

Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen: Wohlgestelltheit und Spektralanalyse

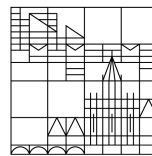
Dissertation zur Erlangung des
akademischen Grades eines Doktors der
Naturwissenschaften

vorgelegt von

Lisa Fischer

an der

Universität
Konstanz



Mathematisch-Naturwissenschaftliche Sektion

Fachbereich Mathematik und Statistik

Konstanz, 2020

Tag der mündlichen Prüfung: 30.10.2020

1. Referent: Prof. Dr. Reinhard Racke

2. Referent: Prof. Dr. Robert Denk

Danksagung

Meine Promotion war mit vielen Höhen und Tiefen verbunden. Sie war aber vor allem ein wunderbarer Lebensabschnitt, in dem ich viel erleben durfte, viel gelernt habe und eine wundervolle Zeit in Konstanz verbringen durfte. In dieser Zeit wurde ich von vielen großartigen Menschen begleitet, die mein Leben in vielen Punkten bereichert haben und bei denen ich mich an dieser Stelle bedanken möchte.

Zuerst gilt mein tiefster Dank meinen Eltern Arno und Rose Fischer. Ihr habt mir immer alle Freiheiten gelassen, die ich gebraucht habe und mich trotzdem immer bei allem bedingungslos unterstützt. Euch stolz zu machen, hat mir immer wieder geholfen neue Energie und Motivation zu schöpfen. Auch meinen Brüdern Daniel und Lukas Fischer, meiner Oma Ida Fischer und meiner lieben Freundin Vera Huss möchte ich danken. Euch, meiner Familie, habe ich so viel zu verdanken und wäre ohne euch heute nicht die, die ich bin.

Ein besonderer Dank gilt meinem Betreuer und Doktorvater Prof. Dr. Reinhard Racke. Seit meinem ersten Semester hast du es immer wieder geschafft deine Faszination für die Mathematik mit mir zu teilen und hast mich als Dozent und Betreuer vieler Seminare, Vorlesungen und Abschlussarbeiten stets gefördert und gefordert, unterstützt und begleitet. Auch das Teilen unsere zweiten gemeinsamen Leidenschaft, der Musik, hat mir in den Jahren immer wieder viel Freude bereitet.

Herzlich danken möchte ich auch Prof. Dr. Robert Denk, dessen Tür immer für mich offen stand. Ich danke dir für die vielen anregenden Gespräche, all die Hilfestellungen, die ich von dir bekommen habe, und die stets angenehme, fröhliche und gute Zusammenarbeit. Auch für die Übernahme meines Koreferats möchte ich dir danken.

PD Dr. Markus Kunze danke ich für die Übernahme meines Prüfungsvorsitzes. Vielen Dank auch für die schöne Zusammenarbeit, deine humorvolle und offene Art sowie die zahlreichen kulinarischen und spaßigen Türentreffen und Einladungen.

Einen lieben Dank möchte ich meinen Freunden, ehemaligen Kommilitonen und (ehemaligen) Kollegen Karsten Herth, Sophia Rau, David Ploß, Dr. Max Nendel, Dr. Felix Kammerlander, Dr. Felix Hummel, Dr. Martin Saal, Dr. Patrick Kurth, Dr. Michael Pokojovy, Vanessa Fitzner, Markus Schlipf, Jennifer Ihlow, Jan Streicher und Leonie Schatz aussprechen. Ihr habt die Zeit an der Uni zu einer der schönsten Zeiten meines Lebens gemacht, wart immer hilfsbereit, hattet immer ein offenes Ohr und habt stets für ein humorvolles und fröhliches Arbeitsklima auf „F5“ gesorgt.

Zusätzlich möchte ich meinen Kollegen Karsten Herth, Sophia Rau, David Ploß und Martin Saal für das Korrekturlesen dieser Arbeit nochmals Danke sagen.

Auch unserer Sekretärin Brigitte Wehrle möchte ich danken, da sie durch ihre offene und hilfsbereite Art zu diesem angenehmen Arbeitsklima beigetragen hat.

Besonders möchte ich mich an dieser Stelle bei Martin Saal bedanken. Du warst nicht nur als guter Freund fast von Beginn meines Studiums an meiner Seite, sondern stets auch als Mentor. Deine Liebe zur Mathematik hat mich schon während meines Studiums inspiriert und motiviert. Ich danke dir für die Stunden langen Diskussionen über die Mathematik und deine stete Hilfsbereitschaft.

Natürlich gibt es noch viele andere Menschen, die mir viel bedeuten, mich immer unterstützt haben und durch ihre Freundschaft bereichert haben. Ich bitte um Entschuldigung, dass ich an dieser Stelle nicht jeden namentlich nennen kann.

Nicht zuletzt möchte ich meinem langjährigen Lebensgefährten Dominik Baumkratz von ganzem Herzen für die liebevolle Unterstützung danken. Du hast mich in allen Höhen und Tiefen während des Studiums und der Promotion immer unterstützt, all meine Launen ertragen, mich aufgefangen und immer wieder aufgebaut, mich bestärkt durchzuhalten und mir Mut zugesprochen. Ohne dich hätte ich diesen Weg niemals meistern können.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen	9
2.1	Wohlgestelltheit	10
2.2	Frequenzanalyse	24
2.2.1	Kleine Frequenzen	26
2.2.2	Große Frequenzen	34
2.2.3	Eigenwertentwicklung	44
2.2.4	Höhere Regularität der Lösung	48
2.3	Kopplungsterme	50
3	Gedämpfte Systeme	53
3.1	Wohlgestelltheit	54
3.2	Frequenzanalyse	64
4	Anwendungsbeispiel	93
4.1	Wohlgestelltheit	95
4.2	Energieabschätzungen	96
4.2.1	Energieabschätzungen im Ganzraum	97
4.2.2	Energieabschätzungen im Außengebiet	99
5	Regularitätsverlust und exponentielle Stabilität - Eine Gegenüberstellung	105
5.1	Thermoelastische Plattengleichungen	106
5.2	Timoshenko Systeme	110
5.3	Thermoelastizitätsgleichungen	112
A	Nützliches über Halbgruppen	117
B	Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte Operatoren	121
C	Nullstellen von Polynomen	125
D	Fourier-Transformation	129
E	Interpolationstheorie	131
F	Ungleichungen	135

Kapitel 1

Einleitung

In der Mathematik war es schon immer von besonderem Interesse Problemstellungen in einem möglichst abstrakten Setting zu formulieren, um so eine Vielzahl an Problemen simultan lösen zu können. Die verallgemeinerten thermoelastischen Plattengleichungen, auch α - β - γ -Systeme genannt, sind gerade eine solche Abstraktion und haben die folgende Gestalt:

Für gegebene Parameter $\mu \geq 0$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ und $\gamma \in (0, 1]$ betrachten wir Systeme der Form

$$(ATP) \quad \begin{cases} u_{tt} + \mu A^\gamma u_{tt} + Au - A^\alpha \theta = 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^\alpha u_t = 0 \end{cases}$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, \theta(0) = \theta_0.$$

Dabei sei A ein linearer selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H , für den zusätzlich

$$(-\infty, 0) \subset \rho(A)$$

gelte. Aus der Selbstadjungiertheit von A folgt damit insbesondere $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Einen solchen Operator nennen wir nicht-negativ. Des Weiteren sind $u, \theta : [0, \infty) \rightarrow H$.

