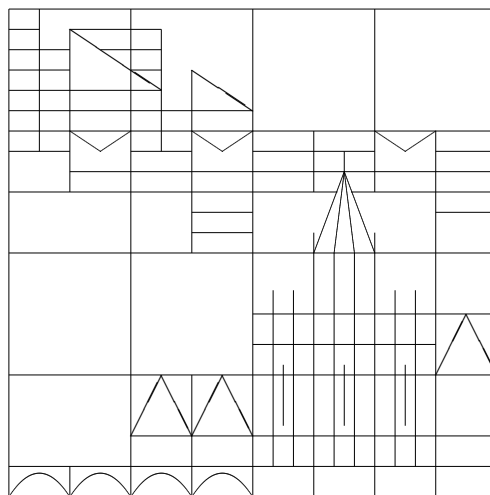


Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis

Wintersemester 2005/06

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 16. 2. 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Anmerkungen zu Hilbert- und Banachräumen	1
	a) Erste Eigenschaften	1
	b) Summen und Quotienten	4
	c) Der Satz von Riesz	7
	d) Orthonormalbasen	10
2	Klassische Sätze der Funktionalanalysis	14
	a) Der Satz von Baire	14
	c) Hahn-Banach-Sätze	18
3	Topologische Begriffe	23
4	Das Spektrum linearer Operatoren in Banachräumen	27
5	Adjungierte Operatoren	33
	a) Adjungierte von beschränkten Operatoren	33
	b) Adjungierte von unbeschränkten Operatoren	36
6	Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren	40
	a) Nützliches über das Spektrum	40
	b) Stetiger und messbarer Funktionalkalkül	45
	c) Projektorwertige Maße	51
7	Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren	64
	a) Spektralzerlegung unitärer Operatoren	64
	b) Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren	66
8	Ein kurzer Ausflug in die Quantenmechanik	71
	Literatur	77

1. Anmerkungen zu Hilbert- und Banachräumen

In diesem Abschnitt werden wichtige elementare Eigenschaften von Hilberträumen zusammengefasst. Das einzige, was über eine elementare Darstellung hinausgeht, ist die direkte Summe von Hilberträumen. Orthonormalbasen erlauben es, jeden Hilbertraum als einen ℓ^2 -Raum zu schreiben. Insbesondere gibt es bis auf unitäre Isometrie nur einen unendlichen separablen Hilbertraum. Dieser spielt eine wichtige Rolle in der Physik.

a) Erste Eigenschaften

Wir beginnen mit der Wiederholung einiger wichtiger Begriffe. Im folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Definition. a) Ein \mathbb{K} -Vektorraum E , versehen mit einer Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, heißt ein Vektorraum mit Skalarprodukt oder ein Prähilbertraum, falls gilt:

- (i) Für alle $y \in E$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, y \rangle$ linear.
- (ii) Für alle $x, y \in E$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
- (iii) Für alle $x \in E$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$. Es gilt $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

b) Zwei Vektoren $x, y \in E$ heißen orthogonal (in Zeichen $x \perp y$), falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. Eine Familie $\{x_i\}_{i \in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls gilt:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Begriffe Norm, Metrik und vollständig werden als bekannt vorausgesetzt. In einem Prähilbertraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wird durch $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ eine Norm definiert.

1.2 Definition. a) Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum.

b) Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Auch die folgenden elementaren Eigenschaften von Prähilberträumen werden als bekannt vorausgesetzt, sie können aber auch leicht direkt nachgerechnet werden.

1.3 Satz. *Sei E Prähilbertraum.*

a) (Pythagoras) *Seien $x, y \in E$ orthogonal. Dann gilt*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

b) Sei $\{x_n\}_{n=1}^N$ orthonormal. Dann gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n \rangle x_n \right\|^2.$$

c) (Besselsche Ungleichung). Sei $\{x_n\}_{n=1}^N$ orthonormal. Dann ist

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 \quad (x \in E).$$

d) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Es gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in E).$$

e) (Parallelogramm-Identität) Für $x, y \in E$ gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

f) (Polarisationsformel) Für $x, y \in E$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{z^4=1} z \|x + zy\|^2.$$

Die Formel in f) ist so zu verstehen, dass für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ über $z = +1$ und $z = -1$ summiert wird, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ über $z \in \{1, -1, i, -i\}$. Die Bedeutung der Polarisationsformel liegt daran, dass Identitäten nur für die Norm nachgerechnet werden müssen und dann automatisch für die Skalarprodukte gelten.

1.4 Beispiel. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Definiere $\ell^\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ beschränkt}\}$ und $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| (< \infty)$. Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\ell^\infty(X)$.

Wir zeigen, dass der Raum $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist:

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, d.h.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0).$$

Damit ist für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} , d. h. $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{K}$ existiert. Als Cauchy-Folge ist $(f_n)_n$ beschränkt, d.h. es existiert ein $C > 0$ mit $\|f_n\|_\infty \leq C < \infty$.

Somit gilt

$$|f(x)| = \lim_n \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|f_n\|_\infty \leq C} \leq C \quad (x \in X),$$

d.h. $\|f\|_\infty < \infty$ und damit $f \in \ell^\infty(X)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass f_n in $\|\cdot\|_\infty$ gegen f konvergiert. Da $(f_n)_n$ Cauchy-Folge ist, gilt

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0).$$

Wir nehmen den Limes $m \rightarrow \infty$ und erhalten

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0).$$

Also gilt $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

1.5 Satz. Seien E, F normierte Räume, $T : E \rightarrow F$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) T ist beschränkt, d. h. $\exists c > 0 : \|Tx\|_F \leq c\|x\|_E \quad (x \in E)$.

(ii) $T : E \rightarrow F$ ist stetig.

(iii) $T : E \rightarrow F$ ist stetig an der Stelle $0 \in E$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Sei $K_\delta(x) := \{y \in E : \|x - y\| < \delta\}$ für festes $x \in E$. Für $y \in K_\delta(0)$ ist nach (i)

$$\|Ty\|_F \leq c\|y\|_E < c\delta.$$

Damit ist für $\|x - y\| < \delta$, d.h. für $y \in K_\delta(x)$

$$\|Ty - Tx\|_F = \|T(y - x)\|_F < c\delta.$$

Also ist T stetig (zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{c}$).

(ii) \Rightarrow (iii) ist trivial.

(iii) \Rightarrow (i). Da T stetig an der Stelle 0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $TK_\delta(0) \subset K_1(0)$. Damit $\|T(\delta \frac{\delta x}{2\|x\|_E})\|_F \leq 1 \quad (x \in E)$, d.h. es gilt

$$\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|_E} \|Tx\|_F \leq 1 \quad (x \in E)$$

und damit

$$\|Tx\|_F \leq \underbrace{\frac{2}{\delta}}_{=:c} \|x\|_E \quad (x \in E).$$

□

1.6 Definition. Seien E, F normierte Räume. Der Raum

$$L(E, F) := \{T : E \rightarrow F \mid T \text{ linear, beschränkt}\}$$

heißt der Raum der linearen beschränkten Operatoren von E nach F . Wir setzen $L(E) := L(E, E)$. Der Raum $E' := L(E, \mathbb{K})$ heißt der (topologische) Dualraum von E . Oft schreibt man Tx statt $T(x)$.

Für $T \in L(E, F)$ definiert man

$$\|T\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

$\|T\|$ heißt die Operatornorm von T . Sei

$$\begin{aligned} \ker T &:= N(T) := \{x \in E : Tx = 0\}, \\ \operatorname{Im} T &:= R(T) := T(E) := \{Tx : x \in E\}. \end{aligned}$$

1.7 Bemerkung. Es gilt

$$\|Tx\|_F \leq \|T\| \cdot \|x\|_E \quad (x \in E)$$

und

$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in E : \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E\}.$$

b) Summen und Quotienten

Im folgenden werden auch Hilberträume auftreten, welche eine überabzählbare Hilberttraumbasis besitzen, d.h. man muss grundsätzlich auch Summen mit überabzählbarer Indexmenge betrachten. Dazu dient die folgende Definition, die für spätere Zwecke gleich in Hilberträumen formuliert wird.

1.8 Definition. a) Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und $\alpha_i \geq 0$ ($i \in I$). Definiere

$$\sum_{i \in I} \alpha_i := \sup \left\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i : I_0 \subset I \text{ endlich} \right\} \in [0, \infty].$$

b) Sei E Hilbertraum, $I \neq \emptyset$ eine Menge und $y_i \in E$ für alle $i \in I, y \in E$. Dann heißt die Reihe $\sum_{i \in I} y_i$ unbedingt konvergent gegen ein Element $y \in E$, falls die Menge $I_0 := \{i \in I : y_i \neq 0\}$ abzählbar ist und für jede Aufzählung $I_0 = \{i_1, i_2, \dots\}$ die Gleichheit $\sum_{n=1}^{\infty} y_{i_n} = y$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall

$$\sum_{i \in I} y_i = y.$$

1.9 Bemerkung. a) Für $E = \mathbb{K}^n$ ist eine Reihe mit abzählbarer Indexmenge genau dann unbedingt konvergent, falls sie absolut konvergent ist (vgl. großer Umordnungssatz).

b) Seien $I \neq \emptyset$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i \in I$) mit $\sum_{i \in I} |\alpha_i| < \infty$. Dann ist $I_0 := \{i \in I : \alpha_i \neq 0\}$ abzählbar, denn

$$\{i \in I : \alpha_i \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{i \in I : |\alpha_i| > \frac{1}{n}\right\}}_{\text{endlich}}.$$

Da die Reihe absolut konvergent ist, ist $\sum_{i \in I} \alpha_i$ unbedingt konvergent nach dem großen Umordnungssatz.

Sei nun $\{E_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Hilberträumen. Definiere die direkte Hilbertraumsumme

$$E := \bigoplus_{i \in I} E_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} : x_i \in E_i, \sum_{i \in I} \|x_i\|_{E_i}^2 < \infty \right\}.$$

Durch $(x_i)_i + (y_i)_i := (x_i + y_i)_i$ und $\alpha(x_i)_i := (\alpha x_i)_i$ wird E zu einem Vektorraum. Definiere

$$\langle (x_i)_i, (y_i)_i \rangle := \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{E_i}.$$

1.10 Bemerkung. Für $(x_i)_i, (y_i)_i \in E$ gilt $\sum_{i \in I} |\langle x_i, y_i \rangle_{E_i}| < \infty$, denn für alle endlichen $I_0 \subset I$ gilt unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0} |\langle x_i, y_i \rangle_{E_i}| &\leq \sum_{i \in I_0} \|x_i\|_{E_i} \cdot \|y_i\|_{E_i} \\ &\leq \left(\sum_{i \in I_0} \|x_i\|_{E_i}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i \in I_0} \|y_i\|_{E_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|x\|_E \cdot \|y\|_E < \infty. \end{aligned}$$

1.11 Satz. Sei $\{E_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Hilberträumen. Dann ist $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ebenfalls Hilbertraum.

Beweis. Die Eigenschaften eines Skalarprodukts sind offensichtlich, so gilt z.B.:

$$\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle \alpha x_i, y_i \rangle_{E_i} = \sum_{i \in I} \alpha \langle x_i, y_i \rangle_{E_i} = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Zu zeigen ist also nur noch die Vollständigkeit. Sei $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i \in I}$ eine Cauchy-Folge in E . Wegen

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|_{E_i}^2$$

ist $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E_i , d.h. $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ in E_i .

Für $I_0 \subset I$ endlich, $n \in \mathbb{N}$ fest, gilt:

$$\sum_{i \in I_0} \|x_i^{(n)} - x_i\|_{E_i}^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_0} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|_{E_i}^2 \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|_{E_i}^2$$

und damit

$$\sum_{i \in I} \|x_i^{(n)} - x_i\|_{E_i}^2 \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E^2.$$

Nimmt man nun den Limes Superior für $n \rightarrow \infty$, so erhält man

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \|x_i^{(n)} - x_i\|_{E_i}^2 \leq \limsup_{n, m \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E^2 = 0,$$

da $(x^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge ist. Damit gilt $\|x^{(n)} - x\|_E \rightarrow 0$.

Wegen

$$\sum_{i \in I_0} \|x_i\|_{E_i}^2 \leq \sum_{i \in I_0} 2(\|x_i^{(n)}\|_{E_i}^2 + \|x_i - x_i^{(n)}\|_{E_i}^2) \leq 2\|x^{(n)}\|_E^2 + 2\|x - x^{(n)}\|_E^2 < \infty$$

für hinreichend großes n folgt $x \in E$. □

1.12 Definition. Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge, E_0 ein Hilbertraum und $E_i := E_0$ ($i \in I$). Definiere $\ell^2(I; E_0) := \bigoplus_{i \in I} E_i$. Speziell schreibt man

$$\begin{aligned} \ell^2(I) &:= \ell^2(I; \mathbb{C}) \\ \ell^2 &:= \ell^2(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

1.13 Definition und Satz. Sei E normierter Raum, $M \subset E$ ein Unterraum. Sei $E/M := \{[x] = x + M : x \in E\}$ der Quotientenraum. Dann ist $\|[x]\| := \inf_{y \in M} \|x - y\|$ eine Seminorm auf E/M . Falls M abgeschlossen ist, ist $\|[\cdot]\|$ eine Norm. Falls E Banachraum ist und M abgeschlossen ist, so ist auch E/M Banachraum.

Beweis. Nur die letzte Aussage folgt nicht durch direktes Nachrechnen. Sei $([x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in E/M .

(i) Übergang zur Teilfolge: Da $\|([x_n]) - ([x_m])\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$), existiert eine Teilfolge $([x_{n_k}])_{k \in \mathbb{N}}$ von $([x_n])_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\| < 2^{-(k+1)}$. Schreibe wieder $[x_k]$ statt $[x_{n_k}]$.

(ii) Wahl einer Cauchyfolge in E : Induktiv sieht man, dass nach Definition der Norm in E/M eine Folge $(z_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset E$ existiert mit $z_\ell \in [x_\ell]$ und

$$\|z_{\ell+1} - z_\ell\| \leq \|[x_{\ell+1}] - [x_\ell]\|_{E/M} + 2^{-\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}).$$

Damit

$$\begin{aligned} \|z_{k+m} - z_k\|_E &\leq \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \|z_\ell - z_{\ell-1}\|_E \\ &\leq \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \left(\| [x_\ell] - [x_{\ell-1}] \|_{E/M} + 2^{-\ell} \right) \\ &\leq \sum_{\ell=k+1}^{k+m} 2^{-\ell+1} \leq 2^{-k+1}, \end{aligned}$$

d.h. $(z_k)_k \subset E$ ist eine Cauchyfolge. Setze $z := \lim_k z_k$. Wegen

$$\| [x_k] - [z] \|_{E/M} = \| [z_k] - [z] \|_{E/M} \leq \| z_k - z \|_E \rightarrow 0$$

gilt $[x_k] \rightarrow [z]$ in E/M . □

1.14 Definition und Satz. Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und $\{E_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Banachräumen. Dann ist die direkte Summe

$$\bigoplus_{i \in I} E_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} : x_i \in E_i, \sum_{i \in I} \|x_i\|_{E_i} < \infty \right\}$$

ein Banachraum.

Für $E_i = E_0$ ($i \in I$) schreibt man

$$\ell^1(I; E_0) := \bigoplus_{i \in I} E_i.$$

Man definiert $\ell^1(I) := \ell^1(I; \mathbb{C})$ und $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N})$.

Beweis. Wie im Hilbertraum-Fall (vgl. auch Beispiel 1.4). □

c) Der Satz von Riesz

Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein \mathbb{K} -Hilbertraum.

1.15 Definition. a) $M \subset E$ heißt konvex, falls gilt

$$\forall x, y \in M \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in M.$$

b) Zu $M \subset E$ heißt

$$M^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in M : \langle x, y \rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von M .

1.16 Bemerkung. a) M^\perp ist abgeschlossener linearer Teilraum von E . Es gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$. Denn sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann ist $\langle x, x \rangle = 0$, d.h. $x = 0$.

b) Es ist $M^\perp = \overline{M}^\perp = (\text{span}M)^\perp$.

1.17 Lemma. Falls $M \subset E$ konvex und abgeschlossen ist, so existiert genau ein $x \in M$ mit $\|x\| \leq \|y\|$ für alle $y \in M$.

Beweis. Sei $d := \inf\{\|y\| : y \in M\}$. Wähle eine Folge $(y_n)_n \subset M$ mit $\|y_n\| \rightarrow d$.

Falls $d = 0$, gilt $y_n \rightarrow 0$ und wegen $M = \overline{M}$ ist $0 \in M$.

Falls $d > 0$, schreiben wir unter Verwendung der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4 \cdot \underbrace{\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2}_{\in M} \\ &\leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

da $\|y_n\| \rightarrow d$. Daher ist $(y_n)_n$ Cauchy-Folge. Da M vollständig ist, existiert $x := \lim_n y_n \in M$. Es gilt $\|x\| = \lim_n \|y_n\| = d$. Damit folgt $\|x\| \leq \|y\|$ für alle $y \in M$.

Eindeutigkeit: Sei $\|x_1\| \leq \|y\|, \|x_2\| \leq \|y\|$ ($y \in M$). Dann ist

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - 4\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 \\ &= 2 \underbrace{\left(\|x_1\|^2 - \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 \right)}_{\leq 0} + 2 \underbrace{\left(\|x_2\|^2 - \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 \right)}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

□

1.18 Satz (Projektionssatz). Sei $M = \overline{M} \subset E$ linearer Teilraum. Dann existiert für alle $x \in E$ eine eindeutige Zerlegung $x = m + m'$ mit $m \in M, m' \in M^\perp$. Somit ist $E = M \oplus M^\perp$. Es ist $\|x - m\| = \min_{y \in M} \|x - y\|$.

Beweis. Wähle $m' \in x + M$ mit $\|m'\| \leq \|x + y\|$ ($y \in M$), und $m := x - m'$.

(i) Wir zeigen $m' \in M^\perp$. Es gilt $\|m'\|^2 \leq \|m' + ty\|^2$ ($t \in \mathbb{K}, y \in M$). Andererseits ist

$$\|m' + ty\|^2 = \|m'\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle m', ty \rangle + |t|^2 \|y\|^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$|t|^2 \|y\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle m', y \rangle \geq 0,$$

also $\operatorname{Re}\langle m', y \rangle = 0$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetzt man t durch it und erhält

$$|t|^2 \|y\|^2 + 2t \operatorname{Im}\langle m', y \rangle \geq 0,$$

also $\operatorname{Im}\langle m', y \rangle = 0$.

(ii) Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $x = m + m' = z + z'$ mit $m, z \in M, m', z' \in M^\perp$. Dann ist $m - z = z' - m' \in M \cap M^\perp = \{0\}$, d. h. $m = z, m' = z'$. \square

1.19 Satz (von Riesz). Sei E Hilbert-Raum und $T \in E'$. Dann existiert genau ein $x_T \in E$ mit

$$Tx = \langle x, x_T \rangle \quad (x \in E).$$

Es gilt $\|T\| = \|x_T\|_E$. Die Abbildung $E' \rightarrow E, T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear.

Beweis. $M := \ker T = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung T . Damit ist $E = M \oplus M^\perp$ nach Satz 1.18.

(i) Falls $M = E$, folgt $T = 0$. Wähle $x_T := 0$.

(ii) Sei $M \neq E$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ ist dann $Ty \neq 0$. Setze $x_T := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Dann gilt $\|x_T\|^2 = \frac{|Ty|^2}{\|y\|^2}$ und

$$Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2.$$

Für $x \in M$ gilt $\langle x, x_T \rangle = 0 = Tx$ wegen $x_T \in M^\perp$.

Für $x \notin M$ gilt

$$T\left(x - \frac{Tx}{Tx_T} \cdot x_T\right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} \cdot Tx_T = 0,$$

d.h. $\tilde{x} := x - \frac{Tx}{Tx_T} \cdot x_T \in M$.

Daher folgt $T\tilde{x} = \langle \tilde{x}, x_T \rangle (= 0)$. Wir erhalten

$$Tx = T\tilde{x} + \frac{Tx}{Tx_T} \cdot \underbrace{Tx_T}_{\|x_T\|^2} = \langle \tilde{x}, x_T \rangle + \left\langle \frac{Tx}{Tx_T} \cdot x_T, x_T \right\rangle = \langle x, x_T \rangle.$$

(iii) Nach Cauchy-Schwarz ist $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x_T \rangle| \leq \|x_T\|$. Andererseits haben wir

$$\|T\| \geq |T\left(\frac{x_T}{\|x_T\|}\right)| = \|x_T\|.$$

(iv) Eindeutigkeit: Sei $Tx = \langle x, x_T \rangle = \langle x, \tilde{x}_T \rangle \quad (x \in E)$. Dann gilt

$$0 = \langle x, x_T - \tilde{x}_T \rangle \quad (x \in E).$$

Wähle $x = x_T - \tilde{x}_T$ und erhalte $\|x_T - \tilde{x}_T\| = 0$.

(v) Die Abbildung ist konjugiert linear: Sei $T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} Tx &= \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x = \alpha_1 \langle x, x_{T_1} \rangle + \alpha_2 \langle x, x_{T_2} \rangle = \\ &= \langle x, \bar{\alpha}_1 x_{T_1} \rangle + \langle x, \bar{\alpha}_2 x_{T_2} \rangle = \langle x, \bar{\alpha}_1 x_{T_1} + \bar{\alpha}_2 x_{T_2} \rangle = \langle x, x_T \rangle. \end{aligned}$$

(vi) Die Abbildung ist surjektiv: Zu $y \in E$ sei $T_y x := \langle x, y \rangle$. Dann ist $|T_y x| \leq \|y\| \cdot \|x\|$, d.h. T_y stetig und damit $T_y \in E'$. \square

1.20 Korollar (Stetige Bilinearformen). Sei E Hilbertraum, $B : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ mit

- (i) $x \mapsto B(x, y)$ linear ($y \in E$),
- (ii) $y \mapsto B(x, y)$ konjugiert linear ($x \in E$),
- (iii) $|B(x, y)| \leq C \|x\| \cdot \|y\|$ ($x, y \in E$).

Dann existiert genau ein $T \in L(E)$ mit

$$B(x, y) = \langle x, Ty \rangle \quad (x, y \in E).$$

Dabei ist $\|T\|$ die kleinste Konstante C , für die (iii) gilt.

