DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE IN DER PROTOPHYSIK – KRITISCHE RETROSPEKTIVE UND NEUE PERSPEKTIVE

Lucas Amiras

E-Mail: amiras@ph-weingarten.de

Konstanz 2003

1. VORBEMERKUNGEN

Hintergrund des Aufsatzes ist eine seit einiger Zeit vorliegende, eingehende, systematisch-kritische Studie zur protophysikalischen Geometriebegründung.[1] Der systematische Kern dieses Forschungsprogramms ist das Problem eines methodischen Aufbaus der euklidischen Elementargeometrie als Figurentheorie. Mein Anliegen ist eine kritische Weiterführung der Behandlung dieses traditionellen Grundlagenproblems auf der Basis der in dieser Studie unterbreiteten Vorschläge zur Revision dieses Programms durch einen neuen, „funktional-operativen" Ansatz. Daher soll auch keine bloße Zusammenfassung von Ergebnissen, die dort leicht zu finden sind, erfolgen. Der Schwerpunkt liegt im Folgenden auf der Darstellung und grundsätzlichen Kritik der bisherigen Ansätze und einem Ausbau der neuen Perspektive. Zur Relevanz der Bemühung um die Grundlagen der Geometrie als Figurentheorie lassen sich aus der Rezeptionsgeschichte der protophysikalischen Geometriebegründung leicht Belege entnehmen, die von der Grundlagenforschung der Geometrie und der Wissenschaftstheorie bis zur Didaktik der Geometrie reichen.[2] Aber auch die folgenden Ausführungen sollten zumindest erkennen lassen, ob es sich dabei um vernünftige und wichtige Anliegen handelt.

Zum <u>Vorgehen</u>: Nach einer kurzen Orientierung über die Entwicklung der protophysikalischen Geometriebegründung werden die drei wichtigsten Ansätze im Überblick dargestellt und in grundsätzlicher Hinsicht kritisch hinterfragt. Auf dieser Basis können die in der genannten Studie herausgestellten, zentralen Probleme („**protogeometrische Grundaufgaben**") sowie der **funktional-operative** Ansatz genauer spezifiziert bzw. erläutert werden und als begründete Vorschläge zur Neuorientierung des Programms einer "Protogeometrie" vorgestellt werden.

---

1 Amiras 2000.

2 Vgl. dazu Amiras 2000, Einleitung und Kap. 4.

2. ZUR ENTWICKLUNG DER PROTOPHYSIKALISCHEN GEOMETRIEBEGRÜNDUNG

Die Geometrie hat seit ihrer Konstitution als Theorie bei den Griechen mit einem Reduktionsproblem ihrer Bezüge bzw. einer Ablösung von Unterscheidungen an konkreten Figuren, der in der vorgriechischen Geometrie gegeben ist, zu kämpfen. Die griechische Geometrie beansprucht zweifellos, eine Figurentheorie darzustellen. Doch die begrifflichen Schwierigkeiten, die sich bereits bei der Konstitution ihrer Grundgegenstände einstellen und in den Elementen Euklids manifest sind, führen auch zu einer ersten Reduktion ihres Bezugs: Grundgegenstände sind in der Theorie Euklids nicht mehr Figuren und Formen an realen Körpern, sondern anschaulich gegebene Figuren. Seit Hilberts Axiomatisierung der Geometrie folgt darauf noch eine zweite Reduktion: Gegenstand der Theorie sind nicht mehr Eigenschaften räumlicher Figuren, sondern nur noch formale Relationen. Damit wird der traditionelle Anspruch der Geometrie eine Figurentheorie darzustellen seitens der Mathematik aufgegeben.

Diesen Anspruch formuliert jedoch vor Hilbert explizit Felix Klein. Im Anhang (Noten No. III) des „Erlanger Programms“ (Klein 1872) macht er auf das durch die „abstrakten“ Untersuchungen, die er dort anstellt, nicht erfasste Problem einer "eigentlichen Geometrie" als Figurentheorie aufmerksam. Die Anregung Kleins wirkt Anfang des 20. Jahrhunderts auf Hugo Dingler weiter. Sie wird von ihm programmatisch übernommen und sehr intensiv systematisch und historisch weiterverfolgt. Sie liegt somit auch den Bemühungen um die Grundlagen der Geometrie in der Protophysik zugrunde, die an Dingler anknüpfen. Die Protophysik bemüht sich um das Problem einer eigentlichen Geometrie als Figurentheorie mit dem ausdrücklichen Ziel, die angesprochenen Reduktionen des Sinnbezuges der geometrischen Theorie aufzuheben, indem sie ihn methodisch, insbesondere begrifflich exakt, zu rekonstruieren, d.h. die Geometrie an die technische Praxis des Umgangs mit Figuren und dem Reden darüber theoretisch anzubinden versucht.

Die Entwicklung dieses Forschungsprogramms lässt sich im Überblick so darstellen:

Ausgehend von der durch die genannten Reduktionen bedingten begrifflichen Diskrepanz zwischen geometrischer Theorie und Praxis unternimmt Dingler in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts erste Schritte zu einer operativen Begründung der euklidischen Geometrie als Theorie räumlicher Figuren. In seinen Entwürfen unterbreitet er insbesondere neue Vorschläge zur Einführung geometrischer Grundformen, allen voran der Ebene, über Ununterscheidbarkeitsforderungen. Dabei wird die Ebene schließlich als eine Fläche charakterisiert, deren beide Seiten in jedem Punkt keinen gestaltlichen Unterschied aufweisen. Paul Lorenzen sieht (Lorenzen 1961) in dieser Charakterisierung eine Möglichkeit zu einem neuen Aufbau der Geometrie, der sich an traditionelle Bemühungen zur Charakterisierung geometrischer Grundobjekte anschließen würde. Dazu präzisiert er zunächst die von Dingler erkenntnistheoretisch begründeten Relationen der Ununterscheidbarkeit logisch als Substitutionsregeln, so genannte **Homogenitätsprinzipien**[3]**,** und schlägt ein Programm zur Begründung der euklidischen Geometrie auf dieser Basis vor.

Das bekannteste Homogenitätsprinzip ist das (innere) **Homogenitätsprinzip der Ebene**:

$$P\varepsilon E \wedge P'\varepsilon E \wedge A(P,E) \rightarrow A(P',E)$$

(A(P,E) ist eine Formel, die nur P und E als freie Variablen enthält; E, E' bzw. P,P' sind Variablen für Ebenen bzw. Punkte, ε symbolisiert die Inzidenzrelation. Die Primformeln der Homogenitätsgeometrie sind nach Lorenzens Vorschlägen elementare geometrische Aussagen über Inzidenz, Anordnung und Orthogonalität.)

---

3 Die inhaltlichen Anliegen Dinglers finden dabei keine Berücksichtigung. Aus neuerer Sicht (vgl. Amiras 2000, Kap. 2 und 4) betrifft Lorenzens Anschluss an Dingler nur die logische Präzisierung der Ununterscheidbarkeit als Homogenität.