Durch (ATP) lassen sich verschiedene Modelle aus der Physik zusammenfassen, denen je nach Wahl der Parameter α, β, γ , des Hilbertraums H sowie des Operators A verschiedene Gleichungstypen zugrunde liegen. Am Ende dieser Einleitung werden wir drei Beispiele partieller Differentialgleichungen vorstellen, die bestimmten Wahlen von α, β, γ in (ATP) entsprechen, vgl. [MuRa96]: die linearen thermoelastischen Plattengleichungen, eine lineare Viskoelastizitätsgleichung sowie die linearen klassischen Thermoelastizitätsgleichungen.

Dabei nehmen die linearen klassischen Thermoelastizitätsgleichungen eine gesonderte Rolle ein, da sie nicht formal auf ein α - β - γ -System transformiert werden können, wir jedoch Aussagen über das asymptotische Verhalten durch die Analyse von Lösungen eines bestimmten α - β - γ -Systems treffen können. Genauereres diesbezüglich werden wir in Beispiel 1.3 erläutern.

Typische Fragestellungen beim Studium von partiellen Differentialgleichungen sind neben der Wohlgestelltheit auch das Langzeitverhalten sowie das qualitative Verhalten von Lösungen. Durch Diagonalisierung des Operators A sowie einer anschließenden Spektralanalyse des Generators der zugehörigen Halbgruppe können Aussagen über das qualitative sowie quantitative

Kapitel 1: Einleitung

Verhalten von Lösungen getroffen werden. Die Frage nach der Wohlgestelltheit sowie die Spektralanalyse und damit einhergehend die Frage nach dem Langzeitverhalten sowie des qualitativen Verhaltens von Lösungen von (ATP) werden einen Hauptteil der vorgelegten Arbeit ausmachen. Der Fall $\gamma = 0$ (oder $\mu = 0$), die sogenannten α - β -Systeme, wurden unabhängig voneinander von Ammar Khodja und Benabdallah in [AmBe00] sowie Muñoz Rivera und Racke in [MuRa96] eingeführt und untersucht. In [MuRa96] wurden allgemeinere Systeme mit nichtkonstanten Koeffizienten der Form

$$\begin{aligned} u_{tt} + M(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)Au + N(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)A^\alpha\theta &= 0, \\ R(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)\theta_t + Q(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)A^\beta\theta - N(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)A^\alpha u_t &= 0, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{aligned}$$

betrachtet. Dabei sind A ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator, H ein separabler Hilbertraum und M , N , Q und R glatte, reellwertige, strikt positive Funktionen.

Für $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}$ mit

$$\mathcal{S} := \left\{ (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \max\{1 - 2\alpha, 2\alpha - 1\} \leq \beta \leq 2\alpha \right\}$$

wurde bewiesen, dass Lösungen eine Glättungseigenschaft haben, das heißt, unter minimalen Voraussetzungen an die Anfangsdaten, um die lokale Existenz einer Lösung zu sichern, erfüllen die Lösungen u, θ

$$u(t), \theta(t) \in D(A^\infty),$$

für alle $0 < t \leq T$.

Im Parameterbereich, in dem die Glättungseigenschaft gezeigt wurde, konnte damit bewiesen werden, dass sich jede lokale Lösung zu einer globalen Lösung fortsetzen lässt.

Zusätzlich wurden für den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ Eigenwertentwicklungen des zugehörigen Systems erster Ordnung im Frequenzspektrum bestimmt, um damit das Langzeitverhalten von Lösungen bei bestimmten Wahlen des Operators sowie des zugrundeliegenden Hilbertraums zu erhalten.

In [AmBe00] wurden Systeme der Form

$$\begin{aligned} u''(t) + Au(t) &= Bw(t), \quad t > 0, \\ w'(t) + Cw(t) &= -B^*u'(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

auf Hilberträumen X und Y für unbeschränkte, dicht definierte Operatoren $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, $B : D(B) \subset Y \rightarrow X$ und $C : D(C) \subset Y \rightarrow Y$ untersucht und hinreichende Voraussetzungen an die Operatoren A , B und C gegeben, um die Wohlgestelltheit des Systems sowie die exponentielle Stabilität der zugehörigen Halbgruppe sicherzustellen. Ein Spezialfall stellen hier gerade die α - β -Systeme dar. Unter der Annahme, dass A ein selbstadjungierter, strikt positiver Operator ist, das heißt, es gilt $0 \in \rho(A)$ und damit $(-\infty, \delta) \subset \rho(A)$ für ein $\delta > 0$, konnte hier gezeigt werden, dass die zugehörige Halbgruppe genau dann exponentiell stabil ist, wenn α und β die Relationen

$$1 - 2\alpha < \beta < 2\alpha, \quad \beta > 2\alpha - 1$$

erfüllen. Die Region der Glättungseigenschaft stimmt also mit der Region der exponentiellen Stabilität überein.

In [HaLi13] wurde dann aufbauend auf den in [AmBe00] gezeigten Resultaten die Stabilität der Halbgruppe außerhalb der Region \mathcal{S} vollständig charakterisiert. In den Parameterregionen

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid 2\alpha < \beta, \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 \right\}$$

und

$$\mathcal{S}_2 := \{(\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \beta < 2\alpha - 1, 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\}$$

konnte die polynomielle Stabilität der Halbgruppe bewiesen werden. Zudem konnte gezeigt werden, dass die polynomiellen Raten optimal sind. Weiter wurde die Instabilität der Halbgruppe in der Region

$$\mathcal{S}_3 := \{(\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid 2\alpha - 1 < \beta\}$$

nachgewiesen.

Die Regularität der Halbgruppe wurde in \mathcal{S} , das heißt in der Region, in der die Halbgruppe unendlich oft differenzierbar ist, in [HaLiYo15] genauer untersucht. Es wurde gezeigt, dass die Halbgruppe genau im Bereich

$$R_1 := \{(\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \alpha \leq \beta \leq 2\alpha - \frac{1}{2}\}$$

analytisch ist. Dasselbe Resultat konnte in [DeRa06] für $A := (-\Delta)^\eta$, $\eta > 0$, auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, also auf Banachräume, erweitert werden. Im Bereich $\mathcal{S} \setminus R_1$ konnte in [HaLiYo15] zudem die Ordnung der Gevrey-Klasse der Halbgruppe scharf bestimmt werden.

