Vergleich statistischer Zinsmodelle

Wissenschaftliche Arbeit
zur Erlangung des Grades eines Diplom-Volkswirtes
im Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der

Universität Konstanz

Dominik Scheck
Zollernstr. 14
78462 Konstanz

Bearbeitungszeit: 14. Juni 2001 - 14. August 2001

1. Gutachter: Prof. Dr. Jan Beran
2. Gutachter: Prof. Dr. Siegfried Heiler

Konstanz, den 13. August 2001

Vorwort

Das Thema "Vergleich statistischer Zinsmodelle" wurde in Absprache mit Herrn Prof. Dr. Beran genauer spezifiziert. Es wurde die Übereinkunft getroffen, dass ich einen statistischen Vergleich verschiedener Modelle zur Schätzung der deutschen Zinsstrukturkurve zwischen Januar 1999 und Dezember 2000 anstreben sollte.

An dieser Stelle möchte ich mich bei denjenigen bedanken, die es mir ermöglicht haben, diese Arbeit zu Ende zu bringen. Als erstes danke ich Herrn Prof. Dr. Jan Beran für seine Betreuung während meiner Arbeit und Herrn Dr. Yuanhua Feng für seine Hilfe und Unterstützung beim Einarbeiten in SPLUS.

Mein Dank geht außerdem an Herrn Dr. Christian Upper von der Deutschen Bundesbank, der mir wichtige Anregungen bei der Auswahl der Daten gab. Ferner danke ich Herrn Stefano Dova von der Allianz Asset Management GmbH in München für die Bereitstellung der Daten. Mein Dank geht auch an Herrn Tom Crocker von der Bank of England für wertvolle Anregungen.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meinen Eltern, Bruno und Annerose Scheck, und meiner Freundin, Ulrike Reinthaler, für ihre Unterstützung während meines ganzen Studiums bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Definition der Zinsstruktur **1**

2 Theorie der Zinsstruktur **8**
2.1 Notationen und Vorüberlegungen 8
2.1.1 Begriffe und Notationen 8
2.1.2 Vorüberlegungen zu existierenden Modellen 12
2.2 Anforderungen an ein Zinsstrukturkurvenmodell 13
2.2.1 Probleme bei der Ermittlung der Zinsstrukturkurve . . 13
2.2.2 Eigenschaften von Zinsstrukturkurvenmodelle 14
2.2.3 Verfahren ausgewählter Zentralbanken 14
2.3 Theorien zur Beeinflussung der Form der Zinsstrukturkurve . . 15
2.3.1 Die "Market Segmentation" Hypothese 16
2.3.2 Die Erwartungshypothese 16
2.3.3 Die Zinsrisiko-Hypothese 18
2.3.4 Die "Preferred Habitat" Hypothese 19
2.4 Altes Modell der Deutschen Bundesbank 19
2.5 Der Nelson/Siegel Ansatz 22
2.5.1 Das Modell 22
2.5.2 Besondere Eigenschaften des Ansatzes 24
2.6 Die Erweiterung von Svensson 26
2.7 Splines und Smoothing Splines 28
2.7.1 Schätzung der Diskontfunktion 28
2.7.2 Die Spline Funktionen 29
2.7.3 Wahl der Form der Funktion $f_k(m)$ 31
2.7.4 Nachteile des Spline Ansatzes 34
2.7.5 Smoothing Splines 35
2.8 Exponentielle Splines 37
2.9 Das Problem der Heteroskedastizität 42

3 Empirischer Vergleich durch Simulationen **46**
3.1 Beschreibung der Daten 46
3.2 Angewandte Verfahren 48
3.3 Exogene Zinsänderungen der Zentralbanken 48
3.4 Statistischer Vergleich 54
3.5 Berücksichtigung von Ausreißern 56

4 Interpretation der Zinsstruktur **60**
4.1 Vorhersagen über das zukünftige Zinsniveau 61
4.2 Vorhersagen über zukünftige Inflationserwartungen 65

5 Weitere Implikationen **66**
5.1 Implikationen für die Renditestrukturkurve - der Couponeffekt 67
5.2 Implikationen für das Bondmanagement 68

A Verwendete Bonddaten - eine Übersicht **70**

1 Beeinflussung von Zinsen und Definition der Zinsstruktur

Zinsen im klassischen Sinne sind prozentuale Geldanteile, die man bei der Bereitstellung von Kapital bzw. der Aufnahme von Kapital erhält oder bezahlen muss. In der Praxis werden die Terminologien Zinsen und Renditen (Engl. yield-to-maturity) oftmals verwechselt. Renditen geben den Durchschnittsertrag (yield) an, der sich aus dem Besitz einer Anleihe oder allgemein einer Forderung bis zum Ende der Laufzeit (to maturity) bei Wiederanlage der Auszahlungen ergibt. Renditen werden oftmals bei der Bewertung von festverzinslichen Rentenpapieren (Engl. bonds) verwendet. Zinsen hingegen variieren über die Zeit.

Es gibt, wie in vielen anderen Fällen auch, keine Modelle, die Zinsen in einer befriedigenden Form vorhersagen können. Man kann nur Modelle entwickeln, die die Eigenschaft der Verteilung von Zinsbewegungen beschreiben und damit statistische Erklärungen abgeben. Zinssätze werden an den Geld- und Finanzmärkten durch zu viele unvorhersehbare Ereignisse beeinflusst, die durch politische und wirtschaftliche Faktoren entstehen und nicht modelliert werden können.

So sah man zum Beispiel im Vorfeld der Diskussion zu einem möglichen EU-Beitritt verschiedener europäischer Kandidaten die Volatilitäten der Zinssätze in diesen Ländern stark ansteigen. Ein möglicher Beitritt und damit die Aussicht auf sinkende Zinsen ließen in manchen EU-Ländern die Anleihepreise in die Höhe schnellen, negative Nachrichten über mögliche verfehlte Beitrittskriterien hatten eine beschleunigende Wirkung auf die Zinsen. Dass es sich hierbei um temporäre Einflussfaktoren handelt, scheint offensichtlich zu sein. Spätestens mit der Etablierung der Europäischen Zentralbank als unabhängiger Währungshüter auf höchster Ebene schien eine Konvergenz der Zinssätze erreicht. In Zukunft scheinen andere unvorhersehbare Ereignisse einen großen Einfluss auf eine mögliche Zinsentwicklung zu nehmen.

Zinsen und Renditen - und damit auch Anleihepreise - werden in ihrem Niveau aber auch durch quantitative makroökonomische Größen determiniert, so dass zumindest in diesem Bereich die Entwicklung eines Zinsmodells sinnvoll wäre. Zu diesen Variablen gehören:

- Erwartete Inflationsraten der Marktteilnehmer und der Zentralbank
- Wachstumsrate des Bruttosozialproduktes
- Arbeitslosenhöhe und Erwerbsquotenentwicklung
- Budgetdefizite

Das Niveau dieser Größen bestimmt u.a. die Nachfrage nach Rentenpapieren und damit deren Preisniveau. Von diesem Preisniveau kann dann auf die Höhe der Rendite und damit auch auf das Zinsniveau geschlossen werden[1]. Die Renditen von Bonds werden durch viele Faktoren beeinflusst[2]. Zuerst müssen die Ausstattungsmerkmale der einzelnen Bonds betrachtet werden, vor allem die Couponhöhe, Laufzeit und der Rückzahlungsbetrag. Außerdem kann ein Bond spezielle Besonderheiten aufweisen, die einen Einfluss auf die Höhe der Rendite haben. So werden Anleihen, die schon vor dem Erreichen der Fälligkeit gekündigt werden können, sog. callable bonds, niedrigere Preise und dementsprechend höhere Renditen haben als vergleichbare noncallable bonds.

Darüber hinaus haben auch externe Faktoren Einfluss auf die Bestimmung der Rendite. Ein schlechtes Kreditrating führt dazu, dass sich die Renditedifferenz (Engl. spread) zwischen "sicheren" und schlecht gerateten Anleihen erhöht[3]. Ein weiterer Gesichtspunkt stellt die Liquidität dar. Bonds,

[1] Einen genauen Überblick über diesen Zusammenhang liefert Kapitel 2.1.

[2] Diese werden hier nur in aller Kürze dargestellt. Für eine genauere Beschreibung siehe z.B. Röger und Verhaeven [26].

[3] Mögliche Einstufungen und Ausprägungen von ratings können auf http://www.moodys.com und http://www.standardandpoors.com nachgeschlagen werden. Allgemein spricht man beim Kreditausfallrisiko von "default risk".

die überhaupt nicht oder nur selten und in kleinen Stückzahlen an der Börse gehandelt werden, illiquide Bonds, weisen Preisabschläge gegenüber gleich ausgestatteten Bonds auf, da eine Unsicherheit bezüglich eines sofortigen Wiederverkaufs besteht. Weiterhin muss man steuerliche Gesichtspunkte in Betracht ziehen. So unterliegen Zinseinkünfte in Deutschland der Einkommenssteuer, realisierte Kapitalgewinne, die nicht unter die gesetzliche Spekulationsfristenregelung fallen, bleiben jedoch steuerfrei. Demzufolge werden Anleihen mit einem hohen Coupon weniger nachgefragt als Anleihen mit einem niedrigen Coupon[4].

Die Zinsstruktur beschreibt die Kassazinssätze von Nullcouponanleihen ohne Ausfallrisiko, d.h. mit einer AAA-Bonität, in Abhängigkeit der Zeit. Bei Nullcouponanleihen, auch Zero-Bonds genannt, handelt es sich um Anleihen, bei denen keine laufende Zinszahlung erfolgt, sondern bei denen am Ende der Laufzeit der Nennbetrag zurückbezahlt wird.

Die Zinsstrukturkurve kann als die Kurve definiert werden, die die jeweiligen Zinssätze in Abhängigkeit der Zeit beschreibt. Die deutsche Zinsstrukturkurve umfasst ein Laufzeitenspektrum von drei Monaten bis 30 Jahren. Die Zinsstruktur kann in der Realität nicht direkt beobachtet werden, man kann sie nur aus den Anleihepreisen, die sich durch Angebot und Nachfrage an den Börsen ergeben, schätzen.

Normalerweise ist der Zinssatz eine steigende Funktion des Anlagezeitraumes, wir haben es folglich mit einer steigenden Zinsstrukturkurve zu tun. Längere Laufzeiten bringen höhere Zinsen, was sehr intuitiv erklärt werden kann. Wird das Geld über einen längeren Zeitraum gebunden, verliert man damit das Verfügungsrecht, als Folge erwartet man einen Unsicherheits- bzw. Risikoaufschlag. Die Realität ist wie so oft komplexer, denn es können auch sog. inverse, S-förmige Zinsstrukturkurven auftreten und solche mit "Buckel" in bestimmten Bereichen. Buckelbewegungen können oftmals mit laufzeits-

[4] Folglich ist der Preis für diese Anleihen niedriger und ihre Renditen höher. Man spricht von einem *steuerbedingtem Couponeffekt*.

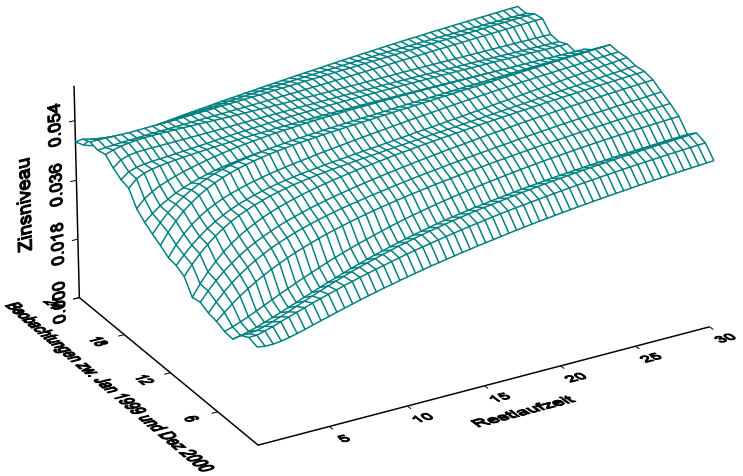

Abbildung 1: Monatliche Zinsstrukturkurven von 01/1999 bis 12/2000.

pezifischen Spekulationen erklärt werden, die kurzfristiger Natur sind, da die Spekulationen nach einer gewissen Zeit wieder zurückgehen und die Kurve sich wieder glättet.

In Abbildung 1 werden die monatlichen Zinsstrukturkurven für Deutschland zwischen Januar 1999 und Dezember 2000 dargestellt[5]. Man sieht, dass die kurzfristigen Zinsen im Zeitablauf (von Januar 1999 bis Dezember 2000) ansteigen, die langfristigen Zinsen sich jedoch nicht im gleichen Umfang verändern. Die Kurven werden somit im Zeitablauf flacher.

In Abbildung 2 wird als exemplarisches Beispiel die normale Zinsstrukturkurve von August 1999 herangezogen, die relativ steil verläuft. Abbildung 3 zeigt die Zinsstrukturkurve von November 2000, die einen S-förmigen Verlauf hat und im Vergleich zur Kurve in Abbildung 2 relativ flach verläuft.

[5] Die Darstellung der Kurven erfolgt mit Hilfe des in Kapitel 2.6 vorgestellten Vefahrens. Hierzu wurden die jeweiligen Beobachtungen zum Monatsanfang ausgewählt.

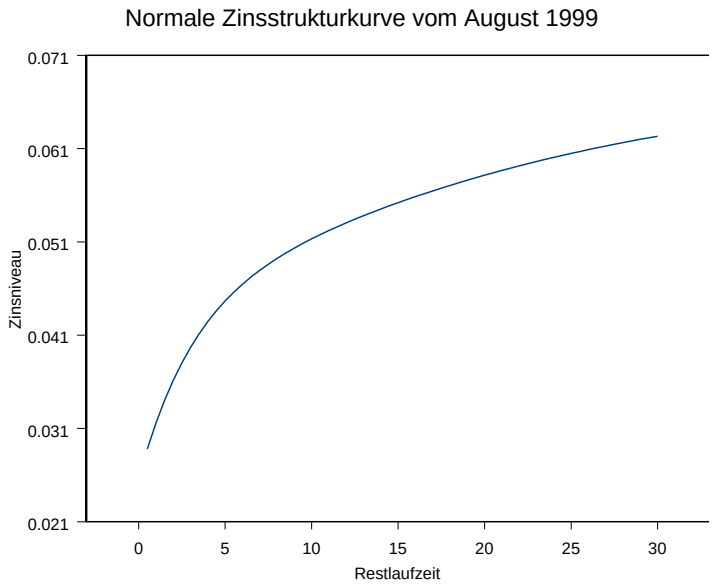

Abbildung 2: Normale Zinsstrukturkurve von August 1999.

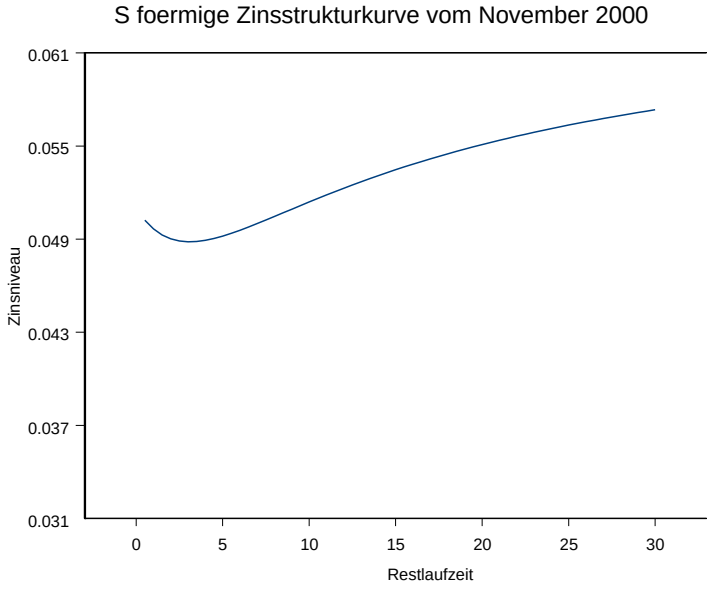

Abbildung 3: S-förmige Zinsstrukturkurve von November 2000.

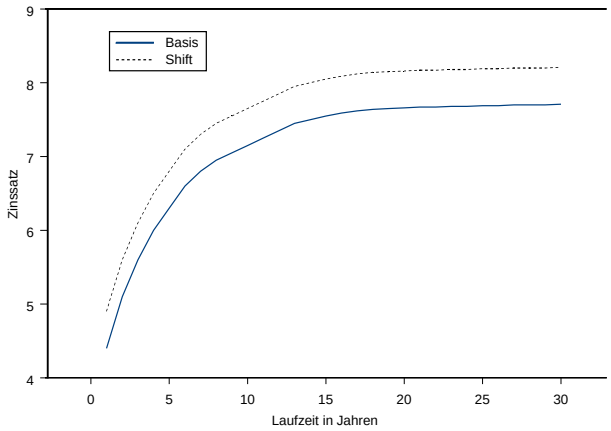

Abbildung 4: Shift-Bewegung: Bei einer Shift-Bewegung verschiebt sich die ganze Zinsstrukturkurve parallel nach oben (nach unten), d.h. jeder Zinssatz steigt (fällt) um den gleichen absoluten Betrag.

Historische Zinsstrukturkurvenverschiebungen können bereits durch folgende drei typische Bewegungen beschrieben werden[6]:

- Shift-Bewegung, dargestellt in Abbildung 4
- Twist-Bewegung[7], dargestellt in Abbildung 5
- Butterfly-Bewegung, dargestellt in Abbildung 6

Eine genauere Beschreibung der Theorien zur Beeinflussung der Form der Zinsstrukturkurve ist in Kapitel 2.3 zu finden.

[6] Vgl. Littermann und Scheinkmann [20] oder Bühler und Zimmermann [2].

[7] Die Twist- und Shift-Faktoren erklären laut einer Untersuchung von Kaltenbacher und Rohweder [17] bereits 95% der Zinsstrukturkurvenbewegungen.

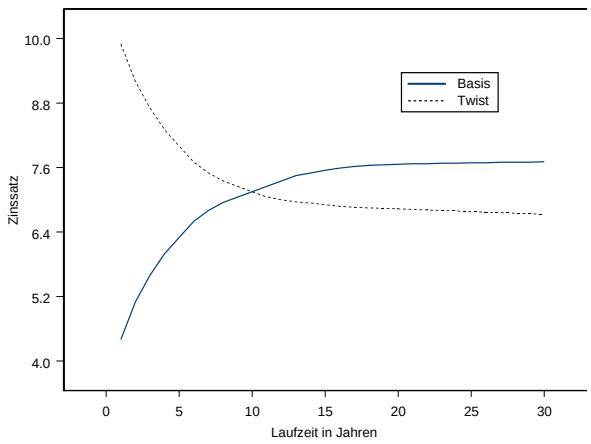

Abbildung 5: Bei einer Twist-Bewegung kommt es zu einer Drehbewegung um einen bestimmten Punkt. Annahmegemäß handelt es sich dabei um den zehnjährigen Zinssatz, der als sog. "turning-point" bezeichnet wird. Eine starke Drehbewegung um diesen Punkt ließe die Bewegung einer normalen, steigenden Zinsstrukturkurve hin zu einer inversen bei konstantem zehnjährigen Zinssatz erklären.

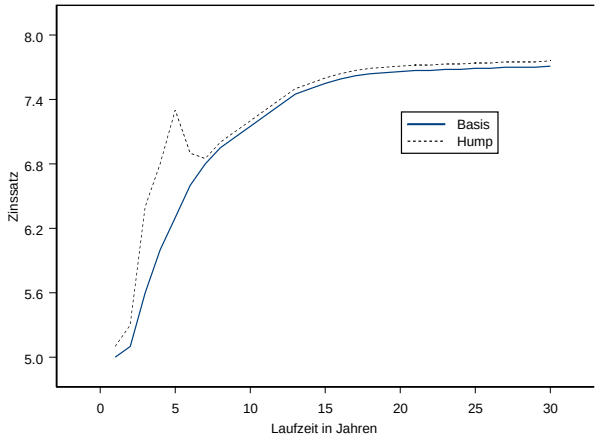

Abbildung 6: Die Butterfly-Bewegung beeinflusst vor allem die Krümmung der Zinsstrukturkurve und beschreibt "Buckel", die vorwiegend im kurzfristigen Bereich auftreten.

2 Theorie der Zinsstruktur

2.1 Notationen und Vorüberlegungen

2.1.1 Begriffe und Notationen

In diesem Kapitel möchte ich eine kurze Übersicht über die verwendete Notation geben und einige wichtige Begriffe definieren.

