An der Universität
Konstanz

Einsatz von mathematischer Optimierung bei der Auslegung von Strom-, Gas- und Fernwärmenetzen.

In Kooperation mit der Firma Rechenzentrum für Versorgungsnetze

Wehr GmbH, Zweigstelle Konstanz.

Master Arbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science (M.Sc.)
in Mathematical Finance

Winter Semester 2013/2014

Erster Gutachter: Prof. Dr. Stefan Volkwein
Zweiter Gutachter : Prof. Dr. Johannes Schropp
In Kooperation mit Dr.-Ing. Dirk König

Fachbereich Mathematik und Statistik
Arbeitsgruppe Numerik und Optimierung
Universität Konstanz
Autor: Marco Menner 7. Dezember 2013

Konstanzer Online-Publikations-System (KOPS)
URL: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:352-284569

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **1**

1.1 Netzwerk Theorie . . . 3

1.1.1 Grundlagen . . . 3

1.1.2 Gesetze und Zusammenhänge in einem elektrischen Netzwerk . . . 4

1.1.3 Gesetze und Zusammenhänge in einem Gasnetz . . . 5

2 Optimierung **7**

2.1 Sequential Quadratic Programming (SQP) . . . 7

2.2 Globalisierungsstrategien . . . 8

2.3 Mixed-Integer Nonlinear Programming (MINLP) und Branch-and-Bound . . . 8

2.4 Heuristische Optimierungsverfahren . . . 9

3 Modellierung **10**

3.1 Konstruktion des Netzwerks . . . 12

3.1.1 Überprüfung der Gültigkeitskriterien . . . 14

3.1.2 Das Basis-Netzwerk . . . 15

3.1.3 Das Aufbau-Netzwerk . . . 22

3.2 Optimierung auf dem Netzwerk . . . 27

3.2.1 Numerische Berechnung der Admittanzmatrix . . . 28

3.2.2 Nebenbedingungen . . . 32

3.2.3 Das Zielfunktional . . . 37

3.3 Vorgaben und vollständige Optimierung . . . 45

3.4 Ausblick und weiteres Vorgehen . . . 52

4 Numerische Analyse **54**

4.1 Ableitungen der Leitungskosten . . . 54

4.2 Das Vier-Knoten Netzwerk . . . 60

4.2.1 Vergleich mit dem kombinatorischen Ansatz zur Netzwerkerzeugung . . . 61

4.3 Das Zehn-Knoten Netz . . . 64

4.3.1 Die Kondition der Admittanzmatrix . . . 65

4.3.2 Tests der Ableitungen . . . 71

4.3.3 Rechenzeit . . . 73

4.3.4 Ergebnisse der Optimierung . . . 75

4.3.5 Ausblick und weitere mögliche Analysen . . . 78

5 Zusammenfassung **80**

A Anhang **II**

A.1 Berechnung der Ableitungen . . . II

A.2 Tabelle mit Physikalische Einheiten . . . VI

1 Motivation

Der Ausbau der dezentralen (lokalen) Stromversorgung nimmt aufgrund des technischen Fortschritts und dem Einbezug alternativer und regenerativer Versorgungstechnologien deutlich zu. Es ist zu erwarten, dass diese Dynamik durch die Energiewende in Zukunft zunehmend beobachtet werden wird. Damit stehen die Energieversorger neuen Herausforderungen gegenüber, um die lokalen Energienetze möglichst effizient auszubauen. Hier ist der Einsatz von mathematischer Optimierung[1] hilfreich. Mit dieser kann zudem implementiert werden, dass verschiedene Möglichkeiten zur Versorgung mit einbezogen werden. Abbildung 1 zeigt einen beispielhaften Vorschlag des Netzausbaus der Firma Wehr GmbH für einige dieser Versorgungsmöglichkeiten.[2]

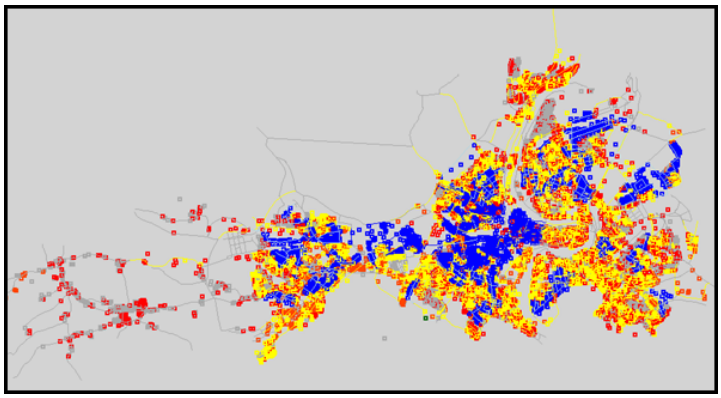

Abbildung 1: Vorschlag zum Ausbau der Fernwärmenetze
(blau = Fernwärme, gelb = Gas, dunkelgrau = Heizöl, rot = Strom-Wärmepumpe-versorgte Gebäude).

Das Ziel ist es nun zu bestimmen, wie die Leitungen der Versorgungsmöglichkeiten gebaut und die netzwerkrelevanten Variablen eingestellt werden müssen, um die volkswirtschaftlichen Gewinne zu maximieren. In dieser Arbeit wird ein mathematisches Modell vorgestellt, welches eine solche Optimierungsaufgabe lösen soll. Das Modell verwendet Strom- und Gasnetz. Der Ansatz kann mit zusätzlichen Versorgungsmöglichkeiten, beispielsweise mit einem Fernwärmenetz, erweitert werden. Es werden vier Technologien vorgestellt, die Strom und Gas zur Strom- und Wärmeerzeugung nutzen, um den Bedarf der Haushalte zu decken. Diese werden an den jeweiligen Knotenpunkten installiert. Mehrere Haushalte befinden sich jeweils an verschiedenen Knotenpunkten, wobei die Knotenpunkte mit Leitungen verbunden sind. Die Aufgabe ist es nun die Gewinne, bestehend aus Erlösen des Stromverkaufs und Kosten des Leitungs- und Technologiebaus, zu maximieren. Hierbei fallen bestimmte Nebenbedingungen an, damit die Versorgung sichergestellt wird und die netzwerktheoretischen Gesetze erfüllt sind. Außerdem ist die Konstruktion des Netzwerks selbst variabel, wobei jedoch berücksichtigt werden muss, dass alle Haushalte versorgt werden und alle Knotenpunkte mit dem jeweiligen Einspeiseknoten des Netzes verbunden sind, sofern die Versorgungsart (Strom bzw. Gas) an diesem Knotenpunkt beansprucht wird.

In Kapitel 1 werden die Gesetze in der Netzwerktheorie erklärt. Kapitel 2 gibt einen Überblick über mathematische Optimierungsverfahren. In Kapitel 3 wird die Methode zur Netzwerkerzeugung vorgestellt. Da die Netzwerkerzeugung nicht mit kontinuierlichen Variablen möglich ist, fließt sie nicht in die kontinuierliche Optimierung ein, sondern wird separat betrachtet. Es besteht jedoch die Möglichkeit mit Parametervorgaben die Netzkonstruktion zu beeinflussen. Der jeweilige Parameter bestimmt hierbei die Wahrscheinlichkeit, mit der das Netzwerk anhand des zugehörigen Kriteriums konstruiert wird. Die kontinuierliche Optimierung findet dann auf dem konstruierten Netz statt. Dieser Vorgang wird mehrfach simuliert, wobei letztendlich das beste Netzwerk mit der jeweiligen Optimierung aus all diesen Simulationen ausgewählt wird und nach weiteren Modifikationen als das gefundene Optimum betrachtet wird. Hierbei wird in jeder Simulation sichergestellt, dass die Optimierung lösbar und das Netzwerk gültig ist. In Kapitel 4 werden numerische Analysen des Modells betrachtet. Anhand eines Vier-Knoten Netzwerks wird das Modell mit einem modifizierten Modell verglichen, das einen kombinatorischen Ansatz zur Netzwerkerzeugung verwendet. Auf einem synthetischen Zehn-Knoten Netzwerk werden die verwendeten analytischen Ableitungen anhand von finiten Differenzen verifiziert. Es werden Tests durchgeführt, die das Modell mit einem Modell unter Verwendung eines alternativen Optimierungsansatzes auf dem Netzwerk vergleichen. Dabei wird die Effizienz der beiden Ansätze für mehrere Netzwerkgrößen verglichen. Schließlich werden Tests zur Rechenzeit gemacht. Dabei wird zum einen angeschaut, wie sich die Rechenzeit der Netzwerkerzeugung für steigende Netzgrößen entwickelt. Zum andern wird angeschaut, wie sich die Verwendung eines analytischen Gradienten in diesem Zusammenhang auswirkt. Schließlich werden die Optimierungsergebnisse für das Zehn-Knoten Netzwerk präsentiert. In Kapitel 5 wird die Arbeit zusammengefasst.

1.1 Netzwerk Theorie

1.1.1 Grundlagen

In der Elektrotechnik ist ein **Netzwerk** die Menge aller mathematischen Modelle, welche genutzt werden, um die Mechanismen einer elektrischen Schaltung zu erklären. Ein Netzwerk besteht aus Knotenpunkten, Zweigen und Maschen. Abbildung 2 zeigt ein Beispielnetzwerk[3].

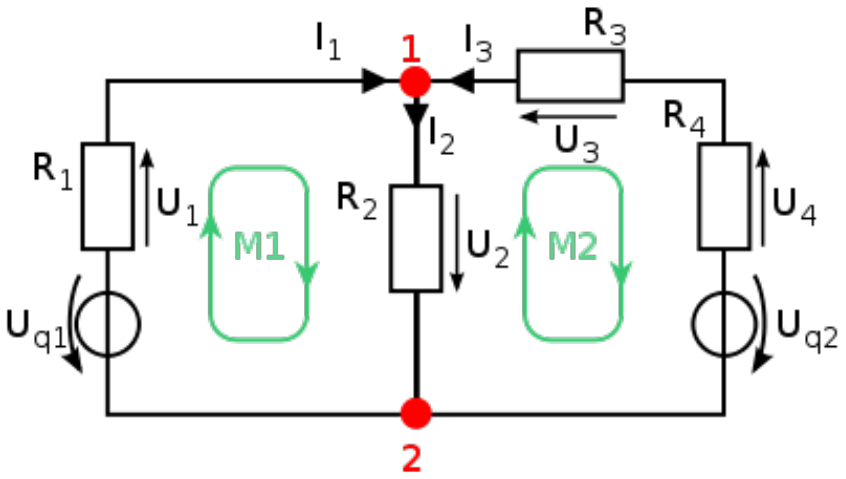

Abbildung 2: Beispiel eines elektrischen Netzwerks mit Knotenpunkten (rot), Maschen (grün) und Zweigen (schwarze Verbindungslinien).

Hierbei ist mit $U > 0$ die **Spannung** in Volt (V) angegeben, mit $I > 0$ die **Stromstärke** in Ampere (A) und mit $R > 0$ der **elektrische Widerstand** in Ohm (Ω), welcher im Folgenden mit r_e bezeichnet wird. Als **Netzwerkanalyse** wird die Vorgehensweise bezeichnet, mittels gegebener Größen in einem elektrischen Netzwerk weitere unbekannte Größen, wie Spannungen und Stromstärken, zu ermitteln. In diesem Kapitel werden die Zusammenhänge der Größen, die für die Optimierung relevant sind, vorgestellt.
Ein Knotenpunkt in einem Netzwerk bezeichnet einen Punkt, an dem eine Verzweigung auftritt, wobei ein Zweig (im Folgenden wird der Begriff Strang verwendet) eine Verbindung zwischen zwei Knoten darstellt. Ein über die Stränge geschlossener Umlauf wird als Masche bezeichnet. Der Umlaufsinn kann beliebig bestimmt werden[4], ist jedoch relevant für die weiteren Berechnungen.
In einem Netzwerk existiert mindestens ein Einspeiseknoten, an dem die Spannung $U_{slack} > 0$ vorgegeben wird. Dieser wird im Folgenden als **Slack-Knoten** bezeichnet. Alle anderen Knotenpunkte im Netzwerk werden als **PQ-Knoten** bezeichnet. Diese Knotenbegriffe, sowie das Prinzip des elektrischen Netzwerks, werden auf das Gasnetz übertragen. Hier wird der Gasdruck $P_{slack} > 0$ am Slack-Knoten vorgegeben, wobei $P > 0$ den **Gasdruck** in bar als das Analog zur Spannung U im Stromnetz darstellt. Im Gasnetz wird zudem der **Gasstrom** $Q > 0$ in Volumen pro Stunde ($\frac{m^3}{h}$) als das Analog zur Stromstärke I im Stromnetz betrachtet. Der **Gas-Widerstand** wird mit $r_g > 0$ bezeichnet.

1.1.2 Gesetze und Zusammenhänge in einem elektrischen Netzwerk

In der Elektrotechnik bestehen elementare Gesetze, anhand derer sich die Zusammenhänge zwischen den relevanten Größen ableiten lassen. Eine Umrechnungstabelle der Einheiten, um die Beziehung dieser Größen nachzuvollziehen, ist im Anhang mit Tabelle 20 gegeben. Der Zusammenhang zwischen Spannung, Stromstärke und Widerstand wird durch das ohmsche Gesetz beschrieben.

Gesetz 1.1. *Sei U die Spannung, I die Stromstärke und r_e der elektrische Widerstand an einem Objekt. Dann gilt das* ***Ohmsche Gesetz*** *(bsp. Tipler und Mosca, 2009) nach Georg Simon Ohm:*

$$U = r_e \cdot I \tag{1}$$

Der Zusammenhang von elektrischen Strömen und elektrischen Spannungen in einem elektrischen Netzwerk wird durch die Kirchhoffschen Regeln[5] beschrieben. Hierbei gelten die Knoten- und Maschenregel.

Gesetz 1.2. *Die* ***Knotenregel*** *besagt, dass sich an einem Knotenpunkt innerhalb eines elektrischen Netzwerks die Summe aller zufließenden Ströme und die Summe aller abfließenden Ströme ausgleichen. Somit gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(I_j \cdot \mathbf{1}_{\{I_j \text{ fließt zu}\}}(I_j) - I_j \cdot \mathbf{1}_{\{I_j \text{ fließt ab}\}}(I_j) \right) = 0$$

wobei alle Stromstärken mit positivem Vorzeichen angegeben werden und $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ die Indikatorfunktion darstellt.

Gesetz 1.3. *Die* ***Maschenregel*** *besagt, dass sich in einem elektrischen Netzwerk alle (Teil-) Spannungen einer Masche ausgleichen. Die Umlaufrichtung bestimmt hierbei, ob die Spannungen positiv oder negativ in die Gleichung eingehen. In einem Netzwerk mit n Knoten gilt für die jeweiligen Spannungen*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(U_j \cdot \mathbf{1}_{\{U_j \text{ in Umlaufrichtung}\}}(U_j) - U_j \cdot \mathbf{1}_{\{U_j \text{ gegen die Umlaufrichtung}\}}(U_j) \right) = 0$$

wobei alle Spannungen mit positivem Vorzeichen angegeben werden und $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ erneut die Indikatorfunktion darstellt.

Durch die Kirchhoffschen Regeln ergeben sich weitere Zusammenhänge, die im Folgenden beschrieben werden.

Sei $I_{i,j} > 0$ die Stromstärke auf dem Strang von Knoten i nach Knoten j mit $i < j$. Weiter sei $I_k > 0$ die Stromstärke am Knoten k. Fließt Strom vom Knoten ab, so geht I_k an diesem Knoten mit negativem Vorzeichen ein. Dies ist der Fall an den PQ-Knoten. Im Fall des Slack-Knotens fließt Strom zu, und I_k geht mit positivem Vorzeichen ein. Zwischen I_k und $I_{i,j}$ gilt der folgende Zusammenhang:

$$I_k \cdot (-1)^{1_{\{k \text{ ist PQ}\}}(k)} = \left(\sum_{\{p \mid \text{ Strom fließt von } k \text{ nach } p\}} I_{k,p} \right) - \left(\sum_{\{p \mid \text{ Strom fließt von } p \text{ nach } k\}} I_{p,k} \right) \tag{2}$$

Analog dazu sei $U_{i,j} > 0$ der Spannungsabfall zwischen Knoten i und Knoten j (ohne Einschränkung gelte $i < j$), wobei $U_i > 0$ und $U_j > 0$ die Quellspannungen[6] an den jeweiligen Knoten sind. Dann gilt der Zusammenhang

$$U_i - U_j = U_{i,j}, \qquad i < j \tag{3}$$

1.1.3 Gesetze und Zusammenhänge in einem Gasnetz

Für das Gasnetz gilt hingegen folgendes Widerstandsgesetz[7]:

Gesetz 1.4. *Sei P der Gasdruck, Q der Gasstrom und r_g der Gas-Widerstand an einem Objekt. Dann gilt für das Gasnetz*

$$P = r_g \cdot Q^2 \tag{4}$$

Um die Modellierung zu vereinfachen, wird hier ein lineares Verhältnis[8] angenommen, mit

$$P = 2 \cdot r_g \cdot Q \tag{5}$$

Die Kirchhoffschen Regeln lassen sich ebenfalls auf ein Gasnetz übertragen[9].

Gesetz 1.5. *Die **Knotenregel** besagt, dass sich an einem Knotenpunkt innerhalb eines Gasnetzes die Summe aller zufließenden Gasströme und die Summe aller abfließenden Gasströme ausgleichen. Somit gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(Q_j \cdot \mathbf{1}_{\{Q_j \text{ fließt zu}\}}(Q_j) - Q_j \cdot \mathbf{1}_{\{Q_j \text{ fließt ab}\}}(Q_j) \right) = 0$$

wobei alle Gasströme mit positivem Vorzeichen angegeben werden und $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ die Indikatorfunktion darstellt.

Gesetz 1.6. *Die **Maschenregel** besagt, dass sich in einem Gasnetz alle (Teil-) Drücke einer Masche ausgleichen. Die Umlaufrichtung bestimmt hierbei, ob die Drücke positiv oder negativ in die Gleichung eingehen. In einem Netzwerk mit n Knoten gilt für die jeweiligen Drücke.*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(P_j \cdot \mathbf{1}_{\{P_j \text{ in Umlaufrichtung}\}}(P_j) - P_j \cdot \mathbf{1}_{\{P_j \text{ gegen die Umlaufrichtung}\}}(P_j) \right) = 0$$

wobei alle Drücke mit positivem Vorzeichen angegeben werden und $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ erneut die Indikatorfunktion darstellt.

Die folgenden Eigenschaften ergeben sich analog zum elektrischen Netzwerk im Gasnetz. Sei $Q_{i,j} > 0$ der Gasstrom auf dem Strang von Knoten i nach Knoten j wobei $i < j$. Weiter sei $Q_k > 0$ der Gasstrom an Knoten k. Fließt Strom vom Knoten ab, so hat Q_k an diesem Knoten ein negativen Vorzeichen. Dies ist der Fall an den PQ-Knoten. Im Fall des Slack-Knotens fließt Strom zu und Q_k besitzt ein positives Vorzeichen. Zwischen Q_k und $Q_{i,j}$ gilt der Zusammenhang:

$$Q_k \cdot (-1)^{1_{\{k \text{ ist PQ}\}}(k)} = \left(\sum_{\{p \mid \text{ Strom fließt von } k \text{ nach } p\}} Q_{k,p} \right) - \left(\sum_{\{p \mid \text{ Strom fließt von } p \text{ nach } k\}} Q_{p,k} \right) \tag{6}$$

Sei $P_{i,j}$ der Druckabfall zwischen Knoten i und Knoten j (ohne Einschränkung gelte wieder $i < j$), wobei $P_i > 0$ und $P_j > 0$ der Druck[10] an den jeweiligen Knoten sind. Dann gilt der Zusammenhang

$$P_j - P_i = P_{i,j}, \qquad i < j \tag{7}$$

Abbildung 3 zeigt beispielhaft die Knotenregel[11] und die Maschenregel[12].

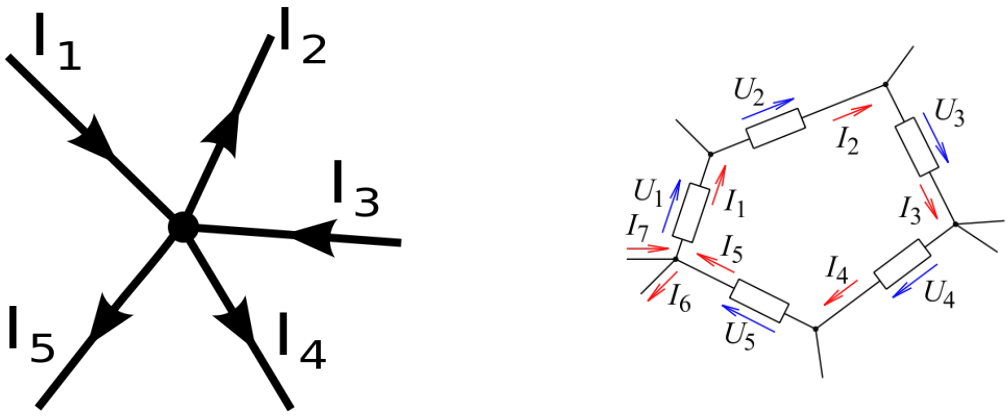

Abbildung 3: Grafische Darstellung der Knotenregel (links) und Maschenregel (rechts).

2 Optimierung

In diesem Kapitel werden mathematische Optimierungsverfahren vorgestellt. Nocedal und Wright, 2006 geben einen sehr guten Überblick über verschiedene Optimierungsverfahren.

2.1 Sequential Quadratic Programming (SQP)

Das Modell ist so konstruiert, dass auf einem erzeugten Netzwerk stetige Optimierung unter stetigen Nebenbedingungen stattfindet. Probleme dieser Art können mit einem SQP-Ansatz gelöst werden. Dabei wird ein nichtlineares Problem mit Nebenbedingungen in ein quadratisches Problem mit Nebenbedingungen umformuliert, welches effizienter gelöst werden kann.

Das Optimierungsproblem sei gegeben mit

$$\min_x f(x), \quad s.t. \quad c_{eq}(x) = 0, \quad c_{ineq}(x) \leq 0$$
$$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad c_{eq} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m, \quad c_{ineq} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$

Die KKT (Karush-Kuhn-Tucker) Bedingungen[13] dieses Problems sind gegeben mit

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0, \quad \nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) = 0, \quad c_{eq}(x) = 0, \quad c_{ineq}(x) \leq 0, \quad \mu^T c_{ineq}(x) = 0, \quad \mu \geq 0$$

wobei L die Lagrange Funktion mit Lagrange Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n$ darstellt:

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \lambda^T c_{eq}(x) + \mu^T c_{ineq}(x).$$

Mit $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ und analogen Definitionen für $\Delta\lambda_k$ und $\Delta\mu_k$, sowie dem Anwenden des Newton-Verfahrens auf die Bedingungen erster Ordnung des Lagrangefunktionals, ergeben sich die KKT Bedingungen des folgenden quadratischen Problems[14].

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x_k} \nabla f(x_k)^T \Delta x_k + \frac{1}{2} \Delta x_k^T \cdot \nabla^2_{xx} L(x_k, \lambda_k, \mu_k) \cdot \Delta x_k \\ s.t. \quad c'_{eq}(x_k)^T \Delta x_k + c_{eq}(x_k) = 0 \\ c'_{ineq}(x_k)^T \Delta x_k + c_{ineq}(x_k) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Das quadratische Problem kann schließlich mit Standardverfahren für quadratische Probleme gelöst werden.

2.2 Globalisierungsstrategien

Das SQP Verfahren für Optimierungsprobleme mit Ungleichungen kann als verallgemeinertes Newton-Verfahren interpretiert werden und ist daher nur lokal konvergent. Unter Verwendung einer Armijo- Liniensuche oder Trust Region Methoden kann versucht werden ein globales Optimum zu finden. Die Armijo-Liniensuche und das Trust-Region-Verfahren globalisieren das SQP-Verfahren. Dadurch wird die Konvergenz für alle Startwerte ermöglicht, wobei die Lösung jedoch weiterhin nur ein lokales Optimum darstellt.

Die Armijo-Regel wird verwendet um einen hinreichenden Abstieg der Zielfunktion in Richtung p zu ermöglichen[15], wobei gelten muss

$$f(x + t \cdot p) \leq f(x) + \alpha \cdot t \cdot (\nabla f(x)^\top p), \quad \alpha \in (0, 1)$$

Hierbei soll die optimale Schrittweite t bestimmt werden. Unter der Parametrisierung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = f(x + t \cdot p)$$

kann diese Bedingung umformuliert werden als

$$g(t) \leq g(0) + \alpha \cdot t \cdot g'(0)$$

Neben der Armijo-Regel gibt es weiter Strategien zur Schrittweitenregulierung, wie z.B. die Wolfe-Powell-Bedingungen. Ist die Abstiegsrichtung im SQP Verfahren gefunden, so wird anschließend die Armijo-Schrittweitensteuerung durchgeführt.

Eine weitere Globalisierungsstrategie ist mit dem Trust-Region Verfahren gegeben. Hierbei wird versucht ein Vertrauensbereich zu finden, in welchem die Abstiegsrichtung liegen soll. Dieser Bereich wird unter der Berücksichtigung der resultierenden Approximationsgüte des quadratischen Problems adaptiv angepasst[16].

2.3 Mixed-Integer Nonlinear Programming (MINLP) und Branch-and-Bound

Das Ziel der Branch-and-Bound-Methode ist, eine Lösung eines ganzzahligen Optimierungsproblems zu finden. Hierbei wird, unter der Zuhilfenahme eines Entscheidungsbaums, die zulässige Menge aller Lösungen in mehrere Mengen unterteilt (*Branch*). Um den Raum der Lösungen klein zu halten, werden zudem Schranken benutzt (*Bound*), welche suboptimale Zweige des Baumes eliminieren sollen.

Bei gemischt-ganzzahligen MINLP Problemen existiert zudem noch eine Menge an Variablen, welche kontinuierliche Werte annehmen können, wobei diese Werte nicht linearen Nebenbedingungen unterliegen. Leyffer, 1998 stellt bsp. ein MINLP - Branch-and-Bound-Verfahren vor, das in Kombination mit einem SQP Verfahren für die kontinuierliche Optimierung funktioniert.

In dieser Arbeit wird die kontinuierlichen Optimierung auf dem Netzwerk von der ganzzahligen Optimierung, welche zur Netzwerkerzeugung notwendig ist, getrennt. Dabei werden MINLP Verfahren nicht verwendet, da zur Netzwerkerzeugung Prüfalgorithmen verwendet werden, die keine explizite Darstellung haben und nicht differenzierbar sind.

2.4 Heuristische Optimierungsverfahren

Heuristische Optimierungsverfahren verwenden Suchstrategien um mit möglichst wenig Informationen und in möglichst geringer Zeit an ein Optimum zu kommen. Ein Vorteil hierbei ist, dass beispielsweise auf die Information einer Ableitung verzichtet werden kann, was insbesondere hilfreich für nicht differenzierbare Probleme ist. Diese Verfahren sind in der Regel teurer als stetige Verfahren, da weniger Informationen über das Problem genutzt werden können.

In diesem Zusammenhang können genetische Algorithmen verwendet werden. Diese basieren auf einem stochastischen Ansatz. Es wird iterativ vorgegangen, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Hierbei wird eine erste Generation von Lösungskandidaten mit Zufallszahlen erzeugt. Jeder dieser Kandidaten wird an einer Fitnessfunktion (hier z.B. das zu minimierende Zielfunktional) ausgewertet, welche einen Wert zur Güte des Kandidaten liefert. In jeder Iteration werden nun aus einer Selektion der vorhandenen Lösungskandidaten mittels Rekombinationen neue Kandidaten gesucht. Diese werden dann zufällig modifiziert und mutieren zur neuen Generation.

Ein weiteres Suchverfahren ist beispielsweise der Nelder-Mead-(bzw. Downhill-Simplex-) Algorithmus, welcher versucht, iterativ den schlechtesten x-Wert aus einer Menge an verfügbaren x-Werten mit einem besseren zu ersetzen, so lange ein bestimmtes Konvergenzkriterium erfüllt ist. Falls ein solcher Wert nicht existiert, wird die Menge der x-Werte reduziert. Nebenbedingungen können beispielsweise mit Projektionen oder Straftermen eingeführt werden.

In dieser Arbeit wird ein eigens entwickeltes Suchverfahren zur Erzeugung des Netzwerks verwendet. Dieses verarbeitet Informationen, die sich direkt auf das Modell beziehen, ohne die Optimierung auf dem Netzwerk durchzuführen. Die Methode zur Erzeugung des Netzwerks interagiert in einem Simulationsansatz mit der kontinuierlichen Optimierung auf dem Netzwerk, um eine möglichst gute Kombination von ganzzahligen Netzbauvariablen und stetigen Bedingungsvariablen zu finden.

3 Modellierung

Bei der Modellierung werden verschiedene Methoden zum Aufbau des Netzwerks verwendet. Auf diesem Netzwerk wird dann kontinuierlich optimiert. Die detaillierte Vorgehensweise wird in diesem Kapitel vorgestellt. Für die Modellierung wird auf Objekte und Strukturen zurückgegriffen, die im Folgenden definiert werden. Die Begriffe, die in diesem Kapitel definiert werden, gelten im Bezug auf die Modellierung für den restlichen Teil dieser Arbeit und weichen gegebenenfalls von alternativen Definitionen aus der Elektrotechnik bzw. der Strömungslehre ab.

Definition 3.1. *Eine **Knotenstruktur** k ist eine Struktur, die Informationen über Knotenpunkte enthält. Hierbei ist die Anzahl der PQ-Knoten in einem Knoten mit $k.\dim$ gekennzeichnet, wobei jeder PQ-Knoten mit einer ID versehen ist, $ID = 1, ..., k.\dim$. Für das Stromnetz und Gasnetz werden die selben PQ-Knoten verwendet, wobei für jedes der beiden Netze ein weiterer separater Slack-Knoten hinzugefügt wird, der nicht notwendigerweise identisch für beide Netze ist. Die Gesamtheit aller Knoten (PQ- und Slack-Knoten) wird nummeriert mit $ID_{gesamt} = 1, ..., \hat{k}_dim$ mit $\hat{k}_dim = k.\dim + 1$, falls die Slack-Knoten identisch sind und $\hat{k}_dim = k.\dim + 2$, falls die Slack-Knoten nicht identisch sind. Der erste Knotenpunkt wird dabei so gesetzt, dass er dem Slack-Knoten im Stromnetz entspricht. Die Koordinaten eines Knotens sind in $k.coo$ gespeichert, wobei $k.coo \in \mathbb{R}^{\hat{k}_\dim \times 2}$ und $k.coo_{i,1}$ die x-Koordinate und $k.coo_{i,2}$ die y-Koordinate des Knotenpunktes i darstellt, $i = 1, ..., \hat{k}_dim$.*
Der Wert $k.slack_g$ gibt an, welcher Knoten als Slack-Knoten im Gasnetz verwendet wird. Weiter ordnet $k.region \in \mathbb{N}_+^{\hat{k}_\dim \times 1}$ allen Knotenpaaren eine Regionsnummer[17] zu. $k.houses \in \mathbb{N}_+^{\hat{k}_dim \times 1}$ gibt die Anzahl der Haushalte an, die an einem PQ-Knoten berücksichtigt werden. $k.frac_houses \in \mathbb{R}^{\hat{k}_dim \times 1}$ gibt schließlich den Anteil der Häuser an einem PQ-Knoten im Verhältnis zu der Gesamtzahl der Häuser an.

Definition 3.2. *Eine **Verbindungsmatrix** ist eine Matrix $c \in \mathbb{N}_+^{l_dim \times 2}$, wobei $c_{i,1}$ und $c_{i,2}$ Knotenpaare sind, die durch den Strang i miteinander verbunden, mit $i = 1, ..., l_dim$. Die Werte $c_{i,1}$ sowie $c_{i,2}$ entsprechen der Knoten-ID und liegen jeweils in $\{1, ..., \hat{k}_dim\}$.*
Die Verbindungsmatrix ist aufsteigend angeordnet, so dass $c_{i,1} < c_{i,2}$ und $c_{i_1,j} \leq c_{i_2,j}$ für $i, j = 1, ..., l_dim$, $i_1 = 1, ..., l_dim - 1$ und $i_2 = 2, ..., l_dim$ mit $i_1 < i_2$. Die Verbindungsmatrix wird im Folgenden mit VM bezeichnet.

