Mathematik an der Schule und an der Uni am Beispiel der Exponentialfunktion

Robert Denk

28. 10. 1999

1. Die Exponentialfunktion im Reellen

Jeder kennt aus der Schule (hoffentlich) die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(x)$ mit dem zugehörigen Graphe, siehe Abbildung 1.

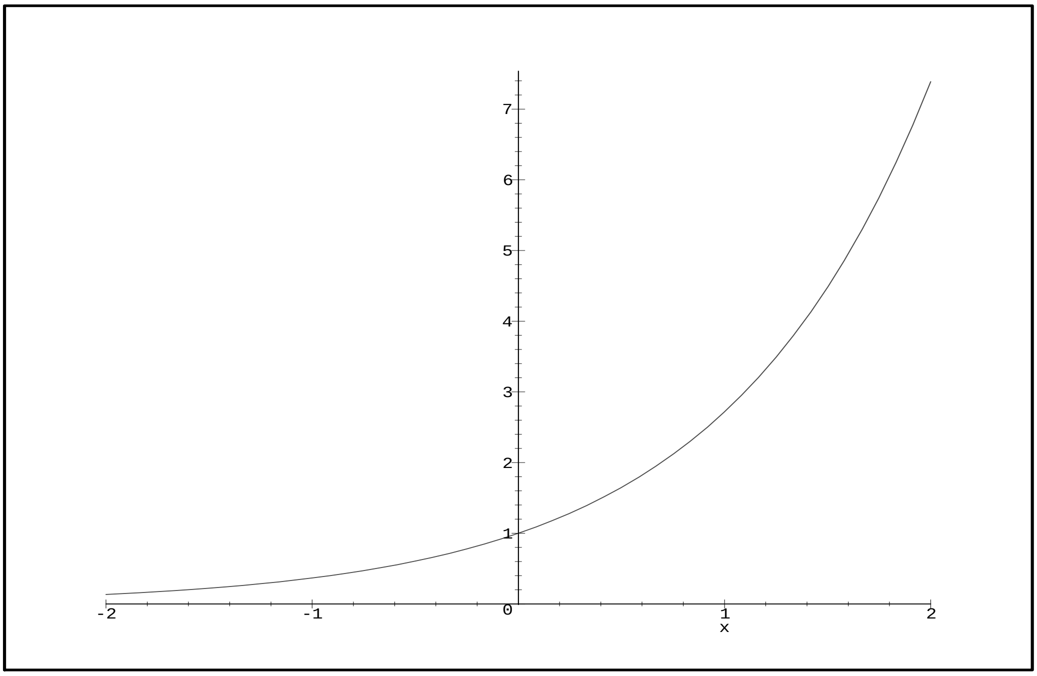

Abbildung 1: Die reelle Exponentialfunktion

Aus der Schule weiß man auch viele Eigenschaften dieser Funktion, z.B. $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\exp(1) = \mathrm{e} = 2.71828\ldots$ und daß die Ableitung der Exponentialfunktion wieder dieselbe Funktion ist. Aber an der Uni kann man die Eigenschaften dieser Funktion nicht einfach glauben, man muß vielmehr klar trennen, was die Definition ist und welche Eigenschaften aus der Definition folgen.

In einem ersten Schritt muß man also eine exakte Definition der Exponentialfunktion angeben. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen, so ist etwa in einem Buch von

O. Forster[1], einem Standardbuch für die Analysis, folgendes zu finden (siehe [F], S. 45):

Definition 1. Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\exp(x) := \mathrm{e}^x := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Dabei stellen sich sofort Fragen, die man noch klären muß:

- Sind die Punkte „...“ überhaupt gerechtfertigt? (Dies ist die Frage nach der *Konvergenz* der entsprechenden unendlichen Reihe.)
- Beschreibt diese Funktion das, was man eigentlich haben will?

