

---

# Zur Theorie Wärmeleitender Reissner-Mindlin-Platten

---

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors der  
Naturwissenschaften  
am Fachbereich Mathematik und Statistik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Sektion  
der Universität Konstanz

vorgelegt von

**Michael Pokojovy**

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Dezember 2011

Referenten:

Prof. Dr. Reinhard Racke  
Fachbereich Mathematik und Statistik  
Universität Konstanz

Prof. Dr. Robert Denk  
Fachbereich Mathematik und Statistik  
Universität Konstanz

Konstanz, September 2011



I am a firm believer that without speculation  
there is no good or original observation.

CHARLES ROBERT DARWIN (1809–1882)

---

---

# Danksagung

---

Die vorliegende Dissertation entstand am Fachbereich Mathematik und Statistik an der Universität Konstanz während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl Prof. Dr. Reinhard Racke. Hiermit möchte ich allen danken, die mir bei der Anfertigung dieser Arbeit behilflich waren.

Ein besonderes Wort des Dankes richte ich an meinen Betreuer und Doktorvater Herrn Prof. Dr. Reinhard Racke. Als leidenschaftlicher Dozent und Forscher hat Herr Prof. Dr. Racke mich schon während meines Studiums am Fachbereich Mathematik und Statistik für die Wissenschaft begeistert. Bei meinem Werdegang hat er mich stets im Hinblick auf meine fachliche, berufliche und persönliche Weiterentwicklung gefördert. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Racke für die Heranführung an das interessante Promotionsthema, für die vielen Anregungen und Diskussionen, für die akademische Freiheit sowie die glückliche Zeit der Assistententätigkeit an seinem Lehrstuhl.

Herrn Prof. Dr. Robert Denk danke ich für die freundschaftliche Zusammenarbeit, für die vielen hilfreichen Gespräche und für die Übernahme des Koreferats. Für anregende wissenschaftliche Diskussionen möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Johannes Schropp, Frau Prof. Dr. Marié Grobbelaar-van Dalsen und Herrn Priv. Doz. Dr. Matthias Geißert bedanken.

Genauso bedanke ich mich bei meinen Kollegen und Freunden Gerda Baumann, Buğra Kabil, Mario Kaip, Patrick Kurth, Dr. Thilo Moseler, Tobias Nau, Marco Ritter, Prof. Dr. Jürgen Saal, Martin Saal, Prof. Dr. Oliver Schnürer, Johannes Schnur, Alexander Schöwe, Tim Seger, Anton Verbitsky sowie Dr. Olaf Weinmann für die angenehme Arbeitsatmosphäre. Außerdem möchte ich meinen Dank meinen guten Konstanzer Freunden Herrn Wolf Biehler und Frau Dr. Marion Mallmann-Biehler sowie Herrn Prof. Dr. Erhard Roy Wiehn und Frau Miriam Wiehn für ihre Unterstützung aussprechen.

Ein großer Dank gilt auch meinen Eltern Wasyl und Helena, meiner Schwester Sina sowie meiner Großmutter Alexandra.

Konstanz, im Herbst 2011

Michael Pokojovy



---

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>2</b>
<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Thermoelastizitätstheorie</b>	<b>7</b>
1.1 Kinematische Grundlagen . . . . .	8
1.1.1 Deformationsvorgang . . . . .	9
1.1.2 Polare Zerlegung des Deformationsgradienten . . . . .	11
1.1.3 Verzerrungsmaße und Verzerrungstensoren . . . . .	11
1.1.4 Verzerrungsrate . . . . .	12
1.2 Statische Grundlagen . . . . .	13
1.2.1 CAUCHYScher Spannungstensor . . . . .	13
1.2.2 1. und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor . . . . .	13
1.3 Bilanzgleichungen . . . . .	14
1.3.1 Massenbilanz . . . . .	14
1.3.2 Impulsbilanz . . . . .	15
1.3.3 Drehimpulsbilanz . . . . .	16
1.3.4 Mechanische Energiebilanz . . . . .	16
1.3.5 Energieerhaltung . . . . .	17
1.3.6 Thermische Energie . . . . .	17
1.4 Stoffgleichungen . . . . .	19
1.4.1 Elastizität . . . . .	19
1.4.2 Elastizitätstensor . . . . .	20
1.4.3 Isotropie . . . . .	21
1.4.4 HOOKEsches Gesetz . . . . .	21
1.4.5 Thermoelastizität . . . . .	22
1.4.6 CATTANEOSches Gesetz . . . . .	22
1.5 Modellierung von Platten . . . . .	23
1.5.1 Bewegungsgleichungen für den elastischen Anteil . . . . .	25
1.5.2 Wärmeleitung in dünnen Platten . . . . .	31
1.5.3 Zusammenfassung und Linearisierung . . . . .	35
<b>2 Existenz und Stabilität im Linearen</b>	<b>37</b>
2.1 REISSNER-MINDLIN-Gleichungen . . . . .	37
2.1.1 Wohlgestelltheit . . . . .	39
2.1.2 Exponentielle Stabilität bzw. deren Fehlen . . . . .	45
2.1.3 Exponentielle Stabilität – Vollgedämpftes System . . . . .	51

---

2.1.4	Exponentielle Stabilität – Gedämpfte Biegung, Rotationsfreiheit . . . . .	53
2.2	Gleichungen für thermoelastische Dehnungen . . . . .	61
2.2.1	Wohlgestelltheit . . . . .	63
2.2.2	Exponentielle Stabilität bzw. deren Fehlen . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Existenz und Stabilität im Nichtlinearen</b>	<b>68</b>
3.1	Ein Lokaler Existenzsatz . . . . .	68
3.2	Globale Existenz und Exponentielle Stabilität . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Exakte Randsteuerbarkeit im Linearen</b>	<b>91</b>
4.1	Formulierung und Reduktion . . . . .	93
4.2	Lösbarkeit des Inhomogenen Problems . . . . .	96
4.3	Exakte Steuerbarkeit . . . . .	103
4.3.1	Eine Energieabschätzung . . . . .	104
4.3.2	Beobachtbarkeitsungleichung und Exakte Steuerbarkeit . . . . .	105
4.4	Dissipationsfreie Platten . . . . .	114
<b>A</b>	<b>Evolutionsgleichungen</b>	<b>118</b>
A.1	Operatorhalbgruppen und Lineare CAUCHY-Probleme . . . . .	118
A.1.1	Stark Stetige Halbgruppen . . . . .	118
A.1.2	Homogene CAUCHY-Probleme . . . . .	120
A.1.3	Inhomogene CAUCHY-Probleme . . . . .	122
A.2	Quasilineare Symmetrisch-Hyperbolische Systeme . . . . .	122
<b>B</b>	<b>Steuerungstheorie in BANACHräumen</b>	<b>127</b>
B.1	Steuerungs- und Beobachtungsoperatoren . . . . .	127
B.2	Steuerbarkeit . . . . .	128
<b>C</b>	<b>Das Divergenzproblem</b>	<b>130</b>
C.1	Der BOGOWSKIĀ-Operator . . . . .	130
C.2	Anwendung auf Rotationsfreie Vektorfelder . . . . .	131
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>136</b>

---

---

# Einleitung

---

Bei einer Platte handelt es sich um einen dreidimensionalen elastischen Festkörper, welchen man sich in der einfachsten Variante als einen Quader vorstellen kann, dessen Höhe viel geringer als die Abmessungen der Grundfläche ist. Im Rahmen der Kontinuumsmechanik geht man in der allgemeinen Situation von der folgenden Beschreibung aus: Zu einem Körper  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  gebe es ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und eine stetige Funktion  $h: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  derart, dass

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_3| \leq h(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}\}$$

gilt. Wenn das Verhältnis von  $\max_{(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}} h(x_1, x_2)$  zu einer charakteristischen Länge von  $\Omega$  (z. B. dem minimalen Krümmungsradius von  $\Omega$  oder der kleineren Kantenlänge, falls  $\Omega$  ein Rechteck ist, usw.) gering ist, dann wird  $\mathcal{B}$  als eine Platte bezeichnet (vgl. [61]). Je nach diesem Verhältnis wird zwischen dünnen Platten oder Platten mittlerer Dicke unterschieden. Ist  $h$  konstant, so spricht man von einer Platte gleichmäßiger Dicke. Die Menge  $\bar{\Omega} \times \{0\}$  heißt die Mittelebene der Platte. Eine besondere Rolle in der Plattenmodellierung spielen die auf der Mittelebene senkrecht stehenden Fasern parametrisiert durch die Segmentenschar  $\{(x_1, x_2)\} \times [-h(x_1, x_2), h(x_1, x_2)] \mid (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$ .

Auf den ersten Blick stellt eine Platte einen Spezialfall eines dreidimensionalen Festkörpers dar. Jedoch gibt es eine Reihe wesentlicher Unterschiede zwischen der konventionellen Elastizitätslehre und den Plattentheorien. Es seien unter anderem die folgenden Aspekte erwähnt: Im Gegensatz zu der in der allgemeinen Elastizitätstheorie essentiellen Tatsache, dass es in einem Körper keine großen Deformationen gibt, ohne dass im Inneren des Körpers große Spannungen herrschen, kann eine Platte deutliche Verformungen erfahren, ohne dass diese beträchtliche Spannungen hervorrufen (s. [44]). Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass man bei einer Platte in der Regel keine Randbedingungen an der Ober- bzw. Unterseite vorschreibt. Außerdem stellt eine Platte, mathematisch gesehen, einen singulären Limit eines dreidimensionalen Körpers für  $h \rightarrow 0$  dar. Neben rein analytischen Schwierigkeiten im Falle  $h \rightarrow 0$  tauchen auch numerische Probleme auf, wie z. B. das „Locking-Problem“, welches erst im Jahre 1986 von Brezzi und Fortin in ihrem Artikel [8] gelöst wurde.

Um dem Streben nach physikalisch adäquater und mathematisch sauberer Beschreibung von Platten nachzukommen, hat man eine Reihe von Modellen entwickelt, welche ihre breite Anwendung in der Mechanik finden. Ein detaillierter Überblick über die historische Entwicklung verschiedener Plattentheorien findet sich in der Arbeit [61] von Naghdi. Zu den bekanntesten und populärsten Theorien gehören die von POISSON und KIRCHHOFF (zu welcher auch LOVE und VON KÁRMÁN beigetragen haben) und die von REISSNER und MINDLIN (welche auch teilweise auf den Ideen aus der Balkentheorie von TIMOSHENKO aufgebaut ist). Obwohl der klassische Zugang von KIRCHHOFF in der Mathematik sehr beliebt und gut erforscht ist, sodass man die KIRCHHOFFsche Gleichung sogar gelegentlich als „die“ Plattengleichung bezeichnet, wird in der Mechanik die deutlich allgemeinere Theorie von REISSNER und MIND-

LIN bevorzugt. Dies ist nicht nur damit zu begründen, dass man dadurch sowohl dünne und schubstarre als auch mitteldicke und schubweiche Platten gut modellieren und die Randbedingungen leichter vorschreiben kann, sondern auch, dass das Problem numerisch viel besser handhabbar ist und stärkere strukturelle Ähnlichkeiten mit der zweidimensionalen Elastizität aufweist, was das Modell für die zahlreichen Anwendungen in der Strukturmechanik besonders attraktiv macht (s. z. B. [25], [26]).

Ein weiterer Aspekt, welchen wir berücksichtigen möchten, ist, dass die meisten Elastizitätsvorgänge in einem Festkörper eng an die thermischen Prozesse gekoppelt sind, denn einerseits wird durch elastische Reibungen Wärme im Körper produziert, andererseits führen Temperaturunterschiede zu lokalen Körperausdehnungen und somit auch zu Spannungen. Wir haben uns hier für die Wärmeflussgleichung nach CATTANEO entschieden. Im Gegensatz zum klassischen parabolischen Wärmeleitungssystem nach FOURIER

$$\theta_t + \kappa \Delta \theta = 0 \quad \text{bzw.} \quad \theta_t + \operatorname{div} q = 0, \quad q + \kappa \nabla \theta = 0$$

handelt es bei dem CATTANEO-System

$$\theta_t + \operatorname{div} q = 0, \quad \tau_0 q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0$$

um ein System hyperbolischer partieller Differentialgleichungen (s. [9]). Obwohl die beiden Modelle sich in den meisten Fällen sowohl qualitativ als auch quantitativ ähneln<sup>1</sup> (cf. [32]), zeichnet sich die FOURIER-Wärmeleitung dadurch aus, dass die Wärmeausbreitungsgeschwindigkeit unendlich ist: ändert sich die Temperatur an einer Stelle, so ist die Wirkung ohne Zeitverzögerung überall im Körper zu sehen (vgl. [10]). Dieses physikalische Paradoxon wird durch das CATTANEO-Gesetz behoben, welches den Wärmetransport durch Pulswellen beschreibt, welche sich im Körper mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Als bekanntes Anwendungsbeispiel hierfür dient das Laser-Reinigen von Computer Chips: die mit kleinen Teilchen verschmutzten Siliziumwafern werden kurz einem Laserimpuls großer Amplitude ausgesetzt, um die Scheibe in Schwingung zu versetzen und dadurch die Teilchen abzustoßen (s. [54]). Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass hyperbolische Wärmeleitung einen einfachen Weg zur exakten Randsteuerbarkeit für thermoelastische Systeme öffnet.

In dieser Arbeit haben wir uns für nichtlineare REISSNER-MINDLIN-Gleichungen entschieden, weshalb wir unsere Resultate ins Themengebiet der Nichtlinearen Elastizität einordnen können. Obwohl wir uns bei der Gleichungsherleitung immer noch des linearen HOOKESchen Gesetzes bedient haben, kann man die Gleichung fast uneingeschränkt in der Technischen Mechanik einsetzen, um über die Grenzbelastung elastischer Körper besser urteilen zu können. Auch an dieser Stelle ist eine wichtige Beziehung zur nichtlinearen zweidimensionalen Elastizität zu sehen, welcher ein Teil des Systems – die sogenannten elastischen Dehnungen  $u_1, u_2$  – gehorcht. Das Problem ist aber deutlich komplizierter als die zweidimensionale Elastizität, da es neben einer dritten nichtlinearen Gleichung für die Biegung  $w$  eine Kopplung mit den Faserdrehwinkeln  $\psi, \varphi$  und sämtlichen thermischen Variablen  $\theta, \mathbf{q}_\theta, \tilde{\theta}, \mathbf{q}_{\tilde{\theta}}$  gibt.

Das oben genannte nichtlineare Modell einer wärmeleitenden Platte nach CATTANEO mit dem strukturellen Ansatz nach REISSNER und MINDLIN wird ausführlich im ersten Kapitel

<sup>1</sup>Es sei hier aber auf zwei Ausnahmen hingewiesen: die mit dem CATTANEO-System gekoppelte Balkengleichung nach TIMOSHENKO ist nicht exponentiell stabil, wogegen das FOURIERSche Gesetz die exponentielle Stabilität liefert (s. [19]). Wohlgermerkt handelt es sich bei diesem Resultat um einen singulären Fall, der allerdings physikalisch nicht eintreten kann. Ein weiteres Beispiel ist durch die Resonatorgleichungen im beschränkten Gebiet des  $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ , gegeben. Auch bei diesem System führt der Übergang zum CATTANEO-Gesetz zum Verlust der im Falle des FOURIERSchen Gesetzes vorhandenen exponentiellen Stabilität (s. [68]).

hergeleitet. Dabei haben wir die in [42] entwickelte Methode auf unser Problem übertragen<sup>2</sup>. Dies führt auf das folgende System partieller Differentialgleichungen:

$$\rho h \partial_t^2 u_1 - (\partial_{x_1} N_{11}(\nabla u, \nabla w) + \partial_{x_2} N_{12}(\nabla u, \nabla w)) + \frac{E}{2(1-\mu)} \partial_{x_1} \tilde{\theta} = f_1, \quad (1)$$

$$\rho h \partial_t^2 u_2 - (\partial_{x_1} N_{21}(\nabla u, \nabla w) + \partial_{x_2} N_{22}(\nabla u, \nabla w)) + \frac{E}{2(1-\mu)} \partial_{x_2} \tilde{\theta} = f_2, \quad (2)$$

$$\tau_0 \partial_t \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} = -\lambda_0 \nabla \tilde{\theta}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\kappa} \partial_t \tilde{\theta} + \operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \alpha \eta (\partial_{x_1} \partial_t u_1 + \partial_{x_2} \partial_t u_2) = \frac{\alpha}{\lambda_0} \tilde{p} + \frac{\lambda_1}{h} (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho h \partial_t^2 w - K (\partial_{x_1} (\partial_{x_1} w + \psi) + \partial_{x_2} (\partial_{x_2} w + \varphi)) \\ - \partial_{x_1} (N_{11}(\nabla w, \nabla u) \partial_{x_1} w + N_{12}(\nabla w, \nabla u) \partial_{x_2} w) \\ - \partial_{x_2} (N_{21}(\nabla w, \nabla u) \partial_{x_1} w + N_{22}(\nabla w, \nabla u) \partial_{x_2} w) = f_3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\rho h^3}{12} \partial_t^2 \psi - D (\partial_{x_1}^2 \psi + \frac{1-\mu}{2} \partial_{x_2}^2 \psi + \frac{1+\mu}{2} \partial_{x_1} \partial_{x_2} \varphi) + K (\psi + \partial_{x_1} w) + \frac{D(1+\mu)}{2} \partial_{x_1} \theta = M_1, \quad (6)$$

$$\frac{\rho h^3}{12} \partial_t^2 \varphi - D (\partial_{x_2}^2 \varphi + \frac{1-\mu}{2} \partial_{x_1}^2 \varphi + \frac{1+\mu}{2} \partial_{x_1} \partial_{x_2} \psi) + K (\varphi + \partial_{x_2} w) + \frac{D(1+\mu)}{2} \partial_{x_2} \theta = M_1, \quad (7)$$

$$\tau_0 \partial_t \mathbf{q}_{\theta} + \mathbf{q}_{\theta} = -\lambda_0 \nabla \theta, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\kappa} \partial_t \theta + \operatorname{div} \mathbf{q}_{\theta} + \alpha \eta (\partial_{x_1} \partial_t \psi + \partial_{x_2} \partial_t \varphi) + \frac{12}{h^2} (\lambda_0 - \frac{h\lambda_1}{2}) \theta = \frac{\alpha}{\lambda_0} p + \frac{6\alpha\lambda_1}{h^2} (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1), \quad (9)$$

wobei  $N$  eine glatte  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -Matrixfunktion ist, komplettiert durch entsprechende Anfangs- und Randbedingungen. Hierbei sind wir der Einfachheit halber von einer Platte konstanter Dicke ausgegangen.

Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit einer Linearisierung von (1)–(9), wobei das Problem in zwei Teile zerfällt, indem sich die Gleichungen für die klassischen TIMOSHENKO-Variablen von den Gleichungen für die elastischen Dehnungen entkoppeln. Die dadurch entstehenden Probleme werden separat behandelt. Sie werden jeweils unter Verwendung einer geschickten Transformation auf die Form

$$V_t(t) + AV(t) = F(t) \text{ für } t \in (0, \infty), \quad V(0) = V^0$$

gebracht, um schließlich mit Hilfe der Halbgruppentheorie gelöst zu werden. Dabei gehen wir von der allgemeinen Situation aus, in der man sowohl für die elastischen, als auch auch für die thermischen Variablen die gemischten DIRICHLET-NEUMANN-Randbedingungen vorschreibt. Danach wird die Frage nach der Abklingrate der zum jeweiligen System gehörigen Energie gestellt. Selbst bei einem mechanisch ungedämpften TIMOSHENKO-Balken mit der Wärmeleitung nach CATTANEO, welcher nichts anderes als eine eindimensionale REISSNER-MINDLIN-Platte ist, fällt die Energie nicht exponential ab (s. [19]), was unsere Suche nach passenden Dämpfungen berechtigt. In [43] hat man unter anderem eine rein elastische REISSNER-MINDLIN-Platte studiert. Das über die NEUMANNschen Randbedingungen linear gedämpfte System hat sich als exponentiell stabil erwiesen, wenn man zusätzlich voraussetzt, dass das Gebiet sternkomplementär-sternförmig ist (vgl. Definition 4.3.7). Unsere Aufgabe war es zu untersuchen, wie sich die durch die Wärmedissipation produzierte Dämpfung auf die Stabilität auswirkt. Dabei haben wir eine gewisse Bilanz zwischen den elastischen Dämpfungen, auf die man natürlich nicht komplett verzichten kann, und den geometrischen Bedingungen gefunden.

Im dritten Kapitel kehren wir zu dem ursprünglichen nichtlinearen Problem zurück, welches wir in einer etwas allgemeineren Form betrachten. Bei diesem handelt es sich um ein rein

<sup>2</sup>Außerdem haben wir den physikalischen Zugang gegenüber dem axiomatischen Zugang nach COSSERAT bevorzugt, da Letzterer in der (vor allem ingenieurwissenschaftlichen) Literatur weniger verbreitet und nicht hinreichend intuitiv ist.

hyperbolisches System, welches jedoch von gemischter Ordnung ist, sodass klassische Resultate für hyperbolische Systeme zweiter Ordnung leider nicht anwendbar sind. Deshalb wird das System auf ein semilineares symmetrisch-hyperbolisches System erster Ordnung transformiert, welches wiederum nicht strikt hyperbolisch ist, da die zugehörige Randmatrix nicht invertierbar ist. Um dieses Problem zu lösen, wenden wir die Lösungstheorie von Secchi [75] an, was uns lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen liefert. Als Hauptziel dieses Kapitels haben wir aber die globale Existenz der Lösungen zu beweisen. Wir zeigen, dass die lokal existierende Lösung für hinreichend kleine Daten global fortsetzbar ist und exponentiell abklingt, indem wir uns die im ersten Kapitel bewiesene exponentielle Stabilität im Linearen zu Nutze machen.

Das vierte Kapitel ist der exakten Randsteuerbarkeit des thermoelastischen REISSNER-MINDLIN-Systems mit der Wärmeleitung nach CATTANEO gewidmet. So können wir mit den klassischen Methoden der Kontrolltheorie in BANACH-Räumen zur Existenz einer  $L^2$ -optimalen Randsteuerung gelangen. Dabei verallgemeinern wir die Resultate von Lagnese und Lions [42] auf die thermoelastische Situation. Am Ende des Kapitels werden alle Resultate auf den Fall einer dissipationsfreien Platte übertragen, welche sich mit Hilfe der sogenannten Thermoelastizität vom Typ II nach GREEN & NAGHDI (cf. [24]) modellieren lässt.

Im Anhang werden alle unkonventionellen Hilfsmittel, welche wir in dieser Arbeit benutzt haben, zusammengefasst. Wir zitieren Lösungstheorien für abstrakte CAUCHY-Probleme sowie semilineare symmetrisch-hyperbolische Systeme und diskutieren die Eigenschaften des BOGOWSKIĀ-Operators.

# Thermoelastizitätstheorie

---

Die (Thermo)elastizitätstheorie ist ein Teilgebiet der Kontinuumsmechanik. Diese alte und etablierte Theorie kann auf eine fast 350-jährige Geschichte zurückblicken. So hat HOOKE im Jahre 1678 sein berühmtes Gesetz „ut tensio sic vis“<sup>1</sup> formuliert, welches er zwei Jahre zuvor in Form eines Anagramms „ceiinossttuv“ aufschrieb (cf. [6]). Parallel zu HOOKE hat JACOB BERNOULLI in seinen Arbeiten den Grundstein für die Rationale Mechanik – auch Analytische Mechanik genannt – gelegt, welche im Anschluss von EULER, CAUCHY sowie vielen Generationen der Naturphilosophen weiterentwickelt wurde (s. [81]). Für eine detaillierte Abhandlung über die Geschichte der Elastizitätslehre sei der Leser auf das klassische Buch [82] von Truesdell verwiesen. Heute liegt die Elastizität im Forschungsschwerpunkt der Theoretischen und Experimentellen Physik, der Analytischen und Numerischen Mathematik, der Ingenieur- und Bauwissenschaften und findet immer wieder neue Anwendungsgebiete wie z. B. Medizin (s. [65]).

Um das mechanisch-thermische Verhalten von Stoffen aus der wirklichen Welt zu beschreiben, werden diese als Kontinuum, d. h. als eine „lückenlose“ Anhäufung von materiellen Punkten, aufgefasst. Die zentrale Aufgabe der Thermoelastizitätslehre besteht darin, die zeitliche Evolution der auf diesem Kontinuum definierten Feld- (Temperatur, Entropie etc.), Vektorfeld- (Verschiebungsvektor, Wärmefluss etc.) sowie Tensorfeldgrößen (Spannungs- und Verzerrungstensor etc.) zu beschreiben. Natürlich müssen dabei die physikalischen Parameter, der Anfangszustand, die auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte und die Wärmezufuhr sowie die Randbedingungen vorgeschrieben werden. Nachdem ein solches Modell aufgestellt ist, kann man den Deformationsvorgang prognostizieren, Parameter schätzen, durch eine entsprechende Wahl der „Steuergrößen“ das System in einen gewünschten Zustand lenken oder die mit der Verformung verbundenen Größen optimieren, komplizierte Strukturen mit gewünschten Eigenschaften entwerfen usw.

Das mechanische Verhalten eines Körpers kann dabei elastisch oder inelastisch (z. B. anelastisch (thermisch, elektrisch, viskos usw.), viskoelastisch, plastisch usw.) sein. Bei einem elastischen Körper verschwinden die Verformungen, sobald der Körper entlastet ist. Wie die Experimente allerdings zeigen, weichen wirkliche Werkstoffe von dieser Idealvorstellung ab (cf. [6] und Referenzen ebd.). Auch thermische Effekte führen in diesem Sinne zum inelastischen Verhalten, weil sie die Deformation wegen der Energiedissipation irreversibel machen<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>lat.: Wie die Dehnung, so die Kraft

<sup>2</sup>Ein sehr interessantes Beispiel für ein (nichtlineares) inelastisches Verhalten ist von Formgedächtnislegierungen (shape memory alloys) gegeben. So kann man durch gezieltes Aufheizen mechanische Eigenschaften des Stoffes

(vgl. [4], Kapitel 3). In der vorliegenden Arbeit betrachten wir ausschließlich elastische und thermoelastische Körper.

In der ersten Hälfte des Kapitels stellen wir eine kurze Zusammenfassung der Thermoelastizitätstheorie vor, welche wir später bei der Modellierung von wärmeleitenden Platten benutzen. Dabei haben wir die folgenden Literaturquellen verwendet: [4], [6], [21], [28], [44], [67], [81], [85]. Das Ziel der nächsten Abschnitte besteht nicht darin, neue physikalische Konzepte zu entdecken, sondern eine einfache, in sich geschlossene Herleitung der nichtlinearen Thermoelastizitätsgleichungen mit einheitlichen Notationen zu gewinnen, was z. B. für die in diesem Umfeld tätigen Mathematiker von Interesse sein kann. Die im zweiten Teil des Kapitels hergeleiteten nichtlinearen Plattengleichungen nach REISSNER & MINDLIN mit dem Wärmefluss nach CATTANEO, welche auf den Resultaten aus dem ersten Teil des Kapitels aufgebaut sind, kamen in der Literatur dagegen noch nie vor.

Im Laufe des Kapitels verwenden wir die in der Physik gängigen Schreibweisen: fette Schriftart für Vektoren und Matrizen, typische Buchstaben für entsprechende Größen usw. Diese Regeln werden bei den mathematischen Abhandlungen in den späteren Kapiteln meistens nicht beachtet.

## 1.1 Kinematische Grundlagen

Verformbare Körper (Festkörper und Fluide) ändern ihre Größe und Gestalt unter der Einwirkung äußerer Kräfte, auch Lasten genannt, sowie der Wärmezufuhr. Im Folgenden beschränken wir uns ausschließlich auf Beschreibung der Festkörper. Bei Festkörpern werden Verformungen erzeugt, welche zur Entstehung innerer Kräfte sowie eines Wärmeflusses führen. Deren Größe und Verteilung im betrachteten Körper hängen sowohl von den Lasten als auch von den geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Körpers ab (vgl. [28]).

Um das mechanische Verhalten eines Körpers zu beschreiben, wird der Körper in der idealisierten Form als Kontinuum angenommen. Obwohl es in der Wirklichkeit keine kontinuierlichen Körper gibt, weist die Materie im makroskopischen Bereich die „Stetigkeit“ auf. Dieser Übergang von der diskreten Struktur der Materie auf der Mesoskala zum Kontinuum auf der Makroskala findet ihre mathematische Berechtigung auch darin, dass (lokal) gemittelte Zufallsfelder eine bessere Regularität besitzen. Eine andere wichtige Berechtigung für die Einführung des Kontinuums ergibt sich aus der Erfahrung, dass sich die darauf aufgebauten Theorien experimentell verifizieren lassen.

Ein infinitesimales Materialvolumen kann als „Teilchen“ des Kontinuums aufgefasst werden, wobei man von der beliebigen Teilbarkeit der Materie sowie der Nichtunterscheidbarkeit der einzelnen Teilchen ausgeht. In jeder Umgebung eines einzelnen materiellen Teilchens ist immer Materie vorhanden, die außerdem stetig verteilt ist. Bei Belastung durch äußere Kräfte ändern die materiellen Teilchen ihre Lage im Raum. Dieser Vorgang wird oft als Bewegung des Kontinuums bezeichnet. Als Spezialfall ist dabei die gleichmäßige Bewegung des gesamten betrachteten Kontinuums zu beachten. Dabei treten weder Verformungen noch innere Spannungen auf, sodass man von einem starren Körper sprechen kann. Die Bewegung des Kontinuums beschrieben durch eine Funktion wird ebenfalls als stetig angenommen. Dies bedeutet, dass alle für die Verformung wichtigen Größen stetige Zeit- und Ortsfunktionen sind (s. [28]).

Wir beschränken unsere Überlegung auf elastische und thermoelastische Körper. In der

---

„programmieren“. Außerdem zeichnen sich Formgedächtnislegierungen durch eine sehr langsame Ermüdung aus (s. [27]).

Kontinuumsmechanik wird als Körper eine Teilmenge des euklidischen Raumes bezeichnet, welche sich durch einen Homöomorphismus auf einen Bereich  $\mathcal{B}_r \subset \mathbb{R}^3$  abbilden lässt, welcher Referenzmenge heißt. Dieser Homöomorphismus wird Konfiguration des Körpers genannt. In der Regel unterscheidet man nicht zwischen dem Körper und der Referenzmenge<sup>3</sup>.

Bei der Beschreibung des elastischen Verhaltens des Körpers sei angenommen, dass der Körper hinreichend groß ist, sodass seine mikroskopische Struktur vernachlässigt werden kann. Dabei setzen wir zunächst keine physikalische Linearität voraus. Thermoelastische Stoffe können sich im Allgemeinen durch ein nichtlineares Verhalten auszeichnen, nicht nur wegen der geometrischen Nichtlinearität, sondern auch wegen eines nichtlinearen Stoffgesetzes (wie z. B. das MOONEY-RIVLIN-Materialgesetz für Gummi).

### 1.1.1 Deformationsvorgang

Bis Ende des Abschnitts richten wir uns ziemlich nah an [21], [81] und [85]. Wir betrachten einen Körper, welcher in einer Referenzkonfiguration einen Bereich  $\mathcal{B}_r \subset \mathbb{R}^3$  belegt. Materielle Punkte werden dabei durch ihren Ortsvektor  $\mathbf{X}$  mit Koordinaten  $(X_1, X_2, X_3)$  bezüglich eines CARTESISchen Koordinatensystems gekennzeichnet. Wir bezeichnen diese Koordinaten als materielle oder LAGRANGESche Koordinaten.

Der Rand  $\mathcal{S}_r$  von  $\mathcal{B}_r$  sei gemäß

$$\mathcal{S}_r = \bar{\mathcal{S}}_{r,1} \cup \bar{\mathcal{S}}_{r,2}$$

zerlegt, wobei  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2$  relativ offene, disjunkte Teilmengen von  $\mathcal{S}_r$  seien. Auf  $\mathcal{S}_{r,1}$  und  $\mathcal{S}_{r,2}$  werden Verschiebungen bzw. Zugkräfte (Oberflächenkräfte) vorgeschrieben.

Der Körper möge sich über die Zeit  $t \in I$  verformen, wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Zu einem festen Zeitpunkt  $t \in I$  betrachten wir den Körper in seiner verformten Konfiguration  $\mathcal{B}_t$ . Die Verformung wird gegeben durch einen Homöomorphismus  $\chi_t: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathcal{B}_t$ , welcher jeden Punkt  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_r$ <sup>4</sup> auf einen anderen Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  eindeutig abbildet, d. h.

$$\mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_r, \quad (1.1)$$

worin  $\mathbf{x}$  den Ortsvektor des zu  $\mathbf{X}$  gehörigen Punktes in  $\mathcal{B}_t$  bezeichnet. Für die Umkehrabbildung  $\chi_t^{-1}$  von  $\chi_t$  gilt

$$\mathbf{X} = \chi_t^{-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t. \quad (1.2)$$

Die Punkte in  $\mathcal{B}_t$  werden durch ihre Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  in einem CARTESISchen Koordinatensystem gekennzeichnet. Sie werden raumbezogene oder EULERSche Koordinaten genannt.

Die einparametrische Familie  $\{\mathcal{B}_t\}_{t \in I}$  heißt dann eine Bewegung des Körpers, falls  $\chi_t(\mathbf{X}) = \chi(\mathbf{X}, t)$  ein glattes Vektorfeld auf  $\mathcal{B}_r \times I$  ist.

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{U}$  setzt die Lage eines jeden Teilchens in der Referenzkonfiguration mit einer solchen in der verformten Konfiguration in Verbindung. In den LAGRANGESchen Koordinaten schreibt man hierzu

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X},$$

während sich in den EULERSchen Koordinaten

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

<sup>3</sup>Manche Autoren kritisieren diese Vereinfachung (s. [81]).

<sup>4</sup>Oft wird die Anfangskonfiguration  $\mathcal{B}_{t_0}$  als Referenzkonfiguration gewählt, was nicht immer korrekt ist.

ergibt. Es besteht zwischen den beiden Betrachtungsweisen der Zusammenhang

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Die momentane Geschwindigkeit  $\mathbf{V}$  sowie die Beschleunigung  $\mathbf{A}$  eines materiellen Punktes in LAGRANGESchen Koordinaten sind gegeben durch

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t). \quad (1.3)$$

Es sei erwähnt, dass der Operator  $\partial/\partial t$  die materielle Zeitableitung bezeichnet, d. h. die Zeitableitung an einem festen Ort  $\mathbf{X}$ .<sup>5</sup>

Um lokale Verformungen in einem Körper messen zu können, setzen wir das Prinzip der Lokalität voraus, wonach die innere Energiedichte in einem materiellen Punkt  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_r$  nur von dem lokalen Zustand einer infinitesimalen Umgebung von  $\mathbf{X}$  abhängt. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  (eine Matrix) ist gegeben durch

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u}$$

mit CARTESISchen Komponenten  $F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha}$ . Die Schreibweisen Grad und grad stehen für den Gradienten bzgl. der  $X$ - bzw.  $x$ -Variablen. Lokale Invertierbarkeit von  $\chi$  verlangt, dass  $\mathbf{F}$  regulär ist, d. h.

$$J = \det \mathbf{F} \neq 0.$$

Die JACOBIsche Determinante  $J$  setzt zwei Volumenelemente gemäß

$$dV = J dV_0 \quad (1.4)$$

in Verbindung. Für den Inversdeformationsgradienten gilt analog

$$\mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \mathbf{X} = \mathbf{1} + \text{grad } \mathbf{U}, \quad (\mathbf{F}^{-1})_{\alpha i} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} = 1 + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i}.$$

Da auch  $\mathbf{F}^{-1}$  invertierbar ist, folgt

$$0 < J < \infty.$$

Die Identität

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad dx_i = F_{i\alpha} dX_\alpha \quad (1.5)$$

beschreibt die Art und Weise, wie ein Linienelement  $d\mathbf{X}$  des Stoffes um den Punkt  $\mathbf{X}$  unter der Deformation linear auf ein Linienelement  $d\mathbf{x}$  um  $\mathbf{x}$  abgebildet wird.

<sup>5</sup>Durch einsetzen der Beziehung (1.1) in (1.3) lässt sich eine Darstellung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  sowie der Beschleunigung  $\mathbf{a}$  in den EULERSchen Koordinaten bestimmen:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}\chi_t(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)) = (\mathbf{V} \circ \chi_t^{-1})(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\chi_t(\mathbf{X}), t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)) = (\mathbf{A} \circ \chi_t^{-1})(\mathbf{x}, t).$$

Letztere ist in der Elastizitätstheorie seltener gebräuchlich, spielt aber eine wichtige Rolle in der Fluidodynamik.

### 1.1.2 Polare Zerlegung des Deformationsgradienten

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  beinhaltet vollständige Informationen über die lokal linearisierte Deformation an einem festen materiellen Ort. Daher ist es sinnvoll, zur Beschreibung des Bewegungsvorganges in einem Kontinuum den Deformationsgradienten heranzuziehen. Da er jedoch auch Starrkörperbewegung beinhaltet, muss diese getrennt werden, um einen Zugang zu Verzerrungstensoren zu finden.

Da es sich bei der Menge aller zulässigen Deformationsgradienten um eine lineare Untergruppe der orientierungserhaltenden Abbildungen handelt, ist eine multiplikative Zerlegung von  $\mathbf{F}$  sehr naheliegend. An einem festen materiellen Ort zu einem festen Zeitpunkt wenden wir das Polare Zerlegungstheorem (s. [6], Ziffer 1.5) auf  $\mathbf{F}$  an, welches zwei eindeutige Aufspaltungen gemäß

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (1.6)$$

ergibt, wobei

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^T. \quad (1.7)$$

Darin heißen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  Rechts- bzw. Links-Streck-Tensor.

Diese Tensoren besitzen eine Spektraldarstellung. Für  $\mathbf{U}$  ergibt sich

$$\mathbf{U} = \lambda_i \mathbf{U}^{(i)} \otimes \mathbf{U}^{(i)},$$

wobei die Eigenwerte  $\lambda_i > 0$  LAGRANGESche Hauptdehnungen und die Einheitseigenvektoren  $\mathbf{U}^{(i)}$  LAGRANGESche Hauptrichtungen heißen. Auf ähnliche Weise lässt sich  $\mathbf{V}$  wie folgt zerlegen:

$$\mathbf{V} = \lambda_i \mathbf{V}^{(i)} \otimes \mathbf{V}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{R}\mathbf{U}^{(i)}.$$

Trivialerweise ergibt sich

$$J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{U}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

### 1.1.3 Verzerrungsmaße und Verzerrungstensoren

In diesem Abschnitt stellen wir einige wichtige Verzerrungstensoren vor, welche bei der Formulierung des Stoffgesetzes oft herangezogen werden. Um der historischen Entwicklung der Elastizitätslehre näher zu sein, fangen wir mit dem GREENSchen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  an. Unter Beachtung von (1.5) findet man

$$|d\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{F}\mathbf{M}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{M}) |d\mathbf{X}|^2 = (\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{M}) \cdot \mathbf{M} |d\mathbf{X}|^2,$$

wobei  $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|}$ . Das Verhältnis zwischen den Längen der Linienelemente in der verformten Konfiguration und der Referenzkonfiguration ist gegeben durch

$$\frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} = |\mathbf{F}\mathbf{M}| = (\mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{M}))^{\frac{1}{2}} \equiv \lambda(\mathbf{M}). \quad (1.8)$$

Gleichung (1.8) definiert die Streckung in Richtung  $\mathbf{M}$  am Ort  $\mathbf{X}$ . Die Funktion  $\lambda: S^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, \infty)$  gibt ein Beispiel eines Verzerrungsmaßes an. Gibt es keine Streckung (Stauchung) in Richtung  $\mathbf{M}$ , so gilt  $\lambda(\mathbf{M}) = 1$  und daher

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{M}) \cdot \mathbf{M} = 1. \quad (1.9)$$

Verschwindet die Streckung in allen Richtungen, also gilt (1.9) für alle  $\mathbf{M}$ , dann heißt der Körper ungedehnt am Ort  $\mathbf{X}$ . Es folgt insbesondere  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$ , wobei  $\mathbf{I}$  den Identitätstensor bezeichnet. Ein geschickter Verzerrungstensor ist demnach durch  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}$  gegeben, da dieser in unverzerrten Körpern verschwindet. Dies motiviert die Definition des GREENSchen Verzerrungstensors

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (1.10)$$

Gilt (1.9) für ein festes  $\mathbf{M}$  und für alle möglichen Deformationsgradienten, so heißt der Körper unausdehnbar in Richtung  $\mathbf{M}$ .

Unter Benutzung der Polarzerlegung (1.6) des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  kann man auch folgende Verzerrungstensoren definieren:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2.$$

Letztere heißen GREENScher Rechts- bzw. Links-Streck-Tensor.

Eine allgemeinere Klasse von Verzerrungstensoren kann man aus der Tatsache, dass im unverzerrten Körper  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$  gilt, gewinnen. Also definieren wir nachstehend die LAGRANGESchen Verzerrungstensoren<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(m)} &= \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}), \quad m \in (0, \infty), \\ \mathbf{E}^{(0)} &= \ln \mathbf{U}, \quad m = 0. \end{aligned}$$

Der Tensor  $\mathbf{H} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  wird auch HENCKYScher oder logarithmischer Verzerrungstensor genannt. Gegenüber anderen Verzerrungstensoren bietet er den Vorteil, dass er sich additiv in Volumenänderung und Gestaltänderung aufspalten lässt. Diese Aufspaltung entspricht einer Tensorzerlegung in Deviator und Kugeltensor. Darin ist der Deviator für die Gestaltänderung und der Kugeltensor für die Volumenänderung verantwortlich. Details dazu findet man in [6], Ziffern 1.6 und 1.7. Die EULERSchen Verzerrungstensoren ergeben sich völlig analog, wenn man anstatt von  $\mathbf{U}$  den Tensor  $\mathbf{V}$  verwendet.

Bei kleinen Verzerrungen können in (1.10) geometrische Nichtlinearitäten vernachlässigt werden. Dies führt auf den infinitesimalen LAGRANGESchen Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T + \mathbf{F} - 2\mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T). \quad (1.11)$$

Da die Referenzkonfiguration und die verformte Konfiguration im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie übereinstimmen, stellt (1.11) eine feine Approximation nichtlinearer Verzerrungstensoren dar. Diese Bedingung ist in allen Festkörpern unter hinreichend kleinen Lasten immer erfüllt.

#### 1.1.4 Verzerrungsrate

Der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{l} = \text{grad } \mathbf{v}$  in der EULERSchen Betrachtungsweise drückt sich über den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$$

aus. Die Verzerrungsrate  $\mathbf{d}$  definiert man dann als

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T). \quad (1.12)$$

<sup>6</sup>Der Ausdruck  $\ln \mathbf{U}$  ist hier im Sinne des Spektralsatzes zu verstehen.

## 1.2 Statische Grundlagen

Auf einen Körper können sowohl räumlich verteilte Volumenkräfte als auch über die Oberfläche verteilte Flächenlasten wirken. Hierdurch entstehen im Innern des Körpers Spannungen, welche den Beanspruchungszustand charakterisieren. Der Spannungszustand ist eine Tensorfeldgröße und kann im Allgemeinen vom Punkt zu Punkt variieren (hier und ff. [6], [67], [85]).

### 1.2.1 CAUCHYScher Spannungstensor

Um die durch die äußeren Lasten hervorgerufenen Spannungen im Körper  $\mathcal{B}$  an einer Stelle  $\mathbf{x}$  in einer verformten Konfiguration zu bestimmen, wird der Körper nach dem EULERSchen Prinzip aufgeschnitten. Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  definiert sich als

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}.$$

Darin ist  $\Delta \mathbf{p}$  die auf eine gedachte Schnittfläche, welche durch  $\mathbf{x}$  verläuft, wirkende resultierende Kraft. Das parallel zur resultierenden Kraft entstehende Momentum verschwindet beim Übergang zum Grenzwert. Im COSSERAT-Kontinuum<sup>7</sup> müssen Momentenspannungen, welche als Reaktion auf eine aufgezwungene Gitterkrümmung entstehen, dagegen berücksichtigt werden. Die Orientierung der Fläche  $\Delta s$  ist eindeutig durch den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  an  $\Delta s$  in  $\mathbf{x}$  bestimmt.

Für die Spannungsvektoren an den gegenüberliegenden Schnittseiten gilt

$$\mathbf{t}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), -\mathbf{n}).$$

Nach dem CAUCHYSchen Fundamentaltheorem hängt der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  von  $\mathbf{n}$  linear ab. Daher gilt

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t).$$

Darin ist  $\sigma(\cdot, t): \chi_t(\mathcal{B}_r) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  der CAUCHYSche Spannungstensor, welcher den Spannungszustand in  $\mathbf{x}$  eindeutig bestimmt. Da bei  $\sigma$  sowohl die einwirkenden Kräfte als auch die Spannungen in der Momentankonfiguration (EULERSche Betrachtungsweise) betrachtet werden, handelt es sich bei  $\sigma$  um einen wahren Spannungstensor<sup>8</sup>.

### 1.2.2 1. und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

Analog kann man für ein  $\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration (LAGRANGESche Betrachtungsweise) den Spannungsvektor  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{p}}{dS}$$

für eine durch  $\mathbf{X}$  verlaufende Fläche  $\Delta S$  und die resultierende Kraft  $\Delta \mathbf{p}$  betrachten. Mit dem 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}(\cdot, t): \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  schreibt man dann

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}(\mathbf{X}, t).$$

<sup>7</sup>COSSERAT-Kontinuum ist ein Instrument zur Modellierung dünner Schalen und Platten (cf. [61]).

<sup>8</sup>In der Werkstoffprüfung wird zwischen der Nennspannung, welche bezüglich des Anfangsquerschnitts eines Zugstabes gemessen wird, und der wahren Spannung, welche anhand des Momentanquerschnitts bestimmt wird, unterschieden (s. [6]).

Im Gegensatz zu  $\sigma$  ist  $\mathbf{P}$  ein Nennspannungstensor. Unter Benutzung der NANSONSchen Formel ergibt sich die PIOLA-Transformation

$$\sigma = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T.$$

Da  $\mathbf{P}$  zwischen der Referenz- und Momentankonfiguration abbildet, ist  $\mathbf{P}$  (so wie  $\mathbf{F}$ ) ein Doppelfeldtensor und weist daher im Allgemeinen keine Symmetrie auf.

Geht man nun komplett in die Referenzkonfiguration über, so kann man den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}(\cdot, t): \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  definieren

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}(\mathbf{X}, t),$$

wobei

$$\mathbf{T}_0 = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_0}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{p}_0}{dS}.$$

Sowohl die differentielle Kraft  $\mathbf{p}_0$  als auch die differentielle Fläche werden in der Referenzkonfiguration betrachtet. Dann gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Tensoren

$$\begin{aligned} \sigma &= J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{F}\mathbf{S}, \\ \mathbf{S} &= J\mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

## 1.3 Bilanzgleichungen

Die meisten Bilanzgleichungen leiten sich von den Erhaltungsgesetzen (Massenerhaltung, Impulserhaltung, Energieerhaltung usw.) ab. Andere physikalischen Prinzipien, wie z. B. der 2. Hauptsatz der Thermodynamik, präzisieren die Struktur der allgemeinen Gleichungen.

### 1.3.1 Massenbilanz

Seien  $\rho_0(\mathbf{X}, t)$  und  $\rho(\mathbf{x}, t)$  die Massendichten pro Volumeneinheit in der Referenz- sowie der Momentankonfiguration. Nun greift man eine beliebige offene Menge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_r$  in der Referenzkonfiguration heraus, welche sich zum Zeitpunkt  $t \in I$  zu  $\chi_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}_t$  verformt. Da die Masse von  $\mathcal{B}$  erhalten sein muss, gilt

$$\int_{\mathcal{B}} \rho_0(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\chi_t(\mathcal{B})} \rho(\mathbf{x}, t) dv$$

und daher

$$dm = \rho_0(\mathbf{X}, t) dV = \rho(\mathbf{x}, t) dv.$$

Mit dem Transformationssatz ergibt sich die Massenbilanz in den LAGRANGESchen Koordinaten

$$\rho_0 = J\rho.$$

Im Folgenden werden wir meistens der Einfachheit halber bei den Funktionen die Argumente auslassen.

### 1.3.2 Impulsbilanz

Wir bezeichnen mit  $\bar{\mathbf{B}}: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\bar{\mathbf{b}}: \chi_t(\mathcal{B}_r) \rightarrow \mathbb{R}^3$  die auf den Körper wirkenden Volumenkraft per Volumeneinheit in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration. Sei  $dm$  die Masse eines Volumenelementes  $dv$  und sei  $d\mathbf{f}$  die resultierende Kraft über  $dv$ . Dann gilt

$$d\mathbf{f} = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{X}, t)dm = \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)dm,$$

d. h.  $\bar{\mathbf{b}} \circ \chi_t = \bar{\mathbf{B}}$ .

Analog kann man die auf die Oberfläche des Körpers einwirkenden Oberflächenkräfte  $\bar{\mathbf{T}}: \mathcal{S}_r \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\bar{\mathbf{t}}: \chi_t(\mathcal{S}_r) \rightarrow \mathbb{R}^3$  in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration, auch materielle bzw. räumliche Oberflächenkräfte genannt, betrachten. Seien  $dS$  und  $ds$  infinitesimale Flächen, welche  $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_r$  bzw.  $\mathbf{x} \in \chi_t(\mathcal{S}_r)$  enthalten, mit den äußeren Einheitsnormalen  $\mathbf{N}$  bzw.  $\mathbf{n}$ . Die resultierende Oberflächenkraft lautet

$$d\mathbf{f} = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t)dS = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)ds.$$

Sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_r$  ein offenes GAUSSSches Normalgebiet mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{N}$  an die Oberfläche  $\mathcal{S} = \partial\mathcal{B}$ . Der resultierende Impuls von  $\mathcal{B}$  lautet

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{V} dV.$$

Die resultierende Kraft schreibt sich ähnlich zu

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \bar{\mathbf{B}} dV + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \mathbf{N} dS. \quad (1.14)$$

Unter Verwendung des zweiten NEWTONSchen Gesetzes

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \bar{\mathbf{B}}$$

und (1.14) folgt die Identität

$$\int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{A} dV = \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \bar{\mathbf{B}} dV + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \mathbf{N} dS,$$

mit dem Beschleunigungsvektor  $\mathbf{A}$ . Der GAUSSSche Divergenzsatz liefert dann

$$\int_{\mathcal{B}} (\rho_0 (\mathbf{A} - \bar{\mathbf{B}}) - \text{Div } \mathbf{P}) dV = 0, \quad (1.15)$$

wobei  $\text{Div}$  den Divergenzoperator bzgl. der Referenzkonfiguration bezeichnet. Da (1.15) für alle  $\mathcal{B}$  gilt, folgt

$$\rho_0 \mathbf{A} = \rho_0 \bar{\mathbf{B}} + \text{Div } \mathbf{P} \text{ in } \mathcal{B}_r. \quad (1.16)$$

Gleichung (1.16) stellt die Impulsbilanz in den LAGRANGESchen Koordinaten dar und wird in der Regel durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{N} &= \bar{\mathbf{T}} \text{ auf } \mathcal{S}_{r,1} \quad (\text{statische bzw. NEUMANNsche Randbedingungen}), \\ \mathbf{x} &= \bar{\mathbf{x}} \text{ auf } \mathcal{S}_{r,2} \quad (\text{kinematische bzw. DIRICHLETSche Randbedingungen}) \end{aligned}$$

mit vorgegebenen  $\bar{\mathbf{T}}$  und  $\bar{\mathbf{x}}$  komplettiert<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Ein Beispiel für „exotische“ Randbedingungen findet man bei den Kontaktproblemen, z. B. nach SIGNORINI, bei welchen die Randbedingungen als Ungleichungen gegeben sind (s. z. B. [15]).

### 1.3.3 Drehimpulsbilanz

Sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_r$  wiederum ein offenes GAUSSSches Normalgebiet mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{N}$  an die Obefläche  $\mathcal{S} = \partial\mathcal{B}$ . Den resultierenden Drehimpuls  $\mathbf{G}$  bzw. das resultierende Momentum  $\mathbf{M}$  definiert man als

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho_0 \mathbf{V} dV, \\ \mathbf{M} &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho_0 \bar{\mathbf{B}} dV + \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{PN}) dS.\end{aligned}$$

Da die Änderungsrate des Drehimpulses dem Gesamtmomentum aller auf den Körper von außen wirkenden Flächen- und Volumenlasten gleicht, bekommt man die Drehimpulsbilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G} = \mathbf{M}.$$

Der CAUCHYSche Satz (s. Beweis in [84]) liefert dann die Symmetrie von  $\sigma$

$$\sigma = \sigma^T.$$

### 1.3.4 Mechanische Energiebilanz

Sei  $\mathcal{B}$  wie oben. Die kinetische Energie  $K$  von  $\mathcal{B}$  wird durch

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho_0 |\mathbf{V}|^2 dV$$

gegeben. Die Leistung  $P^E$  aller auf  $\mathcal{B}$  wirkenden äußeren Kraftfelder (Volumen- und Oberflächenkräfte) lautet dann

$$P^E = \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{V} dV + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{PN} \cdot \mathbf{V} dS.$$

Die Deformationsleistung  $P^D$  ist die Leistung aller äußeren Kraftfelder, welche nicht in die kinetische Energie transformiert wird, d. h.

$$P^D = P^E - \dot{K}. \quad (1.17)$$

Damit bekommen wir

$$P^D = \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{V} dV + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{PN} \cdot \mathbf{V} dS - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} dV,$$

was unter Beachtung des GAUSSSchen Divergenzsatzes zu

$$P^D = \int_{\mathcal{B}} (\rho_0 (\bar{\mathbf{B}} - \mathbf{A}) + \text{Div } \mathbf{P}) \cdot \mathbf{V} dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \text{Grad } \mathbf{V} dV \quad (1.18)$$

führt, wobei  $\mathbf{A} : \mathbf{B} := \text{spur}(\mathbf{AB}) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} b_{ij}$  für  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  die doppelte Überschiebung bezeichnet. Ferner folgt aus Gleichung (1.15) wegen  $\text{Grad } \mathbf{V} = \dot{\mathbf{F}}$

$$P^D = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV. \quad (1.19)$$

	LAGRANGESche Form	EULERSche Form
Masse	$\rho_0 = J\rho$	$\frac{d}{dt}\rho = \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$
Impuls	$\rho_0 \mathbf{A} = \rho_0 \bar{\mathbf{B}} + \operatorname{Div} \mathbf{P}$	$\rho_0 \mathbf{a} = \rho \bar{\mathbf{b}} + \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}$
Drehimpuls	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$	$\mathbf{P}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{P}$
Mechanische Energie	$\dot{U} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$	$\dot{U} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$
Thermische Energie	$\dot{U} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \operatorname{div} \mathbf{Q} + R$	$\dot{U} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r$

Tabelle 1.1: Lokale Energiebilanzgleichungen in der LAGRANGESchen und der EULERSchen Betrachtungsweise

Der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor  $\mathbf{P}$  und der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  sind in diesem Sinne arbeitskonjugiert, d. h. deren Produkt definiert die Änderungsrate der inneren mechanischen Leistung, welche man grob als potentielle Energie bezeichnen kann. Mit (1.10), (1.12) und (1.13) folgt

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}.$$

### 1.3.5 Energieerhaltung

Die Funktion  $U: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichne die Dichte der inneren Energie pro Volumeneinheit in der Referenzkonfiguration. Die gesamte innere Energie schreibt sich dann als

$$E = \int_{\mathcal{B}_r} U dV = \int_{\chi_t(\mathcal{B}_r)} J^{-1} U dV.$$

Für elastische Körper muss die Energie konstant bleiben, sodass die äußere Energiezufuhr ohne Verluste in die kinetische Energie überführt wird, d. h.

$$P^E = \dot{E} + \dot{K}. \quad (1.20)$$

Setzt man Gleichung (1.17) in (1.20) ein, so ergibt sich die triviale Gleichheit

$$\dot{E} = P^D, \quad (1.21)$$

sodass wir keine neue Bilanzgleichung erhalten. Mit (1.19) kann man (1.21) in der Endform schreiben

$$\dot{U} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (1.22)$$

Gleichung (1.22) heißt Energieerhaltungsgleichung in der LAGRANGESchen Form.

Alle Bilanzgleichungen, welche wir in diesem Abschnitt hergeleitet haben, lassen sich auch in EULERSchen Koordinaten formulieren. Tabelle 1.1, welche wir nach [85] reproduzieren, listet die Bilanzgleichungen<sup>10</sup> in beiden Betrachtungsweisen auf.

### 1.3.6 Thermische Energie

Nun wollen wir zu irreversiblen Prozessen übergehen, wofür wir uns die Hauptsätze der Thermodynamik zu Nutze machen. Dabei orientieren wir uns an [85].

<sup>10</sup>Die Herleitung der Bilanzgleichung für die thermische Energie wird am Ende des Abschnitts nachgeholt.

### 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Sei  $Q: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}$  die thermische Energie und seien  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{Q}$  der Wärmefluss je Zeit- und Flächeneinheit in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration. Bezeichnet man mit  $R$  und  $r$  die Wärmezufuhr je Flächeninhalt in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration, so gilt

$$Q = \int_{\mathcal{B}_r} R dV - \int_{\mathcal{S}_r} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\chi_t(\mathcal{B}_r)} r dV - \int_{\chi_t(\mathcal{S}_r)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.23)$$

Da die Energie in einem geschlossenen System nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik konstant bleibt, gilt

$$P^E + Q = \dot{E} + \dot{K},$$

d. h.

$$\int_{\mathcal{B}} (\rho_0 \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{V} + R) dV + \int_{\mathcal{S}} (\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{V} - \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N}) dS = \int_{\mathcal{B}} \dot{U} dV + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} dV$$

für alle GAUSSnormalgebiete  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_r$  mit  $\partial\mathcal{B} = \mathcal{S}$ , woraus sich die Bilanzgleichung für die thermische Energie in der LAGRANGESchen Form ergibt

$$\dot{U} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \operatorname{div} \mathbf{Q} + R. \quad (1.24)$$

### 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Seien  $S: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Sigma: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}$  die Entropiedichte bzw. die Gesamtentropieänderung. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die Entropieänderung nichtnegativ ist:

$$\Sigma \geq 0. \quad (1.25)$$

Ein thermodynamischer Prozess ist reversibel, falls  $\Sigma = 0$  ist, was z. B. bei der reinen Elastizität der Fall ist. Gilt  $\Sigma > 0$ , so ist der Prozess irreversibel, was insbesondere für thermoelastische Prozesse gilt.

Mit der Einführung des Wärmeflusses  $\mathbf{Q}$ , der Wärmezufuhr  $R$ , der absoluten Temperatur  $T$  sowie der Entropiezufuhr  $\frac{R}{T}$  schreibt sich (1.25) zur sogenannten CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung um:

$$\Sigma = \int_{\mathcal{B}_r} \dot{S} dV + \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{Q}}{T} dS - \int_{\mathcal{B}} \frac{R}{T} dV \geq 0. \quad (1.26)$$

Die Energie, welche in mechanische Leistung transformiert werden kann, wird als HELMHOLTZsche freie Energie oder HELMHOLTZ-Potential  $A: \mathcal{B}_r \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet

$$A = U - ST. \quad (1.27)$$

Unter Benutzung von (1.27) kann man (1.24) zu

$$\dot{A} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \operatorname{div} \mathbf{Q} + R - \dot{S}T - S\dot{T}$$

umschreiben sowie die lokale Form von (1.26)

$$\dot{A} + S\dot{T} - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\mathbf{Q}}{T} \operatorname{Grad} T \leq 0 \quad (1.28)$$

herleiten. Formel (1.28) wird als CLAUSIUS-PLANCK-Ungleichung bezeichnet.

## 1.4 Stoffgleichungen

Die in der Tabelle 1.1 zusammengefassten Bilanzgleichungen (auch Feldgleichungen genannt), welche wir im letzten Abschnitt hergeleitet haben, sind allgemein und beschreiben neben der Thermoelastizität in einem Festkörper auch viele andere Phänomene der Kontinuumsmechanik – (Thermo)plastizität (s. [6]), (Thermo)viskosität, (Thermo)viskoelastizität usw. Diese Gleichungen sind aber nicht geschlossen, weil wir noch keinen Zusammenhang zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  bzw.  $\mathbf{F}$  und  $T$  festgelegt haben. Die verschiedenen Stoffe unterscheiden sich in ihrer Natur. Um diese Eigenschaften in der Sprache der Rationalen Mechanik zu beschreiben, werden die sogenannten Stoff- oder Materialgleichungen<sup>11</sup> postuliert. Während die Feldgleichungen meistens von theoretischen Physikern und Mathematikern untersucht werden (s. z. B. [21], [81]), beruhen viele Stoffgleichungen auf Experimentaldaten empirischer Natur. Im Folgenden beschränken wir uns auf Materialgleichungen für (thermo)elastische Stoffe.