Als methodisches Hauptproblem der Homogenitätsgeometrie erweist sich bald nach ihrem Aufkommen die Konstitution der in die Homogenitätsprinzipien eingehenden Aussageformen. Die Homogenitätsprinzipien sollten gemäß der ursprünglichen Absicht Lorenzens, eine Einführung geometrischer Grundformen im Anschluss an die geometrische Praxis leisten. Die Lösung dieser Aufgabe kann jedoch durch das Operieren dieser Substitutionsregeln auf eine Formelklasse Ω geometrischer Aussageformen grundsätzlich nicht gelingen, weil dazu deren methodische Konstitution vorausgesetzt wird. Auf diesen schwerwiegenden methodischen Mangel wird im Anschluss an die letzte Version der Homogenitätsgeometrie Lorenzens besonders von Janich (Janich 1969) hingewiesen. Bereits in der Arbeit von Steiner (Steiner 1971) wird daher versucht, den Homogenitätsprinzipien nicht nur eine handwerkliche Interpretation als Herstellungsnormen zu unterschieben, sondern (konsequenterweise) auch die Formelklasse Ω mit Bezug auf elementare Unterscheidungen im technischen Umgang mit Figuren zu konstituieren, jedoch ohne Erfolg. Lorenzens Hoffnung auf einen baldigen Abschluss seines Programms eines Aufbaus der Geometrie aus Homogenitätsprinzipien erfüllt sich somit lange Zeit nicht, erst 1976-78 wird eine Lösung der ursprünglich aufgeworfenen (aber letztlich nicht begründungsrelevanten) Aufgabenstellung erreicht, just zu der Zeit, als die Homogenitätsgeometrie in der Protophysik von Lorenzen selbst verlassen (Lorenzen 1977) und durch einen neuen, verbesserten Ansatz ersetzt wird.[4]

Auf dem Hintergrund der Arbeiten Dinglers versucht zuvor Peter Janich (Janich 1976) erneut allen aktuellen Problemen der protophysikalischen Geometriebegründung mit einem (bereits 1969 als Programm skizzierten) **produktiv-operativen**[5] Ansatz zu begegnen. Sein Entwurf er-

---

4 Aus kritischer Sicht wurde mit der Homogenitätsgeometrie aufgrund einer unzulänglichen Interpretation Dinglers durch Lorenzen ein begründungstheoretisch fragwürdiger Weg eingeschlagen, hin zu einer axiomatischen Variante statt in Richtung der von Dingler anvisierten Figurentheorie. (Dazu vgl. Amiras 2000, Kap. 2 und 4.)

5 Diese Kennzeichnung charakterisiert einen Ansatz, der auf der Basis der Normierung von Herstellungshandlungen (Produktion) zur Herstellung geometrischer Grundformen bzw. ihrer Ergebnisse (Produkte) einen methodi-

hebt den Anspruch, eine methodische, operative Begründung der Geometrie auf der Basis von Homogenitätsprinzipien im Prinzip zu leisten. Janich greift zu seiner operativen Geometriebegründung, die vor allem eine Begriffsbildung unter Rückgriff auf elementare Unterscheidungen im handwerklichen Umgang mit Körpern vorsieht (**operative Begriffsbildung**), explizit auf Dinglers Vorschläge, aber auch auf die Arbeiten von Erich Bopp, der zuvor, in den Jahren 1956-58, sich intensiv um die operativen Bestimmungen geometrischer Grundformen bemüht, zurück. Janich verwendet, im Gegensatz zu Lorenzen, Homogenitätsprinzipien, die mittels operativ deutbarer Aussageformen formuliert werden. Die **Eindeutigkeit** der Gestalt der Grundformen der Geometrie, wird von ihm (in Aufnahme Dinglerscher Vorschläge) zum zentralen Gegenstand protophysikalischer Begründungen erhoben.

Die Aufmerksamkeit der protophysikalischen Geometrie richtet sich in dieser Phase der Entwicklung, Janich folgend, besonders auf die Definition der Ebene und der Begründung ihrer Eindeutigkeit der Gestalt, also der Erwartung, dass alle, auch unabhängig voneinander hergestellte, ebene Flächen aufeinander passen. Zu diesem Eindeutigkeitssatz werden auch mehrere Beweise publiziert (von Janich, Katthage, Lorenzen und sogar zweimal von Inhetveen), die in der Auffassung ihrer Urheber diese Begründung leisten.

Im Jahre 1977 spaltet sich die protophysikalische Geometriebegründung schließlich in zwei Ansätze, die sich voneinander signifikant unterscheiden. Lorenzen und Rüdiger Inhetveen entwickeln eine (euklidische) **Formengeometrie**, deren Grundlage eine vorgeometrische Theorie bilden soll, die von Lorenzen **Protogeometrie** genannt wird. Diese Protogeometrie kommt ohne Homogenitätsprinzipien aus und hat vor allem die Aufgabe, die Einführung der Grundformen der Geometrie und den Beweis ihrer Eindeutigkeit zu leisten. Die konstruktiv (im methodischen und

---

schen Aufbau der Geometrie anstrebt. Einen solchen Ansatz hat Dingler als erster verfolgt, jedoch später de facto aufgegeben. (Vgl. dazu Amiras 2000, S. 38-39.)

geometrischen Sinne) angesetzte Formengeometrie soll in erster Linie eine formentheoretische Definition der Kongruenz bzw. der Längengleichheit von Strecken liefern. Dazu wird insbesondere ein Formprinzip formuliert, welches zugleich als innertheoretische Begründung für die Geltung der Parallelität fungiert.

Nach anfänglicher Zustimmung distanziert sich Janich mit der Zeit zunehmend vom Vorhaben der Formengeometrie. Explizit erfolgt seine Kritik an der Formengeometrie zuerst in einem Aufsatz (Janich 1992), in dem er zugleich einen Versuch zur Einführung der Parallelität auf operativer Grundlage und unter Verwendung eines Homogenitätsprinzips unternimmt. Er schließt dabei an seine alten Vorschläge von 1976 an, die zuletzt in unwesentlich veränderter Form abgedruckt werden (Janich 1997). Gelegentlich bezeichnet er den Ansatz der Formengeometrie sogar explizit als „Irrweg"[6]. Diese Unterschiede zwischen Janichs operativem Ansatz und der Formengeometrie finden auch an anderer Stelle ihren Niederschlag[7], wobei von einer „Konkurrenz" von Vorschlägen die Rede ist.

Alle Beiträge zur protophysikalischen Geometriebegründung werden in der genannten Studie eingehend erörtert, mit ziemlich ernüchternden Ergebnissen angesichts ihrer hochgesteckten Ziele und Ansprüche. Bevor die dort aufgezeigte Perspektive einer Neuorientierung weiterentwickelt wird, soll zunächst der kritische Rückblick auf das Grundsätzliche der bisherigen Ansätze und Entwürfe unter Einbeziehung neuer Aspekte gerichtet werden.

---

[6] Janich 1997, S. 75.

[7] Vgl. Mittelstraß (Hg.), Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Bd. 3, S. 380.