Als Antwort auf die erste Frage lernt man im ersten Semester an der Uni, daß diese Reihe überall (d.h. für alle x) und absolut konvergiert. Tatsächlich ist die Konvergenz auch relativ schnell, wie man an folgendem Beispiel lernt, das $\mathrm{e} = \exp(1)$ berechnet. In der folgenden Liste werden die Partialsummen

$$s_N = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!}$$

aufgelistet (diese sind mit einem Computer berechnet, was übrigens *nicht* typisch für die Mathematik ist):

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1.\\
s_1 &= 2.\\
s_2 &= 2.500000000\\
s_3 &= 2.666666667\\
s_4 &= 2.708333334\\
s_5 &= 2.716666667\\
s_6 &= 2.718055556\\
s_7 &= 2.718253969\\
s_8 &= 2.718278771\\
s_9 &= 2.718281527\\
s_{10} &= 2.718281803\\
s_{11} &= 2.718281828\\
s_{12} &= 2.718281830\\
s_{13} &= 2.718281830\\
s_{14} &= 2.718281830
\end{aligned}$$

[1] O. Forster: Analysis 1 (4.Auflage), Vieweg-Verlag, Braunschweig 1983. Dieses Buch wird im folgenden mit [F] abgekürzt.

Um die zweite Frage zu beantworten, muß man die Aussagen, welche man für die Exponentialfunktion gerne hätte, jetzt beweisen. Vor allem sollten dabei auch andere Darstellungen abgeleitet werden, welche man als alternative Definitionen auch noch im Kopf haben könnte.

Im Beispiel der Exponentialfunktion kann man etwa folgendes beweisen (vgl. [F], S. 49):

Satz 2. *Es gilt* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

Der Beweis dieses Satzes ist keineswegs trivial und erfordert einigen Aufwand! Aber wenn man diesen Satz kennt, kann man weitere Aussagen finden:

Satz 3. a) *Es gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

b) *Es gilt* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Um a) zu sehen, wendet man Satz 2 an und erhält

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0)\,.$$

Aber nach Definition ist $\exp(0) = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$, d.h. man erhält $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, wie gewünscht.

b) Für $x \geq 0$ ist, wieder nach Definition der Exponentialfunktion,

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \geq 1 > 0\,.$$

Für $x < 0$ erhält man mit Teil a) $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$, da jetzt $-x > 0$ ist und man damit Teil a) auf $-x$ anwenden kann. □

Unter Verwendung der Definition kann man auch folgendes zeigen:

Satz 4. *Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion.*

Für einen Beweis möchte man gerne die Reihe

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Term für Term ableiten. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(x) = 0 + 1 + 2\cdot\frac{x}{2} + 3\cdot\frac{x^2}{3!} + \cdots = \exp(x)\,.$$

Aber ob man das wirklich tun darf, ist nicht so klar und muß auch zunächst noch bewiesen werden. In der Mathematik muß man sich bei jedem Schritt fragen, ob und warum dies wirklich erlaubt ist.

2. Die Exponentialfunktion im Komplexen (der höhere Standpunkt)

a) Was sind komplexe Zahlen?

Ein wichtiger Punkt beim Rechnen mit Zahlen ist das Lösen von Gleichungen, etwa von Gleichungen der Form $3x = 2$ mit der Lösung $x = \frac{2}{3}$ oder der Form $x^2 = 4$ mit den beiden Lösungen $x = 2$ und $x = -2$. Gerade bei den quadratischen Gleichungen gibt es aber einige, die sich nicht lösen lassen, etwa $x^2 = -1$. Daher ist es notwendig (oder zumindest in vielen Fällen günstig), die Menge der (reellen) Zahlen zu erweitern. Man *definiert* die Zahl i als eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Damit ist automatisch auch $-\mathrm{i}$ eine Lösung dieser Gleichung, denn

$$(-\mathrm{i})^2 = ((-1)\cdot\mathrm{i})^2 = (-1)^2\cdot\mathrm{i}^2 = 1\cdot\mathrm{i}^2 = -1\,,$$

vorausgesetzt, man kann mit dem neuen Symbol i genauso rechnen, wie man's von den reellen Zahlen gewohnt ist. Wenn man das weiterhin auch wirklich tun will, muß man auch Ausdrücke wie $2\mathrm{i}$, $3+\mathrm{i}$ und $1+2\mathrm{i}$ zulassen, allgemein alle Ausdrücke der Form $x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Tatsächlich definiert man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als

$$\mathbb{C} := \{x + y\mathrm{i} \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit der zusätzlichen Vereinbarung, daß alle Rechenregeln weiterhin gelten sollen und daß außerdem $\mathrm{i}^2 = -1$ gilt. Für eine Zahl $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ heißt x der Realteil von z und y der Imaginärteil von z.

