Diplomarbeit

Die Gleichungen der Magneto-Thermo-Elastizität mit „second sound“

vorgelegt von

Martin Gubisch
Matr.-Nr.: 615565

betreut von

Prof. Dr. Reinhard Racke

Zweitprüfer

Prof. Dr. Robert Denk

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Oktober 2010

Konstanzer Online-Publikations-System (KOPS)
URL: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:352-130119

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Diplomarbeit mit dem Thema

Die Gleichungen der Magneto-Thermo-Elastizität mit „second sound“

selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe.

Die Stellen, die aus anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall durch Angabe der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Konstanz, den ....

Danksagung

uns ist in alten maeren
wunders vil geseit
von heleden lobebaeren
von grozer arebeit

Nibelungen-Lied, erste Aventiure

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich während meines Studiums und insbesondere während der Anfertigung dieser Diplomarbeit begleitet und unterstützt haben.

Herrn Prof. Reinhard Racke danke ich für die Heranführung an dieses interessante Thema, den hohen Freiheitsgrad bei der Bearbeitung und die anregenden und hilfreichen Gespräche zwischendurch. Außerdem danke ich Herrn Prof. Robert Denk für die Bereitschaft, die Zweitkorrektur zu übernehmen.

Meinen Studienkollegen und guten Freunden Christoph Litschka, Katharina Dupont und Siegfried Maier danke ich für den kreativen und produktiven Ideenaustausch und die moralische Unterstützung, die aus so manch festgefahrener Situation wieder herausgeholfen hat. Außerdem bedanke ich mich bei Christoph und Katharina für das akribische Korrekturlesen der Arbeit.

Ich danke unserem Fachbereichsreferenten Rainer Janßen und unserer Fachbereichssektretärin Gisela Cassola dafür, immer eine offene Tür und unbürokratische Problemlösungen angeboten zu haben.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, Jutta und Jürgen Gubisch, die mich stets bei meinem Werdegang ermutigt und finanziell unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 6

Notationen 9

Was bisher geschah 10

Magneto-Thermo-Elastizität mit „second sound“ 14

1 Physikalische Herleitung der Gleichungen 15

2 Hilbertraumformulierung und Wohlgestelltheit 23

3 Abklingverhalten bei „second sound“-Effekt 27

4 Ein Vergleich zwischen klassischem und hyperbolischem Modell 43

5 Ein modifiziertes Magnetfeld 49

6 Das rein hyperbolische System 57

7 Zur Voraussetzung für polynomiale Stabilität 62

8 Zur Trägerbedingung beim modifizierten Magnetfeld 69

Schlussbemerkungen 74

Anhang: Matlab-Code 77

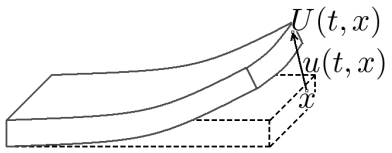
Literaturverzeichnis 79

Einleitung

Wir betrachten ein elastisches Medium Ω im Ganzraumfall $\Omega = \mathbb{R}^3$, welches durch die folgende partielle Differenzialgleichung modelliert wird:

$$Mu_{tt} - Eu = 0. \tag{0.1}$$

Dabei beschreibt $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^3$ ($x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$) den Verschiebungsvektor bzgl. einer Referenzkonfiguration, d.h. ist $U = U(t,x) \in \mathbb{R}^3$ die tatsächliche Position eines Punktes $x = U(0,x) \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit $t > 0$, dann besteht der Zusammenhang



$$U(t,x) = x + u(t,x).$$

$M = M(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bezeichnet die symmetrische und gleichmäßig in x positiv definite Massematrix und E den Elastizitätsoperator.

Ist das Medium zusätzlich wärmeleitend, so koppeln wir Gleichung (0.1) mit der Wärmeleitungsgleichung

$$c\theta_t - \nabla' K \nabla \theta = 0. \tag{0.2}$$

Hierbei beschreibt $\theta = \theta(t,x) \in \mathbb{R}$ die Temperaturdifferenz zu einer festen Referenztemperatur $T_0 \in \mathbb{R}$, d.h. die absolute Temperatur $T = T(t,x) \in \mathbb{R}$ zur Zeit t im Punkt x ist gegeben durch

$$T(t,x) = T_0 + \theta(t,x).$$

$K = K(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bezeichnet den symmetrischen und gleichmäßig in x positiv definiten Wärmeleitfähigkeitstensor und $c = c(x) \geq c_1 > 0$ die spezifische Wärme.

Elastizität und Wärmeleitung werden schon lange intensiv studiert: Bereits 1675 stellte der englische Naturwissenschaftler Robert Hooke fest, dass sich die Auslenkung eines elastischen Körpers proportional zur auf ihn wirkenden Kraft verhält: *Ut tensio, sic vis*; zusammen mit dem berühmten Bewegungsgesetz von Isaac Newton, das dieser 1687 in seiner Arbeit *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* veröffentlichte, ergibt sich Gleichung (0.1). Die Wärmeleitungsgleichung (0.2) formulierte Jean-Baptiste Fourier 1822 in seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur*, in der er auch einen Lösungsansatz mittels Fourierreihen gab. Entsprechend liegen für diese beiden Differenzialgleichungen inzwischen zahlreiche Resultate vor; viele Fragen nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und deren asymptotisches Verhalten konnten beantwortet werden.

Wirken auf einen Körper allerdings Elongations- und thermische Kräfte zugleich, dann kommt es zu Überlagerungseffekten: Bei der Auslenkung kann sich der Körper erwärmen, gleichzeitig ändern sich bei Erhitzung in der Regel die elastischen Eigenschaften.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass unser Medium Ω homogen und isotrop ist, d.h. Masse, Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärme hängen nicht vom betrachteten Ort $x \in \Omega$ ab und auch die elastischen Eigenschaften von Ω sind unabhängig von Position und Richtung der Auslenkung. Der Elastizitätsoperator E hat dann die Gestalt

$$Eu = \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla\nabla' u; \qquad ((\cdot)' \text{ die Transponierte})$$

treffen wir zusätzlich ohne Einschränkung die vereinfachenden Annahmen $K = \varkappa\mathrm{Id}$, $M = m\mathrm{Id}$ mit konstanten Koeffizienten $\varkappa, m > 0$ und Identitätsmatrix $\mathrm{Id} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und führen wir für die Koppelung Koeffizienten $\gamma, \delta > 0$ ein, dann lässt sich das gekoppelte System modellieren durch

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mu_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla\nabla' u + \gamma\nabla\theta & = & 0 \\ c\theta_t - \varkappa\Delta\theta + \delta\nabla' u_t & = & 0. \end{array} \right. \tag{0.3}$$

Da dieses System aus einer hyperbolischen und einer parabolischen Gleichung entstanden ist, stellt sich die Frage, ob das Langzeitverhalten der Elastizitätsgleichung oder das der Wärmeleitungsgleichung die Asymptotik des gekoppelten Systems dominiert.

Ein Nachteil dieser Modellierung ist die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärme, die bei Verwendung von Fouriers Wärmeleitungsgesetz

$$c\theta_t - \varkappa\Delta\theta = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} c\theta_t + \nabla' q & = & 0 \\ q + \varkappa\nabla\theta & = & 0 \end{array} \right.$$

auftritt. Dies lässt sich korrigieren, indem man statt dessen den Wärmefluss q mit Cattaneos Gesetz

$$\tau_0 q_t + q + \varkappa\nabla\theta \quad = \quad 0$$

modelliert. Wir führen dazu in Fouriers Modell für den Wärmefluss einen zeitlichen (kleinen) Relaxationsparameter $\tau_0 > 0$ ein:

$$q(\tau_0 + t) + \varkappa\nabla\theta(t) = 0$$

und führen eine lineare Taylorentwicklung durch. Diese Verzögerung führt dann zu einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärme; man spricht vom „second sound“-Effekt.

Wir erhalten so die hyperbolischen Thermoelastizitätsgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mu_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla\nabla' u + \gamma\nabla\theta & = & 0 \\ c\theta_t + \rho\nabla' q + \delta\nabla' u_t & = & 0 \\ \tau_0 q_t + q + \varkappa\nabla\theta & = & 0 \end{array} \right. \tag{0.4}$$

(hier mit $\rho = 1$).

Nimmt man noch den Einfluss eines Magnetfeldes $h = h(t,x) \in \mathbb{R}^3$ hinzu, das sich auf die Auslenkung des Mediums auswirkt, so erhält man die Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mu_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla\nabla' u + \gamma\nabla\theta - \alpha(\nabla\times h)\times\vec{H} & = & 0 \\ h_t - \nabla'\Lambda\nabla h - \beta\nabla\times(u_t\times\vec{H}) & = & 0 \\ c\theta_t + \rho\nabla' q + \delta\nabla' u_t & = & 0 \\ \tau_0 q_t + q + \varkappa\nabla\theta & = & 0 \end{array} \right. \tag{0.5}$$

mit konstanten Koeffizienten $\alpha, \beta > 0$, $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)' \in \mathbb{R}^3$ und symmetrischem, gleichmäßig in x positiv definitem $\Lambda = \Lambda(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, das wir hier als $\Lambda = \mathrm{Id}$ annehmen.

Zusätzlich geben wir noch die folgenden Anfangsbedingungen vor:

$$\begin{array}{rclrcl} (u, u_t)(0, x) & = & (u_0, u_1)(x); & h(0, x) & = & h_0(x); \\ \theta(0, x) & = & \theta_0(x); & q(0, x) & = & q_0(x). \end{array} \tag{0.6}$$

Im **ersten Kapitel** wird das System der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“ aus den physikalischen Grundgleichungen der Elektrodynamik und der Thermodynamik sowie den Elastizitätsgesetzen hergeleitet, insbesondere interessieren wir uns hier für die Entstehung der Koppelungsterme und die Linearisierung der ursprünglich nichtlinearen Gleichungen.

In **Kapitel zwei** wird mit Hilfe der Theorie der Operatorhalbgruppen gezeigt, dass das Anfangswertproblem (0.5), (0.6) wohlgestellt ist. Wir bringen das System dazu auf die Form

$$\begin{cases} V_t + AV & = & 0 \\ V(0) & = & V_0 \end{cases}$$

für einen geeigneten Operator $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ und zeigen mit dem Satz von Hille & Yosida, dass A eine $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ erzeugt. Dies liefert uns zu Anfangsdaten V_0 aus dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ des Differenzialoperators die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen V in der Funktionsklasse $\mathcal{C}^0([0, \infty), \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))$, die sich schreiben lassen als

$$V(t) = e^{tA} V_0.$$

Mit $(e^{tA})_{t\geq 0}$ bezeichnen wir dabei die von A erzeugte $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe $e^{\cdot A} : t \mapsto \mathcal{L}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))$ und mit $\mathcal{L}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))$ den Raum der linearen, stetigen Operatoren auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

Im **dritten Kapitel** wird nachgewiesen, dass die Energie der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“,

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(|u_t|^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\mu + \lambda) |\nabla' u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |h|^2 + \frac{\gamma}{\delta} |\theta|^2 + \frac{\tau_0 \rho \gamma}{\varkappa \delta} |q|^2 \right) (t, x) \, \mathrm{d}x, \tag{0.7}$$

polynomial abklingt, wenn die Anfangsdaten geeignete Eigenschaften aufweisen.

In **Kapitel vier** wird ein energetischer Vergleich zwischen der Energie des klassischen Systems $\mathcal{E}^0$ und der des „second sound“-Systems $\mathcal{E}^\tau$ durchgeführt. Zunächst erhalten wir elementar eine Abschätzung der Form

$$\exists C > 0 : \forall t \geq 0 : \mathcal{E}^\tau(t) - \mathcal{E}^0(t) \leq C \tau_0^2.$$

Mit Hilfe der in [Ir1] eingeführten Methoden lässt sich dieses Resultat verfeinern: Wir werden die Konstante C (in Abhängigkeit der Koeffizienten und Anfangsdaten) explizit angeben und die zeitliche Entwicklung der Differenz untersuchen. Wir erhalten den Zusammenhang

$$\forall t \geq 0 : \mathcal{E}^\tau(t) - \mathcal{E}^0(t) \leq \frac{\rho}{2} \tau_0^2 E_2^0(t),$$

wobei $E_2^0 = E_2^0(\mathcal{E}_2^0(t), \mathcal{E}_3^0(t), t)$ eine Funktion in den Energietermen zweiter und dritter Stufe des klassischen Systems (und in t) ist.

In den **Kapiteln fünf und sechs** werden variierte Modelle der Magneto-Thermo-Elastizität betrachtet: Wir zeigen Probleme auf, die entstehen, wenn wir zur Modellierung des stationären Magnetfeldes $\vec{H}$ einen allgemeineren Vektor verwenden als bisher, und wir untersuchen das Abklingverhalten des „rein hyperbolischen“ Systems, d.h. wir studieren die asymptotische Entwicklung des Systems, das entsteht, wenn wir auch das Magnetfeld h relaxieren.

Im **siebten** und **achten Kapitel** wird näher auf die Forderungen eingegangen, die in den einzelnen Modellen an die Anfangsdaten gestellt wurden, um polynomiales Abklingen zu gewährleisten.

Notationen

Sämtliche in dieser Arbeit benutzten Bezeichnungen werden im entsprechenden Kapitel eingeführt; an dieser Stelle soll dennoch einen Überblick über die am häufigsten gebrauchten Notationen gegeben werden.

Mit (u, h, θ, q) oder auch $(u^\tau, h^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ bezeichnen wir den Lösungsvektor des Systems der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“, bestehend aus Position, Magnetfeld, Temperatur und Wärmefluss, zu einem Relaxationsparameter τ_0. $(v, w, \vartheta, r) := (\hat{u}, \hat{h}, \hat{\theta}, \hat{q})$ schreiben wir für die zugehörige Fourier-Transformierte.

Den zugehörigen Energieterm j-ter Stufe notieren wir mit

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}_j(t,\xi) \quad &:= \quad \hat{\mathcal{E}}_j^\tau(t,\xi) \quad := \quad \frac{1}{2}\Big(|\partial_t^j v_t|^2 + \mu|\xi|^2|\partial_t^j v|^2 + (\mu+\lambda)(\xi\cdot\partial_t^j v)^2 \\ &\qquad + \frac{\alpha}{\beta}|\partial_t^j w|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\partial_t^j \vartheta|^2 + \frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}|\partial_t^j r|^2\Big)(t,\xi),\end{aligned}$$

wobei $(\cdot)_t := \partial_t := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ die Zeitableitung ist.

Die Energie j-ter Stufe des Systems ist dann $\mathcal{E}_j(t) := \mathcal{E}_j^\tau(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{E}}_j(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi$.

Analog bezeichnen wir die entsprechenden Größen für das klassische System mit (u^0, h^0, θ^0) bzw. (v^0, w^0, ϑ^0) und $\hat{\mathcal{E}}_j^0,\ \mathcal{E}_j^0$.

Für die Lösungskomponenten des klassischen und des „second sound“-Modells der Thermoelastizität schreiben wir $(\tilde{u}^0, \tilde{\theta}^0)$ bzw. $(\tilde{u}^\tau, \tilde{\theta}^\tau, \tilde{q}^\tau)$; Entsprechendes gilt für die Fourier-Transformierten und die Energien.

Die Differenz zwischen klassischer und relaxierter Lösung notieren wir mit $(u^\mathrm{d}, h^\mathrm{d}, \theta^\mathrm{d}, q^\mathrm{d})$ bzw. $(\tilde{u}^\mathrm{d}, \tilde{h}^\mathrm{d}, \tilde{\theta}^\mathrm{d}, \tilde{q}^\mathrm{d})$ u.s.w..

Mit $\mathcal{L}^2(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf Ω; Entsprechendes gilt für $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $p \in [1,\infty)$ und für $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Für $p \in [1,\infty]$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{W}^{k,p}(\Omega)$ der $\mathcal{L}^p$-Sobolevraum k-ter Ordnung.

Die Definitionen der benutzten Lebesgueräume, schwachen Ableitungen und Sobolevräume finden sich im Standardwerk *„Sobolev Spaces“* von R. Adams und J. Fournier, [Ad].

Was bisher geschah

In diesem Abschnitt werden wesentliche Resultate über die Wohlgestelltheit und das asymptotische Verhalten von Gleichungen aus den Bereichen der Magneto-Elastizität, der Thermo-Elastizität und der Magneto-Thermo-Elastizität zusammengefasst. Anschließend wird der in [Mu1] dargelegte Beweis für polynomiale Abklingraten der Energie der klassischen Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen bei geeigneten Daten skizziert.

Magneto-Elastizität und Magneto-Thermo-Elastizität.

In den frühen 1960ern wurde begonnen, die Wechselwirkungen zwischen der mechanischen Deformation eines elastischen Körpers und einem ihn umgebenden Magnetfeld zu untersuchen. So berücksichtigte Cagniard [Ca] das Erdmagnetfeld bei der Modellierung seismischer Wellen vom Erdmantel zum Kern, um spezielle Phänomene der Geophysik zu erklären. Für spezielle Gebiete wurden Lösungsverfahren entwickelt – Knopoff [Kn] konnte magneto-elastische, ebene Wellen in einem unendlichen Medium in zwei unabhängige Wellengleichungen entkoppeln, Paria [Pa2] wendete für unendliche Gebiete mit einem zylinderförmigen Loch Methoden aus der Elastizitätstheorie an, um Lösungsdarstellungen zu erhalten. In [Pa1] findet sich ein ausführlicher Überblick über den Forschungsstand bis 1967 und die speziellen Probleme, die sich bei Berücksichtigung magnetischer und auch thermischer Einflüsse auf elastische Medien ergeben.

Bakshi [Ba] leitete für Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen bei eindimensionalen Medien mittels Laplace-Transformation Lösungsdarstellungen her und gab in Spezialfällen auch die rücktransformierten Lösungen an. Roy-Choufhuri und Chatterjee (Roy) erweiterten das Modell abermals, indem sie durch eine Relaxation die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wärme berücksichtigten. Der thermische Einfluss auf das Medium wurde hier in Form einer Schockwelle im eindimensionalen Halbraum modelliert. Neben Lösungsdarstellungen – wiederum mittels Laplace-Transformation – wurden numerische Ergebnisse präsentiert, die ein polynomiales Abklingen des Spannungstensors suggerieren.

Asymptotik in der Thermo-Elastizität und Magneto-Elastizität.

Um die Jahrtausendwende rückte die Analyse des Langzeitverhaltens von Lösungen verschiedener Elastizitätsmodelle in den Vordergrund. In [Ra1] werden die klassischen Thermoelastizitätsgleichungen (d.h. unter Verwendung von Fouriers Gesetz) und die hyperbolischen Thermoelastizitätsgleichungen, bei denen der „second sound“-Effekt auftritt, ausführlich diskutiert und es werden Vergleiche zwischen den beiden Modelltypen gezogen.

Mittels Halbgruppentheorie wird gezeigt, dass die Anfangswertprobleme wohlgestellt sind, anschließend wird das asymptotische Verhalten der Lösungen mit Energiemethoden studiert.

Es wird bewiesen, dass im Eindimensionalen das Langzeitverhalten von Lösungen $V = (u_x, u_t, \theta)$ des klassischen Systems durch den Einfluss der Wärmeleitungsgleichung dominiert wird; mittels Fourier-Transformation erhält man zunächst punktweise exponenzielles Abklingen der transformierten Lösung $\hat{V}$:

$$\exists c_1, c_2 > 0 : \forall t \geq 0,\ \xi \in \mathbb{R}^1 : |\hat{V}(t,\xi)|^2 \leq c_1 e^{-c_2 k(|\xi|)t} |\hat{V}(0,\xi)|^2 \tag{0.8}$$

mit

$$k(|\xi|) := \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}.$$

Daraus ergeben sich polynomiale Abklingraten für die $\mathcal{L}^\infty$-Norm der Lösung, sofern die Anfangsdaten genügend Regularität besitzen, wie in [Zh] gezeigt wird.

Im Dreidimensionalen dagegen dominiert der hyperbolische Anteil des Systems. Durch orthogonale Zerlegung des Grundraumes lässt sich der Verschiebungsvektor u hier schreiben als Summe einer rotationsfreien Funktion u^{po} und einer divergenzfreien Funktion u^{so} – man erhält so zwei unabhängige Systeme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^{\mathrm{po}}_{tt} - (2\mu+\lambda)\Delta u^{\mathrm{po}} + \gamma\nabla\theta &=& 0 \\ \theta_t - \varkappa\Delta\theta + \delta\nabla' u^{\mathrm{po}}_t &=& 0 \\ \nabla \times u^{\mathrm{po}} &=& 0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u^{\mathrm{so}}_{tt} - \mu\Delta u^{\mathrm{so}} &=& 0 \\ \nabla' u^{\mathrm{so}} &=& 0 \end{array} \right. .$$

Der potenzielle Anteil u^{po} klingt dann wie eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ab, der solenoidale Anteil u^{so} verhält sich wie eine Lösung der Wellengleichung. Mit Methoden der Fourier-Analysis wird nachgewiesen, dass die Lösung $V = (S\mathcal{D}u, u_t, \theta)$ des ursprünglichen Problems ebenfalls in der $\mathcal{L}^\infty$-Norm polynomial abklingt:

$$||V(t)||_{\mathcal{L}^\infty} \leq c(1+t)^{-\frac{n-1}{2}} ||V(0)||_{n+1,1}. \qquad \text{(hier: } n=3\text{)}$$

Im $\mathbb{R}^1$ führt die Zerlegung in rotations- und divergenzfreie Felder dabei gerade dazu, dass der solenoidale Anteil $V^{\mathrm{so}} = (S\mathcal{D}u^{\mathrm{so}}, u^{\mathrm{so}}_t, \theta)'$ stets die Nullfunktion ist.

In der $\mathcal{L}^2$-Norm ist allerdings im Allgemeinen kein Abklingen zu erwarten: Bestehen die Anfangsdaten nur aus einem solenoidalen Anteil $V^0 = V^{0,\mathrm{so}}$, dann ist die $\mathcal{L}^2$-Norm der Lösung invariant unter der Evolution des Systems. Ist $V^0 = V^{0,\mathrm{po}}$ dagegen ein Element des rotationsfreien Unterraums von $\mathcal{L}^2$, dann besteht für die Lösung V die Abschätzung (0.8) und auch die $\mathcal{L}^2$-Norm der Lösung V klingt (mit unbekannter Rate) ab. Mehr noch: Erfüllen die Daten eine geeignete Integrierbarkeitsbedingung, genauer:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{k(\xi)^m} |\hat{V}(0,\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty,$$

dann klingt $||V(t)||_{\mathcal{L}^2}$ für $t \to \infty$ polynomial mit Rate m ab.

Beim „second sound“-Modell führt die Zerlegung des Grundraumes zu den beiden unabhängigen Systemen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^{\mathrm{po}}_{tt} - (2\mu+\lambda)\Delta u^{\mathrm{po}} + \gamma\nabla\theta &=& 0 \\ \tau_0\theta_t + \gamma\nabla' q + \delta\nabla' u^{\mathrm{po}}_t &=& 0 \\ q_t + q + \varkappa\nabla\theta &=& 0 \\ \nabla \times u^{\mathrm{po}} &=& 0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u^{\mathrm{so}}_{tt} - \mu\Delta u^{\mathrm{so}} &=& 0 \\ \nabla' u^{\mathrm{so}} &=& 0 \end{array} \right. .$$

Qualitativ erhält man die gleichen Resultate wie für das klassische Modell; insbesondere klingt auch hier die Lösung V in der $\mathcal{L}^\infty$-Norm polynomial ab, wobei die hierfür erforderliche Regularität der Daten und die Abklingrate wie üblich von der Raumdimension abhängen.

Muñoz Rivera und Racke zeigen außerdem, dass sowohl Lösungen der magneto-elastischen Gleichungen im Fall eines beschränkten $\mathbb{R}^2$-Gebiets vom „Rechteck-Typ“ polynomial stabil sind [Mu2] als auch Lösungen der klassischen magneto-thermo-elastischen Gleichungen im Ganzraumfall $\mathbb{R}^3$ [Mu1]. Es stellt sich die Frage, ob sich dieses asymptotische Verhalten auf das zugehörige hyperbolische Modell vererbt oder ob der Einfluss des Magnetfeldes die Stabilität des thermoelastischen Systems zerstört.

Polynomiale Stabilität der klassischen Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen im Ganzraumfall.

In [Mu1] wird gezeigt, dass auch die Lösung der klassischen Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen polynomial abklingt, falls die Anfangsdaten eine spezielle Eigenschaften aufweisen:

Satz 0.1 (Muñoz Rivera & Racke, 2001) *Seien $\tau_0 = 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig.*

Erfüllen die Fourier-transformierten Anfangsdaten $(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{h}, \hat{\theta})$ des Problems (0.5), (0.6)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m} \hat{\mathcal{E}}^0(0,\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty$$

mit

$$k(\xi) := \frac{\xi_1^4 \xi_3^4}{(\xi_1^2+\xi_3^2)^2 |\xi|^2 (1+|\xi|^2)^2}, \qquad \kappa(\xi) := 1 + |\xi|^2$$

und Anfangsenergie

$$\hat{\mathcal{E}}^0(0,\xi) := \frac{1}{2}\left(|\hat{u}_1|^2 + \mu|\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + (\mu+\lambda)(\xi\cdot\hat{u}_0)^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\hat{h}_0|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\hat{\theta}_0|^2 \right)(\xi),$$

dann gilt für die zur Lösung (u, h, θ) assoziierte Energie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0(t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{E}}^0(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left(|u_t|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)|\nabla' u|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\theta|^2 \right)(t,x)\ \mathrm{d}x : \end{aligned}$$

$\mathcal{E}^0$ fällt für $t \to \infty$ polynomial mit Rate m, kurz: $\mathcal{E}^0(t) = \mathcal{O}(t^{-m})$.

Dazu werden die Gleichungen (0.5) zunächst Fourier-transformiert, was für jede Belegung der transformierten Ortsvariablen $x \to \xi$ ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen in der Zeit t liefert. Anschließend wird mit der Multiplikatormethode ein Lyapunov-Funktional $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t,\xi)$ konstruiert, das äquivalent zu $\hat{\mathcal{E}}^0$ ist, d.h. es gibt Konstanten $d_1, d_2 > 0$, so dass für alle $t \geq 0$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$d_1 \frac{|\xi|^2}{k(\xi)\kappa(\xi)} \hat{\mathcal{E}}^0(t,\xi) \leq \mathcal{L}(t,\xi) \leq d_2 \frac{|\xi|^2}{k(\xi)} \hat{\mathcal{E}}^0(t,\xi),$$

und das für alle $t \geq 0,\ \xi \in \mathbb{R}^3$ die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t,\xi) \leq -dk(\xi)\mathcal{L}(0,\xi).$$

Mit dem auch im Folgenden immer wieder benutzten

Lemma 0.2 (Gronwall, 1919) *Seien $f \in \mathcal{C}^0([0,\infty),\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty),\mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{C}^0([0,\infty),\mathbb{R})$. Dann gilt:*

$$\forall t > 0 : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \leq g(t)u(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall t \geq 0 : u(t) \leq u(0)\exp\left(\int_0^t g(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right).$$

folgt dann: $\mathcal{L}(\cdot,\xi)$ fällt für jedes $\xi \in \mathbb{R}^3$ exponenziell in t:

$$\mathcal{L}(t,\xi) \leq \mathcal{L}(0,\xi)e^{-dk(\xi)t}.$$

Für $\hat{\mathcal{E}}^0(\cdot,\xi)$ bedeutet dies:

$$\hat{\mathcal{E}}^0(t,\xi) \leq \frac{d_2}{d_1}\hat{\mathcal{E}}^0(0,\xi)\kappa(\xi)e^{-dk(\xi)t}.$$

Schließlich folgt aus der elementaren Abschätzung

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 :\ \exists c(m) > 0 :\ \forall t \geq 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^3 :\ \int_0^t \tau^m e^{-dk(\xi)\tau}\ \mathrm{d}\tau \leq \frac{c(m)}{k(\xi)^{m+1}},$$

dass die Energie $\mathcal{E}^0(t)$ polynomial mit Rate m abklingt, sofern das folgende Integral einen endlichen Wert annimmt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m}\hat{\mathcal{E}}^0(0,\xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

Wir übertragen dieses Ergebnis für die klassischen Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen auf das entsprechende System mit „second sound“.

Jüngere Resultate.

Inzwischen ist die numerische Rücktransformation von mittels Laplace-Transformation berechneten Lösungen technisch effizient zu bewerkstelligen [Ez]. Dabei können allerdings entscheidende Phänomene wie Sprünge verloren gehen. In [Ti] werden die Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen unter den gleichen Voraussetzungen daher mittels der Methode der Finiten Elemente numerisch gelöst und ein in diesem Fall sprungartiges Abfallen der Temperatur nachgewiesen.

Mit der Methode der Finiten Elemente löst Doll [Do] auch ein nichtlineares System von Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen im $\mathbb{R}^2$ und weist unter vereinfachenden Annahmen ein schwaches asymptotisches Verhalten der Lösung nach – wir gehen am Schluss näher darauf ein.

Auch lineare Modelle, die weitere Effekte berücksichtigen wie Elektro-Magneto-Thermo-Elastizität [El] und Elektro-Magneto-Thermo-Visko-Elastizität [Ro2] werden derzeit analytisch und numerisch untersucht.

Die Gleichungen der Magneto-Thermo-Elastizität mit „second sound“

1 Physikalische Herleitung der Gleichungen

Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

Die Erzeugung und zeitliche Entwicklung elektrischer und magnetischer Felder wird beschrieben durch vier physikalische Gesetze:

(1) das *Gesetz von Gauß* für elektrische Felder:

$$\operatorname{div} \mathrm{D} = \rho,$$

wobei D die elektrische Flussdichte und ρ die Ladungsdichte bezeichnen;

(2) das *Gesetz von Gauß* für magnetische Felder:

$$\operatorname{div} \mathrm{B} = 0,$$

wobei B die magnetische Flussdichte bezeichnet;

(3) das *Induktionsgesetz von Faraday*:

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\mathrm{B}_t,$$

wobei E die elektrische Feldstärke ist, und

(4) das *Strömungsgesetz von Ampère & Maxwell*:

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \mathrm{D}_t,$$

wobei H=H(H_0,h) die (totale) magnetische Feldstärke, bestehend aus dem primären Feld H_0 und dem induzierten Feld h, und J die Stromdichte beschreiben.