3. ANSÄTZE ZUR GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE ALS FIGURENTHEORIE

3.1 DINGLERS GRUNDLEGUNGSVERSUCH DER GEOMETRIE ALS THEORIE RÄUMLICHER VERHÄLTNISSE

Dingler geht von der Feststellung aus, dass die theoretische Geometrie in ihrer axiomatischen Fassung keine eindeutige Bestimmung der Gestalt ihrer Grundgegenstände (Ebenen, Geraden) bietet. Diese Unbestimmtheit erscheint ihm paradox angesichts konkreter Interpretationen dieser Grundgegenstände durch körperliche Figuren in der technischen Praxis. Daraus und aus einer begrifflichen Kritik des Kongruenzbegriffes sowie dessen (früh-)empiristischen Interpretation (Dingler 1911) erwächst das Programm einer Begründung der Geometrie als Theorie räumlicher Figuren, welche die Aufgabe hätte, die axiomatische Geometrie besser an die technische Praxis anzuschließen.

Die Frage nach den Bezügen der Geometrie, insbesondere nach dem Sinn der geometrischen Grundbegriffe, führt Dingler (vgl. Dingler 1911) auf die Frage, wie erste geometrische Geräte (Geraden) hergestellt werden können. Er erfährt dabei vom Herstellungsverfahren von Ebenen in der mechanischen Industrie (3-Platten-Verfahren) und von seiner Bedeutung für die Präzisionsmesstechnik, insbesondere von der Herstellung von Stahllinealen aus solchen Standard-Ebenen. Seine Idee ist es, die Gestalteigenschaften der Produkte dieses Verfahrens, welches er als ein Verfahren der "Urzeugung" (also der voraussetzungslosen, insbesondere geometriefreien Herstellung) von Ebenen betrachtet, zur Grundlage eines neuen Aufbaus der Geometrie als Figurentheorie zu machen.

Die Umsetzung dieser Idee erfolgt ansatzweise im Anhang des Geometrie-Buches von 1911. Darin wird versucht die Gestalt der Ebene begrifflich auf der Grundlage von Verhältnissen zwischen Flächen, die auf Körpern liegen, zu erfassen. Auf der Basis einer Passungsrelation (Dingler: Adhäsion) und plausibler Eigenschaften gelingt Dingler eine bemerkenswerte, exakte

Charakterisierung der Kongruenz und Ebenheit von Flächenstücken.[8] Eben heißt demnach ein Flächenstück, dass zu jedem passenden Flächenstück kongruent, also eine Kopie davon ist. Zwei Probleme lässt Dingler jedoch offen: Zunächst ist es nicht möglich, die in seiner Definition der Ebene formulierten Verhältnisse (Passung kongruenter Flächenstücke) elementar zu realisieren, sondern erst dann, wenn die Flächenstücke spezielle Formen haben (z.B. Scheiben sind). Damit ist diese Definition in methodischer Hinsicht entscheidend angreifbar, da sie geometrisches Wissen vorauszusetzen scheint. Das zweite Problem ist, dass überhaupt nicht erkennbar wird, auf welche Weise diese Miniatur-Theorie an die übliche geometrische Theorie angeschlossen werden könnte, da jene traditionell eigentlich nicht von Figuren an Körpern, sondern von anschaulichen Raumelementen, Schnitten usw. handelt und zudem nicht nur auf Gestaltaussagen aufbaut. (Die zunächst von Dingler vertretene Ansicht, dass daraus alle geometrischen Eigenschaften der Ebene abzuleiten wären, wird von ihm später nicht mehr vertreten.)

Dingler versucht mit seinen späteren Entwürfen einer Figurentheorie (Dingler 1933, Dingler 1964) vor allem das zweite Problem zu lösen. Dabei verliert er jedoch seine ursprüngliche Fragestellung nach der Bestimmung der Gestalt geometrischer Grundformen (allen voran der Ebene) durch Rückgriff auf praktische Verhältnisse, auf die er 1911 rekurriert (Passungseigenschaften), aus dem Blick, mit gravierenden Konsequenzen für die methodische Qualität seiner Entwürfe. In diesen Entwürfen wird nicht mehr auf der konkreten Ebene der "körperlichen" Figuren angesetzt, sondern gleich auf eine Reihe anschaulich motivierter räumlicher Verhältnisse und Raumelemente zurückgegriffen.

---

8 Vgl. Amiras 2000, Kap. 2 für eine detailierte Studie der Beiträge Dinglers, sowie Amiras 2002 für eine auf die zentralen Gesichtspunkte eingehende Darstellung.

Das folgende Schema (Figur 1) gibt einen Überblick über Dinglers Konzeption des Aufbaus der euklidischen Geometrie als Figurentheorie.

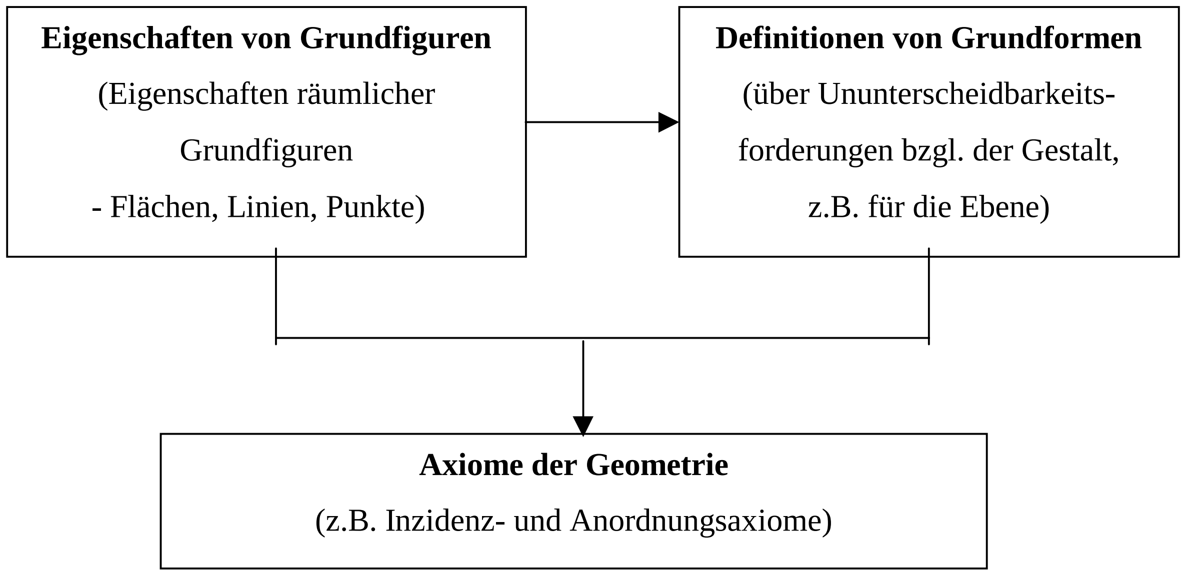

Fig. 1: Dinglers Aufbau der euklidischen Geometrie als Figurentheorie

Ausgehend von der Tagessprache werden von Dingler gewisse Begriffe, die sich auf anschaulich-räumliche Unterscheidungen von Figuren beziehen, durch definitorische Festsetzungen (Definitionen und Postulate) normiert. In dieser (sehr unzulänglich aufgebauten) Figurentheorie wird versucht Flächen, Linien und Punkte als Raumelemente so weit durch Bestimmungen zu spezifizieren, dass durch Hinzunahme von Definitionen geometrischer Grundformen (z.B. für die Ebene und Gerade) die in der Axiomatik Hilberts geläufigen Axiome (z.B. Inzidenz- und Anordnungsaxiome) ableitbar werden. Gemäß Dinglers Absicht sollte sich diese Theorie dadurch vom Hilbertschen System unterscheiden, dass sie direkter und besser als jenes durch Figuren interpretiert werden könnte.

