Isomorphie von η_α-Ordnungen und reell abgeschlossenen Körpern

Bachelorarbeit

vorgelegt von

LAURA WIRTH

an der

Universität Konstanz

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE SEKTION
FACHBEREICH MATHEMATIK UND STATISTIK

Betreuerin: PROF. DR. SALMA KUHLMANN
Konstanz, Sommersemester 2019

Danksagung

Zu Beginn möchte ich mich bei allen bedanken, die mich beim Schreiben dieser Bachelorarbeit unterstützt und motiviert haben.

Bei Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann möchte ich mich für ihre Betreuung, hilfreichen Anregungen und besonders für das Beweisen von Lemma 6.4.14 und Lemma 7.2.4 bedanken.

Außerdem gilt mein Dank Lothar Quirin Johannes Sebastian Krapp, der mir mit viel Geduld und Hilfsbereitschaft zur Seite stand. Die zahlreichen Gespräche mit ihm haben maßgeblich dazu beigetragen, dass diese Arbeit nun in dieser Form vorliegt. Für das Korrekurlesen meiner Arbeit bin ich ihm ebenfalls sehr dankbar.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mir durch ihre Unterstützung mein Studium ermöglicht hat. Mein Dank gebührt insbesondere meiner Mama. Sie hat mich durch alle Höhen und Tiefen meines Studiums begleitet. Ohne ihre aufmunternden Worte und ihr Verständnis wäre ich vermutlich nie so weit gekommen.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden zu Beginn einige Grundlagen zu linearen Ordnungen, Ordinal- und Kardinalzahlen eingeführt. Anschließend werden η_α-Ordnungen studiert. Dabei wird eine Übersicht zur Existenz von η_α-Ordnungen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ gegeben und es wird die Isomorphie von η_α-Ordnungen betrachtet. Außerdem wird bewiesen, dass alle reell abgeschlossenen η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ zueinander isomorph sind. Anschließend wird unter verschiedenen Voraussetzungen mithilfe geeigneter Gegenbeispiele gezeigt, dass reell abgeschlossene Körper desselben Ordnungstyps im Allgemeinen nicht isomorph sind. Abschließend werden einige noch offene Fragen zusammengefasst.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Theorie der η_α-Ordnungen, wobei α eine Ordinalzahl bezeichnet, wurde Anfang des 20. Jahrhunderts von dem deutschen Mathematiker Felix Hausdorff (1868–1942) entwickelt. Hausdorffs Resultate finden sich beispielsweise in [8] und [9]. Da die η_0-Ordnungen mit den nichtleeren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte übereinstimmen, sind die η_α-Ordnungen eine Verallgemeinerung der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte. Die abzählbaren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte sind nach einem Isomorphiesatz des deutschen Mathematikers Georg Cantor (1845–1918) aus dem Werk „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)“ [3] alle zueinander ordnungsisomorph. Dieses Resultat verallgemeinert Hausdorff in [9], indem er zeigt, dass alle η_α-Ordnungen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ zueinander ordnungsisomorph sind. Außerdem trifft Hausdorff in [8] und [9] einige Aussagen zur Existenz von η_α-Ordnungen. Ungefähr vierzig Jahre später greift der polnische Mathematiker Wacław Sierpiński (1882–1969) in seiner Arbeit „Sur un propriété des ensembles ordonnés“ [20] die Ideen Hausdorffs auf und vereinfacht diese deutlich. Er definiert mithilfe von Binärfolgen konkrete η_α-Ordnungen und bestimmt deren Kardinalität. Einige Jahre später beweist auch der amerikanische Mathematiker Leonard Gillman (1917–2009) in seiner Arbeit „Some remarks on η_α-sets“ [6] weitere Existenz- und Isomorphieaussagen zu η_α-Ordnungen.
Im Jahr 1955 beweisen der ungarische Mathematiker Paul Erdős (1913–1996) und die amerikanischen Mathematiker Leonard Gillman und Melvin Henriksen (1927–2009) in ihrem gemeinsamen Paper „An isomorphism theorem for real-closed fields“ [4] ein Analogon zum Steinitzschen Isomorphiesatz, welcher besagt, dass jeder überabzählbare algebraisch abgeschlossene Körper durch seine Kardinalität und Charakteristik bis auf Isomorphie bestimmt wird. Sie zeigen nämlich, dass für jede Ordinalzahl $\alpha > 0$ alle reell abgeschlossenen η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ isomorph (als angeordnete Körper) sind. Weil für $\alpha > 0$ alle η_α-Körper überabzählbar, nicht-archimedisch und nach dem oben erwähnten Isomorphiesatz von Hausdorff zueinander ordnungsisomorph sind, fragen Erdős, Gillman und Henriksen in [4], ob jeder überabzählbare nicht-archimedische reell abgeschlossene Körper durch seinen Ordnungstyp bis auf Isomorphie bestimmt wird.
Diese Frage wird ein Jahr später von dem amerikanischen Mathematiker Abraham Robinson (1918–1974) in seinem Paper „Solution of a problem by

Erdös–Gillman–Henriksen“ [17] durch die Konstruktion eines Gegenbeispiels verneint. Er trifft dabei einige Fehlaussagen, welche wir in dieser Arbeit korrigieren werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, die oben erwähnten Resultate zu η_α-Ordnungen und den Isomorphiesatz von Erdős, Gillman und Henriksen zu beweisen sowie das Beispiel von Robinson zu betrachten. Schließlich möchten wir reell abgeschlossene Körper desselben Ordnungstyps unter verschiedenen Voraussetzungen auf Isomorphie untersuchen.

Basierend auf dem Buch „Linear Orderings“ von Joseph G. Rosenstein [18] werden wir daher in Abschnitt 2 zunächst die Grundlagen zu linearen Ordnungen einführen. Dazu gehören der Begriff der Ordnungsisomorphie sowie Verknüpfungen auf der Klasse der linearen Ordnungen. Außerdem werden wir einige Eigenschaften von linearen Ordnungen definieren. Damit haben wir die nötigen Hilfsmittel, um in Abschnitt 3 Cantors Isomorphiesatz zu beweisen und mithilfe dessen die abzählbaren dichten linearen Ordnungen bis auf Isomorphie zu charakterisieren. Um daraufhin wie Hausdorff den Isomorphiesatz von Cantor verallgemeinern zu können, geben wir in Abschnitt 4 zuerst eine kurze Einführung in die Mengenlehre. Wir betrachten dabei die Theorie der Ordinal- und Kardinalzahlen, welche eine Teilklasse der linearen Ordnungen bilden. Wir werden die Beweismethode der Induktion entlang einer Ordinalzahl einführen, die wir bei einem Großteil der Isomorphiebeweise verwenden werden. Ferner geben wir eine knappe Einführung in die Kardinalzahlarithmetik. In Abschnitt 5 beschäftigen wir uns dann mit den η_α-Ordnungen. Wir geben eine vollständige Übersicht zur Existenz von η_α-Ordnungen und beweisen daraufhin den Isomorphiesatz von Hausdorff. In Abschnitt 6 beschäftigen wir uns mit den Grundlagen zu angeordneten Strukturen, insbesondere zu reell abgeschlossenen Körpern. Damit können wir in Abschnitt 7 den Isomorphiesatz von Erdős, Gillman und Henriksen beweisen. Ferner klären wir die Isomorphieverhältnisse reell abgeschlossener Körper desselben Ordnungstyps unter verschiedenen Voraussetzungen. Dabei gehen wir insbesondere auf das Beispiel von Robinson ein und korrigieren die darin enthaltenen Fehlaussagen. Alle Fragen, die wir bisher nicht beantworten konnten, fassen wir schließlich in Abschnitt 8 zusammen.

In der gesamten Arbeit nehmen wir das Auswahlaxiom an, welches nach [5, Satz 9.1] äquivalent zum Wohlordnungsprinzip ist. Dies ist notwendig, um von der Kardinalität einer Menge sprechen zu können.

2 Lineare Ordnungen

Dieser Abschnitt schafft die Grundlage dieser Arbeit. Lineare Ordnungen werden in allen Abschnitten eine zentrale Rolle spielen. Daher führen wir zunächst die wichtigsten Definitionen und Resultate zu linearen Orndungen ein. Dabei orientieren wir uns hauptsächlich an [18, Chapter 1] und teilweise an [18, Chapter 2].

2.1 Einführung

2.1.1 Definition. Sei $\mathcal{A} = (A, <_\mathcal{A})$ ein Paar bestehend aus einer Menge A und einer zweistelligen Relation $<_\mathcal{A}$ auf A so, dass für alle $x, y, z \in A$ gelten:

(1) $\neg\, x <_\mathcal{A} x$,

(2) $(x <_\mathcal{A} y \,\wedge\, y <_\mathcal{A} z) \to x <_\mathcal{A} z$,

(3) $x < y \,\vee\, x = y \,\vee\, y < x$.

Dann nennen wir $\mathcal{A}$ eine **lineare Ordnung** und sagen, dass A durch $<_\mathcal{A}$ **linear angeordnet** wird. Wir sprechen von einer **nichtleeren** linearen Ordnung, wenn die Trägermenge A nichtleer ist. Ensprechend nennen wir $\mathcal{A}$ **endlich**, **abzählbar** oder **überabzählbar**, falls A endlich, abzählbar, oder überabzählbar ist. In dieser Arbeit heißt eine Menge M abzählbar, falls eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert.

2.1.2 Beispiel. Mit $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ bezeichnen wir die natürlichen, mit $\mathbb{Z}$ die ganzen, mit $\mathbb{Q}$ die rationalen und mit $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen.
Für $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ bezeichne $<_A$ die gewöhnliche „kleiner"-Relation auf der Menge A. Dann sind $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <_\mathbb{N})$, $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <_\mathbb{Z})$, $\mathcal{Q} := (\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$ und $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ lineare Ordnungen. Eine genaue Konstruktion der Zahlenmengen mit ihren zugehörigen Anordnungen findet sich in Anhang A.

2.1.3 Beispiel. Um zu sehen, dass eine Menge auf sehr verschiedene Arten angeordnet werden kann, betrachten wir die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Diese bildet nicht nur mit $<_\mathbb{N}$, sondern auch mit folgenden Relationen eine lineare Ordnung:

a)
$$m >_\mathbb{N} n \;:\Leftrightarrow\; n <_\mathbb{N} m \quad \text{(gewöhnliche „größer"-Relation)},$$

b)

$$m <_0 n :\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \wedge n \neq 0 \wedge m <_{\mathbb{N}} n & \text{oder} \\ m \neq 0 \wedge n = 0, \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} m <_{\text{gu}} n &:\Leftrightarrow \begin{cases} m <_{\mathbb{N}} n \wedge m \equiv n \pmod 2 & \text{oder} \\ m \equiv 0 \pmod 2 \wedge n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m <_{\mathbb{N}} n \wedge n - m \text{ gerade} & \text{oder} \\ m \text{ gerade} \wedge n \text{ ungerade}, \end{cases} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} m <_{\text{ug}} n &:\Leftrightarrow \begin{cases} m <_{\mathbb{N}} n \wedge m \equiv n \pmod 2 & \text{oder} \\ m \equiv 1 \pmod 2 \wedge n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m <_{\mathbb{N}} n \wedge n - m \text{ gerade} & \text{oder} \\ m \text{ ungerade} \wedge n \text{ gerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass diese Relationen tatsächlich die Bedingungen (1)–(3) aus Definition 2.1.1 erfüllen. Es ist also wichtig zwischen einer Menge A und der linearen Ordnung $\mathcal{A} = (A, <_{\mathcal{A}})$ zu unterscheiden.

Bei der Arbeit mit linearen Ordnungen ist es sehr nützlich sich vorzustellen wie diese aussehen. Daher geben wir nun eine kurze Anleitung zur Visualisierung:

2.1.4 Bemerkung. Um eine lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, <_{\mathcal{A}})$ zu visualisieren, kann man sich eine horizontale Linie vorstellen und auf dieser die Elemente der Menge wie folgt platzieren: $a_1 \in A$ liegt genau dann links von $a_2 \in A$, wenn $a_1 <_{\mathcal{A}} a_2$. Wir erhalten beispielsweise für die linearen Ordnungen aus Beispiel 2.1.3 folgende Erscheinungsbilder:

a) $\begin{array}{ccccc} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$

b) $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$

c) $\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 4 & & 1 & 3 & 5 & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \end{array}$

d) $\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 5 & & 0 & 2 & 4 & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \end{array}$

Um den Umgang mit linearen Ordnungen zu erleichtern, führen wir einige Abkürzungen und Schreibweisen ein:

2.1.5 Notation. Sei $\mathcal{A} = (A, <_{\mathcal{A}})$ eine lineare Ordnung.

1. Falls aus dem Kontext ersichtlich wird, auf welche Relation wir uns beziehen, schreiben wir zur Vereinfachung $<$ statt $<_{\mathcal{A}}$ und manchmal A statt $\mathcal{A}$.

2. Wir verwenden Standardnotationen wie

   - $x \leq y \;:\Leftrightarrow\; (x < y \lor x = y)$,
   - $x > y \;:\Leftrightarrow\; y < x$,
   - $x \geq y \;:\Leftrightarrow\; (x > y \lor x = y)$.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in A$ schreiben wir $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ statt $\bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} x_i < x_{i+1}$.

4. Seien $X, Y \subseteq A$ und $y \in A$. Wir kürzen $\forall x \in X\; x < y$ durch $X < y$ ab. Analog schreiben wir $y < X$ statt $\forall x \in X\; y < x$. Außerdem schreiben wir für $X, Y \subseteq A$ kurz $X < Y$ statt $\forall x \in X\; \forall y \in Y\; x < y$.

Den Zusammenhang zwischen $<$ und $\leq$ beschreiben wir durch das folgende Resultat:

2.1.6 Lemma. *Ist $(A, <)$ eine lineare Ordnung, so erfüllt $\leq$ die folgenden Aussagen für alle $x, y, z \in A$:*

(i) $x \leq x$

(ii) $(x \leq y \land y \leq z) \to x \leq z$

(iii) $x \leq y \lor y \leq x$.

Erfüllt umgekehrt $\leq$ die Bedingungen (i)–(iii) für alle $x, y, z \in A$, so bildet $(A, <)$ mit

$$x < y \;:\Leftrightarrow\; (x \leq y \land x \neq y)$$

eine lineare Ordnung.

Beweis. Dieser Zusammenhang folgt direkt aus der Definition einer linearen Ordnung. □

Aufgrund von Lemma 2.1.6 nennen wir manchmal auch $(A, \leq)$ eine **lineare Ordnung**.

2.2 Beziehungen zwischen linearen Ordnungen

2.2.1 Definition. Seien $\mathcal{A} = (A, <_\mathcal{A})$ und $\mathcal{B} = (B, <_\mathcal{B})$ lineare Ordnungen.

1. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt **ordnungserhaltend**, falls für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:
$$a_1 <_\mathcal{A} a_2 \to f(a_1) <_\mathcal{B} f(a_2).$$
Wir nennen f dann auch **Ordnungseinbettung** (oder kurz **Einbettung**) von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

2. Eine surjektive Ordnungseinbettung nennen wir einen **Ordnungsisomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

3. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen **ordnungsisomorph** (oder kurz **isomorph**), falls es einen Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt. Wir schreiben dann $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

2.2.2 Bemerkung.

a) In der Tat ist der Begriff „Ordnungseinbettung“ gerechtfertigt, denn ordnungserhaltende Funktionen sind stets injektiv. Gilt $a_1 \neq a_2$, so folgt nämlich
$$a_1 <_\mathcal{A} a_2 \lor a_2 <_\mathcal{A} a_1,$$
was wiederum
$$f(a_1) <_\mathcal{B} f(a_2) \lor f(a_2) <_\mathcal{B} f(a_1)$$
bzw. $f(a_1) \neq f(a_2)$ impliziert.

b) Aus der Implikation $a_1 <_\mathcal{A} a_2 \to f(a_1) <_\mathcal{B} f(a_2)$ folgt bereits die Äquivalenz $a_1 <_\mathcal{A} a_2 \leftrightarrow f(a_1) <_\mathcal{B} f(a_2)$. Gilt nämlich $a_1 \geq_\mathcal{A} a_2$, so folgt $f(a_1) \geq_\mathcal{B} f(a_2)$. Insbesondere ist die Umkehrabbildung eines Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ein Ordnungsisomorphimus von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$.

2.2.3 Beispiel.

a) Die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, definiert durch
$$f(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ \frac{n}{n+1} & \text{für } n > 0, \end{cases}$$
ist eine Einbettung von $(\mathbb{N}, <_0)$ in $\mathcal{Q}$.

b) Die Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$g(n) := \begin{cases} n+1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ n-1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ist ein Ordnungsisomorphismus von $(\mathbb{N}, <_{\text{gu}})$ nach $(\mathbb{N}, <_{\text{ug}})$. Betrachtet man die Erscheinungsbilder in Bemerkung 2.1.4, wird klar, dass der Unterschied zwischen $(\mathbb{N}, <_{\text{gu}})$ und $(\mathbb{N}, <_{\text{ug}})$ nur in der Beschriftung liegt.

2.2.4 Lemma. *Seien $\mathcal{A} = (A, <_{\mathcal{A}})$ eine lineare Ordnung und $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Definiert man $<_{\mathcal{B}} = <_{\mathcal{A}} \cap (B \times B)$, so ist $\mathcal{B} = (B, <_{\mathcal{B}})$ ebenfalls eine lineare Ordnung.*

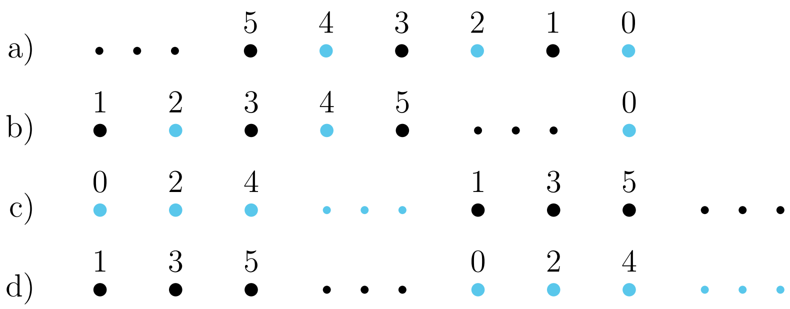
Beweis. Die Eigenschaften (1)–(3) aus Definition 2.1.1 übertragen sich direkt von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$. $\square$

2.2.5 Definition. In der Situation aus Lemma 2.2.4 nennen wir die lineare Ordnung $\mathcal{B}$ eine **Unterordnung** von $\mathcal{A}$ und schreiben dafür $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Die Relation $<_{\mathcal{B}}$ nennen wir auch die von $\mathcal{A}$ auf B **induzierte Anordnung**. Meist identifizieren wir $\mathcal{B}$ mit der Menge B und schreiben zur Vereinfachung $<_{\mathcal{A}}$ statt $<_{\mathcal{B}}$.

2.2.6 Beispiel.

1. Es gilt $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$, was in Anhang A bewiesen wird.

2. Um zu sehen, dass die gleiche Teilmenge verschiedene Unterordnungen erzeugen kann, fassen wir die geraden Zahlen $2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ als Unterordnung von den linearen Ordnungen $(\mathbb{N}, >), (\mathbb{N}, <_0), (\mathbb{N}, <_{\text{gu}})$ und $(\mathbb{N}, <_{\text{ug}})$ aus Beispiel 2.1.3 auf und erhalten die folgenden Erscheinungsbilder:



2.2.7 Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine lineare Ordnung. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $\mathcal{A}$ bezüglich $\cong$ als den **Ordnungstyp** von $\mathcal{A}$. Für Ordnungstypen verwenden wir meist griechische Kleinbuchstaben.

Georg Cantor gilt als Begründer der Mengenlehre und er war es auch, der erstmals den Begriff einer (einfach) geordneten Menge definierte und die Theorie der Ordnungstypen entwickelte. Dass Ordnungsisomorphie tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der linearen Ordnungen definiert, stellte Cantor bereits 1895 in seiner Arbeit „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)“ [3, S. 497] fest. Wir beweisen dieses Resultat nun:

2.2.8 Lemma. *Ordnungsisomorphie definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der linearen Ordnungen.*

Beweis. Da die Umkehrabbildung eines Ordnungsisomorphismus ebenfalls ein Ordnungsisomorphismus ist, ist die Relation $\cong$ symmetrisch. Weiterhin ist id ein Ordnungsisomorphismus, was die Reflexivität von $\cong$ zeigt. Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Ordnungsisomorphismen, so ist es auch die Verkettung $g \circ f\colon A \to C$, was die die Transitivität von $\cong$ impliziert. □

2.2.9 Bemerkung.

a) Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ denselben Ordnungstyp, so haben beide dasselbe Erscheinungsbild. Der Unterschied liegt dann, wie in Bemerkung 2.1.4, nur in der Beschriftung. Ordnungstypen sind anschaulich also die verschiedenen Erscheinungsbilder, die man durch Visualisieren von linearen Ordnungen erhält.

b) Isomorphe lineare Ordnungen haben diesselbe Mächtigkeit. Daher sprechen wir auch von endlichen, abzählbaren und überabzählbaren Ordnungstypen.

2.2.10 Notation.

1. Mit ω bezeichnen wir den Ordnungstyp von $\mathcal{N}$.
2. Mit ζ bezeichnen wir den Ordnungstyp von $\mathcal{Z}$.
3. Mit η bezeichnen wir den Ordnungstyp von $\mathcal{Q}$.
4. Mit λ bezeichnen wir den Ordnungstyp von $\mathcal{R}$.

In [3, S. 498] findet sich folgende Isomorphieaussage über die endlichen linearen Ordnungen:

2.2.11 Lemma. *Alle gleichmächtigen endlichen linearen Ordnungen sind isomorph.*

Beweis. Die Erscheinungsbilder endlicher linearer Ordnungen machen die Isomorphie offensichtlich:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ b_1 & b_2 & b_3 & & b_n \end{array}$$

Für einen formalen Beweis verweisen wir auf [18, Lemma 1.32]. □

2.2.12 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $\mathbf{n}$ für den Ordnungstyp einer endlichen linearen Ordnung mit n Elementen.

2.2.13 Satz. *Es gibt genau abzählbar viele endliche Ordnungstypen.*

Beweis. Wegen Lemma 2.2.11 definiert $n \mapsto \mathbf{n}$ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in die Menge der endlichen Ordnungstypen. □

2.3 Operationen auf linearen Ordnungen

Wir möchten nun eine Addition und eine Multiplikation auf der Klasse der linearen Ordnungen und auf der Klasse der Ordnungstypen einführen. Diese Operationen werden uns vor allem bei der Konstruktion von Beispielen helfen.

Seien im Folgenden $\mathcal{A}_0 = (A_0, <_0)$ und $\mathcal{A}_1 = (A_1, <_1)$ lineare Ordnungen.

2.3.1 Definition. Wir definieren die **Summe** $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 = (A, <)$ durch die Menge

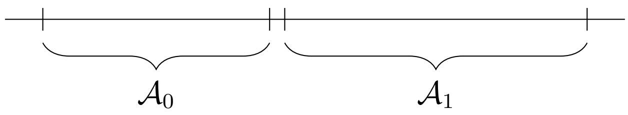
$$A = (A_0 \times \{0\}) \mathbin{\dot\cup} (A_1 \times \{1\})$$

und für $(a, x), (a', x') \in A$ definieren wir die Relation $<$ durch

$$(a, x) < (a', x') \;:\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \wedge x' = 1 \quad \text{oder} \\ x = x' = 0 \wedge a <_0 a' \quad \text{oder} \\ x = x' = 1 \wedge a <_1 a. \end{cases}$$

2.3.2 Bemerkung.

a) Es lässt sich leicht zeigen, dass die Summe $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ wieder eine lineare Ordnung bildet. Anschaulich bedeutet die Addition von $\mathcal{A}_1$ zu $\mathcal{A}_0$, dass man das Erscheinungsbild von $\mathcal{A}_1$ rechts vom Erscheinungsbild von $\mathcal{A}_0$ platziert:



b) Das kartesische Produkt mit $\{0\}$ bzw. $\{1\}$ ist wichtig, falls A_0 und A_1 nicht disjunkt sind. Bei disjunkten Mengen kann man $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 = (A, <)$ durch $A = A_0 \,\dot\cup\, A_1$ und

$$a < a' \;:\Leftrightarrow \begin{cases} a \in A_0 \;\wedge\; a' \in A_1 & \text{oder} \\ a, a' \in A_0 \;\wedge\; a <_0 a' & \text{oder} \\ a, a' \in A_1 \;\wedge\; a <_1 a' & \end{cases}$$

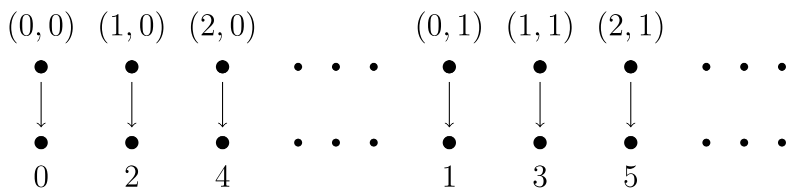
für $a, a' \in A$ definieren und erhält so eine lineare Ordnung, die zu der Summe aus Definition 2.3.1 isomorph ist.

2.3.3 Definition. Seien τ_0, τ_1 Ordnungstypen und sei $\mathcal{A}_k \in \tau_k$ für $k = 0, 1$. Wir definieren die **Summe** $\tau_0 + \tau_1$ als den Ordnungstyp von $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$.

Nach [18, Lemma 1.30] ist diese Operation wohldefiniert.

2.3.4 Beispiel.

a) Die linearen Ordnungen $(\mathbb{N}, <_{\text{gu}})$ und $(\mathbb{N}, <_{\text{ug}})$ haben beide den Ordnungstyp $\omega + \omega$. Wir wissen, dass $(\mathbb{N}, <_{\text{gu}}) \cong (\mathbb{N}, <_{\text{ug}})$ und zeigen nun, dass $\mathcal{N} + \mathcal{N} \cong (\mathbb{N}, <_{\text{gu}})$. Die Abbildung $g\colon (\mathbb{N} \times \{0\}) \,\dot\cup\, (\mathbb{N} \times \{1\}) \to \mathbb{N}$ mit der Vorschrift



ist offensichtlich ein Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{N} + \mathcal{N}$ nach $(\mathbb{N}, <_{\text{gu}})$.

Formal definieren wir g durch

$$g(n,x) := \begin{cases} 2n, & \text{falls } x = 0 \\ 2n+1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

b) Es gilt $\zeta = \omega^* + \omega$, wobei ω^* den Ordnungstyp von $\mathcal{N}^* := (\mathbb{N}, >)$ bezeichnet. Das folgende Bild zeigt, dass $f\colon \mathbb{Z} \to (\mathbb{N} \times \{0\}) \mathbin{\dot\cup} (\mathbb{N} \times \{1\})$ mit

$$f(x) := \begin{cases} (-(x+1), 0) & \text{für } x < 0 \\ (x, 1) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

einen Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{Z}$ nach $\mathcal{N}^* + \mathcal{N}$ definiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & (2,0) & (1,0) & (0,0) & (0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & \end{array}$$

c) Es gilt $\omega + \mathbf{1} \neq \omega$. Lineare Ordnungen mit Ordnungstyp $\omega + \mathbf{1}$ haben nämlich ein „letztes" Element und können damit nicht den Ordnungstyp ω haben (siehe Lemma 2.4.8). Es gilt jedoch $\mathbf{1} + \omega = \omega$, denn die Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to \{(0,0)\} \mathbin{\dot\cup} (\mathbb{N} \times \{1\})$,

$$g(n) := \begin{cases} (0,0) & \text{für } n = 0 \\ (n-1, 1) & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

definiert einen Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\{0\} + \mathcal{N}$. Insbesondere folgt $\mathbf{1} + \omega \neq \omega + \mathbf{1}$.

Die Ungleichheit $\mathbf{1} + \omega \neq \omega + \mathbf{1}$ zeigt, dass die Addition von Ordnungstypen und damit auch von linearen Ordnungen im Allgemeinen nicht kommutativ ist. Nach [18, Lemma 1.35 und Corollary 1.36] ist sie jedoch eine assoziative Operation. Wir können daher bei der Addition auf Klammerung verzichten.

2.3.5 Definition. Wir definieren das **Produkt** $\mathcal{A}_0 \cdot \mathcal{A}_1 = (A, <)$ durch die Menge $A = A_0 \times A_1$ und für $(a_0, a_1), (a_0', a_1') \in A_0 \times A_1$ definieren wir die Relation $<$ durch

$$(a_0, a_1) < (a_0', a_1') \;:\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 <_1 a_1' & \text{oder} \\ a_1 = a_1' \wedge a_0 <_0 a_0'. \end{cases}$$

2.3.6 Bemerkung. Es lässt sich leicht zeigen, dass auch das Produkt $\mathcal{A}_0 \cdot \mathcal{A}_1$ wieder eine lineare Ordnung bildet. Anschaulich bedeutet die Multiplikation von $\mathcal{A}_0$ mit $\mathcal{A}_1$, dass jeder Punkt in der linearen Ordnung $\mathcal{A}_1$ durch $\mathcal{A}_0$ ersetzt wird. Beispielsweise hat $\{0, 1\} \cdot \mathcal{N}$ für $0 < 1$ das Erscheinungsbild:

$$\underbrace{\overset{0}{\bullet}\;\overset{1}{\bullet}}_{0}\quad \underbrace{\overset{0}{\bullet}\;\overset{1}{\bullet}}_{1}\quad \underbrace{\overset{0}{\bullet}\;\overset{1}{\bullet}}_{2}\quad \underbrace{\overset{0}{\bullet}\;\overset{1}{\bullet}}_{3}\quad \cdots$$

Durch dieses Erscheinungsbild kann man vermuten, dass $\{0, 1\} \cdot \mathcal{N} \cong \mathcal{N}$. Tatsächlich liefert die Abbildung $f : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(x, n) \mapsto 2n + x$ einen Ordnungsisomorphismus von $\{0, 1\} \cdot \mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$.