Definition 3.3. *Eine **Netz-Verbindungsmatrix**, im Folgenden mit NVM bezeichnet, ist eine Matrix, die mit einer VM c aufgebaut wird. Hierbei werden für ein bestimmtes Netz alle Zeilen aus c entfernt, die in einer beliebigen Spalte den Slack-Knoten des jeweils anderen Netzes enthalten. Die NVM für Strom wird mit $c^e \in \mathbb{N}_+^{l_e_dim \times 2}$ bezeichnet, die NVM für Gas mit $c^g \in \mathbb{N}_+^{l_g_dim \times 2}$.*

Definition 3.4. *Eine **Strangstruktur** l ist eine Struktur, die Informationen über Stränge enthält. Hierbei ist die Anzahl der Stränge in einer Strangstruktur mit $l.\dim = l_dim$ gekennzeichnet, wobei jeder Strang mit einer ID versehen ist, so dass $ID = 1, ..., l.\dim$. Jeder Strang verbindet 2 Knotenpunkte miteinander. Die Länge eines Stranges i wird berechnet als $\|k.coo_{i_1} - k.coo_{i_2}\|_2$, wobei i_1 und i_2 die Knotenpaare sind, die mit Strang i verbunden werden. Die Stranglängen in der Einheit km werden in der Struktur mit $l.len \in \mathbb{R}_+^{l.\dim \times 1}$ gespeichert. Die Knotenpaare, die mit den jeweiligen Strängen verbunden sind, werden in einer VM vorgegeben. Unterschiedliche Slack-Knoten können zu einer unterschiedlichen Anzahl an Strängen führen, die im Strom bzw. Gasnetz verwendet werden können. Die Stränge, die verwendet werden, sind durch die jeweilige NVM gegeben. $l.e_dim = l_e_dim$ und $l.g_dim = l_g_dim$ entsprechen hierbei der Anzahl der Stränge im jeweiligen Netz. Mit $l.e_index \in \mathbb{N}^{l.e_dim}$ und $l.g_index \in \mathbb{N}^{l.g_dim}$ wird die Strangnummer in einem jeweiligen Netz auf die entsprechenden Strangnummer aus dem Gesamtnetz referenziert. Es werden noch weitere Komponenten definiert, die es ermöglichen, Informationen von allen verwendeten Strängen auf die jeweils verwendete Teilmenge der Stränge abzubilden, die für Strom bzw. Gasnetz entsteht.*

Definition 3.5. *Ein **Netzvektor** ist ein Vektor $l^{net} \in \mathbb{N}^{l.net_dim \times 1}$ und mit $l_i^{net} \in \{0, 1\}$ mit $l.net_dim$ als Anzahl der jeweiligen verwendeten Stränge in einem Netz. Ist $l_i^{net} = 1$, so wird Strang i verwendet, ist $l_i^{net} = 0$, so wird Strang i nicht verwendet. Im Folgenden wird $l^e \in \mathbb{N}^{l.e_dim \times 1}$ als **Strom-Netzvektor** und $l^g \in \mathbb{R}^{l.g_dim \times 1}$ als **Gas-Netzvektor** bezeichnet.*

Definition 3.6. *Ein **Netzwerk** N ist definiert als die Menge aller Netze, die implementiert werden. Im Folgenden ist N die Kombination aus Strom- und Gasnetz.*

Definition 3.7. *Sei $c^{net} \in \mathbb{R}^{l.net_dim \times 2}$ eine NVM und $l^{net} \in \mathbb{R}^{l.net_dim \times 1}$ ein Netzvektor. Dann bezeichnet $c_{adj}^{net} \in \mathbb{R}^{l.net_dim \times 2}$ eine **Netz-adjustierte Verbindungsmatrix** (NaVM), wenn*

$$c_{adj_{m,n}}^{net} = c_{m,n}^{net} \cdot l_m^{net}, \quad m = 1, ..., l.net_dim, \quad n = 1, 2.$$

für $net \in \{e, g\}$. Im Folgenden wird c_{adj}^e als die NaVM zu einem gegebenen Strom-Netzvektor l^e bezeichnet und c_{adj}^g als die NaVM zu einem gegebenen Gas-Netzvektor l^g.

Definition 3.8. *Sei j_1 ein Knoten, der in einer VM, NVM oder einer NaVM, der an der Stelle i vorkommt, mit $j_1 = c_{i,p_1}$, $p_1 = 1, 2$. Dann bezeichnet $j_2 = c_{i,p_2}$, $p_2 = 1, 2$, $p_2 \neq p_1$ den **Partnerkoten** von Knoten j_1 an Strang i.*

3.1 Konstruktion des Netzwerks

Ein Netzwerk muss bestimmte Anforderungen erfüllen, damit es gültig ist und zur Optimierung genutzt werden kann. Diese Anforderungen werden im Folgenden konkretisiert.

Definition 3.9. *Sei M_k^{net} die Menge aller Knotenpunkte einer NaVM eines Netzes.*
*Das Netz ist **zusammenhängend**, wenn alle Knotenpunkte in M_k durch die Stränge, die im zugehörigen Netzvektor verwendet werden, mit dem Slack-Knoten des Netzes verbunden sind.*

Definition 3.10. *Sei M_k^{net} die Menge aller Knotenpunkte einer NaVM eines Netzes.*
*Ein Netzwerk ist **gültig**, sofern alle Netze innerhalb des Netzwerks zusammenhängend sind (Bed. 1) und alle PQ-Knoten erreichbar sind, also $\bigcup_{i=1}^{k.\dim}\{i\} \subset \bigcup_{net} M_k^{net}$ (Bed. 2).*

In Abbildung 4 werden zwei Netzwerke dargestellt, die beide die Gültigkeitskriterien erfüllen.

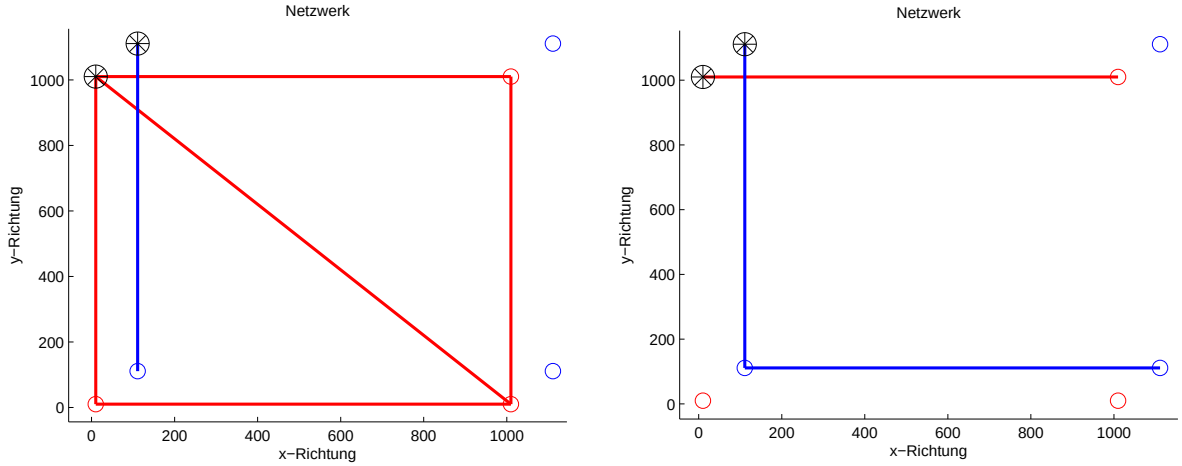

Abbildung 4: Zwei gültige Netzwerke für verschiedene Stromnetze (blau) und Gasnetze (rot).
Der Slack-Knoten befindet sich in diesem Beispiel für das Strom- und Gasnetz am selben Knotenunkt und ist mit einem schwarzen gekreuztem Kreis gekennzeichnet. Die PQ-Knoten sind mit farbigen Kreisen gekennzeichnet.

Das vollständig ausgebaute Referenz-Netz sei mit dem Gasnetz (rot) im linken Teilbild von Abbildung 4 gegeben. Dieses gelte für die folgenden Beispiele weiterhin als Referenz-Netz.

Abbildung 5 zeigt ein ungültiges Netzwerk, da das Stromnetz nicht zusammenhängend ist, denn mindestens einer (hier sogar alle) der im Netz vorhandenen Knoten ist nicht mit dem Slack-Knoten verbunden. Somit ist (*Bed. 1*) nicht erfüllt.

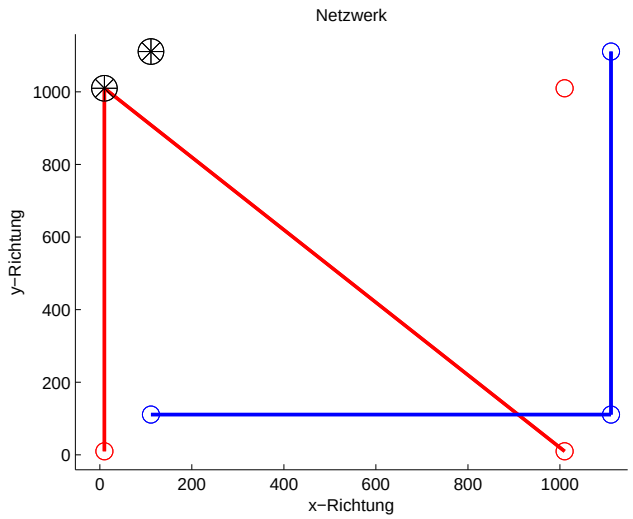

Abbildung 5: Ungültiges Netzwerk. Das Stromnetz ist in blau, das Gasnetz in rot und der Slack-Knoten mit einem schwarzen gekreuztem Kreis gekennzeichnet. Die PQ-Knoten sind mit farbigen Kreisen gekennzeichnet.

Abbildung 6 zeigt ebenfalls ein ungültiges Netzwerk, da *Bed. 2* nicht erfüllt ist. Der nordöstliche Knoten wird weder durch das Stromnetz, noch das Gasnetz erreicht.

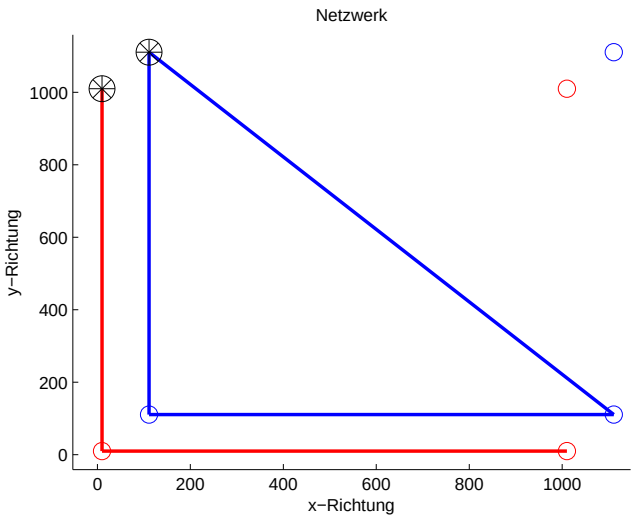

Abbildung 6: Ungültiges Netzwerk. Das Stromnetz ist in blau, das Gasnetz in rot und der Slack-Knoten mit einem schwarzen gekreuztem Kreis gekennzeichnet. Die PQ-Knoten sind mit farbigen Kreisen gekennzeichnet.

Die numerische Überprüfung der beiden Bedingungen (*Bed. 1*) und (*Bed. 2*) führt zu Unstetigkeiten, weshalb eine ganzheitliche Optimierung, bei welcher auch die Netzkonstruktion in die Optimierung mit eingebaut wird, erschwert wird. Die MNLIP Methode, die in Leyffer, 1998 vorgestellt wird, setzt beipielsweise ein glattes Ziel und Nebenbedingungsfunktional in den kontinuierlichen, sowie in den ganzzahligen Variablen voraus. Daher wird hier der Ansatz gewählt, die Netzkonstruktion von der Optimierung auf dem Netzwerk zu trennen. Die eigens dafür implementierten Methodik wird im Folgenden erklärt, wobei zu Beginn auf die Überprüfung der Gültigkeitskriterien und auf die Konstruktion des Netzwerks eingegangen wird.

3.1.1 Überprüfung der Gültigkeitskriterien

Ob das Netzwerk zusammenhängend ist, wird analog zu Algorithmus 1 geprüft. Dabei wird jeder Netztyp (hier Strom und Gas) separat untersucht.

Algorithmus 1. Testung auf ein zusammenhängendes Netzwerk

Initialisierung:
Gegeben sei ein Netzvektor $l^{net} \neq 0$, die zugehörige NaVM c^{net}_{adj}. Setze $R = \{slack\}$, $B = \{slack\}$, I=$\emptyset$ und $\mathbf{J} = 1$.

- Lösche alle Zeilen in c^{net}_{adj}, bei denen Strang l Nulleinträge hat, wobei nun $c^{net}_{adj} \in \mathbb{N}^{n_c \times 2}$
- Setze $c^{\star} = \{\, i > 0 \,|\, i \in \{c^{net}_{adj_{k,j}},\ k = 1, ..., n_c,\ j = 1, 2\}\}$

while: $B \neq \emptyset$

1. Definiere B_1 als den ersten Eintrag, der in der Menge B vorkommt.
2. Finde alle zugehörigen Knotenkombinationen in c^{net}_{adj}, welche B_1 enthalten.
3. Setze r als die Menge aller Partnerknoten von B_1 innerhalb dieser Kombinationen.
4. Setze $R = R \cup r$ und $I = I \cup \{B_1\}$
5. Setze $B = B \cup (R \backslash I)$
6. Setze $B = B \backslash \{B_1\}$

End while

If: $c^{\star} \backslash R \neq \emptyset$, setzte $\mathbf{J} = 0$
Output: $\mathbf{J}$

Der Algorithmus geht iterativ vor und prüft vom Slack-Knoten *slack* des jeweiligen Netzes ausgehend, welche der zu untersuchenden Knoten mit diesem verbunden sind. R kennzeichnet die Menge der Knoten in der NaVM c^{net}_{adj}, die mit dem Slack-Knoten verbunden sind. I ist die Menge der Knoten, die bereits auf Verbindung zum Slack-Knoten untersucht wurden. B ist die Menge der noch zu untersuchenden Knoten, die in der gegebenen NaVM c^{net}_{adj} vorkommen. Entspricht R nicht der Menge derjenigen Knoten in c^{net}_{adj}, welche in der Menge $c^{\star}$ enthalten sind, so existieren Knoten, die nicht mit dem Slack-Knoten verbunden sind und der Rückgabewert $\mathbf{J}$ wird auf Null gesetzt. Ist dies der Fall für eines der Netze, so ist das jeweilige Netz nicht zusammenhängend. Damit wäre das gesamte Netzwerk nicht gültig.

Zusätzlich wird noch geprüft, ob alle Knoten im gesamten Netzwerk mit Hilfe der Kombination des Strom- und Gasnetzes erreichbar sind. Hierbei wird überprüft, ob die Menge

$$M_k = \{\, i \,|\, i \in \{c^g_{adj_{k,j}},\ k = 1, ...l.g_dim,\ j = 1, 2\} \vee i \in \{c^e_{adj_{k,j}},\ k = 1, ...l.e_dim,\ j = 1, 2\}\}\backslash\{0\}$$

alle PQ-Knoten enthält, also $\bigcup_{i=1}^{k.dim} \{i\} \subset M_k$. Ist dies der Fall, und ist $\mathbf{J} = 1$ für alle Netze, so ist das Netzwerk gültig. c^e_{adj} und c^g_{adj} sind hierbei NaVMs unter Verwendung des Strom-Netzvektors l_e und des Gas-Netzvektors l_g.

3.1.2 Das Basis-Netzwerk

Um ein geeignetes Netzwerk zur Optimierung zu bekommen, wird zunächst ein Basis-Netzwerk konstruiert. Hierbei wird versucht, ein gültiges Netzwerk zu erhalten, das möglichst klein ist, in dem also wenige Stränge verwendet werden. Das Basis-Netzwerk wird in der Funktion `NET_SIMULATION.m` erzeugt, wobei der Basis-Srom-Netzvektor l^e_{basis} sowie der Basis-Gas-Netzvektor l^g_{basis} ausgegeben wird. Es stehen insgesamt 5 Methoden zur Verfügung, um dieses Basis-Netzwerk zu bekommen. Die Variable `basis_net` $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gibt hierbei an, welche Methode gewählt werden soll.

Ist `basis_net`=0, so wird das vollständige Strom- und Gasnetz verwendet. In diesem Fall ist der Strom-Netzvektor $l^e_{basis} = [1, ..., 1]^\top \in \mathbb{R}^{l.e_dim \times 1}$. Der Gas-Netzvektor $l^g_{basis} \in \mathbb{R}^{l.g_dim \times 1}$ wird analog definiert.

Ist `basis_net`=1, so wird nur das vollständige Stromnetz verwendet. In diesem Fall gilt $l^e_{basis} = [1, ..., 1]^\top \in \mathbb{R}^{l.e_dim \times 1}$. Der Gas-Netzvektor $l^g_{basis} \in \mathbb{R}^{l.g_dim \times 1}$ wird auf Null gesetzt.

Ist `basis_net`=2, so wird nur das vollständige Gasnetz verwendet. In diesem Fall gilt $l^g_{basis} = [1, ..., 1]^\top \in \mathbb{R}^{l.g_dim \times 1}$. Der Strom-Netzvektor $l^e_{basis} \in \mathbb{R}^{l.e_dim \times 1}$ wird auf Null gesetzt.

Ist `basis_net`=3, so wird eine Netz-erzeugende Methode gewählt.

Hierbei wird von einem leeren Netzwerk ausgegangen ($l_e = 0$ und $l_g = 0$). Nun wird nach bestimmten Kriterien iterativ ein Strang im Strom bzw. Gasnetz hinzugefügt, bis das Netzwerk gültig ist.
Die Entscheidung, ob ein Strang im Stromnetz hinzugefügt wird erfolgt in jeder Iteration mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit $wgt_basis.e \in [0, 1]$. Anschließend wird untersucht, welche Stränge im ausgewählten Netz hinzugefügt werden können, so dass das Netz nach dem Hinzufügen noch zusammenhängend ist. Welcher dieser ausgewählten Stränge hinzugefügt wird, wird anhand der definierten Kriterien mit gewichteten Wahrscheinlichkeiten bestimmt.

Die Gewichte w werden mit Gleichung (9) oder mit Gleichung (10) berechnet, wobei x ein vorgegebenes oder berechnetes numerisches Kriterium ist, das jedem relevanten Strang zugeordnet werden kann. *net* bezieht sich hierbei auf das jeweilige Netz (Strom bzw. Gas).

$$w_i^x = \begin{cases} 1 + \frac{x_i - \min_j x_j}{\max_j x_j - \min_j x_j} \cdot wgt_basis.x, & i, j = 1, ..., l.net_dim, \quad \min_j x_j < \max_j x_j \\ 1, \quad i = 1, ..., l.net_dim, & sonst \end{cases} \tag{9}$$

$$w_i^x = \begin{cases} 1 + \frac{\max_j x_j - x_i}{\max_j x_j - \min_j x_j} \cdot wgt_basis.x, & i, j = 1, ..., l.net_dim, \quad \min_j x_j < \max_j x_j \\ 1, \quad i = 1, ..., l.net_dim, & sonst \end{cases} \tag{10}$$

Der Gewichtungsfaktor $wgt_basis.x$ wird in der Struktur wgt_basis (siehe Tabelle 1) als Parameter vorgegeben. Somit gilt $w_i^x \in [1, 1 + wgt_basis.x], \quad i = 1, ..., l.net_dim$.

Eintrag	**Funktion**	**Effekt Hinzunahme**	**Effekt Reduktion**
$wgt_basis.nb \geq 0$	Gewicht zu Nachbarknoten	positiv	negativ
$wgt_basis.rg \geq 0$	Gewicht zu Region	negativ	positiv
$wgt_basis.sd \geq 0$	Gewicht zu Slackdifferenz[18]	negativ	positiv
$wgt_basis.len \geq 0$	Gewicht zu Stranglänge	negativ	positiv
$wgt_basis.syn \geq 0$	Gewicht zu Synergieeffekten	nicht verwendet	positiv

Tabelle 1: Aufbau der Struktur wgt_basis.

Das Kriterium Nachbarknoten besagt, wie viele noch nicht vorkommende Partnerknoten am neu hinzukommenden Knoten angrenzen. Es geht bei der hinzunehmenden Methode positiv in die Wahrscheinlichkeitsbestimmung ein, d.h. je höher der numerische Wert des Kriteriums ist, desto wahrscheinlicher ist die Hinzunahme des zugehörigen Strangs. Alle anderen verwendeten Kriterien gehen bei dieser Methode negativ in die Wahrscheinlichkeitsbestimmung ein.
Die Wahrscheinlichkeiten p_i^x werden dann mit den Gewichten w_i^x adjustiert und normiert, so dass für die neuen Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$p_i^x = \frac{p_i \cdot w_i^x}{\sum_{j=1}^{l.net_dim} p_j \cdot w_j^x}, \quad i = 1, ..., l.net_dim. \tag{11}$$

Hierbei ist p_i, $i = 1, ..., l.net_dim$ die zuvor gegebene Wahrscheinlichkeit, Strang i hinzuzufügen und p_i^x die Wahrscheinlichkeit nach der Berücksichtigung des Kriteriums. p wird zu Beginn so definiert, dass ein Hinzufügen unter allen relevanten Strängen gleich wahrscheinlich ist. Dann wird p mit jedem verwendeten Kriterium neu adjustiert. Das detaillierte Vorgehen zur Erzeugung des Basis-Netzwerks wird in Algorithmus 3 erklärt, welcher auf Algorithmus 2 zurückgreift, um die Wahrscheinlichkeiten p^x zu erzeugen.

Algorithmus 2. Gewichtete Wahrscheinlichkeiten - Erzeugende Methode

---

Initialisierung - Input:
Struktur wgt_basis, Knotenstruktur k, Strangstruktur l, Menge M_{add}, Menge k^{neu}, Netz net

- Für $i \in M_{add}$ sei $p_i = \frac{1}{\#M_{add}}$ und $p_i = 0,\ j \notin M_{add},\ i = 1, ..., l.net_dim$.
- Modifiziere p des anhand Nachbarknoten-Kriteriums
  1. Bestimme x_i als Anzahl noch nicht erreichter Nachbarknoten von k_i^{neu}, $i \in M_{add}$ mit $x_i = 0,\ i \notin M_{add}$.
  2. Bestimme w_i^{nb}, $i = 1, ..., l.net_dim$ mit (9) und $wgt_basis.nb$
  3. Berechne p_i^{nb} mit (11) und setze $p_i = p_i^{nb}$ für $i = 1, ..., l.net_dim$
- Modifiziere p anhand Regionen-Kriterium
  1. Setze x_i als die Regionsnummer des Knotens k_i^{neu}, $i \in M_{add}$ mit $x_i = 0,\ i \notin M_{add}$.
  2. Bestimme w_i^{rg}, $i = 1, ..., l.net_dim$ mit (10) und $wgt_basis.rg$
  3. Berechne p_i^{rg} mit (11) und setze $p_i = p_i^{rg}$ für $i = 1, ..., l.net_dim$
- Modifiziere p anhand des Slackdifferenz-Kriteriums
  1. Setze x_i als den Slackdifferenzwert des Knotens k_i^{neu}, $i \in M_{add}$ mit $x_i = 0,\ i \notin M_{add}$.
  2. Bestimme w_i^{sd}, $i = 1, ..., l.net_dim$ mit (10) und $wgt_basis.sd$
  3. Berechne p_i^{sd} mit (11) und setze $p_i = p_i^{sd}$, für $i = 1, ..., l.net_dim$
- Modifiziere p anhand Stranglängen-Kriteriums
  1. Setze x_i als die Länge des Stanges $i \in M_{add}$ in $l.len$ mit $x_i = 0,\ i \notin M_{add}$.
  2. Bestimme w_i^{len}, $i = 1, ..., l.net_dim$ mit (10) und $wgt_basis.len$
  3. Berechne p_i^{len} mit (11) und setze $p_i = p_i^{len}$, für $i = 1, ..., l.net_dim$

Output: p

Algorithmus 3. Konstruktion des Basis-Netzwerks - Erzeugende Methode

---

Initialisierung:
Gegeben seien n_e, n_g, wgt_basis, Strangstruktur l und Knotenstruktur k.
Setze $l^e_{basis} = 0 \in \mathbb{R}^{l.e_dim \times 1}$, $l^g_{basis} = 0 \in \mathbb{R}^{l.g_dim \times 1}$, Variable $valid = 0$, Mengen $knots_e = \{1\}$, $knots_g = \{slack_g\}$.

while: $valid = 0$

- `If`: $\sum_{i=1}^{l.e_dim} l^e_{basis,i} \geq n_e \ \wedge \ \sum_{i=1}^{l.g_dim} l^g_{basis,i} \geq n_g$, Setze $n_e = l.e_dim$, $n_g = l.g_dim$
- Erzeuge gleichverteilte PZZ U^1.
- `If`: $\left(U^1 < wgt_basis.e \ \wedge \ \sum_{i=1}^{l.e_dim} l^e_{basis,i} < n_e\right) \ \vee \ \sum_{i=1}^{l.g_dim} l^g_{basis,i} \geq n_g$
  1. Wende die Funktion `knot_to_line.m` mit Variable new_knots=1 und Knotenmenge $knots_e$ an und erhalte NaVM c^e_{adj} für das Stromnetz.
  2. Bestimme M_{add} und k^{neu} (nach Definition) mit c^e_{adj}
  3. Wende Algorithmus 2 an. Input: wgt_basis, k, l, M_{add}, k^{neu}, Netz e
     Output: Wahrscheinlichkeitsvektor p_{add}
  4. Wähle zufälliges $j \in M_{add}$ mit Wahrscheinlichkeit $p_{add,j}$.
  5. Setze $l^e_{basis,j} = 1$
  6. Aktualisiere die Menge der erreichten Knoten im Stromnetz$knots_e$

  `Else`:

  1. Wende die Funktion `knot_to_line.m` mit Variable new_knots=1 und Knotenmenge $knots_g$ an und erhalte NaVM c^g_{adj} für das Gasnetz.
  2. Bestimme M_{add} und k^{neu} (nach Definition) mit c^g_{adj}
  3. Wende Algorithmus 2 an. Input: wgt_basis, k, l, M_{add}, k^{neu}, Netz g
     Output: Wahrscheinlichkeitsvektor p_{add}
  4. Wähle zufälliges $j \in M_{add}$ mit Wahrscheinlichkeit $p_{add,j}$.
  5. Setze $l^g_{basis,j} = 1$
  6. Aktualisiere die Menge der erreichten Knoten im Stromnetz$knots_g$
- `If`: $Bed.2$ für das Netzwerk erfüllt, Setze $valid$=1

End while

Output: l^e_{basis}, l^g_{basis}

Die Hilfsfunktion `knot_to_line.m`, auf die in Algorithmus 3 zurückgegriffen wird, ist im Folgenden erklärt.

Hilfsfunktion: `knot_to_line.m`

Sei M_k eine Menge, die die ID der erreichten Knoten in einem Netzwerk enthält.
Die Funktion `knot_to_line.m` prüft für gegebenes M_k und gegebener VM c, welche neuen Stränge in jedem Netz hinzugefügt werden können, wobei das Netz nach dem Hinzufügen zusammenhängend bleiben muss. Diese Stränge werden für ein bestimmtes Netz in Form einer NaVM c^{net}_{adj} ausgegeben mit $c^{net}_{adj_{j,i}} = c^{net}_{adj_{j,2}} = 0$, falls Strang j nicht hinzugefügt werden kann. Wird zusätzlich die optionale Variable $new_{knot} = 1$ übergeben, so wird ebenfalls c^{net}_{adj} ausgegeben, wobei zusätzlich $c^{net}_{adj_{j,1}} = c^{net}_{adj_{j,1}} = 0$, falls $c_{j,1} \in M_k \wedge c_{j,2} \in M_k$, falls also mit Strang j keine neuen Knoten hinzugefügt werden.

Die Werte n_e und n_g stellen obere Grenzen für die Anzahl der Strom- und Gasstränge in der Netzkonstruktion dar, die nur eingehalten werden, wenn damit ein gültiges Netzwerk aufgebaut werden kann. Soll diese Bedingung in der Konstruktion des Basis-Netzwerks nicht verwendet werden, so wird $n_e = l.e_dim$ und $n_g = l.g_dim$ gesetzt.
Die Menge M_{add} ist die Menge aller Stränge, die im jeweiligen Schritt dem aktuellen Netz hinzugefügt werden können, ohne dass das Kriterium des zusammenhängenden Netzes verletzt wird. Sie wird numerisch unter Verwendung der jeweiligen NaVM c^{net}_{adj} bestimmt.
Der Vektor $k^{neu} \in \mathbb{N}^{l.net_dim \times 1}$ ist so definiert, dass jede Komponente k^{neu}_i den noch nicht erreichten Knoten angibt, welcher durch Hinzunahme von Strang $i \in M_{add}$ in einem Netz erreicht wird. Für $i \notin M_{add}$ ist k^{neu}_i=0.

Ist `basis_net`=4, so wird eine Netz-reduzierende Methode gewählt.

Hierbei wird von einem voll ausgebauten Netzwerk ausgegangen ($l_e = [1, ..., 1]^\top \in \mathbb{N}^{l.e_dim \times 1}$ und $l_g = [1, ..., 1]^\top \in \mathbb{N}^{l.g_dim \times 1}$). Nun wird nach bestimmten Kriterien iterativ ein Strang im Strom- bzw. Gasnetz entfernt, bis das Netzwerk nach dem Entfernen eines weiteren beliebigen Stranges, sowohl im Stromnetz als auch im Gasnetz, nicht mehr gültig wäre. Die Entscheidung, ob ein Strang im Stromnetz entfernt wird erfolgt in jedem Schritt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - wgt_basis.e \in [0, 1]$. Mit jedem Schritt wird dann untersucht welche Stränge im ausgewählten Netz entfernt werden können, damit das Netz nach dem Entfernen noch gültig ist. Welcher dieser ausgewählten Stränge entfernt wird, wird erneut anhand der Kriterien mit gewichteten Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Die Gewichte und die Wahrscheinlichkeiten p werden analog zur hinzufügenden Methode berechnet, wobei die Kriterien invers zu dieser Methode in die Wahrscheinlichkeitsberechnung zum Entfernen eines Stranges eingehen (siehe Tabelle 1).

Hinzu kommt das Synergieeffekt-Kriterium, bei welchem geprüft wird, ob der im aktuellen Netz zu entfernende Strang bereits im jeweils anderen Netz vorkommt. Das detaillierte Vorgehen zur Erzeugung des Basis-Netzwerks wird in Algorithmus 5 erklärt, wobei dieser auf Algorithmus 4 zurückgreift, um die Wahrscheinlichkeiten p zu erzeugen.

Algorithmus 4. Gewichtete Wahrscheinlichkeiten - Reduzierende Methode

---

Initialisierung:
Gegeben seien Struktur wgt_basis, NVM c^{net}, Knotenstruktur k, Strangstruktur l, Menge M_{reduce}, Netz net, Netzvektor des jeweils anderen Netzes l^{anti}.

- Für $i \in M_{reduce}$ sei $p_i = \frac{1}{\#M_{reduce}}$ und $p_i = 0$, $i \notin M_{reduce}$, $i = 1, ..., l.net_dim$.
- Modifiziere p anhand Regionen-Kriterium
  1. Setze x_i als $\frac{\text{Regionsnummer von } c^{net}_{i,1} + \text{Regionsnummer von } c^{net}_{i,2}}{2}$, $i \in M_{reduce}$ mit x_i=0, $i \notin M_{reduce}$.
  2. Bestimme w^{rg}_i, $i = 1, ..., l.net_dim$ mit (9) und $wgt_basis.rg$
  3. Berechne p^{rg}_i mit (11) und setze $p_i = p^{rg}_i$ für $i = 1, ..., l.net_dim$
- Modifiziere p anhand Slackdifferenz-Kriterium
  1. Setze x_i als $\frac{\text{Slackdifferenzwert von } c^{net}_{i,1} + \text{Slackdifferenzwert von } c^{net}_{i,2}}{2}$, $i \in M_{reduce}$ mit $x_i = 0$, $i \notin M_{reduce}$.
  2. Bestimme w^{sd}_i, $i = 1, ..., l.net_dim$ mit (9) und $wgt_basis.sd$
  3. Berechne p^{sd}_i mit (11) und setze $p_i = p^{sd}_i$ für $i = 1, ..., l.net_dim$
- Modifiziere p anhand Stranglängen-Kriterium
  1. Setze x_i als die Länge des Stanges $i \in M_{reduce}$ in l.len mit x_j=0, $j \notin M_{reduce}$.
  2. Bestimme w^{len}_i, $i = 1, ..., l.net_dim$ mit (9) und $wgt_basis.len$
  3. Berechne p^{len}_i mit (11) und setze $p_i = p^{len}_i$ für $i = 1, ..., l.net_dim$
- Modifiziere p anhand Synergie-Kriterium
  1. Falls $i \in M_{reduce}$, bestimme $w^{syn}_i = 1 + wgt_basis.syn$, falls es den Strang i im aktuellen Netz auch entsprechend im anderen Netz l^{anti} gibt und dieser den Wert 1 annimmt und $w^{syn}_i = 1$, sonst. Falls $i \notin M_{reduce}$, setze w^{syn}_i=0.
  2. Berechne p^{syn}_i mit (11) und setze $p_i = p^{syn}_i$ für $i = 1, ..., l.net_dim$

Output: p

Algorithmus 5. Konstruktion des Basis Netzwerks - Reduzierende Methode

---

Initialisierung:
Gegeben seien n_e, n_g, $wgt_basis.e$. Setze $l^e_{basis} = [1, ..., 1]^\top \in \mathbb{R}^{l.e_dim \times 1}$ und $l^g_{basis} = [1, ..., 1]^\top \in \mathbb{R}^{l.g_dim \times 1}$, $wgt_e^\star = wgt_e$, Variable $valid = 1$

while: $valid = 1$

- `If`: $\sum_{i=1}^{l.e_dim} l^e_{basis,i} \leq n_e \ \wedge \ \sum_{i=1}^{l.g_dim} l^g_{basis,i} \leq n_g$, Setze $n_e = 0$, $n_g = 0$
- Erzeuge gleichverteilte PZZ U^1.
- `If`: $\left(U^1 < wgt_e^\star \ \wedge \ \sum_{i=1}^{l.e_dim} l^e_{basis,i} \geq n_e\right) \ \vee \ \left(\sum_{i=1}^{l.g_dim} l^g_{basis,i} \leq n_g \ \vee \ wgt_e^\star\right)$
  1. Bestimme $M^{pre}_{reduce} = \{\, j \,|\, l^e_{basis,j} = 1\}$
  2. Definiere $l^e_{reduce} = 0 \in \mathbb{R}^{l.e_dim \times 1}$
  3. `For` $j \in M^{pre}_{reduce}$
     (a) Setze $\tilde{l}^e_{basis} = l^e_{basis} - e^j$, wobei e^j Einheitsvektor in $\mathbb{N}^{l.e_dim \times 1}$ mit $e^j, j = 1$
     (b) Prüfe mit Algorithmus 1, ob $\tilde{l}^e_{basis}$ und l^g_{basis} ein zusammenhängendes Netzwerk ergeben und ob alle Knoten erreicht werden.
     (c) `If` Netzwerk gültig: Setze $l^e_{reduce,j} = 1$
  4. `If`: $l^e_{reduce} \neq 0$
     (a) Bestimme M_{reduce}
     (b) Wende Algorithmus 4 für e an. Input: wgt_basis, NVM c^e, k, l, $l^{anti} = l^g$, M_{reduce} Output: Wahrscheinlichkeitsvektor $prob_{red}$
     (c) Wähle zufälliges $j \in M_{red}$ mit Wahrscheinlichkeit $prob_{red,j}$.
     (d) Setze $l^e_{basis,j} = 0$

     `Else`: Setze $wgt_e^\star$=0, $reduce_possible_e = 0$

  `Else`:

  1. Bestimme $M^{pre}_{reduce} = \{j \,|\, l^g_{basis,j} = 1\}$
  2. Definiere $l^g_{reduce} = 0 \in \mathbb{R}^{l.g_dim \times 1}$
  3. `For` $j \in M^{pre}_{reduce}$
     (a) Setze $\tilde{l}^g_{basis} = l^g_{basis} - e^j$, wobei e^j Einheitsvektor in $\mathbb{N}^{l.g_dim \times 1}$ mit $e^j, j = 1$
     (b) Prüfe mit Algorithmus 1 ob l^e_{basis} und $\tilde{l}^g_{basis}$ ein zusammenhängendes Netzwerk ergeben und ob alle Knoten erreicht werden.
     (c) `If` Netzwerk gültig: Setze $l^g_{reduce,j} = 1$

4. `If`: $l^g_{reduce} \neq 0$
   (a) Bestimme M_{reduce}
   (b) Wende Algorithmus 5 für g an. Input: wgt_basis, NVM c^g, k, l, $l^{anti} = l^e$, M_{reduce}
   Output: Wahrscheinlichkeitsvektor $prob_{red}$
   (c) Wähle zufälliges $j \in M_{red}$ mit Wahrscheinlichkeit $prob_{red,j}$.
   (d) Setze $l^g_{basis,j} = 0$

   `Else`: Setze $wgt_e^\star$=1, $reduce_possible_g = 0$

- `If`: $reduce_possible_g = 0 \wedge reduce_possible_e = 0$, setze $valid$=0

End while
Output: l^e_{basis}, l^g_{basis}

Die Werte n_e und n_g stellen untere Grenzen für die Anzahl der Strom- und Gasstränge in der Netzkonstruktion dar. Soll diese Bedingung im Fall der Konstruktion des Basis-Netzwerks nicht verwendet werden, so wird $n_e = 0$ und $n_g = 0$ gesetzt.
Die Menge M_{reduce} ist hierbei die Menge aller Stränge eines Netzes, die entfernt werden können, so dass das Netzwerk gültig bleibt. Sei l^{net} das Netz, das mit Algorithmus 5 untersucht wird. Dann bezeichnet l^{anti} das jeweilige andere Netz.