Zusammen bilden diese vier Erhaltungsgesetze die **Maxwellschen Gleichungen**. Weiter besteht zwischen den Feldstärken E, H und den Flussdichten D, B der Zusammenhang

$$\mathrm{D} = \epsilon \mathrm{E}, \qquad \mathrm{B} = \mu \mathrm{H}$$

für gewisse Bijektionen ϵ, μ, die wir hier als $\epsilon = \epsilon_0 \cdot$ und $\mu = \mu_0 \cdot$ mit $\epsilon_0, \mu_0 > 0$ annehmen wollen. ϵ_0 wird als „Dielektrizität“ bezeichnet und μ_0 als „Permeabilität“.

Vernachlässigen wir die Ladungsdichte ρ, d.h. nehmen wir an, dass auch D divergenzfrei ist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\nabla \times (\nabla \times E) &= \nabla \times B_t \\ = \quad \mu_0 \nabla \times H_t &= \mu_0 (J_t + D_{tt}) &= \mu_0 J_t + \epsilon_0 \mu_0 E_{tt} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Delta H &= -\nabla \times (\nabla \times H) &= -\nabla \times (J + D_t) \\ = \quad -\nabla \times (J + \epsilon_0 E_t) &= -\nabla \times J + \epsilon_0 B_{tt} &= -\nabla \times J + \epsilon_0 \mu_0 H_{tt}. \end{aligned}$$

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich also das System der **elektromagnetischen Feldgleichungen** deduzieren:

$$\begin{cases} \Delta E &= \mu_0 (J_t + \epsilon_0 E_{tt}); \\ \Delta H &= \epsilon_0 \mu_0 H_{tt} - \nabla \times J \end{cases} . \tag{1.1}$$

Elastizitätsgleichungen

Das **Hookesche Gesetz** besagt, dass sich ein elastischer Festkörper proportional im Verhältnis zu der Kraft, die auf ihn wirkt, dehnt.

Zwischen dem Spannungstensor τ und dem Verzerrungstensor e besteht damit der Zusammenhang

$$\tau_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} s_{ijkl} e_{kl}, \tag{1.2}$$

wobei die Elastizitätskoeffizienten gegeben sind durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1133} & s_{1123} & s_{1131} & s_{1112} \\ s_{2211} & s_{2222} & s_{2233} & s_{2223} & s_{2213} & s_{2212} \\ s_{3311} & s_{3322} & s_{3333} & s_{3323} & s_{3313} & s_{3312} \\ s_{2311} & s_{2322} & s_{2333} & s_{2323} & s_{2313} & s_{2312} \\ s_{1311} & s_{1322} & s_{1333} & s_{1323} & s_{1313} & s_{1312} \\ s_{1211} & s_{1222} & s_{1233} & s_{1223} & s_{1213} & s_{1212} \end{pmatrix},$$

für welche die folgenden Symmetrien gelten:

$$s_{ijkl} = s_{klij} = s_{jikl}.$$

Bezeichnet u den elastischen Verschiebungsvektor, dann besitzt e die Darstellung

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right). \tag{1.3}$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass der elastische Körper isotrop ist, d.h. die Auslenkung soll nicht von der Ausrichtung des Körpers abhängen, dann existieren $\mu, \lambda > 0$ (die Lamé-Elastizitätskonstanten), so dass

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix}.$$

Das Hookesche Gesetz liest sich dann wie folgt:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \operatorname{spur} e \cdot \delta_{ij}, \tag{1.4}$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet. Einsetzen in das *Bewegungsgesetz von Newton*

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{\cdot j} + F = M u_{tt} \tag{1.5}$$

ergibt die **Elastizitätsgleichungen**

$$M u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u = F \tag{1.6}$$

mit Massematrix M und Kraft F des Körpers (jeweils pro Volumeneinheit).

Magneto-Elastizitätsgleichungen

Wenn ein stromleitender, elastischer Körper in einem variierenden Magnetfeld eine mechanische Ladung erfährt, gelten die Gesetze von Hooke und Maxwell weiterhin; zusätzlich kommt es zu Überlagerungseffekten.

Durch das elektromagnetische Feld tritt eine zusätzliche Kraft auf, welche die elastische Auslenkung des Körpers beinflusst: Die **Lorentzsche Trägheitskraft**. Das Bewegungsgesetz (1.5) liest sich dann als

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{\cdot j} + (J \times B) + \rho E + F = M u_{tt}, \tag{1.7}$$

woraus sich im isotropen Fall mit dem Hookeschen Gesetz (1.4) die Elastizitätsgleichung

$$M u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u = (J \times B) + \rho E + F \tag{1.8}$$

ergibt: Die vom Magnetfeld B induzierte Ladung J bremst die Bewegung des Leiters und auch die Ladungsdichte ρ verursacht eine zusätzliche Kraft in der Bewegungsgleichung.

Umgekehrt besagt das folgende **Ohmsche Gesetz**, wie das elektromagnetische Feld das elastische Feld beeinflusst:

$$J = \sigma (E + u_t \times B) + \rho u_t. \tag{1.9}$$

σ bezeichnet hierbei die elektrische Leitfähigkeit. Die Ladungsverteilung hängt also auch von der elastischen Deformation ab.

Setzen wir wieder $\rho = 0$, dann erhalten wir aus den Gleichungen (1.1) und (1.8) das System

$$\begin{cases} \Delta E - \epsilon_0 \mu_0 E_{tt} - \mu_0 J_t = 0; \\ \Delta H - \epsilon_0 \mu_0 H_{tt} + \nabla \times J = 0 \\ M u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u - (J \times B) - F = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Mit dem Gesetz von Ampère & Maxwell können wir J in der dritten Gleichung eliminieren:

$$\begin{aligned} M u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u &= (\nabla \times H - \epsilon_0 E_t) \times (\mu_0 H) + F \\ &= \mu_0 (\nabla \times H) \times H - \mu_0 \epsilon_0 E_t \times H + F; \end{aligned}$$

gleichzeitig ersetzen wir J in der zweiten Gleichung mit Hilfe des Gesetzes von Ohm:

$$\begin{aligned} \Delta H - \epsilon_0 \mu_0 H_{tt} &= -\sigma \nabla \times (E + \mu_0 u_t \times H) \\ &= \sigma \mu_0 H_t - \sigma \mu_0 \nabla \times (u_t \times H). \end{aligned}$$

Wir vernachlässigen jetzt das elektrische Feld E, die Kraft F und die zweiten Zeitableitungen H_{tt} des Magnetfeldes. Ist das induzierte Magnetfeld h klein im Vergleich zum primären Feld H_0, dann können wir außerdem $H = H_0 + h$ annehmen und die Gleichungen durch Weglassen der Produkte von h mit u und sich selbst linearisieren.

Wir erhalten so das System der **Magneto-Elastizitätsgleichungen**

$$\begin{cases} M u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u - \mu_0 (\nabla \times h) \times H_0 &= 0 \\ \sigma \mu_0 h_t - \Delta h - \sigma \mu_0 \nabla \times (u_t \times H_0) &= 0 \end{cases}. \tag{1.11}$$

Wärmeleitungsgleichung

Beschreibe $\theta = \theta(t, x)$ die Temperatur eines wärmeleitenden Körpers, q den Wärmefluss durch den Körper und f die Intensität einer äußeren Wärmequelle, dann besteht nach der *Transportgleichung* der Zusammenhang

$$c\theta_t + \operatorname{div} q = f, \tag{1.12}$$

wobei c die spezifische Wärme des Körpers beschreibt.

Das *Ficksche Gesetz* besagt, dass die Wärme in Richtung des größten Temperaturunterschieds fließt:

$$q = -\kappa \nabla \theta \tag{1.13}$$

mit Wärmeleitfähigkeitskonstante κ. Die Transportgleichung wird zu **Fouriers Wärmeleitungsgesetz**:

$$c\theta_t - \kappa \Delta \theta = f. \tag{1.14}$$

Wie eingangs erwähnt, tritt bei dieser Modellierung das Problem auf, dass sich Wärme mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Aus diesem Grund führen wir in Gleichung (1.13) einen zeitlichen Verzögerungsparameter τ_0 ein:

$$q(t + \tau_0) = -\kappa \nabla \theta(t). \tag{1.15}$$

Führen wir eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung durch und setzen in die Transportgleichung ein, so erhalten wir **Cattaneos Gesetz**

$$\tau_0 q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0, \tag{1.16}$$

welches wir im Folgenden zur Modellierung des Wärmeflusses verwenden wollen.

Thermo-Elastizitätsgleichungen

Koppeln wir die Elastizitätsgleichungen (1.5) mit der Transportgleichung (1.12), dann liefert das **Erste Gesetz der Thermodynamik** das System

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{M}u_{tt} - \operatorname{div}\tau & = & \mathrm{F} \\ \epsilon_t - \operatorname{spur}(\tau \mathrm{G}_t) + \operatorname{div} \mathrm{q} & = & \mathrm{f} \end{array} \right. , \tag{1.17}$$

wobei $\epsilon = \psi + \mathrm{T}\eta$ die innere Energie bezeichnet, ψ die freie Helmholtz-Energie, η die spezifische Entropie, T die absolute Temperatur (d.h. $\theta = \mathrm{T} - \mathrm{T}_0$ ist die Temperaturdifferenz zu einer festen Referenztemperatur T_0) und G den Deformationsgradienten $\mathrm{G} = 1 + \nabla \mathrm{u}$.

Formal bleiben die Elastizitätsgleichungen unverändert, aber der Spannungstensor τ ist jetzt – ebenso wie q, ψ und η – eine Funktion in G, T und ∇T.

In [Ji] wird gezeigt, dass aus dem **Zweiten Gesetz der Thermodynamik**

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{T}}\right) + \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{T}} \quad \leq \quad \eta_t$$

und dem **Dissipationsprinzip**

$$\psi_t + \eta \mathrm{T}_t - \operatorname{spur}(\tau \mathrm{G}_t) + \frac{\mathrm{q}\nabla \mathrm{T}}{\mathrm{T}} \quad \leq \quad 0$$

folgen:

(1) τ, ψ und η hängen nicht von ∇T ab, d.h.

$$\tau = \tilde{\tau}(\mathrm{G},\mathrm{T}), \qquad \psi = \tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T}), \qquad \eta = \tilde{\eta}(\mathrm{G},\mathrm{T});$$

(2) Spannungstensor τ und Entropie η sind Änderungsraten der Helmholtz-Energie ψ:

$$\tilde{\tau}(\mathrm{G},\mathrm{T}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{G}}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T}), \qquad \tilde{\eta}(\mathrm{G},\mathrm{T}) = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T});$$

(3) es gilt die Wärmeleitungsungleichung

$$\mathrm{q} = \tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{G},\mathrm{T},\nabla \mathrm{T}) \quad \leq \quad 0.$$

Wir identifizieren im Folgenden $\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T}) = \tilde{\psi}(\nabla \mathrm{u}, \theta)$, analog für τ, η, q.

Mit diesen Erkenntnissen können wir die Wärmeleitungsgleichung umformen zu

$$\begin{aligned} \mathrm{f} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\epsilon}(\mathrm{G},\mathrm{T}) - \operatorname{spur}(\tilde{\tau}(\mathrm{G},\mathrm{T})\mathrm{G}_t) + \operatorname{div}\tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{G},\mathrm{T},\nabla \mathrm{T}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T}) + \mathrm{T}\cdot\tilde{\eta}(\mathrm{G},\mathrm{T})\right) - \operatorname{spur}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{G}}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T})\cdot \mathrm{G}_t\right) + \operatorname{div}\tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{G},\mathrm{T},\nabla \mathrm{T}) \\ &= \operatorname{spur}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{G}}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T})\cdot \mathrm{G}_t\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T})\cdot \mathrm{T}_t - \mathrm{T}_t \cdot \frac{\partial}{\partial T}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T}) \\ &\quad + \mathrm{T}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\partial}{\partial T}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T})\right) - \operatorname{spur}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{G}}\tilde{\psi}(\mathrm{G},\mathrm{T})\cdot \mathrm{G}_t\right) + \operatorname{div}\tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{G},\mathrm{T},\ \nabla \mathrm{T}) \\ &= -\mathrm{T}\cdot(\tilde{\psi}_{\mathrm{TT}}(\mathrm{G},\mathrm{T})\cdot \mathrm{T}_t + \operatorname{spur}(\tilde{\psi}_{\mathrm{GT}}(\mathrm{G},\mathrm{T}))\cdot \mathrm{G}_t) + \operatorname{div}\tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{G},\mathrm{T},\nabla \mathrm{T}) \\ &= -\mathrm{T}\cdot(\tilde{\psi}_{\mathrm{TT}}(\mathrm{G},\mathrm{T})\cdot \mathrm{T}_t + \operatorname{spur}(\tilde{\psi}_{\mathrm{GT}}(\mathrm{G},\mathrm{T})\cdot \mathrm{G}_t)) + \operatorname{div}\tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{G},\mathrm{T},\nabla \mathrm{T}). \end{aligned}$$

Durch Linearisierung der Gleichung erhalten wir

$$-\mathrm{T}_0\cdot\tilde{\psi}_{\mathrm{TT}}(0,0)\cdot\theta_t - \mathrm{T}_0\cdot\operatorname{spur}(\tilde{\psi}_{\mathrm{GT}}(0,0)\cdot\nabla \mathrm{u}_t)) + \operatorname{div}\mathrm{q} \quad = \quad \mathrm{f}. \tag{1.18}$$

Habe die (symmetrische) Matrix $\left[-\tilde{\psi}_{\mathrm{T},\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}^j}(0,0)\right]_{i,j}$ die Gestalt

$$\left[-\tilde{\psi}_{\mathrm{T},\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}^j}(0,0)\right]_{i,j} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_6 & \gamma_5 \\ \gamma_6 & \gamma_2 & \gamma_4 \\ \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\begin{aligned}
& \operatorname{spur}(-\tilde{\psi}_{\mathrm{GT}}(0,0)\cdot\nabla \mathrm{u}_t) \\
= & \sum_{i,j=1}^{3} -\tilde{\psi}_{\mathrm{T},\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}^j}(0,0)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}_t^j \\
= & \gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{u}_t^1 + \gamma_5\frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{u}_t^1 + \gamma_6\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{u}_t^1 \\
& +\gamma_2\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{u}_t^2 + \gamma_4\frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{u}_t^2 + \gamma_6\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{u}_t^2 \\
& +\gamma_3\frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{u}_t^3 + \gamma_4\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{u}_t^3 + \gamma_5\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{u}_t^3 \\
= & \Gamma'\mathcal{D}\mathrm{u}_t,
\end{aligned}$$

wobei Γ den Spannungstemperaturtensor bezeichnet und $\mathcal{D}$ den verallgemeinerten Gradienten:

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma := \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{pmatrix}.$$

Notieren wir schließlich $\mathrm{c} := -\tilde{\psi}_{\mathrm{TT}}(0,0)$ und setzen ohne Einschränkung $\mathrm{T}_0 := 1$, dann hat die modifizierte Transportgleichung (1.18) die Gestalt

$$\mathrm{c}\theta_t(t,x) + \operatorname{div}\mathrm{q}(t,x) + \Gamma'\mathcal{D}\,\mathrm{u}_t(t,x) \quad = \quad \mathrm{f}(t,x). \tag{1.19}$$

Nun zu den Elastizitätsgleichungen:

Bezeichne S wieder die Matrix der Elastizitätskoeffizienten

$$\mathrm{S} = [\mathrm{s}_{ijkl}]_{i,j,k,l} = \left[\frac{\partial}{\partial(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}^j)}\frac{\partial}{\partial(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{u}^l)}\tilde{\psi}(0,0)\right]_{i,j,k,l},$$

dann ist

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div}\tilde{\tau}(0,0) \\
= & \left(\operatorname{div}\tilde{\psi}_{\frac{\partial}{\partial x_\cdot}\mathrm{u}^l}(0,0)\right)_{l=1,2,3} \\
= & \sum_{l=1}^{3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}^j)}\frac{\partial}{\partial(\frac{\partial}{\partial x_\cdot}\mathrm{u}^l)}\tilde{\psi}(0,0)\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}^j + \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial(\frac{\partial}{\partial x_\cdot}\mathrm{u}^l)}\tilde{\psi}(0,0)\frac{\partial}{\partial x_l}\theta \\
= & \sum_{l=1}^{3}\sum_{i,j=1}^{3}\mathrm{s}_{ij\cdot l}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{u}^j - \left(\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_6\\ \gamma_5\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} + \begin{pmatrix}\gamma_6\\ \gamma_2\\ \gamma_4\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2} + \begin{pmatrix}\gamma_5\\ \gamma_4\\ \gamma_3\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\theta \\
= & \mathcal{D}'\mathrm{S}\mathcal{D}\,\mathrm{u} - \mathcal{D}'\Gamma\,\theta.
\end{aligned}$$

Die modifizierten Elastizitätsgleichungen haben also die Form

$$\mathrm{M}u_{tt} - \mathcal{D}'\mathrm{S}\mathcal{D}\,\mathrm{u} + \mathcal{D}'\Gamma\,\theta \;=\; \mathrm{F}. \tag{1.20}$$

Die Gleichungen (1.16), (1.19), (1.20) bilden das System der **Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“**

$$\begin{cases} \mathrm{M}u_{tt} - \mathcal{D}'\mathrm{S}\mathcal{D}\,\mathrm{u} + \mathcal{D}'\Gamma\,\theta &= \mathrm{F} \\ c\theta_t + \operatorname{div}\mathrm{q} + \Gamma'\mathcal{D}\,\mathrm{u}_t &= \mathrm{f} \\ \tau_0 \mathrm{q}_t + \mathrm{q} + \kappa\nabla\theta &= 0 \end{cases}. \tag{1.21}$$

Im Fall eines homogenen und isotropen Mediums, d.h. mit

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wird Hookes Gesetz (1.4) zu

$$\tau_{ij} \;=\; 2\mu e_{ij} + (\lambda \operatorname{spur} e - \gamma\theta) \tag{1.22}$$

und Ohms Gesetz (1.12) zu

$$c\theta_t + \operatorname{div}\mathrm{q} + \gamma \operatorname{spur} e_t \;=\; \mathrm{f}. \tag{1.23}$$

Die homogen-isotropen Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“ lauten dann

$$\begin{cases} \mathrm{M}u_{tt} - \mu\Delta\mathrm{u} - (\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\mathrm{u} + \gamma\nabla\theta &= \mathrm{F} \\ c\theta_t + \operatorname{div}\mathrm{q} + \gamma\operatorname{div}\mathrm{u}_t &= \mathrm{f} \\ \tau_0\mathrm{q}_t + \mathrm{q} + \kappa\nabla\theta &= 0 \end{cases}. \tag{1.24}$$

Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen

Koppeln wir die Magneto-Elastizitätsgleichungen mit der Wärmeleitungsgleichung, so kommt es wiederum zu Überlagerungseffekten, welche die Transportgleichung und das Ohmsche Gesetz modifizieren.

Gleichung (1.12) bzw. (1.23) liest sich dann als

$$c\theta_t + \operatorname{div}\mathrm{q} + \gamma \operatorname{spur} e_t + \pi_0 \operatorname{div}\mathrm{J} \;=\; \mathrm{f}, \tag{1.25}$$

wobei π_0 Strom- und Wärmeflussdichte in Beziehung setzt.

Aus Gleichung (1.9) wird

$$\mathrm{J} \;=\; \sigma\,(\mathrm{E} + \mathrm{u}_t \times \mathrm{B}) + \rho\mathrm{u}_t - \mathrm{k}_0\nabla\theta, \tag{1.26}$$

wobei k_0 ein Maß für das entgegen gerichtete elektrische Feld ist, das vom Temperaturgradienten erzeugt wird.

Diese beiden neuen Phänomene werden im Folgenden allerdings ignoriert; außerdem vernachlässigen wir die Kräfte F und f.

Unsere **Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“** lauten

$$\left\{\begin{array}{rcl} Mu_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u - \mu_0(\nabla\times h)\times H_0 + \gamma\nabla\theta & = & 0 \\ \sigma\mu_0 h_t - \Delta h - \sigma\mu_0\nabla\times(u_t\times H_0) & = & 0 \\ c\theta_t + \operatorname{div} q + \gamma \operatorname{div} u_t & = & 0 \\ \tau_0 q_t + q + \kappa\nabla\theta & = & 0 \end{array}\right. . \tag{1.27}$$

Die klassischen Thermoelastizitätsgleichungen im linearen und nichtlinearen Fall werden in [Ji] ausführlich diskutiert; zentrale Resultate für das entsprechende Modell mit „second sound“ und ein energetischer Vergleich der beiden Modelle werden in [Ir1] hergeleitet. In [We1] werden höhere Taylorentwicklungen für das relaxierte Wärmeleitungsgesetz von Fourier betrachtet.

Weitere Ausführungen zur klassischen Magneto-Elastizität und Magneto-Thermo-Elastizität finden sich in [Pa1] und der dort angegeben Literatur sowie in [Pa3] und den Literaturangaben in [Mu1].

2 Hilbertraumformulierung und Wohlgestelltheit

Wir beweisen in diesem Abschnitt, dass das System der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen, aufgefasst als Cauchy-Problem im üblichen $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$-Hilbertraum, eine eindeutig bestimmte, klassisch in der Zeitvariablen t differenzierbare Lösung $V : \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ besitzt, die stetig ist als Abbildung $V : \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{D}(A)$ in den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ des x-Differenzialoperators A und die stetig von den Anfangsdaten V_0 abhängt.

Wir benutzen dazu die gleichen Methoden, mit welchen in [Ji] die Wohlgestelltheit der linearen Thermoelastizitätsgleichungen nachgewiesen wird.

Durch Transformation auf erste Ordnung

$$V := \begin{pmatrix} S\mathcal{D}u \\ u_t \\ h \\ \theta \\ q \end{pmatrix}, \qquad V_0 := \begin{pmatrix} S\mathcal{D}u_0 \\ u_1 \\ h_0 \\ \theta_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} V_t + AV &= 0 \\ V(0) &= V_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

mit Operator

$$A := \underbrace{\begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha}\mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varkappa}{\rho\tau_0}\mathrm{Id} \end{pmatrix}}_{=:Q} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}' & 0 & -\alpha(\nabla\times\cdot)\times\vec{H} & \mathcal{D}'\Gamma & 0 \\ 0 & -\alpha\nabla\times(\cdot\times\vec{H}) & -\frac{\alpha}{\beta}\nabla'\Lambda\nabla & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma'\mathcal{D} & 0 & 0 & \rho\nabla' \\ 0 & 0 & 0 & \rho\nabla & \frac{\rho}{\varkappa} \end{pmatrix}}_{=:N}$$

auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} := \mathcal{L}^2$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &:= \{V \in \mathcal{H} \mid AV \in \mathcal{H}\} \\ &:= \{V \in \mathcal{H} \mid \exists W \in \mathcal{H} : \forall \Phi \in \mathcal{C}_0^\infty : \langle V, A'\Phi\rangle_{\mathcal{L}^2} = -\langle W, \Phi\rangle_{\mathcal{L}^2}\}. \end{aligned}$$

Wir versehen $\mathcal{H}$ mit dem modifizierten $\mathcal{L}^2$-Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} := \langle \cdot, Q^{-1} \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

und zeigen, dass A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator ist mit

$$(-\infty, 0) \subseteq \varrho(A) \qquad (\varrho(A) \text{ die Resolventenmenge von } A)$$

und die folgende Resolventenabschätzung erfüllt:

$$\forall \lambda < 0 : ||(A-\lambda)^{-1}||_{\mathcal{L}_b(\mathcal{H})} \leq -\frac{1}{\lambda}. \qquad (||\cdot||_{\mathcal{L}_b(\mathcal{H})} \text{ die Operatornorm})$$

Der Satz von Hille & Yosida liefert dann, dass A eine $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe $(e^{tA})_{t\geq 0}$ erzeugt. Insbesondere ist das Cauchy-Problem (2.1) wohlgestellt und die Lösung V besitzt die Darstellung

$$V(t) = e^{tA} V_0.$$

- A ist dicht definiert, denn $\mathcal{C}_0^\infty \subseteq \mathcal{D}(A)$.
- A ist abgeschlossen: Seien $(V_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ und $V, W \in \mathcal{H}$ mit $V_n \to V$ und $AV_n \to W$ in $\mathcal{H}$. Sei weiter $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ beliebig, dann gilt $\langle AV_n, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} \to \langle W, \Phi \rangle_{\mathcal{H}}$.

Wir bezeichnen ab jetzt das Standard-$\mathcal{L}^2$-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2}$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $||\cdot||_{\mathcal{L}^2}$ mit $||\cdot||$.

Wähle zunächst $\Phi = (\Phi^1, 0, 0, 0, 0)'$, dann

$$\begin{array}{rcl} \langle -\mathcal{D}V_n^2, \Phi^1 \rangle & \longrightarrow & \langle S^{-1}W^1, \Phi^1 \rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle S^{-1}W^1, \Phi^1 \rangle & = & \langle V^2, \mathcal{D}'\Phi^1 \rangle, \end{array}$$

d.h. $\mathcal{D}V^2 \in \mathcal{L}^2$ und $-S\mathcal{D}V^2 = W^1$.

Wähle $\Phi = (0, 0, 0, \Phi^4, 0)'$, dann

$$\begin{array}{rcl} \langle \Gamma'\mathcal{D}V_n^2 + \rho\nabla' V_n^5, \Phi^4 \rangle & \longrightarrow & \langle cW^4, \Phi^4 \rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle -\frac{c}{\rho}W^4 + \frac{1}{\rho}\Gamma'\mathcal{D}V^2, \Phi^4 \rangle & = & \langle V^5, \nabla\Phi^4 \rangle, \end{array}$$

d.h. $\nabla' V^5 \in \mathcal{L}^2$ und $\frac{\rho}{c}\nabla' V^5 + \frac{1}{c}\Gamma'\mathcal{D}V^2 = W^4$.

Wähle $\Phi = (0, 0, 0, 0, \Phi^5)'$, dann

$$\begin{array}{rcl} \langle \rho\nabla V_n^4 + \frac{\rho}{\varkappa}V_n^5, \Phi^5 \rangle & \longrightarrow & \langle \frac{\rho\tau_0}{\varkappa}W^5, \Phi^5 \rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle -\frac{\tau_0}{\varkappa}W^5 + \frac{1}{\varkappa}V^5, \Phi^5 \rangle & = & -\rho\langle V^4, \nabla'\Phi^5 \rangle, \end{array}$$

d.h. $\nabla V^4 \in \mathcal{L}^2$ und $\frac{\varkappa}{\tau_0}\nabla V^4 + \frac{1}{\tau_0}V^5 = W^5$.

Wähle $\Phi = (0, 0, \Phi^3, 0, 0)'$, dann

$$\begin{array}{rcl} \langle -\alpha\nabla \times (V^2 \times \vec{H}) - \frac{\alpha}{\beta}\nabla'\Lambda\nabla V_n^3, \Phi^3 \rangle & \longrightarrow & \langle \frac{\alpha}{\beta}W^3, \Phi^3 \rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle -W^3 - \beta\nabla \times (V^2 \times \vec{H}), \Phi^3 \rangle & = & \langle V^3, \nabla'\Lambda\nabla\Phi^3 \rangle, \end{array}$$

d.h. $\nabla'\Lambda\nabla V^3 \in \mathcal{L}^2$ und $-\nabla'\Lambda\nabla V^3 - \beta\nabla \times (V^2 \times \vec{H}) = W^3$.

Wähle schließlich $\Phi = (0, \Phi^2, 0, 0, 0)'$, dann

$$\begin{array}{rcl} \langle -\mathcal{D}'V_n^1 - \alpha(\nabla \times V_n^3) \times \vec{H} + \mathcal{D}'\Gamma V_n^4, \Phi^2 \rangle & \longrightarrow & \langle MW^2, \Phi^2 \rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle MW^2 + \alpha(\nabla \times V^3) \times \vec{H} - \mathcal{D}'\Gamma V^4, \Phi^2 \rangle & = & \langle V^1, \mathcal{D}\Phi^2 \rangle, \end{array}$$

d.h. $\mathcal{D}'V^1 \in \mathcal{L}^2$ und $-M^{-1}\mathcal{D}'V^1 - \alpha M^{-1}(\nabla \times V^3) \times \vec{H} + M^{-1}\mathcal{D}'\Gamma V^4 = W^2$.

Insgesamt also $V \in \mathcal{D}(A)$ und $AV = W$, d.h. A ist abgeschlossen.

• Bezeichne A^* den zu A adjungierten Operator. Dann gilt $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$, wobei A^* die Darstellung

$$A^* = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & \alpha(\nabla \times \cdot) \times \vec{H} & -\mathcal{D}'\Gamma & 0 \\ 0 & \alpha\nabla \times (\cdot \times \vec{H}) & -\frac{\alpha}{\beta}\nabla'\Lambda\nabla & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma'\mathcal{D} & 0 & 0 & -\rho\nabla' \\ 0 & 0 & 0 & -\rho\nabla & \frac{\rho}{\varkappa} \end{pmatrix}$$

besitzt: Sei $W \in \mathcal{D}(A)$, dann gilt für alle $V \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{aligned} \langle AV, W\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle -\mathcal{D}V^2, W^1\rangle + \langle -\mathcal{D}'V^1, W^2\rangle + \langle -\alpha(\nabla \times V^3) \times \vec{H}, W^2\rangle + \langle \mathcal{D}'\Gamma V^4, W^2\rangle \\ &\quad + \langle -\alpha\nabla \times (V^2 \times \vec{H}), W^3\rangle + \langle -\tfrac{\alpha}{\beta}\nabla'\Lambda\nabla V^3, W^3\rangle + \langle \Gamma'\mathcal{D}V^2, W^4\rangle \\ &\quad + \langle \rho\nabla' V^5, W^4\rangle + \langle \rho\nabla V^4, W^5\rangle + \langle \tfrac{\rho}{\varkappa}V^5, W^5\rangle \\ &= \langle V^2, \mathcal{D}'W^1\rangle + \langle V^1, \mathcal{D}W^2\rangle + \langle V^3, \alpha\nabla \times (W^2 \times \vec{H})\rangle + \langle V^4, -\Gamma'\mathcal{D}W^2\rangle \\ &\quad + \langle V^2, \alpha(\nabla \times W^3) \times \vec{H}\rangle + \langle V^3, -\tfrac{\alpha}{\beta}\nabla'\Lambda\nabla W^3\rangle + \langle V^2, -\mathcal{D}'\Gamma W^4\rangle \\ &\quad + \langle V^5, -\rho\nabla W^4\rangle + \langle V^4, -\rho\nabla' W^5\rangle + \langle V^5, \tfrac{\rho}{\varkappa}W^5\rangle \\ &= \langle V, A^*W\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$ mit A^* wie angegeben.

