Bogenelement ds eines *drei*–dimensionalen Kurvenbogens aussehen?)

11 Nocheinmal alle Übungsaufgaben.

Stichpunkte: Aufgaben zu den einzelnen Lektionen zur Bearbeitung in den begleitenden Übungsstunden, Ergebnisse bzw. Musterlösungen.

Bedeutung der Symbole: $\boxed{o}$: *Fingerübungen*, $\boxed{!!}$: *wichtig und obligatorisch*, $\boxed{!}$: *ebenfalls wichtig*, $\boxed{*}$: *Zusatzaufgabe bei Unterbelastung*, $\boxed{**}$: *Zusatzaufgabe für Spezialisten*.

11.A Aufgaben.

Zu Lektion 1: Trigonometrische Funktionen.

Ü 1.1 $\boxed{!!}$

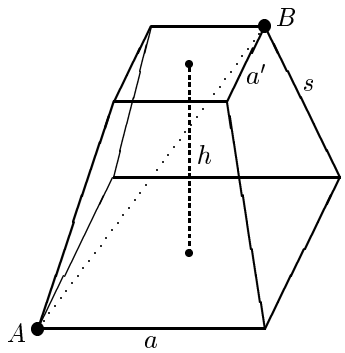
Ergänze die folgende Tabelle so, dass jeder Winkel sowohl im Bogenmaß (oben) als auch im Gradmaß (unten) angegeben ist:

Bogenm.:			$\frac{\pi}{18}$	0.31416		0.24π	1		2.82743	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{13}{6}\pi$
Gradm.:	$1°$	$7°$			$39°$			$144°$			$220°$	

Ü 1.2 $\boxed{\circ}$

Welche Innenwinkel γ und Aussenwinkel β hat ein 7–Eck? (Beide Winkel im Bogenmaß!)

Ü 1.3 $\boxed{!!}$



Welche Länge hat die Raumdiagonale AB des skizzierten, geraden und quadratischen Pyramidenstumpfes mit $a = h = 100\,[cm]$ und $a' = 50\,[cm]$?

Ü 1.4 $\boxed{!}$

Bestimme in dem Pyramidenstumpf der letzten Aufgabe die Winkel α (unten) und β (oben) und die Seitenlängen s und den Flächeninhalt F der Seitenflächen und bestimme außerdem den Winkel γ, den die Seitenflächen mit dem Grundquadrat einschließen.

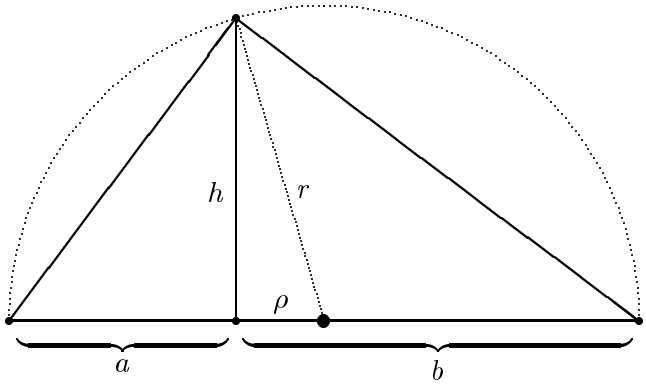
Ü 1.5 $\boxed{!!}$

An zwei gegenüberliegenden Seiten eines Sees befinden sich je ein 100 m hoher Mast. Wegen der Erdkrümmung kann man von der Spitze des einen Mastes gerade noch die Spitze des anderen Mastes erkennen. Eine Ente schwimmt auf dem kürzesten Weg von einem Mast zum anderen, und eine Möve fliegt auf dem kürzesten Weg von der einen Mastspitze zur anderen: wer von beiden hat den längeren Weg? (um wieviel länger?) [mittlerer Erdradius ≈ 6378 km]

Ü 1.6 $\boxed{**}$

Zeige mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, dass das skizzierte rechtwinklige Dreieck die Höhe $h = \sqrt{ab}$ hat und folgere daraus, dass für beliebige positive, reelle Zahlen a, b deren **geometrisches Mittel** $\sqrt{ab}$ *höchstens* so groß ist wie ihr **arithmetisches Mittel** $\frac{a+b}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}}\,.$$



Ü 1.7 $\boxed{\circ}$

Bestimme jeweils (exakt und *ohne* TR) $\sin x$ und $\cos x$ für

(a) $x = \pm\frac{\pi}{2}\,,\ \pm\frac{3\pi}{2}\,,\ \pm\frac{5\pi}{2}\,,\ \pm\frac{7\pi}{2}\,;$

(b) $x = \pm\frac{\pi}{4}\,,\ \pm\frac{3\pi}{4}\,,\ \pm\frac{5\pi}{4}\,,\ \pm\frac{7\pi}{4}\,;$

(c) $x = \pm\frac{\pi}{6}\,,\ \pm\frac{\pi}{3}\,,\ \pm\frac{2\pi}{3}\,,\ \pm\frac{5\pi}{6}\,;$

(d) $x = 4273\pi\,,\ 4274\pi\,.$

Ü 1.8 $\boxed{!!}$

Bestimme $\sin x$ und $\cos x$: **(a)** für $x = m\pi$ und **(b)** für $x = \frac{m\pi}{2}$ $(m \in \mathbb{Z})$.

Ü 1.9 $\boxed{!!}$

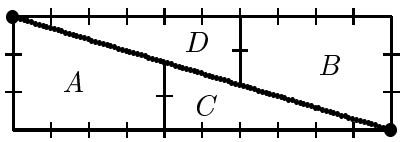
Für welche t, x ist $\sin t = \cos t$ und $\sin x = -\sqrt{3}\,\cos x$ und für welche φ ist (für alle t) $\sin t = \cos(t-\varphi)$?

Ü 1.10 $\boxed{*}$

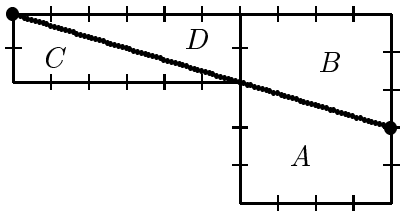
Was ist hier falsch?:

Wenn man in der oberen der gezeichneten Flächen die Teilflächen A und C vertauscht, bekommt man die untere Fläche.

Obwohl offenbar in beiden Abbildungen die vier gezeichneten Teilflächen A, B, C, D jeweils entsprechend gleich groß sind, scheint die untere Fläche (mit 32 [FE]) größer zu sein als die obere (mit 30 [FE]). Finde durch Berechnung geeigneter Winkel heraus, wo hier der Trugschluss liegt:



$F = 3 \cdot 10 = 30$ [FE]



$F = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 32$ [FE]

Zu Lektion 2: Betrag, Funktionen, Kreise, Ellipsen.

Ü 2.1 $\boxed{\circ}$

Schreibe die drei Mengen jeweils als Intervall:

$M_1:\ |x-3| \le 2\,,\ \ M_2:\ |2+x| > 3\,,\ \ M_3:\ |x+0.5| < 0.5$ *und* $|x-1.5| < 2.5\,.$

Ü 2.2 $\boxed{!!}$

Skizziere die Kurve $y = f(x) = |x+2| - |x-2|\,.$

Ü 2.3 $\boxed{!!}$

Skizziere in der x,y–Ebene die vier Bereiche:

$B_1:\ |x| - 2 \le y \le 2 - |x|\,,\ \ B_2:\ |y| - 2 \le x \le 2 - |y|\,,$
$B_3:\ \max\Big\{|x+y|, |x-y|\Big\} \le 2\,,\ \ B_4:\ |x| + |y| \le 2\,.$

Ü 2.4 $\boxed{!}$

Skizziere (grob und freihändig) mit exakten Angaben über Lage und Wert der Extrema die Funktion $y = f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ und bestimme die Periode T, mit der $f(x)$ periodisch ist.

Ü 2.5 $\boxed{!!}$

Stelle die Funktion $f(x) = \sin x + \cos x$ in der Form $f(x) = a\cos(x-\varphi)$ mit "geeigneten" $a > 0$ und $\varphi > 0$ dar und versuche, $y = f(x)$ (grob und freihändig) zu skizzieren.

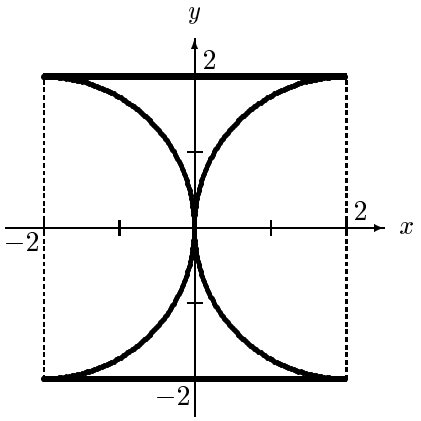
Ü 2.6 $\boxed{!!}$

Skizziere die folgenden Kreis– und Ellipsenbögen und finde jeweils eine Parameterdarstellung:

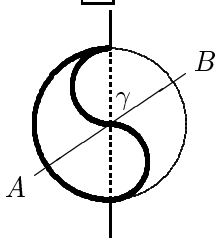
$C_1:\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4\,,\ x+2 \ge 0\,,\ y-1 \le 0\,,$
$C_2:\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4\,,\ y \ge x+3\,,$
$C_3:\ (x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 4\,,\ y \le 1\,.$

Ü 2.7 $\boxed{*}$

Beschreibe den dickumrandeten Bereich der x,y–Ebene und bestimme seinen Flächeninhalt:



Ü 2.8 $\boxed{*}$



Yin und Yang teilen eine Kreisfläche in zwei gleichgroße Teile. Welchen Winkel γ schließt eine gerade Linie AB durch den Kreismittelpunkt mit der Vertikalen ein, die sowohl Yin als auch Yang in zwei flächengleiche Teile zerlegt?

Ü 2.9 $\boxed{!}$

Wenn ein Einspänner, dessen Räder in einem Abstand von 1.20 *m* an der Achse befestigt sind, auf seinem (kleinstmöglichen) Wendekreis chauffiert wird, drehen sich die äußeren Räder dreimal so schnell wie die inneren. Welche Umfänge haben die Kreise, den die äußeren und die inneren Räder hierbei vollziehen?

Zu Lektion 3: Rationale Funktionen.

Ü 3.1 $\boxed{\circ}$

Finde die Gleichungen (möglichst in der **Normalform** $y = mx + b$) der folgenden sechs Geraden:

$g_1 = \Big[$Gerade durch den Punkt $P_0(3 \mid 2)$ vom Anstieg $-1/2\Big]$,

$g_2 = \Big[$Gerade durch die beiden Punkte $P(3 \mid 2)$ und $Q(-1 \mid 4)\Big]$,

$g_3 = \Big[$Gerade, welche die x–Achse bei $x_0 = 7$ und die y–Achse bei $y_0 = 3.5$ schneidet$\Big]$,

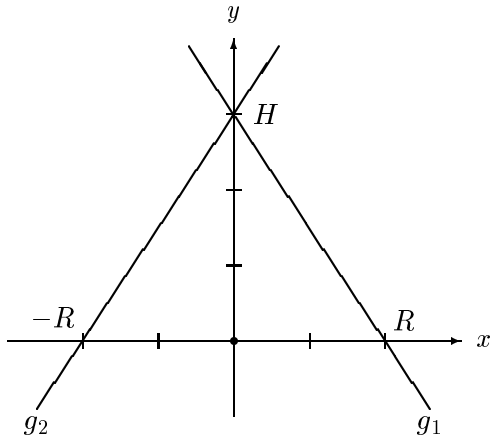
$g_4 = \Big[$Gerade durch $\bar{P}(3 \mid 2)$, die mit der pos. x–Achse den Winkel $\varphi = \pi/3$ einschließt$\Big]$,

$g_5 = \Big[$Parallele zur x–Achse durch den Punkt $R(7 \mid -2)\Big]$ und

$g_6 = \Big[$Parallele zur y–Achse durch denselben Punkt $R(7 \mid -2)\Big]$.

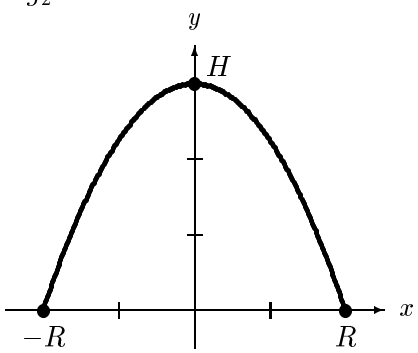
Ü 3.2 $\boxed{!!}$

Schreibe die Gleichungen der beiden skizzierten Geraden in der Form $y = mx + b$ und bestimme im Fall $H = 3$, $R = 2$ jeweils den Winkel φ_1 bzw. φ_2 , den sie mit der positiven x–Achse einschließen:



Ü 3.3 $\boxed{!!}$

Welche Gleichung hat der skizzierte Parabelbogen?:



Ü 3.4 $\boxed{!}$

Finde für die drei folgenden Parabeln jeweils die **Scheitelgleichung** $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, die Gleichung in der **allgemeinen Form** $y = ax^2 + bx + c$ und ggfs. die **Nullstellengleichung** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$P_1 = \Big[$Parabel mit dem Scheitel $S(1 \mid 3)$ und einer Nullstelle $N_1(-2 \mid 0)\Big]$,

$P_2 = \Big[$Parabel durch die drei Punkte $A(-3 \mid 0)$, $B(0 \mid -0.3)$, $C(2 \mid 0.5)\Big]$,

$P_3 = \Big[$Parabel mit dem Scheitel $S(1 \mid -3)$ durch den Punkt $Q(-1 \mid -7)\Big]$.

Ü 3.5 $\boxed{!!}$

Welche Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) hat das Polynom $P(x) = x^3 - 3x + 2$ (*eine* Nullstelle kann man raten!)? Zerlege $P(x)$ in Linearfaktoren.

Ü 3.6 $\boxed{*}$

Bestimme ein Polynom $Q(x)$ so, dass

$-6x^7 + 13x^6 - 11x^5 + 19x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 2 = (3x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot Q(x)$.

Ü 3.7 $\boxed{!!}$

Schreibe die rationale Funktion $R(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - x - 1}$ als Summe

$R(x) = G(x) + \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)}$ einer ganzrationalen Funktion $G(x)$ und einer echt gebrochen–rationalen Funktion $R_0(x) = \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)}$ (in gekürzter Form!) und versuche, alle Nullstellen und Pole (einschließlich Vielfachheit) von $R(x)$ zu finden.

Ü 3.8 $\boxed{**}$

Von zwei gleichgroßen Gläsern ist das eine nahezu bis zum Rand mit Rotwein, das andere mit der gleichen Menge Wasser gefüllt.

Wenn man nun zunächst einen Löffel voll Flüssigkeit aus dem einen Glas in das andere Glas umfüllt und gut umrührt, und dann aus dem zweiten Glas ebensoviel Flüssigkeit wieder herausnimmt und in das erste Glas zurück füllt, enthalten beide Gläser offenbar die gleiche Menge Flüssigkeit.

Mit welchem der beiden Gläser muss man beginnen, damit sich hinterher im Wasserglas nicht mehr Rotwein befindet als Wasser im Rotweinglas?

Zu Lektion 4: Exponentialfunktion und Logarithmus.

Ü 4.1 $\boxed{!!}$

Löse die folgenden Gleichungen nach x auf:

(i) $\ln|x| = 3.9$, (ii) $e^{(3x+1)} = 2.14$, (iii) $3^x \cdot 4^x = 5^{x+1}$, (iv) $3\ln x^2 + 2\ln x^3 = 12$,
(v) $e^{-1/x^2} = 1/2$.

Ü 4.2 $\boxed{\circ}$

Bestimme (exakt und *ohne* Taschenrechner!) die Zahlenwerte:

$A = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3$, $B = e^{3\ln 4}$, $C = \frac{\ln 32}{\ln 16}$, $D = \log_7 5 \cdot \log_5 49$,

Ü 4.3 $\boxed{!}$

Löse die vier Gleichungen nach y auf:

(i) $x = \ln\frac{1}{y+3} - 1$ (ii) $x = 2 - 2^{-y}$, (iii) $x = \log_{1/e}\left(\frac{1}{y}\right)$, (iv) $x = \log_{1/y}\left(\frac{1}{e}\right)$.

Ü 4.4 $\boxed{!}$

Gibt es eine Zahl $\eta > 0$ so, dass $\ln x = \lg\left(x^\eta\right)$ für alle $x > 0$ und eine Zahl $\lambda > 0$ so, dass $10^x = e^{\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Ü 4.5 $\boxed{!!}$

Skizziere (ungefähr und *ohne* Wertetabelle!) die Kurven:

$y = f_1(x) = e^{-|x|}$, $y = f_2(x) = 1 - e^{-x}$, $y = f_3(x) = e^{-x^2}$, $y = f_4(x) = \ln|x|$,

$y = f_5(x) = \left|\ln\frac{1}{1-x}\right|$, $y = f_6(x) = \log_{1/2} x^2$.