### 1.4.1 Elastizität

Wir betrachten ein Volumenelement  $dV$  in der materiellen Konfiguration, welches einer Deformation entlang eines glatten Weges  $\Gamma: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  folgt. Die dadurch erbrachte Leistung ist durch

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P}(t) : \dot{\mathbf{F}}(t) dt \quad (1.29)$$

gegeben. Ein Stoff wird elastisch genannt, wenn das Integral (1.29) wegunabhängig ist. Somit ist die Schreibweise für die elastische Verzerrungsenergiegedichte

$$W(\mathbf{F}) = \int_{\Gamma} \mathbf{P} : d\mathbf{F} \quad (1.30)$$

berechtigt. Leicht sieht man ein, dass die elastische Verzerrungsenergie nur von  $\mathbf{F}$  abhängt und dass

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) \quad (1.31)$$

gilt. Gleichung (1.31) ist die allgemeine variationelle Form einer Materialgleichung<sup>12</sup> für elastische Stoffe. Stoffe mit einer solchen Stoffgleichung nennt man auch hyperelastische Stoffe. Sie sollten mit hypoelastischen Stoffen nicht verwechselt werden, deren Stoffgleichung in der Regel von der Form

$$\sigma = \mathbf{G}(\mathbf{F})$$

mit einem symmetrisch-tensorwertigen  $\mathbf{G}$  ist (cf. [21]). Solche Betrachtung wird vor allem in der ingenieurwissenschaftlichen Literatur bevorzugt (s. [4], [6], [28] usw.).

Ein Stoff heißt homogen, wenn  $W$  nicht vom materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration abhängt. Sonst heißt der Stoff heterogen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf homogene Stoffe.

An die Funktion  $W$  werden zusätzlich folgende Bedingungen gestellt:

- i)  $W$  ist nichtnegativ und  $W(\mathbf{I}) = 0$  ist das einzige globale Minimum von  $W$ .

<sup>11</sup>Das in der Einleitung erwähnte HOOKEsche Gesetz ist eines der einfachsten Beispiele einer Stoffgleichung.

<sup>12</sup>Unter Benutzung der Ungleichung (1.28) für den Fall der konstanten Temperatur kann man schließen, dass  $\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$  eine zu (1.31) äquivalente Bedingung darstellt (cf. [85]).

- ii)  $W$  ist monoton wachsend in  $\mathbf{F}$ , wobei die Matrizen bzgl. der komponentenweisen Halbordnung zu vergleichen sind.
- iii)  $W(\mathbf{F}) \rightarrow \infty$  für  $\det(\mathbf{F}) \rightarrow \infty$  oder  $\det(\mathbf{F}) \rightarrow 0$ . Dies bedeutet, dass man unendlich viel Energie aufbringen muss, um den Körper unendlich zu strecken oder zu stauchen.

Oft wird noch die LEGENDRE-HADAMARD-Bedingung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) \geq c > 0$$

vorausgesetzt. Unter dieser Bedingung ist das stationäre Problem elliptisch, was die mathematische Behandlung wesentlich erleichtert.

Ein weiterer wichtiger Aspekt, auf welchen man bei der Formulierung von Stoffgleichungen achten soll, ist das Prinzip der materiellen Objektivität, wonach Beobachter, welche sich unterschiedlich bewegen, aus einer Materialgleichung auf den selben Spannungszustand schließen müssen (cf. [6]). Materialgleichungen müssen deshalb invariant unter starren Drehungen und Translationen des Bezugssystems sein. So heißt ein elastischer Stoff objektiv, wenn

$$W(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}) \quad (1.32)$$

für alle  $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$  gilt. Mit dieser Definition beweist man (s. [85])

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) &= \mathbf{Q}\mathbf{P}(\mathbf{F}) \text{ für alle } \mathbf{Q} \in \text{SO}(3), \\ C_{ijkl}(\mathbf{Q}\mathbf{F})Q_{kl}dF_{iL} &= Q_{ij}C_{ijkl}(\mathbf{F})dF_{kL} = Q_{ij}Q_{kl}C_{jijL}(\mathbf{F}), \end{aligned}$$

wobei wir  $C_{ijkl}$  nachstehend definieren.

### 1.4.2 Elastizitätstensor

Linearisiert man Gleichung (1.31), so ergibt sich in der Koordinatenform

$$dP_{ij} = C_{ijkl}(\mathbf{F})dF_{kL},$$

wobei

$$C_{ijkl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}(\mathbf{F})$$

die LAGRANGESchen Elastizitätsmoduln heißen und sich zum Elastizitätstensor  $C_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L$  vierten Grades mit 81 Komponenten schreiben. Unter Beachtung von (1.30) sowie der Annahme  $W \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbb{R})$  folgt nach dem SCHWARZEN Satz, dass der Elastizitätstensor  $C_{ijkl}$  sowohl kleine

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijLk} = C_{jiLk}$$

als auch große Symmetrie

$$C_{ijkl} = C_{kLji}$$

aufweist. Daher hat  $C_{ijkl}$  nur 21 wesentliche Koordinaten (cf. [6]).

### 1.4.3 Isotropie

Ein Stoff heißt isotrop, wenn er sich in allen Richtungen gleich verhält, d. h. wenn zusätzlich zu (1.32)

$$W(\mathbf{FQ}) = W(\mathbf{F}) \text{ für alle } \mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$$

gilt. Dann kann man

$$W(\mathbf{C}) = W(I_1^{\mathbf{C}}, I_2^{\mathbf{C}}, I_3^{\mathbf{C}})$$

zeigen, wobei

$$\begin{aligned} I_1^{\mathbf{C}} &= \text{spur}(\mathbf{C}), \\ I_2^{\mathbf{C}} &= \frac{1}{2}(\text{spur}(\mathbf{C}^2) - (\text{spur}(\mathbf{C}))^2), \\ I_3^{\mathbf{C}} &= \det(\mathbf{C}) \end{aligned}$$

die Eigenwerte des CAUCHY-GREEN-Tensors sind.

### 1.4.4 HOOKEsches Gesetz

Bei dem HOOKEschen Gesetz handelt es um eine lineare Stoffgleichung der Form

$$\mathbf{S} = \mathfrak{C}\mathbf{E},$$

wobei  $\mathfrak{C}$  ein Tensor vierten Grades mit den Koeffizienten  $C_{ijkl}$  ist. Im isotropen Fall gilt

$$\mathbf{S} = \lambda \text{I spur}(\mathbf{E}) + 2\mu \mathbf{E}, \quad (1.33)$$

wobei

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

die LAMÉ-Zahlen und  $E, \nu$  der Elastizitätsmodul (auch YOUNG'scher Modul genannt) bzw. die POISSONZahl sind. Dies führt auf eine (zunächst isothermische) Verzerrungsenergiedichte

$$W(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}(\text{spur}(\mathbf{E}))^2 + \mu \text{spur}(\mathbf{E}^2). \quad (1.34)$$

Ein Stoff mit Materialgleichung (1.34) heißt SAINT-VERNANT & KIRCHHOFF-Stoff. Dieser ist physikalisch linear, was z. B. bei den meisten Metallen unter normalen Bedingungen der Fall ist, aber geometrisch nichtlinear. Daher können auch große Verzerrungen adäquat behandelt werden, was zu Aufgaben der sogenannten Finiten Elastizität gehört.

Stoffgleichung (1.34) kann leicht auf thermoelastische Stoffe erweitert werden:

$$W(\mathbf{E}, T) = \frac{1}{2}(\lambda(\text{spur}(\mathbf{E}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0))^2 + \rho_0 c_v T(1 - \log(\frac{T}{T_0})) + \mu \text{spur}(\mathbf{E}^2)), \quad (1.35)$$

wobei  $\alpha$  der Wärmeausdehnungskoeffizient,  $T$  eine Referenztemperatur und  $c_v$  die spezifische Wärmekapazität per Masseneinheit beim konstanten Volumen sind. Geht man von kleinen Temperaturänderungen aus, so wird der zweite Term vernachlässigt:

$$W(\mathbf{E}, T) = \frac{1}{2}(\lambda(\text{spur}(\mathbf{E}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0))^2 + \mu \text{spur}(\mathbf{E}^2)). \quad (1.36)$$

Nimmt man sogar die Deformationen als klein an, so kann man  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{E}$  durch  $\boldsymbol{\sigma}$  bzw.  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ersetzen. Dann vereinfacht sich (1.36) zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{I spur}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

und es gilt

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2}(\lambda(\text{spur}(\boldsymbol{\varepsilon}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0))^2 + \mu\text{spur}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)). \quad (1.37)$$

In diesem Fall spricht man von der Linearen Thermoelastizität.

Inzwischen werden auch viel allgemeinere Stoffgesetze verwendet, wie z. B. die sogenannten neoHOOKEschen Gesetze, die Gesetze nach OGDEN, MOONEY-RIVLIN, ARRUDA-BOYCE usw. (s. Referenzen in [85]).

### 1.4.5 Thermoelastizität

Fasst man die Gleichungen (1.16) und (1.24) zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathbf{x}_{tt} - \text{div } \mathbf{P} &= \rho_0 \bar{\mathbf{B}} \\ U_t - \text{div } \mathbf{Q} - \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} &= R \end{aligned} \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathcal{B}_r. \quad (1.38)$$

Nach (1.27) wird das HELMHOLTZ-Potential durch  $A = U - ST$  gegeben. Damit die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung (1.28) erfüllt ist, muss  $A$  von  $\mathbf{F}$ ,  $T$  und  $\mathbf{Q}$  abhängen, was der nachstehende Satz besagt.

**Satz 1.4.1.** Gleichung (1.28) ist genau dann erfüllt, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:

i) Die Funktion  $A$  hängt nicht vom Temperaturgradienten ab.

ii) Es gilt

$$\mathbf{P} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}), \quad S = -\frac{\partial A}{\partial T}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}).$$

iii)  $\mathbf{Q}$  erfüllt die Bedingung

$$\mathbf{Q}(F, T, \text{Grad } T) \text{Grad } T \leq 0.$$

**Beweis:** s. [35]. □

Formel (1.39) liefert uns eine Stoffgleichung für den mechanischen Anteil des Systems. Um die Gleichungen (1.38) abzuschließen, brauchen wir noch eine Stoffgleichung für  $\mathbf{Q}$ .

### 1.4.6 CATTANEOsches Gesetz

Eine Möglichkeit,  $\text{Grad } T$  und  $\mathbf{Q}$  in Verbindung zu setzen, besteht darin, das FOURIERSche Gesetz

$$\mathbf{Q} = -K \text{Grad } T \quad (1.39)$$

zu verwenden, wobei  $K$  die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Das durch (1.39) gegebene  $\mathbf{Q}$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.4.1. Eingesetzt in (1.38) führt diese Wahl auf ein hyperbolisch-parabolisches System

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathbf{x}_{tt} - \text{div } \frac{\partial A}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}) &= \rho_0 \bar{\mathbf{B}} \\ T \left( -\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}) T_t - \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}) \mathbf{F}_t \right) + K \Delta T &= R \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{B}_r \times (0, \infty). \quad (1.40)$$

Gleichung (1.40) wurde sowohl in der physikalischen als auch mathematischen Literatur intensiv studiert (s. [35] und Referenzen ebda). Obwohl sich die Gleichung als ein gutes Modell zur Beschreibung der meisten thermoelastischen Vorgänge erwiesen hat, führt das FOURIERSche Gesetz (1.39) zu einem physikalischen Paradoxon der unendlichen Wärmeausbreitungsgeschwindigkeit, was insbesondere dem Prinzip der Kausalität widerspricht.

So haben PESHKOVs Experimente (s. [66]) bereits in den 60er Jahren gezeigt, dass das FOURIERSche Modell den sogenannten „second sound“ Effekt (zweiten Klang), welcher experimentell beobachtet wurde, nicht adäquat beschreiben kann. Später hat man diesen Effekt auch in Festkörpern beobachtet (cf. [10]). Um dieses Paradoxon zu beheben, wurden relativistische Wärmeleitungstheorien (RHC<sup>13</sup>) entwickelt, darunter auch die Theorie von CATTANEO (s. [9]).

In der einfachsten Version führt man einen kleinen Relaxationsparameter  $\tau > 0$  ein, welcher die durchschnittliche Relaxationszeit des Wärmeträgers beschreibt (vgl. [78]), und ersetzt Gleichung (1.39) durch

$$\tau \mathbf{Q}_t + \mathbf{Q} = -K \text{Grad } T. \quad (1.41)$$

Diese Gleichung war bereits MAXWELL bekannt. In der vollständigen Form beinhaltet (1.41) noch weitere Terme wie Druck usw. (s. [10]).

Durch einsetzen von (1.41) in (1.38) finden wir

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathbf{x}_{tt} - \text{div} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}) &= \rho_0 \bar{\mathbf{B}} \\ T \left( -\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}) T_t - \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}(\mathbf{F}, T, \mathbf{Q}) \mathbf{F}_t \right) + K \text{Div } \mathbf{Q} &= R \quad \text{in } \mathcal{B}_r \times (0, \infty). \\ \tau \mathbf{Q}_t + \mathbf{Q} + K \text{Grad } T &= 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

Im Gegensatz zu (1.40) wird die Wärmeausbreitung nach (1.42) als pulsartige Wellen modelliert. Eine moderne Anwendung dieses Modells liegt im Bereich der Laser-Reinigung von Silizium-Wafern (s. z. B. [54]).

Im nächsten Abschnitt benutzen wir Gleichungen (1.42), um ein Modell für die wärmeleitende Platte herzuleiten.

## 1.5 Modellierung von Platten

Als Platte gleichmäßiger Dicke wird ein prismatischer Körper bezeichnet, dessen Höhe  $h$  im Vergleich zu den Abmessungen der Grundfläche  $\Omega$  gering ist. Ein Beispiel für eine Platte wird in der Abbildung 1.1 gegeben. Neben Balken, Scheiben und Schalen gehören Platten als ein Flächentragwerk zum zentralen Punkt der Technischen Mechanik. Obwohl es sich bei einer Platte um ein dreidimensionales Objekt handelt, besteht der wesentliche Unterschied zu gleichmäßig dicken Festkörpern unter anderem darin, dass eine Platte große Deformationen erfahren kann, ohne dass im Körper große Spannungen entstehen. Das Ziel einer Plattentheorie ist es, eine Platte auf ein zweidimensionales Kontinuum zurückzuführen, ohne die dreidimensionale Natur der Platte zu vernachlässigen. Erste Plattenbetrachtungen gehen auf JAKOB II. BERNOULLI, EULER, LAGRANGE, POISSON u. a. zurück. Die erste vollständige Plattentheorie, welche zum Teil auf den Arbeiten von POISSON beruhte, wurde allerdings von den dreidimensionalen Elastizitätsgleichungen von KIRCHHOFF abgeleitet (cf. [61]). Nach ca. vierzig Jahren folgte die LOVEsche<sup>14</sup> Schalentheorie, sodass man heute von einer POISSON-KIRCHHOFF-LOVE-Theorie spricht.

<sup>13</sup>Relativistic heat conduction

<sup>14</sup>Interessant ist die Tatsache, dass LOVE mit Hilfe seiner Theorie Vibrationen von Glocken beschreiben wollte, was er auch in seinem Artikel aus dem Jahre 1888 schrieb.

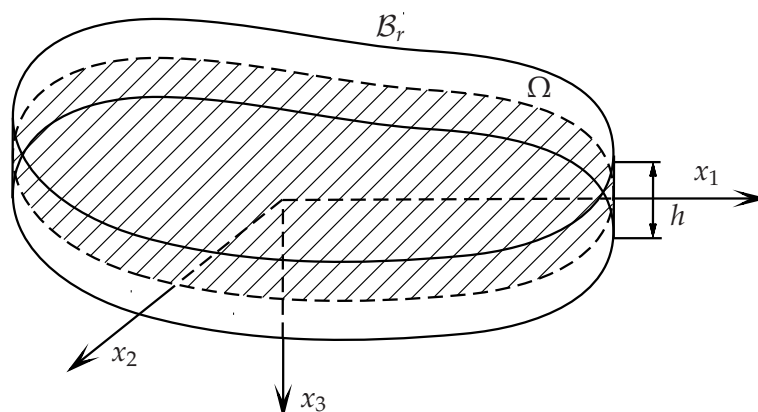


Abbildung 1.1: Platte

Die KIRCHHOFFSche Strukturannahme, dass die in der Referenzkonfiguration auf der Mittellebene senkrecht stehenden Fasern auch in der verformten Konfiguration senkrecht auf der verformten Mittellebene stehen bleiben, hat nicht nur aus der physikalischen Sicht einen Widerspruch dargestellt, sondern das Verständnis der Gleichung erschwert, sodass man bis Mitte des 19. Jahrhunderts damit Probleme hatte, physikalisch und mathematisch korrekte Randbedingungen zu formulieren. Diese Erkenntnis sowie die Nachfrage nach einer guten Plattentheorie seitens der Ingenieure haben TIMOSHENKO, MINDLIN und REISSNER Anfang–Mitte des 20. Jahrhunderts dazu veranlasst, sich mit neuen Strukturannahmen auseinanderzusetzen. So entstand die TIMOSHENKO-MINDLIN-REISSNER-Plattentheorie, welche ursprünglich linear war.

In diesem Abschnitt wollen wir eine nichtlineare Theorie für eine homogene, isotrope thermoelastische Platte herleiten. Dabei verallgemeinern wir den in [42] vorgestellten variationellen Zugang<sup>15</sup> zur Plattenmodellierung über die dreidimensionalen nichtlinearen Thermoelastizitätsgleichungen (1.42). Wir versuchen möglichst konsistent mit den Notationen der letzten Abschnitte zu bleiben, verwenden aber an manchen Stellen die in den Plattentheorien gängigen Bezeichnungen.

Wir betrachten eine Platte, welche in der Referenzkonfiguration die Menge  $\mathcal{B}_r = \Omega \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ ,  $h > 0$ , belegt, wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit dem Rand  $\Gamma := \partial\Omega$  ist. Jedes in  $\mathcal{B}_r$  liegende Teilchen sei über die LAGRANGESchen Koordianten  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  parametrisiert<sup>16</sup>. Die Menge  $\Omega \times \{0\}$  heißt Mittellebene der Platte. Durch  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x})$  mit Koordinaten  $U_i(t, \mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sei der Verschiebungsvektor gegeben, welcher die Differenz zwischen den LAGRANGESchen Koordinaten des materiellen Punktes in der verformten Konfiguration bzw. der Rerefrenzkonfiguration angibt. Also verschiebt sich ein auf der Mittellebene liegender Punkt  $(x_1, x_2, 0)$  um  $\mathbf{u}(t, (x_1, x_2)) := \mathbf{U}(t, (x_1, x_2, 0))$ . Neben mechanischen Spannungen möge die Platte auch einer Temperaturverteilung  $\tau = \tau(t, \mathbf{x})$  unterliegen, welche bezüglich einer Referenztemperatur  $Y_0$  gemessen sei, für welche der Körper von thermischen Spannungen frei ist. Dann ist  $Y = Y_0 + \tau$  die absolute Temperatur.

<sup>15</sup>Ein alternativer Zugang erfolgt über das sogenannte COSSERAT-Kontinuum. Diese Methode ist axiomatisch, aber deutlich komplizierter und weniger intuitiv.

<sup>16</sup>Ab hier stehen kleine fettgedruckte Buchstaben nicht mehr für EULERSche Betrachtungsweise.

### 1.5.1 Bewegungsgleichungen für den elastischen Anteil

Seien  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  der 1. PIOLA-KIRCHHOFFsche-Spannungs- bzw. der GREENsche Verzerrungstensor<sup>17</sup>. In der Koordinatenform schreibt sich  $\varepsilon$  zu

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}. \quad (1.43)$$

Wir berücksichtigen geometrische Nichtlinearitäten, beschränken uns aber der Einfachheit halber auf physikalisch lineare Stoffgesetze. Diese Annahme führt einerseits dazu, dass sich das Stoffgesetz zum linearen HOOKESchen Gesetz vereinfacht. Andererseits ist das Modell hinreichend allgemein, um die meisten im Ingenieurwesen gängigen Stoffe beschreiben zu können.

Das in (1.33) formulierte HOOKESche Gesetz postuliert die Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen in der Form

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^\tau),$$

wobei  $\varepsilon^\tau$  den thermischen Verzerrungstensor bezeichnet, deren genaue Form wir noch festlegen müssen. Im Folgenden nehmen wir die Platte als thermisch isotrop an, woraus man

$$\varepsilon_{ij}^\tau = \varepsilon^\tau \delta_{ij}$$

folgert. Hierbei stellt  $\varepsilon^\tau = \varepsilon^\tau(\tau)$  ein Maß thermischer Verzerrung dar. Insbesondere gilt  $\varepsilon^\tau = 0$ , wenn  $\tau = 0$  ist, denn die Platte ist im Referenzzustand spannungsfrei.

Unter Beachtung elastischer Isotropie und Homogenität der Platte bekommt man

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\mu} \left[ (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^\tau \delta_{ij}) + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_{kk} - \varepsilon^\tau) \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{E}{1+\mu} (\varepsilon_{ij} + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) - \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon^\tau \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.44)$$

worin  $E$  der YOUNGSche Modul und  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$  die POISSONZahl sind.

Da die Platte als dünn vorausgesetzt ist, ist es sinnvoll, die Annahme

$$\sigma_{33} = 0 \quad (1.45)$$

zu treffen. Diese Annahme wird in den meisten Plattentheorien gemacht. Physikalisch bedeutet dies, dass die Schubspannung  $\sigma_{33}$  verglichen mit anderen Spannungen vernachlässigbar ist. Setzt man nun (1.45) in (1.44) für  $i = j = 3$  ein und löst die resultierende Gleichung nach  $\varepsilon_{33}$  auf, so folgt

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{1+\mu}{1-\mu} \varepsilon^\tau,$$

womit sich (1.44) zu

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}) - \frac{E}{1-\mu} \varepsilon^\tau, & \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \frac{E}{1-\mu} \varepsilon^\tau, \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{ij}, \quad i \neq j, & \sigma_{33} &= 0 \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Trotz des Notationsmissbrauchs sollen diese nicht mit dem CAUCHYSchen Spannungs- bzw. dem LAGRAN-  
GESchen Verzerrungstensor verwechselt werden.

umschreibt. Um die Tatsache zu berücksichtigen, dass die Schubspannungen über die Plattendicke nicht konstant sind, schlug TIMOSHENKO vor, einen Scherfaktor  $k > 0$  einzuführen<sup>18</sup>. Damit ergibt sich eine neue Form des HOOKESchen Gesetzes:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) - \frac{E}{1-\mu}\varepsilon^\tau, & \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \frac{E}{1-\mu}\varepsilon^\tau, \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \quad j = 2, & \sigma_{ij} &= k\frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 3, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji}, & \sigma_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Um die Plattengleichungen herzuleiten, machen wir uns das Variationsprinzip zu Nutze, indem wir über die Energieminimierung zu Bewegungsgleichungen gelangen. Die potentielle Energie  $\mathcal{P}$  wird durch

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \, d\mathbf{x}$$

gegeben. Unter Benutzung des HOOKESchen Gesetzes (1.46) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\varepsilon_{11}^2 + 2\mu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 2(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 + 2k(1-\mu)(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \\ &\quad - (1+\mu)\varepsilon^\tau(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2)] \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Die kinetische Energie lautet

$$\mathcal{K} = \frac{\rho}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [(\dot{U}_1)^2 + (\dot{U}_2)^2 + (\dot{U}_3)^2] \, d\mathbf{x}, \quad (1.48)$$

wobei  $\rho$  die spezifische Dichte bezeichnet.

Die Vektoren  $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_i)_i$  und  $\tilde{\mathbf{g}} = (\tilde{g}_i)_i$  bezeichnen die auf die Platte einwirkenden Volumen- bzw. Oberflächenkräfte. Die dadurch erbrachte Leistung schreibt sich als

$$\mathcal{W} = \frac{\rho}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \tilde{f}_i U_i \, d\mathbf{x} + \frac{\rho}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Gamma} \tilde{g}_i U_i \, d\Gamma \, dx_3.$$

Es genügt mit den über die Plattendicke integrierten Kräften und Momenten zu arbeiten, welche sich gemäß

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{f}_i \, dx_3, & g_i(x_1, x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{g}_i \, dx_3, \\ M_i(x_1, x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \tilde{f}_i \, dx_3, & m_i(x_1, x_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \tilde{g}_i \, dx_3 \end{aligned}$$

ergeben. Außerdem ist es geschickter, statt der Temperatur  $\tau$  und des Wärmeflusses  $\mathbf{q}$  folgende gewichtete und über die Plattendicke gemittelte Funktionen zu betrachten:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(x_1, x_2) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^\tau \, dx_3, & \theta(x_1, x_2) &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \varepsilon^\tau \, dx_3, \\ \mathbf{q}_\theta(x_1, x_2) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{q} \, dx_3, & \mathbf{q}_\theta(x_1, x_2) &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \mathbf{q} \, dx_3. \end{aligned} \quad (1.49)$$

<sup>18</sup>Die tatsächliche Schubspannung muss einen mindestens quadratischen Verlauf über den Querschnitt haben. Am oberen und unteren freien Ende muss sie schließlich verschwinden. Um ihre effektive Größe zu berücksichtigen wird meist  $k = 5/6$  gesetzt (vgl. [85]). Die KIRCHHOFFSche Platte entspricht dabei dem Grenzwert für  $k \rightarrow \infty$  (cf. [43]).

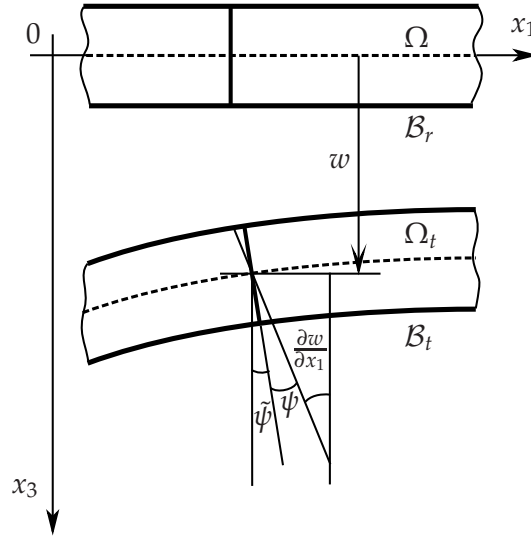


Abbildung 1.2: Gebogene Platte im Querschnitt

Wir nehmen ferner an, dass die ebenen Gradienten von  $U_1$  und  $U_2$  verglichen mit den restlichen Gradienten klein sind. Dies ermöglicht die folgende Approximation von (1.43)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right)^2, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_3}, \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Die Strukturannahme von REISSNER, MINDLIN und TIMOSHENKO lautet

$$\begin{aligned}
 U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) - x_3 \psi(x_1, x_2), \\
 U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3 \varphi(x_1, x_2), \\
 U_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Physikalisch bedeutet dies, dass die in der Referenzkonfiguration auf der Mittelebene senkrecht stehenden Fasern auch nach Deformation gerade bleiben, dürfen sich aber im Gegensatz zur KIRCHHOFFSchen Hypothese im Laufe der Plattendeformation drehen. Es gilt

$$w = u_3, \quad \psi \approx - \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \tilde{\psi} \right), \quad \varphi \approx - \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \tilde{\varphi} \right).$$

Dabei bemessen  $\tilde{\psi}$  und  $\tilde{\varphi}$  die Winkel zwischen der verformten Faser, welche in der Referenzkonfiguration auf der Mittelebene  $\Omega$  im Punkt  $(x_1, x_2, 0)$  senkrecht steht, und der verformten Mittelebene (s. Abbildung 1.2).

Setzt man (1.51) in (1.50) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + x_3 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi \right), \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \varphi \right), \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} (\psi^2 + \varphi^2).
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Unter Verwendung von (1.47) und (1.52) drückt man die potentielle Energie über  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$ ,  $\psi$  und  $\varphi$  aus, was unmittelbar zu

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} [a(\psi, \varphi, w) + N(u_1, u_2, w)]$$

mit den Bilinearenformen

$$\begin{aligned}
a(w, \psi, \varphi; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}) &= a_0(\psi, \varphi) + K a_1(\psi, \varphi, w), \\
a_0(\psi, \varphi; \hat{\psi}, \hat{\varphi}) &= D \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_1} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_1} \right) + \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_2} \right) \theta \right] dx, \\
a_1(w, \psi, \varphi; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}) &= \int_{\Omega} \left[ \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \left( \hat{\psi} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right) + \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \left( \hat{\varphi} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right) \right] dx
\end{aligned}$$

und der nichtlinearen Form

$$\begin{aligned}
N(u_1, u_2, w; \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{w}) &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right] + \\
&\quad \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right] + \\
&\quad \mu \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right] + \mu \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right] + \\
&\quad \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right) \\
&\quad + \frac{1+\mu}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \right) \tilde{\theta} dx
\end{aligned}$$

führt, wobei wir zunächst  $\theta$  und  $\tilde{\theta}$  nicht als Argumente von  $a_0$  bzw.  $N$  explizit aufführen.  $a(\psi, \varphi, w)$  bedeutet dabei  $a(\psi, \varphi, w) = a(\psi, \varphi, w; \psi, \varphi, w)$  usw. Hier und im Folgenden sei  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ .

Nun setzen wir das Prinzip der virtuellen Arbeit ein, um Bewegungsgleichungen für die Verschiebungskomponenten herzuleiten. Letzteres besagt, dass unter allen kinematisch zulässigen Zuständen des Systems derjenige angenommen wird, welcher das LAGRANGE-Funktional

$$\mathcal{L} = \int_0^T [\mathcal{K}(t) + \mathcal{W}(t) - \mathcal{P}(t)] dt$$

minimiert. Als Grundraum für die Funktionen  $w$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $u_1$  und  $u_2$  wählen wir alle hinreichend regulären Funktionen mit der Eigenschaft

$$w = \psi = \varphi = u_1 = u_2 = 0 \text{ auf } \Gamma_0 \text{ für } t \in [0, T].$$

Dies modelliert eine auf  $\Gamma_0$  festgeklemmte Platte. Dabei gelte  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$ , wobei die Mengen  $\Gamma_0 \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_1$  relativ offen in  $\Gamma$  und disjunkt seien. Außerdem sei  $\Gamma$  LIPSCHITZ-stetig.

Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Bewegung das Funktional  $\mathcal{L}$  minimiert, ist dadurch gegeben, dass seine erste Variation (d. h. die GÂTEAUX-Ableitung)

$$\delta \mathcal{L}(w, \psi, \varphi, u_1, u_2)[\hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{u}_1, \hat{u}_2]$$

für alle hinreichend glatten Testfunktionen  $\hat{w}$ ,  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  verschwindet, wobei

$$\hat{w}(t) = \hat{\psi}(t) = \hat{\varphi}(t) = \hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) = 0 \text{ in } \Omega \text{ für } t \in \{0, T\}$$

und

$$\hat{w}(t) = \hat{\varphi}(t) = \hat{\psi}(t) = \hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) = 0 \text{ auf } \Gamma_0 \text{ für } t \in [0, T].$$

Die Variationsgleichung schreibt sich explizit zu

$$\begin{aligned} & \int_0^T c(\dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{u}_1, \dot{u}_2; \dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{u}_1, \dot{u}_2) - a(w, \psi, \varphi; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}) \\ & - N(\dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{u}_1, \dot{u}_2; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{u}_1, \hat{u}_2) + \int_0^T (f_1 \hat{u}_1 + f_2 \hat{u}_2 + f_3 \hat{w}) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (g_1 \hat{u}_1 + g_2 \hat{u}_2 + g_3 \hat{w}) d\Gamma dt - \int_0^T \left( m_1 \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right) d\Gamma dt \end{aligned}$$

mit  $a$ ,  $N$  wie oben und

$$c(\dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{u}_1, \dot{u}_2; \dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{u}_1, \dot{u}_2) = \rho h \int_{\Omega} [\dot{u}_1 \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \dot{u}_2 + \dot{w} \dot{w} + \frac{h^2}{12} (\dot{\psi} \dot{\psi} + \dot{\varphi} \dot{\varphi})] dx.$$

Nach Umformen ergibt sich die folgende Gestalt von  $N$

$$\begin{aligned} N(\dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{u}_1, \dot{u}_2; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{u}_1, \hat{u}_2) = & \int_{\Omega} \left[ N_{11} \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right) + \right. \\ & \left. N_{22} \left( \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right) + N_{12} \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right) \right] dx, \end{aligned} \quad (1.53)$$

wobei

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right], \\ N_{22} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right], \\ N_{12} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Die Funktionen  $N_{ij}$  ergeben sich dabei als die über die Plattendicke gemittelten Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$ , welche man durch Einsetzen von (1.51) in (1.46) und Verwerfen des thermischen Anteils  $\frac{E}{1-\mu}\varepsilon^\tau$  gewinnt. Wendet man den GAUSSSchen Satz auf (1.53) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} N(\dot{w}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{u}_1, \dot{u}_2; \dot{\hat{w}}, \dot{\hat{\psi}}, \dot{\hat{\varphi}}, \dot{\hat{u}}_1, \dot{\hat{u}}_2) = & - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} \right) \hat{u}_1 + \left( \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} \right) \hat{u}_2 + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left( N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \hat{w} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \hat{w} \right] dx + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left[ (\nu_1 N_{11} + \nu_2 N_{12}) \hat{u}_1 + (\nu_2 N_{22} + \nu_1 N_{12}) \hat{u}_2 \right. \\ & \left. + \nu_1 \left( N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \hat{w} + \nu_2 \left( N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \hat{w} \right] d\Gamma. \end{aligned}$$

Mit dem Variationslemma bekommen wir dann das folgende System partieller Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}_1 - \left( \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} \right) + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_1} &= f_1, \\ \rho h \ddot{u}_2 - \left( \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} &= f_2, \\ \rho h \ddot{w} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \varphi \right) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) &= f_3, \\ \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\psi} - D \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + K \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= M_1, \\ \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\varphi} - D \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + K \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= M_2 \end{aligned} \quad (1.54)$$

für  $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$  mit den Randbedingungen

$$u_1 = u_2 = w = \psi = \varphi = 0 \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_0$$

und

$$\begin{aligned} \nu_1 N_{11} + \nu_2 N_{12} + \frac{E}{2(1-\mu)} \nu_1 \tilde{\theta} &= g_1, \\ \nu_2 N_{22} + \nu_1 N_{12} + \frac{E}{2(1-\mu)} \nu_2 \tilde{\theta} &= g_2, \\ K \left( \frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi \right) + \left( \nu_1 N_{11} + \nu_2 N_{12} \right) \frac{\partial w}{\partial x_1} - \left( \nu_2 N_{22} + \nu_1 N_{12} \right) \frac{\partial w}{\partial x_2} &= g_3, \\ D \left[ \nu_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \mu \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \nu_2 \right] + \frac{D(1+\mu)}{2} \nu_1 \theta &= m_1, \\ D \left[ \nu_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mu \nu_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \nu_1 \right] + \frac{D(1+\mu)}{2} \nu_2 \theta &= m_2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

für  $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_1$ .

Um das System abzuschließen, benötigen wir noch Differentialgleichungen für  $\theta$  und  $\tilde{\theta}$ .

### 1.5.2 Wärmeleitung in dünnen Platten

Das Vektorfeld  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  gebe den Wärmefluss in der Platte an. Das CATTANEO-Gesetz (1.41) der Wärmeleitung besagt

$$\tau_0 \dot{q}_i + q_i = -\lambda_0 \frac{\partial Y}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei  $Y$  die absolute Temperatur und  $\lambda_0 > 0$  die Wärmeleitfähigkeit bezeichnen. Die Zahl  $\tau_0 > 0$  ist ein kleiner Relaxationsparameter (vgl. Kapitel 1.4.6). Wegen  $\tau = Y - Y_0$  folgt ferner

$$\tau_0 \dot{q}_i + q_i = -\lambda_0 \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.56)$$

Bezeichnet man die Entropie mit  $S$ , so besagt das Gesetz der Entropiebilanz aus (1.24)

$$Y \dot{S} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + H, \quad (1.57)$$

worin  $H$  für die Wärmezufuhr steht.

Nach dem 2. Satz der Thermodynamik für irreversible Prozesse (s. Gleichung (1.24)) hängt die Entropie  $S$  mit den elastischen Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}$  zusammen. Im Rahmen der linearen Theorie setzen wir

$$\left| \frac{\tau}{Y_0} \right| \ll 1 \quad (1.58)$$

voraus, was für kleine  $\tau$

$$\varepsilon^\tau = \alpha \tau \quad (1.59)$$

bedeutet, wobei  $\alpha$  der Wärmedehnungskoeffizient ist. Unter Benutzung von (1.58) und (1.59) erhält man wegen der elastischen und thermischen Isotropie

$$S = \gamma \varepsilon_{kk} + \frac{\rho c}{Y_0} \tau, \quad (1.60)$$

worin  $c$  die spezifische Wärmekapazität des Körpers ist und  $\gamma = \frac{E\alpha}{1-2\mu}$ .

Durch Einsetzen von (1.60) in (1.57) erhalten wir

$$Y(\gamma \dot{\varepsilon}_{kk} + \frac{\rho c}{Y_0} \dot{\tau}) = -\lambda_0 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + H. \quad (1.61)$$

(1.61) ist eine nichtlineare Gleichung in  $\tau$  (oder  $Y$ ). Mit der Annahme (1.58) kann man aber diese linearisieren, indem man  $Y$  durch  $Y_0$  ersetzt. Dies führt auf

$$Y_0(\gamma \dot{\varepsilon}_{kk} + \frac{\rho c}{Y_0} \dot{\tau}) = -\lambda_0 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + H, \quad (1.62)$$

wobei

$$\kappa = \frac{\lambda_0}{\rho c} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\gamma Y_0}{\lambda_0}.$$

Gleichung (1.62) beschreibt den Wärmeleitungsvorgang in einem isotropen, elastischen Körper. Setzt man (1.51) in (1.62) ein, so ergibt sich eine Gleichung für die Wärmebilanz in REISSNER-MINDLIN-Platten:

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\kappa} \dot{\tau} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{u}_1, \dot{u}_2) + \eta x_3 \operatorname{div}(\dot{\psi}, \dot{\phi}) = \frac{H}{\lambda_0}. \quad (1.63)$$

Analog zu  $\theta$  und  $\tilde{\theta}$  definieren wir  $\mathbf{q}_\theta = (q_{\theta,1}, q_{\theta,2})$  und  $\mathbf{q}_{\tilde{\theta}} = (q_{\tilde{\theta},1}, q_{\tilde{\theta},2})$  als die über die Plattendicke mit geschickten Gewichten gemittelten Wärmeflüsse  $\mathbf{q}_\theta = (q_{\theta,1}, q_{\theta,2})$  und  $\mathbf{q}_{\tilde{\theta}} = (q_{\tilde{\theta},1}, q_{\tilde{\theta},2})$  gemäß

$$\mathbf{q}_\theta(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{q} dx_3, \quad \mathbf{q}_{\tilde{\theta}}(x_1, x_2) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \mathbf{q} dx_3.$$

Unser nächstes Ziel ist es, mit Hilfe von (1.63) Gleichungen für  $\theta$  und  $\mathbf{q}_\theta$  sowie  $\tilde{\theta}$  und  $\mathbf{q}_{\tilde{\theta}}$  zu gewinnen.

### Gleichungen für $\theta$ und $\mathbf{q}_\theta$

Das für einen allgemeinen dreidimensionalen, isotropen Körper geltende CATTANEO-Gesetz der Wärmeleitung (1.56) lässt sich in der zur Mittelebene normalen Richtung gut durch das FOURIER-Gesetz approximieren:

$$\begin{aligned} \tau_0 \dot{q}_i + q_i &= -\lambda_0 \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \\ q_3 &= -\lambda_0 \frac{\partial \tau}{\partial x_3}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Diese Annäherung ist im physikalischen Sinne sowohl quantitativ als auch qualitativ gerechtfertigt, denn die durch das FOURIERSche Gesetz verursachte unendliche Wärmeausbreitungsgeschwindigkeit ist wegen der geringen Dicke der Platte unwesentlich.

Nach der Multiplikation der Gleichung (1.64) mit  $x_3$  für  $i = 1, 2$  und Integration über  $x_3$  bekommt man

$$\tau_0 \operatorname{div} \dot{\mathbf{q}}_\theta + \operatorname{div} \mathbf{q}_\theta = -\lambda_0 \nabla \theta.$$

Analog ergibt sich aus (1.63) nach Multiplikation mit  $x_3$  und Integration die Identität

$$\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \mathbf{q} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial q}{\partial x_3} dx_3 + \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \tau dx_3 + \frac{\eta h^3}{12} (\dot{\psi} + \dot{\phi}) = \frac{h^3}{12 \lambda_0} p,$$

wobei

$$p = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 H dx_3.$$

Anhand der geschickten Definition von  $\theta$  in (1.49) sehen wir leicht die Gültigkeit von

$$\frac{h^3}{12 \alpha} [\operatorname{div} \mathbf{q}_\theta + \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} + \alpha \eta (\dot{\psi} + \dot{\phi})] = \frac{h^3}{12 \lambda_0} p - \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial q_3}{\partial x_3} dx_3$$

ein. Der hintere Term lässt sich mittels partieller Integration wie folgt umformen:

$$\int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial q_3}{\partial x_3} dx_3 = - \int_{-h/2}^{h/2} q_3 dx_3 + x_3 q_3 \Big|_{-h/2}^{h/2}.$$

Mit (1.64) folgt weiter

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial q_3}{\partial x_3} dx_3 &= \lambda_0 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau}{\partial x_3} dx_3 + x_3 q_3 \Big|_{-h/2}^{h/2} = [\lambda_0 \tau + x_3 q_3] \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \lambda_0 [\tau(t, x_1, x_2, \frac{h}{2}) - \tau(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2})] + \frac{h}{2} [q_3(t, x_1, x_2, \frac{h}{2}) + q_3(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2})]. \end{aligned}$$

Die Platte befinde sich in einem Medium der Temperatur  $\hat{\tau}(t, \mathbf{x})$  (gemessen bzgl. der Referenztemperatur). Das NEWTONSche Abkühlungsgesetz angewendet auf die untere und obere Plattenseiten besagt

$$\begin{aligned} q_3(t, x_1, x_2, \frac{h}{2}) &= \lambda_1[\hat{\tau}_2(t, x_1, x_2) - \tau(t, x_1, x_2, \frac{h}{2})], \\ q_3(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2}) &= -\lambda_1[\hat{\tau}_1(t, x_1, x_2) - \tau(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2})], \end{aligned} \quad (1.65)$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1(t, x_1, x_2) &= \hat{\tau}(t, x_1, x_2, \frac{h}{2} + 0), \\ \hat{\tau}_2(t, x_1, x_2) &= \hat{\tau}(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2} - 0) \end{aligned}$$

und  $\hat{\tau}_1$ ,  $\hat{\tau}_2$  und  $\lambda_0$  bekannt sind. Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q}_\theta + \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} + \alpha \eta(\dot{\psi} + \dot{\phi}) &= \frac{\alpha}{\lambda_0} p + (\frac{h\lambda_1}{2} - \lambda_0)[\tau(t, x_1, x_2, \frac{h}{2}) - \tau(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2})] \\ &\quad - \frac{12}{h^3} \left\{ \frac{h\lambda_1}{2} (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1) - \frac{h\lambda_1}{2} [\tau(t, x_1, x_2, \frac{h}{2}) - \tau(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2})] \right\}. \end{aligned}$$

Um die Gleichung bzgl.  $\theta$  und  $\mathbf{q}_\theta$  abzuschließen, muss man  $\theta$  mit der Oberflächentemperatur  $\tau(t, x_1, x_2, \frac{h}{2})$  bzw.  $\tau(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2})$  in Verbindung setzen. Hierzu böte sich der Ansatz

$$\tau(t, x_1, x_2, x_3) = \tau_0(t, x_1, x_2) + x_3 \tau_1(t, x_1, x_2) \quad (1.66)$$

an, welcher wegen der kleinen Plattendicke plausibel ist. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha \tau_1, \\ \tau(t, x_1, x_2, x_3) \Big|_{-h/2}^{h/2} &= h \tau_1(t, x_1, x_2) = \frac{h}{\alpha} \theta(t, x_1, x_2) \end{aligned}$$

und somit

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_\theta + \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} + \alpha \eta(\dot{\psi} + \dot{\phi}) + \frac{12}{h^2} (\lambda_0 - \frac{h\lambda_1}{2}) \theta = \frac{\alpha}{\lambda_0} p + \frac{6\alpha\lambda_1}{h^2} (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1).$$

Wir setzen weiter

$$\beta = \frac{12}{h^2} (\lambda_0 - \frac{h\lambda_1}{2}), \quad g_1 = \frac{\alpha}{\lambda_0} p + \frac{6\alpha\lambda_1}{h^2} (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1)$$

und schreiben die obige Gleichung um in

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_\theta + \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} + \alpha \eta(\dot{\psi} + \dot{\phi}) + \beta \theta = g_1.$$

Die Randbedingungen für  $\theta$  ergeben sich wiederum unter Verwendung des NEWTONSchen Abkühlungsgesetzes:

$$\mathbf{q} \cdot \nu = -\lambda_2 (\tau - \hat{\tau}) \text{ für } (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad x_3 \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$$

für ein  $\lambda_2 \geq 0$ , was nach Multiplikation mit  $x_3$  und anschließender Integration über  $x_3$  zu

$$\mathbf{q}_\theta \cdot \nu = -\lambda_2 (\theta - \hat{\theta}) \text{ für } (x_1, x_2) \in \Gamma$$

mit  $\hat{\theta} = \frac{12\kappa}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \hat{\tau} dx_3$  führt. Alternativ schreibt man die DIRICHLETSchen Randbedingungen

$$\tau = \hat{\tau} \text{ für } (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad x_3 \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$$

vor, wodurch man

$$\theta = \hat{\theta} \text{ für } (x_1, x_2) \in \Gamma$$

erhält.

**Gleichungen für  $\tilde{\theta}$  und  $\mathbf{q}_{\tilde{\theta}}$** 

Gleichungen für  $\tilde{\theta}$  und  $\mathbf{q}_{\tilde{\theta}}$  lassen sich genauso wie die für  $\theta$  und  $\mathbf{q}_{\theta}$  herleiten. Integriert man (1.64) über  $x_3$  für  $i = 1, 2$ , so bekommt man sofort

$$\tau_0 \operatorname{div} \dot{\mathbf{q}}_{\tilde{\theta}} + \operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} = -\lambda_0 \nabla \tilde{\theta}.$$

Wir mitteln Gleichung (1.63) über  $x_3$  und finden unter Beachtung von

$$\tilde{\theta} = \frac{\alpha}{h} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \tau dx_3$$

die Identität

$$\operatorname{div} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{q} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial q}{\partial x_3} dx_3 + \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_{-h/2}^{h/2} \tau dx_3 + \eta \operatorname{div}(u'_1, u'_2) = \frac{h}{\lambda_0} \tilde{p}$$

mit

$$\tilde{p} = h \int_{-h/2}^{h/2} H dx_3.$$

Es folgt daher

$$h[\operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\kappa} \dot{\tilde{\theta}} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{u}_1, \dot{u}_2)] = \frac{\alpha h}{\lambda_0} \tilde{p} - q_3 \Big|_{-h/2}^{h/2}.$$

Unter Beachtung von (1.65) und (1.66) bekommen wir

$$\begin{aligned} h[\operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\kappa} \dot{\tilde{\theta}} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{u}_1, \dot{u}_2)] &= \frac{\alpha h}{\lambda_0} \tilde{p} + \lambda_1 [\hat{\tau}_2(t, x_1, x_2) - \hat{\tau}_1(t, x_1, x_2)] + \\ &\quad \lambda_1 [\tau(t, x_1, x_2, -\frac{h}{2}) - \tau(t, x_1, x_2, \frac{h}{2})] \\ &= \frac{\alpha h}{\lambda_0} \tilde{p} + \lambda_1 [\hat{\tau}_2(t, x_1, x_2) - \hat{\tau}_1(t, x_1, x_2)]. \end{aligned}$$

Nach Umskalierung ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\kappa} \dot{\tilde{\theta}} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{u}_1, \dot{u}_2) = \frac{\alpha}{\lambda_0} \tilde{p} + \frac{\lambda_1}{h} [\hat{\tau}_2(t, x_1, x_2) - \hat{\tau}_1(t, x_1, x_2)].$$

Wegen

$$g_2 = \frac{\alpha}{\lambda_0} \tilde{p} + \frac{\lambda_1}{h} [\hat{\tau}_2(t, x_1, x_2) - \hat{\tau}_1(t, x_1, x_2)]$$

findet man

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\kappa} \dot{\tilde{\theta}} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{u}_1, \dot{u}_2) = g_2.$$

In voller Analogie zu  $\theta$  und  $\mathbf{q}$  lauten die Randbedingungen für  $\tilde{\theta}$  und  $\mathbf{q}_{\tilde{\theta}}$

$$\mathbf{q}_{\tilde{\theta}} \cdot \nu = -\lambda_2 (\theta - \tilde{\theta}) \text{ für } (x_1, x_2) \in \Gamma$$

mit  $\tilde{\theta} = \frac{\alpha}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\tau} dx_3$  oder

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta} \text{ für } (x_1, x_2) \in \Gamma.$$

### 1.5.3 Zusammenfassung und Linearisierung

Fasst man alle oben hergeleiteten Gleichungen zusammen, so ergibt sich das Gesamtsystem

$$\begin{aligned}
\rho h \ddot{u}_1 - \left( \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} \right) + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_1} &= f_1, \\
\rho h \ddot{u}_2 - \left( \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} &= f_2, \\
\tau_0 \dot{\mathbf{q}}_{\tilde{\theta}} + \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} &= -\lambda_0 \nabla \tilde{\theta}, \\
\operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\kappa} \dot{\tilde{\theta}} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{u}_1, \dot{u}_2) &= \frac{\alpha}{\lambda_0} \tilde{p} + \frac{\lambda_1}{h} [\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1], \\
\rho h \ddot{w} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \varphi \right) \right] \\
- \frac{\partial}{\partial x_1} \left( N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) &= f_3, \\
\frac{\rho h^3}{12} \ddot{\psi} - D \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + K \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= M_1, \\
\frac{\rho h^3}{12} \ddot{\varphi} - D \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + K \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= M_2, \\
\tau_0 \dot{\mathbf{q}}_{\theta} + \mathbf{q}_{\theta} &= -\lambda_0 \nabla \theta, \\
\operatorname{div} \mathbf{q}_{\theta} + \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{\psi}, \dot{\varphi}) + \frac{12}{h^2} (\lambda_0 - \frac{h\lambda_1}{2}) \theta &= \frac{\alpha}{\lambda_0} p + \frac{6\alpha\lambda_1}{h^2} (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1)
\end{aligned}$$

für  $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$  mit den Nichtlinearitäten

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right], \\
N_{22} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right], \\
N_{12} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)
\end{aligned}$$

zuzüglich der Randbedingungen für den mechanischen Anteil

$$u_1 = u_2 = w = \psi = \varphi = 0 \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_0$$

und

$$\begin{aligned}
v_1 N_{11} + v_2 N_{12} + \frac{E}{2(1-\mu)} v_1 \tilde{\theta} &= g_1, \\
v_2 N_{22} + v_1 N_{12} + \frac{E}{2(1-\mu)} v_2 \tilde{\theta} &= g_2, \\
K \left( \frac{\partial w}{\partial v} + v_1 \psi + v_2 \varphi \right) + (v_1 N_{11} + v_2 N_{12}) \frac{\partial w}{\partial x_1} - (v_2 N_{22} + v_1 N_{12}) \frac{\partial w}{\partial x_2} &= g_3, \\
D \left[ v_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \mu v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) v_2 \right] + \frac{D(1+\mu)}{2} v_1 \theta &= m_1, \\
D \left[ v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mu v_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) v_1 \right] + \frac{D(1+\mu)}{2} v_2 \theta &= m_2
\end{aligned}$$

für  $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_1$  sowie den thermischen Anteil

$$\theta = \tilde{\theta} = 0 \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma$$

oder

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_\theta \cdot \nu &= -\lambda_2(\theta - \hat{\theta}) \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma, \\ \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} \cdot \nu &= -\lambda_2(\tilde{\theta} - \tilde{\hat{\theta}}) \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma.\end{aligned}$$

Nun wollen wir das obige nichtlineare Problem um die Nulllösung linearisieren. Dies ergibt folgendes System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\rho h \ddot{u}_1 - \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_1} &= f_1, \\ \rho h \ddot{u}_2 - \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} &= f_2, \\ \tau_0 \dot{\mathbf{q}}_{\tilde{\theta}} + \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} &= -\lambda_0 \nabla \tilde{\theta}, \\ \operatorname{div} \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\kappa} \dot{\tilde{\theta}} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{u}_1, \dot{u}_2) &= \frac{\alpha}{\lambda_0} \tilde{p} + \frac{\lambda_1}{h} [\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1], \\ \rho h \ddot{w} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \varphi \right) \right] &= f_3, \\ \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\psi} - D \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + K \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= M_1, \\ \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\varphi} - D \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + K \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= M_2, \\ \tau_0 \dot{\mathbf{q}}_\theta + \mathbf{q}_\theta &= -\lambda_0 \nabla \theta, \\ \operatorname{div} \mathbf{q}_\theta + \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} + \alpha \eta \operatorname{div}(\dot{\psi}, \dot{\varphi}) + \frac{12}{h^2} (\lambda_0 - \frac{h\lambda_1}{2}) \theta &= \frac{\alpha}{\lambda_0} p + \frac{6\alpha\lambda_1}{h^2} (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1)\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen für den mechanischen Anteil

$$u_1 = u_2 = w = \psi = \varphi = 0 \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_0$$

und

$$\begin{aligned}\frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mu \nu_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \nu_2 \right] + \frac{E}{2(1-\mu)} \nu_1 \tilde{\theta} &= g_1, \\ \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mu \nu_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \nu_1 \right] + \frac{E}{2(1-\mu)} \nu_2 \tilde{\theta} &= g_2, \\ K \left( \frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi \right) &= g_3, \\ D \left[ \nu_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \mu \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \nu_2 \right] + \frac{D(1+\mu)}{2} \nu_1 \theta &= m_1, \\ D \left[ \nu_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mu \nu_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \nu_1 \right] + \frac{D(1+\mu)}{2} \nu_2 \theta &= m_2\end{aligned}$$

für  $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma_1$  und den thermischen Anteil

$$\theta = \tilde{\theta} = 0 \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma$$

oder

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_\theta \cdot \nu &= -\lambda_2(\theta - \hat{\theta}) \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma, \\ \mathbf{q}_{\tilde{\theta}} \cdot \nu &= -\lambda_2(\tilde{\theta} - \tilde{\hat{\theta}}) \text{ für } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Gamma.\end{aligned}$$

Es seien auch entsprechende Anfangsbedingungen vorgegeben.

# Existenz und Stabilität im Linearen

## 2.1 REISSNER-MINDLIN-Gleichungen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet mit einem LIPSCHITZ-Rand  $\Gamma$ , für welchen  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  gilt, wobei  $\Gamma_0 \neq \emptyset$  und  $\Gamma_1$  relativ offen und disjunkt sind. Wir betrachten eine thermoelastische dünne Platte nach REISSNER und MINDLIN, deren Mittelbene in einem spannungslosen Referenzzustand das Gebiet  $\Omega$  belegt und welche die Wärme gemäß des CATTANEO-Gesetzes leitet.

Wir wollen die in Kapitel 1 hergeleiteten REISSNER-MINDLIN-Gleichungen für die Biegung  $w$ , Drehwinkel  $\psi$  und  $\varphi$ , das thermische Moment  $\theta$  und das Moment des Wärmeflusses  $q$  in der symmetrisierten Form auf Wohlgestelltheit untersuchen:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 w_{tt} - K(w_{x_1} + \psi)_{x_1} - K(w_{x_2} + \varphi)_{x_2} + dw_t &= f_3 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\
 \rho_2 \psi_{tt} - D(\psi_{x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) + \gamma \theta_{x_1} &= M_1 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\
 \rho_2 \varphi_{tt} - D(\varphi_{x_2 x_2} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{x_1 x_2}) + K(\varphi + w_{x_2}) + \gamma \theta_{x_2} &= M_2 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\
 \rho_3 \theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \theta + \gamma(\psi_{tx_1} + \varphi_{tx_2}) &= h_2 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\
 \tau_0 q_t + \delta q + \kappa \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

**Bemerkung 2.1.1.** Während wir den in der ersten Gleichung von (2.1) auftretende Term  $dw_t$  aus technischen Gründen eingeführt haben, um das System zu stabilisieren, handelt es sich bei dem in der vierten Gleichung vorkommenden Term  $\beta \theta$  um keine künstliche Dämpfung. Dieser Term ist physikalischer Natur, da  $\theta$  hier nicht die Temperatur, sondern das thermische Moment ist. Außerdem ist  $\beta$  groß, da es sich für die Plattendicke  $h \rightarrow 0$  wie  $h^{-2}$  verhält.

Eine am Randteil  $\Gamma_0$  festgeklemmte sowie am ganzen Rand  $\Gamma$  thermisch isolierte Platte wird durch folgende Randbedingungen modelliert:

$$\begin{aligned}
 w = \psi = \varphi = 0 &\text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\
 K(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi) &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\
 D(\nu_1 \psi_{x_1} + \mu \nu_1 \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_2) - \gamma \theta \nu_1 &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\
 D(\nu_2 \varphi_{x_2} + \mu \nu_2 \psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_1) - \gamma \theta \nu_2 &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\
 q \cdot \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei  $\nu = (\nu_1, \nu_2)'$  den äußeren Einheitsnormalenvektor an  $\Gamma$  bezeichne.

**Bemerkung 2.1.2.** Im Allgemeinen kann man auch gemischte Randbedingungen betrachten, indem man auf einem Teil des Randes DIRICHLETSche oder NEUMANNsche Randbedingungen für  $w$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  bzw.  $\theta$  und  $q$  vorschreibt. Dabei muss man den Rand in vier Teile unterteilen, um alle möglichen Kombinationen zu bekommen. Obwohl die nachstehend präsentierten Lösbarkeits- und Eindeutigkeitsresultate auch in diesem allgemeinen Fall gelten, haben wir der Einfachheit halber auf diese allgemeinere Betrachtung verzichtet.

An dieser Stelle ist es geschickt, die in der Elastizitätstheorie gängigen Notationen für den verallgemeinerten Gradienten einzuführen. Wir definieren den verallgemeinerten Gradienten  $\mathcal{D}$  sowie den zugehörigen Randoperator  $\mathcal{N}$  mittels

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} := \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Notation rechnet man leicht die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \begin{pmatrix} \psi_{x_1x_1} + \frac{1-\mu}{2}\psi_{x_2x_2} + \frac{1+\mu}{2}\varphi_{x_1x_2} \\ \varphi_{x_2x_2} + \frac{1-\mu}{2}\varphi_{x_1x_2} + \frac{1+\mu}{2}\psi_{x_1x_2} \end{pmatrix} &= \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}v, \\ \mathcal{D} \begin{pmatrix} \nu_1\psi_{x_1} + \mu\nu_1\varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_2 \\ \nu_2\varphi_{x_2} + \mu\nu_2\psi_{x_1} + \frac{1+\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_1 \end{pmatrix} &= \mathcal{N}'\mathcal{S}\mathcal{D}v \end{aligned}$$

nach, wobei  $v := (\psi, \varphi)'$  und  $S := D \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}$ . Gilt  $\mu \in (-1, 1)$ , so ist die Matrix  $S$  symmetrisch und positiv definit, denn

$$\det(S - \lambda I) = (D \frac{1-\mu}{2} - \lambda)((D - \lambda)^2 - \mu^2 D^2) = (D \frac{1-\mu}{2} - \lambda)(D - \lambda - \mu D)(D - \lambda + \mu D),$$

womit  $\sigma(S) = \{D \frac{1-\mu}{2}, D(1 - \mu), D(1 + \mu)\}$ . Man beachte, dass  $\mu \in (-1, 1)$  gilt, da nach physikalischer Voraussetzung  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$  stets erfüllt ist. Im Folgenden gehen wir daher von einer allgemeinen symmetrischen, positiv definiten Matrix  $S$  aus.

Mit obiger Notation können wir (2.1)–(2.2) wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div}(\nabla w + v) + d w_t &= f_3 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \theta &= M \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \theta + \gamma \operatorname{div} v_t &= h_2 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \tau_0 q_t + \delta q + \kappa \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei  $M = (M_1, M_2)'$ . Die Randbedingungen sind nun durch

$$\begin{aligned} w = |v| = 0 &\text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu = 0 &\text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}'\mathcal{S}\mathcal{D}v - \gamma \theta \nu = 0 &\text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ q \cdot \nu = 0 &\text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma \end{aligned} \tag{2.4}$$

gegeben. Um das System abzuschließen, werden noch Anfangsbedingungen vorgeschrieben

$$\begin{aligned} w(t=0) &= w^0, & w_t(t=0) &= w^1, \\ v(t=0) &= v^0, & v_t(t=0) &= v^1, \\ \theta(t=0) &= \theta^0, & q(t=0) &= q^0. \end{aligned}$$

Darin ist  $v^0 = (\psi^0, \varphi^0)'$ ,  $v^1 = (\psi^1, \varphi^1)'$ .

### 2.1.1 Wohlgestelltheit

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Lösbarkeit der REISSNER-MINDLIN-Gleichungen, indem wir uns die Halbgruppentheorie zu Nutze machen. Wir formulieren (2.3)–(2.4) in ein Evolutionsproblem der Form

$$\begin{aligned} V_t(t) &= \mathcal{A}V(t) + F(t) \text{ für } t \in (0, \infty), \\ V(0) &= V^0 \end{aligned}$$

um. Die klassische Wohlgestelltheit letzteren Problems im Sinne von HADAMARD ist bekannterweise dazu äquivalent, dass der Operator  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{C}_0$ -Halbgruppe erzeugt.