In [FeLiRa19] haben Fernández Sare, Liu und Racke das α - β - γ -System durch Addition eines zusätzlichen Trägheitsterms $\mu A^\gamma u_{tt}$ zur ersten Gleichung des α - β -Systems eingeführt und erforscht. Unter der zusätzlichen Annahme, dass A ein strikt positiver Operator ist, das heißt $0 \in \rho(A)$, wurde die Wohlgestellttheit des zugehörigen Cauchyproblems in der Parameterregion

$$\mathcal{W} := \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ oder } (\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } \beta \geq 2\alpha - 1) \right\}$$

gezeigt und eine komplette Charakterisierung der Parameterregion gegeben, in der die zugehörige Halbgruppe exponentiell stabil ist.

Im Kontext der thermoelastischen Plattengleichungen, welche wir durch Wahl von $H = L^2(\Omega)$, $A = (-\Delta)^2$ sowie $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ in (ATP) erhalten, entspricht die Voraussetzung $0 \in \rho(A)$ gerade dem Fall, dass Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist, wobei der Laplace-Operator zum Beispiel mit Dirichlet-Randbedingungen ausgestattet sei. Wählt man hingegen $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder setzt Ω als Außengebiet voraus, wobei der Laplace-Operator wieder zum Beispiel mit Dirichlet-Randbedingungen ausgestattet sei, so gilt $0 \notin \rho(A)$, was gerade unseren Voraussetzungen entspricht.

Ein zentrales Resultat dieser Arbeit wird es sein, die in [FeLiRa19] bewiesenen Resultate für einen nicht-negativen Operator zu verallgemeinern und entsprechend anzupassen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 2** werden wir uns mit der Frage der Wohlgestellttheit von (ATP) beschäftigen und auch eine Spektralanalyse des Generators der zugehörigen Halbgruppe wiedergeben. Um Ersteres zu untersuchen, wird das Problem (ATP) als Cauchyproblem formuliert, um so die Wohlgestellttheit im Parameterbereich

$$\mathcal{W} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ oder } (\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } \beta \geq 2\alpha - 1) \right\}$$

unter Zuhilfenahme bekannter Resultate der Halbgruppentheorie zu beweisen. In Abschnitt 2.2 werden wir einen Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte, nicht-negative Operatoren vorstellen, der uns eine unitäre Abbildung \mathcal{U} liefert, die ähnlich wie die Fourier-Transformation

Kapitel 1: Einleitung

auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ angewendet auf den Laplace-Operator, Potenzen des Operators in Multiplikation verwandelt. Durch Anwenden der Abbildung \mathcal{U} auf (ATP) kann das System dann in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt werden. In Unterabschnitt 2.2.1 werden wir das Verhalten der zugehörigen Eigenwerte für kleine Frequenzen studieren und für eine Auswahl an Parametern α, β, γ eine asymptotische Entwicklung beweisen. Anschließend werden wir in Unterabschnitt 2.2.2 durch Analyse des Verhaltens der Eigenwerte für große Frequenzen den Bereich charakterisieren, in dem das System eine Glättungseigenschaft hat, und den Bereich, in dem ein Regularitätsverlust vorliegt. In Unterabschnitt 2.2.3 werden wir anschließend für den Fall $\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \gamma \in (0, 1]$, eine asymptotische Entwicklung der Eigenwerte für große Frequenzen zeigen. Diese Resultate werden wir im folgenden Abschnitt nutzen, um Regularitätsresultate der zu (ATP) gehörigen Lösung (u, θ) zu beweisen.

In **Kapitel 3** werden wir die Fragestellungen aus Kapitel 2 erneut aufgreifen, um den Einfluß eines zusätzlichen Dämpfungseffektes, der durch Addition von $A^\delta u_t, \delta \in [0, 1]$, zur ersten Gleichung beschrieben wird, auf die in Kapitel 2 gezeigten Resultate zu untersuchen. Genauer werden wir in Abschnitt 3.1 zeigen, dass die Region der Wohlgestelltheit im Vergleich zum ungedämpften Fall unverändert bleibt. In Abschnitt 3.2 werden wir dann die Auswirkung der Dämpfung auf die vorher bewiesenen Eigenwertentwicklungen sowie auf das Auftreten der Glättungseigenschaft bzw. des Regularitätsverlustes analysieren.

In **Kapitel 4** werden wir dann ein Anwendungsbeispiel der in Kapitel 2 vorgestellten Resultate geben. Dabei setzen wir $A = (-\Delta)^\eta, \eta > 0$, sowie $H = L^2(\Omega)$, wobei $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder Ω ein Außengebiet ist und zeigen unter Verwendung der in Abschnitt 2.2 bewiesenen Eigenwertentwicklungen Abklingabschätzungen der Lösung, in denen sich das Auftreten des Regularitätsverlustes beziehungsweise der Glättungseigenschaft bei entsprechender Wahl der Parameter widerspiegelt.

In **Kapitel 5** werden wir schließlich anhand von drei Beispielen partieller Differentialgleichungen das Phänomen, dass beim Übergang vom beschränkten Gebiet in den Ganzraumfall das Fehlen exponentieller Stabilität in einen Regularitätsverlust übergeht, untersuchen, indem wir Resultate aus verschiedenen Arbeiten wiedergeben, in denen dieses Phänomen zu beobachten ist, und kurz erläutern, wie die entsprechenden Ergebnisse erzielt wurden.

Im **Anhang** werden benötigte Hilfsmittel und Notationen zusammengefasst.

Anwendungsbezug der verallgemeinerten thermoelastischen Plattengleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir drei Beispiele für Modelle aus der Physik vorstellen, die bestimmten Wahlen von α, β, γ in (ATP) entsprechen und so motivieren, warum es interessant ist, α - β - γ - Systeme zu betrachten, vgl. [MuRa96]. Das erste Beispiel der linearen thermoelastischen Plattengleichung und das dritte Beispiel der linearen klassischen Thermoelastizitätsgleichungen werden wir zudem in Kapitel 5 erneut aufgreifen und eine kurze Einführung in deren Modellierung geben. Dort werden wir zusätzlich einen kurzen Vergleich des asymptotischen Verhaltens von Lösungen im Ganzraumfall und in beschränkten Gebieten (mit geeigneten Randbedingungen) mit entsprechenden Quellenverweisen wiedergeben.