Der Ansatz bzw. das Vorhaben Dinglers lässt sich auf dem Hintergrund der genannten Studie grundsätzlich hinterfragen:

1. Die Konzeption der Figurentheorie erscheint angesichts der Tradition der Grundlagen der Geometrie vor Hilbert fragwürdig. Es ist stark zu bezweifeln, dass man allgemein mit

"Grundfiguren", also Flächen, Linien und Punkten als anschauliche Raumelemente eine exakte Theorie aufbauen kann, in deren Rahmen man die gesamte Geometrie konstituieren kann. In methodischer Hinsicht spricht m.E. bereits die Tatsache dagegen, dass Grundformen wie Gerade und Ebene sehr früh in die Praxis eingreifen und damit auch die Konstitution räumlicher Verhältnisse leiten. Es erscheint daher auch inkonsequent, die Grundformen der Ebene (und Geraden) als universelle Bausteine der geometrischen Praxis, so wie es Dingler mit vollem Recht tut, hervorzuheben, aber zugleich den Versuch zu unternehmen, die vielfach durch sie erzeugten räumlichen Verhältnisse über eine komplexe, allgemeine Figurentheorie gewissermaßen zu hintergehen.[9] Der Weg der neueren, axiomatischen Geometrie scheint de facto, und wohl auch aus methodischen Gründen, eher umgekehrt zu verlaufen.

2. Die ursprüngliche Absicht Dinglers war es, eine Paradoxie aufzulösen, welche das Verhältnis der geometrischen Praxis zur Geometrie in Bezug auf die Eigenschaften geometrischer Grundformen betrifft. Dingler versucht durch eine begriffliche Rekonstruktion der Praxis zur axiomatischen Theorie vorzustoßen. Doch bereits seine Einführung der Ebenheit von Flächen, von der zuvor die Rede war, gibt Anlass zum Nachdenken darüber, ob das, was er als eine vorgeometrische Eigenschaft betrachtet, tatsächlich eine solche ist. Die Crux in Dinglers Ansatz besteht m.E. darin, dass nicht kritisch nachgefragt wird, welchen Status seine (wohl nur partielle) Rekonstruktion der Ebenheit im Hinblick auf einen methodischen Aufbau der Geometrie eingedenk ihrer Axiomatik haben kann. Seine Einordnung dieser Eigenschaft als Definition der Ebene in die geometrische Theorie ist unschlüssig vom Ansatz her, von der Formulierung seiner späteren Theorie her ohnehin völlig unzulänglich. So gesehen kann sei-

---

[9] Die kritische Frage nach dem Verhältnis einer solchen Figurentheorie zu den Axiomatisierungen der Geometrie, angesichts des Vorhabens die Hilbertschen Axiome darin abzuleiten, kommt überhaupt nicht in Dinglers Blickfeld.

ne Paradoxie als nicht aufgelöst gelten. Seine Beiträge jedoch, und darin liegt wohl die Bedeutung ihrer kritischen Rezeption, liefern viele Anregungen und Problemstellungen für weitere Bemühungen im Sinne seiner grundsätzlichen Anliegen.

3.2 ZUM PRODUKTIV-OPERATIVEN ANSATZ VON P. JANICH

Die frühe Idee Dinglers, aus den in der Herstellung von Ebenen realisierten Gestalteigenschaften alle geometrischen Eigenschaften von Ebenen abzuleiten, findet ihre programmatische Umsetzung bei Peter Janich. Janichs ambitioniertes Vorhaben ist es, aus einer Rekonstruktion der Herstellungsnormen elementarer geometrischer Formen die euklidische Elementargeometrie zu gewinnen. Auch hierbei (wie bei Dingler) spielen die Charakterisierungen der Gestalt geometrischer Grundformen, insbesondere der Ebene, eine zentrale Rolle. Janichs operativer Ansatz ist jedoch wesentlich schärfer als Dinglers, da dabei die Rolle des einzelnen Herstellungsverfahrens herausgehoben wird.

Janich strebt eine Rekonstruktion von ersten, seiner Ansicht nach methodisch ausgezeichneten Verfahren (z.B. des 3-Platten-Verfahrens zur Ebenenherstellung) mittels Homogenitätsforderungen an, zu deren Formulierung ein auf körperliche Figuren bezogenes, vorgeometrisches Vokabular dient (Janich 1976). Die Zielsetzung ist zweifach: Erstens sollen daraus alle geometrischen Eigenschaften, also schließlich die geometrische Theorie abgeleitet werden; zweitens soll auch die Gestalteindeutigkeit der Grundformen (insbesondere der Ebene) logisch daraus folgen. Letzteres betrachtet Janich als erforderlich zur Rechtfertigung der prototypenfreien Reproduzierbarkeit geometrischer Grundformen (z.B. der Ebene), was wiederum die Objektivität von Aussagen über sie sichern soll. Dieser, zuvor als **produktiv-operativ** (auf die Produktion, Herstellung fokussierend) bezeichnete Ansatz, wird an anderer Stelle detailliert untersucht.[10]

---

[10] Vgl. Amiras 2000, Kap. 5, sowie Amiras 2003.

Ich beschränke mich hier auch auf eine kurze Zusammenfassung der grundsätzlichen Kritik des Janichschen Vorhabens anhand einer schematischen Darstellung (Figur 2) seiner dreistufigen Begründungskonzeption.

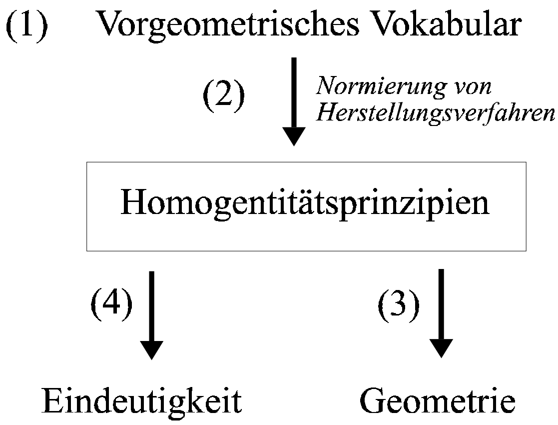

Fig. 2: Janichs produktiv-operative Begründungskonzeption

Es ist unschwer zu erkennen, dass der Normierung von Herstellungsverfahren durch Homogenitätsprinzipien eine Schlüsselrolle für den ganzen Ansatz zukommt. Alle Teile des Entwurfs orientieren sich an den Funktionen von Homogenitätsprinzipien. Das gilt natürlich auch für die vorgeometrische Terminologie (1)[11], die den Charakter eines Vokabulars erhält, um durch die Homogenitätsprinzipien von der vorgeometrischen auf die (angeblich erst ideale) geometrische Ebene befördert zu werden.