Es stellt sich damit heraus, daß man damit in gewisser Weise eine endgültige Erweiterung der Zahlen gefunden hat. Insbesondere kann man etwa alle quadratischen Gleichungen damit lösen. So hat z.B. die Gleichung

$$x^2 + 9 = 0$$

die Lösungen $x = 3\mathrm{i}$ und $x = -3\mathrm{i}$, denn

$$(3\mathrm{i})^2 = 3^2\cdot\mathrm{i}^2 = 9\cdot(-1) = -9$$

(und genauso für $x = -3\mathrm{i}$).

b) Die komplexe Exponentialfunktion

Durch Anwendung der üblichen Rechenregeln und der Vereinbarung $\mathrm{i}^2 = -1$ kann man auch die Potenzen $z^2, z^3, \ldots$ berechnen. Für $z = x + y\mathrm{i}$ erhält man etwa

$$z^2 = (x + y\mathrm{i})^2 = x^2 + 2xy\mathrm{i} + (y\mathrm{i})^2 = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i}\,.$$

Dies ist wieder eine komplexe Zahl mit Realteil x^2-y^2 und Imaginärteil $2xy$. Genauso geht's mit den höheren Potenzen $z^3, z^4, \ldots$ weiter.

Sieht man sich noch einmal die Definition der Exponentialfunktion an (Definition 1), so sieht man, daß diese Definition genauso für komplexe Zahlen übernommen werden kann. Wir definieren also

Definition 5. Die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\exp(z) := \mathrm{e}^z := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Auch hier ist wieder die Frage nach der Konvergenz zu stellen, aber die beweist man wörtlich genauso wie im Fall der reellen Exponentialfunktion. Es hat sich ja jetzt auch nichts Wesentliches verändert, außer daß wir jetzt mit *anderen Zahlen* rechnen als vorher.

Für eine komplexe Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ ist der Wert der Exponentialfunktion $\exp(z)$ wieder eine komplexe Zahl, also von der Form $\exp(z) = v + w\,\mathrm{i}$. Jetzt kann man die Exponentialfunktion also nicht mehr so einfach zeichnen, weil man mit x, y, v, w vier Größen hat und damit eine vierdimensionale Zeichnung bräuchte. Aber wenn man sich auf den Realteil v beschränkt, so erhält man Abbildung 2. In dieser Abbildung ist $v = \operatorname{Re}\exp(x + y\,\mathrm{i})$ als Funktion von x und y zu sehen.

Entlang der x-Achse, also für $y = 0$, kann man noch unsere altbekannte reelle Exponentialfunktion erkennen. Doch was ist für $y \neq 0$? Wir erkennen, daß uns diese einfache Wiederholung der Definition für komplexe Zahlen auf neue Fragestellungen führt. Es ist die Aufgabe der Mathematik (und im übrigen das Spannende an der Mathematik), diese neuen Strukturen, die sich so natürlich ergeben haben, zu analysieren.