Beweis. Da $x \mapsto B(x, y)$ stetig und linear ist, existiert nach Riesz genau ein \tilde{y} mit $B(x, y) = \langle x, \tilde{y} \rangle$. Setze $Ty := \tilde{y}$. Es ist

$$\begin{aligned} \langle x, \widetilde{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2} \rangle &= B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 B(x, y_1) + \bar{\alpha}_2 B(x, y_2) \\ &= \bar{\alpha}_1 \langle x, \tilde{y}_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle x, \tilde{y}_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 \tilde{y}_1 + \alpha_2 \tilde{y}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Also ist T linear.

Wegen Eigenschaft (iii) ist T stetig: $\|Ty\|^2 = B(Ty, y) \leq C \cdot \|Ty\| \cdot \|y\|$, d.h. $\|T\| \leq C$. \square

d) Orthonormalbasen

1.21 Definition. (i) Sei M eine Menge. Eine Abbildung \prec auf einer Teilmenge von $M \times M$ heißt Halbordnung, falls gilt:

$$\begin{aligned} a &\prec a, \\ a &\prec b, b &\prec a \Rightarrow a = b, \end{aligned}$$

$$a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c.$$

Beachte, dass $a \prec b$ oder $b \prec a$ nicht für alle $a, b \in M$ gelten muss.

- (ii) Eine Menge $Q \subset M$ heißt total geordnet oder eine Kette, falls für alle $a, b \in Q$ gilt: $a \prec b$ oder $b \prec a$.
- (iii) Ein Element $a \in M$ heißt obere Schranke für $S \subset M$, falls $s \prec a$ für alle $s \in S$.
- (iv) Ein Element $m \in M$ heißt maximal, falls aus $m \prec x$ folgt $m = x$.

1.22 Lemma (von Zorn). Sei M eine nichtleere Menge mit Halbordnung, für welche jede Kette eine obere Schranke in M besitzt. Dann besitzt M ein maximales Element.

Dieses Lemma ist eigentlich ein Axiom und äquivalent zum Wohlordnungssatz, welcher wiederum äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Die Formulierung dieser Axiome und der Beweis der Äquivalenz werden hier aber weggelassen.

1.23 Definition. Sei E ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $S \subset E$ heißt Orthonormalbasis oder vollständiges orthonormales System, falls S eine maximale orthonormale Teilmenge von E ist (maximal bezüglich Mengeninklusion). Man spricht auch von Hilbertraumbasis.

1.24 Satz. Jeder nichttriviale Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. Sei \mathcal{S} die Menge aller orthonormalen Teilmengen von E . Dann ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$ da $\{\frac{x}{\|x\|}\} \in \mathcal{S}$ für jedes $x \in E \setminus \{0\}$.

Sei $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Kette in \mathcal{S} , d. h. für $\alpha, \beta \in A$ gilt $S_\alpha \subset S_\beta$ oder $S_\beta \subset S_\alpha$. Setze $S_0 := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \subset E$. Dann ist $S_0 \supset S_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Zu $x, y \in S_0$ existiert ein $\alpha \in A$ mit $x, y \in S_\alpha$, d. h. S_0 ist orthonormal. Damit ist S_0 eine obere Schranke zu $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente in \mathcal{S} . \square

1.25 Lemma. Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}| < \infty \quad (x, y \in E).$$

Beweis. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in \mathbb{R}^N und der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}| \leq \left(\sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N |\langle y, e_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Mit $N \rightarrow \infty$ erhält man die Behauptung. \square

1.26 Satz. Sei $S \subset E$ ein Orthonormalsystem.

- a) Für alle $x \in E$ konvergiert die Reihe $\sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e$ unbedingt.
 b) Sei $c_e \in \mathbb{C}$ für $e \in S$ mit $\sum_{e \in S} |c_e|^2 < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{e \in S} c_e e$ unbedingt in E .
 c) $x - \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e \in S^\perp$.

Beweis. a) Nach der Besselschen Ungleichung (Satz 1.3 c)) gilt für alle endlichen $E' \subset E$

$$\sum_{e \in E'} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Damit ist $\sum_{e \in E} |\langle x, e \rangle|^2 < \infty$, und nach Bemerkung 1.9 b) ist $E_0 := \{e \in S : \langle x, e \rangle \neq 0\}$ abzählbar. Sei $E_0 = \{e_1, e_2, \dots\}$.

Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$\left\| \sum_{n=N}^M \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=N}^M |\langle x, e_n \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad (N, M \rightarrow \infty).$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ eine Cauchyreihe, und $y := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \in E$ existiert.

Analog existiert für jede Permutation $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe $y_\sigma := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\sigma(n)} \rangle e_{\sigma(n)}$. Wir zeigen $y = y_\sigma$. Für $z \in E$ gilt

$$\langle y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot \overline{\langle z, e_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\sigma(n)} \rangle \overline{\langle z, e_{\sigma(n)} \rangle} = \langle y_\sigma, z \rangle.$$

Dabei wurde die absolute Konvergenz der Reihe nach Lemma 1.25 benutzt. Es folgt $y - y_\sigma \in E^\perp = \{0\}$.

b) wurde im Beweis von a) mitbewiesen.

c) Für $e \in E$ gilt mit der Bezeichnung aus a)

$$\left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e \right\rangle = 0.$$

(Betrachte die Fälle $e \in E_0$, d.h. $e = e_{n_0}$ und $e \notin E_0$, d.h. $\langle x, e \rangle = 0$.) \square

1.27 Satz. Sei $S \subset E$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

- (i) S ist Orthonormalbasis.

(ii) $S^\perp = \{0\}$.

(iii) Für alle $y \in E$ gilt $y = \sum_{e \in S} \langle y, e \rangle e$.

(iv) Für alle $x, y \in E$ gilt $\langle x, y \rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle \overline{\langle y, e \rangle}$.

(v) (Parsevalsche Gleichung) Es gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \quad (x \in E).$$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Falls ein $x \in S^\perp \setminus \{0\}$ existiert, so ist $S \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ ein Orthonormalsystem.

(ii) \Rightarrow (iii). Satz 1.26 c).

(iii) \Rightarrow (iv). Die Reihen erstrecken sich nur über einen abzählbaren Indexbereich und konvergieren absolut nach Lemma 1.25 und Satz 1.26 a), man darf also einsetzen.

(iv) \Rightarrow (v). Setze $x = y$.

(v) \Rightarrow (i). Falls S nicht maximal ist, wähle $x \in S^\perp$ mit $\|x\| = 1$. Es folgt $\sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 = 0$, Widerspruch zu (v). \square

1.28 Korollar. Sei E Hilbertraum mit Orthonormalbasis $S = \{e_i\}_{i \in I} \subset E$. Dann ist Abbildung $E \rightarrow \ell^2(I), y \mapsto (\langle y, x_i \rangle)_{i \in I}$ isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen.

Beweis. Die Linearität ist klar, Isometrie und damit Injektivität nach Satz 1.27 (v), die Surjektivität nach Satz 1.26 b). \square

1.29 Definition. Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

1.30 Bemerkung. a) Ein normierter Raum E ist genau dann separabel, wenn es ein abzählbares linear unabhängiges $S \subset E$ gibt mit $\overline{\text{span } S} = E$. Insbesondere ist ein Hilbertraum genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Um das zu sehen, betrachtet man alle Linearkombinationen $\sum_{i=1}^n a_i s_i, a_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, s_i \in S$.

b) Aus a) und Korollar 1.28 folgt, dass jeder unendlich-dimensionale separable Hilbertraum isometrisch isomorph zu $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ ist. Damit ist ℓ^2 „der“ Hilbertraum schlechthin. Insbesondere in der Physik werden fast ausschließlich separable Hilberträume betrachtet.

2. Klassische Sätze der Funktionalanalysis

Zu den klassischen Sätzen der Funktionalanalysis gehören der Satz von Baire mit seinen Folgerungen und der Satz von Hahn-Banach. Die Folgerungen aus diesen Sätzen werden von entscheidender Bedeutung für die ganze Operatortheorie sein.

Das Prinzip der offenen Abbildung ist eine Folgerung aus dem Satz von Baire und erlaubt recht schnell wichtige Aussagen über das Spektrum unbeschränkter Operatoren. Hier werden auch die ersten Begriffe der Operatortheorie definiert, wie etwa die Abgeschlossenheit eines unbeschränkten Operators.

a) Der Satz von Baire

Sei (E, d) metrischer Raum. Eine Menge $A \subset E$ heißt nirgends dicht, falls $\overset{\circ}{\bar{A}}$ keine inneren Punkte enthält, d. h. $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$. Dies ist äquivalent dazu, dass \bar{A} keine offene Kugel enthält.

2.1 Satz (Bairescher Kategoriensatz). Sei (E, d) vollständiger metrischer Raum, $A_n \subset E$ abgeschlossen. Falls $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine offene Kugel enthält, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass A_{n_0} (schon) eine offene Kugel enthält.

Beweis. Sei $K_r(x_0) \subset A$ eine offene Kugel. Angenommen, kein A_n enthält eine offene Kugel, d. h. es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E : (E \setminus A_n) \cap K_\varepsilon(x) \neq \emptyset.$$

Wähle x_1 mit $0 < \varepsilon_1 < 1/2$ und

$$K_{\varepsilon_1/2}(x_1) \subset (E \setminus A_1) \cap K_r(x_0).$$

Da beide Mengen auf der rechten Seite offen sind, ist auch der Durchschnitt offen (und nichtleer).

Wähle nun im nächsten Schritt x_2 mit $K_{\varepsilon_2}(x_2) \subset (E \setminus A_2) \cap K_{\varepsilon_1}(x_1)$ (offen, nicht leer), $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{4}$.

Allgemein wähle x_n, ε_n mit $K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset (E \setminus A_n) \cap K_{\varepsilon_{n-1}/2}(x_{n-1})$ und $0 < \varepsilon_n < 2^{-n}$.

Wegen $\varepsilon_n \rightarrow 0$ und $x_n \in K_{\varepsilon_{n-1}/2}(x_{n-1})$ ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge, d.h. $x_n \rightarrow x \in E$. Hier verwenden wir, dass E vollständig ist. Wegen $d(x, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{d(x_m, x_n)}_{< \varepsilon_n/2 \text{ falls } m \geq n} < \varepsilon_n$

ist $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\varepsilon_n}(x_n)$.

Aber es gilt sowohl

$$\bigcap_n K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset \bigcap_n (E \setminus A_n) = E \setminus A$$

als auch

$$\bigcap_n K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset K_r(x_0) \subset A.$$

Somit ist $\bigcap_n K_{\varepsilon_n}(x_n) = \emptyset$ im Widerspruch zu $x \in \bigcap_n K_{\varepsilon_n}(x_n)$. \square

Satz 2.1 heißt aus folgendem Grund Kategoriensatz: Eine Menge $A \subset E$ heißt von erster Kategorie (mager) in E , falls $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit nirgends dichten Mengen A_n gilt. Gibt es keine solche Darstellung, heißt A von zweiter Kategorie.

Damit erhalten wir folgende Formulierung des Satzes von Baire: Sei (E, d) vollständiger metrischer Raum. Dann ist E ist von zweiter Kategorie in sich.

2.2 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei (E, d) vollständiger metrischer Raum, \mathcal{T} eine Familie stetiger Abbildungen $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. Die Familie \mathcal{T} sei punktweise gleichmäßig beschränkt, d.h. es gilt

$$\forall x \in E \exists c_x > 0 \forall f \in \mathcal{T} : |f(x)| \leq c_x.$$

Dann existiert eine offene Kugel K und ein $c > 0$ mit

$$\forall x \in K \forall f \in \mathcal{T} : |f(x)| \leq c.$$

Beweis. Die Menge $A_n := \{x \in E \mid \forall f \in \mathcal{T} : |f(x)| \leq n\}$ ist abgeschlossen. Für $x \in E$ existiert nach Voraussetzung ein $c_x > 0$ mit $|f(x)| \leq c_x$ ($f \in \mathcal{T}$), d. h. es existiert eine natürliche Zahl n mit $x \in A_n$. Somit $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Nach dem Satz von Baire existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine offene Kugel $K \subset A_{n_0}$. Damit ist $|f(x)| \leq n_0$ ($x \in K, f \in \mathcal{T}$). \square

2.3 Satz (Satz von Banach-Steinhaus). Sei E Banachraum und F normierter Raum. Sei $\mathcal{T} \subset L(E, F)$ eine punktweise gleichmäßig beschränkte Familie, d. h. es gelte

$$\forall x \in E \exists c_x > 0 \forall T \in \mathcal{T} : \|Tx\| \leq c_x.$$

Dann existiert ein $c > 0$ mit $\|T\| \leq c$ ($T \in \mathcal{T}$).

Beweis. Definiere $\mathcal{T}' := \{f_T : E \rightarrow \mathbb{K}, T \in \mathcal{T}\}$ mit $f_T(x) := \|Tx\|$. Nach Voraussetzung ist die Familie \mathcal{T}' punktweise gleichmäßig beschränkt.

Nach Satz 2.2 existiert $K_{r_0}(x_0)$, $c' > 0$ mit

$$\forall x \in K_{r_0}(x_0) \forall T \in \mathcal{T} : \|Tx\| \leq c'.$$

Sei nun $x \in E$, $\|x\| = 1$ und $T \in \mathcal{T}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \frac{2}{r_0} \left\| T \left(\frac{r_0}{2} x - x_0 + x_0 \right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{2}{r_0} \left(\underbrace{\left\| T \left(\frac{r_0}{2} x - x_0 \right) \right\|}_{\in K_{r_0}(x_0)} + \underbrace{\|Tx_0\|}_{\in K_{r_0}(x_0)} \right) \leq \frac{4}{r_0} c' =: c. \end{aligned}$$

Somit gilt $\|T\| \leq c$ ($T \in \mathcal{T}$). □

2.4 Definition. Seien E, F normierte Räume.

a) Ein linearer Operator $T: E \rightarrow F$ ist eine lineare Abb. vom Definitionsbereich $D(T) \subset E$ nach F , wobei $D(T)$ ein linearer Unterraum von E ist. Die Menge $G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ heißt der Graph von T .

b) Seien E, F Banachräume. Der Operator T heißt abgeschlossen, wenn $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $E \oplus F$ ist.

c) Der Operator T heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen linearen Operator \bar{T} gibt mit $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$. Der Operator \bar{T} heißt Abschließung oder der Abschluss von T .

2.5 Satz (Prinzip der offenen Abbildung). Seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h. das Bild einer offenen Menge ist offen.

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K_\varepsilon(0) \subset \overline{TK_1(0)}$. Sei dazu $K_n := K_n(0) \subset E$. Da T surjektiv ist, gilt $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(K_n)$. Nach dem Satz von Baire ist das Innere von $\overline{T(K_n)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ nichtleer, d.h. es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $y_0 \in F$ mit $K_{\varepsilon_0}(y_0) \subset \overline{T(K_n)}$.

Da T surjektiv ist, existiert ein $x_0 \in E$ mit $Tx_0 = y_0$. Es ist $K_{\varepsilon_0}(y_0) = Tx_0 + K_{\varepsilon_0}(0)$ und damit

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon_0}(0) &\subset \overline{T(K_n)} - Tx_0 = \overline{T(K_n) - Tx_0} \\ &= \overline{T(nK_1) - Tx_0} = \overline{T(nK_1 - x_0)} \subset \overline{T(mK_1)} = m \overline{T(K_1)} \end{aligned}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Beachte dabei, dass $nK_1 - x_0 \subset mK_1$ für großes m gilt. Wir erhalten

$$K_{\varepsilon_0/m}(0) \subset \overline{T(K_1)}.$$

Wähle $\varepsilon := \varepsilon_0/m$.

(ii) Wir zeigen nun, dass $\overline{T(K_1)} \subset T(K_2)$ gilt. Dazu sei $y \in \overline{T(K_1)}$ und ε wie in (i). Wähle $x_1 \in K_1$ mit $y - Tx_1 \in K_{\varepsilon/2}(0)$.

Nach (i) ist $K_{\varepsilon/2}(0) \subset \overline{TK_{1/2}(0)}$. Wähle nun $x_2 \in K_{1/2}(0)$ mit $y - Tx_1 - Tx_2 \in K_{\varepsilon/4}(0) \subset \overline{TK_{1/4}(0)}$.

Wir erhalten iterativ eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in K_{2^{-n+1}}(0)$ mit $y - \sum_{i=1}^n Tx_i \in K_{\varepsilon \cdot 2^{-n}}(0)$. Nach Wahl der x_n ist $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent. Es gilt $x \in K_2$ wegen $\|x\| \leq \sum_n \|x_n\| < 2$.

Unter Verwendung der Stetigkeit von T erhalten wir $y = \sum_{i=1}^{\infty} Tx_i = T(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = Tx \in TK_2$.

(iii) Nach (i) und (ii) ist $K_\varepsilon \subset TK_2$. Also enthält das Bild jeder Umgebung von $0 \in E$ eine offene Kugel in F , d.h. ist eine Umgebung von $0 \in F$. Sei nun $U \subset E$ offen. Zu $x \in U$ existiert $K_\delta(0)$ mit $x + K_\delta(0) \subset U$.

Damit $T(x + K_\delta(0)) = Tx + TK_\delta(0) \supset Tx + K_{\tilde{\varepsilon}}$ für ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, d.h. es existiert eine Umgebung $Tx + K_{\tilde{\varepsilon}}(0)$ von Tx mit $Tx + K_{\tilde{\varepsilon}}(0) \subset TU$. Somit ist TU offen. \square

2.6 Korollar. Seien E, F Banachräume, $T : E \rightarrow F$ abgeschlossener linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$. Sei $R(T)$ abgeschlossen. Dann ist T offen als Abbildung von $D(T)$ nach $R(T)$ (wobei sowohl $D(T)$ als auch $R(T)$ mit der Spurtologie versehen werden).

Beweis. Definiere die Graphennorm $\|x\|_T := \|x\| + \|Tx\|$ ($x \in D(T)$).

Dann ist $\|\cdot\|_T$ eine Norm auf $D(T)$ und $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum (da T abgeschlossen ist). Der Operator $\tilde{T} : (D(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow F$, $x \mapsto Tx$, ist stetig.

Eine Teilmenge $U \subset D(T)$ ist offen bzgl. $\|\cdot\|_T$, falls U offen ist bzgl. $\|\cdot\|_E$. Nach Satz 2.5 ist $\tilde{T}U = TU$ offen für U offen. \square

2.7 Satz (Stetigkeit des Inversen). Seien E, F Banachräume und $T : E \rightarrow F$ ein abgeschlossener linearer Operator mit $\ker T = \{0\}$ und $R(T)$ abgeschlossen. Dann ist $T^{-1} : R(T) \rightarrow E$ stetig.

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar 2.6 aufgrund der Äquivalenz der Offenheit von T und der Stetigkeit von T^{-1} . \square

2.8 Satz (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien E, F Banachräume, $T : E \rightarrow F$ abgeschlossener linearer Operator. Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist T stetig.

Beweis. Da T abgeschlossen ist, ist $G(T)$ mit $\|(x, Tx)\| := \|x\| + \|Tx\|$ als abgeschlossener Unterraum von $E \oplus F$ ein Banachraum. Die Projektion $\pi_1 : G(T) \rightarrow E, (x, Tx) \mapsto x$, ist stetig und damit ein abgeschlossener linearer Operator. Der Wertebereich $R(\pi_1) = D(T)$ ist abgeschlossen. Nach Satz 2.7 ist π_1^{-1} stetig. Ebenso ist $\pi_2 : G(T) \rightarrow F, (x, Tx) \mapsto Tx$, stetig. Damit ist $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ stetig. \square

2.9 Korollar. Seien $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ und $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad (x \in E)$$

für eine Konstante $c > 0$.

Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d.h. es gibt eine Konstante $c' > 0$ mit $c'\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad (x \in E)$.

Beweis. Satz vom stetigen Inversen, angewendet auf $\text{id} : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1), x \mapsto x$. \square

2.10 Korollar (Satz von Hellinger-Toeplitz). Sei E Hilbertraum und $T : E \rightarrow E$ linearer Operator mit $D(T) = E$ und

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad (x, y \in E).$$

Dann ist T stetig.

Beweis. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $G(T)$ in $E \oplus E$.

Sei $(x, y) = \lim_n (x_n, Tx_n)$, d.h. $x = \lim_n x_n$ und $y = \lim_n Tx_n$. Für $z \in E$ gilt

$$\langle y, z \rangle = \lim_n \langle Tx_n, z \rangle = \lim_n \langle x_n, Tz \rangle = \langle x, Tz \rangle = \langle Tx, z \rangle.$$

Damit folgt $\langle y - Tx, z \rangle = 0$ für alle $z \in E$. Also ist $y - Tx = 0$, d.h. $(x, y) \in G(T)$. \square

c) Hahn-Banach-Sätze

2.11 Satz (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach). Sei E ein \mathbb{R} -Vektorraum und $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, d.h. es gelte

$$p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y) \quad (\alpha \in [0, 1], x, y \in E).$$

Sei ferner $L \subset E$ ein linearer Teilraum und $\lambda : L \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit

$$\lambda(x) \leq p(x) \quad (x \in L).$$

Dann existiert ein lineares $\Lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $\Lambda(x) \leq p(x) \quad (x \in E)$.

Beweis. (i) Fortsetzung auf $\tilde{L} := \text{span}\{L, z\} = L \oplus \mathbb{R}z$ mit $z \in E \setminus L$:

Für $y_1, y_2 \in L$ und $\alpha, \beta > 0$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} \beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) &= \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha + \beta) \cdot \lambda\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_2\right) \\ &\leq (\alpha + \beta)p\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(y_2 + \beta z)\right) \\ &\leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha} [\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)] \leq \frac{1}{\beta} [p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)] \quad (2-1)$$

Wähle

$$\tilde{\lambda}(z) := \alpha_0 \in \left[\sup_{y_1 \in L, \alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)), \inf_{y_2 \in L, \beta > 0} \frac{1}{\beta} (p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)) \right]$$

und definiere $\tilde{\lambda}(\mu z + y) := \mu \tilde{\lambda}(z) + \lambda(y)$ auf $\tilde{L} = L \oplus \mathbb{R} \cdot z$.