Ü 4.6 $\boxed{*}$

Versuche, mit Hilfe einer Skizze näherungsweise die Lösungen der Gleichung $e^x - 2 = \ln(x+2)$ herauszufinden.

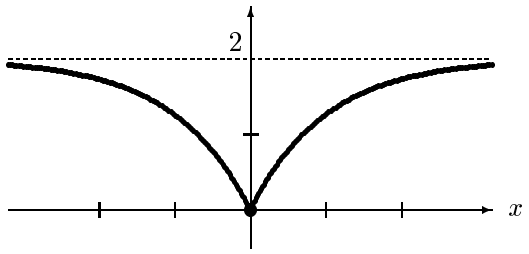
Ü 4.7 $\boxed{*}$

Bestimme die Zahl $Z = 1234^{-5678}$ mit einer Genauigkeit von "einigen" Tausend Stellen hinter dem Komma.

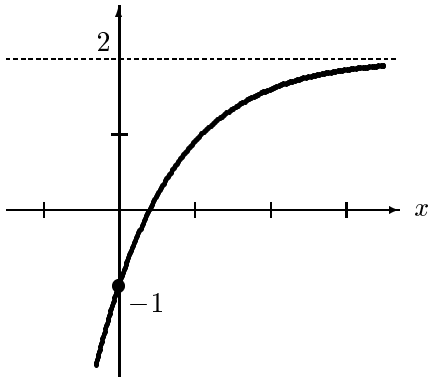
Ü 4.8 $\boxed{!}$

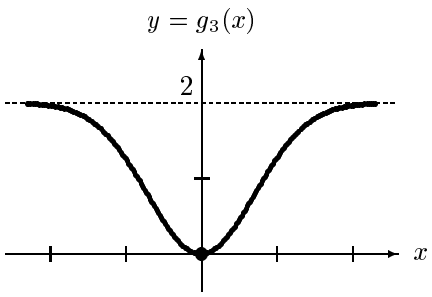
Welche Funktionen könnten durch die folgenden Schaubilder dargestellt sein?:

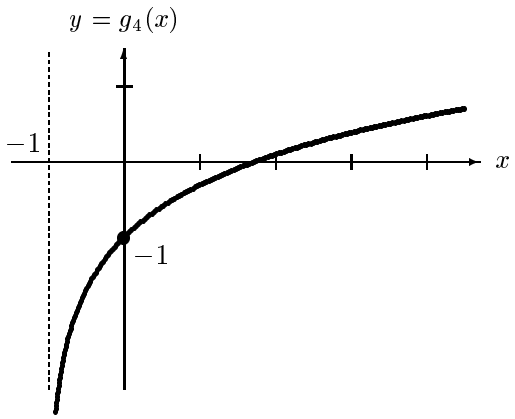
$y = g_1(x)$



$y = g_2(x)$







Ü 4.9 $\boxed{!}$

Für den radioaktiven Zerfall gilt das statistische Zerfallsgesetz $\boxed{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}}$; hierbei bezeichnet $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t und N_0 die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atome; die "Zerfallskonstante" λ ist eine Materialkonstante.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Zerfallskonstenten λ und der Halbwertszeit t_h (das ist die Zeit, nach der etwa die Hälfte der radioaktiven Substanz zerfallen ist)?

Man kann dieses Zerfallsgesetz zur näherungsweisen Altersbestimmung verwenden: von einem Gegenstand, der eine radioaktive Substanz mit einer Halbwertszeit von 1590 [Jahren] enthält, wird behauptet, dass er aus der Gotik (13.– 15. Jahrh.) stammt: ist diese Zeitangabe glaubhaft, wenn Proben ergeben, dass von der zerfallenden radioaktiven Substanz bisher etwa $5\,\%$ zerfallen sind?

Zu Lektion 5: Folgen und Konvergenz.

Ü 5.1 $\boxed{!!}$

Bestimme die Grenzwerte:

(i): $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^3 + 72n^2 + 95}{4n^3 - 6n + 5}}$, (ii): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 - 1}{n(2n+1)}$, (iii): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1 + n + n^2} - 1}{n}$.

Ü 5.2 $\boxed{\circ}$

Mit Hilfe des Taschenrechners kann man feststellen, dass die Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ eigentlich konvergiert. Bestimme ihren Grenzwert mit einer Genauigkeit von 3 Stellen hinter dem Komma.

Ü 5.3 $\boxed{!!}$

Der Wert der meisten Waren (z.B. Autos) nimmt im Verlauf der Jahre ab. Welchen Wert w_n (in % des Neuwertes w_0) hat eine Ware nach n Jahren, deren Wert am Ende eines jeden Jahres nur noch 80% ihres Wertes zu Beginn des jeweiligen Jahres beträgt? Nach wieviel Jahren hat sie nur noch einen Wert von weniger als 1% ihres Neuwertes?

Ü 5.4 $\boxed{!}$

Bestimme die Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to-0} e^{1/x}$, (iii) $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x}$, (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

(Tip zu (iv): erweitere mit $(\sqrt{\cdots}+1)$.).

Ü 5.5 $\boxed{!}$

Finde für die rekursiv definierte Folge $\boxed{a_0 = a\,,\ a_n = 2a_{n-1}+1\,,\ \ n\in\mathbb{N}}$ ein explizites Bildungsgesetz und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ü 5.6 $\boxed{!!}$

Bestimme mit dem Taschenrechner die Grenzwerte a der zwei rekursiv definierten Folgen:

(i) $\boxed{a_0 = 12345678\,,\ a_n = \sqrt{a_{n-1}}\,,\ \ n\in\mathbb{N}}$ (wissen Sie schon vorher, was herauskommt?)

(ii) $\boxed{a_0 = 1\,,\ a_n = \cos a_{n-1}\,,\ \ n\in\mathbb{N}}$

Können Sie die beiden Grenzwerte jeweils graphisch als Schnittpunkte von zwei geeigneten Kurven darstellen?

Ü 5.7 $\boxed{*}$

Man kann zeigen (das ist nicht schwer!), dass die rekursiv durch

$\boxed{a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{A}{a_n}\right)\,,\ \ n\in\mathbb{N}_0}$ für beliebig vorgegebenes $A>0$ und mit jedem Startwert $a_0>0$ eigentlich konvergiert. Bestimme den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (Um eine Idee zu bekommen, könnten Sie mit dem Taschenrechner die ersten Glieder dieser Folge einmal für $A=9$ und ein zweites Mal für $A=16$ bestimmen — in beiden Fällen z.B. mit dem Startwert $a_0=5$.)

Ü 5.8 $\boxed{*}$

Bestimme die Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^n}{1+a^n} + \dfrac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^n}\right)$ (für $a>0$), (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Ü 5.9 $\boxed{*}$

Finde für die beiden (eigentlich!) konvergenten Folgen:

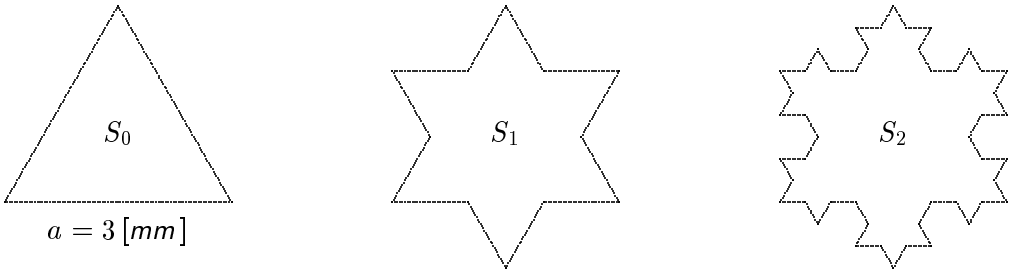
$$a_0 = \frac{1}{1}\,,\ a_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}}\,,\ a_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}\,,\ a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}\,,\ \ldots,\ \text{und}$$

$$b_0 = \sqrt{1}\,,\ b_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}}\,,\ b_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\,,\ b_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}\,,\ \ldots$$

ein rekusives Bildungsgesetz und bestimme ihre Grenzwerte a bzw. b.

Ü 5.10 $\boxed{*}$

Im Spätherbst, bevor es Winter wird, hat Petrus im Himmel viel zu tun, weil er neben seiner Alltagsbeschäftigung der Frau Holle auch noch helfen muss, Schneeflocken zu basteln. Bei einem seiner vielen Schneeflockenmodellen geht er schrittweise vor: er beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge $a = 3$ $[mm]$ und setzt über dem mittleren Drittel jeder Seite ein nach außen gerichtetes, gleichseitiges Dreieck an; dieses Verfahren wiederholt er etwa 40 bis 50 mal: bei jeder entstehenden Figur setzt er wieder über dem mittleren Drittel jeder Seite ein nach außen gerichtetes, gleichseitiges Dreieck an:



Entstehung einer "Schneeflocke" (10–fach vergrößert)

Im letzten Winter habe ich genau solch eine Schneeflocke gefunden, und die hatte einen Umfang von knapp über einem Kilometer!...

Könnte das wahr sein, wenn es nicht erfunden wäre?

Zu Lektion 6: Vektoren.

Ü 6.1 $\boxed{\circ}$

Für welche Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $5\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Ü 6.2 $\boxed{\circ}$

Welcher Vektor $\vec{r}$ vom Betrag 3 hat dieselbe Richtung wie der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Ü 6.3 $\boxed{!}$

Bestimme (rechnerisch und graphisch) zwei Punkte C und D, welche die Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ der beiden Punkte $A(1|3)$ und $B(7|-1.5)$ in drei gleichlange Teilstücke unterteilt.

Ü 6.4 $\boxed{!!}$

Welche Punkte auf der Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ haben vom Koordinatenursprung $\mathcal{O}$ den Abstand $d = 2\sqrt{5}$?

Ü 6.5 $\boxed{!!}$

An den Stellen $A(0|0)$, $B(7|0)$, $C(3|4)$ befinde sich jeweils ein Massenpunkt der Masse 1. Welche Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ergeben sich für diese Punkte, wenn das Koordinatensystem so parallel verschoben wird, dass der neue Koordinatenursprung im Massenschwerpunkt dieser drei Massenpunkte liegt? (Der Ortsvektor $\vec{r}_s$ des Massenschwerpunktes von drei Massenpunkten mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ und den Massen m_1, m_2, m_3 ist definiert durch die Beziehung: $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\,\vec{r}_s$: vgl. mit dem letzten Beispiel in Abschnitt 6.C.)

Ü 6.6 $\boxed{!!}$

Bestimme den Schnittpunkt P der beiden Geraden $g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und $g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ü 6.7 $\boxed{!!}$

Liegt der Punkt $P(1|2|3)$ auf der Ebene $E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Ü 6.8 $\boxed{!}$

Finde für die Schnittgerade g der beiden Ebenen $E_1 : x + y + z = 2$, $E_2 : x + 2y - z = 1$ eine Parameterdarstellung.

Ü 6.9 $\boxed{*}$

Bestimme die Gleichungen der vier Ebenen, die ein Tetraeder mit den vier Eckpunkten $A(1|1|1)$, $B(-1|1|1)$, $C(1|-1|1)$ und $D(1|1|-1)$ begrenzen.

Ü 6.10 $\boxed{**}$

Auf einem Mini–Billardtisch von 100 [*cm*] Länge und 60 [*cm*] Breite befindet sich (von der linken unteren Ecke aus gemessen) an der Stelle $P(8|12)$ eine Kugel, die mit *einem einzigen* Stoß längs eines Weges über drei verschiedene Banden in das Loch $Q(0|60)$ an der linken oberen Ecke geschossen werden soll. Beschreibe den Weg mit vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (so dass also $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix}$).

Zu Lektion 7: Skalarprodukt.

Ü 7.1 $\boxed{!!}$

Welche Winkel α_x, α_y, α_z schließt der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den drei Koordinatenachsen ein?

Ü 7.2 $\boxed{\circ}$

Bestimme den Schnittwinkel φ und den Schnittpunkt S der beiden Geraden
$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und $g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$.

Ü 7.3 $\boxed{\circ}$

Bestimme den Schnittwinkel φ und die Schnittgerade $g : \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ $(t \in \mathbb{R})$ der beiden Ebenen $E_1 : 2x - y + 3z = 4$, $E_2 : x + 3y - 2z = -5$.

Ü 7.4 $\boxed{!!}$

Schreibe den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Summe von zwei Vektoren, von denen der eine *parallel*, der andere *senkrecht* zum Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist. Welchen Abstand d hat der Punkt $P(5|-2|-3)$ von der Geraden g durch $\mathcal{O}(0|0|0)$ und $Q(2|-1|-2)$?

Ü 7.5 $\boxed{!!}$

Schreibe den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Summe von zwei Vektoren, von denen der eine *parallel*, der andere *senkrecht* zur Ebene $E: 3x - 2y + z = 0$ ist. Welchen Abstand d hat der Punkt $P(1|2|3)$ von dieser Ebene?

Ü 7.6 $\boxed{!}$

Bestimme die Winkel α, β, γ des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-1|1|3)$, $B(2|1+\sqrt{2}|0)$, $C(1|1|1)$.

Ü 7.7 $\boxed{*}$

Welchen Abstand d_E haben die beiden Ebenen $E_0: 2x - 6y + 3z = 0$ und $E: 2x - 6y + 3z = 3$ voneinander und welche Abstände d_0, d hat der Punkt $P(1|2|1)$ jeweils von den beiden Ebenen?

Ü 7.8 $\boxed{!}$

Finde in den drei Koordinatenebenen jeweils einen Punkt A, B, C so, dass das Tetraeder $\mathcal{O}ABC$ gleichseitig ist (mit der Seitenlänge a) und bestimme den Winkel γ zwischen zwei Seiten.

Ü 7.9 $\boxed{**}$

Wie ist es möglich, dass ein Segelboot — *ohne* Motor, allein vom Wind angetrieben! — vorwärts fahren kann, obwohl der Wind fast von vorn kommt?: wieviel % der Windkraft bleibt z.B. wirksam, wenn der Wind in einem Winkel von $60°$ von vorn bläst und das Segel "dazwischen", in einem Winkel von $30°$ zur Fahrtrichtung steht?

Zu Lektion 8: Differentiation.

Ü 8.1 $\boxed{\circ}$

Bestimme die Ableitungen:

$$\textbf{(i)}: \left(e^{2x^2-1}\right)', \quad \textbf{(ii)}: \left(e^{2x^2-1}\right)'', \quad \textbf{(iii)}: \left(\frac{\tan^2 x}{2} + \ln\cos x\right)', \quad \textbf{(iv)}: \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'.$$

Ü 8.2 $\boxed{!!}$

Bestimme die Gleichungen der beiden Tangenten g_{T_1}, g_{T_2} an die Kurve $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ im Punkt $\big(1,\, y(1)\big)$.

(Man muss diese Gleichung *nicht* zunächst nach y auflösen, um $y(1)$ und $y'(1)$ zu erhalten!)

Ü 8.3 $\boxed{!}$

Finde eine Formel für die n–te Ableitung $\left(x^n\right)^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Ü 8.4 $\boxed{!!}$

Bestimme alle Extrema und Wendepunkte von
(i): $f(x) = (x-2)^{25}$ und **(ii)**: $g(x) = (x-2)^{26}$.

Ü 8.5 $\boxed{!}$

Bestimme alle Extrema und Wendepunkte von
(i): $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - |x|$, **(ii)**: $g(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x$ und **(iii)**: $h(x) = \dfrac{x^3\,(8-x)}{100}$.
(Versuche jeweils eine grobe Skizze.)

Ü 8.6 $\boxed{!}$

Vergleiche die beiden Kurven $y = f(x) = e^{-x^2}$ und $y = g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ mit einer groben Skizze und bestimme ihre Wendepunkte.

Ü 8.7 $\boxed{*}$

Welche Gerade g durch den Koordinatenursprung berührt die Kurve $y = \ln x$? Bestimme den Berührungspunkt B.

Ü 8.8 $\boxed{*}$

Bestimme die Ableitung $g(u) = f'(x)$ der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan x}$ in Abhängigkeit von $u = \tan x$.

Ü 8.9 $\boxed{!!}$

Der Ortsvektor eines sich in der Ebene bewegenden Teilchens sei $\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$. Für welche t ist die Momentangeschwindigkeit $v = |\vec{r}\,'(t)|$ maximal bzw. minimal und welche Momentanbeschleunigung $b = |\vec{r}\,''(t)|$ ergibt sich für diese t?

Ü 8.10 $\boxed{!!}$

Aus drei gleichbreiten Brettern soll für eine Berghütte eine Dachrinne gezimmert werden. Welchen Neigungswinkel α (von der Horizontalen aus gemessen) müssen die Seitenbretter haben, damit die Dachrinne möglichst viel Wasser fasst?