Unter der Annahme, dass in $t + M$ eine Geldeinheit zurückbezahlt wird, kann man den Preis einer Diskontanleihe als den Gegenwartswert (in t) des Rückzahlungsbetrages in Höhe von eins betrachten.

$$\begin{aligned} \delta_t(M)\exp(M \cdot y_t(M)) &= 1 \quad \text{bzw.} \\ y_t(M) &= -\frac{\ln \delta_t(M)}{M} \end{aligned} \tag{1}$$

wobei: $\delta_t(M)$ = Preis einer Diskontanleihe in t mit Laufzeit M
$y_t(M)$ = Rendite der Diskontanleihe in t

Bei der Rendite einer Anleihe handelt es sich um die sog. yield-to-maturity, also dem Durchschnittsertrag (yield), der sich aus dem Besitz einer Anleihe bis zum Ende der Laufzeit (to-maturity) bei Wiederanlage zu einem gleichen Prozentsatz ergibt.

$\delta_t(M)$ wird auch als Diskontfunktion bezeichnet, die den Gegenwartswert (in t) einer Geldeinheit beschreibt, die in M Jahren zurückbezahlt wird. Die Diskontfunktion ist stetig, monoton fallend und überall differenzierbar. Die Diskontfunktion wird in stetiger Schreibweise durch die sog. Diskontfaktoren repräsentiert, die in Abhängigkeit von den Kassazinssätzen und der Zeit beschrieben werden können.

$$\delta_t(M) = \frac{1}{(1 + z_{t,M})^M} \tag{2}$$

wobei: $z_{t,M}$ = Kassazinssatz in t in Abhängigkeit von Restlaufzeit M

Betrachtet man die Terminzinsen (Engl. forward rates) für das Zeitintervall t' bis M, d.h. die für einen Zeitabschnitt in der Zukunft angenommenen Kassazinssätze, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_t(t')}{\delta_t(M)} \cdot \exp((M-t')f(t,t',M)) &= 1 \\ \text{bzw.} & \\ f(t,t',M) &= \frac{\ln(\frac{\delta_t(M)}{\delta_t(t')})}{(M-t')} \end{aligned} \tag{3}$$

wobei: $\delta_t(M)$ = Preis einer Diskontanleihe in t mit Restlaufzeit M
$\delta_t(t')$ = Preis einer Diskontanleihe in t mit Restlaufzeit t'
$f(t,t',M)$ = forward rate in t für das Zeitintervall t' bis M

Während die Kassazinssätze (Engl. spot rates) $z_{t,M}$ die Verzinsung vom gegenwärtigen Zeitpunkt bis zu einem bestimmten zukünftigen darstellen, gelten die impliziten Terminzinssätze von einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt an. Implizit bedeutet, dass die Terminzinsen nicht direkt beobachtbar sind, sondern aus den Kassazinssätzen berechnet werden können. Unter der Annahme, dass der Investor beliebig viele Bonds an- und verkaufen kann, kann er sich schon heute die "zukünftigen" Kassazinssätze sichern. Um dies zu tun, investiert er in eine Nullcouponanleihe mit einer Restlaufzeit, die dem Anlagehorizont des Investors entspricht. Gleichzeitig verkauft er - er geht "short" - Nullcouponanleihen mit einer Restlaufzeit bis zu dem Zeitpunkt, an dem das Investment beginnen soll. Da sich die An- und Verkaufspositionen gleichen, geht er damit ein Nullsummenspiel ein. Wenn nun die Short-Position endet, muss er den geforderten Betrag bezahlen. Später, wenn die sog. positive Position[8] terminiert, erhält er den Rückzahlungsbetrag. Somit hat er sich den zukünftigen Kassazinssatz, also den Terminzins, gesichert.

[8] Die positive Position wird als Long-Position bezeichnet, vgl. Campbell [6].

Eine Couponanleihe stellt ein Portfolio aus Zahlungsansprüchen mit unterschiedlichen Laufzeiten dar, wobei nur der Gesamtpreis des Portfolios, in diesem Fall $P_{t,i}(M)$, bekannt ist:

$$P_{t,i}(M) = \sum_{m=1}^{M} \frac{C_i}{(1+y_{i,M})^m} + \frac{N_i}{(1+y_{i,M})^M} \tag{4}$$

wobei: $P_{t,i}(M)$ = theoretischer Preis eines Bonds i in t mit Restlaufzeit M
$y_{i,M}$ = Rendite des Bonds i in Abhängigkeit der Laufzeit M
N_i = Rückzahlungsbetrag des Bonds i, annahmegemäß zu par=100%
C_i = Couponzahlungen des Bonds i

Aus diesem Gesamtpreis kann man die Rendite oder "yield-to-maturity" mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, z.B. nach Raphson-Newton, ermitteln. Der Preis der Anleihe lässt sich ebenso in Abhängigkeit der Diskontfaktoren darstellen:

$$P_{t,i}(M) = \sum_{m=1}^{M} C_i \cdot \delta_t(m) + 1 \cdot \delta_t(M) \tag{5}$$

Wird Gleichung (2) in Gleichung (5) eingesetzt, dann erhält man die typische Anleihepreisgleichung in Abhängigkeit der Kassazinssätze:

$$P_{t,i}(M) = \sum_{m=1}^{M} \frac{C_i}{(1+z_{t,m})^m} + \frac{1}{(1+z_{t,M})^M} \tag{6}$$

Es ist zu sehen, dass man die Kassazinssätze nicht direkt aus dem Gesamtpreis eines Portfolios, d.h. aus den Anleihepreisen, ablesen kann, da die einzelnen Zahlungen entsprechend ihrer Fristigkeit mit unterschiedlichen Kassazinssätzen abgezinst werden. Kassazinssätze variieren über die Zeit, wohingegen Renditen einen Durchschnitt verschiedener Kassazinssätze bilden.

An der Wertpapierbörse werden die Anleihepreise als sog. "clean prices" notiert, d.h. kauft man einen Bond, so werden beim Kauf noch die Stückzinsen hinzuaddiert und man bezahlt letztendlich den sog. "dirty price":

dirty price=clean price + Stückzinsen

Da Bonds nicht nur an den Tagen gehandelt werden, an denen Couponzahlungen erfolgen und wir somit ganzzahlige Restlaufzeiten haben, stellt sich das Problem der Stückzinsen. Mit jedem weiteren Tag, mit dem man sich auf den nächsten Couponzahlungstag zubewegt, wachsen die Stückzinsen an. Diese ergeben sich aus der Anzahl der Stückzinstage multipliziert mit dem Coupon und durch 360 dividiert:

$$ai = C_i \cdot \frac{t - t_0}{360}$$

wobei: ai = Stückzinsen (Engl. accrued interests)
t_0 = Tag, an dem der letzte Coupon bezahlt wurde

Somit ergibt sich eine modifizierte Formel für den dirty bzw. clean price eines Bonds:

$$P_{t,i}^{cl}(M) = \sum_{m=1}^{M} C_i \cdot \delta_t(t - t_0 + m) + 1 \cdot \delta_t(t - t_0 + M)$$

bzw. (7)

$$P_{t,i}^{d}(M) = P_{t,i}^{cl}(M) + ai = \sum_{m=1}^{M} C_i \cdot \delta_t(m) + 1 \cdot \delta_t(M)$$

wobei: $P_{t,i}^{cl}$ = clean price (ohne Stückzinsen)
$P_{t,i}^{d}$ = dirty price (mit Stückzinsen)

Um diese komplizierte Berechnung zu vermeiden, kann man annehmen, dass Couponzahlungen nicht zu diskreten Zeitpunkten, sondern stetig erfolgen. Somit ergibt sich für die Preisgleichung:

$$P_i(M) = C_i \int_0^M \delta(\mu) d\mu + 1 \cdot \delta(M)$$

Diese Modellierung kann die Berechnungen und Schätzungen der Zinsstruktur erheblich vereinfachen, vgl. McCulloch [21], jedoch leidet die Güte

der Schätzung darunter.

Obwohl es sich annahmegemäß um deterministische Zahlungen C_i und N_i handelt, sind sie in Wirklichkeit stochastisch, da es zu jeder Zahlung eine Ausfallwahrscheinlichkeit gibt. Diese Ausfallwahrscheinlichkeiten werden durch das bereits erwähnte Rating bewertet.

Wurden durch eine Schätzung die Zinsstruktur und damit die laufzeitabhängigen Kassazinssätze ermittelt, so kann man aus den obigen Gleichungen (2) und (3) die Diskontfaktoren und die Terminzinsen berechnen und erhält somit auch die Terminzinsstruktur und die Diskontfunktion.

2.1.2 Vorüberlegungen zu existierenden Modellen

Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden können als Partielle Gleichgewichtsmodelle (Engl. "partial equilibrium") oder "No-Arbitrage"-Ansätze betrachtet werden, da man die "No-Arbitrage"-Bedingung dazu verwendet, um empirisch die Form der Zinsstruktur aus Anleihepreisen, wie sie an den Finanzmärkten zu beobachten sind, zu schätzen. Von Arbitrage wird gesprochen, wenn man ohne den Einsatz von Kapital durch Eingehen von Short- und Long-Positionen einen risikofreien Gewinn erzielen kann. Wäre Arbitrage möglich, könnte ein Investor beispielsweise eine strippbare Anleihe verkaufen und gleichzeitig die einzelnen Strips[9] inklusive der zu Grunde liegenden Nullcouponanleihe für weniger Geld kaufen und damit einen risikofreien Gewinn erzielen.

Darüber hinaus gibt es eine beschränkte Anzahl von theoretischen Gleich-

[9]Strips ist die englische Bezeichnung für die abgezinsten Couponzahlungen, die von der zu Grunde liegenden Nullcouponanleihe, in diesem Fall dem "principal strip", separat gehandelt werden können. Stripping ist in Deutschland seit Juli 1997 möglich, so dass theoretisch die Möglichkeit geschaffen wäre die Zinsstruktur am Anleihemarkt direkt abzulesen. Das Problem in Deutschland ist, dass auf Grund fehlender Liquidität die Preise für "gestrippte" Nullcouponanleihen sehr anfällig und volatil sind und deswegen häufig eine Liquiditätsprämie im Markt mit eingepreist wird. In den meisten anderen Staaten, vor allem den angelsächsischen, ist Stripping wesentlich verbreiteter, allerdings sind auch dort die Handelsvolumen der "strippbaren" Anleihen relativ zum Gesamtmarkt klein.

gewichtsmodellen, wie sie von Cox, Ingersoll und Ross [10] und Langetieg [18] vorgestellt wurden. Diese Modelle machen alternative Annahmen über die Natur stochastischer Prozesse, die letztendlich die Zinsbewegungen beschreiben. Gemäß dieser Annahmen leiten sie die Eigenschaften der Zinsstruktur in einem effizienten Markt her. Obwohl die resultierende Zinsstruktur eine spezifische funktionelle Form hat, die von nur wenigen Parameter abhängt, ist eine Implementierung und Umsetzung mittels Anleihepreisdaten nicht einfach und die Ergebnisse sind Vasicek und Fong [33] zu Folge sehr dürftig, wenn passende Formeln überhaupt gefunden werden können.

2.2 Anforderungen an ein Zinsstrukturkurvenmodell

2.2.1 Probleme bei der Ermittlung der Zinsstrukturkurve aus gegebenen Anleihepreisen

Eine kontinuierliche Zinsstruktur wäre am Rentenmarkt direkt beobachtbar, falls es für jede Fälligkeit eine Nullcouponanleihe gäbe, die ein vernachlässigbares Kreditausfallrisiko besitzt. Am Rentenmarkt sind jedoch nur eine sehr geringe Anzahl von Nullcouponanleihen beobachtbar, die meisten gehandelten Rentenpapiere sind Couponanleihen. Falls Preise von Anleihen mit festen Couponzahlungen herangezogen werden, kann die Ermittlung der Rendite noch relativ einfach erfolgen, die Berechnung der Zinssätze aus diesen Preisen gestaltet sich aber erheblich schwieriger. Außerdem fällt bei der Betrachtung des Laufzeitenspektrums von Anleihen auf, dass es Lücken gibt, d.h. nicht für jede Laufzeit, die von Interesse ist, gibt es eine entsprechende Anleihe.

Aus diesem Grund muss bei einer Schätzung der Kurve berücksichtigt werden wie die genannten Lücken gefüllt werden könnten, d.h. ein Modell sollte die im nächsten Abschnitt genannten Bedingungen erfüllen.

2.2.2 Eigenschaften von Zinsstrukturkurvenmodelle

Ein Modell, das die Zinsstrukturkurve beschreiben soll, muss einen möglichst guten "Fit" für die gegebenen Daten liefern. Da Zinssätze hier nicht direkt, sondern aus Anleihepreisen geschätzt werden, versuchen wir die Abweichungen zwischen theoretischen und tatsächlichen Anleihepreisen zu minimieren. Die Frage stellt sich nur, wie genau die Daten abgebildet werden müssen. Sollte die Kurve eher geglättet werden, um Ausreißer weniger zu berücksichtigen oder sollten Ausreißer eine starke Beachtung finden[10].

Ein gutes Zinsstrukturmodell sollte flexibel genug sein, um nicht nur eine große Breite an verschiedenen Formen der Kurve nachbilden zu können, sondern es sollte auch ein möglichst sinnvoller Verlauf der Zinsstrukturkurve dargestellt werden, d.h. unsinnige Schwankungen und negative Werte diskreditieren ein Modell.

Darüber hinaus sollte eine möglichst einfache Implementierung gegeben sein, wodurch natürlich die Genauigkeit der Modelle leiden kann. Für die Ansprüche von Zentralbanken genügen oftmals schon recht einfache Zinsstrukturmodelle, da hier die Implikationen im Vordergrund stehen, die steile oder flache, steigende oder fallende Kurven liefern. Nichtsdestotrotz verwenden auch die Zentralbanken die gleichen Modelle wie der professionelle Finanzbereich, der geringe Abweichungen zwischen tatsächlichen und theoretischen Werten bevorzugt. Zur Bewertung der Modelle werden statistische Kennzahlen herangezogen. Dies wird in Kapitel 3.4 beschrieben.

2.2.3 Verfahren ausgewählter Zentralbanken

Im Folgenden wird eine kleine Übersicht über die Verfahren zur Schätzung von Zinsstrukturkurven gegeben wie sie von ausgewählten Zentralbanken verwendet werden. Die meisten der genannten Verfahren werden im Rahmen dieser Arbeit genauer vorgestellt.

[10] Zur Berücksichtigung von Ausreißern siehe Kapitel 3.5.

Zentralbank	Schätzverfahren	Geschätzte Kurve
Canada	Polynom dritter Ordnung	Renditestrukturkurve
Finnland	Nelson/Siegel	Zinsstrukturkurve
Frankreich	Nelson/Siegel; Svensson	Zinsstrukturkurve
Deutschland	Svensson	Zinsstrukturkurve
Großbritannien	Nelson/Siegel; Svensson; Kubische Splines	Zinsstrukturkurve
Italien	Kubische Splines; Cox-Ingersoll-Ross Ein- und Zweifaktorenmodell	Zinsstrukturkurve
Japan	Splines fünfter Ordnung	Zinsstrukturkurve
Norwegen	Kubische Splines; Nelson/Siegel	Zinsstrukturkurve
Schweden	Svensson	Zinsstrukturkurve
Schweiz	Svensson	Zinsstrukturkurve
Spanien	Nelson/Siegel	Zinsstrukturkurve
USA	Nelson/Siegel; Svensson; Smoothing Splines	Zinsstrukturkurve

Tabelle 1: Quelle: Informationszusammenstellung für das "Meeting on the estimation of zero-coupon yield curves" bei der Bank für Internationalen Zahlungsausgleich (BIZ), 5. Juni 1996.

2.3 Theorien zur Beeinflussung der Form der Zinsstrukturkurve

Die Frage, was die Form der Zinsstrukturkurve beeinflusst, kann an Hand von vier Theorien beantwortet werden, die alle auf der gleichen Annahme basieren: es gibt Präferenzen der Investoren bezüglich der Laufzeit[11]. Die vier Theorien werden im Folgenden dargestellt und dabei werden vor allem Erklärungsversuche für die relativ höheren Zinsvolatilitäten am unteren Ende gegeben.

[11] Fabozzi [14] argumentiert, dass die Zinsstrukturkurve flach wäre, wenn es keine Präferenzen gebe. Und genau dies ist in der Realität sehr selten zu beobachten.

2.3.1 Die "Market Segmentation" Hypothese

Culbertson (1957)[12] nimmt an, dass es zwei verschiedene Arten von Nachfragern nach Anleihen gibt. Jene mit einer Präferenz für Kurzläufer und jene mit einer Präferenz für Langläufer. Dadurch kommt es zu einer Zweiteilung des Marktes, die bewirkt, dass diejenige Gruppe von Investoren, die über größere finanzielle Mittel verfügt - Investoren am kurzen Ende der Kurve - die Preise für Anleihen durch erhöhte Nachfrage nach oben treiben und damit die Zinssätze nach unten.

Die höhere Zinsvolatilität am kurzen Ende kann damit erklärt werden, dass viele Investoren in Zeiten schlechter wirtschaftlicher Konjunktur ihr Gelder in kurzlaufenden Bonds parken und in guten Zeiten dieses Geld direkt in Unternehmen investieren. Investoren am langen Ende hingegen sehen die Geldanlage als langfristiges Investment, die Nachfrage nach Anleihen bzw. die Zinsen schwanken nicht so stark.

2.3.2 Die Erwartungshypothese

Die Erwartungshypothese wird heute als die am weitesten verbreitete Hypothese angesehen, die schon sehr früh von Lutz (1940)[13] entworfen wurde. Den Annahmen zu Folge haben wir es mit rationalen Erwartungen der Anleger zu tun und diese Erwartungen "beschreiben" die Zinsstrukturkurve. Falls Investoren steigende Zinsen für die Zukunft erwarten, haben wir es mit einer steigenden Zinsstrukturkurve zu tun. Dies bedeutet, dass eine flache Zinsstrukturkurve unveränderte Zinsen für die Zukunft induziert.

Der Grund hierfür kann an einem kleinen Beispiel erklärt werden. Angenommen ein Investor möchte x Geldeinheiten in t für zwei Jahre investieren. Demnach sollte er indifferent sein zwischen einer Investition in einen zweijäh-

[12] Culbertson, J.M. (1957): The Term Structure of Interest Rates, *Quarterly Journal of Economics*, Seite 485-517.

[13] Lutz, F.A. (1940): The Structure of Interest Rates, *Quarterly Journal of Economics*, Seite 33-63.

rigen Bond und einer Investition, bei der er zuerst in einen einjährigen Bond investiert und danach auf Grundlage des Zinsniveaus in $t+1$ eine weitere Investition in einen einjährigen Bond vornimmt. Die Erwartungshypothese sagt, dass es keinen Unterschied im Ergebnis zwischen diesen beiden Investitionsmöglichkeiten geben darf[14]. Das heutige Zinsniveau beträgt $a\%$, das erwartete in einem Jahr $b\%$, wobei $b > a$. Somit würde ein Investor im zweiten Fall eine durchschnittliche Rendite von etwa $\frac{a+b}{2}\%$ erwarten. Um indifferent zu sein, muss der Investor dies auch für den ersten Fall erwarten können. Der Einjahreszinssatz beträgt somit $a\%$, der Zweijahreszinssatz $\frac{a+b}{2}\%$ und damit wäre eine steigende Zinsstrukturkurve bei gegebenen rationalen Erwartungen erklärt.

Zur Erklärung der hohen Zinsvolatilität am kurzen Ende dient der Hinweis, dass Zinsen am langen Ende, wie im obigen Fall auch, einen Mittelwert aus dem heutigen aktuellen Zinssatz für Kurzläufer und dem erwarteten Zinssatz bilden. Demzufolge sind hohe Zinssätze weniger volatil, da sie auf Durchschnittswerten basieren.

Der große Nachteil der Erwartungshypothese ist, dass sie keine Aussagen macht über die Risiken einer Abweichung der erwarteten Zinsen von den tatsächlichen zukünftigen. Falls die Terminzinsen, wie sie in der Zinsstrukturkurve modelliert sind, tatsächlich eine perfekte Vorhersage für die Zukunft liefern würden, könnte man z.B. zukünftige Anleihepreise mit Sicherheit vorhersagen. Dieses Abweichungsrisiko wird bei der Erwartungshypothese nicht berücksichtigt.

[14] Es darf folglich keinen Unterschied machen, ob ein Investor mit einem Fünf-Jahres-Investmenthorizont in Bonds mit 5, 10 oder 30 Jahren Restlaufzeit investiert, da der Ertrag, den er in allen Fällen nach fünf Jahren realisiert, der gleiche sein muss. Dies kann theoretisch und empirisch an Hand historischer Datenzeitreihen widerlegt werden, siehe z.B. Cox, Ingersoll und Ross [9].