3.1.3 Das Aufbau-Netzwerk

Das Aufbau-Netzwerk wird ebenfalls in der Funktion `NET_SIMULATION.m` erzeugt, wobei der Basis-Srom-Netzvektor l^e_{basis} und der Basis-Gas-Netzvektor l^g_{basis} jeweils eingelesen wird und die Netzvektoren l_e und l_g ausgegeben werden. Es stehen insgesamt 2 Methoden zur Verfügung, um das Aufbau-Netzwerk zu erzeugen. Die Variable $adv_net.method \in \{0, 1\}$ gibt hierbei an, welche Methode gewählt werden soll. Die Idee ist, solange Stränge hinzuzufügen, bis die Anzahl der Stromstränge dem Wert n_e entspricht und die Anzahl der Gasstränge dem Wert n_g entspricht. Diese Grenzen werden analog zu (12) bzw. analog zu (13) für Netzvektor l^{net} erzeugt.

$$n_{net} = n_{low} + \lceil (U^1)^{wgt_adv.exp} \cdot (l.net_dim - 1 - n_{low}) \rceil \tag{12}$$

$$n_{net} = n_{low} + \lceil (U^1)^{wgt_adv.exp} \cdot (l.net_dim - n_{low}) \rceil \tag{13}$$

mit Parameter $wgt_adv.exp \in (0, 1)$, gleichverteilter Pseudozufallszahl (PZZ) U^1 wobei $n_{low} = \sum_{i=1}^{l.net_dim} l_i^{net}$ der Anzahl der Stränge des Basisnetzes entspricht. n_{net} nimmt somit einen Wert zwischen der Anzahl an Strängen im Basisnetzes und der maximal möglichen Anzahl an Strängen eines Netzes an, wobei $wgt_adv.exp$ steuert, wie stark das Netz ausgebaut wird.

Nimmt $wgt_adv.exp$ einen Wert näher an der Null an, so steigt die Wahrscheinlichkeit, dass das Netz stärker ausgebaut wird. Läuft $wgt_adv.exp$ gegen 1, so konvergiert n_{net} gegen eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $[n_{low}, l.net_dim - 1]$ bzw. auf $[n_{low}, l.net_dim]$.
Optional können n_e und n_g explizit vorgegeben werden. In diesem Fall werden diese beiden Gleichungen nicht verwendet.

Ist $adv_net.netsize = 1$ wird Algorithmus 6 verwendet, um n_e und n_g zu berechnen. Hierbei wird berücksichtigt, dass das Netzwerk nicht voll ausgebaut wird[19].

Algorithmus 6. Erzeugen von n_e und n_g

Initialisierung: Gegeben seien die Basis-Netzvektoren l^e_{basis}, l^g_{basis} und Parameter $wgt_adv.exp$

`If`: n_e und n_g nicht vorgegeben

- Setze $sum_{l^e} = \sum_{i=1}^{l.e_dim} l^e_{basis,i}$ und $sum_{l^g} = \sum_{i=1}^{l.g_dim} l^g_{basis,i}$

  1. `If:` $sum_{l^e} < l.e_dim$

     – `If:` $sum_{l^g} = l.g_dim$, berechne n_e mit (12)
       `Else:` Berechne n_e mit (13)

     `Else:` Setze $n_e = l.e_dim$

  2. `If:` $sum_{l^g} < l.g_dim$

     – `If:` $n_e = l.e_dim$, berechne n_g mit (12)
       `Else:` Berechne n_g mit (13)

     `Else:` Setze $n_g = l.g_dim$

- Output: n_e und n_g

Ist $adv_net.netsize = 2$, dann werden n_e und n_g anhand der Relation von Strom- und Gassträngen im Basis-Netzwerk mit Algorithmus 7 bestimmt. Hierbei wird das Verhältnis von Stromsträngen zu Gassträngen adjustiert um die Differenz der Netzgrößen $fraction$ im Basis-Netzwerk auf das Aufbau-Netzwerk übertragen, wobei $fraction$ mit einer minimalen zufällige Variation versehen wird. Außerdem wird $fraction$ auf die maximale Größe des verwendeten Netzes projeziert, falls es einen größeren Wert annehmen sollte. Für das stärker ausgebaute Netz werden erneut (12) bzw. (13) verwendet.

Algorithmus 7. Erzeugen von n_e und n_g anhand des Basis Netzwerks

---

Initialisierung: Gegeben seien die Basis-Netze l^e_{basis}, l^g_{basis}, Parameter $wgt_adv.exp$,
Setze Variable $fraction = 0$

- Setze $sum_{l^e} = \sum_{i=1}^{l.e_dim} l^e_{basis,i}$ und $sum_{l^g} = \sum_{i=1}^{l.g_dim} l^g_{basis,i}$
- `If`: $sum_{l^g} > 0$, setze $fraction = \frac{sum_{l^e}}{sum_{l^g}} \cdot \frac{l.g_dim}{l.e_dim}$
- `If`: $fraction > 1$

  1. Erzeuge gleichverteilte PZZ U^1
  2. Variation: Berechne $fraction = \max(10^{-5}, fraction \cdot (1 + (U^1 - 0.5) \cdot 0.1))$
  3. Berechne n_e wie in (13).
  4. Setze $n_g = \min\left(\lceil \frac{n_e}{fraction} \rceil, n_e\right)$

  `Else`:

  1. `If`: $fraction = 0$, berechne n_g bzw. n_e nach (12) wobei entweder n_g oder n_e Null gesetzt wird, je nachdem welches Netz im Basis-Netzwerk nicht verwendet wird.
     `Else`:
     (a) Erzeuge gleichverteilte PZZ U^1
     (b) Variation: Setze $fraction = \max(10^{-5}, fraction \cdot (1 + (U^1 - 0.5) \cdot 0.1))$
     (c) Setze n_g wie in (13).
     (d) Setze $n_e = \min\left(\lceil n_g \cdot fraction \rceil, n_g\right)$

Output: n_e und n_g

Die Variation in $fraction$ stellt sicher, dass mindestens ein Strang im zu berechnenden Netz vorkommt und das Verhältnis der Netzgrößen aus dem Basis-Netzwerk um maximal 5 Prozent in jede Richtung zufällig variiert.

Im Folgenden wird der Netzausbau vorgestellt, der diese Methodik der Netzgrößenermittlung einbaut. Da hier keine neuen Knoten mehr hinzukommen, kann das Netz nicht analog zum Aufbau der erzeugenden Basis-Netzwerk-Methode konstruiert werden. Daher wird der Netzaufbau für einige Kriterien an der reduzierenden Basis-Netzwerk-Methode orientiert, wobei die Gewichtung der Kriterien invers berücksichtigt wird (siehe Algorithmus 8).

Algorithmus 8. Gewichtete Wahrscheinlichkeiten - Aufbau-Netzwerk

---

- Wende Algorithmus 4 an, wobei M_{add}^{adv} anstelle von M_{reduce} verwendet wird.
- Für die Kriterien $Slackdifferenz$ und $Region$ erfolt die Berechnung der Gewichte invers, d.h. es wird (9) statt (10) verwendet und umgekehrt.
- Für das Kriterium *Stranglänge* wird die Berechnung aus Algorithmus 2 genutzt.
- Die Berechnung für Kriterium $Synergie$ erfolgt analog zu Algorithmus 4 mit $\mathbf{1} - l^{anti}$ anstelle von l^{anti}, wobei $\mathbf{1}$ ein Einsvektor der Länge l^{anti} ist.

Ist `adv_net`=0, so wird das Netzwerk auf dem zugrunde liegenden Basis-Netzwerk durch iteratives Hinzufügen von einzelnen Strängen erzeugt. Es wird solange hinzugefügt, bis das Stromnetz die Größe n_e und das Gasnetz die Größe n_g hat.

Algorithmus 9. Erzeugen des Aufbau-Netzwerks, iterative Methode

---

Initialisierung: Gegeben seien die Basis-Netzvektoren l_{basis}^e, l_{basis}^g, wgt_adv, NVMs c^e, c^g, Knotenstruktur k und Strangstruktur l

`while`: $\sum_{i=1}^{l.e_dim} l_i^e < n_e \vee \sum_{i=1}^{l.g_dim} l_i^g < n_g$

- Erzeuge gleichverteilte PZZ U^1
- `If`: $\left(U^1 < wgt_adv.e \wedge sum_{l^e} < n_e\right) \vee sum_{l^g} = n_g$

  1. Bestimme M_{add}^{adv} mit Algorithmus 1 als die Menge aller Strom-Stränge, die hinzugefügt werden können, so dass das Netz noch zusammenhängend ist.
  2. Wende Algorithmus 8 an. Input: wgt_adv, NVM c^e, k, l, $l^{anti} = l^g$, M_{add}^{adv}
     Output: Wahrscheinlichkeitsvektor p_{add}
  3. Wähle zufälliges $j \in M_{add}$ mit Wahrscheinlichkeit $p_{add,j}$.
  4. Setze $l_j^e = 1$

  `Else`:

  1. Bestimme M_{add}^{adv} mit Algorithmus 1 als die Menge aller Gas-Stränge, die hinzugefügt werden können, so dass das Netz noch zusammenhängend ist.
  2. Wende Algorithmus 8 an. Input: wgt_adv, NVM c^g, k, l, $l^{anti} = l^e$, M_{add}^{adv}
     Output: Wahrscheinlichkeitsvektor p_{add}

3. Wähle zufälliges $j \in M_{add}^{adv}$ mit Wahrscheinlichkeit $p_{add,j}$.
4. Setze $l_j^g = 1$

Output: Netzvektoren l^e und l^g

Ist `adv_net.method=1`, so wird das Netzwerk auf dem zugrunde liegenden Basis-Netzwerk durch hinzufügen mehrerer Stränge auf einmal erzeugt. Der Wahrscheinlichkeitsvektor p_{add} wird analog erzeugt, wobei jedoch die Menge der hinzuzufügenden Stränge n_e und n_g anhand der Wahrscheinlichkeiten vollständig aufgefüllt wird. Ist dies in der aktuellen Iteration nicht möglich, da nicht so viele Stränge hinzugefügt werden können, wird der Vorgang wiederholt (siehe Algorithmus 10 für weitere Details).

Algorithmus 10. Erzeugen des Aufbau-Netzwerks, gebündelte Methode

---

Initialisierung: Gegeben seien die Basis-Netze l_{basis}^e, l_{basis}^g, wgt_adv, NVMs c^e, c^g, Knotenstruktur k und Strangstruktur l

`while`: $\sum_{i=1}^{l.e_dim} l_i^e < n_e \vee \sum_{i=1}^{l.g_dim} l_i^g < n_g$

- Bestimme $M_{add}^{adv,e}$ im Stromnetz und $M_{add}^{adv,g}$ im Gasnetz analog zu Algorithmus 9
- Wende Algorithmus 8 an. Input: wgt_adv, c^e, k, l, $l^{anti} = l^g$, $M_{add}^{adv,e}$
  Output: Wahrscheinlichkeitsvektor p_{add}^e
- Wende Algorithmus 8 an. Input: wgt_adv, c^g, k, l, $l^{anti} = l^e$, $M_{add}^{adv,g}$
  Output: Wahrscheinlichkeitsvektor p_{add}^g
- Wähle die Menge $M_{add}^{e\star} \subset M_{add}^{adv,e}$ unter Verwendung der Wahrscheinlichkeiten $p_{add,j}^e$, $j \in M_{add}^{e\star}$, wobei $\#M_{add}^{e\star} = \min(\#M_{add}^{adv,e}, n_e - \sum_{i=1}^{l.e_dim} l_i^e)$.
- Setze $l_j^e = 1,\ j \in M_{add}^{e\star}$
- Wähle die Menge $M_{add}^{g\star} \subset M_{add}^{adv,g}$ unter Verwendung der Wahrscheinlichkeiten $p_{add,j}^g$, $j \in M_{add}^{g\star}$, wobei $\#M_{add}^{g\star} = \min(\#M_{add}^{adv,g}, n_g - \sum_{i=1}^{l.g_dim} l_i^g)$.
- Setze $l_j^g = 1,\ j \in M_{add}^{g\star}$

Output: Netze l^e und l^g

Die gebündelte Methode ermöglicht eine schnellere Rechenzeit im Vergleich zur iterativen Methode, allerdings ist die Wahrscheinlichkeit bei der iterativen Methode höher, die bestmöglichen Stränge auf Basis der Kriterien zu erhalten.

3.2 Optimierung auf dem Netzwerk

Ziel ist es nun, für ein gültiges erzeugtes Netzwerk den volkswirtschaftlichen Gewinn aus der Versorgung der Haushalte zu maximieren. Hierbei soll die Strom- und Wärmeversorgung aller Haushalte gewährleistet sein, unter der Berücksichtigung der Stabilität und Funktionalität der jeweiligen Netze durch Bedingungen an die Variablen. An jedem PQ-Knoten i werden $k.houses_i$ Haushalte versorgt, mit $i = 1, ..., k.$ dim. Die Versorgung wird durch vier Technologien ermöglicht. Im ersten Fall beziehen die Haushalte den Strom vollständig durch das Stromnetz. Der Wärmebedarf wird durch Pelletheizungen gedeckt. Im zweiten Fall wird eine Wärmepumpe eingesetzt. Hierbei wird Strom in Wärme umgewandelt, so dass Strom- und Wärmebedarf allein durch die Stromversorgung gedeckt werden können. Im dritten Fall wird ein Brennwertkessel genutzt. Hierbei wird Gas in Wärme umgewandelt. Strom wird aus dem Stromnetz gewonnen. Im vierten Fall wird eine BHKW-Anlage installiert. Diese ermöglicht die Strom- und Wärmeversorgung durch Gas. Eine Stromleitung ist in diesem Fall für die Versorgung nicht notwendig. Kosten entstehen durch den Bau der Versorgungstechnologien und der Leitungen, welche, je nach Widerstand auf der Leitung, variieren. Erlöse entstehen durch den Konsum von Strom und Gas der Haushalte. Die Optimierung auf dem Netzwerk wird für verschiedene simulierte Netzwerke durchgespielt, wobei aus der Gesamtheit der optimierten Netzwerke versucht wird, das beste Netzwerk herauszufiltern. Tabelle 2 definiert die Variablen, die in der Optimierung verwendet werden.

Variable	Erklärung	Dimension	untere Grenze	obere Grenze
r^e	Stromwiderstand	$l.e_dim$	r^e_{min}	r^e_{max}
r^g	Gaswiderstand	$l.g_dim$	r^g_{min}	r^g_{max}
U	Spannung	$k.dim$	U_{min}	U_{max}
P	Druck	$k.dim$	P_{min}	P_{max}
$wgts$	Anteil Technologiebenutzung	4	$wgts_{min} \geq 0$	$wgts_{max} \leq 1$
w_1	Anteil Versorgung durch Strom	$k.dim$	0	1
w_2	Anteil Versorgung durch Wärmepumpe	$k.dim$	0	1
w_3	Anteil Versorgung durch Brennwertkessel	$k.dim$	0	1
w_4	Anteil Versorgung durch BHKW	$k.dim$	0	1

Tabelle 2: Variablen, die in der Optimierung verwendet werden

Die Dimension bezieht sich hierbei auf den Fall vollständig ausgebauter Netze. Sie wird auf eine geringere Dimension reduziert, sofern die Variablen aufgrund verschiedener Netzwerke nicht benötigt werden, um Rechenzeit zu sparen. Die Grenzen beziehen sich auf komponentenweise Einträge. r^e und r^g sind Widerstände auf Strom- bzw. Gasleitungen. U und P sind Spannungen und Gasdrücke an den PQ-Knoten. $wgts$ gibt an, welchen Anteil die vier Versorgungstechnologien im Netzwerk einnehmen. w_i ist ein Vektor, der an jedem PQ-Knoten (diese entsprechen den jeweiligen Komponentenen von w_i) den Anteil der Versorgungstechnologie i angibt, die verwendet wird.

3.2.1 Numerische Berechnung der Admittanzmatrix

Zunächst wird der Begriff der Admittanzmatrix erklärt, und wie diese numerisch aufgebaut wird. Die Admittanzmatrix ermöglicht, mit Hilfe der Widerstände auf den Leitungen eine Verbindung zwischen diesen, den Spannungen und der Stromstärken darzustellen.

Im Folgenden wird eine selbst entwickelte Methode vorgestellt, die ermöglicht, die Admittanzmatrix mit Hilfe einer vorgegebenen VM unter Zuhilfenahme der hier definierten Netzmatrix numerisch zu erzeugen. Vorerst wird angenommen, das voll ausgebaute Stromnetz mit VM c sei unabhängig vom Gasnetz, welches zunächst ignoriert wird, gegeben.

Definition 3.11. *Sei* $I^{[i]} = [-I_1, ..., -I_{slack-1}, I_{slack}, -I_{slack+1}, ..., -I_{k.\dim+1}]^\top \in \mathbb{R}^{k.\dim+1\times 1}$ *der Vektor mit Stromstärken an den Knotenpunkten, wobei am Slack-Knoten* I_{slack} *eingespeist wird, weshalb bei* I_{slack} *ein positives Vorzeichen gesetzt wird. An den PQ-Knoten wird hingegen ein negatives Vorzeichen gesetzt.*

Weiter sei der Vektor $I^{[i,j]} \in \mathbb{R}^{l.\dim\times 1}$ *definiert als* $I^{[i,j]} = \left[I_{c_{1,1},c_{1,2}}, I_{c_{2,1},c_{2,2}}, ..., I_{c_{l.\dim,1},c_{l.\dim,2}}\right]^\top$ *wobei* c *eine VM ist und* $I_{c_{i,1},c_{i,2}}$ *die Stromstärke auf dem Strang* i *ist, welcher Knoten* $c_{i,1} \in \mathbb{N}$ *mit Knoten* $c_{i,2} \in \mathbb{N}$ *verbindet mit* $i = 1, ..., l.\dim$.

Eine ***Netzmatrix*** $A^N \in \mathbb{N}^{(k.\dim+1)\times l.\dim}$ *ist dann definiert als diejenige Matrix, für die gilt*

$$A^N \cdot I^{[i,j]} = I^{[i]} \tag{14}$$

wobei alle Einträge der Netzmatrix in der Menge $\{-1, 0, 1\}$ *liegen. Das Gleichungssystem (14) resultiert aus der Gleichung für die Stromstärken in einem Netz welche mit (2) gegeben ist.*

Satz 3.1. *Sei* $c \in \mathbb{N}^{l.\dim\times 2}$ *eine VM (oder NVM / NaVM). Sei eine Matrix* $A^N \in \mathbb{N}^{(k.\dim+1)\times l.\dim}$ *definiert als*

$$A^N_{i,j} = \begin{cases} 1, & c_{j,1} = i \\ -1, & c_{j,2} = i \\ 0, & else \end{cases}$$

für $i = 1, ..., k.\dim+1$ *und* $j = 1, ..., l.\dim$. *Dann ist Matrix A eine Netzmatrix.*

Beweis: *Es gilt*

$$A^N \cdot I^{[i,j]} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{l.\dim} A^N_{1,k} \cdot I_k^{[i,j]} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{l.\dim} A^N_{k.\dim+1,k} \cdot I_k^{[i,j]} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\textit{Def. von } A^N} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{l.\dim} \left(1_{\{c_{k,1}=1\}} - 1_{\{c_{k,2}=1\}}\right) \cdot I_k^{[i,j]} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{l.\dim} \left(1_{\{c_{k,1}=k.\dim+1\}} - 1_{\{c_{k,2}=k.\dim+1\}}\right) \cdot I_k^{[i,j]} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\textit{Def. von } I^{[i,j]}} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{l.\dim} \left(1_{\{c_{k,1}=1\}} - 1_{\{c_{k,2}=1\}}\right) \cdot I_{c_{k,1},c_{k,2}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{l\dim} \left(1_{\{c_{k,1}=k.\dim+1\}} - 1_{\{c_{k,2}=k.\dim+1\}}\right) \cdot I_{c_{k,1},c_{k,2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{l.\dim} 1_{\{c_{k,1}=1\}} \cdot I_{1,c_{k,2}} - 1_{\{c_{k,2}=1\}} \cdot I_{c_{k,1},1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{l.\dim} 1_{\{c_{k,1}=k.\dim+1\}} \cdot I_{k.\dim+1,c_{k,2}} - 1_{\{c_{k,2}=k.\dim+1\}} \cdot I_{c_{k,1},k.\dim+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{M_{1,p}} I_{1,p} - \sum_{M_{p,1}} I_{p,1} \\ \vdots \\ \sum_{M_{k.\dim+1,p}} I_{k.\dim+1,p} - \sum_{M_{p,k.\dim+1}} I_{p,k.\dim+1} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{(2)} \begin{pmatrix} -I_1 \\ \vdots \\ -I_{slack-1} \\ I_{slack} \\ -I_{slack+1} \\ \vdots \\ -I_{k.\dim+1} \end{pmatrix}$$

mit Mengen

$$M_{i,p} = \{p \,|\, \textit{Strang führt von Knotenpunkt } i \textit{ zu } p\,\} \quad \textit{und}$$
$$M_{p,i} = \{p \,|\, \textit{Strang führt von Knotenpunkt } p \textit{ zu } i\,\}, \;\; i = 1, ..., k.\dim+1.$$

Hierbei ist zu beachten, dass alle $I_{i,j}$ in den obigen Gleichungen, die nicht definiert sind, mit dem Wert 0 angenommen werden. Dies ist zulässig, da entweder die voranstehende Indikatorfunktion in diesem Fall den Wert 0 annimmt, oder die Menge, über die summiert werden soll, leer ist.

Nach Definition 3.11 ist A^N eine Netzmatrix. □

Bei der numerischen Umsetzung wird nun die vorgegebene VM und Satz 3.1 genutzt, um die Netzmatrix aufzubauen. Dies wird analog zu Algorithmus 11 durchgeführt.

Algorithmus 11. Numerischer Aufbau der Netzmatrix

Initialisierung:
Gegeben sei eine VM c mit Knotenpunkten 1,...,$k.\dim+1$, Setze $j = 1$

while: j $\leq k.\dim+1$

1. Setzte $c^{ID} \in \mathbb{N}^{l.\dim\times 2}$ mit $c^{ID} = 0$
2. Setze $c^{ID}_{m,n} = 1$, falls $c_{m,n} = j, \quad m = 1, ..., l.\dim, \quad n = 1, 2$
3. Setze $c^{ID_1} = \left[c^{ID}_{1,1}, ..., c^{ID}_{l.\dim,1}\right]$ und $c^{ID_2} = \left[c^{ID}_{1,2}, ..., c^{ID}_{l.\dim,2}\right]$
4. **If**: j=1, setze $A^N = c^{ID_1} - c^{ID_2} \in \mathbb{N}^{1\times l.\dim}$
   Else: Füge $c^{ID_1} - c^{ID_2}$ als neue untere Zeile an A^N an, so dass $A^N \in \mathbb{N}^{j\times l.\dim}$
5. Setze j=j+1

End while
Output: A^N

Im Folgenden wird nun der Begriff der Admittanzmatrix mathematisch konkretisiert.

Definition 3.12. *Sei $I^{[i]} \in \mathbb{R}^{k.\dim+1\times 1}$ der Vektor mit Stromstärken an den Knotenpunkten, analog zu Definition 3.11. Weiter sei $U = [U_1, ..., U_{k.\dim+1}]^\top \in \mathbb{R}^{k.\dim+1\times 1}$ der Vektor mit Spannungen an den jeweiligen Knotenpunkten des Netzes und $r \in \mathbb{R}_+^{l.\dim\times 1}$ der Vektor mit Widerständen auf den Strängen des jeweiligen Netzes. Sei $r^{inv} \in \mathbb{R}_+^{l.\dim\times 1}$ definiert als $r^{inv}_j = \frac{1}{r_j}, \quad j = 1, ..., l.\dim$.*

*Dann ist die Matrix $A(r_{inv}) \in \mathbb{R}^{k.\dim+1\times k.\dim+1}$ definiert als die **Admittanzmatrix** des Netzes, wenn sie folgende Gleichung erfüllt*

$$A(r_{inv}) \cdot U = I^{[i]}$$

Satz 3.2. *Sei $A^N \in \mathbb{N}^{k.\dim+1\times l.\dim}$ eine Netzmatrix. Weiter sei r_{inv} wie in Definition 3.12 und $\mathbf{1} \in \mathbb{N}^{k.\dim+1\times 1}$ ein Einsvektor. Dann gilt für die Admittanzmatrix $A(r_{inv})$:*

$$A(r_{inv}) = A^N \cdot \left[A^{N\top} \otimes \left[r_{inv} \cdot \mathbf{1}^\top\right]\right] \tag{15}$$

wobei $\otimes$ als Operator zur komponentenweise Multiplikation zweier Matrizen zu verstehen ist.

***Beweis**: Seien $I^{[i,j]}$ und $I^{[i]}$ wie in Definition 3.11 und U wie in Definition 3.12.*
Um zu zeigen, dass $A(r_{inv})$ Admittanzmatrix ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\left[A^{N^\top} \otimes \left[r^{inv} \cdot \boldsymbol{1}^\top\right]\right] \cdot U = I^{[i,j]}$$

denn damit erfüllt $A(r_{inv})$ die Definition einer Admittanzmatrix durch:

$$A(r_{inv}) \cdot U = A^N \cdot \left[A^{N^\top} \otimes \left[r^{inv} \cdot \boldsymbol{1}^\top\right]\right] \cdot U = A^N \cdot I^{[i,j]} \underbrace{=}_{Def.\ von\ A^N} I^{[i]}$$

Es gilt

$$\left[A^{N^\top} \otimes \left[r^{inv} \cdot \boldsymbol{1}^\top\right]\right] \cdot U = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} \cdot \sum_{q=1}^{k.\dim+1} A^N_{q,1} \cdot U_q \\ \vdots \\ \frac{1}{r_{l.\dim}} \cdot \sum_{q=1}^{k.\dim+1} A^N_{q,l.\dim} \cdot U_q \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{Def\ von\ r,\ Def\ von\ A^N} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{c_{1,1},c_{1,2}}} \cdot \sum_{q=1}^{k.\dim+1} \left(1_{\{c_{1,1}=q\}} - 1_{\{c_{1,2}=q\}}\right) \cdot U_q \\ \vdots \\ \frac{1}{r_{c_{l.\dim,1},c_{l.\dim,2}}} \cdot \sum_{q=1}^{k.\dim+1} \left(1_{\{c_{l.\dim,1}=q\}} - 1_{\{c_{l.\dim,2}=q\}}\right) \cdot U_q \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{Summe\ über\ alle\ Knoten} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{c_{1,1},c_{1,2}}} \cdot \left(U_{c_{1,1}} - U_{c_{1,2}}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{r_{c_{l.\dim,1},c_{l.\dim,2}}} \cdot \left(U_{c_{l.\dim,1}} - U_{c_{l.\dim,2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{(3)} \begin{pmatrix} \frac{U_{c_{1,1},c_{1,2}}}{r_{c_{1,1},c_{1,2}}} \\ \vdots \\ \frac{U_{c_{l.\dim,1},c_{l.\dim,2}}}{r_{c_{l.\dim,1},c_{l.\dim,2}}} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{(1)} \begin{pmatrix} I_{c_{1,1},c_{1,2}} \\ \vdots \\ I_{c_{l.\dim,1},c_{l.\dim,2}} \end{pmatrix} = I^{[i,j]}$$

□

Die Admittanzmatrix wird in der numerischen Umsetzung analog zu Gleichung (15) in Satz 3.2 mit Hilfe der Netzmatrix konstruiert.

Mit (5), (6) und (7) im Gasnetz als analog zu (1), (2) und (3) im Stromnetz gelten die Eigenschaften der Netzmatrix und der Admittanzmatrix auch im Fall des Gasnetzes. Die Konstruktion erfolgt daher analog.

3.2.2 Nebenbedingungen

Die Admittanzmatrix eines jeden Netzes wird für gegebene Strom-und Gas-Widerstands-Vektoren $r^e \in \mathbb{R}^{l.dim_e \times 1}$ und $r^g \in \mathbb{R}^{l.dim_g \times 1}$ wie in Gleichnung (15) berechnet, wobei die Netzmatrix für das jeweilige Netz anhand von Algorithmus 11, jedoch unter Berücksichtigung der jeweiligen NaVMs, erzeugt wird und Nullzeilen der Netzmatrix entfernt werden, da diese zu Nullzeilen und Nullspalten in der Admittanzmatrix führen. Diese entsprechen nicht erreichter Knotenpunkte des Netzes, für welche eine Überprüfung der Admittanzgleichung nicht notwendig ist. Hierbei wird im Folgenden A^e als Admittanzmatrix des Stromnetzes und A^g als Admittanzmatrix des Gasnetzes bezeichnet. Die vollständige Admittanzmatrix A wird dann aufgebaut als

$$A = \begin{pmatrix} A^e & 0 \\ 0 & A^g \end{pmatrix}$$

Mit A^e und A^g werden die reduzierten Admittanzmatrizen für jeweils Strom A^e_{red} und Gas A^g_{red} wie in (16) bzw. (17) gebildet. Sie berücksichtigen, dass die Einspeisung an den Slack-Knoten bereits bekannt ist und dass nur die erreichten Knoten für jeweils Gas und Strom in die Gleichung eingehen.

$$A^e_{red} = \begin{pmatrix} A^e_{2,2} & \cdots & A^e_{2,k.dim_e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^e_{k.dim_e,2} & \cdots & A^e_{k.dim_e,k.dim_e} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$A^g_{red} = \begin{pmatrix} A^g_{1,1} & \cdots & A^g_{1,slack^\star_g-1} & A^g_{1,slack^\star_g+1} & \cdots & A^g_{1,k.dim_g} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^g_{slack^\star_g-1,1} & \cdots & A^g_{slack^\star_g-1,slack^\star_g-1} & A^g_{slack^\star_g-1,slack^\star_g+1} & \cdots & A^g_{slack^\star_g-1,k.dim_g} \\ A^g_{slack^\star_g+1,1} & \cdots & A^g_{slack^\star_g+1,slack^\star_g+1} & A^g_{slack^\star_g+1,slack^\star_g+1} & \cdots & A^g_{slack^\star_g+1,k.dim_g} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^g_{k.dim_g,1} & \cdots & A^g_{k.dim_g,slack^\star_g-1} & A^g_{k.dim_g,slack^\star_g+1} & \cdots & A^g_{k.dim_g,k.dim_g} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Hierbei ist $slack^\star_g$ derjenige Knoten im verwendeten Gasnetz, der dem Slack-Knoten $slack_g$ entspricht. $k.dim_e$ und $k.dim_g$ entsprechen der Anzahl der erreichten PQ-Knoten im verwendeten Strom bzw. Gasnetz. $l.dim_e$ und $l.dim_g$ entsprechen der Anzahl der benutzten Stränge im verwendeten Strom- bzw. Gasnetz. Diese Werte werden für jedes simulierte Netz mit Hilfe der NaVMs berechnet.