Ü 8.11 $\boxed{**}$

In einer Altstadt mit engen Gassen soll ein Narrenbaum durch eine $5\,[m]$ breite Gasse in eine senkrecht abbiegende, $3\,[m]$ breite Gasse geschleppt werden. Wie lang darf der Narrenbaum höchstens sein?

Zu Lektion 9: Integration.

Ü 9.1 $\boxed{\circ}$

Berechne die Integrale:

$$I_1 = \int_{-3}^{5} 7\,dx\,, \quad I_2 = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)\,dx\,, \quad I_3 = \int_1^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx - \int_8^{10} t^{-1/3}\,dt\,.$$

Ü 9.2 $\boxed{\circ}$

Berechne die Integrale:

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx\,, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx\,, \quad I_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx\,, \quad I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\,,$$

$$I_5 = \int_{-\pi/2}^{0} \cos x\,dx\,, \quad I_6 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx\,.$$ Warum bekommt man jedesmal dasselbe Ergebnis?

Ü 9.3 $\boxed{!!}$

Berechne die Integrale:

$$I_1 = \int_0^1 x^{-\lambda}\,dx \text{ für } \lambda < 1\,, \quad I_2 = \int_{1/e}^{e} x^{-\lambda}\,dx \text{ für } \lambda = 1\,, \quad I_3 = \int_1^{\infty} x^{-\lambda}\,dx \text{ für } \lambda > 1\,.$$

Ü 9.4 $\boxed{!}$

Berechne die Integrale:

$$I_1 = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} 3\,e^{-|x|}\,dx\,, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx\,, \quad I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx\,, \quad I_4 = \int_{-1}^{1} \left(2 + \frac{|x|}{x}\right)\,dx\,.$$

Ü 9.5 $\boxed{!!}$

Bestimme die Integrale: (beachte dabei: $\Big(\ln|f(x)|\Big)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ und $\Big(f(x)^2\Big)' = 2f(x)f'(x)$):

$$I_1 = \int \frac{3-x^2}{9x-x^3}\,dx\,, \quad I_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{3-x^2}{9x-x^3}\,dx\,, \quad I_3 = \int \frac{dx}{x\,\ln x}\,, \quad I_4 = \int_e^{e^3} \frac{dx}{x\,\ln x}\,,$$

$$I_5 = \int \sin 2x\,\cos 2x\,dx\,, \quad I_6 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x\,\cos 2x\,dx\,, \quad I_7 = \int \frac{\ln x}{x}\,dx\,, \quad I_8 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx\,.$$

Ü 9.6 $\boxed{**}$

Finde (z.B. mit Hilfe einer Skizze für die Funktion $y = \frac{1}{x}$) für das Integral $I = \displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{x}$ eine Abschätzung der Form: $a = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots < I < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots = b$ und vergleiche die hiermit gewonnene Näherung $I \approx \dfrac{a+b}{2}$ mit dem exakten Wert des Integrals.

Ü 9.7 $\boxed{!}$

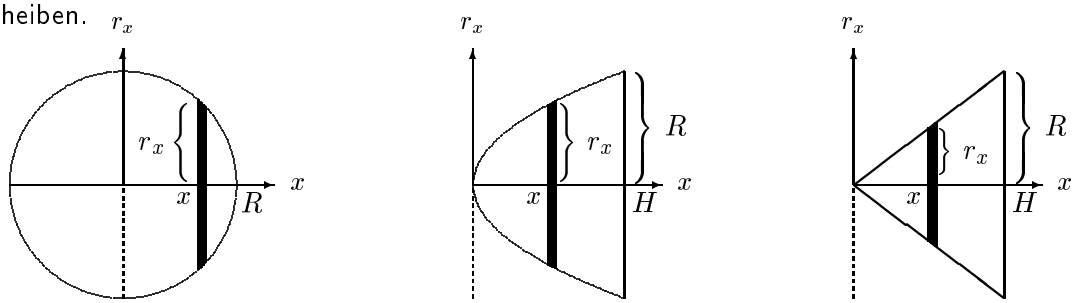
Die Erdbeschleunigung ist auf der Erdoberfläche näherungsweise konstant: $g = 9.81\ [m/sec^2]$. Welche Tiefe L hat demnach ein Brunnenschacht, wenn ein Stein genau $1.9\ [sec]$ benötigt, um unten anzukommen, und mit welcher Geschwindigkeit trifft er unten auf?

Ü 9.8 $\boxed{*}$

Welche Masse m in $[kg]$ hat ein Stab mit der Länge $L = 200\ [cm]$ und der Querschnittsfläche $q = 100\pi\ [cm^2]$, wenn die Dichte des Stab–Materials näherungsweise durch $\rho(x) = 2 + x^2 \cdot 10^{-4}\ [g/cm^3]$ beschrieben werden kann ($x =$ Abstand in $[cm]$ von einem der Stab–Enden: $0 \le x \le 200$) ? Mit welcher konstanten Dichte ρ_0 käme man auf dieselbe Gesamtmasse?

Ü 9.9 $\boxed{*}$

Bestimme das Volumen (i) einer Kugel vom Radius R und (ii) eines Rotationsparaboloides, (iii) eines geraden Kreiskegels, beide der Höhe H und mit dem Grundkreisradius R. Schneide hierzu jeweils den Körper in "sehr dünne Scheiben" der Dicke dx und "addiere" die Rauminhalte dV dieser "dünnen" Scheiben.



Kugel Paraboloid Kegel

Zu Lektion 10: Substitution und Trennung der Variablen.

Ü 10.1 $\boxed{!!}$

Berechne die Integrale mit der angegebenen Substitution $u = u(x)$:

$$(i) \quad I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,, \qquad \begin{cases} 1. & u = \sqrt{1+x^2}\,, \\ 2. & u = 1 + x^2\,; \end{cases}$$

$$(i) \quad I_2 = \int_4^\infty \frac{x^2}{(x-3)^{10}}\,dx\,, \quad u = x - 3\,;$$

$$(iii) \quad I_3 = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx\,, \quad u = 1 + x^3\,;$$

$$(iv) \quad I_4 = \int_0^7 x\,\sqrt[3]{x+1}\,dx\,, \qquad u = x + 1\,.$$

Ü 10.2 $\boxed{!}$

Berechne die unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Substitution:

$$(i) \quad F_1(x) = \int \sin x \, \cos^3 x \, dx \,,$$

$$(ii) \quad F_2(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx \,,$$

$$(iii) \quad F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}} \, dx \,,$$

$$(iv) \quad F_4(x) = \int x\sqrt{4-3x^2} \, dx \,,$$

$$(v) \quad F_5(x) = \int \frac{dx}{3+4x} \,.$$

Ü 10.3 $\boxed{!!}$

Berechne die Integrale mit der angegebenen Substitution $x = x(u)$:

$$(i) \quad I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \,, \qquad x = \sin u \,,$$

$$(ii) \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \,, \qquad x = \tan u \,,$$

$$(iii) \quad I_3 = \int_0^{3/2} \sqrt{4+x^2} \, dx \,, \qquad x = e^u - e^{-u} \ \text{(Rechenhilfe: } u = \ln 2 \Rightarrow x = ?\text{)} \,,$$

$$(iv) \quad I_4 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{2+e^{2x}+e^{-2x}} \,, \quad x = \ln\sqrt{u-1} \,.$$

Ü 10.4 $\boxed{!!}$

Bestimme mit Hilfe der Methode der "Trennung der Variablen" die Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichungen (jeweils unter Berücksichtigung der angegebenen Anfangsbedingung):

$$(i) \quad y' \, e^{x+y} = 1 \,, \qquad y(0) = 0 \,,$$

$$(ii) \quad x^2 \, y' = y^2 \, (1-x^2) \,, \quad y(1) = 1/4 \,,$$

$$(iii) \quad y' = xy - \frac{x}{y^2} \,, \qquad y(0) = 2 \,.$$

Ü 10.5 $\boxed{!!}$

Sei $\vec{K} = (y, -x, z)$. Berechne das Wegintegral $\int_C \vec{K} \cdot d\vec{r}$:

(i) längs der Verbindungsstrecke von $Q(1|0|0)$ nach $P(1|0|h)$ ($h > 0$),

(ii) längs einer Windung (aufwärts von Q nach P) der Schraubenlinie aus Abbildung 10.1 (mit der Ganghöhe $h > 0$).

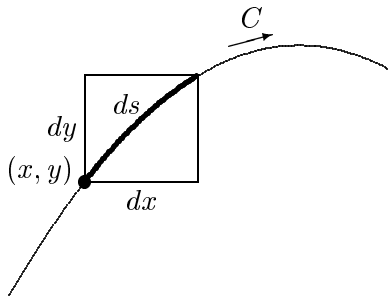
Ü 10.6 $\boxed{*}$

Das skalare Bogenelement ds eines ebenen Kurvenbogens $C : x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b$, bekommt man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (dt)^2} =$$

$$= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$



das skalare Bogenelement ds eines ebenen Kurvenbogens

(i) Welche skalare Momentangeschwindigkeit $v = |\vec{r}\,'(t)| = \dfrac{ds}{dt}$ hat ein Teilchen mit dem von der Zeit t abhängigen Ortsvektor $\vec{r}\,(t) = \Big(x(t),\ y(t)\Big) = (t^2,\ t^3\,)$? Berechne die Länge $L_1 = \displaystyle\int_C ds$ des von dem Teilchen im Zeitintervall $0 \le t \le \sqrt{5}$ zurückgelegten Weges (x, y in [*m*], t in [*sec*]).

(ii) Welche Länge L_2 hat eine Windung der Schraubenlinie aus Abbildung 10.1 (von Q bis P)? (Wie wird wohl das skalare Bogenelement ds eines *drei*–dimensionalen Kurvenbogens aussehen?)

11.B Ergebnisse der Übungsaufgaben.

zu Ü 1.1

B'm.:	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{7\pi}{180}$	$\frac{\pi}{18}$	0.31416	$\frac{13}{16}\pi$	0.24π	1	0.8π	2.82743	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{9}\pi$	$\frac{13}{6}\pi$
G'm.:	$1°$	$7°$	$10°$	$18°$	$39°$	$43.2°$	$57.3°$	$144°$	$162°$	$315°$	$220°$	$390°$

zu Ü 1.2

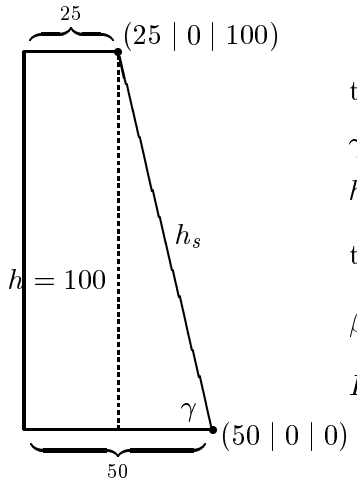
$\gamma = \dfrac{2\pi}{7}\,,\ \beta = \pi - \gamma = \dfrac{5\pi}{7}\,.$

zu Ü 1.3

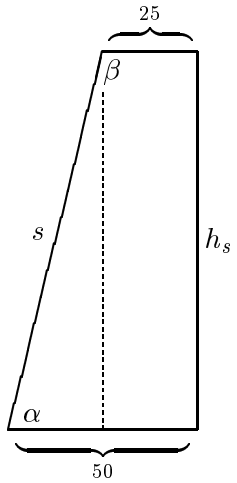
In einem geeigneten Koordinatensystem ist $A = A(-50 \mid -50 \mid 0)$ und $B = B(25 \mid 25 \mid 100)$, somit $L = \overline{AB} = \sqrt{75^2 + 75^2 + 100^2} = 25\sqrt{34}\,.$

zu Ü 1.4

Den Skizzen vom halben Querschnitt (links) und von der halben Seite (rechts) entnimmt man:



$$\tan\gamma = \frac{100}{25} = 4\,,$$
$$\gamma = 0.4220\pi \ \ (= 75.96°\,)\,,$$
$$h_s = \sqrt{10000 + 625} = 103.0776\,,$$
$$\tan\alpha = \frac{h_s}{25}\,,\ \alpha = 0.4242\pi \ \ (= 76.37°\,)\,,$$
$$\beta = \pi - \alpha = 0.5757\pi \ \ (= 103.63°\,)\,,$$
$$F = 75 \cdot h_s = 7730.823\,.$$

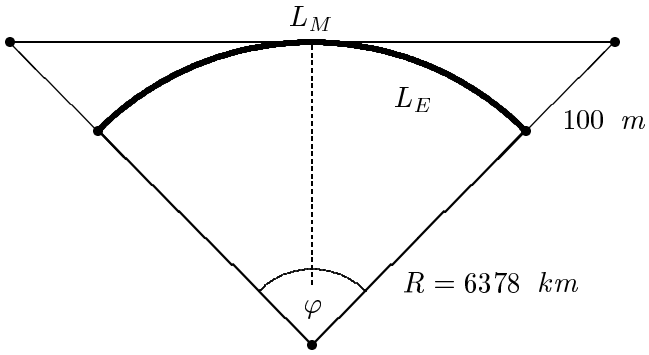


zu Ü 1.5

$(L_M/2)^2 = (R + 0.1)^2 - R^2 \ \Rightarrow$
$L_M = \sqrt{0.8R + 0.04} = \sqrt{5102.44} =$
$= 71.43136566\ [km]\,,$

$\cos(\varphi/2) = R/(R + 0.1) \ \Rightarrow$
$L_E = \varphi\, R = 6378 \cdot 2 \cdot \arccos\frac{6378}{6378.1} =$
$= 71.43061815\ [km]\,.$

Der Weg L_M der Möwe ist also um $74.75\ [cm]$ länger als der Weg L_E der Ente.



zu Ü 1.6
Lösungsweg (z.B.):
Œ sei $0 \le a \le b$; dann ist $r = \dfrac{b+a}{2}$, $\rho = \dfrac{b-a}{2}$, $h^2 = r^2 - \rho^2 = ab \le r^2$.

zu Ü 1.7
(siehe hierzu die Abbildungen 1.5 und 1.6!)

(a) $\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$, $\sin\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right) = \mp 1$, $\sin\left(\pm\frac{5\pi}{2}\right) = \pm 1$, $\sin\left(\pm\frac{7\pi}{2}\right) = \mp 1$,
$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pm\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\pm\frac{7\pi}{2}\right) = 0$;

(b) $\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\pm\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pm\frac{7\pi}{4}\right) = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pm\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\pm\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(c) $\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) = \pm\frac{1}{2}$, $\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\pm\frac{5\pi}{6}\right) = \pm\frac{1}{2}$,
$\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(\pm\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(d) $\sin 4273\pi = \sin 4274\pi = 0$, $\cos 4273\pi = -1$, $\cos 4274\pi = 1$.

zu Ü 1.8
$\sin m\pi = 0$, $\cos m\pi = (-1)^m = \begin{cases} +1 & \text{für gerade } m, \\ -1 & \text{für ungerade } m, \end{cases}$

$\sin\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } m, \\ (-1)^k & \text{für ungerade } m \text{ der Form } m = 2k+1, \end{cases}$

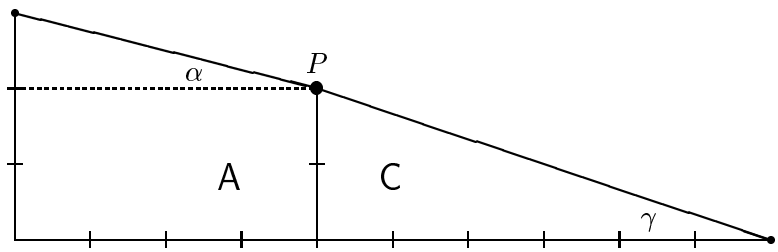
$\cos\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } m, \\ (-1)^k & \text{für gerade } m \text{ der Form } m = 2k. \end{cases}$

zu Ü 1.9
$t = \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi \ (m \in \mathbb{Z})$;

$\tan x = -\sqrt{3}$, also $x = \left(m + \frac{2}{3}\right)\pi \ (m \in \mathbb{Z})$;

$\sin t = \cos(t - \varphi)$ für $\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

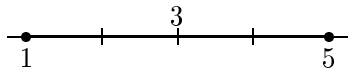
zu Ü 1.10
Die entsprechenden Winkel in A und C sind *verschieden*, daher hat die schräge Verbindungslinie bei P einen ***Knick***!:



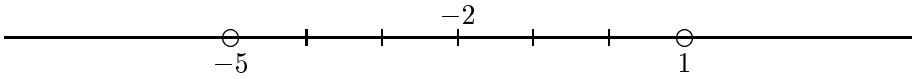
$\tan\alpha = 1/4$, $\alpha = 0.0780\pi$ und $\tan\gamma = 1/3$, $\gamma = 0.1024\pi$

zu Ü 2.1

$x \in M_1 \;\Leftrightarrow\; 3-2 \le x \le 3+2$, d.h. $M_1 = [\,1\,,\,5\,]$:

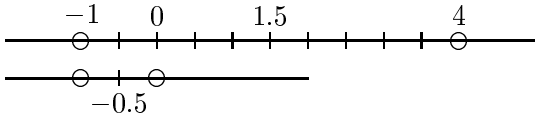


$x \in M_2 \;\Leftrightarrow\; x < -2-3$ oder $x > -2+3$, d.h. $M_2 = \,]\,-\infty\,,\,-5\,[\;\cup\;]\,1\,,\,\infty\,[\;=\mathbb{R}\setminus[\,-5\,,\,1\,]$:

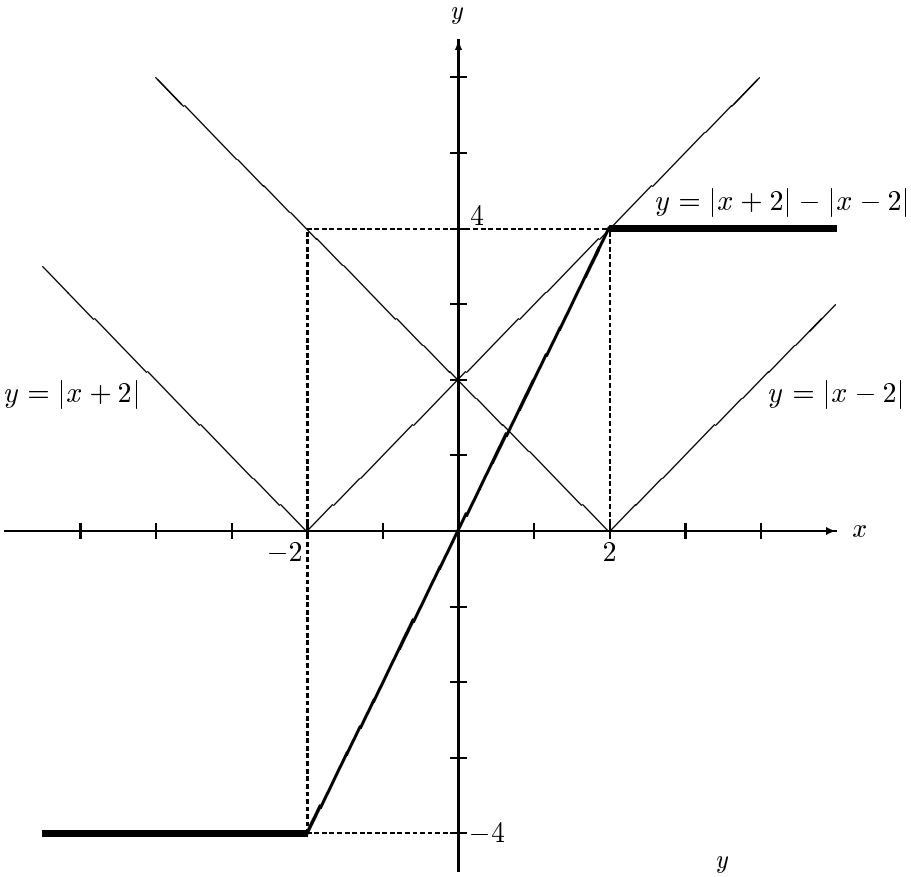


$x \in M_3 \;\Leftrightarrow\; -0.5-0.5 < x < -0.5+0.5$ und $1.5-2.5 < x < 1.5+2.5$, d.h.

$M_3 = \,]\,-1\,,\,0\,[\;\cap\;]\,-1\,,\,4\,[\;=\,]\,-1\,,\,0\,[$:

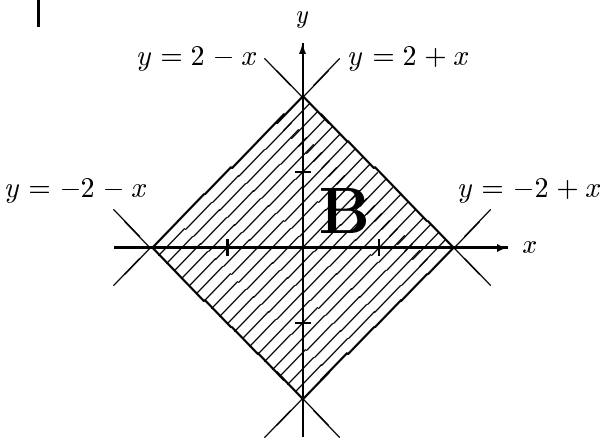


zu Ü 2.2



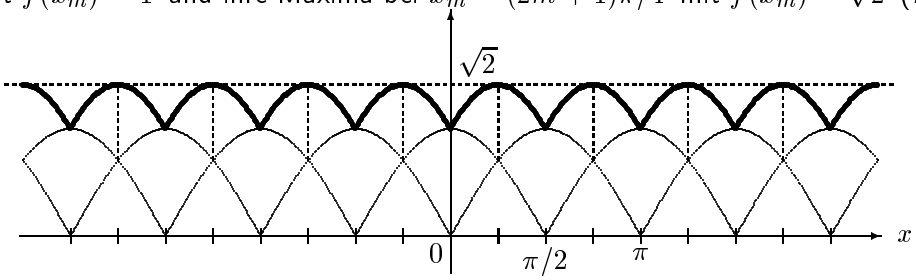
zu Ü 2.3

Es ist $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$:



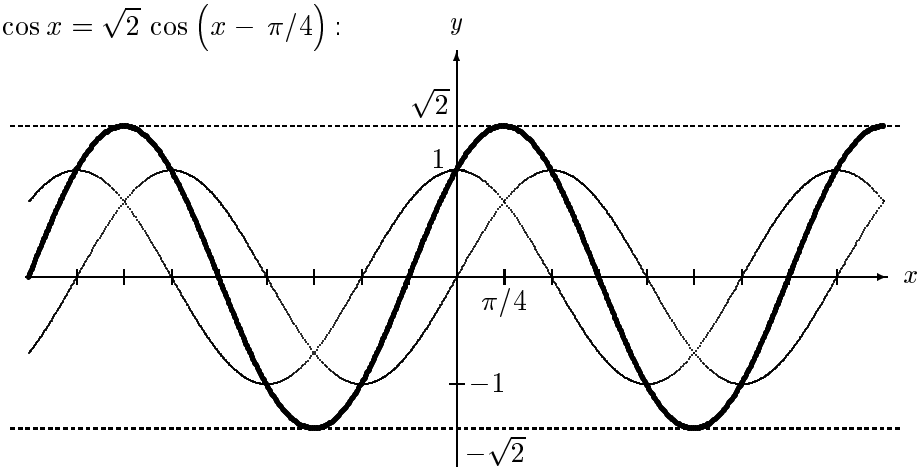
zu Ü 2.4

Die Funktion $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ ist T–periodisch mit der Periode $T = \pi/2$, hat ihre Minima bei $x_m = m\pi/2$ mit $f(x_m) = 1$ und ihre Maxima bei $x_m = (2m+1)\pi/4$ mit $f(x_m) = \sqrt{2}$ $(m \in \mathbb{Z})$:



zu Ü 2.5

$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\cos\left(x - \pi/4\right)$:

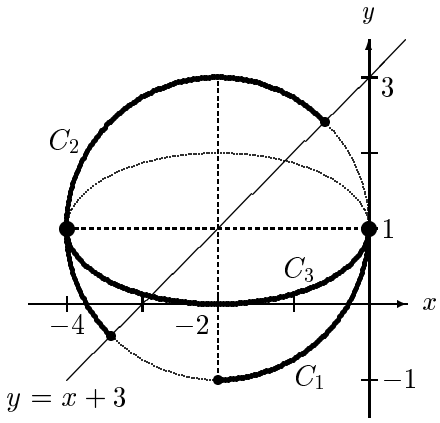


zu Ü 2.6

$$C_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 2\cos\varphi \\ y = 1 + 2\sin\varphi \end{array} \right\}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0,$$

$$C_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 2\cos\varphi \\ y = 1 + 2\sin\varphi \end{array} \right\}, \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4},$$

$$C_3 : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 2\cos\varphi \\ y = 1 + \sin\varphi \end{array} \right\}, \quad \pi \le \varphi \le 2\pi:$$



zu Ü 2.7

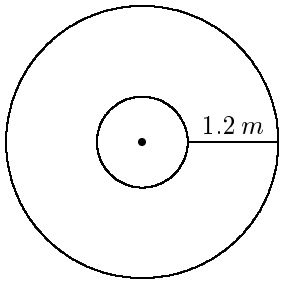
$B:\ -2 \le y \le 2,\ -2 + \sqrt{4 - y^2} \le x \le 2 - \sqrt{4 - y^2}$, oder (gleichwertig):

$B : \left\{ \begin{array}{l} |x| \le 2 - 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{array} \right\}, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Es ist $F = 16 - 4\pi$ $(= 3.3436)$.

zu Ü 2.8

$\gamma = \dfrac{\pi}{4}$.

zu Ü 2.9



Ist r der Radius des inneren Kreises, so ist $2\pi\,(r+1.2) = 3\cdot 2\pi\, r$, somit $r = 0.6$ und Innenumfang $= 3.77\,[m]$, Aussenumfang $= 11.31\,[m]$.

zu Ü 3.1

$g_1 :\ y - 2 = -\frac{1}{2}\,(x-3) \Rightarrow \boxed{y = -0.5\,x + 3.5}$,

$g_2 :\ \dfrac{y-2}{x-3} = \dfrac{4-2}{-1-3} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{g_2 = g_1}$,

$g_3 :\ \dfrac{y}{3.5} + \dfrac{x}{7} = 1 \Rightarrow \boxed{g_3 = g_2 = g_1}$;

$g_4 :\ y - 2 = \tan \pi/3 \cdot (x-3) = \sqrt{3}\cdot(x-3) \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}\,x + (2 - 3\sqrt{3}\,)}$;

$g_5 : \boxed{y = -2}$, $g_6 : \boxed{x = 7}$.

zu Ü 3.2

$g_1 :\ y = H - \dfrac{H}{R}\,x$, $\varphi_1 = -0.3128\pi$,

$g_2 :\ y = H + \dfrac{H}{R}\,x$, $\varphi_2 = 0.3128\pi$.

zu Ü 3.3

$y = H - \dfrac{H}{R^2}\,x^2$, $|x| \le R$.

zu Ü 3.4

$P_1 :\ y = 3 - \dfrac{1}{3}\,(x-1)^2 \;=\; -\dfrac{1}{3}\,x^2 + \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{8}{3} \;=\; -\dfrac{1}{3}\,(x-4)(x+2)$,

$P_2 :\ y = -0.4 + 0.1\,(x+1)^2 \;=\; 0.1\,x^2 + 0.2\,x - 0.3 \;=\; 0.1\,(x-1)(x+3)$,

$P_3 :\ y = -3 - (x-1)^2 = -x^2 + 2x - 4$, P_3 hat *keine* (reellen) Nullstellen.

zu Ü 3.5

$P(x) = (x-1)^2(x+2)$: $P(x)$ hat die Nullstellen $x_1 = 1$ (zweifach) und $x_2 = -2$ (einfach).

zu Ü 3.6

$Q(x) = -2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x - 2$.

zu Ü 3.7

$$R(x) = x^2 + x - 6 + \frac{3x-6}{x^2-1} = \frac{x\,(x-2)\left(x+\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})\right)\left(x+\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})\right)}{(x+1)(x-1)}:$$

$R(x)$ hat jeweils einen einfachen Pol bei $\bar{x}_{1,2} = \pm 1$ und je eine einfache Nullstelle bei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_{3,4} = -\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})$.

zu Ü 3.8

Unabhängig davon, mit welchem Glas begonnen wird, befindet sich hinterher ebensoviel Wasser im Rotweinglas wie Rotwein im Wasserglas:

wenn man aus dem ersten Glas den n–ten Teil der Flüssigkeit herausnimmt und in das zweite Glas füllt, befindet sich dort das $\left(1+\frac{1}{n}\right)$–Fache der ursprünglichen Flüssigkeitsmenge. Damit der m–te Teil hiervon ebensoviel Flüssigkeit ist wie der n–te Teil der ursprünglichen Menge, muss gelten: $\frac{1}{n} \stackrel{!}{=} \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m}\cdot\frac{n+1}{n}$, also: $m = n+1$.

Füllen wir also z.B. den Anteil $\frac{R}{n}$ aus dem Rotweinglas in das Wasserglas und danach den Anteil $\frac{1}{n+1}\left(W+\frac{R}{n}\right)$ aus dem Wasserglas wieder zurück in das Rotweinglas, so haben wir in beiden Gläsern gleich viel Flüssigkeit und:

im Rotweinglas das Gemisch: $\left(R-\frac{R}{n}\right) + \frac{1}{n+1}\left(W+\frac{R}{n}\right) = \frac{1}{n+1}W + \frac{n}{n+1}R$ und

im Wasserglas das Gemisch: $W + \frac{R}{n} - \frac{1}{n+1}\left(W+\frac{R}{n}\right) = \frac{1}{n+1}R + \frac{n}{n+1}W$,

wobei $\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1$ ist: damit ist das Verhältnis von Wasser zu Rotwein im Rotweinglas gleich dem Verhältnis von Rotwein zu Wasser im Wasserglas.

zu Ü 4.1

(i) $|x| = e^{3.9} \Rightarrow \boxed{x = \pm e^{3.9} = \pm 49.40245}$,

(ii) $3x + 1 = \ln 2.14 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}(\ln 2.14 - 1) = -0.07973}$,

(iii) $12^x = 5^x \cdot 5 \Rightarrow 12.4^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 5}{\ln 2.4} = 1.83837}$,

(iv) $12 \ln x^6 = 12 \Rightarrow \boxed{x = e = 2.71828}$,

(v) $e^{1/x^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm 1.2011224}$.

zu Ü 4.2

$A = \ln e^{-3} = -3$, $B = e^{\ln 4^3} = 64$, $C = \frac{\ln 2^5}{\ln 2^4} = 5/4$, $D = \frac{\ln 5}{\ln 7}\cdot\frac{\ln 7^2}{\ln 5} = 2$.

zu Ü 4.3

(i) $e^{x+1} = \dfrac{1}{y+3} \Rightarrow \boxed{y = -3 + e^{-(x+1)}}$, (ii) $2^y = \dfrac{1}{2-x} \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{\ln(2-x)}{\ln 2}}$,

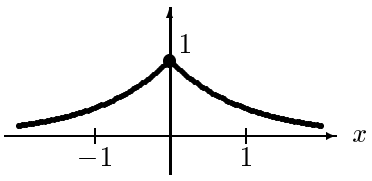
(iii) $x = \dfrac{\ln 1/y}{\ln 1/e} = \dfrac{-\ln y}{-1} \Rightarrow \boxed{y = e^x}$, (iv) $x = \dfrac{\ln 1/e}{\ln 1/y} = \dfrac{-1}{-\ln y} \Rightarrow \boxed{y = e^{1/x}}$.

zu Ü 4.4

$\eta = \lambda = \ln 10$.