2.3.7 Definition. Seien τ_0, τ_1 Ordnungstypen und sei $\mathcal{A}_k \in \tau_k$ für $k = 0, 1$. Wir definieren das **Produkt** $\tau_0 \cdot \tau_1$ als den Ordnungstyp von $\mathcal{A}_0 \cdot \mathcal{A}_1$.

Auch diese Operation ist nach [18, S. 21] wohldefiniert, assoziativ und im Allgemeinen nicht kommutativ. Wir können also auch bei der Multiplikation auf Klammerung verzichten.

2.4 Eigenschaften von linearen Ordnungen

Sei im Folgenden $\mathcal{A} = (A, <)$ stets eine lineare Ordnung.

2.4.1 Definition. Eine Unterordnung von $\mathcal{A}$, die für $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \leq a_2$ eine der folgenden Formen hat, nennen wir ein **Intervall** von $\mathcal{A}$:

1. $(a_1, a_2) := \{a \in A \mid a_1 < a < a_2\}$,

2. $[a_1, a_2) := \{a \in A \mid a_1 \leq a < a_2\}$,

3. $(a_1, a_2] := \{a \in A \mid a_1 < a \leq a_2\}$,

4. $[a_1, a_2] := \{a \in A \mid a_1 \leq a \leq a_2\}$,

5. $(-\infty, a) := A_{\leq a} := \{a' \in A \mid a' < a\}$,

6. $(-\infty, a] := A_{\leq a} := \{a' \in A \mid a' \leq a\}$,

7. $(a, \infty) := A_{>a} := \{a' \in A \mid a' > a\}$,

8. $[a, \infty) := A_{\geq a} := \{a' \in A \mid a' \geq a\}$.

2.4.2 Bemerkung.

a) Wir schreiben oft $(a_1, a_2)_{\mathcal{A}}$ oder $(a_1, a_2)_A$ statt (a_1, a_2), um zu betonen, dass (a_1, a_2) ein Intervall von $\mathcal{A} = (A, <)$ ist. Für die Intervallformen 2.–8. verwenden wir eine entsprechende Notation.

b) Ist I ein Intervall von $\mathcal{A}$, so gilt

$$\forall x_1, x_2 \in I \, \forall a \in A \, (x_1 < a < x_2 \to a \in I). \tag{$*$}$$

Unterordnungen $I \subseteq \mathcal{A}$, die ($*$) erfüllen, nennt man konvex. Es gibt auch konvexe Mengen, die kein Intervall sind, zum Beispiel die Unterordnung $\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0, q^2 > 2\}$ von $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ (siehe Anhang A).

2.4.3 Beispiel. Eine lineare Ordnung kann auch zu einer echten Unterordnung isomorph sein. In $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ gelten zum Beispiel folgende Isomorphien:

a) $(0, 1) \cong (a_1, a_2)$ für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ mit $a_1 < a_2$.
Die Abbildung $f_1 \colon (0, 1) \to (a_1, a_2)$, $x \mapsto (a_2 - a_1)x + a_1$ definiert einen Ordnungsisomorphismus. Insbesondere gilt $(a_1, a_2) \cong (b_1, b_2)$ für beliebige $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ mit $a_1 < a_2, b_1 < b_2$. Für die Intervallformen 2.–4. aus Definition 2.4.1 gelten entsprechende Isomorphien.

b) $(-\infty, a) \cong (-\infty, b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$.
Betrachte den Ordnungsisomorphismus $f_2 \colon (-\infty, a) \to (-\infty, b)$ mit der Vorschrift $x \mapsto x + b - a$. Auch hier gelten entsprechende Isomorphien für die Intervallformen 6.–8. aus Definition 2.4.1.

c) $(-\infty, -1) \cong (0, 1)$.
Die Abbildung $f_3 \colon (-\infty, -1) \to (0, 1)$, $x \mapsto -\frac{1}{x}$ ist ein Ordnungsisomorphismus. Insbesondere gilt also $(-\infty, a) \cong (a_1, a_2)$ für alle $a, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ mit $a_1 < a_2$.

d) $\mathcal{Q} \cong (0, 1)$.
Wir haben gesehen, dass Ordnungsisomorphismen $f \colon (-\infty, 0) \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$ und $g \colon [0, \infty) \to \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ existieren. Diese können wir wie folgt zu einem Ordnungsisomorphismus $h \colon \mathbb{Q} \to (0, 1)$ zusammenfügen:

$$q \mapsto \begin{cases} f(q), & \text{falls } q \in (-\infty, 0) \\ g(q), & \text{falls } q \in [0, \infty). \end{cases}$$

In $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <)$ gelten die gleichen Resultate.

2.4.4 Definition. Sei $a_0 \in A$.

1. Gilt $a_0 \leq a$ für alle $a \in A$, so nennen wir a_0 ein **erstes** bzw. **kleinstes Element** von $\mathcal{A}$.

2. Gilt $a \leq a_0$ für alle $a \in A$, so nennen wir a_0 ein **letztes** bzw. **größtes Element** von $\mathcal{A}$.

3. Wir sagen, $\mathcal{A}$ hat keine Endpunkte, wenn $\mathcal{A}$ weder ein erstes noch ein letztes Element hat.

2.4.5 Bemerkung.

a) Sind $a_1, a_2 \in A$ erste Elemente von $\mathcal{A}$, so gilt $a_1 \leq a_2$ und $a_2 \leq a_1$, also $a_1 = a_2$. Daher nennen wir ein erstes Element a_0 von $\mathcal{A}$ auch *das* erste Element von $\mathcal{A}$ und schreiben dafür $\min \mathcal{A} = a_0$ oder $\min A = a_0$. Entsprechend sprechen wir von *dem* letzten Element von $\mathcal{A}$, falls dieses existiert, und schreiben $\max A = a$.

b) Nichtleere endliche lineare Ordnungen haben stets ein erstes und ein letztes Element. Insbesondere hat jede nichtleere lineare Ordnung ohne Endpunkte unendlich viele Elemente.

2.4.6 Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine lineare Ordnung.

1. Eine Unterordnung $D \subseteq A$ **liegt dicht in** $\mathcal{A}$, falls für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 < a_2$ stets ein $d \in D$ mit $a_1 < d < a_2$ existiert.

2. Wir nennen $\mathcal{A}$ **dicht**, falls $\mathcal{A}$ dicht in sich selbst liegt, d.h. wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 < a_2$ stets ein $a \in A$ mit $a_1 < a < a_2$ existiert.

2.4.7 Bemerkung. Liegt $D \subseteq \mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{A}$, dann werden sowohl A als auch D durch $<_{\mathcal{A}}$ dicht angeordnet. Hat zudem $\mathcal{A}$ keine Endpunkte, so hat auch $\mathcal{B}$ keine Endpunkte und es gilt:

$$\forall a \in A \; \exists b_1, b_2 \in B \;\; b_1 < a < b_2.$$

2.4.8 Lemma. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lineare Ordnungen und $f\colon A \to B$ ein Ordnungshomomorphismus.*

1. *Hat $\mathcal{A}$ ein erstes (bzw. letztes) Element a_0, so ist $f(a_0)$ das erste (bzw. letzte) Element von $f(A)$.*

2. *Für $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 <_{\mathcal{A}} a_2$ gilt $f((a_1, a_2)_A) = (f(a_1), f(a_2))_{f(A)}$. Entsprechende Gleichungen gelten für die Intervallformen 2.–8. aus Definition 2.4.1.*

3. *Liegt eine Unterordnung $D \subseteq A$ dicht in $\mathcal{A}$, so liegt ihr Bild $f(D)$ dicht in $f(A)$. Insbesondere bleibt Dichtheit unter Ordnungsisomorphismen erhalten.*

Beweis. Da die Beweise der Aussagen ähnlich sind, führen wir nur den von 1. vor. Wir nehmen daher an, dass $\mathcal{A}$ ein erstes Element $a_0 \in A$ hat und zeigen, dass $f(a_0)$ das erste Element von $\mathcal{B}$ ist. Sei hierfür $b \in B$ beliebig. Dann gilt $f^{-1}(b) \in A$, also $a_0 \leq_{\mathcal{A}} f^{-1}(b)$. Wir erhalten damit $f(a_0) \leq_{\mathcal{B}} b$, weil f ordnungserhaltend ist. Die Rückrichtung folgt analog, da auch f^{-1} ein Ordnungsisomorphismus ist. □

Insbesondere haben zwei zueinander isomorphe lineare Ordnungen diesselben Charakteristika, was Dichtheit, Endpunkte und Intervalle anbelangt. Daher nennen wir im Folgenden einen Ordnungstyp τ **dicht**, falls eine lineare Ordnungen mit Ordnungstyp τ dicht ist. Nach Lemma 2.4.8 ist dazu äquivalent, dass *alle* linearen Ordnungen mit Ordnungstyp τ dicht sind. Ebenso sprechen wir beispielsweise von Ordnungstypen **ohne Endpunkte**.

Im Folgenden möchten wir die dichten linearen Ordnungen genauer untersuchen. Deshalb betrachten wir zunächst einige Beispiele. Hierbei ist das folgende Resultat hilfreich:

2.4.9 Lemma. *Jedes Intervall einer dichten linearen Ordnung ist dicht.*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der Konvexität von Intervallen. □

2.4.10 Beispiel. Die folgenden linearen Ordnungen sind jeweils dicht:

1. a) Die rationalen Zahlen $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$.
   Für $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mit $q_1 < q_2$ gilt $q_1 < q < q_2$, wobei $q = \dfrac{q_1 + q_2}{2} \in \mathbb{Q}$.

   b) Das Produkt $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}$.
   Seien $(q_1, p_1), (q_2, p_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $(q_1, p_1) < (q_2, p_2)$. Für

$$(q, p) = \begin{cases} \left(0, \frac{p_1+p_2}{2}\right), & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \left(\frac{q_1+q_2}{2}, p\right), & \text{falls } p_1 = p_2 = p \end{cases}$$

   gilt $(q, p) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $(q_1, p_1) < (q, p) < (q_2, p_2)$.

c) Die Intervalle $(0,1), [0,1), (0,1], [0,1]$ von $\mathcal{Q}$ nach Lemma 2.4.9.

d) Die Unterordnung $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ von $\mathcal{Q}$.
Hier scheitert die Wahl von q aus (a) nur, falls $q_2 = -q_1 > 0$.
In diesem Fall wählen wir $q = \frac{q_2}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, um $q_1 < q < q_2$ zu erhalten.

e) Die Unterordnung $\mathbb{Q} \setminus (0,1]$ von $\mathcal{Q}$.
Hier scheitert die Wahl von q aus (a) nur, falls $q_1 \leq 0 < 1 < q_2$.
In diesem Fall wählen wir $q = \frac{1+q_2}{2}$, um $q_1 < q < q_2$ zu erhalten.

2. a) Die reellen Zahlen $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <)$.

   b) Das Produkt $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}$.

   c) Die Intervalle $(0,1), [0,1), (0,1], [0,1]$ von $\mathcal{R}$ nach 2.4.9.

   d) Die Unterordnung $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ von $\mathcal{R}$.

   e) Die Unterordnung $\mathbb{R} \setminus (0,1]$ von $\mathcal{R}$.

   Die Begründungen sind analog zu denen in 1.

3. Die beiden einzigen endlichen dichten Ordnungstypen sind offensichtlich **0** und **1**.

Aus Kardinalitätsgründen ist keine lineare Ordnung aus einer der Gruppen 1.–3. in Beispiel 2.4.10 isomorph zu einer linearen Ordnung aus einer anderen Gruppe, und offensichtlich gilt $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$. Aus Lemma 2.4.8 folgt zudem, dass es keine Isomorphien innerhalb der Gruppen 1.c) und 2.c) gibt. In Beispiel 2.4.3 haben wir außerdem gesehen, dass $\mathcal{Q} \cong (0,1)_{\mathbb{Q}}$ und $\mathcal{R} \cong (0,1)_{\mathbb{R}}$. Folgende Fragen bleiben jedoch zunächst offen:

2.4.11 Frage.

a) In welchem Isomorphieverhältnis stehen die linearen Ordnungen $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Q} \setminus (0,1]$?

b) In welchem Isomorphieverhältnis stehen die linearen Ordnungen $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R} \setminus (0,1]$?

Obwohl die beiden Fragen ähnlich klingen, werden wir sehen, dass sie sehr unterschiedliche Antworten haben. Die Antwort auf Frage a) liefern wir im nächsten Abschnitt und die auf Frage b) ist in Anhang A zu finden.

3 Abzählbare dichte lineare Ordnungen

Die dichten linearen Ordnungen spielen in dieser Arbeit eine zentrale Rolle. Ziel dieses Abschnittes ist es, die abzählbaren dichten Ordnungstypen zu untersuchen und zu charakterisieren. Hierbei orientieren wir uns hauptsächlich an [18, Chapter 2].

3.1 Einführung

Wir wissen durch Satz 2.2.13, dass es abzählbar viele endliche Ordnungstypen gibt. Folgendes Resultat zeigt, dass es mindestens überabzählbar viele abzählbare Ordnungstypen gibt:

3.1.1 Satz. *Es gibt mindestens $\mathfrak{c}$ viele verschiedene abzählbare Ordnungstypen.*[1]

Beweis. Nachzulesen in [18, Chapter 1, Proposition 1.48]. □

Wir sind nun also auf der Suche nach einer oberen Schranke für die Anzahl der abzählbaren Ordnungstypen. Hierbei hilft uns das Konzept der Dichtheit, denn die abzählbaren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte haben folgende universelle Eigenschaft:

3.1.2 Theorem. *Seien $\mathcal{A}$ eine beliebige höchstens abzählbare lineare Ordnung und $\mathcal{B}$ eine abzählbare dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte. Dann ist $\mathcal{A}$ isomorph zu einer Unterordnung von $\mathcal{B}$, d.h. wir können $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ einbetten.*

Wir werden in Abschnitt 5.3 eine Verallgemeinerung dieses Resultats beweisen, daher verweisen wir an dieser Stelle auf [18, Theorem 2.5] für einen Beweis von Theorem 3.1.2, der ein Spezialfall von Theorem 5.3.1 ist.

3.1.3 Korollar. *Es gibt genau $\mathfrak{c}$ viele abzählbare Ordnungstypen.*

Beweis. Da $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ eine abzählbare dichte lineare Anordnung ohne Endpunkte ist, ist nach Theorem 3.1.2 jede abzählbare lineare Ordnung isomorph zu einer Unterordnung von $\mathcal{Q}$. Die Anzahl verschiedener abzählbarer Ordnungstypen ist also nach oben beschränkt durch die Anzahl der Teilmengen

[1] Wir bezeichnen mit $\mathfrak{c}$ die Kardinalität des Kontinuums.

von $\mathbb{Q}$, also durch $|\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$. Mit [5, Lemma 12.8, Satz 13.1 Satz 13.2] erhalten wir zudem

$$|\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Andererseits gibt es laut Satz 3.1.1 mindestens $\mathfrak{c}$ viele verschiedene abzählbare Ordnungstypen, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Wir interessieren uns nun für die abzählbaren dichten Ordnungstypen. Dafür erinnern wir uns an den ersten Teil von Beispiel 2.4.10 und bestimmen die zugehörigen Ordnungstypen:

3.1.4 Beispiel.

a) Die rationalen Zahlen $\mathcal{Q}$ haben den Ordnungstyp η.

b) Das Produkt $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}$ hat den Ordnungstyp $\eta \cdot \eta$.

c) Die Intervalle $(0,1), [0,1), (0,1], [0,1]$ von $\mathcal{Q}$ haben nach Beispiel 2.4.3 und Lemma 2.4.8 die Ordnungstypen $\eta, \mathbf{1} + \eta, \eta + \mathbf{1}, \mathbf{1} + \eta + \mathbf{1}$.

d) Die Unterordnung $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{Q}$ hat den Ordnungstyp $\eta + \eta$, denn es gilt $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \cong (-\infty, 0)_{\mathbb{Q}} + (0, \infty)_{\mathbb{Q}} \cong \mathcal{Q} + \mathcal{Q}$.

e) Die Unterordnung $\mathbb{Q} \setminus (0,1] = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0 \vee q > 1\} \subseteq \mathcal{Q}$ hat den Ordnungstyp $\eta + \mathbf{1} + \eta$, da $\mathbb{Q} \setminus (0,1] \cong (-\infty, 0]_{\mathbb{Q}} + (1, \infty)_{\mathbb{Q}} \cong \mathcal{Q} + \{0\} + \mathcal{Q}$.

Man könnte nun vermuten, dass es recht viele abzählbare dichte Ordnungstypen gibt. Der Isomorphiesatz von Cantor wird jedoch zeigen, dass das Gegenteil der Fall ist.

3.2 Isomorphiesatz von Cantor

Der folgende Isomorphiesatz stammt ursprünglich aus Cantors Werk „Principien einer Theorie der Ordnungstypen, Erste Mittheilung“. Cantor hatte diese Arbeit 1884 zur Publikation an die schwedische Zeitschrift *Acta Mathematica* geschickt; sie wurde dort jedoch nie veröffentlicht. Später wurde sie durch Ivor Grattan-Guinness in einem Archiv wiederentdeckt. Dieser publizierte sie erstmalig 1970, 86 Jahre nach ihrer Entstehung, unter dem Namen „An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen, Erste Mittheilung“ [7, S. 82-101]. Der Isomorphiesatz findet sich jedoch auch in Cantors Arbeit „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)“ [3, S. 504] aus dem Jahr 1895.

3.2.1 Bemerkung. Im folgenden Beweis werden wir einen Ordnungsisomorphismus konstruieren. Hierbei ist es wichtig sich zu erinnern, dass eine Abbildung $f\colon A \to B$ eigentlich eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$ mit der folgenden Eigenschaft ist:

$$\forall\, a \in A\ \exists!\, b \in B\ (a, b) \in f.$$

Verstehen wir Abbildungen auf diese Weise als Mengen, so können wir auch eine Vereinigung von Abbildungen bilden.

3.2.2 Theorem (Cantor)**.** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abzählbare dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte. Dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Beweis. Da $\mathcal{A} = (A, <_{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, <_{\mathcal{B}})$ abzählbar sind, schreiben wir

$$A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } B = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Diese Nummerierungen sind unabhängig von der Anordnung der Elemente von A und B. Wir werden per Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ endliche Teilmengen $A_n \subseteq A, B_n \subseteq B$ und einen Ordnungsisomorphismus $f_n\colon A_n \to B_n$ konstruieren mit

(1) $A_n \subseteq A_{n+1}, B_n \subseteq B_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(2) $f_{n+1}|_{A_n} = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

(3) $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n, B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Dann folgt aus (2) und (3), dass

$$f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon A \to B$$

eine wohldefinierte Abbildung ist. Seien zudem $a, a' \in A$ mit $a <_{\mathcal{A}} a'$. Dann gibt es wegen (1) und (3) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a, a' \in A_n$. Da f_n ordnungserhaltend ist, folgt $f(a) = f_n(a) <_{\mathcal{B}} f_n(a') = f(a')$. Nach (3) gibt es auch zu jedem $b \in B$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b \in B_n$. Da f_n surjektiv ist, gibt es ein $a \in A_n \subseteq A$ mit $f(a) = f_n(a) = b$. Somit ist f der verlangte Ordnungsisomorphismus.
Für $n = 0$ erfüllen $A_0 = \{a_0\}, B_0 = \{b_0\}$ und $f_0\colon A_0 \to B_0$, $a_0 \mapsto b_0$ die gewünschten Eigenschaften. Wir gehen also nun davon aus, dass wir für ein festes $n \in \mathbb{N}$ endliche Teilmengen $A_n \subseteq A, B_n \subseteq B$ und einen Ordnungsisomorphismus $f_n\colon A_n \to B_n$ gebildet haben. Ist n gerade, so betrachten wir a_m, wobei

$$m = \min\{l \in \mathbb{N} \mid a_l \notin A_n\}.$$

Dieses m existiert, da $A_n \subsetneq A$ eine endliche Teilmenge ist. Wir schreiben $A_n = \{x_0, \ldots, x_k\}$ mit $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $y_0 < y_1 < \cdots < y_k$ für die Bilder $y_i = f_n(x_i)$ $(i = 0, \ldots, k)$, weil f_n ordnungserhaltend ist. Da $a_m \notin A_n$, gibt es $k+1$ mögliche Positionen für a_m:

- $a_m < x_0$:
  In diesem Fall gibt es ein $b \in B$ mit $b < y_0$, da $\mathcal{B}$ kein erstes Element hat.
- $x_i < a_m < x_{i+1}$ für ein $i \in \{0, \ldots, k-1\}$:
  In diesem Fall gibt es ein $b \in B$ mit $y_i < b < y_{i+1}$, da $\mathcal{B}$ dicht ist.
- $x_k < a_m$:
  In diesem Fall gibt es ein $b \in B$ mit $y_k < b$, da $\mathcal{B}$ kein letztes Element hat.

Offensichtlich gilt in jedem Fall $b \notin \{y_0, \ldots, y_k\} = B_n$. Wir definieren nun $A_{n+1} = A_n \cup \{a_m\}, B_{n+1} = B_n \cup \{b\}$ und setzen f_n durch $f_{n+1}(a_m) = b$ zu $f_{n+1}\colon A_{n+1} \to B_{n+1}$ fort. Nach Konstruktion ist f_{n+1} ein Ordnungsisomorphismus, der f_n fortsetzt, und es gelten $A_n \subseteq A_{n+1}, B_n \subseteq B_{n+1}$, wie gewünscht. Ist n ungerade, so betrachtet man $m = \min\{l \in \mathbb{N} \mid b_l \notin B_n\}$ und verfährt analog mit vertauschten Rollen, um geeignete A_{n+1}, B_{n+1} und f_{n+1} zu erhalten. Offensichtlich sind durch diese Vorgehensweise (1) und (2) gewährleistet. Es bleibt zu zeigen, dass auch (3) erfüllt wird. Wir beweisen hierfür per Induktion, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\;\, a_n \in A_m. \tag{$*$}$$

Der Fall $n = 0$ ist trivial, da $a_0 \in A_0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in A_m$ gibt. Dann gilt nach der obigen Konstruktion, dass $a_{n+1} \in A_{m+2}$. Damit ist $(*)$ bewiesen und es folgt

$$A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Entsprechend zeigt man, dass auch $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Somit wird (3) erfüllt. □

Wir erhalten, dass η der einzige äbzählbare dichte Ordnungstyp ohne Endpunkte ist. Insbesondere gelten $\eta = \eta \cdot \eta = \eta + \eta = \eta + \mathbf{1} + \eta$ (siehe Beispiel 3.1.4). Hieraus folgt $\mathcal{Q} \cong \mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q} \cong \mathbb{Q} \setminus \{0\} \cong \mathbb{Q} \setminus (0, 1]$, was Frage 2.4.11a) beantwortet.

Insbesondere gibt es nur vier abzählbare dichte Ordnungstypen und damit sechs höchstens abzählbare dichte Ordnungstypen:

3.2.3 Korollar. *Jede höchstens abzählbare dichte lineare Ordnung hat den Ordnungstyp* $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \eta, \mathbf{1} + \eta, \eta + \mathbf{1}$ *und* $\mathbf{1} + \eta + \mathbf{1}$.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine dichte lineare Ordnung. Ist $\mathcal{A}$ endlich, so hat $\mathcal{A}$ entweder den Ordnungstyp $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$. Sei nun $\mathcal{A}$ abzählbar. Hat $\mathcal{A}$ nur ein erstes Element a und kein letztes Element, so hat die Unterordnung $A' = A \setminus \{a\}$ von $\mathcal{A}$ keine Endpunkte. Außerdem weist man leicht nach, dass auch A' eine abzählbare dichte lineare Ordnung ist. Aus Theorem 3.2.2 folgt daher, dass η der Ordnungstyp von A' ist. Also hat $\mathcal{A}$ wegen $\mathcal{A} \cong \{a\} + A'$ den Ordnungstyp $\mathbf{1} + \eta$. Die anderen Fälle zeigt man analog. □

Es folgt außerdem, dass sich in jeder abzählbaren dichten linearen Ordnung eine Unterordnung mit Ordnungstyp η findet.

Durch eine kleine Modifikation des Beweises von Theorem 3.2.2 erhalten wir zudem folgendes Resultat:

3.2.4 Korollar. *Seien* $\mathcal{A} = (A, <_{\mathcal{A}})$ *und* $\mathcal{B} = (B, <_{\mathcal{B}})$ *abzählbare dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte. Seien weiter* $n \in \mathbb{N}$ *und*

$$x_0 <_{\mathcal{A}} x_1 <_{\mathcal{A}} \cdots <_{\mathcal{A}} x_k$$

Elemente von A *und*

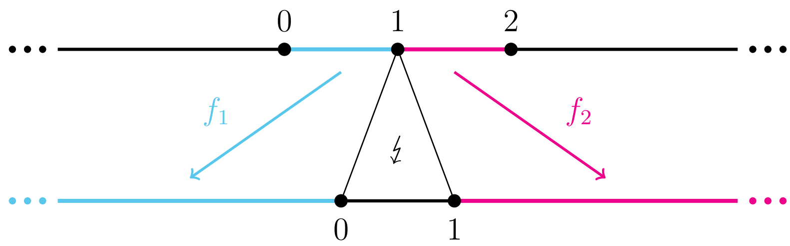
$$y_0 <_{\mathcal{B}} y_1 <_{\mathcal{B}} \cdots <_{\mathcal{B}} y_k$$

Elemente von B*. Dann gibt es einen Ordnungsisomorphismus* $f \colon A \to B$ *mit* $f(x_i) = y_i$ *für* $i = 0, \ldots, k$.

Beweis. Wir schreiben $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ so, dass $a_i = x_i$ und $b_i = y_i$ für $i = 0, \ldots, k$ gilt. Wir modifizieren den Beweis von Theorem 3.2.2, indem wir im Induktionsanfang $A_0 = \{x_0, \ldots, x_k\}$, $B_0 = \{y_0, \ldots, y_k\}$ und $f_0 \colon A_0 \to B_0$ durch $f_0(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, k$ definieren. Am Induktionsschritt ändert sich nichts. Dadurch erhalten wir schließlich einen Ordnungsisomorphismus f von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, wie gewünscht. □

3.2.5 Bemerkung. Im Beweis von Theorem 3.2.2 können wir also beim Induktionsanfang eine beliebige endliche Abbildung $f_0 \colon x_i \mapsto y_i$ $(i = 0, \ldots, k)$ festlegen und finden stets einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, der f_0 fortsetzt. Deshalb liegt es nahe zu fragen, ob wir zu Beginn sogar eine abzählbare Abbildung festlegen können. Wir haben allerdings festgestellt, dass die Antwort auf diese Frage negativ ist. Um dies zu zeigen, betrachten wir die dichten

Unterordnungen $(0,1), (1,2), (-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ von $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$, die alle keine Endpunkte haben. Dann existieren nach Theorem 3.2.2 Ordnungsisomorphismen $f_1\colon (0,1) \to (-\infty, 0)$ und $f_2\colon (1,2) \to (1,\infty)$. Die abzählbare Abbilung $f_0 = f_1 \cup f_2\colon (0,1) \,\dot\cup\, (1,2) \to (-\infty,0) \,\dot\cup\, (1,\infty)$ kann aber offensichtlich nicht zu einem Ordnungsautomorphismus auf $\mathcal{Q}$ fortgesetzt werden:



Die Existenz des Ordnungsisomorphismus aus Theorem 3.2.2 ist nicht eindeutig. Tatsächlich haben wir herausgefunden, dass es überabzählbar viele verschiedene Ordnungsisomorphismen zwischen zwei abzählbaren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte gibt. Für den Beweis dieses Resultats fehlen uns noch einige Grundlagen zur Kardinalität von Mengen, welche wir erst im folgenden Abschnitt einführen werden. Daher werden wir die obige Aussage erst später beweisen.

Unser nächstes Ziel ist es, das Konzept der Dichtheit zu verallgemeinern. Hierfür benötigen wir ebenfalls einige Grundlagen aus der Mengenlehre, die wir im nächsten Abschnitt einführen werden.

4 Ordinalzahlen und Kardinalzahlen

Erstmalig wurden die Ordinal- und Kardinalzahlen 1895/97 von Cantor in seinem Werk „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ eingeführt. Wir geben nun die für diese Arbeit wichtigen Definitionen und Resultate an und orientieren uns dabei hauptsächlich an [5].

4.1 Ordinalzahlen

Die Gesamtheit der Ordinalzahlen ist eine Teilklasse der linearen Ordnungen, welche ein Repräsentantensystem der Ordnungstypen von Wohlordnungen bildet, wie wir im Folgenden sehen werden.

4.1.1 Definition. Wir nennen eine lineare Ordnung $\mathcal{A}$ eine **Wohlordnung**, wenn jede nichtleere Unterordnung von $\mathcal{A}$ ein erstes Element hat.

4.1.2 Definition. Sei A eine Menge.

1. Wir nennen A **transitiv**, wenn aus $a \in A$ und $b \in a$ stets $b \in A$ folgt. Anders formuliert gilt $a \subsetneq A$ für jedes $a \in A$, falls A transitiv ist.

2. Die Menge A heißt **Ordinalzahl**, falls A transitiv ist und $(A, \in)$ eine Wohlordnung bildet.

Wir schreiben **On** für die Klasse aller Ordinalzahlen und kürzen „A ist eine Ordinalzahl" durch $A \in \mathbf{On}$ ab. Nach [5, Bemerkung 7.5] ist **On** eine echte Klasse.

Für Ordinalzahlen nutzen wir meist griechische Kleinbuchstaben wie α, β, γ.