Beispiel 1.1. Lineare thermoelastische Plattengleichungen

Sei $H := L^2(\mathbb{R}^n)$ und $(-\Delta)^2$ der Bi-Laplace-Operator mit $D((-\Delta)^2) = H^4(\mathbb{R}^n)$.

Wird der Wärmefluss mit dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz

$$q = -\kappa \nabla \theta$$

modelliert, wobei mit κ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnet wird, so erhält man die thermoelastischen Plattengleichungen mit zusätzlichem Inertialterm

$$\begin{aligned} (I - \mu \Delta) u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta \theta &= 0, \\ \theta_t - \Delta \theta - \Delta u_t &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

wobei wir ohne Einschränkung $\kappa = 1$ annehmen.

Setzen wir $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ und $A := (-\Delta)^2$ in (ATP) so schreibt sich (1.2) als

$$\begin{aligned} (I + \mu A^{1/2}) u_{tt} + Au - A^{1/2} \theta &= 0, \\ \theta_t + A^{1/2} \theta + A^{1/2} u_t &= 0. \end{aligned}$$

Beispiel 1.2. Lineare Viskoelastizität

Wir betrachten die lineare Viskoelastizität in der Form

$$u_{tt} + 2Au - \int_0^t g(t-s) Au(s) ds = 0, \tag{1.3}$$

mit Exponentialkern $g(r) := e^{-r}$ und Anfangswerten $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$.

Um (1.3) in die gewünschte Form zu bringen, führen wir die künstliche Variable

$$\theta(t) := \theta_0 e^{-t} - \int_0^t e^{-(t-s)} A^{1/2} u_t(s) ds$$

ein, wobei $\theta_0 := -A^{1/2} u_0$. Dann ist θ eine Lösung von

$$\theta_t + A^0 \theta + A^{1/2} u_t = 0.$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 e^{-t} - \left[e^{-(t-s)} A^{1/2} u(s) \right]_0^t + \int_0^t e^{-(t-s)} A^{1/2} u(s) ds \\ &= -A^{1/2} u(t) + \int_0^t e^{-(t-s)} A^{1/2} u(s) ds. \end{aligned}$$

Der Faltungsterm in (1.3) kann also durch $A^{1/2} \theta + Au$ ersetzt werden.

Insgesamt lässt sich die lineare Viskoelastizität somit durch

$$\begin{aligned} u_{tt} + Au - A^{1/2} \theta &= 0, \\ \theta_t + A^0 \theta + A^{1/2} u_t &= 0 \end{aligned}$$

beschreiben, was der Wahl $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ und $\mu = \gamma = 0$ in (ATP) entspricht.

Beispiel 1.3. Klassische lineare Thermoelastizitätsgleichungen

Die Gleichungen der linearen Thermoelastizität zweiter Ordnung in einer Raumdimension sind gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - \theta_x &= 0, \\ \theta_t - \theta_{xx} + u_{tx} &= 0, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, \theta(0) &= \theta_0, \\ u = \theta_x &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $\Omega = (0, 1)$ oder $\Omega = (0, \infty)$ oder $\Omega = (-\infty, \infty)$.

Im Gegensatz zu den ersten beiden Beispielen lässt sich dieses System auf formaler Ebene nicht auf ein α - β - γ -System transformieren, da der Gradient nicht als Potenz des zugehörigen Laplace-Operators aufgefasst werden kann. Allerdings können wir durch Betrachten eines bestimmten α - β - γ -Systems Aussagen über das asymptotische Verhalten von Lösungen des Systems treffen. Für die Analyse des asymptotischen Verhaltens entspricht dieses System, für $A = (-\Delta)$, gerade dem α - β - γ -System

$$\begin{aligned} u_{tt} + Au - A^{1/2}\theta &= 0, \\ \theta_t + A\theta + A^{1/2}u_t &= 0, \end{aligned}$$

das heißt dem Fall $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \mu = 0$ in (ATP), im folgenden Sinne:

Für glatte Lösungen u und θ erhält man durch Ableiten der Gleichungen nach t bzw. x

$$\begin{aligned} u_{ttt} - u_{xxt} + \theta_{xt} = 0 &\iff u_{ttt} - u_{xxt} = -\theta_{xt}, \\ u_{tttx} - u_{xxxx} + \theta_{xxx} = 0 &\iff u_{tttx} - u_{xxxx} = -\theta_{xxx}, \\ \theta_{tx} - \theta_{xxx} + u_{xxt} = 0 &\iff \theta_{tx} - \theta_{xxx} = -u_{xxt}. \end{aligned}$$

Also ist u eine Lösung von

$$u_{ttt} - 2u_{xxt} + u_{xxxx} - u_{tttx} = 0.$$

Entsprechend erhalten wir, dass θ

$$\theta_{ttt} - 2\theta_{xxt} + \theta_{xxxx} - \theta_{tttx} = 0$$

löst. Das heißt, u und θ lösen

$$v_{ttt} + A^\alpha v_{tt} + (A^{2\beta} + A)v_t + A^{1+\alpha}v = 0. \tag{1.4}$$

In Kapitel 2, Abschnitt 2.2, werden wir einen Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte, nicht-negative Operatoren vorstellen, der uns einen unitären Operator \mathcal{U} liefert, dessen Anwendung, ähnlich wie die Fourier-Transformation bei Anwendung auf den Laplace-Operator im Ganzraum, Potenzen des Operators in Multiplikationen verwandelt. Für $\hat{v}(t, \lambda) := \mathcal{U}v(t, \lambda)$ erhalten wir durch Anwenden von \mathcal{U} auf (1.4) die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\hat{v}_{ttt} + \lambda^\alpha \hat{v}_{tt} + (\lambda^{2\beta} + \lambda)\hat{v}_t + \lambda^{1+\alpha}\hat{v} = 0, \tag{1.5}$$

mit Anfangswerten $\hat{v}_0 := \hat{v}(0) = \mathcal{U}u_0, \hat{v}_1 := \hat{v}_t(0) = \mathcal{U}u_1, \hat{v}_2 := \hat{v}_{tt}(0) = \mathcal{U}u_{tt}(0)$.

Die Lösung von (1.5) ist gegeben durch

$$\hat{v}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^3 b_j(\lambda) e^{-\rho_j(\lambda)t},$$

wobei $\rho_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\rho^3 + \lambda^\alpha \rho^2 + (\lambda^{2\beta} + \lambda)\rho + \lambda^{1+\alpha} = 0$$

sind und

$$b_j(\lambda) = \sum_{k=0}^2 b_j^k(\lambda) \hat{v}_k(\lambda),$$

mit

$$b_j^0 := \frac{\prod_{k \neq j} \rho_k}{\prod_{k \neq j} (\rho_j - \rho_k)}, \quad b_j^1 := \frac{\prod_{k \neq j} \rho_k}{\prod_{k \neq j} (\rho_j - \rho_k)}, \quad b_j^2 := \frac{1}{\prod_{k \neq j} (\rho_j - \rho_k)}.$$

Untersucht man nun das Verhalten von $\rho(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow \infty$, so können Aussagen über das asymptotische Verhalten sowie die Regularität der Lösung (u, θ) getroffen werden. Genaueres dazu werden wir in Kapitel 2, Abschnitt 2.2, erläutern.