Außerdem werden die Vektoren b_e und b_g mit (18) und (19) erzeugt, welche in die Admittanzgleichung mit einfließen, damit diese unter der Berücksichtigung der reduzierten Admittanzmatrizen weiterhin erfüllt ist.

$$b^e_{red} = \left[\ A^e_{2,1},\ \ \cdots,\ \ A^e_{k.dim_e,1}\ \right]^\top \tag{18}$$

$$b^g_{red} = \left[\ A^g_{1,slack^\star_g},\ \ \cdots,\ \ A^g_{slack^\star_g-1,slack^\star_g},\ \ A^g_{slack^\star_g+1,slack^\star_g},\ \ \cdots,\ \ A^g_{k.dim_g,slack^\star_g}\ \right]^\top \tag{19}$$

Die Variablen, nach denen optimiert wird, werden in einem Vektor x zusammengefasst, wobei

$$x = \left[(r^e_{inv})^\top,\ (r^g_{inv})^\top,\ U^\top,\ P^\top,\ wgts^\top,\ w_1^\top,\ w_2^\top,\ w_3^\top,\ w_4^\top\right]^\top \tag{20}$$

$r^{net}_{inv_j}$ ist hierbei $\frac{1}{r^{net}_j}$ für das jeweilige Netz net, mit $j = 1, ..., l.dim_net$.
Die Admittanzgleichung wird in der Optimierung als Null-Bedingung implementiert mit

$$c_{eq}(x) = \begin{pmatrix} A^e_{red}(r^e_{inv}) & 0 \\ 0 & A^g_{red}(r^g_{inv}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 \cdot b^e_{red}(r^e_{inv}) \\ P_{slack^*_g} \cdot b^g_{red}(r^g_{inv}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I(w_1, w_2, w_3, w_4) \\ Q(w_1, w_2, w_3, w_4) \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

wobei U_1 und $P_{slack^*_g}$ an den Slack-Knoten als Parameter vorgegeben werden. Die Vektoren $I \geq 0$ und $Q \geq 0$ hängen von den Variablen $w_1 \in \mathbb{R}^{k.\dim\times 1}$, $w_2 \in \mathbb{R}^{k.\dim\times 1}$, $w_3 \in \mathbb{R}^{k.\dim\times 1}$ und $w_4 \in \mathbb{R}^{k.\dim\times 1}$ ab. Diese Abhängigkeit wird im Folgenden erklärt.

Alle Haushalte haben einen bestimmten Strom- und Wärmebedarf, der durch die verschiedenen Technologien gedeckt werden kann. Es wird ein jährlicher Strombedarf von 5000 kWh bei 5000 Benutzungsstunden und ein jährlicher Wärmebedarf von 27000 kWh bei 2000 Benutzungsstunden pro Haushalt unterstellt. Die Leistung für Strom Req_{e_i}, die pro Knotenpunkt für Strom anfällt, ist daher

$$Req_{e_i} = \frac{5000\,kWh}{5000\,h} \cdot k.houses_i = (1000\,W) \cdot k.houses_i, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

Die Leistung pro Knotenpunkt für Wärme Req_{h_i} ist

$$Req_{h_i} = \frac{27000\,kWh}{2000\,h} \cdot k.houses_i = (13500\,W) \cdot k.houses_i, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

Liegt nur Stromversorgung vor (Fall 1), so muss für die Stromstärke folgender Zusammenhang gelten, damit der Strombedarf an Knotenpunkt i gedeckt werden kann.

$$\sqrt{3} \cdot U_{slack} \cdot I_i = Req_{e_i} \cdot w_{1_i}, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

Hierbei wird U_{slack} anstelle von U_i in der Gleichung verwendet. Damit wird zur Vereinfachung ein linearer Zusammenhang angenommen.

Bei der Wärmepumpe (Fall 2) liegt folgender Zusammenhang für den Strombedarf

$$\sqrt{3} \cdot U_{slack} \cdot I_i = Req_{e_i} \cdot w_{2_i}, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

sowie folgender Zusammenhang für den Wärmebedarf vor

$$\sqrt{3} \cdot U_{slack} \cdot I_i \cdot \xi_{e2h} = Req_{h_i} \cdot w_{2_i}, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

wobei ξ_{e2h} der Wirkungsgrad ist, zu dem Strom in Wärme umgewandelt werden kann.

Im Fall eines Brennwertkessels (Fall 3) liegt folgender Zusammenhang für den Strombedarf

$$\sqrt{3} \cdot U_{slack} \cdot I_i = Req_{e_i} \cdot w_{3_i}, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

sowie folgender Zusammenhang für den Wärmebedarf vor

$$\xi_{g2h} \cdot Q_i \cdot 11000 = Req_{h_i} \cdot w_{3_i}, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

wobei ξ_{g2h} der Wirkungsgrad ist, zu dem Gas in Wärme umgewandelt werden kann.

Bei der BHKW Anlage (Fall 4) liegt folgender Zusammenhang für den Strombedarf

$$\xi_{g2e} \cdot Q_i \cdot 11000 = Req_{h_i} \cdot w_{4_i}, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

sowie folgender Zusammenhang für den Wärmebedarf vor

$$\xi_{g2h} \cdot Q_i \cdot 11000 = Req_{h_i} \cdot w_{4_i}, \quad i = 1, ..., k.\dim$$

wobei ξ_{g2e} der Wirkungsgrad ist, zu dem Gas in Strom umgewandelt werden kann.
Hierbei entsprechen die Formeln auf der linken Seite der Gleichung, welche nach Rücksprache mit der Firma Wehr GmbH verwendet werden, dem Zusammenhang von Spannung und Stromstärke bzw. Druck und Gasstrom zur erzeugten Leistung. Die Leistung wird für jede Technologie mit dem Anteil der Technologie j an Knoten i multipliziert, $j = 1, ..., 4$.

Es können nun Stromstärke I_i, sowie Gasstrom Q_i an Knotenpunkt i bestimmt werden, wobei

$$I_i = (w_{1_i} + w_{2_i} + w_{3_i}) \cdot \frac{Req_{e_i}}{\sqrt{3} \cdot U_{slack}} + w_{4_i} \cdot \frac{Req_{h_i}}{\sqrt{3} \cdot U_{slack} \cdot \xi_{e2h}}$$

$$Q_i = w_{4_i} \cdot \frac{Req_{e_i}}{\xi_{g2e} \cdot 11000} + \cdot (w_{3_i} + w_{4_i}) \frac{Req_{h_i}}{\xi_{g2h} \cdot 11000}$$

Allerdings werden nur diejenigen I_i bzw Q_i verwendet, an denen auch Stromstränge bzw. Gasstränge anknüpfen. Die anderen Zeilen in I und Q werden entfernt. Zusätzliche Nebenbedingungen, die im Folgenden noch vorgestellt werden, stellen sicher, dass an den gelöschten Einträgen keine Technologie gebaut wird. Der Zusammenhang der Einheiten von Strom, Spannung bzw. Gasstrom und Druck zur Leistung kann Tabelle 20 entnommen werden.

Die Vektoren I und Q sollen sich ebenfalls innerhalb definierter Grenzen bewegen. Da diese linear in w_j, $j = 1, ..., 4$, sind, wird diese Bedingung mit

$$A_{ineq} \cdot x - b_{ineq} \leq 0 \tag{22}$$

gefordert, wobei

$$A_{ineq} = \begin{pmatrix} 0, & diag\left(\frac{Req_e}{\sqrt{3} \cdot U_{slack}}\right), & diag\left(\frac{Req_e}{\sqrt{3} \cdot U_{slack}} + \frac{Req_h}{\sqrt{3} \cdot U_{slack} \cdot \xi_{e2h}}\right), & diag\left(\frac{Req_e}{\sqrt{3} \cdot U_{slack}}\right), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & diag\left(\frac{Req_h}{\xi_{g2h} \cdot 11000}\right), & diag\left(\frac{Req_h}{\xi_{g2h} \cdot 11000} + \frac{Req_e}{\xi_{g2e} \cdot 11000}\right) \end{pmatrix}$$

mit $A_{ineq} \in \mathbb{R}^{2 \cdot k.\dim \times (l.dim_e + l.dim_g + k.dim_e + k.dim_g + 4 + 4 \cdot k.dim)}$ und

$$b_{ineq} = \begin{pmatrix} I_{max} \cdot \mathbf{1}_{k.dim \times 1} \\ Q_{max} \cdot \mathbf{1}_{k.dim \times 1} \end{pmatrix}$$

Die unteren Grenzen für I und Q werden mit den Werten Null angenommen. Da dies in jedem Fall durch die Berechnung gegeben ist, muss die Bedingung nicht explizit modelliert werden. Weiter muss die Summe der Anteile $wgts$ aller Technologien zu Eins summieren, also

$$\left(\sum_{i=1}^{4} wgts_i\right) - 1 = 0$$

Außerdem muss sichergestellt werden, dass die Anteile $wgts_i$ einer jeden Technologie i auch eingehalten werden, weshalb folgende Bedingung gelten muss

$$\left(\sum_{j=1}^{k.\dim} w_{i_j} \cdot k.frac_houses_j\right) - wgts_i = 0 \text{ für } i = 1, ..., 4$$

Hierbei wird der Anteil der Haushalte ($k.frac_houses_j$) an Knoten j mit dem Anteil der Technologie i an Knoten j multipliziert und über alle Knoten summiert.
Weiter muss sich der Anteil der verschiedenen Technologien an jedem Knotenpunkt j zu Eins summieren:

$$\left(\sum_{i=1}^{4} w_{i_j}\right) - 1 = 0, \quad j = 1, ..., k.\dim$$

Sollte ein Knoten i nicht mit einer Stromleitung versorgt werden, so muss w_{4_j}= 1 gelten. Falls Knoten i nicht mit Gas versorgt wird, so gilt $w_{3_j} + w_{4_j} = 0$, da für diese beiden Technologien Gas benötigt wird. Da alle diese Gleichheitsbedingungen linear sind, werden sie mit

$$A_{eq} \cdot x - b_{eq} = 0 \tag{23}$$

berücksichtigt, wobei

$$A_{eq} = \left(\begin{array}{cccccc}
0 & 1_{1\times 4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & -e_1^\top & k.frac_houses^\top & 0 & 0 & 0 \\
0 & -e_2^\top & 0 & k.frac_houses^\top & 0 & 0 \\
0 & -e_3^\top & 0 & 0 & k.frac_houses^\top & 0 \\
0 & -e_4^\top & 0 & 0 & 0 & k.frac_houses^\top \\ \hline
0 & 0 & E_{k.\dim} & E_{k.\dim} & E_{k.\dim} & E_{k.\dim} \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & diag(1-v_g) & diag(1-v_g) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & diag(1-v_e)
\end{array}\right)$$

mit $A_{eq} \in \mathbb{R}^{5+k.\dim \times k.dim_e+k.dim_g+l.dim_e+l.dim_g+4\cdots k.\dim}$, wobei e_i 4-dimensionale Einheitsvektoren sind und E die Einheitsmatrix ist. Weiter ist

$$b_{eq} = \left(\begin{array}{c}
1 \\ \hline
0_{4\times 1} \\ \hline
1_{k.\dim\times 1} \\ \hline
0_{k.\dim\times 1} \\
1_{k.\dim\times 1} - v_e
\end{array}\right)$$

Hier werden die jeweiligen Bedingungen innerhalb der Matrix mit den Unterteilungen durch horizontale Linien gekennzeichnet. $v_e \in \mathbb{R}^{k.\dim\times 1}$ und $v_g \in \mathbb{R}^{k.\dim\times 1}$ sind Parameter, die für jedes simulierte Netz vor der Optimierung berechnet werden. Ist v_{e_j}=0, so knüpft keine Stromleitung an Knoten j an, ist v_{e_j}=1, so knüpft eine Stromleitung an Knoten j an. v_g ist analog für das Gasnetz definiert.
Da sich zusätzlich alle Variablen innerhalb bestimmter Grenzen bewegen, wird für den Vektor x ein Vektor LB als Untergrenze und ein Vektor UB als Obergrenze definiert, wobei komponentenweise gelten muss

$$LB < x < UB \tag{24}$$

Bei der Optimierung wird die Ableitung G_c_{eq} von c_{eq} benötigt. Die Berechnung der Ableitungen ist im Anhang gegeben.

3.2.3 Das Zielfunktional

Das zu minimierende Zielfunktional setzt sich aus den Kosten der Netzkonstruktion abzüglich den Erlösen des Strom- und Gasverkaufs zusammen. Die Kosten für Strom- und Gasleitungen hängen von den Widerständen der jeweiligen Leitungen ab. Hierbei werden die folgende Tabellen, basierend auf Erfahrungswerten der Firma Wehr GmbH, als Information genommen.

Querschnitt	Widerstand (Ω)	Kosten (€ / m)
$q_1^e = 50$	$r_1^e = 0.641$	$K_1^e = 60$
$q_2^e = 150$	$r_2^e = 0.206$	$K_2^e = 180$
$q_3^e = 300$	$r_3^e = 0.1$	$K_3^e = 250$

Tabelle 3: Kosten und Widerstände in Abhängigkeit der Querschnitte (Strom)

Tabelle 3 liefert die Kosten und Widerstände in Abhängigkeit des Querschnittes eines Kupferkabels. Widerstände verhalten sich invers zu den Kosten und Querschnitten. q_1^e und q_3^e ist hierbei jeweils die untere und obere Grenze der Querschnitte.
Die Abhängigkeit des Widerstandes von den Querschnitten wird mit der Funktion

$$r^e(q) = \alpha \cdot q^\beta + \gamma$$

angenommen. Um die Realität abzubilden, soll die Funktion streng monoton fallend und streng konvex sein, daher muss

$$(r^e)'(q) = \alpha \cdot \beta \cdot q^{\beta-1} < 0$$

und

$$(r^e)''(q) = \alpha \cdot \beta \cdot (\beta - 1) \cdot q^{\beta-2} > 0$$

gelten. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn $\alpha > 0$ und $\beta < 0$ angenommen wird.
Die Abhängigkeit der Kosten von den Querschnitten wird mit der Funktion

$$K^e(q) = \delta \cdot \log(q)^\epsilon + \zeta$$

angenommen. Hier soll die Funktion streng monoton steigend und streng konkav sein, daher gilt

$$(K^e)'(q) = \delta \cdot \epsilon \cdot \frac{\log(q)^{\epsilon-1}}{q} > 0$$

und

$$(K^e)''(q) = \delta \cdot \epsilon \cdot \left[\frac{\log(q)^{\epsilon-2}}{q^2} \cdot (\epsilon - 1 - \log(q)) \right] < 0.$$

Für $q > 1$ ist dies erfüllt, sofern $\delta \cdot \epsilon > 0$ und $\delta \cdot \epsilon \cdot [(\epsilon - 1) - \log(q)] < 0$. Diese Bedingungen werden noch spezifiziert, indem angenommen wird, dass $\delta \cdot \epsilon > 0$ und $\epsilon \leq 1$ (abgeleitet aus $\epsilon < 1 + \log(q_1^e)$) sei. Die Abhängigkeit der Kosten vom Widerstand ergibt sich durch die bisherigen Annahmen als

$$(K^e)(r) = K^e(q^e(r)) = \delta \cdot \log\left(\left(\frac{r-\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\epsilon} + \zeta$$

In der Optimierung wird $r_{inv} = \frac{1}{r}$ als Variable verwendet, daher wird im Folgenden

$$K^e(r_{inv}) = \delta \cdot \log\left(\left(\frac{\frac{1}{r_{inv}} - \gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\epsilon} + \zeta$$

betrachtet.
Für die Ableitungen ergibt sich dann

$$(K^e)'(r_{inv}) = -\frac{\delta \cdot \epsilon}{\beta} \log\left(\left(\frac{\frac{1}{r_{inv}} - \gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\epsilon-1} \cdot \frac{1}{r_{inv} \cdot (1 - \gamma \cdot r_{inv})}$$

und

$$(K^e)''(r_{inv}) = \frac{\delta \cdot \epsilon}{[\beta \cdot r_{inv} \cdot (1 - \gamma \cdot r_{inv})]^2} \cdot \log\left(\left(\frac{\frac{1}{r_{inv}} - \gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\epsilon-2} \cdot \left[\epsilon - 1 + \log\left(\frac{\frac{1}{r_{inv}} - \gamma}{\alpha}\right) \cdot (1 - 2 \cdot \gamma \cdot r_{inv})\right]$$

Es soll hier $(K^e)'(r_{inv}) > 0$ und $(K^e)''(r_{inv}) < 0$ gelten. Mit den bisherigen Annahmen an α, β, δ und ϵ muss

$$\left(\frac{\frac{1}{r_{inv}} - \gamma}{\alpha}\right) = \left(\frac{r-\gamma}{\alpha}\right) > 0 \Rightarrow r > \gamma$$

gelten, um Berechenbarkeit zu ermöglichen. Damit ist $1 - \gamma \cdot r_{inv} = 1 - \frac{\gamma}{r} > 0$. Um die Bedingungen an die 1. Ableitung zu erfüllen, muss nun

$$\left(\frac{\frac{1}{r_{inv}} - \gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{r-\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} > 1 \Rightarrow r < \alpha + \gamma$$

Mit diesen Restriktionen muss nun für $(K^e)''$ gelten

$$\epsilon - 1 + \log\left(\frac{r-\gamma}{\alpha}\right) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \gamma}{r}\right) < 0$$

Hinreichend hierfür ist die Bedingung

$$1 - \frac{2 \cdot \gamma}{r} > 0 \Rightarrow \gamma < \frac{r}{2}$$

Zusammenfassend ergeben sich folgende hinreichende Parameterrestriktionen:

$$\alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma < \frac{r_3}{2}, \quad \alpha + \gamma > r_1, \qquad \delta \cdot \epsilon > 0, \quad \epsilon \leq 1$$

Die Kosten für Gasleitungen werden mit Hilfe der folgenden Tabelle, ebenfalls basierend auf Erfahrungswerten der Firma Wehr GmbH, ermittelt.

Querschnitt	Widerstand $(mbar/(m^3/h)^2)$	Kosten (€ / m)
$q_1^g = 100$	$r_1^g = 0.00107$	$K_1^g = 200$
$q_2^g = 200$	$r_2^g = 0.00002693$	$K_2^g = 300$

Tabelle 4: Kosten und Widerstände in Abhängigkeit der Querschnitte (Gas)

Hier stehen weniger Daten zur Verfügung, weshalb folgende Abhängigkeiten betrachtet werden.

$$r^g(q) = a \cdot q^b$$

$$K^g(q) = c \cdot \log(q) + d$$

Dieses System kann explizit gelöst werden. Mit

$$\log(a) + b \cdot \log(q_1^g) = \log(r_1^g) \quad \text{und} \quad \log(a) + b \cdot \log(q_2^g) = log(r_2^g)$$

folgt

$$b = \frac{\log\left(\frac{r_2^g}{r_1^g}\right)}{\log\left(\frac{q_2^g}{q_1^g}\right)} < 0 \quad \text{und} \quad a = \exp(\log(r_1^g) - \log\left(\left(q_1^g\right)^b\right) = \frac{r_1^g}{\left(q_1^g\right)^b} > 0$$

Des Weiteren gilt mit

$$c \cdot \log(q_1^g) + d = K_1^g \quad \text{und} \quad c \cdot \log(q_2^g) + d = K_2$$

dass

$$c = \frac{K_2^g - K_1^g}{\log(\frac{q_2^g}{q_1^g})} > 0 \quad \text{und} \quad d = K_1^g - \frac{K_2^g - K_1^g}{\log(\frac{q_2^g}{q_1^g})} \cdot \log(q_1^g)$$

Mit $v = d - \frac{c}{b}\log(a)$ und $w = \frac{c}{b} < 0$ ergibt sich außerdem

$$K^g(r_{inv}) = K\left(q\left(\frac{1}{r_{inv}}\right)\right) = c \cdot \log\left(\left(\frac{\frac{1}{r_{inv}}}{a}\right)^{\frac{1}{b}}\right) + d = d - \frac{c}{b}\log(a) - \frac{c}{b}\log\left(\frac{1}{r_{inv}}\right) = v + w \cdot \log\left(\frac{1}{r_{inv}}\right)$$

Hier gilt wegen $b < 0$ und wegen $a > 0$

$$(r^g)'(q) = a \cdot b \cdot q^{b-1} < 0, \quad \text{und} \quad (r^g)''(q) = a \cdot b \cdot (b-1) \cdot q^{b-2} > 0$$

Weiter ist wegen c >0

$$(K^g)'(q) = \frac{c}{q} > 0, \quad \text{und} \quad (K^g)''(q) = -\frac{c}{q^2} < 0$$

und es gilt

$$(K^g)'(r_{inv}) = -\frac{w}{r_{inv}} > 0, \quad \text{und} \quad (K^g)''(r_{inv}) = \frac{w}{r_{inv}^2} < 0$$

Damit sind die Bedingungen auch für Gasleitungskosten erfüllt. Die Parameter für die Gasleitungskosten können explizit berechnet werden. Für Stromleitungskosten werden die Parameter durch folgendes Optimierungsproblem bestimmt.

$$\min \sum_{i=1}^{3} \left(\alpha + (q_i^e)^\beta - \gamma - r_i^e\right)^2 + (d \cdot \log(q_i^e)^\epsilon - \zeta - K_i)^2$$

$$\text{u.d.N.} \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma < \frac{r_3^e}{2}, \quad \alpha + \gamma > r_1^e, \quad \delta \cdot \epsilon > 0, \quad \epsilon \leq 1$$

Für die Startwerte werden die Parameter für Gasleitungen benutzt mit $\gamma = 0$ und $\epsilon = 1$. Es wird angenommen, dass die Leitungskosten über einen Zeitraum von 20 Jahren abgeschrieben werden. Der Planungshorizont des Projektes wird daher auf 20 Jahre festgelegt.

Mit den Parametern, die sich damit für Strom- und Gasleitungen ergeben, können die Leitungskosten, sowie deren Ableitungen nach den inversen Widerständen berechnet werden. Die verschiedenen Abhängigkeiten sind in Abbildung 7 mit den optimierten Werten abgebildet.

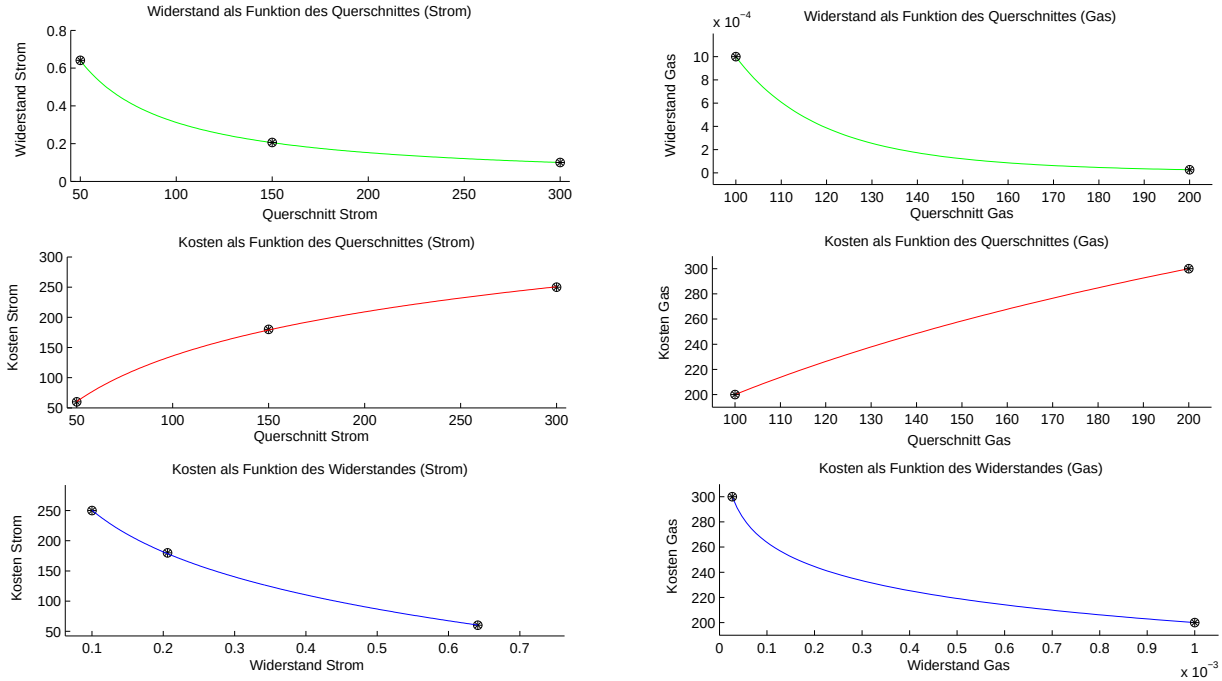

Abbildung 7: Widerstand als Funktion der Querschnitte (grün), Kosten als Funktion der Querschnitte (rot) und Kosten als Funktion der Widerstände (blau) für jeweils Strom (links) und Gas (rechts). Schwarze Kreuze markieren vorgegebene Punkte anhand von Tabelle 3 und Tabelle 4.

Die Parameter nehmen in der Optimierung folgende Werte für Kosten von Gassträngen

Parameter Gas	a	b	c	d	v	w
Wert	$2.687 \cdot 10^7$	-5.215	144.270	-464.386	8.889	-27.667

Tabelle 5: Parameter für Gas-Strangkosten als Ergebnis der Optimierung

und folgende Werte für Kosten von Stromsträngen an.

Parameter Strom	α	β	γ	δ	ϵ	ζ
Wert	37.026	-1.037	0	203.977	0.7588	-513.866

Tabelle 6: Parameter für Strom-Strangkosten als Ergebnis der Optimierung

Die Gesamtkosten für die Leitungen ergeben sich schließlich durch Summation der Kosten aller Leitungen, die vom jeweiligen Typ gebaut werden, wobei die Kosten für Gas- und Stromleitungen mit der Leitungslänge multipliziert werden. Dann ergibt sich

$$K^{Leitungen}(x) = \sum_{i=1}^{l.dim_e} K^e(r^e_{inv_i}) \cdot l.len_{l.e_index(i)} + \sum_{i=1}^{l.dim_g} K^g(r^g_{inv_i}) \cdot l.len_{l.g_index(i)} \tag{25}$$

Weitere Kosten entstehen mit der Installation der Technologien. Aus volkswirtschaftlicher Sicht werden ebenfalls die Kosten für das Heizen mit Pellets eingebaut, die der Konsument im Fall einer reinen Stromversorgung benötigt.

Die Kosten für Pellets werden mit 0.27 € $/kg$ angenommen, wobei mit einem Kilogramm Pellets $5kWh$ Wärme produziert werden kann. Demnach betragen die Kosten $pellets_c$ für Pellets 0.054 € $/kWh$=0.000054 € $/Wh$ und für die Gesamtkosten in € pro Jahr gilt

$$K_{pellets}(wgts_1) = \sum_{j=1}^{k.\dim} wgts_1 \cdot Req_{h_j} \cdot 2000\,h \cdot pellet_c$$

wobei 2000 Benutzungsstunden zum Heizen angesetzt werden.

Die Kosten für Installation einer Kraft-Wärmepumpe werden mit 1500 € $/kW$ = 1.5 € $/W$ (kwp_{K_g}) für die Wärmeversorgung und 4500 € $/kW$ = 4.5 € $/W$ (kwp_{K_e}) für die Stromversorgung angenommen. Damit gilt für die Gesamtkosten

$$K_{kwp}(wgts_2) = \sum_{j=1}^{k.\dim} wgts_2 \cdot \left(Req_{e_j} \cdot kwp_{K_e} + Req_{g_j} \cdot kwp_{K_h}\right)$$

Die Kosten bwk_{K_e} und bwk_{K_g} für die Installation eines Brennwertkessels werden mit 500 € $/kW$ = 0.5 € $/W$ sowohl für die Gasversorgung, als auch für die Stromversorgung angenommen. Damit gilt für die Gesamtkosten

$$K_{bwk}(wgts_3) = \sum_{j=1}^{k.\dim} wgts_3 \cdot \left(Req_{e_j} \cdot bwk_{K_e} + Req_{g_j} \cdot bwk_{K_h}\right)$$

Die Kosten bwk_{K_e} und bwk_{K_g} für die Installation einer BHKW-Anlage werden mit 2000 € $/kW$ = 2 € $/W$ sowohl für die Gasversorgung, als auch für die Stromversorgung angenommen. Damit gilt für die Gesamtkosten

$$K_{bhkw}(wgts_4) = \sum_{j=1}^{k.\dim} wgts_3 \cdot \left(Req_{e_j} \cdot bhkw_{K_e} + Req_{g_j} \cdot bhkw_{K_h}\right)$$

Es gilt hier zu berücksichtigen, dass die Kosten für die drei Anlagen alle zum heutigen Zeitpunkt anfallen, wobei angenommen wird, dass diese über 20 Jahre abgeschrieben werden. Die Kosten für das Heizen mit Pellets fallen hingegen über die 20 Jahre verteilt kontinuierlich an, wobei hier jährliche Kosten unterstellt werden.

Um die heutigen Gesamtkosten zu ermitteln, müssen Zinsentwicklungen berücksichtigt werden. Die Kosten eines Projektes, die heute anfallen, könnten alternativ investiert werden, wobei eine Rendite erwirtschaftet worden wäre. Diese Rendite würde alternativen Projekten des Unternehmens entsprechen, es könnte am Markt investiert werden oder risikofrei in Staatsanleihen. Zur Vereinfachung wird hier ein über die Jahre konstanter Zinssatz y angenommen. Wenn auch die jährlichen Beträge B konstant sind, gilt für den Barwert BW eines Projektes mit 20-jähriger Laufzeit:

$$BW = \sum_{i=0}^{20} \frac{B}{(1+y)^i} = B \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+y)^{21}}}{1 - \frac{1}{(1+y)}} = B \cdot f_{zins}$$

wobei $f_{zins} = \frac{1-\frac{1}{(1+y)^{21}}}{1-\frac{1}{(1+y)}}$ der Faktor ist, mit dem der jährliche Betrag multipliziert werden muss, um den Barwert für 20 jährliche Zahlungen B zu erhalten. Weitere Überlegungen, wie z.B. Zinsen auf Darlehen, die zur Finanzierung benötigt werden könnten, oder steuerliche Einsparungen aufgrund von Abschreibung, werden hier zur Vereinfachung nicht berücksichtigt.

Unter der Annahme konstanter Preise für Pellets gilt für die Gesamtkosten $K^{20}_{pellets}$ für das Heizen mit Pellets

$$K^{20}_{pellets}(wgts_1) = K_{pellets}(wgts_1) \cdot f_{zins}$$

Insgesamt gilt also für die Kosten des Netzwerks

$$K^{gesamt}(x) = K^{Leitungen}(x) + K^{20}_{pellets}(wgts_1) + K_{kwp}(wgts_2) + K_{bwk}(wgts_3) + K_{bhkw}(wgts_4)$$

Die jährlichen Erträge entstehen aus dem Strom- und Gasverkauf. Hier gilt

$$\begin{aligned} E(w_1, w_2, w_3, w_4) = & \sum_{j=1}^{k.\dim} m_e \cdot \left(hours_e \cdot Req_{e_j} \cdot \left(w_{1_j} + w_{2_j} + w_{3_j}\right) + hours_h \cdot Req_{h_j} \cdot w_{2_j}\right) \\ & + \sum_{j=1}^{k.\dim} m_g \cdot \left(hours_e \cdot w_{4_j} \cdot Req_{e_j} + \left(w_{3_j} + w_{4_j}\right) \cdot hours_h \cdot Req_{h_j}\right) \end{aligned}$$

wobei $hours_e$ die Benutzungsstunden für die Stromversorgung sind. m_e und m_g sind die Margen, aus dem Erlös einer kWh Strom bzw. Gas. Sie können bsp. der Börse entnommen werden. In diesem Fall werden die Margen als konstant angenommen. Damit sind die jährlichen Erträge gleichbleibend. Um den Planungshorizont von 20 Jahren zu berücksichtigen, gilt hier erneut

$$E^{gesamt}(x) = E(w_1, w_2, w_3, w_4) \cdot f_{zins}$$

Damit gilt für den inversen (bzw. negativen) Gesamtgewinn J, als das zu minimierende Zielfunktional:

$$J(x) = K^{gesamt}(x) - E^{gesamt}(x) \tag{26}$$

In der Optimierung wird zudem der Gradient GJ sowie die Hessematrix HJ benötigt. Die Berechnungen hierzu sind im Anhang gegeben.

Abbildung 8 zeigt, dass die Annahme eines realistischen Zinsverlaufes bei der Umsetzung des Modells entscheidend sein kann. Hierbei wird der Faktor f_{zins} bei einer Laufzeit von 20 Jahren für verschiedene Zinssätze berechnet.