4.1.3 Satz. *Die Klasse* **On** *ist transitiv und* $\in$ *erfüllt alle Eigenschaften einer Wohlordnung auf* **On**. *Insbesondere ist jedes Element einer Ordinalzahl wieder eine Ordinalzahl.*

Beweis. Nachzulesen in [5, Lemma 7.1 und Lemma 7.4]. □

Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$. Wir schreiben im Folgenden $\alpha < \beta$ statt $\alpha \in \beta$. Dadurch gilt $\alpha = \{\beta \in \mathbf{On} \mid \beta < \alpha\}$. Also ist jede Ordinalzahl die Menge aller kleineren Ordinalzahlen. Wir weisen darauf hin, dass $\alpha < \beta$ nie wie in Notation 2.1.5.4 zu verstehen ist, d.h. $\alpha < \beta$ bedeutet nicht, dass $\forall x \in \alpha \, \forall y \in \beta \; x < y$ gilt.

4.1.4 Satz. *Ist $\mathcal{A}$ eine Wohlordnung, so existiert genau eine zu $\mathcal{A}$ ordnungsisomorphe Ordinalzahl.*

Beweis. Nachzulesen in [5, Korollar 6.4]. □

Die Ordinalzahlen bilden somit ein Repräsentantensystem der Ordnungstypen von Wohlordnungen.

4.1.5 Lemma.

1. *Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl und ist $\emptyset \neq \alpha \in$* **On**, *so folgt $\emptyset < \alpha$. Folglich ist $\emptyset$ die kleinste Ordinalzahl.*

2. *Ist $\alpha \in$* **On**, *so ist auch $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ eine Ordinalzahl. Zudem gilt für jedes $\beta \in$* **On** *mit $\alpha < \beta$ bereits $\alpha + 1 \leq \beta$. Dadurch ist $\alpha + 1$ die kleinste Ordinalzahl, die größer als α ist.*

3. *Ist A eine Menge von Ordinalzahlen, so ist auch $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \in \mathbf{On}$. Weiter gilt für jedes $\beta \in \mathbf{On}$ mit $A < \beta$ bereits $\gamma \leq \beta$.*

Beweis.

1. Offensichtlich ist $\emptyset$ eine Ordinalzahl. Die Minimalität folgt aus der Transitivität von **On**.

2. Nachzulesen in [5, Lemma 7.7].

3. Dies folgt aus [5, Lemma 7.6] und der Transitivität von **On**.

□

4.1.6 Bemerkung.

a) Hat $\alpha \in \mathbf{On}$ den Ordnungstyp τ, so hat die Ordinalzahl $\alpha + 1$ den Ordnungstyp $\tau + \mathbf{1}$. Die Notation $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ ist hier also gerechtfertigt.

b) Wir können nun die ersten Ordinalzahlen beschreiben:
Die kleinste Ordinalzahl ist $0 := \emptyset$ mit Ordnungstyp $\mathbf{0}$. Die darauffolgenden Ordinalzahlen sind $1 := 0 + 1 = \{\emptyset\}$ mit Ordnungstyp $\mathbf{1}$, $2 := 1 + 1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ mit Ordnungstyp $\mathbf{2}$ und so weiter. Die erste unendliche Ordinalzahl ist die Vereinigung über alle endlichen Ordinalzahlen $\omega := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Diese Notation verträgt sich mit unserem bisherigen Verständnis von ω als Ordnungstyp von $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$, da $\mathcal{N} \cong (\omega, \in)$ gilt.

Wir können nun zwei Arten von Ordinalzahlen unterscheiden:

4.1.7 Definition. Eine Ordinalzahl α heißt **Nachfolgerordinalzahl**, falls ein $\beta \in \mathbf{On}$ mit $\alpha = \beta + 1$ existiert, sonst **Limesordinalzahl**.

4.1.8 Bemerkung. Jede Nachfolgerordinalzahl $\alpha + 1$ besitzt ein letztes Element, und zwar α. Umgekehrt ist jede Ordinalzahl α mit einem letzten Element β der Form $\alpha = \{\gamma \in \mathbf{On} \mid \gamma < \beta\} \cup \{\beta\} = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1$, also eine Nachfolgerordinalzahl. Eine Limesordinalzahl α hat deshalb nie ein letztes Element. Insbesondere gilt $\beta < \beta + 1 < \alpha$ für alle $\beta < \alpha$, falls α eine Limesordinalzahl ist.

Im Umgang mit Ordinalzahlen ist die (transfinite) Induktion, welche in den folgenden beiden Resultaten beschrieben wird, eine der wichtigsten Beweistechniken.

4.1.9 Satz (transfinite Induktion)**.** *Sei P eine Teilklasse von* **On** *mit den folgenden Eigenschaften:*

- $0 \in P$,
- *ist $\alpha \in P$, so ist auch $\alpha + 1 \in P$,*
- *ist α eine Limesordinalzahl mit $\beta \in P$ für alle $\beta < \alpha$, so ist auch $\alpha \in P$.*

Dann gilt $P =$ **On**.

Beweis. Nachzulesen in [5, Lemma 7.9]. □

4.1.10 Satz (Induktion entlang einer Ordinalzahl)**.** *Sei $\alpha \in$* **On** *und $P \subseteq \alpha$ eine Teilmenge so, dass für jedes $\beta < \alpha$ mit $\gamma \in P$ für alle $\gamma < \beta$ bereits $\beta \in P$ gilt. Dann gilt $P = \alpha$.*

Beweis. Gilt $P \subsetneq \alpha$, so existiert $\beta = \min(\alpha \setminus P) < \alpha$, da $(\alpha, <)$ wohlgeordnet ist. Dann gilt aber $\gamma \in P$ für alle $\gamma < \beta$. Somit folgt $\beta \in P$, was $\beta \in \alpha \setminus P$ widerspricht. Wir erhalten daher $P = \alpha$. □

In den folgenden Abschnitten werden wir mithilfe des Induktionsprinzips Isomorphismen definieren. Hierbei wird es hilfreich sein, die Ordinalzahlen wie folgt in zwei disjunkte Teilklassen zu unterteilen:

4.1.11 Definition. Wir nennen jede Limesordinalzahl **gerade**. Ist $\alpha \in$ **On** gerade, so nennen wir $\alpha + 1$ **ungerade**. Ist $\alpha \in$ **On** ungerade, so nennen wir $\alpha + 1$ gerade.

Nach Satz 4.1.9 ist jede Ordinalzahl gerade oder ungerade. Außerdem kann gezeigt werden, dass keine Ordinalzahl gerade und ungerade ist.

4.2 Kardinalzahlen

Sei A eine Menge. Da wir das Wohlordnungsprinzip annehmen, existiert eine zweistellige Relation $<$ auf A so, dass $(A, <)$ eine Wohlordnung bildet. Nach Satz 4.1.4 gibt es somit eine Ordinalzahl α, die ordnungsisomorph zu $(A, <)$ ist. Insbesondere haben wir eine Bijektion von α nach A. Da die Ordinalzahlen außerdem wohlgeordnet sind, gibt es eine minimale Ordinalzahl κ so, dass eine Bijektion von κ nach A existiert. Wir nennen dieses κ die **Kardinalität** von A und schreiben $|A| = \kappa$. Ist A eine Menge und $\kappa = |A|$, so finden wir eine Bijektion $f\colon \kappa \to A$. Also können wir A schreiben als $\{a_\beta\}_{\beta<\kappa}$, wobei $a_\beta = f(\beta)$ für jedes $\beta < \kappa$.

4.2.1 Definition.

1. Eine Ordinalzahl κ heißt **Kardinalzahl**, wenn $|\kappa| = \kappa$.

2. Nach [5, Lemma 11.9] existiert zu jeder Kardinalzahl κ eine Kardinalzahl, die größer als κ ist. Die kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist, bezeichnen wir mit κ^+.

3. Eine Kardinalzahl κ heißt **Nachfolgerkardinalzahl**, falls eine Kardinalzahl λ mit $\lambda^+ = \kappa$ existiert, sonst **Limeskardinalzahl**.

4.2.2 Bemerkung. Seien A und B zwei Mengen. Es gibt genau dann eine Injektion von A nach B, wenn $|A| \leq |B|$ gilt. Außerdem gibt es genau dann eine Surjektion von A nach B, wenn $|B| \leq |A|$ gilt. Ein Beweis hierfür findet sich in [5, Lemma 11.4 und Lemma 11.5].

4.2.3 Beispiel. Offensichtlich ist jede endliche Ordinalzahl eine Kardinalzahl. Es folgt aus [5, Lemma 9.5], dass auch ω eine Kardinalzahl ist. Da der kardinale Nachfolger einer endlichen Ordinalzahl wieder endlich ist, bildet ω eine Limeskardinalzahl. Dass ω zudem eine Limesordinalzahl ist, ist kein Zufall, denn nach [5, S. 77] ist jede unendliche Kardinalzahl eine Limesordinalzahl.

4.2.4 Definition. Sei $\alpha \in \mathbf{On}$. Dann definieren wir

$$\omega_\alpha := \begin{cases} \omega, & \text{falls } \alpha = 0 \\ \omega_\beta^+, & \text{falls } \alpha = \beta + 1 \text{ für ein } \beta \in \mathbf{On} \\ \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \omega_\beta, & \text{falls } \alpha \neq 0 \text{ eine Limesordinalzahl ist.} \end{cases}$$

4.2.5 Bemerkung.

a) Nach [5, Satz 11.10] ist ω_α für jedes $\alpha \in \mathbf{On}$ eine unendliche Kardinalzahl und umgekehrt ist jede unendliche Kardinalzahl der Form ω_α für eine Ordinalzahl α. Aus [5, Satz 11.10] folgt außerdem, dass für $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ mit $\alpha < \beta$ auch $\omega_\alpha < \omega_\beta$ gilt. Wenn wir den kardinalen Charakter von ω_α betonen möchten, schreiben wir $\aleph_\alpha$ statt ω_α.

b) Ist α eine Nachfolgerordinalzahl, so ist $\aleph_\alpha$ nach Definition eine Nachfolgerkardinalzahl. Da der kardinale Nachfolger einer endlichen Kardinalzahl wieder endlich ist, ist auch $\aleph_0$ eine Limeskardinalzahl. Ist α eine Limesordinalzahl mit $\alpha > 0$, so gilt $\beta < \beta + 1 < \alpha$ und damit $\aleph_\beta^+ = \aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$

für jedes $\beta < \alpha$. Also ist $\aleph_\alpha$ stets eine Limeskardinalzahl, wenn α eine Limesordinalzahl ist. Wir erhalten schließlich, dass $\aleph_\alpha$ genau dann eine Nachfolgerkardinalzahl, wenn α eine Nachfolgerordinalzahl ist. Jede unendliche Nachfolgerkardinalzahl hat als die Form $\aleph_{\beta+1}$ für ein $\beta \in \mathbf{On}$.

Da die Kardinalzahlen eine Teilklasse der linearen Ordnungen bilden, können wir die Operationen aus Abschnitt 2.3 auch auf Kardinalzahlen anwenden. Diese Operationen müssen jedoch streng von der Kardinalzahlarithmetik unterschieden werden, welche wir nun definieren:

4.2.6 Definition. Seien κ, λ Kardinalzahlen und A, B beliebige Mengen mit $|A| = \kappa$ und $|B| = \lambda$.

1. Die **kardinale Summe** $\kappa + \lambda$ ist die Kardinalzahl $|A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|$.
2. Das **kardinale Produkt** $\kappa \cdot \lambda$ ist die Kardinalzahl $|A \times B|$.
3. Die **kardinale Exponentation** definieren wir durch $\kappa^\lambda = \left|A^B\right|$, wobei wir mit A^B die Menge aller Funktionen $f\colon B \to A$ bezeichnen.

Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass diese Operationen wohldefiniert sind.

4.2.7 Lemma. *Seien κ, λ Kardinalzahlen.*

1. *Gilt $\max\{\kappa, \lambda\} \geq \aleph_0$, so folgt $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.*
2. *Gelten $2 \leq \kappa \leq \lambda$ und $\lambda \geq \aleph_0$, so folgt $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.*

Beweis. Nachzulesen in [5, Satz 12.2] und [12, Chapter I, Lemma 10.26]. □

4.2.8 Bemerkung. Nach [5, Korollar 12.9] gilt $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$ für alle $\alpha \in \mathbf{On}$. Insbesondere erhalten wir $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$ für jedes $\alpha \in \mathbf{On}$, da $\aleph_{\alpha+1}$ die kleinste Kardinalzahl ist, die größer als $\aleph_\alpha$ ist. Unter der verallgemeinerten Kontinuumshypothese verstehen wir die Aussage

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha} \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{On}\,.$$

Das folgende Resultat benötigen wir für die beiden zentralen Isomorphiebeweise in dieser Arbeit:

4.2.9 Lemma. *Für jede Ordinalzahl α gilt*

$$|\{\beta < \omega_\alpha \mid \beta \text{ gerade}\}| = |\{\beta < \omega_\alpha \mid \beta \text{ ungerade}\}| = \aleph_\alpha.$$

Beweis. Seien $G = \{\beta < \omega_\alpha \mid \beta \text{ gerade}\}$ und $U = \{\beta < \omega_\alpha \mid \beta \text{ ungerade}\}$. Dann gilt $\omega_\alpha = G \dot{\cup} U$. Die Abbildung $f\colon G \to U$, $\beta \mapsto \beta + 1$ ist offensichtlich bijektiv, d.h. es gilt $|G| = |U|$. Außerdem ist die Menge G unendlich, da sie eine Kopie der geraden natürlichen Zahlen $2\mathbb{N}$ enthält. Wir erhalten daher mit Lemma 4.2.7, dass

$$\aleph_\alpha = |\omega_\alpha| = |G| + |U| = |G| = |U| \,.$$

□

Mithilfe der folgenden Definition unterteilen wir die Kardinalzahlen in zwei disjunkte Teilklassen:

4.2.10 Definition.

1. Eine Unterordnung B einer linearen Ordnung $\mathcal{A}$ ist **kofinal** in $\mathcal{A}$, falls zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $a \leq b$ existiert. Entsprechend heißt B **koinitial** in $\mathcal{A}$, falls zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $b \leq a$ existiert.

2. Die kleinste Kardinalzahl κ, zu der eine kofinale Unterordnung B in $\mathcal{A}$ mit $|B| = \kappa$ existiert, heißt **Kofinalität** der linearen Ordnung $\mathcal{A}$ und wir schreiben $\operatorname{cof}(\mathcal{A}) = \kappa$.

3. Wir nennen eine Kardinalzahl κ **regulär**, falls $\operatorname{cof}(\kappa) = \kappa$ gilt, sonst **singulär**.

4.2.11 Bemerkung.

a) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lineare Ordnungen, f ein Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, und ist $A' \subseteq \mathcal{A}$ kofinal in $\mathcal{A}$, so ist $f(A')$ kofinal in $\mathcal{B}$.
Ist nämlich $b \in B$ beliebig, so existiert zu $f^{-1}(b) \in A$ ein $a' \in A'$ mit $f^{-1}(b) \leq a'$, da A' kofinal in $\mathcal{A}$ ist. Insbesondere gilt $b \leq f(a')$, was die Kofinalität von $f(A')$ in $\mathcal{B}$ zeigt.

b) Ist $A' \subseteq A$ kofinal in der linearen Ordnung $\mathcal{A}$ und $A'' \subseteq A'$ kofinal in A', so ist A'' zugleich kofinal in $\mathcal{A}$.
Ist nämlich $a \in A$ beliebig, so exsitiert ein $a' \in A'$ mit $a \leq a'$, weil A' kofinal in $\mathcal{A}$ ist. Da aber A'' kofinal in A' ist, existiert zudem ein $a'' \in A''$ mit $a \leq a' \leq a''$, was die Kofinalität von A'' in $\mathcal{A}$ zeigt.

Nun können wir – wie am Ende von Abschnitt 3.2 angekündigt – beweisen, dass es überabzählbar viele Ordnungsisomorphismen zwischen zwei abzählbaren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte gibt.

4.2.12 Satz. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abzählbare dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte. Dann gibt es genau $\mathfrak{c}$ viele Ordnungsisomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.*

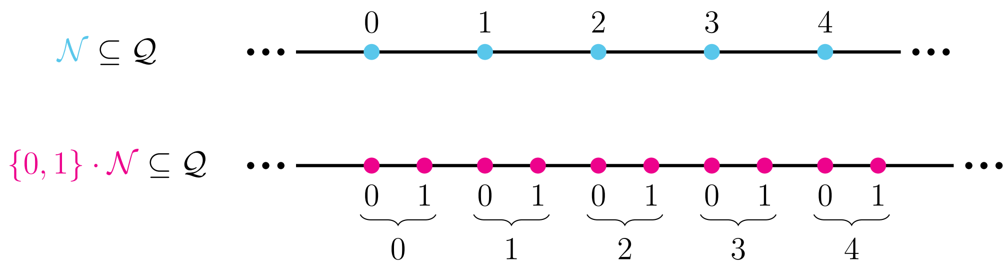
Beweis. Nach Theorem 3.2.2 gibt es einen Ordnungsisomorphismus g von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ und einen Ordnungsisomorphismus h von $\mathcal{Q}$ nach $\mathcal{B}$. Die Vorschrift $f \mapsto h \circ f \circ g$ definiert dann eine Bijektion von der Menge M der Ordnungsautomorphismen auf $\mathcal{Q}$ in die Menge der Ordnungsisomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Es genügt also die Kardinalität von M zu bestimmen. Da M eine Teilmenge der Menge $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ aller Abbildungen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ ist, erhalten wir mit Lemma 4.2.7 zunächst

$$|M| \leq \left|\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}\right| = |\mathbb{Q}|^{|\mathbb{Q}|} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Im Folgenden definieren wir eine Injektion von der Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \{0,1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ nach M, denn dann erhalten wir zudem

$$|M| \geq \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = |\{0,1\}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}.$$

Weil die lineare Ordnung $\{0,1\} \cdot \mathcal{N}$ aus Bemerkung 2.3.6 ordnungsisomorph zu der Unterordnung $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <) \subseteq \mathcal{Q}$ ist, können wir diese ebenfalls als Unterordnung von $\mathcal{Q}$ auffassen. Wir erhalten die folgenden Erscheinungsbilder:



Sei nun $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ beliebig. Dann definiert die Abbildung

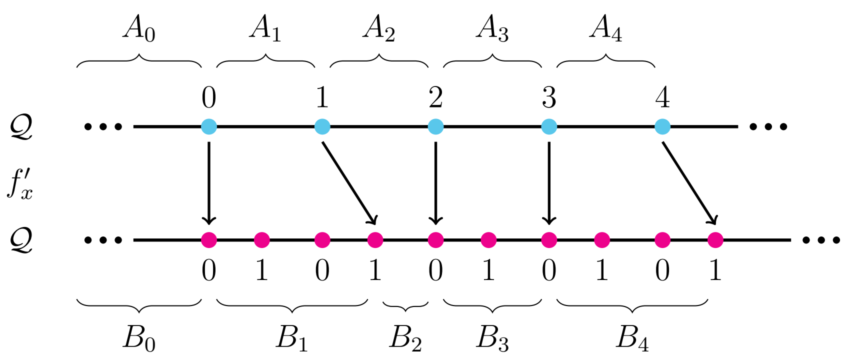
$$f'_x \colon \mathbb{N} \to \{0,1\} \times \mathbb{N},\ n \mapsto (x_n, n)$$

offensichtlich eine Ordungseinbettung von $\mathcal{N}$ nach $\{0,1\} \cdot \mathcal{N}$. Wir definieren außerdem für jedes $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{Q}$ die Intervalle

$$A_n = \begin{cases} (-\infty, 0)_{\mathcal{A}} & \text{für } n = 0 \\ (n-1, n)_{\mathcal{A}} & \text{für } n > 0, \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} (-\infty, f'_x(0))_{\mathcal{B}} & \text{für } n = 0 \\ (f'_x(n-1), f'_x(n))_{\mathcal{B}} & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Für die Folge $x = (0, 1, 0, 0, 1, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bedeutet dies anschaulich:



Nach Anhang A liegt $\mathcal{N}$ kofinal in $\mathcal{Q}$. Zudem liegt $f'_x(\mathbb{N})$ kofinal in $\{0,1\} \cdot \mathcal{N}$, denn für $(z, n) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}$ gilt

$$(z, n) < (x_{n+1}, n+1) = f'_x(n+1).$$

Damit folgt aus Bemerkung 4.2.11, dass $f'_x(\mathbb{N})$ auch kofinal in $\mathcal{Q}$ liegt. Also erhalten wir

$$\mathbb{N} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{Q} = f'_x(\mathbb{N}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n. \tag{$*$}$$

Wir bemerken, dass es sich jeweils um disjunkte Vereinigungen handelt. Weil A_n und B_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbare dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte definieren, gibt es nach Theorem 3.2.2 für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Ordnungsisomorphismus $g_n \colon A_n \to B_n$. Schließlich liefert die Abbildung

$$f_x = f'_x \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_n \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

einen wegen $(*)$ wohldefinierten Ordnungsautomorphismus auf $\mathcal{Q}$.
Folglich ist die Abbildung

$$f \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to M,\ x \mapsto f_x$$

wohldefiniert. Weiter gibt es für zwei Folgen $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit $x \neq y$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq y_n$. Insbesondere gilt dann

$$f_x(n) = f'_x(n) = (x_n, n) \neq (y_n, n) = f'_y(n) = f_y(n).$$

Also ist f die gesuchte Injektion von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nach M. Mit [5, Satz 13.2] folgt schließlich $|M| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, was zu zeigen war. $\square$

Das folgende Resultat werden wir häufig verwenden, denn es hilft die Kardinalität einer Vereinigungsmenge zu bestimmen:

4.2.13 Lemma. *Seien I eine Menge mit $|I| \leq \aleph_\alpha$ und A_i für jedes $i \in I$ eine nichtleere Menge mit $|A_i| \leq \aleph_\alpha$. Wir definieren $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.*

1. *Es gilt $|A| \leq \aleph_\alpha$.*

2. *Gilt $|I| = \aleph_\alpha$ oder $|A_i| = \aleph_\alpha$ für ein $i \in I$, so auch $|A| = \aleph_\alpha$.*

3. *Ist $\aleph_\alpha$ regulär und gelten $|I| < \aleph_\alpha$ und $|A_i| < \aleph_\alpha$ für alle $i \in I$, so gilt auch $|A| < \aleph_\alpha$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus [5, Lemma 12.3, Lemma 12.4 und Lemma 12.6]. □

Abschließend möchten wir noch einmal auf reguläre Kardinalzahlen eingehen.

4.2.14 Lemma. *Jede unendliche Nachfolgerkardinalzahl ist regulär. Insbesondere ist jede unendliche singuläre Kardinalzahl eine Limeskardinalzahl.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.2.5 ist jede unendliche Nachfolgerkardinalzahl der Form $\aleph_{\alpha+1}$ für ein $\alpha \in \mathbf{On}$. Es folgt aus [5, Satz 12.7], dass $\aleph_{\alpha+1}$ für jedes $\alpha \in \mathbf{On}$ regulär ist. □

4.2.15 Beispiel. Auch Limeskardinalzahlen können regulär sein. Beispielsweise gilt $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, denn jede endliche Teilmenge $A \subseteq \omega$ hat ein letztes Element $\max A$ und für dieses gilt $A < \max A + 1 < \omega$.

4.2.16 Definition. Sei $\alpha > 0$ eine Ordinalzahl.

1. Wir nennen $\aleph_\alpha$ **schwach unerreichbar**, falls $\aleph_\alpha$ eine reguläre Limeskardinalzahl ist.

2. Ist $\aleph_\alpha$ regulär und gilt $2^\kappa < \aleph_\alpha$ für alle Kardinalzahlen $\kappa < \aleph_\alpha$, so heißt $\aleph_\alpha$ **stark unerreichbar**.

4.2.17 Bemerkung.

a) Die Existenz regulärer Limeskardinalzahlen größer als $\aleph_0$, bzw. die Existenz von schwach unerreichbaren Kardinalzahlen, ist in ZFC nicht beweisbar (siehe [12, S. 34]). Hierbei bezeichnet ZFC die Zermelo–Fraenkel–Mengenlehre zusammen mit dem Auswahlaxiom.

b) Sei $\alpha > 0$ eine Ordinalzahl. Ist $\aleph_\alpha$ stark unerreichbar, so ist $\aleph_\alpha$ auch schwach unerreichbar. Für alle $\beta < \alpha$ gilt dann nämlich

$$\aleph_\beta^+ = \aleph_{\beta+1} \leq 2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha.$$

Dies zeigt, dass $\aleph_\alpha$ eine Limeskardinalzahl ist. In [21, Satz 9] wird bewiesen, dass unter Annahme der verallgemeinerten Kontinuumshypothese auch die Umkehrung der obigen Aussage gilt. In diesem Fall stimmen also die stark unerreichbaren mit den schwach unerreichbaren Kardinalzahlen überein.

5 η_α-Ordnungen

Wir haben uns in Abschnitt 3 mit abzählbaren dichten linearen Ordnungen beschäftigt und dann in Abschnitt 4 Grundlagen zu Ordinal- und Kardinalzahlen eingeführt. Damit können wir nun das Konzept der Dichtheit auf höhere Kardinalitäten übertragen.

Sei stets α eine Ordinalzahl.

5.1 Einführung

Die Theorie der η_α-Ordnungen wurde von Felix Hausdorff entwickelt. Einige seiner Resultate sind in seinem Werk „Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen“ [9] zu finden. Wir orientieren uns bei diesem Abschnitt hauptsächlich an [9, Abschnitt 23].

5.1.1 Definition. Eine lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, <)$ heißt **η_α-Ordnung**, falls für alle Teilmengen $X, Y \subseteq A$ mit $|X|, |Y| < \aleph_\alpha$ und $X < Y$ ein $a \in A$ existiert mit $X < a < Y$.

5.1.2 Bemerkung.

a) Eine η_α-Ordnung $\mathcal{A}$ hat keine kofinale Unterordnung mit Kardinalität kleiner als $\aleph_\alpha$. Ist nämlich $X \subseteq A$ eine Teilmenge mit $|X| < \aleph_\alpha$, so gibt es aufgrund der η_α-Eigenschaft von $\mathcal{A}$ ein $a \in A$ mit $X < a < \emptyset$. Damit ist X nicht kofinal in $\mathcal{A}$. Entsprechend kann man zeigen, dass $\mathcal{A}$ keine koinitiale Unterordnung mit Kardinalität kleiner als $\aleph_\alpha$ hat.

b) Da jede lineare Ordnung kofinal in sich selbst liegt, folgt aus a) insbesondere, dass jede η_α-Ordnung mindestens Kardinalität $\aleph_\alpha$ hat.

Wir haben bereits erwähnt, dass die η_0-Ordnungen mit den nichtleeren dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte übereinstimmen. Diesen Zusammenhang beweisen wir nun:

5.1.3 Lemma. *Jede η_0-Ordnung ist zugleich eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte und umgekehrt ist jede nichtleere dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte eine η_0-Ordnung.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (A, <)$ eine nichtleere dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte. Seien weiter $X, Y \subseteq A$ mit $|X|, |Y| < \aleph_0$ und $X < Y$. Dann sind X und Y endlich. Wir gehen zunächst davon aus, dass $X, Y \neq \emptyset$. Dann existieren $x = \max X$ und $y = \min Y$ und es gilt $x < y$ wegen $X < Y$. Da $\mathcal{A}$ dicht ist, findet sich also ein $a \in A$ mit $X \leq x < a < y \leq Y$. Ist eine der beiden Mengen X, Y leer, so nutzt man die Tatsache, dass $\mathcal{A}$ keine Endpunkte hat. Der Fall $X = Y = \emptyset$ ist trivial. In jedem Fall ist $\mathcal{A}$ eine η_0-Ordnung. Seien nun umgekehrt $\mathcal{A}$ eine η_0-Ordnung und $a \in A$ beliebig. Dann gilt $\emptyset < \{a\}$. Wir finden daher ein $a' \in A$ mit $\emptyset < a' < a$. Somit kann $\mathcal{A}$ kein erstes Element haben. Analog zeigt man, dass $\mathcal{A}$ kein letztes Element hat. Um die Dichtheit von $\mathcal{A}$ nachzuweisen, betrachtet man einelementige Teilmengen. $\square$

Jede abzählbare η_0-Ordnung hat also nach dem Isomorphiesatz von Cantor den Ordnungstyp η (siehe Abschnitt 3.2).

5.1.4 Beispiel. Aus Lemma 5.1.3 folgt direkt, dass die rationalen Zahlen $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ und die reellen Zahlen $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <)$ jeweils eine η_0-Ordnung definieren. Die reellen Zahlen $\mathcal{R}$ sind allerdings keine η_1-Ordnung, denn die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ haben Kardinalität $\aleph_0 < \aleph_1$ und liegen kofinal in $\mathcal{R}$ (siehe Abschnitt 6.3), was Bemerkung 5.1.2 widerspricht.

5.1.5 Bemerkung.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ mit $\alpha < \beta$ gilt nach Bemerkung 4.2.5 stets $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. Hieraus folgt, dass jede η_β-Ordnung zugleich eine η_α-Ordnung ist.

b) Ist $\mathcal{A} = (A, <)$ eine η_α-Ordnung, so hat die Menge A nach Bemerkung 5.1.2 mindestens Kardinalität $\aleph_\alpha$. Wir haben bereits am Beispiel der rationalen Zahlen gesehen, dass es im Fall $\alpha = 0$ möglich ist $|A| = \aleph_\alpha$ zu erreichen. Im Allgemeinen gilt jedoch $|A| \neq \aleph_\alpha$, denn jede $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung ist nach a) zugleich eine η_α-Ordnung, die nach Bemerkung 5.1.2 mindestens Kardinalität $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$ hat.

Das folgende Resultat findet sich in [4, Lemma 1.3] und wird später in einem Isomorphiebeweis nützlich sein, weshalb wir es nun beweisen.