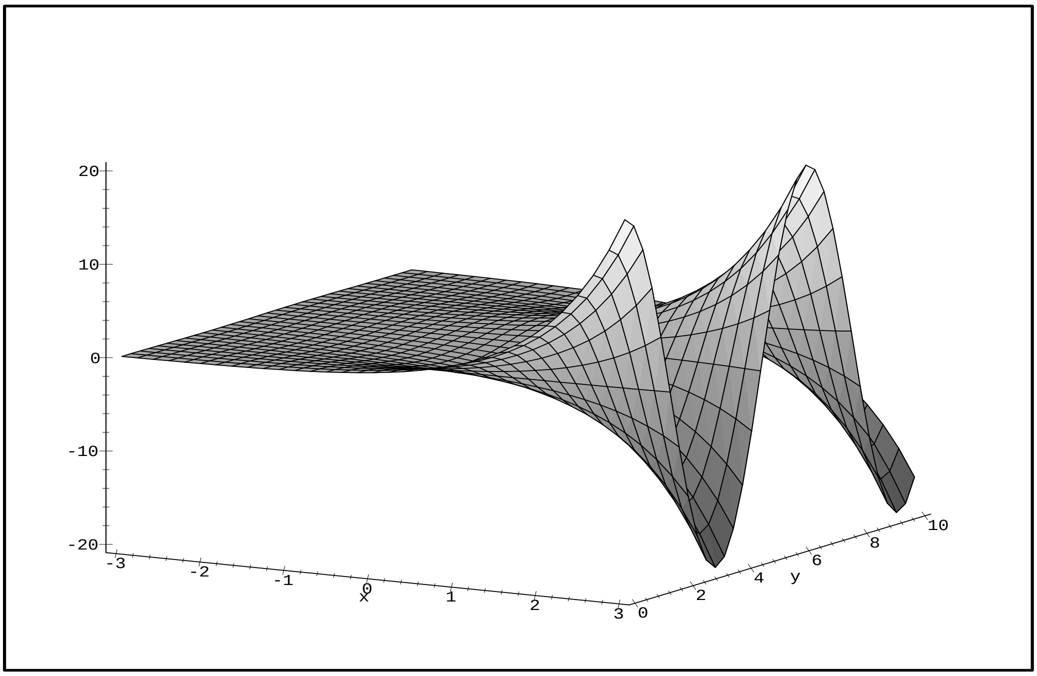

Abbildung 2: Der Realteil der komplexen Exponentialfunktion.

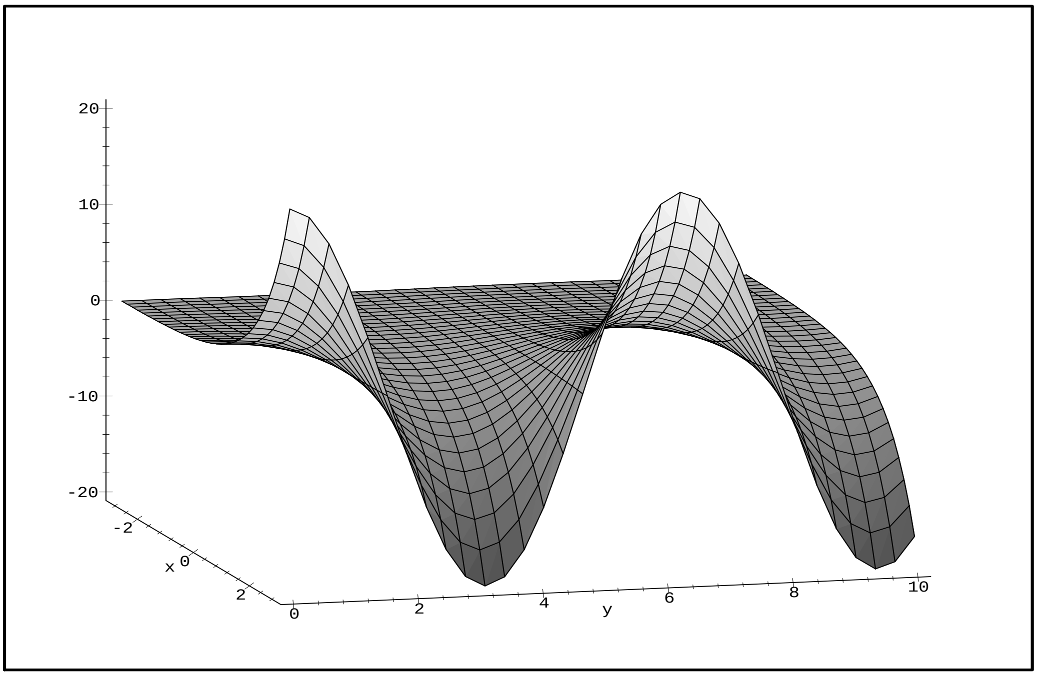

Abbildung 3: Der Realteil der komplexen Exponentialfunktion, gedrehte Darstellung

In unserem Beispiel stellt sich heraus, daß die komplexe Exponentialfunktion nicht nur eine Erweiterung der reellen Exponentialfunktion ist, sondern auch die trigonometrischen Funktionen sin und cos enthält. Tatsächlich gilt

$$\exp(x + y\,\mathrm{i}\,) = \exp(x)\big(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y\big)\,.$$

Dabei stellt sich jetzt natürlich, wie schon bei der Exponentialfunktion, die Frage, wie der Cosinus und der Sinus überhaupt definiert werden. Am günstigsten ist es, wenn man die obige Gleichung als *Definition* dieser Funktionen betrachtet. Dann hat man diese Gleichung natürlich nicht zu beweisen, denn sie gilt nach Definition. Aber was man beweisen muß ist, daß diese Definition von sin und cos das erfüllt, was man gerne haben möchte.