$\tilde{\lambda}$ ist linear auf \tilde{L} nach Definition, und es gilt

$$\tilde{\lambda}(\mu z + y) = \mu \alpha_0 + \lambda(y) \leq p(\mu z + y).$$

Denn für $\mu > 0$ gilt nach Wahl von α_0 die Abschätzung

$$p(y_2 + \beta z) \geq \lambda(y_2) + \beta \alpha_0.$$

Setze nun $y_2 := y$ und $\beta := \mu$. Den Fall $\mu < 0$ sieht man analog.

(ii) Sei \mathcal{M} die Menge aller Abbildungen $m : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem linearen Unterraum $M \supset L$, welche linear sind und für welche gilt $m|_L = \lambda$ und $m \leq p|_M$.

Durch

$$m_1 \leq m_2 : \iff M_1 \subset M_2, m_2|_{M_1} = m_1$$

wird \mathcal{M} partiell geordnet. Sei $\{m_k\}$ eine Kette in \mathcal{M} . Dann ist $M := \bigcup_k M_k$ ein linearer Unterraum, und durch

$$m(x) := m_k(x) \quad (x \in M_k)$$

wird eine obere Schranke $m \in \mathcal{M}$ der Kette definiert. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $\Lambda \in \mathcal{M}$.

Da Λ maximal ist, ist Λ auf ganz E definiert. Sonst existiert nach (i) eine Fortsetzung auf $D(\Lambda) \oplus \mathbb{R} \cdot z$ mit $z \in E \setminus D(\Lambda)$. \square

2.12 Satz (Hahn-Banach, komplexe Version). Sei E ein \mathbb{C} -Vektorraum und $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\alpha| + |\beta| = 1).$$

Sei $L \subset E$ linearer Teilraum und $\lambda : L \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $|\lambda(x)| \leq p(x) \quad (x \in L)$. Dann existiert ein lineares $\Lambda : E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $|\Lambda(x)| \leq p(x) \quad (x \in E)$.

Beweis. Setze $\ell(x) := \operatorname{Re} \lambda(x)$. Dann ist $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit

$$\ell(x) \leq \lambda(x) \leq p(x) \quad (x \in L).$$

Wegen $\ell(ix) = -\operatorname{Im} \lambda(x)$ ist $\lambda(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Setze ℓ nach Satz 2.11 fort zu einem \mathbb{R} -linearen $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $L(x) \leq p(x) \quad (x \in E)$. Dann ist

$$\Lambda(x) := L(x) - iL(ix)$$

\mathbb{R} -linear. Wegen

$$\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = L(ix) + iL(x) = i\Lambda(x)$$

ist Λ sogar \mathbb{C} -linear.

Für $\theta := \arg \Lambda(x)$ gilt:

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta} \Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta} x) = L(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x).$$

Hier wurde $\operatorname{Re} \Lambda = L$ und $\Lambda(e^{-i\theta} x) = |\Lambda(x)| \in \mathbb{R}$ verwendet. □

2.13 Korollar. Sei E normiert, $L \subset E$ linearer Teilraum und $\lambda \in L'$. Dann existiert ein $\Lambda \in E'$ mit $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$, $\Lambda|_L = \lambda$.

Beweis. Sei $p(x) := \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\|$. Dann ist $|\lambda(x)| \leq p(x) \quad (x \in L)$.

Nach Satz 2.12 existiert eine Fortsetzung Λ mit

$$|\Lambda(x)| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\| \quad (x \in E),$$

d.h. $\Lambda \in E'$ und $\|\Lambda\| \leq \|\lambda\|$. Wegen $\Lambda|_L = \lambda$ ist $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$. □

2.14 Korollar. Sei E normiert, $x \in E \setminus \{0\}$ fest. Dann existiert ein $\Lambda \in E'$ mit $\Lambda(x) = \|x\|$ und $\|\Lambda\| = 1$.

Beweis. Definiere $\lambda : \mathbb{K}x \rightarrow \mathbb{K}$, $\lambda(\alpha x) := |\alpha| \|x\|$ und setze nach Korollar 2.13 fort. □

2.15 Korollar. Sei E normiert, $L \subset E$ linearer Teilraum und $x \in E$. Sei

$$d := \inf_{y \in L} \|x - y\| > 0.$$

Dann existiert ein $\Lambda \in E'$ mit $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(x) = d$ und $\Lambda|_L = 0$.

Beweis. Definiere λ auf $L \oplus \mathbb{K}x$ durch $\lambda(\alpha x + y) := \alpha d$. Dann gilt

$$\|\lambda\| = \sup_{\alpha \in \mathbb{K}, y \in L} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x\|} = \sup_{\frac{y}{\alpha} + x} \frac{d}{\|\frac{y}{\alpha} + x\|} = \frac{d}{\inf_{y \in L, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} \|\frac{y}{\alpha} + x\|} = \frac{d}{d} = 1.$$

Die Behauptung folgt nun aus Korollar 2.13. □

Mit dem Satz von Hahn-Banach können wir Bidualräume $E'' := (E')'$ betrachten. Vorher betrachten wir noch die Dualräume.

2.16 Satz. Seien E normierter Raum und F Banachraum. Dann ist $L(E, F)$ Banachraum. Insbesondere ist E' Banachraum.

Beweis. Nur die Vollständigkeit ist nichttrivial. Sei $(A_n)_n$ Cauchyfolge in $L(E, F)$. Dann ist $(A_n x)_n$ Cauchyfolge in F für jedes $x \in E$.

Setze $Ax := \lim_n A_n x \in F$. Dann ist A offensichtlich linear. Wegen

$$\|Ax\|_F = \lim_n \|A_n x\|_F \leq \lim_n \|A_n\| \cdot \|x\|_E \leq C \|x\|_E$$

ist $A \in L(E, F)$. Da $\|(A - A_n)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(A_m - A_n)x\|$, erhalten wir

$$\|A - A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A - A_n)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|(A_m - A_n)x\|}{\|x\|} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$, d.h. es gilt $A_n \rightarrow A$ in $L(E, F)$. □

2.17 Lemma. Sei E ein normierter Raum. Die Abbildung $E \rightarrow E''$, $x \mapsto \tilde{x}$ mit

$$\tilde{x}(\lambda) := \lambda(x) \quad (\lambda \in E')$$

ist linear und isometrisch.

Beweis. Es gilt

$$\widetilde{\alpha x + \beta y}(\lambda) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \lambda(x) + \beta \lambda(y) = \alpha \tilde{x}(\lambda) + \beta \tilde{y}(\lambda),$$

d. h. die Abbildung $x \mapsto \tilde{x}$ ist linear. Weiter ist

$$\|\tilde{x}\|_{E''} = \sup_{\|\lambda\| \leq 1} |\tilde{x}(\lambda)| = \sup_{\|\lambda\| \leq 1} |\lambda(x)| \leq \sup_{\|\lambda\| \leq 1} \|\lambda\| \cdot \|x\|_E \leq \|x\|_E.$$

Nach Korollar 2.14 existiert zu jedem $x \in E$ ein $\lambda_0 \in E'$ mit $\|\lambda_0\| = 1$ und $\lambda_0(x) = \|x\|$. Damit gilt $\|\tilde{x}\| = \sup_{\|\lambda\| \leq 1} |\lambda(x)| \geq |\lambda_0(x)| = \|x\|$. \square

2.18 Definition. Ein normierter Raum E heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung $E \hookrightarrow E''$ aus Lemma 2.17 surjektiv ist.

2.19 Beispiele. a) Jeder Hilbertraum ist reflexiv nach dem Satz von Riesz.

b) Sei $1 < p < \infty$ und (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Wir werden im zweiten Teil der Vorlesung sehen, dass $L_p(\mu)$ ein Banachraum ist. Nach einem Satz von Riesz ist die Abbildung

$$T : L_q(\mu) \rightarrow (L_p(\mu))', \quad (Tg)(f) := \int fg d\mu \quad (2-2)$$

ein isometrischer Isomorphismus. Dabei ist $q \in (1, \infty)$ definiert durch $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Sei nun $\Lambda \in (L_p(\mu))''$. Definiere das Funktional $\Lambda_1 := \Lambda \circ T \in (L_q(\mu))'$. Nach dem Satz von Riesz, angewendet auf den Raum $(L_q(\mu))'$, existiert eine Funktion $h \in L_p(\mu)$, so dass für alle $g \in L_q(\mu)$ der Wert $\Lambda_1(g)$ gegeben ist durch

$$\Lambda_1(g) = \int gh d\mu. \quad (2-3)$$

Somit gilt für jedes $\lambda \in (L_p(\mu))'$

$$\Lambda(\lambda) = \Lambda_1(T^{-1}\lambda) = \int (T^{-1}\lambda) \cdot h d\mu = \lambda(h) = \tilde{h}(\lambda).$$

Dabei wurde für die zweite Gleichheit (2-3) verwendet und für die dritte Gleichheit (2-2). Wir haben gesehen, dass $\Lambda = \tilde{h}$ gilt, d.h. dass die Abbildung $h \mapsto \tilde{h}$, $E \rightarrow E''$, surjektiv ist. Die $L_p(\mu)$ -Räume sind für $1 < p < \infty$ also reflexiv.

c) In der Situation von b) gilt $(L_1(\mu))' = L_\infty(\mu)$ aber $L_1(\mu) \subsetneq (L_\infty(\mu))'$, d.h. $L_1(\mu)$ ist nicht reflexiv. Diese Aussage wird nicht bewiesen.

3. Topologische Begriffe

In diesem Abschnitt werden kurz einige wichtige topologische Begriffe wiederholt. Wichtig für uns wird insbesondere der Satz von Banach-Alaoglu sein. Gerade die schwachen Topologien sind in der Funktionalanalysis wichtig, da in den meisten Fällen keine Stetigkeit in einer Normtopologie vorliegt.

Wir starten mit der Definition einiger grundlegender Begriffe der Topologie. Eine Topologie ist ähnlich wie eine σ -Algebra ein Mengensystem.

3.1 Definition. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge; 2^X bezeichne die Potenzmenge von X .

a) Ein Mengensystem $\tau \subset 2^X$ heißt eine Topologie auf X , falls gilt

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) Falls $A, B \in \tau$, so ist auch $A \cap B \in \tau$,

(iii) Falls I eine Indexmenge ist und $A_i \in \tau$ ($i \in I$), so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

b) Seien (X_1, τ_1) und (X_2, τ_2) topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f: X_1 \rightarrow X_2$ stetig, falls $f^{-1}(\tau_2) \subset \tau_1$.

c) Sei $U \subset 2^X$. Dann heißt die kleinste Topologie, die U enthält, die von U erzeugte Topologie $\tau(U)$. Die erzeugte Topologie $\tau(U)$ ist das System aller Mengen der Form $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{n=1}^N U_{in}$ mit $U_{in} \in U$, $N \in \mathbb{N}$.

d) Sei I eine Menge und (Y_i, τ_i) topologischer Raum für $i \in I$. Sei $F = \{f: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann heißt die kleinste (größte) Topologie auf X , für die alle $f \in F$ stetig sind, die F -schwache Topologie $\tau(F)$ auf X . Es gilt

$$\tau(F) = \tau\left(\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i, i \in I\}\right).$$

e) Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt, wobei (X_i, τ_i) ein topologischer Raum für $i \in I$ ist. Sei $\text{pr}_i: X \rightarrow X_i$ die Projektion auf die i -te Komponente. Dann heißt $\tau(\{\text{pr}_i : i \in I\})$ die Produkttopologie auf X .

3.2 Bemerkung. Man beachte die Ähnlichkeit zur Definition einer σ -Algebra. Bei einer σ -Algebra \mathcal{A} gilt statt a) (iii) nur

$$A_n \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A},$$

dafür ist mit einer Menge A auch $X \setminus A$ in der σ -Algebra. Viele Begriffe wie die erzeugte σ -Algebra und die Produkt- σ -Algebra sind analog definiert. Es gibt allerdings keine so einfache Darstellung der erzeugten σ -Algebra wie in c).

3.3 Definition. Sei (X, τ) topologischer Raum.

- a) Eine Menge $U \subset X$ heißt genau dann offen, falls $U \in \tau$, und genau dann abgeschlossen, falls $X \setminus U \in \tau$.
- b) Eine Menge $V \subset X$ heißt eine Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls eine offene Menge $U \in \tau$ existiert mit $x \in U \subset V$. Eine Familie \mathcal{N} von Teilmengen von X heißt eine Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$, wenn jedes $N \in \mathcal{N}$ eine Umgebung von x ist und für jede Umgebung M von x ein $N \in \mathcal{N}$ existiert mit $N \subset M$.
- c) (X, τ) heißt Hausdorff-Raum (oder T_2 -Raum), falls für jedes $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U_x, U_y \in \tau$ existieren mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$.
- d) (X, τ) heißt normal (oder T_4 -Raum), falls (X, τ) Hausdorffsch ist und für alle abgeschlossenen Mengen A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ offene Mengen $U_1 \supset A_1$, $U_2 \supset A_2$ existieren mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Die beiden folgenden Sätze werden nicht bewiesen.

3.4 Satz (Lemma von Urysohn). Sei (X, τ) normaler topologischer Raum, und seien $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann existiert ein $f \in C(X; \mathbb{R})$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $f|_{A_1} = 0$, $f|_{A_2} = 1$.

3.5 Satz (Tychonov). Sei I eine Menge und $X = \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der topologischen Räume (X_i, τ_i) . Falls jedes (X_i, τ_i) kompakt ist, dann ist auch X in der Produkttopologie kompakt.

3.6 Definition. a) Sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum und $E^* := \{f: E \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ linear}\}$ der algebraische Dualraum von E . Für $F \subset E^*$ bezeichnet man die F -schwache Topologie auf E auch mit $\sigma(E, F)$.

b) Sei E normiert. Dann heißt $\sigma(E, E')$ die schwache Topologie auf E und $\sigma(E', E)$ die schwach-* Topologie auf E' . (Beachte $E \subset E''$ im Sinne von Lemma 2.17.) Für die Konvergenzen bezüglich dieser Topologien schreibt man auch $x_n \xrightarrow{w} x$ in E bzw. $f_n \xrightarrow{w^*} f$ in E' .

3.7 Bemerkung. a) Sei E normiert. Dann ist $\sigma(E, E')$ Hausdorffsch. Dann nach dem Satz von Hahn-Banach existiert zu $x, y \in E$ mit $x \neq y$ ein $f \in E'$ mit $f(x) \neq f(y)$.

b) Es gilt $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \sigma_{\text{norm}}$, wobei σ_{norm} die Normtopologie auf E ist.

3.8 Satz (Banach-Alaoglu). Sei E ein normierter Raum. Dann ist die Einheitskugel in E' schwach-* kompakt.

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Menge $K'_1 := \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ $\sigma(E', E)$ -kompakt ist.

Für $x \in E$ sei $I_x := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$. Nach dem Satz von Tychonov ist $I := \prod_{x \in E} I_x$ kompakt bezüglich der Produkttopologie. Die Elemente von I sind Abbildungen $b: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $b(x) \in I_x$ ($x \in E$), d.h. $|b(x)| \leq \|x\|$. Daher ist $K'_1 \subset I$, da $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ für alle $f \in K'_1$ gilt.

Da die Produkttopologie auf I die schwächste Topologie ist, für die alle Abbildungen $b \mapsto b(x)$ ($x \in E$) stetig sind, ist die Spurtopologie davon auf K'_1 genau die schwach*-Topologie auf K'_1 . Zu zeigen ist also, dass $K'_1 \subset I$ abgeschlossen ist bzgl. der Produkttopologie.

Sei $f \in \overline{K'_1} \subset I$, und seien $x, y \in E$. Dann ist

$$U := \{b \in I : |b(x+y) - f(x+y)| < \varepsilon, |b(x) - f(x)| < \varepsilon, |b(y) - f(y)| < \varepsilon\}$$

eine offene Umgebung von f . Wegen $f \in \overline{K'_1}$ existiert ein $g \in U \cap K'_1$. Da g nach Definition von K'_1 linear ist, gilt

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ist f additiv. Analog sieht man, dass $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ($\alpha \in \mathbb{K}, x \in E$) gilt, d.h. f ist linear. Wegen $f \in I$ ist $\|f\| \leq 1$ und damit $f \in K'_1$. \square

3.9 Definition. Seien E, F normierte Räume. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L(E, F)$ und $T \in L(E, F)$.

a) T_n konvergiert gleichmäßig oder in der Norm gegen T , wenn $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

b) T_n konvergiert stark (in der starken Operator-topologie) gegen T , wenn gilt

$$\forall x \in E : \|T_n x - T x\|_F \rightarrow 0.$$

Man schreibt $T_n \xrightarrow{s} T$.

c) T_n konvergiert schwach (in der schwachen Operator-topologie) gegen T , wenn gilt

$$\forall x \in E \forall f \in F' : |f(T_n x) - f(T x)| \rightarrow 0.$$

Man schreibt $T_n \xrightarrow{w} T$.

Man beachte, dass das Symbol $T_n \xrightarrow{w} T$ für Operatoren eine doppelte Bedeutung hat. Im Normalfall versteht man aber die Konvergenz nach Definition 3.9 darunter.

Die starke Operator-topologie ist gegeben durch

$$\sigma(L(E, F), \{e_x : x \in E\})$$

mit $e_x(T) := Tx$ ($x \in E, T \in L(E, F)$). Analog ist die schwache Operatortopologie gegeben als

$$\sigma(L(E, F), \{e_{x,f} : x \in E, f \in F'\})$$

mit $e_{x,f} := f(Tx)$ ($f \in F', x \in E, T \in L(E, F)$).

Offensichtlich gilt

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \implies T_n \xrightarrow{s} T \implies T_n \xrightarrow{w} T.$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

3.10 Satz. Sei E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L(E, F)$ stark konvergent, d.h. für alle $x \in E$ konvergiere $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$. Dann existiert ein $T \in L(E, F)$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$.

Beweis. Für $x \in E$ definiert man $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. Offensichtlich ist T linear, und es gilt $T_n \xrightarrow{s} T$. Zu zeigen ist, dass T stetig ist.

Da $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ konvergiert, existiert ein C_x mit $\|T_n x\|_F \leq C_x$. Nach Banach-Steinhaus gilt $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq C \|x\| \quad (n \in \mathbb{N})$$

und damit $\|Tx\| \leq C \|x\|$. □

4. Das Spektrum linearer Operatoren in Banachräumen

Dieser Abschnitt definiert die grundlegenden Begriffe der Spektraltheorie. Dabei werden von Anfang auch unbeschränkte Operatoren betrachtet. Neben der Definition des Spektrums eines linearen Operators ist die Holomorphie der Resolvente das Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Wir wiederholen zunächst bereits bekannte Begriffe und wichtige Aussagen. Seien E, F Banachräume, und $T : E \rightarrow F$ ein linearer (nicht notwendig beschränkter) Operator. Sei $D(T) \subset E$ der Definitionsbereich und $R(T) \subset F$ der Wertebereich von T . Dann ist der Graph von T definiert als $\{(x, Tx) : x \in D(T)\}$.

Der Operator T ist genau dann stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \rightarrow 0$ gilt $Tx_n \rightarrow 0$.

Der Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \rightarrow x \in E$ und $Tx_n \rightarrow y \in F$ gilt $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist T genau dann stetig, wenn T abgeschlossen ist (Satz vom abgeschlossenen Graphen).

Falls T abgeschlossen und injektiv ist, so ist auch T^{-1} abgeschlossen. Falls T abgeschlossen und injektiv ist und $R(T)$ abgeschlossen ist, so ist auch T^{-1} stetig (Satz von der Stetigkeit des Inversen).

Im folgenden schreiben wir für einen Operator $T : E \rightarrow E$ statt $T - \lambda \text{id}_E$ einfach $T - \lambda$.

4.1 Definition. Sei E ein Banachraum und $T : E \rightarrow E$ ein linearer Operator mit $\overline{D(T)} = E$ (d.h. T ist dicht definiert).

a) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda : D(T) \rightarrow E \text{ ist bijektiv}\}$ heißt die Resolventenmenge von T .

b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt das Spektrum von T .

c) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht injektiv}\}$ heißt das Punktspektrum von T (die Menge aller Eigenwerte von T).

d) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T - \lambda)} = E, R(T - \lambda) \neq E\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von T .

e) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T - \lambda)} \neq E\}$ heißt das residuelle Spektrum (oder Restspektrum) von T .

4.2 Bemerkung. a) Direkt aufgrund der Definition haben wir

$$\mathbb{C} = \rho(T) \dot{\cup} \sigma(T) = \rho(T) \dot{\cup} \sigma_p(T) \dot{\cup} \sigma_c(T) \dot{\cup} \sigma_r(T),$$

wobei $\dot{\cup}$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

b) Falls $\dim E < \infty$, so ist $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.

c) Sei T abgeschlossen und $\lambda \in \rho(T)$. Dann ist die Inverse $(T - \lambda)^{-1} : E \rightarrow D(T)$ stetig. Denn $T - \lambda$ ist ebenfalls abgeschlossen, der Wertebereich $R(T - \lambda) = E$ ist abgeschlossen. Damit folgt die Aussage aus dem Satz vom stetigen Inversen.

4.3 Definition. Sei $T : E \rightarrow E$ ein linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$.

a) Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt $R_\lambda(T) := (T - \lambda)^{-1}$ die Resolvente von T .

b) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt $\ker(T - \lambda)$ der geometrische Eigenraum von T zu λ und

$$N_\lambda^{(a)}(T) := \{x \in D(T) \mid \exists n \in \mathbb{N} : (T - \lambda)^n x = 0\}$$

der algebraische Eigenraum von T zu λ .

4.4 Beispiel. Sei $E = \ell^2$ und $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definiert durch $S(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$ (Rechts-Shift). Dann ist $D(S) = \ell^2$, $\ker S = \{0\}$ und $0 \in \sigma_r(S)$ wegen $(1, 0, 0, \dots) \in R(S)^\perp$, d.h. $\overline{R(S)} \neq E$.

4.5 Lemma (Neumannsche Reihe). Sei E ein Banachraum und $T \in L(E)$ mit $\|T\| < 1$. Dann existiert $(1 - T)^{-1} \in L(E)$, und es gilt $(1 - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ und $\|(1 - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$.