Bemerkung 1.4. *Wie in Beispiel 1.3 lässt sich zeigen, dass auch die Lösungen von (1.2) für $\mu = 0$ bzw. (1.3) in den Beispielen 1.1 und 1.2 die gewöhnliche Differentialgleichung (1.5) mit entsprechenden Anfangswerten lösen.*

Unter Beachtung des zusätzlichen Terms „ $\mu A^\gamma u_{tt}$ “ werden wir in Kapitel 2, Abschnitt 2.2, sehen, dass Lösungen von (ATP) der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\hat{v}_{ttt} + \lambda^\alpha \hat{v}_{tt} + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma} \hat{v}_t + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} \hat{v} = 0$$

genügen.

Kapitel 2

Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir das lineare α - β - γ -System

$$(ATP) \quad \begin{cases} u_{tt} + \mu A^\gamma u_{tt} + Au - A^\alpha \theta = 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^\alpha u_t = 0 \end{cases}$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, \theta(0) = \theta_0.$$

Dabei sei A ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator auf einem Hilbertraum H und $\mu > 0$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ und $\gamma \in (0, 1]$.

In [FeLiRa19] wurde (ATP) für den Fall, dass A ein strikt positiver, selbstadjungierter Operator ist, d.h. es gilt insbesondere $0 \in \rho(A)$, bereits untersucht. Im Rahmen des oben vorgestellten Beispiels 1.1 entspricht dies gerade dem Fall eines beschränkten Gebietes, wobei der Laplace-Operator zum Beispiel mit Dirichlet-Randbedingungen ausgestattet ist. Die Voraussetzung, dass A ein nicht-negativer Operator ist, entspricht hingegen dem Ganzraumfall oder dem Fall eines Außengebietes, wobei der Laplace-Operator im Außengebietfall wieder zum Beispiel mit Dirichlet-Randbedingungen ausgestattet ist.

Es wurde sowohl die Wohlgestelltheit in der Parameterregion

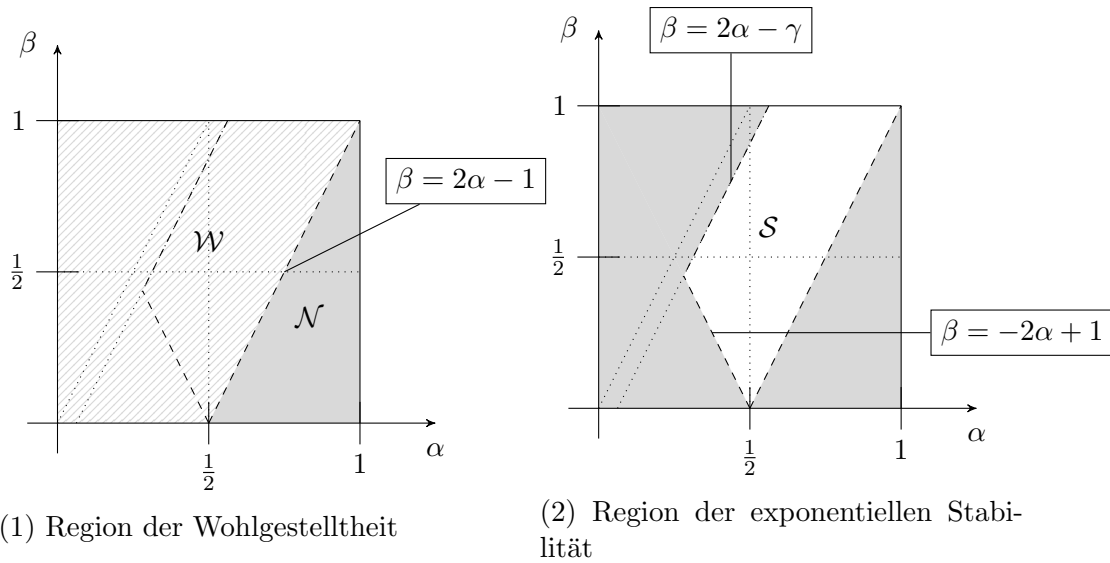
$$\mathcal{W} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ oder } (\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } \beta \geq 2\alpha - 1) \right\}$$

gezeigt, als auch, unter der zusätzlichen Annahme, dass A eine abzählbare Folge von Eigenwerten $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $0 < \lambda_j \rightarrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$ und zugehörigen Eigenvektoren $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt, die Region \mathcal{S} mit

$$\mathcal{S} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \frac{1}{2} \leq \alpha + \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \leq \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

charakterisiert, in der die zugehörige Halbgruppe exponentiell stabil ist.

Die Wohlgestelltheit in der Region $\mathcal{N} := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \beta < 2\alpha - 1\}$ blieb dabei offen.



Das erste Ziel dieses Kapitels wird es sein, die Wohlgestelltheit des Anfangswertproblems (ATP) zu zeigen. Genauer werden wir das System zunächst auf ein System erster Ordnung transformieren, um dann die Wohlgestelltheit des Cauchyproblems in der Parameterregion \mathcal{W} auf einem geeigneten Hilbertraum mit Hilfe bekannter Resultate der Halbgruppentheorie zu beweisen.

In Abschnitt 2.2 werden wir zuerst einen Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte, nicht-negative Operatoren wiedergeben, mit dessen Hilfe wir dann das Verhalten der zum System erster Ordnung gehörigen Eigenwerte im Frequenzspektrum untersuchen können.

Dabei analysieren wir in Abschnitt 2.2.1 zunächst das Verhalten kleiner Frequenzen, um damit Abschätzungen der Energie im Frequenzspektrum zu zeigen.

In Abschnitt 2.2.2 untersuchen wir dann durch Analyse des Verhaltens der Eigenwerte für große Frequenzen für welche Parameter α, β, γ eine Glättungseigenschaft vorliegt und für welche ein Regularitätsverlust auftritt. Dabei wird sich zeigen, dass die Region, in der das System die Glättungseigenschaft hat, gerade mit der Region \mathcal{S} der exponentiellen Stabilität für einen strikt positiven Operator A übereinstimmt. Diese Ergebnisse werden wir in Abschnitt 2.2.4 nutzen, um ein Regularitätsresultat für die Lösung zu zeigen.