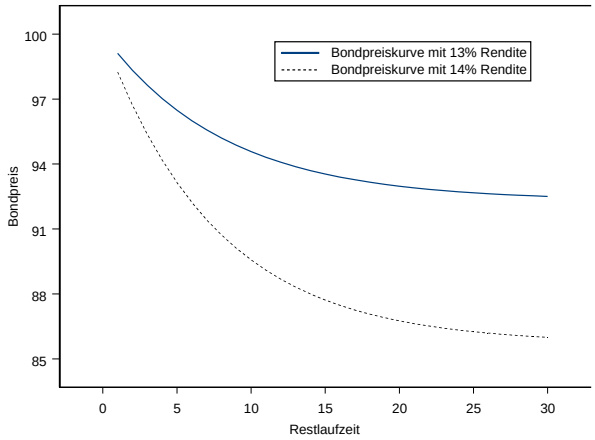

Abbildung 7: Abhängigkeit des Anleihepreises von der Restlaufzeit bei einer Rendite von 14% (gestrichelte Kurve) bzw. 13% (durchgezogene Kurve) und einem Coupon von 12%.

2.3.3 Die Zinsrisiko-Hypothese

Die Zinsrisiko-Hypothese versucht zu berücksichtigen, dass zukünftige Zinssätze von den Erwartungen der Marktteilnehmer abweichen können und damit auch zukünftige Anleihepreise[15]. Eine Veränderung der Rendite bei Anleihen hat umso stärkere Auswirkungen auf den Anleihepreis, je größer die Laufzeit ist, wie in Abbildung 7 zu erkennen ist. Allerdings steigen die Anleihepreisfluktuationen mit einer abnehmenden Grenzrate.

Unter der Annahme eines Risiko-aversen Investors, der die Schwankungsbreite seines Portfoliowertes minimieren will, ergibt sich eine Präferenz für kurzlaufende Anleihen bzw. eine Aversion gegen Langläufer, da es hier zu größeren Anleihepreisfluktuationen bei sich verändernden Zinsen kommt. Der Investor erwartet daher eine Risikoprämie auf Langläufer in Form höherer Zinsen, um indifferent zwischen den beiden Anlageformen zu sein[16].

[15] Bei der Erwartungshypothese gingen wir davon aus, dass es die Abweichungen vom tatsächlichen Niveau nicht gibt.

[16] Hicks (1946): *Value and Capital*, Oxford University Press. Er geht davon aus, dass

2.3.4 Die "Preferred Habitat" Hypothese

Die "Preferred Habitat" Hypothese von Modigliani und Sutch (1966)[17] geht auch von Präferenzen der Marktteilnehmer für bestimmte Laufzeiten aus, die sich aber nicht notwendigerweise auf die Kurzläufer beschränken. Sie berücksichtigt nicht die Preisrisiken von Bonds, sondern das sog. Reinvestitionsrisiko, das sich ergibt, wenn Rückzahlungen aus Bonds wieder angelegt werden sollen. Demzufolge werden die Präferenzen der Investoren vom Anlagehorizont gesteuert, z.B. ergeben sich für Versicherungen die Notwendigkeit einer Anlage in langlaufenden Bonds, um damit das Reinvestitionsrisiko zu minimieren oder auszuschalten. Bei kürzeren Laufzeiten ist dieses Reinvestitionsrisiko höher, womit sich die höheren Volatilitäten im unteren Bereich erklären lassen.

Die Theorie geht aber im Allgemeinen davon aus, dass Investoren eher kurzlaufende als langlaufende Bonds bevorzugen, womit langlaufende Bonds mit einer höheren Verzinsung, eines sog. "term premium", zur Steigerung der Attraktivität ausgestattet werden. Je länger die Laufzeit, desto höher die term premium.

Bei der Modellierung heutiger Zinsstrukturkurven durch Forschungsinstitute, Unternehmen und Zentralbanken wird in der überwiegenden Mehrheit aller Fälle auf das Konzept der Erwartungshypothese zurückgegriffen.

2.4 Altes Modell der Deutschen Bundesbank

Bei diesem Modell, das die Deutsche Bundesbank bis 1997 einsetzte, wurde nicht die Zinsstrukturkurve, sondern die Renditestrukturkurve geschätzt

Terminzinsen in der Zinsstruktur zum einen die rationalen Erwartungen der Anleger widerspiegeln sollen, gleichzeitig aber auch eine Risikoprämie enthalten müssen. Somit sind die Terminzinsen also keine unverzerrten Schätzer für zukünftige Zinssätze.

[17] Modigliani, F. und Sutch, R. (1966): Innovations in Interest Rate Policy, *American Economic Review*, Seite 178-97.

und als Approximation für die Zinsstrukturkurve verwendet[18]. Das Modell der Deutschen Bundesbank geht auf eine frühe Veröffentlichung von Bradley und Dwight [1] zurück[19]. Hierzu wird ein gemischt linear-logarithmisches Regressionsverfahren verwendet, das sich für $i = 1, \ldots, n$ wie folgt darstellt:

$$y_{t,i,M} = \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \cdot M_i + \beta_{t,2} \ln M_i + \beta_{t,3} \cdot C_i + \beta_{t,4} \ln C_i + \epsilon_{t,i} \tag{8}$$

wobei: $y_{t,i,M}$ = Rendite der Anleihe i in t mit Restlaufzeit M
$\beta_{t,\cdot}$ = zu schätzende Parameter zum Zeitpunkt t
C_i = Couponzahlungen der Anleihe i
$\epsilon_{t,i}$ = White Noise Fehlerterm, wobei $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Somit ergibt sich für die geschätzte Rendite:

$$\hat{y}_{t,M} = \hat{\beta}_{t,0} + \hat{\beta}_{t,1} \cdot M + \hat{\beta}_{t,2} \ln M + \hat{\beta}_{t,3} \cdot \bar{C} + \hat{\beta}_{t,4} \ln \bar{C} \tag{9}$$

wobei: $\bar{C}$ Durchschnittscoupon aller Anleihen in der Regression

Zur Schätzung der "wahrscheinlichsten" Rendite wird die Kleinste Quadrate (Least Square) Methode verwendet, d.h. die quadrierte Differenz zwischen der geschätzten und der beobachteten Rendite wird minimiert.

$$\min_{\beta_t} \sum_{i=1}^{N} \big(\epsilon_t(\beta_t)\big)^2$$

wobei: $\epsilon_t = y_t - \hat{y}_t(\beta_t)$
N = Anzahl der in die Schätzung einbezogenen Anleihen

[18] Dieses Verfahren wurde in der Vergangenheit auch in einigen wissenschaftlichen Arbeiten eingesetzt, da man vor einigen Jahren noch von einer hinreichenden Annäherung an die Zinsstrukturkurve ausging, z.B. Estrella und Mishkin [13]. Renditestrukturkurven können zwar die Form der Zinsstrukturkurve wiedergeben, der Einfluss der Couponhöhe auf die Renditen wiegt aber zu schwer, um die genaue Höhe der Renditen zu bestimmen, vgl. hierzu auch die Erklärung des mathematischen Couponeffektes in Kapitel 5.

[19] Deren Modellspezifikation lautete: $\ln(1 + y_{t,i,M}) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1} \cdot M_i + \beta_{t,2} \ln M_i + \epsilon_{t,i}$.

Die Spezifikation bewirkt, dass nur normale und inverse Renditestrukturkurven geschätzt werden können, eine Modellierung von Buckeln oder S-förmigen Kurven ist nicht möglich, da nur lineare und logarithmische Ausdrücke Verwendung finden. Diese einfache Modellierung der Renditestrukturkurve reicht für die meisten geldpolitischen Zwecke aus, die darauf abzielen Zins- und Inflationserwartungen des Marktes zu erkennen und als Indikator für die eigene Zins- und Geldpolitik zu verwenden. In der Spezifikation von vor 1981 wurden die beiden Couponterme nicht aufgenommen, in der vorliegenden Form soll damit aber der in Kapitel 5 erklärte Couponeffekt modelliert werden[20]. Effektiv schätzt die Bundesbank einen Vektor von Renditestrukturkurven, wobei jede Kurve einen anderen konstanten Coupon repräsentiert. Letztendlich wird diejenige Renditestrukturkurve ausgewählt, die sich ergibt, wenn der Durchschnittscoupon aller in der Regression einbezogener Anleihen eingesetzt wird.

Man sieht, dass die Wahl des Coupons sehr willkürlich erfolgt, eine Veränderung der Couponhöhe hat Auswirkungen auf die Renditestrukturkurve. Obwohl es sich dabei jeweils um eine Parallelverschiebung handelt, die keine Auswirkung auf die Form der Kurve selbst hat, kann nicht objektiv entschieden werden, ob der gewählte Durchschnittscoupon einer realitätsnahen Modellierung entspricht, da dies nicht aus einem theoretischen Modell abgeleitet werden kann. Insofern ist die Wahl eines Durchschnittscoupons willkürlich und kann nur auf historischen Erfahrungen beruhen.

Im Jahre 1997 sah sich die Bundesbank veranlasst ihre Modellierung der Zinsstrukturkurve bzw. der Approximation durch die Renditestrukturkurve auf Grund neuerer empirischer Untersuchungen zu verändern und auf das im folgenden Kapitel vorgestellte Modell zurückzugreifen.

[20] Dieser besagt, dass die Rendite einer Anleihe von der Couponhöhe abhängig ist. Je höher der Coupon, desto höher die Rendite, vgl. hierzu Kapitel 5.

2.5 Der Nelson/Siegel Ansatz

2.5.1 Das Modell

Bei der Deutschen Bundesbank wird seit 1997 auf Grund fehlender Daten für Nullcouponanleihen ein Berechnungsmodell verwendet, das die (nicht beobachtbare) Zinsstruktur aus den beobachteten Preisen der Couponanleihen schätzt. Ausgangspunkt ist die Annahme eines funktionellen Zusammenhangs zwischen den Kassazinssätzen, den Diskontfaktoren, den Terminzinssätzen auf der einen und der Restlaufzeit auf der anderen Seite. Das dargestellte Schätzmodell beruht auf den Vorschlägen von Nelson und Siegel [25]. Eine Erweiterung dieses Ansatzes von Svensson wird im nächsten Kapitel besprochen.

Das Modell von Nelson und Siegel beruht auf der Erwartungshypothese. Sie unterstellen, dass die Terminzinssätze $f(t, t', m)$ als Differentialgleichungen zweiter Ordnung geschrieben werden können.

$$f(t, t', m) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau}) + \beta_2 \left[(\frac{m}{\tau}) \exp(-\frac{m}{\tau}) \right] \tag{10}$$

wobei: $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)'$ der zu schätzende Parametervektor
τ = Zeitkonstante

Die Wahl dieser Form wird damit begründet, dass durch die Form die typischen Verläufe der Terminzinsstrukturkurve dargestellt werden können. Zwischen den Kassazinssätzen und den Terminzinssätzen gibt es folgenden algebraischen Zusammenhang:

$$(1 + z_{t,m})^m = \prod_{\tau=1}^{m} (1 + f_\tau).$$

Daraus kann man die Kassazinssätze aus den Terminzinsen herleiten, wobei der Zusammenhang $\ln(1 + x) \approx x$ ausgenutzt wird:

$$\begin{aligned} m \cdot \ln(1 + z_{t,m}) &= \sum_{\tau=1}^{m} \ln(1 + f_\tau) \\ z_{t,m} &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m} f_\tau \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Kassazinssätze einen Durchschnitt aus den momentanen Terminzinssätzen bilden und es folgt:

$$\begin{aligned} z_{t,m} &= \frac{1}{m} \int_0^m f(x)dx \\ &= \frac{1}{m} \left[\beta_0 m - \beta_1 \tau \exp(-\frac{m}{\tau}) + \beta_2 \tau (1 - \exp(-\frac{m}{\tau})) - \beta_2 m \exp(-\frac{m}{\tau}) + \beta_1 \tau \right] \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}} - \exp(-\frac{m}{\tau}) \right] \end{aligned} \tag{11}$$

wobei: $z_{t,m}$ = Kassazinssätze in t in Abhängigkeit von der Laufzeit m

Es gilt: $\lim_{m \to M} z_{t,m} = \beta_0$ [$\beta_0 \equiv$ langfristiger Zinssatz, damit $\beta_0 > 0$]
$\lim_{m \to 0} z_{t,m} = \beta_0 + \beta_1$ [$\beta_0 + \beta_1 \equiv$ kurzfristiger Zinssatz, damit $\beta_1 < 0$, falls normale Zinsstrukturkurve]

Die Parameter β_2 und τ bewirken einen Buckel in der Zinsstrukturkurve, wobei es sich um eine Auswölbung nach oben (für $\beta_2 > 0$) oder nach unten (für $\beta_2 < 0$) handeln kann. β_2 und τ in Kombination bestimmen die Lage des Buckels auf der Zinsstrukturkurve in Abhängigkeit der Restlaufzeit, der absolute Wert β_2 beschreibt die Stärke der Amplitude dieses Buckels.

Zur Schätzung der gesuchten Kassazinssätze wird die oben genannte Gleichung verwendet. Somit ergibt sich für die geschätzten Kassazinssätze:

$$\hat{z}_{t,m}(\hat{\beta}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \left[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}} \right] + \hat{\beta}_2 \left[\frac{1 - \exp(-\frac{m}{\tau})}{\frac{m}{\tau}} - \exp(-\frac{m}{\tau}) \right] \tag{12}$$

Mit Hilfe der geschätzten Kassazinssätze werden die theoretischen Preise der Anleihen ermittelt.

$$\hat{P}_{t,i}(\hat{\beta}_t) = \sum_{m=1}^{M} \frac{C_i}{(1+\hat{z}_{t,m})^m} + \frac{1}{(1+\hat{z}_{t,M})^M} \tag{13}$$

wobei: $\hat{z}_{t,m}$ = geschätzter Kassazinssatz in t in Abhängigkeit von m
$\hat{P}_{t,i}$ = geschätzter Preis der Anleihe i in t

Die geschätzten Diskontfaktoren ergeben sich aus Gleichung (2):

$$\hat{\delta}_t(m) = \frac{1}{(1+\hat{z}_{t,m})^m} = \hat{\delta}_t(m, \hat{\beta}) \tag{14}$$

Der geschätzte Diskontfaktor $\hat{\delta}_t(m)$ und der geschätzte Preis der Anleihe $\hat{P}_{t,i}$ sind beides Funktionen des geschätzten Parametervektors $\hat{\beta}$. Man beachte, dass der Parametervektor $\hat{\beta}$ zeitabhängig ist, somit gilt $\hat{\beta} = \hat{\beta}_t$.

Um den Parametervektor β zu optimieren, wird die quadrierte Abweichung des theoretischen von dem tatsächlich beobachtbaren Preis mit Hilfe einer KQ-Schätzung minimiert[21]:

$$\min_{\beta_t} \sum_{i=1}^{N} \left(\epsilon_{t,i}(\beta_t)\right)^2$$

wobei: $\epsilon_{t,i} = P_{t,i} - \hat{P}_{t,i}(\hat{\beta}_t)$

2.5.2 Besondere Eigenschaften des Ansatzes

Im vorliegenden Fall und auch später bei der praktischen Umsetzung wird, wie bereits erwähnt, die quadrierte Abweichung zwischen theoretischen und tatsächlichen Preisen minimiert. In einigen empirischen Untersuchungen, wie z.B. bei Schich [28], werden jedoch die quadrierten Abweichungen der theoretischen und der tatsächlichen Renditen minimiert.

[21] Zur Initialisierung der Startwerte für β macht Schich [28] folgende Angaben:
$\beta_0 \equiv$ mittlere Rendite der drei Wertpapiere mit der längsten Laufzeit
$\beta_0 + \beta_1 \equiv$ Rendite des Wertpapiers mit der kürzesten Restlaufzeit
$\beta_2 \equiv -0.005 \qquad \tau \equiv 3$

$$\min_{\beta_t} \sum_{i=1}^{N} (\epsilon_{t,i}(\beta_t))^2$$

wobei: $\epsilon_{t,i} = y_{t,i,M} - \hat{y}_{t,i,M}(\hat{\beta}_t)$
$y_{t,i,M}$ = Rendite der Anleihe i in t mit Restlaufzeit M

Dies ist möglich, da aus Gleichung (4) ersichtlich wird, dass es zu jedem gegebenen Anleihepreis in Verbindung mit gegebenen Ausstattungsmerkmalen - Couponzahlungen und Restlaufzeit - genau eine Rendite gibt[22]. Da laut Svensson [32] das Hauptaugenmerk in der monetären Analyse auf Zinsen und weniger auf Anleihepreisen liegt, sollte statt der Preisabweichung die Renditeabweichung minimiert werden. Bei seiner Untersuchung fand Svensson heraus, dass es zu großen Renditeabweichungen vor allem für kurze Restlaufzeiten kommt, wenn die Preise statt der Renditen minimiert werden. Der Grund hierfür liegt in der geringen Sensitivität von Preisen gegenüber Renditen im kurzfristigen Laufzeitenbereich. Der Nachteil ist, dass der Rechenaufwand erheblich ansteigt, falls man Renditen- statt Preisabweichungen minimiert.

Mit der Exponentialmodellierung von Nelson und Siegel können Zinsstrukturkurven dargestellt werden, die monoton steigen oder fallen, eine Form mit Buckeln aufweisen oder S-förmig sind. Damit lassen sich Zinsparallelbewegungen sowie Twistbewegungen modellieren.

Ein Vorteil der Implementierung dieses Modells ist bei der Betrachtung langer Laufzeiten erkennbar. Zinssätze im langen Bereich konvergieren asymptotisch gegen β_0, das als langfristiger Zinssatz interpretiert werden kann. In vielen anderen Modellen, z.B. bei den Schätzungen mit kubischen und exponentiellen Splines, konvergiert der langfristige Zinssatz nicht, sondern steigt kontinuierlich an oder verhält sich so, dass die Terminzinssätze negativ werden. Genauere Ausführungen dazu sind in Kapitel 2.7 nachzulesen.

[22] Mit Hilfe verschiedener Iterationsverfahren, z.B. des Newton-Raphson Verfahrens, lässt sich die tatsächliche Rendite ermitteln.

Der Nachteil dieses Ansatzes ist, dass er keine Steuereffekte berücksichtigt. Steuereffekte können dann auftreten, wenn Investoren ihre Einkünfte aus Couponzahlungen mit ihrem persönlichen Steuersätzen versteuern müssen, Einkünfte, die sich aus Kapitel- und Kursgewinnen ergeben, aber unversteuert bleiben. Demzufolge könnten Investoren eine starke Präferenz für Anleihen mit niedrigen Coupons haben. Dies führt dazu, dass der Relativpreis dieser Anleihen im Vergleich zu Anleihen mit hohen Coupons höher ist. Aus diesem Grund sollte ein optimales Modell eine Korrekturmöglichkeit des Steuereffektes ermöglichen, sofern Steuereffekte überhaupt in den Bonddaten auftreten.