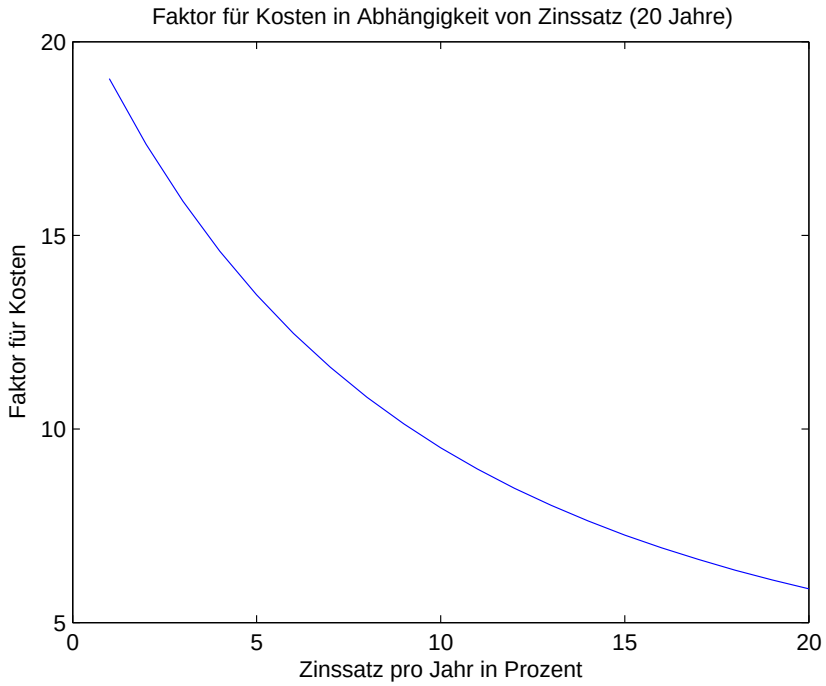

Abbildung 8: Faktor f_{zins} für verschiedene Zinssätze

Margen, die der Börse entnommen werden, sowie Zinssätze könnten beispielsweise mit stochastischen Modellen ermittelt werden um möglichst realitätsnahe Werte zu erhalten. Da hier je nach Modell die Erwartungswerte und Kovarianztherme eventuell simuliert werden müssten, würde diese Methode jedoch weit mehr Rechenzeit in Anspruch nehmen. Zur Kalibrierung der Modelle würden zudem zuverlässige Daten von Finanzinstrumenten benötigt werden, welche unter Umständen schwer zu bekommen und entsprechend teuer sind.

3.3 Vorgaben und vollständige Optimierung

In diesem Kapitel wird erklärt, wie die vollständige Optimierung (Netzwerkerzeugung und Optimierung auf dem Netz) aufgebaut ist. Zu Beginn werden notwendige Parameter zur Netzwerkerzeugung definiert und eingelesen, welche in der Datei `load_parameters.m` enthalten sind. Diese Parameter sind in Tabelle 7 gegeben.

Variable	Definition	Wert
wgt_basis.sd	Gewicht zu Slackdifferenz, Basis-Netzwerk	1
wgt_basis.nb	Gewicht zu Nachbarknoten, Basis-Netzwerk	1
wgt_basis.rg	Gewicht zu Regionsnummer, Basis-Netzwerk	1
wgt_basis.len	Gewicht zu Stranglänge, Basis-Netzwerk	1
wgt_basis.syn	Gewicht zu Synergieeffekt, Basis-Netzwerk	1
wgt_adv.sd	Gewicht zu Slackdifferenz, Aufbau-Netzwerk	1
wgt_adv.nb	Gewicht zu Nachbarknoten, Aufbau-Netzwerk	1
wgt_adv.rg	Gewicht zu Regionsnummer, Aufbau-Netzwerk	1
wgt_adv.len	Gewicht zu Stranglänge, Aufbau-Netzwerk	1
wgt_adv.syn	Gewicht zu Synergieeffekt, Aufbau-Netzwerk	1
wgt_basis.e	Gewicht für Hinzunahme eines Stromstrangs, Basis-Netzwerk	0.5
wgt_basis.prob_net_inc	Wkt. für Erzeugende Methode, Basis-Netzwerk	0.5
wgt_adv.prob_net_iter	Wkt. für Iterative Methode, Aufbau-Netzwerk	0.5
wgt_adv.prob_standard	Wkt. für Standard Methode, Anzahl Stränge	0.5
wgt_adv.use_adv	Wkt., dass nicht nur Basis Netz verwendet wird	0.85
improve_opt.n_variation	Anzahl der Variationen in Algorithmus 12	3
improve_opt.n_modify	Anzahl der Modifikationen in Algorithmus 12	6

Tabelle 7: Parameter, die für die Erzeugung des Netzwerks verwendet werden

Die Datei `load_network.m` enthält außerdem alle notwendigen Informationen über das Netzwerk, welches eingelesen werden soll. Hier werden Koordinaten der Knotenpunkte und die VMs für Strom und Gas, der Gas-Slack-Knoten sowie die Regionsnummern vorgegeben. Jedem Knotenpunkt wird zudem eine vorgegebene Anzahl an Haushalten zugeordnet. Für die zu optimierenden Variablen gelten obere und untere Grenzen, die mit Tabelle 8 gegeben sind. Weitere Grenzen existieren für die Stromstärke und den Gasstrom und sind in Tabelle 9 beschrieben. Tabelle 10 gibt den Zinssatz und die Margen, sowie die Wirkungsgrade an, welche von der Firma Wehr GmbH als Richtwerte empfohlen wurden. Diese Daten werden in eine Datei `Datafile.m` eingelesen und verarbeitet, welche weitere Informationen über Grenzen der Variablen enthält und in welcher der Bedarf der Haushalte ermittelt wird. Außerdem werden in dieser Datei die Leitungskosten mit (25) unter Voraussetzung der Parameter aus Tabelle 5 und Tabelle 6, sowie deren Ableitungen ermittelt und als Funktion gespeichert.
Mit diesen Vorgaben werden die Objekte $Strangstruktur$ und *Knotenstruktur* konstruiert. Es werden insgesamt M Netzwerke erzeugt, auf welchen danach optimiert werden kann.

Variable	Definition	Wert
r^e_{min}	min. elektrischer Widerstand	0.01
r^e_{max}	max. elektrischer Widerstand	0.641
U_{min}	min. Spannung	380
U_{max}	max. Spannung	400
U_{slack}	Volt am Slack	400
r^g_{min}	min. Gas-Widerstand	0.00002693
r^g_{max}	max. Gas-Widerstand	0.001
P_{min}	min. Druck	0.1
P_{max}	max. Druck	0.5
P_{slack}	Druck am Slack	0.5
$wgts_1^{max}$	Maximaler Gesamtanteil Technologie 1	0.5
$wgts_2^{max}$	Maximaler Gesamtanteil Technologie 2	0.5
$wgts_3^{max}$	Maximaler Gesamtanteil Technologie 3	0.5
$wgts_4^{max}$	Maximaler Gesamtanteil Technologie 4	0.5
$wgts_1^{min}$	Minimaler Gesamtanteil Technologie 1	0.1
$wgts_2^{min}$	Minimaler Gesamtanteil Technologie 2	0.1
$wgts_3^{min}$	Minimaler Gesamtanteil Technologie 3	0.1
$wgts_4^{min}$	Minimaler Gesamtanteil Technologie 4	0.1

Tabelle 8: Obere und untere Grenzen der Variablen

Variable	Definition	Wert
I_{min}	min. Stromstärke	0
I_{max}	max. Stromstärke	300
Q_{min}	min. Gasstrom	0
Q_{max}	max. Gasstrom	300

Tabelle 9: Grenzen für Stromstärke und Gasstrom

Variable	Definition	Wert
$interest$	Zinssatz	0.05
m_e	Marge Strom	0.06
m_g	Marge Gas	0.03
ξ_{g2e}	Wirkungsgrad Gas zu Strom	0.9
ξ_{g2h}	Wirkungsgrad Gas zu Wärme	0.9
ξ_{e2h}	Wirkungsgrad Strom zu Wärme	3

Tabelle 10: Wirkungsgrade, Margen und Zinssatz

In jeder Iteration $m = 1, ..., M$ wird dafür separat ermittelt, welche Methoden verwendet werden sollen. So wird für $m = 1$ das vollständig ausgebaute Netz als Basis-Netzwerk verwendet. Für $m = 2$ wird nur das voll ausgebaute Stromnetz als Basis-Netzwerk und für $m = 3$ nur das voll ausgebaute Gasnetz als Basis-Netzwerk verwendet. Die Methode zum Erstellen des Aufbau-Netzwerks *wgt_adv.method* wird in diesen Fällen auf 0 gesetzt. Für alle anderen m wird die Methode zum Erzeugen des Basis-Netzwerks anhand folgender Vorschrift gewählt

$$\texttt{basis_net} = 3 + \mathbf{1}_{\{U^1 < wgt_basis.prob_net_inc\}} \tag{27}$$

wobei U^1 eine gleichverteilte PZZ ist. Hierbei steuert *wgt_basis.prob_net_inc* die Wahrscheinlichkeit, zu der das Basis-Netzwerk pro Iteration mit der erzeugenden oder der reduzierenden Methode erstellt wird. Die Varianten zum Erstellen des Aufbau-Netzwerks werden ebenfalls in jeder Iteration neu bestimmt. Hierbei gilt für den Parameter *wgt_adv.wgt_exp* zur Konstruktion der Netzgrößen:

$$wgt_adv.wgt_exp = U^1 \cdot 0.5 + 0.5 \tag{28}$$

Die Methode *adv_net.netsize* zur Ermittlung der Netzgröße wird anhand der Vorschrift

$$adv_net.netsize = \mathbf{1}_{\{U^1 < wgt_adv.use_adv\}} \cdot (\mathbf{1}_{\{U^1 > wgt_adv.prob_method_standard\}} + 1) \tag{29}$$

gewählt. So wird die Netzgröße nur definiert, falls das Aufbau-Netzwerk überhaupt verwendet werden soll. *wgt_adv.prob_method_standard* gibt hingegen an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Standardmethode, unter Verwendung des Parameters (28), anstelle der proportionalen Methode verwendet wird.
Die Methode `adv_net` zur Erstellung des Aufbau-Netzwerks wird anhand von

$$\texttt{adv_net} = \mathbf{1}_{\{U^1 > wgt_adv.prov_net_iter\}} \tag{30}$$

ermittelt, wobei *wgt_adv.prov_net_iter* angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die iterative Methode anstelle der gebündelte Methode verwendet wird. Hier ist mit U^1 erneut eine gleichverteilte PZZ, wobei jedes U^1 neu erzeugt wird.

Nun wird die Optimierung (31) für jedes erzeugte und paarweise verschiedene Netzwerk durchgeführt, wobei die Zielfunktionalswerte zu jedem Netzwerk gespeichert werden. Sollte keine Lösbarkeit auftreten, so wird das entsprechende Netzwerk aussortiert.

$$\min_x J(x) \quad \text{u.d.N.} \quad A_{eq} \cdot x = b_{eq}, \quad A_{ineq} \cdot x \leq b_{ineq}, \quad LB \leq x \leq UB, \quad c_{eq}(x) = 0 \tag{31}$$

Die Matrizen und Vektoren A_{eq}, b_{eq}, A_{ineq}, b_{ineq}, LB und UB werden für jedes Netzwerk zur Optimierung neu erzeugt, wobei pro Netzwerk unterschiedliche Stränge und Knoten verwendet werden. Nun werden die Netzwerke anhand der Anzahl der verwendeten Stom- und Gasstränge zusammengefasst, wobei jeder Kombination aus Strom- und Gassträngen ein Wert zugewiesen wird, der sich aus dem Mittelwert der Zielfunktionalwerte und dem minimalen Zielfunktionalwert für die jeweilige Kombination, wie in (32), zusammensetzt.

$$f_{comb_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{comb_i}} \frac{f_{value_i}^{comb_i}}{n_{comb_i}} + \min_j f_{value_i}^{comb_i}}{2} \tag{32}$$

$f_{value_i}^{comb_i}$ ist hierbei der Wert des Zielfunktionals aus der Optimierung (31) für Kombinationen $comb_i$ der Strom- und Gasvektoren. Diese Kombinationen treten n_{comb_i}-fach auf. Hierbei soll erreicht werden, dass diejenigen Netzwerke gesucht werden, für welche das Zielfunktional gering ist, wobei unterstellt wird, dass die Struktur des Netzwerks, hier die Anzahl der verschiedenen verwendeten Stränge im Strom- und Gasnetz, einen Einfluss auf das Optimum hat.

Auf diesen Netzwerken soll dann gezielt nach dem Optimum gesucht werden. Anhand dieser $f_{value_i}^{comb_i}$ werden nun die besten $(10\% \cdot M)$ Kombinationen herausgesucht. Für jede dieser besten Kombinationen wird die Anzahl der Stränge n_e und n_g ausgelesen. Unter der Verwendung der Zielgrößen n_e und n_g wird für jede Kombination zehn mal ein Aufbau-Netzwerk erzeugt. Auf diesen erzeugten Netzwerken wird analog zur bisherigen Vorgehensweise optimiert, wobei das beste gültige Netzwerk aus allen Optimierungen weiter verwendet wird.

Um die Optimierung weiter zu verfeinern, wird dieses beste Netzwerk anhand von Algorithmus 12 durch iteratives Hinzufügen und Entfernen von Strängen ermittelt. Dabei wird nur hinzugefügt oder entfernt, falls eine Verbesserung erzielt wird, wobei alle Möglichkeiten zur Hinzunahme und zum Entfernen eines Stranges betrachtet werden. Hierbei wird *improve_opt_variation*-fach hinzugefügt, bis keine Verbesserung mehr möglich ist, und dann entfernt, bis keine Verbesserung mehr möglich ist (sowohl für Stromnetz, als auch für Gasnetz).
Danach wird $improve_opt_modify$-fach ein Strang getauscht (unter Beibehalten der Gültigkeit des Netzwerks), wobei das Netzwerk in jedem Schritt mit einem besseren Netzwerk ersetzt wird, falls sich dieses ergibt. Die Funktionen `improve_add.m` und `improve_reduce.m` prüfen hierbei, welche Stränge hinzugefügt bzw. entfernt werden können, so dass das Netzwerk weiterhin gültig ist und ob sich der Funktionswert verbessert. Eingegeben werden hierbei die Netzvektoren, Optimierungsvariablen und Zielfunktionswerte, sowie das zu verwendende Netz (Für $use_e = 0$ wird das Gasnetz und für $use_e = 1$ das Stromnetz verwendet).

In Algorithmus 13 wird die vollständige Optimierung im Detail vorgestellt.

Algorithmus 12. Verbesserung der Optimierung

Initialisierung:
Gegeben sei $j = 1 \leq improve_opt.n_variation, \leq improve_opt.n_modify$, Netzvektoren, Optimierungsvariablen und Zielfunktionalswert der bisherigen Optimierung.

while: $j \leq improve_opt.n_variation$

1. $flag_add = 0$
2. If: Beiden Netze voll ausgebaut, $flag_add = 1$
3. **while**: $flag_add = 0$
   (a) If: Genau eines der beiden Netze voll ausgebaut
      i. Setze use_e=1
      ii. If: Stromnetz voll ausgebaut, setze use_e=0
      iii. Führe Funktion `improve_add.m` mit use_e aus und erhalte Funktionswert f^{min}, Variablen x^{min} und Netzvektoren l_e^{min} und l_g^{min}
      iv. If: Verbesserung erzielt, speichere erhaltene Netzvektoren und Variablen als neues Optimum

   Else:
      i. Führe Funktion `improve_add.m` mit use_e aus und erhalte Funktionswert f^{min}, Variablen x^{min} und Netzvektoren l_e^{min} und l_g^{min}
      ii. If: Keine Verbesserung erzielt, setze $use_e = 1 - use_e$
         - Führe Funktion `improve_add.m` mit use_e aus und erhalte Funktionswert f^{min}, Variablen x^{min} und Netzvektoren l_e^{min} und l_g^{min}
         - If: Verbesserung erzielt, speichere erhaltene Netzvektoren und Variablen als neues Optimum

      Else: Speichere erhaltene Netzvektoren und Variablen als neues Optimum
4. Setze $flag_reduce$=0
5. `while:` $flag_reduce$=0
   (a) $use_e = 1$ bzw. 0 zu je 50%, erzeugt mit PZZ
   (b) If: Stromnetz nicht benutzt, setzte $use_e = 0$
   (c) If: Gasnetz nicht benutzt, setzte $use_e = 1$
   (d) Führe Funktion `improve_reduce.m` mit use_e aus und erhalte Funktionswert f^{min}, Variablen x^{min} und Netzvektoren l_e^{min} und l_g^{min} sowie $flag_red^{\star}$ ($flag_red^{\star}$=0 gibt an, ob ein Reduzieren des Netzes möglich ist.

(e) If: Verbesserung erzielt und $flag_red^{\star}$=0, speichere erhaltene Netzvektoren und Variablen als neues Optimum
Else: Setze $flag_reduce$=1

6. j=j+1

End while

Setze j=0

while: j ≤ $improve_opt.n_modify$

1. If: Stromnetz voll ausgebaut, setze use_e=0
   Elseif: Gasnetz voll ausgebaut, setze use_e=1
   Else: Setze use_e = 1 bzw. 0 zu je 50%, erzeugt mit PZZ

2. Führe Funktion `improve_add.m` und danach `improve_reduce.m` mit use_e aus und erhalte Funktionswert f^{min}, Variablen x^{min} und Netzvektoren l_e^{min} und l_g^{min}.

3. If: Verbesserung erzielt, speichere erhaltene Netzvektoren und Variablen als neues Optimum

4. Setze j=j+1

End while

Output: Optimale Netzvektoren und optimaler Variablenvektor sowie Zielfunktionalwert

---

Das vollständige Verfahren zur Optimierung wird mit Algorithmus 13 erklärt

Algorithmus 13. Vollständige Optimierung

Initialisierung[20]**:** Gegeben seien die definierten Parameter, VMs für Gas und Strom, Koordinaten, Anzahl der Haushalte, Regionsnummern und Gas-Slack-Knoten, Anzahl der Simulationen M, Setze m = 1.

1. Lade Parameter zur Netzwerkerzeugung aus Datei `load_network.m`.

2. Bestimme Parameter der Kostenfunktion und speichere Kostenfunktion und Ableitungen für Leitungen

3. Lade alle weiteren Parameter in Tabelle 7 aus Datei `load_parameters.m`

4. Bestimme Netzmatrizen A^{N^e} und A^{N^g} mit NVMs wie in Algorithmus 11

5. Erstelle Knotenstruktur k und Strangstruktur l

6. Bestimme Slackdifferenzwerte für Strom- und Gasnetz

7. `while: m≤ M`

- Erzeuge Parameter zur Netzwerkerzeugung anhand von (27), (28), (29) und (30) mit der in diesem Zusammenhang beschriebenen Vorgehensweise.
- Erzeuge Strom- und Gasvektoren analog zu Kapitel 3 unter Verwendung der unterschiedlichen Algorithmen für entsprechende erzeugte Parameter.
- Speichere die Netzvektoren für aktuelles m

8. Entferne paarweise (Gas und Strom) Duplikate für alle erzeugten Netzvektoren, so dass $M^\star$ verschiedene Netzwerke entstehen.

9. Setze $m = 1$

10. `while:` $m \leq M^\star$

    - Bestimme für Netzvektoren m untere Grenzen LB und UB, Benutzte Stränge und Knoten.
    - Erzeuge Startwert x_0 als gleichverteilte PZZ auf UB und LB
    - Modifiziere Netzmatrizen A^{N^e} und A^{N^g} für die aktuellen Netze
      (löschen überflüssiger Zeilen)
    - Bestimme A_{eq} und b_{eq} für das aktuelle Netzwerk wie zuvor beschrieben
    - Bestimme A_{ineq} und b_{eq} für das aktuelle Netzwerk wie zuvor beschrieben
    - Löse Optimierungsproblem (31) und bekomme Parametervektor x und Wert des Zielfunktionals f_m^{min}
    - `If:` Keine Lösung gefunden, setze $f_{opt} = \infty$
    - `If:` m=1, setze $f_{opt} = f_1^{min}$ und $x_{opt} = x$
      `Else: If:` $f_m^{min} < f_{opt}$, setze $f_{opt} = f_m^{min}$

11. Sortiere $f_m^{min}, \quad m = 1, ..., M^\star$ mit zugehörigen Netzvektoren l_{e_m} und l_{g_m} aufsteigend.

12. Entferne Netzwerke m mit $f_m^{min} = \infty$, wobei nun $\hat{M} \leq M^\star$ Netzwerke betrachtet werden.

13. `If:` $\hat{M}$=0, **Abbruch, keine Lösung gefunden**

14. Erzeuge Gitter mit Anzahl der verwendeten Strom- und Gassträngen als Koordinaten unter der Verwendung von Kriterium (32)

15. Sortiere Gitterwerte und zugehörige Koordinaten aufsteigend nach Funktionswert

16. Verwende die $\tilde{M} = \hat{M} \cdot 0.1$ besten Gitterwerte

17. Setze m=1

18. `while: m` $\leq \tilde{M}$

    - Setze Gitterwerte an der Stelle m als n_e und n_g
      (Anzahl der Stränge, die verwendet werden sollen)
    - Setze $j = 1$

- `while:` $j < 10$
  (a) Setze Parameter zur Netzwerkerzeugung
  (b) Erzeuge Netzvektoren $l_{e_{m_j}}$ und $l_{g_{m_j}}$ wie zuvor beschrieben, wobei nun n_e und n_g verwendet werden.
  (c) Setze $j = j + 1$

19. Gehe vor wie in Punkt 10. des Algorithmus:
    (a) Lösche Duplikate $\Rightarrow M'$ unterschiedliche Netzwerke
    (b) Optimiere auf jedem dieser Netzwerke und erhalte erneut optimale Netzvektoren sowie optimale Variablen.
20. Finde das beste Netzwerk mit Netzvektoren $l_e^\star$ und $l_g^\star$ mit dem geringsten Zielfunktionswert $f^\star$ und zugehörigem Parametervektor $x^\star$ aus Punkt 10. und Punkt 19. des Algorithmus.
21. Variiere $l_e^\star$ und $l_g^\star$ mit Algorithmus 12 und finde beste Netzvektoren $l_e^{opt^\star}$ und $l_g^{opt^\star}$ mit Zielfunktionalswert $f^{opt^\star}$ und Parametervektor $x^{opt^\star}$.

Output: Optimale Parameter $x^{opt^\star}$ mit Netzvektoren $l_e^{opt^\star}$ und $l_g^{opt^\star}$ sowie Zielfunktionswert $f^{opt^\star}$.

3.4 Ausblick und weiteres Vorgehen

In diesem Modell wird an zwei verschiedenen Stellen Nicht-Linearität angenommen. Zum einen wird die Spannung, die zur erzeugten Leistung L_i an Knoten i beiträgt, nicht am Knoten U_i angenommen, sondern am Slack-Knoten U_1. Würde dies berücksichtigt, also

$$L_i^{linear} = \sqrt{3} \cdot I_i \cdot U_1 \neq \sqrt{3} \cdot I_i \cdot U_i = L_i^{real}$$

unter Verwendung der tatsächlichen Spannungen U_i, wäre das Zielfunktional zusätzlich abhängig von diesen. Außerdem wäre die Admittanzgleichung nicht mehr linear von U abhängig, sondern quadratisch, was die Optimierung weiter erschweren würde.

Eine weitere Nicht-Linearität liegt mit (4) vor. Unter Verwendung dieses tatsächlichen Zusammenhangs müsste die Admittanzgleichung für Gas umformuliert werden. Hierbei kann die numerische Berechnung nicht mehr analog durchgeführt werden, da (6) und (7) weiterhin gelten und im Beweis von (15) linear eingehen und nicht quadratisch. Ein Ausweg liefert der folgende numerische Aufbau einer Pseudo-Admittanzmatrix.

$$A^g(r_{inv}) = A^N \cdot \left[\sqrt{A^{N^\top} \otimes [r_{inv} \cdot \mathbf{1}^\top \cdot P]}^{\otimes} \right] \tag{33}$$

wobei $\otimes$ wieder als Operator zur komponentenweise Multiplikation zweier Matrizen zu verstehen ist und $\sqrt{A}^{\otimes}$ komponentenweise die Wurzel von A zieht.

Dies gilt, da

$$Q_{ij} = \sqrt{A^{N^\top} \otimes [r_{inv} \cdot \mathbf{1}^\top]}^{\otimes} \tag{34}$$

und somit (33) nach Definition die Gleichung

$$A^N \cdot Q_{ij} = Q_i$$

erfüllt.
(34) gilt hingegen, weil

$$A^{N^\top} \otimes [r_{inv} \cdot \mathbf{1}^\top \cdot P] = \begin{pmatrix} \frac{P_{c_{1,1},c_{1,2}}}{r_{c_{1,1},c_{1,2}}} \\ \vdots \\ \frac{P_{c_{l.\,\mathrm{dim},1},c_{l.\,\mathrm{dim},2}}}{r_{c_{l.\,\mathrm{dim},1},c_{l.\,\mathrm{dim},2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2_{c_{1,1},c_{1,2}} \\ \vdots \\ Q^2_{c_{l.\,\mathrm{dim},1},c_{l.\,\mathrm{dim},2}} \end{pmatrix}$$

Hier wäre allerdings erneut keine lineare Abhängigkeit von Druck P mehr gegeben. Zudem handelt es sich nicht um eine tatsächliche Admittanzmatrix, da nun nicht mehr unabhängig von P aufgebaut werden kann. Durch diese Eigenschaften wird die Optimierung zusätzlich erschwert.

Weiter können, wie bereits diskutiert, komplexere Modelle zur Bestimmung der Zinssätze sowie der Margen verwendet werden.
In diesem Modell werden zudem nur Strom- und Gasversorgung mit einbezogen. Das Modell könnte hier um ein Fernwärmenetz erweitert werden, wobei die Implementierung analog zum bisherigen Aufbau erfolgen würde. Weitere dezentrale Versorgungseinrichtungen (Solar, Photovoltaik) könnten in einem weiteren Schritt berücksichtigt werden.

Realistische Netze enthalten ungefähr 50 Haushalte pro Knoten. Bei 20000 Haushalten wären daher 400 Knoten erforderlich. Die Dimension der Variablen an den Knoten würde daher auf 2400 steigen, wobei Widerstände auf den Leitungen (welche, je nach VM, eine noch höhere Dimension als die Knoten haben) hinzukommen. Durch die hohe Anzahl der Variablen müssen weitere Verfahren der hochdimensionalen Optimierung angewandt werden, um auch für größere Netzwerke Lösbarkeit und Genauigkeit in einer angemessenen Rechenzeit zu erhalten. Hier könnte auch die Netzwerkerzeugung beschleunigt werden, indem überflüssiges Speichern von Variablen und Informationen geschickt umgangen wird.

4 Numerische Analyse

In diesem Kapital wird das Modell an synthetisch konstruierten Netzwerken getestet. Hier wird zu Beginn ein kleines Vier-Knoten-Netzwerk betrachtet, wobei die vollständige Optimierung getestet und mit einem kombinatorischen Ansatz für die Netzwerkerzeugung verglichen wird. Danach wird das Modell an einem größeren synthetischen Netzwerk im Detail analysiert.

4.1 Ableitungen der Leitungskosten

Im Folgenden werden die Ableitungen der Leitungskosten aus (25) numerisch untersucht. Dabei wird die Genauigkeit der analytischen Ableitung im ersten Schritt mit der Approximation durch finite Differenzen verglichen. Danach wird die Sensitivität der finiten Differenzenmethode bezüglich verschiedener Schrittweiten h untersucht.
Die Ableitungen erster Ordnung werden folgendermaßen numerisch approximiert.

$$\partial_{x_i} K^e_{num}(x) = \frac{K^e(x + h \cdot e_i) - K^e(x)}{h} \approx \partial_{x_i} K^e(x)$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung werden approximiert mit

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} K^e_{num}(x) = \frac{K^e(x + h \cdot (e_i + e_j)) - K^e(x + h \cdot e_i) - K^e(x + h \cdot e_j) + K^e(x)}{h} \approx \partial_{x_i}\partial_{x_j} K^e(x)$$

wobei x dem komponentenweise inversen Widerstandsvektor r^e_{inv} entspricht. Um die Ableitungen zu testen, werden für Strom- und Gasnetz 5-dimensionale Zufallsvektoren $r^e_{inv_i}$ bzw. $r^g_{inv_i}$, $i = 1, ..., 5$ für die inversen Widerstandsvektoren erzeugt, die sich zwischen den definierten Grenzen bewegen. Für die Gasleitungskosten erfolgt die Approximation analog. e_i bzw. e_j sind jeweils die i-ten bzw. j-ten Einheitsvektoren. Die Schrittweite h wird relativ zu den durchschnittlichen x-Werten definiert mit $h = 10^{-5} \cdot \sum_{i=1}^{5} \frac{r^e_{inv_i}}{5}$. Für Gas wird h analog definiert.
Die Approximationsgüte der Ableitungen erster Ordnung für dieses h ist für Stromleitungskosten mit (35) und für Gasleitungskosten mit (36) gegeben.

$$\nabla_{r^e_{inv}} K^e(r^e_{inv}) = \begin{pmatrix} 2.2090 \\ 1.9124 \\ 3.9282 \\ 4.0861 \\ 0.9163 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{r^e_{inv}} K^e_{num}(r^e_{inv}) = \begin{pmatrix} 2.2089 \\ 1.9123 \\ 3.9278 \\ 4.0856 \\ 0.9163 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\nabla_{r^g_{inv}} K^g(r^g_{inv}) = 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0.3551 \\ 0.3230 \\ 0.4686 \\ 0.5143 \\ 0.5471 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{r^g_{inv}} K^g_{num}(r^g_{inv}) = 10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0.3551 \\ 0.3230 \\ 0.4685 \\ 0.5142 \\ 0.5471 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Die analytische Hessematrizen liefern für Strom und Gas ebenfalls nahezu identische Werte zu den jeweiligen numerischen Approximationen. Damit können die analytisch berechneten Ableitungen als korrekt implementiert angenommen werden. Wird eine numerische Näherung anstelle der analytischen Ableitungen verwendet, führt dies zu Approximationsfehlern. Die Auswirkungen dieser Approximationen werden im Folgenden analysiert, indem die Sensitivität für verschiedene Schrittweiten h untersucht wird. Hierbei wird die Differenz des analytischen Gradienten zum numerisch berechneten Gradienten für verschiedene Schrittweiten in der euklidischen Norm betrachtet. Das selbe Verfahren wird auf die Hessematrizen übertragen, wobei hier alle Einträge in einen Vektor geschrieben werden (mit dem Operator $Vech$). Es werden jeweils absolute Fehler E_{abs} sowie relative Fehler E_{rel} wie in (37) betrachtet.

$$E_{abs}(x) = \|F_{num}(x) - F(x)\|_2, \quad E_{rel}(x) = \|F_{num}(x)/F(x) - 1\|_2 \tag{37}$$

Bei der relativen Fehlerberechnung werden nur diejenigen Indizes berücksichtigt, bei denen $F(x)$ von Null verschieden sind. F steht hier für die analytische und F_{num} für die numerische Berechnung von Gradient bzw. $Vech$(Hessematrix). Es werden vier verschiedene Schrittweiten, $h1 = \eta,\ h2 = \eta \cdot 0.02,\ h3 = \eta \cdot 0.02^2$ und $h4 = \eta \cdot 0.02^3$ betrachtet mit

$$\eta = \sum_{i=1}^{5} \frac{r^e_{inv_i}}{5} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \sum_{i=1}^{5} \frac{r^g_{inv_i}}{5} \quad \text{je nachdem, ob Strom oder Gas betrachtet wird.}$$

Erneut werden die Widerstandswerte für Gas und Strom mit Zufallszahlen erzeugt, so dass sich die Werte gleichverteilt zwischen den vorgegebenen Grenzen bewegen. Anhand dieser Zufallswerte werden dann die absoluten und die relativen Fehler berechnet. Diese Vorgehensweise wird für alle Fehlerbetrachtungen 50 mal mit verschiedenen Zufallsvektoren wiederholt. Die resultierenden Verteilungen sind in den Abbildungen (9) - (16) dargestellt. Der Fehler nimmt mit abnehmender Schrittweite h für alle Fehlerbetrachtungen ab und die Verteilungen zentrieren sich zunehmend um den Wert 0. Dennoch ist ersichtlich, dass bei bestimmten Kombinationen von Widerständen, bei denen die Werte am rechten Rand der Verteilungen angenommen werden, eine verhältnismäßig starke Abweichung vom Erwartungswert vorliegt. Dies gilt insbesondere für kleine h, bei denen die Verteilung weniger zentriert ist. Eine analytische Berechnung ist daher zu empfehlen, auch weil mit dieser letztendlich Rechenzeit gespart wird. Dies wird in Kapitel noch näher untersucht.