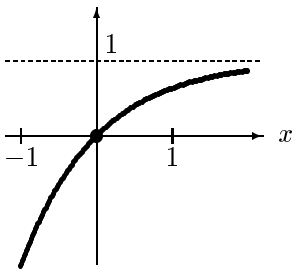
zu Ü 4.5

$y = f_1(x)$



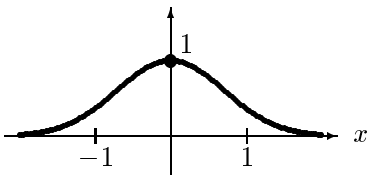
$f_1(x) = e^{-|x|}$

$y = f_2(x)$



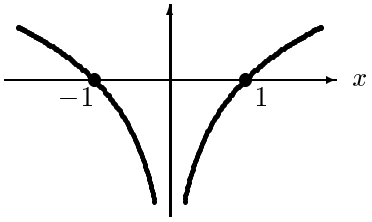
$f_2(x) = 1 - e^{-x}$

$y = f_3(x)$



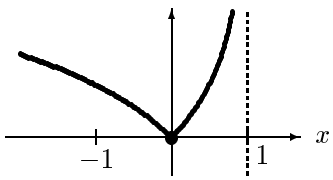
$f_3(x) = e^{-x^2}$

$y = f_4(x)$



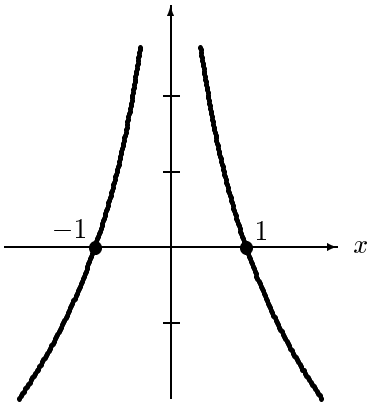
$f_4(x) = \ln|x|$

$y = f_5(x)$



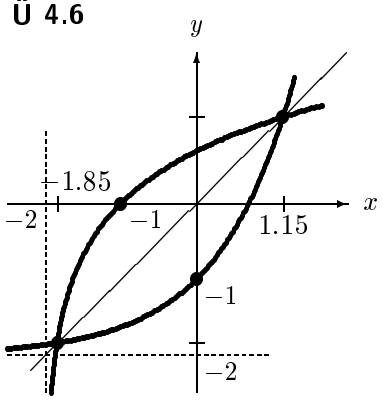
$f_5(x) = \left|\ln \dfrac{1}{1-x}\right| = |\ln(1-x)|$

$y = f_6(x)$



$f_6(x) = \log_{1/2} x^2 = -\dfrac{2}{\ln 2} \ln|x|$

zu Ü 4.6



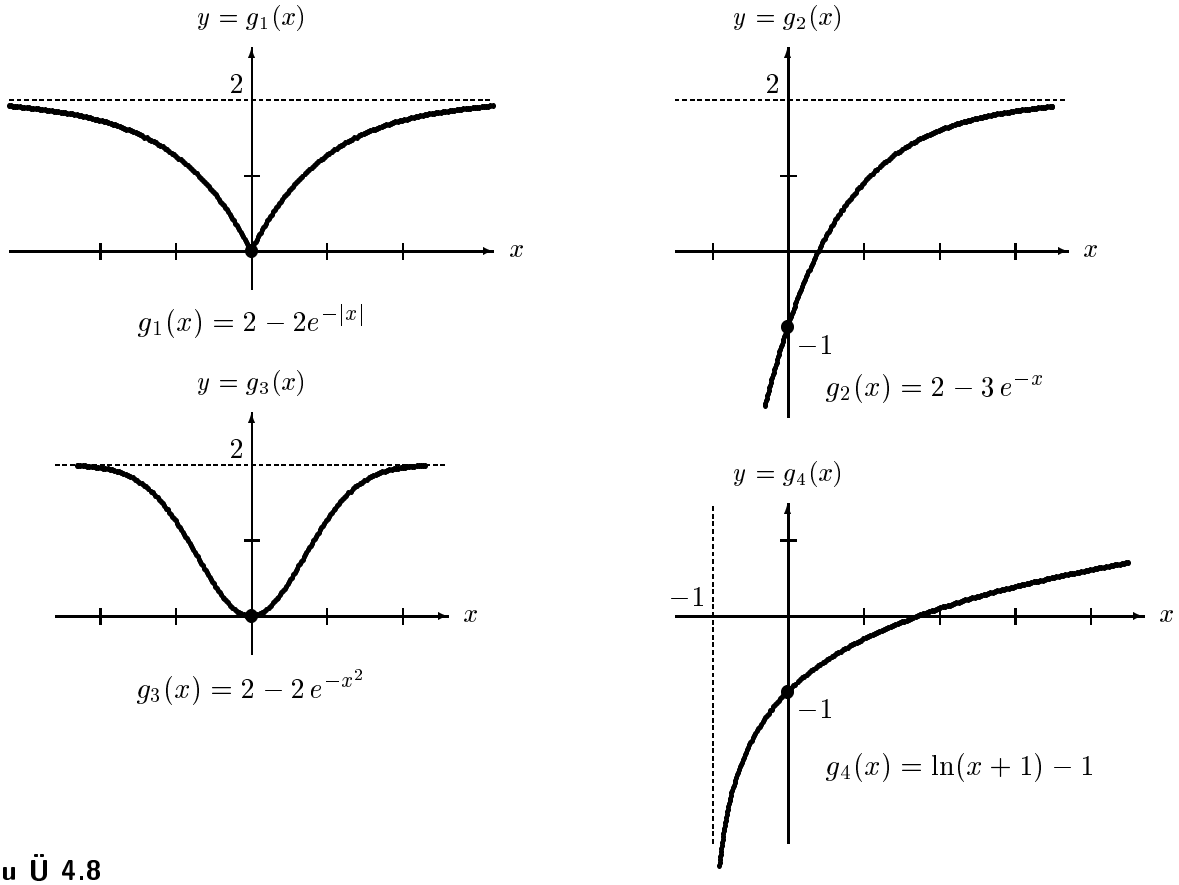
$y = \ln(x+2)$ und $y = e^x - 2$

$x_1 \approx -1.85$ (genau: $= -1.84140566$),
$x_2 \approx 1.15$ (genau: $= 1.146193221$).

zu Ü 4.7

Zum Beispiel:

$g_1(x) = 2 - 2e^{-|x|}$, $g_2(x) = 2 - 3e^{-x}$, $g_3(x) = 2 - 2e^{-x^2}$, $g_4(x) = \ln(x+1) - 1$:



zu Ü 4.8

$Z = 1234^{-5678} = 10^{-5678 \cdot \lg 1234} = 10^{-17552.48748\ldots} = 10^{-17553+0.5125232\ldots} = 10^{0.5125232\ldots} \cdot 10^{-17553} =$
$= 3.254791701 \cdot 10^{-17553}$.

zu Ü 4.9

$\boxed{\lambda\, t_h = \ln 2}$; mit dem Zerfallsgesetz ergibt sich für den Gegenstand ein Alter von etwa 118 [Jahren] , er ist also wesentlich jünger als behauptet.

zu Ü 5.1

(i) : $\sqrt{\dfrac{n^3 + 72n^2 + 95}{4n^3 - 6n + 5}} = \sqrt{\dfrac{1 + 72/n + 95/n^3}{4 - 6/n^2 + 5/n^3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$,

(ii) : $\dfrac{4n^2 - 1}{n(2n+1)} = \dfrac{4 - 1/n^2}{2 + 1/n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{4}{2} = 2$

(iii) : $\dfrac{\sqrt{1 + n + n^2} - 1}{n} = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} + 1} - \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1} = 1$.

zu Ü 5.2

Der Grenzwert ist (*definitionsgemäß*!) die **Euler'sche Zahl** $e = 2.71828182846\ldots$:
$a_{5000} = 2.7180$, $a_{10000} = 2.7181$, ...

zu Ü 5.3

$\boxed{w_n = (0.8)^n\, w_0}$, $w_n < 0.01\, w_0$ für $n \geq 21$.

zu Ü 5.4

(i): $e^0 = 1$, (ii): $e^{-\infty} = 0$, (iii): $e^{\infty} = \infty$,

(iv): $\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{\cdots}-1)\,(\sqrt{\cdots}+1)}{x\,(\sqrt{\cdots}+1)} = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

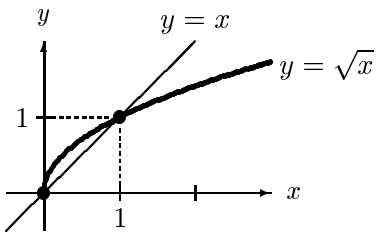
zu Ü 5.5

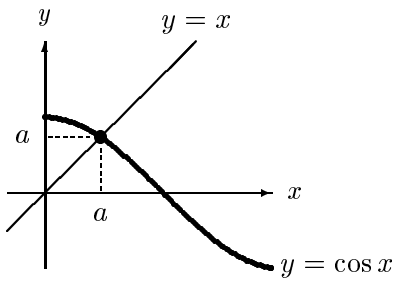
$a_0 = a$, $a_1 = 2a_0 + 1 = 2a + 1$, $a_2 = 2a_1 + 1 = 4a + 2 + 1$, $a_3 = 2a_2 + 1 = 8a + 4 + 2 + 1$,
$a_4 = 2a_3 + 1 = 16a + 8 + 4 + 2 + 1$, usw.:

$$a_n = 2^n a + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2^n a + \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n(a+1) - 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad a > -1 \\ -1 & \text{für} \quad a = -1 \\ -\infty & \text{für} \quad a < -1 \end{cases}$$

zu Ü 5.6

(i): $a = 1$: (a, a) ist der nicht–triviale Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit der Parabel $y = \sqrt{x}$; (ii): $a = 0.739085133$: (a, a) ist der Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit der Kurve $y = \cos x$:





zu Ü 5.7

$a = \sqrt{A}$.

zu Ü 5.8

(i): 1, (ii): 4, (iii): $2/3$.

zu Ü 5.9

$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$, $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

zu Ü 5.10

Die n-te Schneeflocke S_n hat den Umfang $U_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \cdot 3a$, mit $a = 3$ [*mm*] also den Umfang $U_n = 9 \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ [*mm*] .

Damit haben alle Schneeflocken ab S_{41} *mehr* als 1 Kilometer Umfang:
$U_{41} = 1193247.987$ [*mm*] ≈ 1.19 [*km*] .

zu Ü 6.1

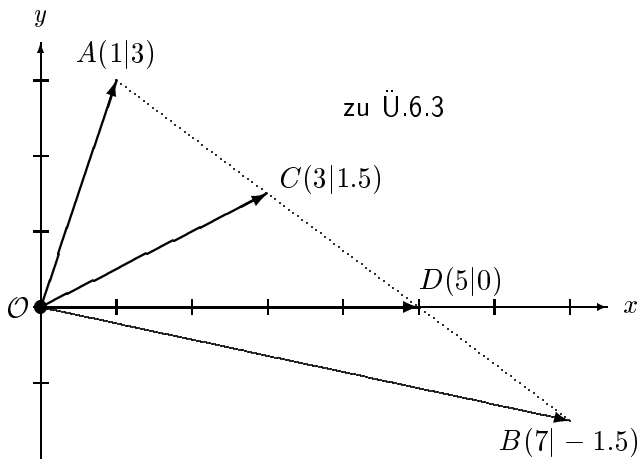
$x = 7\,,\ y = 4\,,\ z = 9\,.$

zu Ü 6.2

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 18/7 \\ -6/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}.$

zu Ü 6.3

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}\,,\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$



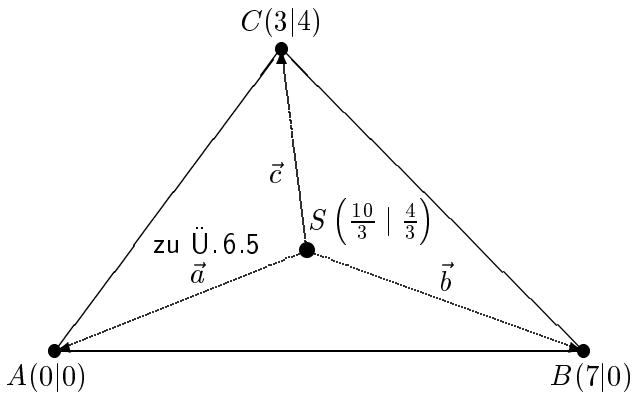
zu Ü 6.4

$P_1(4.4|0.8)\,,\ P_2(2|-4)\,.$

zu Ü 6.5

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -10/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}\,,\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ -4/3 \end{pmatrix},$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}.$



zu Ü 6.6

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $P(0|2)\,.$

zu Ü 6.7

Der Punkt $P(1|2|3)$ *liegt* auf dieser Ebene, die sich auch in der Form $E : x - 4y + z = -4$ darstellen lässt.

zu Ü 6.8

Die Schnittgerade ist $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ (t \in \mathbb{R})\,.$

zu Ü 6.9

Für diese Ebenen hat man z.B. die **Parameterdarstellungen** (jeweils mit beliebigen Parametern $s, t \in \mathbb{R}$:

Ebene durch durch B, C, A: $E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Ebene durch durch C, D, A: $E_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Ebene durch durch D, B, A: $E_3 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

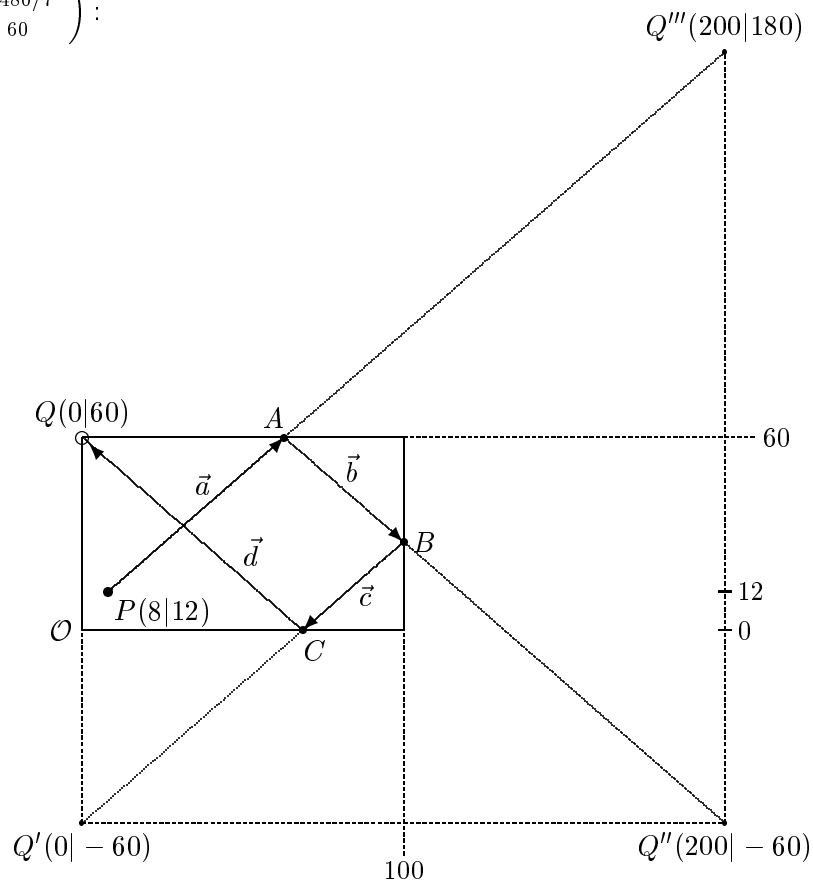
Ebene durch durch B, C, D: $E_4 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

oder die (wesentlich einfacheren) **Koordinatendarstellungen**:

$E_1 : z = 1$, $E_2 : x = 1$, $E_3 : y = 1$, $E_4 : x + y + z = 1$.

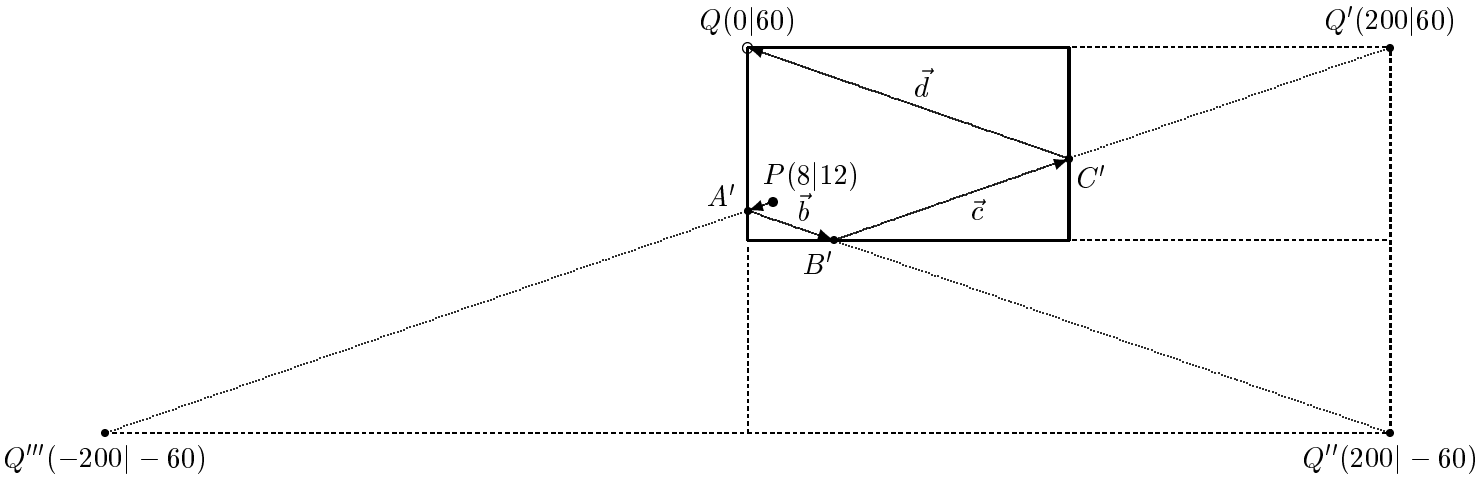
zu Ü 6.10

Mit $A(\frac{440}{7}|60)$ an der oberen Bande, $B(100|\frac{55}{2})$ an der rechten Bande und $C(\frac{480}{7}|0)$ an der unteren Bande ist $\vec{a} = \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 384/7 \\ 48 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 260/7 \\ -65/2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -220/7 \\ -55/2 \end{pmatrix}$
und $\vec{d} = \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} -480/7 \\ 60 \end{pmatrix}$:



Es gibt noch eine zweite Möglichkeit:

Mit $A'(0|\frac{120}{13})$ an der linken Bande, $B'(\frac{80}{3}|0)$ an der unteren Bande, $C'(100|\frac{330}{13})$ an der rechten Bande ist $\vec{a} = \vec{PA'} = \begin{pmatrix} -8 \\ -36/13 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 80/3 \\ -120/13 \end{pmatrix}$,
$\vec{c} = \overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 220/3 \\ 330/13 \end{pmatrix}$, und $\vec{d} = \overrightarrow{C'Q} = \begin{pmatrix} -100 \\ 450/13 \end{pmatrix}$:



zu Ü 7.1

Alle drei Winkel sind gleich: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z =: \alpha$ mit $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d.h.
$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0.3041\pi \ (= 57.7356^o)$.

zu Ü 7.2

$\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} \ (= 45^o)$. Es ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g_1 \cap g_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t = 2 - s \Rightarrow s = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t = -4 + 3s \overset{\downarrow}{=} -4 + 3(1 - 2t) = -1 - 6t \Rightarrow 10t = -4 \Rightarrow t = -0.4; \end{cases}$$

damit ist $x = 1 - 0.8 = 0.2$, $y = 3 - 1.6 = 1.4$, d.h. der Schnittpunkt der Geraden ist $S(0.2|1.4)$.

zu Ü 7.3

$\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{14} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$; die Schnittgerade ist $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$(t \in \mathbb{R})$.

zu Ü 7.4

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \underset{\parallel \vec{b}}{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}} + \underset{\perp \vec{b}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \ ; \ d = \sqrt{2}.$$

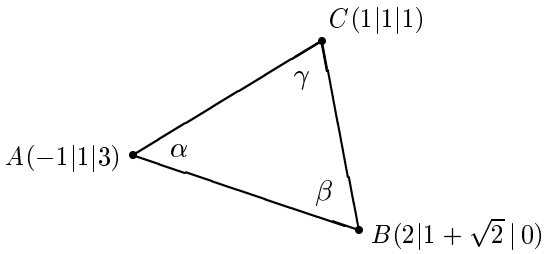
zu Ü 7.5

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underset{\parallel E}{\begin{pmatrix} 4/7 \\ 16/7 \\ 20/7 \end{pmatrix}} + \underset{\perp E}{\begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}} \; ; \; d = \sqrt{\frac{2}{7}}\,.$$

zu Ü 7.6

$$\cos\,\alpha = \frac{\left(\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\,\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{20}\,\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\,,$$

$$\cos\,\beta = \frac{\left(\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\,\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20}\cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,,$$



somit: $\alpha = 0.1024\pi$ $(= 18.435^\circ)$, $\beta = 0.1476\pi$ $(= 26.565^\circ)$, $\gamma = \pi - \alpha - \beta = 0.75\pi$ $(= 135^\circ)$.

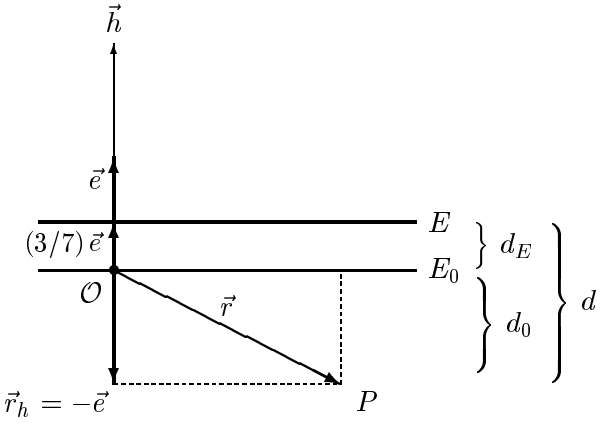
zu Ü 7.7

Mit dem Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

dem Normalenvektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

und dem Einheitsvektor $\vec{e} = \dfrac{\vec{h}}{|\vec{h}\,|}$

ist $\vec{r}_h = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 6/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} = -\vec{e}$,



somit $d_0 = d(P\,,\,E_0) = |\vec{r}_h\,| = 1$;

und es ist $d_E = d(\mathcal{O}\,,\,E) = \dfrac{3}{\sqrt{4+36+9}} = \dfrac{3}{7}$, somit: $d = d(P\,,\,E) = d_0 + d_E = \dfrac{10}{7}$.

zu Ü 7.8

Aus Symmetriegründen (keine Richtung ist bevorzugt) ist $A = A(b|b|0)$, $B = B(0|b|b)$ und $C = C(b|0|b)$ mit einer gewissen Zahl b. Dann muss gelten:

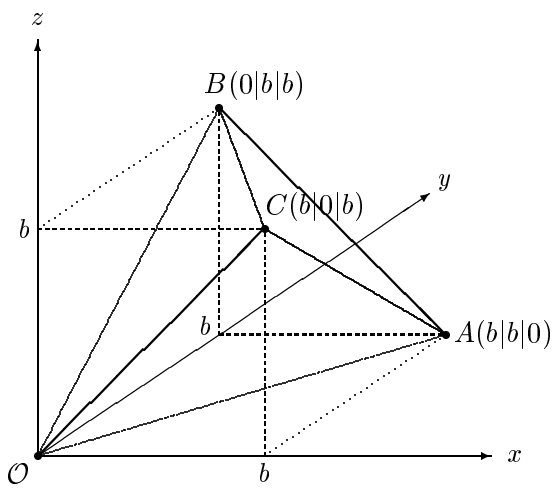
$a^2 \overset{!}{=} |\mathcal{O}A|^2 = |\mathcal{O}B|^2 = |\mathcal{O}C|^2 = b^2 + b^2$,

also $b = a/\sqrt{2}$.

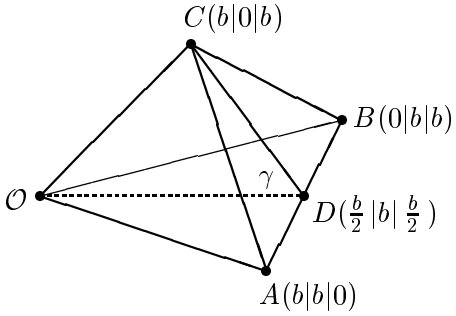
Hiermit hat man bereits (wie gefordert):

$|AB|^2 = |AC|^2 = |BC|^2 = b^2 + b^2 = a^2$.

Das ergibt die Punkte:



$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\middle|\frac{a}{\sqrt{2}}\middle|0\right)$, $B\left(0\middle|\frac{a}{\sqrt{2}}\middle|\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $C\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\middle|0\middle|\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.



Ferner hat man:

$$\cos\gamma = \frac{(\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{D\mathcal{O}})}{|DC|\,|D\mathcal{O}|} = \frac{-\begin{pmatrix} b/2 \\ b \\ b/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b/2 \\ -b \\ b/2 \end{pmatrix}}{b^2\,(1/4+1+1/4)} = \frac{1}{3},$$

somit: $\gamma = 0.3918\pi$ $(= 70.53^\circ)$.

zu Ü 7.9

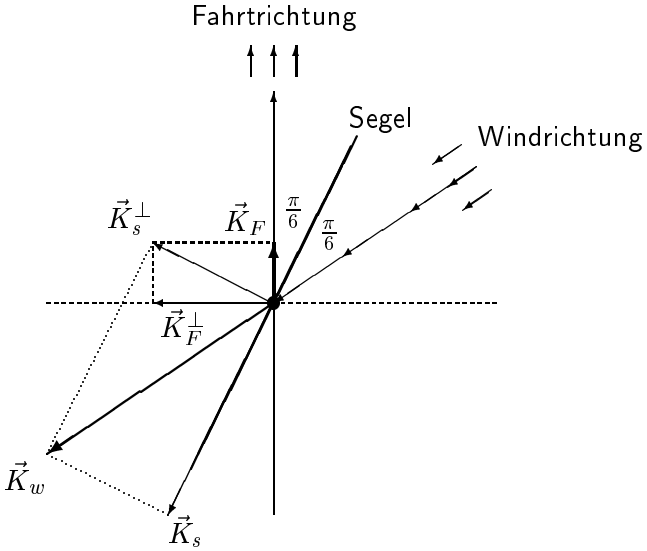
Wenn $\vec{e}_w$, $\vec{e}_s$ und $\vec{e}_F$ die Einheitsvektoren in Wind– bzw. Segel– bzw. Fahrtrichtung sind, dann ist

$\vec{e}_s\cdot\vec{e}_w = \cos(\pi-\pi/6) = -\sqrt{3}/2$,
$\vec{e}_F\cdot\vec{e}_w = \cos(\pi-\pi/3) = -1/2$,
$\vec{e}_F\cdot\vec{e}_s = \cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$,

und mit $\vec{K}_w = K\,\vec{e}_w$ ergibt sich:

$\vec{K}_s = (\sqrt{3}/2)\,K\,\vec{e}_s$,
$\vec{K}_s^{\perp} = K\left(\vec{e}_w - (\sqrt{3}/2)\,\vec{e}_s\right)$,
$\vec{K}_F = (1/4)\,K\,\vec{e}_F$, also

$$\frac{|\vec{K}_F|}{|\vec{K}_w|} = \frac{1}{4} = 25\%.$$



zu Ü 8.1

(i): $\left(e^{2x^2-1}\right)' = 4x\,e^{2x^2-1}$, **(ii)**: $\left(e^{2x^2-1}\right)'' = \left(4x\,e^{2x^2-1}\right)' = (4+16x^2)\,e^{2x^2-1}$.

(iii): $\left(\frac{\tan^2 x}{2} + \ln\cos x\right)' = \tan^3 x$, **(iv)**: $\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\right)' = \frac{7}{8}\,x^{-\frac{1}{8}}$.

zu Ü 8.2

Zunächst wird in die gegebene Kurvengleichung $x=1$ gesetzt: das liefert: $y^2-y-6=0$ und somit die beiden Punkte $P_1(1,-2)$ und $P_2(1,3)$. Wenn man nun beide Seiten der Kurvengleichung nach x ableitet (und hierbei berücksichtigt, dass $y=y(x)$): $6x^2-2xy^2-2x^2yy'-3+y'=0$ und ebenfalls $x=1$ einsetzt, so bekommt man: $y' = \frac{2y^2-3}{1-2y}$. Die Anstiege in P_1 und P_2 ergeben sich nun durch Einsetzen von $y=-2$ bzw. $y=3$:

$y_1' = \frac{8-3}{1+4} = 1$, $y_2' = \frac{18-3}{1-6} = -3$. Damit erhält man die Tangenten:

$y+2 = 1\cdot(x-1)$, d.h. $\boxed{g_{T_1}: y = x-3}$, und $y-3 = -3(x-1)$, d.h. $\boxed{g_{T_2} = -3x+6}$.

zu Ü 8.3

$(x^n)' = n\,x^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!}\,x^{n-1}$, $(x^n)'' = (n-1)\,n\,x^{n-2} = \dfrac{n!}{(n-2)!}\,x^{n-2}$,

$(x^n)''' = (n-2)(n-1)\,n\,x^{n-3} = \dfrac{n!}{(n-3)!}\,x^{n-3}$, usw.: $(x^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}$ für $k = 0, \ldots, n$:

$(x^n)^{(n)} = \dfrac{n!}{0!}\,x^0$, also $\left(x^n\right)^{(n)} = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

zu Ü 8.4

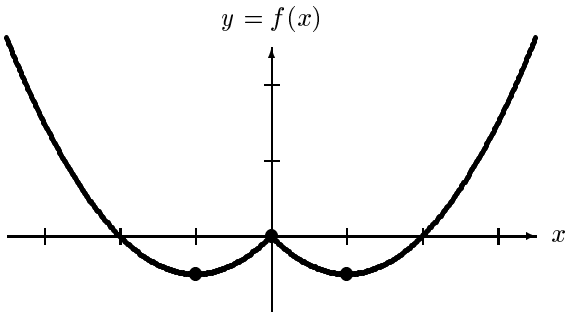
(i) : $f(x) = (x-2)^{25}$ hat **keine Extrema** und hat bei $x_0 = 2$ einen **Wendepunkt**;
(ii) : $g(x) = (x-2)^{26}$ hat **keinen Wendepunkt** und hat bei $x_0 = 2$ ein **Minimum**.

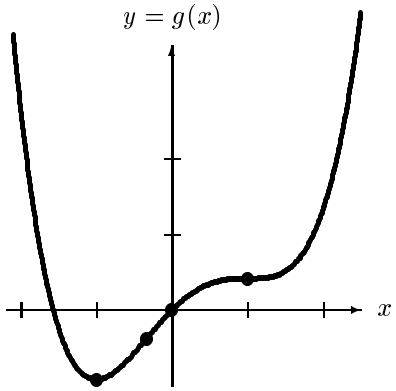
zu Ü 8.5

(i) : $f'(x) = \left\{ \begin{array}{llllll} x+1 & \text{für} & x \le 0, & > 0 & \text{für} & -1 < x < 0, \quad = 0 \quad \text{für} \quad x = -1 \\ x-1 & \text{für} & x \ge 0, & < 0 & \text{für} & 0 < x < 1, \quad = 0 \quad \text{für} \quad x = 1 \end{array} \right\}$,

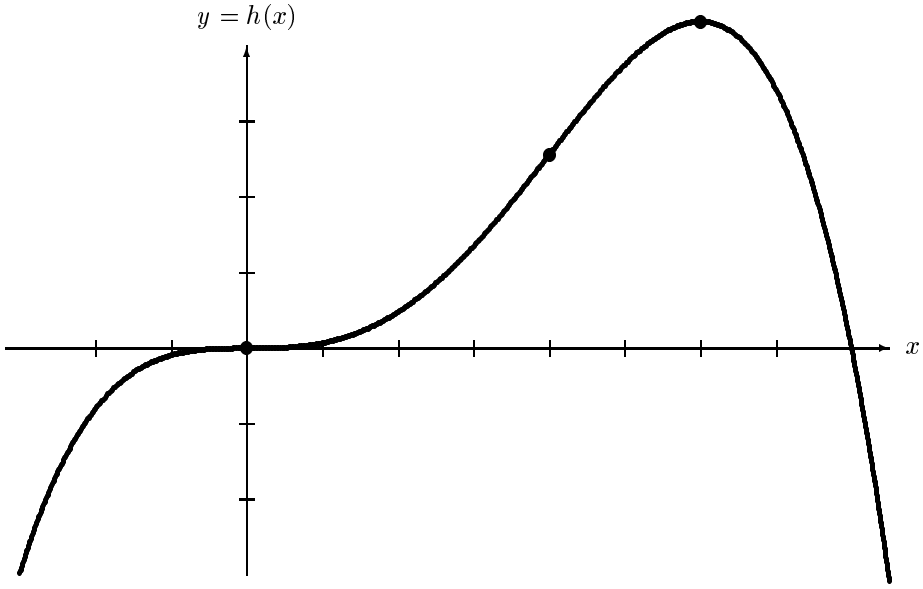
$f''(x) = 1 > 0$ für $x \neq 0$: damit hat $f(x)$ bei $x_0 = 0$ ein **Maximum**, bei $x_{1,2} = \pm 1$ je ein **Minimum** und hat **keine Wendepunkte**;

(ii) : $g(x)$ hat bei $x_1 = -1$ ein **Minimum** und an den Stellen $x_2 = -1/3$, $x_3 = 1$ je einen **Wendepunkt**:





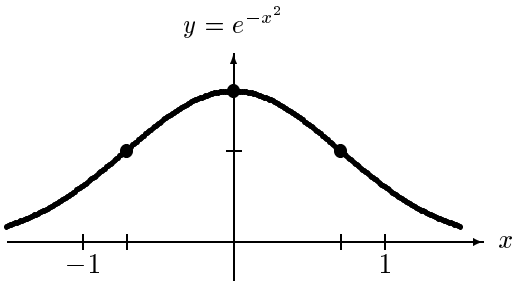
(iii) : $h(x)$ hat bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ je einen **Wendepunkt** und bei $x_3 = 6$ ein **Maximum**:



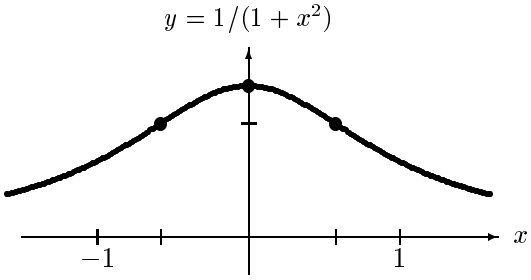
zu Ü 8.6

Beide Funktionen haben einen **Hochpunkt** an der Stelle $(0,1)$ und gehen gegen $+0$ für $x \to \pm\infty$.