5.1.6 Lemma. *Seien $\mathcal{A}$ eine η_α-Ordnung und $\mathcal{B}$ eine Unterordnung, die dicht in $\mathcal{A}$ liegt. Dann ist auch $\mathcal{B}$ eine η_α-Ordnung.*

Beweis. Seien $X, Y \subseteq B$ mit $|X|, |Y| < \aleph_\alpha$ und $X < Y$. Dann existiert ein $a_1 \in A$ mit $X < a_1 < Y$. Wenden wir die η_α-Eigenschaft von $\mathcal{A}$ nochmals auf $\{a_1\}$ und Y an, so erhalten wir ein a_2 mit $X < a_1 < a_2 < Y$. Da $\mathcal{B}$ dicht in $\mathcal{A}$ liegt, gibt es schließlich ein $b \in B$ mit $a_1 < b < a_2$. Insbesondere gilt $X < b < Y$. Somit ist auch $\mathcal{B}$ eine η_α-Ordnung. □

5.2 Existenz von $\boldsymbol{\eta_\alpha}$-Ordnungen

Bisher haben wir von η_α-Ordnungen gesprochen ohne uns Gedanken über ihre Existenz für $\alpha > 0$ zu machen. Dies wollen wir nun nachholen. Schon Hausdorff selbst bewies 1908 in [9, S. 474-505] und 1914 in [8, Kapitel 6] einige Aussagen zur Existenz von η_α-Ordnungen und konstruierte Beispiele durch Mengen von Abbildungen der Form $a\colon \omega_\alpha \to \mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}$ eine lineare Ordnung mit Ordnungstyp **3** war. Wir orientieren uns in dieser Arbeit jedoch an den Resultaten von Wacław Sierpiński in [20] aus dem Jahr 1949.

Zunächst definieren wir A_α als die Menge aller Abbildungen $a\colon \omega_\alpha \to \{0,1\}$ wobei wir $\{0,1\}$ als Unterordnung von $(\mathbb{N}, <)$ auffassen, d.h. es gilt $0 < 1$. Wir ordnen A_α lexikographisch an, also definieren wir für $a, b \in A_\alpha$ mit $a \neq b$

$$a <_{\text{lex}} b :\Leftrightarrow a(\gamma) < b(\gamma), \text{ wobei } \gamma = \min\{\xi < \omega_\alpha \mid a(\xi) \neq b(\xi)\}.$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass $(A, <_{\text{lex}})$ eine lineare Ordnung ist. Wir betrachten nun die Unterordnung $Q_\alpha \subseteq (A_\alpha, <_{\text{lex}})$ bestehend aus allen Elementen $a \in A_\alpha$, für die es ein $\gamma < \omega_\alpha$ gibt mit

- $a(\gamma) = 1$ und
- $a(\xi) = 0$ für alle $\xi < \omega_\alpha$ mit $\gamma < \xi$.

Dann ist $\max\{\xi < \omega_\alpha \mid a(\xi) = 1\}$ für $a \in Q_\alpha$ stets wohldefiniert. In anderen Worten hat jedes $a \in Q_\alpha$ eine letzte 1.

Wir erhalten nun folgendes Resultat von Sierpiński, das sich im Beweis von [20, Théorème III] mit leicht unterschiedlichen Bedingungen an $\aleph_\alpha$ findet. Beim Beweis orientieren wir uns an [18, Theorem 9.24].

5.2.1 Theorem (Sierpiński). *Ist $\aleph_\alpha$ regulär, so ist $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ eine η_α-Ordnung.*

Beweis. Wir schreiben zur Vereinfachung $<$ statt $<_{\text{lex}}$. Seien $X, Y \subseteq Q_\alpha$ mit $|X|, |Y| < \aleph_\alpha$ und $X < Y$. Wir definieren zunächst die Menge

$$T_X = \{\xi < \omega_\alpha \mid x(\xi) = 1 \text{ für ein } x \in X\}$$

und die Abbildung

$$t_X \colon X \to \omega_\alpha,\ x \mapsto \max\{\xi < \omega_\alpha \mid x(\xi) = 1\},$$

welche wohldefiniert ist, da $X \subseteq Q_\alpha$ gilt. Wir zeigen nun, dass $T_X \subsetneq \omega_\alpha$. Gilt nämlich $T_X = \omega_\alpha$, so gibt es zu jedem $\xi \in \omega_\alpha$ ein $x \in X$ mit $x(\xi) = 1$, woraus $\xi \leq t_X(x)$ folgt. Damit ist $t_X(X)$ eine kofinale Teilmenge von ω_α mit $|t_X(X)| \leq |X| < \aleph_\alpha$, was der Regularität von $\aleph_\alpha$ widerspricht. Daher erhalten wir $T_X \subsetneq \omega_\alpha$. Sei also

$$\beta_X = \min(\omega_\alpha \setminus T_X).$$

Dann gilt $x(\xi) = 0$ für alle $x \in X$ und alle $\xi < \omega_\alpha$ mit $\beta_X \leq \xi$. Entsprechend kann man T_Y, t_Y definieren und zeigen, dass auch

$$\beta_Y = \min(\omega_\alpha \setminus T_Y)$$

existiert. Dann gilt auch $y(\xi) = 0$ für alle $y \in Y$ und alle $\xi < \omega_\alpha$ mit $\beta_Y \leq \xi$. Wir konstruieren nun ein Element $a \in Q_\alpha$, das minimal bzgl. der Eigenschaft $X < a$ ist. Ist $\xi < \beta_X$ beliebig und $a(\gamma)$ für alle $\gamma < \xi$ bereits definiert, so setzen wir

$$a_\xi = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists\, x \in X\ (\, x(\xi) = 1\ \wedge\ \forall\, \gamma < \xi\ a(\gamma) = x(\gamma)\,) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{$*$}$$

Nach dem Prinzip der Induktion entlang β_X (siehe Satz 4.1.10) haben wir dadurch $a(\xi)$ für alle $\xi < \beta_x$ definiert. Für $\xi < \omega_\alpha$ mit $\xi \geq \beta_X$ setzen wir

$$a(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \xi = \max\{\beta_X, \beta_Y\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{$**$}$$

Sei $\beta_0 = \max\{\beta_X, \beta_Y\}$. Nach Konstruktion ist $\beta_0 = \max\{\xi < \omega_\alpha \mid a(\xi) = 1\}$, also $a \in Q_\alpha$. Wir zeigen nun, dass tatsächlich $X < a$ gilt. Sei dafür $x \in X$ beliebig. Dann gilt $x(\beta_0) = 0 < 1 = a(\beta_0)$, was $x \neq a$ zeigt. Somit existiert

$\gamma = \min\{\xi < \omega_\alpha \mid x(\xi) \neq a(\gamma)\} \leq \beta_0$. Aus (*) und (**) folgt dann, dass $x(\gamma) = 0 < 1 = a(\gamma)$, also $x < a$. Damit erhalten wir $X < a$. In [18, Theorem 9.24] wird bewiesen, dass auch $a < Y$ gilt. Schließlich haben wir $X < a < Y$. Folglich definiert $(Q_\alpha, <)$ eine η_α-Ordnung. □

Sieben Jahre nach dem Erscheinen der Resultate von Sierpiński stellte Leonard Gillman in [6] weitere Untersuchungen zu Q_α an. Dabei kamen beispielsweise die beiden folgenden Resultate zustande:

5.2.2 Theorem (Gillman)**.** *Genau dann ist $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ eine η_α-Ordnung, wenn $\aleph_\alpha$ regulär ist.*

Beweis. Ist α eine Nachfolgerordinalzahl, so ist $\aleph_\alpha$ eine Nachfolgerkardinalzahl und damit regulär (vgl. Lemma 4.2.14). Folglich ist $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ nach Theorem 5.2.1 eine η_α-Ordnung. Für Limesordinalzahlen findet sich ein Beweis in [6, Theorem 2]. □

Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so ist $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ wegen Theorem 5.2.2 keine η_α-Ordnung. Allgemein gilt jedoch der folgende Zusammenhang zwischen η_α-Ordnungen und $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$:

5.2.3 Theorem (Gillman)**.** *Jede η_α-Ordnung hat eine Unterordnung, die ordnungsisomorph zu $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ ist.*

Beweis. Nachzulesen in [6, Theorem 4]. □

Wir wenden unser Augenmerk nun auf jene $\alpha \in \mathbf{On}$, für die $\aleph_\alpha$ singulär ist. Wir wissen bereits, dass $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ keine η_α-Ordnung ist, falls $\aleph_\alpha$ singulär ist. Nun wollen wir zeigen, dass in diesem Fall dennoch η_α-Ordnungen existieren. Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so ist nach Lemma 4.2.14 $\aleph_{\alpha+1}$ regulär. Nach Theorem 5.2.1 ist also $(Q_{\alpha+1}, <_{\text{lex}})$ eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung. Diese ist nach Bemerkung 5.1.5 zugleich eine η_α-Ordnung. Wir werden gleich sehen, dass in gewisser Weise auch die Umkehrung dieser Aussage gilt. Dies stellte Hausdorff (ohne Beweis) bereits 1908 in [9, S. 488] fest. Wir werden das Resultat nun beweisen:

5.2.4 Satz (Hausdorff)**.** *Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so ist jede η_α-Ordnung zugleich eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung.*

Beweis. Sei $\aleph_\alpha$ singulär und $\mathcal{A}$ eine η_α-Ordnung. Da $\aleph_\alpha$ singulär ist, gilt $\kappa = \operatorname{cof}(\aleph_\alpha) < \aleph_\alpha$. Wir finden in ω_α also eine kofinale Unterordnung der Form $Z = \{\pi_\beta\}_{\beta<\kappa} \subseteq \omega_\alpha$. Seien weiter $X, Y \subseteq A$ Unterordnungen mit $X < Y$

und $|X|, |Y| < \aleph_{\alpha+1}$. Dann gilt $|X|, |Y| \leq \aleph_\alpha$. Wir zeigen nun, dass es in X eine kofinale Teilmenge X' und in Y eine koinitiale Teilmenge Y' so gibt, dass $|X'|, |Y'| < \aleph_\alpha$. Wir betrachten zunächst X. Gilt $|X| < \aleph_\alpha$, so können wir $X' = X$ als kofinale Teilmenge wählen. Ansonsten schreiben wir $X = \{x_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}$ und definieren $X_\beta = \{x_\xi\}_{\xi<\pi_\beta} \subseteq X$ für alle $\beta < \kappa$. Es gilt $|X_\beta| = |\pi_\beta| < \aleph_\alpha$ für jedes $\beta < \kappa$. Ist X_β kofinal in X für ein $\beta < \kappa$, so können wir $X' = X_\beta$ als kofinale Teilmenge wählen. Ansonsten finden wir für jedes $\beta < \kappa$ ein $c_\beta \in X$ mit $X_\beta < c_\beta$. Wir zeigen, dass in diesem Fall die Menge $C = \{c_\beta\}_{\beta<\kappa}$ kofinal in X ist. Sei hierfür $x \in X$ beliebig. Dann gibt es ein $\xi < \omega_\alpha$ mit $x = x_\xi$. Da $Z = \{\pi_\beta\}_{\beta<\kappa}$ kofinal in ω_α ist, gibt es ein $\beta < \kappa$ mit $\xi < \pi_\beta$. Insbesondere gilt $x = x_\xi \in X_\beta$ und damit $x < c_\beta$ wegen $X_\beta < c_\beta$. Außerdem gilt $|C| = \kappa < \aleph_\alpha$. Somit ist $X' = C$ die gesuchte kofinale Teilmenge in X. Entsprechend finden wir eine koinitiale Teilmenge Y' in Y mit $|Y'| < \aleph_\alpha$. Nun gibt es ein $a \in A$ mit $X' < a < Y'$, weil $\mathcal{A}$ eine η_α-Ordnung ist. Da X' kofinal in X liegt, gibt es für jedes $x \in X$ ein $x' \in X'$ mit $x < x'$. Insbesondere haben wir dann $x < x' < a$, also $X < a$. Analog erhält man $a < Y$, da Y' koinitial in Y liegt und $a < Y'$ gilt. Schließlich erhalten wir $X < a < Y$, d.h. $\mathcal{A}$ ist eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung. □

5.2.5 Korollar. *Ist $\aleph_\alpha$ singulär, so existiert keine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$.*

Beweis. Es folgt aus Satz 5.2.4 und Bemerkung 5.1.2, dass jede η_α-Ordnung mindestens Kardinalität $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$ hat, falls $\aleph_\alpha$ singulär ist. □

Wir wollen im Folgenden die Existenz von η_α-Ordnungen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ untersuchen. Aufgrund von Korollar 5.2.5 können wir uns hierbei auf jene $\alpha \in \mathbf{On}$ beschränken, für die $\aleph_\alpha$ regulär ist. Da wir für diese α bereits eine konkrete η_α-Ordnung, nämlich $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$, gefunden haben, liegt es nahe zunächst die Kardinalität von Q_α zu bestimmen. In [20, Théorème IV] findet sich beispielsweise das folgende Resultat für Nachfolgerordinalzahlen:

5.2.6 Theorem (Sierpiński)**.** *Es gibt eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung der Kardinalität $2^{\aleph_\alpha}$.*

Beweis. Nach Lemma 4.2.14 ist $\aleph_{\alpha+1}$ regulär. Somit ist $(Q_{\alpha+1}, <_{\text{lex}})$ nach Theorem 5.2.1 eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung. Tatsächlich gilt $|Q_{\alpha+1}| = 2^{\aleph_\alpha}$. Für einen Beweis dieser Identität verweisen wir auf [18, S. 166] und [20, S. 65], weil dafür Resultate aus der Kardinalzahlarithmetik benötigt werden, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. □

5.2.7 Korollar. *Unter der Annahme $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ gibt es eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$.*

Beweis. Diese Aussage folgt unmittelbar aus Theorem 5.2.6. □

Sierpiński zeigte in [20, Théorème V] zudem, dass $2^{\aleph_\alpha}$ eine untere Schranke für die Kardinalität jeder $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung ist:

5.2.8 Theorem (Sierpiński). *Jede $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung hat mindestens Kardinalität $2^{\aleph_\alpha}$.*

Beweis. Nach dem Beweis von [20, Théorème V] hat jede $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung eine Unterordnung, die ordnungsisomorph zu $(A_\alpha, <_{\text{lex}})$ ist. Daraus folgt die Behauptung, denn es gilt

$$|A_\alpha| = |\{0,1\}^{\omega_\alpha}| = |\{0,1\}|^{|\omega_\alpha|} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

□

Damit können wir folgende Äquivalenz aus [20, S. 67] beweisen:

5.2.9 Korollar (Sierpiński). *Genau dann existiert eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$, wenn $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung $\mathcal{A}$ der Kardinalität $\aleph^{\alpha+1}$ existiert. Dann gilt nach Bemerkung 4.2.8 und Theorem 5.2.8

$$\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha} \leq |A| = \aleph_{\alpha+1}.$$

Somit haben wir $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Korollar 5.2.7 liefert die Rückrichtung. □

Schließlich betrachten wir noch den Fall, dass α eine Limesordinalzahl bzw. $\aleph_\alpha$ eine Limeskardinalzahl ist. Auch hier bestimmen wir zunächst die Kardinalität von Q_α und erhalten dadurch das folgende Resultat aus [18, Theorem 9.26]:

5.2.10 Theorem. *Ist $\aleph_\alpha$ stark unerreichbar, so existiert eine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$.*

Beweis. Ist $\aleph_\alpha$ stark unerreichbar, so ist $\aleph_\alpha$ insbesondere regulär. Somit ist $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ nach Theorem 5.2.1 eine η_α-Ordnung. In [18, S. 166] wird außerdem bewiesen, dass $|Q_\alpha| = \aleph_\alpha$, wenn $\aleph_\alpha$ stark unerreichbar ist. □

In [6, Theorem 3] findet sich für Limesordinalzahlen α eine allgemeine Charakterisierug der Existenz von η_α-Ordnungen der Kardinalität $\aleph_\alpha$:

5.2.11 Theorem (Gillman). *Sei α eine Limesordinalzahl. Genau dann gibt es eine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$, wenn $\aleph_\alpha$ regulär ist und $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$ gilt.*

Beweis. Existiert eine η_α-Ordnung $\mathcal{A}$ der Kardinalität $\aleph_\alpha$, so muss $\aleph_\alpha$ nach Korollar 5.2.5 regulär sein. Sei nun $\beta < \alpha$. Da α eine Limesordinalzahl ist, gilt auch $\beta + 1 < \alpha$. Inbesondere bildet $\mathcal{A}$ nach Bemerkung 5.1.5 eine $\eta_{\beta+1}$-Ordnung. Nach Theorem 5.2.8 gilt deshalb $2^{\aleph_\beta} \leq |A| = \aleph_\alpha$. Damit erhalten wir $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$, wie gewünscht. Sei nun umgekehrt $\aleph_\alpha$ regulär. Dann ist nach Theorem 5.2.1 $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ eine η_α-Ordnung. Außerdem folgt $|Q_\alpha| = \aleph_\alpha$, wenn $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$ gilt. Dies wird in [6, Theorem 3] und [18, S. 166] bewiesen. □

Da stark unerreichbare $\aleph_\alpha$ nach Definition regulär sind und $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$ erfüllen, können wir Theorem 5.2.10 auch direkt aus Theorem 5.2.11 folgern.

Die Resultate für Nachfolger- und Limesordinalzahlen können wir schließlich wie folgt zusammenfassen:

5.2.12 Korollar. *Genau dann gibt es eine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$, wenn $\aleph_\alpha$ regulär ist und $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$ erfüllt.*

Beweis. Ist α eine Limesordinalzahl, so folgt die Behauptung aus Theorem 5.2.11. Ist andererseits α eine Nachfolgerordinalzahl, so ist $\aleph_\alpha$ nach Lemma 4.2.14 regulär. Schreiben wir weiter $\alpha = \beta + 1$ für ein $\beta \in \mathbf{On}$, so ist nach Korollar 5.2.9 die Existenz einer η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$ äquivalent zu $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} = \aleph_\alpha$. Es genügt also die Äquivalenz von

$$2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} = \aleph_\alpha \text{ und} \tag{1}$$
$$2^{\aleph_\gamma} \leq \aleph_\alpha \text{ für alle } \gamma < \alpha \tag{2}$$

zu zeigen. Gilt (1) und ist $\gamma < \alpha$ beliebig, so folgt $\gamma \leq \beta$ und damit

$$2^{\aleph_\gamma} \leq 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} = \aleph_\alpha.$$

Gilt umgekehrt (2), so erhalten wir

$$2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha = \aleph_{\beta+1} \leq 2^{\aleph_\beta}.$$

Letztlich folgt $2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$, wie gewünscht. □

Zusammenfassend können wir sagen, dass für jedes $\alpha \in \mathbf{On}$ eine η_α-Ordnung existiert, nämlich $(Q_{\alpha+1}, <_{\text{lex}})$. Interessanter ist die Frage, für welche $\alpha \in \mathbf{On}$ eine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$ existiert. Wir haben zu Beginn festgestellt, dass dafür $\aleph_\alpha$ regulär sein muss. Für singuläre $\aleph_\alpha$ ist nämlich jede η_α-Ordnung zugleich eine $\eta_{\alpha+1}$-Ordnung und hat deshalb mindestens Kardinalität $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$ (vgl. Satz 5.2.4 und Korollar 5.2.5). Für eine Nachfolgerordinalzahl $\alpha = \beta + 1$ ist die Existenz einer η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$ äquivalent zu der Kontinummshypothese $2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$ (vgl. Korollar 5.2.9). Allgemein existiert genau dann eine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$, wenn $\aleph_\alpha$ regulär ist und $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$ erfüllt ist (vgl. Korollar 5.2.12). Um die Existenz von η_α-Ordnungen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ zu gewährleisten, muss also beispielsweise die Existenz von stark unerreichbaren Kardinalzahlen oder die verallgemeinerte Kontinuumshypothese angenommen werden (vgl. Theorem 5.2.10 und Korollar 5.2.7).

5.3 Isomorphie von $\boldsymbol{\eta_\alpha}$-Ordnungen

Wie bereits erwähnt sind die η_α-Ordnungen eine Verallgemeinerung der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte. Daher ist es keine all zu große Überraschung, dass wir Theorem 3.1.2 auf η_α-Ordnungen übertragen können. Diese Verallgemeinerung stammt von Hausdorff und findet sich in [9, Abschnitt 23, Satz XVIII]. Wir orientieren uns beim Beweis an [18, Theorem 9.22].

5.3.1 Theorem (Hausdorff)**.** *Seien $\mathcal{A} = (A, <)$ eine beliebige lineare Ordnung mit $|A| \leq \aleph_\alpha$ und $\mathcal{B} = (B, <)$ eine η_α-Ordnung. Dann können wir $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ einbetten.*

Beweis. Zunächst schreiben wir unabhängig von der Anordnung der Elemente

$$A = \{a_\xi\}_{\xi<\kappa},$$

wobei $\kappa = |A| \leq \aleph_\alpha$. Wir zeigen per Induktion entlang κ, dass für jedes $\beta < \kappa$ eine Ordnungseinbettung $f_\beta \colon \{a_\xi\}_{\xi\leq\beta} \to B$ mit

$$f_\beta(a_\xi) = f_\gamma(a_\xi) \text{ für alle } \xi \leq \gamma < \beta \tag{$*$}$$

existiert. Dann ist

$$f = \bigcup_{\beta<\kappa} f_\beta \colon A \to B$$

wegen ($*$) eine wohldefinierte Ordnungseinbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Sei also $\beta < \kappa$ so, dass es für jedes $\gamma < \beta$ eine Einbettung $f_\gamma\colon \{a_\xi\}_{\xi\leq\gamma} \to B$ gibt mit

$$f_\gamma(a_\xi) = f_\delta(a_\xi) \text{ für alle } \xi \leq \delta < \gamma. \tag{$**$}$$

Dann ist

$$f'_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} f_\gamma\colon \{a_\xi\}_{\xi<\beta} \to B$$

wegen ($**$) eine wohldefinierte Ordnungseinbettung. Wir betrachten nun die Mengen

$$X = \{a_\xi \mid \xi < \beta, a_\xi < a_\beta\} \text{ und } Y = \{a_\xi \mid \xi < \beta, a_\beta < a_\xi\}.$$

Dann gilt offensichtlich $X < a_\beta < Y$. Da f'_β ordnungserhaltend ist, erhalten wir deshalb auch

$$f'_\beta(X) < f'_\beta(Y).$$

Aufgrund der Injektivität von f'_β gilt zudem

$$\left|f'_\beta(X)\right| = |X| \leq |\beta| < |\kappa| = \kappa \leq \aleph_\alpha$$

und entsprechend $\left|f'_\beta(Y)\right| < \aleph_\alpha$. Da $\mathcal{B}$ eine η_α-Ordnung ist, existiert also ein $b \in B$ mit $f'_\beta(X) < b < f'_\beta(Y)$. Damit definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} f_\beta\colon \{a_\xi\}_{\xi\leq\beta} &\to B, \\ a_\xi &\mapsto \begin{cases} f'_\beta(a_\xi), & \text{falls } \xi < \beta \\ b, & \text{falls } \xi = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

eine Ordnungseinbettung, die ($*$) erfüllt. □

Wir wissen, dass $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ nach Theorem 5.2.2 keine η_α-Ordnung ist, wenn $\aleph_\alpha$ singulär ist. Dennoch erfüllt $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ auch in diesem Fall die obige universelle Eigenschaft, denn jede lineare Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$ kann in $(Q_\alpha, <_{\text{lex}})$ eingebettet werden, wie Gillman in [6, Theorem 1] zeigt.

Auch Theorem 3.2.2 können wir auf η_α-Ordnungen übertragen. Diese Verallgemeinerung stammt ebenfalls von Hausdorff und findet sich in [9, Abschnitt 23, Satz XIX].

5.3.2 Theorem (Hausdorff)**.** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei η_α-Ordnungen der Kardinalität $\aleph_\alpha$. Dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Beweis. Wir gehen ohne Einschränkung davon aus, dass $\aleph_\alpha$ regulär ist. Ansonsten finden wir nach Korollar 5.2.5 überhaupt keine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$. Da $\mathcal{A} = (A, <)$ und $\mathcal{B} = (B, <)$ beide Kardinalität $\aleph_\alpha$ haben, schreiben wir

$$A = \{a_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha} \text{ und } B = \{b_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}.$$

Auch hier sind die Nummerierungen unabhängig von der Anordnung der Elemente. Wir zeigen per Induktion entlang ω_α, dass für jedes $\beta < \omega_\alpha$ Teilmengen $A_\beta \subseteq A, B_\beta \subseteq B$ und ein Ordnungsisomorphismus $f_\beta \colon A_\beta \to B_\beta$ mit

(I) $|A_\beta|, |B_\beta| < \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \omega_\alpha$,

(II) $A_\gamma \subseteq A_\beta, B_\gamma \subseteq B_\beta$ und $f_\beta|_{A_\gamma} = f_\gamma$ für alle $\gamma < \beta < \omega_\alpha$,

(III) $A = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} A_\beta$ und $B = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} B_\beta$

existieren. Wie im Beweis von Theorem 3.2.2 zeigt man mithilfe von (II) und (III), dass

$$f = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} f_\beta \colon A \to B$$

ein wohldefinierter Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist. Folglich sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ordnungsisomorph. Wir beginnen also nun mit der Induktion und gehen davon aus, dass wir für ein festes $\beta < \omega_\alpha$ und alle $\gamma < \beta$ Teilmengen $A_\gamma \subseteq A, B_\gamma \subseteq B$ und einen Ordnungsisomorphismus $f_\gamma \colon A_\gamma \to B_\gamma$ mit

(i) $|A_\gamma|, |B_\gamma| < \aleph_\alpha$ für alle $\gamma < \beta$,

(ii) $A_\delta \subseteq A_\gamma, B_\delta \subseteq B_\gamma$ und $f_\gamma|_{A_\delta} = f_\delta$ für alle $\delta < \gamma < \beta$

gegeben haben. Dann ist aufgrund von (ii)

$$f'_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} f_\gamma \colon A'_\beta \to B'_\beta$$

ein wohldefinierter Ordnungsisomorphismus, wobei

$$A'_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma \text{ und } B'_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} B_\gamma.$$

Nach (i) sind A'_β und B'_β Vereinigungen von $|\beta| < \aleph_\alpha$ vielen Mengen, die jeweils eine Kardinalität kleiner als $\aleph_\alpha$ haben. Es folgt somit aus Lemma 4.2.13 und der Regularität von $\aleph_\alpha$, dass

$$\left|A'_\beta\right|, \left|B'_\beta\right| < \aleph_\alpha, \text{ also } A'_\beta \subsetneq A, B'_\beta \subsetneq B. \tag{$*$}$$

Ist β eine gerade Ordinalzahl, so betrachten wir a_μ, wobei

$$\mu = \min\{\xi < \omega_\alpha \mid a_\xi \notin A'_\beta\}. \tag{1}$$

Dieses μ existiert wegen (∗) und da $(\omega_\alpha, <)$ als Ordinalzahl wohlgeordnet ist. Wir betrachten nun die Mengen

$$X = \{a \in A'_\beta \mid a < a_\mu\} \text{ und } Y = \{a \in A'_\beta \mid a_\mu < a\}.$$

Dann gelten $X < a_\mu < Y$ und nach (∗)

$$|X|, |Y| \leq \left|A'_\beta\right| < \aleph_\alpha.$$

Weil f'_β ordnungserhaltend ist, gelten auch $f'_\beta(X) < f'_\beta(Y)$ und

$$\left|f'_\beta(X)\right|, \left|f'_\beta(Y)\right| < \aleph_\alpha.$$

Da $\mathcal{B}$ eine η_α-Ordnung ist, existiert deshalb ein $b \in B$ mit

$$f'_\beta(X) < b < f'_\beta(Y).$$

Wir definieren

$$A_\beta = A'_\beta \cup \{a_\mu\}, B_\beta = B'_\beta \cup \{b\} \tag{2}$$

und setzen f'_β durch $f_\beta(a_\mu) = b$ zu $f_\beta \colon A_\beta \to B_\beta$ fort. Ist β ungerade, so setzt man $\mu = \{\xi < \omega_\alpha \mid b_\xi \notin B'_\beta\}$ und verfährt analog mit vertauschten Rollen. Durch diese Konstruktion von A_β, B_β und f_β für $\beta < \omega_\alpha$ haben wir (I) und (II) gewährleistet. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch (III) erfüllt wird. Hierfür betrachten wir zunächst die Teilmenge

$$\Xi = \left\{\xi < \omega_\alpha \,\middle|\, a_\xi \in \bigcup_{\beta < \omega_\alpha} A_\beta\right\} \subseteq \omega_\alpha$$

und zeigen, dass $\Xi = \omega_\alpha$ gilt. Daraus folgt dann unmittelbar, dass

$$A = \{a_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha} = \bigcup_{\beta < \omega_\alpha} A_\beta.$$

Wegen (1) und (2) ist Ξ ein Anfangssegment von ω_α, d.h. für alle $\xi \in \Xi$ und alle $\gamma \in \omega_\alpha$ folgt aus $\gamma < \xi$ bereits $\gamma \in \Xi$. Nach [5, Lemma 6.1] ist daher $\Xi = \omega_\alpha$ oder $\Xi = \{\xi < \omega_\alpha \mid \xi < \beta\}$ für ein $\beta < \omega_\alpha$. Insbesondere ist Ξ eine Ordinalzahl mit $\Xi \leq \omega_\alpha$. Außerdem folgt aus (1), (2) und Lemma 4.2.9, dass

$$|\Xi| \geq |\{\beta < \omega_\alpha \mid \beta \text{ gerade}\}| = \aleph_\alpha.$$

Es gelten also $\Xi \leq \omega_\alpha$ und $|\Xi| = |\omega_\alpha|$. Weil ω_α eine Kardinalzahl ist, folgt daraus $\Xi = \omega_\alpha$, wie gewünscht. Analog zeigt man, dass

$$B = \{b_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha} = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} B_\beta.$$

Somit wird auch (III) erfüllt, was zu zeigen war. □

5.3.3 Korollar. *Sei $\mathcal{A}$ eine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$ und $\mathcal{B}$ eine beliebige lineare Ordnung. Genau dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{B}$ ebenfalls eine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$ ist.*

Beweis. Gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ so überträgt sich die η_α-Eigenschaft von $\mathcal{A} = (A, <)$ auf $\mathcal{B} = (B, <)$. Um dies zu beweisen, betrachten wir einen Ordnungsisomorphismus $f\colon A \to B$ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und $X, Y \subseteq B$ mit $|X|, |Y| < \aleph_\alpha$ und $X < Y$. Dann gilt für $X' = f^{-1}(X) \subseteq A$ und $Y' = f^{-1}(Y) \subseteq A$ ebenfalls $|X'|, |Y'| < \aleph_\alpha$ und $X' < Y'$. Da $\mathcal{A}$ eine η_α-Ordnung ist, gibt es deshalb ein $a \in A$ mit $X' < a < Y'$. Es folgt $X < f(a) < Y$. Damit ist auch $\mathcal{B}$ eine η_α-Ordnung. Außerdem gilt dann $|B| = |A| = \aleph_\alpha$. Die Umkehrung folgt direkt aus Theorem 5.3.2. □

Seien nun $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\eta_{\alpha+1}$-Ordnungen der Kardinalität $2^{\aleph_\alpha}$. Diese existieren nach Theorem 5.2.6. Gilt $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, so haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beide Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$ und sind somit nach Theorem 5.3.2 ordnungsisomorph. Gillman stellt in [6, S. 81] die Frage, ob man die Ordnungsisomorphie von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ auch ohne die Verwendung von $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ beweisen kann. Die Antwort liefert er selbst:

5.3.4 Theorem (Gillman)**.** *Gilt $2^{\aleph_\alpha} \neq \aleph_{\alpha+1}$ so gibt es zwei $\eta_{\alpha+1}$-Ordnungen, die nicht ordnungsisomorph sind.*

Beweis. Nachzulesen in [6, S. 82]. □

Wir können letztlich Theorem 5.3.2 und Theorem 5.3.4 zusammenfassen, um die folgende Äquivalenz zu erhalten:

5.3.5 Korollar. *Zwei $\eta_{\alpha+1}$-Ordnungen der Kardinalität $2^{\aleph_\alpha}$ sind genau dann isomorph, wenn $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ gilt.*

Beweis. Diese Äquivalenz folgt direkt aus Theorem 5.3.2 und Theorem 5.3.4. □

6 Algebraische Grundlagen

In Abschnitt 7 werden wir die Isomorphie von reell abgeschlossenen Körpern untersuchen. Dafür beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt zunächst mit den dafür benötigten Definitionen und Resultaten zu Körpererweiterungen und angeordneten Körpern.