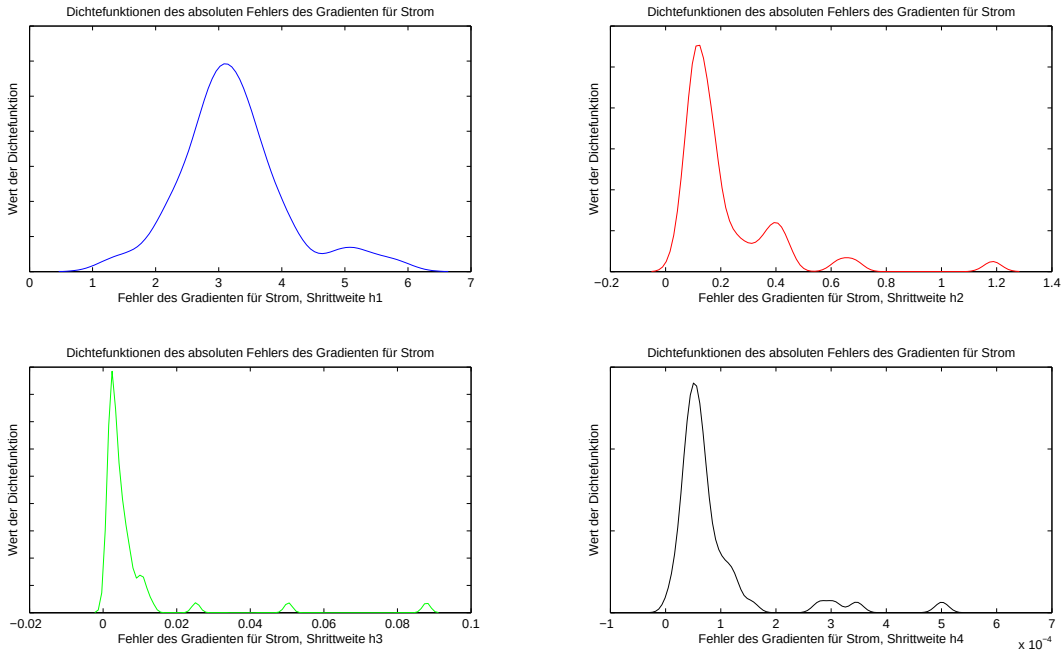

Abbildung 9: Verteilung des absoluten Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Gradient für Strom)

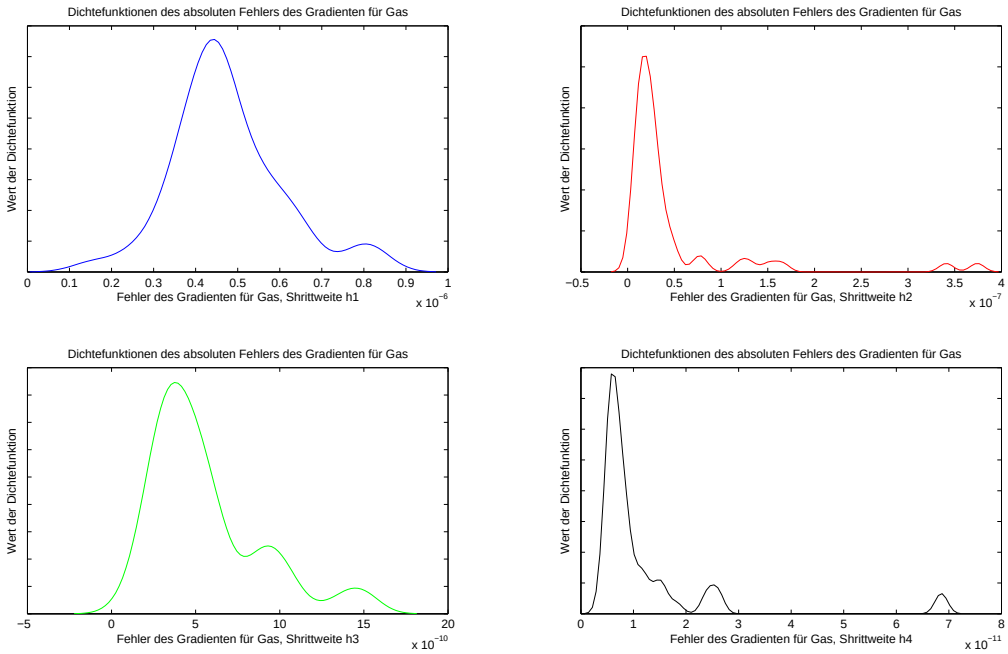

Abbildung 10: Verteilung des absoluten Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Gradient für Gas)

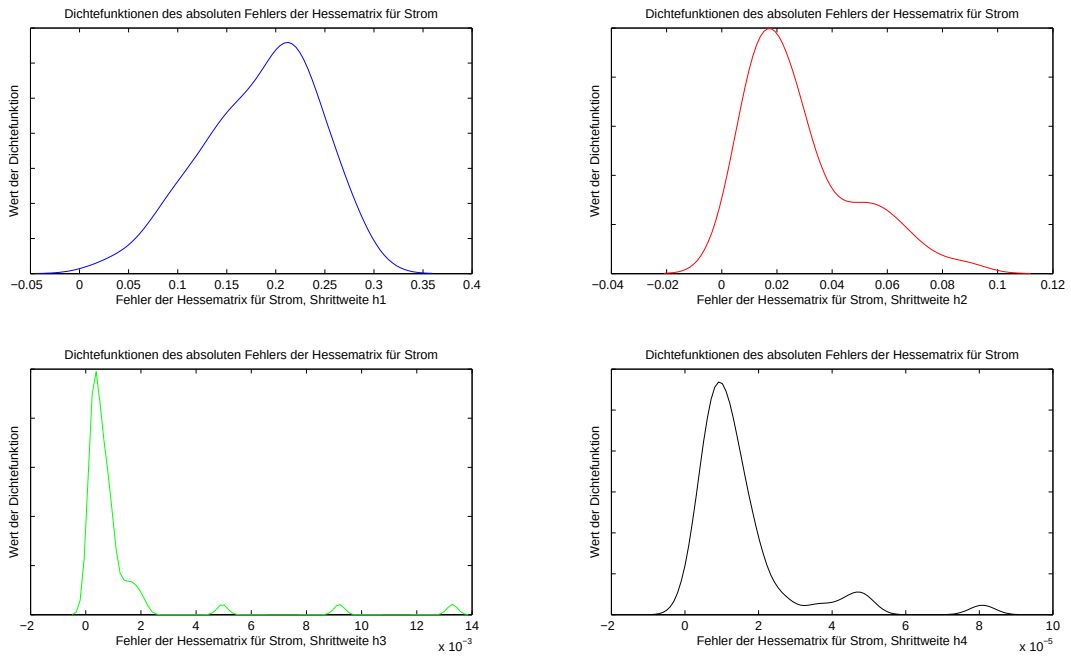

Abbildung 11: Verteilung des abs. Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Hessematrix für Strom)

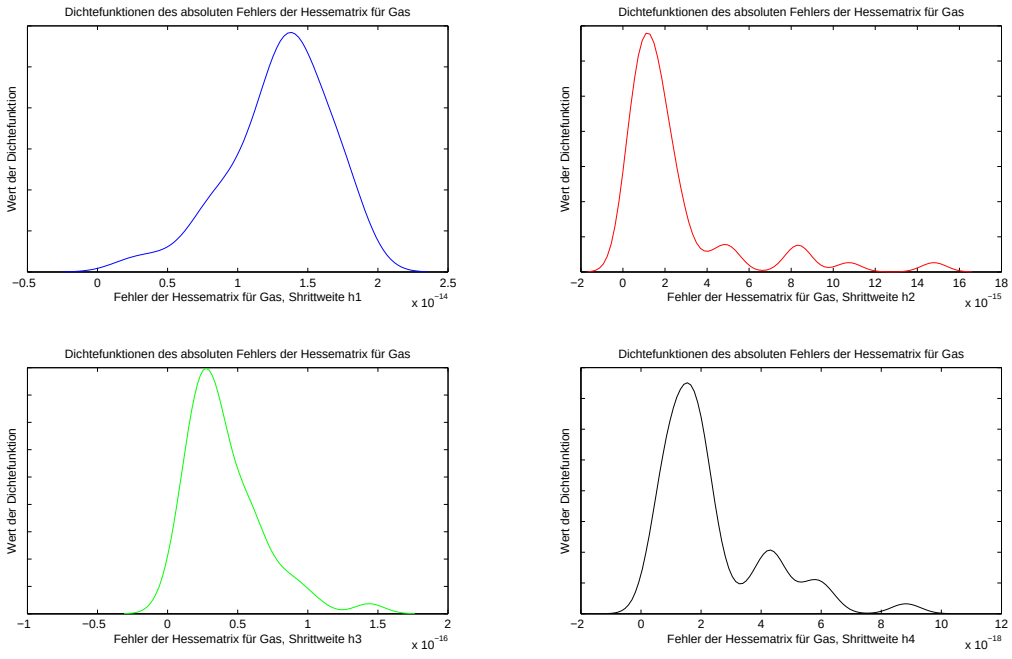

Abbildung 12: Verteilung des abs. Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Hessematrix für Gas)

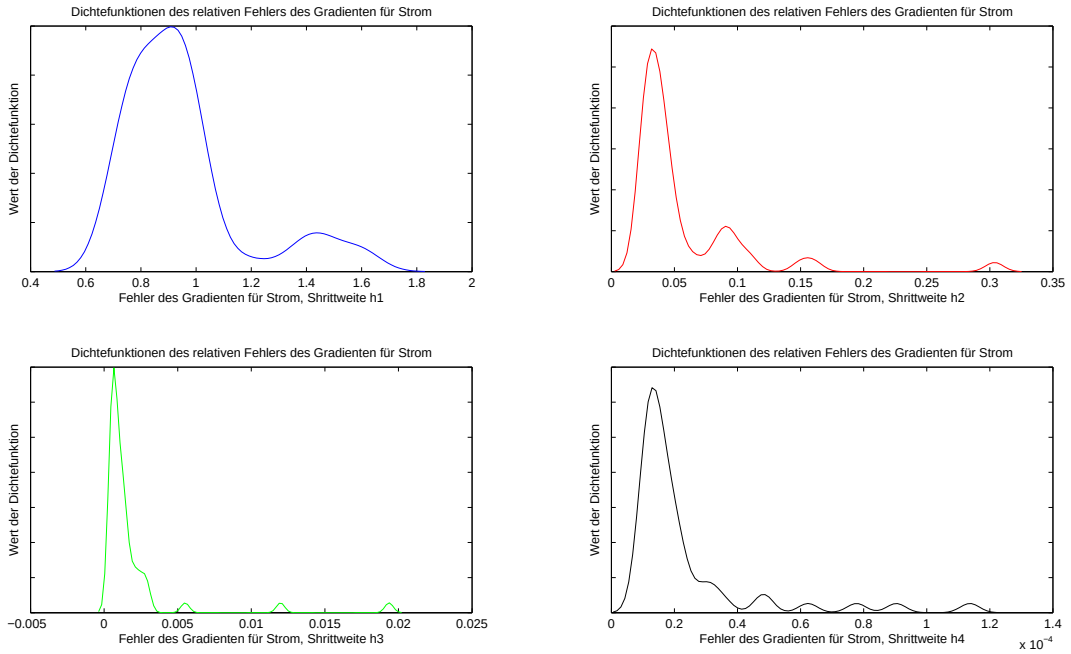

Abbildung 13: Verteilung des relativen Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Gradient für Strom)

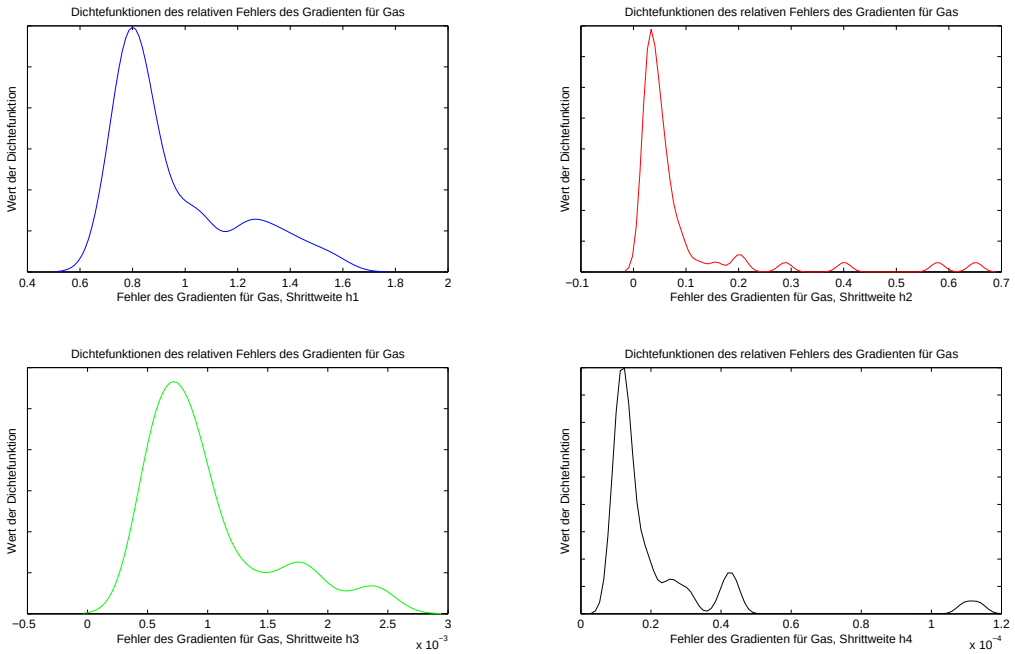

Abbildung 14: Verteilung des relativen Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Gradient für Gas)

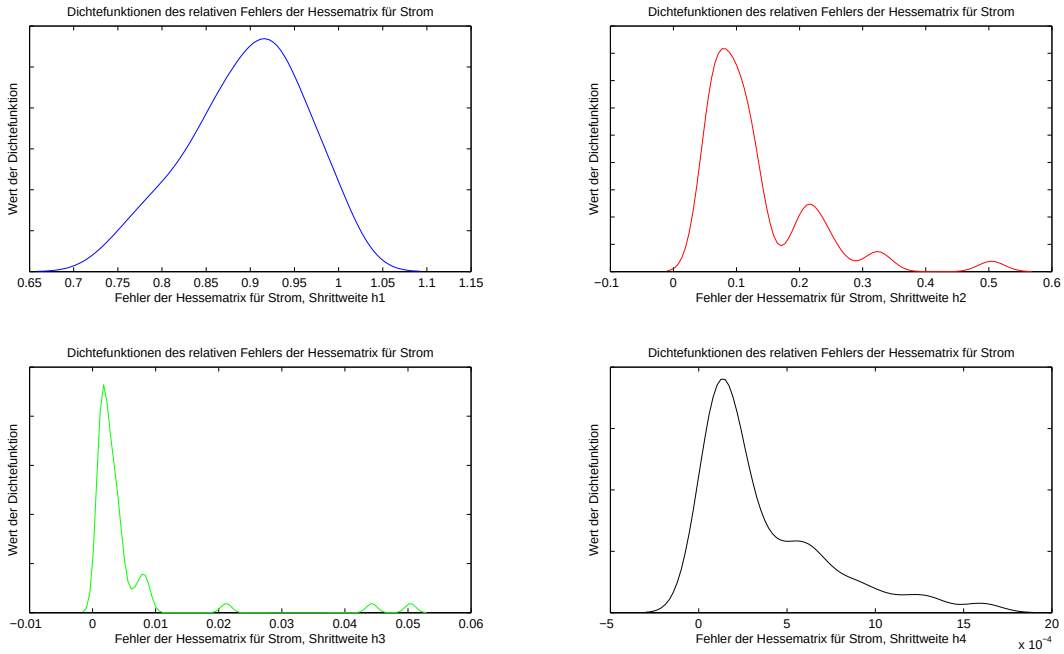

Abbildung 15: Verteilung des relativen Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Hessematrix für Strom)

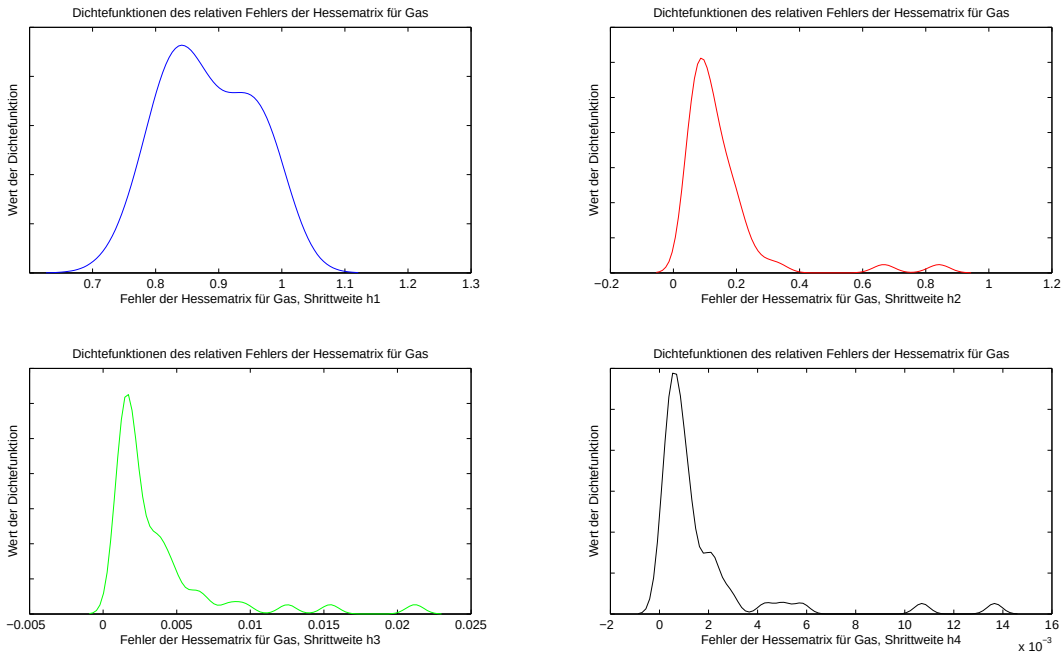

Abbildung 16: Verteilung des relativen Fehlers für verschiedene Schrittweiten (Hessematrix für Gas)

4.2 Das Vier-Knoten Netzwerk

Zur Vereinfachung wird das Modell eines Vier-Knoten Netzwerks betrachtet, welches in Abbildung 17 aufgezeigt ist. Das Stromnetz ist in blau und das Gasnetz in rot gegeben. Die Knoten und die Stränge sind nummeriert. Die Slack-Knoten befinden sich jeweils an Knoten 1.

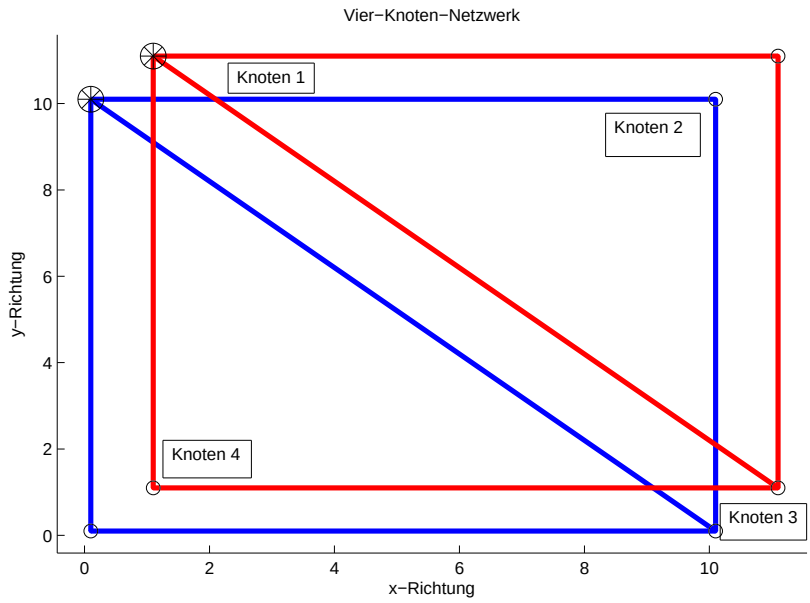

Abbildung 17: Vier-Knoten Netzwerk.

Das Netzwerk ist durch die gegebenen VMs für Strom c_e und Gas c_g definiert, wobei

$$c_e = c_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Knoten-Koordinaten coo_x und coo_y seien gegeben mit

$$coo_x = [0.1,\ 10.1\ 10.1,\ 0.1]^\top \quad \text{und} \quad coo_y = [10.1,\ 10.1,\ 0.1,\ 0.1]^\top$$

Hierbei ist $(coo_{x_1}, coo_{y_1}) = (0.1, 10.1)$ der Slack-Knoten. Die Parameter seien mit den Werten in den Tabellen 7 - 10 gegeben. Weiter wird an jedem Knotenpunkt ein Haushalt angenommen:

$$k.houses_i = 1, \quad i = 1, ..., 3 \quad \text{und damit} \quad k.frac_houses_i = \frac{1}{3}, \quad i = 1, ..., 3.$$

Die Regionsnummer $k.region_i$ wird hier für alle Knoten i mit dem Wert 1 angenommen.

Mit Algorithmus 11 ergibt sich in beiden Fällen für die Netzmatrix

$$A^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich mit (15) die vollständige Admittanzmatrix für das jeweilige Netz *net* mit $net = e, g$ konstruieren.

$$A^{net} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{1}{r_1^{net}} + \frac{1}{r_2^{net}} + \frac{1}{r_3^{net}} & -\frac{1}{r_1^{net}} & -\frac{1}{R_2^{net}} & -\frac{1}{r_3^{net}} \\ \hline -\frac{1}{r_1^{net}} & \frac{1}{r_1^{net}} + \frac{1}{r_4^{net}} & -\frac{1}{r_4^{net}} & 0 \\ \hline -\frac{1}{r_2^{net}} & -\frac{1}{r_4^{net}} & \frac{1}{r_2^{net}} + \frac{1}{r_4^{net}} + \frac{1}{r_5^{net}} & -\frac{1}{r_5^{net}} \\ \hline -\frac{1}{r_3^{net}} & 0 & -\frac{1}{r_5^{net}} & \frac{1}{r_3^{net}} + \frac{1}{r_5^{net}} \end{array}\right)$$

Für die reduzierte Admittanzmatrix ergibt sich hingegen

$$A_{red}^{net} = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{r_1^{net}} + \frac{1}{r_4^{net}} & -\frac{1}{r_4^{net}} & 0 \\ \hline -\frac{1}{r_4^{net}} & \frac{1}{r_2^{net}} + \frac{1}{r_4^{net}} + \frac{1}{r_5^{net}} & -\frac{1}{r_5^{net}} \\ \hline 0 & -\frac{1}{r_5^{net}} & \frac{1}{r_3^{net}} + \frac{1}{r_5^{net}} \end{array}\right) \tag{38}$$

Damit ist die reduzierte Admittanzmatrix positiv definit und invertierbar, da sie strikt diagonaldominant ist.

4.2.1 Vergleich mit dem kombinatorischen Ansatz zur Netzwerkerzeugung

Im vereinfachten Vier-Knoten Netzwerk befindet sich die Anzahl der zulässigen Kombinationen für Strom- und Gasnetz in einer berechenbaren Größenordnung. Damit kann die Effizienz der Netzsimulation untersucht werden. Es werden alle möglichen Netzwerke durchgegangen, wobei auf jedem dieser Netzwerke, wie in Kapitel 3 beschrieben, optimiert wird, sofern dieses Netzwerk gültig ist. Dieser Ansatz wird dann mit der vollständigen Optimierung verglichen. Die Anzahl der Simulationen wird auf $M = 100$ gesetzt. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 11 und 12, sowie in (39) gegeben und in beiden Fällen identisch.

Strangnummer	Stromnetz	Gasnetz	r^e	r^g
1	0	1	-	0.0001
2	0	0	-	-
3	1	0	0.6410	-
4	1	0	0.6410	-
5	1	0	0.6410	-

Tabelle 11: Optimierungsergebnisse für das Netzwerk und die Variablen auf den Leitungen

PQ-Knotennummer	U	P	w_1	w_2	w_3	w_4
1	391.12	0.4986	0	0	0.7	0.3
2	391.77	-	0.5	0.5	0	0
3	395.42	-	1	0	0	0

Tabelle 12: Optimierungsergebnisse für die Variablen auf den Knoten

Die Technologieanteile $wgts$ aus der Optimierung sind

$$wgts = [0.5,\ 0.1667,\ 0.2333,\ 0.1]^\top \tag{39}$$

Für die Stromstärken I und die Gasströme Q ergibt sich:

$$I = [1.0104,\ 4.6910,\ 1.4434]^\top\,, \quad Q = [1.3939,\ 0,\ 0]^\top$$

Die erforderlichen Nebenbedingungen sind alle erfüllt.
Das Netzwerk ist in Abbildung 18 visualisiert.

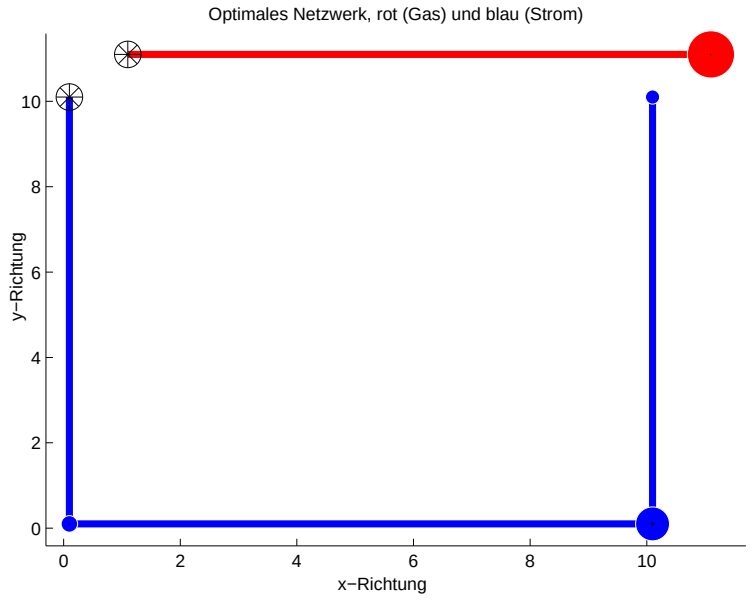

Abbildung 18: Optimales Vier-Knoten Netzwerk.

Der Slack-Knoten ist mit einem schwarzen Kreuz gekennzeichnet, die Knotenpunkte mit Kreisen. Je größer der Radius der Kreise, desto höher sind die Stromstärken bzw. die Gasströme am jeweiligen Knotenpunkt. Die Strangstärke zeigt hingegen die Höhe des Widerstands.

In dieser Analyse wurde festgestellt, dass kein eindeutiges globales Optimum existiert. Es ist möglich, dass die optimalen Werte an zwei verschiedenen Knoten in einer anderen Optimierung genau invers angenommen werden. Ebenfalls ist es möglich, dass die Stränge analog, jedoch nicht an den selben Stellen gebaut werden, bsp. wie in Abbildung 19. Dies hat jedoch keine Auswirkung auf die Gültigkeit des Netzwerks und auf den Wert der Zielfunktion.

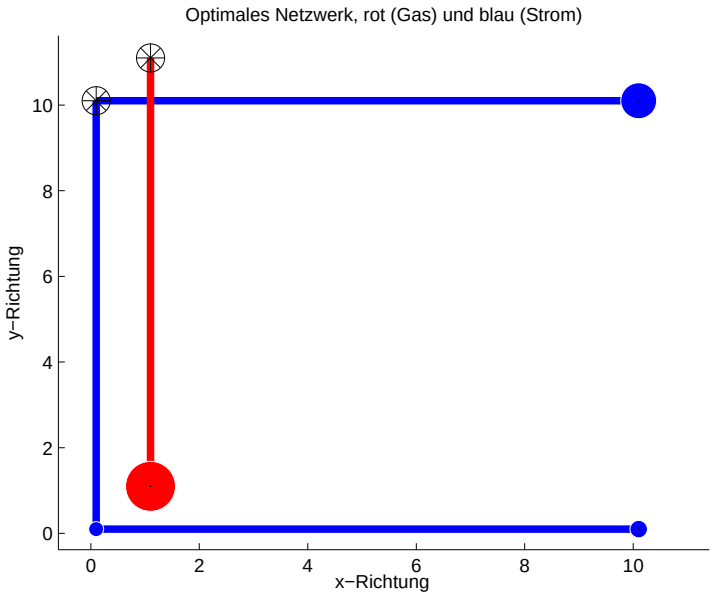

Abbildung 19: Optimales Vier-Knoten Netzwerk (alternatives Ergebnis).

Als Robustheitstest wurde die vollständige Optimierung 100-mal wiederholt, wobei in jeder dieser Optimierungen erneut ein Optimum mit derselben Netzwerkstruktur und dem gleichen Wert des Zielfunktionals gefunden wird.

Alternativ wäre es möglich, die vollständige Optimierung mit einem diskreten Optimierungsansatz zu vergleichen. Hierbei könnte, wie zuvor, die Kombination aller Netze durchgegangen werden. Auf dem Netz würde nun jedoch auch mit Kombinatorik gearbeitet werden, indem jeder Optimierungsvariablen bestimmte Werte zugewiesen werden, die sie annehmen kann. Jedoch ist die Anzahl der Kombinationen bereits für das Vier-Knoten Netzwerk zu hoch. Sollten für jeden Eintrag des Vektors nur zwei mögliche Werte angenommen werden, so wären es bereits $2^{38} = 2.75 \cdot 10^{11}$ Kombinationen pro Netzwerk. Bei den 473 der 576 Kombinationen zur Netzwerkerzeugung, die gültig sind, wären dies $1.3 \cdot 10^{14}$ Gesamtkombinationen. Mit nur zwei möglichen Werten pro Eintrag müsste zudem damit gerechnet werden, dass die Nebenbedingungen nicht erfüllt werden können. Aus diesen Gründen wird auf diesen Ansatz verzichtet.

Anhand dieser Ergebnisse lässt sich zeigen, dass das Modell im Bezug auf die Netzsimulation in der Lage ist, ein Optimum zu finden. Auf größeren Netzwerken ist eine kombinatorische Netzwerkerzeugung jedoch nicht mehr realisierbar und lässt somit keine analogen Vergleiche zu.

4.3 Das Zehn-Knoten Netz

Nun wird das Modell eines Zehn-Knoten Netzwerks betrachtet, welches in Abbildung 17 gezeigt ist. Das Stromnetz ist wieder in blau und das Gasnetz wieder in rot gegeben. Die Knoten sind nummeriert. Die Slack-Knoten befinden sich vorerst für Strom- und Gasnetz an Knoten 1.

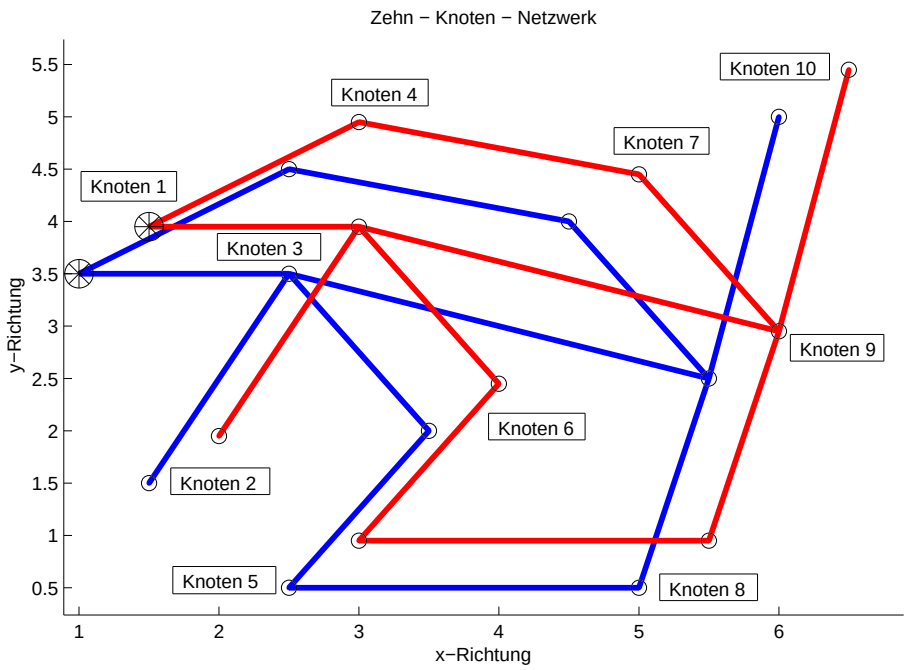

Abbildung 20: Zehn-Knoten Netzwerk.

Die gegebenen VMs für Strom c_e und Gas c_g sind in diesem Fall gegeben mit

$$c_e = c_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 3 & 6 & 9 & 7 & 6 & 8 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}^\top$$

Die Koordinaten der Knoten coo_x und coo_y sind gegeben mit

$$coo_x = [1,\ 1.5,\ 2.5,\ 2.5,\ 2.5,\ 3.5,\ 4.5,\ 5,\ 5.5,\ 6]^\top$$
$$\text{und} \quad coo_y = [3.5,\ 1.5,\ 3.5,\ 4.5,\ 0.5,\ 2,\ 4,\ 0.5,\ 2.5,\ 5]^\top$$

Hierbei ist $(coo_{x_1}, coo_{y_1}) = (1, 3.5)$ der Slack-Knoten. Die Parameter seien vorerst ebenfalls mit den Werten in den Tabellen 7 - 10 gegeben. Weiter werden an jedem PQ-Knotenpunkt 50 Haushalte angenommen:

$$k.houses_i = 50, \quad i = 1, ..., 9 \quad \text{und damit} \quad k.frac_houses_i = \frac{50}{9}, \quad i = 1, ..., 9.$$

Die Regionsnummer $k.region_i$ wird hier für alle Knoten i mit dem Wert 1 angenommen.

Mit Algorithmus 11 ergibt sich in beiden Netzen für die Netzmatrix

$$A^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit werden erneut die Admittanzmatrizen sowie die reduzierten Admittanzmatrizen bestimmt.

4.3.1 Die Kondition der Admittanzmatrix

Im bisherigen Aufbau gehen die Spannungen U und Gasdrücke P als Variablen in die Optimierung mit ein. Diese kommen jedoch nicht im Zielfunktional vor, sondern nur in der Bedingung der Admittanzgleichung und den vorgegebenen Grenzen, in denen sie ich bewegen sollen. Daher ist es auch möglich, diese Variablen nicht für die Optimierung zu verwenden, sofern die Nebenbedingungen explizit nach Ihnen gelöst werden können. Dies ist der Fall, da die Admittanzgleichung (21) umgeschrieben werden kann als:

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ P(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^e_{red}(r^e_{inv}) & 0 \\ 0 & A^g_{red}(r^g_{inv}) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} I(w_1, w_2, w_3, w_4) \\ Q(w_1, w_2, w_3, w_4) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_1 \cdot b^e_{red}(r^e_{inv}) \\ P_{slack^*_g} \cdot b^g_{red}(r^g_{inv}) \end{pmatrix} \right] \tag{40}$$

wobei

$$x = \left[(r^e_{inv})^\top,\ (r^g_{inv})^\top,\ wgts^\top,\ w_1^\top,\ w_2^\top,\ w_3^\top,\ w_4^\top \right]^\top \tag{41}$$

Sofern die Komponenten aus Gleichung (40) in den vorgegebenen Grenzen U_{min} und U_{max} bzw. P_{min} und P_{max} liegen, sind die Bedingungen an die Admittanzgleichung in diesem Fall erfüllt. Dann würde das Optimierungsproblem (31) umformuliert, wobei J unverändert bleibt. LB, UB sowie A_{eq}, b_{eq}, A_{ineq} und b_{ineq} würden analog für x aus (41) gelten und c_{eq} ergänzt werden, so dass (40) innerhalb der vorgegebenen Grenzen liegt.