Wir setzen  $V := (w, v, w_t, v_t, \theta, q)'$  und definieren formal den Differentialoperator

$$A := \rho^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K\Delta & K \operatorname{div} & -d & 0 & 0 & 0 \\ -K\nabla & \mathcal{D}'S\mathcal{D} - K & 0 & 0 & -\gamma\nabla & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \operatorname{div} & -\beta & -\kappa \operatorname{div} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa\nabla & -\delta \end{pmatrix}$$

mit  $\rho := \operatorname{diag}(1, 1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_0)$ . Da wir im Folgenden im schwachen funktionalanalytischen Rahmen arbeiten möchten, wählen wir als Grundraum den HILBERTRAUM

$$\mathcal{H} := (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle_{\mathcal{H}} &:= \rho_1 \langle V^3, W^3 \rangle_{L^2(\Omega)} + \rho_2 \langle V^4, W^4 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \\ &K \langle \nabla V^1 + V^2, \nabla W^1 + W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle \mathcal{D}V^2, S\mathcal{D}W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \\ &\rho_3 \langle V^5, W^5 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \tau_0 \langle V^6, W^6 \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \overline{\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(u) \cap \Gamma_0 = \emptyset\}}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

**Bemerkung 2.1.3.** Da  $\Gamma$  ein LIPSCHITZ-Rand ist, existiert ein stetiger, linearer Spuroperator  $T: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ . Damit ist für  $u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$  auch die Schreibweise  $u|_{\Gamma} = 0$  berechtigt.

Dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  tatsächlich ein Skalarprodukt darstellt, folgt aus der im nachstehenden Satz formulierten KORNSchen Ungleichung.

**Satz 2.1.4** (KORNSche Ungleichung). Es gibt Konstanten  $C_{\mathcal{K},1}, C_{\mathcal{K},2}, C_{\mathcal{K}} > 0$  derart, dass

$$C_{\mathcal{K},1}\|v\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq \|\sqrt{S}\mathcal{D}v\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C_{\mathcal{K},2}\|v\|_{(H^1(\Omega))^2}$$

und

$$\|\sqrt{S}\mathcal{D}v\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + K\|\nabla w + v\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \geq C_{\mathcal{K}}(\|v\|_{(H^1(\Omega))^2}^2 + \|w\|_{H^1(\Omega)}^2)$$

für alle  $w \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  und  $v \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$  gilt.

**Beweis:** Der Ausdruck  $\sqrt{S}$  ist dabei im Sinne des Spektralsatzes zu verstehen. Der Beweis des Lemmas ist eine direkte Folgerung aus den Resultaten in [42]. Die gleiche Aussage gilt auch für Gebiete mit strikter Kegeleigenschaft (s. [48]).  $\square$

Wir definieren weiter den Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ V &\longmapsto AV, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{V \in \mathcal{H} \mid AV \in \mathcal{H}, V \text{ erfüllt verallgemeinerte NEUMANNsche RB (2.5)}\} \\ &= \{V \in \mathcal{H} \mid V^1, V^3 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), V^2, V^4 \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2, \\ &\quad \Delta V^1 \in L^2(\Omega), \mathcal{D}'SDV^2 \in (L^2(\Omega))^2, \\ &\quad V^5 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \operatorname{div} V^6 \in L^2(\Omega), \\ &\quad V \text{ erfüllt verallgemeinerte NEUMANNsche RB (2.5)}\}, \end{aligned}$$

worin die NEUMANNschen Randbedingungen durch

$$\begin{aligned} &\langle \Delta V^1 + \operatorname{div} V^2, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla V^1 + V^2, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ &\quad = 0 \text{ für alle } \phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \\ &\langle \mathcal{D}'SDV^2 - \gamma \nabla V^5, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle SDV^2, \mathcal{D}\phi \rangle_{(L^2(\Omega))^3} - \gamma \langle V^5, \operatorname{div} \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad = 0 \text{ für alle } \phi \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \\ &\langle \operatorname{div} V^6, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle V^6, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \text{ für alle } \phi \in H^1(\Omega) \end{aligned} \tag{2.5}$$

gegeben sind. Man kann leicht nachrechnen, dass  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  ein linear Unterraum von  $\mathcal{H}$  ist.

Das Problem

$$\begin{aligned} V_t &= \mathcal{A}V + F, \\ V(0) &= V^0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

stellt eine Verallgemeinerung von (2.3)–(2.4) dar, wobei

$$\begin{aligned} F &:= (0, 0, f_3, M, h_2, 0)' \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})), \\ V^0 &:= (w^0, v^0, w^1, v^1, \theta^0, q^0)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Denn jede klassische Lösung von (2.3)–(2.4) genügt auch dem System (2.6).

Der folgende Satz charakterisiert  $\mathcal{A}$  als Erzeuger einer  $\mathcal{C}^0$ -Kontraktionshalbgruppe auf  $\mathcal{H}$ .

**Satz 2.1.5.** Es gilt:

1.  $D(\mathcal{A})$  liegt dicht in  $\mathcal{H}$ .
2.  $\mathcal{A}$  ist abgeschlossen.
3.  $\text{im}(\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$  für alle  $\lambda > 0$ .
4.  $\mathcal{A}$  ist dissipativ.

**Beweis:**

1. Dass  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  dicht in  $\mathcal{H}$  liegt, ergibt sich aus folgender Inklusion:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \supset (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^9,$$

welche sich aus der GREENSchen Formel herleiten lässt. Man beachte, dass dabei die NEUMANNschen Randbedingungen (2.5) trivialerweise erfüllt sind.

2. Um die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{A}$  zu beweisen, wählen wir eine beliebige Folge  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$  mit  $V_n \rightarrow V \in \mathcal{H}$  und  $\mathcal{A}V_n \rightarrow F \in \mathcal{H}$  für  $n \rightarrow \infty$  und zeigen für diese, dass  $V \in D(\mathcal{A})$  und  $\mathcal{A}V = F$  gilt.

Da die starke Konvergenz die schwache Konvergenz nach sich zieht, folgt

$$\langle \mathcal{A}V_n, \Phi \rangle_{(L^2(\Omega))^9} \rightarrow \langle F, \Phi \rangle_{(L^2(\Omega))^9}$$

für alle  $\Phi \in (L^2(\Omega))^9$ . Hierbei ist zu beachten, dass  $((L^2(\Omega))^9)' \subset \mathcal{H}'$ . Der Beweis wird über geschickte Wahl von  $\Phi$  erfolgen.

Allgemein gilt für  $V \in D(\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}V = \rho^{-1} \begin{pmatrix} V^3 \\ V^4 \\ K\Delta V^1 + K \operatorname{div} V^2 - dV^3 \\ -K\nabla V^1 + \mathcal{D}'SDV^2 - KV^2 - \gamma\nabla V^5 \\ -\gamma \operatorname{div} V^4 - \beta V^5 - \kappa \operatorname{div} V^6 \\ -\kappa\nabla V^5 - \delta V^6 \end{pmatrix}.$$

Nun untersuchen wir folgende Fälle:

- i) Wir wählen zunächst  $\Phi = (\phi, 0, 0, 0, 0, 0)'$ ,  $\phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ , und finden

$$\langle F^1, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle F, \Phi \rangle_{(L^2(\Omega))^9} \leftarrow \langle \mathcal{A}V_n, \Phi \rangle_{(L^2(\Omega))^9} = \frac{1}{\rho_1} \langle V_n^3, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \rightarrow \frac{1}{\rho_1} \langle V^3, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Demnach gilt  $\frac{1}{\rho_1} V^3 = F^1$ , d. h.  $(\mathcal{A}V)^1 = F^1$ . Da  $F^1 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ , folgt sofort  $V^3 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ .

- ii) Mit  $\Phi = (0, \phi, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\phi \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$ , ergibt sich völlig analog  $(\mathcal{A}V)^2 = F^2$  und  $V^4 \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$ .

iii) Ferner wählen wir  $\Phi = (0, 0, \phi, 0, 0, 0)'$ ,  $\phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \langle F^3, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} &\leftarrow \frac{1}{\rho_1} \langle K \Delta V_n^1 + K \operatorname{div} V_n^2 - dV_n^3, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= -\frac{K}{\rho_1} \langle \nabla V_n^1, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle K \operatorname{div} V_n^2 - dV_n^3, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\rightarrow \frac{K}{\rho_1} \langle \nabla V^1, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle K \operatorname{div} V^2 - dV^3, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, dass  $\Delta V^1 \in L^2(\Omega)$  und  $\frac{1}{\rho_1}(K \Delta V^1 + K \operatorname{div} V^2 - dV^3) = F^3$ , d. h.  $(\mathcal{A}V)^3 = F^3$ .

iv) Sei nun  $\Phi = (0, 0, 0, 0, 0, \phi)'$ ,  $\phi \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$ . Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle F^6, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} &\leftarrow \frac{1}{\tau_0} \langle -\kappa \nabla V_n^5 - \delta V_n^6, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} = \frac{\kappa}{\tau_0} \langle V_n^5, \operatorname{div} \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta}{\tau_0} \langle V_n^6, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ &\rightarrow \frac{\kappa}{\tau_0} \langle V^5, \operatorname{div} \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta}{\tau_0} \langle V^6, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2}. \end{aligned}$$

Daher gilt  $V^5 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  und  $\frac{1}{\tau_0}(-\kappa \nabla V^5 - \delta V^6) = F^6$ , d. h.  $(\mathcal{A}V)^6 = F^6$ .

v) Wir setzen nun  $\Phi = (0, 0, 0, \phi, 0, 0)'$ ,  $\phi \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$  an und finden

$$\begin{aligned} \langle F^4, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} &\leftarrow \frac{1}{\rho_2} \langle -K \nabla V_n^1 + \mathcal{D}' S \mathcal{D} V_n^2 - K V_n^2 - \gamma \nabla V_n^5, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ &= \frac{K}{\rho_2} \langle S \mathcal{D} V_n^2, \mathcal{D} \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \frac{1}{\rho_2} \langle -K \nabla V_n^1 - K V_n^2 - \gamma \nabla V_n^5, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ &\rightarrow \frac{K}{\rho_2} \langle S \mathcal{D} V^2, \mathcal{D} \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \frac{1}{\rho_2} \langle -K \nabla V^1 - K V^2 - \gamma \nabla V^5, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2}. \end{aligned}$$

Demnach ist  $\mathcal{D}' S \mathcal{D} V^2 \in (L^2(\Omega))^2$  und  $\frac{1}{\rho_2}(-K \nabla V^1 + \mathcal{D}' S \mathcal{D} V^2 - K V^2 - \gamma \nabla V^5) = F^4$ , d. h.  $(\mathcal{A}V)^4 = F^4$ .

vi) Schließlich wählen wir  $\Phi = (0, 0, 0, 0, \phi, 0)'$  mit  $\phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . Dies führt zu

$$\begin{aligned} \langle F^5, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} &\leftarrow \frac{1}{\rho_3} \langle -\gamma \operatorname{div} V_n^4 - \beta V_n^5 - \kappa \operatorname{div} V_n^6, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{\kappa}{\rho_3} \langle V_n^6, \nabla \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\rho_3} \langle \gamma \operatorname{div} V_n^4 + \beta V_n^5, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\rightarrow \frac{\kappa}{\rho_3} \langle V_n^6, \nabla \phi \rangle_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\rho_3} \langle \gamma \operatorname{div} V^4 + \beta V^5, \phi \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies impliziert wiederum, dass  $\operatorname{div} V^6 \in L^2(\Omega)$  und  $\frac{1}{\rho_3}(-\gamma \operatorname{div} V^4 - \beta V^5 - \kappa \operatorname{div} V^6) = F^5$  gilt, d. h.  $(\mathcal{A}V)^5 = F^5$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $V$  die verallgemeinerten NEUMANNschen Randbedingungen (2.5) erfüllt. Um das zu zeigen, gehen wir wie folgt vor.

i) Sei  $\phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \Delta V^1 + \operatorname{div} V^2, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} &\leftarrow \langle \Delta V_n^1 + \operatorname{div} V_n^2, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= -\langle \nabla V_n^1 + V_n^2, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \rightarrow \langle \nabla V^1 + V^2, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2}. \end{aligned}$$

ii) Sei  $\phi \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}' S \mathcal{D} V^2 - \gamma \nabla V^5, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} &\leftarrow \langle \mathcal{D}' S \mathcal{D} V_n^2 - \gamma \nabla V_n^5, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ &= -\langle S \mathcal{D} V_n^2, \mathcal{D} \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \gamma \langle V_n^5, \operatorname{div} \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\rightarrow -\langle S \mathcal{D} V^2, \mathcal{D} \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \gamma \langle V^5, \operatorname{div} \phi \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

iii) Für beliebiges  $\phi \in H^1(\Omega)$  ergibt sich schließlich

$$\langle \operatorname{div} V^6, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \leftarrow \langle \operatorname{div} V_n^6, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} = \langle V_n^6, \nabla \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \rightarrow -\langle V^6, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2}.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\mathcal{A}$  abgeschlossen ist.

3. Wir zeigen nun, dass im  $(\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$  für alle  $\lambda > 0$  gilt. Hierzu ist zu zeigen, dass die Gleichung

$$(\lambda - \mathcal{A})V = F \tag{2.7}$$

für alle  $F \in \mathcal{H}$  lösbar ist. Da  $D(\mathcal{A})$  dicht in  $\mathcal{H}$  liegt und  $\mathcal{A}$  abgeschlossen ist, kann man ohne Einschränkung  $F \in D(\mathcal{A})$  wählen.

Sei also  $F \in D(\mathcal{A})$ . Zu lösen ist das Problem

$$\begin{aligned} \lambda V^1 - V^3 &= F^1, \\ \lambda V^2 - V^4 &= F^2, \\ \lambda V^3 - K\Delta V^1 - K \operatorname{div} V^2 + dV^3 &= \rho_1 F^3, \\ \lambda V^4 + K\nabla V^1 - \mathcal{D}'SDV^2 + KV^2 + \gamma\nabla V^5 &= \rho_2 F^4, \\ \lambda V^5 + \gamma \operatorname{div} V^4 + \beta V^5 + \kappa \operatorname{div} V^6 &= \rho_3 F^5, \\ \lambda V^6 + \kappa\nabla V^5 + \delta V^6 &= \tau_0 F^6. \end{aligned}$$

Eliminiert man nun  $V^3, V^4$ , indem man

$$V^3 = \lambda V^1 - F^1, \quad V^4 = \lambda V^2 - F^2, \quad V^6 = \frac{1}{\lambda + \delta}(-\kappa\nabla V^5 + \tau_0 F^6)$$

substituiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + d)V^1 - K\Delta V^1 - K \operatorname{div} V^2 &= \rho_1 F^3 + (\lambda + d)F^1, \\ \lambda^2 V^2 + K\nabla V^1 - \mathcal{D}'SDV^2 + KV^2 + \gamma\nabla V^5 &= \rho_2 F^4 + \lambda F^2, \\ \lambda V^5 + \gamma\lambda \operatorname{div} V^2 + \beta V^5 - \frac{\kappa^2}{1 + \delta}\Delta V^5 &= \rho_3 F^5 + \gamma \operatorname{div} F^2 + \frac{\tau_0 \kappa}{\lambda + \delta} \operatorname{div} F^6. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} G_1 &:= \rho_1 F^3 + (\lambda + d)F^1, \\ G_2 &:= \rho_2 F^4 + \lambda F^2, \\ G_3 &:= \rho_3 F^5 + \gamma \operatorname{div} F^2 + \frac{\tau_0 \kappa}{\lambda + \delta} \operatorname{div} F^6, \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + d)V^1 - K\Delta V^1 - K \operatorname{div} V^2 &= G_1, \\ \lambda^2 V^2 + K\nabla V^1 - \mathcal{D}'SDV^2 + KV^2 + \gamma\nabla V^5 &= G_2, \\ \gamma\lambda \operatorname{div} V^2 - \frac{\kappa^2}{\lambda + \delta}\Delta V^5 + (\lambda + \beta)V^5 &= G_3. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nun wollen wir das elliptische Problem (2.8) lösen, indem wir das Lemma von LAX & MILGRAM darauf anwenden. Wir definieren den HILBERTraum

$$\mathcal{V} := H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$$

mit dem üblichen Skalarprodukt. Auf  $\mathcal{V}$  führen wir eine Bilinearform  $a: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß

$$\begin{aligned} a(V, W) := & \lambda^2(\lambda + d)\langle V^1, W^1 \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda^3\langle V^2, W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + (\lambda + \beta)\langle V^5, W^5 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ & K\lambda\langle \nabla V^1 + V^2, \nabla W^1 + W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \lambda\langle S\mathcal{D}V^2, \mathcal{D}W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \\ & \frac{\kappa^2}{\lambda + \delta}\langle \nabla V^5, \nabla W^5 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \gamma\lambda\langle \nabla V^5, W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \gamma\lambda\langle \operatorname{div} V^2, W^5 \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

ein, multiplizieren die Gleichungen (2.8) skalar in  $L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$  mit  $\lambda V^1$ ,  $\lambda V^2$  bzw.  $V^3$ , addieren das Resultat auf und finden mittels partieller Integration die schwache Formulierung von (2.8) in der Form: Gesucht ist ein  $V \in \mathcal{V}$  mit

$$a(V, W) = \lambda\langle G^1, W^1 \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda\langle G^2, W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle G^3, W^5 \rangle_{L^2(\Omega)}$$

für alle  $W \in \mathcal{V}$ . Die Bilinearform  $a$  ist stetig. Aufgrund der im Satz 2.1.4 formulierten KORNschen Ungleichung ist sie stetig und koerziv auf  $\mathcal{V}$ . Das Funktional

$$\mathcal{V} \ni W \mapsto \lambda\langle G^1, W^1 \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda\langle G^2, W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle G^3, W^5 \rangle_{L^2(\Omega)}$$

ist linear und stetig auf  $\mathcal{V}$ . Unter Verwendung des Lemmas von LAX & MILGRAM ergibt sich also die Existenz einer Lösung  $V \in \mathcal{V}$  zu (2.9), welche dann auch (2.8) löst.

Setzt man

$$V^3 = \lambda V^1 - F^1, \quad V^4 = \lambda V^2 - F^2, \quad V^6 = \frac{1}{\lambda + \delta}(-\kappa \nabla V^5 + \tau_0 F^6),$$

so löst  $V = (V^1, \dots, V^6)'$  das Gleichungssystem (2.7).

Damit haben wir gezeigt, dass  $D(\mathcal{A}) \subset \operatorname{im}(\lambda - \mathcal{A})$  gilt. Da aber  $\mathcal{A}$  abgeschlossen ist, weshalb auch  $\operatorname{im}(\lambda - \mathcal{A})$  abgeschlossen ist, und  $D(\mathcal{A})$  dicht in  $\mathcal{H}$  liegt, folgt schließlich

$$\operatorname{im}(\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}.$$

4. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $\mathcal{A}$  dissipativ ist. Sei  $V \in D(\mathcal{A})$  beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}V, V \rangle_{\mathcal{H}} = & \langle K\Delta V_1 + K \operatorname{div} V^2 - dV^3, V^3 \rangle_{L^2(\Omega)} + \\ & \langle -K\nabla V^1 + \mathcal{D}'S\mathcal{D}V^2 - KV^2 - \gamma\nabla V^5, V^4 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \\ & K\langle \nabla V^3 + V^4, \nabla V^1 + V^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle \mathcal{D}V^4, S\mathcal{D}V^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \\ & \langle -\gamma \operatorname{div} V^4 - \beta V^5 - \kappa \operatorname{div} V^6, V^5 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle -\kappa \nabla V^5 - \delta V^6, V^6 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ = & -d\|V^3\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta\|V^5\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta\|V^6\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

was die Dissipativität von  $\mathcal{A}$  bedeutet.

Dies beendet den Beweis. □

Nun können wir den Satz A.1.8 von LUMER & PHILLIPS auf das CAUCHYproblem (2.6) anwenden. Damit folgt der nachstehende

**Satz 2.1.6.** Seien  $V_0 \in D(\mathcal{A})$  und  $F \in \mathcal{C}^0([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cup \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{H})$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung

$$V \in \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty), D(\mathcal{A})).$$

Ist überdies  $V_0 \in D(\mathcal{A}^s)$  und  $F \equiv 0$  für ein  $s \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$V \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, \infty), D(\mathcal{A}^{s-k})).$$

### 2.1.2 Exponentielle Stabilität bzw. deren Fehlen

Nun wollen wir die Stabilitätseigenschaften von REISSNER-MINDLIN-Gleichungen diskutieren, welche wir hier der Bequemlichkeit halber noch einmal aufführen:

$$\rho_1 w_{tt} - K(w_{x_1} + \psi)_{x_1} - K(w_{x_2} + \varphi)_{x_2} = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.10)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D(\psi_{x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) + \gamma \theta_{x_1} = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.11)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D(\varphi_{x_2 x_2} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{x_1 x_2}) + K(\varphi + w_{x_2}) + \gamma \theta_{x_2} = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.12)$$

$$\rho_3 \theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \theta + \gamma(\psi_{tx_1} + \varphi_{tx_2}) = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.13)$$

$$\tau_0 q_t + \delta q + \kappa \nabla \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega. \quad (2.14)$$

In grober Betrachtung stellt das System eine Kopplung der zweidimensionalen Wellengleichung (2.10) an die zweidimensionalen hyperbolischen Thermoelastizitätsgleichungen (2.11)–(2.14) dar, sodass keine direkte Kopplung zwischen  $w$  und  $\theta, q$  vorliegt. Es ist also zu erwarten, dass die Abklingrate des Systems nicht besser als die von den zweidimensionalen hyperbolischen Thermoelastizitätsgleichungen ist. Tatsächlich zeigen wir im Korollar 2.1.8, dass die zu (2.10)–(2.14) gehörige Energie im Allgemeinen nicht exponentiell abklingt. Das gilt auch für das in (2.10) durch  $w_t$  oder in (2.11)–(2.11) durch  $\psi_t, \varphi_t$  (aber nicht gleichzeitig) gedämpfte System, sodass man stärkere Dämpfungen benötigt. Bevor wir auf diese Diskussion im Detail eingehen, wollen wir einige Resultate über das elastische und thermoelastische – nach FOURIER und CATTANEO – REISSNER-MINDLIN-System und sein eindimensionales Analogon – TIMOSHENKO-Balken – zitieren. Es sind auch zahlreiche Ergebnisse für die (thermo)elastische Platte nach KIRCHHOFF vorhanden. Da sich aber der Charakter dieser Gleichungen von dem der REISSNER-MINDLIN-Gleichungen stark unterscheidet, lassen wir die Diskussion weg und verweisen den Leser auf die Arbeiten [13], [37] und [43].

In [18] hat Fernández Sare die in den Winkelgleichungen gedämpften rein elastischen REISSNER-MINDLIN-Gleichungen studiert

$$\rho_1 w_{tt} - K(w_{x_1} + \psi)_{x_1} - K(w_{x_2} + \varphi)_{x_2} = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.15)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D(\psi_{x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) + \gamma \theta_{x_1} + d_1 \psi_t = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.16)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D(\varphi_{x_2 x_2} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{x_1 x_2}) + K(\varphi + w_{x_2}) + \gamma \theta_{x_2} + d_2 \varphi_t = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega. \quad (2.17)$$

Es wurde gezeigt, dass das System für die Randbedingung  $w = \psi = \varphi = 0$  polynomial stabil ist. Außerdem wurde für den Fall  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$  bewiesen, dass das System für eine gewisse Randbedingung nicht exponentiell stabil ist.

In der Monographie [43] von Lagnese wurde die Frage nach der gleichmäßigen (insbesondere exponentiellen) sowie der starken Stabilisierung von Platten über gewisse Randrückkopplungen gestellt. Für die folgende Wahl der Randbedingungen

$$w = \psi = \varphi = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0,$$

$$K(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi) = m_1 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1,$$

$$D(\nu_1 \psi_{x_1} + \mu \nu_1 \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2} (\psi_{x_2} + \varphi_{x_1}) \nu_2) = m_2 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1,$$

$$D(\nu_2 \varphi_{x_2} + \mu \nu_2 \psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2} (\psi_{x_2} + \varphi_{x_1}) \nu_1) = m_3 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1$$

wurde gezeigt, dass das System (2.15)–(2.17) mit  $d_1 = d_2 = 0$  stark stabil ist, d. h.  $\mathcal{E}(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , falls  $\Gamma_0 \neq \emptyset$  und  $(m_1, m_2, m_3)' = -F(w_t, \psi_t, \varphi_t)'$ , wobei  $F \in L^\infty(\Gamma_1, \mathbb{R}^{3 \times 3})$  eine auf  $\Gamma_1$

symmetrische, positiv semidefinite und auf einem zusammenhängenden Stück von  $\Gamma_1$  positiv definite Matrixfunktion ist. Unter der Voraussetzung, dass das Tripel  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  sternkomplementär-sternförmig ist (vgl. Voraussetzung 4.3.7), wurde sogar die exponentielle Stabilität für ein geeignetes  $F$  bewiesen. Ähnliche Resultate wurden in [60] auch für die Randbedingungen vom Gedächtnistyp

$$\begin{aligned} w &= \psi = \varphi = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ w + \int_0^t g_1(t-s)K\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1\psi + \nu_2\varphi\right)(s)ds &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \psi + \int_0^t g_1(t-s)D(\nu_1\psi_{x_1} + \mu\nu_1\varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1}))(s)ds &= 0, \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \varphi + \int_0^t g_1(t-s)D(\nu_2\varphi_{x_2} + \mu\nu_2\psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_1)(s)ds &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1 \end{aligned}$$

mit exponentiellen Kernen  $g_1, g_2, g_3$  hergeleitet.

In [59] haben Muñoz Rivera und Racke einen nichtlinearen TIMOSHENKO-Balken mit FOURIER-Wärmeleitung

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L) \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen  $\varphi = \psi = \theta_x$  und  $\varphi = \psi_x = \theta$  auf Stabilität untersucht. Sowohl im linearen Fall für  $\sigma(r, s) = kr + s$  als auch im nichtlinearen Fall für glatte  $\sigma$  mit  $\nabla\sigma = (k, k)'$ ,  $\nabla^2\sigma = 0$ , aber dann nur für kleine Anfangsdaten, wurde bewiesen, dass das System genau dann exponentiell stabil ist, wenn  $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$  gilt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Situation physikalisch nicht eintreten kann.

Überraschenderweise ließ sich dieses Resultat nicht auf den Fall der FOURIER-Wärmeleitung übertragen. Es wurde in der Arbeit [19] von Fernández Sare und Racke bewiesen, dass das System

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.18)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.19)$$

$$\rho_3\theta_t + \kappa q_x + \gamma\psi_{tx} = 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.20)$$

$$\tau_0 q_t + \delta q + \kappa\theta_x = 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L) \quad (2.21)$$

nicht exponentiell stabil ist, selbst wenn  $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$  gilt. Ersetzt man aber die Gleichung (2.18) wie in [57] durch

$$\rho_1\varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu\varphi_t = 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L)$$

für ein  $\mu > 0$ , so haben Messaoudi et al. die exponentielle Stabilität im Linearen und Nichtlinearen für die Randbedingungen  $\varphi = \psi = q = 0$  und  $\varphi_x = \psi = q$  beweisen können. Ein Überblick über weitere Stabilitätsresultate für rein mechanische TIMOSHENKO-Balken sowie mehrdimensionale Thermoelastizitätsgleichungen findet sich ebenda.

Bevor wir auf Stabilisierungsmöglichkeiten von (2.10)–(2.14) eingehen, wollen wir beweisen, dass das System an sich nicht exponentiell stabil ist. Zu beachten ist, dass die Resultate

von Fernández Sare und Racke aus [19] leider nicht direkt anwendbar sind, da dort der Dämpfungsterm  $\beta\theta$  nicht berücksichtigt wurde. Wir betrachten also das System (2.10)–(2.14) im Gebiet  $\Omega = (0, L)^2$  zuzüglich der Rand-

$$\begin{aligned} w_{x_2} = \psi_{x_2} = \varphi = q_2 = 0 & \text{ auf } (0, L) \times \{0, L\}, \\ w = \psi_{x_1} = \varphi = \theta = 0 & \text{ auf } \{0, L\} \times (0, L) \end{aligned} \quad (2.22)$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w(t=0) &= w^0, & w_t(t=0) &= w^1, \\ v(t=0) &= v^0, & v_t(t=0) &= v^1, \\ \theta(t=0) &= \theta^0, & q(t=0) &= q^0. \end{aligned}$$

Dabei gehen wir von der isotropen Situation aus, d. h.

$$S = D \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Als Nächstes wollen wir unser zweidimensionales Problem auf den eindimensionalen Balkenfall zurückführen. Wir definieren

$$\begin{aligned} \bar{w}(t, x_1) &= \frac{1}{L} \int_0^L w(t, x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\psi}(t, x_1) &= \frac{1}{L} \int_0^L \psi(t, x_1, x_2) dx_2, & \bar{\varphi}(t, x_1) &= \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(t, x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\theta}(t, x_1) &= \frac{1}{L} \int_0^L \theta(t, x_1, x_2) dx_2, & \bar{q}(t, x_1) &= \frac{1}{L} \int_0^L q_1(t, x_1, x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Durch Aufintegrieren über  $x_2$  und Verwerfen der Gleichungen für  $\varphi$  und  $q_2$  erhält man

$$\rho_1 \bar{w}_{tt} - K(\bar{w}_x + \bar{\psi})_x = 0, \quad (2.23)$$

$$\rho_2 \bar{\psi}_{tt} - D\bar{\psi}_{xx} + K(\bar{w}_x + \bar{\psi}) + \gamma\bar{\theta}_x = 0, \quad (2.24)$$

$$\rho_3 \bar{\theta}_t + \kappa\bar{q}_x + \beta\bar{\theta} + \gamma\bar{\psi}_{tx} = 0, \quad (2.25)$$

$$\tau_0 \bar{q}_t + \delta\bar{q} + \kappa\bar{\theta}_x = 0 \quad (2.26)$$

mit den Rand-

$$\bar{w} = \bar{\psi}_x = \bar{\theta} = 0$$

und Anfangsbedingungen, wobei wir der Einfachheit halber die Ortsvariable  $x_1$  mit  $x$  und  $q_1$  mit  $q$  bezeichnen. Die zum System gehörige Energie lautet

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}(t) &:= \frac{\rho_1}{2} \int_0^L \bar{w}_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \bar{\psi}_t^2 dx + \frac{K}{2} \int_0^L (\bar{w}_x + \bar{\psi})^2 dx + \\ &\quad \frac{D}{2} \int_0^L \bar{\psi}_x^2 dx + \frac{\rho_3}{2} \int_0^L \bar{\theta}^2 dx + \frac{\tau_0}{2} \int_0^L \bar{q}^2 dx. \end{aligned}$$

Aufgrund von

$$|\sqrt{S}\mathcal{D}v| = D(\psi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})^2 + 2\mu\psi_{x_1}\varphi_{x_2})$$

erhält man unter Zuhilfenahme der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\bar{\mathcal{E}}(t) \leq \frac{1}{1-\mu} \mathcal{E}(t) \text{ für } t \geq 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) := & \frac{\rho_1}{2} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho_2}{2} \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{S} \mathcal{D}v\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{K}{2} \|v + \nabla w\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \\ & \frac{\rho_3}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau_0}{2} \|q\|_{(L^2(\Omega))^2} \end{aligned}$$

die Energie des Gesamtsystems (2.10)–(2.14), (2.22) bezeichnet. Hat man gezeigt, dass  $\bar{\mathcal{E}}$  nicht exponentiell abklingt, kann auch  $\mathcal{E}$  kein exponentielles Abklingverhalten aufweisen. Um Letzteres zu beweisen, schreiben wir das System in die Evolutionsform

$$\bar{V}_t(t) = \bar{\mathcal{A}}\bar{V}(t) \text{ für } t \in (0, \infty), \quad \bar{V}(0) = \bar{V}^0$$

um, wobei  $\bar{V} = (\bar{w}, \bar{w}_t, \bar{\psi}, \bar{\psi}_t, \bar{\theta}, \bar{q})'$ ,  $\bar{V}^0 = (\bar{w}^0, \bar{w}^1, \bar{\psi}^0, \bar{\psi}^1, \bar{\theta}^0, \bar{q}^0)'$ ,

$$\bar{\mathcal{A}}: \mathcal{H} \subset D(\bar{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad \bar{V} \mapsto \bar{\mathcal{A}}\bar{V}$$

mit dem formalen Differentialoperator

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{\rho_1} \partial_{xx} & 0 & \frac{K}{\rho_1} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{D}{\rho_2} \partial_{xx} - \frac{K}{\rho_2} & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_2} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_3} \partial_x & -\beta & -\frac{\kappa}{\rho_3} \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa}{\tau_0} & -\frac{\kappa}{\tau_0} \partial_x & -\frac{\delta}{\tau_0} \end{pmatrix}$$

und dem HILBERTraum

$$\mathcal{H} = H_0^1((0, L)) \times L^2((0, L)) \times (H^1((0, L))/\{1\}) \times (L^2((0, L))/\{1\}) \times L^2((0, L)) \times L^2((0, L))$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle_{\mathcal{H}} = & \rho_1 \langle V^1, W^1 \rangle_{L^2((0, L))} + \rho_2 \langle V^4, W^4 \rangle_{L^2((0, L))} + D \langle V_x^3, W_x^3 \rangle_{L^2((0, L))} + \\ & K \langle V_x^1 + V^3, W_x^1 + W^3 \rangle_{L^2((0, L))} + \rho_3 \langle V^5, W^5 \rangle_{L^2((0, L))} + \tau_0 \langle V^6, W^6 \rangle_{L^2((0, L))}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} L^2((0, L))/\{1\} &= \{u \in L^2((0, L)) \mid \langle u, 1 \rangle_{L^2((0, L))} = 0\}, \\ H^1((0, L))/\{1\} &= H^1((0, L)) \cap (L^2((0, L))/\{1\}). \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich von  $\bar{\mathcal{A}}$  wird durch

$$\begin{aligned} D(\bar{\mathcal{A}}) = & \{V \in \mathcal{H} \mid V^1 \in H^2((0, L)), V^1, V^2 \in H_0^1((0, L)), V^3 \in H^2((0, L)), \\ & V^4, V^3 \in H^1((0, L))/\{1\}, V^5 \in H_0^1((0, L)), V^6 \in H^1((0, L)), \\ & \langle \partial_{xx} V^3, \phi \rangle_{L^2((0, L))} = -\langle \partial_x V^3, \partial_x \phi \rangle_{L^2((0, L))} \text{ für alle } \phi \in H^1((0, L))\} \end{aligned}$$

gegeben.

**Satz 2.1.7.** Die von  $\bar{\mathcal{A}}$  erzeugte  $\mathcal{C}_0$ -Kontraktionshalbgruppe  $(\bar{T}(t))_{t \geq 0}$  ist nicht exponentiell stabil.

**Beweis:** Um das Fehlen der exponentiellen Stabilität bei (2.23)–(2.26) zu zeigen, machen wir uns das Resolventenkriterium aus [52, Theorem 1.3.2] zu Nutze. Demnach reicht es zu zeigen, dass es eine Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$  und zwei Folgen  $\{\bar{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\bar{\mathcal{A}})$  und  $\{\bar{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  derart gibt, dass  $(i\lambda_n - \bar{\mathcal{A}})\bar{V}_n = \bar{F}_n$  gilt,  $\{\bar{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{V}_n\|_{\mathcal{H}} = \infty$  gilt.

Wir wählen  $\bar{F}_n = (0, \sin(\alpha\lambda_n x), 0, \cos(\alpha\lambda_n x), 0, 0)'$ ,  $\lambda_n = \frac{\pi n}{\alpha L}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $\alpha := \sqrt{\frac{\rho_1}{K}}$ , wobei  $\bar{F} \in \mathcal{H}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , aufgrund der Regularitätsbedingungen sowie der Mittelwertbedingungen

$$\int_0^L 0 \, dx = 0, \quad \int_0^L \cos(\alpha\lambda_n x) \, dx = \int_0^L \cos \frac{\pi n}{L} \, dx = 0$$

gilt.

Eine Lösung  $\bar{V}_n = (\bar{V}_n^1, \dots, \bar{V}_n^6)'$  von  $(i\lambda - \bar{\mathcal{A}})\bar{V}_n = \bar{F}_n$  genügt dem System

$$\begin{aligned} i\lambda_n \bar{V}_n^1 - \bar{V}_n^2 &= 0, \\ i\lambda_n \bar{V}_n^3 - \bar{V}_n^4 &= 0, \\ -\lambda_n^2 \bar{V}_n^1 - \frac{K}{\rho_1} \bar{V}_n^1 - \frac{K}{\rho_1} \bar{V}_n^3 &= \bar{F}_n^2, \\ -\lambda_n^2 \bar{V}_n^3 - \frac{D}{\rho_3} \bar{V}_n^3 + \frac{K}{\rho_2} \bar{V}_n^1 + \frac{K}{\rho_2} \bar{V}_n^3 + \frac{\gamma}{\rho_3} \bar{V}_n^5 &= \bar{F}_n^4, \\ \left(i\lambda_n + \frac{\beta}{\rho_3}\right) \bar{V}_n^5 + \frac{\kappa}{\rho_3} \bar{V}_n^6 + i\lambda_n \frac{\gamma}{\rho_3} \bar{V}_n^3 &= 0, \\ \left(i\lambda_n + \frac{\delta}{\tau_0}\right) \bar{V}_n^6 + \frac{\kappa}{\tau_0} \bar{V}_n^5 &= 0. \end{aligned}$$

Zum Lösen dieses Problems bietet sich der Ansatz

$$\begin{aligned} \bar{V}_n^1 &= A_n \sin \alpha \lambda_n x, & \bar{V}_n^3 &= B_n \cos \alpha \lambda_n x, \\ \bar{V}_n^5 &= C_n \sin \alpha \lambda_n x, & \bar{V}_n^6 &= D_n \cos \alpha \lambda_n x \end{aligned}$$

mit zu bestimmenden  $A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathbb{R}$  an, wobei  $\bar{V}_n^3, \bar{V}_n^4$  durch die ersten zwei Gleichungen gegeben sind. Leicht sieht man ein, dass dann  $\bar{V}_n \in D(\bar{\mathcal{A}})$  gilt. Durch Einsetzen bekommt man

$$-\lambda_n^2 A_n + \frac{K}{\rho_1} \alpha^2 \lambda_n^2 A_n + \frac{K}{\rho_1} \alpha \lambda_n B_n = 1, \quad (2.27)$$

$$-\lambda_n^2 B_n + \frac{D}{\rho_2} \alpha^2 \lambda_n^2 B_n + \frac{K}{\rho_2} \alpha \lambda_n A_n + \frac{K}{\rho_2} B_n + \frac{\gamma}{\rho_2} \alpha \lambda_n C_n = 1, \quad (2.28)$$

$$\left(i\lambda_n + \frac{\beta}{\rho_2}\right) C_n - \frac{\kappa}{\rho_3} \alpha \lambda_n D_n - i\lambda_n \frac{\gamma}{\rho_3} \alpha \lambda_n B_n = 0, \quad (2.29)$$

$$\left(i\lambda_n + \frac{\delta}{\tau_0}\right) D_n - \frac{\kappa}{\tau_0} \alpha \lambda_n C_n = 0. \quad (2.30)$$

Mit (2.30) folgt

$$D_n = \frac{\kappa \alpha \lambda_n}{\delta + i\lambda_n \tau_0} C_n. \quad (2.31)$$

Gleichungen (2.31) und (2.30) liefern

$$C_n = \frac{\gamma \alpha \lambda_n^2 (\lambda_n \tau_0 + i\delta)}{\lambda_n^2 (\rho_3 \tau_0 + \kappa^2 \alpha^2) - i(\lambda_n \rho_3 \delta + \beta \lambda_n \tau_0 + \beta \delta)} B_n. \quad (2.32)$$

Unter Beachtung von  $\alpha^2 = \frac{\rho_1}{K}$  folgt mit (2.27)

$$B_n = \frac{\rho_1}{K\alpha\lambda_n}. \quad (2.33)$$

Definiert man  $\Theta = \frac{D\rho_1}{\rho_2 K} - 1$ , so ergibt sich durch Einsetzen von (2.32) und (2.33) in (2.28) die Gleichung

$$\Theta^2 \lambda_n^2 B_n + \frac{K}{\rho_2} B_n + \frac{K\alpha}{\rho_2} \lambda_n A_n + \frac{\gamma^2 \alpha^2 \lambda_n^3 (\lambda_n \tau_0 + i\delta)}{\rho_2 (\lambda_n^2 (\rho_3 \tau_0 + \kappa^2 \alpha^2) - i(\lambda_n \rho_3 \delta + \beta \lambda_n \tau_0 + \beta \delta))} B_n = 1.$$

Formt man die obige Gleichung um, so erhält man unter Beachtung von (2.33)

$$\frac{K\alpha}{\rho_2} \lambda_n A_n = 1 - \Theta^2 \lambda_n \frac{\rho_1}{K\alpha} - \frac{\rho_1}{\rho_2 \alpha \lambda_n} - \frac{\rho_1 \gamma^2 \alpha \lambda_n^2 (\lambda_n \tau_0 + i\delta)}{K \rho_2 (\lambda_n^2 (\rho_3 \tau_0 + \kappa^2 \alpha^2) - i(\lambda_n \rho_3 \delta + \beta \lambda_n \tau_0 + \beta \delta))}.$$

Wegen  $\alpha = \sqrt{\frac{\rho_1}{K}}$  ist dies mit

$$A_n = \frac{\rho_2}{K\alpha\lambda_n} - \Theta^2 \frac{\rho_2}{K} - \frac{1}{\lambda_n^2} + P(\lambda_n),$$

gleichbedeutend, worin

$$P(\lambda) = -\frac{\rho_1 \gamma^2 \lambda_n^2 (\lambda_n \tau_0 + i\delta)}{K^2 (\lambda_n^2 (\rho_3 \tau_0 + \kappa^2 \alpha^2) - i(\lambda_n \rho_3 \delta + \beta \lambda_n \tau_0 + \beta \delta))}.$$

Hierbei gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |P(\lambda)| = \infty.$$

Unter Beachtung von  $\bar{V}_n^2 = i\lambda_n \bar{V}_n^1 = i\lambda_n A_n \cos(\alpha\lambda_n x)$  bekommen wir

$$\bar{V}_n^2 = \left( \frac{i\rho_2}{K\alpha} - \Theta^2 \lambda_n \frac{i\rho_2}{K} - \frac{1}{\lambda_n} + i\lambda_n P(\lambda_n) \right) \cos(\alpha\lambda_n x).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \|\bar{V}_n^2\|_{L^2((0,L))} &= \left( \int_0^L |V_n^2|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{L}}{2} \left| \frac{i\rho_2}{K\alpha} - \Theta^2 \lambda_n \frac{i\rho_2}{K} - \frac{1}{\lambda_n} + i\lambda_n P(\lambda_n) \right| \\ &\geq -\frac{\sqrt{L}}{2} \left| \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\rho_2}{K\alpha} \right| + \frac{\sqrt{L}}{2} \left| P(\lambda) - \left( \frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) \frac{D}{K} \right| |\lambda|, \end{aligned}$$

weshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{V}_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{V}_n^2\|_{L^2((0,L))}^2 = \infty$$

sogar unter der Bedingung  $\frac{\rho_1}{K} = \frac{\rho_2}{D}$  gilt.  $\square$

**Korollar 2.1.8.** Das System (2.10)–(2.14), (2.22) ist nicht exponentiell stabil.

Somit ist weder der eindimensionale TIMOSHENKO-Balken noch die zweidimensionale REISSNER-MINDLIN-Platte exponentiell stabil. Daher kann man auf eine zusätzliche mechanische Dämpfung im Allgemeinen nicht verzichten, um das System exponentiell zu stabilisieren.

### 2.1.3 Exponentielle Stabilität – Vollgedämpftes System

Im vorliegenden und nächsten Abschnitt wenden wir uns der Untersuchung der Stabilität einer am ganzen Rand festgeklemmten, thermisch isolierten Platte zu. Neben der thermischen Dissipation führen wir zusätzliche mechanische Dämpfungen sowohl für die Biegungskomponente  $w$  als auch die Drehwinkel  $v = (\psi, \varphi)'$  ein. Diese Terme beschreiben physikalisch die Reibung. Letztere kann beispielsweise dadurch entstehen, dass sich die Platte in einem akustischen Medium befindet (vgl. [25], [26]). Der Widerstand des Mediums gegenüber der Plattenschwingung führt dann zu einer Energiedissipation. Wir beweisen, dass diese inneren Reibungen sowie die thermische Dissipation zum exponentiellen Abklingen der natürlichen Energie führen.

In diesem kurzen Abschnitt diskutieren wir das vollgedämpfte REISSNER-MINDLIN-System

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div} (v + \nabla w) + dw_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \theta + D v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \theta + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \tau_0 q_t + \delta q + \kappa \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (2.34)$$

zuzüglich der Rand-

$$\begin{aligned} w = |v| &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}' S \mathcal{D} v - \gamma \theta \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ q \cdot \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma \end{aligned} \quad (2.35)$$

und der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w(t=0) &= w^0, \quad w_t(t=0) = w^1, \\ v(t=0) &= v^0, \quad v_t(t=0) = v^1, \\ \theta(t=0) &= \theta^0, \quad q(t=0) = q^0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dabei ist  $d > 0$  und  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine positiv definite Matrix.  $\Gamma_0$  sei wie früher nichtleer.

Wir definieren den Operator  $\mathcal{B}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $V \mapsto \operatorname{diag}(0, 0, d, D, 0, 0)V$ . Dann schreibt sich das Problem (2.34)–(2.36) in der Evolutionsform zu

$$V_t(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{B})V(t) + F(t) \text{ für } t \in (0, \infty), \quad V(0) = V_0 \quad (2.37)$$

mit  $V$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $F$ ,  $V_0$  wie im Abschnitt 2.1.1. Der Operator  $\mathcal{B}$  ist eine beschränkte Störung des Operators  $\mathcal{A}$ , welcher eine  $C^0$ -Kontraktionshalbgruppe auf  $\mathcal{H}$  erzeugt. Damit erzeugt der Operator  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$  mit  $D(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = D(\mathcal{A})$  nach Satz A.1.13 eine  $C^0$ -Halbgruppe  $(T(t))_{t \geq 0}$  auf  $\mathcal{H}$ . Also gilt für das Problem (2.37) ein direktes Analogon von Satz 2.1.6

Für die zum System (2.34)–(2.36) gehörige Energie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &:= \frac{\rho_1}{2} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho_2}{2} \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{S} \mathcal{D} v\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{K}{2} \|v + \nabla w\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \\ &\quad \frac{\rho_3}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau_0}{2} \|q\|_{(L^2(\Omega))^2}. \end{aligned}$$

gilt der folgende Satz.

**Satz 2.1.9** (Exponentielle Stabilität). Alle in (2.34) auftretenden Koeffizienten seien positiv. Dann existieren positive Konstanten  $C$  und  $\alpha$  derart, dass

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)e^{-2\alpha t}$$

für alle  $t \geq 0$  gilt. Die Konstanten  $C$  und  $\alpha$  hängen dabei nicht von  $t$  und den Anfangsdaten ab und lassen sich anhand der Koeffizienten des Systems explizit berechnen.

**Beweis:** Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir ein LYAPUNOV-Funktional  $\mathcal{F}$  konstruieren. Multipliziert man die erste und dritte Gleichung in  $L^2(\Omega)$  mit  $w_t$  bzw.  $\theta$  und die zweite und vierte Gleichung in  $(L^2(\Omega))^2$  mit  $v_t$  bzw.  $q$ , so ergibt sich mit partieller Integration

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq d \int_{\Omega} w_t^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |v_t|^2 dx - \beta \int_{\Omega} \theta^2 dx - \delta \int_{\Omega} |q|^2 dx, \quad (2.38)$$

wobei  $\lambda := \min \sigma(D) > 0$  den kleineren Eigenwert von  $D$  bezeichnet. Das Funktional  $\mathcal{F}$  muss also so konstruiert werden, dass  $\frac{d}{dt}\mathcal{F}$  negative Vielfache von  $\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$  und  $\int_{\Omega} |\sqrt{S}Dv|^2 dx$  enthält. Wir definieren

$$\mathcal{F}_1(t) := \rho_1 \int_{\Omega} w_t w dx, \quad \mathcal{F}_2(t) := \rho_1 \int_{\Omega} v_t \cdot v dx$$

und erhalten unter Benutzung von (2.34) und (2.35) mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &= \int_{\Omega} (K \operatorname{div}(\nabla w + v) - dw_t) w dx + \rho_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ &= \int_{\Omega} -K(\nabla w + v) \cdot \nabla w dx - dw_t w + \rho_1 w_t^2 dx, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) &= \int_{\Omega} (D' S D v - K(v + \nabla w) - \gamma \nabla \theta_t - D v_t) \cdot v dx + \rho_2 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} -|\sqrt{S}Dv|^2 - K(v + \nabla w) \cdot v + \gamma \theta_t \operatorname{div} v - D v_t \cdot v + \rho_2 |v_t|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Unter Verwendung der YOUNGchen, der 1. POINCARÉschen sowie der KORNSchen Ungleichung kann man für  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$  die Funktionale in (2.39) abschätzen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &\leq \int_{\Omega} -K|\nabla w|^2 + \frac{K}{2}|\nabla w|^2 + \frac{K}{2}|v|^2 + \frac{d\varepsilon}{2}w^2 + \left(\frac{d}{2\varepsilon} + \rho_1\right)w_t^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} -\left(\frac{K}{2} - \frac{C_P d \varepsilon}{2}\right)|\nabla w|^2 + \frac{K}{2}|v|^2 + \left(\frac{d}{2\varepsilon} + \rho_1\right)w_t^2 dx, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) &\leq \int_{\Omega} -|\sqrt{S}Dv|^2 - K|v|^2 + \frac{K(1+\varepsilon')}{2}|v|^2 + \frac{K}{2(1+\varepsilon')}|\nabla w|^2 + \frac{\gamma\varepsilon}{2}|\operatorname{div} v|^2 \\ &\quad + \frac{\gamma}{2\varepsilon}\theta^2 + \frac{\|D\|\varepsilon}{2}|v|^2 + \left(\frac{\|D\|}{2\varepsilon} + \rho_2\right)|v_t|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} -\left(1 - \frac{K\varepsilon'}{2C_{\mathcal{K},1}} - \frac{(\gamma + \|D\|)\varepsilon}{2C_{\mathcal{K},1}}\right)|\sqrt{S}Dv|^2 - \frac{K}{2}|v|^2 + \frac{K}{2(1+\varepsilon')}|\nabla w|^2 \\ &\quad + \frac{\gamma}{2\varepsilon}\theta^2 + \left(\frac{\|D\|}{2\varepsilon} + \rho_2\right)|v_t|^2 dx, \end{aligned} \quad (2.40)$$

wobei  $C_P$  die 1. POINCARÉsche und  $C_{\mathcal{K},1}$  die KORNSche Konstante aus Satz 2.1.4 bezeichnen. Wir setzen

$$\mathcal{L}(t) := \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t) + N\mathcal{E}(t)$$

und bekommen mit (2.38) und (2.40)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq & C_{w_t} \int_{\Omega} w_t dx + C_{v_t} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + C_{\theta} \int_{\Omega} \theta_t^2 dx + C_q \int_{\Omega} |q|^2 dx + \\ & C_{\nabla w} \int_{\Omega} |\nabla w| dx + C_{\sqrt{S}Dv} \int_{\Omega} |\sqrt{S}Dv|^2 dx, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} C_{w_t} &= Nd - \frac{d}{2\varepsilon} + \rho_1, & C_{v_t} &= N\lambda - \frac{\|D\|}{2\varepsilon} + \rho_2 - \frac{\gamma}{2\varepsilon}, \\ C_{\theta} &= N\beta - \frac{\gamma}{2\varepsilon} + \rho_3, & C_q &= N\delta, \\ C_{\nabla w} &= \left[ \frac{K}{2} - \frac{K}{2(1+\varepsilon')} \right] - \frac{C_P d \varepsilon}{2}, & C_{\sqrt{S}Dv} &= \left[ 1 - \frac{K\varepsilon'}{2C_{\kappa,1}} \right] - \frac{(\gamma + \|D\|)\varepsilon}{2C_{\kappa,1}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Wir wählen  $\varepsilon' > 0$  so klein, dass die Terme in den eckigen Klammern in (2.41) positiv werden. Danach fixieren wir ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  so, dass  $C_{\nabla w} > 0$  und  $C_{\sqrt{S}Dv} > 0$  gilt. Schließlich wählen wir  $N > 0$  so groß, dass alle Terme in (2.41) positiv sind. Also gilt

$$C_{\min} := \min\{C_{w_t}, C_{v_t}, C_{\theta}, C_q, C_{\nabla w}, C_{\sqrt{S}Dv}\} > 0.$$

Mit Hilfe der KORNSchen Ungleichung (Satz 2.1.4) finden wir

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -2C_{\min} \cdot \frac{\min\{1, C_{\kappa}\}}{\max\{1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_0\}} \mathcal{E}(t) =: -\tilde{C}\mathcal{E}(t). \quad (2.42)$$

Unter Beachtung von

$$|(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)(t)| \leq \frac{\max\{1, \rho_1, \rho_2\}}{\min\{1, C_{\kappa}\}} \mathcal{E}(t) =: \hat{C}\mathcal{E}(t)$$

ergibt sich

$$\beta_1 \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 \mathcal{E}(t) \text{ für } t \geq 0,$$

wobei  $\beta_1 = N - \hat{C}$ ,  $\beta_2 = N + \hat{C}$ . Damit  $\beta_1 > 0$  gilt, vergrößern wir eventuell  $N$ . Unter Benutzung des GRONWALLSchen Lemmas ergibt sich

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{1}{\beta_1} \mathcal{L}(t) \leq \frac{1}{\beta_1} \mathcal{E}(0) e^{-\frac{C}{\beta_2} t} =: C\mathcal{E}(0) e^{-2\alpha t} \text{ für alle } t \geq 0,$$

wobei  $C, \alpha > 0$ , d. h.  $\mathcal{E}$  klingt exponentiell ab.  $\square$

### 2.1.4 Exponentielle Stabilität – Gedämpfte Biegung, Rotationsfreiheit

In diesem Abschnitt wollen wir das System (2.34) für den Fall  $D = 0$  untersuchen. Diese Situation entspricht einer thermoelastischen Platte, welche der Biegung Widerstand leistet, ohne dass Reibung bei der Faserrotation entsteht. Modelliert wird dies dadurch, dass die Gleichung für die Biegungskomponente  $w$  durch den Term  $dw_t$  mit einem positiven  $d > 0$  gedämpft wird. Wir betrachten also das Problem

$$\rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div}(v + \nabla w) + dw_t = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.43)$$

$$\rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}'SDv + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.44)$$

$$\rho_3 \theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \theta + \gamma \operatorname{div} v_t = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.45)$$

$$\tau_0 q_t + \delta q + \kappa \nabla \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \quad (2.46)$$

mit gewissen Randbedingungen, welche wir noch später festlegen werden, und den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} w(t=0) &= w^0, & w_t(t=0) &= w^1, \\ v(t=0) &= v^0, & v_t(t=0) &= v^1, \\ \theta(t=0) &= \theta^0, & q(t=0) &= q^0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Wie früher lautet die zum System gehörige natürliche Energie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) := & \frac{\rho_1}{2} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho_2}{2} \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{S} \mathcal{D}v\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \frac{K}{2} \|v + \nabla w\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \\ & \frac{\rho_3}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau_0}{2} \|q\|_{(L^2(\Omega))^2}. \end{aligned}$$

Es stellt sich aber leider heraus, dass dieses gedämpfte System nicht einmal stark stabil ist, da man den divergenzfreien Anteil von  $v$  nicht stabilisieren kann. Betrachtet man z. B. folgende Randbedingungen

$$w = |v| = \theta = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma, \quad (2.48)$$

so lässt sich der nachstehende Satz formulieren.

**Satz 2.1.10.** Das System (2.43)–(2.47), (2.48) ist nicht stark stabil, insbesondere nicht exponentiell stabil.

**Beweis:** Das Problem (2.43)–(2.47), (2.48) lässt sich in der Evolutionsform umschreiben. Völlig analog zu Satz 2.1.6 kann man beweisen, dass die eindeutige Lösung  $V = (w, v, w_t, v_t, \theta, q)'$  durch Anwenden der  $C^0$ -Kontraktionshalbgruppe auf den Anfangswert gegeben ist.

Nun wollen wir die Anfangsdaten so wählen, dass die Lösungskomponente  $v$  divergenzfrei ist, d. h.  $\operatorname{div} v = \operatorname{div} v_t = 0$  gilt. Da  $\Gamma$  glatt ist, existiert die HELMHOLTZ-Projektion

$$P: (L^2(\Omega))^2 \rightarrow L^2_\sigma(\Omega)$$

(s. [77]) in den HILBERTraum

$$L^2_\sigma(\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^2 \mid \langle u, \nabla \varphi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} = 0 \text{ für alle } \varphi \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla \varphi \in (L^2(\Omega))^2\}.$$

$P$  ist ein orthogonaler Operator und  $L^2_\sigma(\Omega)$  ist abgeschlossen. Wenden wir  $P$  auf (2.44) an und berücksichtigen die Darstellung

$$\mathcal{D}' S \mathcal{D} v = D \frac{1-\mu}{2} \Delta v + D \frac{1+\mu}{2} \nabla \operatorname{div} v,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho_2 v_{tt} - D \frac{1-\mu}{2} P \Delta v + K v &= 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \Gamma, \\ v(t=0) &= v_0, \quad v_t(t=0) = v_1 \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (2.49)$$

(2.49) ähnelt einer KLEIN-GORDON-Gleichung mit dem unbeschränkten selbsadjungierten DIRICHLET-STOKES-Operator  $DP \Delta v$ . Wir definieren den Operator

$$\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset L^2_\sigma(\Omega) \rightarrow L^2_\sigma(\Omega), \quad v \mapsto -D \frac{1-\mu}{2} P \Delta v + K v,$$

wobei

$$D(\mathcal{A}) = \{v \in L^2_\sigma(\Omega) \mid P\Delta v \in L^2_\sigma(\Omega)\}.$$

Es ist bekannt (s. z. B. [39]), dass für das Spektrum  $\sigma(-P\Delta)$  von  $-P\Delta$

$$\sigma(-P\Delta) = \sigma_p(-P\Delta) = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

gilt, wobei jeder Eigenwert  $\lambda_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , eine endliche Vielfachheit hat und  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Somit ist  $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) = \{\mu_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  mit  $\mu_k = D \frac{1-\mu}{2} \lambda_k + K$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Sei  $v^* \in \sigma(\mathcal{A})$ ,  $v^* > 0$ , und sei  $v^*$  die zu  $v^*$  gehörige Eigenfunktion mit  $\|v^*\|_{(L^2(\Omega))^2} = 1$ . Wir wählen  $v_0 := v^*$ ,  $v_1 := 0$  und bekommen über den Ansatz

$$v(t) := \cos\left(\sqrt{\frac{v^*}{\rho_2}} t\right) v^*$$

eine Lösung  $v$  von (2.49). Die zu  $v$  gehörige Energie lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) &= \frac{\rho_2}{2} \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + D \frac{1-\mu}{4} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^{2 \times 2}}^2 = \frac{v^*}{2} \cos^2\left(\sqrt{\frac{v^*}{\rho_2}} t\right) + \frac{v^*}{2} \cos^2\left(\sqrt{\frac{v^*}{\rho_2}} t\right) \\ &= v^* \cos^2\left(\sqrt{\frac{v^*}{\rho_2}} t\right) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also löst  $(w, v, \theta, q)' = \left(0, \cos\left(\sqrt{\frac{v^*}{\rho_2}} t\right) v^*, 0, 0\right)'$  das ursprüngliche Problem (2.43)–(2.47), (2.48) zu den Anfangsdaten

$$w^0 = w^1 = 0, \quad v^0 = v^*, v^1 = 0, \quad \theta^0 = 0, \quad q^0 = 0$$

und erfüllt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{\rho_2}{2} \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + D \frac{1-\mu}{2} \|\nabla v_1\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + D \frac{1-\mu}{2} \|\nabla v_2\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + D \frac{1+\mu}{2} \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{\rho_2}{2} \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + D \frac{1-\mu}{2} \|\nabla v_1\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + D \frac{1-\mu}{2} \|\nabla v_2\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 = \mathcal{E}_1(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Deshalb kann  $\mathcal{E}$  nicht abklingen. □

**Bemerkung 2.1.11.** Satz 2.1.10 kann auch auf viele weitere Sätze von Randbedingungen, z. B.

$$w = |v| = q \cdot n = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma$$

oder

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = |v| = q \cdot n = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma,$$

usw. übertragen werden. Um die triviale konstante Lösung auszuschließen, muss man allerdings voraussetzen, dass die Anfangswerte für die Variablen, an welche die NEUMANNschen Randbedingungen gestellt sind, im Mittelwert verschwinden.

Wir müssen also nach weiteren Stabilisierungsmöglichkeiten suchen, um eine exponentielle Abklingrate für unser Problem zu bekommen. In diesem Abschnitt suchen wir nach den

Lösungen des Problems (2.43)–(2.46) zu den Anfangsbedingungen (2.47), welche die Randbedingungen

$$w = \psi = \varphi = q \cdot \nu = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma,$$

die Mittelwertbedingung

$$\int_{\Omega} \theta dx = 0 \quad (2.50)$$

und die Rotationsfreiheitsbedingung

$$\operatorname{rot} v = v_{1,x_2} - v_{2,x_1} = 0 \quad (2.51)$$

erfüllen. Im nachstehenden Satz formulieren und beweisen wir das exponentielle Stabilitätsresultat für das defämpfte REISSNER-MINDLIN-System (2.43)–(2.46), (2.47), (2.50), (2.51).