6.1 Körpererweiterungen

Dieser Abschnitt orientiert sich hauptsächlich an [2, Kapitel 2 und 3].

6.1.1 Definition. Seien R, S kommutative Ringe mit 1. Unter einem **Ringhomomorphismus** von R nach S verstehen wir eine Abbildung $\varphi\colon R \to S$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$ für alle $r_1, r_2 \in R$,

(2) $\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot \varphi(r_2)$ für alle $r_1, r_2 \in R$,

(3) $\varphi(1) = 1$.

Existiert ein **Ringisomorphismus**, d.h. ein bijektiver Ringhomomorphismus, von R nach S dann heißen die Ringe R und S **isomorph**. Wir schreiben in diesem Fall $R \cong S$.

6.1.2 Lemma. *Ist K ein Körper der Charakteristik 0, so hat K bis auf eindeutige Isomorphie $\mathbb{Q}$ als Primkörper. Insbesondere gilt $|K| \geq \aleph_0$.*

Beweis. Nachzulesen in [2, Kapitel 3.1, Satz 2]. □

6.1.3 Bemerkung.

a) Aufgrund von Lemma 6.1.2 identifizieren wir den Primkörper eines Körpers der Charakterisitik 0 stets mit $\mathbb{Q}$.

b) Seien K und L zwei Körper der Charakteristik 0 und $\varphi\colon K \to L$ ein Ringhomomorphismus. Dann folgt aus $\varphi(1) = 1$ und dem Beweis von Lemma 6.1.2, dass $\varphi(q) = q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Wir werden häufig die Kardinalität von algebraischen Körpererweiterungen bestimmen müssen. Hierbei helfen uns die nächsten beiden wohlbekannten Resultate:

6.1.4 Lemma. *Ist K ein Körper der Charakteristik 0, so hat der Polynomring $K[X]$ dieselbe Kardinalität wie K.*

Beweis. Wir betrachten zunächst für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $K[X]_n := \{p \in K[X] \mid \deg(p) \leq n\} \subseteq K[X]$. Da die Koeffizientenabbildung

$$K[X]_n \to K^{n+1}, \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto (a_0, \dots, a_n)$$

bijektiv ist und nach Lemma 6.1.2 $|K| \geq \aleph_0$ gilt, folgt mit Lemma 4.2.7

$$|K[X]_n| = \left|K^{n+1}\right| = |K|^{n+1} = |K|.$$

Nun gilt

$$K[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K[X]_n.$$

Damit gilt nach Lemma 4.2.13 schließlich

$$|K[X]| = \max\{\aleph_0, |K|\} = |K|.$$

□

6.1.5 Lemma. *Ist $L \mid K$ eine algebraische Körpererweiterung der Charakteristik 0, so haben K und L dieselbe Kardinalität.*

Beweis. Aus $K \subseteq L$ folgt zunächst $|K| \leq |L|$. Umgekehrt ist jedes Element $a \in L$ eine Nullstelle eines Polynoms $0 \neq p \in K[X]$. Also gilt

$$L \subseteq \bigcup_{0 \neq p \in K[X]} \{a \in L \mid p(a) = 0\}.$$

Die Nullstellenmenge eines Polynoms ist stets endlich und nach Lemma 6.1.4 gilt $|K[X]| = |K|$. Somit folgt mit Lemma 4.2.13, dass

$$|L| \leq \left| \bigcup_{0 \neq p \in K[X]} \{a \in L \mid p(a) = 0\} \right| \leq |K|.$$

Wir erhalten $|K| = |L|$, wie gewünscht. □

Um eine beliebige, nicht zwangsweise algebraische, Körpererweiterung zu beschreiben, wird uns das Konzept von Transzendenzbasen weiterhelfen. Darauf werden wir im folgenden Abschnitt näher eingehen.

6.2 Transzendenzbasen und Transzendenzgrad

Im Folgenden orientieren wir uns an [2, Kapitel 7.1].

Sei $L \mid K$ stets eine Körpererweiterung.

6.2.1 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Elemente $a_1, \ldots, a_n \in L$ heißen **algebraisch unabhängig** über K, falls $p(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ für alle nichttrivialen Polynome $p \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$. Eine beliebige Menge $A \subseteq L$ heißt algebraisch unabhängig über K, wenn jede endliche Teilmenge von A algebraisch unabhängig über K ist.

6.2.2 Bemerkung.

a) Ist eine Menge algebraisch unabhängig über K, so ist sie offensichtlich auch linear unabhängig über K. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht, denn bekanntlich sind die Elemente $1, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Andererseits gilt $(\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 = 0$, d.h. das Paar $(1, \sqrt{2})$ ist eine Nullstelle des Polynoms $p = Y^2 - 2X \in \mathbb{Q}[X, Y] \setminus \{0\}$, was die algebraische Abhängigkeit von 1 und $\sqrt{2}$ zeigt.

b) Offensichtlich ist ein Element $a \in L$ genau dann algebraisch unabhängig über K, wenn a transzendent über K ist.

c) Jede Teilmenge einer über K algebraisch unabhängigen Menge ist ebenfalls algebraisch unabhängig über K.

6.2.3 Bemerkung. Sei $A \subseteq L$ algebraisch unabhängig über K.
Mit $K(A)$ bezeichnen wir den kleinsten Teilkörper von L, der $K \cup A$ enthält. Ist $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ endlich, so ist $K(a_1, \ldots, a_n)$ das Bild des Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi \colon K(X_1, \ldots, X_n) \to L,\ \frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{q}(a_1, \ldots, a_n).$$

Dieser ist wohldefiniert, denn aufgrund der algebraischen Unabhängigkeit von A gilt $q(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ für jedes $q \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$. Ist A unendlich, so gilt

$$K(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a_1, \ldots, a_n \in A} K(a_1, \ldots, a_n).$$

Die Beweise hierfür können in [2, S. 93] nachgelesen werden.

6.2.4 Definition. Eine Menge $T \subseteq L$ heißt **Transzendenzbasis** von $L \mid K$, falls T algebraisch unabhängig über K ist und $L \mid K(T)$ eine algebraische Erweiterung ist.

6.2.5 Satz. *Eine Menge $T \subseteq L$ ist genau dann eine Transzendenzbasis von $L \mid K$, wenn T eine maximale über K algebraisch unabhängige Teilmenge von L ist. Insbesondere besitzt jede Körpererweiterung eine Transzendenzbasis.*

Beweis. Nachzulesen in [2, Kapitel 7.1, Satz 3]. $\square$

Mit dieser Äquivalenz können wir ein weiteres nützliches Resultat beweisen:

6.2.6 Lemma. *Ist $A \subseteq L$ algebraisch unabhängig über K und ist $a \in A$ beliebig, so ist a transzendent über $K(A \setminus \{a\})$.*

Beweis. Sei $A \subseteq L$ algebraisch unabhängig über K. Angenommen, das Element $a \in A$ ist algebraisch über $K(A \setminus \{a\})$. Dann ist die Erweiterung $K(A) \mid K(A \setminus \{a\})$ algebraisch. Insbesondere ist die Menge $A \setminus \{a\}$ eine Transzendenzbasis von $K(A) \mid K$. Nach Satz 6.2.5 ist $A \setminus \{a\}$ damit eine maximal algebraisch unabhängige Teilmenge von $K(A)$. Das widerspricht jedoch der algebraischen Unabhängigkeit von $A \supsetneq A \setminus \{a\}$. $\square$

Es ist bekannt, dass alle (linearen) Basen eines Vektorraums über einem festen Körper dieselbe Kardinalität haben. Wir sehen nun, dass dieser Zusammenhang auch für Transzendenzbasen gilt.

6.2.7 Satz. *Alle Transzendenzbasen einer Körpererweiterung haben dieselbe Kardinalität.*

Beweis. Nachzulesen in [2, Kapitel 7.1, Theorem 5]. $\square$

6.2.8 Definition. Der **Transzendenzgrad** von $L \mid K$ ist die Kardinalität einer Transzendenzbasis von $L \mid K$. Wir schreiben dafür $\operatorname{trdeg}_K L$.

Nach Satz 6.2.5 und Satz 6.2.7 ist der Transzendenzgrad einer Körpererweiterung wohldefiniert.

6.2.9 Bemerkung. Ist $K = \mathbb{Q}$, so schreiben wir $\operatorname{trdeg} L$ statt $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}} L$. Seien nun L und L' zwei Körper der Charakteristik 0 und $\varphi\colon L \to L'$ ein Ringisomorphismus. Dann wird $\mathbb{Q}$ nach Bemerkung 6.1.3 von φ fixiert. Damit folgt aus [2, Kapitel 7.1, Korollar 8], dass $\operatorname{trdeg} L = \operatorname{trdeg} L'$.

Die Kardinalität von algebraischen Körpererweiterungen der Charakteristik 0 können wir bereits bestimmen. Im Folgenden wollen wir die Kardinalität einer allgemeinen Körpererweiterung der Charakteristik 0 berechnen:

6.2.10 Lemma. *Gelte* $\operatorname{char}(K) = 0$ *und sei* $A \subseteq L$ *algebraisch unabhängig über* K*. Dann gilt*
$$|K(A)| = \max\{|K|, |A|\}.$$

Beweis. Sei zunächst $A = \{a\}$. Dann gilt

$$K(a) = \bigcup_{p \in K[X]} \bigcup_{q \in K[X] \setminus \{0\}} \left\{ \frac{p}{q}(a) \right\}.$$

Aus Lemma 6.1.4 und Lemma 4.2.13 erhalten wir also, dass $|K(a)| = |K|$. Man kann auf die gleiche Weise induktiv zeigen, dass stets $|K(A)| = |K|$, falls A endlich ist. Ist A unendlich, so haben wir nach Bemerkung 6.2.3

$$K(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a_1, \dots, a_n \in A} K(a_1, \dots, a_n).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|A^n| = |A|$ nach Lemma 4.2.7 und aus Lemma 6.1.4 folgt zudem
$$|K(a_1, \dots, a_{n-1})[X]| = |K(a_1, \dots, a_{n-1})| = |K|.$$
Daher erhalten wir mit Lemma 4.2.13, dass

$$|K(A)| = \max\{|K|, |A|, \aleph_0\}.$$

Wir erhalten schließlich $|K(A)| = \max\{|K|, |A|\}$, da A und K unendlich sind. □

6.2.11 Bemerkung. Sei wieder K ein Körper der Charakteristik 0. Dann hat K nach Lemma 6.1.2 bis auf Isomorphie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Primkörper. Sei weiter T eine Transzendenzbasis von $K \mid \mathbb{Q}$. Dann ist die Erweiterung $K \mid \mathbb{Q}(T)$ algebraisch und daher erhalten wir nach Lemma 6.1.5 und Lemma 6.2.10

$$|K| = |\mathbb{Q}(T)| = \max\{|\mathbb{Q}|, |T|\} = \max\{\aleph_0, |T|\}.$$

Ist K überabzählbar, so folgt damit $|K| = |T| = \operatorname{trdeg} K$. Also stimmen die Kardinalität von K und der Transzendenzgrad von $K \mid \mathbb{Q}$ überein, falls K überabzählbar ist.

6.3 Angeordnete Körper

Bisher haben wir Mengen nur mit einer linearen Anordnung ausgestattet. Nun wollen wir den Mengen durch Verknüpfungen noch mehr Struktur verleihen. Dabei verlangen wir, dass sich diese Verknüpfungen und die Anordnung „vertragen". Dies führt uns zum Konzept einer angeordneten abelschen Gruppe und eines angeordneten Körpers. Wir orientieren uns im Folgenden hauptsächlich an [10].

6.3.1 Definition. Wir nennen $(G, +, 0, <)$ eine **angeordnete abelsche Gruppe**, falls $(G, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist und $(G, <)$ eine lineare Ordnung so, dass

$$a \leq b \to a + c \leq b + c$$

für alle $a, b, c \in G$ gilt. Meist schreiben wir nur $(G, <)$ statt $(G, +, 0, <)$.

6.3.2 Definition.

1. Wir nennen $(K, +, \cdot, 0, 1, <)$ einen **angeordneten Körper**, falls das Tupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ einen Körper bildet und $(K, +, 0, <)$ eine angeordnete Gruppe so, dass

   $$(0 \leq a \wedge 0 \leq b) \to 0 \leq a \cdot b$$

   für alle $a, b \in K$ gilt. Meist schreiben wir nur $(K, <)$ statt $(K, +, \cdot, 0, 1, <)$.

2. Ein Körper K heißt **reell**, falls eine zweistellige Relation $<$ auf K existiert, die $(K, <)$ zu einem angeordneten Körper macht.

6.3.3 Beispiel. Sowohl $(\mathbb{Q}, <)$ als auch $(\mathbb{R}, <)$ bilden mit der üblichen Addition, Multiplikation und Anordnung einen angeordneten Körper (siehe Anhang A).

6.3.4 Bemerkung. Nach [16, Folgerungen 1.3] hat jeder reelle Körper K die Charakterisitik 0 und damit nach Lemma 6.1.2 bis auf Isomorphie (von Ringen) $\mathbb{Q}$ als Primkörper. Fixiert man eine Anordnung auf K, so ist der eindeutig bestimmte Ringisomorphismus von $\mathbb{Q}$ in den Primkörper von K sogar ordnungserhaltend.

6.3.5 Definition. Zwei angeordnete Körper $(K, <)$ und $(L, <')$ nennen wir **isomorph** und schreiben $(K, <) \cong (L, <')$, wenn es einen ordnungserhaltenden Ringisomorphismus $\varphi\colon K \to L$ gibt.

6.3.6 Bemerkung.

a) Meist schreiben wir zur Vereinfachung auch für $<'$ nur $<$. Aus dem Kontext wird dann klar, in welchem Körper wir uns befinden.

b) Seien $(K, <)$ und $(L, <)$ zwei angeordnete Körper. Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon K \to L$ ist genau dann ordnungserhaltend, wenn für alle $a \in K$ gilt:

$$a > 0 \Leftrightarrow \varphi(a) > 0. \tag{$*$}$$

Um diese Äquivalenz zu beweisen, nehmen wir zunächst $(*)$ an. Seien weiter $a < b$ Elemente aus K. Dann folgt aus der Definition eines angeordneten Körpers, dass $b - a > 0$ in K und aus $(*)$, dass $\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) > 0$ in L. Dies impliziert wiederum $\varphi(a) < \varphi(b)$ in L. Die Umkehrung ist trivial.

Wir möchten an dieser Stelle betonen, dass wir nun für angeordnete Strukturen zwei zwei verschiedene Isomorphiebegriffe verwenden. Zum einen die Ordnungsisomorphie, die nur eine ordnungserhaltende *Bijektion* verlangt, und zum anderen die Isomorphie von angeordneten Körpern, die einen ordnungserhaltenden *Ringisomorphismus* verlangt. Wir werden in Abschnitt 7.2 sehen, dass diese Begriffe streng getrennt werden müssen. Daher verwenden wir in dieser Arbeit für Ordnungsisomorphismen stets lateinische Kleinbuchstaben wie f, g, h und für ordnungserhaltende Ringisomorphismen stets griechische Kleinbuchstaben wie φ, ψ, σ.

Wir unterteilen die Klasse der angeordneten Körper mithilfe der folgenden Definition in zwei Teilklassen:

6.3.7 Definition. Ein angeordneter Körper $(K, <)$ heißt **archimedisch**, falls $\mathbb{N}$ kofinal in $(K, <)$ liegt, d.h. wenn

$$\forall\, a \in K\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ a < n. \tag{$*$}$$

Ansonsten nennen wir $(K, <)$ **nicht-archimedisch**.

6.3.8 Bemerkung.

a) Die folgenden Bedingungen sind in einem angeordneten Körper $(K, <)$ äquivalent zu der Bedingung $(*)$:

- Es gibt kein infinitesimales positives Element in K, d.h. es gibt kein $a \in K$ mit $0 < a < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
  Existiert nämlich solch ein a, so gilt $\mathbb{N} < a^{-1}$ und damit ist $(K, <)$ nicht-archimedisch. Die Umkehrung zeigt man analog.
- Für alle $a, b \in K^\times$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|a| < n\,|b|$ und $|b| < n\,|a|$, wobei $|x| := \max\{x, -x\}$ für alle $x \in K$.
  Sind nämlich $a, b \in K^\times$ beliebig, so gilt $\frac{|a|}{|b|}, \frac{|b|}{|a|} \in K$ und wegen ($*$) gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{|a|}{|b|} < n$ und $\frac{|b|}{|a|} < m$. Für $k = \max\{m, n\} \in \mathbb{N}$ gilt also $|a| < n\,|b|$ und $|b| < n\,|a|$, wie gewünscht. Umgekehrt gilt $0 < 1$ und für $a \in K^\times$ und $b = 1 \in K^\times$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \leq |a| < n\,|1| = n$.

b) Da ordnungserhaltende Ringisomorphismen die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, <)$ fixieren (siehe Bemerkung 6.3.4), folgt aus Bemerkung 4.2.11, dass zwei isomorphe angeordnete Körper entweder beide archimedisch oder beide nicht-archimedisch sind.

c) Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, <)$ liegen dicht in jedem archimedisch angeordneten Körper. Ein Beweis hierfür findet sich in [16, Lemma 1.7].

In Anhang A kann nachgelesen werden, dass $(\mathbb{R}, <)$ archimedisch ist. Damit ist offensichtlich auch jeder Teilkörper von $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet. Tatsächlich gilt in gewisser Weise auch die Umkehrung dieser Aussage, wie der Satz von Hölder[2] zeigt:

6.3.9 Satz (Hölder)**.** *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es einen eindeutigen ordnungserhaltenden Ringhomomorphismus von $(K, <)$ nach $(\mathbb{R}, <)$.*

Beweis. Im Beweis von [10, Vorlesung 2, Theorem 4.2] wird ein ordnungserhaltender Ringhomomorphismus $\varphi\colon K \to \mathbb{R}$ konstruiert. Angenommen, es gibt zwei ordnungserhaltende Ringhomomorphismen $\varphi_1, \varphi_2\colon K \to \mathbb{R}$ und ein $a \in K$ mit $\varphi_1(a) \neq \varphi_2(a)$. Dann nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\varphi_1(a) < \varphi_2(a)$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $(\mathbb{R}, <)$ liegt, existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $\varphi_1(a) < q < \varphi_2(a)$. Nach Bemerkung 6.1.3 wird $\mathbb{Q}$ von φ_1 und φ_2 fixiert, also gilt $a < \varphi_1^{-1}(q) = q = \varphi_2^{-1}(q) < a$ und damit $a < a$, ein Widerspruch. □

Aufgrund von Satz 6.3.9 identifizieren wir jeden archimedisch angeordneten Körper $(K, <)$ mit dem eindeutig bestimmten Unterkörper von $(\mathbb{R}, <)$, der isomorph zu $(K, <)$ ist.

[2] Otto Hölder (1859–1937), deutscher Mathematiker

6.3.10 Korollar. *Sind $(K, <)$ und $(L, <)$ zwei isomorphe archimedisch angeordnete Körper, so gilt bereits $K = L$.*

Beweis. Gilt $K \neq L$, so gibt es einen ordnungserhaltenden Ringisomorphismus $\mathrm{id} \neq \varphi \colon K \to L$. Dann sind $\mathrm{id} \colon K \to \mathbb{R}$ und $\varphi \colon K \to \mathbb{R}$ zwei verschiedene ordnungserhaltende Ringhomomorphismen von $(K, <)$ nach $(\mathbb{R}, <)$, was Satz 6.3.9 widerspricht. Somit folgt $K = L$. □

6.4 Reell abgeschlossene Körper

Wir betrachten nun eine Teilklasse der angeordneten Körper, und zwar die reell abgeschlossenen. In Abschnitt 7 werden wir die Isomorphie reell abgeschlossener Körper untersuchen. Daher führen wir zunächst einige Grundlagen ein. Dabei orientieren wir uns hauptsächlich an [10].

6.4.1 Definition. Ein Körper K heißt **reell abgeschlossen**, falls K reell ist und keine echte reelle algebraische Körpererweiterung von K existiert.

Laut dem folgenden Resultat ist die Anordnung eines reell abgeschlossenen Körpers eindeutig bestimmt:

6.4.2 Lemma. *Ist R ein reell abgeschlossener Körper, so gibt es genau eine zweistellige Relation $<$, die $(R, <)$ zu einem angeordneten Körper macht. Diese ist für $a, b \in R$ wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} a < b &:\Leftrightarrow 0 < b - a, \ \textit{wobei} \\ 0 < a &:\Leftrightarrow \exists\, b \in R^{\times}\ a = b^2. \end{aligned}$$

Beweis. Nachzulesen in [10, Script 5, Corollary 1.2]. □

6.4.3 Bemerkung. Ringisomorphismen zwischen reell abgeschlossenen Körpern sind stets ordnungserhaltend, da Quadrate auf Quadrate abgebildet werden. Insbesondere sind zwei reell abgeschlossene Körper genau dann isomorph als angeordnete Körper, wenn sie isomorph als Ringe sind.

Unter gewissen Voraussetzungen ist die Vereinigung von reell abgeschlossenen Körpern wieder reell abgeschlossen, wie das folgende Resultat zeigt:

6.4.4 Lemma. *Seien R ein reell abgeschlossener Körper und $(I, <)$ eine lineare Ordnung. Für jedes $i \in I$ sei $R_i \subseteq R$ ein reell abgeschlossener Körper und es gelte*

$$R_i \subseteq R_j \ \textit{für alle}\ i, j \in I \ \textit{mit}\ i < j. \qquad (*)$$

Dann ist auch $R' = \bigcup_{i \in I} R_i \subseteq R$ *reell abgeschlossen.*

Beweis. Als Vereinigung von aufsteigenden Körpern ist auch R' ein Körper. Sei $<$ die eindeutige Anordnung von R aus Lemma 6.4.2. Wir wenden [10, Script 5, Corollary 1.4] an, um zu zeigen, dass der angeordnete Körper $(R', <)$ reell abgeschlossen ist. Sei dafür zunächst $a \in R'$ mit $a > 0$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $a \in R_i$. Da R_i reell abgeschlossen ist, existiert ein $b \in R_i \subseteq R'$ mit $b^2 = a$. Sei nun

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in R'[X]$$

ein Polynom ungeraden Grades. Für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$ existiert dann ein $i_k \in I$ mit $a_k \in R_{i_k}$. Sei $j = \max\{i_0, \dots, i_n\} \in I$. Wegen (∗) gilt dann $a_k \in R_j$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$. Folglich gibt es eine Nullstelle $c \in R_j \subseteq R'$ von p, weil R_j reell abgeschlossen ist. Damit ist nach [10, Script 5, Corollary 1.4] auch R' reell abgeschlossen. □

Haben wir zwei solche Vereinigungen von aufsteigenden reell abgeschlossenen Körpern, so liefert das nächste Resultat eine hinreichende Bedingung für deren Isomorphie:

6.4.5 Lemma. *Seien R, S reell abgeschlossene Körper und $(I, <)$ eine lineare Ordnung. Für jedes $i \in I$ seien R_i, S_i reell abgeschlossene Körper mit*

$$R_i \subseteq R_j, S_i \subseteq S_j \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } i < j \tag{$*$}$$

und $\varphi_i \colon R_i \to S_i$ ein Ringisomorphismus mit

$$\varphi_j|_{R_i} = \varphi_i \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } i < j. \tag{$**$}$$

Dann ist

$$\varphi = \bigcup_{i \in I} \varphi_i \colon R' \to S'$$

ein wohldefinierter Ringisomorphismus, wobei

$$R' = \bigcup_{i \in I} R_i \text{ und } S' = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Beweis. Es folgt aus (∗∗), dass φ wohldefiniert ist. Seien $a, b \in R'$ mit $a < b$. Dann gibt es wegen (∗) ein $i \in I$ mit $a, b \in R_i$. Da φ_i als Ringisomorphismus zwischen reell abgeschlossenen Körpern automatisch ordnungserhaltend ist, folgt $\varphi(a) = \varphi_i(a) < \varphi_i(b) = \varphi(b)$. Damit ist φ insbesondere injektiv. Dass die Abbildung φ außerdem ein surjektiver Ringhomomorphismus ist, kann ähnlich bewiesen werden. □

Es ist bekannt, dass jeder Körper einen (bis auf Isomorphie) eindeutigen algebraischen Abschluss besitzt. Entsprechend definieren wir nun für angeordnete Körper einen reellen Abschluss und untersuchen dessen Existenz und Eindeutigkeit.

6.4.6 Definition. Sei $(K, <)$ ein angeordneter Körper. Ein Körper R heißt **reeller Abschluss** von $(K, <)$, wenn

(1) R reell abgeschlossen ist,

(2) $R \,|\, K$ eine algebraische Erweiterung ist,

(3) $(K, <) \subseteq (R, <')$ eine Unterordnung von $(R, <')$ ist, wobei $<'$ die eindeutige Anordnung von R aus Lemma 6.4.2 bezeichnet.

Nach [10, Script 8, Theorem 1.2] hat jeder angeordnete Körper $(K, <)$ einen reellen Abschluss und nach [10, Script 8, Corollary 2.3] ist dieser bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Daher sprechen wir auch von *dem* reellen Abschluss von $(K, <)$.

6.4.7 Lemma. *Seien R ein reell abgeschlossener Körper und $(K, <)$ ein angeordneter Körper mit $(K, <) \subseteq (R, <')$, wobei $<'$ die eindeutige Anordnung von R aus Lemma 6.4.2 bezeichnet. Dann ist der **relative algebraische Abschluss** von K in R*

$$K^{\mathrm{RC}} := \{a \in R \mid a \text{ ist algebraisch über } K\}$$

ein reeller Abschluss von $(K, <)$.

Beweis. Nachzulesen in [10, Script 8, Corollary 2.5]. □

Exkurs: Hahn- und Puiseux-Reihen

Wir haben bereits gesehen, dass die archimedisch angeordneten Körper bis auf Isomorphie mit den Unterkörpern von $\mathbb{R}$ übereinstimmen (vgl. Satz 6.3.9). Ziel dieses Exkurses ist es, Beispiele von nicht-archimedisch angeordneten Körpern anzugeben. Dabei orientieren wir uns hauptsächlich an [11].

Seien stets $(k, <)$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ (bzw. ein archimedisch angeordneter Körper) und $(G, <)$ eine angeordnete abelsche Gruppe.