Also noch einmal formal (siehe auch [F], S. 86):

Definition 6. Für $y \in \mathbb{R}$ sei

$$\cos(y) := \mathrm{Re}\,(\exp(\,\mathrm{i}\,y)) \quad \text{und} \quad \sin(y) := \mathrm{Im}\,(\exp(\,\mathrm{i}\,y))\,.$$

In dieser Definition ist der „Winkel“ y in Bogenmaß zu interpretieren. Unmittelbar aus dieser Definition sieht man die berühmte *Formel von Euler*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \cos(y) + \mathrm{i}\,\sin(y)$$

und damit auch die obige Formel für $\exp(x + \mathrm{i}\,y)$. Setzt man in der Eulerschen Formel $y = \pi$ (was einem Winkel von 180° entspricht), so erhält man die schöne Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1\,.$$

An den Abbildungen 3–5 erkennt man, wo sich der Cosinus in der komplexen Exponentialfunktion wiederfinden läßt. Jetzt muß man diese Funktion für festes x betrachten. Abbildung 3 ist dasselbe wie Abbildung 2, nur gedreht, und die anderen beiden Abbildungen sind in einem etwas veränderten Maßtab gezeichnet. Zur Erinnerung ist die cos-Funktion noch in Abbildung 6 zu finden.

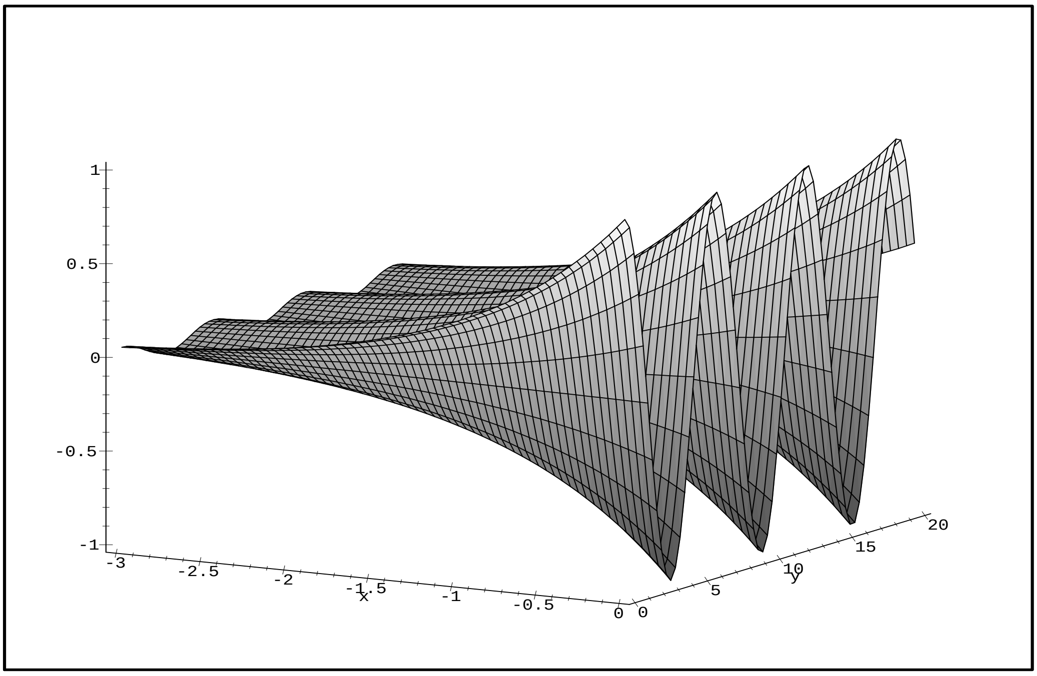

Abbildung 4: Dasselbe wie Abbildung 2 mit geändertem Maßstab.