2.6 Die Erweiterung von Svensson

Svensson [32] erweiterte das Modell von Nelson und Siegel durch einen weiteren Exponentialterm und durch die Einführung von zwei neuen Parametern. Dadurch sollte die Flexibilität des Modells gesteigert werden. So kann beispielsweise ein zweiter Buckel dargestellt werden, der oftmals in der Praxis in Folge von kurzfristigen Spekulationen zu beobachten ist. Allerdings führt die Aufnahme von zwei neuen Parametern dazu, dass der Rechenaufwand erheblich gesteigert wird. Desweiteren bedeuten zwei zusätzliche Parameter normalerweise, dass sich die Ergebnisse verbessern. In diesem Fall soll die Erweiterung berücksichtigt werden, um auf der einen Seite den Grad der Verbesserung gegenüber Nelson/Siegel zu messen und auf der anderen Seite um zu testen, ob eine Implementierung des Modells überhaupt möglich war[23].

$$\begin{aligned} f(t,t',m) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau_1}) + \beta_2 \left[(\frac{m}{\tau_1}) \exp(-\frac{m}{\tau_1}) \right] \\ + \beta_3 \left[(\frac{m}{\tau_2}) \exp(-\frac{m}{\tau_2}) \right] \end{aligned} \tag{15}$$

[23] Obwohl eine Implementierung möglich war, ergaben sich für bestimmte getestete Startwerte Rechenfehler und es kam zu unsinnigen Ergebnissen.

wobei: $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)'$ der zu schätzende Parametervektor
τ_1, τ_2 = Zeitkonstanten

Aus den Terminzinsen können nun wieder die Kassazinssätze hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} z_{t,m} &= \frac{1}{m}\int_0^m f(x)dx \\ &= \beta_0 + \beta_1\left[\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}}\right] + \beta_2\left[\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_1})}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp(-\frac{m}{\tau_1})\right] \\ &\quad + \beta_3\left[\frac{1-\exp(-\frac{m}{\tau_2})}{\frac{m}{\tau_2}} - \exp(-\frac{m}{\tau_2})\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Es gilt: Das Modell hat die gleichen Grenzwerteigenschaften wie das Modell von Nelson und Siegel:
$\lim_{m\to M} z_{t,m} = \beta_0$ [$\beta_0 \equiv$ langfristiger Zinssatz, damit $\beta_0 > 0$]
$\lim_{m\to 0} z_{t,m} = \beta_0 + \beta_1$ [$\beta_0 + \beta_1 \equiv$ kurzfristiger Zinssatz, damit $\beta_1 < 0$, falls normale Zinsstrukturkurve]

Obwohl das Svensson Modell eine genauere Spezifikation darzustellen scheint, wird in der Praxis das Nelson-Siegel Modell aus Stabilitätsgründen oftmals bevorzugt. Da weniger Parameter verwendet werden, scheint es robuster und stabiler zu sein, speziell dann, wenn nur wenige Anleihen als Ausgangsdaten zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund verwenden z.B. Spanien und Finnland den Ansatz von Nelson/Siegel. Andere Staaten implementieren beide Modelle und vergleichen die Ergebnisse. Dabei wird oftmals der Nelson-Siegel Ansatz zur Schätzung des Parametervektors $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)'$ benutzt. Die geschätzten Parameter werden im Anschluss zusammen mit den Startwerten für β_2 und τ_2 zur Schätzung der Svensson-Erweiterung verwendet[24]. Diesem Vorgehen folgen beispielsweise Frankreich und Belgien.

[24] Die Startwerte für die zwei neuen Parameter sind: $\beta_3 = -0.005$ und $\tau_2 = 3$. Dabei wurden teilweise die Empfehlungen der Deutschen Bundesbank übernommen, für β_3 wurden aber bessere Ergebnisse mit dem oben erwähnten Startwert erzielt.

2.7 Splines und Smoothing Splines

2.7.1 Schätzung der Diskontfunktion

Bevor die Implementierung von Smoothing Splines betrachtet wird, soll die bereits erwähnte Diskontfunktion $\delta = \delta_t(m)$ noch einmal ins Gedächtnis gerufen werden. Die Diskontfunktion ist eine stetige Funktion, die die Diskontfaktoren in Abhängigkeit der Zeit darstellen. Diskontfaktoren sind somit diskrete Ausprägungen der Diskontfunktion.

Als Ausgangspunkt unserer Schätzung dient die bereits bekannte Gleichung (7), aus der die Diskontfunktion geschätzt werden soll.

$$P_{t,i}^{cl}(M) + ai = \sum_{m=1}^{M} C_i \cdot \delta_t(m) + 1 \cdot \delta_t(M) + \epsilon_i \tag{17}$$

Diese Schätzgleichung drückt aus, dass der tatsächliche Preis vom theoretischen Preis abweichen kann, was hier durch den Störterm ϵ_i modelliert wird[25]. Der Grund für diese Abweichung kann in von Anleihe zu Anleihe verschieden hohen Transaktionskosten, statistischen Fehlern oder Mispricing liegen.

Schätzt man die Zinsstruktur über die Diskontfunktion, kann man lineare Schätzverfahren verwenden. Dazu wird die Diskontfunktion als Linearkombination verschiedener kontinuierlicher Funktionen $f_k(m)$ beschrieben[26].

$$\delta(m) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} a_k f_k(m) \tag{18}$$

wobei: a_k = Regressionskoeffizienten
K = Anzahl der Funktionen bzw. Ordnung der Splines
$f_k(m)$ = bekannte Funktionen in Abhängigkeit der Restlaufzeit m

Da annahmegemäß $\delta(0) = 1$ gilt, folgt daraus $f_k(0) = 1$ für alle k. Daraus

[25] Annahmen über die Verteilung des Störterms bzw. Probleme mit Heteroskedastie werden im Kapitel 2.9 genauer erläutert.

[26] Die Herleitung folgt in großen Teilen der von Campbell, Lo und MacKinlay [7].

kann man schließen, dass $a_0 = 1$. Setzt man nun Gleichung (18) in Gleichung (7) so erhält man:

$$\begin{aligned} P^d_{t,i}(M) = P^{cl}_{t,i}(M) + ai &= \sum_{m=1}^{M} C_i \cdot \delta(m) + \delta(M) + \epsilon_i \\ &= \sum_{m=1}^{M} C_i \left[1 + \sum_{k=1}^{K} a_k f_k(m)\right] + 1 + \sum_{k=1}^{K} a_k f_k(M) + \epsilon_i \\ &= M \cdot C_i + \sum_{m=1}^{M} C_i \left[\sum_{k=1}^{K} a_k f_k(m)\right] + 1 + \sum_{k=1}^{K} a_k f_k(M) + \epsilon_i \end{aligned} \tag{19}$$

Durch Umstellen der Terme ergibt sich

$$\begin{aligned} P^{cl}_{t,i}(M) + ai - M \cdot C_i - 1 &= \sum_{k=1}^{K} a_k \left[\sum_{m=1}^{M} f_k(m) \cdot C_i + f_k(M)\right] + \epsilon_i \\ \Pi_i &= \sum_{k=1}^{K} a_k X_k + \epsilon_i \end{aligned} \tag{20}$$

wobei: $\Pi_i = P^{cl}_{t,i}(M) + ai - M \cdot C_i - 1$
$X_k = \sum_{m=1}^{M} f_k(m) \cdot C_i + f_k(M)$

Somit erhält man einen linearen Regressionsansatz. Die Frage wie die Funktionen $f_k(m)$ zur Schätzung der Diskontfunktion aussehen sollen, um einen möglichst hohen Goodness-of-Fit zu erhalten, wird in der Literatur ausführlich besprochen. Im folgenden Kapitel wird der am häufigsten verwendete Ansatz vorgestellt, der auch in der Mehrzahl der bereits veröffentlichten Artikel die besten Ergebnisse erzielte.

2.7.2 Die Spline Funktionen

Spline Funktionen sind aus Polynomen niedrigen Grades aufgebaut[27]. Bei quadratischen und kubischen Splines wird die Diskontfunktion durch anein-

[27] Einen umfassenden Einblick in Splines und ihre praktische Anwendung gibt De Boer [12].

ander gereihte stückweise Polynome zweiten und dritten Grades für Teilintervalle des gesamten Laufzeitenbereichs bestimmt. Dabei greift man auf das sog. **Weierstrass Theorem** zurück, das besagt, dass man in einem abgeschlossenen Intervall des Definitionsbereichs für jede stetige und differenzierbare Funktion ein Polynom finden kann, das diese Funktion beliebig genau approximiert[28].

Leider gibt es Probleme bei der Verwendung von Polynomen höheren Grades. Auch wenn sie einen höheren Goodness-of-Fit bieten, so ergeben sich doch Probleme, wenn sie an Hand von Daten ermittelt werden, die große Zwischenräume aufweisen. Große Schwankungen und eine schlechte Glättung sind als Folge keine Seltenheit. Aus diesem Grund werden hier nur Polynome zweiten und dritten Grades verwendet, sog. quadratische und kubische Polynome.

Mit diesen stückweisen Polynomfunktionen wird die Approximation eines Polynoms hohen Grades durch aneinander gefügte Polynome niedrigen Grades erreicht[29]. Ein Spline K-ter Ordnung bedeutet, dass es K verwendete Splines gibt. Die Punkte, an denen die Polynome ineinader übergehen, werden als Knotenpunkte bezeichnet. Die Knotenpunkte am Anfang und am Ende werden mitberücksichtigt, so dass man bei einer Anzahl von K Knotenpunkten, $(K-1)$ Intervalle hat, in denen die Spline Funktion jeweils durch ein Polynom dargestellt wird. An den Intervallgrenzen muss gelten, dass die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen jeweils gleich sind um die Eigenschaft der Stetigkeit zu erfüllen.

Die Anzahl der Knotenpunkte sollte optimal gewählt werden. Falls die Zahl der Knotenpunkte zu klein ist, wird das Modell die Daten nur unzureichend abdecken. Falls die Zahl aber zu hoch ist, werden Ausreißer zu

[28] Je genauer die Approximation erfolgen soll, desto höher muss der Grad des Polynoms gewählt werden.

[29] Die Funktionen, die im gesamten Definitionsbereich definiert sind und aus den einzelnen einfachen Polynomen hervorgehen, werden als Spline Funktionen bezeichnet - nicht aber die einzelnen stückweisen Polynome, vgl. hierzu De Boer [12].

stark berücksichtigt. McCulloch [22] und weitere Autoren wählen die Anzahl der Knotenpunkte gleich der Wurzel der Anzahl der Anleihen, die in der Schätzung verwendet werden. Die Bank of England verwendet demgegenüber für ihr eigenes Modell seit Jahren sechs fixe Knotenpunkte, die in gleichen Zeitabständen über den Laufzeitenbereich verteilt sind[30]. Steeley [31] schlägt vor grundsätzlich drei Knotenpunkte zu verwenden, d.h. den Laufzeitenbereich in die Intervalle $[0, 5], [5, 10]$ und $[10, 30]$ zu unterteilen, da damit die Freiheitsgrade der Diskontfunktion in jedem Intervall maximiert werden.

2.7.3 Wahl der Form der Funktion $f_k(m)$

Die Wahl der Funktion von $f_k(m)$ ist sehr wichtig, um einen möglichst großen Goodness-of-Fit zu erhalten. Es muss allerdings beachtet werden, dass die Funktion überall differenzierbar ist und dass $f_k(0) = 0$ gilt. Die Laufzeiten der verwendeten Anleihen sind über den Laufzeitenbereich nicht gleichverteilt, deswegen erhält man dort eine gute Approximation der Diskontfunktion, wo relativ viele Beobachtungen vorhanden sind[31].

Bei der Anwendung des Weierstrass Theorems könnte man versuchen die Funktion $f_k(m)$ durch ein Polynom abzubilden:

$$f_k(m) = m^k \qquad \text{für} \quad k = 1, \ldots, K$$

Dadurch wird die Diskontfunktion zu einem Polynom K-ter Ordnung. Das Problem bei der Verwendung dieses Ansatzes wird von McCulloch [21] beschrieben. Entweder wird der kurze Laufzeitenbereich - und damit 5% der

[30] Das Modell der Bank of England weicht vor allem in einem Punkt von den hier vorgestellten ab. So versucht es den sog. Steuereffekt zu modellieren. Der Steuereffekt tritt dann auf, wenn Einkünfte aus Kapitalgewinne (Kursgewinne) anders besteuert werden als Kapitalerträge, z.B. in Form von Zins- oder Dividendenzahlungen. In Deutschland gibt es die Spekulationsfrist von einem Jahr, nach der Einkünfte aus Kapitalgewinne steuerfrei erzielt werden dürfen. Kapitalerträge sind in vollem Umfang zu versteuern, womit sich eine relativ geringere Nachfrage nach Anleihen mit hohen Coupons erklären ließe.

[31] Dies ist oftmals am kurzen Ende der Kurve der Fall, da es für das lange Ende nur sehr wenige Anleihen zur Schätzung gibt.

ganzen Kurve - relativ gut beschrieben und der Rest wird ignoriert oder das kurze Ende wird relativ schlecht und dafür 95% der Kurve gut abgebildet.

Wie bereits erwähnt wird der Laufzeitenbereich in $(K-1)$ Subintervalle geteilt, da man K Knotenpunkte gewählt hat. Im Folgenden werden die Knotenpunkte mit d_j bezeichnet und es gilt:

$$d_1 = 0 \quad \text{und} \quad d_K = M$$

Für die Funktionen $f_k(m)$ schlägt McCulloch [21] folgende Spezifikation vor:

$$f_1(m) = \begin{cases} m - \frac{1}{2d_2}m^2 & 0 \leq m \leq d_2 \\ \frac{1}{2}d_2 & d_2 < m \leq M \end{cases}$$

Für $k = 2, \ldots, K-1$:

$$f_k(m) = \begin{cases} 0 & 0 \leq m \leq d_{k-1} \\ \frac{(m-d_{k-1})^2}{2(d_k - d_{k-1})} & d_{k-1} < m \leq d_k \\ \frac{1}{2}(d_k - d_{k-1}) + (m - d_k) - \frac{(m-d_k)^2}{2(d_{k+1}-d_k)} & d_k < m \leq d_{k+1} \\ \frac{1}{2}(d_{k+1} - d_k) & d_{k+1} < m \leq M \end{cases}$$

$$f_K(m) = \begin{cases} 0 & 0 < m \leq d_{K-1} \\ \frac{(m-d_{K-1})^2}{2(M-d_{K-1})} & d_{K-1} < m \leq M \end{cases}$$

Eine Möglichkeit zur Schätzung der Spline Funktionen unter Berücksichtigung der Restriktionen, d.h. die ersten und zweiten Ableitungen müssen an den Knotenpunkten für jeweils zwei Nachbarintervalle gleich sein, besteht in der Verwendung der RLS-Methode (Restricted Least Squares)[32].

Unter Beachtung der oben gemachten Annahmen[33] und der beobachteten Preise, gegebenen Couponzahlungen und Restlaufzeiten werden die Diskontfaktoren auf die Laufzeiten regressiert, wobei die bereits erwähnten Restriktionen berücksichtigt werden. Die unabhängige beobachtbare Variable wird

[32] Buse und Lim [3] beweisen, dass kubische Splines ein Sonderfall der Kleinste Quadrate Schätzung mit Restriktionen darstellen.

[33] K = Anzahl der Knotenpunkte
$(K-1)$ = Anzahl der Subintervalle, wobei $d_1 = 0$ und $d_K = M$.

in einer blockdiagonalen Matrix $X = Diag(M_1, \ldots, M_K)$ zusammengefasst. M_j stellt dabei eine Matrix der Dimension (n_jx4) dar, wobei n_j die Anzahl der Anleihen im Intervall $[d_j, d_{j+1}]$ ist. Daraus folgt, dass

$$\sum_{j=1}^{K-1} n_j = N \qquad \text{wobei } N = \text{Anzahl aller Anleihen}$$

Da kubische Splines verwendet werden sollen, ist die i-te Reihe der Laufzeitenmatrix M_j definiert als $(1, m_{ij}, m_{ij}^2, m_{ij}^3)$. Zur Schätzung der Diskontfunktion ist die abhängige Variable definiert als $y_{ij} = \delta(m_{ij}) - 1$. Die Subtraktion in Höhe von 1 erfolgt, da $\delta(0) = 1$.

Für jedes Subintervall wird nun ein kubisches Polynom gebildet.

$$y_{ij} = b_{1j} + b_{2j}m_{ij} + b_{3j}m_{ij}^2 + b_{4j}m_{ij}^3 \qquad \text{für} \quad j = 1, \ldots, K-1$$

Darüber hinaus werden die Restriktionen berücksichtigt, die an den Knotenpunkten gelten sollen, d.h. es soll gelten

$$y_{ij} = y_{i,j+1} \qquad y'_{ij} = y'_{i,j+1} \qquad y''_{ij} = y''_{i,j+1} \qquad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned}
b_{1j} + b_{2j}d_{j+1} + b_{3j}d_{j+1}^2 + b_{4j}d_{j+1}^3 &= b_{1,j+1} + b_{2,j+1}d_{j+1} + b_{3,j+1}d_{j+1}^2 + b_{4,j+1}d_{j+1}^3 \\
b_{2j} + 2b_{3j}d_{j+1} + 3b_{4j}d_{j+1}^2 &= b_{2,j+1} + 2b_{3,j+1}d_{j+1} + 3b_{4,j+1}d_{j+1}^2 \\
2b_{3j} + 6b_{4j}d_{j+1} &= 2b_{3,j+1} + 6b_{4,j+1}d_{j+1}
\end{aligned}$$

Die Parameter des Modells b_{ij} können mit RLS geschätzt werden, falls N (Anzahl der Anleihen) größer ist als die Anzahl der Parameter der Restriktionen. Der zu schätzende Parametervektor ergibt sich zu $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{K-1})'$ wobei $b_j = (b_{1j}, \ldots, b_{4j})'$ für $j = 1, \ldots, 4$. Der Vektor der unabhängigen Variablen ergibt sich zu $Y = (y_1, \ldots, y_{K-1})'$ und der Vektor der Fehler zu

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{K-1})'$, wobei man von $\mu_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ ausgeht. RLS stellt sich in Matrixschreibweise wie folgt dar:

$$Y = X\beta + \mu \qquad \text{s.t.} \quad r = R\beta$$

wobei: r = Nullvektor
$R = (R_1, R_2, R_3, R_4)'$

Für $i = 1, 2$ und 3

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -e_{2i} & e_{2i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -e_{3i} & e_{3i} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -e_{K-1,i} & e_{K-1,i} \end{bmatrix}$$

wobei für $j = 2, \ldots, K-1$

$$\begin{aligned} e_{j1} &= (1, d_j, d_j^2, d_j^3) \\ e_{j2} &= (0, 1, 2d_j, 3d_j^2) \\ e_{j3} &= (0, 0, 2, 6d_j) \end{aligned}$$

Der RLS-Schätzer von β ergibt sich zu:

$$\hat{\beta}_{RLS} = \hat{\beta}_{LS} + (X'X)^{-1}R[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta}_{LS})$$

wobei: $\hat{\beta}_{LS} = (X'X)^{-1}X'Y$

2.7.4 Nachteile des Spline Ansatzes

Da die Splines quadratische oder kubische Polynome sind, konvergieren diese bzw. die Diskontfunktion für steigende Laufzeiten nicht gegen Null, so wie es die Theorie erfordert. Es kann passieren, dass die impliziten Terminzinsen, die man aus den Kassazinsen berechnen kann, ins Unendliche ansteigen oder negativ werden wie im Fall von Shea [29] bewiesen. Das Hauptproblem dabei

ist, dass in den meisten Fällen die Zinsstrukturkurven für sehr hohe Laufzeiten sehr flach werden und dies durch quadratische und kubische Splines nur unzureichend darstellbar ist.

Aus diesem Grund wurden in späteren Ansätzen die Anzahl der Knotenpunkte nicht von vornherein festgelegt, sondern sie werden optimal gewählt[34]. Diese sog. Regression oder Smoothing Splines werden im folgenden Kapitel vorgestellt.

Darüber hinaus wurden Untersuchungen an exponentiellen Splines als Alternative zu quadratischen und kubischen Splines durchgeführt. Die Vorgehensweise wird in Kapitel 2.8 genauer erläutert.

2.7.5 Smoothing Splines

Der Nachteil des oben beschriebenen Ansatzes ist, dass die Intervalle bzw. die Knotenpunkte sehr beliebig gewählt wurden. Wünschenswerter wäre es jedoch, wenn endogen die optimale Anzahl der Knotenpunkte ermittelt werden würde. Außerdem scheinen die Zinsstrukturkurven bei diesen Ansätzen sehr anfällig für Ausreißer zu sein, da eine wünschenswerte Glättung nicht erreicht wird.

In dem "erweiterten" Spline Ansatz wird nun ein Strafterm eingeführt, der die gewünschte Glättung herbeiführen soll. Dieser Term bestraft eine zu starke Berücksichtigung von Ausreißern, d.h. anormale Krümmungen sollen geglättet werden. Damit versucht man einen optimalen Trade-Off zwischen Goodness-of-Fit, d.h. Flexibilität hinsichtlich der Daten, und der Glättung der Kurve zu erreichen. Für die zu minimierende Zielfunktion ergibt sich

$$\min_{\delta} \sum_{i=1}^{N} (\epsilon_i(\delta))^2 + \int_0^M \lambda_t(m)[\delta''(m)]^2 dm$$

wobei: $\epsilon_i(\delta) = P_i - \hat{P}_i^{\delta}(\delta)$

[34] Vgl. hierzu Fisher, Nychka und Zervos [16].

$\lambda_t(m)$ = Glättungsparameter
N = Anzahl der Anleihen

Der Goodness-of-Fit wird durch ϵ_i und die Glättung der Kurve durch den zweiten Term in obiger Gleichung repräsentiert.