Sei andererseits $W \in \mathcal{D}(A^*)$, d.h. es gibt ein $F \in \mathcal{L}^2$ mit $\langle AV, W\rangle_{\mathcal{H}} = \langle V, F\rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $V \in \mathcal{D}(A)$. Wir müssen zeigen, dass $W \in \mathcal{D}(A)$ mit $A^*W = F$.

Wähle zunächst $V = (V^1, 0, 0, 0, 0)'$, dann

$$\langle -\mathcal{D}'V^1, W^2\rangle = \langle V^1, S^{-1}F^1\rangle,$$

d.h. $\mathcal{D}W^2 \in \mathcal{L}^2$ und $S\mathcal{D}W^2 = F^1$.

Wähle $V = (0, 0, 0, V^4, 0)'$, dann

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}'\Gamma V^4, W^2\rangle + \langle \rho\nabla V^4, W^5\rangle &= \langle V^4, cF^4\rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle V^4, \tfrac{c}{\rho}F^4 + \tfrac{1}{\rho}\Gamma'\mathcal{D}W^2\rangle &= \langle \nabla V^4, W^5\rangle, \end{aligned}$$

d.h. $\nabla' W^5 \in \mathcal{L}^2$ und $-\frac{1}{c}\Gamma'\mathcal{D}W^2 - \frac{\rho}{c}\nabla' W^5 = F^4$.

Wähle $V = (0, 0, 0, 0, V^5)$, dann

$$\begin{aligned} \langle \rho\nabla' V^5, W^4\rangle + \langle \tfrac{\rho}{\varkappa}V^5, W^5\rangle &= \langle V^5, \tfrac{\rho\tau_0}{\varkappa}F^5\rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle V^5, \tfrac{\tau_0}{\varkappa}F^5 - \tfrac{1}{\varkappa}W^5\rangle &= \langle \nabla' V^5, W^4\rangle, \end{aligned}$$

d.h. $\nabla W^4 \in \mathcal{L}^2$ und $\frac{1}{\tau_0}W^5 - \frac{\varkappa}{\tau_0}\nabla W^4 = F^5$.

Wähle $V = (0, 0, V^3, 0, 0)$, dann

$$\begin{aligned} \langle -\alpha(\nabla \times V^3) \times \vec{H}, W^2\rangle + \langle -\tfrac{\alpha}{\beta}\nabla'\Lambda\nabla V^3, W^3\rangle &= \langle V^3, \tfrac{\beta}{\alpha}F^3\rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle V^3, -F^3 + \beta\nabla \times (W^2 \times \vec{H})\rangle &= \langle \nabla'\Lambda\nabla V^3, W^3\rangle, \end{aligned}$$

d.h. $\nabla'\Lambda\nabla W^3 \in \mathcal{L}^2$ und $\beta\nabla \times (W^2 \times \vec{H}) - \nabla'\Lambda\nabla W^3 = F^3$.

Wähle schließlich $V = (0, V^2, 0, 0, 0)$, dann

$$\begin{aligned} \langle -\mathcal{D}V^2, W^1\rangle + \langle -\alpha\nabla \times (V^2 \times \vec{H}), W^3\rangle + \langle \Gamma'\mathcal{D}V^2, W^4\rangle &= \langle V^2, MF^2\rangle \\ \Longrightarrow \quad \langle V^2, -MF^2 + \alpha(\nabla \times W^3) \times \vec{H} - \mathcal{D}'\Gamma W^4\rangle &= \langle \mathcal{D}V^2, W^1\rangle, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{D}'W^1 \in \mathcal{L}^2$ und $M^{-1}\mathcal{D}'W^1 + \alpha M^{-1}(\nabla \times W^3) \times \vec{H} - M^{-1}\mathcal{D}'\Gamma W^4 = F^2$.

Insgesamt also $W \in \mathcal{D}(A)$ und $A^*W = F$.

- A ist dissipativ: Sei $V \in \mathcal{D}(A)$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle AV, V\rangle_{\mathcal{H}} &= \mathrm{Re}\langle -\mathcal{D}V^2, V^1\rangle + \mathrm{Re}\langle -\mathcal{D}'V^1, V^2\rangle + \mathrm{Re}\langle -\alpha(\nabla \times V^3) \times \vec{H}, V^2\rangle \\
&\quad + \mathrm{Re}\langle \mathcal{D}'\Gamma V^4, V^2\rangle + \mathrm{Re}\langle -\alpha\nabla \times (V^2 \times \vec{H}), V^3\rangle + \mathrm{Re}\langle -\tfrac{\alpha}{\beta}\nabla'\Lambda\nabla V^3, V^3\rangle \\
&\quad + \mathrm{Re}\langle \Gamma'\mathcal{D}V^2, V^4\rangle + \mathrm{Re}\langle \rho\nabla' V^5, V^4\rangle + \mathrm{Re}\langle \rho\nabla V^4, V^5\rangle + \mathrm{Re}\langle \tfrac{\rho}{\varkappa}V^5, V^5\rangle \\
&= \tfrac{\alpha}{\beta}\mathrm{Re}\langle \Lambda\nabla V^3, \nabla V^3\rangle + \tfrac{\rho}{\varkappa}\mathrm{Re}\langle V^5, V^5\rangle \\
&\geq \tilde{\lambda}\tfrac{\alpha}{\beta}||\nabla V^3||^2 + \tfrac{\rho}{\varkappa}||V^5||^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

- Zur Resolventenabschätzung: Seien $\lambda \in (-\infty, 0)$ und $\mathcal{V} \in \mathcal{D}(A)$, dann gilt

$$||(A-\lambda)V||||V|| \geq \mathrm{Re}\langle (A-\lambda)V, V\rangle \geq \tilde{\lambda}\frac{\alpha}{\beta}||\nabla V^3||^2 + \frac{\rho}{\varkappa}||V^5||^2 - \lambda||V||^2 \geq -\lambda||V||^2.$$

Ist nun $V \neq 0$, dann folgt $||(A-\lambda)V|| \geq -\lambda||V||$; insbesondere ist $(A-\lambda)$ injektiv und es gilt

$$||(A-\lambda)^{-1}||_{\mathcal{L}_b(\mathcal{H})} \leq -\frac{1}{\lambda},$$

d.h. $(A-\lambda)^{-1}$ ist stetig. Schließlich folgt aus $\mathrm{Re}\langle A^*V, V\rangle = \mathrm{Re}\langle AV, V\rangle$, dass auch $(A^*-\lambda)$ injektiv ist, mit $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Bild}(A-\lambda)} \oplus \mathrm{Kern}(A^*-\lambda)$ erhalten wir also: $\mathrm{Bild}(A-\lambda)$ liegt dicht in $\mathcal{H}$. Insgesamt ist $\lambda \in \varrho(A)$.

Der Satz von Hille & Yosida liefert jetzt: Zu (2.1) existiert genau eine Lösung V. Diese besitzt die Regularität

$$V \in \mathcal{C}^0([0,\infty), \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)).$$

Wir gehen ab jetzt von einer glatten Lösung des Cauchy-Problems (2.1) aus.

3 Abklingverhalten bei „second sound“-Effekt

Im Falle eines beschränkten, thermoelastischen Mediums $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ lässt sich mit Hilfe der ersten Poincaré-Ungleichung leicht zeigen, dass die Temperatur(differenz) θ als Lösung von Fouriers Wärmeleitungsgleichung

$$\theta_t - \varkappa \Delta \theta = 0$$

exponenziell fällt. Auch als Lösung der Wärmeleitungsgleichung nach Cattaneo

$$\begin{cases} \theta_t + \operatorname{div} q &= 0 \\ \tau q_t + q + \varkappa \nabla \theta &= 0 \end{cases}$$

ist θ exponenziell stabil, da θ dann auch die gedämpfte, hyperbolische Wellengleichung

$$\tau \theta_{tt} + \theta_t - \varkappa \Delta \theta = 0$$

erfüllt. In beiden Modellen liegt also das gleiche qualitative Langzeitverhalten vor.

Dies führt, wie schon eingangs erwähnt, dazu, dass sich das asymptotische Verhalten des „second sound“-Modells der Thermoelastizitätsgleichungen qualitativ nicht vom asymptotischen Verhalten des klassischen Modells unterscheidet – fordert man noch entsprechende Randbedingungen, so lässt sich zeigen, dass die Lösungen des klassischen und des „second sound“-Modells im Eindimensionalen bzw. unter zusätzlichen Voraussetzungen wie radialer Symmetrie von Gebiet und Daten auch im Dreidimensionalen exponenziell stabil sind, vgl. etwa [Ra2], [Ra3]. Weiter wird in [Ir1] nachgewiesen, dass die Lösungen der Modelle bei einem hinreichend kleinen Relaxationsparameter auch quantitativ nahe beieinander liegen; in [Ir2] wird unter anderem für verschiedene Materialkonstanten gezeigt, dass die Differenz zwischen den beiden Verschiebungsvektoren beim Vorgang der pulsierten Lasererwärmung nur in einer Größenordnung von $10^{-5}m$ liegt. Dass sich die Lösungen unabhängig vom verwendeten Modell des Wärmeflusses qualitativ und quantitativ ähnlich entwickeln, ist ein Phänomen, das auch bei vielen anderen physikalischen Modellen (bei Verwendung realer Materialkonstanten) beobachtet werden kann.

Es gibt allerdings durchaus auch Situationen in der Thermodynamik, in denen die Energie bei Modellierung des Wärmeflusses mit Fouriers Gesetz exponenziell abklingt, während bei Verwendung von Cattaneos Gesetz die exponenzielle Stabilität verloren geht. In [Fe] wird dies für hyperbolische Schwingungsgleichungen vom „Timoshenko-Typ“ nachgewiesen.

Wir zeigen im Folgenden, dass sich bei der Magneto-Thermo-Elastizität das polynomiale Abklingverhalten des klassischen Modells auf das „second sound“-Modell vererbt.

Eine ausführliche Analyse der Unterschiede zwischen dem klassischen und dem hyperbolischen Modell findet sich in Kapitel 7.

Habe $\vec{H}$ die Gestalt $\vec{H} = (0,0,H)'$ für ein $H > 0$. Mit den Identitäten

$$\begin{aligned} (\nabla \times h) \times \vec{H} &= -H\nabla h^3 + \partial_3 h, \\ \nabla \times (u_t \times \vec{H}) &= H\partial_3 u_t - H(0,0,\nabla' u_t)' \end{aligned}$$

lässt sich (0.5) dann umformen zu

$$\left\{ \begin{aligned} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla\nabla' u + \gamma\nabla\theta + \alpha H\nabla h^3 - \alpha H\partial_3 h &= 0 \\ h_t - \Delta h - \beta H\partial_3 u_t + \beta H(0,0,\nabla' u_t)' &= 0 \\ \theta_t + \rho\nabla' q + \delta\nabla' u_t &= 0 \\ \tau_0 q_t + q + \varkappa\nabla\theta &= 0 \end{aligned} \right. . \tag{3.1}$$

Für die Fourier-Transformierte einer Funktion $f \in \mathcal{L}^2$ schreiben wir

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \;:=\; \hat{f}(\xi) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\xi} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Führen wir für die Fourier-Transformierten der Lösungskomponenten u, h, θ, q die Bezeichnungen $v := \hat{u}$, $w := \hat{h}$, $\vartheta := \hat{\theta}$ und $r := \hat{q}$ in der neuen Variablen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)' \in \mathbb{R}^3$ ein, so erhalten wir aus (3.1) das transformierte System

$$\left\{ \begin{aligned} v_{tt} + \mu|\xi|^2 v + (\mu+\lambda)(\xi\cdot v)\xi - i\gamma\vartheta\xi - i\alpha H w^3\xi + i\alpha H\xi_3 w &= 0 \\ w_t + |\xi|^2 w + i\beta H\xi_3 v_t - i\beta H(0,0,\xi\cdot v_t)' &= 0 \\ \vartheta_t - i\rho(\xi\cdot r) - i\delta(\xi\cdot v_t) &= 0 \\ \tau_0 r_t + r - i\varkappa\vartheta\xi &= 0 \end{aligned} \right. . \tag{3.2}$$

Die assoziierte Energie (vgl. (0.7)) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) \;:=\; \int\limits_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{E}}(t,\xi)\, \mathrm{d}\xi \;:=\; \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(& |v_t|^2 + \mu|\xi|^2|v|^2 + (\mu+\lambda)(\xi\cdot v)^2 \\ & + \frac{\alpha}{\beta}|w|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\vartheta|^2 + \frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r|^2 \Big)(t,\xi)\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Multiplikation der Gleichungen (3.2) mit $\overline{v_t}$, $\frac{\alpha}{\beta}\overline{w}$, $\frac{\gamma}{\delta}\overline{\vartheta}$, $\frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}\overline{r}$ liefert dann für die Ableitung von $\hat{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}(t) &= \mathrm{Re}(v_t\overline{v_{tt}}) + \mu|\xi|^2\mathrm{Re}(v\overline{v_t}) + (\mu+\lambda)\mathrm{Re}(\xi v\overline{\xi v_t}) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{Re}(w\overline{w_t}) + \frac{\gamma}{\delta}\mathrm{Re}(\vartheta\overline{\vartheta_t}) + \frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}\mathrm{Re}(r\overline{r_t}) \\ &= \gamma\mathrm{Re}(i\vartheta\xi\overline{v_t}) + \alpha H\mathrm{Re}(iw^3\xi\overline{v_t}) - \alpha H\xi_3\mathrm{Re}(iw\overline{v_t}) \\ &\quad - \frac{\alpha}{\beta}|\xi|^2 w\overline{w} - \alpha H\xi_3\mathrm{Re}(iv_t\overline{w}) + \alpha H\mathrm{Re}(i\xi v_t\overline{w^3}) \\ &\quad + \frac{\rho\gamma}{\delta}\mathrm{Re}(i\xi r\overline{\vartheta}) + \gamma\mathrm{Re}(i\xi v_t\overline{\vartheta}) - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}r\overline{r} + \frac{\rho\gamma}{\delta}\mathrm{Re}(i\vartheta\xi\overline{r}) \\ &= -\frac{\alpha}{\beta}|\xi|^2|w|^2 - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r|^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Insbesondere kann die Energie nicht zunehmen. Wir suchen nun nach geeigneten Multiplikatoren, um mit Hilfe der Differenzialgleichungen ein Lyapunov-Funktional $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t)$ zu konstruieren, das äquivalent zu $\hat{\mathcal{E}}$ ist und (zunächst punktweise in ξ) exponenziell fällt.

Im Folgenden bezeichne c verschiedene, von t, ξ unabhängige Konstanten.

Lemma 3.1 *Sei $\xi_3 \neq 0$. Für die Funktionale*

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &:= -\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}\left(v_t^1\overline{w^1} + v_t^2\overline{w^2}\right)\right)(t);\\ \Phi_2(t) &:= -\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}\left(v_{tt}^1\overline{w_t^1} + v_{tt}^2\overline{w_t^2}\right)\right)(t)\end{aligned}$$

gelten dann die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1 \leq\ & -\frac{\beta H}{2}(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w|^2\\ & + c\frac{|\xi|^2}{|\xi_3|}(|v^1| + |v^2|)|w| + c|\xi||v^3||w| + c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}|\vartheta||w|\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2 \leq\ & -\frac{\beta H}{2}(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) + c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w_t|^2\\ & + c\frac{|\xi|^2}{|\xi_3|}(|v_t^1| + |v_t^2|)|w_t| + c|\xi||v_t^3||w_t| + c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}|\vartheta_t||w_t|.\end{aligned}$$

Beweis Mit Hilfe der Multiplikatormethode beweisen wir die erste Ungleichung; zur Abschätzung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2$ multiplizieren wir die Ableitungen der dabei benutzten Differenzialgleichungen mit den Ableitungen der benutzten Multiplikatoren und argumentieren analog.

Wir erhalten aus (3.2) für die einzelnen Komponenten von v, w:

$$\begin{aligned}v_{tt}^1 + \mu|\xi|^2 v^1 + (\mu+\lambda)\xi_1(\xi_1 v^1 + \xi_2 v^2) + (\mu+\lambda)\xi_1\xi_3 v^3 & \\ -i\alpha H\xi_1 w^3 + i\alpha H\xi_3 w^1 - i\gamma\vartheta\xi_1 &= 0;\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}v_{tt}^2 + \mu|\xi|^2 v^2 + (\mu+\lambda)\xi_2(\xi_1 v^1 + \xi_2 v^2) + (\mu+\lambda)\xi_2\xi_3 v^3 & \\ -i\alpha H\xi_2 w^3 + i\alpha H\xi_3 w^2 - i\gamma\vartheta\xi_2 &= 0;\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}v_{tt}^3 + \mu|\xi|^2 v^3 + (\mu+\lambda)\xi_3(\xi_1 v^1 + \xi_2 v^2) + (\mu+\lambda)\xi_3\xi_3 v^3 & \\ -i\gamma\vartheta\xi_3 &= 0;\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$w_t^1 + |\xi|^2 w^1 + i\beta H\xi_3 v_t^1 = 0; \tag{3.8}$$

$$w_t^2 + |\xi|^2 w^2 + i\beta H\xi_3 v_t^2 = 0; \tag{3.9}$$

$$w_t^3 + |\xi|^2 w^3 - i\beta H\xi_1 v_t^1 - i\beta H\xi_2 v_t^2 = 0. \tag{3.10}$$

Wir machen bei den folgenden Abschätzungen ständig von der gewichteten binomischen Ungleichung Gebrauch:

$$\boxed{\forall\epsilon > 0 : \forall a, b \in \mathbb{R} : ab \leq \frac{1}{2\epsilon}a^2 + \frac{\epsilon}{2}b^2.} \tag{3.11}$$

Multipliziert man die Gleichungen (3.5), (3.6) mit $\overline{w^1}$, $\overline{w^2}$ und die konjugierten Gleichungen ($\overline{3.8}$), ($\overline{3.9}$) mit v_t^1, v_t^2, dann ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1 &= \mathrm{Re}\left(-\frac{i}{\xi_3}\left(v^1_{tt}\overline{w^1}+v^1_t\overline{w^1_t}+v^2_{tt}\overline{w^2}+v^2_t\overline{w^2_t}\right)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(i\mu\frac{|\xi|^2}{\xi_3}\left(v^1\overline{w^1}+v^2\overline{w^2}\right)+i(\mu+\lambda)\frac{1}{\xi_3}(\xi_1v^1+\xi_2v^2)\left(\xi_1\overline{w^1}+\xi_2\overline{w^2}\right)\right)\\
&\quad+\mathrm{Re}\left(i(\mu+\lambda)v^3\left(\xi_1\overline{w^1}+\xi_2\overline{w^2}\right)+\alpha H\frac{1}{\xi_3}w^3\left(\xi_1\overline{w^1}+\xi_2\overline{w^2}\right)\right)\\
&\quad+\mathrm{Re}\left(-\alpha H\left(|w^1|^2+|w^2|^2\right)+\gamma\frac{1}{\xi_3}\vartheta\left(\xi_1\overline{w^1}+\xi_2\overline{w^2}\right)\right)\\
&\quad+\mathrm{Re}\left(i\frac{|\xi|^2}{\xi_3}\left(v^1_t\overline{w^1}+v^2_t\overline{w^2}\right)-\beta H\left(|v^1_t|^2+|v^2_t|^2\right)\right)\\
&\le c\frac{|\xi|^2}{|\xi_3|}(|v^1|+|v^2|)|w|+c|\xi||v^3||w|+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|w|^2-\alpha H(|w^1|^2+|w^2|^2)\\
&\quad+c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}|\vartheta||w|+c\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}|w|^2+\frac{\epsilon}{2}(|v^1_t|^2+|v^2_t|^2)-\beta H(|v^1_t|^2+|v^2_t|^2)\\
&\le -\frac{\beta H}{2}(|v^1_t|^2+|v^2_t|^2)+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w|^2+c\frac{|\xi|^2}{|\xi_3|}(|v^1|+|v^2|)|w|\\
&\quad+c|\xi||v^3||w|+c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}|\vartheta||w|
\end{aligned}
$$

mit $\epsilon=\beta H$. □

Lemma 3.2 *Wir definieren neue Funktionale*

$$
\begin{aligned}
\Phi_3(t) &:= \mathrm{Re}(v^1_{tt}\overline{v^3_t})(t);\\
\Phi_4(t) &:= \mathrm{Re}(v^2_{tt}\overline{v^3_t})(t).
\end{aligned}
$$

Sei $\tilde{c}:=\dfrac{2\gamma^2}{\mu+\lambda}$. *Dann gelten im Fall* $\xi_1,\xi_3\neq 0$ *die Abschätzungen*

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi_1}{\xi_3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_3 &\le c\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}|v^1_t|^2+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(\xi_1^2|v^1_t|^2+\xi_2^2|v^2_t|^2)+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|w_t|^2\\
&\quad+\tilde{c}\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|\vartheta_t|^2-\frac{\mu+\lambda}{2}\xi_1^2|v^3_t|^2+\frac{\xi_1}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(v^1_{tt}\overline{v^3_{tt}}\right);\\
\frac{\xi_3}{\xi_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_3 &\le c\frac{|\xi|^4}{\xi_1^2}|v^1_t|^2+c\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}(\xi_1^2|v^1_t|^2+\xi_2^2|v^2_t|^2)+c\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}|w_t|^2\\
&\quad+\tilde{c}\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}|\vartheta_t|^2-\frac{\mu+\lambda}{2}\xi_3^2|v^3_t|^2+\frac{\xi_3}{\xi_1}\mathrm{Re}\left(v^1_{tt}\overline{v^3_{tt}}\right);\\
\frac{\xi_2}{\xi_3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_4 &\le c\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}|v^2_t|^2+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(\xi_1^2|v^1_t|^2+\xi_2^2|v^2_t|^2)+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|w_t|^2\\
&\quad+\tilde{c}\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|\vartheta_t|^2-\frac{\mu+\lambda}{2}\xi_2^2|v^3_t|^2+\frac{\xi_2}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(v^2_{tt}\overline{v^3_{tt}}\right).
\end{aligned}
$$

Beweis Es genügt offenbar, nur die erste Abschätzung zu zeigen.

Multiplikation von (3.5') mit $\overline{v_t^3}$ liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\xi_1}{\xi_3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_3 &= \mathrm{Re}\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}v_{ttt}^1\overline{v_t^3}+\frac{\xi_1}{\xi_3}v_{tt}^1\overline{v_{tt}^3}\right)\\
&= -\mu\frac{\xi_1}{\xi_3}|\xi|^2\mathrm{Re}\left(v_t^1\overline{v_t^3}\right)-(\mu+\lambda)\frac{\xi_1^2}{\xi_3}\mathrm{Re}\left((\xi_1v_t^1+\xi_2v_t^2)\overline{v_t^3}\right)-(\mu+\lambda)\xi_1^2|v_t^3|^2\\
&\quad +\alpha H\frac{\xi_1^2}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(iw_t^3\overline{v_t^3}\right)-\alpha H\xi_1\mathrm{Re}\left(iw_t^1\overline{v_t^3}\right)+\gamma\frac{\xi_1^2}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(i\vartheta_t\overline{v_t^3}\right)+\frac{\xi_1}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(v_{tt}^1\overline{v_{tt}^3}\right)\\
&\le c\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}|v_t^1|^2+\frac{\epsilon}{2}\xi_1^2|v_t^3|^2+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(\xi_1^2|v_t^1|^2+\xi_2^2|v_t^2|^2)+\frac{\epsilon}{2}\xi_1^2|v_t^3|^2-(\mu+\lambda)\xi_1^2|v_t^3|^2\\
&\quad +c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|w_t|^2+\frac{\epsilon}{2}\xi_1^2|v_t^3|^2+\tilde{c}\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|\vartheta_t|^2+\frac{\epsilon}{2}\xi_1^2|v_t^3|^2+\frac{\xi_1}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(v_{tt}^1\overline{v_{tt}^3}\right)\\
&= c\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}|v_t^1|^2+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(\xi_1^2|v_t^1|^2+\xi_2^2|v_t^2|^2)+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|w_t|^2+\tilde{c}\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|\vartheta_t|^2-\frac{\mu+\lambda}{2}\xi_1^2|v_t^3|^2\\
&\quad +\frac{\xi_1}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(v_{tt}^1\overline{v_{tt}^3}\right)
\end{aligned}$$

mit $\epsilon=\dfrac{\mu+\lambda}{4}$. □

Lemma 3.3 *Die Funktion*

$$\Psi_1(t) := \frac{\xi_1}{\xi_3}\Phi_3(t)+\frac{\xi_3}{\xi_1}\Phi_3(t)+\frac{\xi_2}{\xi_3}\Phi_4(t)$$

erfüllt im Falle $\xi_1,\xi_3\neq 0$ *die Abschätzung*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_1 &\le c|\xi|^4\left(\frac{1}{\xi_1^2}+\frac{1}{\xi_3^2}\right)(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+|\xi|^2\left(\frac{1}{\xi_1^2}+\frac{1}{\xi_3^2}\right)(c|w_t|^2+\tilde{c}|\vartheta_t|^2)\\
&\quad -\frac{\mu+\lambda}{2}|\xi|^2|v_t^3|^2+c\left|\frac{\xi_1}{\xi_3}+\frac{\xi_3}{\xi_1}+\frac{\xi_2}{\xi_3}\right|(|\xi|^2|v|+|\xi||\vartheta|)(|v_{tt}^1|+|v_{tt}^2|).
\end{aligned}$$

Beweis Addiert man die Abschätzungen aus Lemma 3.2, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_1 &\le c|\xi|^4\left(\frac{1}{\xi_1^2}+\frac{1}{\xi_3^2}\right)(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+|\xi|^2\left(\frac{1}{\xi_1^2}+\frac{1}{\xi_3^2}\right)(c|w_t|^2+\tilde{c}|\vartheta_t|^2)\\
&\quad -\frac{\mu+\lambda}{2}|\xi|^2|v_t^3|^2+c\left|\frac{\xi_1}{\xi_3}+\frac{\xi_3}{\xi_1}+\frac{\xi_2}{\xi_3}\right|(|v_{tt}^1|+|v_{tt}^2|)|v_{tt}^3|.
\end{aligned}$$

Benutzt man noch (3.7):

$$|v_{tt}^3| \le c(|\xi|^2|v|+|\xi||\vartheta|),$$

so ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 3.4 *Seien* $a := a(\xi) := |\xi|^2 \left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_3^2}\right)$, $\xi_1, \xi_3 \neq 0$ *und* $\omega = \omega(c) > 0$ *hinreichend klein, dann erfüllt*

$$\Psi_2(t) \quad := \quad (1+a)|\xi|^2\Phi_1(t) + \omega\Psi_1(t)$$

für ein $\omega_0 = \omega_0(\omega) > 0$*, das nur von* ω *und den Koeffizienten der Differenzialgleichungen abhängt, die Ungleichung*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_2 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{4}(1+a)|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + ca\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w|^2 + ca|\xi|^2|\vartheta|^2 \\
& + ca\frac{|\xi|^4}{|\xi_3|}(|v^1| + |v^2|)|w| + ca|\xi|^3|v^3||w| + c\omega a|w_t|^2 + \tilde{c}\omega a|\vartheta_t|^2 \\
& + c\omega\left|\frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{\xi_2}{\xi_3}\right|(|\xi|^2|v| + |\xi||\vartheta|)(|v_{tt}^1| + |v_{tt}^2|) - \omega_0|\xi|^2|v_t|^2.
\end{aligned}$$

Beweis Mit Lemma 3.1 und Lemma 3.3 können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_2 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{2}(1+a)|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + ca\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w|^2 \\
& + ca\frac{|\xi|^4}{|\xi_3|}(|v^1| + |v^2|)|w| + ca|\xi|^3|v^3||w| + ca\frac{|\xi|^3}{|\xi_3|}|\vartheta||w| \\
& + c\omega a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + c\omega a|w_t|^2 + \tilde{c}\omega a|\vartheta_t|^2 - \omega\frac{\mu+\lambda}{2}|\xi|^2|v_t^3|^2 \\
& + c\omega\left|\frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{\xi_2}{\xi_3}\right|(|\xi|^2|v| + |\xi||\vartheta|)(|v_{tt}^1| + |v_{tt}^2|) \\
\leq \quad & -\frac{\beta H}{4}(1+a)|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + ca\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w|^2 + ca|\xi|^2|\vartheta|^2 \\
& + ca\frac{|\xi|^4}{|\xi_3|}(|v^1| + |v^2|)|w| + ca|\xi|^3|v^3||w| + c\omega a|w_t|^2 + \tilde{c}\omega a|\vartheta_t|^2) \\
& + c\omega\left|\frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{\xi_2}{\xi_3}\right|(|\xi|^2|v| + |\xi||\vartheta|)(|v_{tt}^1| + |v_{tt}^2|) \\
& + |\xi|^2\left(-\frac{\beta H}{4}(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + a\left(-\frac{\beta H}{4} + c\omega\right)(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) - \omega\frac{\mu+\lambda}{2}|v_t^3|^2\right).
\end{aligned}$$

Für $\omega := \min\left\{\frac{\beta H}{4c}, 1\right\}$ und $\omega_0 := \min\left\{\frac{\beta H}{4}, \omega\frac{\mu+\lambda}{2}\right\}$ ist nun

$$\begin{aligned}
& |\xi|^2\left(-\frac{\beta H}{4}(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + a\left(-\frac{\beta H}{4} + c\omega\right)(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) - \omega\frac{\mu+\lambda}{2}|v_t^3|^2\right) \\
\leq \quad & -\omega_0|\xi|^2|v_t|^2,
\end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Lemma 3.5 *Das Funktional*

$$\Phi_5(t) \quad := \quad \mathrm{Re}(v_t\overline{v})(t)$$

erfüllt die Abschätzung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_5 \quad \leq \quad -\frac{\mu}{2}|\xi|^2|v|^2 - \frac{\mu+\lambda}{2}(\xi v)^2 + c(|w|^2+|\vartheta|^2) + |v_t|^2.$$