6.4.8 Definition. Für eine beliebige Abbildung $s\colon G \to k$ definieren wir zunächst die Unterordnung

$$\operatorname{supp}(s) := \{g \in G \mid s(g) \neq 0\} \subseteq (G, <).$$

Damit definieren wir die Menge der **Hahn-Reihen**[3] (mit Koeffizienten in k und Exponenten in G) durch

$$k((G)) := \{s\colon G \to k \mid \operatorname{supp}(s) \text{ ist wohlgeordnet}\} \subseteq k^G.$$

Da $\operatorname{supp}(s)$ für $s \in k((G))$ wohlgeordnet ist, ist

$$v_{\min}\colon k((G)) \setminus \{0\} \to G,\ s \mapsto \min \operatorname{supp}(s)$$

eine wohldefinierte Abbildung. Wir setzen

$$0\colon G \to k,\ g \mapsto 0 \text{ und } 1\colon G \to k,\ g \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } g = 0 \\ 0 & \text{für } g \neq 0. \end{cases}$$

Statt $s\colon G \to k$ schreiben wir meist

$$s = \sum_{g \in G} s_g t^g = \sum_{g \in \operatorname{supp}(s)} s_g t^g, \text{ wobei } s_g = s(g).$$

Seien nun $s = \sum\limits_{g \in G} s_g t^g$ und $r = \sum\limits_{g \in G} r_g t^g$ beliebige Elemente von $k((G))$. Wir definieren auf $k((G))$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$s + r := \sum_{g \in G} (s_g + r_g) t^g,$$

$$s \cdot r := \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} s_h r_{g-h} \right) t^g.$$

Zudem definieren wir eine Anordnung $<_{\text{lex}}$ auf $k((G))$ durch

$$s < r \;:\Leftrightarrow\; s(v_{\min}(r - s)) < r(v_{\min}(r - s))$$

für $s, r \in k((G))$ mit $s \neq r$. D.h. an der ersten Stelle, an der sich s und r unterscheiden, ist der Wert von s kleiner als der von r. Zur Vereinfachung schreiben wir oft $<$ statt $<_{\text{lex}}$.

[3] Hans Hahn (1879–1934), österreichischer Mathematiker

6.4.9 Satz (Hahn). *Das Tupel* $(k((G)), +, \cdot, 0, 1, <_{\text{lex}})$ *definiert einen angeordneten Körper.*

Beweis. In [11, Script 11] wird bewiesen, dass $(k((G)), +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist. Dass sich Arithmetik und Anordnung vertragen, ist einfach nachzuweisen. □

6.4.10 Bemerkung.

a) Die Abbildung
$$\varphi\colon k \to k((G)),\ a \mapsto at^0$$
definiert offensichtlich einen ordnungserhaltenden Ringhomomorphismus. Daher identifizieren wir $(k, <)$ mit $(\varphi(k), <_{\text{lex}})$. Insbesondere identifizieren wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Menge $\{nt^0 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) Falls $G \neq \{0\}$, so ist $(k((G)), <_{\text{lex}})$ tatsächlich ein nicht-archimedisch angeordneter Körper. In diesem Fall existiert nämlich ein $g \in G$ mit $g < 0$ und damit erhalten wir $\mathbb{N} < t^g$, wobei t^g die Abbildung
$$G \to k,\ h \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } h = g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
in $k((G))$ bezeichnet.

c) Aus Gründen der Vollständigkeit wollen wir darauf hinweisen, dass die Abbildung $v_{\min}$ eine Bewertung auf $k((G))$ definiert, d.h. es gelten für alle $s, r \in k((G)) \setminus \{0\}$:

- $v_{\min}(s \cdot r) = v_{\min}(s) + v_{\min}(r)$ und
- $v_{\min}(s + r) \geq \min\{v_{\min}(s), v_{\min}(r)\}$,

was leicht nachgewiesen werden kann.

Da wir später angeordnete Körper desselben Ordnungstyps untersuchen werden, brauchen wir eine hinreichende Bedingung für die Ordnungsisomorphie von zwei Hahn-Reihenkörpern:

6.4.11 Lemma. *Seien* k, l *zwei Teilkörper von* $\mathbb{R}$ *und* $(G, <), (H, <)$ *zwei angeordnete abelsche Gruppen. Gibt es Ordnungsisomorphismen* $f_1\colon k \to l$ *mit* $f_1(0) = 0$ *und* $f_2\colon G \to H$ *mit* $f_2(0) = 0$*, so sind auch* $(k((G)), <_{\text{lex}})$ *und* $(l((H)), <_{\text{lex}})$ *zueinander ordnungsisomorph.*

Beweis. Wir definieren eine Abbildung $F\colon k((G)) \to l((H))$ durch

$$s \mapsto s^* = f_1 \circ s \circ f_2^{-1},$$

d.h. es gilt

$$f\left(\sum_{g\in G} s(g)t^g\right) = \sum_{h\in H}(f_1 \circ s \circ f_2^{-1})(h)t^h.$$

Sei zunächst $s = \sum\limits_{g\in G} s(g)t^g \in k((G))$ beliebig.
Da $\mathrm{supp}(s)$ wohlgeordnet und f_2 ordnungserhaltend ist, ist aufgrund von Lemma 2.4.8 und der Gleichheit

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}(s^*) &= \{h \in H \mid s^*(h) \neq 0\} \\
&= \{h \in H \mid f_1(s(f_2^{-1}(h))) \neq 0\} \\
&= \{h \in H \mid s(f_2^{-1}(h)) \neq 0\} && (f_1 \text{ injektiv und } f_1(0) = 0) \\
&= \{h \in H \mid f_2^{-1}(h) \in \mathrm{supp}(s)\} \\
&= f_2(\mathrm{supp}(s)) && (f_2 \text{ injektiv und } f_2(0) = 0).
\end{aligned}$$

auch $\mathrm{supp}(s^*)$ wohlgeordnet, was die Wohldefiniertheit von F zeigt.
Sei nun $r = \sum\limits_{g\in G} r(g)t^g \in k((G))$ beliebig mit $s < r$. Sei weiter $g_0 = v_{\min}(r-s)$.
Dann gilt $s(g) = r(g) = 0$ für alle $g \in G$ mit $g < g_0$ und wegen $s < r$ auch $s(g_0) < r(g_0)$. Sei nun $h_0 = f_2(g_0)$ und $h \in H$ beliebig mit $h < h_0$. Dann gilt auch $g < g_0$ für $g = f_2^{-1}(h)$, da f_2 ein Ordnungsisomorphismus ist. Wir erhalten

$$s^*(h) = s^*(f_2(g)) = f_1(s(g)) = f_1(r(g)) = r^*(f_2(g)) = r^*(h)$$

und, da f_1 ordnungserhaltend ist, auch

$$s^*(h_0) = s^*(f_2(g_0)) = f_1(s(g_0)) < f_1(r(g_0)) = r * (f_2(g_0)) = r^*(h_0).$$

Das bedeutet gerade $s^* < r^*$. Somit ist F ordnungserhaltend. Sei schließlich $u \in l((H))$ beliebig. Dann kann man wie oben zeigen, dass $s = f_1^{-1} \circ u \circ f_2$ ein wohldefiniertes Element in $k((G))$ ist. Außerdem gilt offensichtlich $s^* = u$, was die Surjektivität von F zeigt. Folglich ist F ein Ordnungsisomorphismus. □

Außerdem brauchen wir ein Kriterium dafür, wann ein Hahn-Reihenkörper reell abgeschlossen ist:

6.4.12 Satz. *Der angeordnete Körper* $(k((G)), <_{\text{lex}})$ *ist genau dann reell abgeschlossen, wenn k reell abgeschlossen ist und G eine divisible Gruppe ist, d.h.* $\forall\, n \in \mathbb{N}_{>0}\, \forall\, g \in G\, \exists\, h \in G\ \underbrace{h + \cdots + h}_{n\text{-mal}} = g$.

Beweis. Nachzulesen in [11, Script 14, Proposition 4.1] und [11, Script 15, Theorem 4.2]. □

Im Folgenden betrachten wir einige konkrete Beispiele von Hahn-Reihenkörpern, die auch in Abschnitt 7.2 eine zentrale Rolle spielen werden.

6.4.13 Beispiel. Wir betrachten den Körper der formalen Laurent-Reihen[4] $\mathbb{R}((t)) := \mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ und bezeichnen mit $\mathbb{R}((\mathbb{Z}_{>0}))$ die Menge der $s \in \mathbb{R}((\mathbb{Z}))$, für die $\operatorname{supp}(s) \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ gilt. Da für $s, r \in k((G)) \setminus \{0\}$ stets $v_{\min}(s + r) \geq \min\{v_{\min}(s), v_{\min}(r)\}$ gilt, ist $\mathbb{R}((\mathbb{Z}_{>0}))$ unter Addition abgeschlossen. Wir definieren

$$\exp\colon \mathbb{R}((\mathbb{Z}_{>0})) \to \mathbb{R}((\mathbb{Z})),\ s \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}.$$

Es folgt aus [11, Script 11, Lemma 1.6], dass exp eine wohldefinierte Abbildung ist. Zudem gilt für $s, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\exp(st + rt) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((r+s)t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k r^{n-k} \right) t^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k r^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) t^n \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rt)^n}{n!} \right) \\
&= \exp(st)\exp(rt).
\end{aligned}$$

Allgemeiner gilt sogar

$$\exp(s + r) = \exp(s)\exp(r)$$

für alle $s, r \in \mathbb{R}((\mathbb{Z}_{>0}))$, was ähnlich nachgewiesen werden kann. Wir bemerken zudem, dass exp ordnungserhaltend und somit injektiv ist.

[4] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854), französischer Mathematiker

Später werden wir den Transzendenzgrad von $\mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ bestimmen. Hierfür haben wir folgendes festgestellt:

6.4.14 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Sind $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, so sind $\exp(a_1 t), \ldots, \exp(a_k t) \in \mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$. Wir schreiben

$$p = \sum_{\underline{n}} p_{\underline{n}} X^{\underline{n}},$$

wobei $p_{\underline{n}} = 0$ für fast alle $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ und $X^{\underline{n}} = X^{n_1} \cdot \ldots \cdot X^{n_k}$. Wir nehmen nun an, dass $p(\exp(a_1 t), \ldots, \exp(a_k t)) = 0$ gilt, und zeigen, dass daraus bereits $p = 0$ folgt. Nach Beispiel 6.4.13 haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= p(\exp(a_1 t), \ldots, \exp(a_k t)) \\ &= \sum_{\underline{n}} p_{\underline{n}} \exp(a_1 t)^{n_1} \cdot \ldots \cdot \exp(a_k t)^{n_k} \\ &= \sum_{\underline{n}} p_{\underline{n}} \exp(n_1 a_1 t) \cdot \ldots \cdot \exp(n_k a_k t) \\ &= \sum_{\underline{n}} p_{\underline{n}} \exp(n_1 a_1 t + \ldots + n_k a_k t) \\ &= \sum_{\underline{n}} p_{\underline{n}} \exp((n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k) t). \end{aligned} \tag{1}$$

Für $\underline{n}, \underline{m} \in \mathbb{N}^k$ mit $\underline{n} \neq \underline{m}$ gilt

$$n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k \neq m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k, \tag{2}$$

da wir $a_1, \ldots, a_k$ als linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ annehmen. Wir zeigen nun, dass für jedes $l \in \mathbb{N}$ und alle paarweise verschiedenen $r_1, \ldots, r_l \in \mathbb{R}$ die Elemente $\exp(r_1 t), \ldots, \exp(r_l t) \in \mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Dann erhalten wir mit (2) insbesondere, dass die Familie

$$\{\exp((n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k) t)\}_{\underline{n} \in \mathbb{N}^k}$$

linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist. Daraus folgt wegen (1) schließlich $p_{\underline{n}} = 0$ für alle $\underline{n} \in \mathbb{N}^k$. Dann gilt also $p = 0$, wie gewünscht. Wir betrachten daher nun beliebige $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \sum_{i=1}^{l} x_i \exp(r_i t). \tag{3}$$

Durch den Vergleich der Koeffizienten von t^j in (3) für $j = 0, \dots, l$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{l} x_i, \\
0 &= \sum_{i=1}^{l} x_i r_i, \\
0 &= \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{l} x_i r_i^2, \\
&\vdots \\
0 &= \frac{1}{(l-1)!} \sum_{i=1}^{l} x_i r_i^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Der Vektor $x = (x_1, \dots, x_l)^{\mathrm{T}}$ ist folglich eine Lösung der Gleichung $Ax = 0$, wobei

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_l \\
r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & \dots & r_l^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_1^{l-1} & r_2^{l-1} & r_3^{l-1} & \dots & r_l^{l-1}
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l}
$$

eine Vandermonde-Matrix[5] ist. Da $r_1, \dots, r_l$ paarweise verschieden sind, gilt

$$
\det(A) = \prod_{i \neq j} (r_i - r_j) \neq 0
$$

und damit $x = 0$. Die Elemente $\exp(r_1 t), \dots, \exp(t_l t)$ sind somit linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Hieraus folgt, wie oben beschrieben, die Behauptung. $\square$

6.4.15 Beispiel. Die rationalen Zahlen sind divisibel, denn für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt stets

$$
\frac{p}{q} = \underbrace{\frac{p}{nq} + \dots + \frac{p}{nq}}_{n\text{-mal}} \text{ und } \frac{p}{nq} \in \mathbb{Q}.
$$

[5] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), französischer Mathematiker

Damit folgt aus Satz 6.4.12, dass der Körper $\mathbb{R}((\mathbb{Q}))$ reell abgeschlossen ist. Nach [19, Kapitel V, Korollar 5.14] ist

$$\mathbb{R}\{\{t\}\} := \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} a_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_{>0}, a_{\frac{k}{n}} \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}((\mathbb{Q}))$$

der reelle Abschluss der formalen Laurent-Reihen $\mathbb{R}((\mathbb{Z}))$, also insbesondere ein reell abgeschlossener Körper. Diesen nennen wir den Körper der Puiseux-Reihen (mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$).

6.4.16 Definition. Wir definieren allgemein für einen Unterkörper k von $\mathbb{R}$ den Körper der **Puiseux-Reihen** (mit Koeffizienten in k) durch

$$k\{\{t\}\} := \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} a_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_{>0}, a_{\frac{k}{n}} \in k \right\} \subseteq k((\mathbb{Q})).$$

Wir statten $k\{\{t\}\}$ stets mit der von $k((\mathbb{Q}))$ induzierten Anordnung aus.

Ist k reell abgeschlossen, so ist es auch $k\{\{t\}\}$. Dies folgt wieder mit [19, Kapitel V, Korollar 5.14].

6.4.17 Beispiel. Wir statten $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit komponentenweiser Addition und der Anordnung aus Definition 2.3.5 aus, d.h.

$$(q_1, q_2) + (p_1, p_2) = (q_1 + p_1, q_2 + p_2),$$
$$(q_1, p_1) < (q_2, p_2) \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 < p_2 & \text{oder} \\ p_1 = p_2 \wedge q_1 < q_2 \end{cases}$$

für $(q_1, q_2), (p_1, p_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Dann bildet $(\mathbb{Q}, +, (0,0), <)$ eine angeordnete Gruppe, die aufgrund der Divisibilität von $\mathbb{Q}$ ebenfalls divisibel ist. Der Körper $\mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$ ist deshalb nach Satz 6.4.12 reell abgeschlossen. Via dem ordnungserhaltenden Ringhomomorphismus

$$\mathbb{R}((\mathbb{Q})) \to \mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})), \sum_{q \in \mathbb{Q}} a_q t^q \mapsto \sum_{q \in \mathbb{Z}} a_q t^{(q,0)}$$

verstehen wir $\mathbb{R}((\mathbb{Q}))$ als Unterkörper von $\mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$.

Wir haben also nun

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}((\mathbb{Z})) = \mathbb{R}((t)) \subseteq \mathbb{R}\{\{t\}\} \subseteq \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \subseteq \mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})).$$

Damit gilt

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}((\mathbb{Z}))| \leq |\mathbb{R}\{\{t\}\}| \leq |\mathbb{R}((\mathbb{Q}))| \leq |\mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))|. \qquad (*)$$

Aus Lemma 4.2.13 folgt, dass

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{(p, q)\}$$

eine abzählbare Menge ist. Wir erhalten daher wegen $\mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}$ und Lemma 4.2.7

$$|\mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}\right| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Dies zeigt mit (*), dass

$$|\mathbb{R}((\mathbb{Z}))| = |\mathbb{R}\{\{t\}\}| = |\mathbb{R}((\mathbb{Q}))| = |\mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))| = \mathfrak{c}.$$

7 Isomorphie reell abgeschlossener Körper

Wir haben bereits festgestellt, dass ein Ringisomorphismus zwischen reell abgeschlossenen Körpern notwendigerweise ordnungserhaltend ist (siehe Bemerkung 6.4.3). Insbesondere haben zwei isomorphe reell abgeschlossene Körper denselben Ordnungstyp. Im Folgenden untersuchen wir die Frage, unter welchen Bedingungen die Umkehrung dieser Aussage gilt. Wir betrachten also ordnungsisomorphe reell abgeschlossene Körper und untersuchen diese auf Isomorphie. Daher möchten wir an dieser Stelle noch einmal darauf hinweisen, dass dabei zwei verschiedene Isomorphiebegriffe verwendet werden. Seien R_1, R_2 zwei reell abgeschlossene Körper. Gibt es einen ordnungserhaltenden Ringisomorphismus $\varphi \colon R_1 \to R_2$, so heißen R_1 und R_2 isomorph. Existiert nur eine ordnungserhaltende Bijektion $f \colon R_1 \to R_2$, die nicht unbedingt ein Ringisomorphismus ist, so heißen R_1 und R_2 ordnungsisomorph.

7.1 Reell abgeschlossene η_α-Körper

In Abschnitt 5 haben wir das Konzept der Dichtheit von linearen Ordnungen verallgemeinert und kamen so zum Begriff einer „η_α-Ordnung“. Später haben wir in Abschnitt 6.3 lineare Ordnungen mit mehr Struktur ausgestattet, was uns zum Begriff eines „angeordneten Körpers“ führte. Wir bringen nun diese beiden Konzepte zusammen:

7.1.1 Definition. Sei $\alpha \in \mathbf{On}$. Einen angeordneten Körper $(K, <)$ nennen wir $\boldsymbol{\eta_\alpha}$**-Körper**, falls $(K, <)$ eine η_α-Ordnung ist.

Wir erhalten direkt das folgende Resultat:

7.1.2 Lemma. *Jeder angeordnete Körper ist ein η_0-Körper.*

Beweis. Nach Lemma 5.1.3 genügt es zu zeigen, dass jeder angeordnete Körper $(K, <)$ zugleich eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist. Tatsächlich gilt für $a, b \in K$ mit $a < b$, dass

$$a - 1 < a < \frac{a+b}{2} < b < b + 1.$$

□

Paul Erdős, Leonard Gillman und Melvin Henriksen zeigen in ihrem gemeinsamen Paper „An isomorphism theorem for real closed fields“ [4, Theorem 2.1], dass für jede Ordinalzahl $\alpha > 0$ alle reell abgeschlossenen η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ zueinander isomorph sind.[6]

Die Frage, ob es überhaupt reell abgeschlossene η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ gibt, kann im Fall $\alpha = 0$ leicht beantwortet werden. Der relative algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist nämlich aufgrund von Lemma 6.4.7 reell abgeschlossen und wegen Lemma 6.1.5 abzählbar. Außerdem ist $\mathbb{Q}^{\mathrm{RC}}$ als angeordneter Körper nach Lemma 7.1.2 zugleich eine η_0-Ordnung.

Sei nun stets $\alpha \in \mathbf{On}$ mit $\alpha > 0$.

Die Frage nach der Exisenz von reell abgeschlossenen η_α-Körpern der Kardinalität $\aleph_\alpha$ beantworten wir für $\alpha > 0$ mit dem folgenden Resultat:

7.1.3 Theorem. *Genau dann gibt es einen reell abgeschlossenen η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$, wenn $\aleph_\alpha$ regulär ist und*

$$2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha \textit{ für alle } \beta < \alpha, \tag{$*$}$$

erfüllt.

Beweis. Für reguläre $\aleph_\alpha$ mit ($*$) wird in [1] mithilfe von Hahn-Reihen ein konkreter reell abgeschlossener η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ angegeben.

[6] Wir gehen hierbei davon aus, dass $\aleph_\alpha$ regulär ist, denn ansonsten existiert nach Theorem 7.1.3 überhaupt kein η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$.

Ist andererseits $\aleph_\alpha$ singulär oder (∗) verletzt, so gibt es nach Korollar 5.2.12 keine η_α-Ordnung der Kardinalität $\aleph_\alpha$. In diesem Fall kann also insbesondere kein reell abgeschlossener η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ existieren. Damit ist die Äquivalenz gezeigt. □

Wir erinnern daran, dass für die Existenz regulärer Kardinalzahlen $\aleph_\alpha$ mit (∗) zum Beispiel die verallgemeinerte Kontinuumshypothese oder die Existenz von stark unerreichbaren Kardinalzahlen angenommen werden muss (siehe Abschnitt 5.2).

Unser nächstes Ziel ist es, den oben erwähnten Isomorphiesatz von Erdős, Gillman und Henriksen zu beweisen. Dafür brauchen wir zunächst zwei weitere Resultate zu angeordneten Körpern, die sich ebenfalls in [4, Lemma 2.2 und Lemma 2.3] finden.

7.1.4 Lemma (Erdős–Gillman–Henriksen)**.** *Seien $(K,<)$ ein angeordneter Körper und $F \subseteq K$ ein Teilkörper. Enthält F ein offenes Intervall von K, d.h. existieren $a, b \in K$ mit $a < b$ und $(a,b)_K = \{x \in K \mid a < x < b\} \subseteq F$, so gilt bereits $F = K$.*

Beweis. Da $(K,<)$ dicht ist, existieren $e_1, e_2 \in K$ mit $a < e_1 < e_2 < b$. Wegen $(a,b)_K \subseteq F$ folgt daraus $e_1, e_2 \in F$, d.h. es gilt

$$[e_1, e_2]_K \subseteq (a,b)_K \subseteq F.$$

Für $d = e_2 - e_1 \in F$ gilt dann $d > 0$ und die Intervalle

$$I_1 = [0,d]_K = [e_1,e_2]_K - e_1 = \{x - e_1 \mid x \in [e_1,e_2]_K\} \text{ und}$$
$$I_2 = [d^{-1}, \infty)_K = \{x^{-1} \mid x \in I_1 \setminus \{0\}\}$$

liegen beide in F, da F ein Körper ist. Folglich enthält F auch das Intervall

$$I_3 = [d,\infty)_K = I_2 - d^{-1} + d = \{x - d^{-1} + d \mid x \in I_2\}.$$

Daraus folgt $[0,\infty)_K = I_1 \cup I_3 \subseteq F$. Wegen $(-\infty,0]_K = -[0,\infty)_K$ erhalten wir schließlich

$$K = (-\infty,0]_K \cup [0,\infty)_K \subseteq F.$$

□

7.1.5 Satz (Erdős–Gillman–Henriksen)**.** *Sei $(K,<)$ ein überabzählbarer angeordneter Körper. Dann existiert eine Transzendenzbasis von $K \mid \mathbb{Q}$, die dicht in $(K,<)$ liegt.*

Beweis. Da K überabzählbar ist, existiert nach Bemerkung 4.2.5 eine Ordinalzahl $\alpha > 0$ mit $|K| = \aleph_\alpha$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{I} = \{(a,b)_K \mid a,b \in K, a < b\}.$$

Die Abbildungen $K \to \mathcal{I}$, $a \mapsto (a, a+1)_K$ und $\mathcal{I} \to K \times K$, $(a,b)_K \mapsto (a,b)$ sind beide injektiv, da $(K,<)$ dicht ist. Daher erhalten wir zusammen mit Lemma 4.2.7

$$\aleph_\alpha = |K| \leq |\mathcal{I}| \leq |K \times K| = |K| \cdot |K| = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha,$$

also $|\mathcal{I}| = \aleph_\alpha$. Wir schreiben deshalb

$$\mathcal{I} = \{I_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha},$$

wobei $I_\xi = (a_\xi, b_\xi)_K$ für $\xi < \omega_\alpha$ und geeignete $a_\xi, b_\xi \in K$ mit $a_\xi < b_\xi$. Wir konstruieren nun per Induktion entlang ω_α eine über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängige Menge

$$T = \{t_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$$

derart, dass $t_\xi \in I_\xi$ für alle $\xi < \omega_\alpha$. Sei daher für $\beta < \omega_\alpha$ eine über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängige Menge $T_\beta = \{t_\xi\}_{\xi<\beta}$ mit $t_\xi \in I_\xi$ für alle $\xi < \beta$ gegeben. Mit K_β bezeichnen wir den relativen algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}(T_\beta)$ in K, d.h.

$$K_\beta = \{x \in K \mid x \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}(T_\beta)\}.$$

Wir suchen nun ein $t_\beta \in I_\beta$, das über K_β transzendent ist. Angenommen, ein solches existiert nicht, dann ist die Erweiterung $K_\beta(I_\beta) \,|\, K_\beta$ algebraisch. Damit gilt nach Lemma 6.1.5 und Lemma 6.2.10

$$|K_\beta(I_\beta)| = |K_\beta| = |\mathbb{Q}(T_\beta)| = \max\{\mathbb{Q}, |T_\beta|\} = \max\{\aleph_0, |\beta|\} < \aleph_\alpha.$$

Das bedeutet aber $(a_\beta, b_\beta)_K = I_\beta \subseteq K_\beta \subsetneq K$, was Lemma 7.1.4 widerspricht. Folglich gibt es ein über K_β transzendentes Element $t_\beta \in I_\beta$. Die Menge $T_\beta \cup \{t_\beta\} = \{t_\xi\}_{\xi\leq\beta}$ ist also algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$. Nach dem Prinzip der Induktion entlang ω_α (vgl. Satz 4.1.10) erhalten wir schließlich eine Menge $T = \{t_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}$, die über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängig ist und $t_\xi \in I_\xi$ für alle $\xi < \omega_\alpha$ erfüllt. Da es für beliebige $a, b \in K$ mit $a < b$ stets ein $\xi < \omega_\alpha$ mit $t_\xi \in I_\xi = (a,b)_K$ gibt, liegt T dicht in $(K,<)$. Nach [2, Kapitel 7.1, Lemma 4] können wir T zu einer Transzendenzbasis von $K \,|\, \mathbb{Q}$ erweitern, die dann ebenfalls dicht in $(K,<)$ liegt. $\square$

7.1.6 Bemerkung. Da wir $\alpha > 0$ voraussetzen und eine η_α-Ordnung nach Bemerkung 5.1.2 mindestens Kardinalität $\aleph_\alpha$ hat, ist jeder η_α-Körper überabzählbar. Insbesondere stimmen für $\alpha > 0$ nach Bemerkung 6.2.11 der Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ und die Kardinalität eines η_α-Körpers überein. Außerdem ist ein η_α-Körper für $\alpha > 0$ nie archimedisch, da sonst die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine abzählbare kofinale Teilmenge wären, was Bemerkung 5.1.2 widerspricht.

Wir sind nun bereit, den Isomorphiesatz aus [4, Theorem 2.1] zu beweisen:

7.1.7 Theorem (Erdős–Gillman–Henriksen). *Seien R und R' zwei reell abgeschlossene η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$. Dann sind R und R' isomorph.*

Beweis. Wir gehen ohne Einschränkung davon aus, dass $\aleph_\alpha$ regulär ist, denn ansonsten existiert nach Theorem 7.1.3 kein η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$. Zur Vereinfachung schreiben wir $<$ für die eindeutigen Anordnungen von R und R' aus Lemma 6.4.2. Seien P und P' die Primkörper von R bzw. R'. Wegen Bemerkung 6.3.4 identifizieren wir beide Primkörper mit $\mathbb{Q}$. Nach Satz 7.1.5 existieren eine Transzendenzbasis T von $R \,|\, \mathbb{Q}$, die dicht in $(R, <)$ liegt, und eine Transzendenzbasis T' von $R' \,|\, \mathbb{Q}$, die dicht in $(R', <)$ liegt. Da nach Bemerkung 7.1.6 $|T| = |T'| = \aleph_\alpha$ gilt, schreiben wir

$$T = \{t_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha} \text{ und } T' = \{t'_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha}.$$

Im Folgenden konstruieren wir per Induktion entlang ω_α für jedes $\beta < \omega_\alpha$ reell abgeschlossene Teilkörper $F_\beta \subseteq R$, $F'_\beta \subseteq R'$ und einen Ringisomorphismus $\varphi_\beta \colon F_\beta \to F'_\beta$ mit

(I) $|F_\beta|, |F'_\beta| < \aleph_\alpha$ für alle $\beta < \omega_\alpha$,

(II) $F_\gamma \subseteq F_\beta, F'_\gamma \subseteq F'_\beta$ und $\varphi_\beta|_{F_\gamma} = \varphi_\gamma$ für alle $\gamma < \beta < \omega_\alpha$,

(III) $T \subseteq \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} F_\beta$ und $T' \subseteq \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} F'_\beta$.