Je nachdem wie dieser Glättungsparameter gewählt wird, variieren die Ergebnisse. Fisher, Nychka und Zervos [16] nehmen beispielsweise an, dass λ_t unabhängig von der Laufzeit der Bonds ist und sich nur über die Zeit verändert: $\lambda_t(m) = \lambda_t$. Sie verwenden das sog. "Generalized Cross Validation" um λ in Abhängigkeit vom Beobachtungszeitpunkt t zu bestimmen. Dabei wird λ so gewählt, dass das folgende Generalized Cross Validation Kriterium (GCV) minimiert wird[35].

$$\min \quad \mathrm{GCV}(\lambda) = \frac{1}{N}\frac{\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i(\lambda)}{(1-\frac{p}{N})^2} = \frac{RSS}{(1-\frac{p}{N})^2}$$

wobei: p = Anzahl der Parameter der Splines
N = Anzahl der Anleihen
RSS = Residual Sum of Squares

Fisher et al. [16] approximieren nicht die Diskontfunktion, sondern benutzen kubische Splines um die Terminzinsstrukturkurve zu schätzen und daraus die Zinsstrukturkurve abzuleiten. Indem wir den Strafterm einführen, verändern wir natürlich auch die Anzahl der Parameter, die geschätzt werden müssen, wobei diese wiederum von der Modellierung von λ abhängen. Da die Terminzinsstrukturkurve geschätzt wird, werden nicht-lineare Schätzmethoden verwendet, im vorliegenden Fall Nonlinear Least Squares (NLS), da lineare Methoden versagen.

Demgegenüber nimmt Waggoner [34] an, dass λ sich nur über die Laufzeit der Anleihen verändert, also gänzlich unabhängig vom Beobachtungszeitpunkt t ist: $\lambda_t(m) = \lambda(m)$. Der Grund für diese Annahme liegt in der

[35] Über die Wichtigkeit des Glättungsparameters und zur Methodik der verschiedenen Ansätze informiert Wahba [35] in Kapitel 4 seines Buches.

Überlegung, dass am kurzen Ende der Kurve eine höhere Flexibilität hinsichtlich der Schätzung wünschenswert wäre als am langen Ende. Dadurch, dass der Glättungsparameter mit der Laufzeit variiert - in diesem Falle ansteigt - erhält man eine höhere Flexibilität (Goodness-of-Fit) am kurzen Ende der Kurve und verhindert gleichzeitig, dass Ausreißer am langen Ende einen zu starken Einfluss haben, da die Kurve stärker geglättet wird[36].

$$\lambda(m) = \begin{cases} 0.1 & \text{für } 0 \leq m \leq 1 \\ 100 & \text{für } 1 < m \leq 10 \\ 100000 & \text{für } 10 < m \end{cases}$$

2.8 Exponentielle Splines

Die Motivation zur Verwendung von exponentiellen Splines liegt in den Nachteilen der kubischen und quadratischen Polynomialsplines, die im vorigen Kapitel Erwähnung fanden. Da die Zinsstrukturkurven am langen Ende sehr stark abfallen können und es somit zu negativen Terminzinsen kommen kann, verwenden Vasicek und Fong [33] Exponentialfunktionen zur Approximation der Diskontfunktion.

Die Vorteilhaftigkeit der Verwendung von exponentiellen Splines wird von Vasicek und Fong damit begründet, dass der Verlauf der Diskontfunktion "tendenziell" exponentiell sei und Polynome einen hiervon abweichenden Verlauf haben. Die Folge ist, dass "sich die geschätzten Polynome wellenförmig um die exponentiell verlaufende Diskontfunktion bewegen [...], woraus große ökonomisch nicht erklärbare Schwankungen der geschätzten Terminzinssätze resultieren [...]" (Bussmann [4]). Mit Hilfe von exponentiellen Splines sollen asymptotisch flache Terminzinskurven darstellbar sein, so wie sie in der

[36] Hier muss die Glättungsfunktion $\lambda = \lambda(m)$ vorab gewählt werden. Waggoner wählte z.B. eine Stufenfunktion mit Stufen bei ein- und zehnjähriger Laufzeit. Der Grund hierfür war die Einteilung des amerikanischen Anleihemarktes in Bills (abgezinste Geldmarktpapiere bis 1 Jahr Laufzeit), Notes (mittelfristige Finanzmarktpapiere mit bis zu 10 Jahren Laufzeit) und Bonds (langfristige Schuldverschreibungen mit mehr als 10 Jahren Laufzeit).

Realität oftmals zu beobachten sind[37].

Bei der Implementierung der Modelle und bei der Durchführung wurde dieser Ansatz nicht berücksichtigt, da zum einen eine Computersimulation sehr aufwendig ist, zum anderen aber auch die Schätzungen mit exponentiellen Splines nicht besser sind als mit Polynomen[38]. Der Vorteil exponentieller Splines liegt darin, dass Terminzinsen und Kassazinsen für steigende Laufzeiten auf einen Grenzwert konvergieren.

Vasicek und Fong verwenden einen kubischen exponentiellen Spline, um die Diskontfunktion zu modellieren:

$$\delta_t(m) = b_0 + b_1 \exp(-\alpha m) + b_2 \exp(-2\alpha m) + b_3 \exp(-3\alpha m)$$

Der Parameter α wird verwendet, um zu verhindern, dass die Terminzinsen negativ werden, womit weitere Restriktion in die Schätzung mit eingebracht werden. Die erste und zweite Ableitung der Diskontfunktion ist wie bereits gesehen an den Knotenpunkten stetig. Vasicek und Fong modellieren aber gleichzeitig auch Besonderheiten, die die Ausstattung der Anleihen betreffen. So wird in ihrer Gleichung ein Preisabschlag für sog. Callable Bonds berücksichtigt, deren Verwendung aber aus Gründen einer möglichen Verzerrung der Ergebnisse von vornherein ausgeschlossen wurden[39]. Außerdem wird die Heteroskedastie in den Residuen der Anleihepreise berücksichtigt. Das Modell stellt sich wie folgt dar:

$$P_{t,i}^{cl}(M) + ai = \sum_{m=1}^{M} C_i \cdot \delta_t(m) + 1 \cdot \delta_t(M) - Q_M - W_M + \epsilon_{t,i} \qquad (21)$$

[37] Bei den vorliegenden Daten sind ab Oktober 2000 sehr flache Zinsstrukturkurven zu beobachten und daraus folgend natürlich auch sehr flache Terminzinskurven.

[38] Dies wird in zahlreichen empirischen Arbeiten bestätigt, z.B. von Shea [30] oder Waggoner [34].

[39] Callable Bonds sind Anleihen, die vor Ablauf der Fälligkeit vom Emittenten gekündigt werden können. Diesen Vorgang bezeichnet man als sog. Herabkonversion. Bei den verwendeten Daten wurden allerdings nur Noncallable Bonds verwendet.

wobei: Q_M = Preisabschlag, der auf den Steuereffekt zurückzuführen ist
W_M = Preisabschlag, der auf die Besonderheiten in der Ausstattung der Bonds zurückzuführen ist (Callable oder Non-Callable-Bonds)

Für den Fehlerterm gilt:

$$\begin{aligned} E(\epsilon_i) &= 0 \\ E(\epsilon_i^2) &= \sigma^2 w_i \end{aligned}$$

wobei: $w_i = \left(\frac{dP_{t,i}}{dy_{t,i}}\right)^2$ die quadrierte Ableitung des Preises nach der impliziten Rendite darstellt.

Darüber hinaus wird angenommen, dass die Residuen für verschiedene Bonds unkorreliert sind:

$$E(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \qquad \text{für} \quad i \neq j$$

Laut Langetieg und Smoot [19] muss bei der Schätzung der Gleichung (21) mit einem Trick gearbeitet werden, damit nicht-lineare Schätzungen umgangen werden können. Hierzu wird nicht die ganze Diskontfunktion in obiger Gleichung transformiert, sondern nur deren Argument, die Zeit t, da die Diskontfunktion nicht-linear in t ist:

$$t = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-x) \qquad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1$$

wobei: α = zu schätzende Konstante

Damit ergibt sich für die Diskontfunktion

$$\delta(t) = \delta(-\frac{1}{\alpha}\ln(1-x)) \equiv G(x)$$

Die Funktion, die wir erhalten, $G(x)$, ist eine monoton fallende Funktion, die im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definiert ist. Es gilt $G(0) = 1$ und $G(1) = 0$. Da Vasicek und Fong die Diskontfunktion als exponentielle Form beschreiben

$$\delta(t) = \exp(-\gamma t) \qquad \text{für} \quad 0 \leq t$$

ergibt sich für $G(x)$ eingesetzt:

$$G(x) = (1-x)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \qquad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Damit ist Gleichung (21) linear in $G(x)$ und man kann wiederum polynomische Splines verwenden, um diese Gleichung zu schätzen. Verwendet man beispielsweise Splines q-ter Ordnung, so ergibt sich

$$\delta(t) \equiv G(x) = \sum_{l=1}^{q} \beta_l g_l(x) \qquad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{22}$$

wobei: $\beta_l =$ zu schätzender Parameter

Setzt man Gleichung (22) in (21) ein, erhält man

$$P_{t,i}^{cl}(M) + ai = \sum_{l=1}^{q} \beta_l \left[C_i \sum_{m=1}^{M} g_l(x_m) + g_l(x_M) \right] - Q_M - W_M + \epsilon_{t,i} \tag{23}$$

wobei: $x_m = 1 - \exp(-\alpha(t+m)) \qquad \text{da} \quad t+m = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-x_m)$
$x_M = 1 - \exp(-\alpha(t+M)) \qquad \text{da} \quad t+M = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-x_M)$

Diese funktionelle Form ist uns in ähnlicher Weise schon in Kapitel 2.7 begegnet, wird hier aber mit GLS (Generalized Least Squares) geschätzt, da wir es mit linearen Parametern β zu tun haben, deren Schätzungen vom Startwert von α abhängig sind. Außerdem werden die Funktionen $g_l(x_m)$ als ein Set von Polynomialfunktionen q-ter Ordnung angesehen, die linear sind. Somit wird zu Beginn ein Startwert für α ermittelt, danach werden die Zeitdaten laut obiger Formel transformiert[40].

[40] Shea [30] argumentiert, dass die $g_l(x_m)$ Funktionen nicht linear sind, da sie nichtlinear in α sind. Aus diesem Grund kann eine nichtlineare Schätzung dieses Modells nicht ausgeschlossen werden, obwohl das Modell laut Vasicek und Fong [33] mit GLS geschätzt und empirisch untersucht wurde.

Lassen wir die beiden Terme W_M, Q_M beiseite, ergibt sich für den GLS-Schätzer

$$\hat{\beta}_{GLS} = (Z'\Omega^{-1}Z)^{-1}Z'\Omega^{-1}U$$

wobei: $U = P_{t,i}^{cl}(M) + ai$
$Z = C_i \sum_{m=1}^{M} g_l(x_m) + g_l(x_M)$ und

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{bmatrix}$$

$\hat{\alpha}$ erhält man aus $S(\alpha) = U'\Omega^{-1}U - \hat{\beta}'_{GLS}Z'\Omega^{-1}U$ indem man diesen Ausdruck $S(\alpha)$ minimiert.

$$\min_{\alpha} \quad S(\hat{\alpha}) = U'\Omega^{-1}U - \hat{\beta}'_{GLS}Z'\Omega^{-1}U$$

Hat man die geschätzten Parameter $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ermittelt, so kann man die gesuchte Funktion $G(x)$ berechnen und damit die Diskontfunktion bestimmen:

$$\hat{G}(x) \equiv \hat{\delta}(t) = \sum_{l=1}^{q} \hat{\beta}_l g_l(1 - \exp(-\hat{\alpha}t)) \qquad \text{für} \quad t \geq 0$$

Bewertung des Ansatzes

Bei einem Vergleich der Ansätze mit exponentiellen Splines und quadratischen bzw. kubischen polynomialen Splines kam Shea [29] zu dem Ergebnis, dass exponentielle Splines die gleichen Nachteile haben wie polynomiale Splines und außerdem zu den exakt gleichen Ergebnissen führen. Shea spricht ebenfalls davon, dass die Datentransformation bei den exponentiellen Splines dazu führen kann, dass man oftmals keine sinnvollen Ergebnisse erhält. Ein weiterer Kritikpunkt Shea sind die asymptotischen Eigenschaften des Modells von Vasicek und Fong, die als unrealistisch bezeichnet werden.

Shea schlug stattdessen vor B-Splines zu verwenden, die in Jessica James und Nick Webber (2000)[41] übersichtlich dargestellt werden. Bei einer empirischen Untersuchung kam Shea [29] zu dem Ergebnis, dass polynomiale Splines und B-Splines nahezu identische Schätzergebnisse liefern, weswegen hier nicht weiter darauf eingegangen wird.

2.9 Das Problem der Heteroskedastizität

Wir gingen bisher davon aus, dass die Varianz des Fehlerterms wie Formel 20 dargestellt

$$\Pi_i = \sum_{k=1}^{K} a_k X_k + \epsilon_i$$

homoskedastisch ist, d.h. es handelt sich um sog. white noise mit

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

Die Annahme der Homoskedastie in den Preisresiduen kann empirisch stark widerlegt werden, da der Preisanstieg einer Anleihe um einen gleichen absoluten Betrag eine ganz andere Wirkung hat auf die Rendite eines kurzlaufenden als auf die eines langlaufenden Bonds. Die Varianz bzw. Standardabweichung zwischen beobachteten und geschätzten Preisen steigt mit der Restlaufzeit der Anleihen an.

Dies war auch im vorliegenden Fall zu beobachten, in dem die Standardabweichung der Residuen nach Aufteilung in drei Laufzeitenklassen analysiert wurde. Die Laufzeitenklassen umfassen den Bereich von 1 bis 4 Jahren, von 5 bis 8 Jahren und von 9 bis 30 Jahren.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 in Kapitel 3.4 zusammengefasst. In dieser wird die Wurzel der Mittleren Quadratischen Abweichung dargestellt. Da die Summe der Residuen gleich Null ist und somit auch deren Mittelwert, gleicht

[41] Jessica James und Nick Webber (2000): *Interest Rate Modelling*, John Wiley and Sons, Ltd., New York.

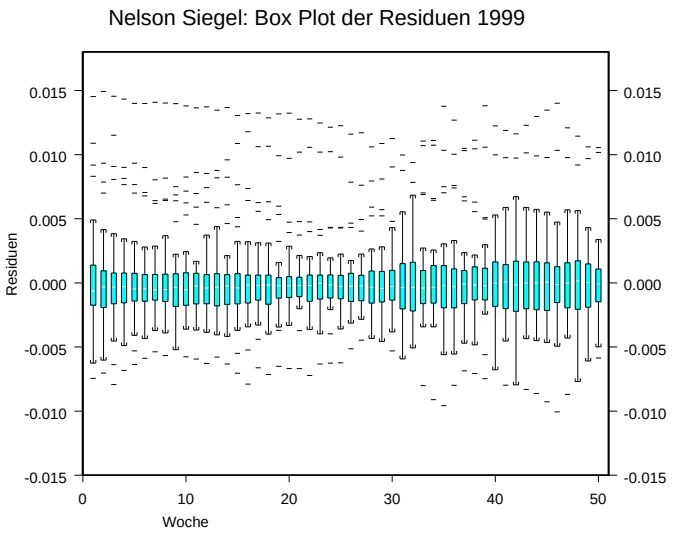

Abbildung 8: Residuen im Nelson-Siegel Modell Januar-Dezember 1999

die Mittlere Quadratische Abweichung der Varianz bzw. deren Wurzel der Standardabweichung.

Bei den angegebenen Werten handelt es sich um Durchschnittswerte über alle 105 Beobachtungen. Man erkennt deutlich, dass die Standardabweichung mit dem Anstieg der Restlaufzeit wächst. Bei der Splines Methode beispielsweise verdreieinhalbfacht sich die Standardabweichung von 12 Pfennig in der ersten Laufzeitenklasse auf 43 Pfennig in der dritten Laufzeitenklasse. Zum Vergleich werden auch die Werte mit angegeben, die sich ergeben, wenn man keinen Unterschied in Laufzeitenklassen macht.

In den Abbildungen 8 und 9 finden sich exemplarisch die Box-Plots für die Residuen, die mit Hilfe der Nelson/Siegel Methode gewonnen wurden. Es ist zu erkennen, dass nicht nur die oberen und unteren Quantile in Abbildung 8 schwanken, sondern auch die Ausreißer sehr stark variieren. Demgegenüber verändern sich die oberen und unteren Quartile nicht so stark. Die Box Plots für das Svensson Modell und für die Splines sehen sehr ähnlich aus, wobei es kleine quantitative Unterschiede gibt.

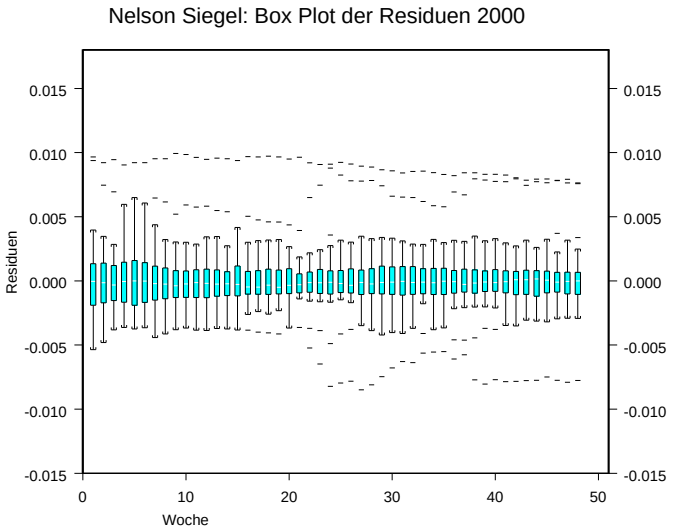

Abbildung 9: Residuen im Nelson-Siegel Modell Januar-Dezember 2000

Als Grund für das Auftreten der Heteroskedastie in den Preisresiduen wird in der Literatur meistens Steuern genannt. Obwohl McCulloch [22] dies berücksichtigte, verschwand das Problem der Heteroskedastie nicht. Dafür erhöht sich der Erklärungsgehalt der Schätzung. Ein weiterer Grund könnten - früher stärker als heute - die Bid- und Ask-Spreads in den Bondpreisen[42] bzw. die Brokergebühren sein. Vor einigen Jahren noch lag der Bid- und Ask-Spread um ein Mehrfaches höher als heute und beeinflusste in einem viel stärkeren Maße die Nachfrage nach bestimmten Anleihen. Darüber hinaus waren Brokergebühren deutlich höher und weniger standardisiert. Eine mögliche Berücksichtigung der Heteroskedastie könnte deshalb wie folgt aussehen:

[42] Bid- und Ask-Spreads sind die Unterschiede zwischen den an den Börsen ermittelten Verkaufs- und Kaufpreisen (Geld- und Briefkurse).

$$E(\epsilon_i^2) = v_i^2 \sigma^2$$

wobei: $v_i = |\frac{p_i^a - p_i^b}{2}| + b$

$p_i^a =$ Ask Price (Kaufkurs)

$p_i^b =$ Bid Price (Verkaufskurs)

$b =$ Brokergebühren

Die Gewichtung führt dazu, dass die Schätzung nicht durch zu große Transaktionskosten und zu hohe Brokergebühren beeinflusst wird.

3 Empirischer Vergleich durch Simulationen

Es gibt zwei Möglichkeiten die vorgestellten Verfahren miteinander zu vergleichen. Entweder vergleicht man die Modelle auf ihre Fähigkeit die beobachteten Preise möglichst genau zu schätzen, mit dem Ziel die Differenz zwischen theoretischen und tatsächlichen Preisen zu minimieren. Oder man vergleicht die Implikationen, die man aus den geschätzten Zinsstrukturkurven erhält, sofern sich unterschiedliche Implikationen aus den erwähnten Verfahren ableiten lassen. In diesem Kapitel werden zu Beginn die Daten genauer beschrieben bevor ein statistischer Vergleich zwischen den Modellen angestrebt wird. Kapitel 4 gibt einen Einblick in die Implikationen, die von den Modellen ausgehen, stellt deren ökonomischen Aussagegehalt dar und liefert einen graphischen Vergleich der geschätzten Kurven.

3.1 Beschreibung der Daten

Bei den verwendeten Daten handelt es sich um wöchentliche Preisbeobachtungen von 50 verschiedenen Anleihen der Bundesrepublik Deutschland, des Fonds "Deutsche Einheit", Anleihen der Treuhandanstalt und Bundesobligationen (Bobl) im Zeitraum vom 1. Januar 1999 bis zum 31. Dezember 2000. Insgesamt ergeben sich damit 105 Beobachtungszeitpunkte. Es wurden nur Anleihen in die Berechnungen mit einbezogen, die mit der höchsten Stufe geratet waren (AAA bzw. Aaa). Anleihen der Deutschen Bundespost und der Deutschen Bundesbahn fanden keine Berücksichtigung, da sie traditionell einen Renditeaufschlag - und damit einen Preisabschlag - zu Anleihen des Bundes aufweisen. Genauso wenig wurden Anleihen mit Sonderkonditionen berücksichtigt, z.B. mit vorzeitiger Kündigungsmöglichkeit ("Tilgungsfondsanleihen") oder Anleihen mit variabler Verzinsung. Außerdem wurden nur diejenigen Anleihen aufgenommen, die ein Volumen von mindestens 500 Millionen DM aufweisen, da damit eine liquider Börsenhandel jederzeit gewährleistet ist.