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n=0}^N \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^N \|T\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|},$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut. Damit existiert $S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in L(E)$, und es gilt $\|S\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$.

Es gilt $ST = TS = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = S - 1$, d.h. $S(1 - T) = (1 - T)S = 1$ und damit $S = (1 - T)^{-1}$. \square

4.6 Satz. Sei E ein \mathbb{C} -Banachraum und T ein abgeschlossener linearer Operator in E mit $\overline{D(T)} = E$. Dann ist $\rho(T)$ offen und somit $\sigma(T)$ abgeschlossen.

Beweis. Falls $\rho(T) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \rho(T)$. Es gilt

$$T - \lambda = T - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0) = (T - \lambda_0)[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}].$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|(T - \lambda_0)^{-1}\| < 1$ existiert

$$[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}]^{-1} \in L(E)$$

nach Lemma 4.5. Damit existiert

$$(T - \lambda)^{-1} = [1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}]^{-1} \in L(E).$$

Somit gilt

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \|(T - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}\} \subset \rho(T),$$

also ist $\rho(T)$ offen. □

4.7 Korollar. a) Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ gilt

$$\|R_{\lambda_0}(T)\| \geq [\text{dist}(\lambda_0, \sigma(T))]^{-1}.$$

b) Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ gilt

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}.$$

Beweis. a) folgt aus der letzten Zeile im Beweis von Satz 4.6, b) aus der Darstellung von $R_\lambda(T)$ im Beweis von Satz 4.6 und der Neumann-Reihe. □

4.8 Definition (holomorphe Funktionen in Banachräumen). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, E ein \mathbb{C} -Banachraum und $f: \Omega \rightarrow E$. Dann heißt f holomorph [schwach holomorph] in $z_0 \in \Omega$, falls $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ in der Norm von E [in der schwachen Topologie] existiert.

4.9 Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, E ein \mathbb{C} -Banachraum und $x: \Omega \rightarrow E$. Dann ist x genau dann schwach holomorph, wenn x holomorph ist.

Zum Beweis brauchen wir noch ein Lemma.

4.10 Lemma. Sei E ein \mathbb{C} -Banachraum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in E . Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge in E , falls $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge für alle $f \in E'$ mit $\|f\| \leq 1$ ist.

Beweis. (i) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ Cauchyfolge. Dann ist

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} \|f\| \cdot \|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\|.$$

(ii) Es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \forall f \in E', \|f\| \leq 1 : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Dann folgt unter Verwendung der Einbettung $E \hookrightarrow E''$, $x \mapsto \tilde{x}$ die Abschätzung

$$\|x_n - x_m\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |(\tilde{x}_n - \tilde{x}_m)(f)| \leq \varepsilon$$

für $n, m \geq N$. □

Beweis von Satz 4.9. Sei x schwach holomorph und $z \in \Omega$. Sei $\Gamma_z := K_\varepsilon(z) \subset \Omega$ mit positiver Orientierung. Nach dem Cauchy-Integralsatz gilt für alle $f \in E'$

$$f(x(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{f(x(\mu))}{\mu - z} d\mu.$$

Damit erhält man für $0 < |h| < \varepsilon$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [f(x(z+h)) - f(x(z))] - \frac{d}{dz} f(x(z)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \left(\frac{1}{h} \left[\frac{1}{\mu - z - h} - \frac{1}{\mu - z} \right] - \frac{1}{(\mu - z)^2} \right) f(x(\mu)) d\mu \\ &= \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{f(x(\mu))}{(\mu - z - h)(\mu - z)^2} d\mu. \end{aligned}$$

Da $\mu \mapsto f(x(\mu))$ holomorph und damit stetig ist, gilt

$$|f(x(\mu))| \leq C_f \quad (\mu \in \Gamma_z, f \in E').$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt

$$\|x(\mu)\| \leq C \quad (\mu \in \Gamma_z)$$

und damit

$$\left| \frac{1}{h} [f(x(z+h)) - f(x(z))] - \frac{d}{dz} f(x(z)) \right| \leq C' |h| \cdot \|f\|.$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{h} [f(x(z+h)) - f(x(z))] \rightarrow \frac{d}{dz} f(x(z)) \quad (|h| \rightarrow 0)$$

schwach gleichmäßig für alle $f \in E'$ mit $\|f\| \leq 1$. Nach Lemma 4.10 folgt die Konvergenz in der Norm, d.h. x ist holomorph.

Die andere Richtung des Satzes ist direkt aus den Definitionen klar. □

4.11 Korollar. Sei E ein Banachraum, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Es gelte

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_n \in E$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot |z - z_0|^n < \infty \quad \text{für } |z - z_0| < \varepsilon.$$

Dann ist x holomorph an der Stelle z_0 .

Beweis. Für $f \in E'$ ist

$$\begin{aligned} f(x(z)) &= f\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f(a_n) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(a_n) (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Stetigkeit von f verwendet. Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(a_n)| \cdot |z - z_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f\| \cdot \|a_n\|_E \cdot |z - z_0|^n < \infty \quad (|z - z_0| < \varepsilon)$$

lässt sich $f(x(z))$ um z_0 in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickeln, ist also holomorph an der Stelle z_0 . Somit ist x schwach holomorph an der Stelle z_0 und damit nach Satz 4.9 holomorph. \square

4.12 Satz. Sei E ein Banachraum, T ein abgeschlossener linearer Operator in E mit $D(T) = E$. Dann ist die Resolvente $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$, $\rho(T) \rightarrow L(E)$, holomorph in $\rho(T)$.

Beweis. Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Nach Korollar 4.7 b) lässt sich $R_\lambda(T)$ in eine absolut konvergente Potenzreihe

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}$$

entwickeln. Nach Korollar 4.11 ist $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ holomorph an der Stelle λ_0 . \square

4.13 Satz. Sei E ein \mathbb{C} -Banachraum und $T \in L(E)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer.

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ ist $T - \lambda = (-\lambda)(1 - \lambda^{-1}T)$ nach Lemma 4.5 in $L(E)$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ und damit kompakt.

Für $|\lambda| \geq \|T\|$ gilt

$$\|R_\lambda(T)\| = \left\| \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \rightarrow 0 \quad (|\lambda| \rightarrow \infty).$$

Angenommen, es wäre $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist $\|R_\lambda(T)\| \leq C$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Für $x \in E$ und $f \in E'$ ist die Abbildung $\lambda \mapsto f(R_\lambda(T)x)$ holomorph in ganz \mathbb{C} und beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen

$$|f(R_\lambda(T)x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|R_\lambda(T)\| \rightarrow 0 \quad (|\lambda| \rightarrow \infty)$$

folgt $f(R_\lambda(T)x) = 0$ ($f \in E', x \in E, \lambda \in \mathbb{C}$). Nach Korollar 2.14 zum Satz von Hahn-Banach folgt daraus $R_\lambda(T)x = 0$ ($x \in E$), d.h. $R_\lambda(T) = 0$, Widerspruch. \square

4.14 Beispiel. Die folgenden Beispiele zeigen, dass für unbeschränkte Operatoren sehr wohl die Fälle $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\sigma(T) = \emptyset$ auftreten können.

a) Sei $E = C([0, 1])$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1([0, T])$. Dann ist T unbeschränkt, da $\|Tf_n\| = n$ und $\|f_n\| = 1$ gilt für $f_n(t) := t^n$.

Wir zeigen, dass T abgeschlossen ist: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $f_n \rightarrow f$ in E und $Tf_n = f'_n \rightarrow g$ in E . Da $(f_n)_n$ und $(f'_n)_n$ gleichmäßig konvergieren, gilt $f \in C^1([0, 1])$ und $f'_n \rightarrow f'$. Somit ist $f \in D(T)$ und $g = f' = Tf$.

Es gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$, denn die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ liegt in $\ker(T - \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Sei $E := C_0([0, 1]) := \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \{f \in E : f' \in E\}$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und seien $f, g \in E$. Betrachte die Gleichung $(T - \lambda)f = g$, d.h. $f' - \lambda f = g$. Versehen mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung die eindeutige Lösung

$$f(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s) ds.$$

Es gilt $f'(0) = g(0) + \lambda f(0) = 0$, d.h. $f' \in E$ und damit $f \in D(T)$. Somit ist $T - \lambda : D(T) \rightarrow E$ bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\rho(T) = \mathbb{C}$.

5. Adjungierte Operatoren

Dieser Abschnitt behandelt einen zentralen Begriff der Operatortheorie, nämlich den Adjungierten eines Operators. Am einfachsten ist dieser Begriff im Fall eines Hilbert-raums bei beschränkten Operatoren. Für unbeschränkte Operatoren ist der Definitio-nsbereich des Adjungierten von entscheidender Bedeutung. Beispiele zeigen, dass bei unbeschränkten Operatoren der Definitionsbereich des Operators fast genauso wichtig ist wie der Wert.

a) Adjungierte von beschränkten Operatoren

5.1 Definition und Satz. Seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann wird durch $f_1(x) := f(Tx)$ für jedes $f \in F'$ ein beschränktes lineares Funktional $f_1 \in E'$ definiert. Die Abbildung $T' : F' \rightarrow E'$, $f \mapsto f_1$ heißt (Banachraum-)adjungierter Operator zu T . Es gilt $T' \in L(F', E')$. Die Abbildung $T \mapsto T'$, $L(E, F) \rightarrow L(F', E')$ ist eine Isometrie.

Beweis. Wegen $f_1 = f \circ T$ ist die Linearität und die Stetigkeit von f_1 klar. Wegen

$$|f_1(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

ist $\|f_1\| \leq \|T\| \cdot \|f\|$, d.h. $\|T'\| \leq \|T\|$. Der Operator T' ist linear wegen

$$T'(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx).$$

Ebenso ist die Abbildung $T \mapsto T'$ linear.

Zu zeigen ist noch, dass $\|T\| \leq \|T'\|$ gilt. Nach Korollar 2.14 zum Satz von Hahn-Banach existiert zu $x \in E$ ein $f_x \in E'$ mit $\|f_x\| = 1$ und $f_x(Tx) = \|Tx\|$. Damit ist

$$\|Tx\| = |f_x(Tx)| = |(T'f_x)(x)| \leq \|T'\| \cdot \|x\|. \quad \square$$

5.2 Bemerkung. a) Für $T \in L(E, F)$ ist $T'' \in L(E'', F'')$ und $T''|_E = T$. Denn es gilt $(T''\tilde{x})(f) = \tilde{x}(T'f) = (T'f)(x) = f(Tx) = \tilde{T}x(f)$.

b) Falls $T \in L(E, F)$ und $S \in L(F, G)$, so ist $(ST)' = T'S'$. Denn $((ST)'f)(x) = f(STx) = (S'f)(Tx) = [T'(S'f)](x)$.

c) Falls $T \in L(E, F)$ invertierbar ist, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$. Dies gilt wegen $(T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = \text{id}' = \text{id}$ und $(T'(T^{-1})' = (T^{-1}T)' = \text{id}' = \text{id}$.

5.3 Definition. Seien E, F Hilberträume, und $T \in L(E, F)$. Dann existiert zu jedem $y \in F$ genau ein $y^* \in E$ mit

$$\langle Tx, y \rangle_F = \langle x, y^* \rangle \quad (x \in E).$$

Setze $T^*y := y^*$. Die Abbildung $T^* \in L(F, E)$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte zu T .

Man beachte, dass die Abbildung aus dem Satz von Riesz

$$i_E : E \rightarrow E', \quad x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$$

isometrisch aber konjugiert linear ist. Damit hängen Hilbertraum- und Banachraumadjungierte über $T^* = i_E^{-1} \circ T' \circ i_F$ zusammen. Vergleiche auch Aufgabe 8.

5.4 Definition. a) Sei E ein Hilbertraum und $T \in L(E)$. Dann heißt T

- (i) selbstadjungiert, falls $T = T^*$,
- (ii) unitär, falls $TT^* = T^*T = \text{id}_E$,
- (iii) normal, falls $TT^* = T^*T$.

b) Seien E, F Hilberträume und $T \in L(E, F)$. Dann heißt T unitär, falls $TT^* = \text{id}_F$ und $T^*T = \text{id}_E$ gilt.

5.5 Lemma. Sei E ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T \in L(E)$. Dann ist T genau dann selbstadjungiert, falls $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in E$.

Beweis. (i) Sei $T = T^*$. Dann ist $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $x, y \in E$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Voraussetzung ist

$$\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle = \overline{\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle}$$

und damit

$$\alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle = \alpha \langle y, Tx \rangle + \bar{\alpha} \langle x, Ty \rangle.$$

Für $\alpha = 1$ erhält man

$$\langle Ty, x \rangle + \langle Tx, y \rangle = \langle y, Tx \rangle + \langle x, Ty \rangle.$$

Für $\alpha = i$ erhält man

$$\langle Ty, x \rangle - \langle Tx, y \rangle = \langle y, Tx \rangle - \langle x, Ty \rangle.$$

Somit folgt

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad (x, y \in E).$$

Nach Definition von T^* gilt also $T = T^*$. □

5.6 Satz (Spektrum beschränkter selbstadjungierter Operatoren). Sei E ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T \in L(E)$ selbstadjungiert. Dann gilt

- (i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
- (ii) $\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.
- (iii) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist $\ker(T - \lambda) = N_\lambda^{(a)}(T)$, d.h. geometrischer und algebraischer Eigenraum sind identisch.
- (iv) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- (v) $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $x \in E$. Es gilt mit Lemma 5.5

$$\|(T - \lambda)x\| \cdot \|x\| \geq |\langle (T - \lambda)x, x \rangle| \geq |\operatorname{Im} \langle (T - \lambda)x, x \rangle| = |\operatorname{Im} \lambda| \cdot \|x\|^2. \quad (5-1)$$

Damit ist $T - \lambda$ injektiv.

Der Wertebereich $R(T - \lambda)$ ist abgeschlossen: Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R(T - \lambda)$ mit $y_n \rightarrow y$. Sei $y_n = (T - \lambda)x_n$. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ wegen (5-1) eine Cauchyfolge, d.h. $x_n \rightarrow x$ und – da T stetig ist – auch $y = \lim_n y_n = (T - \lambda)x$.

$T - \lambda$ ist surjektiv: Sei $y \in R(T - \lambda)^\perp$, d.h.

$$\langle (T - \lambda)x, y \rangle = 0 \quad (x \in E).$$

Wegen $T = T^*$ ist dann $\langle x, (T - \bar{\lambda})y \rangle = 0 \quad (x \in E)$, d.h. $(T - \bar{\lambda})y = 0$. Da $T - \bar{\lambda}$ injektiv ist, folgt $y = 0$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ der Operator $T - \lambda$ bijektiv ist.

(ii) Setze $y := (T - \lambda)x$ in (5-1) und erhalte

$$\|y\| \geq |\operatorname{Im} \lambda| \cdot \|(T - \lambda)^{-1}y\|.$$

(iii) Die Inklusion $\ker(T - \lambda) \subset N_\lambda^{(a)}(T)$ gilt immer. Sei also $x \in N_\lambda^{(a)}(T) \setminus \ker(T - \lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(T - \lambda)^n x = 0$ für ein $n \geq 2$, aber $(T - \lambda)x \neq 0$. Wegen $T = T^*$ ist dann

$$\|(T - \lambda)^{n-1}x\|^2 = \langle (T - \lambda)^n x, (T - \lambda)^{n-2}x \rangle = 0.$$

Induktiv folgt $(T - \lambda)^{n-2}x = 0, \dots, (T - \lambda)x = 0$, Widerspruch.

(iv) Das folgt wie in der linearen Algebra. Seien x_1, x_2 Eigenvektoren zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mit $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Tx_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

(v) Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \sigma_r(T)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$, $T - \lambda$ injektiv und $\overline{R(T - \lambda)} \neq E$. Wähle $y \in R(T - \lambda)^\perp \setminus \{0\}$. Dann ist

$$0 = \langle (T - \lambda)x, y \rangle = \langle x, (T - \lambda)y \rangle \quad (x \in E),$$

d.h. $(T - \lambda)y = 0$ und, da $T - \lambda$ injektiv ist, $y = 0$, Widerspruch. \square

Der folgende Satz wird genauso wie Satz 5.6 bewiesen.

5.7 Satz (Spektrum unitärer Operatoren). Sei E ein Hilbertraum und $T \in L(E)$ unitär. Dann gilt

(i) $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

(ii) $\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - 1}$ für $|\lambda| \neq 1$.

Die Aussagen (iii)–(v) von Satz 5.6 gelten analog.

b) Adjungierte von unbeschränkten Operatoren

5.8 Definition. Seien E, F Banachräume und $T : E \rightarrow F$ ein linearer dicht definierter Operator (d.h. $\overline{D(T)} = E$). Definiere

$$D(T') := \{f \in F' : \exists f_1 \in E' \text{ mit } f(Tx) = f_1(x) \quad (x \in D(T))\}$$

und

$$T'f := f_1 \quad (f \in D(T')).$$

Kurz kann man auch schreiben: $D(T') = \{f \in F' : x \mapsto f(Tx) \in E'\}$. Die Abbildung $T' : F' \rightarrow E'$ mit Definitionsbereich $D(T')$ heißt (Banachraum-)Adjungierte von T .

5.9 Bemerkung. a) $T'f$ ist eindeutig definiert. Denn seien $f_1, f_2 \in E'$ mit $f_1(x) = f_2(x) = f(Tx)$ ($x \in D(T)$). Da $\overline{D(T)} = E$ und f_1, f_2 stetig sind, folgt $f_1 = f_2$ auf ganz E .

b) Es gilt $(f, g) \in G(T')$ genau dann, wenn $g(x) = f(Tx)$ ($x \in D(T)$).

c) Der Operator T' ist abgeschlossen. Denn sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T')$ mit $f_n \rightarrow f$ in F' und $T'f_n \rightarrow g$ in E' . Dann gilt für $x \in D(T)$:

$$f(Tx) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(Tx) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T'f_n)(x) = g(x).$$

Damit gilt $f \in D(T')$ und $(f, g) \in G(T')$ nach b).

5.10 Definition. Seien E, F Hilberträume und $T : E \rightarrow F$ ein linearer dicht definierter Operator. Definiere

$$D(T^*) := \{y \in F : x \mapsto \langle Tx, y \rangle \text{ ist stetiges lineares Funktional auf } D(T)\}.$$

Für $y \in D(T^*)$ existiert ein eindeutiges $y^* \in E$ mit

$$\langle Tx, y \rangle_F = \langle x, y^* \rangle_E \quad (x \in D(T)).$$

Definiere $T^* : F \rightarrow E$ durch $T^*y := y^*$ ($y \in D(T^*)$). Der Operator T^* heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von T .

5.11 Lemma. Betrachte in der Situation von Definition 5.10 den unitären Isomorphismus

$$U : E \oplus F \rightarrow F \oplus E, (x, y) \mapsto (y, -x).$$

Dann gilt

$$G(T^*) = U(G(T)^\perp) = [U(G(T))]^\perp.$$

Beweis. Sei $(y, y^*) \in G(T^*)$. Nach Definition von T^* gilt

$$\langle Tx, y \rangle_F = \langle x, y^* \rangle_E \quad (x \in D(T)),$$

d.h.

$$0 = \langle x, y^* \rangle_E + \langle Tx, y \rangle_F = \langle (x, Tx), (-y^*, y) \rangle_{E \oplus F} = \langle (x, Tx), U^{-1}(y, y^*) \rangle_{E \oplus F}.$$

Beachte dabei, dass $U^{-1}(y, x) = (-x, y)$ gilt. Somit ist $U^{-1}(y, y^*) \in G(T)^\perp$, d.h.

$$(y, y^*) \in U(G(T)^\perp) = [U(G(T))]^\perp.$$

Bei der letzten Gleichheit wurde verwendet, dass U unitär ist. □

5.12 Satz. Seien E, F Hilberträume und $T : E \rightarrow F$ ein dicht definierter linearer Operator. Dann ist T^* abgeschlossen. Falls T abschließbar ist, so ist T^* dicht definiert und $T^{**} = \overline{T}$.

Beweis. Wegen $G(T^*) = [U(G(T))]^\perp$ (siehe Lemma 5.11) ist T^* abgeschlossen.

Sei T abschließbar und $y_0 \in D(T^*)^\perp$. Dann ist

$$\langle y_0, y \rangle = 0 \quad (y \in D(T^*)).$$

Damit folgt

$$\langle (0, y_0), (-z, y) \rangle_{E \oplus F} = 0 \quad ((y, z) \in G(T^*)).$$

Somit ist unter Verwendung von Lemma 5.11 und nach Definition des Abschlusses

$$(0, y_0) \in [U^{-1}(G(T^*))]^\perp = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(\overline{T})} = G(\overline{T}).$$

Daher ist $y_0 = \overline{T}0 = 0$, also $\overline{D(T^*)} = F$. Wir wenden Lemma 5.11 nun an auf den adjungierten Operator $T^* : F \rightarrow E$ und erhalten

$$G(\overline{T}) = [U^{-1}(G(T^*))]^\perp = [-U^{-1}(G(T^*))]^\perp = G(T^{**}).$$

Also gilt $T^{**} = \overline{T}$. □

5.13 Korollar. Seien E, F Hilberträume und $T : E \rightarrow F$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator. Dann ist T^* dicht definiert und abgeschlossen, und $T^{**} = \overline{T}$.

5.14 Satz. Seien E, F Hilberträume und $T : E \rightarrow F$ ein abgeschlossener und dicht definierter Operator. Dann gilt

- a) $R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp = \ker T^*$.
- b) $\overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp$.
- c) $R(T^*)^\perp = \ker T$.
- d) $\overline{R(T^*)} = (\ker T)^\perp$.

Beweis. a) Es gilt $y \in R(T)^\perp$ genau dann, wenn für alle $x \in D(T)$ gilt $\langle Tx, y \rangle = 0$. Dies ist äquivalent zu $y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0$, also zu $y \in \ker T^*$.

b) Nach a) gilt $\overline{R(T)} = (R(T)^\perp)^\perp = (\ker T^*)^\perp$.

c) Nach Satz 5.12 ist T^* abgeschlossen, dicht definiert, und es gilt $T^{**} = T$. Wende a) auf T^* an und erhalte $R(T^*)^\perp = \ker T^{**} = \ker T$.

d) Wende b) auf T^* an. □

5.15 Beispiel. Sei $E = L_2([0, 1])$. Definiere die Operatoren T_1, T_2, T_3 durch

$$\begin{aligned} D(T_1) &:= \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ absolutstetig, } f' \in L_2([0, 1])\}, \\ D(T_2) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1)\}, \\ D(T_3) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1) = 0\} \end{aligned}$$

und $T_k f := if'$ ($f \in D(T_k)$) für $k = 1, 2, 3$. Offensichtlich ist $D(T_k)$ dicht in E .