**Satz 2.1.12** (Exponentielle Stabilität). Es seien alle in (2.43)–(2.46) auftretenden Koeffizienten positiv und  $\beta$  sei nichtnegativ. Außerdem gelte

$$\int_{\Omega} \theta_0 dx = 0.$$

Dann existieren zur eindeutigen Lösung  $(w, \psi, \varphi, q, \theta)'$  des REISSNER-MINDLIN-Problems (2.43)–(2.46), (2.47), (2.50), welche die Rotationsfreiheitsbedingung (2.51) erfüllt, positive Konstanten  $C$  und  $\alpha$  derart, dass

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)e^{-2\alpha t}$$

für alle  $t \geq 0$  gilt. Die Konstanten  $C$  und  $\alpha$  hängen dabei nicht von  $t$  und den Anfangsdaten ab und lassen sich anhand der Koeffizienten des Systems explizit berechnen.

**Beweis:** Satz 2.1.6 liefert uns die Existenz der eindeutigen Lösung für den Fall  $\Gamma_1 = \emptyset$ . Ohne Einschränkung sei  $\beta = 0$ , denn: Es bezeichne  $\mathcal{E}_{\beta}(t)$  die natürliche Energie des Systems für ein gegebenes  $\beta \geq 0$  bei festen Anfangsdaten. Gibt es von den Anfangsdaten unabhängige Konstanten  $C$  und  $\alpha$  so, dass

$$\mathcal{E}_0(t) \leq C\mathcal{E}_0(0)e^{-2\alpha t} \text{ für } t \geq 0$$

gilt, dann folgt unter Berücksichtigung von

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\beta}(t) \leq \frac{d}{dt}\mathcal{E}_0(t) - \beta \int_{\Omega} \theta^2 dx \leq \frac{d}{dt}\mathcal{E}_0(t) \text{ für } t \geq 0$$

sowie  $\beta \geq 0$  und  $\mathcal{E}_{\beta}(0) = \mathcal{E}_0(0)$  die Abschätzung

$$\mathcal{E}_{\beta}(t) \leq \mathcal{E}_0(t) \leq C\mathcal{E}_0(0)e^{-2\alpha t} \text{ für } t \geq 0.$$

Wir gehen also im Folgenden von der Situation  $\beta = 0$  aus. Die Beweislogik richtet sich an manchen Stellen an die in [57] besprochene eindimensionale Situation.

Multipliziert man die erste und dritte Gleichung in  $L^2(\Omega)$  mit  $w_t$  bzw.  $\theta$  und die zweite und vierte Gleichung in  $(L^2(\Omega))^2$  mit  $v_t$  bzw.  $q$ , so ergibt sich mit partieller Integration

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -d \int_{\Omega} w_t^2 dx - \delta \int_{\Omega} |q|^2 dx.$$

Für die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  der POISSONSchen Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \operatorname{div} v \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma \end{aligned}$$

findet man

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega} v \cdot \nabla u dx,$$

woraus sich mit der YOUNGSchen Ungleichung unmittelbar

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

und damit

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\Omega} |v|^2 dx \quad (2.52)$$

ergibt. Analog folgt auch

$$\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \leq \int_{\Omega} |v_t|^2 dx. \quad (2.53)$$

Wir definieren das Funktional

$$\mathcal{F}_1(t) := \int_{\Omega} (\rho_1 w_t u + \rho_2 v_t v - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} v q) dx.$$

Unter Zuhilfenahme von (2.43) ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_1 w_t u dx &= \rho_1 \int_{\Omega} (w_{tt} u + w_t u_t) dx \\ &= K \int_{\Omega} \operatorname{div} (\nabla w + v) \cdot u dx - d \int_{\Omega} w_t u dx + \rho_1 \int_{\Omega} w_t u_t dx \\ &= -K \int_{\Omega} (\nabla w + v) \cdot \nabla u dx - d \int_{\Omega} w_t u dx + \rho_1 \int_{\Omega} w_t u_t dx \\ &= K \int_{\Omega} w \Delta u dx - K \int_{\Omega} v \cdot \nabla u dx - d \int_{\Omega} w_t u dx + \rho_1 \int_{\Omega} w_t u_t dx \\ &= -K \int_{\Omega} w \operatorname{div} v dx + K \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - d \int_{\Omega} w_t u dx + \rho_1 \int_{\Omega} w_t u_t dx. \end{aligned}$$

Ferner folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_2 v_t \cdot v dx &= \rho_2 \int_{\Omega} v_{tt} \cdot v dx + \rho_2 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{D}' S \mathcal{D} v \cdot v dx - K \int_{\Omega} (v + \nabla w) \cdot v dx - \gamma \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot v dx + \rho_2 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx - K \int_{\Omega} |v|^2 dx + K \int_{\Omega} w \operatorname{div} v dx - \gamma \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot v dx + \rho_2 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} -\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} v \cdot q dx = -\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_{\Omega} v_t \cdot q dx + \frac{\gamma \delta}{\kappa} \int_{\Omega} v \cdot q dx + \gamma \int_{\Omega} v \cdot \nabla \theta dx.$$

Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) = & K \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - K \int_{\Omega} |v|^2 dx - d \int_{\Omega} w_t u dx + \rho_1 \int_{\Omega} w_t u_t dx + \\ & \rho_2 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_{\Omega} v_t \cdot q dx + \frac{\gamma \delta}{\kappa} \int_{\Omega} v \cdot q dx. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der 1. POINCARÉschen, der YOUNG'schen, der KORN'schen Ungleichung aus Satz 2.1.4 sowie der Abschätzungen (2.52) und (2.53) finden wir nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) \leq & \frac{d}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 u^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} w_t^2 \right) dx + \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 u_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} w_t^2 \right) dx + \rho_2 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \\ & - \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx + \frac{\gamma \tau_0}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 |v_t|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |q|^2 \right) dx + \frac{\gamma \delta}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 |v|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |q|^2 \right) dx \\ \leq & \frac{d}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 \frac{C_P}{C_{\kappa,1}} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} w_t^2 \right) dx + \frac{\rho_1}{2} \int_{\Omega} \left( C_P \varepsilon_1 |v_t|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} w_t^2 \right) dx + \rho_2 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \\ & - \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx + \frac{\gamma \tau_0}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 |v_t|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |q|^2 \right) dx + \frac{\gamma \delta}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon_1}{C_{\kappa,1}} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |q|^2 \right) dx \\ \leq & \frac{\rho_1 + d}{2\varepsilon_1} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \left[ \rho_2 - \frac{\varepsilon_1}{2} \left( \rho_1 C_P + \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \right) \right] \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \\ & - \left[ 1 - \frac{\varepsilon_1}{2C_{\kappa,1}} \left( d C_P + \frac{\gamma \delta}{\kappa} \right) \right] \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx + \frac{\gamma(\tau_0 + \delta)}{2\kappa \varepsilon_1} \int_{\Omega} |q|^2 dx \end{aligned}$$

mit der POINCARÉschen Konstanten  $C_P = C_P(\Omega) > 0$  und einem kleinen  $\varepsilon_1 > 0$ , wobei wir

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C_P \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C_P \int_{\Omega} |v|^2 dx \leq \frac{C_P}{C_{\kappa,1}} \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx$$

abgeschätzt haben.

Als nächstes betrachten wir das Funktional

$$\mathcal{F}_2(t) := \rho_1 \int_{\Omega} w_t w dx$$

und finden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) &= \rho_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx + K \int_{\Omega} \operatorname{div}(v + \nabla w) \cdot w dx - d \int_{\Omega} w_t w dx \\ &= \rho_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx - K \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - K \int_{\Omega} v \cdot \nabla w dx - d \int_{\Omega} w_t w dx. \end{aligned}$$

Dieses lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) \leq & -K \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{K}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_2 |\nabla w|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} |v|^2 \right) dx + \\ & \frac{d}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_2 w^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} w_t^2 \right) dx + \rho_1 \int_{\Omega} w_t^2 dx \\ \leq & - \left( K - \frac{\varepsilon_2 C_P}{2} (K + d) \right) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + \frac{K}{\varepsilon_2 C_{\kappa,1}} \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx + \left( \frac{d}{2\varepsilon_2} + \rho_1 \right) \int_{\Omega} w_t^2 dx. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_3 \int_{\Omega} \theta_t dx + \kappa \int_{\Omega} \operatorname{div} q dx + \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} v_t dx \\ &= \rho_3 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta dx + \kappa \int_{\Gamma} q \cdot \nu dx + \gamma \int_{\Gamma} v_t \cdot \nu dx = \rho_3 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta dx \end{aligned}$$

folgt

$$\int_{\Omega} \theta(t, x) dx \equiv \int_{\Omega} \theta(0, x) dx = \int_{\Omega} \theta_0(x) dx = 0.$$

Dies ermöglicht uns aber, die 2. POINCARÉsche Ungleichung auf  $\theta$  anzuwenden. Unter Verwendung des im Anhang C definierten Bogowskiĭ-Operators  $\mathcal{B}_{\text{rot}}$  führen wir das nachstehende Funktional ein:

$$\mathcal{F}_3(t) := \rho_2 \rho_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta \cdot v_t dx.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(t) &= \rho_2 \rho_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta_t \cdot v_t dx + \rho_2 \rho_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta \cdot v_{tt} dx \\ &= \rho_2 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} (-\kappa \operatorname{div} q - \gamma \operatorname{div} v_t) \cdot v_t dx + \rho_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta \cdot (\mathcal{D}' S \mathcal{D} v - K(v + \nabla w) - \gamma \nabla \theta) dx \\ &= -\rho_2 \kappa \int_{\Omega} (\mathcal{B}_{\text{rot}} \operatorname{div} q) \cdot v_t dx - \rho_2 \gamma \int_{\Omega} |v_t|^2 dx - \rho_3 \int_{\Omega} (\mathcal{D} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta) \cdot (S \mathcal{D} v) dx \\ &\quad - \rho_3 K \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta \cdot (v + \nabla w) dx + \rho_3 \gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta \cdot \theta dx \\ &= -\rho_2 \kappa \int_{\Omega} (\mathcal{B}_{\text{rot}} \operatorname{div} q) \cdot v_t dx - \rho_2 \gamma \int_{\Omega} |v_t|^2 dx - \rho_3 \int_{\Omega} (\mathcal{D} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta) \cdot (S \mathcal{D} v) dx \\ &\quad - \rho_3 K \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta \cdot (v + \nabla w) dx - \rho_3 \gamma \int_{\Omega} \theta^2 dx. \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass wir wegen der Injektivität des BOGOWSKIĭ-Operators durch  $\mathcal{B}_{\text{rot}} \operatorname{div} v_t$  die Funktion  $v_t$  rekonstruieren können, was für nicht rotationsfreie Vektorfelder im Allgemeinen leider nicht möglich ist. Unter Zuhilfenahme der YOUNG'schen Ungleichung sowie der Stetigkeit des BOGOWSKIĭ-Operators aus Satz C.2.2 finden wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(t) &\leq -\rho_2 \gamma \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \frac{\rho_2 \kappa}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_3 |v_t|^2 + \frac{C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}}{\varepsilon_3} |q|^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{\rho_3 \|S\|}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon'_3 |S \mathcal{D} v|^2 + \frac{C_{\mathcal{B}}}{\varepsilon'_3} \theta^2 \right) dx + \frac{\rho_3 K}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon'_3 |v|^2 + \frac{C_{\mathcal{K}_2} C_{\mathcal{B}}}{\varepsilon'_3} \theta^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{\rho_3 K}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon'_3 |\nabla w|^2 + \frac{C_{\mathcal{B}}}{\varepsilon'_3} \theta^2 \right) dx + \rho_3 \gamma \int_{\Omega} \theta^2 dx \\ &\leq -\left( \rho_2 \gamma - \frac{\rho_2 \kappa \varepsilon_3}{2} \right) \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \left( \frac{\rho_3 2 \|S\| \varepsilon'_3}{2} + \frac{\rho_3 K C_{\mathcal{P}} \varepsilon'_3}{2 C_{\mathcal{K}_1}} \right) \int_{\Omega} |\sqrt{S} \mathcal{D} v|^2 dx + \frac{\rho_3 K \varepsilon'_3}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\ &\quad \left( \rho_3 \gamma - \frac{\rho_3 (\|S\| + K) C_{\mathcal{B}}}{2 \varepsilon'_3} - \frac{\rho_3 K C_{\mathcal{B}}}{2 \varepsilon'_3} \theta^2 \right) \int_{\Omega} \theta^2 dx + \frac{\rho_2 \kappa C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}}{2 \varepsilon_3} \int_{\Omega} |q|^2 dx \end{aligned}$$

für willkürliche positive  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon'_3$ . Die Konstanten  $C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}$  und  $C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}$  kommen dabei aus den Sätzen C.2.2 bzw. C.2.4.

Schließlich setzen wir

$$\mathcal{F}_4(t) := -\tau_0 \rho_3 \int_{\Omega} q \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta dx$$

und finden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_4(t) &= -\rho_3 \int_{\Omega} (-\delta q - \kappa \nabla \theta) \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta dx - \tau_0 \int_{\Omega} q \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} (-\kappa \operatorname{div} q - \gamma \operatorname{div} v_t) dx \\ &= \rho_3 \delta \int_{\Omega} q \cdot \mathcal{B} \theta dx - \rho_3 \kappa \int_{\Omega} \theta^2 dx + \tau_0 \kappa \int_{\Omega} q \cdot \mathcal{B} \operatorname{div} q dx + \tau_0 \gamma \int_{\Omega} q \cdot v_t dx, \end{aligned}$$

weil  $\int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta dx = - \int_{\Omega} \theta \operatorname{div} \mathcal{B}_{\text{rot}} \theta dx = - \int_{\Omega} \theta^2 dx$ . Dies ergibt folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_4 &\leq -\rho_3 \kappa \int_{\Omega} \theta^2 dx + \frac{\rho_3 \delta}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_4 C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} \theta^2 + \frac{1}{\varepsilon_4} |q|^2 \right) dx \\ &\quad + \tau_0 \kappa (1 + C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}) \int_{\Omega} |q|^2 dx + \frac{\tau_0 \gamma}{2} \int_{\Omega} \left( \varepsilon'_4 |v_t|^2 + \frac{1}{\varepsilon'_4} |q|^2 \right) dx \\ &= \left( -\rho_3 \kappa + \frac{\varepsilon_4 \rho_3 \delta C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}}{2} \right) \int_{\Omega} \theta^2 dx + \frac{\varepsilon'_4 \tau_0 \gamma}{2} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \\ &\quad + \left( (1 + C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}) \tau_0 \kappa + \frac{\rho_3 \delta}{2 \varepsilon_4} + \frac{\tau_0 \gamma}{2 \varepsilon'_4} \right) \int_{\Omega} |q|^2 dx. \end{aligned}$$

Für positive  $N, N_4 > 0$  definieren wir das Hilfsfunktional  $\mathcal{F}$  vermöge

$$\mathcal{L}(t) := N \mathcal{E}(t) + \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t) + \mathcal{F}_3(t) + N_4 \mathcal{F}_4(t).$$

Mit den Abschätzungen für  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$  folgert man nun:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -C_{w_t} \int_{\Omega} w_t^2 dx - C_{\nabla w} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - C_{v_t} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx - C_{\sqrt{S} D v} \int_{\Omega} |\sqrt{S} D' v|^2 dx \\ &\quad - C_{\theta} \int_{\Omega} \theta^2 dx - C_q \int_{\Omega} |q|^2 dx, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} C_{w_t} &= dN - \frac{\rho_1 + d}{2\varepsilon_1} - \left( \frac{d}{2\varepsilon_2} + \rho_1 \right), \\ C_{\nabla w} &= \left[ K - \frac{\varepsilon_2 C_{\mathcal{P}}}{2} (K + d) \right] - \frac{\rho_3 K \varepsilon'_3}{2}, \\ C_{v_t} &= \left[ \rho_2 - \frac{\varepsilon_1}{2} \left( \rho_1 C_{\mathcal{P}} + \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \right) \right] + \left[ \rho_2 \gamma - \frac{\rho_2 \kappa \varepsilon_3}{2} \right] - N_4 \frac{\varepsilon'_4 \tau_0 \gamma}{2}, \\ C_{\sqrt{S} D v} &= \left[ 1 - \frac{\varepsilon_1}{2C_{\mathcal{K},1}} \left( dC_{\mathcal{P}} + \frac{\gamma \delta}{\kappa} \right) \right] - \left( \frac{\rho_3 2 \|S\| \varepsilon'_3}{2} + \frac{\rho_3 K C_{\mathcal{P}} \varepsilon'_3}{2C_{\mathcal{K},1}} \right), \\ C_{\theta} &= \left( \rho_3 \gamma - \frac{\rho_3 (\|S\| + K) C_{\mathcal{B}}}{2\varepsilon'_3} - \frac{\rho_3 K C_{\mathcal{B}}}{2\varepsilon'_3} \theta^2 \right) + N_4 \left[ \rho_3 \kappa - \frac{\varepsilon_4 \rho_3 \delta C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}}{2} \right], \\ C_q &= \tau_0 N - \frac{\gamma(\tau_0 + \delta)}{2\kappa \varepsilon_1} - \frac{\rho_2 \kappa C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}}{2\varepsilon_3} - N_4 \left( (1 + C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}) \tau_0 \kappa + \frac{\rho_3 \delta}{2\varepsilon_4} + \frac{\tau_0 \gamma}{2\varepsilon'_4} \right). \end{aligned}$$

Nun wählen wir  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$  so klein, da die Terme in den eckigen Klammern in  $C_{\sqrt{S} D v}$ ,  $C_{\nabla w}$ ,  $C_{v_t}$  und  $C_{\theta}$  positiv werden. Danach wählen wir ein  $\varepsilon'_3 > 0$  so klein, dass  $C_{\nabla w}$  und  $C_{\sqrt{S} D v}$  positiv werden. Desweiteren fixieren wir  $N_4 > 0$  so groß, dass  $C_{\theta} > 0$  gilt. Im Anschluss wählen wir  $\varepsilon'_4 > 0$  so klein, dass  $C_{v_t}$  positiv wird. Schließlich wählen wir  $N > 0$  so groß, dass  $C_{w_t}$  und  $C_q$  positiv sind. Somit haben wir

$$C_{\min} := \min\{C_{w_t}, C_{\nabla w}, C_{v_t}, C_{\sqrt{S} D v}, C_{\theta}, C_q\} > 0.$$

Unter Verwendung der YOUNG'schen Ungleichung

$$|\nabla w + v|^2 \leq \frac{1}{2} (|\nabla w|^2 + |\nabla v|^2),$$

bekommen wir mit der KORNSchen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\nabla w| + |\sqrt{S} D v|^2 &\geq |\nabla w| + \frac{1}{2} C_{\mathcal{K},1} |v|^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{S} D v|^2 \geq \min\{2, C_{\mathcal{K},1}\} |\nabla w + v|^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{S} D v|^2 \\ &\geq \min\{\frac{1}{2}, C_{\mathcal{K},1}\} (|\nabla w + v|^2 + |\sqrt{S} D v|^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -2 \frac{\min\{1, \min\{\frac{1}{2}, C_{\mathcal{K},1}\}^{-1}\}}{\max\{1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_0, K\}} \mathcal{E}(t) =: C\mathcal{E}(t). \quad (2.54)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 + N_4 \mathcal{F}_4|(t) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \rho_1 (w_t^2 + |u|^2) + \rho_2 (|v_t|^2 + |v|^2) + \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} (|v|^2 + |q|^2) + \right. \\ &\quad \left. \rho_1 (w_t^2 + w^2) + \rho_2 \rho_3 (|\mathcal{B}_{\text{rot}} \theta|^2 + |v_t|^2) + \tau_0 \rho_3 (|q|^2 + |\mathcal{B}_{\text{rot}} \theta|^2) \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 2\rho_1 \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_1 \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 + \rho_2 \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + (\rho_2 + \frac{\gamma \tau_0}{\kappa}) \|v\|_{(H^1(\Omega))^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} (\rho_2 \rho_3 + \tau_0 \rho_3) \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} + \tau_0 \rho_3) \|q\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 2\rho_1 \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho_2 \|v_t\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\max\{\rho_1, (\rho_2 + \frac{\gamma \tau_0}{\kappa})\}}{C_{\mathcal{K}}} (K \|\nabla w + v\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|\sqrt{S} \mathcal{D}v\|_{(L^2(\Omega))^2}^2) \right. \\ &\quad \left. + C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} (\rho_2 \rho_3 + \tau_0 \rho_3) \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} + \tau_0 \rho_3) \|q\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \right) \leq \hat{C}\mathcal{E}(t). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $\alpha_1 := N - \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, C_{\mathcal{K}}^{-1}\}}{\min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}$ ,  $\alpha_2 := N + \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, C_{\mathcal{K}}^{-1}\}}{\min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}$  die Abschätzung

$$\alpha_1 \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 \mathcal{E}(t) \text{ für } t \geq 0.$$

Nun vergrößern wir ggf.  $N$  so, dass  $\alpha_1 > 0$  ist. Dann sind die Konstanten  $C$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  positiv. Unter Zuhilfenahme des GRONWALLSchen Lemmas folgert man

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{1}{\alpha_1} \mathcal{L}(t) \leq \frac{1}{\alpha_1} \mathcal{E}(0) e^{-\frac{C}{\alpha_2} t} =: C\mathcal{E}(0) e^{-2\alpha t} \text{ für } t \geq 0.$$

Deshalb klingt  $\mathcal{E}$  exponentiell ab. □

**Bemerkung 2.1.13.** Man kann leicht nachrechnen, dass Satz 2.1.12 auf für die folgenden Randbedingungen

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = |v| = q \cdot \nu = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Gamma$$

gültig ist, wenn man  $\int_{\Omega} w_0 dx = \int_{\Omega} w_1 dx = \int_{\Omega} \theta dx = 0$  voraussetzt. Der Beweis überträgt sich direkt, ohne das man das LYAPUNOVsche Funktional anpassen muss. Manche Abschätzungen sind dann allerdings mit der 2. POINCARÉschen Ungleichung durchzuführen.

## 2.2 Gleichungen für thermoelastische Dehnungen

Um die Schwingungen einer thermoelastischen Platte nach REISSNER und MINDLIN vollständig beschreiben zu können, muss man neben den Gleichungen (2.1) für die Biegung  $w$ , Drehwinkel  $\psi$  und  $\phi$ , das thermische Moment  $\theta$  und das Moment des Wärmeflusses  $q$  noch die Gleichungen für die sogenannten thermoelastischen Dehnungen  $u_1$  und  $u_2$ , die über die Plattendicke

gemittelten Temperatur  $\tilde{\theta}$  und den Wärmefluss  $\tilde{q}$  untersuchen, welche wir im Kapitel 1 hergeleitet haben. Wie bereits zuvor gemerkt, entkoppeln sich die beiden Systeme im Linearen voneinander.

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  wieder ein beschränktes Gebiet mit einem LIPSCHITZ-Rand  $\Gamma$ , für welchen  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  gilt, wobei  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  relativ offen und disjunkt sind. Die Gleichungen für thermoelastische Dehnungen  $u_1, u_2$  lauten in der symmetrisierten Form

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{1,tt} - \frac{E}{1-\mu^2} (u_{1,x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} u_{1,x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} u_{2,x_1 x_2}) + \tilde{\gamma} \tilde{\theta}_{x_1} &= f_1, \\ \rho_1 u_{2,tt} - \frac{E}{1-\mu^2} (u_{2,x_2 x_1} + \frac{1-\mu}{2} u_{2,x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} u_{1,x_1 x_2}) + \tilde{\gamma} \tilde{\theta}_{x_2} &= f_2, \\ \tilde{\rho}_3 \tilde{\theta} + \tilde{\kappa} \operatorname{div} \tilde{q} + \tilde{\gamma} (u_{1,t x_1} + u_{2,t x_2}) &= h_1, \\ \tilde{\tau}_0 \tilde{q}_t + \tilde{\kappa} q + \tilde{\gamma} \nabla \theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Die zu einer am Randteil  $\Gamma_0$  festgeklemmten sowie am ganzen Rand  $\Gamma$  thermisch isolierten Platte gehörigen thermoelastischen Dehnungen  $u_1$  und  $u_2$  sowie die gewichteten Temperatur  $\tilde{\theta}$  und Wärmefluss  $\tilde{q}$  genügen den folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} (v_1 u_{1,x_1} + \mu v_1 u_{2,x_2} + \frac{1-\mu}{2} (u_{1,x_2} + u_{2,x_1}) v_2) - \tilde{\gamma} \tilde{\theta} v_1 &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \frac{E}{1-\mu^2} (v_2 u_{2,x_2} + \mu v_2 u_{1,x_1} + \frac{1-\mu}{2} (u_{1,x_2} + u_{2,x_1}) v_1) - \tilde{\gamma} \tilde{\theta} v_2 &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ q \cdot \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma, \end{aligned} \quad (2.56)$$

wobei  $\nu = (v_1, v_2)'$  wie zuvor den äußeren Einheitsnormalenvektor an  $\Gamma$  in einem Punkt bezeichne.

Wir definieren die Gewichtsmatrix  $\tilde{S} := \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}$  mit  $\sigma(\tilde{S}) = \{ \frac{E}{2(1+\mu)}, \frac{E}{1+\mu}, \frac{E}{1-\mu} \}$

und schreiben die Gleichungen (2.55) für  $u = (u_1, u_2)'$  in kurzer Form um:

$$\begin{aligned} \rho_2 u_{tt} - \mathcal{D}' \tilde{S} \mathcal{D} u + \tilde{\gamma} \nabla \tilde{\theta} &= f, \\ \tilde{\rho}_3 \tilde{\theta}_t + \tilde{\kappa} \operatorname{div} \tilde{q} + \tilde{\gamma} \operatorname{div} u_t &= h_1, \\ \tilde{\tau}_0 \tilde{q}_t + \delta \tilde{q} + \tilde{\kappa} \nabla \tilde{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die Randbedingungen (2.56) lauten dann

$$\begin{aligned} |u| &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ \mathcal{N}' \tilde{S} \mathcal{D} u - \tilde{\gamma} \tilde{\theta} \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \tilde{q} \cdot \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma, \end{aligned} \quad (2.58)$$

wobei  $f = (f_1, f_2)'$ . Desweiteren schreiben wir die Anfangsbedingungen

$$u(t=0) = u_0, \quad u_t(t=0) = u_1, \quad \tilde{\theta}(t=0) = \tilde{\theta}_0, \quad \tilde{q}(t=0) = \tilde{q}_0 \quad (2.59)$$

vor.

Bei (2.57)–(2.59) handelt es sich um die zweidimensionalen linearen Thermoelastizitätsgleichungen mit „second sound“. Da wir bei nichtlinearen Betrachtungen die Existenz und Asymptotik im Linearen benötigen, werden wir in den nächsten Abschnitten einige wichtige Sätze formulieren, welche wir meistens nicht beweisen, sondern auf die zahlreich verfügbaren Arbeiten zu diesem Thema verweisen werden.

### 2.2.1 Wohlgestelltheit

Um die Wohlgestelltheit zu beweisen, verfolgen wir die übliche Strategie: Wir formulieren das Problem (2.57)–(2.59) in ein Evolutionsproblem

$$\begin{aligned} V_t(t) &= \tilde{\mathcal{A}}V(t) + F(t) \text{ für } t \in (0, \infty), \\ V(0) &= V^0 \end{aligned}$$

um und beweisen, dass  $\tilde{\mathcal{A}}$  eine  $C^0$ -Kontraktionshalbgruppe erzeugt. Die Eindeutigkeit ergibt sich trivialerweise aus der Energieabschätzung.

Wir definieren  $V := (u, u_t, \tilde{\theta}, \tilde{q})'$  und erklären formal den Differentialoperator

$$\tilde{\mathcal{A}} := \tilde{\rho}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}'\tilde{\mathcal{S}}\mathcal{D} & 0 & -\tilde{\gamma}\nabla & 0 \\ 0 & -\tilde{\gamma}\operatorname{div} & 0 & -\tilde{\kappa}\operatorname{div} \\ 0 & 0 & -\tilde{\kappa}\nabla & -\delta \end{pmatrix}$$

mit  $\tilde{\rho} := \operatorname{diag}(1, \rho_1, \tilde{\rho}_3, \tilde{\tau}_0)$ .

**Bemerkung 2.2.1.** Wir haben uns für die Transformation  $V = (u, u_t, \tilde{\theta}, \tilde{q})'$  gegenüber der in der Literatur verbreiteteren Transformation  $V = (\mathcal{D}u, u_t, \tilde{\theta}, \tilde{q})'$  (vgl. [70]) entschieden, da diese Form einerseits mit der Transformation für die REISSNER-MINDLIN-Gleichungen (2.3)–(2.4) besser kompatibel ist und andererseits keinen künstlichen Nullraum des Differentialoperators schafft (cf. [35]), was die spätere Stabilitätsuntersuchung einfacher macht.

Um den Operator  $\tilde{\mathcal{A}}$  im funktionalanalytischen Rahmen definieren zu können, wählen wir als Grundraum den HILBERTraum

$$\mathcal{H} := (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^3$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle V, W \rangle_{\mathcal{H}} := \rho_1 \langle V^2, W^2 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mathcal{D}V^1, \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{D}W^1 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \tilde{\rho}_3 \langle V^3, W^3 \rangle_{L^2(\Omega)} + \tilde{\tau}_0 \langle V^4, W^4 \rangle_{(L^2(\Omega))^2}.$$

Wie gewohnt, gilt die KORNSche Ungleichung (s. [48])

**Satz 2.2.2.** Es gibt Konstanten  $C_{\mathcal{K},1}, C_{\mathcal{K},2} > 0$  derart, dass

$$C_{\mathcal{K},1} \|u\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq \|\sqrt{\tilde{\mathcal{S}}}\mathcal{D}u\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C_{\mathcal{K},2} \|u\|_{(H^1(\Omega))^2}$$

für alle  $u \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$  gilt.

Wir setzen also  $\tilde{\mathcal{A}}: \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, V \mapsto \tilde{\mathcal{A}}V$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}) &= \{V \in \mathcal{H} \mid \tilde{\mathcal{A}}V \in \mathcal{H}, V \text{ erfüllt verallgemeinerte NEUMANNsche RB (2.60)}\} \\ &= \{V \in \mathcal{H} \mid V^1, V^2 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \mathcal{D}'\tilde{\mathcal{S}}\mathcal{D}V^2 \in (L^2(\Omega))^2, V^3 \in H^1(\Omega), \operatorname{div} V^4 \in L^2(\Omega), \\ &\quad V \text{ erfüllt verallgemeinerte NEUMANNsche RB (2.60)}\}, \end{aligned}$$

worin die NEUMANNschen Randbedingungen durch

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}'\tilde{\mathcal{S}}\mathcal{D}V^1 - \tilde{\gamma}\nabla V^3, \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{D}V^1, \mathcal{D}\phi \rangle_{(L^2(\Omega))^3} - \tilde{\gamma}\langle V^3, \operatorname{div} \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ = 0 \text{ für alle } \phi \in (H^1(\Omega))^2 \tag{2.60} \\ \langle \operatorname{div} V^4, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle V^4, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \text{ für alle } \phi \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

gegeben sind.

Analog zum Abschnitt 2.1.1 oder [70, Theorem 2.2], wo man allerdings die DIRICHLETSchen Randbedingungen für  $u, \tilde{\theta}, \tilde{q}$  betrachtet hat, lässt sich der folgende Satz beweisen:

**Satz 2.2.3.** Seien  $V_0 \in D(\tilde{\mathcal{A}})$  und  $F \in \mathcal{C}^0([0, \infty), D(\tilde{\mathcal{A}})) \cup \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{H})$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung

$$V \in \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty), D(\tilde{\mathcal{A}})).$$

Ist überdies  $V_0 \in D(\tilde{\mathcal{A}}^s)$  und  $F \equiv 0$  für ein  $s \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$V \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, \infty), D(\tilde{\mathcal{A}}^{s-k})).$$

## 2.2.2 Exponentielle Stabilität bzw. deren Fehlen

Die Frage nach der Stabilität der thermoelastischen Gleichungen – mit parabolischer Wärmeleitung nach FOURIER, hyperbolischer Wärmeleitung nach CATTANEO oder JEFFREY sowie mit „dual phase lag“ usw. – in verschiedenen Dimensionen wurde in vielen Arbeiten und Monographien studiert ([33], [34], [35], [41], [69], [70], [71], [86] u.a.). Im Gegensatz zu den energieerhaltenden Elastizitätsgleichungen verfügen thermoelastische Gleichungen über einen dissipativen Mechanismus, welcher durch die Wärmedissipation entsteht. Obwohl sich das eindimensionale System im beschränkten Gebiet sowohl im Linearen als auch im Nichtlinearen als exponentiell stabil erweist ([69]), klingt die Energie bereits im Zweidimensionalen nicht ab, wie z. B. in Gebieten, in welchen reflektierende Strahlen existieren (s. [35]).

In den Gebieten, wo die Gleichung „im Wesentlichen“ eindimensional ist, z. B. in radialsymmetrischen Gebieten mit rotationssymmetrischen Daten, klingt die Energie exponentiell ab ([34], [33]). Dieses Resultat lässt sich sogar auf rotationsfreie Verschiebungsfelder mit rotationsfreien Wärmequellen erweitern ([70]), was auch sehr plausibel klingt, da der thermische Anteil des Systems mit dem elastischen Anteil über die Divergenz des Verschiebungsfeldes gekoppelt ist. Daher kann man im rotationsfreien Fall über die Divergenz den gesamten Gradienten kontrollieren.

Um das System exponentiell zu stabilisieren, ohne weitere Voraussetzungen an die Geometrie des Gebiets oder die Daten zu stellen, wird das System in der Regel vollgedämpft. Man betrachtet also

$$\begin{aligned} \rho_2 u_{tt} - \mathcal{D}' \tilde{S} \mathcal{D} u + \tilde{\gamma} \nabla \tilde{\theta} + \tilde{D} u_t &= f, \\ \tilde{\rho}_3 \tilde{\theta}_t + \tilde{\kappa} \operatorname{div} \tilde{q} + \tilde{\gamma} \operatorname{div} u_t &= h_1, \\ \tilde{\tau}_0 \tilde{q}_t + \delta \tilde{q} + \tilde{\kappa} \nabla \tilde{\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

mit einer positiv definiten Matrix  $\tilde{D}$  (cf. [71]). Dabei darf  $\tilde{D}$  auch ortsabhängig sein. Im eindimensionalen darf  $\tilde{D}$  sogar stückweise verschwinden. So gilt nach [71] für (2.61) mit DIRICHLET-Randbedingungen

$$|u| = \theta = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma \tag{2.62}$$

der nachstehende

**Satz 2.2.4** (Exponentielle Stabilität). Zur eindeutigen Lösung  $(u, \tilde{\theta}, \tilde{q})'$  der Gleichungen für thermoelastische Dehnungen (2.61), (2.62), (2.59) existieren positive Konstanten  $C$  und  $\alpha$  derart, dass

$$\mathcal{E}(t) \leq C e^{-2\alpha t} \mathcal{E}(0)$$

für alle  $t \geq 0$  gilt. Die Konstanten  $C$  und  $\alpha$  hängen dabei nicht von  $t$  und den Anfangsdaten ab und lassen sich anhand der Koeffizienten des Systems berechnen.

**Bemerkung 2.2.5.** Die Aussage letzteren Satzes lässt sich praktisch auf alle natürlichen Randbedingungen erweitern.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem weiteren Stabilitätsergebnis für die rotationsfreie Situation abschließen. Im Gegensatz zum gut bekannten Resultat von Racke in [70] müssen wir keine Rotationsfreiheit des Wärmeflusses voraussetzen und benötigen keine höheren Energien. Allerdings funktioniert unser Beweis auch für einen anderen Satz (natürlicher) Randbedingungen

$$|u| = q \cdot n = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma. \quad (2.63)$$

**Satz 2.2.6** (Exponentielle Stabilität). Die Lösung  $(u, \tilde{\theta}, \tilde{q})'$  des ungedämpften Problems (2.57), (2.63) zu Anfangswerten (2.59) mit  $\int_{\Omega} \tilde{\theta}_0 dx = 0$  erfülle die Bedingung

$$\text{rot } u = 0.$$

Dann existieren positive Konstanten  $C$  und  $\alpha$  derart, dass

$$\mathcal{E}(t) \leq C e^{-2\alpha t} \mathcal{E}(0)$$

für alle  $t \geq 0$  gilt. Die Konstanten  $C$  und  $\alpha$  hängen dabei nicht von  $t$  und den Anfangsdaten ab und lassen sich als Funktionen der Koeffizienten des Systems berechnen.

**Beweis:** Da sich die Abschätzungen in diesem Beweis denen aus dem Beweis des Satzes 2.1.12 ähneln, verzichten wir darauf, offensichtliche Schritte im Detail auszuführen, geben dafür das LYAPUNOV-Funktional explizit an.

Multipliziert man die ersten zwei Gleichungen in (2.57) in  $(L^2(\Omega))^2$  mit  $u_t$  bzw.  $\tilde{q}$  und die dritte Gleichung in  $(L^2(\Omega))^2$  mit  $\tilde{\theta}$ , so ergibt sich mit partieller Integration

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t) = -\tilde{\delta} \int_{\Omega} |\tilde{q}|^2 dx.$$

Wir definieren das Funktional

$$\mathcal{F}_1(t) := \int_{\Omega} \left( \rho_2 u_t u - \frac{\tilde{\gamma} \tilde{\tau}_0}{\tilde{\kappa}} u \tilde{q} \right) dx.$$

Unter Zuhilfenahme der ersten Gleichung in (2.61) ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_2 u_t \cdot u dx &= \rho_2 \int_{\Omega} u_{tt} \cdot u dx + \rho_2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{D}' \tilde{S} \mathcal{D} u \cdot u dx - \gamma \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta} \cdot u dx + \rho_2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} |\sqrt{\tilde{S}} \mathcal{D} u|^2 dx - \gamma \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta} \cdot u dx + \rho_2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} -\frac{\tilde{\gamma} \tilde{\tau}_0}{\tilde{\kappa}} u \cdot \tilde{q} dx = -\frac{\tilde{\gamma} \tilde{\tau}_0}{\tilde{\kappa}} \int_{\Omega} u_t \cdot \tilde{q} dx + \frac{\tilde{\gamma} \tilde{\delta}}{\tilde{\kappa}} \int_{\Omega} u \cdot \tilde{q} dx + \tilde{\gamma} \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta} \cdot u dx.$$

Zusammenfassend liefert dies

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) = - \int_{\Omega} |\sqrt{\tilde{S}}\mathcal{D}u|^2 dx + \rho_2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\tilde{\gamma}\tilde{\tau}_0}{\tilde{\kappa}} \int_{\Omega} u_t \tilde{q} dx + \frac{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}{\tilde{\kappa}} \int_{\Omega} u \tilde{q} dx.$$

Es folgt nun unter Verwendung der YOUNG'schen sowie der KORNSchen Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}_1 &\leq \rho_2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\sqrt{\tilde{S}}\mathcal{D}u|^2 dx \\ &\quad + \frac{\tilde{\gamma}\tilde{\tau}_0}{2\tilde{\kappa}} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 |u_t|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |\tilde{q}|^2 \right) dx + \frac{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}{2\tilde{\kappa}} \int_{\Omega} \left( \varepsilon_1 |u|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} |\tilde{q}|^2 \right) dx \\ &\leq \left( \rho_2 + \frac{\varepsilon_1 \tilde{\gamma}\tilde{\tau}_0}{2\tilde{\kappa}} \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left( 1 - \frac{\varepsilon_1 \tilde{\gamma}\tilde{\delta}}{2C_{\kappa,1}\tilde{\kappa}} \right) \int_{\Omega} |\sqrt{\tilde{S}}\mathcal{D}u|^2 dx + \left( \frac{\tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_0 + \tilde{\delta})}{2\varepsilon_1 \tilde{\kappa}} \right) \int_{\Omega} |q|^2 dx \end{aligned}$$

für ein kleines  $\varepsilon_1 > 0$ .

Analog zu Satz 2.1.12 findet man

$$\int_{\Omega} \tilde{\theta} dx = \int_{\Omega} \tilde{\theta}_0 dx = 0 \text{ für alle } t \geq 0.$$

Dies ermöglicht uns, die 2. POINCARÉ'sche Ungleichung auf  $\theta$  anzuwenden. Wir definieren das Funktional

$$\mathcal{F}_2(t) := \rho_2 \tilde{\rho}_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta} \cdot u_t dx$$

und finden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) &= \rho_2 \tilde{\rho}_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta}_t \cdot u_t dx + \rho_2 \tilde{\rho}_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta} \cdot u_{tt} dx \\ &= \rho_2 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} (-\tilde{\kappa} \operatorname{div} \tilde{q} - \tilde{\gamma} \operatorname{div} u_t) \cdot u_t dx + \tilde{\rho}_3 \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta} \cdot (\mathcal{D}'\tilde{S}\mathcal{D}u + \tilde{\gamma}\nabla\tilde{\theta}) dx \\ &= \rho_2 \tilde{\kappa} \int_{\Omega} \mathcal{B}_{\text{rot}} \operatorname{div} \tilde{q} \cdot u_t dx - \rho_2 \tilde{\gamma} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \tilde{\rho}_3 \int_{\Omega} \mathcal{D}\mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta} \cdot \tilde{S}\mathcal{D}u dx - \tilde{\rho}_3 \gamma \int_{\Omega} \tilde{\theta}^2 dx. \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme der YOUNG'schen und der KORNSchen Ungleichung sowie der Eigenschaften des BOGOWSKIĀ-Operators (s. Anhang C) schätzen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) &\leq \frac{\rho_2 \tilde{\kappa}}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} |\mathcal{B}_{\text{rot}} \operatorname{div} \tilde{q}|^2 + \varepsilon_2 |u_t|^2 \right) dx - \rho_2 \tilde{\gamma} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &\quad + \frac{\tilde{\rho}_3}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon_2'} |\sqrt{\tilde{S}}\mathcal{D}\mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta}|^2 + \varepsilon_2' |\sqrt{\tilde{S}}\mathcal{D}u|^2 \right) dx - \tilde{\rho}_3 \gamma \int_{\Omega} \tilde{\theta}^2 dx \\ &\leq - \left( \rho_2 \gamma - \frac{\varepsilon_2 \rho_2 \tilde{\kappa}}{2} \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{\varepsilon_2' \tilde{\rho}_3}{2} \int_{\Omega} |\sqrt{\tilde{S}}\mathcal{D}u|^2 dx \\ &\quad - \left( \tilde{\rho}_3 \gamma - \frac{C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} C_{\kappa,2} \|\tilde{S}\| \tilde{\rho}_3}{2\varepsilon_2'} \right) \int_{\Omega} \tilde{\theta}^2 dx + \frac{\rho_2 \tilde{\kappa}}{2\varepsilon_2} \int_{\Omega} |q|^2 dx \end{aligned}$$

für willkürliche positive  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_2'$  ab.

Schließlich setzen wir

$$\mathcal{F}_3(t) := -\tau_0 \tilde{\rho}_3 \int_{\Omega} \tilde{q} \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta} dx$$

und finden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}_3(t) &= -\tilde{\rho}_3 \int_{\Omega} (-\tilde{\delta}\tilde{q} - \tilde{\kappa}\nabla\tilde{\theta}) \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta} dx - \tau_0 \int_{\Omega} \tilde{q} \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} (-\tilde{\kappa} \operatorname{div} \tilde{q} - \gamma \operatorname{div} u_t) dx \\ &= \tilde{\rho}_3 \tilde{\delta} \int_{\Omega} \tilde{q} \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta} dx - \tilde{\rho}_3 \tilde{\kappa} \int_{\Omega} \tilde{\theta}^2 dx + \tau_0 \kappa \int_{\Omega} \tilde{q} \cdot \mathcal{B}_{\text{rot}} \operatorname{div} \tilde{q} dx + \tau_0 \gamma \int_{\Omega} \tilde{q} \cdot u_t dx. \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(t) &\leq \frac{\tilde{\rho}_3 \delta}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon_3} |\tilde{q}|^2 + \varepsilon_3 |\mathcal{B}_{\text{rot}} \tilde{\theta}|^2 \right) dx - \tilde{\rho}_3 \tilde{\kappa} \int_{\Omega} \tilde{\theta}^2 dx \\ &\quad + \frac{\tilde{\tau}_0 \kappa}{2} \int_{\Omega} (|\tilde{q}|^2 + |\mathcal{B}_{\text{rot}} \operatorname{div} \tilde{q}|^2) dx + \frac{\tilde{\tau}_0 \gamma}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon_3} |\tilde{q}|^2 + \varepsilon_3 |u_t|^2 \right) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon_3' \tilde{\tau}_0 \gamma}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left( \tilde{\rho}_3 \tilde{\kappa} - \frac{\varepsilon_3 C_B \tilde{\rho}_3 \delta}{2} \right) \int_{\Omega} \tilde{\theta}^2 dx + \left( \frac{\tilde{\rho}_3 \delta}{2\varepsilon_3} + \frac{\tilde{\tau}_0 \gamma}{2\varepsilon_3'} + \frac{\tilde{\tau}_0 \kappa}{2} \right) \int_{\Omega} |\tilde{q}|^2 dx. \end{aligned}$$

Für noch zu bestimmende positive  $N, N_2 > 0$  definieren wir das Funktional

$$\mathcal{L}(t) := N\mathcal{E}(t) + \mathcal{F}_1(t) + N_2 \mathcal{F}_2(t) + \mathcal{F}_3(t)$$

und erhalten

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -C_{u_t} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - C_{\sqrt{S}Du} \int_{\Omega} |\sqrt{S}Du|^2 dx - C_{\tilde{\theta}} \int_{\Omega} \tilde{\theta}^2 dx - C_{\tilde{q}} \int_{\Omega} |\tilde{q}|^2 dx$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} C_{u_t} &= \left\{ - \left( \rho_2 + \frac{\varepsilon_1 \tilde{\gamma} \tilde{\tau}_0}{2\tilde{\kappa}} \right) + N_2 \left[ \rho_2 \gamma - \frac{\varepsilon_2 \rho_2 \tilde{\kappa}}{2} \right] \right\} - \frac{\varepsilon_3' \tilde{\tau}_0 \gamma}{2}, \\ C_{\sqrt{S}Du} &= \left[ 1 - \frac{\varepsilon_1 \tilde{\gamma} \delta}{2C_{\mathcal{K},1} \tilde{\kappa}} \right] - N_2 \frac{\varepsilon_2' \tilde{\rho}_3}{2}, \\ C_{\tilde{\theta}} &= N_2 \left( \tilde{\rho}_3 \gamma - \frac{C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} C_{\mathcal{K},2} \|\tilde{S}\| \tilde{\rho}_3}{2\varepsilon_2'} \right) + \left[ \tilde{\rho}_3 \tilde{\kappa} - \frac{\varepsilon_3 C_B \tilde{\rho}_3 \delta}{2} \right], \\ C_{\tilde{q}} &= \tilde{\tau}_0 N + \left( \frac{\tilde{\gamma}(\tilde{\tau}_0 + \delta)}{2\varepsilon_1 \tilde{\kappa}} \right) - N_2 \frac{\rho_2 \tilde{\kappa}}{2\varepsilon_2} - \left( \frac{\tilde{\rho}_3 \delta}{2\varepsilon_3} + \frac{\tilde{\tau}_0 \gamma}{2\varepsilon_3'} + \frac{\tilde{\tau}_0 \kappa}{2} \right). \end{aligned}$$

Nun wählen wir  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$  so klein, dass die Terme in den eckigen Klammern in  $C_{u_t}$ ,  $C_{\sqrt{S}Du}$  und  $C_{\tilde{\theta}}$  positiv werden. Danach wählen wir  $N_2 > 0$  so groß, dass der Term in den geschweiften Klammern positiv wird. Anschließend wählen wir ein  $\varepsilon_2' > 0$  so klein, dass  $C_{\sqrt{S}Du}$  positiv wird. Nun fixieren wir ein hinreichend großes  $N_3 > 0$  so, dass  $C_{\tilde{\theta}} > 0$  gilt. Danach wählen wir ein  $\varepsilon_3' > 0$  derart, dass  $C_{u_t} > 0$  positiv ist. Schließlich wird ein großes  $N > 0$  so fixiert, dass  $C_{\tilde{q}}$  positiv wird. Somit haben wir

$$C_{\min} := \min\{C_{u_t}, C_{\nabla w}, C_{\sqrt{S}Du}, C_{\tilde{\theta}}, C_{\tilde{q}}\} > 0.$$

Also gilt

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\frac{C_{\min}}{\min\{\rho_2, \tilde{\rho}_3, \tilde{\tau}_0\}} \mathcal{E}(t) =: -C\mathcal{E}(t).$$

Andererseits ergibt sich unter Benutzung der YOUNG'schen und der KORN'schen Ungleichungen sowie der Stetigkeit des BOGOWSKIĀ-Operators analog zum Beweis von Satz 2.1.12

$$|\mathcal{F}_1(t) + N_2 \mathcal{F}_2(t) + \mathcal{F}_3(t)| \leq \hat{C}\mathcal{E}(t).$$

Daraus folgt für  $\alpha_1 := N - \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, C_{\mathcal{K}}^{-1}\}}{\min\{\rho_1, \rho_2, \tilde{\rho}_3\}}$ ,  $\alpha_2 := N + \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, C_{\mathcal{K}}^{-1}\}}{\min\{\rho_1, \rho_2, \tilde{\rho}_3\}}$  die Ungleichung

$$\alpha_1 \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 \mathcal{E}(t) \text{ für } t \geq 0.$$

Damit  $\alpha_1 > 0$  gilt, vergrößern wir eventuell  $N$ . Dann sind die Konstanten  $C$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  positiv und man folgert mit Hilfe des GRONWALL'schen Lemmas

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{1}{\alpha_1} \mathcal{L}(t) \leq \frac{1}{\alpha_1} \mathcal{E}(0) e^{-\frac{C}{\alpha_2} t} =: C\mathcal{E}(0) e^{-2\alpha t} \text{ für } t \geq 0,$$

sodass die Energie  $\mathcal{E}$  exponentiell abklingt.  $\square$

# Existenz und Stabilität im Nichtlinearen

---

In diesem Kapitel diskutieren wir die lokale sowie die globale Existenz und exponentielle Stabilität für eine nichtlineare REISSNER-MINDLIN-Platte in einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit glattem Rand  $\Gamma = \partial\Omega$ . Im Abschnitt 3.1 stellen wir einen lokalen Existenzsatz vor, welchen wir mit Hilfe der im Anhang A.2 entwickelten allgemeinen Lösungstheorie für hyperbolische Systeme nach [63] beweisen. Ferner werden wir im Abschnitt 3.2 die lokal existierende Lösung für genügend kleine Daten global fortsetzen, falls die Lösung rotationsfrei ist. Hierfür bedienen wir uns der klassischen Fortsetzungssargumente für exponentiell stabile Systeme (vgl. [35]).

## 3.1 Ein Lokaler Existenzsatz

Bevor wir auf die lokale Lösbarkeit für die nichtlineare REISSNER-MINDLIN-Platte eingehen, wollen wir einige bekannte Resultate über thermoelastische Systeme im Nichtlinearen kurz zitieren. In [76] hat Slemrod eindimensionale hyperbolisch-parabolische Thermoelastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(u_x, \theta)u_{xx} + b(u_x, \theta)\theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \theta_t - b(u_x, \theta)\theta_{xx} + c(u_x, \theta)u_{tx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L) \end{aligned}$$

für die Randbedingungen

$$u_x = \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}$$

studiert. Mit Hilfe des FAEDO-GALERKIN-Verfahrens wurde die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung bewiesen, welche anschließend für kleine Daten global fortgesetzt wurde. Ein deutlicher Nachteil dieses Zugangs besteht darin, dass er nicht für alle natürlichen Randbedingungen funktioniert. Dieses Resultat wurde in [57] auf die eindimensionale Version der REISSNER-MINDLIN-Platte – den TIMOSHENKO-Balken – übertragen:

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu \varphi_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta \theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta \psi_{tx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \tau_0 q_t + q + \kappa \theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L) \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\varphi_x = \psi = \theta \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}.$$

In [79] hat Tarabek einen lokalen Existenzsatz für hyperbolische Thermoelastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(u_x, \theta, q)u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \theta_t - g(u_x, \theta, q)\theta_{xx} + d(u_x, \theta, q)u_{tx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \tau(u_x, \theta)q_t + q + k(u_x, \theta)\theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L) \end{aligned}$$

für die Randbedingungen

$$u = 0, \quad \theta = \bar{\theta} \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}$$

bewiesen.

Mehrdimensionale parabolisch-hyperbolische Thermoelastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} U_{tt} - \operatorname{div} S(\nabla U, \theta) &= f \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ (\theta + T_0) \{ a(\nabla U, \theta)\theta_t - \operatorname{spur} ((S_\theta(\nabla U, \theta))' \cdot \nabla U_t) \} + \operatorname{div} q(\nabla U, \theta, \nabla \theta) &= g \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned}$$

für gegebenen Wärmefluss  $q$  mit den DIRICHLETSchen Bedingungen für  $U$  und  $\theta$  wurden in [35] von Jiang und Racke für den Fall eines beschränkten, glatt berandeten Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  untersucht. Unter Verwendung des BANACHSchen Fixpunktsatzes wurde lokale Lösbarkeit bewiesen. Die bei der Konstruktion der kontrahierenden Abbildung entstehenden linearen Evolutionsgleichungen wurden mit Hilfe einer allgemeinen Lösungstheorie für CD-Systeme nach [38] gelöst. Dabei war es möglich, die beiden Gleichungen voneinander zu entkoppeln, sodass man im Wesentlichen eine Elastizitätsgleichung und eine Wärmeleitungsgleichung bekommen hat. Dieser Zugang lässt sich aber nicht direkt auf die hyperbolische Wärmeleitung übertragen, da der Wärmefluss bereits im Linearen keine volle Regularität besitzt.

Wir haben uns daher für einen alternativen Zugang entschieden. Da sich unser Problem auf die Form eines symmetrisch-hyperbolischen Systems bringen lässt, wollen wir die in [63] entwickelte Lösungstheorie für quasilineare symmetrisch-hyperbolische Systeme benutzen. Eine ähnliche Beweismethode wurde in [31] für eine eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit „second sound“ verwendet. Der Arbeit liegt eine Theorie für nicht charakteristische quasilineare symmetrisch-hyperbolische Systeme nach [74] zugrunde, welche sich leider auf mehrdimensionale hyperbolische Thermoelastizitätsgleichungen nicht anwenden lässt, da die zum Differentialoperator gehörige Randmatrix singular ist.

Mit den in Kapitel 2 eingeführten Notationen betrachten wir ein gedämpftes REISSNER-MINDLIN-System, welches sich in der symmetrisierten Form zu

$$\rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \bar{C}_1(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \theta = M, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\rho}_1 u_{tt} - \operatorname{div} N(\nabla w, \nabla u) + \bar{C}_2(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \tilde{\theta} = f, \quad (3.2)$$

$$\rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div} (\nabla w + v) - \operatorname{div} (N(\nabla w, \nabla u) \nabla w) + \tilde{d}(U, \nabla U, \Theta, Q) w_t = f_3, \quad (3.3)$$

$$a_1(\nabla U, \Theta, Q) \theta_t + b_1(\nabla U, \Theta, Q) \operatorname{div} q + \tilde{\beta}(\nabla U, \Theta, Q) \theta + \operatorname{spur} (\bar{C}_1(\nabla U, \Theta, Q) \nabla v_t) = h_1, \quad (3.4)$$

$$a_2(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{\theta}_t + b_2(\nabla U, \Theta, Q) \operatorname{div} \tilde{q} + \operatorname{spur} (\bar{C}_2(\nabla U, \Theta, Q) \nabla u_t) = h_2, \quad (3.5)$$

$$A_1(\nabla U, \Theta, Q) q_t + B_1(\nabla U, \Theta, Q) q + b_1(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \theta = 0, \quad (3.6)$$

$$A_2(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{q}_t + B_2(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{q} + b_2(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \tilde{\theta} = 0 \quad (3.7)$$

schreibt. Darin setzen wir zur Abkürzung  $U = (v, u, w)'$ ,  $\Theta = (\theta, \tilde{\theta})'$ ,  $Q = (q, \tilde{q})'$ . Desweiteren ist  $N$  eine hinreichend glatte Matrixfunktion und  $M, f, f_3, h_1, h_2$  sind gegebene Funktionen. Ein einfaches Beispiel für  $N$  ist durch die geometrische Nichtlinearität

$$N(\nabla w, \nabla u) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} u_{1,x_1} + \mu u_{2,x_2} + \frac{1}{2}w_{x_1}^2 + \frac{\mu}{2}w_{x_2}^2 & \frac{1-\mu}{2}(u_{1,x_2} + u_{2,x_1} + w_{x_1}w_{x_2}) \\ \frac{1-\mu}{2}(u_{1,x_2} + u_{2,x_1} + w_{x_1}w_{x_2}) & u_{2,x_2} + \mu u_{1,x_1} + \frac{1}{2}w_{x_2}^2 + \frac{\mu}{2}w_{x_1}^2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

gegeben. Das System (3.1)–(3.7) ist eine Verallgemeinerung der in Kapitel 1 hergeleiteten Gleichungen für den Fall, dass die Funktionen  $\bar{C}_i, a_i, b_i, A_i, B_i, \bar{d}$  und  $\tilde{\beta}, i = 1, 2$ , nicht konstant sind. Als Randbedingungen wählen wir

$$w = |v| = |u| = q \cdot v = \tilde{q} \cdot v = 0 \text{ auf } \Gamma. \quad (3.9)$$

Hinzu kommen noch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w(t=0) &= w^0, & v(t=0) &= v^0, & u(t=0) &= u^0, \\ w_t(t=0) &= w^1, & v_t(t=0) &= v^1, & u_t(t=0) &= u^1, \\ \theta(t=0) &= \theta^0, & q(t=0) &= q^0, & \tilde{\theta}(t=0) &= \tilde{\theta}^0, & \tilde{q}(t=0) &= \tilde{q}^0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Im Folgenden gehen wir von allgemeinen Nichtlinearitäten  $N$  aus. Dabei kann man ohne Weiteres nicht erwarten, dass überhaupt lokale Lösungen für beliebig große Daten existieren. Letzteres wollen wir anhand der eindimensionalen Elastizitätsgleichung erläutern.

**Beispiel 3.1.1.** Die eindimensionale Elastizitätsgleichung lautet

$$u_{tt} - \sigma(u_x)_x = 0 \text{ in } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \quad (3.11)$$

zuzüglich der Anfangsbedingungen  $u(t=0) = u_0, u_t(t=0) = u_1$  und der DIRICHLETSchen oder NEUMANNschen Randbedingungen. Ist  $\sigma$  glatt, so ist Gleichung (3.11) gleichbedeutend mit

$$u_{tt} - \sigma'(u_x)u_{xx} = 0 \text{ in } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L). \quad (3.12)$$

Gehen wir von dem HOOKSchen Gesetz sowie dem Verzerrungstensor  $\sigma(p) = 1 + \frac{p^2}{2}$  nach GREEN und LAGRANGE aus, so lautet  $\sigma'(p) = 1 + p$ . Somit ist es nur dann sinnvoll (3.12) als hyperbolische Gleichung zu bezeichnen, wenn  $u_x > -1$  gilt. Da man bekanntlich

$$\|u_x\|_{L^\infty((0,L))} \leq \|u\|_{H^2((0,L))} \leq \sum_{j=0}^3 \|\partial_t^j u\|_{H^{3-j}((0,L))} \leq C(t)(\|u_0\|_{H^3((0,L))} + \|u_1\|_{H^2((0,L))})$$

mit einem in 0 stetigen  $C$  abschätzen kann (vgl. [35]), muss man beispielsweise von den Anfangsdaten

$$\|u_0\|_{H^3((0,L))} \ll 1 \text{ und } \|u_1\|_{H^2((0,L))} \ll 1$$

verlangen, damit  $\sigma'(u_x) > 0$  gilt.

Wird hingegen ein hypoelastisches Gesetz der Form  $\sigma = \sigma(p)$  derart postuliert, dass  $\sigma'$  gleichmäßig positiv ist, so besteht die Hoffnung, eine lokale Lösung auch für große Anfangsdaten (evtl. mit einer kleinen Lebensdauer) gewinnen zu können (vgl. [35], Kapitel 5). In dieser Arbeit wird aber eine solche Situation nicht betrachtet.