Beweis Multiplizieren wir die erste Gleichung des Systems (3.2) mit $\overline{v}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_5 &= \mathrm{Re}(v_{tt}\overline{v} + v_t\overline{v_t}) \\
&= -\mu|\xi|^2|v|^2 - (\mu+\lambda)(\xi v)^2 + \gamma\mathrm{Re}(i\vartheta(\xi\overline{v})) \\
&\quad +\alpha H\mathrm{Re}(iw^3(\xi\overline{v})) - \alpha H\mathrm{Re}(i\xi_3(w\overline{v})) + |v_t|^2 \\
&\leq -\mu|\xi|^2|v|^2 - (\mu+\lambda)(\xi v)^2 + c|\vartheta|^2 + \frac{\epsilon_1}{2}(\xi v)^2 \\
&\quad +c|w|^2 + \frac{\epsilon_2}{2}(\xi v)^2 + c|w|^2 + \frac{\epsilon_3}{2}|\xi|^2|v|^2 + |v_t|^2 \\
&= -\frac{\mu}{2}|\xi|^2|v|^2 - \frac{\mu+\lambda}{2}(\xi v)^2 + c(|w|^2+|\vartheta|^2) + |v_t|^2
\end{aligned}$$

für $\epsilon_1 = \dfrac{\mu+\lambda}{2}$, $\epsilon_2 = \dfrac{\mu+\lambda}{2}$ und $\epsilon_3 = \mu$. □

Lemma 3.6 *Die Funktion*

$$\Psi_3(t) \quad := \quad \Psi_2(t) + \frac{\omega_0}{2}|\xi|^2\Phi_5(t)$$

erfüllt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und eine von ε abhängige Konstante $c(\varepsilon) > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_3 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{4}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2) + \left(c(\varepsilon) + \frac{c}{\omega_0}\right)a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 \\
& +ca|\xi|^2|\vartheta|^2 + c|\xi|^2|r|^2 + \varepsilon\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2) \\
& +c\omega_0 a|w_t|^2 + \tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2 + c\omega_0 a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2) - \frac{\omega_0}{4}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

Beweis Lemma 3.4 und Lemma 3.5 ergeben zusammen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_3 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{4}(1+a)|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2) + ca\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w|^2 + ca|\xi|^2|\vartheta|^2 \\
& +ca\frac{|\xi|^4}{|\xi_3|}(|v^1|+|v^2|)|w| + ca|\xi|^3|v^3||w| + c\omega_0 a|w_t|^2 + \tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2 \\
& +c\omega_0\left|\frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{\xi_2}{\xi_3}\right|(|\xi|^2|v| + |\xi||\vartheta|)(|v_{tt}^1| + |v_{tt}^2|) - \omega_0|\xi|^2|v_t|^2 \\
& -\mu\frac{\omega_0}{4}|\xi|^4|v|^2 - (\mu+\lambda)\frac{\omega_0}{4}|\xi|^2(\xi v)^2 + c\frac{\omega_0}{2}|\xi|^2(|w|^2+|\vartheta|^2) + \frac{\omega_0}{2}|\xi|^2|v_t|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & -\frac{\beta H}{4}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+ca\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w|^2+ca|\xi|^2|\vartheta|^2\\
& +\varepsilon\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2)+c(\varepsilon)a^2|\xi|^2|w|^2+\frac{\epsilon_1}{2}|\xi|^4|v|^2+\frac{c}{\epsilon_1}a^2|\xi|^2|w|^2\\
& +c\omega_0 a|w_t|^2+\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2+\frac{\epsilon_2}{2}\omega_0(|\xi|^4|v|^2+|\xi|^2|\vartheta|^2)+c\omega_0 a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)\\
& +\left[c|\xi|^2(|w|^2+|\vartheta|^2+|r|^2)-\frac{\omega_0}{2}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}\right]+c\frac{\omega_0}{2}|\xi|^2(|w|^2+|\vartheta|^2)\\
\leq\ & -\frac{\beta H}{4}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\left(c(\varepsilon)+\frac{c}{\omega_0}\right)a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2+ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2\\
& +\varepsilon\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2)+c\omega_0 a|w_t|^2+\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2+c\omega_0 a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{4}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}
\end{aligned}
$$

mit $\epsilon_1=\dfrac{\mu\omega_0}{4}$ und $\epsilon_2=\dfrac{\mu}{4}$. □

Wir bemerken, dass die Konstanten c nicht jetzt und auch nicht später von ω_0 abhängen.

Lemma 3.7 *Das Funktional*

$$\Phi_6(t) \quad := \quad \mathrm{Re}\left(v_t^1\overline{v^1}+v_t^2\overline{v^2}\right)(t)$$

erfüllt die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_6 \quad \leq\ & -\frac{\mu}{2}|\xi|^2(|v^1|^2+|v^2|^2)+\frac{\mu+\lambda}{2}\xi_3^2|v^3|^2\\
& +c(|w|^2+|\vartheta|^2)+(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2).
\end{aligned}
$$

Beweis Multiplikation der Differenzialgleichungen (3.6), (3.7) mit $\overline{v^1}$, $\overline{v^2}$ liefert

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_6 \quad =\ & \mathrm{Re}\left(v_{tt}^1\overline{v^1}+v_{tt}^2\overline{v^2}+v_t^1\overline{v_t^1}+v_t^2\overline{v_t^2}\right)\\
=\ & \mathrm{Re}(-\mu|\xi|^2(v^1\overline{v^1}+v^2\overline{v^2})-(\mu+\lambda)(\xi v)(\xi_1\overline{v^1}+\xi_2\overline{v^2})\\
& +i\gamma\vartheta(\xi_1\overline{v^1}+\xi_2\overline{v^2})+i\alpha H w^3(\xi_1\overline{v^1}+\xi_2\overline{v^2})\\
& -i\alpha H\xi_3(w^1\overline{v^1}+w^2\overline{v^2})+v_t^1(\overline{v_t^1}+\overline{v_t^2v_t^2}))\\
\leq\ & -\mu|\xi|^2(|v^1|^2+|v^2|^2)-(\mu+\lambda)|\xi_1v^1+\xi_2v^2|^2\\
& +\frac{\epsilon_1}{2}(\mu+\lambda)|\xi_1v^1+\xi_2v^2|^2+\frac{\mu+\lambda}{2}\xi_3^2|v^3|^2\\
& +\frac{\epsilon_2}{2}|\xi_1v^1+\xi_2v^2|^2+c|\vartheta|^2+\frac{\epsilon_3}{2}|\xi|^2(|v^1|^2+|v^2|^2)+c|w|^2\\
& +\frac{\epsilon_4}{2}|\xi_1v^1+\xi_2v^2|^2+c|w|^2+(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)\\
\leq\ & -\frac{\mu}{2}|\xi|^2(|v^1|^2+|v^2|^2)+\frac{\mu+\lambda}{2}\xi_3^2|v^3|^2\\
& +c(|w|^2+|\vartheta|^2)+(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)
\end{aligned}
$$

mit $\epsilon_1=\dfrac{1}{2}$, $\epsilon_2=\dfrac{\mu+\lambda}{4}$, $\epsilon_3=\mu$, $\epsilon_4=\dfrac{\mu+\lambda}{4}$. □

Lemma 3.8 *Für ein hinreichend ein kleines ω_0 und ein hinreichend kleines, nur von ω_0 und den Koeffizienten der Differenzialgleichungen abhängiges $\varepsilon = \varepsilon(\omega_0)$ lässt sich die Ableitung der Funktion*

$$\Psi_4(t) \quad := \quad \Psi_3(t) + \frac{2\mu}{\mu+\lambda}\frac{\omega_0}{8}\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}\Phi_6(t)$$

abschätzen durch

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_4 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{8}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2\\ & +ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2+c\omega_0 a|w_t|^2+\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2\\ & +c\omega_0 a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{8}\hat{\mathcal{E}}-\frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2).\end{aligned}$$

Beweis Nach Lemma 3.6 und Lemma 3.7 gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_4 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{4}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\left(c(\varepsilon)+\frac{c}{\omega_0}\right)a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2\\ & +ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2+\varepsilon\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2)\\ & +c\omega_0 a|w_t|^2+\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2+c\omega_0 a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{4}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}\\ & +\frac{2\mu}{\mu+\lambda}\frac{\omega_0}{8}\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)-\frac{\mu^2}{\mu+\lambda}\frac{\omega_0}{8}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2)\\ & +\mu\frac{\omega_0}{8}|\xi|^4|v^3|^2+c\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}(|w|^2+|\vartheta|^2)\\ \\ \leq \quad & -\frac{\beta H}{8}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2\\ & +ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2+c\omega_0 a|w_t|^2+\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2\\ & +c\omega_0 a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{8}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}-\frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2),\end{aligned}$$

wenn man $\varepsilon = \dfrac{\mu^2}{\mu+\lambda}\dfrac{\omega_0}{16}$ und $\omega_0 < \beta H\dfrac{\mu+\lambda}{2\mu}$ wählt. □

Lemma 3.9 *Die Funktion*

$$\Psi_5(t) \quad := \quad \Psi_4(t) + a\Phi_2(t)$$

erfüllt für ein hinreichend kleines ω_0 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_5 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{16}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2\\ & +ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2+\frac{c}{\omega_0}a^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2+2\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2\\ & -\frac{\beta H}{4}a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{16}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}-\frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2).\end{aligned}$$

Beweis Mit Lemma 3.1 und Lemma 3.8 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_5 \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{8}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 \\
& +ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2+c\omega_0 a|w_t|^2+\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2 \\
& +c\omega_0 a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{8}\hat{\mathcal{E}}-\frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2) \\
& -\frac{\beta H}{2}a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)+ca\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}(1+|\xi|^2)|w_t|^2 \\
& +ca\frac{|\xi|^2}{|\xi_3|}(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)|w_t|+ca|\xi||v_t^3||w_t|+ca\frac{|\xi|}{|\xi_3|}|\vartheta_t||w_t| \\
\leq \quad & -\frac{\beta H}{8}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 \\
& +ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2+c\omega_0 a|w_t|^2+\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2 \\
& +\left(c\omega_0-\frac{\beta H}{2}\right)a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{8}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}} \\
& -\frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2)+ca^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2 \\
& +\left[\frac{\epsilon_1}{2}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\frac{\epsilon_2}{2}|\xi|^2|v_t|^2+\frac{\epsilon_3}{2}a|\vartheta_t|^2\right] \\
& +\left[\frac{c}{\epsilon_1}+\frac{c}{\epsilon_2}+\frac{c}{\epsilon_3}\right]a^2|w_t|^2 \\
\leq \quad & -\frac{\beta H}{16}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)+\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 \\
& +ca|\xi|^2|\vartheta|^2+c|\xi|^2|r|^2+\frac{c}{\omega_0}a^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2+2\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2 \\
& -\frac{\beta H}{4}a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)-\frac{\omega_0}{16}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}-\frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2)
\end{aligned}
$$

mit $\epsilon_1=\dfrac{\beta H}{8}$, $\epsilon_2=\dfrac{\omega_0}{8}$ und $\epsilon_3=\tilde{c}\omega_0$. □

Lemma 3.10 *Für das Funktional*

$$
\Phi_7(t) \quad := \quad \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}r_t^3\overline{\vartheta_t}\right)(t)
$$

gilt die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_7 \quad \leq \quad & -\frac{\varkappa}{2\tau_0}|\vartheta_t|^2+ca\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2+\frac{\beta H}{8}(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2) \\
& +c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}\left(|\xi|^2|v|+|\xi||\vartheta|\right)|r_t|.
\end{aligned}
$$

Beweis Die Differenzialgleichungen (3.2) liefern

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_7 &= \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}\left(r_{tt}^3\overline{\vartheta_t}+r_t^3\overline{\vartheta_{tt}}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{\tau_0}\frac{1}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(ir_t^3\overline{\vartheta_t}\right)-\frac{\varkappa}{\tau_0}\mathrm{Re}\left(\vartheta_t\overline{\vartheta_t}\right)\\
&\quad +\rho\frac{1}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(r_t^4(\xi\overline{r_t})\right)+\delta\frac{1}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(r_t^3(\xi\overline{v_{tt}})\right)\\
&\le \frac{\epsilon_1}{2}|\vartheta_t|^2+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}\frac{|r_t|^2}{|\xi|^2}-\frac{\varkappa}{\tau_0}|\vartheta_t|^2+c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}|r_t|^2\\
&\quad +\frac{\epsilon_2}{2}(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)+c\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}|r_t|^2+c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}|v_{tt}^3||r_t|\\
&\le -\frac{\varkappa}{2\tau_0}|\vartheta_t|^2+ca\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2+\frac{\beta H}{8}(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)\\
&\quad +c\frac{|\xi|}{|\xi_3|}\left(|\xi|^2|v|+|\xi||\vartheta|\right)|r_t|
\end{aligned}$$

mit $\epsilon_1=\dfrac{\varkappa}{\tau_0}$ und $\epsilon_2=\dfrac{\beta H}{4}$. □

Wir halten noch fest, dass eine unserer generischen Konstanten c jetzt antiproportional von τ_0 abhängt:

$$c\sim\frac{1}{\tau_0}.$$

Im Augenblick spielt das keine Rolle, aber wir werden später die Energie $\mathcal{E}^0$ des klassischen Systems der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit der Energie $\mathcal{E}^\tau$ des relaxierten Systems vergleichen und insbesondere den Grenzwert

$$\lim_{\tau_0\to 0}\mathcal{E}^\tau-\mathcal{E}^0$$

untersuchen.

Lemma 3.11 *Die Funktion*

$$\Phi(t) := \Psi_5(t)+a\Phi_7(t)$$

erfüllt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi &\le -\frac{\omega_0}{32}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}-\frac{\varkappa}{4\tau_0}a|\vartheta_t|^2-\frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2+|v^2|^2)\\
&\quad -\frac{\beta H}{16}a|\xi|^2(|v_t^1|^2+|v_t^2|^2)-\frac{\beta H}{8}a(|v_{tt}^1|^2+|v_{tt}^2|^2)\\
&\quad +\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2+ca(1+|\xi|^2)|r|^2\\
&\quad +\frac{c}{\omega_0}a^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2+\frac{c}{\omega_0}a^3\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2.
\end{aligned}$$

Beweis Aus den Differenzialgleichungen (3.2) erhalten wir

$$|\vartheta|^2 \quad \leq \quad \frac{c}{|\xi|^2}(|r_t|^2 + |r|^2);$$

Lemma 3.9 und Lemma 3.10 ergeben dann zusammen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \quad \leq \quad & -\frac{\beta H}{16}a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + \frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 \\
& +ca|\xi|^2|\vartheta|^2 + c|\xi|^2|r|^2 + \frac{c}{\omega_0}a^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2 + 2\tilde{c}\omega_0 a|\vartheta_t|^2 \\
& -\frac{\beta H}{4}a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) - \frac{\omega_0}{16}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}} - \frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2 + |v^2|^2) \\
& -\frac{\varkappa}{2\tau_0}a|\vartheta_t|^2 + ca^2\left(1 + \frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2 + \frac{\beta H}{8}a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) \\
& +ca\frac{|\xi|}{|\xi_3|}(|\xi|^2|v| + |\xi||\vartheta|)|r_t| \\
\\
\leq \quad & -\frac{\beta H}{16}a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + \frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 \\
& +ca^2(1+|\xi|^2)|r|^2 + \frac{c}{\omega_0}a^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2 + ca|r_t|^2 \\
& -\frac{\beta H}{8}a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) - \frac{\omega_0}{16}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}} - \frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2 + |v^2|^2) \\
& +\left(2\tilde{c}\omega_0 - \frac{\varkappa}{2\tau_0}\right)a|\vartheta_t|^2 + ca^2\left(1 + \frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2 \\
& +\frac{\epsilon}{2}\left(|\xi|^4|v|^2 + |\xi|^2|\vartheta|^2\right) + \frac{c}{\epsilon}\frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}a^2|r_t|^2 \\
\\
\leq \quad & -\frac{\omega_0}{32}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}} - \frac{\varkappa}{4\tau_0}a|\vartheta_t|^2 - \frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2 + |v^2|^2) \\
& -\frac{\beta H}{16}a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) - \frac{\beta H}{8}a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) \\
& +\frac{c}{\omega_0}a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 + ca(1+|\xi|^2)|r|^2 \\
& +\frac{c}{\omega_0}a^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2 + \frac{c}{\epsilon}a^3\left(1 + \frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2
\end{aligned}$$

für $\epsilon := \frac{\omega_0}{32}\min\left\{\mu, \frac{\gamma}{\delta}\right\}$. □

Für $\hat{\mathcal{E}}_1(t) := \hat{\mathcal{E}}(t; v, w, \vartheta, r)$ und $\hat{\mathcal{E}}_2(t) := \hat{\mathcal{E}}(t; v_t, w_t, \vartheta_t, r_t)$ definieren wir

$$\mathcal{L}(t) \quad := \quad \Phi(t) + N_1 a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1(t) + N_2 a^3\left(1 + \frac{1}{|\xi|^2}\right)\hat{\mathcal{E}}_2(t)$$

mit später zu bestimmenden Konstanten $N_1, N_2 > 0$. Dann gilt:

Satz 3.12 *Sind N_1, N_2 groß genug, dann ist $\mathcal{L}$ äquivalent zu $\hat{\mathcal{E}}$ und fällt exponenziell, d.h. für jedes $\xi \in \mathbb{R}^3$ gibt es Konstanten $C_1(\xi), C_2(\xi), C_3(\xi) > 0$ mit*

$$\forall t \geq 0: \qquad C_1(\xi)\hat{\mathcal{E}}(t,\xi) \leq \mathcal{L}(t,\xi) \leq C_2(\xi)\hat{\mathcal{E}}(t,\xi), \qquad \mathcal{L}(t,\xi) \leq \mathcal{L}(0,\xi)e^{-C_3(\xi)t}.$$

Insbesondere fällt $\hat{\mathcal{E}}$ exponenziell.

Beweis In Gleichung (3.4) haben wir gezeigt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}_1 = -\frac{\alpha}{\beta}|\xi|^2|w|^2 - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r|^2.$$

Analog gilt für die Ableitung des Energieterms zweiter Stufe:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}_2 = -\frac{\alpha}{\beta}|\xi|^2|w_t|^2 - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r_t|^2.$$

Definieren wir also

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(t) := {} & |\xi|^2\hat{\mathcal{E}} + a|\vartheta_t|^2 + \frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2 + |v^2|^2) + a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) \\ & + a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) + a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 + a^2(1+|\xi|^2)|w_t|^2 \\ & + a(1+|\xi|^2)|r|^2 + a^3\left(1 + \frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2,\end{aligned}$$

dann gibt es nach Lemma 3.11 ein $d_0 > 0$, so dass für hinreichend groß gewählte Konstanten N_1, N_2 gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L} \leq {} & -\frac{\omega_0}{32}|\xi|^2\hat{\mathcal{E}} - \frac{\varkappa}{4\tau_0}a|\vartheta_t|^2 - \frac{\omega_0}{16}\frac{|\xi|^6}{\xi_3^2}(|v^1|^2 + |v^2|^2) \\ & - \frac{\beta H}{16}a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) - \frac{\beta H}{8}a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) \\ & + \left(\frac{c}{\omega_0} - \frac{\alpha}{\beta}N_1\right)a^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)|w|^2 + \left(c - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}N_1\right)a^2(1+|\xi|^2)|r|^2 \\ & + \left(\frac{c}{\omega_0} - \frac{\alpha}{\beta}N_2\right)a^3(1+|\xi|^2)|w_t|^2 + \left(c - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}N_1\right)a^3\left(1 + \frac{1}{|\xi|^2}\right)|r_t|^2 \\ \leq {} & -d_0\mathcal{N}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Differenzialgleichungen (3.2) können wir $\hat{\mathcal{E}}_2$ gegen $\hat{\mathcal{E}}_1$ abschätzen:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}_2 &\leq c(|v_{tt}|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |w_t|^2 + |\vartheta_t|^2 + |r_t|^2) \\ &\leq c(|\xi|^4|v|^2 + |\xi|^2|\vartheta|^2 + |\xi|^2|w|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |\xi|^4|w|^2 + |\xi|^2|r|^2 + |r|^2) \\ &\leq c(1+|\xi|^2)^2\hat{\mathcal{E}}_1.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\Phi &= (1+a)|\xi|^2\Phi_1 + a\Phi_2 + \omega\left(\frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\Phi_3 + \omega\frac{\xi_2}{\xi_3}\Phi_4 + \frac{\omega_0}{2}|\xi|^2\Phi_5 \\ &\quad + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\frac{\omega_0}{4}\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}\Phi_6 + a\Phi_7 \\ &= -(1+a)|\xi|^2\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}(v_t^1\overline{w^1} + v_t^2\overline{w^2})\right) - a\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}(v_{tt}^1\overline{w_t^1} + v_{tt}^2\overline{w_t^2})\right) \\ &\quad + \omega\left(\frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\mathrm{Re}(v_{tt}^1\overline{v_t^3}) + \omega\frac{\xi_2}{\xi_3}\mathrm{Re}(v_{tt}^2\overline{v_t^3}) + \frac{\omega_0}{2}|\xi|^2\mathrm{Re}(v_t\overline{v}) \\ &\quad + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\frac{\omega_0}{4}\frac{|\xi|^4}{\xi_3^2}\mathrm{Re}(v_t^1\overline{v^1} + v_t^2\overline{v^2}) + a\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}r_t^3\overline{\vartheta_t}\right),\end{aligned}$$

d.h. für ein geeignetes $C > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
|\Phi| &\leq C\Bigg(a^2|v_t|^2 + a|\xi|^2|w|^2 + \frac{a^2}{|\xi|^2}|v_{tt}|^2 + a|w_t|^2 + a|v_{tt}|^2 + |v_t|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 \\
&\quad + |\xi|^2|v|^2 + a|\xi|^2|v_t|^2 + a|\xi|^2|v|^2 + \frac{a^2}{|\xi|^2}|r_t|^2 + a|\vartheta_t|^2\Bigg) \\
&\leq C\left(a(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + a^2\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}\hat{\mathcal{E}}_2\right). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Wir können daher $\mathcal{L}$ auch nach oben gegen $\hat{\mathcal{E}}_1$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\leq |\Phi| + N_1a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + N_2a^3\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\leq (C+N_1)a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + (C+N_2)a^3\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\leq (C+N_1)a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + (C+N_2)a^3\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)(c(1+|\xi|^2)^2\hat{\mathcal{E}}_1) \\
&\leq d_1a^3\left(|\xi|^2+\frac{1}{|\xi|^2}\right)(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

für ein genügend großes $d_1 > 0$. Aus

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L} &\leq -d_0\mathcal{N} \\
&\leq -d_0|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}_1 \\
&\leq -\underbrace{\frac{d_0}{d_1}}_{=:d}\underbrace{\frac{|\xi|^4}{a^3(1+|\xi|^2)(1+|\xi|^4)}}_{=:k(\xi)}\mathcal{L}
\end{aligned}$$

folgt dann mit dem Lemma von Gronwall:

$$\forall t \geq 0 : \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-dk(\xi)t}. \qquad (3.14)$$

Bleibt noch zu zeigen, dass sich $\mathcal{L}$ nach unten gegen $\hat{\mathcal{E}}_1$ abschätzen lässt.

Wir setzen dazu $d_2 := N_1 - C$. Nach (3.12) gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\geq -|\Phi| + N_1a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + N_2a^3\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\geq (N_1-C)a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + (N_2-C)a^3\left(1+\frac{1}{|\xi|^2}\right)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\geq d_2a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

wobei $N_1 - C > 0$ und $N_2 - C > 0$ für hinreichend groß gewählte N_1, N_2.

Mit (3.13), (3.14) und (3.15) erhalten wir, dass auch $\hat{\mathcal{E}}$ exponenziell fällt. □

Für das Abklingen von $\hat{\mathcal{E}}$ ergibt sich daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}(t) &\leq \frac{\mathcal{L}(t)}{d_2a^2(1+|\xi|^2)} \\
&\leq \frac{\mathcal{L}(0)e^{-dk(\xi)t}}{d_2a^2(1+|\xi|^2)} \\
&\leq \underbrace{\frac{d_1}{d_2}a\left(|\xi|^2+\frac{1}{|\xi|^2}\right)}_{=:\kappa(\xi)}\hat{\mathcal{E}}(0)e^{-dk(\xi)t}. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Um von punktweisem Abklingen in ξ auf das Abklingverhalten von $\mathcal{E} = \int \hat{\mathcal{E}}(\xi)\ \mathrm{d}\xi$ schließen zu können, benötigen wir noch folgendes

Lemma 3.13 *Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt mit geeigneten Konstanten $c(m) > 0$:*

$$\forall t \geq 0 : \int_0^t s^m e^{-dk(\xi)s}\ \mathrm{d}s \leq \frac{c(m)}{k(\xi)^{m+1}}.$$

Insbesondere ist

$$\forall t \geq 0 : \int_0^t s^m \hat{\mathcal{E}}(s)\ \mathrm{d}s \leq \frac{c(m)\kappa(\xi)}{k(\xi)^{m+1}} \hat{\mathcal{E}}(0).$$

Beweis Per Induktion.

Induktionsanfang: Für $m = 0$ ist

$$\int_0^t e^{-dk(\xi)s}\ \mathrm{d}s \quad = \quad \frac{1}{dk(\xi)}(1 - e^{-dk(\xi)t}) \quad \leq \quad \frac{1}{d}\left(\frac{1}{k(\xi)}\right)^1.$$

Induktionsschritt: Gelte die Formel für m, dann liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^t s^{m+1} e^{-dk(\xi)s}\ \mathrm{d}s &= -\frac{1}{dk(\xi)}\left(t^{m+1} e^{-dk(\xi)t}\right) + \frac{m+1}{dk(\xi)} \int_0^t s^m e^{-dk(\xi)s}\ \mathrm{d}s \\ &\leq \frac{c(m)(m+1)}{d}\left(\frac{1}{k(\xi)}\right)^{m+2}. \end{aligned}$$

Die zweite Formel ergibt sich dann aus (3.16). □

Damit können wir nun unser Hauptresultat beweisen:

Satz 3.14 (polynomiale Abklingraten) *Seien $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig und $\kappa(\xi), k(\xi), \hat{\mathcal{E}}(\xi)$ wie oben.*

Erfüllen die Anfangsdaten $(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{h}, \hat{\theta}, \hat{q})$ des Anfangswertproblems (3.2)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m} \hat{\mathcal{E}}(0, \xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty,$$

dann fällt die zur Lösung (u, h, θ, q) assoziierte Energie

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|u_t|^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\mu + \lambda)|\nabla' u|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\theta|^2 + \frac{\tau_0 \rho \gamma}{\varkappa \delta}|q|^2 \right)(t, x)\ \mathrm{d}x$$

für $t \to \infty$ mit Rate m, d.h. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-m})$.

Beweis Nach (3.4) und Lemma 3.13 gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\hat{\mathcal{E}}(t)) \quad = \quad \hat{\mathcal{E}}(t) + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}(t) \quad \leq \quad \hat{\mathcal{E}}(t),$$

also

$$t\hat{\mathcal{E}}(t) \quad \leq \quad \int_0^t \hat{\mathcal{E}}(s)\ \mathrm{d}s \quad \leq \quad \frac{c(0)\kappa(\xi)}{k(\xi)}\hat{\mathcal{E}}(0),$$

d.h. $\hat{\mathcal{E}}(t,\xi) = \mathcal{O}(t^{-1})$.

Entsprechend erhalten wir aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2\hat{\mathcal{E}}(t)) \quad = \quad 2t\hat{\mathcal{E}}(t) + t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}(t) \quad \leq \quad 2t\hat{\mathcal{E}}(t),$$

d.h.

$$t^2\hat{\mathcal{E}}(t) \quad \leq \quad 2\int_0^t s\hat{\mathcal{E}}(s)\ \mathrm{d}s \quad \leq \quad \frac{2c(1)\kappa(\xi)}{k(\xi)^2}\hat{\mathcal{E}}(0),$$

dass $\hat{\mathcal{E}}(t,\xi) = \mathcal{O}(t^{-2})$ u.s.w. bis

$$\hat{\mathcal{E}}(t,\xi) = \mathcal{O}(t^{-m}).$$

Integration von $\hat{\mathcal{E}}$ über ξ liefert dann die Behauptung. □

Bemerkung.

Aus Symmetriegründen hätten wir Ψ_1 in Lemma 3.3 auch als

$$\Psi_1(t) \quad := \quad \frac{\xi_1}{\xi_3}\Phi_3(t) + \left(\frac{\xi_2}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_2}\right)\Phi_4(t)$$

wählen können und $a(\xi)$ in Lemma 3.4 als

$$a(\xi) \quad := \quad |\xi|^2\left(\frac{1}{\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_3^2}\right).$$

Gilt für die zugehörigen, wie oben definierten Funktionen $k(\xi) = k_a(\xi)$ und $\kappa(\xi) = \kappa_a(\xi)$ dann

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m}\hat{\mathcal{E}}(0,\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty,$$

so ist wiederum $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-m})$.

4 Ein Vergleich zwischen klassischem und hyperbolischem Modell

Im Folgenden wollen wir die Lösung (u^0, h^0, θ^0) der klassischen Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^0_{tt} - \mu\Delta u^0 - (\mu+\lambda)\nabla\nabla' u^0 + \gamma\nabla\theta^0 - \alpha(\nabla\times h^0)\times\vec{H} & = & 0 \\ h^0_t - \Delta h^0 - \beta\nabla\times(u^0_t\times\vec{H}) & = & 0 \\ \theta^0_t - \varkappa\Delta\theta^0 + \delta\nabla' u^0_t & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

mit der Lösung $(u^\tau, h^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit „second sound“

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^\tau_{tt} - \mu\Delta u^\tau - (\mu+\lambda)\nabla\nabla' u^\tau + \gamma\nabla\theta^\tau - \alpha(\nabla\times h^\tau)\times\vec{H} & = & 0 \\ h^\tau_t - \Delta h^\tau - \beta\nabla\times(u^\tau_t\times\vec{H}) & = & 0 \\ \theta^\tau_t + \rho\nabla' q^\tau + \delta\nabla' u^\tau_t & = & 0 \\ \tau_0 q^\tau_t + q^\tau + \varkappa\nabla\theta^\tau & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.2}$$

vergleichen. Unser Ziel ist es, die Differenz der Energien der beiden Systeme gegen eine Funktion in τ_0 abzuschätzen, die sonst nur von den Koeffizienten der Differenzialgleichungen und den Anfangsdaten der Systeme abhängt. Anschließend untersuchen wir die zeitliche Entwicklung der Differenz.