2.1 Wohlgestelltheit

In diesem Abschnitt wollen wir mit Hilfe der Halbgruppentheorie die Wohlgestelltheit des zu (ATP) gehörigen Cauchyproblems in der Parameterregion

$$\mathcal{W} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1) \mid \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ oder } (\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } \beta \geq 2\alpha - 1) \right\}$$

zeigen.

Für reguläre Lösungen erhalten wir durch Multiplikation der ersten Gleichung von (ATP) mit \bar{u}_t sowie der zweiten Gleichung mit $\bar{\theta}$ nach Addition der Realteile die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\|A^{1/2}u\|_H^2 + \|u_t\|_H^2 + \mu \|A^{\gamma/2}u_t\|_H^2 + \|\theta\|_H^2 \right)}_{=: \mathcal{E}(t)} = -\|A^{\beta/2}\theta\|_H^2.$$

Dies motiviert die Wahl des Raums

$$\mathcal{H} := D(A^{1/2}) \times D(A^{\gamma/2}) \times H$$

als Grundraum, welchen wir für $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_1, v_1 \rangle_H + \langle A^{1/2}u_1, A^{1/2}v_1 \rangle_H + \langle (I + \mu A^\gamma)^{1/2}u_2, (I + \mu A^\gamma)^{1/2}v_2 \rangle_H + \langle u_3, v_3 \rangle_H$$

versehen.

Dabei seien für $x \geq 0$ Potenzen A^x über den Spektralsatz, vgl. Anhang B, Satz B.1, definiert. Da A als selbstadjungierter Operator abgeschlossen ist, sind auch die Potenzen des Operators nach dem Spektralsatz abgeschlossen, woraus die Abgeschlossenheit der Räume

$$(D(A^x), \|\cdot\|_{D(A^x)})$$

für $x \geq 0$ folgt, wobei wir mit $\|\cdot\|_{D(A^x)}$ die Graphennorm

$$\|v\|_{D(A^x)}^2 = \|v\|_H^2 + \|A^x v\|_H^2 \quad (v \in D(A^x))$$

bezeichnen. Weiter sei bemerkt, dass

$$\langle u, v \rangle_{\frac{\gamma}{2}} := \langle (I + \mu A^\gamma)^{1/2}u, (I + \mu A^\gamma)^{1/2}v \rangle_H$$

äquivalent zum Standard-Skalarprodukt auf $D(A^{\gamma/2})$ ist.

Damit ist $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein Hilbertraum.

Um nun (ATP) in ein Cauchyproblem zu überführen, multiplizieren wir die erste Gleichung von (ATP) zunächst formal mit $(I + \mu A^\gamma)^{-1}$ und erhalten

$$\begin{cases} u_{tt} + (I + \mu A^\gamma)^{-1}Au - (I + \mu A^\gamma)^{-1}A^\alpha\theta = 0, \\ \theta_t + A^\beta\theta + A^\alpha u_t = 0, \\ (u, u_t, \theta)(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases}$$

Die Substitution $v := u_t$ liefert uns dann das System erster Ordnung

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = -(I + \mu A^\gamma)^{-1}[Au - A^\alpha\theta], \\ \theta_t = -A^\alpha v - A^\beta\theta, \\ (u, u_t, \theta)(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases}$$

Für $U := (u, v, \theta)$ ist das zugehörige Cauchyproblem also gerade von der Form

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(I + \mu A^\gamma)^{-1}A & 0 & (I + \mu A^\gamma)^{-1}A^\alpha \\ 0 & -A^\alpha & -A^\beta \end{pmatrix} U \quad (2.1)$$

mit $U(0) = (u_0, u_1, \theta_0)$.

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Das System (2.1) ist zunächst nur formal zu lesen, da sich zeigen wird, dass wir im Allgemeinen nicht erwarten können, dass u , v , θ einzeln in den entsprechenden Definitionsbereichen der hier auftretenden Potenzen von A liegen, sondern nur bestimmte Summen. Dieses Regularitätsproblem ist schon bei der linearen thermoelastischen Plattengleichung bekannt, siehe zum Beispiel [Fi16]. Wie sich in Kapitel 2.2.4 zeigen wird, kann dieses Problem durch die Wahl von glatteren Anfangswerten jedoch gelöst werden.

Wir werden vier verschiedene Fälle für (α, β, γ) untersuchen, da sich je nach Zusammenhang von α , β und γ die auftretenden Regularitäten von u , v und θ ändern und uns je nach Fall Operatoren \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, definieren.

Um die Definitionsbereiche der Operatoren \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, zu charakterisieren, verwenden wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2.1. Sei $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator auf einem Hilbertraum H und $s \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt

$$D(A^s) = D((A + 1)^s).$$

Beweis: Es sei $h_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_1(x) := x^s$ und $h_2 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_2(x) := (x + 1)^s$. Nach dem Spektralsatz, siehe Satz B.1, existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E , so dass für $i = 1, 2$

$$D(h_i(T)) = \left\{ v \in H \mid \int_0^\infty |h_i(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda v, v \rangle < \infty \right\}.$$

Es sei zunächst $v \in D(h_1(T))$. Da $x \mapsto x^{2s}$ monoton wachsend ist, folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |1 + \lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle &= \int_0^1 |1 + \lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle + \int_1^\infty |1 + \lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\ &\leq \int_0^1 2^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle + \int_1^\infty 2^{2s} |\lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\ &\leq 2^{2s} \|v\|_H^2 + 2^{2s} \int_0^\infty |\lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle < \infty, \end{aligned}$$

was $v \in D(h_2(T))$ impliziert. Ist hingegen $v \in D(h_2(T))$, dann folgt wieder mit der Monotonie von $x \mapsto x^{2s}$

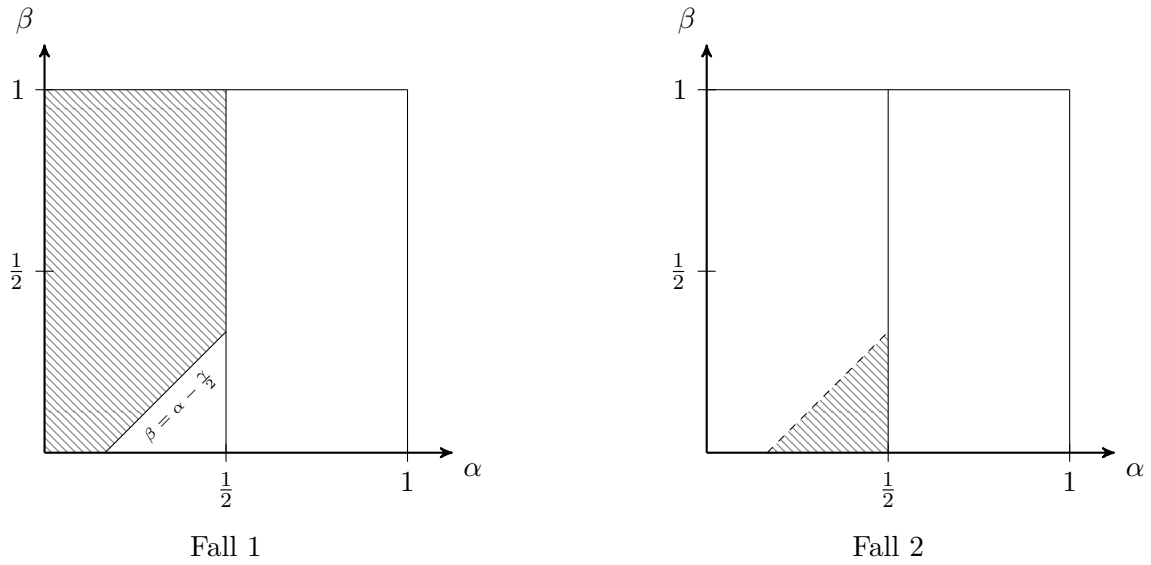
$$\int_0^\infty |\lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle \leq \int_0^\infty |1 + \lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle < \infty$$