Sei $f \in D(T_1)$ und $g \in D(T_1)$. Dann gilt

$$\langle T_1 f, g \rangle = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx$$

$$\begin{aligned}
&= if(x)\overline{g(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 if(x)\overline{g'(x)}dx \\
&= if(1)g(1) - if(0)g(0) + \langle f, T_1g \rangle.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\langle T_1f, g \rangle &= \langle f, T_1g \rangle \quad \text{für } f \in D(T_1), g \in D(T_3), \\
\langle T_1f, g \rangle &= \langle f, T_1g \rangle \quad \text{für } f, g \in D(T_2).
\end{aligned}$$

Also haben wir $D(T_1) \subset D(T_3^*)$, $D(T_2) \subset D(T_2^*)$ und $D(T_3) \subset D(T_1^*)$.

Sei $g \in D(T_1^*)$ und $\varphi := T_1^*g$. Definiere $\Phi(x) := \int_0^x \varphi(t)dt$. Dann ist Φ absolutstetig mit $\Phi' = \varphi$. Für $f \in D(T_1)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx &= \langle T_1f, g \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{\varphi(x)}dx \\
&= f(x)\Phi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)\overline{\Phi(x)}dx \\
&= f(1)\Phi(1) - \int_0^1 f'(x)\overline{\Phi(x)}dx.
\end{aligned}$$

Wählt man für f eine konstante Funktion, so erhält man $\Phi(1) = 0$. Damit gilt

$$\int_0^1 if'(x)\overline{(g(x) + i\Phi(x))}dx = 0 \quad (f \in D(T_1)),$$

d.h. $g + i\Phi \in R(T_1)^\perp = \{0\}$. Also ist g absolutstetig und $g(0) = -i\Phi(0) = 0$, $g(1) = -i\Phi(1) = 0$, d.h. $g \in D(T_3)$.

Insgesamt haben wir $D(T_1^*) = D(T_3)$, $T_1^*g = T_3g$ ($g \in D(T_3)$), also $T_1^* = T_3$. Genauso zeigt man $T_3^* = T_1$ und $T_2^* = T_2$. Insbesondere folgt, dass T_k abgeschlossen ist für $k = 1, 2, 3$.

6. Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Der Spektralsatz ist das Hauptergebnis dieser Vorlesung. Er verallgemeinert die Transformation einer hermiteschen Matrix auf Diagonalform oder auch den Spektralsatz für kompakte Operatoren auf den Fall eines beliebigen selbstadjungierten Operators. Hier werden zunächst beschränkte Operatoren betrachtet.

Es gibt verschiedene Zugänge zum Spektralsatz, hier wird der Zugang über den Funktionalkalkül gewählt.

a) Nützliches über das Spektrum

6.1 Bemerkung. Sei E Banachraum, F normierter Raum und $T: E \rightarrow F$ ein Isomorphismus normierter Räume, d.h. T linear, bijektiv und T, T^{-1} stetig. Dann ist auch F ein Banachraum. Denn falls $(y_n)_n \subset F$ eine Cauchyfolge ist, so auch $x_n := T^{-1}y_n$. Damit existiert $x := \lim_n x_n \in E$, und für $y := Tx \in F$ gilt $y_n \rightarrow y$.

Man beachte, dass hier die Linearität entscheidend ist, vergleiche $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$.

6.2 Lemma. Seien E, F Banachräume und $T: E \rightarrow F$ abgeschlossener linearer Operator. Dann sind äquivalent:

- (i) Es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\| \geq C\|x\|$ ($x \in D(T)$).
- (ii) T ist injektiv und $R(T)$ ist abgeschlossen.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Offensichtlich ist T injektiv. Der Operator $T: (D(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow (R(T), \|\cdot\|)$ ist nach (i) Isomorphismus von normierten Räumen. Da $(D(T), \|\cdot\|_T)$ Banachraum ist, ist $R(T)$ abgeschlossen nach Bemerkung 6.1.

(ii) \Rightarrow (i) folgt aus dem Satz vom stetigen Inversen. □

6.3 Definition (numerischer Wertebereich). Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Der numerische Wertebereich ist definiert durch

$$W(T) := \{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\}.$$

6.4 Lemma. Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann gilt $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.

Beweis. Für $\lambda \notin \overline{W(T)}$ und $\|x\| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} 0d &:= \text{dist}(x, \overline{W(T)}) \leq |\lambda - \langle Tx, x \rangle| = |\langle (\lambda - T)x, x \rangle| \\ &\leq \|(T - \lambda)x\| \cdot \|x\| = \|(T - \lambda)x\|. \end{aligned}$$

Damit gilt $\|(T - \lambda)x\| \geq d\|x\|$ ($x \in H$). Also ist nach Lemma 6.2 der Operator $T - \lambda$ injektiv und $R(T - \lambda)$ abgeschlossen. Falls $x_0 \in R(T - \lambda)^\perp$ mit $\|x_0\| = 1$, so ist

$$0 = \langle (T - \lambda)x_0, x_0 \rangle = \langle Tx_0, x_0 \rangle - \lambda,$$

Widerspruch zu $\lambda \notin \overline{W(T)}$. □

6.5 Lemma (approximative Eigenwerte). Seien E, F Banachräume und $T: E \rightarrow F$ ein abgeschlossener linearer Operator. Die Menge der approximativen Eigenwerte ist definiert als

$$\sigma_{\text{app}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T), \|x_n\| = 1 : \|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0\}.$$

Dann gilt

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{\text{app}}(T) \subset \sigma(T).$$

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \sigma_{\text{app}}(T)$. Falls $\lambda \in \rho(T)$, so wäre $\|(T - \lambda)^{-1}\|$ stetig, d.h. für alle $x \in D(T)$ ist

$$\frac{\|x_n\|}{\|(T - \lambda)x_n\|} \leq \|(T - \lambda)^{-1}\| < \infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition der approximativen Eigenwerte.

(ii) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ setze $x_n := x$ mit einem normierten Eigenvektor x zum Eigenwert λ .

Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$. Dann ist $T - \lambda$ injektiv und $R(T - \lambda)$ nicht abgeschlossen. Nach Lemma 6.2 existiert kein $C > 0$ mit $\|(T - \lambda)x\| \geq C\|x\|$. Somit existiert eine Folge x_n mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0$. □

6.6 Lemma. Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Für $m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ und $M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ gilt $\sigma(T) \subset [m, M]$ und $m, M \in \sigma(T)$.

Beweis. Die Inklusion $\sigma(T) \subset \overline{W(T)} \subset [m, M]$ gilt nach Lemma 6.4.

Sei $(x_n)_n \subset H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow m$. Nach Definition von m ist die Bilinearform $[x, y] := \langle (T - m)x, y \rangle$ positiv semidefinit, und nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\|(T - m)x_n\|^2 = [x_n, (T - m)x_n] \leq [x_n, x_n]^{1/2} [(T - m)x_n, (T - m)x_n]^{1/2}$$

$$= \langle (T - m)x_n, x_n \rangle^{1/2} \cdot \langle (T - m)^2 x_n, (T - m)x_n \rangle^{1/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

da $\langle (T - m)x_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ und $\langle (T - m)^2 x_n, (T - m)x_n \rangle$ beschränkt ist. Also ist $m \in \sigma_{\text{app}}(T) \subset \sigma(T)$. Genauso zeigt man $M \in \sigma(T)$. \square

6.7 Definition und Satz. Sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T \in L(H)$. Für den Spektralradius

$$r(T) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$$

gilt

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Beweis. (i) Wir zeigen folgende Aussage: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_n)^{1/n} \rightarrow a := \inf_n (a_n)^{1/n}$ ($n \rightarrow \infty$).

Um dies zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{1/N} < a + \varepsilon$ und setze $b(\varepsilon) := \max\{a_1, \dots, a_N\}$. Schreibe nun $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = kN + r$ mit $0 \leq r < N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a_n)^{1/n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \leq (a_N^k a_r)^{1/n} \\ &\leq (a + \varepsilon)^{kN/n} b^{1/n} = (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^{-r/n} b^{1/n} \\ &= (a + \varepsilon) \left(\frac{b}{(a + \varepsilon)^r} \right)^{1/n} \\ &< a + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

falls n hinreichend groß ist. Dies zeigt (i).

(ii) Setze in (i) nun $a_n := \|T^n\|$. Dann folgt $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$. Für $|\lambda| > r(T)$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n \right\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|T^n\|^{1/n}}{|\lambda|} = \frac{r(T)}{|\lambda|} < 1.$$

Damit konvergiert

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} = (\lambda 1 - T)^{-1}.$$

Also ist $\lambda \in \rho(x)$.

(iii) Sei $r_0 := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > r_0$, und $f \in [L(H)]'$. Betrachte die Funktion $F(\lambda) := f((\lambda 1 - T)^{-1})$. Dann ist F holomorph in $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(T)\}$, da die Reihe

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} f(T^n)$$

absolut konvergent ist für $|\lambda| > r(T)$.

Andererseits ist F holomorph in $\rho(T)$ und damit für alle $|\lambda| > r_0$. Eine Potenzreihe konvergiert aber im größten offenen Kreisring, in dem sie holomorph ist. Daher konvergiert die obige Reihe an der Stelle μ (wegen $|\mu| > r_0$).

Insbesondere folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(\mu^{-n-1}T^n)| \rightarrow 0$. Da $f \in [L(E)]'$ beliebig war, konvergiert die Folge $(\mu^{-n-1}T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der schwachen Topologie gegen 0.

Die Folge $(\mu^{-n-1}T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist normbeschränkt: Für jedes $f \in [L(E)]'$ die Folge

$$(f(\mu^{-n-1}T^n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$$

als konvergente Folge beschränkt, es existiert also eine Konstante c_f mit $|\widetilde{T}_n(f)| = |f(T_n)| \leq c_f$ ($n \in \mathbb{N}$). Nach dem Satz von Banach-Steinhaus existiert ein $c > 0$ mit $\|\widetilde{T}_n\| \leq c$. Aber nach Lemma 2.17 gilt $\|\widetilde{T}_n\| = \|T_n\|$.

Damit gilt

$$\|T^n\|^{1/n} \leq (C|\mu|^{n+1})^{1/n}.$$

Da die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen $|\mu|$ konvergiert, folgt

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq |\mu|.$$

Da die Zahl μ beliebig mit $|\mu| > r_0$ war, folgt $r(T) \leq r_0$. Nach (ii) gilt jedoch auch $r(T) \geq r_0$ und damit $r(T) = r_0$. \square

6.8 Satz. Sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$r(T) = \|T\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in H, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} \left(\langle Tx, Tx \rangle \right)^{1/2} \\ &= \sup_{x \in H, \|x\|=1} \left(\langle T^2x, x \rangle \right)^{1/2} \\ &\leq \|T^2\|^{1/2}, \end{aligned}$$

d.h. $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$. Die andere Richtung gilt, da $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist. Iterativ folgt damit $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|$, und die Behauptung folgt aus Lemma 6.6 und Satz 6.7. \square

6.9 Bemerkung. Die meisten obigen Aussagen und Beweise gelten nicht nur für beschränkte Operatoren in Hilbert- bzw. Banachräumen, sondern allgemein für Elemente von Banachalgebren bzw. C^* -Algebren. Die sog. Gelfand-Theorie von C^* -Algebren ermöglicht es, einen abstrakten Zugang zu Spektrum und Spektralsatz zu finden. Hier sollen nur die Definitionen zitiert werden.

6.10 Definition. a) Eine Banachalgebra A ist ein \mathbb{C} -Banachraum, auf der eine bilineare, assoziative Abbildung $A \times A \rightarrow A$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ definiert ist (die Multiplikation), wobei

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in A).$$

Wir schreiben wieder $xy := x \cdot y$. Die Banachalgebra A heißt kommutativ, falls $xy = yx$ ($x, y \in A$). Ein Element $e \in A$ heißt Einheit von A , falls $xe = ex = x$ ($x \in A$) und $\|e\| = 1$.

b) Eine Abbildung $A \rightarrow A$, $x \mapsto x^*$ heißt Involution, falls gilt

$$(i) \quad (x + y)^* = x^* + y^* \quad (x, y \in A),$$

$$(ii) \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in A),$$

$$(iii) \quad x^{**} = x \quad (x \in A),$$

$$(iv) \quad (xy)^* = y^* x^* \quad (x, y \in A).$$

c) Falls A eine Involution mit

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad (x \in A)$$

besitzt, so heißt A eine C^* -Algebra. Ein Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \rightarrow B$ von C^* -Algebren heißt ein $*$ -Homomorphismus, falls $\Phi(x^*) = (\Phi(x))^*$ ($x \in A$).

6.11 Beispiele. a) Sei E ein \mathbb{C} -Banachraum. Dann sind $A = L(E)$ und $K(E) := \{T \in L(E) : T \text{ kompakt}\}$ Banachalgebren. Dabei hat $L(E)$ die Einheit id_E , während $K(E)$ nur dann eine Einheit hat (nämlich ebenfalls id_E), falls E endlichdimensional ist.

b) Sei T ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $C(T)$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

c) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Dann ist $L_\infty(\mu; \mathbb{C})$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

b) Stetiger und messbarer Funktionalkalkül

Im folgenden sei stets H ein \mathbb{C} -Hilbertraum.

Wir wollen im folgenden Funktionen $f(T)$ eines selbstadjungierten Operators $T \in L(H)$ definieren. Die Definition ist noch klar, falls f ein Polynom ist: Für $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist

$$f(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n \quad (6-1)$$

(mit $T^0 := \text{id}_H$). Dieser sog. Funktionalkalkül kann mit Hilfe des Satzes von Weierstraß eindeutig auf stetige Funktionen ausgeweitet werden, wie wir später sehen werden. Zunächst eine Version eines Spektralabbildungssatzes.

6.12 Lemma. Sei $T \in L(H)$, und für ein Polynom f sei $f(T)$ durch (6-1) definiert. Dann gilt

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) \left(= \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} \right).$$

Beweis. (i) Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Wir faktorisieren

$$f(t) - \mu = \beta_n \cdot \prod_{i=1}^n (t - \gamma_i)$$

und erhalten $f(T) - \mu = \beta_n \cdot \prod_{i=1}^n (T - \gamma_i)$. Falls $\gamma_i \in \rho(T)$ für alle i gelten würde, so wäre $f(T) - \mu$ bijektiv, d.h. es gilt $\mu \in \rho(f(T))$. Also existiert ein i_0 , so dass $T - \gamma_{i_0}$ nicht bijektiv ist. Das heißt aber $\gamma_{i_0} \in \sigma(T)$. Wegen $f(\gamma_{i_0}) - \mu = 0$ folgt $\mu \in f(\sigma(T))$.

(ii) Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gilt $\mu = f(\gamma)$ mit einem $\gamma \in \sigma(T)$. Dann folgt $f(\gamma) - \mu = 0$, d.h.

$$f(t) - \mu = (t - \gamma)\tilde{f}(t)$$

mit einem Polynom \tilde{f} von Grad nicht größer als $n - 1$. Also gilt

$$f(T) - \mu = (T - \gamma)\tilde{f}(T) = \tilde{f}(T)(T - \gamma).$$

Da $\gamma \in \sigma(T)$, ist entweder $T - \gamma$ nicht surjektiv und damit auch $f(T) - \mu$ nicht surjektiv, oder es ist $T - \gamma$ nicht injektiv und damit $f(T) - \mu$ nicht injektiv. In beiden Fällen folgt $\gamma \in \sigma(f(T))$. \square

Im folgenden sei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion 1 und $P(\sigma(T)) := \{f \in C(\sigma(T)) : f \text{ ist Polynom}\}$.

6.13 Definition und Satz (Stetiger Funktionalkalkül). Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert genau ein stetiger Homomorphismus von C^* -Algebren $\Phi: C(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$ mit $\Phi(\text{id}_{\sigma(T)}) = T$ und $\Phi(\mathbf{1}) = \text{id}_H$. Die Abbildung Φ heißt der stetige Funktionalkalkül von T . Wir schreiben $f(T) := \Phi(T)$ ($f \in C(\sigma(T))$).

Beweis. (i) Dichtigkeit der Polynome: Da $T = T^* \in L(H)$, existiert ein Intervall $[m, M] \supset \sigma(T)$. Zu $f \in C(\sigma(T))$ existiert eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} \in C([m, M])$. Nach dem Satz von Weierstraß liegen die Polynome dicht in $C([m, M])$ und damit auch dicht in $C(\sigma(T))$.

(ii) Eindeutigkeit: Da Φ stetig ist, ist Φ durch die Werte auf der Menge $P(\sigma(T))$ aller Polynome bereits festgelegt. Wegen $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ist Φ bereits durch die Werte $\Phi(\text{id}_{\sigma(T)})$ und $\Phi(\mathbf{1})$ eindeutig bestimmt.

(iii) Existenz von Φ : Für ein Polynom $f \in P(\sigma(T))$, $f: t \mapsto \sum_{j=0}^n c_j t^j$, setze $\Phi(f) := \sum_{j=0}^n c_j T^j$. Dann ist $\Phi: P(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$ linear, multiplikativ und erfüllt $\Phi(\bar{f}) = (\Phi(f))^*$.

Wir zeigen, dass Φ stetig ist. Für $f \in P(\sigma(T))$ ist

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)\|^2 &= \|\Phi(f)^*\Phi(f)\| = \|\Phi(\bar{f}f)\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\Phi(\bar{f}f))\} \\ &= \sup\{(\bar{f}f)(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|^2 = \|f\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Hier wurden Satz 6.8 auf den selbstadjungierten Operator $\Phi(\bar{f}f)$ angewendet sowie der Spektralabbildungssatz für Polynome (Lemma 6.12).

Somit ist Φ eine Isometrie auf $P(\sigma(T))$, und es existiert eine eindeutige (wieder isometrische) stetige Fortsetzung auf $C(\sigma(T))$. Diese Fortsetzung ist wieder linear, multiplikativ und erfüllt $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$. Zum Beispiel kann man die letzte Eigenschaft folgendermaßen zeigen: Falls f der Limes von Polynomen f_n ist, so gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{f}) &= \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\bar{f}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n)^* \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n)\right]^* = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)^* = \Phi(f)^*. \end{aligned}$$

□

6.14 Satz (Eigenschaften des Funktionalkalküls). Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert.

a) Der Funktionalkalkül $C(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$, $f \mapsto f(T)$, ist isometrisch, d.h. $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$.

b) Falls $f \geq 0$, so ist $f(T) \geq 0$ ($:\Leftrightarrow \forall x \in H : \langle x, f(T)x \rangle \geq 0$).

c) Falls $Tx = \lambda x$, so ist $f(T)x = f(\lambda)x$ für $f \in C(\sigma(T))$.

d) (Spektralabbildungssatz). Es ist $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

e) Die Menge $\{f(T) : f \in C(\sigma(T))\} \subset L(H)$ ist kommutative Unteralgebra. Der Operator $f(T)$ ist normal, und $f(T)^* = f(T)$ gilt genau dann, wenn $\bar{f} = f$.

Beweis. a) wurde bereits im Beweis von Satz 6.13 gezeigt (für Polynome, welche dicht liegen).

e) ist nach a) klar.

b) Sei $0 \leq f = g^2$ mit $g \in C(\sigma(T))$, $g \geq 0$. Dann ist

$$\langle f(T)x, x \rangle = \langle g^2(T)x, x \rangle = \|g(T)x\|^2 \geq 0,$$

wobei die Selbstadjungiertheit von g ausgenutzt wurde.

c) ist klar für Polynome und folgt für allgemeine Funktionen durch Approximation.

d) (i) Sei $\mu \notin f(\sigma(T))$, d.h. $g := \frac{1}{f-\mu} \in C(\sigma(T))$. Dann ist

$$g(T)(f(T) - \mu) = (g \circ (f - \mu))(T) = \mathbf{1}_{\sigma(T)}(T) = \text{id}_H.$$

Genauso folgt $(f(T) - \mu)g(T) = \text{id}_H$. Also ist $\mu \in \rho(f(T))$.

(ii) Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gibt ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\mu = f(\lambda)$. Wähle Polynome $p_n \in P(\sigma(T))$ mit $\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ (und damit $\|f(T) - p_n(T)\|_{L(H)} \leq \frac{1}{n}$). Nach Lemma 6.12 ist $g_n(\lambda) \in \sigma(g_n(T))$, d.h. es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(g_n(T) - g_n(\lambda))x_n\| \leq \frac{1}{n}$ (approximative Eigenwerte). Somit ist

$$\begin{aligned} \|(f(T) - f(\lambda))x_n\| &\leq \|(f(T) - p_n(T))x_n\| + \|(p_n(T) - p_n(\lambda))x_n\| \\ &\quad + |p_n(\lambda) - f(\lambda)| \cdot \|x_n\| \leq \frac{3}{n}, \end{aligned}$$

d.h. $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$. □

Der stetige Funktionalkalkül liefert uns z.B. die Resolvente $R_\lambda(T) := (T - \lambda)^{-1} = f(T)$ mit $f(t) := \frac{1}{t-\lambda} \in C(\sigma(T))$ für $\lambda \in \rho(T)$. Aber eine gute Beschreibung von T erhält man erst über Maße, und dafür brauchen wir noch die charakteristischen Funktionen von T , z.B. $\chi_{[a,b]}(T)$. Dazu reicht der stetige Funktionalkalkül nicht aus, wir brauchen eine messbare Version.