In der genannten Studie wird sehr eingehend die Frage erörtert, ob die Homogenitätsprinzipien Janichs die ihnen zugewiesenen Funktionen übernehmen können: Das ist die **Normierungsfunktion** für Herstellungsverfahren von Grundformen (2), die **Ideationsfunktion**, wodurch sie den Übergang zu geometrischen Aussagen (3) ermöglichen sollen, und die Möglichkeit die **Eindeutigkeit** von Grundformen zu beweisen (4), wodurch sie (über die prototypenfreie Reproduzier-

[11] Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf das obige Schema des Janichschen Entwurfs.

barkeit) die Situationsinvarianz von geometrischen Aussagen und damit die Objektivität der Geometrie und Längenmessung sichern sollen. Bereits bei der Untersuchung der Normierungsfunktion stellt sich ein negatives Ergebnis ein, welches gemäß Janichs Entwurf auch die anderen Funktionen nachhaltig beeinflussen muss. Es ist daher auch zu bezweifeln, dass mit den Homogenitätsprinzipien Normierungen im Sinne Janichs vorliegen, d.h. sich die Homogenitätsprinzipien als Beschreibungen der durch die Bearbeitung verfolgten Verfahrensziele, die durch Passungskontrollen usw. überprüft werden, verstehen bzw. rechtfertigen lassen.

Das Vorhaben Janichs Herstellungs- und Kontrollhandlungen normieren zu wollen, um damit eine methodische Bestimmung geometrischer Grundbegriffe und die Ableitung des geometrischen Axiomensystems zu leisten, macht aber auch aus grundsätzlichen Überlegungen heraus überhaupt keinen guten Sinn; denn auch die Frage, ob die praktisch so offensichtliche <u>Normativität</u> geometrischer Sätze wirklich (oder gar nur) auf Herstellungs- und Kontrollnormen für die Grundformen beruhe, wird an gleicher Stelle negativ beantwortet. Zugleich wird dafür argumentiert, dass stattdessen der Verwendungspraxis von Figuren für die Rekonstruktion der Bezüge der Geometrie eine grundlegende Rolle zukommt, die der produktiv-operative Ansatz offenbar völlig verkennt.

Im Unterschied zu Dingler liegt bei Janich im übrigen auch kein plausibler Theorie-Entwurf vor; denn die vernünftigerweise bei Dingler als vorgeometrische Theorie angelegte Stufe wird in Janichs Entwurf (Janich 1976, auch Janich 1997) als bloße vorgeometrische Terminologie konstruiert, damit über die Homogenitätsprinzipien ein (nur angeblich möglicher) Übergang zur geometrischen Terminologie und Theorie vollzogen werden kann. Insgesamt ist das ganze Vorhaben also bereits aus grundsätzlichen Gründen als gescheitert anzusehen. Jedoch ist der Versuch einer umfassenden Rekonstruktion der auf körperliche Figuren bezogenen Terminologie (trotz der berechtigten Kritik im Einzelnen) verdienstvoll.

3.3 ZUR PROTOGEOMETRIE IM ENTWURF DER FORMENGEOMETRIE

In den Entwürfen von Dingler und Janich bleibt (wenn auch aus unterschiedlichen Gründen) die Aufgabe der Konstitution einer elementaren Figurentheorie als Basis für den Übergang zur geometrischen Theorie ungelöst. Eine solche Theorie ("Protogeometrie") wird im Entwurf der Formentheorie von seinen Urhebern Lorenzen (Lorenzen 1977) und Inhetveen (Inhetveen 1983) in ihrer Funktion durchaus unterschiedlich gesehen. Während Inhetveen darin eine erste Stufe der geometrischen Theorie erblickt, die einen methodisch bruchlosen Übergang zur (Formen-) Geometrie gestatten soll, weist ihr Lorenzen später (Lorenzen 1984) lediglich eine propädeutische Funktion zu.[12] Im Folgenden soll vor allem auf den ausgearbeiteten Vorschlag Inhetveens eingegangen werden, der sich an die ihm vorausgegangenen Bemühungen anschließt.

Das gemeinsame Charakteristikum der Protogeometrie in den Arbeiten Inhetveens und Lorenzens ist die Hinwendung zu <u>konkret interpretierten geometrischen Operationen</u> und mit ihrer Hilfe formulierten Eigenschaften (Klappeigenschaften), die als Funktionseigenschaften geometrischer Grundformen ausgegeben werden, offenbar in der Absicht damit einen reibungslosen Übergang zur geometrischen Sprache und Theorie zu schaffen. Insgesamt wird nunmehr zur Begriffsbildung, aber auch zur Begründung von Aussagen gleich auf <u>Erfahrungen mit bereits geformten Körpern</u> (woran bereits E. Bopp angeknüpft hatte) zurückgegriffen.

Inhetveen beginnt in seinem Buch (Inhetveen 1983) mit der begrifflichen Fassung von Berührbeziehungen (Berührung, Passung) und geht dann sofort zur Definition von Grundformen über. Die Definition der Ebene erfolgt mittels der "Abdruckstabilität" (dies ist Dinglers Ebenheit) und spezieller Operationen („Klappungen") mit Oberflächenstücken. Gegen beide Begriffsbildungen

[12] Die Herausarbeitung dieser propädeutischen Funktion der Protogeometrie erfolgt leider nicht überzeugend. Der Gedanke an sich ist nicht uninteressant, da er zugleich auf die didaktische Relevanz der Protogeometrie hinweist.

wird in der genannten Studie der Einwand erhoben, dass sie auf geometrisch motivierten, aber methodisch nicht verfügbaren Begriffsbildungen beruhen, wodurch ihr protogeometrischer Status fragwürdig bleibt. Betrachtet man diese Begriffe zudem noch unter dem Blickwinkel der (beabsichtigten) Rekonstruktion von praktischen Funktionseigenschaften von Ebenen, so darf man sehr bezweifeln, dass all das, was die technische Praxis Ebenen in gestaltlicher Hinsicht abfordert in diesen Vorschlägen begrifflich angemessen erfasst und methodisch geordnet worden ist. (Ähnliches ließe sich hinsichtlich der Geraden sagen.)

Über den Charakter dieser Theorie, die als „inhaltlich“ bezeichnet wird, kann hier nur so viel gesagt werden: Sie wird unter Zuhilfenahme zahlreicher <u>inhaltlicher</u> Voraussetzungen, operativer und begrifflicher Art, aufgebaut, die ungeklärt bleiben. Angesichts der Beweisführungen wird dieser Entwurf entscheidend angreifbar, weil dabei weder die Voraussetzungen der Beweise explizit angeführt werden noch auf die angegebenen Definitionen und Forderungen bezogen argumentiert wird. Die Beweise brauchen also zuerst eine Rekonstruktion, um überhaupt verständlich zu sein, was im Hinblick auf das verfolgte Ziel einer begrifflichen Klärung oder gar Explikation von Grundlagen der exakt aufgebauten geometrischen Theorie nicht akzeptabel ist. Gerade in logischer Hinsicht muss sich wohl jeder Begründungsversuch dieser Art bewähren, wenn er überhaupt eine Chance haben soll vor der Mathematik zu bestehen, die vernünftigerweise auf die erreichten Standards nicht verzichten will.