(i) : Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ hat zwei **Wendepunkte** an den Stellen $W_{1,2}\left(\pm 1/\sqrt{2} \mid e^{-1/2}\right)$:

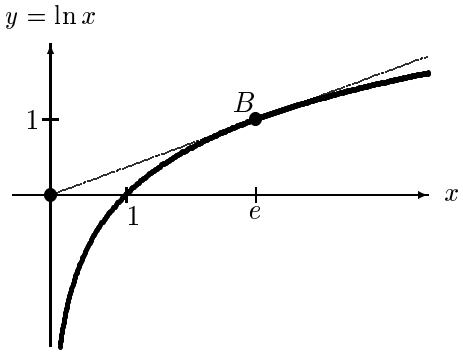


(ii) : Die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ hat zwei **Wendepunkte** an den Stellen $W_{1,2}\left(\pm 1/\sqrt{3} \mid 0.75\right)$:



zu Ü 8.7

Tangente: $y = \frac{1}{e}\,x$,
Berührpunkt: $B(\,e \mid 1\,)$:



zu Ü 8.8

$u = \tan x \;\Rightarrow\; u' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + u^2$. Ist $G(u) = \dfrac{1}{1+u}$, so ist $f(x) = G\left(u(x)\right) = \dfrac{1}{1+\tan x} = \dfrac{1}{1+u}$ und $f'(x) = G'(u)\cdot u'(x) = -\dfrac{1+u^2}{(1+u)^2} =: g(u)$.

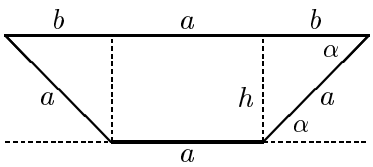
zu Ü 8.9

$v = \left|\begin{pmatrix} -4\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{1+3\sin^2 t}$ ist $\begin{cases} \textbf{minimal } (=2) \text{ für } & t = k\pi \;\; (k \in \mathbb{N}_0\,), \\ \textbf{maximal } (=4) \text{ für } & t = (2k+1)\pi/2 \;\; (k \in \mathbb{N}_0\,), \end{cases}$

mit $b = \left|\begin{pmatrix} -4\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{1+3\cos^2 t} = \begin{cases} 4 & \text{für } t = k\pi \;\; (k \in \mathbb{N}_0\,), \\ 2 & \text{für } t = (2k+1)\pi/2 \;\; (k \in \mathbb{N}_0\,). \end{cases}$

zu Ü 8.10

Mit $h = a\,\sin\alpha$ und $b = a\,\cos\alpha$ hat man die Querschnittsfläche $F = a\,h + b\,h = a^2 \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)$. Dann ist
$F' = a^2\,\left(\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = a^2\,\left(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1\right)$
somit: $F' = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -1$ oder $= 1/2$:
damit wird F maximal für $\alpha = \pi/3$ $(= 60^\circ\,)$.



zu Ü 8.11

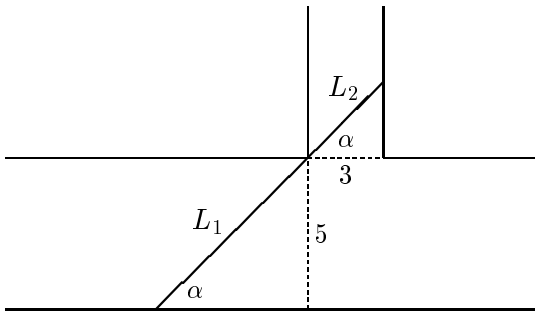
$5/L_1 = \sin\alpha\,,\ 3/L_2 = \cos\alpha \ \Rightarrow$

$L(\alpha) = L_1 + L_2 = \dfrac{5}{\sin\alpha} + \dfrac{3}{\cos\alpha}\,,$

$L' = -5\,\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 3\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,.$

$L' = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt[3]{5/3}$ (d.h. $\alpha = 0.27696\pi$) .

Damit ist $L = 11.19$ [*Meter*] .



zu Ü 9.1

$$I_1 = 7\cdot 8 = 56\,,\quad I_2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2\,,\quad I_3 = \int_1^8 t^{-1/3}\,dt = \left[\frac{3}{2}\,t^{2/3}\right]_1^8 = \frac{9}{2}\,.$$

zu Ü 9.2

Eine Symmetriebetrachtung ergibt (siehe die Abbildungen 1.5 und 1.6):

$$I = \int_{-\pi/2}^{0} \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = -\int_{-\pi/2}^{0} \sin x\,dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\,,$$ somit:

$\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$ und damit:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = I \overset{\text{z.B.}}{=} \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1\,.$$

zu Ü 9.3

$$\lambda < 1\ :\ I_1 = \int_0^1 x^{-\lambda}\,dx = \left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_0^1 = \frac{1}{1-\lambda}\,;$$

$$\lambda = 1\ :\ I_2 = \int_{1/e}^{e} x^{-1}\,dx = \left.\ln|x|\right|_{1/e}^{e} = 2\,;$$

$$\lambda > 1\ :\ I_3 = \int_1^{\infty} x^{-\lambda}\,dx = \left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{\lambda-1}\,.$$

zu Ü 9.4

$$I_1 = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} 3\,e^{-|x|}\,dx = 6\int_0^{\ln 3} e^{-x}\,dx = -6\ \left.e^{-x}\right|_0^{\ln 3} = 4\,,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 4\,,$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 4\,,$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} \left(2 + \frac{|x|}{x}\right)\,dx = \int_{-1}^{1} 2\,dx = 4\,.$$

zu Ü 9.5

$$I_1 = \int \frac{3-x^2}{9x-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\,\ln|9x-x^3| + c\,,$$

$$I_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{3-x^2}{9x-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\,\Big[\ln|9x-x^3|\Big]_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}\,(\ln 8 - \ln 10) = \frac{1}{3}\,\ln 0.8 = -0.074381\,;$$

$$I_3 = \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c\,,$$

$$I_4 = \int_e^{e^3} \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^3} = \ln 3 = 1.09861\,;$$

$$I_5 = \int \sin 2x\,\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}\,\sin^2 2x + c\,,$$

$$I_6 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x\,\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}\,\sin^2 2x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{4}\,;$$

$$I_7 = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln x\Big)^2 + c\,,$$

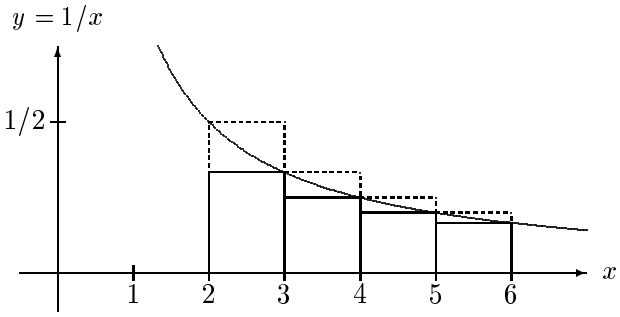
$$I_8 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\Big(\ln x\Big)^2\Big]_1^e = \frac{1}{2}\,.$$

zu Ü 9.6

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} < \int_2^6 \frac{dx}{x} < \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

also: $a = \dfrac{19}{20}$, $b = \dfrac{77}{60}$, $I \approx \dfrac{67}{60} = 1.12\,;$

genau: $I = \ln x\Big|_2^6 = \ln 3 = 1.10\,.$



zu Ü 9.7

Der zur Zeit t zurückgelegte Weg sei $x(t)$ mit $x(0) = 0$; dann ergibt sich die Geschwindigkeit: $v(t) = \int g \cdot dt = gt + const.$, wegen $v(0) = 0$ also: $v(t) = gt$, und:

$x(t) = \int v(t)\,dt = g\int t\,dt = \frac{1}{2}\,gt^2 + const.$, und wegen $x(0) = 0$: $x(t) = \frac{1}{2}\,gt^2$.

Damit ist $L = \dfrac{1}{2}\,9.81\,(1.9)^2 = 17.7\ [m]$ und $v_0 = 1.9 \cdot g = 18.64\ [m/sec] = 67.1\ [km/h]$.

zu Ü 9.8

$$m = \iiint\limits_{\text{Stab}} \rho\,dV = q\int_0^{200} \rho(x)\,dx = 100\pi \int_0^{200} \Big(2 + x^2\,10^{-4}\Big)\,dx = 100\pi\,\Big[2x + \frac{x^3}{3}\,10^{-4}\Big]_0^{200} =$$

$$= \frac{2}{3}\,10^5\,\pi = 209439.51\,[g\,] = 209.44\,[kg\,];$$

$$\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{2\cdot 10^5\,\pi}{3\cdot 10^2\,\pi\cdot 200} = \frac{10}{3} = 3.33\ [g/cm^3]\,.$$

zu Ü 9.9

In allen drei Fällen hat die Scheibe den Rauminhalt $dV = \pi r_x^2\,dx$, wenn r_x den Radius der Zylinderscheibe an der Stelle x bezeichnet.

(i) $r_x^2 = R^2 - x^2$, folglich: $V = 2\int_0^R \pi r_x^2\,dx = 2\pi\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{4}{3}\pi R^3$.

(Halbkugel–Volumen $= \frac{2}{3}\cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe).

(ii) $x = \frac{H}{R^2}\,r_x^2 \Rightarrow r_x^2 = \frac{R^2}{H}\,x$, somit: $V = \int_0^H \pi r_x^2\,dx = \pi\,\frac{R^2}{H}\int_0^H x\,dx = \frac{1}{2}\pi R^2 H$.

(Paraboloid–Volumen $= \frac{1}{2}\cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe).

(iii) Mit $r_x = \frac{R}{H}\,x$ ist: $V = \int_0^H \pi r_x^2\,dx = \pi\,\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

(Kegel–Volumen $= \frac{1}{3}\cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe).

zu Ü 10.1

(i) **1.** $\boxed{u = \sqrt{1+x^2}}$: $\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = du$; $x = 0 \Rightarrow u = 1,\ x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2}$;

somit: $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} du = \sqrt{2} - 1$;

2. $\boxed{u = 1 + x^2}$: $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,du$; $x = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 1 \Rightarrow u = 2$; hiermit ist

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int\limits_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u}\,\Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1\,.$$

(ii) $\boxed{u = x - 3}$: $du = dx$; $x = 4 \Rightarrow u = 1,\ x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$; somit:

$$I_2 = \int\limits_4^\infty \frac{x^2}{(x-3)^{10}}\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{(u+3)^2}{u^{10}}\,du = \int\limits_1^\infty \left(u^{-8} + 6u^{-9} + 9u^{-10}\right)du =$$

$$= \left[\frac{u^{-7}}{-7} + 6\,\frac{u^{-8}}{-8} + 9\,\frac{u^{-9}}{-9}\right]_1^\infty = \frac{1}{7} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{53}{28} = 1.892857\,.$$

(iii) $\boxed{u = 1 + x^3}$: $\frac{du}{dx} = 3x^2 \to x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$; $x = 1/2 \Rightarrow u = 9/8,\ x = 2 \Rightarrow u = 9$; hiermit:

$$I_3 = \int\limits_{1/2}^2 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_{9/8}^9 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u}\Big|_{9/8}^9 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}\right) = \frac{7}{27} = 0.259\overline{259}\ldots.$$

(iv) $\boxed{u = x + 1}$: $dx = du$; $x = 0 \Rightarrow u = 1,\ x = 7 \Rightarrow u = 8$; somit:

$$I_4 = \int\limits_0^7 x\,\sqrt[3]{x+1}\,dx = \int\limits_1^8 (u-1)\,u^{1/3}\,du = \int\limits_1^8 \left(u^{4/3} - u^{1/3}\right)du = \left[\frac{3}{7}\,u^{7/3} - \frac{3}{4}\,u^{4/3}\right]_1^8 =$$

$$= \frac{3}{7}\left(2^7 - 1\right) - \frac{3}{4}\left(2^4 - 1\right) = \frac{381}{7} - \frac{45}{4} = \frac{1209}{28} = 43.17857\,.$$

zu Ü 10.2

(i), (ii) : Mit der Substitution $\boxed{u = \cos x}$ ist $\dfrac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow \sin x\, dx = -du \;\Rightarrow$:

$$F_1(x) = \int \sin x \cos^3 x\, dx = -\int u^3\, du = -\frac{u^4}{4} + c = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c \quad \text{und}$$

$$F_2(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx = -\int \frac{du}{u^3}\, du = \frac{1}{2}\, u^{-2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c\,;$$

(iii), (iv) : $\boxed{u = \sqrt{4-3x^2}} \;\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{-3x}{\sqrt{4-3x^2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{\sqrt{4-3x^2}}\, dx = -\dfrac{1}{3}\, du \;\Rightarrow$

$$F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}\, dx = -\frac{1}{3}\int du == -\frac{1}{3}\, u + c = -\frac{1}{3}\sqrt{4-3x^2} + c \quad \text{und}$$

$$F_4(x) = \int x\sqrt{4-3x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\int u^2\, du = -\frac{1}{9}\, u^3 + c = -\frac{1}{9}\left(4-3x^2\right)^{3/2} + c\,;$$

(v) : mit der Substitution $\boxed{u = 3+4x}$ ist $\dfrac{du}{dx} = 4$, d.h. $dx = \dfrac{1}{4}\, du$, somit:

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{3+4x} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\, \ln|u| + c = \frac{1}{4}\, \ln|3+4x| + c\,.$$

zu Ü 10.3

(i) $\boxed{x = \sin u}$: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$ und $dx = \cos u\, du$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$,

$x = 1 \Rightarrow u = \pi/2$; hiermit ist $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\, du}{\cos u} = \int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2}$;

(ii) $\boxed{x = \tan u}$: $1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = \dfrac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u}$ und $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{\cos^2 u}$, d.h.

$dx = \dfrac{du}{\cos^2 u}$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = 1 \Rightarrow u = \pi/4$, somit:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\pi/4} du = \frac{\pi}{4}\,;$$

(iii) $\boxed{x = e^u - e^{-u}}$: $\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+e^{2u}-2+e^{-2u}} = e^u + e^{-u}$, $dx = \left(e^u + e^{-u}\right)\, du$;

$x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = 3/2 \Rightarrow u = \ln 2$ (denn mit $u = \ln 2$ ist $x = 2 - 1/2 = 3/2$) ;

hiermit folgt: $I_3 = \displaystyle\int_0^{3/2} \sqrt{4+x^2}\, dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^u + e^{-u}\right) du = \int_0^{\ln 2} \left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right) du =$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2u} + 2u - \frac{1}{2}e^{-2u}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left((4-1) + 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right. = \frac{15}{8} + 2\ln 2 = 3.26129\,;$$

(iv) $\boxed{x = \ln\sqrt{u-1}}$: $\frac{1}{2}\ln(u-1) \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1}\,du$, $2 + e^{2x} + e^{-2x} = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 =$
$= \left(\sqrt{u-1} + \frac{1}{\sqrt{u-1}}\right)^2 = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow \frac{dx}{2+e^{2x}+e^{-2x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\,du$; $x = 0 \Rightarrow u = 2$, $x = \ln 3 \Rightarrow$ $\sqrt{u-1} = 3 \Rightarrow u = 10$; somit:

$$I_4 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{2+e^{2x}+e^{-2x}} = \frac{1}{2}\int_2^{10}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\Big|_2^{10} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\right) = 0.2\,.$$

zu Ü 10.4

(i) $\boxed{y'\,e^{x+y} = 1\,,\ y(0) = 0}$: $\frac{dy}{dx}\,e^y = e^{-x} \Rightarrow \int e^y\,dy = \int e^{-x}\,dx$, d.h. $e^y = -e^{-x} + c$ bzw. $y = \ln\left(c - e^{-x}\right)$; $0 = y(0) = \ln(c-1) \Rightarrow c - 1 = 1$, d.h. $c = 2$: $\boxed{y(x) = \ln\left(2 - e^{-x}\right)}$.