Nun wollen wir die Gleichungen (3.1)–(3.3) geschickt umformen. Wir setzen  $\tilde{U} := (u, w)'$  und finden

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \operatorname{div} N(\nabla w, \nabla u) \\ \operatorname{div} (N(\nabla w, \nabla u) \nabla w) \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \begin{pmatrix} N_{1j}(\nabla \tilde{U}) \\ N_{2j}(\nabla \tilde{U}) \\ K \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial x_j} + N_{j1}(\nabla \tilde{U}) \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial x_1} + N_{j2}(\nabla \tilde{U}) \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^3 \sum_{j,l=1}^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial N_{1j}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{k,x_1 x_j} \\ \frac{\partial N_{2j}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{k,x_1 x_j} \\ K \delta_{jl} \frac{\partial^2 \tilde{U}_3}{\partial x_j \partial l} + \left( \frac{\partial N_{j3}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{3,x_1} + \frac{\partial N_{j2}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{3,x_2} \right) \tilde{U}_{k,x_j x_l} + N_{jl} \tilde{U}_{3,x_1 x_j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^3 \sum_{j,l=1}^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_{1j}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{k,x_j x_l} + \frac{\partial N_{1l}}{\partial \tilde{U}_{k,x_k}} \tilde{U}_{k,x_1 x_j} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_{2j}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{k,x_j x_l} + \frac{\partial N_{2l}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{k,x_1 x_j} \right) \\ K \delta_{jl} \frac{\partial^2 \tilde{U}_3}{\partial x_j \partial l} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_{j3}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{3,x_1} + \frac{\partial N_{j2}}{\partial \tilde{U}_{k,x_1}} \tilde{U}_{3,x_2} \right) (\tilde{U}_{k,x_j x_l} + \tilde{U}_{k,x_l x_j}) + N_{jl} \tilde{U}_{3,x_1 x_j} \end{pmatrix} \\
&= \left( \sum_{k=1}^3 \sum_{j,l=1}^2 \tilde{C}_{ijkl}(\nabla \tilde{U}) \tilde{U}_{k,x_j x_l}, \quad i = 1, 2, 3 \right),
\end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{C}_{ijkl}(P) = \begin{cases} \frac{\partial N_{ij}(P)}{\partial P_{kl}}, & i < 3, k = 1, 2, 3, j, l = 1, 2 \\ \frac{\partial N_{j1}(P)}{\partial P_{31}} + \frac{\partial N_{j2}(P)}{\partial P_{32}} + N_{jl} \delta_{k3} + K \delta_{k3} \delta_{jl}, & i = 3, k = 1, 2, 3, j, l = 1, 2 \end{cases} \quad (3.13)$$

für  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ . Analog zur zweidimensionalen Elastizität (s. [35]) ergibt sich

$$\mathcal{D}' S \mathcal{D} v = \left( \sum_{\beta, j, l=1}^2 C_{\alpha j \beta l} v_{\beta, x_j x_l}, \quad \alpha = 1, 2 \right)$$

mit

$$\tilde{C}_{\alpha j \beta l} = \begin{cases} D, & \alpha = \beta = 1, j = l = 1, \\ D \frac{1-\mu}{2}, & \alpha = \beta = 1, j = l = 2, \\ D \frac{1+\mu}{4}, & \alpha = 1, \beta = 2, j \neq l, \\ D \frac{1+\mu}{4}, & \alpha = 2, \beta = 1, j \neq l, \\ D \frac{1-\mu}{2}, & \alpha = \beta = 2, j = l = 1, \\ D, & \alpha = \beta = 2, j = l = 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Damit bekommen wir eine äquivalente Form der Gleichungen (3.1)–(3.7), welche sich unter Benutzung der EINSTEINSCHEN Summenkonvention wie folgt umschreiben lassen:

$$\rho_2 v_{\alpha, tt} - C_{\alpha i \beta l} v_{\beta, x_j x_l} + K(v_\alpha + \tilde{U}_{3, x_\alpha}) + \tilde{C}_{1, \alpha j}(\nabla U, \Theta, Q) \theta_{x_j} = M_\alpha, \quad (3.15)$$

$$\rho_1 \tilde{U}_{i, tt} - \tilde{C}_{ijkl}(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{U}_{k, x_j x_l} + \delta_{\alpha i} \tilde{C}_{2, \alpha j}(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{\theta}_{x_j} + \delta_{i3} \tilde{d}(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{U}_{i, t} = f_i, \quad (3.16)$$

$$a_1(\nabla U, \Theta, Q) \theta_t + b_1(\nabla U, \Theta, Q) q_{j, x_j} + \tilde{\beta}(\nabla U, \Theta, Q) \theta + \tilde{C}_{1, \alpha j}(\nabla U, \Theta, Q) v_{\alpha, t x_j} = h_1, \quad (3.17)$$

$$a_2(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{\theta}_t + b_2(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{q}_{j, x_j} + \tilde{C}_{2, \alpha j}(\nabla U, \Theta, Q) U_{\alpha, t x_j} = h_2, \quad (3.18)$$

$$A_{1, \alpha \beta}(\nabla U, \Theta, Q) q_{\beta, t} + B_{1, \alpha \beta}(\nabla U, \Theta, Q) q_\beta + a_1(\nabla U, \Theta, Q) \theta_{x_\beta} = 0, \quad (3.19)$$

$$A_{2, \alpha \beta}(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{q}_{\beta, t} + B_{2, \alpha \beta}(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{q}_\beta + a_2(\nabla U, \Theta, Q) \tilde{\theta}_{x_\beta} = 0 \quad (3.20)$$

in  $(0, \infty) \times \Omega$  mit den Rand-

$$\tilde{U}_i = v_\alpha = q_\alpha v_\alpha = \tilde{q}_\alpha v_\alpha = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma \quad (3.21)$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i(t=0) &= U_i^0, & \tilde{U}_{i,t}(t=0) &= U_i^1, & v_\alpha(t=0) &= v_\alpha^0, & v_{\alpha,t}(t=0) &= v_\alpha^1, \\ \theta(t=0) &= \theta^0, & q_\alpha(t=0) &= q_\alpha^0, & \tilde{\theta}(t=0) &= \tilde{\theta}^0, & \tilde{q}_\alpha(t=0) &= \tilde{q}_\alpha^0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei  $\tilde{U}^0 = (w^0, u^0)'$ ,  $\tilde{U}^1 = (w^1, u^1)'$  und die Indizes  $i, k = 1, 2, 3$  sowie  $j, l, \alpha, \beta = 1, 2$  durchlaufen.

Im Folgenden sei  $s \in \mathbb{N}$ .

**Voraussetzungen 3.1.2.** Es gelte

1.  $\tilde{C} \in C^s(\mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbb{R}^{(3 \times 2) \times (3 \times 2)})$ .
2. Der Tensor  $\tilde{C}$  sei symmetrisch im Sinne

$$\tilde{C}_{ijkl}(P) = \tilde{C}_{klij}(P) \text{ f\"ur alle } P \in \mathbb{R}^{3 \times 2}. \quad (3.23)$$

3.  $\tilde{C}_{ijkl}$  sei anf\"anglich isotrop, d. h.,

$$\tilde{C}_{ijkl}(0) = (1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{k3}) \left( \frac{E\mu}{1-\mu^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\mu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \right) + K \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl}. \quad (3.24)$$

Man rechnet leicht nach, dass die geometrische Nichtlinearit\"at die Voraussetzungen 3.1.2 erf\"ullt.

**Satz 3.1.3** (Geometrische Nichtlinearit\"at). Der durch die geometrische Nichtlinearit\"at  $N$  aus Gleichung (3.8) in (3.13) definierte Tensor  $\tilde{C}$  erf\"ullt die Voraussetzungen 3.1.2 f\"ur alle  $s \in \mathbb{N}_0$ .

**Beweis:**

1. Dass  $\tilde{C}_{ijkl}$  eine glatte Funktion ihrer Variablen ist, ergibt sich direkt aus der Tatsache, dass  $\tilde{C}_{ijkl}$  ein Polynom ist.
2. Um die Symmetrie von  $\tilde{C}$  nachzurechnen, werten wir  $\tilde{C}_{ijkl}(\nabla w, \nabla u)$  mit

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1112} & \tilde{C}_{1121} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1131} & \tilde{C}_{1132} \\ \tilde{C}_{1211} & \tilde{C}_{1212} & \tilde{C}_{1221} & \tilde{C}_{1222} & \tilde{C}_{1231} & \tilde{C}_{1232} \\ \tilde{C}_{2111} & \tilde{C}_{2112} & \tilde{C}_{2121} & \tilde{C}_{2122} & \tilde{C}_{2131} & \tilde{C}_{2132} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2212} & \tilde{C}_{2221} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2231} & \tilde{C}_{2232} \\ \tilde{C}_{3111} & \tilde{C}_{3112} & \tilde{C}_{3121} & \tilde{C}_{3122} & \tilde{C}_{3131} & \tilde{C}_{3132} \\ \tilde{C}_{3211} & \tilde{C}_{3212} & \tilde{C}_{3221} & \tilde{C}_{3222} & \tilde{C}_{3231} & \tilde{C}_{3232} \end{pmatrix}$$

aus.

Unter Verwendung der Gleichung (3.13) finden wir

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \frac{Eh}{1-\mu^2} & 0 & 0 & \frac{Eh}{4(1-\mu)} & \frac{Ehw_{x_1}}{1-\mu^2} & \frac{Ehw_{x_2}}{4(1-\mu)} \\ 0 & \frac{Eh}{2(1+\mu)} & \frac{Eh}{4(1-\mu)} & 0 & \frac{Ehw_{x_2}}{4(1-\mu)} & \frac{Ehw_{x_1}}{2(1+\mu)} \\ 0 & \frac{Eh}{4(1-\mu)} & \frac{Eh}{2(1+\mu)} & 0 & \frac{Ehw_{x_2}}{2(1+\mu)} & \frac{Ehw_{x_1}}{4(1-\mu)} \\ \frac{Eh}{4(1-\mu)} & 0 & 0 & \frac{Eh}{1-\mu^2} & \frac{Ehw_{x_1}}{4(1-\mu)} & \frac{Ehw_{x_2}}{1-\mu^2} \\ \frac{Ehw_{x_1}}{1-\mu^2} & \frac{Ehw_{x_2}}{4(1-\mu)} & \frac{Ehw_{x_2}}{2(1+\mu)} & \frac{Ehw_{x_1}}{4(1-\mu)} & \frac{Ehw_{x_1}^2}{1-\mu^2} + \frac{Eh(1-\mu)w_{x_2}^2}{1-\mu^2} + N_{11} + K & \frac{Eh\mu w_{x_2}w_{x_1}}{1-\mu^2} + \frac{Eh(1-\mu)w_{x_1}w_{x_2}}{2(1-\mu)^2} + N_{12} \\ \frac{Ehw_{x_2}}{4(1-\mu)} & \frac{Ehw_{x_1}}{2(1+\mu)} & \frac{Ehw_{x_1}}{4(1-\mu)} & \frac{Ehw_{x_2}}{1-\mu^2} & \frac{Eh\mu w_{x_2}w_{x_1}}{1-\mu^2} + \frac{Eh(1-\mu)w_{x_1}w_{x_2}}{2(1-\mu)^2} + N_{21} & \frac{Eh(1-\mu)w_{x_1}^2}{2(1-\mu)^2} + \frac{Ehw_{x_2}^2}{1-\mu^2} + N_{22} + K \end{pmatrix}$$

Da  $N_{jl} = N_{lj}$  für  $j, l = 1, 2$  gilt, ist die obige Matrix symmetrisch, was die Symmetrie von  $\tilde{C}_{ijkl}$  nach sich zieht.

3. Schlussendlich folgt mit  $\tilde{C}_{ijkl}(0)\partial_{x_jx_l}\tilde{U}_k = \left( \begin{array}{c} \frac{E}{2(1+\mu)}\Delta u + \frac{E}{2(1-\mu)}\nabla \operatorname{div} u \\ K\Delta w \end{array} \right)$  die anfängliche Isotropie von  $\tilde{C}_{ijkl}$ .

Dies beendet den Beweis.  $\square$

Nun kann man analog zu den mehrdimensionalen Elastizitätsgleichungen sehen, dass sowohl  $C_{\alpha j\beta l}$  als auch  $\tilde{C}_{ijkl}$  im Allgemeinen leider keine positiv definiten Bilinearformen auf  $\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$  bzw.  $\mathbb{R}^{3 \times 2} \times \mathbb{R}^{3 \times 2}$  erzeugen. Deshalb folgen wir dem Zugang von John in [36] und definieren analog die Tensoren

$$\begin{aligned} C_{\alpha j\beta l}^* &= C_{\alpha j\beta l} + \frac{E}{2(1-\mu)}(\delta_{\alpha j}\delta_{\beta l} - \delta_{\alpha l}\delta_{j\beta}), \\ \tilde{C}_{ijkl}^*(P) &= \tilde{C}_{ijkl}(P) + (1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{k3})\frac{D(1+\mu)}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

für  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ .

**Lemma 3.1.4.** Es gibt  $\kappa_1, \tilde{\kappa}_1 > 0$  und  $\delta_1 > 0$  so, dass

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha j}C_{\alpha j\beta l}\xi_{\beta l} &\geq \kappa_1\xi_{\alpha j}\xi_{\alpha j} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ und } P \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \\ \xi_{ij}\tilde{C}_{ijkl}^*(P)\xi_{ij} &\geq \tilde{\kappa}_1\xi_{ij}\xi_{ij} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \text{ und } P \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \text{ mit } \|P\|_\infty < \delta_1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Überdies gilt für alle  $v \in (H^2(\Omega))^2$  und  $\tilde{U} \in (H^2(\Omega))^3$

$$C_{\alpha j\beta l}^*\partial_{x_jx_l}v_\beta = C_{\alpha j\beta l}^*\partial_{x_jx_l}v_\beta \text{ und } \tilde{C}_{ijkl}^*\partial_{x_jx_l}\tilde{U}_k = \tilde{C}_{ijkl}\partial_{x_jx_l}\tilde{U}_k \text{ für } P \in \mathbb{R}^{3 \times 2}. \quad (3.27)$$

**Beweis:** Die Behauptungen für  $C^*$  und  $C$  wurden in [36] bewiesen. Es bleibt also nur  $\tilde{C}^*$  und  $\tilde{C}$  zu betrachten. Da  $\tilde{C}_{ijkl}^*$  im Ursprung stetig ist, reicht es, (3.26) für  $P = 0$  zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijkl}^*(0) &= \tilde{C}_{ijkl}(0) + (1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{k3})\frac{E}{2(1-\mu)}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ &= (1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{k3})\left(\frac{E}{2(1-\mu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1-\mu)}\delta_{ik}\delta_{jl}\right) + K\delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{jl}. \end{aligned}$$

Damit folgt für alle  $\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

$$\xi_{ij}\tilde{C}_{ijkl}^*(0)\xi_{kl} = \frac{D(1+\mu)}{2}(1 - \delta_{i3})(1 - \delta_{k3})(\xi_{ii}\xi_{kk} + \xi_{ij}\xi_{ij}) + K\delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{jl} \geq \min\left\{\frac{E}{2(1-\mu)}, K\right\}\xi_{ij}\xi_{ij}.$$

Unter Benutzung des SCHWARZschen Satzes

$$(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})\partial_{x_j x_l} \tilde{U}_k = \partial_{x_i} \partial_{x_k} \tilde{U}_k - \partial_{x_k} \partial_{x_i} \tilde{U}_k = 0,$$

wobei  $i, j, k, l = 1, 2$  durchlaufen, bekommen wir ferner

$$\tilde{C}_{ijkl}^* \partial_{x_j x_l} \tilde{U}_k = \tilde{C}_{ijkl} \partial_{x_j x_l} \tilde{U}_k,$$

was wir behauptet haben.  $\square$

Einerseits sind  $C^*$  und  $\tilde{C}^*$  nach Lemma 3.1.4 positiv definit, andererseits ändern sich die Gleichungen (3.15)–(3.20) nicht, wenn man  $C$  und  $\tilde{C}$  durch  $C^*$  bzw.  $\tilde{C}^*$  ersetzt. Deshalb schreiben im Folgenden der Einfachheit halber  $C$  und  $\tilde{C}$  statt  $C^*$  bzw.  $\tilde{C}^*$ .

**Voraussetzungen 3.1.5.** Es gelte

$$1. a_i, b_i, \tilde{d}, \tilde{\beta} \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^{5 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}), A_i, B_i, \bar{C}_i \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^{5 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^{2 \times 2}), i = 1, 2.$$

2.  $a_1, a_2, b_1, b_2$  seien positiv, d. h., es gebe  $\delta_2 > 0$  und  $\kappa_2 > 0$  so, dass

$$a_i(P) \geq \kappa_2 \text{ und } b_i(P) \geq \kappa_2, \quad i = 1, 2, \quad (3.28)$$

für alle  $P \in \mathbb{R}^{5 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$  mit  $\|P\|_\infty < \delta_2$  gilt.

3.  $A_1, A_2, B_1, B_2$  seien positiv definit, d. h. es gebe  $\delta_3 > 0$  und  $\kappa_3 > 0$  so, dass

$$\zeta' A_i(P) \zeta \geq \kappa_3 |\zeta|^2 \text{ und } \zeta' B_i(P) \zeta \geq \kappa_3 |\zeta|^2, \quad i = 1, 2, \quad (3.29)$$

für alle  $\zeta \in \mathbb{R}^2$  und  $P \in \mathbb{R}^{5 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$  mit  $\|P\|_\infty < \delta_3$  gilt.

4.  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  seien punktweise invertierbar, d. h. es gebe ein  $\delta_4 > 0$  so, dass  $\bar{C}_1$  und  $\bar{C}_2$  für alle  $P \in \mathbb{R}^{5 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$  mit  $\|P\|_\infty < \delta_4$  invertierbar sind.

$$5. M, f \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, T], (H^{s-k}(\Omega))^2), f_3, h_1, h_2 \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, T], H^{s-k}(\Omega)).$$

Um die NEUMANNschen Randbedingungen für die Wärmeflüsse zu verallgemeinern, erklären wir den folgenden SOBOLEVraum.

**Definition 3.1.6.** Sei

$$H_{\text{div}}^1(\Omega) = \{u \in (H^1(\Omega))^2 \mid \langle \text{div } u, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle u, \nabla \phi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \text{ für alle } \phi \in H^1(\Omega)\}.$$

**Voraussetzung 3.1.7.** Es gelte:

1. Die Anfangsdaten mögen den Regularitäts-

$$\begin{aligned} w^0 &\in H^{s+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad w^1 \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ v^0, u^0 &\in (H^{s+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2, \quad v^1, v^1 \in (H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2, \\ \theta^0, \tilde{\theta}^0 &\in H^s(\Omega), \quad q^0, \tilde{q}^0 \in H^s(\Omega) \cap H_{\text{div}}^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.30)$$

sowie den Kompatibilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} w^m &\in H^{s+1-m}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ für } 2 \leq m \leq s, \quad w^{s+1} \in L^2(\Omega), \\ v^m, u^m &\in (H^{s+1-m}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \text{ für } 2 \leq m \leq s, \quad w^{s+1}, v^{s+1} \in (L^2(\Omega))^2, \\ q^m, \tilde{q}^m &\in H^{s-m}(\Omega) \cap H_{\text{div}}^1(\Omega) \text{ für } 1 \leq m \leq s-1, \quad q^s, \tilde{q}^s \in (L^2(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

genügen, wobei  $w^m, v^m, u^m, \theta^m, \tilde{\theta}^m, q^m, \tilde{q}^m$  für  $m \in \mathbb{N}_0$  die  $m$ -te Zeitableitung jeweiliger Funktion zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  bezeichnen und sich für  $m \geq 2$  bzw.  $m \geq 1$  rekursiv durch die Anfangsdaten unter Verwendung der Differentialgleichungen (3.1)–(3.7) berechnen lassen.

2. Sei  $\delta_0 \in (0, \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\})$ . Es gelte

$$\|(v^0, \nabla w^0, \nabla v^0, w^1, v^1, \theta^0, \tilde{\theta}^0, q^0, \tilde{q}^0)\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{23})} < \frac{\delta_0}{2}. \quad (3.32)$$

**Satz 3.1.8** (Lokale Existenz).  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sei ein beschränktes Gebiet, welches lokal auf einer Seite seines  $C^\infty$ -glatte Randes  $\Gamma$  liegt. Sei  $s \geq 8$ . Unter den Voraussetzungen 3.1.2, 3.1.5 und 3.1.7 existiert ein  $T > 0$  so, dass das Problem (3.1)–(3.10) eine eindeutige Lösung  $(u, w, v, \theta, q, \tilde{\theta}, \tilde{q})'$  besitzt, deren Regularität nachstehend beschrieben wird<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} u, v &\in \bigcap_{k=0}^s C^k([0, T], (H_*^{s+1-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2), & \partial_t^{s+1}u, \partial_t^{s+1}v &\in C^0([0, T], (L^2(\Omega))^2), \\ w &\in \bigcap_{k=0}^s C^k([0, T], H_*^{s+1-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), & \partial_t^{s+1}w &\in C^0([0, T], L^2(\Omega)), \\ \theta, \tilde{\theta} &\in \bigcap_{k=0}^{s-1} C^k([0, T], H_*^{s-k}(\Omega)), & \partial_t^s\theta, \partial_t^s\tilde{\theta} &\in C^0([0, T], L^2(\Omega)), \\ q, \tilde{q} &\in \bigcap_{m=0}^{s-1} C^k([0, T], (H_*^{s-k}(\Omega))^2), & \partial_t^s q, \partial_t^s \tilde{q} &\in C^0([0, T], (L^2(\Omega))^2). \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir transformieren das zu (3.1)–(3.10) äquivalente Problem (3.15)–(3.22) auf ein semi-lineares symmetrisch-hyperbolisches System erster Ordnung. Hierzu definieren wir

$$\begin{aligned} V &= (V_\alpha^1, V_\alpha^2, V_{\alpha j}^3, V_i^4, V_{ij}^5, V_\alpha^6, V_\alpha^7, V_\alpha^8, V_\alpha^9)' \equiv (v_\alpha, v_{\alpha,t}, v_{\alpha,x_j}, \tilde{U}_{i,t}, \tilde{U}_{i,x_j}, \theta, q_\alpha, \tilde{\theta}, \tilde{q}_\alpha)', \\ F &= (F_\alpha^1, F_\alpha^2, F_{\alpha j}^3, F_i^4, F_{ij}^5, F_\alpha^6, F_\alpha^7, F_\alpha^8, F_\alpha^9)' \equiv (0, M_\alpha, 0, f_i, 0, h_1, 0, h_2, 0)', \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei die Indizes  $i, k = 1, 2, 3$  und  $\alpha, \beta, l, j = 1, 2$  durchlaufen, und finden

$$\begin{aligned} \partial_t V_\alpha^1 - V_\alpha^2 &= F_\alpha^1, \\ \rho_2 \partial_t V_\alpha^2 - C_{\alpha j \beta l} \partial_j V_{kl}^3 + K(V_\alpha^1 + \delta_{\alpha l} \delta_{k3} V_{kl}^5) + \tilde{C}_{1,\alpha j}(V) \partial_j V_\alpha^6 &= F_\alpha^2, \\ C_{\alpha j \beta l} \partial_t V_{\alpha j}^3 - C_{\beta l \alpha j} \partial_l V_\beta^2 &= F_{\alpha j}^3, \\ \rho_1 \partial_t V_i^4 - \tilde{C}_{ijkl}(V) \partial_j V_{kl}^5 - \delta_{\alpha i} \tilde{C}_{2,\alpha j}(V) \partial_j V_\alpha^8 + \delta_{i3} \tilde{d} V_i^4 &= F_i^4, \\ \tilde{C}_{ijkl}(V) \partial_t V_{ij}^5 - \tilde{C}_{klij}(V) \partial_l V_k^4 &= F_{ij}^5, \\ a_1(V) \partial_t V_\alpha^6 + b_1(V) \delta_{\alpha j} \partial_j V_\alpha^7 + \tilde{\beta} V_\alpha^6 + \tilde{C}_{1,\beta j}(V) \partial_j V_\beta^2 &= F_\alpha^6, \\ A_{1,\alpha\beta}(V) \partial_t V_\beta^7 + B_{1,\alpha\beta}(V) V_\beta^7 + a_1(V) \delta_{\alpha j} \partial_j V_\alpha^6 &= F_\alpha^7, \\ a_2(V) \partial_t V_\alpha^8 + b_1(V) \delta_{\alpha j} \partial_j V_\alpha^9 + \tilde{C}_{2,\beta j}(V) \partial_j V_\alpha^{4,j} &= F_\alpha^8, \\ A_{2,\alpha\beta}(V) \partial_t V_\beta^9 + B_{2,\alpha\beta}(V) V_\beta^9 + a_2(V) \delta_{\alpha j} \partial_j V_\alpha^8 &= F_\alpha^9, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Die anisotropischen SOBOLEVräume  $H_*^m(\Omega)$  werden in Definition A.2.1 erklärt.

worin wir der Einfachheit halber alle nichtlinearen Koeffizienten sogar von ganz  $V$  abhängen lassen. Damit schreibt sich das Problem (3.1)–(3.10) zu

$$\begin{aligned} A^0(V)V_t + A^1(V)V_{x_1} + A^2(V)V_{x_2} + B(V)V &= F, \\ M(\cdot)V &= 0, \\ V(0, \cdot) &= f, \end{aligned} \quad (3.34)$$

worin

$$\begin{aligned} A^0(V) &= \begin{pmatrix} \rho_1 \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{ijkl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\alpha\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 \delta_{\alpha\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{\alpha j \beta l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1,\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{2,\alpha\beta} \end{pmatrix} (V), \\ A^r(V) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{\alpha r \beta l} & 0 & 0 & \tilde{C}_{1,\alpha r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{\beta l \alpha r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_{i r k l} & 0 & 0 & \tilde{C}_{2,\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_{k l i r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{1,r\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \delta_{r\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \delta_{\alpha r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{2,r\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \delta_{r\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \delta_{\alpha r} & 0 \end{pmatrix} (V), \quad r = 1, 2, \\ B(V) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K \delta_{\alpha\beta} & \tilde{d} & 0 & 0 & K \delta_{k3} \delta_{\alpha l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{1,\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{2,\alpha\beta} \end{pmatrix} (V) \end{aligned}$$

für  $V \in \mathbb{R}^{23}$  und

$$\begin{aligned} M &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\alpha\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_j \delta_{j\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_j \delta_{j\beta} \end{pmatrix} \text{ in } \bar{\Omega}, \\ f &= (U_i^1, U_{i,x_j}^0, v_\alpha^0, v_\alpha^1, v_{\alpha,x_j}^0, \theta^0, q_\alpha^0, \tilde{\theta}^0, \tilde{q}_\alpha^0)', \quad U^0 = (\varphi^0, \psi^0, w^0)', \quad U^1 = (\varphi^1, \psi^1, w^1)'. \end{aligned}$$

Die Randmatrix  $A^v(V) = A^r(V)v_r$ ,  $V \in \mathbb{R}^{23}$ , lautet dann

$$A^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{\alpha r \beta l} v_r & 0 & 0 & \bar{C}_{1, \alpha r} v_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{\beta l \alpha r} v_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_{i r k l} v_r & 0 & 0 & \delta_{\alpha i} \bar{C}_{2, \alpha r} v_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_{k l i r} v_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{1, r \beta} v_r & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \delta_{r \beta} v_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \delta_{\alpha r} v_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{2, r \beta} v_r & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \delta_{r \beta} v_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \delta_{\alpha r} v_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun mit Hilfe von Satz A.2.5 beweisen, dass es ein  $T > 0$  derart gibt, dass das Problem (3.34) eine eindeutige Lösung  $V \in \bigcap_{k=0}^s C^k([0, T], H_*^{s-k}(\Omega, \mathbb{R}^{23}))$  besitzt. Wir prüfen also nach, ob die Voraussetzungen des Satzes A.2.5 erfüllt sind.

- i)  $\Omega$  ist nach Voraussetzung beschränkt,  $C^\infty$ -glatt berandet und liegt lokal auf einer Seite von  $\Gamma$ .
- ii) Sei  $\varepsilon \in (0, \frac{\delta_0}{2})$  mit  $\delta_0 > 0$  wie in der Voraussetzung. Wir definieren

$$N_0 := \{V \in \mathbb{R}^{23} \mid \|V - f(x)\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{23})} \leq \varepsilon\}.$$

Für alle  $V \in N_0$  gilt dann

$$|V| \leq \|f(x)\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{23})} + \varepsilon < \delta_0.$$

Damit sind die Voraussetzungen 3.1.2 und 3.1.5 auf  $V \in N_0$  anwendbar.

Unter Beachtung der Voraussetzungen 3.1.2 sowie 3.1.5 folgt

$$A^0, A^r, B \in C^s(N_0, \mathbb{R}^{23 \times 23}).$$

Da es sich bei  $\tilde{C}_{ijkl}$  und  $C_{\alpha j \beta l}$  nach Voraussetzung 3.1.2 bzw. Gleichung (3.14) um symmetrische Tensoren handelt, ergibt sich sofort unter Beachtung ihrer Struktur die Symmetrie von  $A^0, A^r$  in  $N_0$ .

Sei  $a'_0 := \min\{\rho_1, \rho_2, \kappa_1, \tilde{\kappa}_1, \kappa_2\}$ . Aufgrund der Voraussetzungen 3.1.2 und 3.1.5 sowie des Lemmas 3.1.4 ergibt sich die gleichmäßige Positivität von  $A^0$  gemäß

$$\zeta' A^0(V) \zeta \geq a'_0 |\zeta|^2$$

für alle  $\zeta \in \mathbb{R}^{23}$  und  $V \in N_0$ . Andererseits ist  $A^0$  stetig auf dem Kompaktum  $N_0 \subset \mathbb{R}^{23}$ , sodass  $\max_{V \in N_0} \|A^0(V)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{23}, \mathbb{R}^{23})} = a''_0$  gilt. Damit folgt mit  $a_0 := \min\{a'_0, \frac{1}{a''_0}\}$

$$a_0 \leq \zeta' A^0(V) \zeta \leq \frac{1}{a_0} \text{ für alle } \zeta \in \mathbb{R}^{23}.$$

- iii) Wir wollen den Rang der Randmatrix  $A^v$  untersuchen. Dabei ist es bequem, die Matrix  $A^\eta(V) = \sum_{j=1}^2 A^j(V) \eta_j$ ,  $\eta \in \{v\}^\perp$ , parallel zu betrachten. Da  $A^v$  und  $A^\eta$  über eine gewisse Blockstruktur verfügen, kann man sie mittels einer Indexpermutation

$$A^v(V) = \begin{pmatrix} \hat{A}^v & 0 \\ 0 & \check{A}^v \end{pmatrix} (V) \text{ und } A^\eta(V) = \begin{pmatrix} \hat{A}^\eta & 0 \\ 0 & \check{A}^\eta \end{pmatrix} (V)$$

auf die Blockdiagonalform für  $V \in N_0$  und  $\eta \in \{v\}^\perp$  bringen, wobei für die Blöcke  $\hat{A}^v(V), \bar{A}^v(V) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  und  $\hat{A}^\eta(V), \bar{A}^\eta(V) \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$  gilt. Letztere Matrizen können jetzt separat behandelt werden. Wir sehen uns nur die komplizierteren Matrizen  $\hat{A}^v$  und  $\hat{A}^\eta$  an, welche den Unbekannten  $(\tilde{U}_{t,i}, \tilde{U}_{i,x}, \tilde{\theta}, \tilde{q})'$  entsprechen.

Es gilt für  $\eta \in \{v\}^\perp$

$$\hat{A}^v = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_{irkl}v_l & \delta_{i\alpha}\tilde{C}_{2,\alpha r}v_r & 0 \\ \tilde{C}_{klir}v_r & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{\beta k}\tilde{C}_{2,rk}v_r & 0 & 0 & a_2\delta_{r\beta}v_r \\ 0 & 0 & a_2\delta_{\alpha r}v_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A'_{11} & A'_{21} & B' & 0 \\ 0 & 0 & A'_{12} & A'_{22} & 0 & 0 \\ A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & C' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^\eta = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_{irkl}\eta_l & \delta_{i\alpha}\tilde{C}_{2,\alpha r}\eta_r & 0 \\ \tilde{C}_{klir}\eta_r & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{\beta k}\tilde{C}_{2,rk}\eta_r & 0 & 0 & a_2\delta_{r\beta}\eta_r \\ 0 & 0 & a_2\delta_{\alpha r}\eta_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{A}'_{11} & \bar{A}'_{21} & \bar{B}' & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}'_{12} & \bar{A}'_{22} & 0 & 0 \\ \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C} & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $A_{11}, \bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ ,  $A_{12}, \bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $A_{21}, \bar{A}_{21} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $A_{22}, \bar{A}_{22} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $B, \bar{B} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  und  $C, \bar{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ . Dabei verschwinden  $A_{21}, \bar{A}_{21}, A_{12}$  und  $\bar{A}_{12}$  in  $V = 0$ . Für  $V = 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{rang } A_{22}(0) &= \text{rang } (-Kv) = 1, \\ \text{rang } C(0) &= \text{rang } (A_2(0)v) = 1, \\ \text{rang } B'(0) &= \text{rang } (\tilde{C}_2(0)v) = 1, \\ \text{rang } \bar{A}_{22}(0) &= \text{rang } (-K\eta) = 1, \\ \text{rang } \bar{C}(0) &= \text{rang } (A_2(0)\eta) = 1, \\ \text{rang } \bar{B}'(0) &= \text{rang } (\bar{C}_2(0)\eta) = 1. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung sei  $\eta = v^\perp := (v_2, -v_1)'$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A_{11}(0), \bar{A}_{11}(0)) &= \left(\frac{E}{1-\mu^2}\right)^4 \det \begin{pmatrix} v_1 & \frac{1+\mu}{4}v_2 & v_2 & -\frac{1+\mu}{4}v_1 \\ \frac{1-\mu}{2}v_2 & \frac{1+\mu}{4}v_1 & -\frac{1-\mu}{2}v_1 & \frac{1+\mu}{4}v_2 \\ \frac{1+\mu}{4}v_2 & \frac{1-\mu}{2}v_1 & -\frac{1+\mu}{4}v_1 & \frac{1-\mu}{2}v_2 \\ \frac{1+\mu}{4}v_1 & v_2 & \frac{1+\mu}{4}v_2 & -v_1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E}{1-\mu^2}\right)^4 \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \frac{1+\mu}{4}v_2 & -\frac{1+\mu}{4}v_1 \\ \frac{1-\mu}{2}v_2 & -\frac{1-\mu}{2}v_1 & \frac{1+\mu}{4}v_1 & \frac{1+\mu}{4}v_2 \\ \frac{1+\mu}{4}v_2 & -\frac{1+\mu}{4}v_1 & \frac{1-\mu}{2}v_1 & \frac{1-\mu}{2}v_2 \\ \frac{1+\mu}{4}v_1 & \frac{1+\mu}{4}v_2 & v_2 & -v_1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E}{1-\mu^2}\right)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1+\mu}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & \frac{1+\mu}{4} \\ -\frac{1+\mu}{4} & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\mu}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v & v^\perp & -v^\perp & v \\ v^\perp & v & v & -v^\perp \end{pmatrix} \\ &= 4 \left(\frac{E}{1-\mu^2}\right)^4 \left(\frac{1-\mu}{2} + \frac{(1+\mu)^2}{16}\right) > 0 \text{ für } \mu \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\} \supset (0, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

sowie

$$\det(A_{22}(0), \bar{A}_{22}(0)) = \det(K\nu, K\nu^\perp) = K^2 > 0 \text{ für } \mu \in \mathbb{R}.$$

Somit ist  $\text{rang}(A_{11}, \bar{A}_{11})(V) = 4$  für alle  $\nu \in \Gamma$  und  $V \rightarrow 0$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ A_{21} & A_{22} & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} (V) &= \det(A_{11}, \bar{A}_{11})(V) \cdot \det(A_{22}, \bar{A}_{22})(V) \\ &= 4 \left( \frac{E}{1-\mu^2} \right)^4 K^2 \left( \frac{1-\mu}{2} + \frac{(1+\mu)^2}{16} \right) > 0 \text{ für } \mu \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\} \supset (0, \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

weshalb

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ A_{21} & A_{22} & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} (V) = 6 \text{ und } \text{rang} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} (V) = 3$$

für  $V \rightarrow 0$  gilt.

Wir wollen nun den Rang von  $\hat{A}^\nu(V)$  für  $V \rightarrow 0$  untersuchen. Es gilt

$$\hat{A}^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A'_{11} & A'_{21} & B' & 0 \\ 0 & 0 & A'_{12} & A'_{22} & 0 & 0 \\ A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & C' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & A'_{11} & A'_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A'_{12} & A'_{22} & 0 & 0 \\ I_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Also ist  $\text{rang} \hat{A}^\nu(V) = 8 < 12$  konstant in einer Umgebung von  $V = 0$ . Wir verkleinern  $N_0$  gegebenenfalls so, dass  $\text{rang} \hat{A}^\nu(V) = 8 < 12$  in ganz  $N_0$  gilt. Insbesondere gilt dann  $\text{rang} \hat{A}^\nu(V) = 8 < 12$  in  $\tilde{N} \subset N_0$ .

iv) Da  $\Gamma$  von der Klasse  $C^\infty$  ist, folgt  $\nu \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^2)$  und damit  $M \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^8)$ . Außerdem gilt

$$\text{rang} M(x) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_1(x) & \nu_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_1(x) & \nu_2(x) \end{pmatrix} = 7.$$

v) Wir zeigen, dass  $\ker M$  maximal nichtnegativ ist. Unter Beachtung von

$$\ker M(x) = \{(\tilde{\zeta}_\alpha^1, \tilde{\zeta}_\alpha^2, \tilde{\zeta}_{\alpha j}^3, \tilde{\zeta}_i^4, \tilde{\zeta}_{ij}^5, \tilde{\zeta}_\alpha^6, \tilde{\zeta}_\alpha^7, \tilde{\zeta}_\alpha^8, \tilde{\zeta}_\alpha^9)' \in \mathbb{R}^{23} \mid \tilde{\zeta}_\alpha^2 = \tilde{\zeta}_i^4 = \tilde{\zeta}_\alpha^7 \nu_\alpha(x) = \tilde{\zeta}_\alpha^9 \nu_\alpha(x) = 0\}$$

ergibt sich für alle  $x \in \Gamma$ ,  $V \in \tilde{N}$  und  $\xi \in \ker M(x)$

$$\begin{aligned} \langle A^\nu \xi, \xi \rangle &= -C_{\alpha j \beta l} \nu_l \tilde{\zeta}_{\alpha j}^3 \tilde{\zeta}_\beta^2 - C_{\beta l \alpha j} \nu_l \tilde{\zeta}_\alpha^2 \tilde{\zeta}_{\beta j}^3 + \bar{C}_{1, \alpha l} \nu_l \tilde{\zeta}_\alpha^6 \tilde{\zeta}_\alpha^2 + \bar{C}_{1, l \beta} \nu_l \tilde{\zeta}_\beta^2 \tilde{\zeta}_\alpha^6 \\ &\quad - C_{ij \beta l} \nu_l \tilde{\zeta}_{\alpha j}^3 \tilde{\zeta}_\beta^4 - C_{kl ij} \nu_l \tilde{\zeta}_\alpha^4 \tilde{\zeta}_{\beta j}^5 + \delta_{\alpha i} \bar{C}_{1, \alpha l} \nu_l \tilde{\zeta}_\alpha^8 \tilde{\zeta}_\alpha^4 + \bar{C}_{1, l \beta} \nu_l \tilde{\zeta}_\beta^4 \tilde{\zeta}_\alpha^8 \\ &\quad + c_1 \delta_{\alpha j} \nu_j V_j^7 V_\alpha^6 + c_1 \delta_{\alpha j} \nu_j V_j^6 V_\alpha^7 + c_2 \delta_{\alpha j} \nu_j V_j^9 V_\alpha^8 + c_2 \delta_{\alpha j} \nu_j V_j^8 V_\alpha^9 \equiv 0. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\ker M(x)$  ein maximaler Untervektorraum bzgl. der Mengeninklusion ist, auf welchem  $A^\nu$  positiv semidefinit ist. Da sich  $M$  analog zu  $A^\nu$  gemäß  $M(x) =$

$\begin{pmatrix} \hat{M}(x) & 0 \\ 0 & \check{M}(x) \end{pmatrix}$  zerlegen lässt, genügt es entsprechende Aussagen für  $\hat{M}(x)$  und  $\check{M}(x)$  zu beweisen. Wir beschränken uns hier auf  $\hat{M}(x)$ , da sich  $\check{M}(x)$  völlig analog behandeln lässt. Es ist

$$\hat{M}(x) = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 12}.$$

Nach dem SYLVESTERschen Trägheitssatz genügt es zu beweisen, dass die Anzahl der nichtnegativen Eigenwerte  $A^v(V)$ ,  $V \in \tilde{N}$ , gleich der Dimension von  $\ker \hat{M}(x)$  ist, d. h.,  $8 = 13 - 5 = \ker \hat{M}(x) = r_+(\hat{M}(x)) + r_0(\hat{M}(x))$ , wobei  $\text{In}(\hat{M}(x)) = (r_+, r_-, r_0)(\hat{M}(x))$  den Trägheitsindex bezeichnet.  $r_+$ ,  $r_-$ ,  $r_0$  stehen für die Anzahl der positiven, negativen und Nulleigenwerte von  $\hat{M}(x)$ .

Ist  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren, so wird das Resultat der Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens nach GRAM & SCHMID auf die Spaltenvektoren von  $M$  durch

$$\mathcal{G}(M) = M(\sqrt{M'M})^{-1}.$$

gegeben. Wir setzen

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ A_{21} & A_{22} & \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{11}^\perp & A_{12}^\perp \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{21}^\perp & A_{22}^\perp \end{pmatrix}$$

für  $V \in \tilde{V}$  und bekommen

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} A_{11}^\perp & A_{12}^\perp \\ A_{21}^\perp & A_{22}^\perp \end{pmatrix} = 0_{3 \times 3}.$$

Nun wollen wir die zum Eigenwert  $\lambda = 0$  gehörigen Eigenvektoren bestimmen. Hierzu lösen wir das Problem  $\hat{A}^v(V)U = 0$  nach  $U$  für  $V \in \tilde{N}$  auf. Unter Beachtung der Stufenform (3.35) erhalten wir

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{11}^\perp c_1 + A_{12}^\perp c_2 \\ A_{21}^\perp c_1 + A_{22}^\perp c_2 \\ 0 \\ C^\perp c_3 \end{pmatrix},$$

wobei  $c_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  beliebig sind. Durch geeignete Wahl von  $c_1, c_2, c_3$  bekommen wir eine Orthonormalbasis des Kerns von  $\hat{A}$ , welche wir zu einer  $\mathbb{R}^{12 \times 4}$ -Matrix zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{11}^\perp & A_{12}^\perp & 0 \\ A_{21}^\perp & A_{22}^\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^\perp \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir diese Vektoren zu einer Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^{12}$  erweitern. Dies liefert eine orthogonale Transformationsmatrix

$$W(V) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11}^\perp & A_{12}^\perp & 0 & 0 \\ A_{21}^* & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^\perp & A_{22}^\perp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^* & 0 & 0 & 0 & 0 & C^\perp \end{pmatrix},$$

welche die Matrix  $A^v$  auf die gewünschte Blockform bringt. So findet man unter Beachtung von

$$W^{-1} = W' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (A_{11}^*)' & (A_{21}^*)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (A_{12}^*)' & (A_{22}^*)' & 0 & 0 \\ I_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C^*)' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (A_{11}^\perp)' & (A_{21}^\perp)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (A_{12}^\perp)' & (A_{22}^\perp)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C^\perp)' \end{pmatrix}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} W^{-1} \hat{A}^v W &= W^{-1} \begin{pmatrix} M_{12} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & B' & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & C' C^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc|cc|ccc} 0 & 0 & M'_{11} & M'_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M'_{12} & M'_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & B' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C^*)' C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & C' C^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =: \begin{pmatrix} A_I & 0 \\ 0 & A_{II} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit einer positiv definiten Diagonalmatrix  $M = (M_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $M_{ij} := A'_{i1} A^*_{1j} + A'_{i2} A^*_{2j}$ . Hierbei ist  $A_I \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  symmetrisch, gleichmäßig positiv definit und  $A_{II} = 0_{\mathbb{R}^{4 \times 4}}$ . Die Matrix  $A_I$  besteht nun aus vier Blöcken

$$A_I = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|ccc} 0 & 0 & M'_{11} & M'_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M'_{12} & M'_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & B' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C^*)' C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & C' C^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =: \begin{pmatrix} A_{I,11} & A_{I,12} \\ A_{I,21} & A_{I,22} \end{pmatrix},$$

wobei  $A_{I,11} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $A_{I,22} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Da  $A_{I,11}$  invertierbar ist, gilt die HAYNSWORTHsche Trägheitsformel (vgl. [29]):

$$\text{In}(A_I) = \text{In}(A_{I,11}) + \text{In}(A_I/A_{I,11}),$$

wobei  $A_I/A_{I,11} := A_{I,22} - A_{I,21}A_{I,11}^{-1}A_{I,12}$  das SCHUR-Komplement von  $A_{I,11}$  bzgl.  $A_I$  bezeichnet. Man findet sofort

$$\begin{aligned} A_{I,21}A_{I,11}^{-1}A_{I,12} &= A_{I,21} \begin{pmatrix} (M^{-1})_{11}^{-1} & (M^{-1})_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ (M^{-1})_{21}^{-1} & (M^{-1})_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M^{-1})_{11}^{-1} & (M^{-1})_{12}^{-1} \\ 0 & 0 & (M^{-1})_{21}^{-1} & (M^{-1})_{22}^{-1} \end{pmatrix} A_{I,12} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(M^{-1})_{11}B' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weil  $M$  positiv definit ist und  $(C^*)'C$ ,  $B(M^{-1})_{11}B'$  positiv sind, bekommen wir aufgrund der Blockstruktur von  $A_{I,11}$

$$\begin{aligned} \det(A_{I,11} - \lambda I_6) &= \det(\lambda^2 I_3 - M^2) = \prod_{\tilde{\lambda} \in \sigma(M^2)} (\lambda \pm \sqrt{\tilde{\lambda}}), \quad \sigma(M^2) = \{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3\} \subset (0, \infty), \\ \det(A_I/A_{I,11} - \lambda I_2) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & (C^*)'C \\ C'C^* & -\lambda - B(M^{-1})_{11}B' \end{pmatrix} \equiv \det \begin{pmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda - b \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2})(\lambda - \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\text{In}(A_I) = \text{In}(A_{I,11}) + \text{In}(A_I/A_{I,11}) = (3, 3, 0) + (1, 1, 0) = (4, 4, 0).$$

Damit ist

$$\text{In}(\hat{A}^v) = \text{In}(A_I) + \text{In}(A_{II}) = (4, 4, 0) + (0, 0, 4) = (4, 4, 4).$$

Weil  $\dim \ker \hat{M}(x) = 8 = r_+(\hat{A}^v) + r_0(\hat{A}^v)$ , ist  $\ker \hat{M}(x)$  maximal nichtnegativ.

vi) Nach Voraussetzung 3.1.7 gilt

$$\begin{aligned} F &= (F_\alpha^1, F_\alpha^2, F_{\alpha_j}^3, F_i^4, F_{ij}^5, F^6, F_\alpha^7, F^8, F_\alpha^9)' \\ &\equiv (0, M_\alpha, 0, f_i, 0, h_1, 0, h_2, 0)' \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, T], (H^{s-k}(\Omega))^{23}), \\ f &= (v_\alpha^0, v_\alpha^1, v_{\alpha, x_j}^0, \tilde{U}_i^1, \tilde{U}_{i, x_j}^0, \theta^0, q_\alpha^0, \tilde{\theta}^0, \tilde{q}_\alpha^0)' \in (H^s(\Omega))^{23}. \end{aligned}$$

Die Kompatibilitätsbedingungen sind ebenfalls erfüllt.

Satz A.2.5 liefert also die Existenz einer eindeutigen Lösung  $V \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, T], (H^{s-k}(\Omega))^{23})$ ,  $T' \in (0, T]$  zum Problem (3.34), für welche  $M(x)\partial_t^k V(t, x) = 0$  für  $k = 0, \dots, s-1$  und  $x \in \Gamma$  gilt. Mit (3.33) folgt schließlich, dass die durch

$$(v, u, w, \theta, q, \tilde{\theta}, \tilde{q})'(t, x) = \left( V_\alpha^1(t, x), \tilde{U}_i^0 + \int_0^t V_i^4(\tau, x) d\tau, V^6(t, x), V_\alpha^7(t, x), V^8(t, x), V_\alpha^9(t, x) \right)'$$

definierten Funktionen die eindeutige Lösung von (3.1)–(3.10) mit der behaupteten Regularität darstellen.  $\square$

Agrund des Satzes A.2.3 gilt das nachstehende Korollar.

**Korollar 3.1.9.** Sei  $s = 2s', s' \geq 4$ . Die in Satz 3.1.8 gegebene Lösung erfüllt

$$\begin{aligned} u, v &\in \bigcap_{k=0}^{s'} \mathcal{C}^k([0, T], (H^{s'+1-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2), & \partial_t^{s'+1} u, \partial_t^{s'+1} v &\in \mathcal{C}^0([0, T], (L^2(\Omega))^2), \\ w &\in \bigcap_{k=0}^{s'} \mathcal{C}^k([0, T], H^{s'+1-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), & \partial_t^{s'+1} w &\in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega)), \\ \theta, \tilde{\theta} &\in \bigcap_{k=0}^{s'-1} \mathcal{C}^k([0, T], H^{s'-k}(\Omega)), & \partial_t^{s'} \theta, \partial_t^{s'} \tilde{\theta} &\in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega)), \\ q, \tilde{q} &\in \bigcap_{m=0}^{s'-1} \mathcal{C}^k([0, T], (H^{s'-k}(\Omega) \cap H_{\text{div}}^1(\Omega))^2), & \partial_t^{s'} q, \partial_t^{s'} \tilde{q} &\in \mathcal{C}^0([0, T], (L^2(\Omega))^2). \end{aligned}$$

## 3.2 Globale Existenz und Exponentielle Stabilität

Nun wollen wir die im Abschnitt 3.1 gewonnene lokale Lösung global fortsetzen. Im Allgemeinen besteht leider keine Hoffnung, das Problem (3.1)–(3.10) zuzüglich Anfangs- und Randbedingungen global lösen zu können. So hat man in [55] bewiesen, dass bereits das semilineare thermoelastische Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u + \beta \nabla \theta &= |u|^{p-2} u \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \theta_t + \gamma \operatorname{div} q + \delta \operatorname{div} u_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \tau q_t + q + \kappa \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ |u| = \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad u_t(0, \cdot) = u_1, \quad \theta(0, \cdot) = \theta_0, \quad q(0, \cdot) = q_0 &\text{ in } \Omega \end{aligned}$$

für  $p > 2$  im Allgemeinen keine globale Lösung zulässt: die zu Anfangswerten mit negativer Energie gehörigen Lösungen explodieren in endlicher Zeit, auch wenn die Anfangsdaten beliebig glatt und klein sind. Dieses Resultat wurde in [56] sogar auf eine Klasse von Anfangsdaten mit positiver Energie erweitert. Daher ist es naheliegend, dass wir auch bei unserem Problem nicht von globaler Existenz ausgehen können, ohne dass wir das System stabilisieren. Bevor wir die globale Lösbarkeit beweisen, stellen wir einige relevante Resultate aus der Literatur vor.

In [35] haben Jiang und Racke die nichtlinearen hyperbolisch-parabolischen Thermoelastizitätsgleichungen studiert:

$$\begin{aligned} U_{i,tt} &= C_{ijkl}(\nabla U, \theta) U_{k,x_j x_l} + \bar{C}_{ij}(\nabla U, \theta) \theta_{x_j} \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ a(\nabla U, \theta) \theta_t &= -\frac{1}{\chi(\theta)} \operatorname{div} q(\nabla U, \theta, \nabla \theta) + \bar{C}_{ij}(\nabla U, \theta) U_{i,t x_j} \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned}$$

mit den üblichen Anfangsbedingungen und den Randbedingungen

$$U_i = \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \partial\Omega.$$

Unter gewissen technischen Annahmen wurde bewiesen, dass hinreichend kleine Anfangsdaten stets zu globalen Lösungen  $(U, \theta)'$  führen, sofern  $U$  rotationsfrei ist. Letztere Annahme ist z. B. für radialsymmetrische Gebiete bei radialsymmetrischen Daten erfüllt. Der Beweis beruht auf Fortsetzungsargumenten sowie der exponentiellen Abklingrate für das linearisierte System.

Ein analoges Resultat wurde von Irmscher in [32], [33] für nichtlineare Thermoelastizitätsgleichungen mit Wärmeleitung nach CATTANEO erzielt. Es wurde bewiesen, dass das nichtlineare Problem

$$\begin{aligned} u_{i,tt} - A_{ij}(\nabla u, \theta, q)u_{j,x_k x_k} + B_{ij}(\nabla u, \theta, q)\theta_{x_j} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ c(\nabla u, \theta, q)\theta_t + g(\nabla u, \theta, q)\operatorname{div} q + B_{ij}(\nabla u, \theta, q)u_{i,tx_j} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ T_{ij}(\nabla u, \theta)q_{j,t} + q_i + K_{ij}(\nabla u, \theta)\theta_{x_j} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$u_i = \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \partial\Omega$$

im radialsymmetrischen Fall für kleine Anfangsdaten global lösbar und exponentiell stabil ist. Es sei allerdings angemerkt, dass der Autor keinen Beweis für lokale Lösbarkeit erbracht hat (worauf der Autor in der Arbeit auch hingewiesen hat), welcher keineswegs trivial ist, da die letzten zwei Gleichungen im Vergleich zur nichtlinearen parabolischen Gleichung zweiter Ordnung „weniger Struktur“ aufweisen. So kann man ohne Weiteres nicht von der Existenz von  $\nabla q$  ausgehen.

Zu erwähnen ist auch die Arbeit [79], in welcher globale Existenz für das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(u_x, \theta, q)u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \theta_t + g(u_x, \theta, q)q_x + d(u_x, \theta, q)u_{tx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \tau(u_x, \theta)q_t + q + k(u_x, \theta)\theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L) \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$u = 0, \quad \theta = \bar{\theta} \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}$$

für kleine Anfangsdaten nachgewiesen wurde. Es wurde allerdings keine Aussage über die Abklingrate der Lösungen gemacht, außer dass  $(u, \theta)'$  gegen  $(0, \bar{\theta})'$  für  $t \rightarrow \infty$  konvergiert.

Bekannt sind auch einige Resultate für ein semilineares REISSNER-MINDLIN-System ohne den Anteil für thermoelastische Dehnungen. In [17] wurde ein vollgedämpftes semilineares Problem

$$\begin{aligned} v_{tt} + \beta_0 v_t - \alpha \Delta v - \zeta \nabla \operatorname{div} v + \mu_0 v + \gamma \nabla u + \beta \nabla \theta &= -(\nabla \Phi)(v) \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ u_{tt} + \beta_1 u_t - \mu_1 - \gamma_1 \operatorname{div} v &= F(u) \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \theta_t - \eta \Delta \theta + \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned}$$

für die DIRICHLET-Randbedingungen an  $v$ ,  $u$  und  $\theta$  untersucht. Unter Einschränkungen an  $\Phi$  und  $F$  wurde insbesondere die Existenz globaler schwacher Lösungen bewiesen.

Die eindimensionale Version der REISSNER-MINDLIN-Platte – den TIMOSHENKO-Balken – hat man in [57] studiert. So lässt das System

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu \varphi_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta \theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta \psi_{tx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ \tau_0 q_t + q + \kappa \theta_x &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L) \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\varphi_x = \psi = \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}$$

für kleine Anfangsdaten globale Lösungen zu. Überdies klingen die Lösungen exponentiell ab.

Im Folgenden wollen wir die Gleichungen (3.1)–(3.10) global lösen. Mit der Notation  $U = (U_1, U_2, U_3)' := (v, u, w)'$ ,  $\Theta := (\theta, \tilde{\theta})'$ ,  $Q := (q, \tilde{q})'$  schreiben sich die Gleichungen wie folgt um:

$$\rho_2 U_{1,tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} U_1 + K(U_1 + \nabla U_3) + \bar{C}_1(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \Theta_1 = 0, \quad (3.36)$$

$$\tilde{\rho}_1 U_{2,tt} - \operatorname{div} N(\nabla U_3, \nabla U_2) + \bar{C}_2(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \Theta_2 = 0, \quad (3.37)$$

$$\rho_1 U_{3,tt} - K \operatorname{div}(\nabla U_3 + U_1) - \operatorname{div}(N(\nabla U_3, \nabla U_2) \nabla U_3) + \tilde{d}(\nabla U, \Theta, Q) U_{3,t} = 0, \quad (3.38)$$

$$a_1(\nabla U, \Theta, Q) \Theta_{1,t} + b_1(\nabla U, \Theta, Q) \operatorname{div} Q_1 + \tilde{\beta}(\nabla U, \Theta, Q) \Theta_1 + \operatorname{spur}(\bar{C}_1(\nabla U, \Theta, Q) \nabla U_{1,t}) = 0, \quad (3.39)$$

$$a_2(\nabla U, \Theta, Q) \Theta_{2,t} + b_2(\nabla U, \Theta, Q) \operatorname{div} Q_2 + \operatorname{spur}(\bar{C}_2(\nabla U, \Theta, Q) \nabla U_{2,t}) = 0, \quad (3.40)$$

$$A_1(\nabla U, \Theta, Q) Q_{1,t} + B_1(\nabla U, \Theta, Q) Q_1 + b_1(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \Theta_1 = 0, \quad (3.41)$$

$$A_2(\nabla U, \Theta, Q) Q_{2,t} + B_2(\nabla U, \Theta, Q) Q_2 + b_2(\nabla U, \Theta, Q) \nabla \Theta_2 = 0 \quad (3.42)$$

für  $(t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$  mit den Rand-

$$U = 0, \quad Q_1 \cdot \nu = Q_2 \cdot \nu = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Gamma \quad (3.43)$$

und Anfangsbedingungen

$$U(0, \cdot) = U^0, \quad U_t(0, \cdot) = U^1, \quad \Theta(0, \cdot) = \Theta^0, \quad Q(0, \cdot) = Q^0 \text{ in } \Omega. \quad (3.44)$$

Selbst bei den hyperbolisch-parabolischen (s. [34]) sowie den hyperbolischen Thermoelastizitätsgleichungen (s. [32] und [33]) war die Rotationsfreiheit des Verschiebungsfeldes bzw. des Verschiebungsfeldes und des Wärmeflusses unabdingbar, um das linearisierte Problem exponentiell zu stabilisieren und damit das nichtlineare Problem global lösen zu können. Ein alternativer Zugang besteht darin, das System vollständig zu dämpfen, was z. B. in [71] für die hyperbolischen Thermoelastizitätsgleichungen gemacht wurde.

In dieser Arbeit kombinieren wir die beiden Vorgehensweisen, indem wir nur die Biegungs-komponente  $U_3 = w$  durch einen Dämpfungsterm stabilisieren und für  $U_1, U_2, Q_1, Q_2$  die Rotationsfreiheit voraussetzen. Die Dämpfung für  $w$  ist nötig, um das nichtlineare System zur exponentiellen Stabilität zu führen, da  $w$  nicht an die Wärmeleitungsgleichungen angeschlossen ist (vgl. Satz 2.1.7 im Linearen).

Um die Resultate aus dem Linearen anwenden zu können, wollen wir das Problem (3.36)–(3.44) als Störung der isotropen Situation betrachten.

**Voraussetzungen 3.2.1.** Wir setzen voraus, dass die Nichtlinearitäten anfänglich isotrop sind.

1. Die Funktionen  $N$  und  $a_i, b_i, A_i, B_i, \bar{C}_i, i = 1, 2$ , seien glatt im Sinne der Voraussetzungen 3.1.2 bzw. 3.1.5.
2. Es gelte

$$\begin{aligned} \bar{C}_1(0, 0, 0) &= \gamma I_2, & \bar{C}_2(0, 0, 0) &= \tilde{\gamma} I_2, & \tilde{d}(0, 0, 0) &= d, & \tilde{\beta}(0, 0, 0) &= \beta, \\ a_1(0, 0, 0) &= \rho_3, & a_2(0, 0, 0) &= \tilde{\rho}_3, & b_1(0, 0, 0) &= \kappa, & b_2(0, 0, 0) &= \tilde{\kappa}, \\ A_1(0, 0, 0) &= \tau_0 I_2, & A_2(0, 0, 0) &= \tilde{\tau}_0 I_2, & B_1(0, 0, 0) &= \delta I_2, & B_2(0, 0, 0) &= \tilde{\delta} I_2. \end{aligned}$$

Alle Konstanten seien dabei positiv.

Um die Stabilitätsresultate aus dem Linearen für den globalen Existenzsatz anwenden zu können, benötigen wir, dass  $\Theta_1, \Theta_2$  in  $L^2(\Omega)/\{1\}$  für alle  $t \in [0, T]$  liegen, d. h.  $\int_{\Omega} \Theta_1 dx = \int_{\Omega} \Theta_2 dx = 0$ . Daher modifizieren wir die Gleichungen (3.15)–(3.20), indem wir einige Koeffizienten als linear voraussetzen:

$$\rho_2 U_{1,tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} U_1 + K(U_1 + \nabla U_3) + \gamma \nabla \Theta_1 = 0, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\rho}_1 U_{2,tt} - \operatorname{div} N(\nabla U_3, \nabla U_2) + \tilde{\gamma} \nabla \Theta_2 = 0, \quad (3.46)$$

$$\rho_1 U_{3,tt} - K \operatorname{div}(\nabla U_3 + U_1) - \operatorname{div}(\nabla U_3 N(\nabla U_3, \nabla U_2)) + \tilde{d}(\nabla U, \Theta, Q) U_{3,t} = 0, \quad (3.47)$$

$$\rho_3 \Theta_{1,t} + \kappa \operatorname{div} Q_1 + \beta \Theta_1 + \gamma \operatorname{div} U_{1,t} = 0, \quad (3.48)$$

$$A_1(\nabla U, \Theta, Q) Q_{1,t} + B_1(\nabla U, \Theta, Q) Q_1 + \kappa \nabla \Theta_1 = 0, \quad (3.49)$$

$$\tilde{\rho}_3 \Theta_{2,t} + \tilde{\kappa} \operatorname{div} Q_2 + \tilde{\gamma} \operatorname{div} U_{2,t} = 0, \quad (3.50)$$

$$A_2(\nabla U, \Theta, Q) Q_{2,t} + B_2(\nabla U, \Theta, Q) Q_2 + \kappa \nabla \Theta_2 = 0. \quad (3.51)$$

Die Rand- und die Anfangsbedingungen bleiben unverändert. Der Unterschied zu den Gleichungen (3.15)–(3.20) besteht darin, dass

$$a_1 \equiv \rho_3, \quad a_2 \equiv \tilde{\rho}_3, \quad b_1 \equiv \kappa, \quad b_2 \equiv \tilde{\kappa}, \quad \bar{C}_1 \equiv \gamma I, \quad \bar{C}_2 \equiv \tilde{\gamma} \quad (3.52)$$

konstant sind und dass die Gleichungen (3.48), (3.49) in der Divergenzform geschrieben sind.