Ein solcher Vergleich für die parabolische Thermoelastizität

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{u}^0_{tt} - \mu\Delta\tilde{u}^0 - (\mu+\lambda)\nabla\nabla'\tilde{u}^0 + \gamma\nabla\tilde{\theta}^0 & = & 0 \\ \tilde{\theta}^0_t - \varkappa\Delta\tilde{\theta}^0 + \delta\nabla'\tilde{u}^0_t & = & 0 \end{array} \right.$$

und die hyperbolische Thermoelastizität

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{u}^\tau_{tt} - \mu\Delta\tilde{u}^\tau - (\mu+\lambda)\nabla\nabla'\tilde{u}^\tau + \gamma\nabla\tilde{\theta}^\tau & = & 0 \\ \tilde{\theta}^\tau_t + \rho\nabla'\tilde{q}^\tau + \delta\nabla'\tilde{u}^\tau_t & = & 0 \\ \tau_0\tilde{q}^\tau_t + \tilde{q}^\tau + \varkappa\nabla\tilde{\theta}^\tau & = & 0 \end{array} \right.$$

als Randwertproblem in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^1$ wird in [Ra2] durchgeführt. Es wird gezeigt, dass zwischen den Energien $\tilde{\mathcal{E}}^0$ des klassischen Systems und $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$ des Systems mit „second sound“ folgender Zusammenhang besteht:

$$\exists C > 0 : \forall t \geq 0 : \tilde{\mathcal{E}}^\tau(t) - \tilde{\mathcal{E}}^0(t) \leq C\tau_0^2.$$

Insbesondere konvergiert $\tilde{\mathcal{E}}^\tau$ für $\tau_0 \to 0$ quadratisch gegen $\tilde{\mathcal{E}}^0$.

Bezeichne $(u^{\mathrm{d}}, h^{\mathrm{d}}, \theta^{\mathrm{d}}, q^{\mathrm{d}})$ die Differenz der beiden Lösungen

$$(u^{\mathrm{d}}, h^{\mathrm{d}}, \theta^{\mathrm{d}}, q^{\mathrm{d}}) = (u^{\tau} - u^0, h^{\tau} - h^0, \theta^{\tau} - \theta^0, q^{\tau} - q^0)$$

(mit $q^0 := -\varkappa \nabla \theta^0$), dann löst $(u^{\mathrm{d}}, h^{\mathrm{d}}, \theta^{\mathrm{d}}, q^{\mathrm{d}})$ das System

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^{\mathrm{d}}_{tt} - \mu \Delta u^{\mathrm{d}} - (\mu+\lambda)\nabla\nabla' u^{\mathrm{d}} + \gamma \nabla \theta^{\mathrm{d}} - \alpha(\nabla \times h^{\mathrm{d}}) \times \vec{H} & = & 0 \\ h^{\mathrm{d}}_t - \Delta h^{\mathrm{d}} - \beta \nabla \times (u^{\mathrm{d}}_t \times \vec{H}) & = & 0 \\ \theta^{\mathrm{d}}_t + \rho \nabla' q^{\mathrm{d}} + \delta \nabla' u^{\mathrm{d}}_t & = & 0 \\ \tau_0 q^{\mathrm{d}}_t + q^{\mathrm{d}} + \varkappa \nabla \theta^{\mathrm{d}} & = & -\tau_0 q^0_t \end{array} \right. \tag{4.3}$$

zu der Anfangsbedingung

$$(u^{\mathrm{d}}, u^{\mathrm{d}}_t, h^{\mathrm{d}}, \theta^{\mathrm{d}}, q^{\mathrm{d}})(0) \quad = \quad (0,0,0,0,0), \tag{4.4}$$

falls die Kompatibilitätsbedingung

$$q^0(0) = -\varkappa \nabla \theta^0(0) \tag{4.5}$$

erfüllt ist.

Sei $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$ die zu $(u^{\mathrm{d}}, h^{\mathrm{d}}, \theta^{\mathrm{d}}, q^{\mathrm{d}})$ gehörige Energie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\mathrm{d}}(t) \quad &:= \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{E}}^{\mathrm{d}}(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &:= \quad \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(|v^{\mathrm{d}}_t|^2 + \mu |\xi|^2 |v^{\mathrm{d}}|^2 + (\mu+\lambda)(\xi \cdot v^{\mathrm{d}})^2 \\ &\qquad\qquad + \frac{\alpha}{\beta} |w^{\mathrm{d}}|^2 + \frac{\gamma}{\delta} |\vartheta^{\mathrm{d}}|^2 + \frac{\tau_0 \rho \gamma}{\varkappa \delta} |r^{\mathrm{d}}|^2 \Big)(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= \quad \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(|u^{\mathrm{d}}_t|^2 + \mu |\nabla u^{\mathrm{d}}|^2 + (\mu+\lambda) |\nabla' u^{\mathrm{d}}|^2 \\ &\qquad\qquad + \frac{\alpha}{\beta} |h^{\mathrm{d}}|^2 + \frac{\gamma}{\delta} |\theta^{\mathrm{d}}|^2 + \frac{\tau_0 \rho \gamma}{\varkappa \delta} |q^{\mathrm{d}}|^2 \Big)(t,x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

mit $(v^{\mathrm{d}}, w^{\mathrm{d}}, \vartheta^{\mathrm{d}}, r^{\mathrm{d}}) := \left(\widehat{u^{\mathrm{d}}}, \widehat{h^{\mathrm{d}}}, \widehat{\theta^{\mathrm{d}}}, \widehat{q^{\mathrm{d}}} \right)$ die Fourier-Transformierte von $(u^{\mathrm{d}}, h^{\mathrm{d}}, \theta^{\mathrm{d}}, q^{\mathrm{d}})$.

Weiter seien die Energien erster, zweiter und dritter Stufe des klassischen Systems (4.1), $\mathcal{E}^0_1$, $\mathcal{E}^0_2$ und $\mathcal{E}^0_3$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0_j(t) \quad &:= \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{E}}^0_j(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &:= \quad \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(|\partial_t^{j-1} v^0_t|^2 + \mu |\xi|^2 |\partial_t^{j-1} v^0|^2 + (\mu+\lambda)(\partial_t^{j-1} \xi v^0)^2 \\ &\qquad\qquad + \frac{\alpha}{\beta} |\partial_t^{j-1} w^0|^2 + \frac{\gamma}{\delta} |\partial_t^{j-1} \vartheta^0|^2 \Big)(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi. \qquad (j = 1,2,3) \end{aligned}$$

Aus den Differenzialgleichungen (4.2) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}^{\mathrm{d}}(t,\xi) &= \mathrm{Re}(v_t^{\mathrm{d}}\overline{v_{tt}^{\mathrm{d}}}) + \mu|\xi|^2\mathrm{Re}(v^{\mathrm{d}}\overline{v_t^{\mathrm{d}}}) + (\mu+\lambda)\mathrm{Re}((\xi v^{\mathrm{d}})(\xi\overline{v_t^{\mathrm{d}}})) \\
&\quad + \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{Re}(w^{\mathrm{d}}\overline{w_t^{\mathrm{d}}}) + \frac{\gamma}{\delta}\mathrm{Re}(\vartheta^{\mathrm{d}}\overline{\vartheta_t^{\mathrm{d}}}) + \frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}\mathrm{Re}(r^{\mathrm{d}}\overline{r_t^{\mathrm{d}}}) \\
&= \mathrm{Re}(\overline{v_t^{\mathrm{d}}}(-\mu|\xi|^2 v^{\mathrm{d}} - (\mu+\lambda)(\xi v^{\mathrm{d}})\xi + i\gamma\vartheta^{\mathrm{d}}\xi + i\alpha H(w^{\mathrm{d}})^3\xi - i\alpha H\xi_3 w^{\mathrm{d}})) \\
&\quad + \mu|\xi|^2\mathrm{Re}(v\overline{v_t^{\mathrm{d}}}) + (\mu+\lambda)\mathrm{Re}((\xi v^{\mathrm{d}})(\xi\overline{v_t^{\mathrm{d}}})) \\
&\quad + \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{Re}(\overline{w^{\mathrm{d}}}(-|\xi|^2 w^{\mathrm{d}} - i\beta H\xi_3 v_t^{\mathrm{d}} + i\beta H(\xi v_t^{\mathrm{d}})(0,0,1)')) \\
&\quad + \frac{\gamma}{\delta}\mathrm{Re}(\overline{\vartheta^{\mathrm{d}}}(i\rho(\xi r^{\mathrm{d}}) + i\delta(\xi v_t^{\mathrm{d}}))) + \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}\mathrm{Re}(\overline{r^{\mathrm{d}}}(-r^{\mathrm{d}} + i\varkappa\vartheta^{\mathrm{d}}\xi - i\tau_0\varkappa\vartheta_t^0\xi)) \\
&= -\frac{\alpha}{\beta}|\xi|^2|w^{\mathrm{d}}|^2 - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r^{\mathrm{d}}|^2 - \frac{\tau_0\rho\gamma}{\delta}\mathrm{Re}(i\vartheta_t^0(\xi\cdot\overline{r^{\mathrm{d}}})) \\
&\le \tau_0^2\frac{\rho\varkappa\gamma}{2\delta}|\xi|^2|\vartheta_t^0|^2. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Gilt nun für geeignete Anfangsdaten des klassischen Modells, dass

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2|\vartheta_t^0|^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t \;<\; \infty, \qquad (4.7)$$

dann folgt per Integration über t mit der Anfangsbedingung (4.4):

$$\forall t>0: \quad \mathcal{E}^{\mathrm{d}}(t) \le C\tau_0^2$$

für eine von t, τ_0 unabhängige Konstante C, d.h. die Energie $\mathcal{E}^\tau$ des Modells mit „second sound“ konvergiert für $\tau_0 \to 0$ quadratisch gegen die Energie $\mathcal{E}^0$ des klassischen Modells.

Die Forderung (4.7) lässt sich als erweiterte Kompatibilitätsbedingung auffassen, denn es ist

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2|\vartheta_t^0|^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\theta_t^0|^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3} |q_t^0|^2 \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t,$$

d.h. wir benötigen für die „künstliche“ Lösungskomponente $q_t^0 = -\varkappa\nabla\theta_t^0$ des klassischen Modells das gleiche Abklingverhalten wie für den Wärmefluss q_t^τ des Cattaneo-Modells.

In der klassischen Thermoelastizität lässt sich die Bedingung (4.7) ohne zusätzliche Voraussetzungen folgern:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathcal{E}}_2^0(t) = -\varkappa\frac{\gamma}{\delta}||\nabla\tilde{\theta}_t^0||_{\mathcal{L}^2}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \varkappa\frac{\gamma}{\delta}\int_0^\infty ||\nabla\tilde{\theta}_t^0(s)||_{\mathcal{L}^2}^2 \,\mathrm{d}s = \tilde{\mathcal{E}}_2^0(0) - \lim_{t\to\infty}\tilde{\mathcal{E}}_2^0(t);$$

das Abklingen von $\tilde{\mathcal{E}}_2^0$ liefert dann das gewünschte asymptotische Verhalten von $||\nabla\theta_t^0||_{\mathcal{L}^2}$.

In der klassischen Magneto-Thermo-Elastizität haben wir sogar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_2^0(t) = -\frac{\alpha}{\beta}||h_t^0||_{\mathcal{L}^2}^2 - \varkappa\frac{\gamma}{\delta}||\nabla\theta_t^0||_{\mathcal{L}^2}^2,$$

d.h. die zusätzliche Dämpfung durch den Einfluss des Magnetfeldes h^0 führt zu

$$\mathcal{E}_2^0(0) - \lim_{t\to\infty} \mathcal{E}_2^0(t) = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\infty ||h_t^0(s)||_{\mathcal{L}^2}^2 \, \mathrm{d}s + \varkappa \frac{\gamma}{\delta} \int_0^\infty ||\nabla \theta_t^0(s)||_{\mathcal{L}^2}^2 \, \mathrm{d}s;$$

insbesondere ist also die Bedingung (4.7) erfüllt, falls

$$\mathcal{E}_2^0(0) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{E}}^0(0,\xi) \, \mathrm{d}\xi < \infty.$$

Wir erhalten:

Satz 4.1 (Energetischer Vergleich) *Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den Anfangsdaten und den Koeffizienten der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen (nicht jedoch von τ_0) abhängt, so dass für die Differenz der Energieterme $\mathcal{E}^\tau$ und $\mathcal{E}^0$ gilt:*

$$\forall t > 0 : \mathcal{E}^\tau(t) - \mathcal{E}^0(t) \leq C\tau_0^2.$$

Insbesondere konvergiert $\mathcal{E}^\tau$ für $\tau_0 \to 0$ quadratisch gegen $\mathcal{E}^0$.

Wir wollen dieses Ergebnis mit den in [Ir1] eingeführten Methoden verfeinern. Speziell wollen wir eine mögliche Konstante C explizit angeben und die zeitliche Entwicklung der Differenz zwischen $\mathcal{E}^\tau$ und $\mathcal{E}^0$ untersuchen.

Lemma 4.2 *Wir definieren*

$$E_2^0(t) := \begin{cases} 2t\sqrt{\mathcal{E}_2^0(0)\mathcal{E}_3^0(0)} - t^2\mathcal{E}_3^0(t) & \text{falls} \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\dfrac{\mathcal{E}_2^0(0)}{\mathcal{E}_3^0(0)}}; \\ \mathcal{E}_2^0(0) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\mathcal{E}_2^0(0) - \mathcal{E}_2^0(t) \quad \leq \quad E_2^0(t).$$

Beweis Die Ungleichungen von Cauchy & Schwarz und Hölder ergeben

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_2^0 &= \int_{\mathbb{R}^3} v_{ttt}^0 \cdot v_{tt}^0 \, \mathrm{d}\xi \; + \; ... \\ &\geq -\int_{\mathbb{R}^3} |v_{tt}^0 \cdot v_{ttt}^0| \, \mathrm{d}\xi \; + \; ... \\ &\geq -\sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |v_{tt}^0|^2 + \; ... \, \mathrm{d}\xi \cdot \int_{\mathbb{R}^3} |v_{ttt}^0|^2 \, \mathrm{d}\xi} \; + \; ... \\ &\geq -\sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |v_{tt}^0|^2 \, \mathrm{d}\xi \; + \; ...} \quad \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} |v_{ttt}^0|^2 \, \mathrm{d}\xi \; + \; ...} \\ &= -2\sqrt{\mathcal{E}_2^0(t)}\sqrt{\mathcal{E}_3^0(t)}. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Kettenregel und des Monotonieverhaltens von $\mathcal{E}_3^0$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\mathcal{E}_2^0(t)} &= \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}_2^0(t)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_2^0(t)\\ &\geq -\sqrt{\mathcal{E}_0^3(t)}\\ &\geq -\sqrt{\mathcal{E}_0^3(0)}.\end{aligned}$$

Integration über t und anschließendes Quadrieren der Ungleichung ergeben

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathcal{E}_2^0(t)}-\sqrt{\mathcal{E}_2^0(0)} &\geq -t\sqrt{\mathcal{E}_3^0(0)}\\ \Longrightarrow \qquad \mathcal{E}_2^0(0)-\mathcal{E}_2^0(t) &\leq \begin{cases} -t^2\mathcal{E}_3^0(0)+2t\sqrt{\mathcal{E}_2^0(0)\mathcal{E}_3^0(0)}, & \sqrt{\mathcal{E}_2^0(0)}-t\sqrt{\mathcal{E}_3^0(0)}\geq 0\\ \mathcal{E}_2^0(0), & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. □

Mit Lemma 4.2 können wir die mittelfristige zeitliche Entwicklung der Differenz zwischen den Energien $\mathcal{E}^\tau$ und $\mathcal{E}^0$ untersuchen – eben bis zum Zeitpunkt

$$t_0 := \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2^0(0)}{\mathcal{E}_3^0(0)}}:$$

Satz 4.3 (Energetischer Vergleich) *Bezeichne wieder $\mathcal{E}^{\mathrm{d}} = \mathcal{E}^{\mathrm{d}}(t)$ die Differenz zwischen der Energie $\mathcal{E}^\tau$ des hyperbolischen Systems zum Relaxationsparameter τ_0 und der Energie $\mathcal{E}^0$ des parabolischen Systems.*

Dann besteht für alle Zeiten $t \geq 0$ der Zusammenhang

$$\mathcal{E}^{\mathrm{d}}(t) \leq \tau_0^2\frac{\rho}{2}E_2^0(t).$$

Beweis Nach Ungleichung (4.6) ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}^{\mathrm{d}}(t) \leq \tau_0^2\frac{\rho}{2}\frac{\varkappa\gamma}{\delta}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\vartheta_t^0|^2\,\mathrm{d}\xi,$$

mit Integration und der Anfangsbedingung (4.4) erhalten wir also

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\mathrm{d}}(t) &\leq \mathcal{E}^{\mathrm{d}}(0)+\tau_0^2\frac{\rho}{2}\frac{\varkappa\gamma}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\vartheta_t^0|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s\\ &\leq -\tau_0^2\frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}_2^0(s,\xi)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi\\ &= \tau_0^2\frac{\rho}{2}(\mathcal{E}_2^0(0)-\mathcal{E}_2^0(t))\\ &\leq \tau_0^2\frac{\rho}{2}E_2^0(t)\end{aligned}$$

für alle Zeiten $t \geq 0$. □

Insbesondere können wir also die Energie der Differenz der Lösungen des klassischen Modells, $(u^\tau, h^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$, und des „second sound"-Modells, $(u^0, h^0, \theta^0, q^0)$, abschätzen gegen die Daten zweiter Stufe des klassischen Modells, $(u_t^0, u_{tt}^0, h_t^0, \theta_t^0)(0)$:

$$\forall t \geq 0: \quad \mathcal{E}^{\mathrm{d}}(t) \quad \leq \quad \tau_0^2 \frac{\rho}{2} \mathcal{E}_2^0(0),$$

sofern die Daten so gewählt sind, dass $\mathcal{E}_2^0(0)$ einen endlichen Wert annimmt.

5 Ein modifiziertes Magnetfeld

Bisher haben wir das stationäre Magnetfeld $\vec{H}$ durch den Vektor $\vec{H} = (0, 0, H)$ für ein beliebiges $H > 0$ modelliert. Aus Gründen der Symmetrie bleiben alle obigen Resultate erhalten, wenn wir statt dessen $\vec{H} = (H, 0, 0)$ oder $\vec{H} = (0, H, 0)$ wählen. Anders verhält es sich dagegen, wenn wir etwa $\vec{H} = (0, H_2, H_3)$ betrachten: Bei der Konstruktion des Lyapunov-Funktionals $\mathcal{L}$ im Kapitel 3 haben wir explizit ausgenutzt, dass diejenigen Terme in den Differenzialgleichungen wegfallen, die von der x_1- und der x_2-Richtung von $\vec{H}$ abhängen.

Bisher haben wir als Grundbestandteil von $\mathcal{L}$ ein Funktional L benutzt, dessen Ableitung der folgenden Abschätzung genügt (vgl. Lemma 3.1):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L \quad \leq \quad -(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + \tilde{C}(\xi)(|w|^2 + |\xi||v||w| + |\vartheta||w|);$$

an dieser Stelle ging die spezielle Gestalt von $\vec{H}$ gerade ein. Das heißt: Bei der Erzeugung der negativen Energiebestandteile mittels Multiplikatormethode konnten wir nicht nur beliebig große, positive Anteile an $|w|^2$ und $|r|^2$ in Kauf nehmen, sondern auch an $|v_t|^2$. Haben wir nämlich bereits ein Ψ konstruiert mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi \quad \leq \quad -\hat{\mathcal{E}} + C(\xi)(|w|^2 + |r|^2 + |v_t|^2)$$

mit beliebig kompliziertem (von t unabhängigem) $C(\xi) > 0$, dann hat das Funktional

$$\mathcal{L} \quad := \quad \Psi + C_0(\xi)\hat{\mathcal{E}} + C_1(\xi) L$$

für geeignete $C_0(\xi), C_1(\xi) > 0$ die gewünschte Eigenschaft, dass seine Ableitung gegen $-\hat{\mathcal{E}}$ abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{L} \quad \leq \quad & -\hat{\mathcal{E}} + C(\xi)(|w|^2 + |r|^2 + |v_t|^2) + C_0(\xi)\left(-\frac{\alpha}{\beta}|w|^2 - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r|^2\right) \\
& + C_1(\xi)(-|v_t^1|^2 - |v_t^2|^2) + \frac{1}{2}(|\xi|^2|v|^2 + |w|^2 + |\vartheta|^2) + \frac{1}{2}C_1^2(\xi)\tilde{C}^2(\xi)|w|^2 \\
\leq \quad & -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{E}} + \underbrace{\left(-\frac{\alpha}{\beta}C_0(\xi) + C(\xi) + C_1^2(\xi)\tilde{C}^2(\xi)\right)}_{\leq 0}|w|^2 + \underbrace{\left(-\frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}C_0(\xi) + C(\xi)\right)}_{\leq 0}|r|^2 \\
& + \underbrace{(-C_1(\xi) + C(\xi))}_{\leq 0}(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) \\
\leq \quad & -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

Und in der Tat haben wir in Lemma 3.2 positive Anteile an $|v_t^1|^2$ und $|v_t^2|^2$ erzeugt bei den Abschätzungen

$$\begin{aligned} C(\xi)\mathrm{Re}\left(v_t^1\overline{v_t^3}\right) &\leq \varepsilon|v_t^3|^2 + c(\varepsilon)C^2(\xi)|v_t^1|^2, \\ C(\xi)\mathrm{Re}\left(v_t^2\overline{v_t^3}\right) &\leq \varepsilon|v_t^3|^2 + c(\varepsilon)C^2(\xi)|v_t^2|^2. \end{aligned}$$

Wählen wir nun dagegen $\vec{H} = (0, H_2, H_3)$, dann liefert das Pendant zu Lemma 3.1 nur noch ein Funktional L mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L \leq -|v_t^1|^2 + \tilde{C}(\xi)(|w|^2 + |\xi||v||w| + |\vartheta||w|)$$

und wir können den später auftretenden, gemischten Term „$C(\xi)\mathrm{Re}\left(v_t^2\overline{v_t^3}\right)$“ nicht mehr ohne Weiteres abschätzen.

Wie wir im Folgenden sehen werden, führen immerhin restriktive Zusatzbedingungen an die Anfangsdaten noch dazu, dass auch dieses Modell polynomial stabil ist. Für den ganz allgemeinen Fall $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ greifen die von uns benutzten Techniken dagegen nicht mehr.

Wir betrachten also jetzt die hyperbolischen Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen (0.5) mit

$$\vec{H} = (0, H_2, H_3) \qquad (H_2, H_3 > 0).$$

Die transformierten Gleichungen lauten dann:

$$\left\{\begin{aligned} v_{tt} + \mu|\xi|^2 v + (\mu+\lambda)(\xi\cdot v)\xi - i\gamma\vartheta\xi & \\ -i\alpha(H_2 w^2 + H_3 w^3)\xi + i\alpha(H_2\xi_2 + H_3\xi_3)w &= 0 \\ w_t + |\xi|^2 w + i\beta(H_2\xi_2 + H_3\xi_3)v_t & \\ -i\beta(\xi\cdot v_t)(0, H_2, H_3)' &= 0 \\ \vartheta_t - i\rho(\xi\cdot r) - i\delta(\xi\cdot v_t) &= 0 \\ \tau_0 r_t + r - i\varkappa\vartheta\xi &= 0 \end{aligned}\right. . \tag{5.1}$$

Für die einzelnen Komponenten der ersten beiden Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{tt}^1 + \mu|\xi|^2 v^1 + (\mu+\lambda)(\xi\cdot v)\xi_1 - i\gamma\xi_1\vartheta & \\ -i\alpha(H_2 w^2 + H_3 w^3)\xi_1 + i\alpha(H_2\xi_2 + H_3\xi_3)w^1 &= 0; \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} v_{tt}^2 + \mu|\xi|^2 v^2 + (\mu+\lambda)(\xi\cdot v)\xi_2 - i\gamma\xi_2\vartheta & \\ -i\alpha H_3\xi_2 w^3 + i\alpha H_3\xi_3 w^2 &= 0; \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} v_{tt}^3 + \mu|\xi|^2 v^3 + (\mu+\lambda)(\xi\cdot v)\xi_3 - i\gamma\xi_3\vartheta & \\ -i\alpha H_2\xi_3 w^2 + i\alpha H_2\xi_2 w^3 &= 0; \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$w_t^1 + |\xi|^2 w^1 + i\beta(H_2\xi_2 + H_3\xi_3)v_t^1 = 0; \tag{5.5}$$

$$w_t^2 + |\xi|^2 w^2 + i\beta H_3\xi_3 v_t^2 - i\beta H_2(\xi_1 v_t^1 + \xi_3 v_t^3) = 0; \tag{5.6}$$

$$w_t^3 + |\xi|^2 w^3 + i\beta H_2\xi_2 v_t^3 - i\beta H_3(\xi_1 v_t^1 + \xi_2 v_t^2) = 0. \tag{5.7}$$

Lemma 5.1 *Sei $H_2\xi_2 + H_3\xi_3 \neq 0$. Mit $\zeta := (H_2\xi_2 + H_3\xi_3)^{-1}$ erfüllen die Funktionale*

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &:= -\mathrm{Re}\left(i\zeta\overline{v_t^1}w^1\right);\\ \Phi_2(t) &:= -\mathrm{Re}\left(i\zeta\overline{v_{tt}^1}w_t^1\right)\end{aligned}$$

die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1 &\leq c|\zeta||\xi|^2|v||w| + c|\zeta||\xi||\vartheta||w|\\ &\quad + c|\zeta||\xi||w|^2 + c\zeta^2|\xi|^4|w|^2 - \frac{\beta}{2}|v_t^1|^2;\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2 &\leq c|\zeta||\xi|^2|v_t||w_t| + c|\zeta||\xi||\vartheta_t||w_t|\\ &\quad + c|\zeta||\xi||w_t|^2 + c\zeta^2|\xi|^4|w_t|^2 - \frac{\beta}{2}|v_{tt}^1|^2.\end{aligned}$$

Beweis Multiplikation der Gleichungen (5.2), (5.5) mit $\overline{w^1}$, $\overline{v_t^1}$ ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1 &= -\mathrm{Re}\left(i\zeta\overline{v_{tt}^1}w^1 + i\zeta\overline{v_t^1}w^1\right)\\ &= \mathrm{Re}(i\mu\zeta|\xi|^2\overline{v^1}w^1 + i(\mu+\lambda)\zeta\xi_1(\xi\overline{v})w^1 + \gamma\zeta\xi_1\overline{\vartheta}w^1\\ &\quad + \alpha\zeta\xi_1(H_2\overline{w^2} + H_3\overline{w^3})w^1 - \alpha\zeta(H_2\xi_2 + H_3\xi_3)\overline{w^1}w^1\\ &\quad + i\zeta|\xi|^2\overline{v_t^1}w^1 - \beta\zeta(H_2\xi_2 + H_3\xi_3)\overline{v_t^1}v_t^1)\\ &\leq c|\zeta||\xi|^2|v||w| + c|\zeta||\xi||\vartheta||w| + c|\zeta||\xi||w|^2\\ &\quad + c\zeta^2|\xi|^4|w|^2 - \frac{\beta}{2}|v_t^1|^2.\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung beweist man analog, indem man die Ableitungen (5.2'), (5.5') der Gleichungen (5.2), (5.5) mit $\overline{w_t^1}$, $\overline{v_{tt}^1}$ multipliziert. □

Lemma 5.2 *Seien $\xi_2, \xi_3 \neq 0$. Das Funktional*

$$\Phi_3(t) := -\mathrm{Re}\left(\frac{i\overline{v_t^2}w^2}{H_3\xi_3} + \frac{i\overline{v_t^3}w^3}{H_2\xi_2}\right)$$

erfüllt dann die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_3 &\leq c|\xi|^2|w|\left(\frac{|v^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v^3|}{|\xi_2|}\right) + c\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_3|} + \frac{|\xi_3|}{|\xi_2|}\right)|\xi||w||v| + c\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_3|} + \frac{|\xi_3|}{|\xi_2|}\right)|w||\vartheta|\\ &\quad + c\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_3|} + \frac{|\xi_3|}{|\xi_2|}\right)|w|^2 + c|\xi|^2|w|\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v_t^3|}{|\xi_2|}\right) + c|\xi||v_t^1|\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v_t^3|}{|\xi_2|}\right)\\ &\quad - \beta(|v_t^2|^2 + |v_t^3|^2) + \beta\left(\frac{H_2}{H_3} + \frac{H_3}{H_2}\right)\mathrm{Re}\left(\overline{v_t^2}v_t^3\right).\end{aligned}$$