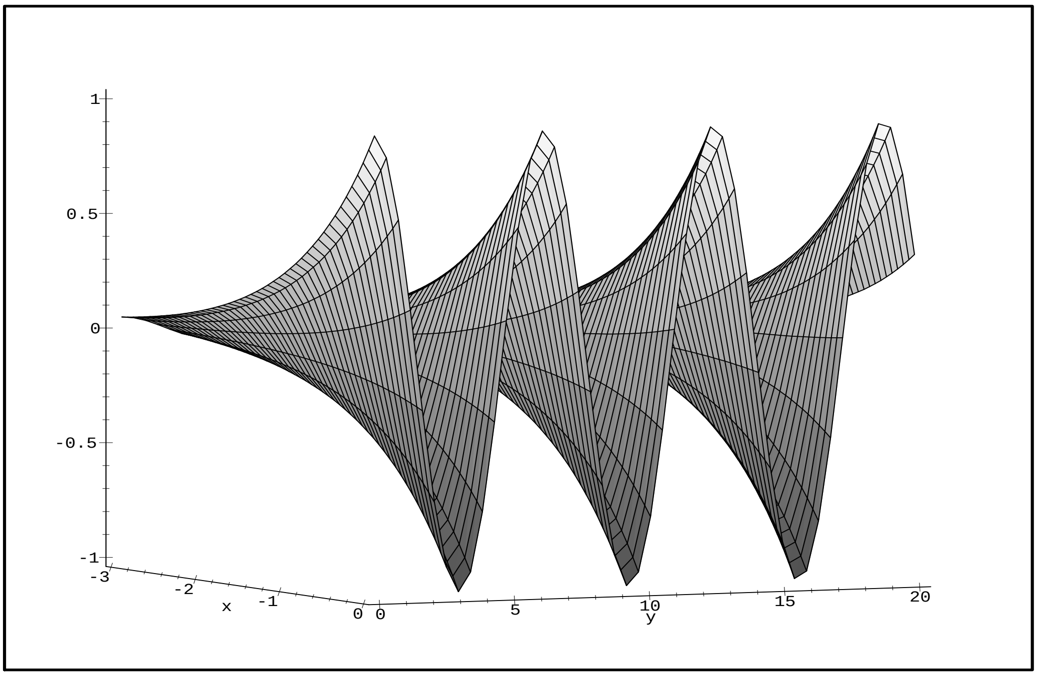

Abbildung 5: Dasselbe wie Abbildung 4 in gedrehter Darstellung.

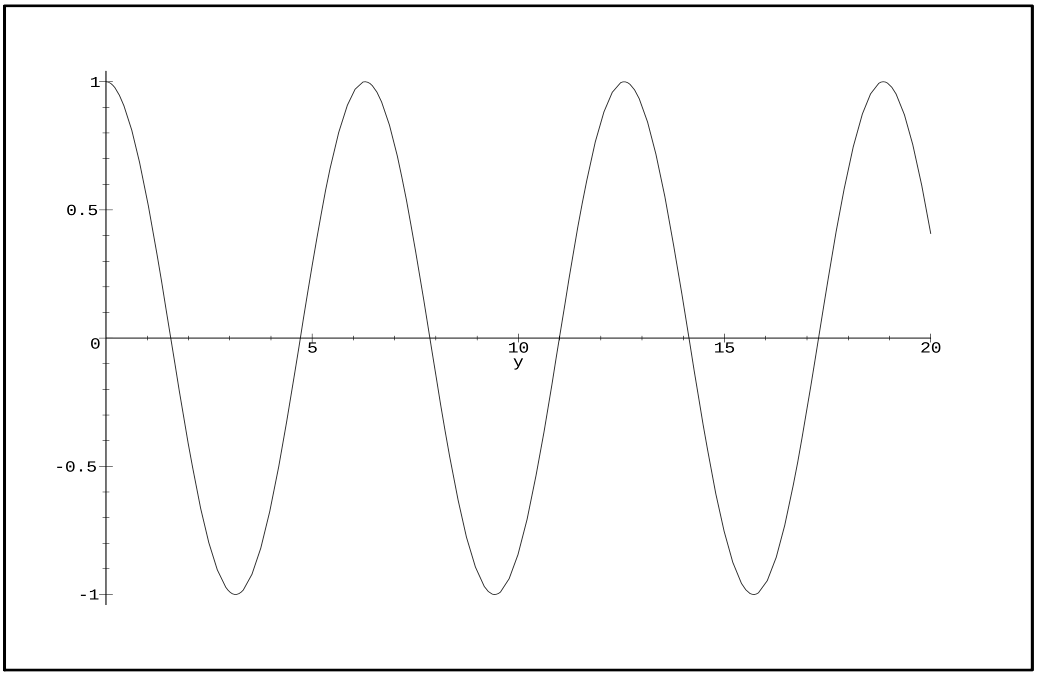

Abbildung 6: Die cos-Funktion.