6.15 Definition. a) Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum. Eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein signiertes Maß, falls für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Maße $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft heißen komplexe Maße. Die Menge aller \mathbb{K} -wertigen (also signierten bzw. komplexen) Maße wird mit $M(X, \mathcal{A})$ bezeichnet. Falls X ein topologischer Raum mit Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist, so schreibt man $M(X) := M(X, \mathcal{B}(X))$.

b) Zu $\mu \in M(X, \mathcal{A})$ definiert man die Variation (das Variationsmaß) $|\mu|$ durch

$$|\mu|(A) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{E \in \mathcal{Z}} |\mu(E)|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen \mathcal{Z} von A in endlich viele paarweise disjunkten Mengen aus \mathcal{A} gebildet wird. Die Totalvariation oder Variationsnorm von μ ist definiert durch $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

6.16 Bemerkung. Man kann zeigen, dass $|\mu|$ ein endliches (positives) Maß auf \mathcal{A} ist. Es gilt ferner: $M(X, \mathcal{A})$, versehen mit der Variationsnorm, ist ein Banachraum. Beweise finden sich z.B. in [13].

6.17 Satz (Rieszscher Darstellungssatz). Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist die Abbildung

$$T: M(X) \rightarrow C(X)', \quad \mu \mapsto T\mu \quad \text{mit} \quad (T\mu)(f) := \int_X f d\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen.

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen, siehe z.B. [13].

6.18 Lemma. Sei $X \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer. Sei $C(X) \subset U \subset B(X)$, wobei $B(X)$ der Raum der beschränkten messbaren Funktionen auf M sei. Es sei U abgeschlossen bzgl. punktweiser gleichmäßig beschränkter Konvergenz, d.h. falls $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) punktweise gilt, so folgt $f \in U$. Dann gilt bereits $U = B(X)$.

Beweis. (a) Sei V der Durchschnitt aller Mengen S mit $C(X) \subset S \subset B(X)$, welche abgeschlossen sind bzgl. punktweiser gleichmäßig beschränkter Konvergenz. Wir werden zeigen, dass $V = B(X)$ gilt, damit folgt auch $U = B(X)$. Offensichtlich gilt $C(X) \subset V$.

Wir zeigen, dass V ein Vektorraum ist. Sei zunächst $f \in C(X)$ fest. Dann gelten für $V_f := \{h \in B(X) : f + h \in V\}$ die Eigenschaften $C(X) \subset V_f$, und V_f ist abgeschlossen bzgl. obiger Konvergenz. Damit folgt $V_f \supset V$.

Für jedes $g \in V$ und jedes $f \in C(X)$ gilt also $g \in V_f$, d.h. $f + g \in V$. Damit ist $V_g \supset C(X)$, und da V_g ebenfalls abgeschlossen ist bzgl. obiger Konvergenz, folgt

$V_g \supset V$. Insgesamt erhalten wir $f + g \in V$ für alle $f, g \in V$. Genauso zeigt man, dass V bzgl. Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

(b) Wir zeigen, dass $V = B(X)$ gilt: Da die Stufenfunktionen im Raum $B(X)$ der beschränkten messbaren Funktionen dicht liegen, reicht es zu zeigen, dass jede Stufenfunktion in V liegt. Dazu zeigen wir, dass jede Stufenfunktion durch stetige Funktionen approximiert werden kann. Dazu reicht es, die charakteristischen Funktionen zu approximieren.

Sei also $\mathcal{B}(X)$ die σ -Algebra der Borelmengen von M und

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{B}(X) : \chi_A \in V\}.$$

Falls A offen ist, existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $f_n(t) \rightarrow \chi_A(t)$ ($n \rightarrow \infty$) für alle $t \in X$. Also sind alle offenen Mengen in \mathcal{F} enthalten.

Wir zeigen, dass folgende Aussagen gelten:

(i) Falls $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \subset B$, so ist auch $B \setminus A \in \mathcal{F}$. Denn es gilt $\chi_{B \setminus A} = \chi_B - \chi_A$, und da U ein Vektorraum ist, folgt $\chi_{B \setminus A} \in U$.

(ii) Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt. Dann ist auch $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. Denn es gilt $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$, d.h. χ_A ist punktweiser Limes von Funktionen in V und damit selbst in V .

Die Eigenschaften (i) und (ii) sagen, dass \mathcal{F} ein Dynkinsystem ist. Da die offenen Mengen ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem dieses Dynkinsystems bilden, ist \mathcal{F} eine σ -Algebra. Damit ist $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$, d.h. jede Stufenfunktion liegt in V , was zu zeigen war. \square

6.19 Satz (Messbarer Funktionalkalkül). Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\Phi: B(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$ mit

(i) $\Phi(\text{id}_{\sigma(T)}) = T$, $\Phi(\mathbf{1}) = \text{id}_H$.

(ii) Φ ist ein stetiger Homomorphismus von C^* -Algebren.

(iii) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_{\infty} < \infty$ und $f_n(t) \rightarrow f(t)$ ($t \in \sigma(T)$). Dann folgt $\langle \Phi(f_n)x, y \rangle \rightarrow \langle \Phi(f)x, y \rangle$ ($x, y \in H$).

Beweis. (i) Eindeutigkeit: Durch (i)-(ii) wird $\Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(T))$ bereits festgelegt (siehe Satz 6.13). Nach (iii) ist Φ eindeutig bestimmt für alle Funktionen, welche punktweiser Limes von stetige Funktionen sind. Nach Lemma 6.18 ist dies aber schon $B(\sigma(T))$.

(ii) Existenz: Seien $x, y \in H$. Dann definiert

$$\ell_{x,y}: C(\sigma(T)) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \langle f(T)x, y \rangle$$

eine stetige Linearform. Dabei ist die Linearität klar, die Stetigkeit folgt aus

$$|\ell_{x,y}(f)| \leq \|f(T)x\| \cdot \|y\| = \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Hier wurde der stetige Funktionalkalkül Satz 6.14 verwendet. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 6.17 existiert ein komplexes Maß $\mu_{x,y} \in M(\sigma(T))$ mit

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \quad (f \in C(\sigma(T))) \quad (6-2)$$

Ebenfalls nach Satz 6.17 gilt $\|\mu_{x,y}\| = \|\ell_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Die rechte Seite ist aber nicht nur für stetige f , sondern für beschränkte messbare $f \in B(\sigma(T))$ definiert. Für $f \in B(\sigma(T))$ betrachte also die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}.$$

Diese Abbildung ist bilinear, und wegen

$$\left| \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \right| \leq \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

auch stetig. Nach Korollar 1.20 über stetige Bilinearformen existiert also ein eindeutiger Operator $\Phi(f)$ mit $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_\infty$ und

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \quad (x, y \in H).$$

Wir müssen noch die Eigenschaften (i)–(iii) des eben definierten Funktionalkalküls nachweisen. Dabei ist (i) klar, da $\Phi(f) = f(T)$ für stetige Funktionen gilt. Auch die Stetigkeit von Φ ist nach Konstruktion klar.

Zu (iii): Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\langle \Phi(f_n)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f_n d\mu_{x,y} \rightarrow \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y \rangle.$$

Zu (ii): Sei $g \in C(\sigma(T))$ fest. Setze

$$U := \{f \in B(\sigma(T)) : \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)\}.$$

Nach Satz 6.14 gilt $C(\sigma(T)) \subset U$. Wir zeigen, dass U bzgl. punktweiser gleichmäßig beschränkter Konvergenz abgeschlossen ist. Seien $f_n \in U$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f = \lim_n f_n$ punktweise. Dann gilt nach (iii)

$$\langle \Phi(fg)x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Phi(f_n g)x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Phi(f_n)\Phi(g)x, y \rangle = \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y \rangle.$$

Somit ist $f \in U$. Nach Lemma 6.18 folgt $U = B(\sigma(T))$ und damit ist Φ multiplikativ. Genauso zeigt man, dass $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$ gilt. \square

Wir schreiben wieder $f(T)$ statt $\Phi(f)$. Das nächste Lemma zeigt, dass sogar Konvergenz in der starken Operatortopologie vorliegt.

6.20 Lemma. Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $C(\sigma(T)) \rightarrow B(H)$, $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül. Falls $(f_n)_n \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty$ und $f_n \rightarrow f$ punktweise, so gilt $f_n(T)x \rightarrow f(T)x$ für alle $x \in H$.

Beweis. In einem Hilbertraum gilt $z_n \rightarrow z$ in der Normtopologie genau dann, wenn $z_n \rightarrow z$ in der schwachen Topologie und $\|z_n\| \rightarrow \|z\|$ gilt. Dies folgt sofort aus

$$\|z_n - z\|^2 = \|z_n\|^2 - 2 \operatorname{Re}\langle z_n, z \rangle + \|z\|^2.$$

In der Situation von Satz 6.19 haben wir die schwache Konvergenz von $f_n(T)x$ gegen $f(T)x$ nach (iii). Die Konvergenz der Norm folgt aus

$$\begin{aligned} \|f_n(T)x\|^2 &= \langle f_n(T)x, f_n(T)x \rangle = \langle f_n(T)^* f_n(T)x, x \rangle = \langle (\bar{f}_n f_n)(T)x, x \rangle \\ &\rightarrow \langle (\bar{f}f)(T)x, x \rangle = \|f(T)x\|^2. \end{aligned}$$

□

c) Projektorwertige Maße

Wie bisher sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum.

6.21 Definition. Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann heißt $P : H \rightarrow H$, $x \mapsto x_1$ mit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$, die orthogonale Projektion von H auf M .

6.22 Lemma. a) Sei P eine orthogonale Projektion. Dann ist P stetig mit

$$\|P\| = \begin{cases} 1, & M \neq \{0\}, \\ 0, & M = \{0\}. \end{cases}$$

Es gilt $\ker P = M^\perp$ und $R(P) = M$.

b) Ein Operator $P \in L(H)$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $P^2 = P = P^*$.

Beweis. a) Es gilt unter Verwendung des Satzes von Pythagoras

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

d.h. $P \in L(H)$ und $\|P\| \leq 1$. Für $M = \{0\}$ ist $P = 0$. Sonst gilt für $x \in M \setminus \{0\}$ die Gleichheit $x = Px$ und damit $\|P\| = 1$.

b) (i). Sei P eine orthogonale Projektion. Die Gleichheit $P^2 = P$ ist klar nach Definition von P . Seien $x, y \in E$ mit $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, wobei $x_1, y_1 \in M$ und $x_2, y_2 \in M^\perp$. Dann gilt

$$\langle Px, y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2 \rangle}_{=0} = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, Py \rangle,$$

d.h. es gilt $P = P^*$.

(ii). Es gilt $P^2 = P = P^*$. Setze $M := R(P)$. Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \rightarrow x$ und $x_n = Py_n$, ist

$$Px_n = P^2y_n = Py_n = x_n \quad (6-3)$$

und damit

$$\|x_n - Px\| = \|P(x_n - x)\| \leq \|P\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

d.h. $Px = x$. Somit ist M abgeschlossen.

Sei \tilde{P} die orthogonale Projektion zum Unterraum M . Für $x \in H$ und $y \in M$ gilt

$$\langle \tilde{P}x, y \rangle = \langle x, \tilde{P}y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle.$$

Dabei wurde im zweiten Gleichheitszeichen $y \in M$ verwendet, für das dritte Gleichheitszeichen wurde (6-3) verwendet und für die letzte Gleichheit $P = P^*$. Setzt man $y := \tilde{P}x - Px \in M$, so folgt

$$0 = \langle \tilde{P}x - Px, y \rangle = \|(\tilde{P} - P)x\|^2.$$

Also gilt $\tilde{P} = P$, und P ist eine orthogonale Projektion. □

6.23 Lemma. Seien P_1, P_2 orthogonale Projektionen auf M_1 bzw. M_2 .

a) P_1P_2 ist genau dann orthogonale Projektion, falls $P_2P_1 = P_2P_1$ gilt. In diesem Fall ist P_1P_2 orthogonale Projektion auf den Unterraum $M_1 \cap M_2$.

b) Es sind äquivalent:

(i) $M_1 \subset M_2$.

(ii) Es gilt $\|P_1x\| \leq \|P_2x\| \quad (x \in H)$.

(iii) Es gilt $P_1 \leq P_2$, d.h. $\langle P_1x, x \rangle \leq \langle P_2x, x \rangle \quad (x \in H)$.

(iv) Es gilt $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.

Beweis. a) (i). Es gelte $P_1P_2 = P_2P_1$. Dann erhalten wir

$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$$

und

$$(P_1P_2)^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2.$$

Also ist P_1P_2 eine orthogonale Projektion.

(ii). Sei P_1P_2 orthogonale Projektion. Dann gilt für $x, y \in E$

$$\langle x, P_2P_1y \rangle = \langle x, P_2^*P_1^*y \rangle = \langle P_1P_2x, y \rangle = \langle x, P_1P_2y \rangle.$$

Daher ist $P_1P_2 = P_2P_1$.

In diesem Fall gilt $R(P_2P_1) \subset R(P_2) = M_2$ und $R(P_2P_1) = R(P_1P_2) \subset M_1$. Zu $x \in M_1 \cap M_2$ ist $x = P_1x = P_2x$, d.h. $(P_2P_1)x = x$. Insgesamt erhalten wir $R(P_2P_1) = M_1 \cap M_2$.

Der Beweis von Teil b) wird dem Leser als Übung überlassen. \square

6.24 Lemma. Sei $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L(H)$ eine Folge orthogonaler Projektionen in einem Hilbertraum H mit $P_n \leq P_m$ für $n \leq m$. Dann konvergiert P_n stark gegen eine orthogonale Projektion $P \in L(H)$.

Beweis. Für $x \in H$ ist $(\|P_nx\|)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, monoton steigend (Lemma 6.23 b)), also konvergent. Für $m \leq n$ ist

$$\begin{aligned} \|P_nx - P_mx\|^2 &= \underbrace{\langle P_nx, P_nx \rangle}_{=\|P_nx\|^2} - \underbrace{\langle P_nx, P_mx \rangle}_{=\langle P_mP_nx, x \rangle = \langle P_mx, x \rangle = \|P_mx\|^2} - \langle P_mx, P_nx \rangle + \underbrace{\langle P_mx, P_mx \rangle}_{=\|P_mx\|^2} \\ &= \|P_nx\|^2 + \|P_mx\|^2 - 2\|P_mx\|^2 \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Also existiert $Px := \lim_{n \rightarrow \infty} P_nx$ ($x \in H$).

Es gilt $\langle Px, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_nx, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, P_ny \rangle = \langle x, Py \rangle$ und

$$\langle P^2x, y \rangle = \langle Px, Py \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_nx, P_ny \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_nx, y \rangle = \langle Px, y \rangle.$$

Somit gilt $P^2 = P = P^*$ und $P_n \xrightarrow{s} P$. \square

6.25 Definition. Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum. Eine Abbildung $E: \mathcal{A} \rightarrow L(H)$ heißt ein projektorwertiges Maß (PV-Maß), falls gilt:

- (i) $E(A)$ ist orthogonale Projektion ($A \in \mathcal{A}$).

(ii) Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\left[E \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right] x = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n) x \quad (x \in H).$$

(iii) Es gilt $E(X) = \text{id}_H$.

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt eine E -Nullmenge, falls $E(A) = 0$ (dabei ist die 0 auf der rechten Seite der Nulloperator in H).

Falls X topologischer Raum ist und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ die Borel- σ -Algebra, so besitzt das PV-Maß kompakten Träger, falls eine kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(X)$ existiert mit $E(K) = \text{id}_H$.

6.26 Bemerkung. Sei E ein PV-Maß. Dann gilt

a) $E(\emptyset) = 0$.

b) $E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B) \quad (A, B \in \mathcal{A})$.

c) $E(B \setminus A) = E(B) - E(A)$ für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$.

d) Seien $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann ist $E(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} E(A_n)$.

Analog gilt für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \supset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$ die Gleichheit $E(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} E(A_n)$.

e) $E(A \cap B) = E(A)E(B) = E(B)E(A) \quad (A, B \in \mathcal{A})$.

f) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $R(E(A)) \perp R(E(B))$.

g) Sei $x \in H$. Dann ist $E_x: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$E_x(A) := \langle E(A)x, x \rangle = \|E(A)x\|^2$$

ein endliches Maß mit $\|E_x\| = E_x(X) = \|x\|^2$.

h) Seien $x, y \in H$. Dann ist $E_{x,y}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$E_{x,y}(A) := \langle E(A)x, y \rangle$$

ein komplexes Maß mit $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

6.27 Definition. Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum, E ein PV-Maß. Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, d.h. es existiert eine Darstellung der Form $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_i}$ mit $f_i \in \mathbb{C}$ und $A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt. Dann heißt

$$\int f dE := \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \in L(H)$$

das Integral von f bzgl. E .

6.28 Lemma. Sei E ein PV-Maß und seien f, g Stufenfunktionen.

- a) Die Abbildung $f \mapsto \int f dE$ ist linear.
 b) Für $x \in H$ gilt $\|(\int f dE)x\|^2 = \int |f|^2 dE_x \leq \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$.
 c) Es gilt $(\int f dE)(\int g dE) = \int f g dE$.
 d) Es gilt $(\int f dE)^* = \int \bar{f} dE$.

Beweis. a) ist klar.

b) Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int f dE \right) x \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) x \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \|E(A_i) x\|^2 \\ &= \int |f|^2 dE_x \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \|E_x\| = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

c) Mit Bemerkung 6.26 gilt

$$\begin{aligned} \left(\int f dE \right) \left(\int g dE \right) &= \left(\sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \right) \left(\sum_{j=1}^m g_j E(B_j) \right) \\ &= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i) E(B_j) \\ &= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i \cap B_j) \\ &= \int f g dE. \end{aligned}$$

d) folgt direkt aus der Definition des Integrals. □

6.29 Definition. Sei E ein PV-Maß auf (X, \mathcal{A}) mit Werten in $L(H)$. Für $f \in B(X)$ sei $(f_n)_n \subset B(X)$ eine Folge von Stufenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Definiere das Integral

$$\int f dE := \int f(\lambda) dE(\lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dE \in L(H).$$

Für $A \in \mathcal{A}$ setzt man $\int_A f dE := \int \chi_A f dE$.

6.30 Bemerkung. a) Man beachte, dass das Integral wegen Lemma 6.28 b) wohldefiniert ist.

b) Die Eigenschaften von Lemma 6.28 übertragen sich in üblicher Weise auf messbare Funktionen.

c) Falls $K \in \mathcal{A}$ ist mit $E(K) = \text{id}_H$, so ist $\int f dE = \int_K f dE$ für alle $f \in B(X)$ (denn $E(X \setminus K) = 0$).

6.31 Satz. Sei $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$ ein PV-Maß, und sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $E(K) = \text{id}_H$.

a) Durch $T := \int \lambda dE(\lambda)$ wird ein selbstadjungierter Operator $T \in L(H)$ definiert.

b) Es gilt $E(\sigma(T)) = \text{id}_H$.

c) Die Abbildung $\Psi: B(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$, $f \mapsto \int_{\sigma(T)} f dE$ ist der (nach Satz 6.19 eindeutig bestimmte) messbare Funktionalkalkül zu T .

Beweis. a) ist klar nach Definition des Integrals und nach Lemma 6.28 d) (für messbare Funktionen).

b) Wähle ein Intervall $(a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $K \subset (a, b]$, d.h. $E((a, b]) = \text{id}_H$.

(i) Wir zeigen zuerst: Zu $\mu \in \rho(T)$ existiert eine offene Umgebung U_μ von μ mit $E(U_\mu) = 0$. Dazu approximieren wir $\text{id}_{(a,b]}$ eine Treppenfunktion mit äquidistanten Stufen, $f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{(a_{k-1}, a_k]}$, wobei $a_k := a + k\delta$ ($k = 0, \dots, N$) mit $\delta = \frac{b-a}{N}$. Damit ist

$$\left\| T - \int f dE \right\| \leq \| \text{id}_{(a,b]} - f \|_\infty \leq \delta.$$

Wegen $\int f dE = \sum_{k=1}^N a_k E((a_{k-1}, a_k])$ und $\sum_{k=1}^N E((a_{k-1}, a_k]) = \text{id}_H$ folgt

$$\left\| (\mu - T) - \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k]) \right\| \leq \delta.$$

Falls δ hinreichend klein ist (d.h. N hinreichend groß), so ist der Operator $S := \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k])$ invertierbar (da $\mu - T$ invertierbar ist), und für die Norm gilt $\|S^{-1}\| \leq 1 + \|(\mu - T)^{-1}\|$.

Es gilt aber auch $\|S^{-1}\| = \max\left\{ \frac{1}{|\mu - a_k|} : E((a_{k-1}, a_k]) \neq 0 \right\}$. Damit folgt $E((a_{k-1}, a_k]) = 0$ für alle k mit $|\mu - a_k| < \frac{1}{1 + \|(\mu - T)^{-1}\|}$, d.h. es ist $E(U_\mu) = 0$ für eine offene Umgebung U_μ von μ .

(ii) Falls $K \subset \rho(T)$ kompakt ist, ist $K \subset \bigcup_{\mu \in K} U_\mu$ eine offene Überdeckung mit $E(U_\mu) = 0$ für alle μ . Wegen Kompaktheit existiert eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \sum_{i=1}^n U_{\mu_i}$, und $E(K) \leq \sum_{i=1}^n E(U_{\mu_i}) = 0$.

(iii) Schreibe $\rho(T)$ als abzählbare Vereinigung aufsteigender kompakter Mengen $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Dann folgt $E(\rho(T))x = \lim_{j \rightarrow \infty} E(K_j)x = 0$ für alle $x \in H$, d.h. $E(\rho(T)) = 0$ und damit $E(\sigma(T)) = \text{id}_H$.

c) Wir rechnen die Eigenschaften von Satz 6.19 nach. Dabei ist $\Psi(\text{id}_{\sigma(T)}) = T$ nach Definition von T , und $\Psi(\mathbf{1}_{\sigma(T)}) = \text{id}_H$ gilt nach b). Dass Ψ stetiger Homomorphismus von C^* -Algebren ist, ist klar nach Lemma 6.28 für messbare Funktionen.