Beweis Multiplikation der Gleichungen (5.3), (5.4) mit $\overline{w^2}, \overline{w^3}$ und (5.6), (5.7) mit $\overline{v_t^2}, \overline{v_t^3}$ liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_3 &= -\mathrm{Re}\left(\frac{i}{H_3\xi_3}\overline{v_{tt}^2}w^2 + \frac{i}{H_3\xi_3}\overline{v_t^2}w_t^2 + \frac{i}{H_2\xi_2}\overline{v_{tt}^3}w^3 + \frac{i}{H_2\xi_2}\overline{v_t^3}w_t^3\right) \\
&= \mathrm{Re}\Bigg(\frac{i\mu}{H_3}\frac{|\xi|^2}{\xi_3}\overline{v^2}w^2 + \frac{i(\mu+\lambda)}{H_3}\frac{\xi_2}{\xi_3}(\xi\overline{v})w^2 + \frac{\gamma}{H_3}\frac{\xi_2}{\xi_3}\overline{\vartheta}w^2 + \alpha\frac{\xi_2}{\xi_3}\overline{w^3}w^2 - \alpha\overline{w^2}w^2 \\
&\quad + \frac{i\mu}{H_2}\frac{|\xi|^2}{\xi_2}\overline{v^3}w^3 + \frac{i(\mu+\lambda)}{H_2}\frac{\xi_3}{\xi_2}(\xi\overline{v})w^3 + \frac{\gamma}{H_2}\frac{\xi_3}{\xi_2}\overline{\vartheta}w^3 + \alpha\frac{\xi_3}{\xi_2}\overline{w^2}w^3 - \alpha\overline{w^3}w^3 \\
&\quad + \frac{i}{H_3}\frac{|\xi|^2}{\xi_3}\overline{v_t^2}w^2 - \beta\overline{v_t^2}v_t^2 + \beta\frac{H_2}{H_3}\frac{\xi_1}{\xi_3}\overline{v_t^2}v_t^1 + \beta\frac{H_2}{H_3}\overline{v_t^2}v_t^3 \\
&\quad + \frac{i}{H_2}\frac{|\xi|^2}{\xi_2}\overline{v_t^3}w^3 - \beta\overline{v_t^3}v_t^3 + \beta\frac{H_3}{H_2}\frac{\xi_1}{\xi_2}\overline{v_t^3}v_t^1 + \beta\frac{H_3}{H_2}\overline{v_t^3}v_t^2\Bigg) \\
&\le c|\xi|^2|w|\left(\frac{|v^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v^3|}{|\xi_2|}\right) + c\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_3|} + \frac{|\xi_3|}{|\xi_2|}\right)|\xi||w||v| + c\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_3|} + \frac{|\xi_3|}{|\xi_2|}\right)|w||\vartheta| \\
&\quad + c\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_3|} + \frac{|\xi_3|}{|\xi_2|}\right)|w|^2 + c|\xi|^2|w|\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v_t^3|}{|\xi_2|}\right) + c|\xi||v_t^1|\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v_t^3|}{|\xi_2|}\right) \\
&\quad - \alpha(|w^2|^2 + |w^3|^2) - \beta(|v_t^2|^2 + |v_t^3|^2) + \beta\left(\frac{H_2}{H_3} + \frac{H_3}{H_2}\right)\mathrm{Re}\left(\overline{v_t^2}v_t^3\right).
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.3 *Seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \neq 0$. Das Funktional*

$$\Phi_4(t) := \mathrm{Re}\left(\frac{H_2}{H_3}\frac{v_{tt}^1\overline{v_t^2}}{\xi_1\xi_3} + \frac{H_3}{H_2}\frac{v_{tt}^1\overline{v_t^2}}{\xi_1\xi_2}\right)$$

genügt dann der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_4 &\le -(\mu+\lambda)\left(\frac{H_2}{H_3}\frac{\xi_2}{\xi_3}|v_t^2|^2 + \frac{H_3}{H_2}\frac{\xi_3}{\xi_2}|v_t^3|^2\right) - (\mu+\lambda)\left(\frac{H_2}{H_3} + \frac{H_3}{H_2}\right)\mathrm{Re}\left(v_t^2\overline{v_t^3}\right) \\
&\quad + \left(c\frac{|\xi|^2}{|\xi_1|}|v_t^1| + \gamma\left(\frac{H_2}{H_3} + \frac{H_3}{H_2}\right)|\vartheta_t| + c\frac{|\xi|}{|\xi_1|}|w_t|\right)\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v_t^3|}{|\xi_2|}\right) \\
&\quad + \left(\frac{H_2}{H_3} + \frac{H_3}{H_2}\right)\frac{|v_{tt}^1|}{|\xi_1|}\left(\frac{|v_{tt}^2|}{|\xi_3|} + \frac{|v_{tt}^3|}{|\xi_2|}\right).
\end{aligned}$$

Beweis Multiplikation der Gleichung (5.2') mit $\overline{v_t^2}$ bzw. $\overline{v_t^3}$ ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_4 &= \mathrm{Re}\left(\frac{H_2}{H_3}\frac{v_{ttt}^1\overline{v_t^2}}{\xi_1\xi_3} + \frac{H_2}{H_3}\frac{v_{tt}^1\overline{v_{tt}^2}}{\xi_1\xi_3} + \frac{H_3}{H_2}\frac{v_{ttt}^1\overline{v_t^3}}{\xi_1\xi_2} + \frac{H_3}{H_2}\frac{v_{tt}^1\overline{v_{tt}^3}}{\xi_1\xi_2}\right) \\
&= \mathrm{Re}\Bigg(-\frac{H_2}{H_3}\frac{\mu|\xi|^2}{\xi_1\xi_3}v_t^1\overline{v_t^2} - (\mu+\lambda)\frac{H_2}{H_3}\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}v_t^1\overline{v_t^2} + \frac{\xi_2}{\xi_3}v_t^2\overline{v_t^2} + v_t^3\overline{v_t^2}\right) + \frac{H_2}{H_3}\frac{i\gamma}{\xi_3}\vartheta_t\overline{v_t^2} \\
&\quad + \frac{i\alpha}{\xi_3}\left(\frac{H_2^2}{H_3}w_t^2 + H_2w_t^3\right)\overline{v_t^2} - i\alpha\frac{H_2^2}{H_3}\frac{\xi_2}{\xi_1\xi_3}w_t^1\overline{v_t^2} - i\alpha\frac{H_2}{\xi_1}w_t^1\overline{v_t^2} + \frac{H_2}{H_3}\frac{v_{tt}^1\overline{v_{tt}^2}}{\xi_1\xi_3} \\
&\quad - \frac{H_3}{H_2}\frac{\mu|\xi|^2}{\xi_1\xi_2}v_t^1\overline{v_t^3} - (\mu+\lambda)\frac{H_3}{H_2}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}v_t^1\overline{v_t^3} + v_t^2\overline{v_t^3} + \frac{\xi_3}{\xi_2}v_t^3\overline{v_t^3}\right) + \frac{H_3}{H_2}\frac{i\gamma}{\xi_2}\vartheta_t\overline{v_t^3} \\
&\quad + \frac{i\alpha}{\xi_2}\left(H_3w_t^2 + \frac{H_3^2}{H_2}w_t^3\right)\overline{v_t^3} - i\alpha\frac{H_3}{\xi_1}w_t^1\overline{v_t^3} - i\alpha\frac{H_3^2}{H_2}\frac{\xi_3}{\xi_1\xi_2}w_t^1\overline{v_t^3} + \frac{H_3}{H_2}\frac{v_{tt}^1\overline{v_{tt}^3}}{\xi_1\xi_2}\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & c\left(\frac{|\xi|^2}{|\xi_1|}+|\xi|\right)|v_t^1|\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|}+\frac{|v_t^3|}{|\xi_2|}\right)-(\mu+\lambda)\left(\frac{H_2}{H_3}\frac{\xi_2}{\xi_3}|v_t^2|^2+\frac{H_3}{H_2}\frac{\xi_3}{\xi_2}|v_t^3|^2\right)\\
&-(\mu+\lambda)\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)\mathrm{Re}\left(v_t^2\overline{v_t^3}\right)+\gamma\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)|\vartheta_t|\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|}+\frac{|v_t^2|}{|\xi_2|}\right)\\
&+c\frac{|\xi|}{|\xi_1|}|w_t|\left(\frac{|v_t^2|}{|\xi_3|}+\frac{|v_t^3|}{|\xi_2|}\right)+\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)\frac{|v_{tt}^1|}{|\xi_1|}\left(\frac{|v_{tt}^2|}{|\xi_3|}+\frac{|v_{tt}^3|}{|\xi_2|}\right).
\end{aligned}
$$

□

Lemma 5.4 *Für das Funktional*

$$\Phi_5(t) \quad := \quad \mathrm{Re}\,(v_t\overline{v})$$

gilt die Ungleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_5 \quad \leq \quad -\frac{\mu}{2}|\xi|^2|v|^2-(\mu+\lambda)(\xi v)^2+c(|\vartheta|^2+|w|^2)+|v_t|^2.$$

Beweis Multipliziert man die erste Gleichung des Systems (5.1) mit $\overline{v}$, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_5 &= \mathrm{Re}\,(v_{tt}\overline{v}+v_t\overline{v_t})\\
&= -\mu|\xi|^2|v|^2-(\mu+\lambda)(\xi v)^2+\gamma\mathrm{Re}(\vartheta(\xi\overline{v}))\\
&\quad +\alpha\mathrm{Re}((iH_2w^2+iH_3w^3)(\xi\overline{v}))\\
&\quad +\alpha\mathrm{Re}((iH_2\xi_2+iH_3\xi_3)w\overline{v})+|v_t|^2\\
&\leq -\mu|\xi|^2|v|^2-(\mu+\lambda)(\xi v)^2+c|\vartheta|^2+\frac{\mu}{4}|\xi|^2|v|^2+c|w|^2\\
&\quad +\frac{\mu}{4}|\xi|^2|v|^2+|v_t|^2.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 5.5 *Sei $\xi_1\neq 0$. Dann erfüllt das Funktional*

$$\Phi_6(t) \quad := \quad \mathrm{Re}\left(\frac{i\tau_0}{\varkappa\xi_1}r_t^1\overline{\vartheta_t}\right)$$

die Abschätzung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_6 \quad \leq \quad -\frac{1}{2}|\vartheta_t|^2+\frac{c}{\xi_1^2}|r_t|^2+c\frac{|\xi|}{|\xi_1|}|r_t||v_t|+c\frac{|\xi|^2}{|\xi_1|}|r_t|\frac{|v_{tt}|}{|\xi|}.$$

Beweis Durch Multiplikation der dritten und vierten Gleichung von (5.1') mit $\overline{\vartheta_t},\overline{r_t^1}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_6 &= \mathrm{Re}\left(\frac{i\tau_0}{\varkappa\xi_1}r_{tt}^1\overline{\vartheta_t}+\frac{i\tau_0}{\varkappa\xi_1}r_t^1\overline{\vartheta_{tt}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\Big(-\frac{i}{\varkappa\xi_1}r_t^1\overline{\vartheta_t}-\vartheta_t\overline{\vartheta_t}-\frac{\rho\tau_0}{\varkappa\xi_1}r_t^1(\xi\overline{v_t})-\frac{\delta\tau_0}{\varkappa\xi_1}r_t^1(\xi\overline{v_{tt}})\Big)\\
&\leq -\frac{1}{2}|\vartheta_t|^2+\frac{c}{\xi_1^2}|r_t|^2+c\frac{|\xi|}{|\xi_1|}|r_t||v_t|+c\frac{|\xi|^2}{|\xi_1|}|r_t|\frac{|v_{tt}|}{|\xi|}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 5.6 *Sei $\tilde{c}$ die größte der in den Lemmata 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 und 5.5 vorkommenden Konstanten c.*

Seien $\xi_1 \neq 0,\ \xi_2\xi_3 > 0$ und wieder $a := |\xi|^2\left(\frac{1}{\xi_1^2}+\frac{1}{\xi_3^2}\right)$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\Phi(t) \;:=\; & \frac{2}{\beta}\left(\frac{7}{4}\frac{64}{\beta^2}\tilde{c}^2 a + \frac{7}{4}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}\tilde{c}^2\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}a + 8\right)\Phi_1(t) + \frac{8}{\beta}\Phi_3(t)\\ & +\frac{2}{\beta}\frac{8(\mu^2+(\mu+\lambda)^2)}{\mu}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)^2\frac{a}{\xi_1^2}\Phi_2(t) + \frac{8}{\mu+\lambda}\Phi_4(t)\\ & +4\Phi_5(t) + \left(\frac{7}{4}\frac{128}{(\mu+\lambda)^2}\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)^2\gamma^2\frac{a}{\xi_1^2}+1\right)\Phi_6(t).\end{aligned}$$

Dann gilt für ein hinreichend großes $c > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \;\leq\; & ca^4\frac{|\xi|^2+|\xi|^4+|\xi|^6}{\xi_1^4}|w|^2 + ca^4\frac{1+|\xi|^2+|\xi|^4}{\xi_1^4}|w_t|^2\\ & +c\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}|r|^2 + ca^2\frac{|\xi|^2+|\xi|^4+|\xi|^6+|\xi|^8}{\xi_1^6}|r_t|^2 - \hat{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

Beweis Für $\epsilon(v) := \frac{\mu}{3},\ \epsilon(v_t) := \frac{2}{7},\ \epsilon(v_{tt}) := \frac{\mu}{16(\mu^2+(\mu+\lambda)^2)}$ und $\epsilon(\vartheta_t) := 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \;\leq\; & \frac{c}{2\epsilon(v)}a^2\frac{|\xi|^4}{\xi_1^4}\zeta^2|\xi|^2|w|^2 + \frac{\epsilon(v)}{2}|\xi|^2|v|^2 + ca^2\frac{|\xi|^4}{\xi_1^4}\zeta^2|\xi|^2|w|^2 + c|\vartheta|^2 + ca\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}|\zeta||\xi||w|^2\\ & +ca\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}\zeta^2|\xi|^4|w|^2 - \frac{\tilde{c}^2}{2\epsilon(v_t)}\frac{64}{\beta^2}a|v_t^1|^2 - \frac{\tilde{c}^2}{2\epsilon(v_t)}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}a\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}|v_t^1|^2 - 8|v_t^1|^2\\ & +\frac{c}{2\epsilon(v_t)}\frac{a^2}{\xi_1^4}\zeta^2|\xi|^4|w_t|^2 + \frac{\epsilon(v_t)}{2}|v_t|^2 + \frac{c}{2\epsilon(\vartheta_t)}\frac{a^2}{\xi_1^4}\zeta^2|\xi|^2|w_t|^2 + \frac{\epsilon(\vartheta_t)}{2}|\vartheta_t|^2 + c\frac{a}{\xi_1^2}|\zeta||\xi||w_t|^2\\ & +c\frac{a}{\xi_1^2}\zeta^2|\xi|^4|w_t|^2 - \frac{1}{2\epsilon(v_{tt})}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}\frac{a}{\xi_1^2}|v_{tt}^1|^2\\ & +\frac{c}{2\epsilon(v)}a|w|^2 + \frac{\epsilon(v)}{2}|\xi|^2|v|^2 + \frac{c}{2\epsilon(v)}a|w|^2 + \frac{\epsilon(v)}{2}|\xi|^2|v|^2 + ca|w|^2 + c|\vartheta|^2 + ca|w|^2\\ & +\frac{c}{2\epsilon(v_t)}a|\xi|^2|w|^2 + \frac{\epsilon(v_t)}{2}|v_t|^2 + \frac{\tilde{c}^2}{2\epsilon(v_t)}\frac{64}{\beta^2}a|v_t^1|^2 + \frac{\epsilon(v_t)}{2}|v_t|^2 - 8(|v_t^2|^2+|v_t^3|^2)\\ & +8\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)\mathrm{Re}\left(\overline{v_t^2}v_t^3\right)\\ & -8\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)\mathrm{Re}\left(\overline{v_t^2}v_t^3\right) + \frac{\tilde{c}^2}{2\epsilon(v_t)}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}a|v_t^1|^2 + \frac{\epsilon(v_t)}{2}|v_t|^2\\ & +\frac{1}{2\epsilon(v_t)}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)^2\gamma^2\frac{a}{\xi_1^2}|\vartheta_t|^2 + \frac{\epsilon(v_t)}{2}|v_t|^2 + \frac{c}{2\epsilon(v_t)}\frac{a}{\xi_1^2}|w_t|^2 + \frac{\epsilon(v_t)}{2}|v_t|^2\\ & +\frac{1}{2\epsilon(v_{tt})}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)^2\frac{a}{\xi_1^2}|v_{tt}^1|^2 + \frac{\epsilon(v_{tt})}{2}\frac{|v_{tt}|^2}{|\xi|^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\mu|\xi|^2|v|^2 - 4(\mu+\lambda)(\xi\cdot v)^2 + c|\vartheta|^2 + c|w|^2 + 4|v_t|^2 \\
&-\frac{1}{2\epsilon(v_t)}\frac{64}{(\mu+\lambda)^2}\left(\frac{H_2}{H_3}+\frac{H_3}{H_2}\right)^2\gamma^2\frac{a}{\xi_1^2}|\vartheta_t|^2 - \frac{\epsilon(\vartheta_t)}{2}|\vartheta_t|^2 + \frac{c}{\xi_1^2}\left(\frac{a}{\xi_1^2}+1\right)|r_t|^2 \\
&+\frac{c}{2\epsilon(v_t)}\left(\frac{a}{\xi_1^2}+1\right)^2\frac{|\xi|^2}{\xi_1^2}|r_t|^2 + \frac{\epsilon(v_t)}{2}|v_t|^2 + \frac{c}{2\epsilon(v_{tt})}\left(\frac{a}{\xi_1^2}+1\right)^2\frac{|\xi|^4}{\xi_1^2}|r_t|^2 + \frac{\epsilon(v_{tt})}{2}\frac{|v_{tt}|^2}{|\xi|^2} \\
&-\frac{\alpha}{\beta}|w|^2 - \frac{\gamma}{\delta}|\vartheta|^2 - \frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|w|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\vartheta|^2 + \frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r|^2.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der ersten und vierten Differenzialgleichung (5.1) schätzen wir ab

$$
\begin{aligned}
|v_{tt}|^2 &\le 8|\xi|^2\left(\mu^2|\xi|^2|v|^2 + (\mu+\lambda)^2(\xi\cdot v)^2 + \gamma^2|\vartheta|^2 + 2\alpha^2|\vec{H}|^2|w|^2\right); \\
|\vartheta|^2 &\le \frac{c}{|\xi|^2}\left(|r|^2 + |r_t|^2\right)
\end{aligned}
$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \le\ & \left(\frac{3}{2}\epsilon(v) - \frac{\mu}{2}\right)|\xi|^2|v|^2 + \left(4 + \frac{7}{2}\epsilon(v_t) - 5\right)|v_t|^2 \\
&+ \left(8\epsilon(v_{tt})(\mu^2 + (\mu+\lambda)^2) - \frac{\mu}{2}\right)|\xi|^2|v|^2 \\
&-\hat{\mathcal{E}} + c\frac{|\xi|^2 + |\xi|^4 + |\xi|^6}{\xi_1^4}a^4|w|^2 + c\frac{1 + |\xi|^2 + |\xi|^4}{\xi_1^4}a^4|w_t|^2 \\
&+c\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}|r|^2 + ca^2\frac{|\xi|^2 + |\xi|^4 + |\xi|^6 + |\xi|^8}{\xi_1^6}|r_t|^2. \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir benutzt, dass

$$
|\xi||\zeta| = \frac{|\xi|}{|H_2\xi_2 + H_3\xi_3|} \le \frac{|\xi|^2}{H_2\xi_2^2 + H_3\xi_2\xi_3} \le c\frac{|\xi|^2}{\xi_2^2} \le c|\xi|^2\left(\frac{1}{\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_3^2}\right) = ca.
$$

Da sich die erste Zeile der Ungleichung (5.8) mit obiger Wahl von $\epsilon(v)$, $\epsilon(v_t)$, $\epsilon(v_{tt})$ zu Null aufaddiert, folgt die Behauptung. □

Definieren wir

$$
K(\xi) := a^2\frac{1+|\xi|^2+|\xi|^4}{\xi_1^2}(1+|\zeta|+\zeta^2) + a^2\frac{1+|\xi|^2+|\xi|^4+|\xi|^6}{\xi_1^4},
$$

und für ein hinreichend großes $N > 0$

$$
\mathcal{L}(t) := \Phi(t) + NK(\xi)(\hat{\mathcal{E}}_1(t) + \hat{\mathcal{E}}_2(t)),
$$

dann sehen wir wie im vorigen Kapitel:

Satz 5.7 *Ist N groß genug, dann ist $\mathcal{L}$ äquivalent zu $\hat{\mathcal{E}}$ und fällt exponenziell, d.h. es gibt Konstanten $C_1(\xi), C_2(\xi), C_3(\xi) > 0$ mit*

$$
\forall t \ge 0 : C_1(\xi)\hat{\mathcal{E}}(t,\xi) \le \mathcal{L}(t,\xi) \le C_2(\xi)\hat{\mathcal{E}}(t,\xi), \qquad \mathcal{L}(t,\xi) \le \mathcal{L}(0,\xi)e^{-C_3(\xi)t}.
$$

Insbesondere fällt $\hat{\mathcal{E}}$ exponenziell.

Genauer gilt

$$\hat{\mathcal{E}}(t) \leq \frac{\mathcal{L}(t)}{C_1(\xi)} \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{C_1(\xi)} e^{-C_3(\xi)t} \leq \frac{C_2(\xi)}{C_1(\xi)} \hat{\mathcal{E}}(0) e^{-C_3(\xi)t}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} C_1(\xi) &= d_1(1+|\xi|^4)(|\xi|^2+|\xi|^8)a^4, \\ C_2(\xi) &= d_2(1+|\xi|^4)\left(K(\xi)+\frac{a^2}{\xi_1^2}\right), \\ C_3(\xi) &= \frac{d_3}{(1+|\xi|^4)\left(K(\xi)+\frac{a^2}{\xi_1^2}\right)}, \end{aligned}$$

wobei d_1, d_2, d_3 gewisse positive Konstanten sind, die von N abhängen.

Damit erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 5.8 (polynomiale Abklingraten) *Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig.*

Erfüllen die Anfangsdaten $(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{h}, \hat{\theta}, \hat{q})$ des Problems (5.1)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{C_2(\xi)/C_1(\xi)}{C_3(\xi)^m} \hat{\mathcal{E}}(0,\xi)\, \mathrm{d}\xi < \infty,$$

und ist

$$\operatorname{supp}((\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{h}_0, \hat{\theta}_0, \hat{q}_0)) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_2\xi_3 > 0\}, \qquad (\operatorname{supp}(\cdot) \text{ der Träger von } \cdot)$$

dann fällt die zur Lösung (u, h, θ, q) assoziierte Energie

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left(|u_t|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)|\nabla' u|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\theta|^2 + \frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}|q|^2\right)(t,x)\, \mathrm{d}x$$

für $t \to \infty$ mit Rate m, d.h. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-m})$.

Auf die Anforderung an den Träger der transformierten Daten gehen wir in Kapitel 8 näher ein – insbesondere wollen wir dort untersuchen, wie sich diese Bedingung auf die nicht-transformierten Anfangswerte überträgt.

6 Das rein hyperbolische System

Wir führen nun auch eine zeitliche Verzögerung in der Magnetfeldgleichung ein, d.h. führen die parabolische Gleichung

$$h_t - \Delta h = 0$$

über in das System

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h_t + \nabla' p & = & 0 \\ \tau_1 p_t + p + \nabla h & = & 0 \end{array} \right. ,$$

wobei

$$p = (p^1, p^2, p^3)' = (p^{1,1}, p^{1,2}, p^{1,3}; p^{2,1}, p^{2,2}, p^{2,3}; p^{3,1}, p^{3,2}, p^{3,3})' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^9$$

und $\nabla' p, \nabla h$ natürlich komponentenweise zu lesen sind:

$$\nabla' p = (\nabla' p^1, \nabla' p^2, \nabla' p^3)' \qquad \text{und} \qquad \nabla h = (\nabla h^1, \nabla h^2, \nabla h^3)'.$$

Wir erhalten so aus (0.5) das rein hyperbolische System

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M u_{tt} - \mathcal{D}' S \mathcal{D} u + \gamma \nabla \theta - \alpha (\nabla \times h) \times \vec{H} & = & 0 \\ h_t + \nabla' p - \beta \nabla \times (u_t \times \vec{H}) & = & 0 \\ c\theta_t + \rho \nabla' q + \delta \nabla' u_t & = & 0 \\ \tau_1 p_t + p + \nabla h & = & 0 \\ \tau_0 q_t + q + \varkappa \nabla \theta & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.1}$$

mit zugehöriger Anfangsbedingung

$$(u, u_t, h, \theta, p, q)(0) \quad = \quad (u^0, u^1, h^0, \theta^0, p^0, q^0).$$

Reduktion auf ein System erster Ordnung

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_t + AV & = & 0 \\ V(0) & = & V^0 \end{array} \right. \tag{6.2}$$

mit

$$V := \begin{pmatrix} S\mathcal{D}u \\ u_t \\ h \\ \theta \\ p \\ q \end{pmatrix}, \qquad V^0 := \begin{pmatrix} S\mathcal{D}u^0 \\ u^1 \\ h^0 \\ \theta^0 \\ p^0 \\ q^0 \end{pmatrix}$$

und $A = QN$, gegeben durch

$$Q \quad := \quad \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c}\frac{\delta}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_1}\frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_0}\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varkappa}{\rho} \end{pmatrix}$$

und

$$N \quad := \quad \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}' & 0 & -\alpha(\nabla \times \cdot) \times \vec{H} & \gamma\nabla & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\nabla \times (\cdot \times \vec{H}) & 0 & 0 & \frac{\alpha}{\beta}\nabla' & 0 \\ 0 & \gamma\nabla' & 0 & 0 & 0 & \rho\frac{\gamma}{\delta}\nabla' \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{\beta}\nabla & 0 & \frac{\alpha}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho\frac{\gamma}{\delta}\nabla & 0 & \frac{\gamma}{\delta}\frac{\rho}{\varkappa} \end{pmatrix}$$

auf dem natürlichen Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} := \mathcal{L}^2$,

$$\mathcal{D}(A) := \{V \in \mathcal{L}^2 \mid \exists W \in \mathcal{L}^2 : \forall \Phi \in \mathcal{C}_0^\infty : \langle V, A'\Phi\rangle_{\mathcal{L}^2} = -\langle W, \Phi\rangle_{\mathcal{L}^2}\},$$

ergibt: A ist dicht definiert und abgeschlossen, dissipativ auf $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}} := \langle\cdot, Q^{-1}\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2}$ und es gelten $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ sowie $\mathrm{Re}\langle A^*V, V\rangle = \mathrm{Re}\langle AV, V\rangle$ für alle $V \in \mathcal{D}(A)$, vgl. Kapitel 2.

Mit dem Satz von Hille & Yosida erhalten wir: Das Problem (6.2) ist wohlgestellt.

Die Fourier-transformierten Gleichungen lauten nun

$$\begin{cases} v_{tt} + \mu|\xi|^2 v + (\mu+\lambda)(\xi v)\xi - i\gamma\vartheta\xi - i\alpha H w^3\xi + i\alpha H\xi_3 w &= 0 \\ w_t - i(\xi o^1, \xi o^2, \xi o^3)' + i\beta H\xi_3 v_t - i\beta H(0,0,\xi v_t)' &= 0 \\ \vartheta_t - i\rho(\xi r) - i\delta(\xi v_t) &= 0 \\ \tau_1 o_t + o - i\varkappa(w^1\xi, w^2\xi, w^3\xi)' &= 0 \\ \tau_0 r_t + r - i\varkappa\vartheta\xi &= 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

mit $(v, w, \vartheta, o, r) := \left(\hat{u}, \hat{h}, \hat{\theta}, \hat{p}, \hat{q}\right)$.

Die zugehörige Energie des Systems ist

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) \quad &:= \quad \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{E}}(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &:= \quad \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |v_t|^2 + \mu|\xi|^2|v|^2 + (\mu+\lambda)(\xi v)^2 + \frac{\alpha}{\beta}|w|^2 \\ &\qquad + \frac{\gamma}{\delta}|\vartheta|^2 + \tau_1\frac{1}{\varkappa}\frac{\alpha}{\beta}|o|^2 + \tau_0\frac{\rho}{\varkappa}\frac{\gamma}{\delta}|r|^2\ \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Definieren wir wieder

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_1(t) \quad &:= \quad \hat{\mathcal{E}}(t; v, w, \vartheta, o, r) \qquad \text{und} \\ \hat{\mathcal{E}}_2(t) \quad &:= \quad \hat{\mathcal{E}}(t; v_t, w_t, \vartheta_t, o_t, r_t), \end{aligned}$$

dann gelten

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}_1(t,\xi) &= -\frac{1}{\varkappa}\frac{\alpha}{\beta}|o|^2 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\gamma}{\delta}|r|^2 \qquad \text{und}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}_2(t,\xi) &= -\frac{1}{\varkappa}\frac{\alpha}{\beta}|o_t|^2 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\gamma}{\delta}|r_t|^2.\end{aligned}$$

Lemma 6.1 *Sei wieder* $a := \frac{|\xi|^2}{\xi_1^2} + \frac{|\xi|^2}{\xi_3^2}$. *Dann exisiteren Konstanten* $C, C_i > 0$, *so dass für die Funktion*

$$\begin{aligned}\Phi(t) \;:=\; & C_1 a|\xi|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}v_t^1\overline{w^1} + \frac{i}{\xi_3}v_t^2\overline{w^2}\right) + C_2 a\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}v_{tt}^1\overline{w_t^1} + \frac{i}{\xi_3}v_{tt}^2\overline{w_t^2}\right)\\ & + \frac{4}{\mu+\lambda}\left(\frac{\xi_1}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_1}\right)\mathrm{Re}\left(v_{tt}^1\overline{v_t^3}\right) + \frac{4}{\mu+\lambda}\frac{\xi_2}{\xi_3}\mathrm{Re}\left(v_{tt}^2\overline{v_t^3}\right) + |\xi|^2\mathrm{Re}\left(v_t\overline{v}\right)\\ & + C_3 a\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_3}r_t^3\overline{\vartheta_t}\right) + C_4 a^3\mathrm{Re}\left(\frac{i}{\xi_1}o_t^{1,1}\overline{w_t^1} + \frac{i}{\xi_2}o_t^{2,2}\overline{w_t^2} + \frac{i}{\xi_3}o_t^{3,3}\overline{w_t^3}\right)\end{aligned}$$

im Falle $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \neq 0$ *die folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \;\leq\; & -|\xi|^2\mathcal{E} + C(1+|\xi|^2)|r|^2 + Ca^2\frac{1+|\xi|^2}{\xi_3^2}|r_t|^2\\ & + Ca^3(1+|\xi|^2)|o|^2 + Ca^6(1+|\xi|^2)\left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_3^2}\right)|o_t|^2.\end{aligned}$$

Beweis Wir modifizieren den entsprechenden Beweis aus Kapitel 3. Sukzessives Einsetzen der Differenzialgleichungen (6.3) ergibt für ein zunächst beliebiges $\epsilon > 0$ und eine von ϵ abhängige Konstante $c(\epsilon) > 0,\ c(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \;\leq\; & c(\epsilon)a^3|\xi|^2|w|^2 + \epsilon|\xi|^4|v|^2 + \epsilon|\xi|^2|\vartheta|^2 + c(\epsilon)a^3|\xi|^2|o|^2 + \epsilon|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2)\\ & - C_1 a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) - 2|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2)\\ & + c(\epsilon)a^3|w_t|^2 + \epsilon|\xi|^2|v_t|^2 + \epsilon|\vartheta_t|^2 + c(\epsilon)a^3|o_t|^2 + \epsilon(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2)\\ & - C_2 a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) - 2(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2)\\ & + c(\epsilon)a|\xi|^2(|v_t^1|^2 + |v_t^2|^2) + \epsilon|\xi|^2|v_t^3|^2 - 4|\xi|^2|v_t^3|^2 + c(\epsilon)a(|\vartheta_t|^2 + |w_t|^2)\\ & + c(\epsilon)a(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) + \epsilon|\xi|^2(|\xi|^2|v|^2 + |\vartheta|^2)\\ & - \mu|\xi|^4|v|^2 - (\mu+\lambda)|\xi|^2(\xi v)^2 + \epsilon|\xi|^4|v|^2 + c(\epsilon)|\xi|^2(|\vartheta|^2 + |w|^2) + |\xi|^2|v_t|^2\\ & + c(\epsilon)\frac{a^2}{\xi_3^2}|r_t|^2 - C_3 a|\vartheta_t|^2 + c(\epsilon)a^2|r_t|^2 + \epsilon(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2) + \epsilon|\xi|^2(|\xi|^2|v|^2 + |\vartheta|^2)\\ & + c(\epsilon)a^6(1+|\xi|^2)\left(\frac{1}{\xi_3^2} + \frac{1}{\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_3^2}\right)|o_t|^2 - C_4 a^3|w_t|^2 + \epsilon(|v_{tt}^1|^2 + |v_{tt}^2|^2).\end{aligned}$$

Sind nun ϵ hinreichend klein und C, C_i groß genug, dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \;\leq\; & -|\xi|^2\mathcal{E} + Ca^3|\xi|^2|w|^2 + Ca^3|\xi|^2|o|^2 + C|\xi|^2|\vartheta|^2 + C|\xi|^2|r|^2\\ & + Ca^6(1+|\xi|^2)\left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_3^2}\right)|o_t|^2 + Ca^2\left(1 + \frac{1}{\xi_3^2}\right)|r_t|^2.\end{aligned}$$

Benutzen wir noch die Abschätzungen

$$|w|^2 \leq \frac{C}{|\xi|^2}(|o|^2 + |o_t|^2), \qquad |\vartheta|^2 \leq \frac{C}{|\xi|^2}(|r|^2 + |r_t|^2),$$

so ergibt sich die Behauptung. □

Sei $b := b(\xi) := \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_3^2}$. Als Lyapunov-Funktional definieren wir

$$\mathcal{L}(t) \quad := \quad \Phi(t) + N_1 a^3(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1(t) + N_2 a^6 b(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_2(t),$$

wobei $N_1, N_2 > 0$ große Konstanten sind, deren Wert später determiniert wird.