Die Couponzahlungen erfolgen jährlich, was im internationalen Vergleich mit den USA, England und anderen Ländern eine Ausnahme darstellt, da in diesen Ländern Couponzahlungen halbjährlich erfolgen. Die Laufzeit der Anleihen beträgt zwischen wenigen Tagen und knapp 30 Jahren, so dass eine Schätzung der Zinsstrukturkurve über den gesamten Laufzeitenbereich möglich ist[43]. Bei den Anleihepreisen handelt es sich um sog. Mid-Prices, d.h. also dem Mittelwert aus Kauf- und Verkaufskursen (Bid und Ask Preise). Im Durchschnitt liegen die Spreads zwischen An- und Verkaufskursen bei 10 Basispunkten[44] bei den Bund und Bobl Papieren, bei den Papieren der Treuhandanstalt liegen diese Spreads aber deutlich höher, womit die Überlegung begründet wäre, diese aus der Schätzung auszuschließen[45].

Die Kursnotierungen sind Preise, zu denen tatsächliche Umsätze stattgefunden haben. Alle Kurse sind Notierungen der Frankfurter Wertpapierbörse und stammen aus der Datenbank des Informationsdienstleisters Bloomberg Plc., London. Es handelt sich um die bereits erwähnten clean prices, zur Bestimmung der dirty prices müssen also noch die jeweiligen Stückzinsen hinzuaddiert werden. Eine Übersicht über die einbezogenen Daten gibt Appendix A, in dem alle Anleihen mit Couponhöhe, Zinstermin, Fälligkeit und Volumen aufgelistet sind[46]. Stückzinsen wurden wochengenau gemäß den im Beobachtungszeitraum gültigen Börsenusancen berechnet[47].

[43] Allerdings gab es insgesamt nur vier Anleihen, die eine Laufzeit von mehr als 15 Jahren aufweisen konnten. Da diese jedoch das lange Ende der Zinsstrukturkurve abdecken, kann man die Schätzungen für diesen Bereich als relativ zuverlässig betrachten.

[44] Ein Basispunkt stellt ein Hundertstel eines Prozentpunktes dar, d.h. bei einer Anleihe mit einem Preis von 100 DM entspricht einem Basispunkt genau ein Pfennig.

[45] Genau dies wird bei der Vorgehensweise durch die Deutsche Bundesbank gemacht. Dort werden nur die Anleihen der Bundesrepublik Deutschland und Bundesobligationen berücksichtigt.

[46] Eine genaue Beschreibung der Charakteristika der in Deutschland emittierten Anleihen bzw. aller im Umlauf befindlichen Wertpapiere ist auf der Homepage der Deutschen Bundesbank zu finden: http://www.bundesbank.de

[47] Vgl. http://www.exchange.de

3.2 Angewandte Verfahren

Die Verfahren, die zum empirischen Vergleich herangezogen werden, umfassen den Ansatz von Nelson/Siegel, deren Erweiterung durch Svensson sowie Splines mit einer festen Anzahl von Knotenpunkten[48]. In den folgenden Unterkapiteln soll eine Übersicht über die Besonderheiten des Datensatzes gegeben und aufzeigt werden wie die einzelnen Verfahren auf exogene Zinsänderungen der Europäischen und der Amerikanischen Zentralbank reagieren, siehe Kapitel 3.3. In Kapitel 3.4 kommen wir auf einen statistischen Vergleich der Methoden zur Bestimmung der einzelnen Zinsstrukturkurven zu sprechen, bevor in Kapitel 3.5 untersucht wird, was für eine Auswirkung beobachtete Ausreißer auf die Schätzung der Kurve haben.

Zusammenfassend kann schon jetzt gesagt werden, dass die drei Verfahren die geschätzte Zinsstrukturkurve sehr ähnlich schätzen[49]. Hatten wir es zu Beginn des Beobachtungszeitraumes noch mit einer sehr steilen Zinsstrukturkurve zu tun, die sogar in den ersten sechs Monaten noch steiler wurde - der Zinsspread zwischen dem 30-jährigen und dem 1-jährigen Zinssatz stieg von 270 Basispunkte zu Beginn auf 330 Basispunkte im Juni/Juli 1999 - so wurde sie jedoch bis Herbst 2000 relativ flach, wobei der Zinsspread teilweise nur noch 50 Basispunkte betrug. Ersichtlich wird dies aus Abbildung 1.

3.3 Exogene Zinsänderungen der Zentralbanken

Im Beobachtungszeitraum Januar 1999 bis Dezember 2000 wurden insgesamt jeweils sechs mal die Leitzinsen von der amerikanischen FED und von

[48] Der Kürze der Bearbeitungszeit entsprechend beschränkte ich mich bei der Verwendung von Splines auf die Methode mit einer fest vorgegebenen Anzahl von Knotenpunkten. Ein in der Praxis übliches Verfahren wählt die Anzahl der Knotenpunkte gleich der Wurzel der Anzahl der einbezogenen Anleihen. In diesem Fall wären es somit sieben Stück gewesen ($\sim \sqrt{50}$). Versuche die Anzahl der Knotenpunkte zu variieren, brachten die Wahl von acht Knotenpunkten als optimale Lösung, da hiermit die besten Schätzergebnisse erzielt wurden. Die Bank of England verwendet ein ähnliches Verfahren, auch mit einer festen Anzahl von Knotenpunkten. Sie veröffentlicht jedoch keine Daten zur Zinsstruktur unterhalb von zwei Jahren, da sie diese als nicht zuverlässig erachtet.

[49] Vgl. hierzu Kapitel 4.

der Europäischen Zentralbank erhöht. Auffallend war wie die Märkte und damit auch die Zinsstrukturkurve auf diese Zinsänderungen reagiert haben. Da wir die deutsche Zinsstruktur schätzen, sollte man annehmen, dass die Kurve vor allem auf europäische Zinsänderungen reagiert. Es war allerdings zu beobachten, dass es auch Reaktionen auf erwartete und weniger erwartete Ereignisse in den USA gab.

Reaktionen auf Zinsentscheidungen der EZB

Die Europäische Zentralbank erhöhte den Leitzinssatz[50] um jeweils 25 Basispunkte am 4. Februar, 17. März, 28. April 2000 und am 9. Juni um 50 Basispunkte. Danach wurden die Zinsen noch einmal um je 25 Basispunkte am 1. September und am 6. Oktober 2000 angehoben. Bei einer exogenen Veränderung des Leitzinssatzes durch die EZB sollte man erwarten, dass die Zinsstrukturkurve zumindest am sehr kurzen Ende dieser Bewegung folgt. Am langen Ende kann es natürlich immer vorkommen, dass die Märkte andere Erwartungen an das zukünftige Zinsniveau und an die zukünftige Inflationsentwicklung haben und somit die Bewegungen am langen Ende der Kurve schwer vorhersagbar sind[51].

Die geschätzten Kurven bewegten sich bei Zinsentscheidungen der EZB im Gleichtakt, allerdings gab es teilweise quantitative Unterschiede wie man aus der unteren Tabelle erkennen kann. Untersucht wurde die wöchentliche Veränderung der Zinssätze am kurzen und am langen Ende als Antwort auf eine exogene Zinsänderung seitens der EZB[52]. Im Folgenden werden die Verfahren wie folgt abgekürzt: SP = Splines, NS = Nelson/Siegel, SV = Svensson.

[50] Der Mindestbietungssatz für die Hauptrefinanzierungsgeschäfte der Banken gegenüber den Zentralbanken wird als Leitzinssatz der EZB definiert.

[51] Zur genauen Erklärung des Zusammenhangs zwischen Steilheit der Kurve und erwarteter Inflation siehe Kapitel 4.

[52] Am kurzen Ende wurde der 3-monatige Zinssatz betrachtet und am langen Ende der 30-jährige.

	04.02		**17.03**		**28.04**		**09.06**		**01.09**		**06.10**	
	25 ↑		**25 ↑**		**25 ↑**		**50 ↑**		**25 ↑**		**25 ↑**	
	k	l	k	l	k	l	k	l	k	l	k	l
SP	5 ↑	18 ↓	6 ↓	15 ↓	14 ↑	5 ↓	7 ↑	→	10 ↓	→	8 ↓	4 ↓
NS	2 ↑	22 ↓	7 ↓	14 ↓	12 ↑	6 ↓	14 ↑	→	14 ↓	→	6 ↑	3 ↑
SV	2 ↑	23 ↓	15 ↓	22 ↓	12 ↑	7 ↓	35 ↑	→	8 ↓	→	20 ↑	2 ↑

Tabelle 2: Wöchentliche Veränderung der Zinssätze vor und nach einer Zinssatzentscheidung durch die EZB. k beschreibt die Veränderung des 3-monatigen Zinssatzes, l die Veränderung des 30-jährigen Zinssatzes. Die Veränderungen werden in Basispunkten angegeben, die Richtung der Zinsveränderung mit Hilfe von Pfeilen induziert.

Bei der ersten Zinserhöhung am 4. Februar 2000 konnte man beobachten, dass die kurzfristigen Zinsen nur schwach (2-5 Basispunkte) reagierten, die langfristigen aber um fast den gleichen absoluten Betrag entsprechend der Zinserhöhung fielen (18-23 Basispunkte). Dies kann damit begründet werden, dass eine Zinserhöhung als notwendig erachtet worden war, um die drohenden Inflationsgefahren in Grenzen zu halten. Als die Zinserhöhung erwartungsgemäß erfolgte, gingen die Zinsen am langen Ende zurück, da man der Auffassung war, dass das Wachstum der Inflationsrate durch die Zinserhöhung gebremst würde.

Bei der zweiten Zinserhöhung um 25 Basispunkte am 17. März 2000 war zu beobachten, dass die kurzfristigen Zinsen sogar sanken, obwohl die Leitzinsen erhöht wurden, wobei es allerdings quantitative Unterschiede gab. Das Svensson Modell schätzte einen Rückgang von 15 Basispunkte, der mehr als doppelt so hoch ausfiel wie bei den beiden anderen Verfahren. Am langen Ende der Kurve war wieder das gleiche Phänomen wie bei der ersten Zinserhöhung zu beobachten.

Bei der dritten Zinserhöhung am 28. April reagierte die Zinsstrukturkurve normal, die kurzfristigen Zinsen zogen an, die langfristigen gaben nach.

Dies änderte sich jedoch mit der vierten Zinserhöhung am 9. Juni 2000, dieses Mal um 50 Basispunkte. Ab diesem Zeitpunkt waren keine ausgepräg-

ten Bewegungen am langen Ende der Kurve mehr zu beobachten. Offenbar waren sich die Finanzmärkte unsicher darüber geworden wie lange die Zinserhöhungen noch andauern sollten. Die Inflationserwartungen waren auch trotz der Zinserhöhungen der letzten Monate nicht nach unten revidiert worden, so dass man von unveränderten Inflationsraten für die Zukunft ausging. Am 9. Juni 2000 war auch zu erkennen, dass das Svensson Verfahren einen viel stärkeren Anstieg der kurzfristigen Zinsen modellierte (35 Basispunkte) als die beiden anderen Verfahren (7 bzw. 14 Basispunkte). Sichtbar wurde dies auch an der Veränderung der geschätzten Parameter im Nelson/Siegel bzw. Svensson Fall. β_0, das wie bereits erwähnt als langfristiger Zinssatz interpretiert werden kann, blieb unverändert, allein β_1 erhöhte sich. Die Summe aus β_0 und β_1 repräsentiert den kurzfristigen Zinssatz.

	Nelson/Siegel	
β_0	0.0569	0.0567
β_1	-0.0088	-0.0071
	2. Juni	9. Juni

	Svensson	
β_0	0.0568	0.0567
β_1	-0.0104	-0.0061
	2. Juni	9. Juni

Während β_0 fast unverändert blieb, stieg die Summe aus β_0 und β_1 von 4.81% auf 4.96% im Nelson/Siegel Fall und von 4.64% auf 5.06% im Svensson Fall.

Bei der sechsten und letzten Zinsentscheidung am 6. Oktober 2000 kam es zu widersprüchlichen Aussagen der einzelnen Modelle. Während Svensson die kurzfristigen Zinsen um 20 Basispunkte steigen sah, sanken diese bei der Verwendung von Splines um 8 Basispunkten ab.

Reaktionen auf Zinsentscheidungen der Amerikanischen Notenbank

Die amerikanische FED erhöhte die FED Funds Rate[53] am 30. Juni, 24. August, 16. November 1999, am 2. Februar und am 21. März 2000 um jeweils 25 Basispunkte und am 16. Mai 2001 um 50 Basispunkte. Gab es Ende Juni 1999, nach der ersten Zinserhöhung in den USA, noch keine Reaktion der deutschen Zinsstrukturkurve[54], stiegen die kurzfristigen Zinsen nach der zweiten Zinserhöhung deutlich um 13, 20 bzw. 22 Basispunkte an. An den Märkten ging allgemein die Erwartung um, dass die EZB wohl bald mit einem ähnlichen Zinsschritt folgen könnte. Die Zinsen am langen Ende veränderten sich nicht, die Kurve wurde insgesamt flacher wie man an Hand der folgenden Tabelle erkennen kann.

	30.06.99		**24.08.99**		**16.11.99**		**02.02.00**		**21.03.00**		**16.05.00**	
	25 ↑		**25 ↑**		**25 ↑**		**25 ↑**		**25 ↑**		**50 ↑**	
	k	l	k	l	k	l	k	l	k	l	k	l
SP	→	→	13 ↑	→	12 ↑	10 ↑	5 ↑	18 ↓	→	→	17 ↑	7 ↓
NS	→	→	22 ↑	→	22 ↑	11 ↑	2 ↑	22 ↓	→	→	14 ↑	12 ↓
SV	→	→	20 ↑	→	→	13 ↑	2 ↑	23 ↓	15 ↑	→	24 ↑	13 ↓

Tabelle 3: Wöchentliche Veränderung der Zinssätze vor und nach einer Zinssatzentscheidung der FED. k beschreibt die Veränderung des 3-monatigen Zinssatzes, l die Veränderung des 30-jährigen Zinssatzes. Die Veränderungen werden in Basispunkten angegeben, die Richtung der Zinsveränderung mit Hilfe von Pfeilen induziert.

Eine Veränderung der Zinsstrukturkurve war in diesem Fall auch an den Parametern abzulesen, die geschätzt wurden. So war am 27. August 1999 -

[53] Bei der FED Funds Rate handelt es sich um den Zinssatz, den Banken untereinander bei der Geldleihe über Nacht erheben. Die FED Funds Rate ist eigentlich ein Zinssatz, der auf dem Markt ermittelt wird, da jedoch die FED (Federal Reserve Bank) einen Zielzinssatz vorgibt und durch Offenmarkttransaktionen versucht dieses Ziel zu erreichen, schwankt die FED Funds Rate nur minimal um den vorgegebenen Zinssatz.

[54] Die Zinserhöhung war im Allgemeinen schon seit Längerem auf Grund des starken Wirtschaftswachstums erwartet und wegen aufkommender Inflationsängste auch als "wünschenswert" eingestuft worden.

drei Tage nach der Zinserhöhung in den USA - zu beobachten, dass sich der Parameter β_1 stark veränderte.

	Nelson/Siegel	
β_0	0.0661	0.0660
β_1	-0.0387	-0.0365
	20. August	27. August

	Svensson	
β_0	0.0662	0.0660
β_1	-0.0442	-0.0422
	20. August	27. August

Während β_0 fast unverändert blieb, stieg die Summe aus β_0 und β_1 von 2.74% auf 2.95% im Nelson-Siegel Fall und von 2.20% auf 2.38% im Svensson Fall.

Nach der zweiten Zinserhöhung kam es zu einer Normalreaktion der Zinsstrukturkurve, die kurzfristigen Zinsen zogen an, die langfristigen blieben aber unverändert.

Eine kleine Besonderheit stellt sich mit der dritten Zinserhöhung ein. Die FED hatte die Zinsen um 25 Basispunkte angehoben, am kurzen Ende reagierte aber das Svensson als einziges Modell nicht auf diesen Zinsschritt. Anscheinend wurde dies aber nach der fünften Zinserhöhung nachgeholt, in Folge derer die kurzfristigen 3-Monats-Zinsen um 15 Basispunkte anstiegen. Während das lange Ende der Kurve in Folge wieder erwachter Inflationsängste und in Erwartung weiterer Zinserhöhungen nach dem dritten Zinsschritt anstieg, blieb es nach der fünften Zinserhöhung unbeweglich.

Ab dem 19. Mai 2000, nach der sechsten und letzten Zinserhöhung um 50 Basispunkte, verlief die Zinsstrukturkurve sehr flach bis zum Ende des Jahres 2000[55]. Nach der unerwartet starken Zinserhöhung - die allgemeinen Erwartungen lagen bei lediglich 25 Basispunkten - reduzierten sich die langfristigen Zinsen, weil offensichtlich die Marktteilnehmer der Überzeugung waren, dass damit die Inflationsgefahren für die Zukunft deutlich reduziert würden.

[55] Im Dezember 2000 wurde sie sogar leicht invers.

3.4 Statistischer Vergleich

In diesem Abschnitt sollen die Modelle auf ihre Fähigkeit, die beobachteten Preise möglichst genau zu schätzen, untersucht werden. Dies geschieht mit Hilfe statistischer Kenngrößen.

Zu Beginn erfolgt ein Vergleich mit Hilfe des sog. Mean Absolute Error (MAE), der in der Literatur sehr häufig Verwendung findet. Der MAE wird wie folgt ermittelt:

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |P_{t,i} - \hat{P}_{t,i}|$$

Dabei handelt es sich um den Mittelwert der Absolutwerte der Residuen. Eine starke Streuung wird mit einem hohen MAE bestraft, ein guter Fit der beobachteten Preise wird mit einem niedrigen MAE belohnt. Wünschenswert wäre ein minimaler MAE.

Restlaufzeit	Splines	Nelson/Siegel	Svensson
1-4 Jahre	0.001020	0.000933	0.000854
5-8 Jahre	0.001844	0.001767	0.001635
9-30 Jahre	0.003049	0.002916	0.002732
1-30 Jahre	0.001789	0.001724	0.001634

Tabelle 4: Mean Absolute Error je nach Laufzeitenklasse bzw. über den gesamten Laufzeitenbereich.

Wie man in Tabelle 4 erkennen kann, steigt der MAE mit der Erhöhung der Laufzeitenklasse an. Als das beste Verfahren stellt sich nach diesem Kriterium das Svensson Verfahren heraus, obwohl es nur geringfügig bessere Werte liefert als die beiden anderen. Die Splines bilden hier das Schlusslicht, obwohl die Werte nur wenige Pfennig über denen von Svensson liegen. Betrachtet man den gesamten Laufzeitenbereich, dann ist der MAE bei den Splines sogar nur um 1,5 Pfennig höher als der bei Svensson mit 16,34 Pfennig. Das Svensson Verfahren lieferte erwartungsgemäß bessere Ergebnisse als die Nelson/Siegel Methode, da mehr Parameter geschätzt werden, obwohl

kein zweiter Buckel in den geschätzten Zinsstrukturkurven beobachtbar war. Für diesen zweiten Buckel, der häufig in Folge kurzfristiger Spekulationen auftritt, wurde das Nelson/Siegel Verfahren von Svensson erweitert.

Desweiteren erfolgt ein Vergleich durch das Streuungsmaß der Wurzel der Mittleren Quadratischen Abweichung[56] (MQA), die z.B. auch Schich [28] verwendet. Diese stellt sich wie folgt dar:

$$\text{MQA} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(P_{t,i} - \hat{P}_{t,i})^2}$$

Gesucht wird der Mittelwert der quadratischen Abweichungen. Eine Abweichung vom tatsächlichen Preis wird durch das Quadrieren überproportional stark bestraft.

Restlaufzeit	Splines	Nelson/Siegel	Svensson
1-4 Jahre	0.001194	0.001093	0.000977
5-8 Jahre	0.003149	0.002785	0.002739
9-30 Jahre	0.004322	0.003921	0.003737
1-30 Jahre	0.002875	0.002677	0.002625

Tabelle 5: Mittlere Quadratische Abweichung je nach Laufzeitenklasse bzw. über den gesamten Laufzeitenbereich.