Zu Beginn setzen wir

$$F_0 = \mathbb{Q}^{\mathrm{RC}} \subseteq R,\ F'_0 = \mathbb{Q}^{\mathrm{RC}} \subseteq R' \text{ und } \varphi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\,.$$

Um genau zu sein, müssten wir $F_0 = P^{\mathrm{RC}}$ und $F'_0 = (P')^{\mathrm{RC}}$ betrachten. Dann existiert nach Bemerkung 6.3.4 ein ordnungserhaltender Ringisomorphismus

$\sigma\colon P \to P'$, welcher nach [10, Script 8, Theorem 2.2] zu einem Ringisomorphismus $\varphi_0\colon P^{\mathrm{RC}} \to (P')^{\mathrm{RC}}$ fortgesetzt werden kann.
Sei nun $0 < \beta < \omega_\alpha$ beliebig. Wir nehmen an, dass wir für jedes $\gamma < \beta$ reell abgeschlossene Teilkörper $F_\gamma \subseteq R, F'_\gamma \subseteq R'$ und einen Ringisomorphismus $\varphi_\gamma\colon F_\gamma \to F'_\gamma$ mit

(i) $|F_\gamma|, |F'_\gamma| < \aleph_\alpha$ für alle $\gamma < \beta$ und

(ii) $F_\delta \subseteq F_\gamma, F'_\delta \subseteq F'_\gamma$ und $\varphi_\gamma|_{F_\delta} = \varphi_\delta$ für alle $\delta < \gamma < \beta$

gegeben haben. Dann definieren wir

$$E = \bigcup_{\gamma<\beta} F_\gamma, E' = \bigcup_{\gamma<\beta} F'_\gamma \text{ und } \psi = \bigcup_{\gamma<\beta} \varphi_\gamma\colon E \to E'.$$

Nach (ii), Lemma 6.4.4 und Lemma 6.4.5 sind E und E' reell abgeschlossene Körper und ψ ein wohldefinierter ordnungserhaltender Ringisomorphismus. Da $\aleph_\alpha$ nach Annahme regulär ist, folgt aus (i) und Lemma 4.2.13, dass

$$|E| < \aleph_\alpha = |T|, \text{ also } T \nsubseteq E, \tag{$*$}$$

und ebenso $|E'| < \aleph_\alpha = |T'|$ und $T' \nsubseteq E'$. Ist β gerade, so betrachten wir $x = t_\mu$, wobei

$$\mu = \min\{\xi < \omega_\alpha \mid t_\xi \notin E\}. \tag{1}$$

Dieses μ existiert wegen ($*$) und da $(\omega_\alpha, <)$ als Ordinalzahl wohlgeordnet ist. Für die Teilmengen $A = \{y \in E \mid y < x\}$ und $B = \{y \in E \mid x < y\}$ von E gilt $A < x < B$ und $E = A \cup B$. Da ψ ordnungserhaltend ist, erhalten wir

$$\psi(A) < \psi(B) \text{ und } |\psi(A)|, |\psi(B)| \leq |E'| < \aleph_\alpha. \tag{2}$$

Weil T' dicht in $(F', <)$ liegt, liegt auch $T' \cup E'$ dicht in $(F', <)$. Daher folgt aus Lemma 5.1.6, dass $T' \cup E'$ eine η_α-Ordnung ist. Wegen (2) gibt es also ein $x' \in T' \cup E'$ mit

$$\psi(A) < x' < \psi(B).$$

Es gilt $x' \in T'$, denn $x' \notin \psi(A) \cup \psi(B) = \psi(E) = E'$. Außerdem gilt für jedes beliebige $y \in E$

$$y < x \Leftrightarrow \psi(y) < x'. \tag{3}$$

Sei nun $\varphi\colon E(x) \to E'(x')$ die lineare Fortsetzung von ψ mit $\varphi(x) = x'$, d.h.

$$\varphi\left(\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}\right) = \frac{\psi(a_0) + \psi(a_1)x' + \cdots + \psi(a_n)(x')^n}{\psi(b_0) + \psi(b_1)x' + \cdots + \psi(b_m)(x')^m}.$$

Dann ist φ offensichtlich ein Ringisomorphismus. Um zu zeigen, dass φ ordnungserhaltend ist, betrachten wir zunächst ein beliebiges

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in E[x]$$

mit $n \in \mathbb{N}, a_k \in E, a_n \neq 0$. Wir nehmen an, dass $f > 0$ und zeigen

$$\varphi(f) = \sum_{k=0}^{n} \psi(a_k)(x')^k > 0.$$

Wir gehen ohne Einschränkung von $a_n = 1$ aus, denn es gilt für $a \in E$ und $f \in E[x]$ stets

$$af > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge f > 0).$$

Im Fall $n = 0$ folgt direkt $\psi(f) > 0$, da ψ ordnungserhaltend ist. Für $n = 1$ folgt $\psi(f) > 0$ aus (3). Ist $n = 2$, so schreiben wir

$$f = (x - a)^2 + b$$

für geeignete $a, b \in E$. Da $\psi(a) \in E'$ und $x' \notin E'$, gilt $(x' - \psi(a))^2 > 0$. Ist also $b \geq 0$, so folgt direkt $\psi(f) = (x' - \psi(a))^2 + \psi(b) > 0$. Gilt andererseits $b < 0$, so gibt es ein $c \in E$ mit $c > 0$ und $c^2 = -b$, da E reell abgeschlossen ist. Nun folgt aus $f = (x - a)^2 - c^2 > 0$, dass $x < a - c$ oder $x > a + c$. Mit (3) folgt daraus $x' < \psi(a) - \psi(c)$ oder $x' > \psi(a) + \psi(c)$ und damit auch $\psi(f) > 0$. Aus Lemma 6.2.6 folgt, dass x transzendent über E ist, d.h. der Ring $E[x]$ ist isomorph zum Polynomring $E[X]$. Deshalb zerfällt f für $n > 2$ nach [10, Script 5, Corollary 3.1] in lineare und quadratische Faktoren. Somit folgt aus $f > 0$ stets $\psi(f) > 0$. Daher ist auch φ ordnungserhaltend, denn es gelten $E(x) = \mathrm{Quot}(E[x]), E'(x') = \mathrm{Quot}(E'[x'])$ und

$$\frac{f_1}{f_2} > 0 \Leftrightarrow f_1 f_2 > 0.$$

Nach dem Beweis von [10, Script 8, Theorem 2.2] lässt sich φ daher eindeutig zu einem Ringisomorphismus $\varphi_\beta \colon F_\beta \to F'_\beta$ fortsetzen, wobei $F_\beta = E(x)^{\mathrm{RC}}$ den relativen algebraischen Abschluss von $E(x)$ in R bezeichnet und $F'_\beta = E'(x')^{\mathrm{RC}}$ den relativen algebraischen von $E'(x')$ in R'. Offensichtlich haben wir nun

$$x = t_\mu \in F_\beta. \tag{4}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\left|F'_\beta\right| = |F_\beta| = \left|E(x)^{\mathrm{RC}}\right| & & \text{(da } F'_\beta \cong F_\beta = E(x)^{\mathrm{RC}}\text{)}\\
= |E(x)| & & \text{(nach Lemma 6.1.5)}\\
= |E| & & \text{(nach Lemma 6.2.10)}\\
< \aleph_\alpha & & \text{(vgl. (}*\text{)).}
\end{aligned}$$

Ist β ungerade, so betrachtet man $x' = t_\mu$, wobei $\mu = \min\{\xi < \omega_\alpha \mid t_\xi \notin E'\}$, und verfährt analog mit vertauschten Rollen.
Durch die obige Konstruktion existieren nach dem Prinzip der Induktion entlang ω_α (vgl. Satz 4.1.10) für jedes $\beta < \omega_\alpha$ reell abgeschossene Teilkörper $F_\beta \subseteq R$, $F'_\beta \subseteq R'$ und ein Ringisomorphismus $\varphi_\beta\colon F_\beta \to F'_\beta$ mit (I) und (II). Schließlich definieren wir

$$G = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} F_\beta, G' = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} F'_\beta \text{ und } \Phi = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} \varphi_\beta\colon G \to G'.$$

Dann sind nach (II), Lemma 6.4.4 und Lemma 6.4.5 G und G' reell abgeschlossene Körper und Φ ist ein ordnungserhaltender Ringisomorphismus. Um zu zeigen, dass auch (III) erfüllt ist, betrachten wir zunächst die Menge

$$\Xi = \{\xi < \omega_\alpha \mid t_\xi \in G\} \subseteq \omega_\alpha.$$

Wegen (1) und (4) ist diese Menge ein Anfangssegment von ω_α und zusammen mit Lemma 4.2.9 folgt

$$|\Xi| \geq |\{\beta < \omega_\alpha \mid \beta \text{ gerade}\}| = \aleph_\alpha.$$

Wie im Beweis von Theorem 5.3.2 folgt daraus $\Xi = \omega_\alpha$, also $T \subseteq G$. Entsprechend kann man zeigen, dass auch $T' \subseteq G'$ gilt. Somit haben wir

$$P(T) \subseteq G \subseteq R \text{ und } P'(T') \subseteq G' \subseteq R'.$$

Da T eine Transzendenzbasis von $R \,|\, P$ ist, sind die Erweiterung $R \,|\, P(T)$ und die Zwischenerweiterung $G \,|\, P(T)$ beide algebraisch. Damit sind sowohl R als auch G reelle Abschlüsse von $P(T)$. Nach [10, Script 8, Corollary 2.3] sind R und G daher isomorph. Entsprechend zeigt man, dass auch R' und G' isomorph sein müssen. Wir erhalten

$$R \cong G \overset{\Phi}{\cong} G' \cong R',$$

wie gewünscht. □

Wir haben nun gesehen, dass alle reell abgeschlossenen η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ zueinander isomorph sind. Da diese Körper nach Bemerkung 7.1.6 und Theorem 5.3.2 insbesondere überabzählbar, nicht-archimedisch und ordnungsisomorph sind, beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt unter anderem mit der folgenden Frage, die auch Erdős, Gillman und Henriksen in [4, Problem 5.1] stellen:

7.1.8 Frage. Sind alle überabzählbaren nicht-archimedischen reell abgeschlossenen Körper desselben Ordnungstyps zueinander isomorph?

7.2 Reell abgeschlossene Körper desselben Ordnungstyps

Seien R_1 und R_2 zwei beliebige reell abgeschlossene Körper desselben Ordnungstyps. Im Folgenden untersuchen wir das Isomorphieverhältnis von R_1 und R_2. Da zwei isomorphe angeordnete Körper stets dieselbe Kardinalität haben und nach Bemerkung 6.3.8 entweder beide archimedisch oder beide nicht-archimedisch sind, unterscheiden wir die folgenden vier Fälle:

a) R_1 und R_2 sind abzählbar und archimedisch,

b) R_1 und R_2 sind abzählbar und nicht-archimedisch,

c) R_1 und R_2 sind überabzählbar und nicht-archimedisch,

d) R_1 und R_2 sind überabzählbar und archimedisch.

In jedem dieser Fälle möchten wir die folgende Frage beantworten:

7.2.1 Frage. Sind R_1 und R_2 isomorph?

Fall a)

Hier ist die Antwort auf Frage 7.2.1 negativ. Um dies zu zeigen, betrachten wir zwei verschiedene über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängige Elemente $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$R_1 = \mathbb{Q}(t_1)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R} \text{ und } R_2 = \mathbb{Q}(t_2)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R} \tag{1}$$

nach Lemma 6.4.7 reell abgeschlossene Körper. Als Unterkörper von $\mathbb{R}$ sind sie außerdem beide archimedisch. Mit Lemma 6.1.5 und Lemma 6.2.10 erhalten wir weiter

$$|R_k| = |\mathbb{Q}(t_k)| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 \text{ für } k = 1, 2.$$

Wir statten die Körper R_1 und R_2 jeweils mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Anordnung aus. Dann folgt aus Lemma 7.1.2, dass R_1 und R_2 zwei η_0-Ordnungen sind. Nach Theorem 5.3.2 haben R_1 und R_2 daher denselben Ordnungstyp. Nun nehmen wir für einen Widerspruch an, dass R_1 und R_2 isomorph sind. Dann folgt aus Korollar 6.3.10 bereits $R_1 = R_2$. Wir erhalten daher $t_1 \in R_2$, d.h. t_1 ist algebraisch über $\mathbb{Q}(t_2)$. Aufgrund der algebraischen Unabhängigkeit von t_1 und t_2 über $\mathbb{Q}$ widerspricht dies Lemma 6.2.6. Somit sind R_1 und R_2 trotz ihrer Ordnungsisomorphie nicht isomorph.

Dadurch haben wir Frage 7.2.1 beantwortet. Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass Theorem 7.1.7 für $\alpha = 0$ falsch ist.

Neben dem Ordnungstyp ist nach Bemerkung 6.2.9 auch der Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ invariant unter Ringisomorphismen zwischen reell abgeschlossenen Körpern. Wir betrachten daher noch einmal die Körper aus (1). Offensichtlich ist $\{t_k\}$ eine Transzendenzbasis von $R_k \,|\, \mathbb{Q}$ für $k = 1, 2$. Demnach haben R_1 und R_2 sogar denselben Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$, und zwar

$$\operatorname{trdeg} R_1 = \operatorname{trdeg} R_2 = 1.$$

Ordnungstyp und Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ allein reichen folglich nicht aus, um abzählbare archimedische reell abgeschlossene Körper bis auf Isomorphie zu charakterisieren.

Ein Spezialfall von (1) findet sich auch in [4, S. 546], und zwar für $t_1 = \pi$ und $t_2 = \mathrm{e}$. Wir wollen hier aber darauf hinweisen, dass die Frage nach der algebraischen Unabhängigkeit von π und e noch offen ist (siehe [15, S. 138]). Wegen folgendem Resultat ist das Beispiel in [4, S. 546] also nur korrekt, falls π und e tatsächlich algebraisch unabhängig sind.

7.2.2 Lemma. *Sind $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ zwei über $\mathbb{Q}$ algebraisch abhängige Elemente, so gilt $\mathbb{Q}(t_1)^{\mathrm{RC}} = \mathbb{Q}(t_2)^{\mathrm{RC}}$.*

Beweis. Zunächst erhalten wir aufgrund der algebraischen Abhängigkeit der Elemente t_1 und t_2

$$\operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(t_1) = \operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(t_1, t_2) = \operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(t_2).$$

Für einen Widerspruch nehmen wir ohne Einschränkung an, dass ein Element $x \in \mathbb{Q}(t_1)^{\mathrm{RC}} \setminus \mathbb{Q}(t_2)^{\mathrm{RC}}$ existiert. Weil $\mathbb{Q}(t_k)^{\mathrm{RC}}$ für $k = 1, 2$ den relativen algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}(t_k)$ in $\mathbb{R}$ bezeichnet, ist dieses x algebraisch über $\mathbb{Q}(t_1)$ und transzendent über $\mathbb{Q}(t_2)$. Damit folgt

$$\operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(t_1, t_2, x) = \operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(t_1, x) < \operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(t_2, x) = \operatorname{trdeg} \mathbb{Q}(t_1, t_2, x),$$

ein Widerspruch. Daher muss $\mathbb{Q}(t_1)^{\mathrm{RC}} = \mathbb{Q}(t_2)^{\mathrm{RC}}$ gelten. □

Fall b)

Auch hier ist die Antwort auf Frage 7.2.1 negativ. Um dies zu zeigen, betrachten wir zunächst den reell abgeschlossenen Körper $\mathbb{R}((\mathbb{Q}))$ aus Beispiel 6.4.15. Dann folgt aus Lemma 6.4.7, dass dessen Teilkörper

$$R_1 = \mathbb{Q}(t)^{\mathrm{RC}} \text{ und } R_2 = \mathbb{Q}(t, \pi)^{\mathrm{RC}} \tag{2}$$

ebenfalls reell abgeschlossen sind. Hierbei bezeichnet t die Abbildung

$$t\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ q \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } q = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{$*$}$$

Wir statten die Körper R_1 und R_2 jeweils mit der von $\mathbb{R}((\mathbb{Q}))$ induzierten Anordnung aus. Dann kann man wie in Fall a) zeigen, dass R_1 und R_2 abzählbare η_0-Ordnungen und deshalb zueinander ordnungsisomorph sind. Weil $\mathbb{N} < t^{-1}$ sowohl in R_1 als auch in R_2 gilt, sind außerdem beide Körper nicht-archimedisch.

Wir bestimmen nun den Transzendenzgrad von R_k für $k = 1, 2$. Es ist bekannt, dass π transzendent über $\mathbb{Q}$ ist. Da $\mathbb{R}$ reell abgeschlossen ist, gilt zudem

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathrm{RC}} = \{a \in \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \mid a \text{ ist algebraisch über } \mathbb{R}\}.$$

Insbesondere ist $t \in \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \setminus \mathbb{R}$ transzendent über $\mathbb{R}$ und damit auch über $\mathbb{Q}(\pi) \subseteq \mathbb{R}$. Hieraus folgt zum einen, dass $\{t\}$ eine Transzendenzbasis von $R_1 \,|\, \mathbb{Q}$ ist, und andererseits, dass $\{t, \pi\}$ eine Transzendenzbasis von $R_2 \,|\, \mathbb{Q}$ ist. Wir erhalten somit

$$\operatorname{trdeg} R_1 = 1 \neq 2 = \operatorname{trdeg} R_2.$$

Weil der Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ nach Bemerkung 6.2.9 invariant unter Ringisomorphismen zwischen reell abgeschlossenen Körpern ist, können die Körper R_1 und R_2 daher nicht isomorph sein.

Folglich brauchen wir neben dem Ordnungstyp weitere Invarianten, um die abzählbaren reell abgeschlossenen Körper bis auf Isomorphie zu beschreiben.

Wenn wir zusätzlich verlangen, dass R_1 und R_2 denselben Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ haben, so bleibt die Antwort auf Frage 7.2.1 dennoch negativ. Um dies zu zeigen, betrachten wir wieder den reell abgeschlossenen Körper $\mathbb{R}((\mathbb{Q}))$. Seien weiter $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängige Elemente und t das Element aus ($*$). Wir betrachten nun die Körper

$$R_1 = \mathbb{Q}(t, t_1)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \text{ und } R_2 = \mathbb{Q}(t, t_2)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R}((\mathbb{Q})). \tag{3}$$

Wie bei den Körpern aus (2) kann man zeigen, dass diese ebenfalls abzählbar, nicht-archimedisch, reell abgeschlossen und zueinander ordnungsisomorph sind. Wir beweisen nun, dass für $k = 1, 2$ die Menge $\{t, t_k\}$ eine Transzendenzbasis der Erweiterung $R_k \mid \mathbb{Q}$ ist. Dafür nehmen wir an, dass die Elemente t und t_k über $\mathbb{Q}$ algebraisch abhängig sind. Dann folgt

$$t \in \mathbb{Q}(t_k)^{\mathrm{RC}} = \{a \in \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \mid a \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}(t_k)\}. \tag{$**$}$$

Da $\mathbb{R}$ reell abgeschlossen ist, gilt jedoch

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathrm{RC}} = \{a \in \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \mid a \text{ ist algebraisch über } \mathbb{R}\}.$$

Insbesondere ist $t \in \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \setminus \mathbb{R}$ transzendent über $\mathbb{R}$ und damit auch über $\mathbb{Q}(t_k) \subseteq \mathbb{R}$, was ($**$) widerspricht. Folglich sind t und t_k algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ und wir erhalten

$$\operatorname{trdeg} R_1 = \operatorname{trdeg} R_2 = 2.$$

Um $R_1 \not\cong R_2$ zu zeigen, betrachten wir die Restklassenkörper $\overline{R_1}, \overline{R_2}$ bezüglich der Bewertung $v_{\min}$. Für $k = 1, 2$ gilt

$$\overline{R_k} = \overline{\mathbb{Q}(t, t_k)^{\mathrm{RC}}} = \mathbb{Q}(t_k)^{\mathrm{RC}}.$$

In Fall a) haben wir gezeigt, dass

$$\overline{R_1} = \mathbb{Q}(t_1)^{\mathrm{RC}} \not\cong \mathbb{Q}(t_2) = \overline{R_2}.$$

Daher sind auch R_1 und R_2 nicht zueinander isomorph. Um die Details dieser Argumentation zu beweisen, werden Resultate aus der Bewertungstheorie benötigt, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

Die Körper aus (3) zeigen, dass Ordnungstyp und Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ allein nicht ausreichen, um abzählbare nicht-archimedische reell abgeschlossene Körper bis auf Isomorphie zu charakterisieren.

Wir wenden uns nun den überabzählbaren reell abgeschlossenen Körpern zu. Im Folgenden stimmen deshalb der Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ und die Kardinalität überein (siehe Bemerkung 6.2.11).

Fall c)

Hier stimmt Frage 7.2.1 mit der Frage 7.1.8 aus [4, Problem 5.1] von Erdős, Gillman und Henriksen aus dem Jahr 1955 überein. Dass die Antwort darauf negativ ist, zeigt Abraham Robinson 1956 in seinem Paper „Solution of a problem by Erdös–Gillman–Henriksen“ [17], indem er ein Gegenbeispiel konstruiert. Wir möchten jedoch darauf hinweisen, dass sich in [17] einige Fehlaussagen finden. Beispielsweise behauptet Robinson gleich zu Beginn, dass er zwei „algebraically isomorphic real-closed non-archimedean and nondenumerable ordered fields, such that no order-preserving isomorphism exists“ angeben wird. Doch da jeder Ringisomorphismus zwischen reell abgeschlossenen Körpern notwendigerweise ordnungserhaltend ist, ist dies nicht möglich. In Wirklichkeit konstruiert er jedoch zwei überabzählbare nicht-archimedische ordnungsisomorphe reell abgeschlossene Körper, die nicht isomorph sind. Der Begriff „algebraically isomorphic“ sollte also durch „order isomorphic“ ersetzt werden. Im Folgenden führen wir Robinsons Konstruktion vor und weisen an den entsprechenden Stellen auf die Fehler in [17] hin.

Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene positive über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängige Elemente. Wie in Fall a) betrachten wir zunächst die abzählbaren archimedischen reell abgeschlossenen Körper

$$R_1 = \mathbb{Q}(t_1)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R} \text{ und } R_2 = \mathbb{Q}(t_2)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R}.$$

Robinson behauptet in [17], dass R_1 und R_2 „algebraically isomorphic“ sind, d.h. dass es einen Ringisomorphismus zwischen R_1 und R_2 gibt. Wir haben allerdings in Fall a) gesehen, dass dies nicht der Fall ist. Daher sollte auch an dieser Stelle der Begriff „algebraically isomorphic“ durch „order isomorphic“ ersetzt werden. Wie wir nämlich bereits in Fall a) gezeigt haben, sind R_1 und R_2 als abzählbare η_0-Ordnungen tatsächlich ordnungsisomorph (mit Ordnungstyp η). Insbesondere gibt es nach Korollar 3.2.4 einen Ordnungsisomorphismus $f\colon R_1 \to R_2$ mit $f(0) = 0$.

Nun betrachten wir die nach [19, Kapitel V, Korollar 5.14] reell abgeschlossenen Körper

$$R_1^* = R_1\{\{t\}\} \subseteq \mathbb{R}\{\{t\}\} \text{ und } R_2^* = R_2\{\{t\}\} \subseteq \mathbb{R}\{\{t\}\} \tag{4}$$

der Puiseux-Reihen (mit Koeffizienten in R_1 bzw. R_2). Offensichtlich gilt

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq R_k^* \subseteq R_k^{\mathbb{Q}}$$

und damit

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq |R_k^*| \leq \left|R_k^{\mathbb{Q}}\right| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

für $k = 1, 2$. Somit haben R_1^* und R_2^* beide Kardinalität $\mathfrak{c}$. Insbesondere gilt

$$\operatorname{trdeg} R_1^* = \operatorname{trdeg} R_2^* = \mathfrak{c}.$$

Wir versehen die Körper aus (4) mit der lexikographischen Anordnung. Dann gilt $\mathbb{N} < t^{-1}$ sowohl in R_1^* als auch in R_2^*. Folglich sind beide Körper nicht-archimedisch.

Den Beweis der Ordnungsisomorphie von R_1^* und R_2^* führt Robinson in [17] nicht aus. Daher zeigen wir nun ähnlich wie in Lemma 6.4.11, dass die Abbildung

$$F\colon R_1^* \to R_2^*,\ a \mapsto f \circ a$$

einen Ordnungsisomorphismus definiert:

Zunächst stellen wir fest, dass

$$\operatorname{supp}(F(a)) = \operatorname{supp}(f \circ a) = \operatorname{supp}(a) \tag{$*$}$$

für jedes $a \in R_1^*$, da f bijektiv ist und $f(0) = 0$ gilt. Außerdem ist es nicht schwer zu sehen, dass aufgrund der Surjektivität von f auch F surjektiv ist. Es bleibt zu zeigen, dass F ordnungserhaltend ist. Seien dafür $a, b \in R_1^*$ mit $a < b$. Wir schreiben ohne Einschränkung

$$a = \sum_{k=m}^{\infty} a_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}} \text{ und } b = \sum_{k=m}^{\infty} b_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}}$$

für $n \in \mathbb{N}_{>0}, m \in \mathbb{Z}, a_{\frac{k}{n}}, b_{\frac{k}{n}} \in R_1$ und setzen $\frac{m_1}{n} = v_{\min}(a)$ und $\frac{m_2}{n} = v_{\min}(b)$. Sei $m' \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{m'}{n} = v_{\min}(b-a)$. Dann gilt $\frac{m'}{n} = v_{\min}(b-a) \geq \min\{\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}\}$ und wegen $a < b$ auch $a_{\frac{m'}{n}} < b_{\frac{m'}{n}}$. Außerdem haben wir wegen ($*$)

$$F(a) = \sum_{k=m}^{\infty} f\left(a_{\frac{k}{n}}\right) t^{\frac{k}{n}} \text{ und } F(b) = \sum_{k=m}^{\infty} f\left(b_{\frac{k}{n}}\right) t^{\frac{k}{n}}.$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{k}{n} < \frac{m'}{n} = v_{\min}(b-a)$ gilt $a_{\frac{k}{n}} = b_{\frac{k}{n}}$, woraus

$$F(a)_{\frac{k}{n}} = f\left(a_{\frac{k}{n}}\right) = f\left(b_{\frac{k}{n}}\right) = F(b)_{\frac{k}{n}}$$

folgt. Zudem gilt $a_{\frac{m'}{n}} < b_{\frac{m'}{n}}$ und somit auch

$$F(a)_{\frac{m'}{n}} = f\left(a_{\frac{m'}{n}}\right) < f\left(b_{\frac{m'}{n}}\right) = F(b)_{\frac{m'}{n}},$$

da f ordnungserhaltend ist. Das bedeutet gerade $F(a) < F(b)$. Folglich ist F ordnungserhaltend.

Damit haben R_1^* und R_2^* denselben Ordnungstyp. Auch an dieser Stelle behauptet Robinson in [17], dass R_1^* und R_2^* „algebraically isomorphic“ sind. Wir werden jedoch gleich sehen, dass dies nicht der Fall ist. Daher sollte auch hier „algebraically isomorphic“ durch „order isomorphic“ ersetzt werden. Im Folgenden zeigen wir also, wie angekündigt, dass R_1^* und R_2^* nicht isomorph sind:

Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass es einen Ringisomorphismus $\varphi\colon R_1^* \to R_2^*$ gibt. Da R_1^* und R_2^* reell abgeschlossen sind, ist dieser automatisch ordnungserhaltend. Wir betrachten im Folgenden das Element $t_1^* = \varphi(t_1) \in R_2^*$. Da φ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ fixiert und ordnungserhaltend ist, haben wir für alle $q \in \mathbb{Q}$

$$q < t_1 \Leftrightarrow q < t_1^*. \tag{$*$}$$

Insbesondere gilt $t_1^* > 0$, da nach Annahme $t_1 > 0$. Weil der Körper $R_1 \subseteq \mathbb{R}$ archimedisch ist, existieren $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q < t_1 < q'$. Wegen ($*$) gilt damit auch $q < t_1^* < q'$. Hieraus folgt $v_{\min}(t_1^*) = 0$. Wir erhalten somit

$$t_1^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}},$$

wobei $a_{\frac{k}{n}} \in R_2$ und $a_0 = a_{\frac{0}{n}} > 0$. Da t_1 und t_2 algebraisch unabhängig sind, gilt $t_1 \notin \mathbb{Q}(t_2)^{\mathrm{RC}} = R_2$. Insbesondere sind die Elemente $t_1 \in R_1 \subseteq \mathbb{R}$ und $a_0 \in R_2 \subseteq \mathbb{R}$ verschieden. Wir gehen zunächst davon aus, dass $t_1 < a_0$ gilt. Weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es dann ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $t_1 < q < a_0$. Daraus folgt $t_1 - q < 0$ und

$$\varphi(t_1 - q) = \varphi(t_1) - \varphi(q) = t_1^* - q = (a_0 - q) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}} > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, denn φ ist ordnungserhaltnd. Gilt $a_0 < t_1$, so erhält man durch eine analoge Vorgehensweise ebenfalls einen Widerspruch. Daher sind R_1^* und R_2^* nicht isomorph.

Zusammenfassend sind R_1^* und R_2^* aus (4) zwei überabzählbare nicht-archimedische reell abgeschlossene Körper desselben Ordnungstyps, die nicht isomorph sind. Deshalb können wir Frage 7.1.8 verneinen, stellen aber gleichzeitig eine neue Frage:

7.2.3 Frage. Werden zwei reell abgeschlossene Körper R_1 und R_2, die $\mathbb{R}$ echt enthalten, durch ihren Ordnungstyp und den Transzendenzgrad über $\mathbb{R}$ (bis auf Isomorphie) charakterisiert (vgl. [4, S. 546])?