Mit Gleichung (6.4) und Lemma 6.1 folgt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L} \quad &\leq \quad -|\xi|^2\mathcal{E}_1 + C(1+|\xi|^2)|r|^2 + Ca^3(1+|\xi|^2)|o|^2 + N_1 a^3(1+|\xi|^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}_1 \\
&\quad +Ca^2\frac{1+|\xi|^2}{\xi_3^2}|r_t|^2 + Ca^6 b(1+|\xi|^2)|o_t|^2 + N_2 a^6 b(1+|\xi|^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\leq \quad -|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}_1,
\end{aligned}$$

falls N_1, N_2 hinreichend groß sind.

Satz 6.2 *Sind $N_1, N_2 > 0$ groß genug, dann ist $\mathcal{L}$ äquivalent zu $\hat{\mathcal{E}}$ und fällt exponenziell, d.h. es gibt Konstanten $C_1(\xi), C_2(\xi), C_3(\xi) > 0$ mit*

$$\forall t \geq 0 : C_1(\xi)\hat{\mathcal{E}}(t,\xi) \leq \mathcal{L}(t,\xi) \leq C_2(\xi)\hat{\mathcal{E}}(t,\xi), \qquad \mathcal{L}(t,\xi) \leq \mathcal{L}(0,\xi)e^{-C_3(\xi)t}.$$

Insbesondere fällt $\hat{\mathcal{E}}$ exponenziell.

Beweis Wir können $\mathcal{L}$ nach oben und nach unten gegen $\hat{\mathcal{E}}_1$ abschätzen: Wegen

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_2 \quad &\leq \quad c(|v_{tt}|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |w_t|^2 + |\vartheta_t|^2 + |o_t|^2 + |r_t|^2) \\
&\leq \quad c(|\xi|^4|v|^2 + |\xi|^2|\vartheta|^2 + |\xi|^2|w|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |\xi|^2|o|^2 + |\xi|^2|r|^2 + |o|^2 + |r|^2) \\
&\leq \quad c(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Phi| \quad &\leq \quad c(a^2|w|^2 + a|\xi|^2|v_t|^2 + a^2|v_{tt}|^2 + b|w_t|^2 + |v_t|^2 \\
&\quad +|\xi|^2|v|^2 + a|r_t|^2 + ab|\vartheta_t|^2 + a^3|o_t|^2 + a^3 b|w_t|^2) \\
&\leq \quad ca^2\mathcal{E}_1 + ca^3(1+b)\hat{\mathcal{E}}_2
\end{aligned}$$

erfüllt $\mathcal{L}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad &\leq \quad |\Phi| + N_1 a^3(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + N_2 a^6 b(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\leq \quad (ca^2 + N_1 a^3(1+|\xi|^2))\hat{\mathcal{E}}_1 + (ca^3(1+b) + N_2 a^6 b(1+|\xi|^2))\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\leq \quad c_1(a^3 + a^6 b)(1+|\xi|^2)^2\hat{\mathcal{E}}_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad &\geq \quad -|\Phi| + N_1 a^3(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1 + N_2 a^6 b(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\geq \quad -ca^2\hat{\mathcal{E}}_1 - ca^3(1+b)\hat{\mathcal{E}}_2 + N_1 a^2\hat{\mathcal{E}}_1 + N_2 a^3(1+b)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&= \quad (N_1 - c)a^2\hat{\mathcal{E}}_1 + (N_2 - c)a^3(1+b)\hat{\mathcal{E}}_2 \\
&\geq \quad c_2 a^2\hat{\mathcal{E}}_1,
\end{aligned}$$

wobei $N_1 - c > 0$ und $N_2 - c > 0$, falls N_1, N_2 groß genug gewählt sind.

Nach Gronwall fällt $\mathcal{L}$ damit exponenziell:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) \leq -|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}_1(t) \leq -\frac{|\xi|^2}{c_1(a^3 + a^6 b)(1+|\xi|^2)^2}\mathcal{L}(t) =: -k(\xi)\mathcal{L}(t),$$

d.h.

$$\mathcal{L}(t) \quad \leq \quad \mathcal{L}(0)e^{-k(\xi)t}.$$

Also fällt auch $\hat{\mathcal{E}}_1(\xi)$ exponenziell für ein beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^3$, genauer:

$$\hat{\mathcal{E}}_1(t) \leq \frac{\mathcal{L}(t)}{c_2 a^2} \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{c_2 a^2}e^{-k(\xi)t} \leq \frac{c_1}{c_2}(a + a^4 b)(1+|\xi|^2)^2\hat{\mathcal{E}}_1(0)e^{-k(\xi)t} =: \kappa(\xi)\hat{\mathcal{E}}_1(0)e^{-k(\xi)t}.$$

□

Mit Lemma 3.13 folgt:

Satz 6.3 (polynomiale Abklingraten) *Sei $m \in \mathbb{N}_0$.*

Erfüllen die Anfangsdaten $(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{h}, \hat{\theta}, \hat{p}, \hat{q})$ des Anfangswertproblems (6.3)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m}\hat{\mathcal{E}}(0,\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty,$$

dann fällt die zur Lösung (u, h, θ, p, q) assoziierte Energie

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(|u_t|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)|\nabla' u|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\theta|^2 + \frac{\tau_1\alpha}{\varkappa\beta}|p|^2\frac{\tau_0\rho\gamma}{\varkappa\delta}|q|^2\right)(t,x)\ \mathrm{d}x$$

für $t \to \infty$ mit Rate m, d.h. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{O}(t^{-m})$.

7 Zur Voraussetzung für polynomiale Stabilität

In diesem Abschnitt wollen wir die Forderungen an die Anfangsdaten, die uns in den einzelnen Modellen die polynomiale Stabilität der Lösung sichern, näher untersuchen und miteinander vergleichen.

Zur klassischen Magneto-Thermo-Elastizität.

Wir betrachten zunächst die Situation $\tau_0 = 0$ aus Satz 0.1: Es soll gelten

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m} \hat{\mathcal{E}}^0(0,\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty \tag{$*$}$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa(\xi) &:= 1 + |\xi|^2, \\ k(\xi) &:= \frac{|\xi|^2}{a^2\kappa(\xi)(1+|\xi|^2)} \\ &= \frac{(\xi_1^2\xi_3^2)^2}{(\xi_1^2+\xi_3^2)^2|\xi|^2(1+|\xi|^2)^2} \end{aligned}$$

und

$$\hat{\mathcal{E}}^0(0,\xi) := \frac{1}{2}\left(|\hat{u}_1^0|^2 + \mu|\xi|^2|\hat{u}_0^0|^2 + (\mu+\lambda)(\xi\cdot\hat{u}_0^0)^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\hat{h}_0^0|^2 + \frac{\gamma}{\delta}|\hat{\theta}_0^0|^2\right)(\xi).$$

Sei $m = 1$, dann erfüllen die Anfangsdaten die Abschätzung $(*)$, falls für jeden Anfangswert $V_0 \in \{u_0^0, u_1^0, h_0^0, \theta_0^0\}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\xi_1^2+\xi_3^2)^2(1+|\xi|^2)^6}{\xi_1^4\xi_3^4}|\hat{V}_0|^2(\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty$$

bzw.

$$\frac{(\xi_1^2+\xi_3^2)(1+|\xi|^2)^3}{\xi_1^2\xi_3^2}\hat{V}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3),$$

d.h. falls ein $W_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ existiert mit

$$(\xi_1^2 + \xi_3^2)(1 + |\xi|^2)^3 \hat{V}_0 = \xi_1^2 \xi_3^2 \hat{W}_0.$$

Rücktransformieren liefert dann die Bedingung

$$\exists W_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) : \underbrace{-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(1-\Delta)^3}_{=:\mathrm{D}} V_0 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}}_{=:\mathrm{d}} W_0.$$

Wir konstruieren ein $V_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, das diese Bedingung erfüllt.

Seien

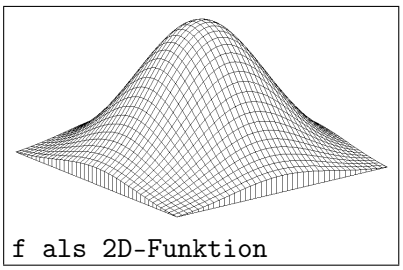
$$f(x) := e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

die Dichte der Standardnormalverteilung und

$$V_0 := \mathrm{d}f, \qquad W_0 := \mathrm{D}f,$$

dann sind V_0, W_0 beliebig oft differenzierbar mit

$$\mathrm{D}V_0 = \mathrm{d}W_0$$


f als 2D-Funktion

und es ist $V_0(x) = q(x)f(x),\ W_0(x) = p(x)f(x)$ mit gewissen Polynomen q, p:

$$\begin{aligned} V_0(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \\ &= \left(1 - x_1^2 - x_3^2 + x_1^2 x_3^2\right) f(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_0(x) &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(1-\Delta)^3 e^{-\frac{|x|^2}{2}} \\ &= \big(x_1^8 + 3x_1^6x_2^2 + 4x_1^6x_3^2 + 3x_1^4x_2^4 + 9x_1^4x_2^2x_3^2 + 6x_1^4x_3^4 \\ &\quad + x_1^2x_2^6 + 6x_1^2x_2^4x_3^2 + 9x_1^2x_2^2x_3^4 + 4x_1^2x_3^6 + x_2^6x_3^2 + 3x_2^4x_3^4 \\ &\quad + 3x_2^2x_3^6 + x_3^8 - 38x_1^6 - 78x_1^4x_2^2 - 114x_1^4x_3^2 - 42x_1^2x_2^4 \\ &\quad - 156x_1^2x_2^2x_3^2 - 114x_1^2x_3^4 - 2x_2^6 - 42x_2^4x_3^2 - 78x_2^2x_3^4 - 38x_3^6 \\ &\quad + 414x_1^4 + 474x_1^2x_2^2 + 828x_1^2x_3^2 + 60x_2^4 + 474x_2^2x_3^2 + 414x_3^4 \\ &\quad - 1372x_1^2 - 468x_2^2 - 1372x_3^2 + 872\big) f(x). \end{aligned}$$

Bleibt also zu zeigen, dass V_0, W_0 in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ liegen. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} x_1^2 \cdot f^2(x)\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}} x_1 \cdot \left(-2x_1 e^{-|x|^2}\right)\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}(x_2, x_3) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}} x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} e^{-|x|^2}\ \mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}(x_2, x_3) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(-x_1 \cdot e^{-|x|^2}\Big|_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2}\ \mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}(x_2, x_3) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^3}{2}. \end{aligned}$$

Iterativ erhalten wir: $qf, pf \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

Im Fall $m > 1$ setzen wir

$$\mathrm{D}_m := \left(-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) (1-\Delta)^3 \right)^m, \qquad \mathrm{d}_m := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)^m$$

sowie $V_0 := \mathrm{d}_m f,\ W_0 := \mathrm{D}_m f$ und gehen analog vor.

Sei nun allgemeiner f eine schnell fallende Funktion, d.h. aus dem Schwartz-Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^3 : \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty \right\} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3).$$

Dann sind offenbar auch $\mathrm{D}f$ und $\mathrm{d}f$ schnell fallend, d.h. $V_0 := \mathrm{d}f,\ W_0 := \mathrm{D}f$ liegen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ und erfüllen die Gleichung $\mathrm{D}V_0 = \mathrm{d}W_0$.

Regularisierung.

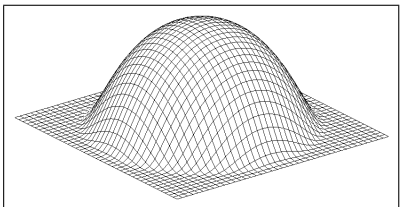
Um ein rasches polynomiales Abklingen der Lösung zu gewährleisten, müssen die oben benutzten Ausgangsfunktionen f, aus denen wir uns dann geeignete Anfangsdaten konstruieren, eine entsprechend hohe Regularität besitzen.

Wir skizzieren im Folgenden ein wohlbekanntes Verfahren zum Glätten von $\mathcal{L}^p$-Funktionen für $p \in (1, \infty)$, das 1944 von Kurt O. Friedrichs [Fr] entwickelt wurde:

Sei $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ mit $\psi(x) = 0$ für alle $|x| \geq 1$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\ \mathrm{d}x = 1$, etwa

$$\psi(x) := \begin{cases} c_0 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases},$$

mit passendem Normierungsfaktor $c_0 > 0$.



ψ als 2D-Funktion

Sei weiter zu beliebigem $k \in \mathbb{N}$ die $\mathcal{C}_0^\infty$-Funktion ψ_k definiert durch

$$\psi_k(x) := k^n \psi(kx),$$

dann ist der k-te *Friedrichs-Glättungsoperator* $\Psi_k : \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p$ gegeben als

$$(\Psi_k u)(x) := (\psi_k * u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_k(x-y) u(y)\ \mathrm{d}y.$$

Offensichtlich ist Ψ_k wohldefiniert, denn mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$||\Psi_k u||_{\mathcal{L}^p}^p \leq \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_k(x-y) |u(y)|^p\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = ||u||_{\mathcal{L}^p}^p,$$

d.h. $\Psi_k u \in \mathcal{L}^p$ für $u \in \mathcal{L}^p$, und $\Psi_k u$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, denn für einen beliebigen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ gilt

$$\nabla^\alpha (\Psi_k u) = (\nabla^\alpha \psi_k) * u.$$

Außerdem konvergiert $\Psi_k u$ in der Norm $||\cdot||_{\mathcal{L}^p}$ gegen u: Da $\mathcal{C}_0^\infty$ dicht in $\mathcal{L}^p$ liegt, können wir zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ wählen mit

$$||u - \varphi||_{\mathcal{L}^p} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Wie wir eben gesehen haben, ist dann auch

$$||\Psi_k u - \Psi_k \varphi||_{\mathcal{L}^p} \leq ||u - \varphi||_{\mathcal{L}^p} < \frac{\epsilon}{3}$$

und außerdem gilt

$$||\Psi_k \varphi - \varphi||_{\mathcal{L}^p}^p \leq \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sup_{|x-y|<\frac{1}{k}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^p \, \mathrm{d}x \leq |\mathrm{supp}(\varphi)| \sup_{|x-y|<\frac{1}{k}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^p < \frac{\epsilon}{3}$$

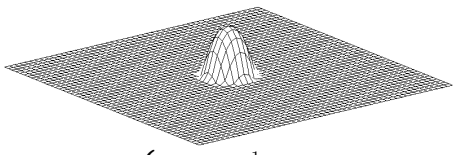
für ein hinreichend großes k, insgesamt also

$$||\Psi_k u - u||_{\mathcal{L}^p} \leq ||\Psi_k u - \Psi_k \varphi||_{\mathcal{L}^p} + ||\Psi_k \varphi - \varphi||_{\mathcal{L}^p} + ||\varphi - u||_{\mathcal{L}^p} < \epsilon.$$

Wir bemerken, dass auch für andere Raumdimensionen und für $p \in \{1, \infty\}$ analoge Resultate gezeigt werden können. Eine allgemeinere Darstellung findet sich zum Beispiel in [Ra4].

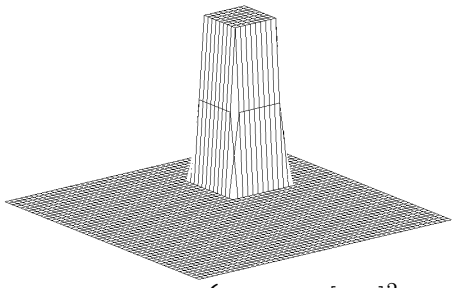
Ein Beispiel.

Wir glätten die charakteristische Funktion $\chi_{[1,3]^2}$ mit ψ_k für $k \in \{0,5;\ 1;\ 1,25;\ 1,5;\ 2,5;\ 5\}$.



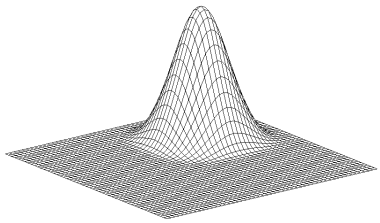
$$\psi_k(x) := \begin{cases} k^3 e^{-\frac{1}{1-|kx|^2}} & |kx| < 1 \\ 0 & |kx| \geq 1 \end{cases}$$

$*$

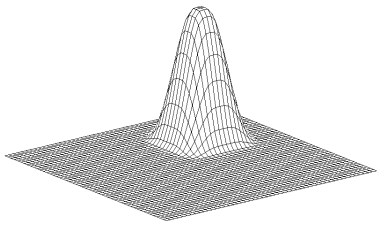


$$\chi_{[1,3]^2}(x) := \begin{cases} 1 & x \in [1,3]^2 \\ 0 & x \notin [1,3]^2 \end{cases}$$

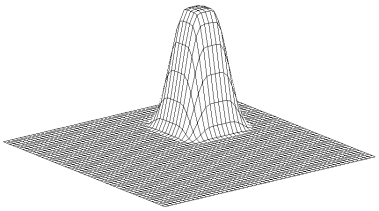
ergibt



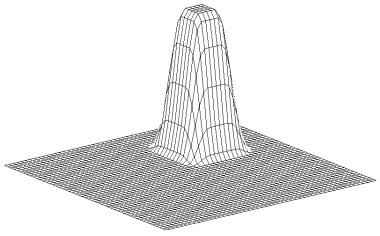
$\psi_{0,5} * \chi_{[1,3]^2}$



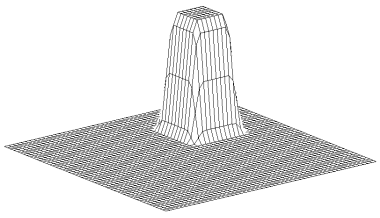
$\psi_1 * \chi_{[1,3]^2}$



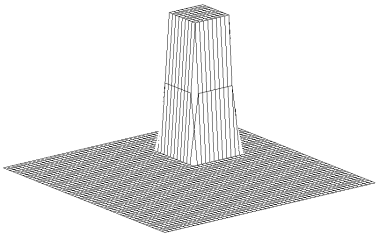
$\psi_{1,25} * \chi_{[1,3]^2}$



$\psi_{1,5} * \chi_{[1,3]^2}$



$\psi_{2,5} * \chi_{[1,3]^2}$



$\psi_5 * \chi_{[1,3]^2}$

Seien nun $f \in \mathcal{L}^2$ und $\epsilon > 0$ beliebig, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $||\Psi_k f - f||_{\mathcal{L}^2} < \epsilon$ und für Anfangsdaten $V_0 := \mathrm{d}_m(\Psi_k f) = (\mathrm{d}_m \psi_k) * f$ klingt die Lösung der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen für $t \to \infty$ polynomial ab mit Rate m.

Zur Magneto-Thermo-Elastizität mit „second sound".

Die Dissipation des klassischen Systems liest sich als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}^0(t) = -\frac{\alpha}{\beta}|\xi|^2|w|^2 - \varkappa\frac{\gamma}{\delta}|\xi|^2|\vartheta|^2,$$

während beim „second sound"-System der Wärmefluss eine andere Regularität aufweist als der Temperaturgradient, was sich auch in der Dissipation widerspiegelt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}^\tau(t) = -\frac{\alpha}{\beta}|\xi|^2|w|^2 - \frac{\rho\gamma}{\varkappa\delta}|r|^2.$$

Bei der Konstruktion der Lyapunov-Funktionale für die beiden Modelle ergab sich daraus noch kein wesentlicher Unterschied: Während wir in der klassischen Situation mit Hilfe geeigneter Multiplikatoren ein Φ^0 konstuiert haben mit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^0(t) &\leq Ca^2(1+|\xi|^2)(|\xi|^2|w|^2 + |\xi|^2|\vartheta|^2)\\ &\quad + Ca^2\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}(|\xi|^2|w_t|^2 + |\xi|^2|\vartheta_t|^2) - \varepsilon|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}^0\end{aligned}$$

und daraus mit der Dissipation unmittelbar für das Funktional

$$\mathcal{L}^0(t) := \Phi^0(t) + N_1 a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1^0(t) + N_2 a^2\frac{(1+|\xi|^2)}{|\xi|^2}\hat{\mathcal{E}}_2^0(t)$$

mit hinreichend großen N_1, N_2 die gewünschte Abschätzung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}^0(t) \leq -\varepsilon_0|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}^0$$

erhalten haben, führten beim „second sound"-Problem die Abschätzungen von ϑ, ϑ_t gegen r, r_t immerhin zu einem Funktional Φ^τ mit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^\tau(t) &\leq Ca^2(1+|\xi|^2)(|\xi|^2|w|^2 + |r|^2)\\ &\quad + Ca^3\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}(|\xi|^2|w|^2 + |r_t|^2) - \varepsilon|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}^\tau,\end{aligned}$$

d.h. das Lyapunov-Funktional

$$\mathcal{L}^\tau(t) := \Phi^\tau(t) + N_1 a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1^\tau(t) + N_2 a^3\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}\hat{\mathcal{E}}_2^\tau(t)$$

lieferte für passende N_1, N_2 ebenfalls die Abschätzung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}^\tau(t) \leq -\varepsilon_0|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}^\tau.$$

Es blieb noch jeweils die Äquivalenz von Lyapunov-Funktional und Energieterm erster Ordnung zu zeigen, d.h. $\Phi^{\cdot}$ und $\hat{\mathcal{E}}_2^{\cdot}$ gegen $\hat{\mathcal{E}}_1^{\cdot}$ abzuschätzen. In beiden Fällen hatten wir

$$|\Phi^{\cdot}| \quad \leq \quad Ca(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1^{\cdot} + Ca^2\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}\hat{\mathcal{E}}_2^{\cdot},$$

doch während sich beim klassischen Modell $\hat{\mathcal{E}}_2^0$ mit Hilfe der Differenzialgleichungen gegen $\hat{\mathcal{E}}_1^0$ abschätzen ließ via

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_2^0(t) &\leq C(|v_{tt}|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |w_t|^2 + |\vartheta_t|^2) \\
&\leq C(|\xi|^4|v|^2 + |\xi|^2|w|^2 + |\xi|^2|\vartheta|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |\xi|^4|w|^2 + |\xi|^4|\vartheta|^2) \\
&\leq C|\xi|^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1^0(t),
\end{aligned}$$

führte beim „second sound"-Modell der beim Wärmefluss „fehlende" Faktor $|\xi|^2$ nur zu

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_2^\tau(t) &\leq C(|v_{tt}|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |w_t|^2 + |\vartheta_t|^2 + |r_t|^2) \\
&\leq C(|\xi|^4|v|^2 + |\xi|^2|\vartheta|^2 + |\xi|^2|w|^2 + |\xi|^2|v_t|^2 + |\xi|^4|w|^2 + |\xi|^2|r|^2 + \underline{|r|}^2) \\
&\leq C(\underline{1} + |\xi|^2)(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1^\tau(t).
\end{aligned}$$

Für geeignete Konstanten $d_1 = d_1(C, N_2)$ und $d_2 = d_2(C, N_1)$ ergab sich daraus

$$d_2a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1^\tau \quad \leq \quad \mathcal{L}^\tau(t) \quad \leq \quad d_1a\underline{\left(|\xi|^2 + \frac{1}{|\xi|^2}\right)}a^2(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1^\tau.$$

Formal erhielten wir daraus das gleiche Resultat wie bei der klassischen Magneto-Thermo-Elastizität (oder auch bei den entsprechenden beiden Modellen der Thermoelastizität): Die Energie $\mathcal{E}^\tau(t) = \int \hat{\mathcal{E}}^\tau(t,\xi)\ \mathrm{d}\xi$ klingt polynomial ab mit Rate m, falls für die Anfangsdaten gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m}\hat{\mathcal{E}}(0,\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty, \tag{$*$}$$

jetzt allerdings mit

$$\begin{aligned}
\kappa(\xi) &= a\left(|\xi|^2 + \frac{1}{|\xi|^2}\right) \qquad \text{und} \\
k(\xi) &= \frac{|\xi|^2}{a^2\kappa(\xi)(1+|\xi|^2)} \\
&= \frac{(\xi_1^2\xi_3^2)^3}{|\xi|^2(\xi_1^2+\xi_3^2)^3(1+|\xi|^2)(1+|\xi|^4)}.
\end{aligned}$$

Sei wieder ohne Einschränkung $m = 1$. Übersetzen wir $(*)$ in eine entsprechende Regularitätsanforderung für die Daten, so erhalten wir:

Existiert zu jedem $V_0 \in \{u_0^\tau, u_1^\tau, h_0^\tau, \theta_0^\tau, q_0^\tau\}$ ein $W_0 \in \mathcal{L}^2$ mit

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\frac{\partial^4}{\partial x_3^4}W_0 = (1+\Delta^2)(1-\Delta)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)^2 V_0,$$

dann ist $\mathcal{E}^\tau(t) = \mathcal{O}(t^{-1})$.

Daten, die diese Bedingung erfüllen, beschaffen wir uns dann wie beim klassischen Problem.

Zur rein hyperbolischen Magneto-Thermo-Elastizität.

Wir haben in Kapitel 6 gesehen, dass die exponenzielle Stabilität einer Lösung der Magneto-Thermo-Elastizität auch dann nicht verloren geht, wenn wir nicht nur die Wärmeleitungsgleichung, sondern auch die Gleichungen des magnetischen Feldes relaxieren: Die Dissipation des jetzt nur noch gedämpften hyperbolischen Systems,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{E}}(t) = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\alpha}{\beta}|o|^2 - \frac{\rho}{\varkappa}\frac{\gamma}{\delta}|r|^2,$$

reicht immer noch aus, um die exponenzielle Stabilität aller Lösungskomponenten zu gewährleisten. Jetzt erfüllt das Lyapunov-Funktional

$$\mathcal{L}(t) \quad := \quad \Phi(t) + N_1 a^3(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_1(t) + N_2 a^6 b(1+|\xi|^2)\hat{\mathcal{E}}_2(t)$$

für ein entsprechend modifiziertes Φ die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) \leq -|\xi|^2\hat{\mathcal{E}}(t).$$

Die im Vergleich zur in Kapitel 3 betrachteten Situation höheren Potenzen von a entstanden dabei technisch durch iterierten Einsatz der gewichteten binomischen Ungleichung (3.11) bei der Abschätzung von $|w_t|^2$ gegen $|o_t|^2$. Diesen Effekt konnten wir auch schon zuvor beim Vergleich zwischen den Lypunov-Funktionalen des klassischen und des „second sound“-Modells sehen, als wir bei Letzterem noch zusätzlich $|\vartheta_t|^2$ gegen $|r_t|^2$ abschätzen mussten. Auch der b-Term resultiert aus der zusätzlich erforderlichen Abschätzung von $|w_t|^2$ gegen $|o_t|^2$.

Entsprechend ähnlich sieht die zugehörige Bedingung an die Daten aus: Hier sind die Funktionen k und κ in der Forderung

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\xi)}{k(\xi)^m}\hat{\mathcal{E}}(0,\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
\kappa(\xi) &= (a + a^4 b)(1+|\xi|^2)^2, \\
k(\xi) &= \frac{|\xi|^2}{a^2\kappa(\xi)} \\
&= \frac{|\xi|^2}{(a^3 + a^6 b)(1+|\xi|^2)^2}.
\end{aligned}$$

Wie in den bisherigen Situationen lässt sich daraus dann wieder eine Regularitätsbedingung an die nicht-transformierten Daten herleiten.