Auch hier zeigen sich sehr ähnliche Ergebnisse. Die MQA steigt mit der Erhöhung der Laufzeitenklasse an und als bestes Verfahren erweist sich wiederum das von Svensson, obwohl der "Vorsprung" auch hier minimal ist. So beträgt die Wurzel der MQA im 9-30-jährigen bei den Splines 43,22 Pfennig, wohingegen bei Svensson dieser Wert mit fast 6 Pfennig weniger bei 37,37 Pfennig sich errechnet.

Das Bestimmtheitsmaß liegt bei fast allen Zinsstrukturkurvenschätzungen zwischen 0.86 und 0.99. Da die Struktur der Zinsen vordergründig von den verbleibenden Restlaufzeiten abhängt, verwundert ein derartig hohes Be-

[56] Die Wurzel der Mittleren Quadratischen Abweichung wird bekanntlich auch als Standardabweichung bezeichnet.

stimmtheitsmaß nicht. Aus diesem Grund sollte es auch nicht als statistische Vergleichsgröße herangezogen werden.

Zusammenfassend kann man sagen, dass bei Betrachtung der statistischen Vergleichsgrößen, MQA und MAE, das Splines Verfahren am schlechtesten abschneidet und das Svensson Verfahren am besten. Wünschenswert wäre eine Erweiterung der Splines auf Smoothing Splines, da hier die Anzahl und die Lage der Knotenpunkte optimal gewählt wird.

3.5 Berücksichtigung von Ausreißern

Wie man aus den Box Plots in Kapitel 2.9 ersehen kann, traten bei den Schätzungen je nach Beobachtungszeitpunkt zwischen drei und fünf Ausreißer auf. Bei den Ausreißern handelt es sich durchgehend um die Anleihen mit den Wertpapierkennnummern (WKN) 113 506, 109 005, 109 006, 109 007 und 109 008. Die erste WKN gehört zur 30-jährigen Bundanleihe mit einem Coupon von 5,625% (Vgl. Tabelle in Appendix A). Da die Umsätze in diesen langlaufenden Wertpapieren im Vergleich zu kurzlaufenden geringer sind, kann es vorkommen, dass der Preis einer Anleihe schon früh morgens an einem Handelstag fixiert wird und danach kein Handel mehr stattfindet, während der Handel mit anderen Papieren weitergeht und ein Preisfixing erst nachmittags vollzogen wird. In dieser Zeitspanne können relevante Neuigkeiten und Nachrichten einen Einfluss auf den Preis nehmen.

Bei den vier letztgenannten Ausreißern haben wir es mit Papieren der Treuhandanstalt zu tun. Auf Nachfrage bei der Deutschen Börse AG wurde bestätigt, dass auch hier die Umsätze im Beobachtungszeitraum sehr gering waren bzw. der Spread zwischen An- und Verkaufskursen an manchen Tagen bis zu 50 Basispunkten betrug. Wie man aus der Abbildung 10 erkennen kann, waren beispielsweise die Umsätze in der Anleihe mit der WKN 109 005 zwischen Januar und Dezember 1999 sehr gering und unregelmäßig. An manchen Tagen wurden überhaupt keine Papiere gehandelt.

Der Preis der Anleihe war durch Spekulationen, größere Käufe und Ver-

Abbildung 10: Tägliche Umsätze der Anleihe mit WKN 109 005 zwischen Januar und Dezember 1999 (Quelle: http://www.comdirect.de).

käufe sehr leicht beeinflussbar. Aus diesem Grund wäre es vertretbar, sämtliche Anleihen der Treuhandanstalt aus den Schätzungen herauszunehmen[57]. Die Auswirkungen der Ausreißer auf die Zinsstrukturkurve und die statistischen Kennzahlen sollen im Folgenden dargestellt werden. Hierzu werden die Ausreißer, wie sie in Abbildung 8 und 9 zu erkennen sind, ausgeschlossen und die Ergebnisse mit den Schätzungen verglichen, bei denen die Ausreißer miteinbezogen wurden. Die Ergebnisse werden an Hand ausgesuchter Beobachtungszeitpunkte exemplarisch dargestellt.

Für alle Beobachtungszeitpunkte bis zum Oktober 2000 war bei der Betrachtung der graphischen Darstellung der Zinsstrukturkurven kein Unterschied zwischen den zwei Schätzungen zu erkennen. Die Kurven waren, wie man in Abbildung 11 sehen kann, nahezu deckungsgleich[58]. In Abbildung 11 wird als Beispiel die geschätzten Kurven vom 6. August 1999 aufgezeigt. Wie man sieht, liegen die beiden geschätzten Kurven übereinander.

Auch bei einer Betrachtung der statistischen Kennzahlen in Tabelle 7 stellt man fest, dass sich wenig am MAE und am MQA verändert hat.

[57] Zur Schätzung der Zinsstrukturkurven durch die Deutsche Bundesbank werden nur Anleihen der Bundesrepublik Deutschland und Bundesobligationen (Bobl) berücksichtigt. Die geschätzten Parameter werden in der Kapitalmarktstatistik der Deutschen Bundesbank monatlich veröffentlicht.

[58] Dabei machte es keinen Unterschied, welches Verfahren man zur Schätzung der Kurve verwendete.

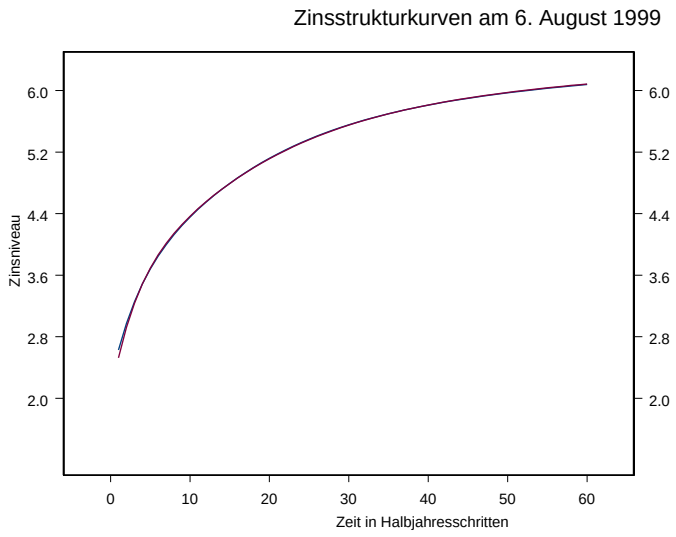

Abbildung 11: Geschätzte Zinsstrukturkurven mit und ohne Ausreißer am 6. August 1999. Verwendet wurde der Ansatz von Svensson.

	Svensson	
	mit Ausreißer	**ohne Ausreißer**
MAE	0.002055	0.001831
MQA	0.003187	0.002780

Tabelle 6: Statistische Kennzahlen bei einem Vergleich der Schätzungen mit und ohne Ausreißer am 6. August 1999 nach dem Svensson Verfahren.

Nachdem die Zinsstrukturkurven bis Mitte 1999 steiler wurden, flachten sie sich ab August 1999 und im Verlauf des Jahres 2000 immer weiter ab und wurden letztendlich aus den Gründen, die in Kapitel 3.3 beschrieben wurden, sehr flach. Bei den Beobachtungen ohne Ausreißer ab Oktober 2000 fiel auf, dass die geschätzten Kurven - wie aus Abbildung 12 ersichtlich - am kurzen Ende anstiegen, auf einem Niveau verharrten bzw. teilweise wieder leicht fielen, um danach wieder anzusteigen. Offenbar hatten die Ausreißer vor allem das kurze Ende der Kurve verzerrt. Die geschätzten Kurven ohne Ausreißer implizieren, dass für die nahe Zukunft mit weiteren Zinserhöhungen

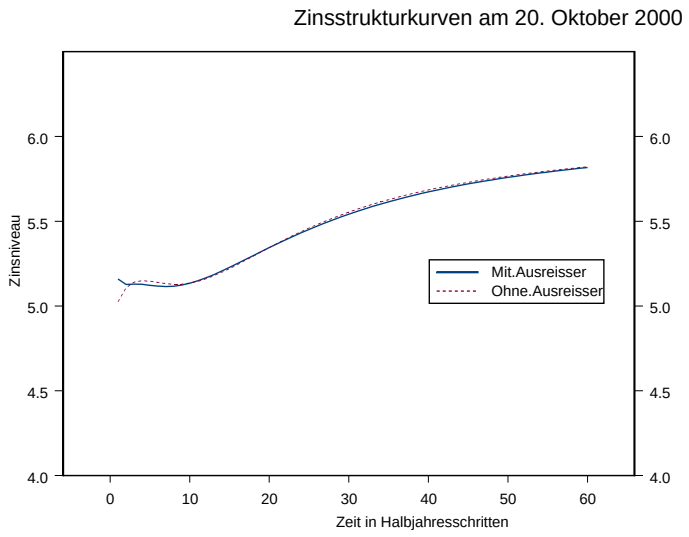

Abbildung 12: Geschätzte Zinsstrukturkurven mit und ohne Ausreißer am 20. Oktober 2000. Verwendet wurde der Ansatz von Svensson.

gerechnet werden musste, dass danach aber eine Phase leicht sinkender Zinsen eingeläutet werden würde.

Demgegenüber laden die Zinsstrukturkurven mit Ausreißer zu einer anderen Interpretation ein. Aus diesen kann man vielmehr interpretieren, dass für die nahe Zukunft keine oder nur sehr geringe Zinsbewegungen erwartet werden dürften, für die Jahre danach aber weitere Zinserhöhungen vor der Tür stehen.

Auffallend war, dass sich die statistischen Kennzahlen erheblich verbesserten. Der Mean Absolute Error (MAE) und die Wurzel der Mittleren Quadratischen Abweichung (MQA) sanken deutlich wie man aus der folgenden Tabelle erkennen kann. Der MAE beispielsweise verbesserte sich von 12,63 Pfennig auf nur noch 8,64 Pfennig, was einer Reduktion um fast einem Drittel entspricht.

	Svensson	
	mit Ausreißer	**ohne Ausreißer**
MAE	0.001263	0.000864
MQA	0.002165	0.001468

Tabelle 7: Statistische Kennzahlen bei einem Vergleich der Schätzungen mit und ohne Ausreißer am 20. Oktober 2000 nach dem Svensson Verfahren.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bis zum Herbst 2000 die Ausreißer keine allzu starken Wirkungen auf die Form und die Ausprägung der Zinsstrukturkurven hatten. Auch die statistischen Vergleichszahlen änderten sich kaum. Erst als die Kurve sehr flach wurde, zeigte sich, dass vor allem das kurze Ende der Kurve verzerrt wurde. Bei einer Nichtberücksichtigung der Ausreißer erhielt man stark verbesserte Kennzahlen.

Es bleibt anzumerken, dass die anderen beiden Verfahren nahezu identische Implikationen und Ergebnisse lieferten wie das in diesem Kapitel verwendete Svensson Modell, weswegen die Ergebnisse nicht explizit dargestellt werden.

4 Interpretation der Zinsstruktur

Die Frage ist, wozu man die theoretisch ermittelte Zinsstrukturkurve in der Praxis verwenden kann. Da die Zinsstruktur aus einer Minimierung der Differenz zwischen tatsächlichen und theoretischen Preisen gewonnen wird, können verschiedene Verfahren zwar statistisch bewertet werden, wie gut ihre Aussagekraft für ökonomische Vorhersagen und Implikationen sind, ist aber eine andere Frage. In der gängigen Literatur wird dieses Problem zu wenig erläutert, in den meisten Fällen beschränkt sich ein Vergleich auf rein statistische Aussagen zu Vergleichsgrößen, so wie diese in Kapitel 3 vorgestellt wurden.

Auch aus geldpolitischer Sicht erscheint eine genauere Untersuchung der Zinsstrukturkurve interessant. Die Struktur der Kassazinssätze für verschie-

dene Laufzeiten gibt Informationen über die Einschätzung der Marktteilnehmer hinsichtlich zukünftiger Zinssätze und zukünftiger Inflation. Dies kann von großem Interesse für die Europäische Zentralbank (EZB) sein, um implizite Inflationserwartungen des Marktes genauer unter die Lupe zu nehmen.

Aus diesem Grund soll im Folgenden ein Überblick über die Implikationen der Zinsstrukturkurve gegeben werden wie sie im Datensatz zwischen Januar 1999 und Dezember 2000 beobachtet wurden. Genauere empirische Untersuchungen der Zusammenhänge zwischen Steilheit der Kurve und dem Informationsgehalt für die Prognose von zukünftigen Zinssätzen und Inflationsraten konnten in Folge der Kürze der Bearbeitungszeit nicht durchgeführt werden. Hierzu könnte aber in einer entsprechenden Erweiterung untersucht werden, ob es einen Zusammenhang zwischen steil ansteigenden Kurven und zukünftigen steigenden Zinssätzen gibt.

4.1 Vorhersagen über das zukünftige Zinsniveau

Die Erwartungshypothese - in Kapitel 2.3.2 vorgestellt - impliziert, dass es in der Zinsstrukturkurve Annahmen über das zukünftige Niveau der Zinsen gibt. Der Erwartungshypothese zu Folge induziert eine steigende Zinsstrukturkurve auch steigende zukünftige Zinssätze. Je steiler die Kurve, desto höher die Erwartungen an das zukünftige Zinsniveau. Die Steilheit kann an Hand verschiedener Spreads, z.B. dem Spread zwischen ein- und 30-jährigem Zinssatz, gemessen werden.

In mehreren Veröffentlichungen, z.B. Mishkin [24], wurde eine positive Korrelation zwischen hohen Zinsspreads und einem zukünftigen Anstieg der kurzfristigen Zinsen bestätigt, womit eine Aussage der Erwartungshypothese bewiesen wurde. Dies wird vor allem bestätigt, wenn sich dies auf kurzfristige Zinsen bezieht, die weit in der Zukunft liegen. Es wurde allerdings auch bewiesen[59], dass es eine negative Korrelation zwischen hohen Zinsspreads

[59] Vgl. Campbell und Shiller [5] oder Fama [15].

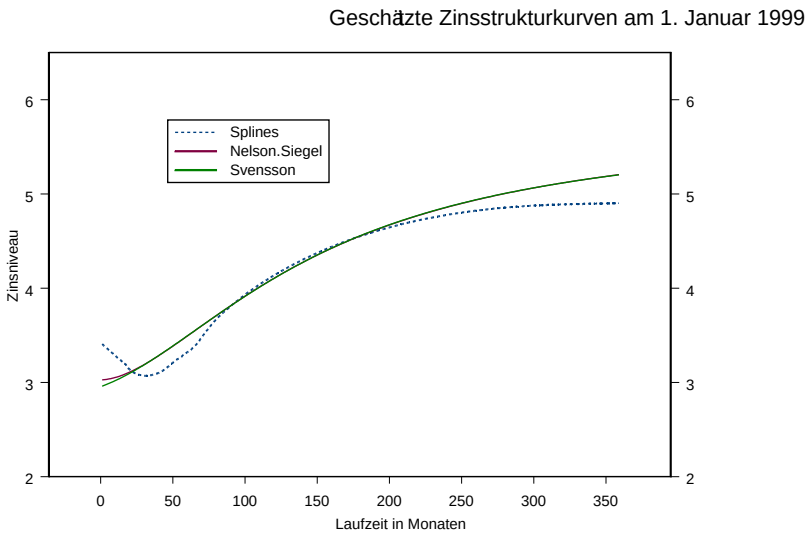

Abbildung 13: Geschätzte Zinsstrukturkurven am 1. Januar 1999

und der Veränderung langfristiger Zinssätze der nächsten Perioden gibt, was der Erwartungshypothese widerspricht.

In den meisten der 105 Schätzungen war zu beobachten, dass die mit den drei Verfahren geschätzte Zinsstrukturkurve sehr ähnlich war, teilweise gab es nur einen kleinen Unterschied von wenigen Basispunkten zwischen den einzelnen Zinssätzen. Allerdings kam es an einigen Beobachtungszeitpunkten auch zu unterschiedlichen Schätzungen der Kurve.

Abbildung 13 stellt die Zinsstrukturkurven vom 1. Januar 1999 dar. Man erkennt, dass die Kurve, die mit der Splines Methode geschätzt wurde, in den ersten Jahren invers verläuft. Bei den anderen Methoden ist dies nicht zu sehen. Im Falle der Splines impliziert dies, dass man in der näheren Zukunft mit leicht fallenden Zinssätzen zu rechnen hat. Dass dies nicht der Fall war, wurde in Kapitel 3.3 erläutert.

Im Frühjahr 1999 kamen erste Inflationsängste auf, die sich im Laufe des Jahres zunehmend verstärkten, eine Zinssenkung wurde damit immer unwahrscheinlicher. Als Folge kehrte sich die Zinsstruktur von einem inversen

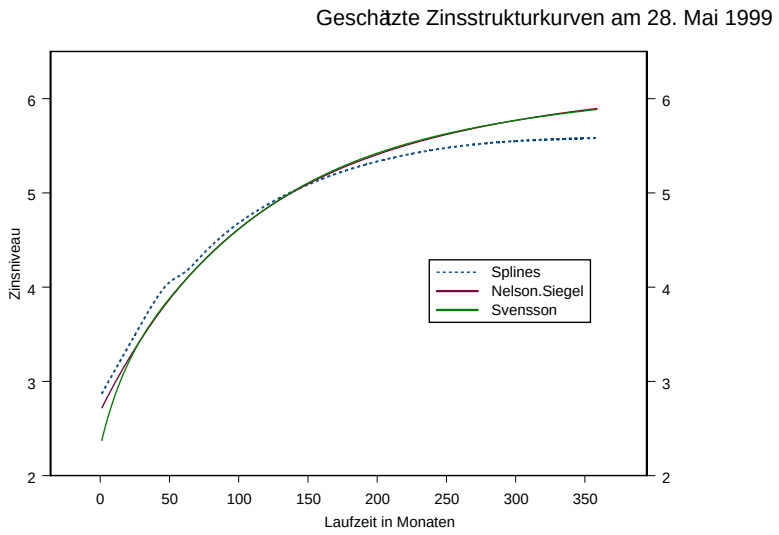

Abbildung 14: Geschätzte Zinsstrukturkurven am 28. Mai 1999

Verlauf in einen normalen um, denn ab März/April 1999 waren alle geschätzten Kurven normal wie Abbildung 14 exemplarisch zeigt.

Vor dem Hintergrund einer aufgeheizten Konjunktur und eines starken Wirtschaftswachstums, vor allem in den USA, musste mit ersten Zinserhöhungen gerechnet werden, womit sich eine steile Zinsstrukturkurve erklären lässt. Da die Zinserhöhungen im Laufe des Jahres 1999 in den USA bzw. zu Beginn des Jahres 2000 in Europa erfolgten, gingen die Gefahren steigender Inflationsraten zurück, die Kurve wurde im Zeitablauf flacher. Im Oktober 2000 betrug der Spread zwischen ein- und 30-jährigem Zinssatz nur noch 60 Basispunkte. Abbildung 15 zeigt die Zinsstrukturkurve vom 13. Oktober 2000, die einen extrem flachen Verlauf hat.

Wie man erkennen kann, hatte die Splines Kurve einen kleinen Buckel im mittelfristigen Laufzeitenbereich und war insgesamt flacher als die beiden anderen Kurven. Dies impliziert, dass man zwar kurzfristig noch mit leicht steigenden Zinsen rechnen konnte, dass mittelfristig aber - zumindest für eine kurze Periode - fallende Zinsen zu erwarten waren. Die beiden anderen

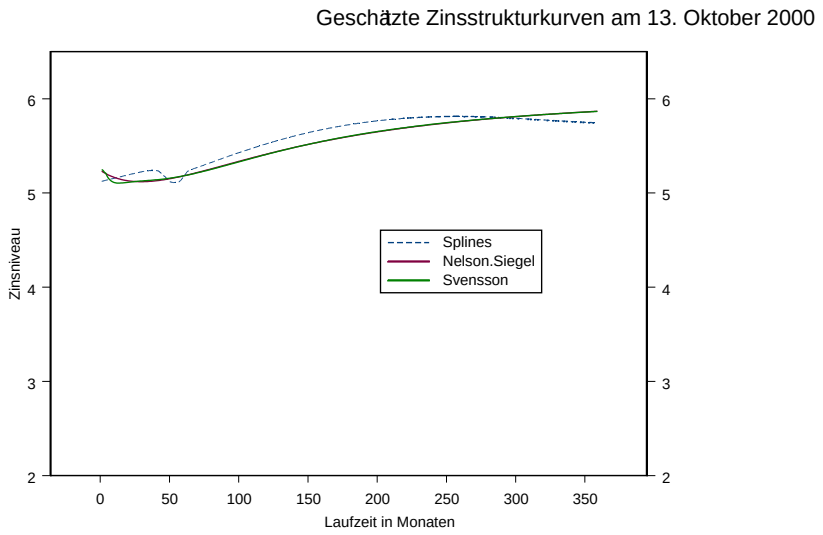

Abbildung 15: Geschätzte Zinsstrukturkurven am 13. Oktober 2000

Modelle "prognostizierten" für die nahe Zukunft leicht fallende Zinsen, darüber hinaus aber auch wieder leicht steigende Zinssätze. Schon zu Beginn des Jahres 2001, am 3. Januar, wurden die Leitzinsen in den USA um 50 Basispunkte gesenkt, da ein konjunktureller Einbruch immer offensichtlicher wurde. Diesem Zinsschritt folgten 6 weitere, die letztendlich ein Absinken des kurzfristigen Zinsniveaus um weitere 2,5 Prozentpunkte zur Folge hatte. Die EZB reagierte erst sehr spät am 11. Mai 2001 mit einem moderaten Zinsschritt von 25 Basispunkten nach unten.