Doch auch diese Modifikation von Frage 7.1.8 können wir verneinen. Tatsächlich werden wir später sehen, dass bereits die Körper aus (4) ein Gegenbeispiel sind. Wir betrachten jedoch zunächst die beiden Körper

$$R_1 = \mathbb{R}((\mathbb{Q})) \text{ und } R_2 = \mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})). \tag{5}$$

Dann ist $(R_k, <_{\text{lex}})$ für $k = 1, 2$ (via dem ordnungserhaltenden Ringhomomorphismus $\iota_k \colon \mathbb{R} \to R_k$, $r \mapsto rt^0$) eine echte Erweiterung von $(\mathbb{R}, <)$. Wir haben am Ende von Abschnitt 6.4 bereits gesehen, dass beide nicht-archimedische reell abgeschlossene Körper der Kardinalität $\mathfrak{c}$ sind. Da $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathcal{Q}\cdot\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, <)$ zwei abzählbare dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte sind (siehe Abschnitt 3), finden wir nach Korollar 3.2.4 einen Ordnungsisomorphismus $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ von $(\mathbb{Q}, <)$ nach $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <)$ mit $f_2(0) = (0, 0)$. Anwenden von Lemma 6.4.11 mit $f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und f_2 liefert dann, dass R_1 und R_2 denselben Ordnungstyp haben. Nun zeigen wir, dass R_1 und R_2 trotzdem nicht zueinander isomorph sind:

Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass es einen Ringisomorphismus $\varphi\colon R_2 \to R_1$ gibt. Da R_1 und R_2 reell abgeschlossen sind, ist dieser automatisch ordnungserhaltend. Wir betrachten zunächst die Menge

$$M = \left\{\left(t^{(-1,0)}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} \subseteq R_2.$$

Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $\left(t^{(-1,0)}\right)^n = t^{(-n,0)}$ und damit

$$\mathbb{N} < M < t^{(0,-1)}.$$

Nun betrachten wir die Bilder $s = \varphi\left(t^{(-1,0)}\right)$ und $r = \varphi\left(t^{(0,-1)}\right)$ in R_1. Weil φ ein ordnungserhaltender Ringisomorphismus ist, erhalten wir

$$\varphi(M) = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \text{ und } \mathbb{N} < \varphi(M) < r.$$

Aus $\mathbb{N} < s, r$ folgt $v_{\min}(s), v_{\min}(r) < 0$ in $(\mathbb{Q}, <)$. Da außerdem $(\mathbb{Q}, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper ist, existiert nach Bemerkung 6.3.8 ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$v_{\min}(s^n) = nv_{\min}(s) < v_{\min}(r).$$

Daraus folgt jedoch

$$r < s^n \in \varphi(M),$$

was $\varphi(M) < r$ widerspricht. Folglich können R_1 und R_2 nicht isomorph sein.

Damit wir Frage 7.2.3 tatsächlich verneinen können, müssen wir noch den Transzendenzgrad von $R_1 \,|\, \mathbb{R}$ und $R_2 \,|\, \mathbb{R}$ bestimmen:

7.2.4 Lemma. *Es gilt* $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{R}} R_1 = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{R}} R_2 = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}((\mathbb{Z})) = \mathfrak{c}$*, wobei* $R_1 = \mathbb{R}((\mathbb{Q}))$ *und* $R_2 = \mathbb{R}((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))$ *die Körper aus* (5) *bezeichnen.*

Beweis. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Transzendenzbasis von $\mathbb{R} \,|\, \mathbb{Q}$. Wir zeigen, dass die Menge

$$T' = \{\exp(at) \mid a \in T\} \subseteq \mathbb{R}((\mathbb{Z}))$$

algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}$ ist. Seien dafür $k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_k \in T$ beliebig. Dann sind $a_1, \ldots, a_k$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$, also insbesondere linear unabängig über $\mathbb{Q}$. Aus Lemma 6.4.14 folgt daher, dass die Elemente $\exp(a_1 t), \ldots, \exp(a_k t) \in \mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Somit ist T' algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}$. Zudem gilt aufgrund der Injektivität von exp, dass $|T'| = |T| = \operatorname{trdeg} \mathbb{R} = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Da die Körper $\mathbb{R}((\mathbb{Z})), R_1$ und R_2 selbst schon Kardinalität $\mathfrak{c}$ haben (vgl. Abschnitt 6.4), folgt die Behauptung. $\square$

Aus dem obigen Beweis folgt insbesondere

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{R}} R_1^* = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{R}} R_2^* = \mathfrak{c}$$

für die Körper R_1^* und R_2^* aus (4), da beide den Körper $\mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ enthalten.

Es werden daher zusätzlich zum Ordnungstyp und zum Transzendenzgrad über $\mathbb{R}$ weitere Invarianten benötigt, um die nicht-archimedischen überabzählbaren reell abgeschlossenen Körper bis auf Isomorphie zu beschreiben.

8 Offene Fragen

In den Fällen a), b) und c) konnten wir Frage 7.2.1 verneinen – auch, wenn wir zusätzlich denselben Transzendenzgrad über $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ vorausgesetzt haben. In diesen Fällen fehlen uns deshalb noch Invarianten, um die entsprechenden reell abgeschlossenen Körper bis auf Isomorphie zu beschreiben. Was könnten diese Invarianten sein?

In Fall d) haben wir bisher noch keine Antwort auf Frage 7.2.1 gefunden. Die folgende Frage bleibt daher ungeklärt:

8.1 Frage. Sind alle überabzählbaren archimedischen reell abgeschlossenen Körper desselben Ordnungstyps zueinander isomorph?

Da wir nach Satz 6.3.9 jeden archimedisch angeordneten Körper auf eindeutige Weise in die reellen Zahlen einbetten können, genügt es die überabzählbaren reell abgeschlossenen Teilkörper von $\mathbb{R}$ zu betrachten, um Frage 8.1 zu beantworten. In einem Trivialfall kennen wir die Antwort bereits, denn jeder Teilkörper $K \subseteq \mathbb{R}$, der ordnungsisomorph zu $\mathbb{R}$ ist, ist vollständig. Daraus folgt, dass K und $\mathbb{R}$ auch als angeordnete Körper zueinander isomorph sind. Dies kann in Anhang A nachgelesen werden. Für den Ordnungstyp λ der reellen Zahlen ist die Antwort auf Frage 8.1 damit positiv. Wir vermuten jedoch, dass Frage 8.1 im Allgemeinen negativ zu beantworten ist. Wir sind daher auf der Suche nach zwei überabzählbaren reell abgeschlossenen Teilkörpern von $\mathbb{R}$, die denselben Ordnungstyp haben, aber nicht zueinander isomorph sind. Nach Korollar 6.3.10 genügt es dafür zwei verschiedene überabzählbare ordnungsisomorphe Teilkörper von $\mathbb{R}$ zu finden.

Sei T eine Transzendenzbasis von $\mathbb{R} \mid \mathbb{Q}$.

8.2 Frage. Gibt es zwei verschiedene überabzählbare Teilmengen $T_1, T_2 \subseteq T$ so, dass die Körper $R_1 = \mathbb{Q}(T_1)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R}$ und $R_2 = \mathbb{Q}(T_2)^{\mathrm{RC}} \subseteq \mathbb{R}$ zueinander ordnungsisomorph sind?

Falls Frage 8.2 positiv zu beantworten ist, so können wir Frage 8.1 verneinen. Aufgrund der Ordnungsisomorphie von R_1 und R_2 erhalten wir nämlich mit Lemma 6.1.5 und Lemma 6.2.10

$$|R_1| = |R_2| = |\mathbb{Q}(T_2)| = \max\{\aleph_0, |T_2|\} = |T_2| > \aleph_0$$

und tatsächlich gilt $R_1 \neq R_2$. Um dies zu zeigen, wählen wir wegen $T_1 \neq T_2$ ohne Einschränkung ein $t \in T_1 \setminus T_2$. Es folgt aus Lemma 6.2.6 (mit $a = t$ und

$A = T_2 \dot{\cup} \{t\} \subseteq T$), dass dieses t transzendent über $\mathbb{Q}(T_2)$ ist, woraus wiederum $t \notin R_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid a$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}(T_2)\}$ folgt. Andererseits gilt offensichtlich $t \in R_1$. Wir erhalten also $R_1 \neq R_2$. Wie bereits erwähnt, folgt daraus mit Korollar 6.3.10, dass $R_1 \ncong R_2$. In diesem Zusammenhang kommt außerdem folgende Frage auf:

8.3 Frage. Sind die reellen Abschlüsse von zwei angeordneten Körpern desselben Ordnungstyps ebenfalls zueinander ordnungsisomorph?

Im abzählbaren Fall ist dies natürlich der Fall, denn der reelle Abschluss eines abzählbaren angeordneten Körpers ist als algebraische Erweiterung nach Lemma 6.1.5 ebenfalls abzählbar. Nach Lemma 7.1.2 ist also jeder angeordnete Körper eine η_0-Ordnung der Kardinalität $\aleph_0$. Aus Theorem 5.3.2 folgt damit, dass alle abzählbaren angeordneten Körper denselben Ordnungstyp haben, nämlich η. Ist die Antwort auf Frage 8.3 auch im überabzählbaren Fall positiv, so würde es in Frage 8.2 genügen nur die Ordnungsisomorphie von $\mathbb{Q}(T_1)$ und $\mathbb{Q}(T_2)$ (statt der von $\mathbb{Q}(T_1)^{\mathrm{RC}}$ und $\mathbb{Q}(T_2)^{\mathrm{RC}}$) zu fordern.

Wir haben bereits festgestellt, dass alle abzählbaren archimedisch angeordneten Körper, insbesondere die reell abgeschlossenen, denselben Ordnunstyp haben, nämlich η. Welche Ordnungstypen können im überabzählbaren Fall auftreten?

8.4 Frage.

a) Was sind die Ordnungstypen der überabzählbaren archimedisch angeordneten Körper?

b) Was sind die Ordnungstypen der überabzählbaren archimedischen reell abgeschlossenen Körper?

A Anhang: Konstruktion der Zahlenmengen

Da wir die Zahlenmengen in dieser Arbeit häufig als Beispiele verwenden, möchten wir diese nun formal definieren. In den folgenden Abschnitten orientieren wir uns dabei hauptsächlich an [13] für die Einführung der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen und an [14] für die Konstruktion der reellen Zahlen. Alle Beweise, die wir hier auslassen, können dort nachgelesen werden. Wie wir in Abschnitt 3.2 die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, <)$ bis auf Ordnungsisomorphie beschrieben haben, möchten wir am Ende dieses Anhangs auch einen Isomorphiesatz für die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, <)$ formulieren und beweisen.

Natürliche Zahlen

Die **natürlichen Zahlen** sind eine Menge $\mathbb{N}$, in der ein Element $0 \in \mathbb{N}$ (die Null) ausgezeichnet ist und auf der eine Selbstabbildung $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Nachfolgerfunktion) definiert ist so, dass folgende Axiome erfüllt sind:

(1) s ist injektiv,

(2) $0 \notin s(\mathbb{N})$,

(3) für jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und $s(M) \subseteq M$ gilt schon $M = \mathbb{N}$.

Die Vorstellung ist, dass s jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die nachfolgende Zahl zuordnet. Wir schreiben $1 := s(0), 2 := s(1), 3 := s(2)$ und so weiter. Dadurch erhalten wir

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Wir definieren rekursiv eine Addition auf $\mathbb{N}$ durch

$$n + 0 = 0 \text{ und } n + s(m) = s(n + m)$$

für $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\mathbb{N}, +, 0)$ nach [13, Abschnitt 2.3] eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel, d.h. für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ folgt aus $n + k = m + k$ stets $n = m$.

Ebenso definieren wir eine Multiplikation auf $\mathbb{N}$ durch

$$n \cdot 0 = 0 \text{ und } n \cdot s(m) = n \cdot m + n$$

für $n, m \in \mathbb{N}$. Für diese Multiplikation gelten die üblichen Rechenregeln.

Schließlich wird $\mathbb{N}$ durch die Relation, definiert durch

$$n \leq_{\mathbb{N}} m \;:\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{N}\; n + k = m,$$

für $n, m \in \mathbb{N}$, zu einer linearen Ordnung $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$.

Ganze Zahlen

Wir definieren auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Äquivalenzrelation

$$(a, b) \sim (c, d) \;:\Leftrightarrow\; a + d = b + c$$

für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ sind dann die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim \\ &= \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

In [5, Satz 13.1] wird bewiesen, dass die Menge $\mathbb{Z}$ abzählbar ist.

Wir definieren eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d] \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [ac + bd, ad + bc] \end{aligned}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Dadurch bildet $(\mathbb{Z}, +, \cdot, [0, 0], [1, 0])$ nach [13, Abschnitt 3.2] einen Integritätsring mit Einselement. Insbesondere hat jedes $z = [a, b] \in \mathbb{Z}$ ein eindeutig bestimmtes additiv Inverses, und zwar $-z = [b, a]$. Da sich die Injektion

$$\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\; n \mapsto [n, 0] = n - 0$$

mit den Operationen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ verträgt, identifizieren wir die Teilmenge $\iota(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$ mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Dadurch erhalten wir

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Schließlich wird $\mathbb{Z}$ durch die Relation, definiert durch

$$\begin{aligned} &a \leq_{\mathbb{Z}} b \;:\Leftrightarrow\; 0 \leq_{\mathbb{Z}} b - a, \text{ wobei} \\ &0 \leq_{\mathbb{Z}} a \;:\Leftrightarrow\; a \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$, zu einer linearen Ordnung $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ und offensichtlich gilt $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$. Durch diese Anordnung wird $(\mathbb{Z}, +, [0, 0], <_{\mathbb{Z}})$ sogar zu einer angeordneten Gruppe.

Rationale Zahlen

Auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Leftrightarrow\; ad = bc$$

für $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ mit $b,d \neq 0$. Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ sind dann die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim \\ &= \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} \end{aligned}$$

In [5, Satz 13.1] wird bewiesen, dass die Menge $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Für ganze Zahlen $a,b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ schreiben wir $\frac{a}{b}$ statt $[a,b]$.

Wir definieren eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ durch

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

für $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ mit $b,d \neq 0$. Dadurch wird $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \frac{0}{1}, \frac{1}{1})$ zu einem Körper. Insbesondere hat jedes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ein eindeutig bestimmes additiv Inverses, nämlich $\frac{-a}{b}$, und gilt $\frac{a}{b} \neq 0$, so hat $\frac{a}{b}$ zudem ein eindeutig bestimmtes multiplikativ Inverses, und zwar $\frac{b}{a}$. Da sich die Injektion

$$\iota \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\; a \mapsto \frac{a}{1}$$

mit den Operationen auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ verträgt, identifzieren wir die Teilmenge $\iota(\mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{Q}$ mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Schließlich wird $\mathbb{Q}$ durch die Relation $<_{\mathbb{Q}}$, definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} <_{\mathbb{Q}} \frac{c}{d} &:\Leftrightarrow 0 <_{\mathbb{Q}} \frac{c}{d} - \frac{a}{b}, \text{ wobei} \\ 0 <_{\mathbb{Q}} \frac{a}{b} &:\Leftrightarrow 0 <_{\mathbb{Z}} ab \end{aligned}$$

für $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ mit $b,d \neq 0$, zu einer linearen Ordnung $\mathcal{Q} := (\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ und offensichtlich gilt $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Q}$. Mit dieser Anordnung bildet $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, <_{\mathbb{Q}})$ sogar einen archimedisch angeordneten Körper, denn es gilt

$$\frac{a}{b} \leq |a|$$

für $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ und $|a| = \max\{a, -a\} \in \mathbb{N}$. Insbesondere liegt $\mathcal{N}$ kofinal in $\mathcal{Q}$.

Reelle Zahlen

Definition. Sei $\mathcal{A} = (A, <)$ eine lineare Ordnung. Unter einem **Dedekind-Schnitt**[7] in $\mathcal{A}$ verstehen wir eine nichtleere Unterordnung $C \subsetneq \mathcal{A}$, die kein erstes Element hat und nach oben abgeschlossen ist, d.h. für alle $a \in A, c \in C$ mit $c < a$ gilt auch $a \in C$.

Beispiel. Für jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ist $C_q = (q, \infty)_{\mathbb{Q}}$ ein Dedekind-Schnitt in $\mathcal{Q}$. Es gibt aber auch Dedekind-Schnitte, die nicht die Form C_q für ein $q \in \mathbb{Q}$ haben, zum Beispiel $\sqrt{2} := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0, q^2 > 2\} \subseteq \mathcal{Q}$.

Die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ sind die Menge aller Dedekind-Schnitte in $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$. In [5, Satz 13.2] wird bewiesen, dass $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ gilt.

Mit der Relation $<_{\mathbb{R}}$, definiert durch

$$C \leq_{\mathbb{R}} D :\Leftrightarrow D \subseteq C$$

für $C, D \in \mathbb{R}$, bildet $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ eine lineare Ordnung. Wir definieren zudem eine Addition auf $\mathbb{R}$ durch

$$C + D = \{c + d \mid c \in C, d \in D\}$$

für $C, D \in \mathbb{R}$. Dadurch wird $(\mathbb{R}, +, C_0, <_{\mathbb{R}})$ zu einer angeordneten abelschen Gruppe. Für positive reelle Zahlen $C, D > 0 = C_0$ definieren wir zudem eine Multiplikation durch

$$C \cdot D = \{c \cdot d \mid c \in C, d \in C\}.$$

Diese kann dann eindeutig zu einer Multiplikation auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Da sich die Injektion

$$\iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ q \mapsto C_q = (q, \infty)_{\mathbb{Q}}$$

mit den Operationen auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ verträgt, identifizieren wir die Teilmenge $\iota(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Dann gilt offensichtlich $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$. Schließlich bildet $(\mathbb{R}, +, \cdot, C_0, C_1, <_{\mathbb{R}})$ einen angeordneten Körper. Insbesondere ist $\mathcal{R}$ nach Lemma 7.1.2 eine η_0-Ordnung. Nach [16, Satz 1.28] ist $\mathbb{R}$ sogar reell abgeschlossen, da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ algebraisch abgeschlossen ist.

[7] Richard Dedekind (1831–1916), deutscher Mathematiker

Cantor hat in [3] nicht nur den Ordnungstyp η der rationalen Zahlen (siehe [3, S. 504]), sondern auch den Ordnungstyp λ der reellen Zahlen $\mathcal{R}$ (siehe [3, S. 511]) charakterisiert. Die rationalen Zahlen haben wir bereits in Abschnitt 3.2 betrachtet. Unser nächstes Ziel ist es, die lineare Ordnung $\mathcal{R}$ bis auf Isomorphie zu beschreiben. Dabei orientieren wir uns hauptsächlich an [18, Chapter 2].

Definition. Seien $\mathcal{A} = (A, <)$ eine lineare Ordnung und $B \subseteq \mathcal{A}$ eine Unterordnung.

1. Wir nennen B **nach unten beschränkt** in $\mathcal{A}$, falls ein $a \in A$ mit $a \leq b$ für alle $b \in B$ existiert. Solch ein a heißt dann **untere Schranke** von B.

2. Ein Element $a \in A$ heißt **Infimum** von B, wenn a die größte untere Schranke von B ist, d.h. a ist eine untere Schranke von B und es gilt $a' \leq a$ für jede untere Schranke a' von B.

3. Wir nennen $\mathcal{A}$ **vollständig**, wenn jede nichtleere nach unten beschränkte Unterordnung von $\mathcal{A}$ ein Infimum in $\mathcal{A}$ hat.

Bemerkung.

a) Existiert ein Infimum a von X in $\mathcal{A}$, so kann man zeigen, dass dieses eindeutig ist und daher schreiben wir $a = \inf_{\mathcal{A}} X$ oder kurz $a = \inf X$.

b) Es ist nicht schwer zu sehen, dass zwei isomorphe lineare Ordnungen entweder beide vollständig oder beide nicht vollständig sind. Um dies zu beweisen, verfährt man ähnlich wie in Lemma 2.4.8. Deshalb können wir auch von vollständigen Ordnungstypen sprechen.

Beispiel.

a) Die linearen Ordnungen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{Z}$ sind beide vollständig, denn für jede nichtleere nach unten beschränkte Unterordnung $A \subseteq \mathcal{Z}$ gilt $\inf A = \min A \in A$.

b) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, denn das Infimum einer nichtleeren unbeschränkten Unterordnung $A \subseteq \mathcal{R}$ ist gegeben durch $\inf A = \bigcup\limits_{C \in A} C$.

c) Die Unterordnung $\{q \in Q_{>0} \mid q^2 > 2\} \subseteq \mathcal{Q}$ ist nach unten beschränkt, hat aber kein Infimum in $\mathcal{Q}$. Also ist $\mathcal{Q}$ nicht vollständig. Hieraus folgt, dass eine dichte vollständige lineare Ordnung nie abzählbar sein kann, denn nach Korollar 3.2.3 hat eine abzählbare dichte lineare Ordnung entweder Ordnungstyp η, $\mathbf{1}+\eta$, $\eta+\mathbf{1}$ oder $\mathbf{1}+\eta+\mathbf{1}$ und kann deshalb nicht vollständig sein.

Definition. Wir nennen eine lineare Ordnung $\mathcal{A}$ **separabel**, falls eine abzählbare Unterordnung $B \subseteq \mathcal{A}$ existiert, die dicht in $\mathcal{A}$ liegt.

Bemerkung.

a) Ist eine lineare Ordnung separabel, so ist sie offensichtlich auch dicht.

b) Wegen Lemma 2.4.8 sind zwei ordnungsisomorphe lineare Ordnungen entweder beide separabel oder beide nicht separabel. Deshalb können wir auch von separablen Ordnungstypen sprechen.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ tatsächlich separabel ist, verwenden wir das folgende Resultat:

Lemma. *Jeder vollständig angeordnete Körper ist archimedisch.*

Beweis. Ist $(K,<)$ ein nicht-archimedischer angeordneter Körper, so definiert $M = \{a \in K \mid \mathbb{N} < a\}$ eine nichtleere nach unten beschränkte Unterordnung von $(K,<)$, die keinen Infimum hat. Daher kann $(K,<)$ nicht vollständig sein. $\square$

Die rellen Zahlen $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ sind somit ein archimedisch angeordneter Körper. Insbesondere liegt $\mathbb{Q}$ nach [16, Lemma 1.7] dicht in $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$, was die Separabilität von $\mathcal{R}$ zeigt. Wir erhalten nun die folgende Charakterisierung der reellen Zahlen aus [3, S. 511], welche ein Analogon zu Theorem 3.2.2 ist:

Theorem (Cantor)**.** *Eine lineare Ordnung $\mathcal{A}$ ist genau dann separabel, vollständig und hat keine Endpunkte, wenn $\mathcal{A}$ ordnungsisomorph zu $\mathcal{R}$ ist.*

Beweis. Zunächst gehen wir davon aus, dass $\mathcal{A}$ eine separable vollständige lineare Ordnung ohne Endpunkte ist. Es gibt also eine abzählbare Unterordnung $B \subseteq \mathcal{A}$, die dicht in $\mathcal{A}$ liegt. Insbesondere ist auch B eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte. Nach Theorem 3.2.2 finden wir daher einen Ordnungsisomorphismus $f\colon B \to \mathbb{Q}$. Wir definieren nun eine Abbildung $g\colon A \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$g(a) := \inf\nolimits_{\mathbb{R}} f(\{b \in B \mid a <_{\mathcal{A}} b\}).$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass g wohldefiniert und ordnungserhaltend ist. Die Surjektivität von g folgt aus der Vollständigkeit von $\mathcal{A}$. Damit sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{R}$ ordnungsisomorph. Nun gehen wir umgekehrt davon aus, dass ein Ordnungsisomorphismus $f\colon \mathbb{R} \to A$ von $\mathcal{R}$ nach $\mathcal{A}$ existiert. Da $\mathcal{R}$ keine Endpunkte hat, folgt mit Lemma 2.4.8, dass auch $\mathcal{A}$ keine Endpunkte hat. Entsprechend übertragen sich auch die Vollständigkeit und Separabilität von $\mathcal{R}$ via f auf $\mathcal{A}$. □

In Abschnitt 3.2 konnten wir mithilfe der Charakterisierung von $\mathcal{Q}$ alle abzählbaren dichten Ordnungstypen angeben. Ebenso erhalten wir nun alle separablen vollständigen Ordnungstypen:

Korollar. *Jede separable vollständige lineare Ordnung hat den Ordnungstyp* $\mathbf{0}, \mathbf{1}$, $\lambda, \mathbf{1}+\lambda, \lambda+\mathbf{1}$ *oder* $\mathbf{1}+\lambda+\mathbf{1}$.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine separable vollständige lineare Ordnung. Falls $\mathcal{A}$ endlich ist, so hat $\mathcal{A}$ entweder den Ordnungstyp $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$. Ansonsten müssen wir unterscheiden, ob $\mathcal{A}$ Endpunkte hat oder nicht. Hat $\mathcal{A}$ beispielsweise nur ein erstes Element a und kein letztes Element, so hat die Unterordnung $A' = A \setminus \{a\}$ keine Endpunkte. Außerdem lässt sich leicht nachweisen, dass A' auch separabel und vollständig ist. Nach dem obigen Theorem hat A' damit den Ordnungstyp λ. Wegen $\mathcal{A} \cong \{a\} + A'$ hat $\mathcal{A}$ den Ordnungstyp $\mathbf{1}+\lambda$. Die anderen Fälle zeigt man analog. □

Mithilfe dieser Ergebnisse zu $\mathcal{R}$ können wir schließlich auch Frage 2.4.11b) beantworten und die Isomorphieverhältnisse von den linearen Ordnungen $\mathcal{R}, \mathcal{R}\cdot\mathcal{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\mathbb{R}\setminus(0,1]$ klären:

a) Die reellen Zahlen $\mathcal{R}$ sind bis auf Ordnungsisomorphie die einzige separable vollständige lineare Ordnung ohne Endpunkte.

b) Das Produkt $\mathcal{R}\cdot\mathcal{R}$ ist nicht separabel. Um dies zu zeigen, betrachten wir eine Unterordnung $B \subseteq \mathcal{R}\cdot\mathcal{R}$, die dicht in $\mathcal{R}\cdot\mathcal{R}$ liegt. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es also ein $b_x \in B$ mit $(0,x) < b_x < (1,x)$ und offensichtlich gilt $b_x \neq b_y$ für $x \neq y$. Daraus folgt jedoch $|B| \geq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > \aleph_0$. Folglich ist das Produkt $\mathcal{R}\cdot\mathcal{R}$ nicht separabel. Insbesondere gilt $\mathcal{R} \ncong \mathcal{R}\cdot\mathcal{R}$.

c) Die Unterordnung $\mathcal{R}\setminus\{0\} \subseteq \mathcal{R}$ ist separabel, denn $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ liegt dicht in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Damit erhalten wir $\mathcal{R}\cdot\mathcal{R} \ncong \mathbb{R}\setminus\{0\}$, da Separabilität durch Ordnungsisomorphismen übertragen wird. Andererseits ist $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nicht vollständig, denn die nach unten beschränkte Unterordnung $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ hat kein Infimum in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Also haben wir $\mathcal{R} \ncong \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Insbesondere ist es im obigen Theorem von Cantor nicht ausreichend statt Separabilität nur Dichtheit (und $|A| = \mathfrak{c}$) zu fordern.

d) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus (0,1]$ mit der Vorschrift

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

definiert offensichtlich einen Ordnungsisomorphismus von $(\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ nach $(\mathbb{R} \setminus (0,1], <_\mathbb{R})$. Somit gilt $\mathcal{R} \cong \mathbb{R} \setminus (0,1]$. Insbesondere ist auch die Unterordnung $\mathbb{R} \setminus (0,1]$ separabel, vollständig und hat keine Endpunkte. Außerdem folgt $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R} \ncong \mathbb{R} \setminus (0,1] \ncong \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zuletzt möchten wir noch erwähnen, dass $(\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ nach [14, Abschnitt 5.3] bis auf eindeutige Isomorphie der einzige vollständig angeordnete Körper ist. Insbesondere ist jeder vollständig angeordnete Körper archimedisch und reell abgeschlossen.

Literatur

[1] N. Alling: On the existence of real-closed fields that are η_α-sets of power $\aleph_\alpha$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **103**, 341–352, 1962.

[2] S. Bosch: *Algebra*, 8. Auflage, Springer Spektrum, 2013.

[3] G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel), *Math. Ann.* **46**, 481-512, 1895.

[4] P. Erdös, L. Gillman und M. Henriksen: An isomorphism theorem for real-closed fields, *Ann. of Math.* **61**, 542–554, 1955.

[5] U. Friedrichsdorf und A. Prestel: *Mengenlehre für den Mathematiker*, Grundkurs Mathematik **58**, Vieweg, 1985.

[6] L. Gillman: Some remarks on η_α-sets, *Fund. Math.* **43**, 77-82, 1956.

[7] I. Grattan-Guinness: An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen, Erste Mittheilung, *Acta Math.* **124**, 65-107, 1970.

[8] F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, 1914.

[9] F. Hausdorff: Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen, *Math. Ann.* **65**, 435-505, 1908.

[10] S. Kuhlmann: Skript zur Vorlesung *Reelle algebraische Geometrie 1*, Universität Konstanz, Wintersemester 2018/2019.

[11] S. Kuhlmann: Skript zur Vorlesung *Reelle algebraische Geometrie 2*, Universität Konstanz, Sommersemester 2019.

[12] K. Kunen: *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **102** (Hrsg.: J. Barwise, D. Kaplan, H. J. Keisler, P. Suppes, A. S. Troelstra), North Holland, 1980.

[13] K. Mainzer: Natürliche, ganze und rationale Zahlen, *Zahlen*, Grundwissen Mathematik **1** (Hrsg.: G. Hämmerlin, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Lamotke, R. Remmert und W. Walter), 2. Auflage, Springer, 1988.

[14] K. Mainzer: Reelle Zahlen, *Zahlen*, Grundwissen Mathematik **1** (Hrsg.: G. Hämmerlin, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Lamotke, R. Remmert und W. Walter), 2. Auflage, Springer, 1988.

[15] P. Morandi: *Field and Galois Theory*, Graduate Texts in Mathematics **167** (Hrsg.: S. Axler, F. W. Gehring und P. R. Halmos), Springer, 1996.

[16] A. Prestel: Skript zur Vorlesung *Reelle Algebra*, Universität Konstanz, Wintersemester 2007/2008.

[17] A. Robinson: Solution of a problem by Erdös–Gillman–Henriksen, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7**, 908–909, 1956.

[18] J. G. Rosenstein: *Linear Orderings*, Academic Press, 1982.

[19] C. Scheiderer: Skript zur Vorlesung *Reelle algebraische Geometrie II*, Universität Konstanz, Sommersemester 2016.

[20] W. Sierpiński: Sur une propriété des ensembles ordonnés, *Fund. Math.* **36**, 56-67, 1949.

[21] A. Tarski: Über unerreichbare Kardinalzahlen, *Fund. Math.* **30**, 68-89, 1938.