3.4 PROBLEMATISCHE ORIENTIERUNGEN

In den bisherigen Beiträgen zur Geometrie in der Protophysik sind einige als Orientierungen fungierende Fragestellungen von besonderem Interesse, die einer Kritik nicht standhalten, ja sogar eine vernünftige Sicht der Dinge behindern und damit m.E. einen Ballast darstellen, dessen Ausräumung den Blick für die folgende, neue Perspektive frei zu machen vermag. Diesen zentralen Fragen möchte ich mich jetzt zuwenden.

1. In allen bisherigen Entwürfen spielt die Frage nach der Eindeutigkeit der Grundformen (allen voran der Ebene) eine entscheidende Rolle. Sie wird bei Janich sogar zum zentralen Punkt des protophysikalischen Programms überhaupt erhoben. Auch Inhetveen betrachtet die Eindeutigkeit der geometrischen Grundformen als die wichtigste Aufgabe der Protogeometrie. Man hat diese Aufgabe wiederholt mit vorgeometrischen Mitteln zu lösen versucht, aber ohne überzeugenden Erfolg. Es ist jedoch überhaupt nicht zwingend, die Frage der (Gestalt-) Eindeutigkeit protogeometrisch zu erörtern. Sogar in Janichs Konzeption erscheint diese Bemühung völlig unschlüssig, da die Homogenitätsprinzipien auch zur Konstitution der Geometrie führen sollen. Die Konstitution der Geometrie kann daher zunächst völlig unabhängig von der Beantwortung dieser Frage erfolgen. Mit geometrischen Mitteln wäre diese Frage dann viel leichter anzugehen.

2. Die zweite Frage betrifft die Rolle der Ebene in allen bisherigen protogeometrischen Entwürfen. Die offensichtlich unterstellte Priorität der Ebene gegenüber anderen Grundformen, die sich in der Suche nach einer Definition ihrer Gestalt (und nicht z.B. der Geraden) manifestiert, ist nur vom produktiv-operativen Ansatz (in Dinglers und besonders in Janichs Konzeption) her plausibel. Sie ist aber in allen bisherigen Entwürfen durchgängig. Aus kritischer Sicht gibt es keinen stichhaltigen Grund für eine methodische Priorität der Ebene gegenüber der Geraden bei der Rekonstruktion der Bezüge der Geometrie oder im Aufbau der Geometrie. Genau genommen verhält sich sogar auch der produktiv-operative Ansatz in dieser Sache inkonsequent, weil auch zur Herstellung von Geraden erste Verfahren existieren, die sich zwar nicht zur Präzisionsherstellung eignen (gespannte Seile, Schnüre, Haare), aber für viele Praxisbereiche Geraden hinreichend realisieren. Die Ausräumung dieses zentralen „Reliktes“

hat weitreichende Konsequenzen für die Sicht der ganzen bisherigen protogeometrischen Bemühung, und natürlich auch für jede (abgeklärte) Fortsetzung.

3. Vor allem in Janichs Entwurf erhalten die Charakterisierungen geometrischer Grundformen (mehr als bei Dingler) eine zentrale Rolle im Aufbau der Geometrie, die von ihrer Aussage her als Gestalteigenschaften gewiss nicht zusteht. Denn man kann wohl kaum hoffen, die gesamte geometrische Theorie daraus konstituieren zu können, wie ein Blick auf die Axiomatik der Geometrie oder die Ergebnisse der Homogenitätsgeometrie[13] lehrt.

4. Welcher theoretische Status kommt den gegebenen Charakterisierungen geometrischer Grundformen, insbesondere der Ebene, überhaupt zu? Angesichts der zuvor geäußerten Kritik an den Definitionen der Ebene von Dingler bis Inhetveen kann ihr protogeometrischer Status zumindest als ungeklärt gelten. Wenn ihre Rolle (gemäß 3.) nicht so zentral ist und zudem die Priorität einer Form (nach 2.) gegenüber der anderen nicht besteht, so scheint eine grundsätzliche Revision der bisher vorgelegten Protogeometrie dringend nötig zu sein.

5. Ist bisher eigentlich konsequent Praxisrekonstruktion betrieben worden? Mein Eindruck ist, dass sehr schnell der Anschluss an die geometrische Theorie gesucht worden ist (vor allem in der Formengeometrie). Eine Rekonstruktion von einschlägigen Unterscheidungen und Normen der geometrischen Praxis ist dabei nur punktuell gelungen.

[13] Vgl. Amiras 2000, Kap. 4.

4. NEUORIENTIERUNG DER PROTOGEOMETRIE

4.1 PROTOGEOMETRISCHE GRUNDAUFGABEN

Ziel der eingangs genannten Studie war es, die einschlägigen Beiträge zur protophysikalischen Geometriebegründung auf dem Hintergrund der traditionellen Probleme der Grundlagen der Geometrie, allen voran das Konstitutionsproblem ihrer Gegenstände, systematisch-kritisch zu erörtern. Neben einer neuen Einschätzung der Entwicklung der protophysikalischen Geometrie und der Relativierung der angeblichen „Konkurrenz“ der letzten Entwürfe von Janich und Inhetveen, werden dort schließlich die noch offenen, systematischen Probleme herausgestellt und eine neue Bemühung darum angeregt. Besonders die Diskussion der Beiträge Dinglers (welcher als der eigentliche Initiator der protophysikalischen Geometrie anzusehen ist) ergibt, dass nicht seine systematischen Lösungsvorschläge selbst, sondern vielmehr ihre Anliegen als sein wichtigster Beitrag anzusehen sind. Die Herausarbeitung dieser Anliegen führt in dieser Studie zur Explikation von Grundaufgaben, welche eine „Protogeometrie“ als Theorie, welche den Bezug der Geometrie auf konkrete Figuren methodisch herstellt, zu bewältigen hätte. Folgendes wäre demnach zu leisten:

1. Eine <u>methodische Einführung der Grundfiguren</u> und der einschlägigen <u>Grundbeziehungen</u> (insbesondere Gestalttermini) der Geometrie im Zusammenhang mit der technischen Praxis des Umgangs mit Körpern (1. und 2. protogeometrische Rekonstruktionsaufgabe).

2. Eine Rekonstruktion der <u>geometrischen Auffassung</u> von Figuren als Schnitte (3. protogeometrische Rekonstruktionsaufgabe).

3. Eine exakte <u>Charakterisierung der Grundformen der Geometrie hinsichtlich ihrer Gestalt</u>, soweit möglich und erforderlich zum Aufbau der geometrischen Theorie, unter Rückgriff auf 1.,

und eventuell der Beweis ihrer Gestalteindeutigkeit. (4. protogeometrische Rekonstruktionsaufgabe).

Auf der Grundlage der zuvor (§3) formulierten grundsätzlichen Kritik an den bisherigen Ansätzen zur Protogeometrie kann nunmehr eine genauere Beschreibung dieser Aufgaben, wie sie aus meiner Sicht jetzt anstehen, erfolgen. Eine Leitlinie zu ihrer Behandlung liefert folgende Fragestellung: Welche Handlungszusammenhänge (einschließlich Redepraxis) liegen unseren Erfahrungen mit geometrischen Grundformen zugrunde und können als Ansatzpunkt für die Rekonstruktion der geometrischen Terminologie bzw. Theorie dienen?