Wie schon bei der Exponentialfunktion, erlaubt es diese Definition, alle Aussagen über die trigonometrischen Funktionen herzuleiten. Ein Beispiel dafür ist der folgende Satz.

Satz 7. *Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ das Additionstheorem*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\,.$$

Beweis. Um dies zu sehen, kann man Satz 1 verwenden. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a+b)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} \\ &= (\cos a + \mathrm{i}\,\sin a) \cdot (\cos b + \mathrm{i}\,\sin b) \\ &= \cos a \cos b + \mathrm{i}\,\cos a \sin b + \mathrm{i}\,\sin a \cos b + \mathrm{i}^2 \sin a \sin b \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + \mathrm{i}\,(\cos a \sin b + \sin a \cos b)\,. \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach der Eulerschen Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a+b)} = \cos(a+b) + \mathrm{i}\,\sin(a+b)\,.$$

Vergleicht man von den beiden Darstellungen jeweils den Realteil, erhält man

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)\,,$$

also genau das, was wir wollten. Durch einen Vergleich der Imaginärteile erhalten wir übrigens das Additionstheorem für den Sinus. □

Die Definition von sin und cos läßt sich übrigens auch in einer etwas anderen Form schreiben. Dazu beachtet man $\cos(-y) = \cos(y)$ und $\sin(-y) = -\sin(y)$ (was man aber auch noch zunächst beweisen muß!) und erhält

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} &= \cos y + \mathrm{i}\,\sin y\,, \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,y} &= \cos y - \mathrm{i}\,\sin y\,. \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, bekommt man

$$\cos y = \frac{1}{2}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,y})\,,$$

subtrahiert man beide Gleichungen, so ergibt sich

$$\sin y = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,y})\,.$$

Unter Verwendung dieser Formeln kann man etwa die Ableitung des Cosinus ausrechnen (da wir die Ableitung der Exponentialfunktion schon kennen).

Satz 8. *Die Ableitung der* cos*-Funktion ist das Negative der* sin*-Funktion, d.h.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis. Wir wenden Satz 4 an, müssen aber beachten, daß bei der Nachdifferentiation zusätzliche Terme der Form $\pm\,\mathrm{i}$ nach unten kommen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{2}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,y})\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}) \\ &= -\frac{1}{2\,\mathrm{i}}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}) \\ &= -\sin x\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß $\mathrm{i} = -1/\,\mathrm{i}$ gilt. □

Wir sehen also, daß die (wörtliche) Ausweitung der Definition der Exponentialfunktion von den reellen auf die komplexen Zahlen zu einer neuen, reicheren Struktur führt, die es uns erlaubt, die trigonometrischen Funktionen wiederzufinden (bzw. zu definieren). Die Aussagen über diese Funktionen, wie etwa der letzte Satz, erweisen sich bei diesem Standpunkt als Folgerungen von entsprechenden Aussagen über die Exponentialfunktion.

Zusammenfassend kann man sagen, daß für die Mathematik an der Uni (anders als an der Schule) folgende Punkte von wesentlicher Bedeutung sind:

- Saubere Definition aller Ausdrücke und „Gegenstände“, die man behandeln will (hier kann man sich als Erfinder fühlen).
- Klare Trennung von Aussagen, die nach Definition gelten, und Aussagen, die man erst noch beweisen muß.
- Untersuchung der Strukturen, die sich aus den Definitionen ergeben (hier kann man sich als Entdecker fühlen).
- Betrachtung „altbekannter“ Ausagen von einem höheren Standpunkt aus (wie im Beispiel der neue Zusammenhang von Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen, die nur zwei Seiten derselben Medaille sind).

Gerade der letzte Punkt kann unglaubliche Zusammenhänge liefern und dementsprechend viel Spaß machen. Aber bis man soweit ist, ist eine Menge harter Arbeit zu leisten!