Im Folgenden wird nun untersucht, welche Variante in dieser Arbeit verwendet werden soll, wobei hier die Invertierbarkeit der Admittanzmatrix untersucht wird. Dabei werden die Einträge r^{net}_i, $i = 1, ..., 5$ für das Vier-Knoten Netzwerk aus (38) jeweils mit gleichverteilten Zufallszahlen auf den vorgegebenen Grenzen r^{net}_{min} und r^{net}_{max} für Strom- und Gasnetz simuliert.

Für jede Simulation der Matrix wird die Konditionszahl errechnet, da in der alternativen Formulierung eine Inversion benötigt wird. Dies wird in 10000 Iterationen für beide Netze jeweils wiederholt. Der selbe Vorgang wird für die Admittanzmatrix des Zehn-Knoten Netzwerks wiederholt.

Abbildung 21 und 22 zeigen die Verteilungen der Konditionszahlen der vollständigen Admittanzmatrizen für beide Netze. Hierbei wurden nur die Werte der 10000 Iterationen bis zum Median betrachtet.

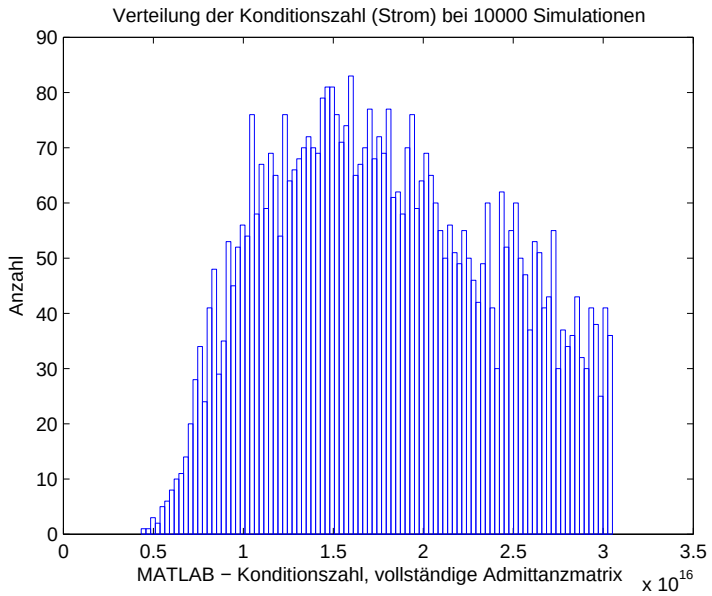

Abbildung 21: Verteilung der Konditionszahl der vollständigen Strom-Admittanz-Matrix bei N=10000 Simulationen im Vier-Knoten Netz

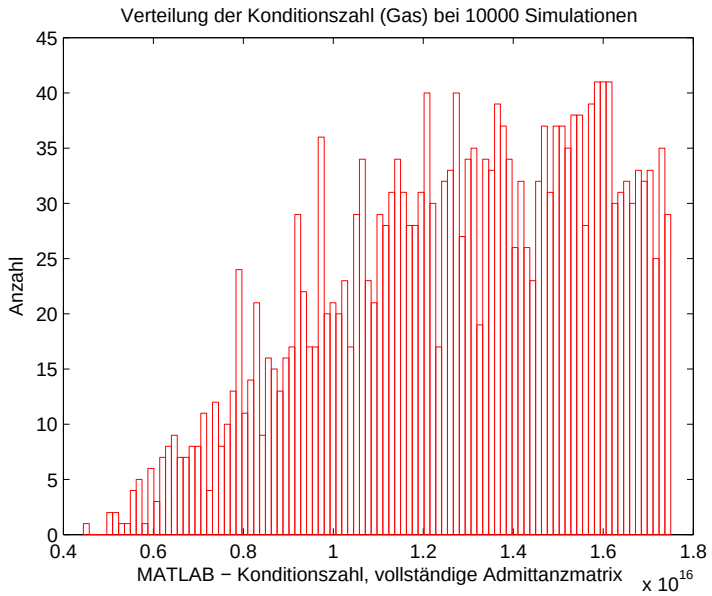

Abbildung 22: Verteilung der Konditionszahl der vollständigen Gas-Admittanz-Matrix bei N=10000 Simulationen im Vier-Knoten Netz

Die Konditionszahl der Matrizen ist bereits für das Vier-Knoten Netzwerk sehr hoch. Jedoch ist die Konditionszahl der reduzierten Admittanzmatrix für (40) entscheidend. Deren Verteilungen sind in Abbildung 23 und in Abbildung 24 gegeben. Die Konditionszahlen sind weit geringer als für die vollständigen Matrizen. Die Masse der Verteilungen liegt in beiden Fällen zwischen 1 und 10, was eine numerisch akzeptable Lösbarkeit von (40) für den großteil der Widerstandskombinationen erlaubt.

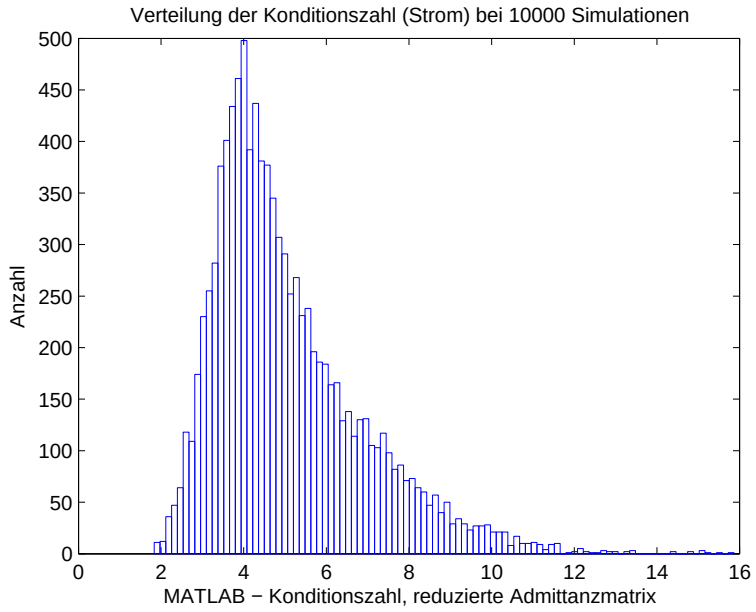

Abbildung 23: Verteilung der Konditionszahl der reduzierten Strom-Admittanz-Matrix bei N=10000 Simulationen im Vier-Knoten Netz

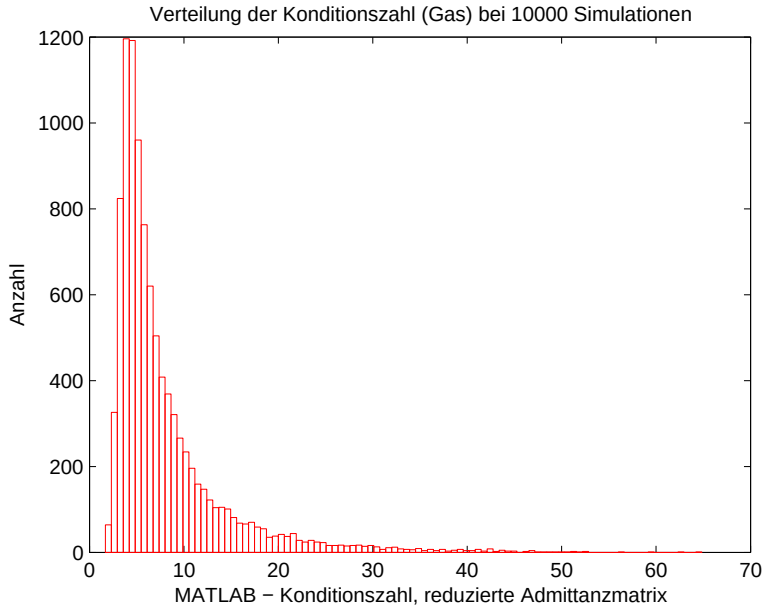

Abbildung 24: Verteilung der Konditionszahl der reduzierten Gas-Admittanz-Matrix bei N=10000 Simulationen im Vier-Knoten Netz

In Abbildung 25 und in Abbildung 26 wird untersucht, ob es Sprünge der Konditionszahl gibt. Damit wird untersucht, welcher Anteil der Widerstandkombinationen eine akzeptable Berechenbarkeit ermöglicht. Dabei wird der relative Zuwachs der aufsteigenden Konditionszahlen aller 10000 Simulationen untersucht. Der Zuwachs weist für beide Netze keine Sprünge auf, daher gibt es auch kein Muster, nach dem ab einer bestimmte Kombination von Widerständen eine wesentlich schlechtere Kondition der Admittanzmatrix entsteht.

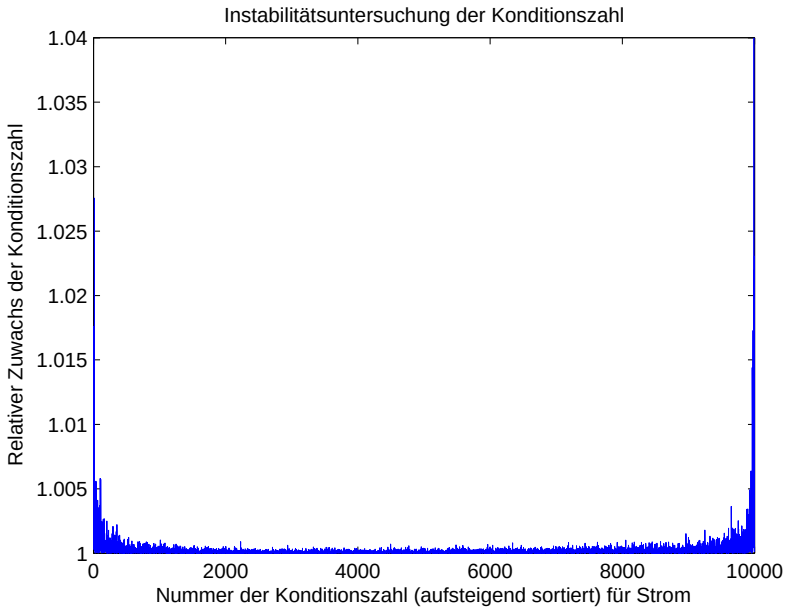

Abbildung 25: Instabilitätsuntersuchung der Strom-Admittanz-Matrix im Vier-Knoten Netzwerk

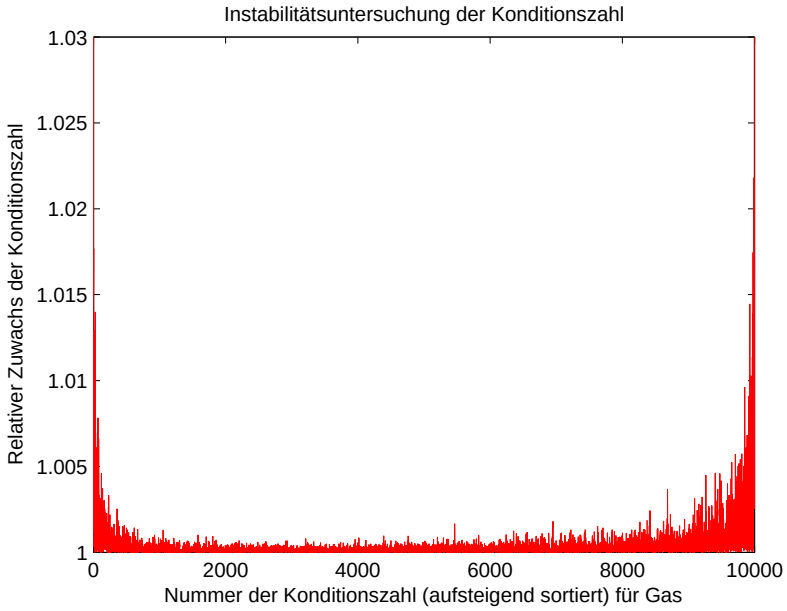

Abbildung 26: Instabilitätsuntersuchung der Gas-Admittanz-Matrix im Vier-Knoten Netzwerk

Für das Zehn-Knoten Netzwerk ergeben sich die Verteilungen der reduzierten Admittanzmatrizen in Abbildung 27 und in Abbildung 28.

Die Konditionszahlen haben sich im Vergleich zum Vier-Knoten Netzwerk deutlich erhöht. Da bei einer Anwendung in der Realität noch deutlich größere Netze betrachtet werden, ist weiter mit einem deutlichen Anstieg der Konditionszahl zu rechnen.

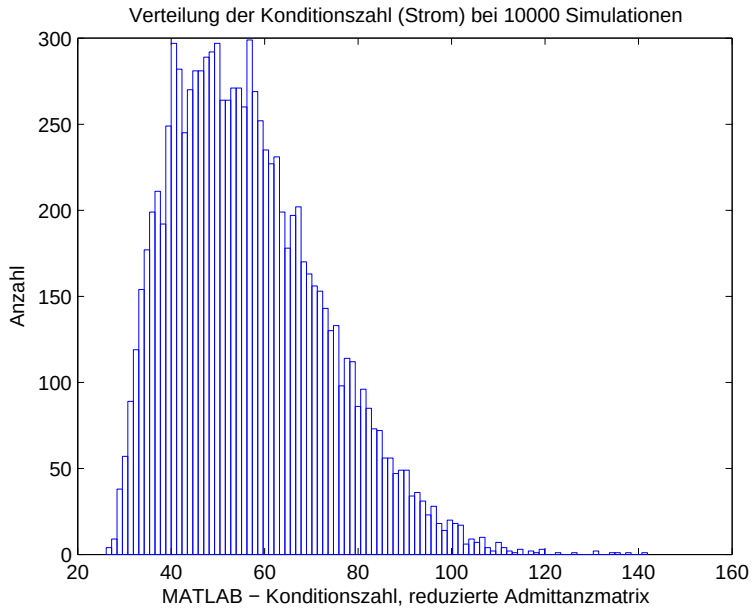

Abbildung 27: Verteilung der Konditionszahl der reduzierten Strom-Admittanz-Matrix bei N=10000 Simulationen im n-Knoten Netz

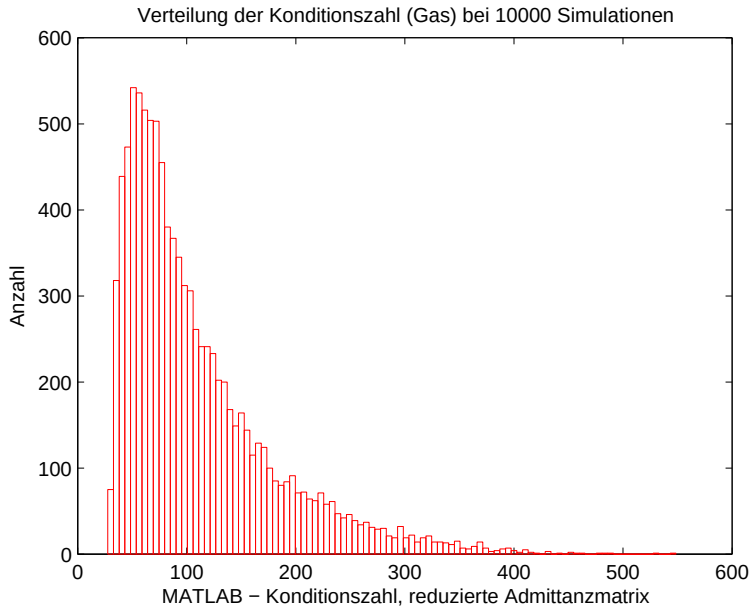

Abbildung 28: Verteilung der Konditionszahl der reduzierten Gas-Admittanz-Matrix bei N=10000 Simulationen im n-Knoten Netz

Die Instabilitätsstudie liefert Ergebnisse analog zum Vier-Knoten Netz. Daher sind auch hier keine Muster erkennbar, nach denen sich die Kondition für bestimmte Widerstandskombinationen deutlich erhöht.

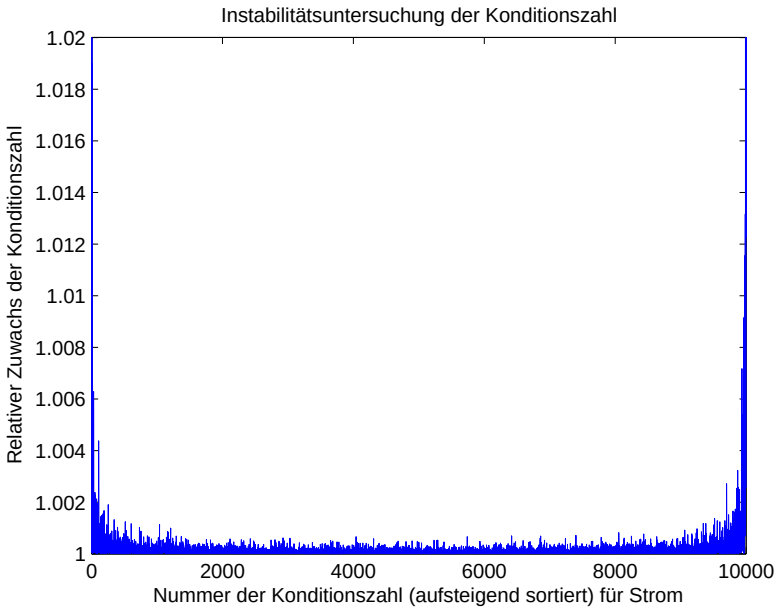

Abbildung 29: Instabilitätsuntersuchung der Strom-Admittanz-Matrix im Zehn-Knoten Netzwerk

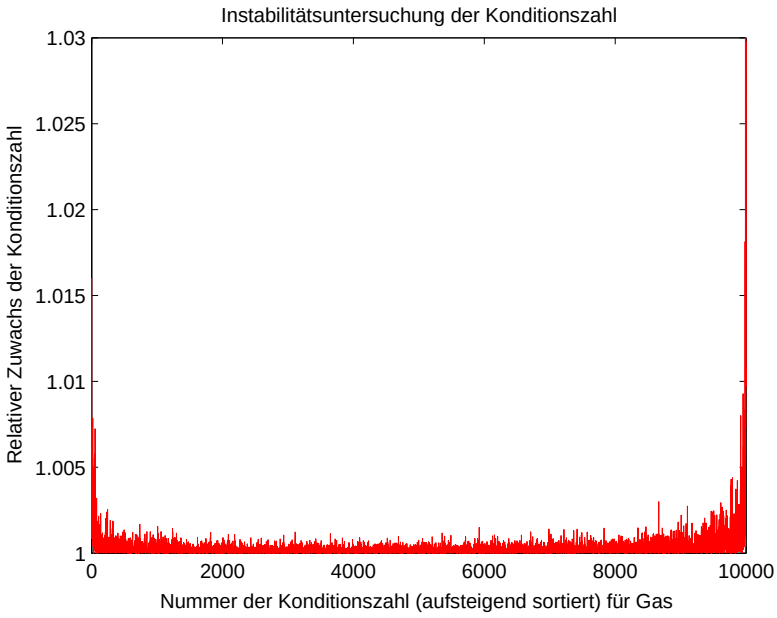

Abbildung 30: Instabilitätsuntersuchung der Gas-Admittanz-Matrix im Zehn-Knoten Netzwerk

Anhand der gewonnenen Erkentnisse wird Optimierung (31) bevorzugt und in dieser Arbeit verwendet. Diese Methode benötigt keine Inversion der Admittanzmatrix. Der Gradient der Nebenbedingungsfunktion existiert und kann ohne Probleme auch für hochdimensionale Probleme berechnet werden.

4.3.2 Tests der Ableitungen

In diesem Kapitel werden die Ableitungen der Zielfunktion und des Nebenbedingungsfunktionals genauer überprüft und mit den numerischen Ableitungen verglichen. Abbildung 31 und Abbildung 32 zeigen für das Zielfunktional die maximale Abweichung des Gradienten, sowie der Hessematrix. Abbildung 33 zeigt für das Nebenbedingungsfunktional die maximale Abweichung der Jacobimatrix. Für die Schrittweiten h_i an den Punkten i wird $h_i = 10^{(-8.5+0.5\cdot i)}$, $i = 1, ..., 17$ verwendet. Da sehr hohe Werte für die Ableitungen entstehen können, werden die relativen Abweichungen betrachtet. Dies ist jedoch problematisch, falls bestimmte Ableitungen nahe 0 sind. Daher wird das Minimum aus beiden möglichen relativen Differenzen und der absoluten Differenz analog zu (42) betrachtet.

$$\min\left(|D/D_{num} - 1|, |D_{num}/D - 1|, |D - D_{num}|\right) \tag{42}$$

Für alle Einträge D der Gradienten und Hessematrizen wird dann die maximale Differenz nach (42) für die jeweilige Schrittweite betrachtet.
Mit diesen Abbildungen ist ersichtlich, dass die analytischen Ableitungen korrekt implementiert sind und in der Optimierung verwendet werden können. Bei der numerischen Berechnung der Hessematrix existiert zudem eine hohe Instabilität. Für große und kleine Schrittweiten ist der Fehler sehr hoch.

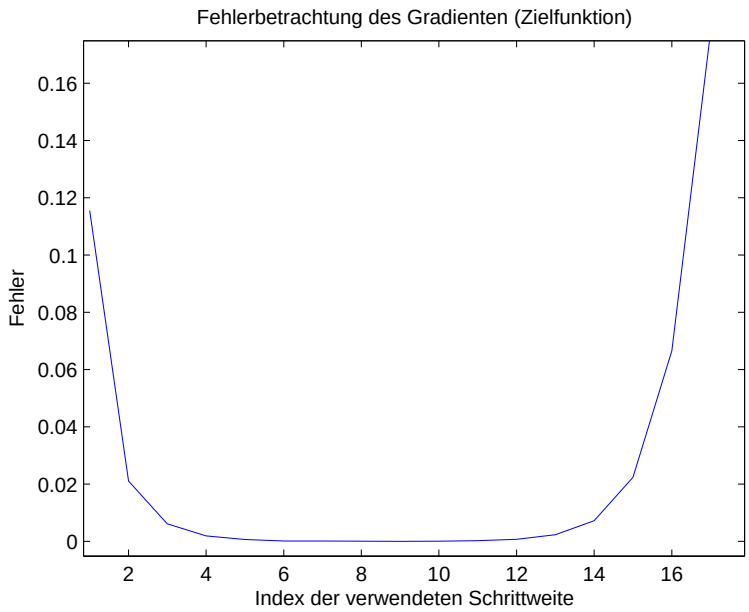

Abbildung 31: Maximale Abweichung des numerischen zum analytischen Gradienten der Zielfunktion für ein voll ausgebautes Zehn-Knoten Netzwerk und für verschiedene Schrittweiten h_i an den Punkten $i = 1, ..., 17$. Das Argument der Funktion wird als gleichverteilter Zufallsvektor auf den unteren und oberen Grenzen erzeugt.

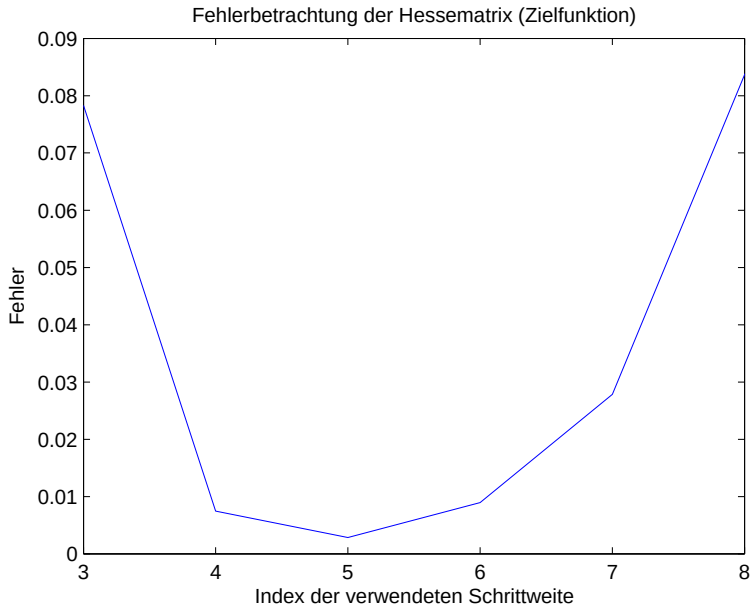

Abbildung 32: Maximale Abweichung des numerischen zum analytischen Hessematrizen der Zielfunktion für ein voll ausgebautes Zehn-Knoten Netzwerk und für verschiedene Schrittweiten h_i an den Punkten $i = 1, ..., 17$. Das Argument der Zielfunktion wird als gleichverteilter Zufallsvektor auf den unteren und oberen Grenzen erzeugt.

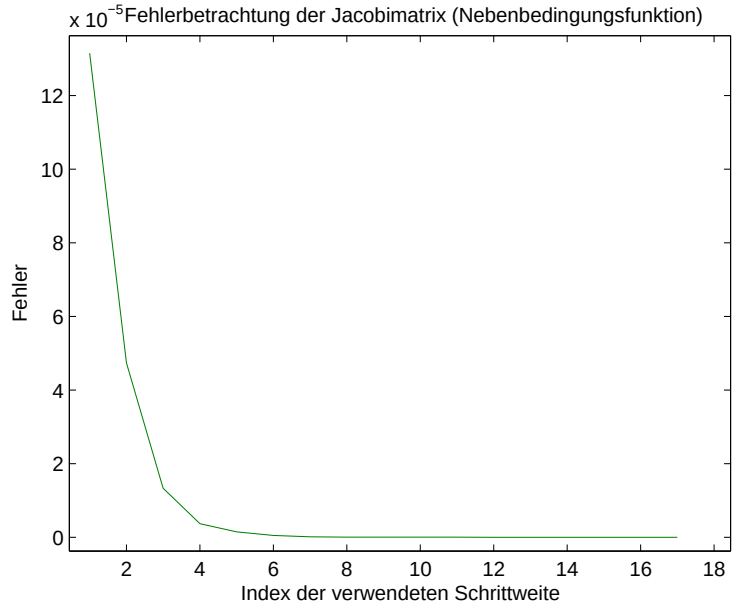

Abbildung 33: Maximale Abweichung des numerischen zur analytischen Jacobimatrix der Nebenbedingungsfunktion für ein voll ausgebautes Zehn-Knoten Netzwerk und für verschiedene Schrittweiten h_i an den Punkten $i = 1, ..., 17$. Das Argument der Funktion wird als gleichverteilter Zufallsvektor auf den unteren und oberen Grenzen erzeugt.

4.3.3 Rechenzeit

In diesem Kapitel wird die Rechenzeit der Optimierung untersucht. Dabei wird zuerst die Netzwerkerzeugung betrachtet. Hierbei wird untersucht, wie sich die Rechenzeit zur Netzwerkerzeugung mit zunehmender Netzgröße entwickelt. Die Netzwerke werden in dieser Untersuchung nach einem bestimmten Muster vergrößert. Dabei werden Länge und Breite eines quadratischen Gitters jeweils in n gleichmäßige Abschnitte unterteilt (kartesisches Gitter). Die Punkte am Rand des Gitters werden über den Rand miteinander verbunden. Weiter wird jeder Punkt mit dem ihm nächsten südöstlichen Punkt verbunden, sofern dieser existiert. Abbildung 34 zeigt das Netzwerk beispielhaft anhand $n = 5$. Für $n = 1$ ergibt sich das Vier-Knoten Netzwerk.

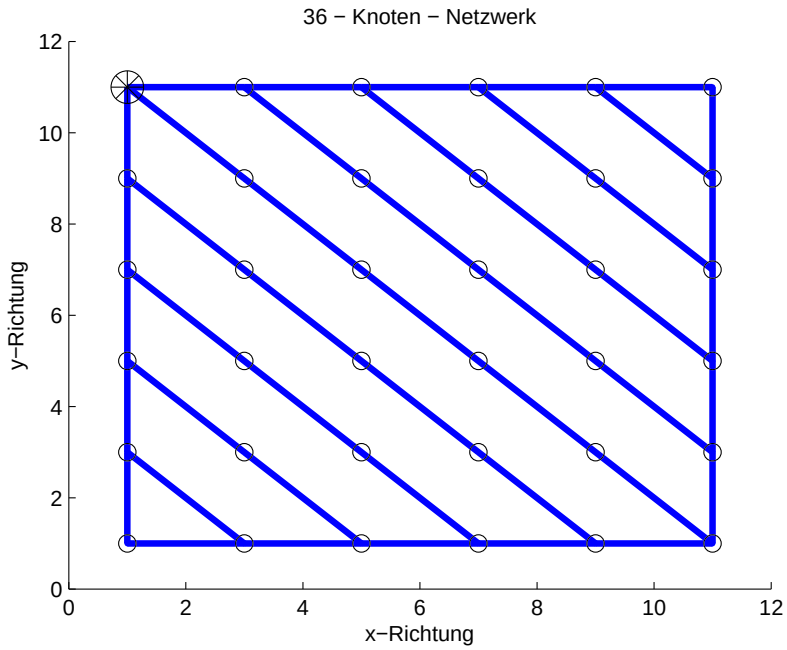

Abbildung 34: Darstellung des 36 - Knoten Netzes nach definiertem Muster. Der Slack-Knoten ist mit einem schwarzen Kreuz gekennzeichnet, die PQ Knoten mit schwarzen Kreisen ohne Kreuz.

Tabelle 13 zeigt die Rechenzeit der Netzwerkerzeugung in Sekunden für verschiedene Netzgrößen. Hierbei wird die Netzsimulation wie in der vollständigen Optimierung für $M = 100$ Simulationen pro Netzwerk durchgeführt.

Unterteilungen	Anzahl Knoten	Anzahl Stränge	Rechenzeit (Sek.)
1	4	5	**0.839**
2	9	12	**4.976**
3	16	21	**9.322**
4	25	32	**46.871**
5	36	45	**190.500**

Tabelle 13: Geschwindigkeit der Netzberechnung für verschiedene Netzgrößen.

Abbildung 35 zeigt, wie sich die Rechenzeit für verschiedene Knotenanzahlen entwickelt. Es wird angenommen, dass Rechenzeit T und Knotenanzahl K folgendermaßen zusammenhängen.

$$T(K) = a \cdot b^K \tag{43}$$

Eine Optimierung nach a und b ergibt $a = 1.5946$ und $b = 1.14$. Ein polynomialer Zusammenhang wurde ebenfalls getestet, hat jedoch wesentlich schlechter abgeschnitten.

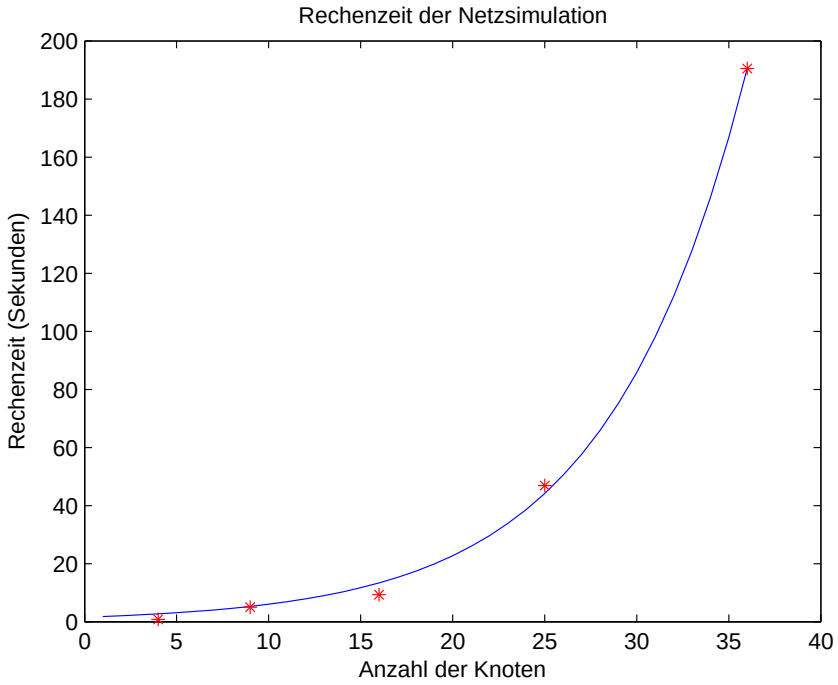

Abbildung 35: Rechenzeit in Sekunden für verschiedene Netzgrößen. Die Interpolationspunkte aus Tabelle 13 sind mit roten Kreuzen markiert. Die blaue Linie entspricht der angepassten Kurve aus (43)

Somit ist zu erwarten, dass die Rechenzeit zur Netzwerkerzeugung exponentiell steigt. Dies ist problematisch, da dann für große Netze keine in der Anwendung realisierbare Rechenzeit mehr möglich ist. Je größer das Netzwerk, desto notwendiger ist es daher, den Netzbau mit Methoden zu erweitern, die eine schnellere Berechnung ermöglichen und zu versuchen, die Konvergenz bsp. auf einen polynomialen Zusammenhang zu reduzieren. Zum Beispiel könnte versucht werden das Speichern von Informationen effizienter zu implementieren.