und damit $v \in D(h_1(T))$. □

Im Folgenden verwenden wir die Notationen $L_\gamma := (I + \mu A^\gamma)$ und $L := (A + I)$.

Für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ unterscheiden wir die zwei Fälle

$$(1) \beta \geq \alpha - \frac{\gamma}{2}, \quad (2) \beta < \alpha - \frac{\gamma}{2}.$$


 Abbildung 2.1: Parameterregionen für die Wohlgestelltheit für $\alpha \leq \frac{1}{2}$

Gilt (1) so definieren wir den Operator $\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ durch

$$\mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} \left[L_\gamma^{-1/2} Au - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] \\ -A^\alpha v - A^\beta \theta \end{pmatrix},$$

mit Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}_1) := \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-\gamma/2}), \theta \in D(A^\beta)\}$$

sowie im Fall (2) $\mathcal{A}_2 : D(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ durch

$$\mathcal{A}_2 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\alpha-\beta} \left[L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} Au - L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} A^\alpha \theta \right] \\ -A^\alpha v - A^\beta \theta \end{pmatrix},$$

mit Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}_2) := \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-\alpha+\beta}), \theta \in D(A^\beta), \\ L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} Au - L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} A^\alpha \theta \in D(A^{\alpha-\beta})\}.$$

Für $\alpha > \frac{1}{2}$ unterscheiden wir zudem die Fälle

$$(3) \beta \geq 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}, \quad (4) 2\alpha - 1 \leq \beta < 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

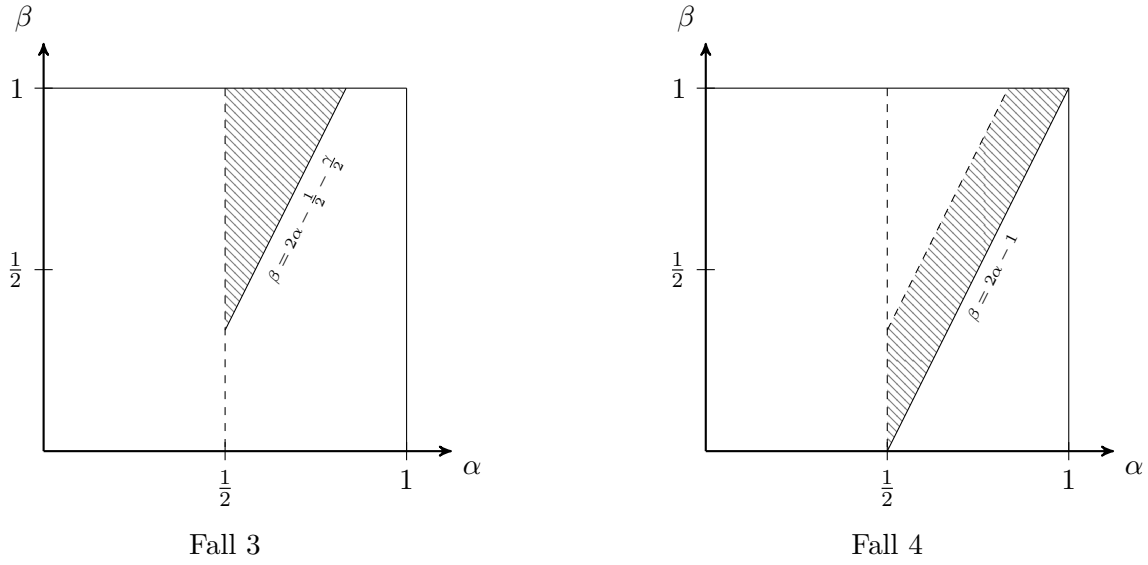


Abbildung 2.2: Parameterregionen für die Wohlgestelltheit für $\alpha > \frac{1}{2}$

Vorausgesetzt (3) gilt, dann definieren wir den Operator $\mathcal{A}_3 : D(\mathcal{A}_3) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ durch

$$\mathcal{A}_3 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} \left[L_\gamma^{-1/2} A u - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] \\ -L^{\alpha-1/2} \left[L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \right] \end{pmatrix},$$

mit Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}_3) := \left\{ (u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-\gamma/2}), \theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2}), L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \in D(A^{\alpha-1/2}) \right\}$$

sowie im Fall (4) $\mathcal{A}_4 : D(\mathcal{A}_4) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ durch

$$\mathcal{A}_4 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left[L^{\beta-2\alpha+1/2} A u - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \right] \\ -L^{\alpha-1/2} \left[L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \right] \end{pmatrix},$$

mit Definitionsbereich

$$D(\mathcal{A}_4) := \left\{ (u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-2\alpha+\beta+1/2}), \theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2}), L^{\beta-2\alpha+1/2} A u - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \in D(A^{2\alpha-\beta-1/2-\gamma/2}), L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \in D(A^{\alpha-1/2}) \right\}.$$

Damit schreibt sich (ATP) als

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}_i U, \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

für $i = 1, 2, 3, 4$, wobei $U(0) = (u_0, v_0, \theta_0)$.

Ziel wird es nun sein, die Wohlgestellttheit des Cauchyproblems (2.2) mit Hilfe des Satzes von Lumer-Phillips zu beweisen. Wir werden den Satz von Lumer-Phillips allerdings nicht direkt auf die Operatoren \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, anwenden, sondern betrachten stattdessen gestörte Operatoren $\tilde{\mathcal{A}}_i$.