**Satz 3.2.2.** Die Anfangsdaten  $U^0, U^1, \Theta^0, Q^0$  bzw. die nichtlinearen Koeffizienten erfüllen die Voraussetzungen von Satz 3.1.8 und Korollar 3.1.9 für  $s' = 4$ . Außerdem gelte die Voraussetzung 3.2.1 und die Bedingung (3.52). Für die Anfangsdaten  $\Theta^0, \Theta^1$  gelte  $\Theta_1^0, \Theta_2^0 \in L^2(\Omega)/\{1\}$ , d. h.

$$\int_{\Omega} \Theta_1^0 dx = \int_{\Omega} \Theta_2^0 dx = 0. \quad (3.53)$$

Die im Satz 3.1.8 gegebene lokale Lösung  $(U, \Theta, Q)'$  zu (3.45)–(3.51), (3.43), (3.44) mit

$$\begin{aligned} U &\in \bigcap_{k=0}^2 \mathcal{C}([0, T], (H_0^{3-k}(\Omega))^5), \quad \partial_t^3 U \in (L^2(\Omega))^5, \\ \Theta &\in \bigcap_{k=0}^1 \mathcal{C}([0, T], (H^{2-k}(\Omega)/\{1\})^2), \quad \partial_t^2 \Theta \in (L^2(\Omega)/\{1\})^2, \\ Q &\in \bigcap_{k=0}^1 \mathcal{C}([0, T], (H_{\operatorname{div}}^{2-k}(\Omega))^2), \quad \partial_t^2 Q \in (L^2(\Omega))^4 \end{aligned}$$

auf einem maximalen Existenzintervall  $[0, T)$ ,  $T > 0$ , erfülle die Rotationsfreiheitsbedingung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} U_1 &= \operatorname{rot} U_2 = 0 \text{ in } [0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{rot} Q_1 &= \operatorname{rot} Q_2 = 0 \text{ in } [0, T) \times \Omega. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Dann gibt es eine Konstante  $\varepsilon > 0$  derart, dass die Lösung global existiert, falls

$$\sum_{k=0}^3 \|U^k\|_{3-k,2}^2 + \sum_{k=0}^2 \|\Theta^k\|_{2-k,2}^2 + \sum_{k=0}^2 \|Q^k\|_{2-k,2}^2 < \varepsilon.$$

Überdies klingt die Lösung exponentiell ab, d. h. es existieren Konstante  $C > 0$  und  $\alpha > 0$  so, dass

$$\Lambda(t) := \sum_{k=0}^3 \|\partial_t^k U(t, \cdot)\|_{3-k,2}^2 + \sum_{k=0}^2 \|\partial_t^k \Theta(t, \cdot)\|_{2-k,2}^2 + \sum_{k=0}^2 \|\partial_t^k Q(t, \cdot)\|_{2-k,2}^2 \leq C e^{-\alpha t} \Lambda(0)$$

gilt. Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_{s,p}$  die übliche Norm des SOBOLEVschen Raumes  $H^{s,p}(\Omega)$  bzw. die dadurch induzierte Norm auf dem jeweiligen Produktraum.

**Beweis:** Wir orientieren uns an die Vorgehensweise von Jiang et al. in [34] beim Beweis der globalen Existenz für nichtlineare hyperbolisch-parabolische Thermoelastizitätsgleichungen.

Wir definieren

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv 0, \\ F_{2,i} &= (C_{ijkl}(\nabla U, \Theta, Q) - C_{ijkl}(0))U_{k,x_j x_l} \text{ für } i = 1, 2, \\ F_3 &= (C_{3jkl}(\nabla U, \Theta, Q) - C_{3jkl}(0))U_{k,x_j x_l} - (\tilde{d}(\nabla U_3 N(\nabla U_3, \nabla U_2) - \tilde{d}(0, 0, 0)))U_{3,t}, \\ F_4 &\equiv 0, \\ F_5 &= -(A_1(\nabla U, \Theta, Q) - A_1(0, 0, 0))Q_{1,t} - (B_1(\nabla U, \Theta, Q) - B_1(0, 0, 0))Q_1, \\ F_6 &\equiv 0, \\ F_7 &= -(A_2(\nabla U, \Theta, Q) - A_2(0, 0, 0))Q_{2,t} - (B_2(\nabla U, \Theta, Q) - B_2(0, 0, 0))Q_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

und schreiben die Gleichungen (3.45)–(3.51) wie folgt um

$$\rho_2 U_{1,tt} - \mathcal{D}'SDU_1 + K(U_1 + \nabla U_3) + \gamma \nabla \Theta_1 = F_1, \quad (3.56)$$

$$\rho_2 U_{2,tt} - \mathcal{D}'\tilde{S}DU_1 + \tilde{\gamma} \nabla \Theta_2 = F_2, \quad (3.57)$$

$$\rho_1 U_{3,tt} - K\Delta U_3 - K \operatorname{div} U_1 + dU_{3,t} = F_3, \quad (3.58)$$

$$\rho_3 \Theta_{1,t} + \kappa \operatorname{div} Q_1 + \beta \Theta_1 + \gamma \operatorname{div} U_{1,t} = F_4, \quad (3.59)$$

$$\tau_0 Q_{1,t} + \delta Q_1 + \kappa \nabla \Theta_1 = F_5, \quad (3.60)$$

$$\tilde{\rho}_3 \Theta_{2,t} + \tilde{\kappa} \operatorname{div} Q_2 + \tilde{\gamma} \operatorname{div} U_{2,t} = F_6, \quad (3.61)$$

$$\tilde{\tau}_0 Q_{2,t} + \tilde{\delta} Q_2 + \tilde{\kappa} \nabla \Theta_2 = F_7. \quad (3.62)$$

Unter Beachtung der Randbedingungen (3.21) sowie der Gleichungen (3.59), (3.61) bekommen wir mit der Voraussetzung (3.53)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Theta_1(t) dx &= 0 \text{ in } [0, T), \quad \int_{\Omega} \Theta_1(0) dx = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Theta_2(t) dx + \beta \int_{\Omega} \Theta_2(t) dx &= 0 \text{ in } [0, T), \quad \int_{\Omega} \Theta_2(0) dx = 0, \end{aligned}$$

woraus sich  $\Theta_1, \Theta_2 \in L^2(\Omega)/\{1\}$  für alle  $t \in [0, T)$  ergibt.

Mit der Theorie von Agmon, Douglis und Nirenberg aus [3] (vgl. auch [43, Section 2.3]) folgt die elliptische Regularität von  $\mathcal{D}'SD$ ,  $\mathcal{D}'\tilde{S}D$ ,  $K\Delta$ . Es existiert also ein  $C_{\mathcal{E}} > 0$  so, dass

$$\|G\|_{(H^{k+2}(\Omega))^5}^2 \leq C_{\mathcal{E}} \left( \|\mathcal{D}'SDG_1\|_{(H^k(\Omega))^2}^2 + \|\mathcal{D}'\tilde{S}DG_2\|_{(H^k(\Omega))^2}^2 + \|K\Delta G_3\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \quad (3.63)$$

für  $k = 0, 1$  und alle  $G \in (H_0^1(\Omega))^5$  mit  $\mathcal{D}'SDG_1, \mathcal{D}'\tilde{S}DG_2 \in (L^2(\Omega))^2$ ,  $K\Delta G_3 \in L^2(\Omega)$  gilt. Für ein noch später zu bestimmendes  $\alpha > 0$  definieren wir

$$M(t) := e^{\alpha t} \Lambda(t).$$

Ferner setzen wir

$$\mathfrak{C} := \max\{1, C_{\mathcal{E}}\} \left( \frac{\max\{1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tilde{\rho}_3, \tau_0, \tilde{\tau}_0, K, \kappa, \tilde{\kappa}, \gamma, \tilde{\gamma}, d, \beta\}}{\min\{1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tilde{\rho}_3, \tau_0, \tilde{\tau}_0, K, \kappa, \tilde{\kappa}, \gamma, \tilde{\gamma}, d, \beta\}} \right)^2 \text{ und } \mathfrak{M} := 2328 \mathfrak{C}^3$$

und finden aufgrund der Stetigkeit von  $M$  ein  $T' \in [0, T)$  so, dass

$$M(t) \leq \mathfrak{M}\varepsilon^2 \text{ für alle } t \in [0, T'). \quad (3.64)$$

Sei nun

$$T^* := \sup\{T' > 0 \mid M(t) \leq \mathfrak{M}\varepsilon^2 \text{ für alle } t \in [0, T')\}.$$

Ist  $T^* = T$ , so folgt, dass die Lösung für alle  $t \in [0, T)$  existiert. Ist  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, so impliziert der SOBOLEVsche Einbettungssatz, dass die Lösung für alle  $t \in [0, T)$  hinreichend klein ist. Damit kann man mit dem lokalen Existenzsatz die Lösung außerhalb des Intervalls  $[0, T)$  fortsetzen, was der Maximalität von  $T$  widerspricht. Deshalb bleibt es nur, den Fall  $T < T^*$  zu betrachten. Wir wollen nämlich beweisen, dass dieser Fall nicht eintreten kann, sofern  $\varepsilon$  hinreichend klein ist.

Unter Beachtung des SOBOLEVschen Einbettungssatzes für  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

sowie der Gleichung (3.64) bekommen wir

$$\|(U, \Theta, Q)\|_{2,\infty}, \|\partial_t(U, \Theta, Q)\|_{1,\infty}, \|\partial_t^2(U, \Theta, Q)\|_\infty \leq C\varepsilon e^{-\alpha/2} \text{ für alle } t \in [0, T^*), \quad (3.65)$$

wobei die Konstante  $C > 0$  weder von  $t$  noch von den Anfangsdaten abhängt.

Wir definieren

$$\mathcal{F}(t; U, \Theta, Q) := e^{\alpha t} \left( \|U_t\|^2 + \|U\|^2 + \|\nabla U\|^2 + \|\Theta\|^2 + \|Q\|^2 \right)(t),$$

wobei  $\|\cdot\|$  die übliche  $L^2$ -Norm auf dem jeweiligen Produktraum bezeichnet. Fasst man die Funktion  $F = (F_1, \dots, F_7)'$  als eine Inhomogenität auf und führt den Beweis von Satz 2.1.12 und Satz 2.2.4 für die inhomogenen Gleichungen (3.56)–(3.62) durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t; U, \Theta, Q) &\leq \tilde{C}\mathcal{F}(0; U, \Theta, Q) + C \int_0^t e^{\alpha s} \|F\| (\|U\| + \|U_t\| + \|\Theta\| + \|Q\|)(s) ds \\ &\equiv \tilde{C}\mathcal{F}(0; U, \Theta, Q) + \mathcal{R}(t; U, \Theta, Q, F), \end{aligned} \quad (3.66)$$

wobei  $C > 0$  hier und folgend eine generische positive Konstante bezeichnet und  $\tilde{C} > 0$  wie in Satz 2.1.12 ist. Wendet man auf die Gleichungen (3.56)–(3.62) den Operator  $\partial_t^k$ ,  $k = 1, 2$ , an, so sieht man, dass  $(\partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q)$  den Gleichungen (3.56)–(3.62) für die rechte Seite  $\partial_t^k F$  genügt. Damit ergibt sich für  $k = 0, 1, 2$

$$\mathcal{F}(t; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q) \leq \tilde{C}\mathcal{F}(0; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q) + \mathcal{R}(t; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q, \partial_t^k F).$$

Für die obigen Abschätzungen war entscheidend, dass

$$F_4, F_6 \in \mathcal{C}^2([0, T], L^2(\Omega) / \{1\})$$

gilt, was wegen  $F_4, F_6 \equiv 0$  trivialerweise erfüllt ist. Unter Benutzung der LEIBNIZschen Produktregel sowie des Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgt

$$\mathcal{R}(t; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q) \leq C \int_0^t \|\partial_t^k F\| (\|\partial_t^k U\| + \|\partial_t^k U_t\| + \|\partial_t^k \Theta\| + \|\partial_t^k Q\|)(s) ds \text{ für } k = 0, 1, 2.$$

Für  $k = 0, 1$  schätzen wir mit Hilfe der LEIBNIZschen Produktregel sowie des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$\mathcal{R}(t; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q) \leq C\varepsilon^3$$

ab, wobei die dritte Potenz von  $\varepsilon$  wegen (3.65) auftritt. Es gilt z. B.

$$C_{ijkl}(\nabla U, \Theta, Q) - C_{ijkl}(0) = \int_0^1 \xi \frac{\partial C_{ijkl}(\xi \nabla U, \xi \Theta, \xi Q)}{\partial(\nabla U, \Theta, Q)} \cdot (\nabla U, \Theta, Q) d\xi,$$

woraus sich unmittelbar

$$\|F_1\| \leq \|(C_{ijkl}(\nabla U, \Theta, Q) - C_{ijkl}(0))U_{k,x_j x_l}\| \leq C\varepsilon^2$$

ergibt. Der Fall  $k = 3$  muss separat behandelt werden, da  $\partial_t^3 F$  im Allgemeinen nicht existiert. Die Terme in  $\mathcal{R}(t; \partial_t^3 U, \partial_t^3 \Theta, \partial_t^3 Q)$  lassen sich aber mittels partieller Integration behandeln, sodass wir gar keine dritte Ableitung von  $F$  brauchen. Beispielsweise ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\alpha s} F_{1,ttt} U_{1,tt} ds &= - \int_0^t e^{\alpha s} F_{tt} U (\alpha U_{1,tt} + U_{1,ttt}) ds + e^{\alpha s} F_{1,tt} U_{1,tt} \Big|_0^t \\ &\leq C\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^2 |\mathcal{F}(t; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q) - \mathcal{F}(0; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q)|. \end{aligned}$$

Die letzten zwei Terme werden von den  $\mathcal{F}$ -Termen in (3.67) absorbiert, sodass wir insgesamt

$$\sum_{k=0}^2 \mathcal{F}(t; \partial_t^k U, \partial_t^k \Theta, \partial_t^k Q) \leq 3/2 \tilde{C} \varepsilon^2 + C\varepsilon^3 \quad (3.67)$$

mit  $\tilde{C}$  wie in (3.66) für hinreichend kleine  $\varepsilon$  bekommen.

Nun müssen wir die fehlenden Terme abschätzen, um die Funktion  $M$  mittels  $\mathcal{F}$  kontrollieren zu können. Unter Benutzung von (3.60), (3.62) ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\nabla \Theta\|^2 &= 2\|F_5\|^2 + 2\|F_7\|^2 + \frac{2}{\kappa^2} \|\tau_0 Q_{1,t} + \delta Q_1\|^2 + \frac{2}{\kappa^2} \|\tilde{\tau}_0 Q_{2,t} + \tilde{\delta} Q_2\|^2 \\ &\leq 4\mathfrak{C}\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die JENSENSche Ungleichung in der Spezialform  $(\sum_{k=1}^n a_k)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$  verwendet. Analog folgt mit (3.59), (3.61)

$$\begin{aligned} \|\nabla Q\|^2 &= 2\|F_4\|^2 + 2\|F_6\|^2 + \frac{2}{\kappa} \|\rho_3 \Theta_{1,t} + \beta \Theta_1 + \gamma \operatorname{div} U_{1,t}\|^2 + \frac{2}{\kappa} \|\tilde{\rho}_3 \Theta_{2,t} + \tilde{\gamma} \operatorname{div} U_{2,t}\|^2 \\ &\leq 6\mathfrak{C}\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*), \end{aligned}$$

wobei  $\|\operatorname{div} Q_i\| = \|\nabla Q_i\|$  wegen  $\operatorname{rot} Q_i = 0$ ,  $i = 1, 2$  gilt (vgl. Satz C.2.1). Differenziert man die Gleichungen (3.59)–(3.62) nach  $t$ , so ergibt sich analog

$$\|\nabla \Theta_t\|^2 \leq 4\mathfrak{C}\Lambda(t) + C\varepsilon^3, \quad \|\nabla Q_t\|^2 \leq 6\mathfrak{C}\Lambda(t) + C\varepsilon^3$$

für alle  $t \in [0, T^*)$ . Unter Benutzung von (3.63) und (3.56)–(3.58) können wir  $\|U\|_{2,2}^2$  abschätzen:

$$\begin{aligned} \|U\|_{2,2}^2 &\leq C_{\mathcal{E}}(\|\mathcal{D}'SDU_1\|^2 + \|\mathcal{D}'\tilde{S}DU_2\|^2 + \|K\Delta U_3\|^2) \\ &\leq 2C_{\mathcal{E}}(\|(F_1, F_2, F_3)\|^2) + 8\mathfrak{C}(\|U_{tt}\|^2 + \|U_t\|^2 + \|U\|^2 + \|\nabla U\|^2 + \|\nabla\Theta\|^2) \\ &\leq 32\mathfrak{C}^2\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*). \end{aligned}$$

Differenziert man (3.56)–(3.58) nach  $t$ , so folgt analog

$$\|U_t\|_{2,2}^2 \leq 32\mathfrak{C}^2\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*).$$

Wir wenden den Gradienten auf die Gleichungen (3.59)–(3.62) an und erhalten

$$\begin{aligned} \|\nabla^2\Theta\|^2 &= 2\|\nabla(F_5, F_7)\|^2 + \frac{2}{\kappa^2}\|\tau_0\nabla Q_{1,t} + \delta\nabla Q_1\|^2 + \frac{2}{\kappa^2}\|\tilde{\tau}_0\nabla Q_{2,t} + \tilde{\delta}\nabla Q_2\|^2 \\ &\leq 4\mathfrak{C}(\|Q_t\|^2 + \|\nabla Q\|^2) + C\varepsilon^3 \leq 48\mathfrak{C}^2\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 Q\|^2 &= 2\|\nabla(F_4, F_6)\|^2 + \frac{2}{\kappa^2}\|\rho_3\nabla\Theta_{1,t} + \beta\nabla\Theta_1 + \gamma\nabla\operatorname{div} U_{1,t}\|^2 + \frac{2}{\kappa^2}\|\tilde{\rho}_3\Theta_{2,t} + \tilde{\gamma}\nabla\operatorname{div} U_{2,t}\|^2 \\ &\leq 6\mathfrak{C}(\|\nabla\Theta_t\|^2 + \|\nabla\Theta\|^2 + \|\nabla U_t\|^2) + C\varepsilon^3 \leq 42\mathfrak{C}^2\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*). \end{aligned}$$

Schließlich ergeben sich die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\nabla U\|_{2,2} &\leq C_{\mathcal{E}}(\|\nabla\mathcal{D}'SDU_1\|^2 + \|\nabla\mathcal{D}'\tilde{S}DU_2\|^2 + \|K\nabla\Delta U_3\|^2) \\ &\leq 2C_{\mathcal{E}}(\|\nabla(F_1, F_2, F_3)\|^2) + 8\mathfrak{C}(\|\nabla U_{tt}\|^2 + \|\nabla U_t\|^2 + \|\nabla U\|^2 + \|\nabla^2 U\|^2 + \|\nabla^2\Theta\|^2) \\ &\leq 664\mathfrak{C}^3\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|U_t\|_{2,2} &\leq C_{\mathcal{E}}(\|\mathcal{D}'SDU_{1,t}\|^2 + \|\nabla\mathcal{D}'\tilde{S}DU_{2,t}\|^2 + \|K\nabla\Delta U_{3,t}\|^2) \\ &\leq 2C_{\mathcal{E}}(\|\partial_t(F_1, F_2, F_3)\|^2) + 8\mathfrak{C}(\|U_{ttt}\|^2 + \|U_{tt}\|^2 + \|U_t\|^2 + \|\nabla U_t\|^2 + \|\nabla U_{tt}\|^2 + \|\nabla\Theta_t\|^2) \\ &\leq 80\mathfrak{C}^3\Lambda(t) + C\varepsilon^3 \text{ für alle } t \in [0, T^*). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$M(t) \leq 776\mathfrak{C}^3\mathcal{F}(t) \leq 1164\tilde{C}\varepsilon^2 + C\varepsilon^3 \leq \mathfrak{M}\varepsilon^2/2 + C\varepsilon^3.$$

Nun wählen wir  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $C\varepsilon \leq \mathfrak{M}/3$  gilt. Dann folgt  $M(t) \leq 5/6\mathfrak{M}\varepsilon^2$  für alle  $t \in [0, T^*)$ . Im Grenzwert bekommen wir also  $M(T^*) \leq 5/6\mathfrak{M}\varepsilon^2 < \mathfrak{M}\varepsilon^2$ , was der Maximalität von  $T^*$  widerspricht. Daher muss die Lösung für alle  $t \geq 0$  existieren. Unter Beachtung von (3.64) ergibt sich schließlich die exponentielle Stabilität der Lösung.  $\square$

# Exakte Randsteuerbarkeit im Linearen

In diesem Kapitel wenden wir uns einem Steuerungsproblem für eine wärmeleitende REISSNER-MINDLIN-Platte mit hyperbolischer Wärmeleitung nach CATTANEO sowie eine dissipationsfreie thermoelastische REISSNER-MINDLIN-Platte nach GREEN & NAGHDI zu. Unter einer geometrischen Restriktion an das Gebiet geben wir die positive Antwort auf die Frage nach exakter Randsteuerbarkeit des Systems durch NEUMANNsche Randsteuerungen, indem wir die Surjektivität des Steuerungszustandsoperators  $\mathcal{L}_T$  bzw. stetige Invertierbarkeit des dualen Operators  $\mathcal{L}_T^*$  nachweisen (cf. [45], [46], [47]). Diesen Zugang haben wir gegenüber dem auf LIONS ([50], [51]) zurückgehenden HUM<sup>1</sup>-Prinzip – auch  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \Lambda)$ -Methode genannt – bevorzugt. Dabei verwenden wir die im Anhang B vorgestellten allgemeinen Resultate aus der Steuerungstheorie. Ein wichtiger Unterschied zu den konventionellen Evolutionsgleichungen besteht darin, dass wir einen schwächeren Lösungsbegriff benötigen, welcher für kontrolltheoretische Anwendungen sehr wichtig ist, da die  $L^2$ -optimalen Steuerungen in der Regel sehr irregulär sind, wovon man sich gut anhand der typischen numerischen Graphiken überzeugen kann (s. z. B. [23]).

Bei einem Steuerungsproblem (auch Kontroll- oder Regelungsproblem genannt) für ein System partieller Differentialgleichungen handelt es sich um die Frage, ob man durch eine geschickte Manipulation einer Steuergröße die zum Anfangszeitpunkt in einem gegebenen Zustand befindende Zustandsgröße zum Endzeitpunkt in einen „beliebigen“ vorgegebenen Zielzustand überführen kann. Je nach dem, ob die Steuerungsgrößen als rechte Seite oder Randbedingungen auf das System einwirken, spricht man von den verteilten Steuerungen<sup>2</sup> bzw. Randsteuerungen. Während sich viele Arbeiten der Existenz verteilter Steuerungen für partielle Differentialgleichungen widmen (s. z. B. [14], [50], [51], [83], [89] usw.), gibt es keinen einheitlichen Zugang zur Randsteuerbarkeit, vor allem für gekoppelte Systeme, weil solche Abhandlungen immer auf sehr speziellen Abschätzungen beruhen, sodass allgemeine Argumente in der Regel nicht anwendbar sind, was insbesondere der Situation bei der Suche nach der Randstabilisierung ähnelt (cf. [43]). Nachstehend wollen wir dem Leser einen Überblick über die Resultate zur Randsteuerbarkeit für (thermo)elastische Systeme verschaffen.

In [42] haben Lagnese und Lions rein elastische REISSNER-MINDLIN-Gleichungen im be-

<sup>1</sup>HILBERT Uniqueness Method

<sup>2</sup>Distributed controls

schränkten, glatt berandeten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  studiert

$$\begin{aligned} \frac{\rho h^3}{12} \psi_{tt} - D(\psi_{x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\rho h^3}{12} \varphi_{tt} - D(\varphi_{x_2 x_2} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ \rho h w_{tt} - K((w_{x_1} + \psi)_{x_1} + (w_{x_2} + \varphi)_{x_2}) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega. \end{aligned}$$

Für die folgende Wahl der Randsteuerungen wurde exakte Steuerbarkeit des Systems für hinreichend große  $T > 0$  nachgewiesen:

i) NEUMANN-Randsteuerungen

$$\begin{aligned} w = \psi = \varphi = 0 & \text{ in } (0, T) \times \Gamma_0, \\ K(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi = u_1 & \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_1 \psi_{x_1} + \mu \nu_1 \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_2) = u_2 & \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_2 \varphi_{x_2} + \mu \nu_2 \psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_1) = u_3 & \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1. \end{aligned}$$

ii) DIRICHLET-NEUMANN-Randsteuerungen

$$\begin{aligned} w = v_1, \psi = v_2, \varphi = v_3 & \text{ in } [0, T] \times \Gamma_0, \\ K(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi = u_1 & \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_1 \psi_{x_1} + \mu \nu_1 \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_2) = u_2 & \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_2 \varphi_{x_2} + \mu \nu_2 \psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_1) = u_3 & \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \end{aligned}$$

wobei  $\Gamma_0, \Gamma_1$  disjunkte, relativ offene Teilmengen des Randes  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  sind.

Für den Fall von DIRICHLET-NEUMANN-Randsteuerungen wird zusätzlich eine geometrische Voraussetzung an die Geometrie von  $\Omega, \Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  gestellt: Es gelte  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$  und

$$(x - x_0) \cdot \nu \leq 0 \text{ auf } \Gamma_0, \quad (x - x_0) \cdot \nu \geq 0 \text{ auf } \Gamma_1. \quad (4.1)$$

Die Bedingung (4.1) wird auch benötigt, um exakte Randsteuerbarkeit für die Wellengleichung durch NEUMANNsche Randsteuerungen zu beweisen (s. [45] und Referenzen ebda).

Narukawa hat in [62] für die dreidimensionalen homogenen, isotropen Thermoelastizitätsgleichungen mit der Wärmeleitung nach FOURIER

$$\begin{aligned} \rho_0 v_{tt} - \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u - \alpha \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ \theta_t - \kappa \Delta \theta + \beta \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega. \end{aligned}$$

bewiesen, dass man durch Vorschreiben der DIRICHLETSchen oder ROBINSchen Randsteuerungen sowie der homogenen DIRICHLETSchen Randbedingungen die elastische Zustandsvariable  $v$  in einen „beliebigen“ Zielzustand bringen kann. Es wurden keine Aussagen über die Steuerbarkeit von  $\theta$  gemacht. Werden die Randsteuerungen durch eine über eine offene Menge  $\omega \subset \Omega$  verteilte Steuerung für  $v$  ersetzt, so liegen laut Zuazua (s. [88]) die exakte Steuerbarkeit für  $v$  und approximative Nullsteuerbarkeit für  $\theta$  vor.

In der Arbeit [2] von Avalos und Lasiecka wurde eine thermoelastische Platte nach KIRCHHOFF mit der Wärmeleitung nach FOURIER studiert (vgl. [16] für den Fall  $\alpha = \alpha(x)$ ):

$$\begin{aligned} w_{tt} - \gamma \Delta w_{tt} + \Delta^2 w + \operatorname{div}(\alpha \nabla \theta) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ \beta \theta_t - \eta \Delta \theta + \sigma \theta - \operatorname{div}(\alpha \nabla w_t) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wählt man die Randsteuerungen als Oberflächenkräfte und -momente auf  $\Gamma_1$ , die ROBINschen Randsteuerungen für  $\theta$  auf  $\Gamma_2$  sowie die homogenen DIRICHLET-Randbedingungen auf  $\Gamma_0$ , so folgt, dass das System in  $(w, w_t)$  exakt und in  $\theta$  approximativ nullsteuerbar ist. Dabei sind  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  relativ offen und disjunkt mit  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ ,  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$  und

$$(x - x_0) \cdot \nu \leq 0 \text{ auf } \Gamma_0.$$

Weitere Referenzen findet man in der Übersichtsarbeit [80].

Das Ziel dieses Kapitels ist es, ein exaktes Steuerbarkeitsresultat für eine wärmeleitende REISSNER-MINDLIN-Platte zu beweisen. Dabei soll ein Randsteuerungsmechanismus durch die NEUMANNschen Randsteuerungen sowohl für den elastischen als auch den thermischen Anteil des Systems hergestellt werden.

## 4.1 Formulierung und Reduktion

Wir betrachten ein Randsteuerungsproblem für eine wärmeleitende REISSNER-MINDLIN-Platte mit Wärmeleitung nach CATTANEO, deren Mittelbene im Referenzzustand ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit dem LIPSCHITZ-Rand  $\Gamma$  belegt. Die Platte sei am Randteil  $\Gamma_0$  befestigt und auf Nulltemperatur gehalten. Am Randteil  $\Gamma_1$  sei sie über das Vorschreiben der Normalspannungen sowie des Wärmeflusses in der Richtung der Normalen gesteuert.  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  seien offen, disjunkt, nichtleer und erfüllen  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$ . Das Problem der exakten Randsteuerbarkeit, welches wir zunächst unpräzise formulieren, lautet dann wie folgt.

**Problem 4.1.1.** Man überführe die den REISSNER-MINDLIN-Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div}(\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \theta_t + \kappa \operatorname{div} q + \beta \theta + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \tau_0 q_t + \delta q + \kappa \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

mit den DIRICHLETschen Randbedingungen auf  $\Gamma_0$

$$w = |v| = \theta = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0 \quad (4.4)$$

gehorchenden Zustandsfunktionen  $(w, v, \theta, q)'$  aus einem beliebigen, aber festen Anfangszustand

$$w(0) = w^0, w_t(0) = w^1, v(0) = v^0, v_t(0) = v^1, \theta(0) = \theta^0, q(0) = q^0 \quad (4.5)$$

in einen gegebenen Endzustand

$$w(T) = w^{T,0}, w_t(T) = w^{T,1}, v(T) = v^{T,0}, v_t(T) = v^{T,1}, \theta(T) = \theta^{T,0}, q(T) = q^{T,0}. \quad (4.6)$$

zu einem gegebenen Zeitpunkt  $T > 0$  durch die Wahl der Steuerungsfunktionen

$$(u_1, u_2, u_3)': [0, T] \times \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

für die inhomogenen NEUMANNschen Randbedingungen auf  $\Gamma_1$

$$\begin{aligned} (\nabla w + v) \cdot \nu &= u_1 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}' S \mathcal{D} v - \gamma \theta \nu &= u_2 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ q \cdot \nu &= u_3 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Das Problem 4.1.1 muss natürlich in geschickten Räumen interpretiert werden, worauf wir noch später eingehen werden. Alle Konstanten seien dabei positiv. Die Matrix  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sei symmetrisch, positiv definit.

Die Tatsache, dass die Gleichungen (2.3) von gemischter Ordnung sind, erschwert deutlich deren Behandlung. Deshalb transformieren wir sie auf ein System hyperbolischer Gleichungen zweiter Ordnung, um die klassischen Methoden für die hyperbolische Randsteuerbarkeit anwenden zu können. Wir nehmen an, dass  $\theta$  und  $q$  hinreichend glatt sind, wenden auf die dritte bzw. die vierte Gleichung in (4.3) den Operator  $\partial_t$  bzw.  $\operatorname{div}$  an und bekommen

$$\begin{aligned} \rho_3 \theta_{tt} + \kappa \operatorname{div} q_t + \beta \theta_t + \gamma \operatorname{div} v_{tt} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \tau_0 \operatorname{div} q_t + \delta \operatorname{div} q + \kappa \Delta \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Löst man die dritte Gleichung in (4.3) nach  $\operatorname{div} q$  auf

$$\operatorname{div} q = -\frac{\rho_3}{\kappa} \theta_t - \frac{\beta}{\kappa} \theta - \frac{\gamma}{\kappa} \operatorname{div} v_t \text{ in } (0, \infty) \times \Omega$$

und setzt das Resultat in die zweite Gleichung von (4.8) ein, so folgt

$$\tau_0 \operatorname{div} q_t - \frac{\rho_3 \delta}{\kappa} \theta_t - \frac{\beta \delta}{\kappa} \theta - \frac{\gamma \delta}{\kappa} \operatorname{div} v_t + \kappa \Delta \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega. \quad (4.9)$$

Löst man (4.9) nach  $\operatorname{div} q_t$  auf

$$\operatorname{div} q_t = \frac{\rho_3 \delta}{\kappa \tau_0} \theta_t + \frac{\beta \delta}{\kappa \tau_0} \theta + \frac{\gamma \delta}{\kappa \tau_0} \operatorname{div} v_t - \frac{\kappa}{\tau_0} \Delta \theta = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega$$

und setzt das Resultat in die erste Gleichung von (4.8) ein, so ergibt sich

$$\rho_3 \theta_{tt} - \frac{\kappa^2}{\tau_0} \Delta \theta + \left( \frac{\rho_3 \delta}{\tau_0} + \beta \right) \theta_t + \frac{\beta \delta}{\tau_0} \theta + \frac{\gamma \delta}{\tau_0} \operatorname{div} v_t + \gamma \operatorname{div} v_{tt} = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega. \quad (4.10)$$

Nun setzen wir (4.10) in (4.3) ein und bekommen nach Verwerfen der vierten Gleichung

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div} (\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \frac{\kappa^2}{\tau_0} \Delta \theta + \left( \frac{\rho_3 \delta}{\tau_0} + \beta \right) \theta_t + \frac{\beta \delta}{\tau_0} \theta + \frac{\gamma \delta}{\tau_0} \operatorname{div} v_t + \gamma \operatorname{div} v_{tt} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Motiviert durch [40], wollen wir statt  $\theta$  dessen zeitliche Stammfunktion  $\vartheta(t, \cdot) = \int_0^t \theta(s, \cdot) ds$  betrachten. Mit diesem Ansatz geht (4.11) in

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div} (\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \frac{\kappa^2}{\tau_0} \Delta \vartheta + \left( \frac{\rho_3 \delta}{\tau_0} + \beta \right) \vartheta_t + \frac{\beta \delta}{\tau_0} \vartheta + \frac{\gamma \delta}{\tau_0} \operatorname{div} v + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (4.12)$$

über. Schließlich setzen wir

$$\omega := \frac{\kappa^2}{\tau_0}, \quad \alpha := \frac{\rho_3 \delta}{\tau_0} + \beta, \quad \eta := \frac{\beta \delta}{\tau_0}, \quad \lambda := \frac{\gamma \delta}{\tau_0} \quad (4.13)$$

und finden

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div} (\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \alpha \vartheta_t + \eta \vartheta + \lambda \operatorname{div} v + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Multipliziert man die vierte Gleichung in (4.3) skalar mit  $v$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = -\left(\frac{\tau_0}{\kappa} q_t \cdot \nu + \frac{\delta}{\kappa} q \cdot \nu\right) \text{ in } (0, \infty) \times \Gamma_1, \quad (4.15)$$

so ergeben sich mit (4.7) die Randbedingungen für  $(w, v, \vartheta)'$

$$\begin{aligned} w = |v| = \vartheta = 0 & \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu = u_1 & \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}' S \mathcal{D} v - \gamma \vartheta_t \nu = u_2 & \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = -\left(\frac{\tau_0}{\kappa} u_{3,t} + \frac{\delta}{\kappa} u_3\right) & \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Integriert man (4.9) über  $[0, T]$

$$\tau_0 \operatorname{div} (q(T) - q(0)) - \frac{\rho_3 \delta}{\kappa} (\theta(T) - \theta(0)) + (\kappa \Delta - \frac{\beta \delta}{\kappa}) \vartheta(T) - \frac{\gamma \delta}{\kappa} \operatorname{div} (v(T) - v(0)) = 0,$$

so bekommt man mit (4.15) eine inhomogene elliptische Gleichung für  $\vartheta(T)$

$$\begin{aligned} -(\kappa \Delta - \frac{\beta \delta}{\kappa}) \vartheta(T) &= \tau_0 \operatorname{div} (q^{T,0} - q^0) - \frac{\rho_3 \delta}{\kappa} (\theta^{T,0} - \theta^0) - \frac{\gamma \delta}{\kappa} \operatorname{div} (v^{T,0} - v^0) \text{ in } \Omega, \\ \vartheta(T) = 0 & \text{ auf } \Gamma_0, \quad \frac{\partial \vartheta(T)}{\partial \nu} = - \int_0^T \left( \frac{\tau_0}{\kappa} u_{3,t} + \frac{\delta}{\kappa} u_3 \right) dt \text{ auf } \Gamma_1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aufgrund der elliptischen Theorie (s. [49]) besitzt die Gleichung (4.17) für reguläre Daten im glatt berandeten Gebiet eine eindeutige Lösung  $\vartheta^{T,0}$ , welche uns jetzt die Endbedingung für  $\vartheta(T)$  liefert

$$\vartheta(T) = \vartheta^{T,0}.$$

Außerdem gilt

$$\vartheta_t(T) = \theta^{T,0}. \quad (4.18)$$

Daher schreiben sich die Anfangs- und Endbedingungen für  $(w, v, \vartheta)'$  als

$$w(0) = w^0, w_t(0) = w^1, v(0) = v^0, v_t(0) = v^1, \vartheta(0) = 0, \vartheta_t(0) = \theta^0 \quad (4.19)$$

bzw.

$$w(T) = w^{T,0}, w_t(T) = w^{T,1}, v(T) = v^{T,0}, v_t(T) = v^{T,1}, \vartheta(T) = \vartheta^{T,0}, \vartheta_t(T) = \theta^{T,0}. \quad (4.20)$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 4.1.2.** Sei  $(w, v, \theta, q)'$  eine hinreichend glatte Lösung von (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7). Dann löst  $(w, v, \vartheta)'$ ,  $\vartheta(t, \cdot) = \int_0^t \theta(s, \cdot) ds$ , die Gleichung (4.14), (4.16), (4.19), (4.20). Ist umgekehrt  $(w, v, \vartheta)'$  eine hinreichend glatte Lösung des zweiten Problems, so löst  $(w, v, \theta, q)'$  mit  $\theta = \vartheta_t$ ,  $q(t, \cdot) = \int_0^t e^{-\delta(t-s)/\tau_0} \nabla \vartheta_t(s, \cdot) ds$  das erste Problem.

Deshalb untersuchen wir im Folgenden

**Problem 4.1.3.** Bestimme die Steuerfunktionen  $(u_1, u_2, u_3)': [0, T] \times \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  so, dass die Lösung  $(w, v, \vartheta)'$  des Problems

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div} (\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \alpha \vartheta_t + \eta \vartheta + \lambda \operatorname{div} v + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (4.21)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} w = |v| = \vartheta &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu &= u_1 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}'SDv - \gamma\vartheta_t \nu &= u_2 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} &= u_3 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

und den Anfangsbedingungen

$$w(0) = 0, w_t(0) = 0, v(0) = 0, v_t(0) = 0, \vartheta(0) = 0, q(t=0) = 0 \quad (4.23)$$

einen gegebenen Endzustand zum Zeitpunkt  $T > 0$

$$w(T) = w^{T,0}, w_t(T) = w^{T,1}, v(T) = v^{T,0}, v_t(T) = v^{T,1}, \vartheta(T) = \vartheta^{T,0}, \vartheta_t(T) = \vartheta^{T,1} \quad (4.24)$$

erreicht.

## 4.2 Lösbarkeit des Inhomogenen Problems

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Lösbarkeit des Problems

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div}(\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}'SDv + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \alpha \vartheta_t + \eta \vartheta + \lambda \operatorname{div} v + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (4.25)$$

mit den Rand-

$$\begin{aligned} w = |v| = \vartheta &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu &= u_1 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}'SDv - \gamma\vartheta_t \nu &= u_2 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} &= u_3 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

und Anfangsbedingungen

$$w(0) = 0, w_t(0) = 0, v(0) = 0, v_t(0) = 0, \vartheta(0) = 0, q(0) = 0. \quad (4.27)$$

Da die Randbedingungen die zeitliche Ableitung der unbekanntenen Funktion  $\vartheta$  enthalten, lässt sich die Lösungstheorie für die allgemeine Wellengleichung (s. z. B. [83]) im Gegensatz sowohl zu den Elastizitätsgleichungen als auch rein mechanischen REISSNER-MINDLIN-Gleichungen nicht anwenden, weshalb wir den längeren Weg über die Halbgruppentheorie gehen müssen. Im Laufe des Abschnitts benutzen wir Begriffe und Resultate aus dem Anhang A.1.

Definiert man

$$V(t) := (w, v, \vartheta, w_t, v_t, \vartheta_t)(t)', \quad (4.28)$$

so lässt sich das Problem (4.25)–(4.27) mit Hilfe der zunächst formal definierten Operatoren

$$A_0 = \text{diag}(1, 1, 1, \rho_1, \rho_2, \rho_3)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ K\Delta & K \text{div} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K\nabla & \mathcal{D}'SD - K & 0 & 0 & 0 & -\gamma\nabla \\ 0 & 0 & \omega\Delta - \eta & 0 & -\gamma \text{div} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_r = \text{diag}(1, 1, 1, \rho_1, \rho_2, \rho_3)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda \text{div} & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix},$$

$$A = A_0 + A_r,$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} (\nabla V^1 + V^2) \cdot \nu \\ \mathcal{N}'SDV^2 - \gamma\nu V^6 \\ \nabla V^3 \cdot \nu \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{aligned} V_t(t) &= AV(t) && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ C_0 V(t) &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ C_1 V(t) &= u(t) && \text{in } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ V(0) &= 0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

umschreiben. Wir definieren den HILBERTraum  $\mathcal{H} := (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^4$  mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle_{\mathcal{H}} &:= K \langle \nabla V^1 + V^2, \nabla W^1 + W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle SDV^2, DW^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \omega \langle \nabla V^3, \nabla W^3 \rangle_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \rho_1 \langle V^4, W^4 \rangle_{L^2(\Omega)} + \rho_2 \langle V^5, W^5 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \rho_3 \langle V^6, W^6 \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

und betrachten den Operator

$$\mathcal{A}_0: D(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad V \mapsto A_0 V$$

mit dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_0) &= \{V \in \mathcal{H} \mid A_0 V \in \mathcal{H}, C_1 V = 0\} \\ &= \{V \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^8 \mid \Delta V_1, \Delta V_3 \in L^2(\Omega), \mathcal{D}'SDV_2 \in (L^2(\Omega))^2, \\ &\quad (\nabla V^1 + V^2) \cdot \nu = 0, \mathcal{N}'SDV^2 - \gamma\nu V^6 = 0, \nabla V^3 \cdot \nu = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}, \end{aligned}$$

wobei die NEUMANNschen Randbedingungen im schwachen Sinne (vgl. Gleichung (2.5)) erklärt sind. Nun ist

$$\mathcal{A}_r: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad V \mapsto A_r V$$

ein beschränkter Operator, sodass wir den Operator

$$\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad V \mapsto (A_0 + A_r)V \quad (4.30)$$

mit  $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_0)$  definieren können.

Da wir später eine höhere Regularität für die Lösung benötigen werden, stellen wir eine Voraussetzung an den Rand.

**Voraussetzung 4.2.1.** Es gelte  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ . Der Rand  $\Gamma$  des Gebietes  $\Omega$  erfülle eine der folgenden Bedingungen:

- a)  $\Gamma$  sei von der Klasse  $\mathcal{C}^{1,1}$ .
- b)  $\Gamma$  bestehe aus endlich vielen zusammenhängenden, relativ offenen  $\mathcal{C}^{1,1}$ -Kurven  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ,  
d. h.  $\Gamma = \bigcup_{k=1}^n \bar{\Gamma}_k$ ,  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Schneiden sich  $\bar{\Gamma}_i$  und  $\bar{\Gamma}_j$ , dann sei der innere Schnittwinkel  $\alpha_i \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

**Satz 4.2.2.** Gilt die Voraussetzung (4.2.1), so ist  $D(\mathcal{A}) \subset (H^2(\Omega))^4$  (cf. [43, Section 2.3.1]).

Nun wollen die Eigenschaften des Operators  $\mathcal{A}_0$  beschreiben.

**Satz 4.2.3.** Es gilt:

- i)  $[0, \infty) \subset \rho(\mathcal{A}_0)$ .
- ii)  $\mathcal{A}_0$  und  $-\mathcal{A}_0$  sind  $m$ -dissipativ.
- iii)  $\mathcal{A}_0$  ist schiefadjungiert, d. h.  $\mathcal{A}_0^* = -\mathcal{A}_0$ .
- iv)  $\mathcal{A}_0^*$  ist  $m$ -dissipativ.

**Beweis:**

- i) Es reicht zu zeigen, dass  $0 \in \rho(\mathcal{A}_0)$ . Da  $\rho(\mathcal{A}_0)$  offen ist, muss  $(-\lambda, \lambda) \subset \rho(\mathcal{A}_0)$  für hinreichend kleine  $\lambda > 0$  gelten. Mit Satz A.1.5 und der Dissipativität aus ii) folgt dann  $[0, \infty) \subset (-\lambda, \infty) \subset \rho(\mathcal{A}_0)$ . Wir wollen also beweisen, dass es ein  $C > 0$  so gibt, dass zu jedem  $F \in \mathcal{H}$  eine Lösung  $V \in D(\mathcal{A}_0)$  von

$$\mathcal{A}_0 V = F \tag{4.31}$$

derart existiert, dass  $\|V\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$  gilt. Um diese Aussage zu beweisen, wenden wir das Lemma von LAX & MILGRAM an.

Die Gleichung (4.31) ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} V^4 &= F^1, \\ V^5 &= F^2, \\ V^6 &= F^3, \\ K\Delta V^1 + K \operatorname{div} V^2 &= \rho_1 F^4, \\ -K\nabla V^1 + \mathcal{D}'SDV^2 - KV^2 - \gamma\nabla V^6 &= \rho_2 F^5, \\ \omega\Delta V^3 - \gamma \operatorname{div} V^5 &= \rho_3 F^6. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Wir eliminieren  $V^4, V^5, V^6$  aus (4.32) und bekommen

$$\begin{aligned} K\Delta V^1 + K \operatorname{div} V^2 &= \tilde{F}^1 := \rho_1 F^4, \\ -K\nabla V^1 + \mathcal{D}'SDV^2 - KV^2 &= \tilde{F}^2 := \rho_2 F^5 + \gamma\nabla F^3, \\ \omega\Delta V^3 &= \tilde{F}^3 := \rho_3 F^6 + \gamma \operatorname{div} F^2, \end{aligned} \tag{4.33}$$

wobei  $(V_1, V_2, V_3)' \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  mit

$$(\nabla V^1 + V^2) \cdot \nu = 0 \quad \mathcal{N}'SDV^2 = \gamma \nu F^3, \quad \nabla V^3 \cdot \nu = 0 \text{ auf } \Gamma_1,$$

wobei  $F^3|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ . Das inhomogene elliptische Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'SD\Phi &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \Phi &= 0 \text{ auf } \Gamma_0, \\ \mathcal{N}'SD\Phi &= \gamma \nu F^3 \text{ auf } \Gamma_1 \end{aligned}$$

besitzt nach [3] eine eindeutige Lösung  $\Phi \in (H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2$  mit  $\|\Phi\|_{(H^2(\Omega))^2} \leq C_\varepsilon \|F^3\|_{(H^1(\Omega))^2}$  für ein von  $F^3$  unabhängiges  $C_\varepsilon > 0$ . Setzt man  $\tilde{V} := (\tilde{V}^1, \tilde{V}^2 - \Phi, \tilde{V}^3)'$ , so folgt, dass (4.33) zu

$$\begin{aligned} K\Delta \tilde{V}^1 + K \operatorname{div} \tilde{V}^2 &= \tilde{F}^1 \\ -K\nabla \tilde{V}^1 + \mathcal{D}'SD\tilde{V}^2 - K\tilde{V}^2 &= \tilde{F}^2, \\ \omega\Delta \tilde{V}^3 &= \tilde{F}^3 \end{aligned} \tag{4.34}$$

für  $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}$  äquivalent ist, wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}} := \{ \tilde{V} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \mid (\nabla \tilde{V}^1 + \tilde{V}^2) \cdot \nu = 0, \\ \mathcal{N}'SD\tilde{V}^2 = 0, \nabla \tilde{V}^3 \cdot \nu = 0 \text{ auf } \Gamma_1 \} \end{aligned}$$

mit dem üblichen Skalarprodukt von  $(H^1(\Omega))^4$  versehen sei. Die NEUMANNschen Randbedingungen sind im schwachen Sinne zu verstehen.

Wir definieren den Raum

$$\tilde{\mathcal{H}} := L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 \times L^2(\Omega),$$

multiplizieren (4.34) skalar in  $L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$  mit einem  $\tilde{W} = (\tilde{W}^1, \tilde{W}^2, \tilde{W}^3)' \in \tilde{\mathcal{H}}$ , und erhalten

$$a(\tilde{V}, \tilde{W}) = \langle \tilde{F}, \tilde{W} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}, \tag{4.35}$$

wobei  $\tilde{F} = (\tilde{F}^1, \tilde{F}^2, \tilde{F}^3)' \in \tilde{\mathcal{H}}$  und die symmetrische Bilinearform  $a: \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R}$  mittels

$$a(\tilde{V}, \tilde{W}) = K\langle \nabla \tilde{V}^1 + \tilde{V}^2, \nabla \tilde{W}^1 + \tilde{W}^2 \rangle + \langle \mathcal{D}\tilde{V}^2, \mathcal{D}\tilde{W}^2 \rangle + \omega\langle \nabla \tilde{V}^3, \nabla \tilde{W}^3 \rangle$$

erklärt ist. Mit der 1. POINCARÉschen und der KORNSchen Ungleichung aus Satz 2.1.4 folgt die Stetigkeit sowie die Koerzivität von  $a$ . Damit existiert ein eindeutiges  $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}$ , welches (4.35) löst und für welches

$$\|\tilde{V}\|_{\tilde{\mathcal{V}}} \leq C_a \|\tilde{F}\|_{\tilde{\mathcal{H}}}$$

gilt, wobei  $C_a > 0$  nicht von  $\tilde{F}$  abhängt. Für

$$V := (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2 + \Phi, \tilde{V}_3, F_4, F_5, F_6)'$$

folgt dann  $V \in D(\mathcal{A}_0)$  und  $\mathcal{A}_0 V = F$ . Außerdem ist  $V$  eindeutig bestimmt und es gilt

$$\|V\|_{\mathcal{H}} \leq \max\{C_a, C_\varepsilon, 1\} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

ii) Für alle  $V \in D(\mathcal{A}_0)$  folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_0 V, V \rangle_{\mathcal{H}} &= K \langle \nabla V_4 + V_5, \nabla V_1 + V_2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \omega \langle S \mathcal{D} V_5, \mathcal{D} V_2 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \\ &\quad \langle \nabla V_6, \nabla V_3 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle K \Delta V_1 + K \operatorname{div} V_2, V_4 \rangle_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \langle -K \nabla V_1 + \mathcal{D}' S \mathcal{D} V_2 - K V_2 - \gamma \nabla V_6, V_5 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle \omega \Delta V_3 - \gamma \operatorname{div} V_5, V_6 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also sind  $\mathcal{A}_0$  und  $-\mathcal{A}_0$  dissipativ. Mit i) folgt die Dissipativität von  $\mathcal{A}_0$ . Weil  $\lambda \in \rho(-\mathcal{A}_0)$  für hinreichend kleine  $\lambda > 0$  gilt, ist  $-\mathcal{A}_0$  auch  $m$ -dissipativ.

iii) Die Aussage folgt mit Satz A.1.11.

iv) Die Aussage folgt mit ii) und iii).

Dies beendet den Beweis. □

#### Korollar 4.2.4.

i)  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{A}_0^*$  erzeugen  $C^0$ -Kontraktionshalbgruppen  $(S_0(t))_{t \geq 0}$  bzw.  $(S_0^*(t))_{t \geq 0}$  auf  $\mathcal{H}$ .

ii)  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}^*$  erzeugen  $C^0$ -Halbgruppen  $(S(t))_{t \geq 0}$  bzw.  $(S^*(t))_{t \geq 0}$  auf  $\mathcal{H}$ . Ferner gilt die Abschätzung

$$\|S^*(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq e^{\|\mathcal{A}_r\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} t} \text{ für } t \geq 0.$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt mit Satz 4.2.3 und A.1.13. □

Wir folgen der Vorgehensweise im Anhang A.1.3 und definieren den Extrapolationsraum  $\mathcal{H}_{-1}$  als Abschluss von  $\mathcal{H}$  bzgl. der Norm

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{-1}} = \|\mathcal{A}_0^{-1} \cdot\|_{\mathcal{H}}$$

sowie den Raum  $D(\mathcal{A}_0^*)'$  als den zu  $D(\mathcal{A}_0^*)$  bzgl.  $\mathcal{H}$  dualen Raum, d. h.,  $D(\mathcal{A}_0^*)'$  ist der Abschluss von  $\mathcal{H}$  bzgl. der Norm

$$\|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_0^*)'} = \sup_{x \in D(\mathcal{A}_0^*) \setminus \{0\}} \frac{|\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{H}}|}{\|x\|_{D(\mathcal{A}_0^*)}},$$

wobei  $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_0^*)'} = \|\mathcal{A}_0^* \cdot\|_{\mathcal{H}}$ . Die Räume  $\mathcal{H}_{-1}$  und  $D(\mathcal{A}_0^*)'$  sind isomorph (s. [46, Section 0.3]). Außerdem gilt

$$D(\mathcal{A}_0) \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_{-1},$$

wobei die Einbettungen stetig und dicht sind.

Der Operator  $\mathcal{A}_0$  lässt sich zu einem  $m$ -dissipativen Operator

$$\mathcal{A}_{0,-1}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$$

fortsetzen. Da  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_r$  gilt und  $\mathcal{A}_r$  eine beschränkte Störung von  $\mathcal{A}_0$  ist, existiert ebenfalls eine Erweiterung

$$\mathcal{A}_{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$$

von  $\mathcal{A}$ . Es gilt

$$\mathcal{H}_{-1} \supset (L^2(\Omega))^4 \times ((H^1(\Omega))')^4.$$

**Satz 4.2.5.** Es gilt:

i) Zu jedem  $u \in (L^2(\Gamma_1))^4$  existiert eine eindeutige Lösung  $V \in (H^{3/2}(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4 \times (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4$  des Randwertproblems

$$\begin{aligned} A_0 V &= 0 \text{ in } \Omega, \\ C_0 V &= 0 \text{ auf } \Gamma_0, \\ C_1 V &= u \text{ auf } \Gamma_1, \end{aligned} \tag{4.36}$$

wobei die Randbedingungen nicht nur im schwachen Sinne, sondern auch im Sinne der Existenz eines stetigen Spuoperators

$$(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)': (H^{3/2}(\Omega))^4 \times (H^1(\Omega))^4 \rightarrow (L^2(\Gamma_0))^4 \times (L^2(\Gamma_1))^4, \quad V \mapsto (C_0 V, C_1 V)'$$

erfüllt sind.

ii) Die durch  $\mathcal{R}: u \mapsto V_u$  definierte Abbildung ist stetig, d. h. es gibt ein  $C_{\mathcal{R}} > 0$  so, dass

$$\|\mathcal{R}u\|_{(H^{3/2}(\Omega))^4 \times (H^1(\Omega))^4} \leq C_{\mathcal{R}} \|u\|_{(L^2(\Gamma_1))^4} \text{ für alle } u \in (L^2(\Gamma_1))^4.$$

**Beweis:** Mit (4.36) folgt

$$\begin{aligned} V^4 &= V^5 = V^6 = 0 \text{ in } \Omega, \\ K \Delta V^1 + K \operatorname{div} V^2 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ -K \nabla V^1 + \mathcal{D}' S \mathcal{D} V^2 - K V^2 - \gamma \nabla V^6 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \omega \Delta V^3 - \gamma \operatorname{div} V^5 &= 0 \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Eliminiert man  $V^4, V^5, V^6$ , so ergibt sich ein inhomogenes elliptisches Randwertproblem

$$\begin{aligned} K \Delta V^1 + K \operatorname{div} V^2 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ -K \nabla V^1 + \mathcal{D}' S \mathcal{D} V^2 - K V^2 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \omega \Delta V^3 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ V_1 &= 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0 \text{ auf } \Gamma_0, \\ (\nabla V^1 + V^2) \cdot \nu &= u_1, \quad \mathcal{N}' S \mathcal{D} V^2 = u_2, \quad \nabla V^3 \cdot \nu = u_3 \text{ auf } \Gamma_1. \end{aligned} \tag{4.38}$$

(4.38) ist ein reguläres elliptisches Problem in Sinne von [3] (vgl. auch [43, Section 2.3.1]), welches durch ein  $(V_1, V_2, V_3)' \in (H^{3/2}(\Omega))^4$  lösbar ist. Der Lösungsoperator ist linear und stetig, d. h., es gibt eine Konstante  $C_{\mathcal{E}} > 0$  so, dass

$$\|(V_1, V_2, V_3)'\|_{(H^{3/2}(\Omega))^4} \leq C_{\mathcal{E}} \|u\|_{(L^2(\Gamma_1))^4}$$

gilt. Desweiteren ist  $V = (V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0)' \in (H^{3/2}(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4 \times (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4$  die eindeutige Lösung des ursprünglichen Problems (4.36) und der Operator  $\mathcal{R}$  ist stetig mit der Stetigkeitskonstante  $C_{\mathcal{E}}$ . Die Existenz und Stetigkeit von  $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)'$  folgt dann mit den klassischen SOBOLEV-Schen Spursätzen (s. z. B. [1], [49]).  $\square$

Nun können wir den Begriff einer schwachen Lösung des Problems (4.29) erklären. Ist  $V$  eine klassische Lösung von (4.29), dann ist  $V - \mathcal{R}u \in D(\mathcal{A})$  und es gilt

$$\begin{aligned} V_t + \mathcal{A}(V - \mathcal{R}u) &= 0 \text{ in } \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{H}), \\ V(0) &= 0. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt dann wegen  $\mathcal{A}_{-1}\mathcal{R}u = \mathcal{A}_{0,-1}\mathcal{R}u$

$$\begin{aligned} V_t + \mathcal{A}_{-1}V &= \mathcal{A}_{0,-1}\mathcal{R}u \text{ in } L^2([0, T], \mathcal{H}_{-1}), \\ V(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Dies führt zur Definition der schwachen Lösung von (4.29).

**Definition 4.2.6.** Sei  $u \in L^2((0, T), (L^2(\Gamma_1))^4)$ . Eine Funktion

$$V \in H^1((0, T), \mathcal{H}_{-1}),$$

welche eine milde Lösung der Gleichung (4.39) auf  $\mathcal{H}_{-1}$  darstellt (s. Definition A.1.1), heißt eine schwache Lösung<sup>3</sup> von (4.29).

Wir definieren den Steuerungsraum  $\mathcal{U} := (L^2(\Gamma_1))^4$  und den Steuerungsoperator

$$\mathcal{B}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}_{-1}, \quad u \mapsto \mathcal{A}_{0,-1}\mathcal{R}u.$$

Offensichtlich ist  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{-1})$ .

**Lemma 4.2.7.** Der zu  $\mathcal{B}$  bzgl.  $\mathcal{H}_{-1}$  duale Operator lautet

$$\mathcal{B}^*: D(\mathcal{A}^*) \rightarrow \mathcal{U}, \quad V \mapsto ((\mathcal{A}_0^{-1}V)^1, (\mathcal{A}_0^{-1}V)^2, (\mathcal{A}_0^{-1}V)^3)'|_{\Gamma_1}.$$

**Beweis:** Seien  $u \in \mathcal{U}$  und  $V \in D(\mathcal{A}^*)$ . Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathcal{R}u :=: W = (W^1, W^2, W^3, 0, 0, 0)', \quad \mathcal{A}_0^{-1}V :=: U = (U^1, U^2, U^3, U^4, U^5, U^6)'$$

(vgl. Satz 4.2.5) und erhalten unter Beachtung von  $\mathcal{A}_0^* = -\mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}u, V \rangle_{\mathcal{H}_{-1}} &= \langle \mathcal{A}_{0,-1}\mathcal{R}u, V \rangle_{\mathcal{H}_{-1}} = \langle \mathcal{A}_{0,-1}^*V, \mathcal{R}u \rangle_{\mathcal{H}_{-1}} = \langle \mathcal{A}_0^*V, \mathcal{R}u \rangle_{\mathcal{H}_{-1}} \\ &= \langle (\mathcal{A}_0)^{-1}\mathcal{A}_0^*V, (\mathcal{A}_0)^{-1}\mathcal{R}u \rangle_{\mathcal{H}} = -\langle V, (\mathcal{A}_0)^{-1}\mathcal{R}u \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{A}_0^{-1}V, \mathcal{R}u \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= K \langle \nabla U^1 + U^2, \nabla W^1 + W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle S\mathcal{D}U^2, \mathcal{D}W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \omega \langle \nabla U^3, \nabla W^3 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ &= K \langle \nabla U^1, \nabla W^1 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + K \langle \nabla U^1, W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + K \langle U^2, \nabla W^1 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \\ &\quad K \langle U^2, W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \langle S\mathcal{D}U^2, \mathcal{D}W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^3} + \omega \langle \nabla U^3, \nabla W^3 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} \\ &= -K \langle U^1, \Delta W^1 \rangle_{L^2(\Omega)} - K \langle U^1, \operatorname{div} W^2 \rangle_{L^2(\Omega)} + K \langle U^2, \nabla W^1 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} + \\ &\quad K \langle U^2, W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} - \langle U^2, \mathcal{D}'S\mathcal{D}W^2 \rangle_{(L^2(\Omega))^2} - \omega \langle U^3, \Delta W^3 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad K \langle U^1, \nu \cdot (\nabla W^1 + W^2) \rangle_{L^2(\Gamma_1)} + \langle U^2, \mathcal{N}'S\mathcal{D}W^2 \rangle_{(L^2(\Gamma_1))^2} + \omega \langle U^3, \nu \cdot \nabla W^3 \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \\ &= \langle U, \mathcal{A}_0 W \rangle_{\mathcal{H}} + \langle (U^1, U^2, U^3)'|_{\Gamma_1}, u \rangle_{\mathcal{U}} = \langle (U^1, U^2, U^3)'|_{\Gamma_1}, u \rangle_{\mathcal{U}} =: \langle \mathcal{B}^*V, u \rangle_{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Desweiteren folgt unter Beachtung von  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{-1})$

<sup>3</sup>Diese Lösung wird manchmal auch Extrapolationslösung genannt.