8 Zur Trägerbedingung beim modifizierten Magnetfeld

Wie schon zu Beginn von Kapitel 5 beschrieben, kommt es beim Nachweis der Abklingraten bereits beim klassischen System der Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen zu technischen Schwierigkeiten, wenn man das stationäre Magnetfeld $\vec{H}$ durch $(0, H_2, H_3)$ modelliert anstatt durch $(0, 0, H_3)$. Um mit Hilfe der Gronwall-Ungleichung nachzuweisen, dass der Energieterm $\hat{\mathcal{E}}(\xi)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^3$ exponenziell fällt, mussten wir uns an einer zentralen Stelle in Lemma 5.6 für einen Term „künstlich“ ein passendes Vorzeichen beschaffen. Diese Annahme ließ sich durch eine zusätzliche Forderung an die Anfangsdaten rechtfertigen, die wir bei den anderen betrachteten Systemen (mit $H_2 := 0$) nicht benötigt haben:

$$\operatorname{supp}(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{h}_0, \hat{\theta}_0, \hat{q}_0) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_2 \cdot \xi_3 > 0\}.$$

Wir untersuchen im Folgenden, was diese Bedingung für die nicht-transformierten Daten bedeutet.

Zur Beziehung zwischen $\operatorname{supp}(f)$ **und** $\operatorname{supp}(\hat{f})$**.**

Sei $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mit $x \cdot f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ und $\xi \cdot \hat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Bezeichne $\operatorname{Var}(f)$ die Varianz von f:

$$\operatorname{Var}(f) := \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

und $\sigma(f)$ die Streuung von f:

$$\sigma(f) := \sqrt{\frac{\operatorname{Var}(f)}{||f||_{\mathcal{L}^2}}}.$$

Nach der aus der Quantenmechanik bekannten Heisenbergschen Unschärferelation besteht dann die Ungleichung

$$\sigma(f) \cdot \sigma(\hat{f}) \geq \frac{\hbar}{2},$$

wobei $\hbar = \frac{\mathrm{h}}{2\pi}$ mit Planckscher Wirkungskonstante h. Ein funktionalanalytischer Beweis von Hermann Weyl und Wolfgang Pauli findet sich in [We2]. Daraus ergibt sich sofort, dass der Träger von f und der von $\hat{f}$ nicht gleichzeitig beliebig klein werden können, falls f nicht bereits die Nullfunktion ist:

Seien $S, \hat{S} > 0$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-S, S]$ und $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq [-\hat{S}, \hat{S}]$, dann gilt

$$\begin{aligned} S \cdot \hat{S} &\geq \frac{\left(\int\limits_{-S}^{+S} x^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int\limits_{-S}^{+S} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(\int\limits_{-\hat{S}}^{+\hat{S}} x^2 |\hat{f}(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int\limits_{-\hat{S}}^{+\hat{S}} |\hat{f}(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{Var}(f)}{||f||_{\mathcal{L}^2}}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{Var}(\hat{f})}{||\hat{f}||_{\mathcal{L}^2}}} \\ &= \sigma(f) \cdot \sigma(\hat{f}) \\ &\geq \frac{\hbar}{2}. \end{aligned}$$

Mehr noch: Ist $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq [-\hat{S}, \hat{S}]$ für ein von der Nullfunktion verschiedenes $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, dann existiert kein (echtes) Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, auf dem f verschwindet [Ma]. Seien nämlich $f \equiv 0$ auf $[a, b]$ und $x_0 := \frac{a+b}{2}$, dann ist f in x_0 beliebig oft differenzierbar und für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \hat{f}(\xi) e^{ix_0\xi} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\hat{S}}^{+\hat{S}} \hat{f}(\xi)(i\xi)^k e^{ix_0\xi} \, \mathrm{d}\xi,$$

also gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\hat{S}}^{+\hat{S}} \hat{f}(\xi) e^{i(x-x_0)\xi} e^{ix_0\xi} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\hat{S}}^{+\hat{S}} \hat{f}(\xi) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k (i\xi)^k}{k!} \right) e^{ix_0\xi} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\hat{S}}^{+\hat{S}} \hat{f}(\xi)(i\xi)^k e^{ix_0\xi} \, \mathrm{d}\xi}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Resultat lässt sich auf höhere Raumdinensionen übertragen: Sei $\operatorname{supp}(\hat{f})$ in eine Raumrichtung beidseitig beschränkt, etwa $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times [-\hat{S}, \hat{S}]$, und sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \times [a, b]$, dann gilt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\hat{S}}^{+\hat{S}} \hat{f}(\xi) e^{ix_n\xi_n} \, \mathrm{d}\xi_n}_{=0} \, e^{ix_1\xi_1} \cdots e^{ix_{n-1}\xi_{n-1}} \, \mathrm{d}(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

falls die Abbildung $F : \xi_n \mapsto f(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, \xi_n)$ für alle $\xi_1, ..., \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Konstruktion geeigneter Anfangsdaten.

Wir wollen auch in dieser Situation Anfangsdaten konstruieren, die ein polynomiales Abklingen der zugehörigen Lösung sichern. Sei hierfür

$$E_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, \qquad E_0(\xi) = (E_{u_0}, E_{u_1}, E_{h_0}, E_{\theta_0}, E_{q_0})(\xi)$$

mit $\operatorname{supp}(E_0) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1\xi_3 > 0\}$. Dann besitzt das System der hyperbolischen Magneto-Thermo-Elastizitätsgleichungen mit modifiziertem stationären Magnetfeld $\vec{H} = (0, H_2, H_3)$ (mit $H_2, H_3 > 0$) zu den Anfangsdaten $F_0 := \mathcal{F}^{-1}(E_0)$ genau eine Lösung $F \in \mathcal{C}^1([0,\infty), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))$, so dass das asymptotische Verhalten der zu F gehörigen Energie $\mathcal{E}_F$ beschrieben wird durch $\mathcal{E}_F(t) = \mathcal{O}(t^{-m})$, sofern F_0 zusätzlich die Bedingung

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{C_2(\xi)/C_1(\xi)}{C_3(\xi)^m} \hat{\mathcal{E}}_{F_0}(\xi)\ \mathrm{d}\xi < \infty$$

aus Satz 5.8 erfüllt. Speziell ist dann auch $G := \operatorname{Re}(F)$ eine reellwertige Lösung der Differenzialgleichungen zu den Anfangsdaten $G_0 := \operatorname{Re}(F_0)$ und die zu G gehörige Energie $\mathcal{E}_G$ klingt ebenfalls polynomial ab mit Rate m:

$$||\mathcal{E}_G(t)||_{\mathcal{L}^2} \leq ||\mathcal{E}_F(t)||_{\mathcal{L}^2} \leq C_0 t^{-m}.$$

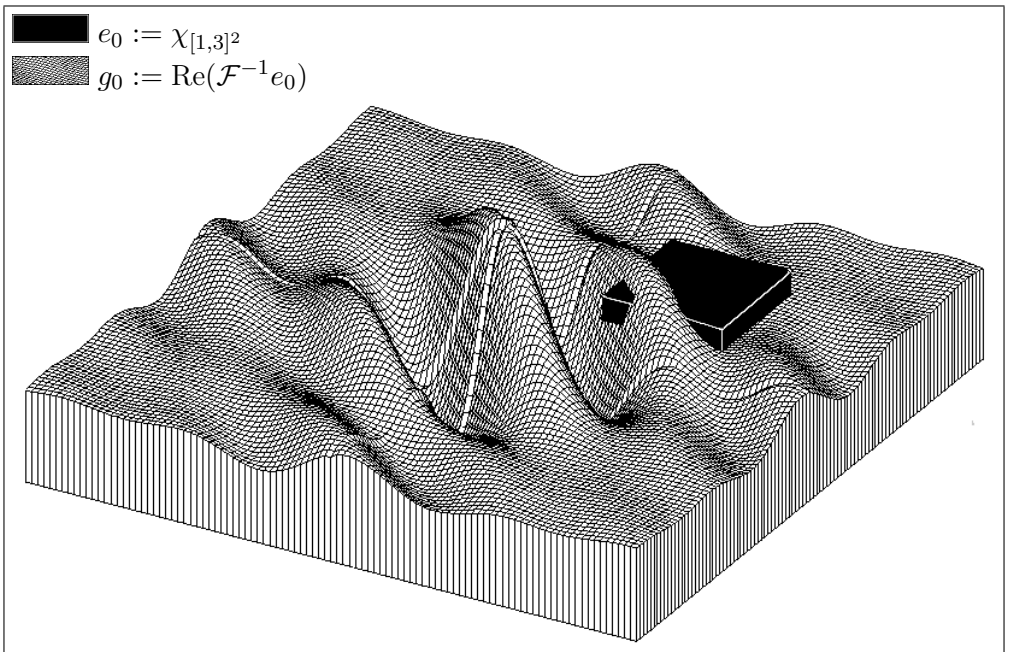
Allerdings hängt C_0 nicht mehr wie bisher von $||G_0||_{\mathcal{L}^2}$ ab, sondern von $||F_0||_{\mathcal{L}^2}$.

Ein Beispiel.

Sei $e_0 := \chi_{[1,3]^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wobei

$$\chi_\Omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \xi \mapsto \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega \\ 0, & \xi \notin \Omega \end{cases}$$

die charakteristische Funktion zu einem beliebigen Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Wir berechnen das zugehörige $g_0 := \operatorname{Re}(\mathcal{F}^{-1}e_0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.



Die entsprechende Situation im Zweidimensionalen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi}e_0(\xi)\ \mathrm{d}\xi\Big)\\
&= \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\limits_{[1,3]^3} e^{ix\xi}\ \mathrm{d}\xi\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\limits_1^3\int\limits_1^3\int\limits_1^3 \cos(x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3)\ \mathrm{d}\xi_1\ \mathrm{d}\xi_2\ \mathrm{d}\xi_3\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\limits_1^3\int\limits_1^3 \frac{1}{x_1}\sin(3x_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3)-\sin(x_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3)\ \mathrm{d}\xi_2\ \mathrm{d}\xi_3\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\limits_1^3 \frac{1}{x_1x_2}(-\cos(3x_1+3x_2+x_3\xi_3)+\cos(3x_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3)\\
&\qquad +\cos(x_1+3x_2+x_3\xi_3)-\cos(x_1+x_2+x_3\xi_3))\ \mathrm{d}\xi_3\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{1}{x_1x_2x_3}(-\sin(3x_1+3x_2+3x_3)+\sin(3x_1+3x_2+x_3)\\
&\qquad +\sin(3x_1+x_2+3x_3)-\sin(3x_1+x_2+x_3)\\
&\qquad +\cos(x_1+3x_2+3x_3)-\cos(x_1+3x_2+x_3)\\
&\qquad -\cos(x_1+x_2+3x_3)+\cos(x_1+x_2+x_3)).
\end{aligned}$$

Da außerdem für $f_0 := \mathcal{F}^{-1}e_0$ und für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{C_2(\xi)/C_1(\xi)}{C_3(\xi)^m}|\hat{f}_0(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{C_2(\xi)/C_1(\xi)}{C_3(\xi)^m}|e_0(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi\\
&= \int\limits_{[1,3]^3} \frac{C_2(\xi)/C_1(\xi)}{C_3(\xi)^m}\ \mathrm{d}\xi\\
&< \infty
\end{aligned}$$

erfüllt ist, erhalten wir sogar: Die Lösung G des Anfangswertproblems zu den Daten G_0 klingt mit beliebig großer Rate polynomial ab.

Bemerkung.

Da auch die Stabilitätsbedingungen für die in den Kapiteln 3 und 6 betrachteten Modelle von der Form

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{K_1(\xi)}{(K_2(\xi))^m K_3(\xi)}|\hat{f}_0(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi < \infty \qquad (*)$$

sind mit Polynomen $K_1(\xi), K_2(\xi), K_3(\xi) \geq 0$ derart, dass $K_2(\xi)$ und $K_3(\xi)$ höchstens auf den Koordinatenachsen verschwinden, sind Anfangsdaten $f_0 \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$, deren Fourier-Transformierte einen kompakten Träger in

$$\mathbb{R}^3 \backslash \{\xi \mid \xi_1\xi_2\xi_3 = 0\}$$

haben, auch hier von Interesse: Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz [Fo] ist $\hat{f}_0$ stetig, nimmt also sein Maximum auf $\mathrm{supp}(\hat{f}_0)$ an und Bedingung $(*)$ ist somit für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$

erfüllt.

Quantitativ kann sich das Abklingen für große m und kleine Zeiten t allerdings erheblich verschlechtern: Nach Lemma 3.13 ist

$$t^m \mathcal{E}(t) \leq \frac{m!}{d^{m+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{K_1(\xi)}{(K_2(\xi))^m} \hat{\mathcal{E}}(0,\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

für ein $d \ll 1$.

Schlussbemerkungen

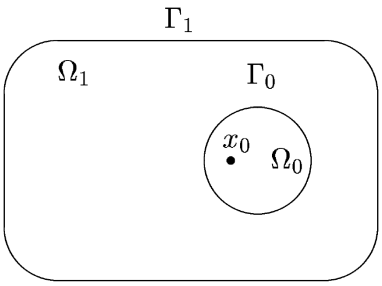
Zum Schluss werden noch ein paar weitere Fragen aus dem Bereich der Magneto-Thermo-Elastizität andiskutiert, die in Zukunft von Interesse sein könnten.

Das Anfangsrandwertproblem.

In [Mu1] wird neben dem klassischen Cauchy-Problem der Magneto-Thermo-Elastizität auch ein spezielles Anfangsrandwertproblem behandelt: Man betrachtet ein beschränktes Gebiet Ω mit Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, derart, dass für ein $a > 0$ und ein $x_0 \in \Omega$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x \in \partial\Omega \mid (x - x_0) \cdot \vec{\nu}(x) \leq 0\}; \\ \Gamma_1 &= \{x \in \partial\Omega \mid (x - x_0) \cdot \vec{\nu}(x) \geq a\}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\vec{\nu}(x)$ den äußeren Normalenvektor des Gebietes im Punkt $x \in \Gamma$. Typischerweise hat Ω dann die Form $\Omega = \Omega_1 \backslash \Omega_0$ wie im folgenden Bild dargestellt:



Neben den Randbedingungen vom Dirichlet-Typ für h und θ auf ganz $\partial\Omega$,

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{\nu} \times (\nabla \times h) &= 0 \\ \vec{\nu} \cdot h &= 0 \\ \theta &= 0 \end{aligned} \right. ,$$

werden für u Randbedingungen vom *Gedächtnistyp* gefordert:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_0 \\ u + r * \partial_{\vec{\nu}} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_1 \end{aligned} \right. ,$$

wobei $\partial_{\vec{\nu}}$ den natürlichen Neumann-Randoperator für die erste Differenzialgleichung des Systems (3.1) bezeichnet:

$$\partial_{\vec{\nu}} u \;:=\; \left(s_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} u^k \cdot \vec{\nu}^j \right)_{j=1,2,3} - \alpha H h^3 \vec{\nu} + \alpha H \vec{\nu}^3 h$$

für ein gewisses $r = r(t)$ mit $r(0) > 0$. Die Randbedingung vom Gedächtnistyp hat dann eine stabilisierende Wirkung auf das System und determiniert in folgender Weise das asymptotische Verhalten: Ableiten der Randbedingung auf Γ_1 ergibt

$$\left(1 + \frac{\dot{r}}{r(0)} * (\cdot)\right) \partial_{\vec{\nu}} u \;=\; -\frac{u_t}{r(0)}.$$

Bezeichne $g = g(t)$ den zugehörigen *Resolventenkern*, dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{\nu}} u &= -\left(1 + \frac{\dot{r}}{r(0)} * (\cdot)\right)^{-1} \frac{u_t}{r(0)} \\ &= -\left(1 + g * (\cdot)\right) \frac{u_t}{r(0)}. \end{aligned}$$

Fällt g nun exponenziell, dann fällt auch die Lösung $(u, h, \theta)(t)$ des Systems für $t \to \infty$ exponenziell (was sich im Wesentlichen darauf zurückführen lässt, dass – im Gegensatz zum Ganzraumproblem – hier die erste Ungleichung von Poincaré zur Verfügung steht). Andererseits führt ein polynomiales Abklingen von g dazu, dass die Lösung des Systems ebenfalls polynomial abklingt.

Ob sich das Langzeitverhalten der Lösung auch bei „second sound"-Effekt auf das Verhalten des Resolventenkerns zurückführen lässt, wurde bisher nicht untersucht.

Die nichtlinearen Gleichungen.

In [Do] wird das folgende, quasilineare Anfangsrandwertproblem der Magneto-Thermo-Elastizität für ein homogenes, isotropes, beschränktes Medium $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ diskutiert:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \nabla' u - \alpha (\nabla \times h) \times (\vec{H} + h) + \gamma \nabla \theta &=& f_1 \\ h_t - \Delta h - \beta \nabla \times (u_t \times (\vec{H} + h)) &=& f_2 \\ \theta_t - \varkappa \Delta \theta + \gamma \nabla' u_t &=& f_3 \end{array} \right.$$

mit $f_i = f_i(t, x)$ $(i = 1, 2, 3)$, $\vec{H} = \vec{H}(t, x) = (H(t, x), 0, 0)$ und den Anfangs- bzw. Randbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(0, \cdot) &=& u_0; \\ u_t(0, \cdot) &=& u_1 \\ h(0, \cdot) &=& h_0; \\ \theta(0, \cdot) &=& \theta_0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u|_{\partial\Omega} &=& 0; \\ \vec{\nu} \times (\nabla \times h)|_{\partial\Omega} &=& 0; \\ \nu \cdot h|_{\partial\Omega} &=& 0; \\ \theta|_{\partial\Omega} &=& 0 \end{array} \right. .$$

Dabei seien die x_3-Komponenten aller auftretenden Größen identisch 0. Zusätzlich möge $\nabla' h_0 = 0$ gelten, was dazu führt, dass h für alle Zeiten divergenzfrei ist.

Mit den gleichen Rechnungen, die wir in Kapitel 2 durchgeführt haben, wird die Wohlgestelltheit des korrespondierenden linearen Problems gezeigt.

Die Eindeutigkeit von Lösungen des nichtlinearen Anfangsrandwertproblems folgt mit den üblichen Energiemethoden aus dem Lemma von Gronwall, die Existenz einer Lösung wird mit Hilfe des aus der Numerik bekannten Galerkin-Verfahrens, einer speziellen Methode der Finiten

Elemente, behandelt. Dazu wird das System der Differenzialgleichungen als variationelle Evolutionsgleichung vom Typ

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t) + \mathrm{A}(t)\mathrm{u}(t) &= \mathrm{b}(t) \\ \mathrm{u}(0) &= \mathrm{u}_0 \in \mathcal{V} \end{cases}$$

aufgefasst. Hierbei sind $\mathrm{b} \in \mathcal{L}^2((0,T),\mathcal{H})$ und $\mathrm{A}(t) \in \mathcal{L}_b(\mathcal{V},\mathcal{V}')$ mit $(\mathrm{A}(t)\mathrm{u})\mathrm{v} := \langle \mathrm{A}(t)\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}$ und die Räume $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ und $\mathcal{V}'$ bilden ein Gelfand-Tripel, d.h. $\mathcal{V}'$ ist der Dualraum zu $\mathcal{V}$ und es gibt dichte, stetige Einbettungen $\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ sowie $\mathcal{H} \to \mathcal{V}'$. In unserem Fall sind $\mathcal{V} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $\mathcal{V}' = (\mathcal{H}_0^1)'(\Omega)$. Gesucht ist dann eine Lösung u im Sobolev-Raum $\mathcal{W}^{1,2}((0,T),\mathcal{H})$.

Eine Analyse des Spektrums von A liefert ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{V}$, bestehend aus Eigenvektoren $\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zu A. Beim Galerkin-Verfahren berechnet man nun die Projektion $\mathrm{Proj}(\mathrm{u}_0)$ der Daten u_0 auf den von den ersten n Eigenvektoren aufgespannten Unterraum $\mathcal{V}_n$ und löst das System gewöhnlicher Differenzialgleichungen

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{u}_n(t),\phi_j\rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathrm{A}(t)\mathrm{u}_n(t),\phi_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}} &= \langle \mathrm{b}(t),\phi_j\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}, \quad j = 1,...,n \\ \mathrm{u}_n(0) &= \mathrm{Proj}(\mathrm{u}_0) \end{cases} .$$

Dies liefert eine Folge von zunächst lokalen Lösungen $\mathrm{u}_n \in \mathcal{W}^{1,2}([0,t_n],\mathcal{V}_n)$, die sich mittels einer a priori-Abschätzung auf $[0,T]$ fortsetzen lassen. Um anschließend – ebenfalls mit a priori-Abschätzungen – zu zeigen, dass $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein u der gewünschten Regularität konvergiert, muss wie üblich bei nichtlinearen Problemen gefordert werden, dass die Energie der Anfangsdaten und auch die rechte Seite (f_1, f_2, f_3) hinreichend klein sind.

Schließlich werden für den Spezialfall $\vec{H} \equiv 0$ und Daten von ausreichender Regularität (die natürlich zu einer höheren Regularität der Lösungsfunktionen u, h, θ führen soll) gezeigt, dass h und θ für $t \to \infty$ in einem geeigneten Sobolev-Raum schwach gegen 0 konvergieren und dass eine Funktion $v \in \mathcal{C}^0([0,\infty),\mathcal{V})$ existiert mit $v_t \in \mathcal{C}^0([0,\infty),\mathcal{H})$ und $v_{tt} + \tilde{A}v = 0$, so dass gelten:

$$\begin{cases} u(t) - v(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{in } \mathcal{H} \\ u_t(t) - v_t(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{in } \mathcal{V}' \end{cases}$$

Dabei entspricht $\tilde{A}$ dem Elastizitätsoperator $-\mu\Delta - (\mu+\lambda)\nabla\nabla'$, aufgefasst als Abbildung $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$.

Auch die Frage, ob sich diese Resultate auf den dreidimensionalen Fall übertragen lassen, ist noch offen.

ine sage iv nv niht mere
hie hat daz maere ein ende

Nibelungen-Lied, letzte Aventiure

Anhang: Matlab-Code

Zur numerischen Berechnung der Faltungsprodukte in Kapitel 7,

$$(\psi_t * \chi_{[1,3]^2})(x) = \int_1^3 \int_1^3 \psi_t(x-y)\ \mathrm{d}y$$

für $t \in \{0,5;\ 1;\ 1,25;\ 1,5;\ 2,5;\ 5\}$, haben wir iterativ die Trapez-Regel `trapz` benutzt: Durch Diskretisierung $x_1, x_2 = (-5 + 0,2 \cdot k)_{k=0,\ldots,l_x}$ und $y_1, y_2 = (1 + 0,1 \cdot i)_{i=0,\ldots,l_y}$ mit $l_x = 50$ und $l_y = 20$ erhalten wir für den Integranden

$$a_{klij} = \psi_t(x_1(k) - y_1(i), x_2(l) - y_2(j)) =: A((k-1) \cdot l_y + i, (l-1) \cdot l_y + j),$$

so dass die Werte des inneren Integrals näherungsweise gegeben sind als

$$\begin{aligned} b_{kli} &= \mathrm{trapz}(y_2, a_{kli\cdot}) \\ &\approx \int_1^3 \psi_t(x_1(k) - y_1(i), x_2(l) - y_2)\ \mathrm{d}y_2 \end{aligned}$$

und die des äußeren dann als

$$\begin{aligned} c_{kl} &= \mathrm{trapz}(y_1, b_{kl\cdot}) \\ &\approx (\psi_t * \chi_{[1,3]^2})(x_1(k), x_2(l)). \end{aligned}$$

```
x1=-5:0.2:5;
x2=-5:0.2:5;
y1=1:0.1:3;
y2=1:0.1:3;

lx=length(x1);
ly=length(y1);

A=zeros(lx*ly,lx*ly);
B=zeros(lx*ly,lx);
C=zeros(lx,lx);

t=[0.5 1 1.25 1.5 2.5 5];
```

```
for m=1:length(t)

    figure

    for k=1:lx
        for l=1:lx
            for i=1:ly
                for j=1:ly
                    if (t(m)*(x1(k)-y1(i))).^2+(t(m)*(x2(l)-y2(j))).^2<1
                        A((k-1)*ly+i,(l-1)*ly+j)=(t(m)^3)*exp(-1./(1-(t(m) ...
                            *(x1(k)-y1(i))).^2-(t(m)*(x2(l)-y2(j))).^2));
                    else
                        A((k-1)*ly+i,(l-1)*ly+j)=0;
                    end
                end
            end
        end
    end

    for k=1:lx
        for l=1:lx
            for i=1:ly
                B((k-1)*ly+i,l)=trapz(y2,A((k-1)*ly+i,(l-1)*ly+1:l*ly));
            end
            C(k,l)=trapz(y1,B((k-1)*ly+1:k*ly,l));
        end
    end

    colormap([0 0 0]); meshz(x1,x2,C); axis off; grid off;

end
```

Literaturverzeichnis

[Ad] Adams, R. & Fournier, J.: *Sobolev Spaces*, 2nd edition, Pure and Applied Mathematics 140 (Academic Press), 19-29 & 59-76 (2003)

[Ba] Bakshi, S.K.: *Magneto-thermo-elastic interactions in an infinite solid due to transient heat sources*, Proc. nat. Inst. Sci. India 35, 719-720 (1969)

[Ca] Cagniard, L.: *On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid*, Compt. Rend. 234, 1706-1721 (1952)

[Do] Doll, M.S.: *Zur Dynamik (magneto-)thermoelastischer Systeme im* $\mathbb{R}^2$, Konstanzer Dissertiationen 599, Hartung-Gorre Verlag Konstanz, 2004

[El] El-Bary, A.A.: *Numerical Solution of Electro-magneto-thermo-mechanical Shock Problem*, Computational Methodes in Science and Technology 12 (2), 101-108 (2006)

[Ez] Ezzat, M.A., Othman, M.I. & Smaan, A.A.: *State space approach to twodimensional electro-magneto-thermoelastic problems with two relaxation times*, International Journal of Engineering Sciences 39, 1383-1404 (2001)

[Fe] Fernández Sare, H. & Racke, R.: *On the stability of damped Timoshenko systems – Cattaneo versus Fourier law*, Arch. Rational Mech. Anal. 194, 221-251 (2009)

[Fo] Forster, O.: *Analysis 3 – Integralrechnung im* $\mathbb{R}^n$, Vieweg Verlag, 3. Auflage, 104-119 (1999)

[Fr] Friedrichs, K.O.: *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, Trans. Am. Math. Soc. 55, 132-151 (1944)

[Ir1] Irmscher, T.: *Aspekte hyperbolischer Thermoelastizität*, Hartung-Gorre Verlag Konstanz, 65-86 (2006)

[Ir2] Irmscher, T. & Racke, R.: *Sharp decay rates in parabolic and hyperbolic thermoelasticity*, Appl. Math. 71, 459-478 (2006)

[Ji] Jiang, S. & Racke, R.: *Evolution equations in thermoelasticity*, π Chapman & Hall/CRC Monographs Surveys Pure Appl. Math. 112, Boca Raton, 35-41 (2000)

[Kn] Knopoff, L.: *The interaction between elastiv wave motions and a magnetic field in electrical conductors*, J. Geophys. Res. 60, 441-456 (1955)

[Ma] Mallat, S.: *A wavelet tour of signal processing*, 3rd edition, Academic Press (2009)

[Mu1] Muñoz Rivera, J.E. & Racke, R.: *Magneto-thermo-elasticity – large-time behavior for linear systems*, Adv. Differential Equations 6, 359-384 (2001)

[Mu2] Muñoz Rivera, J.E. & Racke, R.: *Polynomial stability in two-dimensional magneto-elasticity*, IMA J. Appl. Math. 66 (3), 269-283 (2001)

[Pa1] Paria, G.: *Magneto-Elasticity and Magneto-Thermo-Elasticity*, Adv. Appl. Mech. 10, 73-112 (1967)

[Pa2] Paria, G.: *Magneto-elastic stresses in an infinite medium with a long cylindrical hole*, J. Sc. Engg. Res. 5, 41-48 (1961)

[Pa3] Parkus, H.: *Magneto-Thermoelasticity*, ICMS No. 188, Springer-Verlag, Wien (1972)

[Ra1] Racke, R.: *Thermoelasticity*, Handbook of differential equations, Vol. 5, Elsevier B.V. (edited by Dafermos, C.M. & Pokorný, M.), 315-420 (2009)

[Ra2] Racke, R.: *Thermoelasticity with second sound – exponential stability in linear and non-linear 1-d*, Math. Meth. Appl. Sci. 25, 409-441 (2002)

[Ra3] Racke, R.: *Asymptotic behavior of solutions in linear 2- or 3-d thermoelasticity with second sound*, Quart. Appl. Math. 61, Nr. 2, 315-328 (2003)

[Ra4] Racke, R.: *Lectures on Nonlinear Evolution Equations*, Aspects of Mathematics E, Vol. 19, Vieweg Verlag, 35-37 (1991)

[Ro1] Roychoudhuri, S.K. & Chatterjee (Roy), G.: *A coupled magneto-thermoelastic problem in a perfectly conducting elastic half-space with thermal relaxation*, Int. J. Math. Math. Sci. 13, no. 3, 567-578 (1990)

[Ro2] Roy Choudhuri1, S.K. & Chattopadhyay (Banerjee), M.: *Electro-magneto-thermo-visco-elastic Plane Waves in Rotating Media with Thermal Relaxation*, International Journal of Thermophysics, Vol. 28, No. 4, 1401-1419 (2007)

[Ti] Tian, X. & Shen, Y.: *Study on generalized magneto-thermoelastic problems by FEM in time domain*, Acta Mech Sinica 21, 380-387 (2005)

[We1] Weinmann, O.: *Dual-Phase-Lag Thermoelastizität*, Hochschulschrift (Dissertiation), Universität Konstanz, 71-90 (2009)

[We2] Weyl, H.: *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover Publ., New York, 74-80 & 392-394 (1950)

[Zh] Zheng, S.: *Nonlinear parabolic equations and hyperbolic-parabolic coupled systems*, π Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. 76, 39-45 (1987)