Die Optimierung auf dem Netz[21] lässt sich unter Umständen beschleunigen, indem analytische Ableitungen verwendet werden. Um diesen Effekt zu untersuchen, wird die Optimierung jeweils mit analytischer und mit numerischer Ableitung ausgeführt. Die Ergebnisse sind für das Zehn-Knoten Netzwerk in Tabelle 14 zu finden. Bei der Optimierung auf dem Netz wird die Matlab-interne Funktion `fmincon` benutzt.

Da sich die Funktion `fmincon.m` die Informationen, die es zur Berechnung von numerischen Ableitungen mit finiten Differenzen benötigt, möglichst rechenzeit-effizient besorgt (bsp. gehen diese evtl. bereits in der Armijo-Liniensuche ein), muss eine Beschleunigung jedoch nicht notwendigerweise der Fall sein. In der Optimierung wird ein quasi-Newton SQP Verfahren verwendet[22]. Das verwendete Verfahren benötigt keine Information der Hessematrix des Zielfunktionals, da diese mit finiten Differenzen approximiert wird. Die Jacobimatrix der Nebenbedingungsfunktion und der Gradient der Zielfunktion werden jedoch verwendet und übergeben. Bei anderen Verfahren (bsp. bei Verwendung eines interior-point Algorithmus) könnte die analytische Hessematrix des Lagrangefunktionals jedoch verwendet werden.

Gradienten	Iterationen	Funktionsauswertungen	CPU-Zeit (Sek.)	Algorithmus
Analytisch	71	147	**1.89**	Quasi-Newton SQP
Numerisch	83	5899	**6.70**	Quasi-Newton SQP

Tabelle 14: Optimierung mit und ohne analytischen Ableitungen

Die Vorgabe eines analytischen Gradienten beschleunigt die Optimierung deutlich. Durch die Approximation mit finiten Differenzen entstehen im numerischen Ansatz 5899 Funktionsauswertungen, im analytischen Ansatz jedoch nur 147. Die Anzahl der Iterationen ist im analytischen Vorgehen mit 71 etwas geringer als die Anzahl der Iterationen im numerischen Vorgehen mit 83. Die Ergebnisse der Optimierung sind in beiden Fällen identisch.

4.3.4 Ergebnisse der Optimierung

Ein Optimierungsdurchlauf liefert mit den Standardvorgaben für die Parameter die Ergebnissse aus Tabelle 15, Tabelle 16 und (44). Bei den Vorgaben wurde einzig die untere Grenze für die Spannungen von 380 auf 230 gesetzt, da sonst keine Lösbarkeit der Optimierung mehr beobachtet werden konnte. Dies könnte in einem genaueren Modell weiter untersucht werden.

Strangnummer	Stromnetz	Gasnetz	r^e	r^g
1	1	1	0.1733	0.0001
2	1	1	0.6410	0.000019
3	1	0	0.6410	-
4	1	1	0.6410	0.0001
5	1	0	0.6410	-
6	1	1	0.6410	0.000026
7	1	0	0.6410	-
8	0	1	-	0.0001
9	0	1	-	0.000028
10	0	1	-	0.000062
11	0	1	-	0.0001

Tabelle 15: Optimierungsergebnisse für das Netzwerk und die Variablen auf den Leitungen

PQ-Knotennummer	U	P	w_1	w_2	w_3	w_4
1	230	-	0.866	0.133	0	0
2	304	0.397	0	0.484	0.517	0
3	276	0.423	0	0.150	0.85	0
4	230	0.100	0.033	0	0.267	0.7
5	244	0.328	0	0	1	0
6	230	0.335	0	0	1	0
7	-	0.169	0	0	0	1
8	230	0.258	0	0.133	0.867	0
9	-	0.184	0	0	0	1

Tabelle 16: Optimierungsergebnisse für die Variablen auf den Knoten

Die Technologieanteile $wgts$ aus der Optimierung sind

$$wgts = [0.1,\ 0.1,\ 0.5,\ 0.3]^\top \tag{44}$$

Für die Stromstärken I und die Gasströme Q ergibt sich:

$$I = [115.5,\ 229.1,\ 120.9,\ 21.7,\ 72.2,\ 72.2,\ 0,\ 115.5,\ 0]^\top\ ,$$
$$Q = [0,\ 35.2,\ 58.0,\ 69.4,\ 68.2,\ 68.2,\ 73.2,\ 59.1,\ 73.2]^\top$$

Die erforderlichen Nebenbedingungen sind alle erfüllt.
Das optimale Netzwerk ist in Abbildung 36 visualisiert.

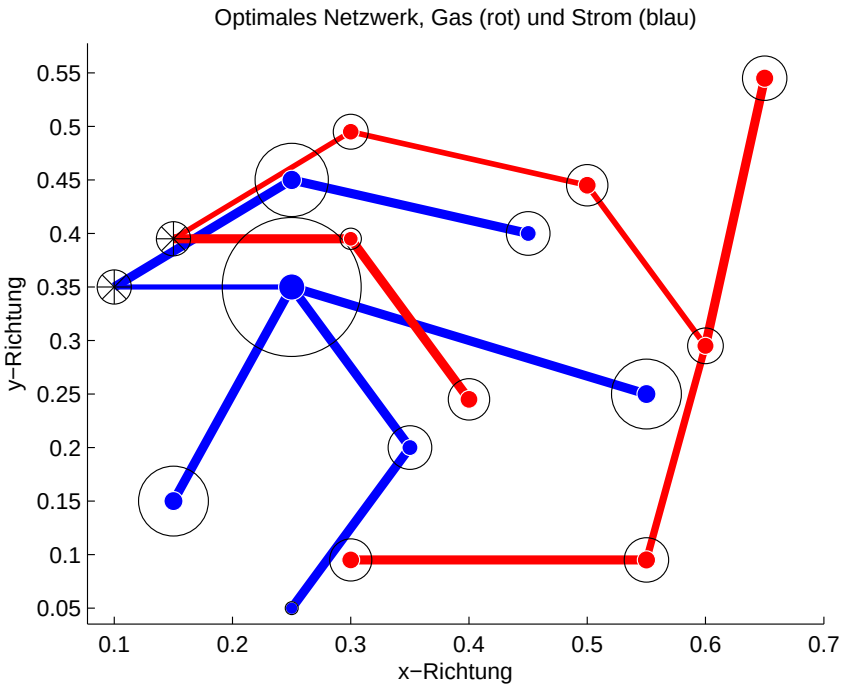

Abbildung 36: Optimales Zehn-Knoten Netzwerk.

Der Slack-Knoten ist mit einem schwarzen Kreuz gekennzeichnet, die Knotenpunkte mit Kreisen. Je größer der Radius der farbigen Kreise, desto höher sind die Stromstärken bzw. die Gasströme am jeweiligen Knotenpunkt. Die schwarzen Kreise geben an, wie hoch die Versorgung mit Stromstärken bzw. Gasstrom im Verhältnis zu den oberen Grenzen ist. Die Strangdicke zeigt hingegen die Höhe des Widerstands.
Die Rechenzeit der vollständigen Optimierung beträgt 5.889 Minuten auf einem 4x 2200 MHz CPU Typ mit 8086 MB Arbeitsspeicher.

Als Vergleich wird nun die selbe Optimierung durchgeführt, wobei sich der Slack-Knoten für Gas jedoch an Knoten 8 befindet. Ebenfalls wird das Gewicht zur Slackdifferenz von 1 auf 5 erhöht, damit bereits in der Netzwerkerzeugung berücksichtigt wird, dass sich in der Optimierung die Stränge des jeweiligen Netzes erwartungsgemäß in der Nähe des entsprechenden Slack-Knotens befinden.

Strangnummer	Stromnetz	Gasnetz	r^e	r^g
1	1	0	0.2799	-
2	1	0	0.6410	-
3	1	1	0.6410	0.0001
4	1	1	0.6410	0.0001
5	1	1	0.6410	0.000097
6	1	0	0.6410	-
7	0	0	-	-
8	0	1	-	0.0001
9	0	1	-	0.0001
10	0	1	-	0.000047
11	0	1	-	0.0001

Tabelle 17: Optimierungsergebnisse für das Netzwerk und die Variablen auf den Leitungen

PQ-Knotennummer	U	P	w_1	w_2	w_3	w_4
1	230	0.1000	0.0639	0	0.9361	0
2	276	0.1638	0	0.4723	0.5277	0
3	258	-	0.6723	0.3277	0	0
4	-	0.4268	0	0	0	1.0000
5	230	0.1000	0.0639	0	0.9361	0
6	230	0.2523	0	0	0.6000	0.4000
7	230	0.3225	0	0	1.0000	0
8	-	0.2493	0	0	0.867	1

Tabelle 18: Optimierungsergebnisse für die Variablen auf den Knoten

Die Technologieanteile $wgts$ aus der Optimierung sind

$$wgts = [0.1,\ 0.1,\ 0.5,\ 0.3]^\top \tag{45}$$

Für die Stromstärken I und die Gasströme Q ergibt sich:

$$I = [72.2,\ 225.5\ 178.6,\ 0,\ 72.2,\ 43.3,\ 72.2,\ 0]^\top\ ,$$
$$Q = [63.8,\ 36.0,\ 0,\ 73.2,\ 63.8,\ 70.2,\ 68.2,\ 73.2]^\top$$

Die erforderlichen Nebenbedingungen sind ebenfalls alle erfüllt.
Das optimale Netzwerk ist in Abbildung 37 visualisiert. Es ist ersichtlich, dass sich die Stränge

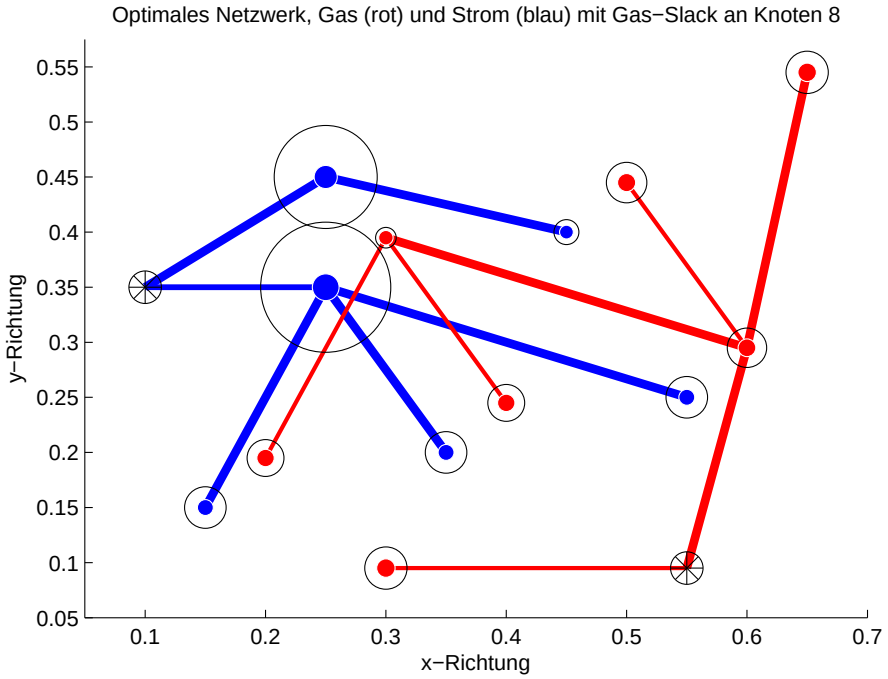

Abbildung 37: Optimales Zehn-Knoten Netzwerk.

für das jeweilige Netz an den Slack-Knoten häufen. Die sonstigen Ergebnisse der Optimierung unterscheiden sich nicht signifikant in Ihrer Struktur.

4.3.5 Ausblick und weitere mögliche Analysen

In diesem Kapitel wird ein Ausblick gewährt welche Tests zusätzlich durchgeführt werden könnten. Die Gewichte zur Netzwerkerzeugung könnten einzeln auf ihren Einfluß zur Netzkonstruktion betrachtet werden. Da mit diesen Parametern ein gutes Mittel existiert, um Informationen zur Optimierung einzubauen, ohne jedoch zu optimieren, wäre dies insbesondere in der Anwendung auf einem realistischen Netz interessant.

Bereits in Kapitel 3 wird unterstellt, dass das Optimum von der Struktur und Anzahl der gebauten Stromstränge n_e und Gasstränge n_g abhängt. Dies könnte auch untersucht werden, indem in verschiedenen Simulationen Häufigkeitsverteilungen des Zielfunktionals in Abhängigkeit der Netzgrößen betrachtet werden.

Insbesondere wäre der Einfluss des Zinssatzes und der Margen auf das Optimum interessant, da dieser als besonders stark vermutet werden kann. Steigt die Marge für Gas bsp. sehr stark, so würde ein Rückbau des Gasnetzes und ein Ausbau des Stromnetzes erwartet werden. Die Margen und der Zinssatz könnten zudem entscheidend sein, ob das Projekt des Netzbaus einen positiven oder negativen Ertrag abwirft. In der Anwendung könnten daher Prognosen dieser Werte verwendet werden, wobei Risikoanalysen durchgeführt werden könnten, indem verschiedene Quantile der Vorhersagen in der Optimierung verwendet werden.

Weitere Untersuchungen könnten zum Beispiel auf die Variation der Installationskosten der Technologien eingehen. Hier ist insbesondere das Heizen mit Pellets variabel, da die Preise für Pellets über die nächsten 20 Jahre variieren können.

Es könnte auch untersucht werden, wie sich das Optimum verändert, wenn bsp. keine Restriktionen bezüglich dem Anteil der gebauten Technologien existieren. Dabei werden die unteren und oberen Grenzen der $wgts$ Variable auf 0 bzw. 1 gesetzt. Dies hängt jedoch auch von den Stranglängen ab, denn diese haben einen Einfluss darauf, ob Leitungen für beide Netze gebaut werden oder nicht. Die Effekte müssten daher Netzwerk-spezifisch untersucht werden, sobald das Modell auf realistische Netzwerke angewandt werden kann.

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein neues Modell entwickelt und implementiert, das eine Optimierung des Ausbaus von Strom- und Gasnetzen ermöglicht. Dabei werden die volkswirtschaftlichen Gewinne, bestehend aus Erlösen des Strom-und Gasverkaufs und Kosten des Leitungsbaus und der Installation der Versorgungstechnologien, maximiert. Dabei muss berücksichtigt werden, dass alle beteiligten Variablen, die in die Optimierung mit einfließen, bestimmten Bedingungen an die Stabilität des Netzes und den netzwerkrelevanten Gesetzen genügen. Dies wird mit einer kontinuierlichen Optimierung unter Nebenbedingungen realisiert, wobei die Konstruktion des Netzwerks, auf dem optimiert werden soll und welches aus Strom- und Gassträngen besteht, ebenfalls in die Gesamtoptimierung mit einfließen soll.

Die Netzkonstruktion kann nicht in einer kontinuierlichen Optimierung realisiert werden, da der Bau eines Stranges mit einer Entscheidungsvariablen modelliert werden muss. Da der Netzbau algorithmisch erfolgt und keine explizite Formulierung existiert, ist eine Optimierung mit MNLIP Verfahren aufgrund nicht existierender Ableitungen in den Entscheidungsvariablen ebenfalls nicht anwendbar. Daher wird zu Beginn ein gültiges Netzwerk, bestehend aus einem Strom- und einem Gasnetz, in einem Simulationsansatz erzeugt. Die Netzwerkerzeugung berücksichtigt weitere Informationen, die für die Optimierung relevant sein könnten. Auf diesem Netzwerk wird dann kontinuierlich optimiert. Dieser Vorgang wird für mehrere Simulationen wiederholt. Dabei entstehen verschiedene Optima auf verschiedenen Netzwerken, welche zum Teil zufällig erzeugt werden. Von diesen Optima werden die besten 10 Prozent weiter verwendet und modifiziert um das beste Optima und das beste zugehörige Netzwerk zu finden.

Schließlich werden Analysen zur Optimierung, basierend auf Beispielnetzwerken mit verschiedenen Netzgrößen, durchgeführt. Dabei wird die Optimierung vorerst anhand eines kleinen Vier-Knoten Netzwerks einem kombinatorischen Ansatz gegenübergestellt. Die Ergebnisse sind identisch. Außerdem werden die analytischen Ableitungen mit finiten Differenzen verglichen. Die Unterschiede sind gering und bestätigen, dass die Ableitungen korrekt ermittelt wurden. Die Rechenzeit zur Netzwerkerzeugung wurde anhand eines Netzwerks getestet, das nach einem bestimmten Muster vergrößert werden kann. Die Rechenzeit steigt exponentiell mit der Knotenanzahl. Hier muss in weitere Methoden oder in eine Beschleunigung dieser Methode investiert werden, da, anhand dieser Ergebnisse, bei einer realistischen Anzahl an Knoten keine Berechnung in einer akzeptablen Zeit mehr möglich wäre. Weiter wurde anhand eines Zehn-Knoten Netzwerks festgestellt, dass die Verwendung der analytischen Gradienten die Rechenzeit der Optimierung deutlich reduziert. Hier könnte auch eine Rechenzeitanalyse der Optimierung für verschiedene Netzgrößen durchgeführt werden. Auf diese wird jedoch verzichtet, da angenommen werden kann, dass für realistische Netze erweiterte Verfahren der hochdimensionalen Optimierung verwendet werden müssten.

Die Ergebnisse der Optimierung entsprechen, mit Ausnahme der minimalen Spannung, die aufgrund der Lösbarkeit von 380 Volt auf 230 Volt gesetzt wurde, den realistischen Anforderungen an das Netzwerk. Es wurden lineare Zusammenhänge für das Gas-Widerstandsgesetz und der Abhängigkeit der Leistung von der Stromstärke und den Spannungen unterstellt. Diese könnten in einem nächsten Schritt neutralisiert werden um dann die Lösbarkeit für die realistischen Grenzen zu untersuchen. Da die Netzoptimierung stark von den Margen für Strom- und Gasverkauf und dem Zinssatz abhängt, könnte auch für diese Werte versucht werden, realistischere Modelle zu verwenden.

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass es mit diesem Modell möglich ist, eine, auf kleinen Netzen realistische, Stromnetzoptimierung mit passablen Ergebnissen durchzuführen. Auf diesem Modell müsste weiter aufgebaut werden, indem die Rechenzeit zur Netzwerkerzeugung beschleunigt wird und die kontinuierliche Optimierung auch auf hochdimensionale Probleme übertragen wird.

Literatur

Cerbe, G. (1999). *Grundlagen der Gastechnik: Gasbeschaffung - Gasverteilung - Gasverwendung*. Fachbuchverlag Leipzig, 5 edition.

Frohne, H. et al. (2011). *Grundlagen der Elektrotechnik*. Vieweg und Teubner Verlag, 22 edition.

Küpfmüller, K. et al. (2008). *Theoretische Elektrotechnik*. Springer, 18 edition.

Leyffer, S. (1998). Integrating sqp and branch-and-bound for mixed integer nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 18:295–309.

Nocedal, J. und Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer, 2 edition.

Oeding, D. und Oswald, B. (2011). *Elektrische Kraftwerke und Netze*. Springer, 7 edition.

Schultz, R. und Wagner, H. J. (2008). *Innovative Modellierung und Optimierung von Energiesystemen*. 1 edition.

Tipler, P.A. und Mosca, G. (2009). *Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure*. Springer, 6 edition.

Bildquellen

Firma RZVN - Wehr GmbH

http://de.wikipedia.org/wiki/Netzwerkanalyse_%28Elektrotechnik%29

http://de.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffsche_Regeln

Fußnoten

[1]Schultz und Wagner (2008) stellen innovative Optimierungsverfahren und Modelle vor, die im Bereich der dezentralen Energieversorung eingesetzt werden können.

[2]Quelle: Firma RZVN - Wehr GmbH

[3]Quelle (gemeinfrei): Wikipedia, Autor: Cepheiden (Username), Datum: 04.12.2013
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Netzwerkanalyse_%28Elektrotechnik%29

[4]Für Details zum Umlaufsinn in einem Netzwerk, siehe Frohne et al., 2011.

[5]Die Kirchhoffschen Regeln sind in Frohne et al., 2011 näher beschrieben.

[6]Für Details zum Spannungsabfall, siehe Frohne et al., 2011.

[7]Das Widerstandsgesetz im Gasnetz ist bsp. in Cerbe, 1999 näher beschrieben.

[8]Die Approximation erfolgt auf Basis einer Taylorentwicklung, wobei

$$P = r_g \cdot (Q_0^2 + 2 \cdot (Q - Q_0) + h.o.t)_{|Q_0=0}.$$

Der Vorfaktor 2 ist für die Modellierung jedoch nicht relevant, da dies über die Anpassung der oberen Grenze der Gas-Widerstands-Variablen r_g berücksichtigt werden kann.

[9]Für Details zu den Kirchhoffschen Regeln im Gasnetz, siehe bsp. Cerbe, 1999.

[10]Für Details zum Druckabfall im Gasnetz, siehe bsp. Cerbe, 1999.

[11]Quelle (gemeinfrei): Wikipedia, Urheber: Philnate (Username), Datum: 04.12.2013
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffsche_Regeln

[12]Quelle (gemeinfrei): Wikipedia, Urheber: Saure (Username), Datum: 04.12.2013
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffsche_Regeln

[13]Die KKT Bedingungen sind bsp. in Nocedal und Wright, 2006 beschrieben.

[14]Die Herleitung des SQP-Verfahrens für gleichungsrestringierte Probleme kann für $\nabla_{x,\lambda} L(x, \lambda)$ mit dem Newton-Verfahren geschehen. Dabei entspricht die erste Zeile aus (8) der quadratischen Approximation von $L(x_k, \lambda_k, \mu_k)$. Bei Ungleichungsrestriktionen wird zusätzlich mit der zweiten und dritten Zeile aus (8) eine linear-quadratische Approximation von $c_{eq}(x) = 0$ und $c_{ineq}(x) = 0$ an $x = x_k$ durchgeführt.

[15]Details zur Armijo-Regel / den Wolfe Powell Bedingungen sind in Nocedal und Wright,

2006 zu finden.

[16]Das Trust-Region Verfahren ist beispielsweise in Nocedal und Wright, 2006 näher erklärt.

[17] Die **Regionsnummer** eines Knotens weist jedem Knoten eine natürliche Zahl > 0 zu, wobei ein kleinerer Wert für eine Region steht, in der ein Netzwerk in der Regel dichter ausgebaut werden würde. Tabelle 19 gibt die Regionen und den jeweiligen numerischen Wert an.

Regionsnummer	**Regionsname**
1	Innenstadt
2	Vorstadt

Tabelle 19: Regionsnummer und Regionsname

[18]Der Slackdifferenzwert gibt an, welche Gesamtlänge an Strängen erforderlich ist, um einen Knotenpunkt in einem Netz mit dem jeweiligen Slack-Knoten auf dem kürzesten Weg zu verbinden. Der Wert wird numerisch mit der Funktion `slackdiff.m` ermittelt.

[19]Das voll ausgebaute Netzwerk (alle Stränge werden für Strom und auch für Gas benutzt) wird in der Optimierung mit $basis_net = 0$ einmalig separat untersucht.

[20]Relevante Eingabewerte für die verschiedenen Funktionen und Algorithmen, die vorgestellt wurden, sind mit den Initialisierungsparametern gegeben, oder werden mit diesen erzeugt. Dies, sowie deren Verwendung innerhalb dieses Algorithmus, wird hier nicht explizit dargestellt.

[21] Da für große Netze ohnehin auf andere Optimierungsverfahren zurückgegriffen werden könnte, wird hier auf eine Rechenzeitanalyse in Abhängigkeit der Netzgröße verzichtet.

[22]Dieser Algorithmus wird von der Funktion `fmincon.m` empfohlen, wenn keine anderen Algorithmen gefordert werden. Es wäre auch möglich weitere, eventuell eigens implementierte, Optimierungsverfahren zu untersuchen, die idealerweise auch auf sehr großen Netzen funktionieren und eine akzeptable Rechenzeit liefern.

A Anhang

A.1 Berechnung der Ableitungen

Für den Gradienten G_c_{eq} von c_{eq} mit der **Gleichheitsbedingung** $c_{eq} = 0$ in (21) gilt

$$G_c_{eq}(x) = \begin{pmatrix} dA^e_{red}(x) & 0 & A^e_{red}(x) & 0 & 0_{k.dim_e \times 4} & dI_{w_1}(x) & dI_{w_2}(x) & dI_{w_3}(x) & dI_{w_4}(x) \\ 0 & dA^g_{red}(x) & 0 & A^g_{red}(x) & 0_{k.dim_g \times 4} & dQ_{w_1}(x) & dQ_{w_2}(x) & dQ_{w_3}(x) & dQ_{w_4}(x) \end{pmatrix}$$

wobei

$$dI_{w_j}(x) = \nabla_{w_j} I(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{Req_e}{\sqrt{3} \cdot U_{slack}} \quad j = 1, 3$$

$$dI_{w_2}(x) = \nabla_{w_2} I(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{Req_e}{\sqrt{3} \cdot U_{slack}} + \frac{Req_h}{\sqrt{3} \cdot U_{slack} \cdot 3}$$

$$dI_{w_4}(x) = \nabla_{w_4} I(w_1, w_2, w_3, w_4) = 0_{k.\dim \times k.\dim}$$

und

$$dQ_{w_j}(x) = \nabla_{w_j} Q(w_1, w_2, w_3, w_4) = 0_{k.\dim \times k.\dim} \quad j = 1, 2$$

$$dQ_{w_3}(x) = \nabla_{w_3} Q(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{Req_h}{0.9 \cdot 11000}$$

$$dQ_{w_4}(x) = \nabla_{w_4} Q(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{Req_h + Req_e}{0.9 \cdot 11000}$$

Wieder werden Zeilen aus dI_{w_j} bzw. dQ_{w_j} entfernt, wenn der entsprechende Knotenpunkt nicht mit Stromsträngen bzw. Gassträngen versorgt wird, $j = 1, ..., 4$.

Weiter wurde

$$\nabla_U \left(A^e_{red}(x) \cdot U\right) = A^e_{red}(x) \quad \text{sowie} \quad \nabla_P \left(A^g_{red}(x) \cdot P\right) = A^g_{red}(x)$$

verwendet.

Die Ableitungen der reduzierten Admittanzmatrizen nach den Widerständen werden im Folgenden hergeleitet. Hier ist

$$dA^e_{red}(x) := \nabla_{r^e_{inv}} \left(A^e_{red}(x) \cdot U + b^e_{red}(x) \cdot U_1\right)$$

Diese Ableitungen werden anhand der Ableitung der vollständigen Admittanzmatrix nach r^e_{inv} ermittelt, wobei die Ableitungen von b^e_{red} analog zur Definition bestimmt wird. Dazu wird folgender Hilfssatz genutzt

Satz A.1. *Sei $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n\times m}$ Weiter sei $U \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $I \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ und $c : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m\times 1}$, wobei*

$$c(y) = S \cdot B(y) \cdot U - I$$

Dann gilt

$$\nabla c(y) = S \cdot \nabla \left(B(y) \cdot U\right)$$

***Beweis**: Sei $w_i(y) := \sum_{j=1}^m B_{ij}(y) \cdot U_j, \quad i = 1, ..., n$. Es ist*

$$S \cdot B(x) \cdot U = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n S_{1i} \cdot B_{i1}(y) & \cdots & \sum_{i=1}^n S_{1i} \cdot B_{im}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n S_{mi} \cdot B_{i1}(y) & \cdots & \sum_{i=1}^n S_{mi} \cdot B_{im}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n S_{1i} \cdot B_{ij}(y) \cdot U_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n S_{mi} \cdot B_{ij}(y) \cdot U_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n S_{1i} \cdot \sum_{j=1}^m B_{ij}(y) \cdot U_j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n S_{mi} \cdot \sum_{j=1}^m B_{ij}(y) \cdot U_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n S_{1i} w_i(y) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n S_{mi} w_i(y) \end{pmatrix}$$

daher folgt

$$\nabla c(y) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n S_{1i} \cdot \underbrace{\nabla w_i(y)}_{1\times m} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n S_{mi} \cdot \underbrace{\nabla w_i(y)}_{1\times m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S_{11} \dots S_{1n}) \cdot \nabla w(y) \\ \vdots \\ (S_{m1} \dots S_{mn}) \cdot \nabla w(y) \end{pmatrix} = S \cdot \nabla w(y) = S \cdot \nabla \left(B(x) \cdot U\right)$$

□

Für Netzmatrix A^N und Spannungsvektor U sei in diesem Zusammenhang $S = A^N$ und

$$B(y) := A^{N^\top} \otimes [y \cdot \mathbf{1}^\top]$$

Dann muss nach Definition der Admittanzmatrix gelten

$$c(y) = S \cdot B(y) \cdot U - I = A^e(y) \cdot U - I = 0$$

Es gilt

$$B(y) \cdot U = \begin{pmatrix} A^N_{11} \cdot y_1 & \cdots & A^N_{n1} \cdot y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^N_{m1} & \cdots & A^N_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot \sum_{i=1}^n A^N_{i1} \cdot U_i \\ \vdots \\ y_m \cdot \sum_{i=1}^n A^N_{im} \cdot U_i \end{pmatrix}$$

und damit

$$\nabla c(y) \underbrace{=}_{Satz\,A.1} A^N \cdot \nabla\left(B(y) \cdot U\right) = A^N \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A^N_{i1} \cdot U_i & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n A^N_{im} \cdot U_i \end{pmatrix} = A^N \cdot diag(A^{N^\top} \cdot U)$$

Mit der analogen Vorgehensweise gilt für die Admittanzgleichung im Gasnetz

$$\nabla c(y) = A^N \cdot diag(A^{N^\top} \cdot P)$$

womit $dA^g_{red}(x) := \nabla_{r^g_{inv}} \left(A^g_{red}(x) \cdot P + b^g_{red}(x) \cdot P_{slack}\right)$ ermittelt werden kann. In der numerischen Umsetzung werden erneut NaVMs benutzt, um die Ableitung mit den jeweiligen erzeugten Netzmatrizen zu berechnen.

Für den Gradienten GJ des **Zielfunktionals** J in (26) gilt hingegen

$$GJ(x) = GK^{gesamt}(x) - GE^{Gesamt}(x) \tag{46}$$

wobei

$$GK^{gesamt}(x) = \nabla_y K^{gesamt}(x) = \begin{pmatrix} (K^e)'(r^e_{inv_1}) \cdot l.len_{l.e_index(1)} \\ \vdots \\ (K^e)'(r^e_{inv_{k.dim_e}}) \cdot l.len_{l.e_index(k.dim_e)} \\ (K^g)'(r^g_{inv_1}) \cdot l.len_{l.g_index(g)} \\ \vdots \\ (K^g)'(r^g_{inv_{k.dim_g}}) \cdot l.len_{l.g_index(k.dim_g)} \\ \sum_{j=1}^{k.\dim} Req_h \cdot pellet_c \cdot 2000\,h \cdot f_{zins} \\ \sum_{j=1}^{k.\dim} \left(Req_{e_j} \cdot kwp_K_e + Req_{g_j} \cdot kwp_K_h\right) \\ \sum_{j=1}^{k.\dim} \left(Req_{e_j} \cdot bwk_K_e + Req_{g_j} \cdot bwk_K_h\right) \\ \sum_{j=1}^{k.\dim} \left(Req_{e_j} \cdot bhkw_K_e + Req_{g_j} \cdot bhkw_K_h\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$GE^{Gesamt}(x) = \nabla_x E^{gesamt}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_e \cdot hours_e \cdot Req_e \\ m_e \cdot (hours_e \cdot Req_e + hours_h \cdot Req_h) \\ m_e \cdot hours_e \cdot Req_e + m_g \cdot hours_h \cdot Req_h \\ m_g \cdot (hours_e \cdot Req_e + hours_h \cdot Req_h) \end{pmatrix} \cdot f_{zins}$$

Die Hessematrix $HJ(x)$ ist gegeben mit

$$HJ(x) = HK^{Gesamt}(x) - \underbrace{HE^{gesamt}(x)}_{=0} = HK^{Gesamt}(x) \tag{47}$$

wobei

$$HK^{Gesamt}(x) = \begin{pmatrix} (\hat{K}^e_{len})''(r^e_{inv}) & 0 & 0 \\ 0 & (\hat{K}^g_{len})''(r^g_{inv}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$(\hat{K}^e_{len})''(r^e_{inv}) = \begin{pmatrix} (K^e)''(r^e_{inv_1}) \cdot l.len_{l.e_index(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (K^e)''(r^e_{inv_{k.dim_e}}) \cdot l.len_{l.e_index(k.dim_e)} \end{pmatrix}$$

und

$$(\hat{K}^g_{len})''(r^g_{inv}) = \begin{pmatrix} (K^g)''(r^g_{inv_1}) \cdot l.len_{l.g_index(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (K^g)''(r^g_{inv_{k.dim_g}}) \cdot l.len_{l.g_index(k.dim_g)} \end{pmatrix}$$

A.2 Tabelle mit Physikalische Einheiten

Beschreibung	Bezeichnung	Physikalische Einheit	Analoge Einheit
Spannung	U	$Volt\ V$	-
Stromstärke	I	$Ampere\ A$	-
Strom-Widerstand	r^e	$Ohm\ \Omega$	-
Gasdruck	P	bar	-
Gasstrom	Q	$\frac{m^3}{h}$	-
Gas-Widerstand[23]	r^g	$bar/\left(m^3/h\right)^2$	-
Leistung (Strom)	-	Watt W	$V \cdot A$
Leistung (Gas)	-	Watt W	$bar \cdot \frac{m^3}{h}$
Querschnitte (Strom)	-	mm	-
Querschnitte (Gas)	-	mm	-

Tabelle 20: Physikalische Einheiten