**Satz 4.2.8.** Es existiert eine eindeutige schwache Lösung  $V \in H^1([0, T], \mathcal{H}_{-1})$  von (4.39).

**Bemerkung 4.2.9.** Es sei angemerkt, dass der Steuerungsoperator  $\mathcal{B}$  nicht zulässig im Sinne der Definition B.1.4 ist. Dies bedeutet aber keineswegs, dass das Steuerungsproblem nicht lösbar ist. Dass  $\mathcal{B}$  nicht zulässig ist, führt nur dazu, dass die Abbildung  $u \mapsto V$  unstetig in der Topologie von  $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{H})$  ist und dass die Funktion  $V$  den Raum  $\mathcal{H}$  auf dem Weg zum gewünschten Endzustand verlassen kann. Es ist aber trotzdem sinnvoll, das Steuerungsproblem ausgerechnet im Raum  $\mathcal{H}$  zu betrachten, da dieser dem Energieraum entspricht und deshalb vom physikalischen Interesse ist.

Die selben Schwierigkeiten treten auch beim NEUMANNschen Randsteuerungsproblem für die Wellengleichung auf. Betrachtet man z. B. wie in [45] das Problem

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ w(0, \cdot) &= w^0, \quad w_t(0, \cdot) = w^1 \text{ in } \Omega, \\ w &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= u \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1 \end{aligned}$$

mit  $u \in L^2((0, T), L^2(\Gamma_1))$ , so liegt  $w(T)$  im Allgemeinen in einem Raum  $\mathcal{Z}$ , welcher strikt größer als  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  ist und sogar vom Gebiet  $\Omega$  abhängt. So gilt insbesondere

- $\mathcal{Z} = H^{2/3}(\Omega) \times H^{-1/3}(\Omega)$ , falls  $\Omega = B(0, R)$ ,
- $\mathcal{Z} \supset H^{3/4-\varepsilon}(\Omega) \times H^{-1/4-\varepsilon}(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, falls  $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ .

### 4.3 Exakte Steuerbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir beweisen, dass das System (4.25)–(4.27) exakt steuerbar ist. Dabei bedienen wir uns der Methoden aus Anhang B. Im Folgenden gehen wir von einer isotropen Platte aus.

**Voraussetzung 4.3.1.** Für  $D > 0$ ,  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$  gelte

$$S = D \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Unter gewissen Voraussetzungen besagt das RUSSELLSche Prinzip (s. [72, Chapter 5]): kann man ein konservatives hyperbolisches System zweiter Ordnung durch Randkopplungen exponentiell stabilisieren, dann ist das System auch exakt steuerbar, sollten die Kopplungen durch Randsteuerungen ersetzt werden. In manchen Fällen ist sogar die Umkehrung gültig (s. [87]). Da es sich bei den Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div}(\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \tag{4.40}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} w = |v| = \vartheta &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}'SDv - \gamma\vartheta_t \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1 \end{aligned}$$

um ein nicht konservatives System handelt, da für die in (4.44) definierte natürliche Energie  $\mathcal{E}$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\alpha \int_{\Omega} \vartheta_t^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} v \cdot \vartheta_t dx$$

gilt, ist das RUSSELLSche Prinzip leider nicht anwendbar, sodass wir das System gesondert untersuchen müssen.

### 4.3.1 Eine Energieabschätzung

Wir betrachten die homogene Version des Problems (4.25)–(4.27), welche sich als

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div} (\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}'SDv + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \alpha \vartheta_t + \eta \vartheta + \lambda \operatorname{div} v + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega \end{aligned} \quad (4.41)$$

mit den Rand-

$$\begin{aligned} w = |v| = \vartheta &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}'SDv - \gamma\vartheta_t \nu &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1 \end{aligned} \quad (4.42)$$

und Anfangsbedingungen

$$w(0) = w^0, w_t(0) = w^1, v(0) = v^0, v_t(0) = v^1, \vartheta(0) = \vartheta^0, \vartheta_t(0) = \vartheta^1 \quad (4.43)$$

schreibt. Die zu (4.41)–(4.42) gehörige Energie lautet

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_1 w_t^2 + \rho_2 |v_t|^2 + \rho_3 \vartheta_t^2 + K |\nabla w + v|^2 + |\sqrt{S}Dv|^2 + \omega |\nabla \vartheta|^2 + \eta \vartheta^2 dx. \quad (4.44)$$

Mit dem in der Gleichung (4.30) eingeführten Operator  $\mathcal{A}$  lässt sich (4.41)–(4.43) als ein System erster Ordnung umschreiben

$$V_t(t) = \mathcal{A}V(t) \text{ für } t > 0, \quad V(0) = V^0, \quad (4.45)$$

wobei

$$V(t) := (w, v, \vartheta, w_t, v_t, \vartheta_t)(t)', \quad V^0 := (w^0, v^0, \vartheta^0, w^1, v^1, \vartheta^1)'.$$

Da der Operator  $\mathcal{A}$  nach Korollar 4.2.4 eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $\mathcal{H}$  erzeugt, ist das Problem (4.45) durch  $V(t) = S(t)V^0$  eindeutig lösbar, sodass die Unbekannten  $(w, v, \vartheta)'$  eindeutig bestimmt sind. Überdies gilt

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|V(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \text{ für } t \geq 0.$$

**Satz 4.3.2.** Es gelte  $\lambda \leq 2\alpha$ . Dann gibt es Konstanten und  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  so, dass

$$\mathcal{E}(0)e^{-\alpha_1 t} \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{\alpha_2 t} \text{ für alle } t \geq 0 \text{ gilt.}$$

**Beweis:** Multipliziert man die Gleichungen in (4.42) skalar in  $L^2(\Omega)$ ,  $(L^2(\Omega))^2$ ,  $L^2(\Omega)$  mit  $w_t$ ,  $v_t$  bzw.  $\vartheta_t$  und integriert partiell, so folgt

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = - \int_{\Omega} \alpha \vartheta_t^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} v \cdot \vartheta_t dx, \quad (4.46)$$

was wir mit der YOUNGSchen sowie der KORNSchen Ungleichung (s. Satz 2.1.4)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq - \int_{\Omega} \left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right) \vartheta_t^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} v)^2 dx \leq \frac{\lambda}{c_{K,1}} \int_{\Omega} |\sqrt{S}Dv|^2 dx \leq \frac{\lambda}{c_{K,1}} \mathcal{E}(t)$$

abschätzen können. Unter Verwendung des GRONWALLSchen Lemmas bekommen wir

$$\mathcal{E}(t) \leq e^{\alpha_2 t} \mathcal{E}(0) \text{ für } t \geq 0,$$

wobei  $\alpha_2 = \frac{\lambda}{c_{K,1}}$ . Analog ergibt sich mit (4.46)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &\geq - \int_{\Omega} \left(\alpha + \frac{\lambda}{2}\right) \vartheta_t^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &\geq - \int_{\Omega} \left(\alpha + \frac{\lambda}{2}\right) \vartheta_t^2 dx - \frac{\lambda}{c_{K,1}} \int_{\Omega} |\sqrt{S}Dv|^2 dx \geq - \frac{\max\{\alpha + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{c_{K,1}}\}}{\min\{\rho_3, 1\}} \mathcal{E}(t) \end{aligned}$$

und damit auch

$$\mathcal{E}(t) \geq \mathcal{E}(0)e^{-\alpha_1 t} \text{ für } t \geq 0,$$

wobei  $\alpha_1 := \frac{\max\{\alpha + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{c_{K,1}}\}}{\min\{\rho_3, 1\}}$ . □

**Korollar 4.3.3.** Für all  $t \geq 0$  und  $V_0 \in D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^*)$  gilt

$$\|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 e^{-\alpha_1 t} \leq \|S(t)V_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \|S^*(t)V_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 e^{\alpha_2 t},$$

wobei  $(S^*(t))_{t \geq 0}$  die zu  $(S(t))_{t \geq 0}$  duale  $C^0$ -Halbgruppe bezeichnet.

### 4.3.2 Beobachtbarkeitsungleichung und Exakte Steuerbarkeit

Um die Lösbarkeit des exakten Randsteuerungsproblems 4.1.3 in der Klasse der  $L^2$ -Steuerungen zu beweisen, genügt nach Satz B.2.3 zu zeigen, dass der zum Steuerungszustandsoperator

$$\mathcal{L}_T: L^2((0, T), (L^2(\Gamma_1))^4) \rightarrow \mathcal{H}, \quad u \mapsto \int_0^T S_{-1}(T-t) \mathcal{B}u(t) dt$$

duale Operator  $\mathcal{L}_T^*$  für hinreichend große  $T > 0$  einen stetigen Inversen besitzt, wobei  $(S_{-1}(t))_{t \geq 0}$  die Erweiterung von  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $\mathcal{H}_{-1}$  bezeichnet (s. Satz A.1.20). Ist  $\mathcal{B}$  ein zulässiger Steuerungsoperator, so ist diese Bedingung dazu äquivalent, dass für das duale Problem die sogenannte Beobachtbarkeitsungleichung

$$\int_0^T \|\mathcal{B}^* S^*(t)V_0\|_{\mathcal{U}}^2 dt \geq C_T \|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 \text{ für alle } V_0 \in D(\mathcal{A}^*)$$

mit einem  $C_T > 0$  gilt. Die Halbgruppe  $(S^*(t))_{t \geq 0}$  stellt den Lösungsoperator für die Gleichung

$$V_t(t) = \mathcal{A}^* V(t) \text{ für } t > 0, \quad V(0) = V^0$$

dar. Unter Beachtung der Struktur von  $\mathcal{A}^*$

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_0^* + \mathcal{A}_r^* = -\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_r^*,$$

wobei  $\mathcal{A}_r^*$  ein beschränkter Operator ist, bekommen wir wegen (4.28) ein äquivalentes System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K((w_{x_1} + \psi)_{x_1} + (w_{x_2} + \varphi)_{x_2}) + \mathcal{R}_1(\xi, \nabla \xi, \xi_t) &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - D(\psi_{x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) + \gamma \vartheta_{tx_1} + \mathcal{R}_2(\xi, \nabla \xi, \xi_t) &= 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - D(\varphi_{x_2 x_2} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) + \gamma \vartheta_{tx_2} + \mathcal{R}_3(\xi, \nabla \xi, \xi_t) &= 0, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \alpha \vartheta + \gamma(\psi_{tx_1} + \varphi_{tx_2}) + \mathcal{R}_4(\xi, \nabla \xi, \xi_t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

in  $(0, T) \times \Omega$  mit den Rand-

$$\begin{aligned} w = \psi = \varphi = 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_0, \\ K(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi) = 0 \text{ in } [0, T] \times \Gamma_1, \\ D(\nu_1 \psi_{x_1} + \mu \nu_1 \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_2) = 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_2 \varphi_{x_2} + \mu \nu_2 \psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_1) = 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1 \end{aligned} \quad (4.48)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w(0) = w^0, \quad w_t(0) = w^1, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad \psi_t(0) = \psi^1, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi_t(0) = \varphi^1, \quad \vartheta(0) = \vartheta^0, \quad \vartheta_t(0) = \vartheta^1, \end{aligned} \quad (4.49)$$

wobei  $\xi = (w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  und

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_4)': (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^{4 \times 2} \times (L^2(\Omega))^4 \rightarrow (L^2(\Omega))^4$$

ein beschränkter linearer Operator ist, welcher entsprechend durch  $\mathcal{A}_r^*$  definiert ist.

Ferner erklären wir die Räume

$$\mathcal{X} := (L^2(\Omega))^4, \quad \mathcal{V} := (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4$$

mit der üblichen Produkttopologie und führen die Bilinearform  $c: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(w, v, \vartheta; \hat{w}, \hat{v}, \hat{\vartheta}) \mapsto \rho_1 \int_{\Omega} w \hat{w} dx + \rho_2 \int_{\Omega} v \cdot \hat{v} dx + \rho_3 \int_{\Omega} \vartheta \hat{\vartheta} dx,$$

sowie die Bilinearform  $a: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(w, v, \vartheta; \hat{w}, \hat{v}, \hat{\vartheta}) \mapsto (Ka_1 + a_2 + a_3)(w, v, \vartheta; \hat{w}, \hat{v}, \hat{\vartheta}),$$

ein, wobei

$$\begin{aligned} a_1: (w, \psi, \varphi, \vartheta; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{\vartheta}) &\mapsto \int_{\Omega} [(w_{x_1} + \psi)(\hat{w}_{x_1} + \hat{\psi}) + (w_{x_2} + \varphi)(\hat{w}_{x_2} + \hat{\varphi})] dx, \\ a_2: (w, \psi, \varphi, \vartheta; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{\vartheta}) &\mapsto \\ &D \int_{\Omega} [\psi_{x_1} \hat{\psi}_{x_1} + \varphi_{x_2} \hat{\varphi}_{x_2} + \mu \psi_{x_1} \hat{\varphi}_{x_2} + \mu \varphi_{x_2} \hat{\psi}_{x_1} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})(\hat{\psi}_{x_2} + \hat{\varphi}_{x_1})] dx, \\ a_3: (w, \psi, \varphi, \vartheta; \hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{\vartheta}) &\mapsto \omega \int_{\Omega} \nabla \vartheta \cdot \nabla \hat{\vartheta} dx + \eta \int_{\Omega} \vartheta \hat{\vartheta} dx. \end{aligned}$$

**Definition 4.3.4.** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  und sei  $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto x - x_0$ . Wir definieren die Funktionale

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) \{ D[\psi_{x_1}^2 + \varphi_{x_1}^2 + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})^2 + 2\mu\psi_{x_1}\varphi_{x_2} - (1-\mu)(\psi_v^2 + \varphi_v^2) \\ &\quad - (1+\mu)(\nu_1\psi_v + \nu_2\varphi_v)^2] + K(w_{x_1}^2 + w_{x_2}^2 - 2w_v^2) + \omega\vartheta_v^2 \} d\Gamma dt, \\ J_1 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \{ D[\psi_{x_1}^2 + \varphi_{x_1}^2 + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})^2 + 2\mu\psi_{x_1}\varphi_{x_2}] \\ &\quad + K[(\psi + w_{x_1})^2 + (\varphi + w_{x_2})^2] + \omega|\nabla\vartheta|^2 + \eta\vartheta^2 \} d\Gamma dt, \\ J_2 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \{ \rho_1 w_t^2 + \rho_2(\psi_t^2 + \varphi_t^2) + \rho_3\vartheta_t^2 \} d\Gamma dt. \end{aligned}$$

**Lemma 4.3.5.** Zu jedem  $T > 0$  existieren  $c_T > 0$  und  $C_T > 0$  so, dass die Lösung  $(w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  des Problems (4.47)–(4.49) der Ungleichung

$$C_T \mathcal{E}_0 \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_\gamma \quad (4.50)$$

gleichmäßig in  $\gamma \in [0, c_T]$  für alle Anfangsdaten genügt, falls

$$\lambda \leq 2\alpha \text{ und } \min \left\{ \max\{1, \|m\|_\infty\} \max\{1, \alpha, \gamma, \lambda\} \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}{\min\{K, D, \omega, \eta\}}, \gamma \right\} \leq c_T$$

gilt, wobei  $\|m\|_\infty^2 := \|m\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)}^2$  und

$$J_\gamma = c_\gamma \max\{1, \|m\|_\infty^2\} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\partial_t(w, \psi, \varphi, \vartheta)'|^2 + |\nabla(w, \psi, \varphi, \vartheta)'|^2) d\Gamma dx dt \quad (4.51)$$

für ein  $c_\gamma$  mit  $c_\gamma \rightarrow 0$  für  $\gamma \rightarrow 0$ .

**Beweis:** Zur Abkürzung setzen wir  $\xi := (w, \psi, \varphi, \vartheta)'$ ,  $\hat{\xi} := (\hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{\vartheta})'$ , multiplizieren die Gleichung (4.47) skalar in  $(L^2(\Omega))^4$  mit  $\hat{\xi} \in (H^1(\Omega))^4$  und finden mit partieller Integration

$$\begin{aligned} c(\xi_{tt}, \hat{\xi}) + a(\xi, \hat{\xi}) - K \int_{\Gamma_0} w_\nu \hat{w} d\Gamma - \frac{D}{2} \int_{\Gamma_0} [(1-\mu)\psi_v + (1+\mu)\nu_1(\psi_{x_1} + \varphi_{x_2})] \hat{\psi} d\Gamma \\ - \frac{D}{2} \int_{\Gamma_0} [(1-\mu)\varphi_\mu + (1+\mu)\nu_2(\psi_{x_1} + \varphi_{x_2})] \hat{\varphi} d\Gamma - \omega \int_{\Gamma_0} \vartheta_\nu \hat{\vartheta} d\Gamma \\ + \gamma \int_\Omega (\vartheta_{tx_1} \hat{\psi} + \vartheta_{tx_2} \hat{\varphi} + \psi_{tx_1} \hat{\vartheta} + \varphi_{tx_2} \hat{\vartheta}) dx + \int_\Omega \mathcal{R}(\xi, \nabla \xi, \xi_t) \cdot \hat{\xi} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Wir substituieren  $\hat{\xi} = (\hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{\vartheta})' := (\nabla w \cdot \nu, \nabla \psi \cdot \nu, \nabla \varphi \cdot \mu, \nabla \vartheta \cdot \nu)'$ , setzen dies in (4.52) ein, integrieren über die Zeitvariable und finden

$$\begin{aligned} I_c + I_a + I_{\Gamma_0} + I_\gamma + I_R &\equiv \int_0^T c(\xi_{tt}, \hat{\xi}) + a(\xi, \hat{\xi}) dt \\ &- K \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) w_\nu^2 d\Gamma dt - \frac{D}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} [(1-\mu)\psi_v + (1+\mu)\nu_1(\varphi_{x_1} + \psi_{x_2})] (m \cdot \nu) \psi_v d\Gamma dt \\ &- \frac{D}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} [(1-\mu)\varphi_\nu + (1+\mu)\nu_2(\psi_{x_1} + \varphi_{x_2})] (m \cdot \nu) \varphi_\nu d\Gamma dt - \omega \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) \vartheta_\nu^2 d\Gamma dt \quad (4.53) \\ &+ \gamma \int_0^T \int_\Omega (\vartheta_{tx_1} (m \cdot \nabla \psi) + \vartheta_{tx_2} (m \cdot \nabla \varphi) + \psi_{tx_1} (m \cdot \nabla \vartheta) + \varphi_{tx_2} (m \cdot \nabla \vartheta)) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \mathcal{R} \cdot \hat{\xi} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Nun formen wir die Integrale in (4.53) geschickt um.

i) Wir beginnen mit  $I_c$  und sehen uns einen typischen Term genau an. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} K \int_0^T \int_{\Omega} w_{tt}(m \cdot \nabla w) dx dt &= K \int_{\Omega} w_t(m \cdot \nabla w) dx \Big|_0^T - K \int_0^T \int_{\Omega} w_t(m \cdot \nabla w) dx dt \\ &= K \int_{\Omega} w_t(m \cdot \nabla w) dx \Big|_0^T + K \int_0^T \int_{\Omega} w_t^2 dx dt - \frac{K}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(m w_t^2) dx dt \\ &= K \int_{\Omega} w_t(m \cdot \nabla w) dx \Big|_0^T + K \int_0^T \int_{\Omega} w_t^2 dx dt - \frac{K}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) w_t^2 d\Gamma dt, \end{aligned}$$

wobei wir die Identität

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(m w_t^2) dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div} m) w_t^2 + 2w_t(\nabla w_t \cdot m) dx = 2 \int_{\Omega} w_t^2 dx + 2w_t(\nabla w_t \cdot m) dx$$

benutzt haben. Formt man die restlichen Terme analog um, so folgt

$$\begin{aligned} I_c &= Y_1 + \int_0^T c(w_t, \psi_t, \varphi_t, \vartheta_t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \{ \rho_1 w_t^2 + \rho_2 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) + \rho_3 \vartheta_t^2 \} d\Gamma dt \\ &= Y_1 + \int_0^T c(w_t, \psi_t, \varphi_t, \vartheta_t) dt - J_2, \end{aligned} \quad (4.54)$$

wobei  $Y_1 = \int_{\Omega} \{ \rho_1 w_t(m \cdot \nabla w) + \rho_2 \psi_t(m \cdot \nabla \psi) + \rho_2 \varphi_t(m \cdot \nabla \varphi) + \rho_3 \vartheta_t(m \cdot \nabla \vartheta) \} dx \Big|_0^T$ .

ii) Nun analysieren wir die Terme in  $I_a$ . Die Bilinearformen  $a_1$  und  $a_2$  lassen sich dabei genauso wie in [42], Theorem 4.1, behandeln. Man bekommt

$$\begin{aligned} a_1(w, \psi, \varphi, \vartheta; m \cdot \nabla w, m \cdot \nabla \psi, m \cdot \nabla \varphi, m \cdot \nabla \vartheta) &= D \int_{\Omega} (\psi + w_{x_1})(m \cdot \psi + (m \cdot \nabla w)_{x_1}) + (\varphi + w_{x_2})(m \cdot \nabla \varphi + (m \cdot \nabla w)_{x_2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \{ m [(w_{x_1} + \psi)^2 + (w_{x_2} + \varphi)^2] \} dx - \int_{\Omega} [(w_{x_1} + \psi)\psi + (w_{x_2} + \varphi)\varphi] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \{ m [(w_{x_1} + \psi)^2 + (w_{x_2} + \varphi)^2] \} dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla w|^2 d\Gamma - \\ &\quad \int_{\Omega} [(w_{x_1} + \psi)\psi + (w_{x_2} + \varphi)\varphi] dx. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} a_2(w, \psi, \varphi, \vartheta; m \cdot \nabla w, m \cdot \nabla \psi, m \cdot \nabla \varphi, m \cdot \nabla \vartheta) &= D \int_{\Omega} [\psi_{x_1}(m \cdot \nabla \psi)_{x_1} + \varphi_{x_2}(m \cdot \nabla \varphi)_{x_2} + \mu \psi_{x_1}(m \cdot \nabla \varphi)_{x_2} + \mu \varphi_{x_2}(m \cdot \nabla \psi)_{x_1} \\ &\quad + \frac{1-\mu}{2} (\psi_{x_2} + \varphi_{x_1}) ((m \cdot \nabla \psi)_{x_2} + (m \cdot \nabla \varphi)_{x_1})] dx \\ &= \frac{D}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \{ m [\psi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + 2\mu \psi_{x_1} \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2} (\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})^2] \} dx \\ &= \frac{D}{2} \int_{\Gamma} \operatorname{div} \{ m [\psi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + 2\mu \psi_{x_1} \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2} (\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})^2] \} d\Gamma. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur rein mechanischen Situation in [42] müssen wir noch  $a_3$  umzuformen. Triviale Identitäten

$$\begin{aligned}\nabla\vartheta \cdot \nabla(m \cdot \nabla\vartheta) &= 2|\nabla\vartheta|^2 + (\nabla\vartheta \cdot m)\Delta\vartheta, \\ \operatorname{div}(m|\nabla\vartheta|^2) &= 2|\nabla\vartheta|^2 + 2(m \cdot \nabla\vartheta)\Delta\vartheta, \\ \operatorname{div}(m\vartheta^2) &= 2\vartheta^2 + 2(m \cdot \nabla\vartheta)\vartheta\end{aligned}$$

liefern

$$\begin{aligned}a_3(w, \psi, \varphi, \vartheta; m \cdot \nabla w, m \cdot \nabla \psi, m \cdot \nabla \varphi, m \cdot \nabla \vartheta) &= \omega \int_{\Omega} \nabla\vartheta \cdot \nabla(m \cdot \vartheta) + \eta\vartheta(m \cdot \nabla\vartheta) dx \\ &= \frac{\omega}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(m|\nabla\vartheta|^2) dx + \omega \int_{\Omega} |\nabla\vartheta|^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(m\vartheta^2) dx + \eta \int_{\Omega} \vartheta^2 dx \\ &= \omega \int_{\Omega} |\nabla\vartheta|^2 dx + \frac{\omega}{2} \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla\vartheta|^2 d\Gamma + \eta \int_{\Omega} \vartheta^2 dx + \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \vartheta^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

Zusammenfassen ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^T a(w, \psi, \varphi, \vartheta; m \cdot \nabla w, m \cdot \nabla \psi, m \cdot \nabla \varphi, m \cdot \nabla \vartheta) dt &= J_1 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) \\ &\quad \{K|\nabla w|^2 + D[\psi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + 2\mu\psi_{x_1}\varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})^2] + \omega|\nabla\vartheta|^2\} d\Gamma dt \quad (4.55) \\ &\quad \omega \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla\vartheta|^2 dx dt - K \int_0^T \int_{\Omega} [(w_{x_1} + \psi)\psi + (w_{x_2} + \varphi)\varphi] dx dt.\end{aligned}$$

iii) Wegen  $\psi_{x_i} = \nu_i\psi_\nu$ ,  $\varphi_{x_i} = \nu_i\varphi_\nu$ ,  $i = 1, 2$ , folgt

$$\begin{aligned}I_{\Gamma_0} &= - \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) \{Kw_\nu^2 + \frac{D}{2}[(1-\mu)(\psi_\nu^2 + \varphi_\nu^2) + \\ &\quad (1+\mu)(\nu_1\psi_\nu + \nu_2\varphi_\nu)^2] + \omega\vartheta_\nu^2\} d\Gamma dt.\end{aligned} \quad (4.56)$$

iv) Ein weiterer Unterschied zu den rein elastischen Gleichungen ist der Kopplungsterm  $I_\gamma$ . Diesen kann man wie folgt behandeln

$$\begin{aligned}I_\gamma &= \gamma \int_0^T \int_{\Omega} (\vartheta_{tx_1}(m \cdot \nabla\psi) + \vartheta_{tx_2}(m \cdot \nabla\psi) + \psi_{tx_1}(m \cdot \nabla\vartheta) + \psi_{tx_2}(m \cdot \nabla\vartheta)) dx dt \\ &= \gamma \int_0^T \int_{\Omega} (-\vartheta_{x_1}(m \cdot \nabla\psi_t) - \vartheta_{x_2}(m \cdot \nabla\psi_t) + \psi_{tx_1}(m \cdot \nabla\vartheta) + \psi_{tx_2}(m \cdot \nabla\vartheta)) dx dt + \tilde{Y}' \\ &= \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \{-\vartheta_{x_1}m_2\psi_{tx_2} - \vartheta_{x_2}m_1\varphi_{tx_1} + \varphi_{tx_2}m_1\vartheta_{x_1} + \psi_{tx_1}m_2\vartheta_{x_2}\} dx dt + \tilde{Y}' = \tilde{Y}.\end{aligned} \quad (4.57)$$

Die Funktionale  $\tilde{Y}'$ ,  $\tilde{Y}$  enthalten die bei der partiellen Integration entstehenden Randterme. So gilt

$$\tilde{Y}' = \gamma \int_{\Omega} (\vartheta_{x_1}(m \cdot \nabla\psi) + \vartheta_{x_2}(m \cdot \nabla\psi) + \psi_{x_1}(m \cdot \nabla\vartheta) + \psi_{x_2}(m \cdot \nabla\vartheta)) dx \Big|_0^T$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \tilde{Y}' + \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \psi_t\vartheta_{x_1} + \varphi_t\vartheta_{x_2} dx dt \\ &\quad + \gamma \int_0^T \int_{\Gamma_1} -\vartheta_{x_1}m_2\psi_t\nu_2 + \psi_t\nu_1m_2\vartheta_{x_2} - \vartheta_{x_2}m_1\varphi_t\nu_1 + \varphi_t\nu_2m_1\vartheta_{x_1} d\Gamma dt\end{aligned} \quad (4.58)$$

Mit Satz 4.3.2 ergibt sich die Abschätzung

$$|\tilde{Y}| \leq c_\gamma \max\{1, \|m\|_\infty\} (Te^{\alpha_2 T} \mathcal{E}(0) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\tilde{\xi}_t|^2 + |\nabla \tilde{\xi}|^2) d\Gamma) dx dt =: C_{\tilde{Y}} \mathcal{E}(0) + J_\gamma,$$

wobei  $c_\gamma \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$  für  $\gamma \rightarrow 0$ .

v) Da für  $\mathcal{R}$  wegen der Stetigkeit von  $\mathcal{A}_r$

$$|\mathcal{R}(\tilde{\xi}, \nabla \tilde{\xi}, \tilde{\xi}_t)| \leq \max\{\alpha, \gamma, \lambda\} (\|\tilde{\xi}\|_{(L^2(\Omega))^4} + \|\nabla \tilde{\xi}\|_{(L^2(\Omega))^{4 \times 2}}) + \max\{\alpha, \gamma, \lambda\} (\|\tilde{\xi}_t\|_{(L^2(\Omega))^4}$$

gilt, bekommen wir unter Beachtung von

$$\int_\Omega |m \cdot \nabla f|^2 dx \leq \|m\|_\infty^2 \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \text{ für } f \in \{w, \psi, \varphi, \vartheta\}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_{\mathcal{R}}(t)| &\leq \max\{1, \|m\|_\infty^2\} \max\{\alpha, \gamma, \lambda\} \left( \frac{\varepsilon'}{\min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}} + \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}{\min\{K, D, \omega, \eta\}} \right) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \\ &=: C_{\mathcal{R}} \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \text{ für } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.59)$$

wobei  $\varepsilon' > 0$  zunächst beliebig ist.

Fasst man (4.53), (4.54), (4.55) und (4.56) zusammen, so folgt

$$\begin{aligned} \int_0^T c(w_t, \psi_t, \varphi_t, \vartheta_t) dt + \int_0^T a_3(w, \psi, \varphi, \vartheta) dt + \int_0^T \int_\Omega [(w_{x_1} + \psi)\psi + (w_{x_2} + \varphi)\varphi] dx dt \\ + Y_1 + \tilde{Y} + I_{\mathcal{R}} = J_2 - J_1 - J_0 - J_\gamma. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Um die im Satz behauptete Aussage zu beweisen, bleibt uns die Störterme auf der linken Seite von (4.60) zu beseitigen oder geschickt abzuschätzen sowie ein Vielfaches von  $a(w_t, \psi_t, \varphi_t, \vartheta_t)$  durch geschickte Wahl von  $\hat{w}, \hat{\psi}, \hat{\varphi}, \hat{\vartheta}$  zu produzieren. Dabei richten wir uns zum Teil an den Beweis von [42, Theorem 4.1].

i') Wir setzen also  $\hat{w} = w, \hat{\psi} = \hat{\varphi} = \hat{\vartheta} = 0$  in (4.52) ein und erhalten nach partieller Integration

$$\rho_1 \int_0^T \int_\Omega w_t^2 dx dt - K \int_0^T [(w_{x_1} + \psi)w_{x_1} + (w_{x_2} + \varphi)w_{x_2}] dx dt - Y_2 = 0, \quad (4.61)$$

wobei  $Y_2 = \rho_1 \int_\Omega w w_t dx \Big|_0^T$ .

ii') Die Wahl  $\hat{w} = 0, \hat{\psi} = \psi, \hat{\varphi} = \varphi, \hat{\vartheta} = 0$  führt zu

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^T (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx dt - \int_0^T a_1(w, \psi, \varphi, \vartheta) dt \\ - K \int_0^T \int_\Omega [(w_{x_1} + \psi)\psi + (w_{x_2} + \varphi)\varphi] dx dt - Y_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

mit  $Y_3 = \rho_2 \int_\Omega [\psi_t \psi + \varphi_t \varphi] dx \Big|_0^T$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Nun multiplizieren wir (4.61) mit  $\varepsilon$ , (4.62) mit  $1 - \varepsilon$ , ziehen das Resultat von (4.60) ab und finden

$$\begin{aligned} & (1 - 2\varepsilon)\rho_1 \int_0^T \int_{\Omega} w_t^2 dxdt + \varepsilon \int_0^T c(w_t, \psi_t, \varphi_t, \vartheta_t) dt + (1 - \varepsilon) \int_0^T a_1(w, \psi, \varphi, \vartheta) dt \\ & + \int_0^T a_3(w, \psi, \varphi, \vartheta) dt + \varepsilon K \int_0^T \int_{\Omega} (w_{x_1}^2 + w_{x_2}^2 - \psi^2 - \varphi^2) dxdt \\ & + Y_1 + \varepsilon Y_2 + (1 - \varepsilon) Y_3 + \tilde{Y} = J_2 - J_1 - J_0 - J_{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Wendet man die YOUNGSche Ungleichung an

$$w_{x_1}^2 + w_{x_2}^2 \geq \frac{1}{2} [(w_{x_1} + \psi)^2 + (w_{x_2} + \varphi)^2] - (\psi^2 + \varphi^2),$$

so folgt mit der KORNschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon K \int_0^T \int_{\Omega} (w_{x_1}^2 + w_{x_2}^2 - \psi^2 - \varphi^2) dxdt & \geq \frac{\varepsilon K}{2} \int_0^T a_1(w, \psi, \varphi, \vartheta) + \varepsilon K \int_0^T \int_{\Omega} (\psi^2 + \varphi^2) dxdt \\ & \geq \frac{\varepsilon K}{2} \int_0^T a_1(w, \psi, \varphi, \vartheta) + \frac{\varepsilon K}{C_{K,1}} \int_0^T \int_{\Omega} (\psi^2 + \varphi^2) dxdt. \end{aligned}$$

Damit lässt sich (4.63) wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} & (1 - 2\varepsilon)\rho_1 \int_0^T \int_{\Omega} w_t^2 dxdt + \varepsilon \int_0^T c(w_t, \psi_t, \varphi_t, \vartheta_t) dt + [(1 - \varepsilon) - \frac{\varepsilon K}{C_{K,1}}] \int_0^T a_1(w, \psi, \varphi, \vartheta) dt \\ & + \frac{\varepsilon K}{2} \int_0^T a_2(w, \psi, \varphi, \vartheta) dt + \int_0^T a_3(w, \psi, \varphi, \vartheta) dt \\ & + I_{\mathcal{R}} + Y_1 + \varepsilon Y_2 + (1 - \varepsilon) Y_3 \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Nun wählen wir  $\varepsilon > 0$  so klein, dass

$$C_{\mathcal{E}} := \min \left\{ 1 - 2\varepsilon, \varepsilon, (1 - \varepsilon) - \frac{\varepsilon K}{C_{K,1}}, \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0.$$

Dann folgt offensichtlich

$$C_{\mathcal{E}} \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + Y_1 + \varepsilon Y_2 + (1 - \varepsilon) Y_3 + I_{\mathcal{R}} \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_{\gamma} \quad (4.65)$$

Mit Satz 4.3.2 können wir  $Y = Y_1 + \varepsilon Y_2 + (1 - \varepsilon) Y_3$

$$\begin{aligned} |Y| & \leq \left( \varepsilon' (\rho_1 w_t^2 + \rho_2 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) + \rho_3 \vartheta_t^2) + \frac{1}{\varepsilon'} \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} \| (w, \psi, \varphi, \vartheta)' \|_{(L^2(\Omega))^4}^2 \right) \Big|_0^T \\ & \leq \left( \varepsilon' + \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}{\min\{K, D, \omega, \eta\}} \right) \mathcal{E}(t) \Big|_0^T \\ & \leq (1 + e^{\alpha_2 T}) \left( \varepsilon' + \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}{\min\{K, D, \omega, \eta\}} \right) \mathcal{E}(0) =: C_Y \mathcal{E}(0) \end{aligned} \quad (4.66)$$

für ein  $\varepsilon' > 0$  abschätzen. Unter Benutzung von (4.59) und (4.65) erhalten wir

$$(C_{\mathcal{E}} - C_{\mathcal{R}}) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + Y + \tilde{Y} \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_{\gamma} \quad (4.67)$$

Nun wenden wir den Satz 4.3.2 auf (4.67) und (4.66) an und bekommen schließlich

$$C_T \mathcal{E}(0) := \left( \frac{1-e^{-\alpha_1 T}}{\alpha_1} (C_{\mathcal{E}} - C_{\mathcal{R}}) - (C_{\mathcal{Y}} + C_{\tilde{\mathcal{Y}}}) \right) \mathcal{E}(0) \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_{\gamma}.$$

Seien  $T, \alpha > 0$  fest. Wir wählen  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $C_{\mathcal{E}} > 0$  gilt. Ferner seien  $\varepsilon', \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}{\min\{K, D, \omega, \eta\}} > 0$  so klein, dass  $C_{\mathcal{R}} < C_{\mathcal{E}}$  ist. Dann werden  $\varepsilon', \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}{\min\{K, D, \omega, \eta\}}, \gamma$  eventuell so verkleinert, dass  $C_T > 0$  gilt (zu beachten ist, dass  $\alpha_1$  in  $\gamma$  monoton fallend ist). Die Konstantenwahl war nach Voraussetzung möglich.  $\square$

**Bemerkung 4.3.6.** Wenn man die genaue Gestalt von  $\mathcal{R}_4 = \alpha_t \vartheta_t$  im Beweis von Lemma 4.3.5 ausnutzt, kann man die Voraussetzungen von Lemma 4.3.5 abschwächen: Es muss gelten  $\lambda \leq 2\alpha$  und

$$\max \left\{ \max\{1, \|m\|_{\infty}\} \max\{1, \gamma, \lambda\} \frac{\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}}{\min\{K, D, \omega, \eta\}}, \max\{1, \|m\|_{\infty}\} \max\{1, \alpha\} \frac{\rho_3}{\min\{\omega, \eta\}}, \gamma \right\} \leq c_T,$$

indem man die Parameter  $\alpha$  und  $K, D$  voneinander entkoppelt. Diese Voraussetzung ist z. B. von hinreichend dünnen Platten (Plattendicke  $h \rightarrow 0$  und damit  $\rho_1, \rho_2 \rightarrow 0$ ), deren Relaxationsparameter (proportional zu  $\tau_0$ ) und Wärmedehnungskoeffizient (proportional zu  $\gamma$ ) genügend klein sind, erfüllt.

**Voraussetzung 4.3.7.** Damit die Funktionale  $J_0, J_1, J_2$  auf  $\Gamma_0$  bzw.  $\Gamma_1$  positiv sind, benötigen wir eine geometrische Voraussetzung an die Mengen  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$ : Es existiere ein  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  so, dass

$$m \cdot v \leq 0 \text{ auf } \Gamma_0 \text{ und } m \cdot v \geq \sigma \text{ auf } \Gamma_1 \text{ gilt.} \quad (4.68)$$

Ein Tripel  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  mit der Eigenschaft (4.68) heißt stark sternkomplementär-sternförmig.

Die Bedingung 4.3.7 findet man typischerweise in der Literatur über die Randwertsteuerbarkeit von hyperbolischen Systemen durch ROBINSche oder NEUMANNsche Randsteuerungen (cf. [11], [42], [43], [45]). Gleichung (4.68) hat ihren Ursprung in der Streutheorie: es besteht ein Zusammenhang zwischen der Energiedissipation und der Streuung durch ein reflektierendes Hindernis (s. [73] und [43, Chapter 1.2], vgl. auch [5]).

**Satz 4.3.8.** Unter Voraussetzung 4.3.7 sowie den Bedingungen von Satz 4.3.5 gibt es eine Konstante  $C_T > 0$  so, dass

$$i) \frac{1}{\|m\|_{\infty}} C_T \mathcal{E}(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\rho_1 w_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_2 \varphi_t + \rho_3 \vartheta_t^2) d\Gamma dt,$$

$$ii) \int_0^T \|\mathcal{B}^* S^*(t) V^0\|_{\mathcal{H}}^2 dt \geq C_T \|V^0\|_{\mathcal{H}}^2 \text{ für alle } V^0 \in D(\mathcal{A}^*)$$

gilt, wobei  $(w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  eine Lösung des dualen homogenen Problems (4.47)–(4.49) ist.

**Beweis:**

i) Unter Beachtung von  $\psi_{x_i} = v_i \psi_v, \varphi_{x_i} = v_i \varphi_v, i = 1, 2$ , findet man durch Umformen

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot v) \left\{ D \left[ (v_1 \psi_v + v_2 \varphi_v)^2 + \frac{1-\mu}{2} (v_2 \psi_v - v_1 \varphi_v)^2 \right] + K w_v^2 + \omega \vartheta_v^2 + \eta \vartheta^2 \right\} d\Gamma dt \geq 0.$$

Die KORNschen Ungleichung liefert die Abschätzung

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) \{ D[(v_1 \psi_\nu + v_2 \varphi_\nu)^2 + \frac{1-\mu}{2}(v_2 \psi_\nu + v_1 \varphi_\nu)^2] + K(\frac{\partial w}{\partial \nu})^2 + \omega(\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu})^2 + \eta \vartheta^2 \} dx dt \geq \frac{\sigma}{2} \min\{C_K, \omega, \eta\} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla \xi|^2 dx dt.$$

Desweiteren gilt

$$J_2 \leq \frac{\|m\|_\infty}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\rho_1 w_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_2 \varphi_t + \rho_3 \vartheta_t^2) d\Gamma dt.$$

Nun spalten wir  $J_\gamma$  gemäß

$$\begin{aligned} J_\gamma &= c_\gamma \max\{1, \|m\|_\infty\} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\partial_t(w, \psi, \varphi, \vartheta)'|^2 dx dt + |\nabla(w, \psi, \varphi, \vartheta)'|^2) dx dt \\ &\equiv J_{\gamma,t} + J_{\gamma,x} \end{aligned}$$

auf. Es gilt

$$J_{\gamma,t} \leq c_2 J_2 := \frac{2c_\gamma}{\min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}} J_2, \quad J_{\gamma,x} \leq c_1 J_1 := \frac{c_\gamma}{\sigma \min\{C_K, \omega, \eta\}} J_1,$$

woraus sich

$$C_T \mathcal{E}(0) \leq (1 - c_1) J_2 - (1 - c_0) J_1$$

ergibt. Für hinreichend kleine  $\gamma$  sind  $1 - c_1$  und  $1 - c_0$  positiv. Damit folgt

$$0 < \frac{2c_T}{1-c_1} \mathcal{E}_0 \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\rho_1 w_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_2 \varphi_t + \rho_3 \vartheta_t^2) d\Gamma dt.$$

ii) Wir setzen  $V(t) := S^*(t)V^0$ . Unter Benutzung der Gestalt von  $\mathcal{A}_0^{-1}$  ergibt sich

$$(V^4, V^5, V^6)' = ((\mathcal{A}_0^{-1}V)^1, (\mathcal{A}_0^{-1}V)^2, (\mathcal{A}_0^{-1}V)^3)'$$

Mit i) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \|((\mathcal{A}_0 V)^1, (\mathcal{A}_0 V)^2, (\mathcal{A}_0 V)^3)'(t)|_{\Gamma_1}\|_{\mathcal{U}}^2 dt &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} \|(V^4, V^5, V^6)'(t)|_{\Gamma_1}\|_{\mathcal{U}}^2 dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} (w_t^2 + \psi_t^2 + \varphi_t^2 + \vartheta_t^2) d\Gamma dt \geq \frac{1}{\|m\|_\infty} \mathcal{E}(0) = \frac{2}{\|m\|_\infty} \|V^0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar 4.3.9.** Das Randsteuerungsproblem 4.1.3 ist in der Klasse der  $L^2(\Gamma_1)$ -Steuerungen exakt lösbar: Unter Voraussetzungen von Satz 4.3.8 gibt es zu jedem Anfangs- bzw. Endzustand  $(w^0, \psi^0, \varphi^0, \vartheta^0)' \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4$  bzw.  $(w^T, \psi^T, \varphi^T, \vartheta^T)' \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4$  eine Steuerungsfunktion  $u \in L^2((0, T), (L^2(\Gamma_1))^4)$ , welche die sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Anfangszustand befindende Zustandsgröße  $(w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  (gegeben als schwache Lösung der partiellen Differentialgleichung) in den Endzustand lenkt.

**Beweis:** Die Behauptung folgt mit Satz B.2.3.  $\square$

Die Einschränkung an die Koeffizienten stellt einen wesentlichen Unterschied zu den rein elastischen REISSNER-MINDLIN-Gleichungen dar. Im Gegensatz zum thermoelastischen Problem (4.41)–(4.43) ist das Steuerungsproblem durch NEUMANNschen Randsteuerungen im rein elastischen Fall für alle Koeffizienten lösbar, sofern  $T$  hinreichend groß ist. Dass eine solche Einschränkung in der dissipativen Situation technisch unabdingbar ist, kann man auch für die gedämpfte Wellengleichung beobachten. López et al. haben in [53] ein verteiltes Steuerungsproblem

$$\begin{aligned} \varepsilon w_{tt} - \Delta w + w_t &= \chi_\omega u && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ w &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \partial\Gamma, \\ w(0) = w^0, \quad w_t(0) &= w^1 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

studiert, wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einem  $C^\infty$ -Rand  $\Gamma$  ist und  $\chi_\omega$  die Indikatorfunktion einer offenen Menge  $\omega$ ,

$$\Gamma_0(x_0) := \{x \in \Gamma \mid (x - x_0) \cdot \nu > 0\} \subset \omega \subset \Omega \text{ für ein } x_0 \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet. Die Kleinheitsbedingung an  $\varepsilon$  war wichtig, um unter Benutzung einer globalen CARLEMAN-Ungleichung die Beobachtbarkeitsungleichung

$$\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C_1(T) e^{c_2(T)/\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dx dt \quad (4.69)$$

für das duale System

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi_{tt} - \Delta \varphi - \varphi_t &= \chi_\omega u && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \varphi &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \Gamma, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi_t(0) &= \varphi^1 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

zu beweisen.

## 4.4 Dissipationsfreie Platten

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir die Ergebnisse der letzten Abschnitte auf dissipationsfreie Platten übertragen. In diesem Fall können wir nicht nur die Voraussetzungen an die Koeffizienten des Systems abschwächen, sondern ein exaktes Randsteuerbarkeitsresultat mit einer gleichmäßiger Konstanten für hinreichend große  $T$  beweisen. In [24] haben Green und Naghdi eine Thermoelastizitätstheorie ohne Energiedissipation – die sogenannte Thermoelastizität vom Typ II – hergeleitet. Angewendet auf die REISSNER-MINDLIN-Plattentheorie führt dies auf das folgende Modell

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div}(\nabla w + v) &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \end{aligned} \quad (4.70)$$

wobei die Unbekannten die selbe physikalische Bedeutung wie früher haben. Die konstanten Parameter setzen sich aus den physikalischen Konstanten zusammen und unterscheiden sich von denen in der Gleichung (4.14). Wir betrachten also das folgende Problem.

**Problem 4.4.1.** Bestimme die Steuerfunktionen  $(u_1, u_2, u_3)': [0, T] \times \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  so, dass die Lösung  $(w, v, \vartheta)'$  des Problems

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K \operatorname{div}(\nabla w + v) &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_2 v_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} v + K(v + \nabla w) + \gamma \nabla \vartheta_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \gamma \operatorname{div} v_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \end{aligned} \quad (4.71)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} w = |v| = \vartheta &= 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_0, \\ (\nabla w + v) \cdot \nu &= u_1 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \mathcal{N}' S \mathcal{D} v - \gamma \vartheta_t \nu &= u_2 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} &= u_3 \text{ auf } (0, \infty) \times \Gamma_1 \end{aligned} \quad (4.72)$$

und den Anfangsbedingungen

$$w(0) = w^0, w_t(0) = w^1, v(0) = v^0, v_t(0) = v^1, \vartheta(0) = \vartheta^0, \vartheta_t(0) = \vartheta^1 \quad (4.73)$$

einen gegebenen Endzustand zum Zeitpunkt  $T > 0$

$$w(T) = w^{T,0}, w_t(T) = w^{T,1}, v(T) = v^{T,0}, v_t(T) = v^{T,1}, \vartheta(T) = \vartheta^{T,0}, \vartheta_t(T) = \vartheta^{T,1} \quad (4.74)$$

erreicht.

**Bemerkung 4.4.2.** Da es sich bei (4.71)–(4.73) um ein System hyperbolischer Differentialgleichungen handelt, kann aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit nur für hinreichend große  $T$  erwartet werden, dass sich das System in einen beliebigen Zustand lenken lässt (vgl. [42] und [45]).

Mit den Notationen aus den früheren Abschnitten finden wir analog zu (4.39) die schwache Formulierung des Problems (4.71)–(4.74)

$$\begin{aligned} V_t + \mathcal{A}_{0,-1} V &= \mathcal{A}_{0,-1} \mathcal{R} u \text{ in } L^2([0, T], \mathcal{H}_{-1}), \\ V(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Der Operator  $\mathcal{A}_{0,-1}$  ist schiefadjungiert und  $m$ -dissipativ. Daher erzeugt er eine Kontraktionshalbgruppe  $(S_{0,-1}(t))_{t \geq 0}$  auf  $\mathcal{H}_{-1}$ . Satz 4.2.8 angewendet auf  $\mathcal{A}_{-1} = \mathcal{A}_{0,-1} + \mathcal{A}_{r,-1}$ ,  $\mathcal{A}_{r,-1} = 0$ , liefert

**Satz 4.4.3.** Zu jedem  $u \in L^2((0, T), (L^2(\Gamma_1))^4)$  existiert eine eindeutige schwache Lösung  $V \in H^1((0, T), \mathcal{H})$  von (4.75).

Um die Beobachtbarkeitsungleichung zu beweisen, gehen wir wieder vom isotropen Fall aus und betrachten die homogenisierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K((w_{x_1} + \psi)_{x_1} + (w_{x_2} + \varphi)_{x_2}) &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - D(\psi_{x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) + \gamma \vartheta_{tx_1} &= 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - D(\varphi_{x_2 x_2} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{x_1 x_2}) + K(\varphi + w_{x_2}) + \gamma \vartheta_{tx_2} &= 0, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \gamma(\psi_{tx_1} + \varphi_{tx_2}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

in  $(0, T) \times \Omega$  mit den Rand-

$$\begin{aligned} w &= \psi = \varphi = 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_0, \\ K\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi\right) &= 0 \text{ in } [0, T] \times \Gamma_1, \\ D(\nu_1 \psi_{x_1} + \mu \nu_1 \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_2) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_2 \varphi_{x_2} + \mu \nu_2 \psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x_2} + \varphi_{x_1})\nu_1) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1 \end{aligned} \quad (4.77)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} w(0) &= w^0, \quad w_t(0) = w^1, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad \psi_t(0) = \psi^1, \\ \varphi(0) &= \varphi^0, \quad \varphi_t(0) = \varphi^1, \quad \vartheta(0) = \vartheta^0, \quad \vartheta_t(0) = \vartheta^1. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Ferner gilt

**Lemma 4.4.4.** Es existieren  $T_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$  und  $\gamma_0 > 0$  so, dass für alle  $T > T_0$  und  $\gamma \in [0, \gamma_0)$  die Lösung  $(w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  des Problems (4.47)–(4.49) der Ungleichung

$$C_0(T - T_0)\mathcal{E}_0 \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_\gamma \quad (4.79)$$

genügt, wobei

$$J_\gamma = c_\gamma \max\{1, \|m\|_\infty\} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\partial_t(w, \psi, \varphi, \vartheta)'|^2 + |\nabla(w, \psi, \varphi, \vartheta)'|^2) d\Gamma dx dt$$

mit einem  $c_\gamma \rightarrow 0$  für  $\gamma \rightarrow 0$ .

**Beweis:** Der Beweis von Lemma 4.4.4 lässt sich im Wesentlichen wortwörtlich übertragen. Es gilt

$$\begin{aligned} I_c + I_a + I_{\Gamma_0} + I_\gamma &\equiv \int_0^T c(\xi_{tt}, \hat{\xi}) + a(\xi, \hat{\xi}) dt \\ &- K \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) w_\nu^2 d\Gamma dt - \frac{D}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} [(1-\mu)\psi_\nu + (1+\mu)\nu_1(\varphi_{x_1} + \psi_{x_2})] (m \cdot \nu) \psi_\nu d\Gamma dt \\ &- \frac{D}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} [(1-\mu)\varphi_\nu + (1+\mu)\nu_2(\psi_{x_1} + \varphi_{x_2})] (m \cdot \nu) \varphi_\nu d\Gamma dt - \omega \int_0^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) \vartheta_\nu^2 d\Gamma dt \\ &+ \gamma \int_0^T \int_\Omega (\vartheta_{tx_1}(m \cdot \nabla \psi) + \vartheta_{tx_2}(m \cdot \nabla \psi) + \psi_{tx_1}(m \cdot \nabla \vartheta) + \psi_{tx_2}(m \cdot \nabla \vartheta)) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Wir schätzen  $I_c$ ,  $I_a$ ,  $I_{\Gamma_0}$ ,  $I_\gamma$  genauso wie im Lemma 4.4.4 ab und finden in der vollen Analogie zu (4.65)

$$C_\mathcal{E} \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + Y_1 + \varepsilon Y_2 + (1-\varepsilon)Y_3 + c_\gamma \max\{1, \|m\|_\infty\} \mathcal{E}(t) \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_\gamma, \quad (4.81)$$

wobei

$$C_\mathcal{E} := \min\left\{1 - 2\varepsilon, \varepsilon, (1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon K}{C_{\kappa,1}}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0$$

und  $c_\gamma \rightarrow 0$  für  $\gamma \rightarrow 0$ . Wir wählen  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $C_\mathcal{E}$  positiv ist. Unter Beachtung von

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0, \text{ d. h. } \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0),$$

sowie

$$|Y_1 + \varepsilon Y_2 + (1 - \varepsilon)Y_3| \leq 8 \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} =: C_Y$$

folgt mit (4.81)

$$[(C_\varepsilon - c_\gamma \max\{1, \|m\|_\infty\})T - C_Y] \mathcal{E}_0 \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_\gamma.$$

Wir wählen nun ein  $\gamma_0 > 0$  so, dass  $C_0 := C_\varepsilon - c_\gamma \max\{1, \|m\|_\infty\} > 0$  für alle  $\gamma \in [0, \gamma_0]$  gilt. Dann setzen wir  $T_0 := \frac{C_Y}{C_0}$  und finden

$$C_0(T - T_0)\mathcal{E}(0) \leq J_2 - J_1 - J_0 - J_\gamma.$$

Dies beendet den Beweis.  $\square$

Analog zum Satz 4.3.8 folgt

**Satz 4.4.5.** Unter Voraussetzung 4.3.7 gibt es  $T'_0 > 0$ ,  $C'_0 > 0$  und  $\gamma'_0 > 0$  so, dass für alle  $T > T'_0$  und  $\gamma \in [0, \gamma'_0]$

$$i) \frac{C'_0}{\|m\|_\infty} (T - T'_0) \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\rho_1 w_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_2 \varphi_t + \rho_3 \vartheta_t^2) d\Gamma dt,$$

$$ii) \int_0^T \|\mathcal{B}^* S_0^*(t) V^0\|_{\mathcal{U}}^2 dt \geq \frac{2C'_0}{\|m\|_\infty \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}} (T - T'_0) \|V^0\|_{\mathcal{H}}^2 \text{ für alle } V^0 \in D(\mathcal{A}'_0)$$

gilt, wobei  $(w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  die Lösung des dualen homogenen Problems (4.76)–(4.78) bezeichnet.

**Korollar 4.4.6.** Das Randsteuerbarkeitsproblem 4.4.1 ist in der Klasse der  $L^2(\Gamma_1)$ -Steuerungen exakt lösbar: Unter Voraussetzungen von Satz 4.3.8 gibt es zu jedem Anfangs- bzw. Endzustand  $(w^0, \psi^0, \varphi^0, \vartheta^0)'$ ,  $(w^T, \psi^T, \varphi^T, \vartheta^T)' \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^4$  eine Steuerungsfunktion  $u \in L^2((0, T), (L^2(\Gamma_1))^4)$ , welche die sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Anfangszustand befindende Zustandsgröße  $(w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  (gegeben als schwache Lösung der Differentialgleichung) in den gewünschten Endzustand lenkt.

**Bemerkung 4.4.7.** Als triviale Folgerung bekommen wir folgendes Resultat: Gilt  $T_0 > T'_0$  und  $\gamma \in [0, \gamma'_0]$ , so folgt für jede Lösung  $(w, \psi, \varphi, \vartheta)'$  von

$$\begin{aligned} \rho_1 w_{tt} - K((w_{x_1} + \psi)_{x_1} + (w_{x_2} + \varphi)_{x_2}) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ \rho_2 \psi_{tt} - D(\psi_{x_1 x_1} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{x_2 x_2} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{x_1 x_2}) + K(\psi + w_{x_1}) + \gamma \vartheta_{tx_1} &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - D(\varphi_{x_2 x_2} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{x_1 x_1} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{x_1 x_2}) + K(\varphi + w_{x_1}) + \gamma \vartheta_{tx_2} &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ \rho_3 \vartheta_{tt} - \omega \Delta \vartheta + \gamma(\psi_{tx_1} + \varphi_{tx_2}) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w = \psi = \varphi &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_0, \\ K(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \nu_1 \psi + \nu_2 \varphi) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_1 \psi_{x_1} + \mu \nu_1 \varphi_{x_2} + \frac{1-\mu}{2} (\psi_{x_2} + \varphi_{x_1}) \nu_2) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1, \\ D(\nu_2 \varphi_{x_2} + \mu \nu_2 \psi_{x_1} + \frac{1-\mu}{2} (\psi_{x_2} + \varphi_{x_1}) \nu_1) &= 0 \text{ in } (0, T) \times \Gamma_1 \end{aligned}$$

die Identität

$$w = \psi = \varphi = \vartheta \text{ in } [0, T] \times \Omega.$$

Dies ist ein Analogon des für die Wellengleichung geltenden HOLMGREN-JOHN-Theorems (s. [30, Theorem 5.33]).

# Evolutionsgleichungen

In diesem Anhang wollen wir zwei Lösungstheorien, welche wir in der vorliegenden Arbeit verwendet haben, präsentieren.

## A.1 Operatorhalbgruppen und Lineare CAUCHY-Probleme

Die Resultate in diesem Abschnitt werden nach [12], [64] und [83] zitiert.

### A.1.1 Stark Stetige Halbgruppen

Sei  $X$  ein BANACHraum mit der Norm  $\|\cdot\|_X$ .

**Definition A.1.1.** Eine einparametrische Familie  $(S(t))_{t \geq 0}$  linearer, beschränkter Operatoren auf  $X$  heißt eine Halbgruppe linearer beschränkter Operatoren auf  $X$ , falls

- i)  $S(0) = \text{id}$ ,
- ii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$  für alle  $t, s \geq 0$ .

Der auf dem Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existiert in } X \right\}$$

definierte lineare Operator

$$\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow X, \quad x \mapsto \lim_{t \searrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

heißt infinitesimaler Erzeuger der Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

**Definition A.1.2.** Eine Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  linearer, beschränkter Operatoren auf  $X$  heißt stark stetig oder eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe, falls  $\lim_{t \searrow 0} S(t)x = x$  für alle  $x \in X$  gilt.

**Satz A.1.3 (HILLE & YOSIDA).** Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe auf  $X$  und es gebe Konstanten  $\omega \geq 0$  und  $M \geq 1$  so, dass  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$  für alle  $t \geq 0$  gilt. Ein linearer Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeugt  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$  genau dann, wenn:

- i)  $\mathcal{A}$  ist dicht definiert und abgeschlossen.
- ii)  $(\omega, \infty)$  liegt in der Resolvente  $\rho(\mathcal{A})$  von  $\mathcal{A}$ .
- iii) Es gilt die Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \text{ für alle } \lambda > 0, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$  die Resolventenabbildung von  $\mathcal{A}$  bezeichnet.

### Dissipative Operatoren

Sei  $X$  ein BANACHraum mit dem Dualraum  $X'$ . Für jedes  $x \in X$  betrachten wir das Subdifferential

$$J(x) = \{x' \in X' \mid \|x'\|_{X'}^2 = \|x\|^2 = \langle x', x \rangle_{X', X}\}. \quad (\text{A.2})$$

Nach dem Satz von HAHN-BANACH ist  $J(x) \neq \emptyset$ . Ist  $X$  ein HILBERTraum, so gilt aufgrund des RIESZschen Darstellungssatzes  $J(x) = \{\langle \cdot, x \rangle_X\}$ .

**Definition A.1.4.** Ein linearer Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  heißt dissipativ, falls es zu jedem  $x \in D(\mathcal{A})$  ein  $x' \in J(x)$  mit  $\langle x', \mathcal{A}x \rangle_{X', X} \leq 0$  gibt.

**Satz A.1.5.** Sei  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow X$  ein dissipativer Operator. Gilt  $\text{im}(\lambda_0 - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$  für ein  $\lambda_0 > 0$ , so gilt  $\text{im}(\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$  für alle  $\lambda > 0$ .

**Definition A.1.6.** Ein dissipativer Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow X$  heißt  $m$ -dissipativ, wenn  $\text{im}(\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$  für ein  $\lambda \geq 0$  gilt.

**Definition A.1.7.** Eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  heißt Kontraktionshalbgruppe, falls  $\|T(t)\| \leq 1$  für  $t \geq 0$  gilt.