Zunächst geht es konkret darum, den bisherigen theoretischen Defiziten zu begegnen, im Hinblick auf die Rekonstruktion der Unterscheidungen, welche die Grundfiguren (Flächen, Linien, Punkte) und die Bezüge, die der Rede von der „Inzidenz" von Figuren in der Geometrie zugrunde liegen, betreffen. Dann kommen auch elementare Anordnungseigenschaften in Betracht. (Aufgabe 1)

Auf die Praxis der Gestaltreproduktion bezieht sich die Rede von der „Gestalt" (und „Gestaltkonstanz") von Figuren, die schließlich zur geometrischen „Kongruenz" führt. (Das Theoriestück im ersten Geometrie-Buch Dinglers ist hierbei einschlägig.) In diesem Zusammenhang wären auch die in der genannten Studie festgestellten Mängel in der bisherigen begrifflichen Fassung der Berührbeziehungen (Berühren, Passen) zu beheben. (Aufgabe 2)

Die Auffassung geometrischer Figuren als „Schnitte" ist ein altes Problem, das zuerst in der genannten Studie als Rekonstruktionsaufgabe herausgestellt wird. Die Notwendigkeit ihrer Behandlung ergibt sich hier natürlich schon aus dem Umstand heraus, dass die Rekonstruktion bei körperlichen Figuren ansetzen muss, durch welche Schnitte erst realisiert werden können. (Aufgabe 3)

Alle Bemühungen bis zu dieser Stelle sind in gewisser Weise Vorbereitungen auf die Aufgabe 4, die hier in ihrer Orientierung aufgrund der Ausführungen in §3.4 verändert wird. Zunächst ist, wie zuvor begründet, nicht nur die (bisher auch erfolgte) Behandlung der Ebene in Betracht zu ziehen, sondern besonders auch die Behandlung der Geraden. Es geht nun darum, eine begriffliche Rekonstruktion der elementaren **Funktionseigenschaften** beider Formen in der technischen Praxis des Umgangs mit Figuren zu leisten. In diesem Zusammenhang wird auch die von Dingler als Paradox aufgeworfene Frage nach der Gestalt dieser Grundformen zu diskutieren sein, sowie die Frage nach der Beziehung der herausgestellten Eigenschaften zur geometrischen Theorie bzw. geläufigen Axiomatisierungen. Diese letzte Frage ist angesichts der geäußerten Zweifel am vorgeometrischen Charakter bisheriger Definitionen der Ebene unbedingt zu erörtern. Man muss ja bedenken, dass das Ergebnis der Rekonstruktion (Analyse) von Bezügen nicht unbedingt mit der Rekonstruktion geometrischer Grundsätze zusammenfallen muss, d.h. auf solche Eigenschaften führen muss, die im Sinne der Theoriebildung elementar sind. Erst nach einer geeigneten Analyse der herausgestellten Eigenschaften lässt sich daher m.E. die Frage nach dem Anschluss der skizzierten Figurentheorie an die theoretische Geometrie, d.h. die Frage nach der Konstitution der geometrischen Gegenstände bzw. eines geeigneten Axiomensystems der Geometrie auf dieser Basis (wohlgemerkt: nicht im logischen Sinne, also als logische Folge davon) vernünftig angehen. Bis dahin ist aber wohl noch ein weiter und schwieriger Weg zu gehen.

Aus diesen Ausführungen ergibt sich als Aufgabe einer revidierten **Protogeometrie**, die Funktionseigenschaften geometrischer Grundfiguren und Grundformen so weit zu rekonstruieren und zu ordnen, dass der Bezug der geometrischen Theorie auf Figuren in unserer technischen Praxis und eventuell ein methodischer Übergang (d.h. ein solcher, der den methodischen Weg der Geometrie zur Beherrschung von Figuren und Figurenkomplexen offen legt) zur Theorie hergestellt wird. Dieser, seit Euklid offenen Aufgabe stellt sich also der hier vertretene Ansatz mit einer völlig veränderten Orientierung, die auf eine Vermittlung der berechtigten Anliegen der protophysikalischen Bemühungen mit denen der modernen Axiomatik hinausläuft.

4.2 FUNKTIONAL – OPERATIVER REKONSTRUKTIONSANSATZ

Entscheidendes Merkmal der hier vorgeschlagenen Neuorientierung der Protogeometrie ist das Ansetzen bei den **Funktionen** von Figuren in ihrer **Verwendungspraxis**. Bereits Dingler ist es eigentlich um eine Rekonstruktion der Messpraxis auf der Grundlage einer Explikation der Funktionsnormen von Messgeräten gegangen. Auch die anschließende Bemühung der Protophysik hatte zum Ziel, die normativen Grundlagen der empirisch-experimentellen Praxis herauszustellen, wobei Geometrie und Chronometrie als Rekonstruktionen der Normen, die der Längen- und Zeitmessung zugrunde liegen, verstanden wurden. Im Fall der Geometrie erfolgte jedoch fatalerweise der Ansatz bei der **Herstellung** von Grundformen (insb. der Ebene), was aus vielen Gründen (insbesondere auch technikgeschichtlichen) naheliegend ist, aber einer kritischen Sichtweise nicht standhält.

Die Frage nach den Funktionseigenschaften von Messgeräten (bzw. von Geräten überhaupt) ist primär nicht eine Frage, die ihre Herstellung betrifft, auch wenn letztere zielgerichtet auf die Erzeugung von (scheinbar) elementaren Eigenschaften erfolgt. Diese Eigenschaften sind zumeist in Tests manifest, die in der einschlägigen technischen Praxis zur Sicherung der gewünschten technischen Eigenschaften eines Geräts hinreichend sind bzw. sich als solche erwiesen haben. Auch im Fall der Ebene kann man z.B. über Passungstests Aufschluss darüber erhalten, ob eine bestimmte Form vorliegt. Das jedoch, was die Ebene in der technischen Praxis an Eigenschaften zeigt (z.B. in ihrer Fortsetzbarkeit oder im Zusammenspiel mit Geraden und noch viel mehr) kann aus der Herstellung allein, also schließlich aus einer einzigen Formeigenschaft, nicht erschlossen werden. Diese Herstellung ist nur ein Ausschnitt aus dem Gesamtzusammenhang, in welchem die Funktionseigenschaften der Ebene und ihr Zusammenwirken mit den Funktionen anderer Formen und Erscheinungen erst sinnvoll hervortreten können. Welche Gerätefunktionen erfüllt werden, kann also erst im Verwendungszusammenhang der Geräte erkannt werden, ein Eingehen auf die Herstellung mag heuristisch oder analytisch hilfreich sein, auf die eigentliche Frage liefert dies keine vollständige bzw. angemessene Antwort.

Bei der anvisierten Rekonstruktion handelt es sich, gemäß der zuvor erfolgten näheren Beschreibung der Aufgaben der Protogeometrie, um elementare Funktionseigenschaften der Ebene und Geraden in der technischen Praxis. Bei Dinglers Charakterisierung der Ebenheit über die Kongruenz und Passung hat man es mit einer solchen Funktionseigenschaft ebener Oberflächenstücke zu tun, die wohl nicht geometriefrei ist. Die entsprechende Eigenschaft zur Charakterisierung von geraden Linienstücken ist jedoch nicht so problematisch; sie lässt sich elementar fassen und operativ verankern, was an der Figurenart und den damit verbundenen Handlungsmöglichkeiten (gleichzeitige Anpassung mehrerer Linien) liegt. Auch die Ergänzbarkeit ist für gerade Linienstücke, als Folge davon, einfacher als für Ebenenstücke begrifflich zu fassen. Man sieht, wie die zuvor angesprochenen Beschränkungen, hier die angebliche Vorgängigkeit der Ebene, die Sicht der Dinge behindern.