Für die letzte Eigenschaft in Satz 6.19 benutzen wir das Maß $E_{x,y}$ aus Bemerkung 6.26 h). Es gilt

$$\left\langle \left(\int f dE \right) x, y \right\rangle = \int f dE_{x,y}.$$

Dies ist klar für Treppenfunktionen und folgt durch Approximation für messbare Funktionen. Nun folgt 6.19 (iii) aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

Damit erfüllt Ψ alle Eigenschaften aus Satz 6.19 und stimmt daher mit dem messbaren Funktionalkalkül überein. \square

6.32 Satz (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren).

Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes PV-Maß E mit kompaktem Träger auf \mathbb{R} mit $E(\sigma(T)) = \text{id}_H$ und

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda).$$

Die Abbildung $B(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$, $f \mapsto f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda)$ definiert den messbaren Funktionalkalkül zu T . Für $f \in B(\sigma(T))$ und $x, y \in H$ gilt

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{x,y}(\lambda).$$

Beweis. (a) Definition des PV-Maßes: Sei $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül nach Satz 6.19. Für $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ definiere

$$E(A) := \chi_A(T).$$

(i) Wegen $\chi_A = \chi_A^2 = \bar{\chi}_A$ gilt $E(A) = E(A)^2 = E(A)^*$, d.h. $E(A)$ ist eine orthogonale Projektion.

(ii) Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\sigma(T))$ paarweise disjunkt. Die Funktionen $f_n := \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}$ konvergieren punktweise gleichmäßig beschränkt gegen $f := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j} = \chi_A$ mit $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Nach Lemma 6.20 folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(A_n)x = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(T)x = \chi_A(T)x = E(A)x \quad (x \in H).$$

(iii) Nach Satz 6.19 gilt $E(\sigma(T)) = \mathbf{1}_{\sigma(T)}(T) = \text{id}_H$.

Nach (i)–(iii) ist $E: \mathcal{B}(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$ ein PV-Maß.

(b) Definiere den Operator $S := \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$ nach Satz 6.31. Sei $f \mapsto \Psi(f) := \int_{\sigma(T)} f dE$ der zugehörige messbare Funktionalkalkül nach Satz 6.31, und $f \mapsto f(T)$ der zu T gehörige Funktionalkalkül nach Satz 6.19. Zu zeigen ist $S = T$.

Wähle dazu eine Treppenfunktion f auf $\sigma(T)$ mit $\|f - \text{id}_{\sigma(T)}\|_\infty \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$\|T - S\| \leq \|T - f(T)\| + \|f(T) - \Psi(f)\| + \|\Psi(f) - S\|.$$

Nach Satz 6.19 ist

$$\|T - f(T)\| \leq \|\text{id}_{\sigma(T)} - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ebenso ist nach Lemma 6.28 b)

$$\|S - \Psi(f)\| = \left\| \int_{\sigma(T)} (\lambda - f(\lambda)) dE(\lambda) \right\| \leq \|\text{id}_{\sigma(T)} - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Schließlich ist

$$f(T) - \Psi(f) = \sum_{j=1}^n f_j \chi_{A_j}(T) - \sum_{j=1}^n f_j E(A_j) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|T - S\| \leq 2\varepsilon,$$

d.h. $T = S$. □

6.33 Lemma. *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und E das zugehörige PV-Maß. Ein Operator $S \in L(H)$ vertauscht genau dann mit T , falls S mit allen Projektionen $E(A)$, $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$, vertauscht. Dies ist äquivalent dazu, dass S mit allen Operatoren $f(T)$ mit $f \in B(\sigma(T))$ vertauscht.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass E durch die Familie komplexer Maße $E_{x,y}$ mit $x, y \in H$ bestimmt ist. Nun vertauscht S mit T genau dann, falls S mit allen T^n , $n \in \mathbb{N}$, vertauscht, d.h. genau dann, falls gilt

$$\langle ST^n x, y \rangle = \langle T^n Sx, y \rangle \quad (x, y \in H, n \geq 0). \quad (6-4)$$

Wegen $\langle SE(A)x, y \rangle = \langle E(A)x, S^*y \rangle$ ist auch $\langle SE(A)x, y \rangle$ ein komplexes Maß. Nach dem Spektralsatz ist (6-4) äquivalent zu

$$\int \lambda^n d\langle SE(\lambda)x, y \rangle = \int \lambda^n d\langle E(\lambda)Sx, y \rangle \quad (x, y \in H, n \geq 0). \quad (6-5)$$

Damit stimmen die beiden Maße $\langle SE(A)x, y \rangle$ und $\langle E(A)Sx, y \rangle$ als Funktionale überein auf den Polynomen λ^n und damit auf den stetigen Funktionen $f \in C(\sigma(T))$ (Satz von Weierstraß). Nach dem Darstellungssatz von Riesz sind die Maße gleich. Damit ist (6-5) äquivalent zu

$$\langle SE(A)x, y \rangle = \langle E(A)Sx, y \rangle \quad (x, y \in H, A \in \mathcal{B}(\sigma(T))),$$

was wiederum äquivalent zu $SE(A) = E(A)S$ für alle $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ ist.

Wir haben bereits gesehen, dass aus $ST = TS$ folgt $Sf(T) = f(T)S$ für alle stetigen $f \in C(\sigma(T))$. Wie üblich folgt durch Approximation, dass S mit allen $f(T)$, $f \in B(\sigma(T))$, vertauscht. \square

6.34 Beispiele. a) Sei $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten μ_1, \dots, μ_m . Sei $E(\{\mu_j\})$ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\ker(\mu_j - T)$. Dann gilt

$$T = \sum_{j=1}^m \mu_j E(\{\mu_j\}) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda),$$

wobei das PV-Maß zu T gegeben ist durch

$$E(A) = \sum_{j=1}^m E(A \cap \{\mu_j\}) = \sum_{\{j: \mu_j \in A\}} E(\{\mu_j\}) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

b) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und kompakt. Dann gilt

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j E(\{\mu_j\}),$$

wobei $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T sind und $E(\{\mu_j\})$ die Orthogonalprojektion auf den zugehörigen Eigenraum. Das Spektralmaß ist jetzt eine abzählbare Summe von Punktmaßen:

$$E(A) = \sum_{\{j: \mu_j \in A\}} E(\{\mu_j\}) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

6.35 Beispiel (Multiplikationsoperator). Sei $H = L_2([0, 1])$ und $T \in L(H)$ gegeben durch $(Tx)(t) := t \cdot x(t)$. Dann ist T selbstadjungiert mit $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0, 1]$.

Für $x, y \in L_2([0, 1])$ gilt

$$\langle Tx, y \rangle = \int_0^1 t f(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^1 \lambda dE_{x,y}(\lambda)$$

mit dem Maß $E_{x,y}(\lambda) = x(\lambda)\overline{y(\lambda)}d\lambda$. Das Maß $E_{x,y}$ besitzt also eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes. Für das Maß erhalten wir somit

$$E_{x,y}(A) = \int_{[0,1] \cap A} x(\lambda)\overline{y(\lambda)}d\lambda = \langle \chi_{[0,1] \cap A} \cdot x, y \rangle \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

d.h. $E(A)x = \chi_{[0,1] \cap A} \cdot x$. Die Projektion $E(A)$ ist damit gegeben als Multiplikationsoperator mit $\chi_{[0,1] \cap A}$.

6.36 Lemma (Transformationssatz). *Sei $S \in L(H)$ selbstadjungiert, und seien $g \in B(\sigma(S); \mathbb{R})$ und $f \in B(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$(f \circ g)(S) = f(g(S)).$$

Beweis. Beachte, dass $f \circ g \in B(\sigma(\mathbb{R}); \mathbb{R})$ und (da g reellwertig ist) $g(S) \in L(H)$ selbstadjungiert ist. Sei E das zu $g(S)$ gehörige PV-Maß und F das zu S gehörige PV-Maß. Wir zeigen die Behauptung für charakteristische Funktionen $f = \chi_A$, die Verallgemeinerung auf Treppenfunktionen und messbare beschränkte Funktionen folgt wie üblich.

Zu zeigen ist $(\chi_A \circ g)(S) = \chi_A(g(S))$. Wegen $\chi_A \circ g = \chi_{g^{-1}(A)}$ und $\chi_A(g(S)) = E(A)$ ist zu zeigen:

$$F(g^{-1}(A)) = E(A) \quad (A \in \mathcal{B}(\sigma(\mathbb{R}))).$$

Wieder betrachten wir die zugehörigen komplexen Maße $\mu_{x,y} := \langle E(\cdot)x, y \rangle$ und $\tilde{\nu}_{x,y} := \langle F(g^{-1}(\cdot))x, y \rangle$. Das Maß $\tilde{\nu}_{x,y}$ ist das Bildmaß von $\nu_{x,y} := \langle F(\cdot)x, y \rangle$, d.h. es gilt $\tilde{\nu}_{x,y} = \nu_{x,y} \circ g^{-1}$. Nach dem Transformationssatz gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int \lambda^n d\tilde{\nu}_{x,y}(\lambda) &= \int \lambda^n d(\nu_{x,y} \circ g^{-1})(\lambda) = \int g(\lambda)^n d\nu_{x,y}(\lambda) \\ &= \langle g(S)^n x, y \rangle = \int \lambda^n d\mu_{x,y}(\lambda). \end{aligned}$$

Hier wurden die Definition von $\nu_{x,y}$ und die Tatsache verwendet, dass F das PV-Maß zu S ist. Dies zeigt die Gleichheit der Maße als Funktionale auf dem Raum der Polynome und damit auf den stetigen Funktionen, also die Gleichheit der Maße. \square

6.37 Satz (Spektrum und Spektralmaß). *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und E das zugehörige PV-Maß.*

a) *Für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda_0 \in \rho(T)$ genau dann, falls eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von λ_0 existiert mit $E(U) = 0$.*

b) *Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$. Für alle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $E(\{\lambda_0\}) = \ker(T - \lambda_0)$.*

c) Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) = 0$ und $E((\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)) \neq 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Beweis. a) Wir wissen bereits, dass $E(\rho(T)) = 0$. Sei andererseits $U \subset \mathbb{R}$ eine (o.E. offene) Umgebung von λ_0 mit $E(U) = 0$. Definiere $f, g \in B(\sigma(T))$ durch $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \cdot \chi_{\sigma(T) \setminus U}$ und $g(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)$. Dann gilt

$$f(T)(T - \lambda_0) = f(T)g(T) = (f \cdot g)(T) = \chi_{\sigma(T) \setminus U}(T) = E(\sigma(T) \setminus U) = \text{id}_H.$$

Wegen $f(T)g(T) = g(T)f(T)$ folgt $g(T)f(T) = \text{id}_H$, d.h. $f(T) = g(T)^{-1} = (T - \lambda_0)^{-1}$. Somit ist $\lambda_0 \in \rho(T)$.

b) Zu zeigen ist nur die letzte Gleichheit in b). Sei $x \in R(E(\{\lambda_0\}))$, d.h. $x = E(\{\lambda_0\})x$. Dann gilt

$$\langle (T - \lambda_0)x, y \rangle = \langle (T - \lambda_0)E(\{\lambda_0\})x, y \rangle = \int (\lambda - \lambda_0) \cdot \chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda) d\langle E(\lambda)x, y \rangle = 0.$$

(Beachte, dass $(\lambda - \lambda_0)\chi_{\lambda_0}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.) Damit ist $(T - \lambda_0)x = 0$, d.h. $x \in \ker(T - \lambda_0)$.

Falls andererseits $x \in \ker(T - \lambda_0)$, so folgt nach Satz 6.14 c) $f(T)x = f(\lambda_0)(x)$ für alle $f \in C(\sigma(T))$ und nach Lemma 6.20 für alle $f \in B(\sigma(T))$. Setzt man $f = \chi_{\{\lambda_0\}}$, so folgt $E(\{\lambda_0\})x = \chi_{\{\lambda_0\}}(T)x = \chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda_0)x = x$, d.h. $x \in R(E(\{\lambda_0\}))$.

c) folgt aus a) und b) (beachte $\sigma_r(T) = \emptyset$). □

6.38 Lemma. a) Seien $A, B \in L(H)$ mit $A \geq 0$, $B \geq 0$ und $AB = BA$. Dann ist $AB \geq 0$.

b) Sei $A \in L(H)$ mit $A \geq 0$. Dann existiert genau ein $B \in L(H)$ mit $B \geq 0$ und $B^2 = A$. Der Operator B heißt die Wurzel von A . Insbesondere existiert zu jedem Operator $A \in L(H)$ der Absolutbetrag $|A| := \sqrt{A^*A}$.

Beweis. a) Es gilt

$$AB = A\sqrt{B^2} = \sqrt{BA}\sqrt{B} \geq 0$$

wegen

$$\langle \sqrt{BA}\sqrt{B}x, x \rangle = \langle A\sqrt{B}x, \sqrt{B}x \rangle \geq 0 \quad (x \in H).$$

Hier wurde verwendet, dass A und \sqrt{B} vertauschen (Lemma 6.33).

b) Der Operator $B := \sqrt{A}$ erfüllt $B \geq 0$ und $B^2 = A$ nach dem Spektralsatz. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Sei also $\tilde{B} \geq 0$ mit $\tilde{B}^2 = A$. Wähle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ und $b > \|\tilde{B}\|^2$.

Zur Funktion $g(t) := \sqrt{t}$ existiert nach dem Satz von Weierstraß eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen mit $\|p_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) im Intervall $[0, b] \supset [m, M]$. Damit gilt

$$\|p_n(A) - g(A)\| = \|p_n(A) - B\| \rightarrow 0 \quad \text{in } L(H). \quad (6-6)$$

Setze $\tilde{p}_n(t) := p_n(t^2)$ und $\tilde{g}(t) := g(t^2) (= t)$. Dann ist

$$\|\tilde{p}_n - \tilde{g}\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{im Intervall } [0, \sqrt{b}] \supset [0, \|\tilde{B}\|].$$

Nach dem Funktionalkalkül gilt

$$\|\tilde{p}_n(\tilde{B}) - \tilde{g}(\tilde{B})\| = \|\tilde{p}_n(\tilde{B}) - \tilde{B}\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (6-7)$$

Aber es ist $\tilde{p}_n(\tilde{B}) = p_n(\tilde{B}^2) = p_n(A)$. Somit folgt aus (6-6) und (6-7) die Gleichheit $\tilde{B} = g(A) = B$. \square

6.39 Bemerkung. Aus dem Spektralsatz folgen eine ganze Reihe von Aussagen über Spektrum bzw. Norm von Operatoren. So gilt zum Beispiel:

a) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dann gilt

$$\|(T - \lambda_0)^{-1}\| = [\text{dist}(\lambda_0, \sigma(T))]^{-1}.$$

Denn die rechte Seite ist $\|f\|_\infty$ für die Funktion $f \in C(\sigma(T))$ mit $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda - \lambda_0}$. Vergleiche dazu Satz 5.6 bzw. Korollar 4.7.

b) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $f \in C(\sigma(T))$. Dann gilt $\|f(T)\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|f\|_\infty$. Denn das Maximum ist der Spektralradius von T und $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$ nach dem stetigen Funktionalkalkül. (Vergleiche Satz 6.8.) Insbesondere folgt aus der Darstellung $T = \int_K \lambda dE(\lambda)$ bereits $\|T\| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \in K\}$.

6.40 Bemerkung. Der Spektralsatz wird häufig auch mit Hilfe von Spektralscharen definiert. Dabei heißt eine Familie $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subset L(H)$ eine Spektralschar, falls gilt:

- (i) F_λ ist orthogonaler Projektor für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (ii) $F_\mu F_\lambda = F_\lambda F_\mu = F_\mu$ für alle $\mu \leq \lambda$.
- (iii) $F_\mu x \rightarrow F_\lambda x$ für $\mu \searrow \lambda$ ($x \in H$) (Rechtsstetigkeit).
- (iv) $F_\lambda x \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow -\infty$ ($x \in H$).
- (v) $F_\lambda x \rightarrow x$ für $\lambda \rightarrow +\infty$ ($x \in H$).

Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und E das zugehörige PV-Maß. Dann wird durch

$$F_\lambda := E((-\infty, \lambda]) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

eine Spektralschar definiert. Definiert man das Integral über Spektralscharen geeignet (etwa im Sinne eines Riemann-Stieltjes-Integrals), so gilt

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_{\lambda}.$$

Die Spektralscharen entsprechen den Verteilungsfunktionen in der Wahrscheinlichkeitstheorie, die Darstellung von T durch Spektralscharen ist äquivalent zur Darstellung durch PV-Maße.

7. Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

Der in diesem Teil der Vorlesung allgemeinste Spektralsatz behandelt unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren. Um den Beweis kurz zu halten (und damit überhaupt noch im Rahmen dieser Vorlesung zu bleiben), wird auf einen systematischen Aufbau des entsprechenden Integralbegriffs verzichtet und stattdessen die Cayley-Transformierte verwendet. Diese Standardmethode erlaubt es, den Beweis des Spektralsatzes auf die Spektraldarstellung unitärer Operatoren zurückzuführen.

a) Spektralzerlegung unitärer Operatoren

Wie bisher sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum. Zunächst wiederholen wir einige Aussagen über unitäre Operatoren, die wir bereits kennengelernt haben. Ein Operator $U \in L(H)$ heißt unitär, falls $UU^* = U^*U = \text{id}_H$ gilt. Ein (nicht notwendig auf ganz H definierter) Operator U in H heißt isometrisch, falls $\|Ux\| = \|x\|$ ($x \in D(U)$) gilt.

7.1 Lemma. Sei $U \in L(H)$. Dann sind äquivalent:

- (i) U ist unitär.
- (ii) U ist surjektiv und es gilt $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ ($x, y \in H$).
- (iii) U ist surjektiv und isometrisch.

Beweis. Sei $U \in L(H)$ unitär. Dann gilt $UU^* = \text{id}_H$, d.h. U ist surjektiv, und

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, y \rangle \quad (x, y \in H).$$

Aus dieser Gleichheit folgt sofort $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in H$.

Sei andererseits U surjektiv und isometrisch. Dann folgt aus der Polarisationsformel (Satz 1.3) $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in H$ und damit $U^*U = \text{id}_H$. Da U bijektiv ist, folgt $U^* = U^*UU^{-1} = U^{-1}$, d.h. U ist unitär. \square

Wir wissen schon, dass für einen selbstadjungierten Operator $T = T^* \in L(H)$ der Operator e^{iT} unitär ist. Wir werden nun zeigen, dass alle unitären Operatoren diese Form haben.

7.2 Satz. Sei $U \in L(H)$ unitär. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $T \in L(H)$ mit $\|T\| \leq \pi$ und $U = e^{iT}$.

Beweisskizze. Setze $V := \frac{1}{2}(U + U^*) = \text{Re } U$ und $W := \frac{1}{2i}(U - U^*) = \text{Im } U$. Dann sind V und W selbstadjungiert, vertauschen, es gilt $V^2 + W^2 = 1$, $\|V\| \leq 1$, $\|W\| \leq 1$ und $U = V + iW$.

Die Idee besteht nun darin, einen Operator T zu suchen, für welchen gilt

$$V + iW = U = e^{iT} = \cos T + i \sin T.$$

D.h. wir suchen T mit $\cos T = V$ und $\sin T = W$. Grundsätzlich könnte man $T := \arccos V$ setzen. Aber die Gleichung $\sin T = W$ gilt dann nicht immer, es ist eine Modifikation nötig. Diese besteht in den folgenden Schritten:

(i) Setze $\widetilde{W} := \sin(\arccos V)$. Dann gilt $V^2 + \widetilde{W}^2 = 1$, W ist selbstadjungiert und es gilt $W\widetilde{W} = \widetilde{W}W$.

(ii) Nach (i) gilt $W^2 = \widetilde{W}^2$, und beide Operatoren sind selbstadjungiert und vertauschen. Man rechnet direkt nach, dass

$$W = (2P - 1)\widetilde{W}$$

gilt, wobei $P := \chi_{\{0\}}(W - \widetilde{W})$ die orthogonale Projektion auf $\ker(W - \widetilde{W})$ ist. Beachte, dass $(2P - 1)^2 = 1$ gilt.

(iii) Setze nun $T := (2P - 1) \arccos V$. Da die \cos -Reihe nur quadratische Terme enthält und $(2P - 1)^2 = 1$ gilt, erhalten wir $\cos T = V$. Die \sin -Reihe enthält nur ungerade Potenzen, in jedem Summanden bleibt also ein Faktor $2P - 1$ stehen (hier braucht man, dass $2P - 1$ mit T vertauscht). Damit haben wir

$$\sin T = \sin[(2P - 1) \arccos V] = (2P - 1) \sin(\arccos V) = (2P - 1)\widetilde{W} = W.$$

Damit ist T der gesuchte Operator mit $U = e^{iT}$. Die Bedingung $\|T\| \leq \pi$ folgt aus dem Spektralsatz, da $\|\arccos\|_\infty = \pi$. \square

7.3 Satz (Spektralsatz für unitäre Operatoren). Sei $U \in L(H)$ unitär. Dann existiert ein PV-Maß E auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $E([-\pi, \pi]) = \text{id}_H$ und

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda).$$

Für jedes Polynom p gilt

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\lambda}) dE(\lambda).$$

Durch $f(U) := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda}) dE(\lambda)$ wird der Operator $f(U) \in L(H)$ für jedes $f \in B([-\pi, \pi])$ definiert.

Beweis. Sei $U = e^{iT}$ nach Satz 7.2 und E die Spektralschar von T . Dann folgt die Behauptung aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren. Beachte $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|] \subset [-\pi, \pi]$. Für die letzte Aussage verwende den Transformationsatz 6.36. \square

b) Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

7.4 Definition. Sei T ein linearer Operator in H mit $\overline{D(T)} = H$.

- a) T heißt symmetrisch, wenn $T \subset T^*$ gilt, d.h. wenn $D(T) \subset D(T^*)$ und $T^*|_{D(T)} = T$.
- b) T heißt selbstadjungiert, falls $T = T^*$ gilt.
- c) T heißt wesentlich selbstadjungiert, falls der Abschluss \overline{T} existiert und \overline{T} selbstadjungiert ist.

7.5 Bemerkung. a) Es gilt $T \subset T^*$ genau dann, wenn $G(T) \subset G(T^*)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad (x, y \in D(T)).$$

- b) Falls T symmetrisch ist, so gilt

$$\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad (x \in D(T)).$$

Dies ist (da H komplexer Hilbertraum ist) sogar äquivalent zur Symmetrie von T . Dies sieht man genauso wie im Beweis von Lemma 5.5

- c) Falls T symmetrisch ist, so ist T abschließbar, und es gilt $\overline{T} \subset T^*$. Denn der Graph $G(T^*)$ ist abgeschlossen.