Für  $m$ -dissipative Operatoren kann Satz A.1.3 angewendet werden, ohne dass man die Gültigkeit von (A.1) explizit überprüfen muss.

**Satz A.1.8 (LUMMER & PHILLIPS).** Ein linearer, dicht definierter Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ist genau dann Erzeuger einer  $\mathcal{C}^0$ -Kontraktionshalbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$ , wenn  $\mathcal{A}$   $m$ -dissipativ ist.

**Definition A.1.9.** Sei  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  ein dicht definierter linearer Operator. Der auf

$$D(\mathcal{A}^*) = \{x' \in X' \mid \exists y' \in X' \forall x \in D(\mathcal{A}) \langle x', \mathcal{A}x \rangle_{X', X} = \langle y', x \rangle_{X', X}\}$$

durch  $\mathcal{A}^*x := y'$  definierte Operator  $\mathcal{A}^*: D(\mathcal{A}^*) \subset X' \rightarrow X'$  heißt der Dualoperator von  $\mathcal{A}$ .

Sei nun  $X$  ein HILBERTraum und  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  ein linearer, dicht definierter Operator. Dann lässt sich der Dualoperator als eine Abbildung  $\mathcal{A}^*: D(\mathcal{A}^*) \subset X \rightarrow X$  auffassen.

**Definition A.1.10.** Ein linearer Operator  $\mathcal{A}$  heißt schiefadjungiert, wenn  $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ .

**Satz A.1.11.** Sei  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  ein linearer, dicht definierter Operator. Äquivalent sind die Aussagen:

- i) Die Operatoren  $\mathcal{A}$  und  $-\mathcal{A}$  sind  $m$ -dissipativ.
- ii)  $\mathcal{A}$  ist schiefadjungiert.

### Duale Halbgruppe

**Satz A.1.12.** Sei  $X$  ein reflexiver BANACHraum. Die Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  sei durch einen Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeugt. Dann ist die durch

$$S^*(t): X' \rightarrow X', \quad x' \mapsto (S(t))^* x' \text{ für } t \geq 0$$

gegebene duale Halbgruppe stark stetig und wird von  $\mathcal{A}^*$  erzeugt.

### Beschränkte Störungen

**Satz A.1.13.** Sei  $X$  ein BANACHraum. Der lineare Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$  mit

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \text{ für alle } t \geq 0,$$

wobei  $M \geq 1, \omega \geq 0$ . Sei  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X)$ . Dann erzeugt  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(\tilde{S}(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$  mit

$$\|\tilde{S}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{(\omega + \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(X)})t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

## A.1.2 Homogene CAUCHY-Probleme

Sei  $X$  ein BANACHraum und sei  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. Wir betrachten ein abstraktes CAUCHY-Problem

$$\begin{aligned} y_t(t) &= \mathcal{A}y(t) \text{ für } t > 0, \\ y(0) &= y^0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

mit  $y^0 \in D(\mathcal{A})$ .

**Definition A.1.14.** Eine Funktion  $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty), D(\mathcal{A}))$ , deren Einsetzen in (A.3) eine Tautologie ergibt, heißt klassische Lösung von (A.3).

**Satz A.1.15.** Das Problem (A.3) besitzt genau dann eine klassische Lösung  $u$ , wenn der Operator  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(T(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$  erzeugt. Die Lösung  $u$  ist gegeben durch  $t \mapsto T(t)u^0$ .

**Satz A.1.16.** Der Operator  $\mathcal{A}$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$ . Dann existiert eine eindeutige klassische Lösung zu (A.3)

$$y \in \mathcal{C}^0([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cup \mathcal{C}^1([0, \infty), X),$$

welche durch  $y: t \mapsto S(t)y^0$  gegeben ist. Gilt überdies  $y^0 \in D(\mathcal{A}^s)$  für ein  $s \in \mathbb{N}$ , so folgt sogar

$$y \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, \infty), D(\mathcal{A}^{s-k})),$$

wobei  $D(\mathcal{A}^0) := X$ .

### Schwache Lösungen

Sei  $X$  ein BANACHraum. Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe auf  $X$  mit dem Erzeuger  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ . Sei  $\beta \in \rho(\mathcal{A}) \cap \mathbb{R}$ .

**Definition A.1.17.** Wir definieren den BANACHraum  $X_1 := D(\mathcal{A})$  versehen mit der Norm

$$\|x\|_1 = \|(\beta - \mathcal{A})x\|_X$$

und den BANACHraum  $X_{-1}$  als Abschluss von  $X$  bzgl. der Norm

$$\|x\|_{-1} = \|(\beta - \mathcal{A})^{-1}x\|_X.$$

**Satz A.1.18.** Es gilt:

- i)  $(X_1, \|\cdot\|_1)$  ist ein BANACHraum.
- ii) Die Inklusionen  $X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_{-1}$  sind stetig und dicht.
- iii) Die Normen  $\|\cdot\|_1$  sind äquivalent für alle  $\beta \in \rho(\mathcal{A})$ .
- iv) Die Normen  $\|\cdot\|_{-1}$  sind äquivalent für alle  $\beta \in \rho(\mathcal{A})$ .

Desweiteren betrachten wir den Raum  $D(\mathcal{A}^*)$  versehen mit der Graphennorm

$$\|x\|_{D(\mathcal{A}^*)} = \|(\beta - \mathcal{A}^*)x\|_{X'},$$

wobei  $\beta \in \rho(\mathcal{A}^*)$  wegen  $\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}^*)$  gilt.

**Satz A.1.19.** Ist  $X$  reflexiv, dann sind  $X_{-1}$  und  $D(\mathcal{A}^*)'$  isomorph.

**Satz A.1.20.** Der Operator  $\mathcal{A}$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf einem reflexiven BANACHraum  $X$ . Dann kann man  $\mathcal{A}$  zu einem Operator  $\mathcal{A}_{-1}: D(\mathcal{A}_{-1}) = X \rightarrow X_{-1}$  und die Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  zu einer Halbgruppe  $(S_{-1}(t))_{t \geq 0}$  auf  $X_{-1}$  fortsetzen, welche von  $\mathcal{A}_{-1}$  erzeugt wird.

**Satz A.1.21.** Ist  $\mathcal{A}$  dissipativ bzw.  $m$ -dissipativ, so ist auch  $\mathcal{A}_{-1}$  dissipativ bzw.  $m$ -dissipativ.

**Definition A.1.22.** Sei  $y^0 \in X_{-1}$ . Die Funktion  $y: t \mapsto S(t)y^0$  heißt eine schwache Lösung von (A.3).

**Bemerkung A.1.23.** Gilt  $y^0 \in H$ , so ist  $y \in \mathcal{C}^0([0, \infty), X) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty), X_{-1})$ .

### A.1.3 Inhomogene CAUCHY-Probleme

Sei  $T > 0$ . Der lineare Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf einem BANACHraum  $X$ . Wir betrachten das inhomogene CAUCHY-Problem

$$\begin{aligned} y_t(t) &= \mathcal{A}y(t) + f(t) \text{ für alle } t \in [0, T], \\ y(0) &= y^0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

#### Definition A.1.24.

i) Seien  $y^0 \in X$  und  $f \in L^1((0, T), X)$ . Die Funktion

$$y: t \mapsto S(t)y^0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

mit

$$y \in \mathcal{C}^0([0, T], X)$$

heißt eine milde Lösung von (A.4).

ii) Seien  $y^0 \in D(\mathcal{A})$  und  $f \in \mathcal{C}^0([0, T], X)$ . Gilt für die in i) gegebene Lösung

$$y \in \mathcal{C}^0([0, T], D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0, T], X),$$

so heißt  $y$  eine klassische Lösung (A.4).

iii) Sei  $X$  reflexiv. Seien  $y^0 \in X_{-1} \simeq D(\mathcal{A}^*)'$  und  $f \in L^1((0, T), X_{-1})$ . Die durch

$$y: t \mapsto S_{-1}(t)y^0 + \int_0^t S_{-1}(t-s)f(s)ds$$

definierte Funktion mit  $y \in H^1((0, T), X_{-1})$  wird als schwache Lösung zu (A.4) bezeichnet.

**Satz A.1.25.** Seien  $y^0 \in D(\mathcal{A})$  und  $f \in \mathcal{C}^1([0, T], X)$  (oder  $f \in \mathcal{C}^0([0, T], D(\mathcal{A}))$ ). Dann besitzt (A.4) eine eindeutige klassische Lösung.

**Korollar A.1.26.** Seien  $y^0 \in X$  und  $f \in \mathcal{C}^1([0, T], X_{-1})$  (oder  $f \in \mathcal{C}^0([0, T], X)$ ). Dann gilt für die schwache Lösung  $y$  von (A.4)

$$y \in \mathcal{C}^0([0, T], X) \cap \mathcal{C}^1([0, T], X_{-1}).$$

## A.2 Quasilineare Symmetrisch-Hyperbolische Systeme

Viele Gleichungen der mathematischen Physik, insbesondere die REISSNER-MINDLIN-Plattengleichungen, lassen sich auf die Form eines symmetrisch-hyperbolischen Systems erster Ordnung bringen. Nachstehend präsentieren wir eine allgemeine Lösungstheorie für symmetrisch-hyperbolische Systeme nach [75], welche auch den „charakteristischen“ Fall berücksichtigt, welcher z. B. bei dem CATTANEO-System, der Wellengleichung, den Elastizitätsgleichungen,

den REISSNER-MINDLIN-Gleichungen im Mehrdimensionalen usw. auftritt und somit eine Verallgemeinerung von [74] (s. auch [31]) sowie der klassischen Arbeiten von Friedrichs [20] u.a. darstellt. In diesem Kapitel betrachten wir also quasilineare symmetrisch-hyperbolische Systeme erster Ordnung in beschränkten, glatt berandeten Gebieten mit geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen. Folgende Resultate werden nach [75] zitiert.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand  $\Gamma$  und sei  $T > 0$ . Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} L(u)u &= F \text{ in } [0, T] \times \Omega, \\ u(0, \cdot) &= f \text{ in } \Omega, \\ Mu &= 0 \text{ in } [0, T] \times \partial\Omega, \end{aligned} \tag{A.5}$$

wobei

$$L(u)u := A^0(u)\partial_t + \sum_{j=1}^n A^j(u)\partial_j + B(u) \text{ für } (t, x) \in [0, T] \times \Omega,$$

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$  und  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Ferner seien  $A^0, A^1, \dots, A^n, B: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  Matrixfunktionen. Die Matrizen  $A^0, A^1, \dots, A^n$  seien symmetrisch und  $A^0$  sei positiv definit.  $F: [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$  und  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$  seien vorgegebene Funktionen.  $M: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{d \times N}$  sei eine Matrixfunktion mit konstantem Rang  $\text{rang } M(x) = d < N$  für  $x \in \Gamma$ .

Sei  $\nu: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  der äußere Einheitsnormalenvektor an  $\Omega$  in  $x \in \partial\Omega$ . Die durch

$$A^\nu(u) = \sum_{j=1}^n \nu^j(x) A^j(u) \text{ für } u \in \mathbb{R}^N$$

gegebene Funktion heißt die zum Operator  $L$  gehörige Randmatrix.

Die Randbedingung sei maximal nichtnegativ, d. h.  $\ker M$  sei ein maximaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^N$ , auf welchem  $A^\nu$  positiv semidefinit ist. Gilt  $\text{rang } A^\nu = N$  konstant auf  $\Gamma$ , d. h.  $A^\nu$  ist invertierbar, so heißt  $\Gamma$  nicht charakteristisch. Ist  $\text{rang } A^\nu < N$  konstant auf  $\Gamma$ , so heißt  $\Gamma$  charakteristisch mit konstanter Vielfachheit. Sonst heißt  $\Gamma$  charakteristisch mit nicht konstanter Vielfachheit.

Im nicht charakteristischen Fall kann von der Lösung volle Regularität erwartet werden: Liegen die Anfangsdaten in einem SOBOLEVraum  $H^s(\Omega)$  für  $s \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ , so besitzt auch die Lösung unter zusätzlichen Voraussetzungen eine  $H^s(\Omega)$ -Regularität in der Ortsvariablen (s. [74]). Ist  $\Gamma$  charakteristisch mit konstanter Vielfachheit, so kann man im Allgemeinen nicht erwarten, dass die Lösung die volle Regularität besitzt. Die Regularität wird mit Hilfe der anisotropischen gewichteten SOBOLEVRäumen  $H_*^s$  beschrieben, welche wir nachstehend definieren. Wird an die Randmatrix  $A^\nu$  eine zusätzliche Bedingung vom KREISS-Typ gestellt, so kann man auch in diesem charakteristischen Fall die volle Regularität bekommen (s. z. B. [63]). Für die meisten Anwendungen ist diese hinreichende Bedingung aber zu einschränkend. Schlimmstensfalls kann das Problem nicht einmal wohlgestellt sein, wenn  $\Gamma$  charakteristisch mit nicht konstanter Vielfachheit ist (s. Referenzen in [75]).

**Definition A.2.1.** Für  $s \in \mathbb{N}$  definieren wir den anisotropischen SOBOLEVraum für den Halbraumfall

$$H_*^s(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \mid (x_1 \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^\alpha \partial_1^k u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \text{ für } |\alpha| + 2k \leq s\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H_*^s(\mathbb{R}_+^n)}^2 := \sum_{|\alpha|+2k \leq s} \|(x_1 \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^\alpha \partial_1^k u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \text{ für } u \in H_*^s(\mathbb{R}_+^n).$$

Diese Definition lässt sich auf kompakte Gebiete erweitern.

**Definition A.2.2.** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, welches lokal auf einer Seite seines  $C^\infty$ -glatten Randes  $\Gamma$  liegt. Sei  $\{U_k\}_{k=0}^m$  eine offene Überdeckung von  $\bar{\Omega}$ , für welche Folgendes gilt:

i)  $\bar{U}_0 \subset \Omega$ .

ii) Für jedes  $k = 1, \dots, m$  gibt es einen  $C^s$ -Diffeomorphismus  $\Phi_k: \bar{\Omega} \cap U_k \rightarrow B_+(0, 1) := \{x \in B(0, 1) \mid x_1 \geq 0\}$  mit  $\Phi_k(\Gamma \cap U_k) = \{x \in B(0, 1) \mid x_1 = 0\}$ .

Sei  $\{\psi_k\}_{k=0, \dots, m}$  eine zu  $\{U_k\}_{k=0}^m$  gehörige Partition der Eins. Der Raum  $H_*^s(\Omega)$  wird definiert als

$$H_*^s(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \psi_0 u \in H^s(\mathbb{R}^n), \psi_k u \in H_*^m(\mathbb{R}_+^n) \text{ für } k = 1, \dots, m\}$$

zusammen mit der Norm

$$\|u\|_{H_*^s(\Omega)}^2 := \|\psi_0 u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 + \sum_{k=1}^m \|\psi_k u\|_{H_*^m(\mathbb{R}_+^n)}^2.$$

Der Bequemlichkeit halber setzen wir

$$H_*^0(\Omega) := L^2(\Omega).$$

Obwohl der Raum  $H_*^m(\Omega)$  im Hinblick auf symmetrisch-hyperbolische Probleme, vor allem im Halbraum, ein ganz natürliches Konstrukt ist, lässt sich  $H_*^m(\Omega)$  als kein Interpolationsraum auffassen. Trotzdem hat der Raum gute Eigenschaften, welche nachstehend beschrieben werden (vgl. [58])

**Satz A.2.3.**  $H_*^s(\mathbb{R}_+^n)$  und  $H_*^s(\Omega)$  sind HILBERTräume, deren Normen zwar abhängig von der Wahl der offenen Überdeckung, aber äquivalent sind. Außerdem gelten die Einbettungen

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H_*^s(\Omega) \hookrightarrow H^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor}(\Omega), \quad H_*^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Unter Benutzung der oben definierten anisotropen Räume hat Secchi in [75] die folgenden zwei Existenzsätze bewiesen.

**Satz A.2.4.** Sei  $s \in \mathbb{N}$  mit  $s \geq 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 12$ . Vorausgesetzt sei:

i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei ein beschränktes Gebiet, welches auf einer Seite seines  $C^\infty$ -glatten Randes  $\Gamma$  liegt.

ii) Für ein  $\varepsilon > 0$  gelte  $A^0, \dots, A^n, B \in C^s(N_0, \mathbb{R}^{N \times N})$ , wobei  $N_0 := \{v \in \mathbb{R}^N \mid \|v - f\|_\infty \leq \varepsilon\}$ .  $A^0, \dots, A^n$  seien symmetrisch in  $N_0$  und es gebe ein  $a_{A^0} > 0$  so, dass

$$a_0 \leq \zeta' A_0(v) \zeta \leq \frac{1}{a_0} \text{ für alle } \zeta \in \mathbb{R}^N, v \in N_0.$$

iii) Der Rang von  $A^v(v)$  ist konstant mit  $0 < \text{rang } A^v(v) < N$  für alle  $v \in \tilde{N} := \{v \in N_0 \mid Mv = 0\}$ .

iv)  $M \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^{d \times N})$  mit  $\text{rang } M(x) = d$  für  $x \in \Gamma$ .

v)  $\ker M(x)$  sei maximal nichtnegativ, d. h.  $\ker A^\nu(v)$  sei für alle  $v \in N_0$  ein maximaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^N$  bzgl. der Mengeneinklusion, auf welchem  $A^\nu(v)$  positiv semidefinit ist.

vi)  $F \in \bigcap_{k=0}^s H^{k,\infty}([0, T], H_*^{s-k}(\Omega))$ ,  $f \in H_*^s(\Omega)$ . Überdies mögen  $F$  und  $f$  die Kompatibilitätsbedingungen von der Ordnung  $s - 1$  erfüllen, d. h.  $u^k \in H_*^{s-k}(\Omega)$  und  $Mu^k = 0$  für  $k = 0, \dots, s$ , wobei  $u^k$  die  $k$ -te Zeitableitung von  $u$  an der Stelle  $t = 0$  bezeichnet, welche sich iterativ mit Hilfe der Gleichung (A.5) berechnen lässt.

Dann existiert eine Zahl  $T' \in (0, T]$  so, dass das Problem (A.5) eine eindeutige Lösung  $u \in \bigcap_{k=0}^s C^k([0, T'], H_*^{s-k}(\Omega))$  besitzt.

Wenn die Daten über volle Regularität verfügen, kann man die Voraussetzung an  $s$  etwas abschwächen.

**Satz A.2.5.** Sei  $s \in \mathbb{N}$  mit  $s \geq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 6$ . Es gelten die Voraussetzungen i)–v) von Satz A.2.4. Zusätzlich gelte:

vi') Seien  $f \in H^s(\Omega)$ ,  $F \in \bigcap_{k=0}^s C^k([0, T], H^{s-k}(\Omega))$ . Es gelten die Kompatibilitätsbedingungen  $u^k \in H^{s-k}(\Omega)$  für  $k = 0, \dots, s$ .

Dann existiert eine Zahl  $T' \in (0, T]$  so, dass das Problem (A.5) eine eindeutige Lösung  $u \in \bigcap_{k=0}^s C^k([0, T'], H_*^{s-k}(\Omega))$  besitzt.

Der Vollständigkeit halber zitieren wir nach [63] noch einen Satz, welcher unter der Annahme der Gültigkeit der nachstehend definierten KREISS-Bedingung eine volle Lösungsregularität garantiert.

**Definition A.2.6.** Ist  $\text{rang } A^\nu(u) < N$  konstant für  $v \in \tilde{N}$ , so folgt wegen der Symmetrie und der positiven Semidefinitheit von  $A^\nu$  die Existenz einer  $N \times N$ -Transformationsmatrix  $W$  und positiver Zahlen  $a_0, a_1 > 0$  so, dass

$$\begin{aligned} (W^{-1}A^\nu W)(v; \nu(x)) &= \begin{pmatrix} A_I & 0 \\ 0 & A_{II} \end{pmatrix} (v; \nu(x)), \\ \det A_I(v; \nu(x)) &\neq 0, \quad A_{II}(v; \nu(x)) = 0, \\ |A_I^{\pm 1}| &\leq a_1, \quad |W^{\pm 1}| \leq \sqrt{a_0} \end{aligned}$$

für  $v \in \tilde{N}$  gilt. Dabei ist  $A_I \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $A_{II} \in \mathbb{R}^{(N-d) \times (N-d)}$ . Sind  $v \in \tilde{N}$  und  $\eta(x) \in \{\nu(x)\}^\perp \setminus \{0\}$ , so ergibt sich

$$(W^{-1}A^\nu W)(v; \eta(x)) = \sum_{j=1}^n (W^{-1}A^j W)(t, x, u)\eta_j(x) = \begin{pmatrix} A_{II} & A_{I II} \\ A_{II} & A_{II II} \end{pmatrix} (v; \eta(x)),$$

wobei  $A_{II} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $A_{II II} \in \mathbb{R}^{(N-d) \times (N-d)}$ . In [63] wurde bewiesen, dass es eine eindeutige Lösung  $\mathcal{A}(t, x, u; \nu(x); \eta(x)) \in \mathbb{R}^{(N-d) \times d}$  der Gleichung

$$(\mathcal{A}A_I - A_{II}\mathcal{A})(v; \nu(x); \eta(x)) = A_{II I}(v; \nu(x); \eta(x)) \tag{A.6}$$

für  $v \in \tilde{N}$  gibt. Die durch Gleichung (A.6) definierte Matrix  $\mathcal{A}$  erfüllt die KREISS-Bedingung, falls

$$(\mathcal{A}A_{II} - A_{III}\mathcal{A})(v; \nu(x); \eta(x)) = 0 \text{ und } (\mathcal{A}A_{III})(v; \nu(x); \eta(x)) = 0 \quad (\text{A.7})$$

für alle  $v \in \tilde{N}$  gilt.

**Satz A.2.7.** Unter Voraussetzungen von Satz A.2.5 sowie der KREISSschen Bedingung (A.7) besitzt (A.5) eine eindeutige Lösung  $u \in \bigcap_{k=0}^s \mathcal{C}^k([0, T], H^{s-k}(\Omega))$ .

**Bemerkung A.2.8.** Alle in diesem Abschnitt formulierten Resultate lassen sich auf den Fall der zeit- und ortsabhängigen Koeffizientenmatrizen  $A^0, \dots, A^n, B$  verallgemeinern (vgl. [75]).  $M$  muss leider konstant bleiben.

# Steuerungstheorie in BANACHRÄUMEN

Seien  $X$  und  $U$  BANACHRäume. Der lineare Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$ . Sei  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  (s. Definition A.1.17). Wir betrachten das lineare unendlichdimensionale Steuerungssystem

$$\begin{aligned} y_t(t) &= \mathcal{A}y(t) + \mathcal{B}u(t) \text{ für } t \in [0, T], \\ y(0) &= y^0. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Die folgenden Resultate werden nach [12] und [64] zitiert.

## B.1 Steuerungs- und Beobachtungsoperatoren

**Definition B.1.1.** Der Steuerungsoperator  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  heißt beschränkt, falls  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X)$ . Sonst heißt er unbeschränkt.

**Satz B.1.2.** Sei  $u \in L^2((0, T), U)$ . Dann ist die durch

$$y: t \mapsto S_{-1}(t)y^0 + \mathcal{L}_t u$$

gegebene Funktion  $y \in H^1((0, T), X_{-1})$  die eindeutige schwache Lösung von (B.1), wobei

$$\mathcal{L}_t u := \int_0^t S_{-1}(t-s)\mathcal{B}u(s)ds,$$

worin  $(S_{-1}(t))_{t \geq 0}$  die Erweiterung von  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X_{-1}$  bezeichnet (vgl. Definition A.1.17).

**Bemerkung B.1.3.** Die Anfangsbedingung ist sogar im Sinne der Einbettung  $H^1((0, T), X_{-1}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, T], X_{-1})$  erfüllt.

**Definition B.1.4.** Ein Steuerungsoperator  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  heißt zulässig für  $(S(t))_{t \geq 0}$ , falls für  $y^0 \in X$  und  $u \in L^2((0, T), U)$  die schwache Lösung  $y$  fast überall nach  $X$  abbildet.

Unser nächstes Ziel ist es nun, die zulässigen Steuerungsoperatoren zu charakterisieren.

**Bemerkung B.1.5.** Definition B.1.4 ist dazu äquivalent, dass der sogenannte Steuerungszustandsoperator

$$\mathcal{L}_T: U \rightarrow X_{-1}, \quad u \mapsto \int_0^T S_{-1}(t-s)\mathcal{B}u(s)ds$$

in  $\mathcal{L}(L^2((0, T), U), X)$  liegt.

**Satz B.1.6.** Ist  $\mathcal{B}$  ein zulässiger Steuerungsoperator, so gilt für die Lösung  $y$  von (B.1)

$$y \in H^1((0, T), X) \leftrightarrow \mathcal{C}^0([0, T], X)$$

und die Gleichung

$$y_t(t) = \mathcal{A}y(t) + \mathcal{B}u(t) \text{ für } t \in [0, T]$$

ist in  $X$  erfüllt.

**Definition B.1.7.** Ein linearer Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf einem BANACHraum  $X$ . Sei  $Y$  ein BANACHraum und sei  $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(D(\mathcal{A}), Y)$ . Der Operator  $\mathcal{C}$  heißt zulässiger Beobachtungsoperator für  $(S(t))_{t \geq 0}$ , falls es eine Konstante  $C_T > 0$  so gibt, dass

$$\int_0^T \|\mathcal{C}S(t)y\|_Y^2 dt \leq C_T \|y\|_X^2$$

für alle  $y \in D(\mathcal{A})$  gilt.

**Satz B.1.8.** Sei  $X$  ein reflexiver BANACHraum. Der lineare Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  genau dann ein zulässiger Steuerungsoperator<sup>1</sup> für  $(S(t))_{t \geq 0}$ , wenn  $\mathcal{B}^* \in L(D(\mathcal{A}^*), U')$  ein zulässiger Beobachtungsoperator für  $(S^*(t))_{t \geq 0}$  ist.

**Korollar B.1.9.** Der zum  $\mathcal{L}_t$  duale Operator  $\mathcal{L}_t^*$  ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^* x &= \mathcal{B}^* S^*(T-t)x \text{ für alle } t \in [0, T] \text{ und } x \in D(\mathcal{A}^*), \\ \mathcal{L}_t^* x &= \mathcal{B}_\Lambda^* S^*(T-t)x \text{ für fast alle } t \in [0, T] \text{ und } x \in X' \end{aligned}$$

gegeben, wobei

$$\mathcal{B}_\Lambda^* z = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mathcal{B}^* (\lambda - \mathcal{A}^*)^{-1} z$$

die LEBESGUESche Erweiterung von  $\mathcal{B}^*$  bezeichnet.

## B.2 Steuerbarkeit

Seien  $X$  und  $U$  BANACHräume. Der lineare Operator  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  erzeuge eine  $\mathcal{C}^0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$  und  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  sei ein zulässiger Steuerungsoperator. Wir betrachten das Steuerungssystem (B.1).

<sup>1</sup>Die nachstehenden Resultate gelten auch dann, wenn  $\mathcal{B}$  kein zulässiger Steuerungsoperator ist. Im diesem Fall hat man allerdings nur  $y \in H^1((0, T), X_{-1})$  und nicht  $y \in H^1((0, T), X)$ .

**Definition B.2.1.** Sei  $T > 0$ . Das System (B.1) heißt

- i) exakt steuerbar bzw.
- ii) approximativ steuerbar

zum Zeitpunkt  $T$ ,

- i) falls es für alle  $y^0, y^T \in X$  eine Steuerungsfunktion  $u \in L^2((0, T), U)$  so gibt, die Lösung  $y \in H^1((0, T), X_{-1})$  von (B.1) zum Anfangswert  $y^0$  die Endbedingung  $y(T) = y^T$  erfüllt bzw.
- ii) falls es für alle  $y^0, y^T \in X$  und alle  $\varepsilon > 0$  eine Steuerungsfunktion  $u \in L^2((0, T), U)$  so gibt, dass für die Lösung  $y \in H^1((0, T), X_{-1})$  von (B.1) zum Anfangswert  $y^0$  die Abschätzung  $\|y(T) - y^T\|_X \leq \varepsilon$  gilt.

Das System (B.1) heißt exakt bzw. approximativ nullsteuerbar, wenn i) bzw. ii) für  $y^T = 0$  erfüllt ist.

**Satz B.2.2.** Das System (B.1) ist genau dann exakt bzw. approximativ steuerbar zum Zeitpunkt  $T > 0$ , wenn  $\mathcal{L}_T: L^2((0, T), U) \rightarrow X$  surjektiv ist bzw. im  $\mathcal{L}(T)$  in  $X$  dicht liegt.

**Satz B.2.3.** Die BANACHräume  $X$  und  $U$  seien reflexiv. Das System (B.1) ist genau dann

- i) exakt steuerbar bzw.
- ii) approximativ steuerbar bzw.
- iii) exakt nullsteuerbar

zum Zeitpunkt  $T > 0$ ,

- i) wenn es ein  $C_T > 0$  so gibt, dass

$$\int_0^T \|\mathcal{B}^* S^*(t)\psi\|_U^2 dt \geq C_T \|\psi\|_X^2$$

für alle  $\psi \in D(\mathcal{A}^*)$  gilt, d. h. wenn  $\mathcal{L}_T^*$  nach unten beschränkt ist, bzw.

- ii) wenn die Bedingung

$$\mathcal{B}^* S^*(t)\psi = 0 \text{ für alle } t \in [0, T]$$

die Identität  $\psi \equiv 0$  für alle  $\psi \in D(\mathcal{A}^*)$  nach sich zieht, d. h. wenn  $\mathcal{L}_T^*$  bijektiv ist, bzw.

- iii) wenn es ein  $C_T > 0$  so gibt, dass

$$\int_0^T \|\mathcal{B}^* S^*(t)\psi\|_U^2 dt \geq C_T \|S^*(T)\psi\|_X^2$$

für alle  $\psi \in D(\mathcal{A}^*)$  gilt, d. h. wenn  $\text{im } S(T) \subset \text{im } \mathcal{L}_T^*$ .

# Das Divergenzproblem

Bei zahlreichen Betrachtungen von partiellen Differentialgleichungen, wie etwa bei den NAVIER-STOKES-Gleichungen, taucht das sogenannte „Divergenzproblem“ auf: Zu einer gegebenen Funktion  $f$  bestimme ein Gradientenfeld  $u$ , dessen Divergenz mit  $f$  übereinstimmt. Nachstehend wollen wir einen Lösungszugang zum Divergenzproblem in beschränkten Gebieten nach [22] vorstellen. Anschließend beschränken wir das Problem auf rotationsfreie Vektorfelder, um die Eindeutigkeit der Lösung zu gewährleisten.

## C.1 Der BOGOWSKIÏ-Operator

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit dem LIPSCHITZ-Rand  $\Gamma$ . Seien  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p \in (1, \infty)$  und  $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$ . Das Divergenzproblem lautet dann: Bestimme ein  $u \in (W_0^{s+1,p}(\Omega))^n$  mit

$$\operatorname{div} u = f,$$

wobei  $W_0^{s,p}(\Omega)$  für  $s > 0$  der übliche homogene SOBOLEVraum ist. Für nichtpositive Exponenten haben wir

$$W_0^{-s,p}(\Omega) = (W^{s,q}(\Omega))' \text{ und } W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

für  $s > 0$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Bemerkung C.1.1.** Die Gleichheit

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\Gamma} u \cdot \nu d\Gamma = 0$$

stellt eine Kompatibilitätsbedingung an  $f$  dar: der Mittelwert  $\int_{\Omega} f dx$  muss verschwinden.

**Bemerkung C.1.2.** Für  $n \geq 2$  kann man keine eindeutige Lösbarkeit erwarten: Ist z. B.  $u$  eine Lösung des Divergenzproblems für  $n = 3$ , so gilt

$$\operatorname{div}(u + \operatorname{rot} \varphi) = \operatorname{div} u = f$$

für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , weshalb  $u + \operatorname{rot} \varphi$  eine weitere Lösung darstellt. Dagegen gilt für  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= u_x = f \text{ für } x \in (0, L), \\ u(0) &= u(L) = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $u: x \mapsto \int_0^x f(\xi) d\xi$  die einzige Lösung.

Wir definieren

$$L^p(\Omega)/\{1\} = \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} f dx = 0 \right\}.$$

Der nachstehende Satz stellt die Existenz eines stetigen Lösungsoperators fest, welcher BOGOWSKIĬ-Operator genannt wird.

**Satz C.1.3 (BOGOWSKIĬ-Operator).** Für  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p \in (1, \infty)$  existiert eine lineare Abbildung

$$\mathcal{B}: W_0^{s,p}(\Omega) \cap \left( L^p(\Omega)/\{1\} \right) \longrightarrow (W_0^{s+1,p}(\Omega))^n$$

so, dass für alle  $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\operatorname{div} \mathcal{B}f = f$$

gilt. Diese Abbildung bildet  $C_0^\infty(\Omega)$  auf  $(C_0^\infty(\Omega))^n$  ab und besitzt eine explizite Darstellung in sternförmigen Gebieten. Für  $s > -2 + \frac{1}{p}$  ist  $\mathcal{B}$  stetig.

**Beweis:** Ein Beweis findet sich in [22]. □

## C.2 Anwendung auf Rotationsfreie Vektorfelder

Ferner wollen wir uns auf rotationsfreie Vektorfelder im HILBERTraum beschränken. Hierzu benötigen wir den folgenden in [32] bewiesenen Satz.

**Satz C.2.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glatt berandetes Gebiet. Dann gibt es für alle  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  mit  $v \otimes u = u \otimes v$  auf  $\partial\Omega$  die Gleichheit

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u - (\nabla u)'\|_{L^2(\Omega)}^2 + (n-1) \int_{\partial\Omega} |u|^2 H_n dS, \quad (\text{C.1})$$

wobei  $H_n: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto H_n(x)$  die mittlere Krümmung von  $\partial\Omega$  bzgl. der äußeren Normalen bezeichnet. In  $n = 2, 3$  reduziert sich (C.1) zu

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (n-1) \int_{\partial\Omega} |u|^2 H_n dS, \quad (\text{C.2})$$

wobei

$$\operatorname{rot} u = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 \\ \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \end{pmatrix} \text{ für } d = 3 \text{ und } \operatorname{rot} u = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \text{ für } d = 2.$$

Ist  $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , so verschwindet jeweils der letzte Term in (C.1) und (C.2) und die Voraussetzungen an den Rand entfallen:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{C.3})$$

Wir definieren den Raum

$$H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega) = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n \mid \nabla u = (\nabla u)'\}$$

versehen mit dem üblichen Skalarprodukt von  $(H_0^1(\Omega))^n$ . Da  $H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega)$  ein abgeschlossener Unterraum von  $(H_0^1(\Omega))^n$  ist, ist  $H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega)$  ein HILBERTraum. Dann gilt

**Satz C.2.2.** Die Abbildung

$$\operatorname{div} : H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)/\{1\}$$

ist ein Isomorphismus mit der Inversen  $\operatorname{div}^{-1} = \mathcal{B}_{\operatorname{rot}}$

$$\mathcal{B}_{\operatorname{rot}} : L^2(\Omega)/\{1\} \rightarrow H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega)$$

im Sinne

$$\operatorname{div} \mathcal{B}_{\operatorname{rot}} = \operatorname{id}_{L^2(\Omega)/\{1\}} \text{ und } \mathcal{B}_{\operatorname{rot}} \operatorname{div} = \operatorname{id}_{H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega)}.$$

Ferner gibt es ein  $C_{\mathcal{B}} > 0$  so, dass

$$\|\mathcal{B}_{\operatorname{rot}} f\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq C_{\mathcal{B}_{\operatorname{rot}}} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle  $f \in L^2(\Omega)$  gilt.

**Beweis:** Die Linearität von  $\operatorname{div}$  ist klar. Zu jedem  $u \in H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega)$  ist  $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)$  und es gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = \int_{\Gamma} u \cdot \nu \, d\Gamma = 0,$$

also  $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)/\{1\}$ . Die Stetigkeit ist auch trivial, weil

$$\|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Der Operator  $\operatorname{div}$  ist injektiv, denn: Seien  $u_1, u_2 \in H_{0,\operatorname{rot}}^1(\Omega)$ . Gilt  $\operatorname{div} u_1 = \operatorname{div} u_2$ , so folgt

$$0 = \|\operatorname{div} u_1 - \operatorname{div} u_2\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_p} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)},$$

d. h.  $u_1 = u_2$ .

Um den Operator  $\mathcal{B}_{\operatorname{rot}}$  explizit zu konstruieren, wenden wir uns einem variationellen Zugang zur Konstruktion des BOGOWSKIŦ-Operators zu. Für  $f, g \in L^2(\Omega)/\{1\}$  betrachten wir das Randwertproblem für  $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)/\{1\}$ :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) &= f \text{ in } \Omega, \\ -\operatorname{rot}(\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) &= g \text{ in } \Omega, \\ \nu \cdot (\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \\ \nu^\perp \cdot (\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{C.4}$$

wobei  $\nu^\perp = (\nu_2, -\nu_1)'$ ,  $\operatorname{rot}' = (\partial_{x_2}, -\partial_{x_1})'$ . Wir multiplizieren die linken Seiten der ersten zwei Gleichungen mit  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in H^1(\Omega)/\{1\}$ , addieren sie auf und finden mit partieller Integration unter Beachtung der Randbedingungen

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \tilde{\varphi} \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \tilde{\psi} \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \cdot (\nabla \tilde{\varphi} + \operatorname{rot} \tilde{\psi}) \, dx$$

Dies führt zur folgenden Operatorgleichung

$$\mathcal{A}(\varphi, \psi)' = (f, g)', \tag{C.5}$$

wobei

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (\varphi, \psi)' \mapsto \begin{pmatrix} -\operatorname{div}(\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \\ -\operatorname{rot}(\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \end{pmatrix}$$

und

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (\varphi, \psi)' \in \mathcal{V} \mid \text{es gibt } (f_1, f_2)' \in \mathcal{H} \text{ mit } B(\varphi, \psi; \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \int_{\Omega} f_1 \tilde{\varphi} + f_2 \tilde{\psi} dx \right. \\ \left. \text{für alle } (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})' \in \mathcal{V} \right\}$$

mit der Bilinearform

$$B: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varphi, \psi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})' \mapsto \int_{\Omega} (\nabla \varphi + \text{rot}' \psi) \cdot (\nabla \tilde{\varphi} + \text{rot}' \tilde{\psi}) dx.$$

Darin sind

$$\mathcal{H} := (L^2(\Omega)/\{1\}) \times (L^2(\Omega)/\{1\}), \quad \mathcal{V} := (H^1(\Omega)/\{1\}) \times (H^1(\Omega)/\{1\})$$

HILBERTräume mit den üblichen Skalarprodukten von  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  bzw.  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ . Da aber  $\mathcal{A}$  einen nichttrivialen Kern besitzt, betrachten wir den durch die Restriktion von  $\mathcal{A}$  auf den abgeschlossenen Untervektorraum

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{ (\varphi, \psi)' \in \mathcal{V} \mid \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \text{rot}' \tilde{\psi} dx = \int_{\Omega} \nabla \tilde{\varphi} \cdot \text{rot}' \psi dx = 0 \text{ für alle } (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})' \in \mathcal{V} \}$$

von  $\mathcal{V}$  gegebenen Operator

$$\tilde{\mathcal{A}}: D(\tilde{\mathcal{A}}) := D(\mathcal{A}) \cap \tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Dann reduziert sich (C.5) zu

$$\tilde{\mathcal{A}}(\varphi, \psi)' = (f, g)'. \quad (\text{C.6})$$

Multipliziert man (C.6) skalar in  $\mathcal{H}$  mit einem  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})' \in \tilde{\mathcal{V}}$ , so ergibt sich mit partieller Integration die schwache Formulierung von (C.6): Bestimme ein  $(\varphi, \psi)' \in \tilde{\mathcal{V}}$  mit

$$B(\varphi, \psi; \hat{\varphi}, \hat{\psi}) = F(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \text{ für alle } (\hat{\varphi}, \hat{\psi})' \in \tilde{\mathcal{V}}, \quad (\text{C.7})$$

wobei

$$B: \tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varphi, \psi, \hat{\varphi}, \hat{\psi})' \mapsto \int_{\Omega} (\nabla \varphi + \text{rot}' \psi) \cdot (\nabla \hat{\varphi} + \text{rot}' \hat{\psi}) dx, \\ F: \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\hat{\varphi}, \hat{\psi})' \mapsto \int_{\Omega} \hat{\varphi} f dx + \int_{\Omega} \hat{\psi} g dx.$$

Die Bilinearform  $B$  und das lineare Funktional  $F$  sind stetig auf  $\tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{V}}$  bzw.  $\tilde{\mathcal{V}}$ . Die Bilinearform  $B$  ist symmetrisch. Wegen der 2. POINCARÉschen Ungleichung gilt

$$B(\varphi, \psi) = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\langle \nabla \varphi, \text{rot}' \psi \rangle + \|\text{rot}' \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{rot}' \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c_p}\right) (\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c_p}\right) \|(\varphi, \psi)'\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 =: b \|(\varphi, \psi)'\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2,$$

d. h.  $B$  ist koerziv. Der Satz von LAX & MILGRAM liefert also die Existenz einer eindeutigen Lösung  $(\varphi, \psi)' \in \tilde{\mathcal{V}}$  von (C.7). Ferner gilt

$$b \|(\varphi, \psi)'\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 \leq B(\varphi, \psi) \leq \frac{b}{2} \|(\varphi, \psi)'\|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2 + \frac{1}{2b} \|(f, g)'\|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2 \leq \frac{b}{2} \|(\varphi, \psi)'\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 + \frac{1}{2b} \|(f, g)'\|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2,$$

d. h.

$$\|(\varphi, \psi)'\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 \leq \frac{1}{b} \|(f, g)'\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Unter Benutzung der Tatsache

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}' \varphi = 0, \quad \operatorname{rot} \nabla \varphi = 0 \text{ usw. in } (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))'$$

und der Definition von  $\mathcal{V}$  bekommen wir

$$\int_{\Gamma} \nu \varphi \cdot \operatorname{rot}' \psi dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \operatorname{rot}' \hat{\psi} dx = 0, \quad \int_{\Gamma} \nu^\perp \psi \cdot \nabla \hat{\varphi} d\Gamma = \int_{\Gamma} \operatorname{rot}' \psi \cdot \nabla \hat{\varphi} dx = 0 \text{ usw.}$$

für alle  $(\varphi, \psi)' \in \tilde{\mathcal{V}}$  und  $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})' \in \mathcal{V}$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \hat{\varphi} + \operatorname{rot} (\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \hat{\psi} dx \\ & = B(\varphi, \psi; \hat{\varphi}, \hat{\psi}) - \int_{\Gamma} \nu \cdot (\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \hat{\varphi} + \nu^\perp \cdot (\nabla \varphi + \operatorname{rot}' \psi) \hat{\psi} d\Gamma \end{aligned}$$

für alle  $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})' \in \mathcal{V}$  sowie die Lösung  $(\varphi, \psi)' \in \tilde{\mathcal{V}}$  von (C.7). Also ist  $(\varphi, \psi)' \in D(\tilde{\mathcal{A}})$ . Somit haben wir gezeigt, dass  $\tilde{\mathcal{A}}$  invertierbar ist und dass die Inverse  $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow D(\tilde{\mathcal{A}})$  stetig ist:

$$\|\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(f, g)'\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{b} \|(f, g)'\|_{\mathcal{H}}^2$$

Sei  $f \in L^2(\Omega) / \{1\}$ . Wir definieren  $(\phi, \psi) := \tilde{\mathcal{A}}^{-1}(f, 0)'$ ,  $u := \nabla \phi + \operatorname{rot}' \psi$  und erhalten nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= \Delta \phi = f \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{rot} u &= \operatorname{rot} 0 = 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= \nabla \phi + \operatorname{rot}' \psi = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{C.8}$$

d. h.  $u \in H_{\operatorname{rot}}^1(\Omega)$  mit  $\operatorname{div} u = f$ . Damit existiert eine stetige Inverse

$$\mathcal{B}_{\operatorname{rot}} : L^2(\Omega) / \{1\} \rightarrow H_{0, \operatorname{rot}}^1(\Omega), \quad f \mapsto u$$

von  $\operatorname{div}$  mit

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{\operatorname{rot}} f\|_{(H^1(\Omega))^2} &= \|\mathcal{B}_{\operatorname{rot}} f\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|\nabla \mathcal{B}_{\operatorname{rot}} f\|_{(L^2(\Omega))^{2 \times 2}}^2 \\ &= \|\nabla \phi + \operatorname{rot}' \psi\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathcal{B}_{\operatorname{rot}} f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\|\nabla \phi\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + 2\|\operatorname{rot}' \psi\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left(\frac{2}{b} + 1\right) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 =: \mathcal{C}_{\mathcal{B}_{\operatorname{rot}}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

**Korollar C.2.3.**  $\mathcal{B}_{\operatorname{rot}}$  lässt sich zu einem stetigen linearen Operator

$$\mathcal{B}_{\operatorname{rot}} : (H^1(\Omega))' \rightarrow (L^2(\Omega))^2$$

fortsetzen.

**Beweis:** Aufgrund der Koerzitivität der Bilinearform  $B$  ist der im Beweis von Satz C.2.2 definierte Operator  $\tilde{\mathcal{A}}$  strikt positiv. Nach [83], Section 3.4 kann man die Wurzeln

$$\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \text{ und } \tilde{\mathcal{A}}^{1/2}: D(\mathcal{A}^{1/2}) := \text{im } \mathcal{A}^{-1/2} \rightarrow \mathcal{H}$$

aus  $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$  bzw.  $\tilde{\mathcal{A}}$  definieren. Desweiteren existiert eine stetige Fortsetzung von  $\mathcal{A}^{-1}$

$$\tilde{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathcal{L}(D(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}), D(\tilde{\mathcal{A}}^{1/2})),$$

wobei  $D(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}) = D(\tilde{\mathcal{A}}^{1/2})'$ . Damit stellt

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\text{rot}}: D(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}) \rightarrow (L^2(\Omega))^2, \quad f \mapsto \nabla \varphi + \text{rot}' \psi \text{ mit } (\varphi, \psi)' := \tilde{\mathcal{A}}^{-1}(f, 0)' \in \tilde{\mathcal{V}}$$

eine stetige Fortsetzung von  $\mathcal{B}_{\text{rot}}$  auf  $D(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2})$  dar. Weil  $(H^1(\Omega))' \subset D(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2})$  und die Normen von  $(H^1(\Omega))'$  und  $D(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2})$  äquivalent sind, folgt die Behauptung (vgl. auch [7], [22]).  $\square$

Es sei nun  $u \in (H^1(\Omega))^2$  ein Vektorfeld mit  $u \cdot \nu = 0$  auf  $\Gamma$ . Im Allgemeinen ist

$$\mathcal{B}_{\text{rot}} \text{ div } u = u$$

leider nicht gültig, denn  $u$  muss nicht zwingend in  $H_{0,\text{rot}}^1(\Omega)$  liegen. Dafür gilt aber der folgende

**Satz C.2.4.** Sei  $u \in H^1(\Omega)$  mit  $u \cdot \nu = 0$  auf  $\Gamma$ . Dann gibt es ein  $C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} > 0$  so, dass

$$\|\mathcal{B}_{\text{rot}} \text{ div } u\|_{L^2(\Omega)} \leq C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} \|u\|_{(L^2(\Omega))^2}.$$

**Beweis:** Wir schätzen ab

$$\|\mathcal{B}_{\text{rot}} \text{ div } u\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} \|\text{div } u\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Ferner gilt

$$\int_{\Omega} \text{div } u f dx = - \int_{\Omega} u \nabla f dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu f d\Gamma = - \int_{\Omega} u \nabla f dx \quad (\text{C.9})$$

für alle  $f \in H^1(\Omega)$ , woraus sich

$$\begin{aligned} \|\text{div } u\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|f\|_{H^1(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} \text{div } u f dx \right| = \sup_{\|f\|_{H^1(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} u \nabla f dx \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|_{H^1(\Omega)}=1} \|u\|_{(L^2(\Omega))^2} \|f\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{(L^2(\Omega))^2} \end{aligned}$$

ergibt. Daraus schließen wir

$$\|\mathcal{B}_{\text{rot}} \text{ div } u\|_{L^p(\Omega)} \leq C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} \|u\|_{L^p(\Omega)} \text{ für alle } u \in H^1(\Omega), \quad (\text{C.10})$$

wobei  $C'_{\mathcal{B}_{\text{rot}}} = C_{\mathcal{B}_{\text{rot}}}$ .  $\square$

---

---

# Literaturverzeichnis

---

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, 2nd Edition, Academic Press, New York
- [2] Avalos, G., Lasiecka, I. (2000): *Boundary Controllability of Thermoelastic Plates via the Free Boundary Conditions*, SIAM Journal on Control and Optimization, 38, pp. 337–383
- [3] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L. (1964): *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 17, Issue 1, pp. 35–92
- [4] Backhaus, G. (1983): *Deformationsgesetze*, Akademie Verlag
- [5] Bardos, C., Lebeau, G., Rauch, J. (1992), *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM Journal on Control and Optimization, 30, pp. 1024–1065.
- [6] Betten, J. (1984): *Elastizitäts- und Plastizitätslehre*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden
- [7] Borchers, S., Sohr, H. (1990): *On the equations  $\operatorname{rot} v = g$  and  $\operatorname{div} u = f$  with zero boundary conditions*, Hokkaido Mathematical Journal, 19(1), pp. 67–87
- [8] Brezzi, F., Fortin, M. (1986): *Numerical approximation of Mindlin-Reissner plate*, Mathematics of Computation 47, pp. 151–158
- [9] Cattaneo, C. R. (1958): *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantané*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 247, pp. 431–433
- [10] Chester, M. (1963), *Second sound in solids*, Phys. Rev. 131 (15), pp. 2013—2015
- [11] Chen, G. (1979): *Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 58, pp. 249–274
- [12] Chitour, Y., Trélat, E. (2006): *Advanced Topics in Control Systems Theory*, Chapter „Controllability of partial differential equations“, Lecture Notes in Control and Information Sciences 328, pp. 171–198
- [13] Chueshov, I., Lasiecka, I. (2010): *Von Karman Evolution Equations – Well-posedness and Long Time Dynamics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag
- [14] Dolecki, S., Russell, L. (1977): *A general theory of observation and control*, SIAM Journal on Control and Optimization, 15, pp. 185–220

- [15] Eck, Ch., Garcke, H., Knabner, P. (2008), *Mathematische Modellierung*, Springer Verlag
- [16] Eller, M, Lasiecka, I., Triggiani, R. (2001), *Simultaneous Exact/approximate Boundary Controllability Of Thermo-elastic Plates With Variable Transmission Coefficient*, Shape Optimization And Optimal Design, Chapter 7, Polis, M. P., Cagnol, J., Zolésio, J.-P. (eds.), New York: Marcel Dekker
- [17] Fastovska, T. (2009), *Upper semicontinuous attractors for a 2D Mindlin–Timoshenko thermo-viscoelastic model with memory*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Vol. 71, Issue 10, pp. 4833–4851
- [18] Fernández Sare, H. D. (2009), *On the stability of Mindlin-Timoshenko plates*, Quarterly of Applied Mathematics, 67(2), pp. 249–263
- [19] Fernández Sare, H. D., Racke, R. (2009): *On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 184, Number 1, pp. 221–251
- [20] Friedrichs, K. O. (1958), *Symmetric positiv linear differential equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 11, pp. 333–418
- [21] Fu, Y. B., Ogden, R. W. (Editors) (2001), *Nonlinear Elasticity: Theory and Practice*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, 283
- [22] Geißert, M., Heck, H., Hieber, M. (2006): *On the Equation  $\operatorname{div} u = g$  and Bogovskii's Operator in Sobolev Spaces of Negative Order*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 168: Partial Differential Equations and Functional Analysis, Birkhäuser Basel, pp. 113–121
- [23] Gerds, M, Greif, G., Pesch, B. (2008): *Numerical optimal control of the wave equation: optimal boundary control of a string to rest in finite time*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 79, Issue 4, pp. 1020–1032
- [24] Green, A. E., Naghdi, P. M. (1993): *Thermoelasticity without energy dissipation*, Journal of Elasticity, 31, pp. 189–208
- [25] Grobbelaar-van Dalsen, M. (2007): *On a structural acoustic model which incorporates shear and thermal effects in the structural component*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 341, pp. 1253–1270
- [26] Grobbelaar-van Dalsen, M. (2008): *Strong stability for a fluid-structure interaction model*, Mathematical Methods in The Applied Sciences, 32, pp. 1452–1466
- [27] Gümpel, P. (Hrsg.) (2004), *Formgedächtnislegierungen*, Expert Verlag
- [28] Hahn, H. G. (1985), *Elastizitätstheorie: Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*, Teubner Verlag
- [29] Haynsworth, E. V. (1968): *Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 1, pp. 73–81
- [30] Hörmander, L. (1969): *Linear Partial Differential Operators*, Third revised printing, Springer Verlag, New York

- [31] Indlekofer, N. (2007): *Nichtlineare Wärmeleitung mit „second sound“*, Diplomarbeit, Universität Konstanz
- [32] Irmischer, T. (2006): *Aspekte Hyperbolischer Thermoelastizität*, Dissertation, Universität Konstanz
- [33] Irmischer, T., (2011), *Global existence in nonlinear hyperbolic thermoelasticity with radial symmetry*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 69, pp. 39–55.
- [34] Jiang, S., Muñoz Rivera, J. E., Racke, R. (1998), *Asymptotic stability and global existence in thermoelasticity with symmetry*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 56, pp. 259–275
- [35] Jiang, S., Racke, R. (2000): *Evolution Equations in Thermoelasticity*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, 112
- [36] John, F. (1977): *Finite amplitude waves in a homogeneous isotropic elastic solid*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 30, Issue 4, pp. 421–446
- [37] Kabil, B. (2011): *Zur Asymptotik bei Resonatorgleichungen*, Diplomarbeit, Universität Konstanz
- [38] Kato, T. (1985): *Abstract differential equations and nonlinear mixed problem*, Fermi Lectures, Scuola Normale Sup., Pisa
- [39] Kelliher, J. P. (2010), *Eigenvalues of the Stokes operator versus the Dirichlet Laplacian in the plane*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 244, No. 1, pp. 99–132
- [40] Kovalev, V. A., Radayev, Yu. N., Semenov, D. A. (2009): *Coupled Dynamic Problems of Hyperbolic Thermoelasticity*, Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform., 9:4(2), pp. 94–127
- [41] Kurth, P. (2008): *Thermoelastische Systeme mit „dual-phase-lag“*, Diplomarbeit an der Universität Konstanz
- [42] Lagnese, J. E., Lions, J. L. (1988): *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*, Collection RMA, Masson, Paris
- [43] Lagnese, J. E. (1989): *Boundary Stabilization of Thin Plates*, SIAM, Philadelphia (1989)
- [44] Landau, L., Lifschitz, E. (1991): *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band 7, *Elastizitätstheorie*, Deutsch (Harri); Auflage: 5., überarb. A.
- [45] Lasiecka, I., Triggiani, R. (1989), *Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control*, Applied Mathematics & Optimization, Vol. 19, No. 1, pp. 243–290
- [46] Lasiecka, I., Triggiani, R. (2010). Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories, Vol. 1: Abstract Parabolic Systems, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 74
- [47] Lasiecka, I., Triggiani, R. (2010). Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories, Vol. 2: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 74
- [48] Leis., R. (1986): *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, B.G. Teubner; Stuttgart und J. Wiley & Sons; Chichester et al., VIII

- [49] Lions, J. L., Magenes, E. (1972): *Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications*, II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 182
- [50] Lions, J. L. (1986): *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 302, pp. 471–475
- [51] Lions, J. L. (1988): *Exact Controllability, Stabilization and Perturbation for Distributed Systems*, John von Neumann Lecture, Boston, MA, July 1986, SIAM Review, March 1988
- [52] Liu, Z., Zheng, S. (1999): *Semigroups associated with dissipative systems*,  $\pi$  Research Notes Math. 398, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton
- [53] López, A., Zhang, X., Zuazua, E. (2000): *Null controllability of the heat equation as singular limit of the exact controllability of dissipative wave equations*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 79(8), pp. 741–808
- [54] Luk'yanchuk, B. (Hrsg.) (2002): *Laser cleaning*, World Scientific, Singapore
- [55] Messaoudi, S. A. (2002), *Local existence and blow up in thermoelasticity with second sound*, Communications in Partial Differential Equations, Vol. 26, No. 8, pp. 1681–1693
- [56] Messaoudi, S. A., Said-Houari, B. (2004), *Blow up of solutions with positive energy in nonlinear thermo-elasticity with second sound*, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2004, No. 3, pp. 201–211
- [57] Messaoudi, S. A., Pokojovy M., Said-Houari, B. (2009): *Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound – Global existence and exponential stability*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 32, Issue 5, pages 505–534
- [58] Morando, A., Secchi, P., Trebeschi, P. (2009), *Characteristic initial boundary value problems*, Rendiconti del Seminario Matematico Università Politecnico di Torino, Vol. 67, 2, pp. 229–245
- [59] Muñoz Rivera, J. E., Racke, R. (2002), *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems - global existence and exponential stability*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 276, Issue 1, pp. 248–278
- [60] Muñoz Rivera, J. E., Portillo Oquendo, H. (2003): *Asymptotic behavior on a Mindlin–Timoshenko plate with viscoelastic dissipation on the boundary*, Funkcialaj Ekvacioj 46, pp. 363–382.
- [61] Naghdi, P. M. (1972), *The Theory of Shells and Plates*, Handbuch der Physik, Band VI A/2
- [62] Narukawa, K. (1982), *Boundary value control of thermoelastic systems*, Hiroshima Mathematical Journal, 17, pp. 227–272
- [63] Ohkubo, T. (1981): *Regularity of solutions to hyperbolic mixed problems with uniformly characteristic boundary*, Hokkaido Mathematical Journal, 10, pp. 93–123
- [64] Pazy, A. (1983): *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer New York, Applied Mathematical Sciences, 44

- [65] Pandolfi, A., Manganiello, F. (2006): *A model for the human cornea: constitutive formulation and numerical analysis*, Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 5, pp. 237–246
- [66] Peshkov, V. (1944): *'Second Sound' in Helium II*, Journal of Physics USSR, p. 131
- [67] Pfister, T. (2007): *Ein Ermüdungsschädigungsmodell für Zuverlässigkeitsanalysen von Stahlbetontragwerken*, Dissertation an der Ruhr-Universität Bochum
- [68] Quintanilla, R., Racke, R. (2011): *Addendum to: Qualitative aspects of solutions in resonators*, Archives of Mechanics, Vol. 63, No. 4, pp. 429–435
- [69] Racke, R. (2001): *Thermoelasticity with second sound – Exponential stability in linear and nonlinear 1-d*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 25, Issue 5, pp. 409–441
- [70] Racke, R. (2003): *Asymptotic behaviour of solutions in linear 2- or 3-d thermoelasticity with second sound*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 61, No. 2, pp. 315–328
- [71] Ritter, M. (2011): *Nichtlineare Hyperbolische Thermoelastizitätsgleichungen*, Diplomarbeit, Universität Konstanz
- [72] Russell, D. L. (1973): *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Applied Mathematics, 52, pp. 189–221.
- [73] Russell, D. L. (1974): *Exact boundary value controllability theorems for wave and heat equations*, Differential Games and Control Theory, Marcel Dekker, New York, pp. 291–320
- [74] Schochet, S. (1986), *The compressible Euler equations in a bounded domain: Existence of solutions and the incompressible limit*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 104, No. 1, pp. 49–75
- [75] Secchi, P. (1996), *Well-Posedness of Characteristic Symmetric Hyperbolic Systems*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 134, pp. 155–197
- [76] Slemrod, M. (1981), *Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 76, pp. 97–133
- [77] Sohr, H. (2001), *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*, Birkhäuser Basel; 1st Edition, pp. 1–377
- [78] Tamma, K. K., Zhou, X. (1998), *Macroscale and Microscale Thermal Transport and Thermo-mechanical Interactions: Some Noteworthy Perspectives*, Journal of Thermal Stresses, Vol. 21, Issue 3–4, pp. 405–449
- [79] Tarabek, M. A. (1992), *On the existence of smooth solutions in one dimensional thermoelasticity with second sound*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 50, pp. 727–742
- [80] Telega, J. J., Bielski, W. R. (2000), *Controllability and Stabilization in Elasticity, Heat Conduction and Thermoelasticity: Review of Recent Developments*, Journal of Global Optimization archive, Vol. 17, Issue 1–4, Kluwer Academic Publishers Hingham, MA, USA
- [81] Truesdell, C. A., Noll, W. (2004): *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Third Edition, Springer Verlag

- 
- [82] Truesdell, C. A. (1968): *Essays in the History of Mechanics*, Springer Verlag
- [83] Tucsnak, M., Weiss G. (2009): *Observation and Control for Operator Semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel
- [84] Wang, C.-C., Truesdell, C. (1973), *Introduction to Rational Elasticity*, Noordhoff International Publishing, Leyden
- [85] Weinberg, K. (2006): *Zur Methode der finiten Elemente in der Mechanik I: Linear-elastische Probleme*, Vorlesungsskript an der TU Berlin, Berlin
- [86] Weinmann, O. (2009): *Dual-Phase-Lag Thermoelastizität*, Dissertation, Universität Konstanz
- [87] Zuazua, E. (1990), *Exponential decay for semilinear wave equations with localized damping*, *Communications in Partial Differential Equations*, 15 (2), pp. 205–235.
- [88] Zuazua, E. (1995), *Controllability of the linear system of thermoelasticity*, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 74, pp. 303–346.
- [89] Zuazua, E. (2006), *Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some results and open problems*, In *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Differential Equations*, vol. 3, Dafermos, C., Feireisl, E., eds., Elsevier Science