(ii) $\boxed{x^2y' = y^2(1-x^2)\,,\ y(1) = 1/4}$: $\frac{dy}{dx}\,x^2 = y^2\,(1-x^2) \Rightarrow$
$\int\frac{dy}{y^2} = \int\frac{1-x^2}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx$, d.h. $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + x + c$, bzw. $y = \frac{x}{x^2+cx+1}$;
$\frac{1}{4} = y(1) = \frac{1}{2+c}$, also $c = 2$: $\boxed{y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}}$

(iii) $\boxed{y' = xy - \frac{x}{y^2}\,,\ y(0) = 2}$: $\frac{dy}{dx} = x\left(y - \frac{1}{y^2}\right) = x\,\frac{y^3-1}{y^2} \Rightarrow \int\frac{y^2}{y^3-1}\,dy = \int x\,dx \Rightarrow$
$\frac{1}{3}\,\ln\left|y^3 - 1\right| = \frac{x^2}{2} + c_0$, d.h. $y^3 - 1 = c\,e^{\frac{3}{2}x^2}$ bzw. $y = \left(1 + c\,e^{\frac{3}{2}x^2}\right)^{1/3}$;
$2 = y(0) = (1+c)^{1/3}$, d.h. $c = 7$: $\boxed{y(x) = \left(1 + 7\,e^{\frac{3}{2}x^3}\right)^{1/3}}$.

zu Ü 10.5

(i) $C_1 : x = 1,\ y = 0,\ 0 \le z \le h \Rightarrow dx = dy = 0$ und: $\int_{C_1}\vec{K}\cdot d\vec{r} = \int_0^h z\,dz = \frac{h^2}{2}$;

(ii) $C_4 : x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}\,t\,,\ 0 \le t \le 2\pi\,,\ \Rightarrow$

$$dx = -\cos t\,dt,\ dy = \sin t\,dt,\ dz = \frac{h}{2\pi}\,dt \quad \text{und}$$

$$\int_{C_2}\vec{K}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} y\,dx - x\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi}\left(-\sin^2 t - \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}\,t\right)dt = \frac{h^2}{2} - 2\pi\,.$$

zu Ü 10.6

(i) $v = t\sqrt{4+9t^2}$, und mit der Substitution $u = 4+9t^2$ ergibt sich:

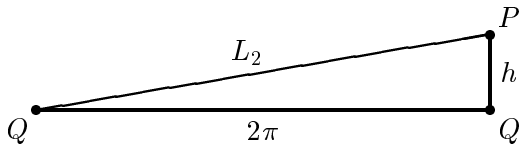
$$L_1 = \int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{4+9t^2}\,dt = \frac{1}{18}\int_4^{49} \sqrt{u}\,du = \frac{335}{27} \quad (= 12.407407\ldots)\,.$$

(ii) Mit $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi}\,t$ ist $ds = \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{h^2+4\pi^2}\,dt$

und $L_2 = \displaystyle\int_C ds = \frac{1}{2\pi}\sqrt{h^2+4\pi^2}\int_0^{2\pi} dt = \sqrt{h^2+4\pi^2}\,.$

Das kann man auch ***ohne Integration*** herausbekommen: wenn man die Schraubenlinie zu einer ebenen Figur entrollt, bekommt man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und 2π
($2\pi =$ Umfang eines Kreises vom Radius 1) :

mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich:
$L_2 = \sqrt{h^2+4\pi^2}$:



Index

$\mathcal{D}(f)$, 15
$\mathcal{R}(f)$, 15
Änderung einer Funktion, 87
Änderung, relative, 115
Öffnun einer Parabel, 28
äußere Ableitung, 89

Ableitung der Umkehrfunktion, 90
Ableitung einer Funktion, 87
Ableitung einer Summe oder Differenz, 89
Ableitung eines Produktes, 89
Ableitung eines Quotienten, 89
Ableitung nach der oberen Grenze eines Integrals, 103
Ableitung von Vektoren, 95
Ableitung, höhere, 88
Ableitungen einiger Funktionen, 93
Ableitungsregeln, 89
Abstand von zwei reellen Zahlen, 12
Achse, Parabel–, 30
Achsenabschnittsgleichung einer Geraden, 24
achsensymmetrisch, 8
Additionstheoreme für $\sin$ und $\cos$, 9
allgemeine Exponentialfunkrion, 41
allgemeiner Logarithmus, 42
Anstieg der Tangente, 87
antiparallele Vektoren, 79
Arbeit einer Kraft, 116
Aufleitung, 104

bedingte Divergenz, 52
Beschleunigungsvektor, 97
bestimmtes Integral, 100
Betrag einer reellen Zahl, 12
Betrag eines Vektors, 66, 68, 79
Betragsfunktion, 13
Bildbereich einer Funktion, 15
Bildungsgesetz einer Folge, explizites, 50
Bildungsgesetz einer Folge, rekursives, 50
Billard, 73
Bogenmaß, 1
Brigg'scher Logarithmus, 43

Cosinus, 4, 5
Cosinus, Additionstheorem, 9
Cosinus, Funktionswerte, 6
Cosinus–Satz, 81
Cosinuskurve, verschoben, 18
Cotangens, 4, 5
Cotangens, Funktionswerte, 6

Definitionsbereich einer Funktion, 15
dekadischer Logarithmus, 43
Diagonale eines Quaders, 3
Differential, vektorielles, 116
Differentiale, 110
Differentialgleichung der Ordnung 1, 113
Differentialquotient, 87
Differenzenquotient, 87
differenzierbare Funktion, 88
Differenzvektor, 70
Divergenz, bedingte, 52
Divergenz, wesentliche, 52
Division, Polynom–, 33
Drehsinn eines Winkels, 1
Dreiecksungleichung, 15

Ebene durch drei Punkte, 75
Ebene, Normalenvektor, 83
Ebene, Parameterdarstellung, 75
Ebene, vektorielle Darstellung, 75
Ebenen, Schnittwinkel, 83
echt gebrochen–rationale Funktion, 37
eigentliche Konvergenz, 52
Einheitskreis, 4
Einheitsvektor, 66
Einheitsvektoren, natürliche, 69
Einschränkung einer Funktion, 16
einseitiger Grenzwert, 62
Ellipse, Flächeninhalt, 21
Ellipse, Halbachsen, 21
Ellipse, Mittelpunktsgleichung, 21

Ellipse, Parameterdarstellung, 21
Ellipse, zum Umfang einer –, 21
Erdbeschleunigung, 117
Euler'sche Zahl e, 41
explizites Bildungsgesetz einer Folge, 50
Exponentialfunktion, 41, 115
Exponentialfunktion, Rechenregeln, 45
Extremwerte einer Funktion, 91

Faktorzerlegung eines Polynoms, 35
Fakultät, 50
Fibonacci–Folge, 50, 58
Flächeninhalt einer Ellipse, 21
Flächeninhalt eines Kreises, 61
Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks, 61
Flächeninhalt unter einer Kurve, 100
Folge, explizites Bildungsgesetz, 50
Folge, Fibonacci-, 50, 58
Folge, Grenzwert, 51
Folge, Null-, 51
Folge, rekursives Bildungsgesetz, 50
Folge, Zahlen–, 49
Folgen, bedingt divergente, 52
Folgen, eigentlich konvergente, 52
Folgen, konvergente, 51
Folgen, Majorantenkriterium, 54
Folgen, Rechenregeln, 54
Folgen, Teil-, 57
Folgen, uneigentlich konvergente, 52
Folgen, Vergleichstest, 54
Folgen, wesentlich divergente, 52
Folgen, Zusammensetzungsregeln, 55
Formel, Mitternachts–, 29
Formel, p-q-, 29
freier Vektor, 67
Funktion, 15
Funktion, Änderung, 87
Funktion, Ableitung, 87
Funktion, Betrags-, 13
Funktion, Bildbereich, 15
Funktion, Definitionsbereich, 15
Funktion, differenzierbare, 88
Funktion, echt gebrochen–rationale, 37
Funktion, Einschränkung, 16
Funktion, Expinential-, 115
Funktion, Extremwerte, 91
Funktion, gerade, 8
Funktion, Integral-, 103
Funktion, Knick, 88
Funktion, monoton wachsende oder fallende, 90
Funktion, Sprungstelle, 88
Funktion, Stamm-, 103
Funktion, ungerade, 8
Funktion, Urbildbereich, 15
Funktion, Wendepunkt, 91
Funktion, Wertebereich, 15
Funktion, Zielbereich, 15
Funktionen, einige Ableitungen, 93
Funktionen, einige Stamm-, 107
Funktionen, gebrochen–rationale, 36
Funktionen, Grenzwerte, 59
Funktionen, Potenz–, 36
Funktionen, trigonometrische, 4
Funktionsgraph, Spiegelung, 16
Funktionsgraph, Verschiebung, 16
Funktionswert, 16
Funktionswerte der trigonom. Funktionen, 6

Ganghöhe einer Schraubenlinie, 117
ganzrationale Funktion, 32
gebrochen–rationale Funktionen, 36
Gerade durch zwei Punkte, 25, 74
gerade Funktion, 8
Gerade, Achsenabschnittsgleichung, 24
Gerade, Normalform, 25
Gerade, Parameterdarstellung, 74
Gerade, Punkt–Steigungsgleichung, 25
Gerade, vektorielle Darstellung, 74
Geraden in der Ebene, 24
Geschwindigkeit, Momentan-, 97
Geschwindigkeitsvektor, 97
Gleichung einer Geraden in der Ebene, 24
Gleichung einer Parabel, 28
Gleichung eines Kreises, 19
Gleichung, Differential- der Ordnung 1, 113
Glieder einer Folge, 49

goldener Schnitt, 58
Gradmaß, 1
Grenzwert einer Folge, 51
Grenzwert, einseitiger, 62
Grenzwert, linksseitiger, 62
Grenzwert, rechtsseitiger, 62
Grenzwerte von Funktionen, 59

höhere Ableitung, 88
Halbachsenlängen einer Ellipse, 21
Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve, 97
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 105
Hochpunkt, 91

innere Ableitung, 89
inneres Produkt, 78
Integral, bestimmtes, 100
Integral, unbestimmtes, 104
Integral, Weg-, 116
Integrale, einige unbestimmte –, 107
Integralfunktion, 103
Integration längs eines Weges, 116
Integration mit Substitution, 110
Integrationsgrenzen bei Substitution, 112
Integrationsregeln, 101
Integrationsvariable, 101
Intervall, abgeschlossenes, 12
Intervall, offenes, 12

Kettenregel, 89
Knick einer Funktion, 88
Kommutativgesetz der Vektoradditiion, 69
Komplement, orthogonales, eines Vektors, 83
Komponentenschreibweise eines Vektors, 68
konvergente Folgen, 51
Konvergenz von links oder rechts, 55
Konvergenz, eigentliche, 52
Konvergenz, uneigentliche, 52
konvergieren, 51
koordinatenabhängige Darstellung des Skalarprodukts, 81
Kräfteparallelogramm, 69
Kreis, Mittelpunktsgleichung, 19
Kreis, Parameterdarstellung, 19
Kreisfläche, 19
Kreisflächeninhalt, 61
Kreisumfang, 1, 19, 61
Kreiszahl π, 1
Kurvenintegral, 116

Limes einer Folge, 51
Linie, Schrauben-, 117
Linienintegral, 116
linksseitiger Grenzwert, 62
Logarithmus zur Basis a, 42
Logarithmus, Brigg'scher, 43
Logarithmus, dekadischer, 43
Logarithmus, natürlicher, 43
Logarithmus, Rechenregeln, 45
lokale Extremwerte einer Funktion, 91

Majorantenkriterium für Folgen, 54
Majorantenkriterium für Grenzwerte von Funktionen, 59
Massenschwerpunkt, 73
Maximum einer Funktion, 91
mehrfache Nullstelle, 32
Minimum einer Funktion, 91
Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, 21
Mitternachtsformel, 29
Momentangeschwindigkeit, 97
monoton wachsende oder fallende Funktion, 90
Multiplikation mit Skalaren, 70

n-Eck, regelmäßiges, 61
natürliche Einheitsvektoren, 69
natürlicher Logarithmus, 43
negativer Winkel, 1
Norm, 66
Normalenvektor einer Ebene, 83
Normalenvektor einer Kurve, 97
Normalgorm einer Geraden, 25
Normalparabel, Ableitung, 88
normieren, 70
Nullfolge, 51,55
Nullstellen einer Parabel, 29
Nullstellen eines Polynoms, 32, 35

Orientierung eines Winkels, 1
orthogonale Projektion auf einen Vektor, 83
orthogonale Vektoren, 79, 82
orthogonale Zerlegung eines Vektors, 83
orthogonales Komplement eines Vektors, 83
Ortsvektor, 67, 97

p-q-Formel, 29
Parabel, Öffnung, 28
Parabel, Nullstellen, 29
Parabel, Scheitel, 29
Parabelachse, 30
Parabeln, 28
parallele Vektoren, 79
Parameterdarstellung einer Ellipse, 21
Parameterdarstellung einer Geraden, 74, 75
Parameterdarstellung eines Kreises, 19
Periode, 7
periodische Funktion, 7
Pol einer rationalen Funktion, 37
Polynom, Faktorzerlegung, 35
Polynom, reelle Nullstellen, 35
Polynom, Wurzeln, 32
Polynomdivision, 33
Polynome, 32
Polynome, Linearfaktoren, 32
Polynome, Nullstellen, 32
positiver Winkel, 1
Potenzfunktionen, 36
Produkt, inneres, 78
Produkt, Skalar-, 78
Produktregel, 89
Projektion, orthogonale, eines Vektors, 83
punktsymmetrisch, 8
Pythagoras am Einheitskreis, 7
Pythagoras, Satz von, 3

quadratische Ergänzung, 29
Quotientenregel, 89

rational, gebrochen-, 36
rationale Funktion, Pol, 37
Rechenregeln für Exponentialfunktionen, 45
Rechenregeln für Folgen, 54
Rechenregeln für Logarithmen, 45
rechtsseitiger Grenzwert, 62
reelle Zahlengerade, 12
Regel, Ketten-, 89
Regel, Produkt-, 89
Regel, Quotenten-, 89
regelmäßiges n-Eck, 61
Regeln, Ableitungs-, 89
Regeln, Integrations-, 101
rekursives Bildungsgesetz einer Folge, 50
relative Änderung, 115
resultierende Kraft, 69
Richtung eines Vektors, 66
Richtungsvektor einer Geraden, 74
Richtungsvektoren einer Ebene, 75

Satz von Pythagoras, 3
Satz, Cosinus-, 81
Satz, Haupt– der Differential- und Integralrechnung, 105
Scheitel einer Parabel, 29
Scheitelpunktsgleichung einer Parabel, 28
Schnittwinkel zweier Ebenen, 83
Schraubenlinie, 117
Schwarz'sche Ungleichung, 79
Schwerkraft, 117
Schwerpunkt, Massen-, 73
Sekante einer Kurve, 87
Sinus, 4, 5
Sinus (1/x), 63
Sinus nahe 0, 8
Sinus x durch x, 60
Sinus, Additionstheorem, 9
Sinus, Funktionswerte, 6
Sinuskurve, verschoben, 18
Skalar, 67
Skalarprodukt, 78
Skalarprodukt, koordinatenabhängige Darstellung, 81
Spaltenvektor, 68
Spannung, elektrische, 116
Spiegelung des Funktionsgraphen, 16
Sprungstelle einer Funktion, 88

Stützvektor einer Ebene, 75
Stützvektor einer Geraden, 74
Stammfunktion, 103
Stammfunktionen einiger Funktionen, 107
Substitution, Integration mit –, 110
Substitution, Integrationsgrenzen bei –, 112
Summe von Vektoren, 69

Tangens, 4, 5
Tangens, Funktionswerte, 6
Tangente an eine Kurve, 95
Tangente einer Kurve, 87
Tangenteneinheitsvektor einer Kurve, 97
Tangentialvektor eines Kurve, 97
Teilfolgen, 57
Tiefpunkt, 91
Trennung der Variablen, 113
trigonometrische Funktionen, 4
trigonometrische Funktionen, Funktionswerte, 6

Umfang einer Ellipse, 21
Umfang eines Kreises, 61
Umfang eines regelmäßigen n-Ecks, 61
Umkehrfunktion, Ableitung, 90
unbedingte Divergenz, 52
unbestimmte Formen, 55
unbestimmtes Integral, 104
uneigentliche Konvergenz, 52
ungerade Funktion, 8
Ungleichung, Dreiecks-, 15
Ungleichzng, Schwarz'sche, 79
Urbildbereich einer Funktion, 15

Vektor, 66
Vektor, Ableitung, 95
Vektor, Beschleunigungs-, 97
Vektor, Betrag, 79
Vektor, Geschwindigkeits-, 97
Vektor, Komponentenschreibweise, 68
Vektor, Normalen-, 97
Vektor, Tangential-, 97
Vektoraddition, Kommutativgesetz, 69
Vektoren, antiparallele, 79
Vektoren, orthogonale, 79, 82
Vektoren, parallele, 79
Vektoren, Summe und Vielfache, 69
vektorielle Darstellung einer Ebene, 75
vektorielle Darstellung einer Geraden, 74
Vergleichstest für Folgen, 54
Vergleichstest für Grenzwerte von Funktionen, 59
Verschiebung, 66
Verschiebung des Funktionsgraphen, 16
Vielfache von Vektoren, 69
voller Winkel, 1
Vorzeichen eines Winkels, 1
vorzeichenbehafteter Flächenihalt, 100

Wachstums- und Zerfallsprozesse, 115
Wegintegral, 116
Wendepunkt, 91
Wertebereich einer Funktion, 15
wesentliche Divergenz, 52
Winkel, 1
Winkel zwischen zwei Vektoren, 78, 82
Wurzel eines Polynoms, 32

Zahlenfolge, 49
Zahlengerade, 12
Zehner–Logarithmus, 43
Zeilenvektor, 68
Zerlegung, orthogonale, eines Vektors, 83
Zielbereich einer Funktion, 15
Zusammensetzungsregeln für Grenzwerte von Funktionen, 59
Zusammensetzungsregeln für Zahlenfolgen, 55