7.6 Definition. Sei T ein linearer Operator in H . Dann heißt

$$r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists C_\lambda > 0 \forall x \in D(T) : \|(T - \lambda)x\| \geq C_\lambda \|x\|\}$$

die Menge der Punkte regulären Typs von T .

7.7 Bemerkung. Falls T symmetrisch ist, so gilt $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset r(T)$. Dann für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\|(T - \lambda)x\| \cdot \|x\| \geq |\langle (T - \lambda)x, x \rangle| \geq |\operatorname{Im} \langle (T - \lambda)x, x \rangle| = |\operatorname{Im} \lambda| \cdot \|x\|^2.$$

Hier wurde verwendet, dass $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.

7.8 Definition. Sei T ein symmetrischer Operator in H . Dann heißen

$$n_+(T) := \dim R(T - i)^\perp$$

und

$$n_-(T) := \dim R(T + i)^\perp$$

die Defektindizes von T .

Es gilt $n_+ = \dim R(T - \lambda)^\perp$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im } \lambda > 0$. Eine analoge Aussage gilt für n_- . Der Beweis dieser Tatsache wird hier weggelassen.

7.9 Definition. Sei T ein symmetrischer linearer Operator in H . Dann heißt der Operator

$$U_T : R(T + i) \rightarrow H, \quad U_T = (T - i)(T + i)^{-1}$$

die Cayley-Transformierte von T .

In obiger Definition ist zu beachten, dass $i \in r(T)$ und damit $T + i$ injektiv ist. Daher ist die Inverse $(T + i)^{-1}$ und somit U_T wohldefiniert.

7.10 Lemma. Sei T ein symmetrischer dicht definierter Operator in H .

- a) T ist genau dann abgeschlossen, wenn $R(T + i)$ und $R(T - i)$ beide abgeschlossen sind.
- b) Die Cayley-Transformierte U_T ist isometrisch, und es gilt $1 \notin \sigma_p(U_T)$.
- c) U_T ist genau dann ein unitärer Operator in $L(H)$, falls T selbstadjungiert ist.

Beweis. b) Zu zeigen ist $\|U_T y\| = \|y\|$ ($y \in D(U_T)$), d.h.

$$\|(T + i)x\| = \|(T - i)x\| \quad (x \in D(T)).$$

Dies folgt leicht durch Ausmultiplizieren von $\langle (T \pm i)x, (T \pm i)x \rangle$ wegen $\langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle$ ($x \in D(T)$).

Angenommen es gelte $1 \in \sigma_p(U_T)$. Dann existiert ein $x \in D(T)$ mit

$$y = (T + i)x = U_T y = (T - i)x.$$

Also ist $2ix = 0$ und somit $x = 0$ und $y = 0$, Widerspruch.

a) (i) Sei T abgeschlossen und $(y_n)_n \subset R(T + i)$ eine Folge mit $y_n \rightarrow y$. Wegen $\|U_T y_n\| = \|y_n\|$ ist auch $(U_T y_n)_n$ konvergent, etwa $U_T y_n \rightarrow \tilde{y}$. Sei $x_n := (T + i)^{-1} y_n \in D(T)$. Dann gilt $y_n = (T + i)x_n$ und $U_T y_n = (T - i)x_n$. Somit

$$x_n = \frac{1}{2i}(y_n - U_T y_n), \quad Tx_n = \frac{1}{2}(y_n + U_T y_n). \quad (7-1)$$

Also sind beide Folgen $(x_n)_n$ und $(Tx_n)_n$ konvergent. Sei $x := \lim x_n$ und $w := \lim Tx_n$. Da T abgeschlossen ist, gilt $x \in D(T)$ und $w = Tx$.

Wegen $x = \frac{1}{2i}(y - \tilde{y})$ und $Tx = \frac{1}{2}(y + \tilde{y})$ folgt

$$y = Tx + ix \in D(U_T), \quad \tilde{y} = Tx - ix \in R(T + i) = R(U_T).$$

Somit ist $D(U_T)$ abgeschlossen. Da $U_T : D(U_T) \rightarrow R(U_T)$ eine Isometrie ist, ist U_T offen und damit $R(U_T)$ abgeschlossen.

(ii) Falls $R(T \pm i)$ abgeschlossen ist, folgt mit den gleichen Überlegungen unter Verwendung von (7-1), dass der Operator T abgeschlossen ist.

c) (i) Sei T selbstadjungiert. Dann ist $R(T \pm i)^\perp = \ker(T \mp i) = \{0\}$. Nach Teil b) ist $R(T \pm i)$ abgeschlossen. Damit ist $D(U_T) = H$ und $R(U_T) = H$. Nach Lemma 7.1 ist U unitär.

(ii) Sei nun $U_T \in L(H)$ unitär. Dann folgt $R(T + i) = D(U_T) = H$ und $R(T - i) = R(U_T) = H$. Daraus folgt wie oben $\ker(T \pm i) = \{0\}$.

Sei $v \in D(T^*)$. Dann ist $\langle Tx, v \rangle = \langle x, T^*v \rangle$ ($x \in D(T)$). Es gilt

$$x = \frac{1}{2i}(y - U_T y), \quad Tx = \frac{1}{2}(y + U_T y) \quad (7-2)$$

mit $y = (T + i)x$ (vergleiche auch (7-1)). Also gilt

$$\left\langle \frac{1}{2}(y + U_T y), v \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2i}(y - U_T y), T^*v \right\rangle \quad (y \in H).$$

Bringt man den Operator U_T durch Adjunktion auf eine Seite, erhält man

$$\langle y, -iv - iU_T^*v \rangle = \langle y, T^*v - U_T^*T^*v \rangle \quad (y \in H).$$

Also gilt

$$iv + iU_T^*v = -T^*v + U_T^*T^*v$$

und damit

$$T^*v - iv = U_T(T^*v + iv).$$

Setze $z := T^*v + iv$. Dann gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} T^*v + iv &= z, \\ T^*v - iv &= U_T z. \end{aligned} \quad (7-3)$$

Wir erhalten

$$v = \frac{1}{2i}(1 - U_T)z \in R(1 - U_T) = D(T)$$

und $Tv = \frac{1}{2}(1 + U_T)z = T^*v$.

Wir haben gezeigt, dass $T \supset T^*$ gilt. Da T symmetrisch ist, folgt $T = T^*$, d.h. T ist selbstadjungiert. \square

7.11 Bemerkung. Im letzten Beweis haben wir gesehen, dass $D(T) = R(1 - U_T)$ und $T = i(1 + U_T)(1 - U_T)^{-1}$ gilt. Damit ist T durch U_T eindeutig festgelegt.

7.12 Satz (Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren).

Sei T ein selbstadjungierter (nicht notwendig beschränkter) Operator in einem \mathbb{C} -Hilbertraum H . Dann existiert ein PV-Maß $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$ mit

$$\langle Tx, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\lambda)x, x \rangle \quad (x \in D(T)).$$

Beweis. Sei U_T die Cayley-Transformierte von T . Dann ist U_T unitär nach Lemma 7.10, und es gilt nach Bemerkung 7.11

$$T = i(1 + U_T)(1 - U_T)^{-1}.$$

Sei $\tilde{E}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$ die zu $-U_T$ gehörige Spektralschar, d.h. es gilt

$$-U_T = \int_{[-\pi, \pi]} e^{i\lambda} d\tilde{E}(\lambda).$$

Es gilt $\tilde{E}(\{\pm\pi\}) = 0$. Denn sonst ist nach Satz 6.37 die Zahl $\pm\pi$ ein Eigenwert des Operators $B := \int_{[-\pi, \pi]} \lambda d\tilde{E}(\lambda)$. Aus $Bx = \pm\pi x$ folgt nach Satz 6.14 auch $f(B)x = f(\pm\pi)x$ für alle stetigen Funktionen f . Damit ist

$$-1 = e^{\pm i\pi} \in \sigma_p(e^{iB}) = \sigma_p(-U_T),$$

d.h. es gilt $1 \in \sigma_p(U_T)$ im Widerspruch zu Lemma 7.10.

Somit gilt

$$-U_T = \int_{(-\pi, \pi)} e^{i\lambda} d\tilde{E}(\lambda).$$

Sei $x \in D(T) = R(1 - U_T)$ (siehe Bemerkung 7.11) und $y := (1 - U_T)^{-1}x$. Dann ist $Tx = i(1 + U_T)y$ und damit

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= \langle i(1 + U_T)y, (1 - U_T)y \rangle = i\langle U_T y, y \rangle - i\langle y, U_T y \rangle \\ &= i\langle (U_T - U_T^{-1})y, y \rangle = -i \int_{(-\pi, \pi)} (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}) d\langle \tilde{E}(\lambda)y, y \rangle. \end{aligned}$$

Betrachte nun die Transformation

$$\varphi: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu \mapsto \tan \frac{\mu}{2},$$

und definiere dazu das Bildmaß $E := \tilde{E} \circ \varphi^{-1}$. Nach dem Transformationsatz gilt für $x \in D(T)$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\lambda)x, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \tilde{E} \circ \varphi^{-1}(\lambda)x, x \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(-\pi, \pi)} \varphi(\lambda) d\langle \tilde{E}(\lambda)x, x \rangle \\
&= \int_{(-\pi, \pi)} \varphi(\lambda) d\langle \tilde{E}(\lambda)(1 - U_T^*)(1 - U_T)y, y \rangle \\
&= \left\langle \left[\int_{(-\pi, \pi)} \varphi(\lambda) d\tilde{E}(\lambda) \right] (1 - U_T^*)(1 - U_T)y, y \right\rangle \\
&= \langle \varphi(B)(1 - U_T^*)(1 - U_T)y, y \rangle \\
&= \langle \varphi(B)(1 + e^{-iB})(1 + e^{iB})y, y \rangle \\
&= \int_{(-\pi, \pi)} \tan \frac{\lambda}{2} \cdot (2 + e^{-i\lambda} + e^{i\lambda}) d\langle \tilde{E}(\lambda)y, y \rangle \\
&= -i \int_{(-\pi, \pi)} (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}) d\langle \tilde{E}(\lambda)y, y \rangle \\
&= \langle Tx, x \rangle.
\end{aligned}$$

□

8. Ein kurzer Ausflug in die Quantenmechanik

Dieser kurze Abschnitt ist der letzte, der sich mit dem Spektralsatz im weiteren Sinne beschäftigt. Mit den bisher behandelten Begriffen und Methoden haben wir schon alles zur Verfügung, um die Quantentheorie zu formulieren. Die Operatorthorie ist das wichtigste Hilfsmittel, um quantenmechanische Aussagen zu beweisen. Hier findet auch das Spektrum eines Operators eine Interpretation. In diesem Abschnitt sollen vor allem Begriffe geklärt werden.

8.1 Definition. Ein quantenmechanisches System ist beschrieben durch folgende Größen:

(i) Der Zustandsraum ist ein \mathbb{C} -Hilbertraum H . Die Menge

$$H_1 := \{\psi \in H : \|\psi\| = 1\}$$

heißt die Menge der reinen Zustände.

(ii) Eine Observable ist ein selbstadjungierter Operator in H (oder äquivalent dazu, ein PV-Maß E). Beispiele sind der Ort X , der Impuls P , der Drehimpuls J , die Energie H und der Spin σ .

(iii) Sei S eine Observable mit Spektralmaß E . Falls das System im Zustand $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ist, dann heißt $\langle \psi, S\psi \rangle \in \mathbb{R}$ der Erwartungswert der Observable S im Zustand ψ .

Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\langle \psi, E(A)\psi \rangle = \|E(A)\psi\|^2 = E_\psi(A) \in [0, 1]$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung von S der gemessene Wert in der Menge A liegt.

8.2 Bemerkung. Nach den obigen Definitionen und unter Verwendung des Spektralsatzes gilt

$$\langle \psi, S\psi \rangle = \left\langle \psi, \int_{\sigma(S)} \text{id}_{\sigma(S)} dE\psi \right\rangle = \int_{\sigma(S)} \text{id}_{\sigma(S)} dE_\psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\psi(\lambda).$$

Damit stimmt der Begriff des Erwartungswertes aus Definition 8.1 (iii) mit dem üblichen Begriff des Erwartungswertes aus der Stochastik überein (wobei hier das Maß durch E_ψ gegeben ist).

8.3 Beispiel (Ortsobservable). Hier ist $H = L_2(\mathbb{R})$. Die Ortsobservable X ist definiert durch

$$(X\psi)(x) := x\psi(x),$$

d.h. X ist der Multiplikationsoperator mit der Funktion $\text{id}_{\mathbb{R}}$. Der natürliche Definitionsbereich dieses Multiplikationsoperators ist gegeben durch

$$D(X) = \left\{ \psi \in L_2(\mathbb{R}) : \int x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Der Operator X ist selbstadjungiert. Es gilt für das zugehörige Spektralmaß

$$(E(A)\psi)(x) = \chi_A(x) \cdot \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Somit ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Gebiet $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\langle \psi, E(A)\psi \rangle = E_\psi(A) = \int_A |\psi(x)|^2 dx.$$

Damit ist $|\psi(\cdot)|^2$ die Aufenthaltsdichte des Teilchens, d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung hat $|\psi(\cdot)|^2$ als Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes.

Man spricht von der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion in der Ortsdarstellung nach Schrödinger.

8.4 Beispiel (Impulsobservable). Wieder ist $H = L_2(\mathbb{R})$. Definiere die Abbildung

$$U: \mathbb{R} \rightarrow L(H), \quad (U(a)\psi)(x) = \psi(x - a).$$

Dann ist U eine starkstetige unitäre Gruppe (die starke Stetigkeit müsste man noch nachrechnen). Nach dem Satz von Stone existiert ein eindeutiger Operator P mit $U(a) = e^{-iaP/\hbar}$. Dabei ist \hbar eine Konstante, das Plancksche Wirkungsquantum. Die Konstanten \hbar und das Minus-Zeichen sind (aus mathematischer Sicht) nur Konvention.

Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\frac{1}{a}(U(a) - \text{id}_H)\psi(x) = \frac{1}{a}(\psi(x - a) - \psi(x)) \rightarrow -\psi'(x) \quad (a \rightarrow 0)$$

punktweise und – mit majorisierter Konvergenz – auch in $L_2(\mathbb{R})$. Damit ist P gegeben durch

$$D(P) := \left\{ \psi \in L_2(\mathbb{R}) : \psi' := \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\psi(\cdot - a) - \psi(\cdot)}{a} \text{ existiert in } L_2(\mathbb{R}) \right\},$$

$$P\psi := \frac{\hbar}{i} \psi' \quad (\psi \in D(P)).$$

Wenn man den Begriff der Ableitung allgemeiner gefasst hat, so kann man sehen, dass

$$D(P) = \{ \psi \in L_2(\mathbb{R}) : \psi' \in L_2(\mathbb{R}) \} =: H^1(\mathbb{R}).$$

Dabei ist $H^1(\mathbb{R})$ der sogenannte Sobolevraum der Ordnung 1.

8.5 Lemma (Kanonische Vertauschungsrelationen nach Heisenberg). Für die Ortsvariable X und die Impulsvariable P gilt

$$XP - PX \subset \hbar i \operatorname{id}_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Beweis. Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$[(XP - PX)\psi](x) = x \frac{\hbar}{i} \psi'(x) - \frac{\hbar}{i} \psi(x) - \frac{\hbar}{i} x \psi'(x) = \hbar i \psi(x).$$

Damit gilt

$$XP - PX|_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \hbar i \operatorname{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

Sei $A := \frac{1}{\hbar i}(XP - PX)$. Dann ist A symmetrisch, d.h. es gilt $A \subset A^*$, und $\operatorname{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = A|_{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \subset A \subset A^*$. Damit erhalten wir

$$A \subset \bar{A} = A^{**} \subset \left(\operatorname{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}\right)^* = \left(\overline{\operatorname{id}_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}}\right)^* = (\operatorname{id}_{L_2(\mathbb{R})})^* = \operatorname{id}_{L_2(\mathbb{R})}.$$

□

Im folgenden vereinfachen wir die Darstellung, indem wir $\hbar = 1$ wählen.

8.6 Lemma (Kanonische Vertauschungsrelationen nach Weyl). Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$e^{iaP} e^{ibX} = e^{iba} e^{ibX} e^{iaP}.$$

Beweis. Der Operator $e^{ibX} \in L(H)$ ist der Multiplikationsoperator mit der Funktion $t \mapsto e^{ibt}$. Außerdem gilt $(e^{iaP}\psi)(x) = \psi(x+a)$. Somit gilt

$$(e^{iaP} e^{ibX} \psi)(x) = (e^{ibX} \psi)(x+a) = e^{ib(x+a)} \psi(x+a)$$

und

$$(e^{ibX} e^{iaP} \psi)(x) = e^{ibx} \psi(x+a).$$

□

8.7 Definition. Sei S eine Observable und $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ein reiner Zustand. Der Erwartungswert von S im Zustand ψ wird geschrieben als

$$\langle S \rangle_\psi := \langle \psi, S\psi \rangle \left(= \int s dE_\psi(s) \right).$$

Für $\psi \in D(S^2) \subset D(S)$ ist die Varianz von S im Zustand ψ definiert als

$$\operatorname{var}_\psi S := \left\langle \psi, (S - \langle S \rangle_\psi \operatorname{id}_H)^2 \psi \right\rangle \left(= \int (s - \langle S \rangle_\psi)^2 dE_\psi(s) \right).$$

Die Größe $(\Delta S)_\psi := \sqrt{\operatorname{var}_\psi S}$ heißt die Standardabweichung oder Unschärfe von S im Zustand ψ .

8.8 Lemma. In der Situation von Definition 8.7 gilt $(\Delta S)_\psi = 0$ genau dann, wenn ψ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_0 := \langle S \rangle_\psi$ ist.

Beweis. Die folgenden Bedingungen sind alle äquivalent:

$$\begin{aligned} (\Delta S)_\psi &= 0, \\ \int (s - \lambda_0)^2 dE_\psi(s) &= 0, \\ E_\psi(\{\lambda_0\}) &= 1, \\ \psi &\in R(E\{\lambda_0\}), \\ \psi &\in \ker(S - \lambda_0). \end{aligned}$$

□

8.9 Satz (Heisenbergsche Unschärferelation). Seien A, B Observable und sei $\psi \in D(A^2) \cap D(AB) \cap D(BA) \cap D(B^2)$. Dann gilt

$$(\Delta A)_\psi (\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2} \langle C \rangle_\psi \quad \text{mit } C := \frac{1}{i}(AB - BA).$$

Speziell folgt für die Orts- und Impulsobservable:

$$(\Delta X)_\psi (\Delta P)_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\psi \in H_1 \cap D(X^2) \cap D(P^2)).$$

Beweis. Sei $a := \langle A \rangle_\psi$, $b := \langle B \rangle_\psi$, $A_0 := A - a$ und $B_0 := B - b$. Dann ist

$$A_0 B_0 - B_0 A_0 = AB - BA = iC$$

und

$$\|A_0 \psi\| = \langle \psi, A_0^2 \psi \rangle^{1/2} = (\Delta A)_\psi.$$

Analog gilt $\|B_0 \psi\| = (\Delta B)_\psi$. Wir haben

$$2i \operatorname{Im} \langle A_0 \psi, B_0 \psi \rangle = \langle A_0 \psi, B_0 \psi \rangle - \langle B_0 \psi, A_0 \psi \rangle = \langle \psi, (A_0 B_0 - B_0 A_0) \psi \rangle = -i \langle \psi, C \psi \rangle.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\Delta A)_\psi (\Delta B)_\psi &= \|A_0 \psi\| \cdot \|B_0 \psi\| \geq |\langle A_0 \psi, B_0 \psi \rangle| \\ &\geq |\operatorname{Im} \langle A_0 \psi, B_0 \psi \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle \psi, C \psi \rangle| \geq \frac{1}{2} \langle C \rangle_\psi. \end{aligned}$$

Der Spezialfall folgt aus Lemma 8.5. □

8.10 Beispiel (Schrödinger-Gleichung). Sei E ein Hilbertraum, $H : D(H) \rightarrow E$ ein selbstadjungierter Operator (der sogenannte Hamilton-Operator). Dann wird die Zeitentwicklung eines Zustands $\psi_0 = \psi(0)$ gegeben durch die unitäre Gruppe $U(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$. D.h. wenn ψ_0 der Zustand zur Zeit $t = 0$ ist, so ist $\psi(t) := U(t)\psi_0$ der Zustand zur Zeit t .

Für $\psi_0 \in D(H)$ gilt

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) &= H \psi(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \psi(0) &= \psi_0. \end{aligned}$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung zum Hamilton-Operator H .

a) Freies eindimensionales Teilchen: Hier ist $H = \frac{1}{2m}P^2$, wobei $m > 0$ die Masse des Teilchens ist. Für $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \frac{1}{2m}s^2$ gilt nach dem Funktionalkalkül $H = h(P)$. Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist der Operator H gegeben durch

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x).$$

b) Eindimensionaler harmonischer Oszillator: Hier ist der Hamilton-Operator H_0 gegeben durch

$$H_0 := \frac{1}{2m} P^2 + \frac{mw^2}{2} X^2,$$

d.h. für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist

$$H_0\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + \frac{mw^2}{2} x^2\psi(x).$$

Die Operatoren X , P und H in a) haben rein kontinuierliches Spektrum, für den Operator H_0 gilt

$$\sigma(H_0) = \sigma_P(H_0) = \left\{ \hbar w \left(n + \frac{1}{2} \right) : n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Eigenfunktionen sind die Hermite-Funktionen

$$h_n(x) := \text{const} \cdot e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}.$$

Diese bilden eine Orthonormalbasis von $L_2(\mathbb{R})$.

Literatur

- [1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.
- [2] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.
- [3] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.
- [4] Gohberg, I., Goldberg, S.: Basic operator theory. Birkhäuser Boston 1981.
- [5] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: Classes of linear operators. Vol. I. Birkhäuser Basel 1990.
- [6] Halmos, P.: A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin 1974.
- [7] Heuser, H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1986.
- [8] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliogr. Inst. Mannheim 1971.
- [9] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer Berlin 1976.
- [10] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin et al. 1983.
- [11] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press San Diego 1980.
- [12] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.
- [13] Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill New York 1986.
- [14] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.
- [15] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin et al. 1965.