Es zeigt sich somit, dass die Zinsstrukturkurven, die mit den Ansätzen von Svensson bzw. Nelson/Siegel geschätzt wurden, für die deutschen Zinssätze das Richtige impliziert hatten. Der Splines Ansatz hatte zwar auch richtige Implikationen, allerdings erst für den mittelfristigen Bereich, für den kurzfristigen Bereich machte er falsche Aussagen. Den Umfang der Zinssenkungen konnte jedoch kein Modell auch nur im geringsten darstellen[60].

[60] Eine stark inverse Zinsstrukturkurve hätte die "richtige" Implikation für die Zukunft gehabt.

4.2 Vorhersagen über zukünftige Inflationserwartungen

Zinsstrukturkurven und ihre Steilheit werden nicht nur auf ihren Aussagegehalt bezüglich zukünftiger Zinsniveaus untersucht, sondern auch auf ihren Informationsgehalt bezüglich der Inflation. Der Mishkin Ansatz [23] sieht den Informationsgehalt der Kurve in der Fähigkeit an Hand der Steigung künftige Änderungen der Inflationsrate zu prognostizieren, zumindest was die (eingepreisten) Erwartungen der Marktteilnehmer angeht.

Da Geldwertstabilität das vorrangige Ziel der europäischen Geld- und Zinspolitik darstellt, versucht die EZB Erwartungen der Marktteilnehmer an zukünftige Entwicklungen der Inflation zu berücksichtigen[61]. Es werden zwar eigene Inflationsprognosen erstellt, die EZB zieht aber zusätzlich aber Markteinschätzungen des geldpolitischen Kurses als Informationsquelle heran.

Das lange Ende der Zinsstrukturkurve wird als Indikator für zukünftig erwartete Preissteigerungen angesehen. So bedeutet eine steile Zinsstrukturkurve, dass die Erwartungen der Marktteilnehmer in Richtung steigender Inflationsraten gehen. Dies war beispielsweise in diesem Jahr in den USA zu beobachten. Obwohl die FED Funds Rate um 225 Basispunkte seit Jahresbeginn gesenkt wurde, erhöhte sich der 10-jährige Zinssatz um 25 Basispunkte im gleichen Zeitraum[62]. Der Grund hierfür ist, dass die Marktteilnehmer einen Anstieg der Preissteigerungsraten erwarten.

In den beiden Jahren zuvor, 1999 und 2000, sah das Bild noch ganz anders aus. Vergleicht man die beiden Abbildungen 14 und 15 so erkennt man, dass der langfristige Zinssatz in diesem Zeitraum von 1,5 Jahren praktisch unverändert geblieben ist. Einzig die kurzfristigen Zinsen, also das kurze Ende der Kurve, verschob sich in Folge der sechs Zinserhöhungen in den USA und in Europa nach oben.

Der Grund ist in der Erwartung der Märkte zu suchen, die von keiner In-

[61] Vgl. http://www.ecb.int
[62] Stand Ende Juni 2001.

flationsgefahr ausgingen bzw. die Zinserhöhungen der Notenbanken als notwendiges Mittel erachteten, um mögliche Inflationsgefahren zu begegnen. Mit jeder weiteren Zinserhöhung wurden die Inflationsängste der Marktteilnehmer immer mehr reduziert, da man sehen konnte, dass die Notenbanken einen harten Kurs fuhren und auf die überhitzte Konjunktur und drohende Inflation angemessen reagierten. Als Folge änderten sich die Erwartungen der Marktteilnehmer mit Bezug auf zukünftige Inflationsraten nicht.

Campbell [6] weist am Beispiel der USA 1994 nach, dass sich die Erwartungsbildung der Investoren aber auch verändern kann. So wurde im Frühjahr 1994 die FED Funds Rate mehrfach um insgesamt 125 Basispunkte, in 25 Basispunkteschritten, angehoben. Zu beobachten war, dass die 10-jährigen Zinsen im gleichen Ausmaß dem Anstieg der FED Funds Rate folgten. Campbell erklärt dies damit, dass die Zinserhöhungen der FED eine Antwort auf nicht-öffentliche Informationen hinsichtlich zukünftig erwarteter steigender Inflationsraten waren, d.h. Marktteilnehmer betrachteten die Zinserhöhungen als unzureichend, um einen weiteren Anstieg der Inflation zu verhindern. Eine viel restriktivere Zinspolitik wäre in diesem Fall von den Marktteilnehmern erwartet worden.

5 Weitere Implikationen

Zinsstrukturkurven "machen" nicht nur Vorhersagen über zukünftige Zinssätze und Inflationsraten, sondern sie liefern auch Implikationen für andere Bereiche. Im Folgenden sollen zwei weitere Aspekte beleuchtet werden. Zum einen die Implikationen für die Renditestrukturkurve mit einer Erklärung des schon erwähnten Couponeffektes und zum anderen die Implikationen für das Bondmanagement, die man aus der geschätzten Zinsstrukturkurve erhalten kann.

5.1 Implikationen für die Renditestrukturkurve - der Couponeffekt

Aus den Gleichungen (4) und (6) wird ersichtlich, dass die Renditestrukturkurve aus der Zinsstrukturkurve abgeleitet werden kann, da Renditen eine Art gewogener "Durchschnitt" der Zinssätze darstellen, wobei die Gewichte von der Couponhöhe C abhängen wie wir im Folgenden sehen werden. Das Ausmaß der Abweichung der Renditen von den Zinssätzen ist umso größer, je steiler die Zinsstrukturkurve ist bzw. je größer der Coupon ist. Dieser zu letzt genannte Effekt wird als (mathematischer) Couponeffekt bezeichnet. Betrachtet man die Gleichungen (4) und (6) so ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{C_i}{(1+z_{t,m})^m} + \frac{1}{(1+z_{t,M})^M} = \sum_{m=1}^{M} \frac{C_i}{(1+y_{i,M})^m} + \frac{1}{(1+y_{i,M})^M}$$

Für $M = 2$ erhält man

$$\frac{C_i}{1+z_1} + \frac{C_i}{(1+z_2)^2} + \frac{1}{(1+z_2)^2} = \frac{C_i}{1+y_2} + \frac{C_i}{(1+y_2)^2} + \frac{1}{(1+y_2)^2}$$

Durch Erweiterung der Gleichung und das Ignorieren von Ausdrücken höherer Ordnung, die im Fall von Zinsen und Renditen vernachlässigbar klein sind, ergibt sich:

$$y_2 \cong wz_1 + (1-w)z_2 \qquad \text{mit} \quad w = \frac{C_i}{2+3C_i} \tag{24}$$

d.h. je flacher die Zinsstrukturkurve, desto kleiner die Differenz zwischen z_1 und z_2. Für $z_1 = z_2$ folgt $y_2 \cong z_2$.
Für $z_1 \cong y_1$ erhalten wir durch Subtraktion auf beiden Seiten aus voriger Gleichung (24):

$$y_2 - y_1 \cong (1-w)(z_2 - z_1) \tag{25}$$

Damit unterschätzt die Renditedifferenz stets die Zinsdifferenz, da diese mit dem Faktor $(1-w)$ multipliziert wird, d.h. ein höherer Coupon C impliziert ein höheres w, womit sich der Unterschied zwischen der Rendite- und der Zinsdifferenz erhöht und der (mathematische) Couponeffekt erklärt wäre.

5.2 Implikationen für das Bondmanagement

Es wäre wünschenswert zuverlässige Zinsprognosemodelle verwenden zu können, um zukünftige Zinsänderungen und damit auch Preisänderungen bei Rentenpapieren vorhersagen zu können. Veränderte Rendite- und Preiserwartungen haben einen starken Einfluss auf die Investmentstrategie der Bondportfoliomanager.

So werden allgemein steigende Zinsen die Bondmanager dazu bewegen, den Cash Anteil im Portfolio zu halten oder zu vergrößern, da steigende Zinsen immer mit fallenden Anleihepreisen einhergehen. Für erwartete sinkende Zinsen werden höhere Anleihepreise erwartet und damit über den Zinsertrag hinausgehende Kursgewinne, die die Performance steigern. Die Folge ist, dass in Erwartung fallender Zinsen mehr Rentenpapiere gekauft werden. Zusätzlich kann mit nicht-parallelen Bewegungen der Zinsstrukturkurve Geld verdient werden:

- Ein **Flattening Szenario** bedeutet, dass die Zinsen am unteren Ende steigen und die am oberen Ende der Kurve sinken, die Folge ist, dass die Kurve flacher wird. In diesem Fall lohnt eine sog. **Barbell-Strategie**, d.h. die Anteile langlaufender Bonds werden zu Gunsten kurzlaufender erhöht.

- Das **Steepening Szenario** beschreibt den umgekehrten Effekt wie oben dargestellt. In diesem Fall empfiehlt es sich eine **Bullet-Strategie** zu verfolgen, d.h. die Anteile langlaufender Bonds zu reduzieren und stattdessen in kurz- und mittelfristige Anleihen zu investieren.

Wie ersichtlich wurde, hat die Zinsstrukturkurve ökonomische Implikationen, die in verschiedenen Wirtschaftsbereichen von Interesse sein können. Es bedarf aber weiterer empirischer Untersuchungen, die nicht nur auf einen Vergleich der einzelnen Modelle abstellen, sondern vor allem die Güte der Modelle in bezug auf die Implikationen bewerten. In der Literatur gibt es zwar viele Veröffentlichungen, die die Verfahren an sich vergleichen, aber ein Vergleich der Interpretationen und Implikationen wird zu oft ausgespart.

A Verwendete Bonddaten - eine Übersicht

WKN	Coupon	Zinstermin	Fälligkeit	Volumen
Anleihen der Bundesrepublik Deutschland (Bund)				
113 483	9% Bund 1991	22.01	22.01.2001	5 112 918 814,61
113 484	8.375% Bund 1991	21.05	21.05.2001	5 112 918 812,72
113 485	8.25% Bund 1991	20.09	20.09.2001	9 203 253 862,12
113 486	8% Bund 1992	22.07	22.07.2002	7 669 378 218,62
113 487	7.25% Bund 1992	21.10	21.10.2002	5 112 918 812,65
113 488	7.125% Bund 1992	20.12	20.12.2002	8 180 670 100,28
113 489	6.75% Bund 1993	22.04	22.04.2003	5 112 918 812,37
113 490	6.5% Bund 1993	15.07	15.07.2003	8 180 670 099,65
113 491	6% Bund 1993	15.09	15.09.2003	6 135 502 575,21
113 493	6.75% Bund 1994	15.07	15.07.2004	5 112 918 812,43
113 495	7.5% Bund 1994	11.11	11.11.2004	5 112 918 813,92
113 496	7.375% Bund 1995	03.01	03.01.2005	8 691 961 981,51
113 497	6.875% Bund 1995	22.05	22.05.2005	10 225 837 624,27
113 498	6.5% Bund 1995	14.10	14.10.2005	10 225 837 624,75
113 499	6% Bund 1996	15.01	15.01.2006	12 782 297 030,56
113 500	6% Bund 1996	16.02	16.02.2006	625 502 575,04
113 501	6.25% Bund 1996	26.04	26.04.2006	7 158 086 337,42
113 502	6% Bund 1997	04.01	04.01.2007	15 338 756 437,15
113 503	6% Bund 1997	04.07	04.07.2007	15 338 756 436,36
113 505	5.25% Bund 1998	04.01	04.01.2008	15 338 756 436,07
113 507	4.75% Bund 1998	04.07	04.07.2008	8 691 961 980,41
113 509	4.125% Bund 1998	04.07	04.07.2008	13 804 880 792,33
113 492	6.25% Bund 1994	04.01	04.01.2024	10 225 837 624,96
113 504	6.5% Bund 1997	04.07	04.07.2027	11 248 421 386,61
113 506	5.625% Bund 1998	04.01	04.01.2028	14 316 172 673,61
113 508	4.75% Bund 1998	04.07	04.07.2028	11 100 000 000,00
Anleihen des Fonds "Deutsche Einheit" (FDE)				
103 001	8.5% Bund 1991	20.02	20.02.2001	5 112 918 812,56
103 002	8.75% Bund 1991	20.08	20.08.2001	3 579 043 168,82
103 003	8% Bund 1992	21.01	21.01.2002	9 714 545 743,66

WKN	Coupon	Zinstermin	Fälligkeit	Volumen
Anleihen der Treuhandanstalt				
109 000	7.75% Treu. 1992	01.10	01.10.2002	5 112 918 811,96
109 001	7.375% Treu. 1992	01.10	01.10.2002	5 112 918 811,96
109 002	7.125% Treu. 1993	29.01	29.01.2003	7 158 086 336,75
109 003	6.5% Treu. 1993	23.04	23.04.2003	5 112 918 811,96
109 004	6.875% Treu. 1993	11.06	11.06.2003	5 112 918 811,96
109 005	6.625% Treu. 1993	09.07	09.07.2003	5 112 918 811,96
109 006	6% Treu. 1993	12.11	12.11.2003	5 112 918 811,96
109 007	6.25% Treu. 1994	04.03	04.03.2004	4 090 335 049,57
109 008	6.75% Treu. 1994	13.05	13.05.2004	4 090 335 049,57
109 009	7.5% Treu. 1994	09.09	09.09.2004	5 112 918 811,96
Bundesobligationen (Bobl)				
114 118	5.25% Bobl 1996	21.02	21.02.2001	5 112 918 813,60
114 119	5% Bobl 1996	21.05	21.05.2001	4 090 335 051,47
114 120	5% Bobl 1996	20.08	20.08.2001	6 646 794 457,22
114 121	4.75% Bobl 1996	20.11	20.11.2001	8 180 670 099,94
114 122	4.5% Bobl 1997	22.02	22.02.2002	6 646 794 457,05
114 123	4.5% Bobl 1997	17.05	17.05.2002	6 646 794 457,02
114 124	4.5% Bobl 1997	19.08	19.08.2002	7 669 378 219,90
114 125	5% Bobl 1997	12.11	12.11.2002	8 180 670 100,80
114 126	4.5% Bobl 1998	18.02	18.02.2003	6 646 794 456,79
114 127	4.5% Bobl 1998	19.05	19.05.2003	7 669 378 218,86
114 128	3.75% Bobl 1998	26.08	26.08.2003	6 624 210 693,68

Literatur

[1] **Bradley, S.P. und Dwight, C.B. (1973):** Management of Commercial Bank Government Security Portfolios: An Optimization Approach under Uncertainty, *Journal of Bank Research*, Seite 18-30.

[2] **Bühler, A. und Zimmermann, H. (1996):** A Statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany, *Journal of Fixed Income*, Vol. 6, Seite 55-67.

[3] **Buse, A. und Lim, L. (1977):** Cubic Splines as a special case of Restricted Least Squares, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 72, Seite 64-68.

[4] **Bussmann, J. (1989):** Bestimmung der Zinsstruktur am deutschen Kapitalmarkt - eine empirische Untersuchung für den Zeitraum 1978 bis 1986, *Kredit und Kapital*, Vol. 1, Seite 117-29.

[5] **Campbell, J.Y. und Shiller, R.J. (1991):** Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View, *Review of Economic Studies*, Vol. 58, Seite 495-514.

[6] **Campbell, J.Y. (1995):** Some Lessons from the Yield Curve, *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 9, Seite 129-52.

[7] **Campbell, J.Y., Lo, A.W. und MacKinlay, A.C. (1997):** *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.

[8] **Chambers, D.R., Carleton, W.T. und Waldman, D.W. (1984):** A new Approach to the Estimation of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, Seite 233-54.

[9] **Cox, J., Ingersoll, J. und Ross, S. (1981):** A Re-Examination of traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, Seite 769-99.

[10] **Cox, J., Ingersoll, J. und Ross, S. (1985):** A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 53, Seite 385-407.

[11] **Dahlquist, M. und Svensson, L.E.O. (1996):** Estimating the Term Structure of Interest Rates for Monetary Policy Analysis, *Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 98, Seite 163-82.

[12] **De Boor, C. (1978):** *A practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York.

[13] **Estrella, A. und Mishkin, F.S. (1995):** The Term Structure of Interest Rates and its Role in Monetary Policy for the European Central Bank, *NBER Working Paper*, No. 5279.

[14] **Fabozzi, F.J. (2000):** *Bond Markets, Analysis and Strategies*, Prentice Hall International.

[15] **Fama, E.F. (1984):** The Information in the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, Vol. 13, Seite 509-28.

[16] **Fisher, M., Nychka, D. und Zervos, D. (1995):** Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines, *Working Paper*, No. 95-1, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board.

[17] **Kaltenbacher, M. und Rohweder, H. (1998):** Visualisierung der Zinssensitivität von Rentenportfolios, In: Kleeberg, Jochen: *Handbuch Portfoliomanagement*, Verlag Uhlenbrand.

[18] **Langetieg, T. C. (1980):** A Multivariate Model of the Term Structure, *Journal of Finance*, Seite 71-97.

[19] **Langetieg, T. C. und Smoot, J. S. (1981):** An Appraisal of Alternative Spline Methodologies for Estimating the Term Structure of Interest Rates, *Working Paper*, University of Southern California.

[20] **Littermann, R. und Scheinkmann, J. (1991):** Common Factors Affecting Bond Returns, *Journal of Fixed Income*, Vol. 1, Seite 54-61.

[21] **McCulloch, J.H. (1971):** Measuring the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Business*, Vol. 44, Seite 19-31.

[22] **McCulloch, J.H. (1975):** The Tax Adjusted Yield Curve, *Journal of Finance*, Vol. 30, Seite 811-30.

[23] **Mishkin, F.S. (1990a):** What does the Term Structure tells us about future Inflation?, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 25, Seite 77-95.

[24] **Mishkin, F.S. (1990b):** Yield Curve, *Working Paper*, No. 3550, National Bureau of Economic Research, Princeton University.

[25] **Nelson, C.R. und Siegel, A.F. (1987):** Parsimonious Modeling of Yield Curves, *Journal of Business*, Vol. 60, Seite 473-89.

[26] **Röger, W. und Verhaeven, J. (1993):** Measuring the Term Struture of ECU Interest Rates, *Economic Papers*, Nr. 104.

[27] **Schich, S.T. (1996):** Alternative Spezifikationen der Deutschen Zinsstrukturkurve und ihr Informationsgehalt hinsichtlich der Inflation, *Diskussionspapier*, Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank.

[28] **Schich, S.T. (1997):** Schätzung der Deutschen Zinsstrukturkurve, *Diskussionspapier*, Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank.

[29] **Shea, G.S. (1984):** Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, Seite 253-69.

[30] **Shea, G.G. (1985):** Interest Rate Structure Estimation with Exponential Splines - A Note, *Journal of Finance*, Vol. 40, Seite 319-25.

[31] **Steeley, J.M. (1991):** Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals, *Journal of Business, Finance and Accounting*, Vol. 18, Seite 513-29.

[32] **Svensson, L.E.O. (1994):** Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994, *IMF Working Paper Series*, Nr. 94-114.

[33] **Vasicek, O. und Fong, H.G. (1982):** Term Structure Modeling using Exponential Splines, *Journal of Finance*, Vol. 37, Seite 339-48.

[34] **Waggoner, D. (1997):** Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices, *Working Paper Series*, No. 97-10, Federal Reserve Bank of Atlanta.

[35] **Wahba, G. (1990):** *Spline Models for Observational Data*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, University of Wisconsin at Madison.

Erklärung

1. Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Thema

   Vergleich statistischer Zinsmodelle

   selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Die Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Falle durch Angaben der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.

   Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

2. Diese Arbeit wird nach Abschluss des Prüfungsverfahrens der Universitätsbibliothek Konstanz übergeben und ist durch Einsicht und Ausleihe somit der Öffentlichkeit zugänglich. Als Urheber der anliegenden Arbeit stimme ich diesem Verfahren zu.

Konstanz, den 13. August 2001 Dominik Scheck