Durch die Befreiung vom produktiv-operativen Ansatz wird der Blick für die eigentliche Aufgabe frei. Sie hat zunächst nichts zu tun mit der in einer (angeblich) primären Herstellung der Ebene oder der Geraden erzeugten Formeigenschaft, sondern mit deren praktischen **Funktionseigenschaften**, die aus den elementaren technischen Bezügen der Geometrie zu rekonstruieren sind. Die Formulierung dieser Funktionseigenschaften muss zunächst nicht geometriefrei erfolgen, sie sollte sich aber an den praktischen Verhältnissen orientieren und die Unterscheidungen durch verfügbare technische Handlungen und Orientierungen vermitteln (<u>Forderung einer operativ verankerten Begriffsbildung</u>). Beide Merkmale des Ansatzes, der Versuch der Rekonstruktion von elementaren Gerätefunktionen als Basis für die Behandlung des Konstitutionsproblems geometrischen Wissens und die Forderung nach einer operativen Vermittlung der einschlägigen Unterscheidungen werden in der Bezeichnung „**funktional-operativ**“ zusammengefasst.

6. NACHBEMERKUNGEN

Die in der eingangs genannten Studie eingeläutete Neuorientierung der Protogeometrie wurde hier nach einem Rückblick auf die bisherigen Ansätze weiter verfolgt und führte zu einer weitergehenden Klärung der Aufgaben, die noch zu bewältigen sind. Was nun gefordert ist, ist kein erneuter Versuch, die Axiomatik der Geometrie schnell zu erreichen. Solche Versuche haben in der Vergangenheit nicht zum Erfolg geführt. Gefragt sind vielmehr zunächst umsichtige und gründliche Analysen der geometrisch gestützten technischen Praxis mit den Mitteln moderner Sprachphilosophie und Logik, um die Bezüge der Geometrie auf Figuren zu explizieren und zu ordnen. Dazu sollte man auf jeden Fall auch die Tradition der Grundlagen bzw. der Philosophie der Geometrie zur Kenntnis nehmen, denen die begrifflichen Probleme, die hier zu erörtern sind, wenn auch mit jeweils anderer Orientierung, durchaus nicht fremd sein können, und auch nicht fremd sind. Hierbei bietet sich die Chance einer vielfach wirksamen Integration, was bei der Bedeutung der Geometrie als Kulturwissen nur wünschenswert sein kann. Speziell im Hinblick auf die Beziehung der Protogeometrie zur vorliegenden Didaktik der operativen Geometrie (Bender/Schreiber 1985), deren Ansatz auf dem Hintergrund der protophysikalischen Bemühung entstanden ist (Schreiber 1978), scheint die Erwartung berechtigt zu sein, dass die Ergebnisse der noch zu leistenden systematischen und kritischen Arbeit nicht ohne Wirkung bleiben werden.-

LITERATURVERZEICHNIS

Amiras, L., 2000, Protogeometrica. Systematisch-kritische Untersuchungen zur protophysikalischen Geometriebegründung, Dissertation, Universität Konstanz, Konstanz.

Amiras, L., 2002, "Zur operativen Grundlegung der Geometrie bei H. Dingler", in: Phil. naturalis 39, 235-258.

Amiras, L., 2003, , "Über den produktiv-operativen Ansatz zur Begründung der Geometrie in der Protophysik", in: Journal for General Philosophy of Science, Heft 1, 1-26.

Bender, P./ Schreiber, A., 1985, Operative Genese der Geometrie, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 12, Wien / Stuttgart.

Böhme, G. (Hg.), 1976, Protophysik. Für und wider eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik, Frankfurt a.M.

Bopp, E.,1956, "Starrer Körper und euklidische Geräte", in: Phil. naturalis 3, 383 - 391.

Dingler, H., 1911, Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften, Leipzig.

Dingler, H., 1925, "Über den Zirkel in der empirischen Begründung der Geometrie", in: Kantstudien 30, 310 - 330.

Dingler, H., 1933, Die Grundlagen der Geometrie. Ihre Bedeutung für Philosophie, Mathematik, Physik und Technik, Stuttgart.

Dingler, H., 1964, Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft, Hrsg. von P. Lorenzen, München.

Euklid, 1980, Die Elemente, Buch I - XIII, Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und hrsg. von Clemens Thaer, Darmstadt.

Hilbert, D., 1899, Grundlagen der Geometrie, Leipzig. Zehnte Auflage: Stuttgart 1968 mit Suppl. von Paul Bernays. Zwölfte Auflage: Stuttgart 1977 (Neudruck der 10.Auflage).

Inhetveen, R., 1983, Konstruktive Geometrie. Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie, Mannheim.

Janich, P., 1969, Die Protophysik der Zeit, Mannheim. Zweite, neubearbeitete Auflage 1980.

Janich, P., 1980, Die Protophysik der Zeit. Konstruktive Begründung und Geschichte der Zeitmessung, Frankfurt a.M.

Janich, P., 1976, "Zur Protophysik des Raumes", in: Böhme, G.(Hg.), 1976, Protophysik. Für und wider eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik, Frankfurt a.M., 83-130.

Janich, P., 1992 „Die technische Erzwingbarkeit der Euklidizität“, in: Janich, P. (Hg.), Entwicklungen der methodischen Philosophie, Frankfurt a.M. 1992., 68-84.

Janich, P., 1997, Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit und Materie, Frankfurt a.M.

Klein, F., 1872, Vergleichende Untersuchungen über neuere geometrische Forschungen ("Erlanger Programm"), Erlangen. Reprint der Ausgabe Leipzig, 3. Auflage, Frankfurt a.M. 1977.

Lorenzen, P., 1961, "Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung", in: Phil.naturalis VI(1961), 415-431, Wiederabruck in: Lorenzen, 1969, Methodisches Denken, Frankfurt a.M., 120-141.

Lorenzen, P., 1969, Methodisches Denken, Frankfurt a.M.

Lorenzen, P., 1977, "Eine konstruktive Theorie der Formen räumlicher Figuren", in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 9(1977), 95-99.

Lorenzen, P., 1984, Elementargeometrie. Das Fundament der analytischen Geometrie, Mannheim.

Mittelstraß, J. (Hg), ab 1980, Enzyklopädie Philosophie und Wissensschaftstheorie, Bd.1: A-G, Bd.2: H-O, Mannheim/Wien/Zürich.

Mittelstraß, J. (Hg), ab 1995, Enzyklopädie Philosophie und Wissensschaftstheorie, Bd. 3: P-So, Bd. 4: Sp-Z, Stuttgart.

Steiner, F., 1971, Über den Aufbau der Geometrie mit Hilfe von Homogenitätsprinzipien, Math. Diplomarbeit, Erlangen.

Schreiber, A., 1978, "Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht", in: Der Mathematikunterricht 24/5 (1978), 7-24.