Für $U := (u, v, \theta)$ definieren wir nun die gestörten Operatoren $\tilde{\mathcal{A}}_i : D(\tilde{\mathcal{A}}_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, für $i = 1, 2, 3, 4$, wie folgt:

Sei zunächst $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Im Fall (1) sei

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} \left[L_\gamma^{-1/2} L u - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] \\ -A^\alpha v - (A^\beta + I)\theta \end{pmatrix},$$

mit Definitionsbereich $D(\tilde{\mathcal{A}}_1) := D(\mathcal{A}_1)$.

Im Fall (2) sei $\tilde{\mathcal{A}}_2 : D(\tilde{\mathcal{A}}_2) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{A}}_2 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\alpha-\beta} \left[L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} L u - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] \\ -A^\alpha v - (A^\beta + I)\theta \end{pmatrix},$$

mit $D(\tilde{\mathcal{A}}_2) := D(\mathcal{A}_2)$.

Ist hingegen $\alpha > \frac{1}{2}$, so definieren den Operator $\tilde{\mathcal{A}}_3 : D(\tilde{\mathcal{A}}_3) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ durch

$$\tilde{\mathcal{A}}_3 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} \left[L_\gamma^{-1/2} L u - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] \\ -L^{\alpha-1/2} \left[L^{1/2-\alpha} A^\alpha v - L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I)\theta \right] \end{pmatrix},$$

wobei $D(\tilde{\mathcal{A}}_3) := D(\mathcal{A}_3)$, falls (3) gilt und im Fall (4) $\tilde{\mathcal{A}}_4 : D(\tilde{\mathcal{A}}_4) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ durch

$$\tilde{\mathcal{A}}_4 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left[L^{\beta-2\alpha+1/2} L u - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \right] \\ -L^{\alpha-1/2} \left[L^{1/2-\alpha} A^\alpha v - L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I)\theta \right] \end{pmatrix},$$

mit $D(\tilde{\mathcal{A}}_4) := D(\mathcal{A}_4)$.

Bevor wir nun die Wohlgestellttheit des gestörten Cauchyproblems

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \tilde{\mathcal{A}}_i U, \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

beweisen, werden wir noch drei funktionalanalytische Hilfssätze wiedergeben.

Hilfssatz 2.2. Es sei T ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator auf einem Banachraum X . Dann liegt $D(T^y)$ dicht in $(D(T^x), \|\cdot\|_x)$ für alle $0 \leq x \leq y$, wobei für $u \in D(T^x)$

$$\|u\|_x^2 := \|u\|_X^2 + \|T^x u\|_X^2$$

die Graphennorm bezeichnet.

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Beweis: Es sei $y > x$. Dann ist $D(T^y) \subset D(T^x)$.

Für $z > 0$ erzeugt $-T^z$ nach Korollar A.5 eine C_0 -Halbgruppe, welche wir mit S_z bezeichnen. Weiter sei $u \in D(T^x)$. Definiere die Folge

$$u_n := \int_0^{1/n} S_y(s)u \, ds.$$

Dann ist $(u_n)_n \subset D(T^y)$ und es gilt $u_n \rightarrow u$ in X . Weiter gilt, da T^x mit S_y vertauscht,

$$T^x u_n = \int_0^{1/n} S_y(s)T^x u \, ds \rightarrow T^x u \text{ in } X,$$

woraus die behauptete Dichtheit folgt. □

Hilfssatz 2.3. Es sei $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ ein dicht definierter Operator auf einem Banachraum X mit $\rho(T) \neq \emptyset$. Dann ist T abgeschlossen.

Beweis: Es sei $\lambda \in \rho(T)$ und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $u_n \rightarrow u$ und $Tu_n \rightarrow v$ in X . Dann gilt

$$u \leftarrow u_n = (T - \lambda)^{-1}(T - \lambda)u_n = (T - \lambda)^{-1}(Tu_n - \lambda u_n) \rightarrow (T - \lambda)^{-1}(v - \lambda u).$$

Daraus folgt direkt $u \in D(T)$. Durch Anwenden von $(T - \lambda)$ folgt zudem $Tu = v$. □

Hilfssatz 2.4. Es sei X ein Banachraum und $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ dicht definiert. Dann ist $\rho(T)$ offen.

Beweis: Ein Beweis des Hilfssatzes findet sich unter anderem in [Wer11], Kapitel VII. □

Satz 2.5. Für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt für alle $U \in D(\tilde{\mathcal{A}}_i)$

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{\mathcal{A}}_i U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H.$$

Insbesondere ist $\tilde{\mathcal{A}}_i$ dissipativ.

Beweis: Es sei zunächst bemerkt, dass alle Potenzen von A sowie $A^\beta + I$ und L_γ selbstadjungierte Operatoren sind.

Wir zeigen die Behauptung zunächst für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ und

$$\beta \geq \alpha - \frac{\gamma}{2}.$$

Sei $U = (u_1, u_2, u_3) \in D(\tilde{\mathcal{A}}_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\langle \tilde{\mathcal{A}}_1 U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re} \left(\langle u_2, u_1 \rangle_H + \langle A^{1/2} u_2, A^{1/2} u_1 \rangle_H - \langle A^\alpha u_2, u_3 \rangle_H - \langle (A^\beta + I) u_3, u_3 \rangle_H \right. \\
 &\quad \left. - \langle L_\gamma^{1/2} L_\gamma^{-1/2} [L_\gamma^{-1/2} L u_1 - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\langle L_\gamma^{1/2} u_2, L_\gamma^{-1/2} u_1 \rangle_H + \langle L_\gamma^{1/2} u_2, L_\gamma^{-1/2} A u_1 \rangle_H - \langle L_\gamma^{-1/2} u_1, L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right. \\
 &\quad - \langle L_\gamma^{-1/2} A u_1, L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H + \langle L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3, L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H - \langle L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3, L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \\
 &\quad \left. - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \right) \\
 &= - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \leq 0.
 \end{aligned}$$

Es sei nun $\alpha \leq \frac{1}{2}$ mit

$$\beta < \alpha - \frac{\gamma}{2}.$$

Für $U = (u_1, u_2, u_3) \in D(\tilde{\mathcal{A}}_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\langle \tilde{\mathcal{A}}_2 U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re} \left(\langle u_2, u_1 \rangle_H + \langle A^{1/2} u_2, A^{1/2} u_1 \rangle_H - \langle A^\alpha u_2, u_3 \rangle_H - \langle (A^\beta + I) u_3, u_3 \rangle_H \right. \\
 &\quad \left. - \langle L^{\alpha-\beta} [L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} L u_1 - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\langle u_2, u_1 \rangle_H + \langle L^{\alpha-\beta} L^{\beta-\alpha} A^{1/2} u_2, A^{1/2} u_1 \rangle_H - \langle A^\alpha L^{\beta-\alpha} L^{\alpha-\beta} u_2, u_3 \rangle_H \right. \\
 &\quad \left. - \langle L^{\alpha-\beta} [L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} L u_1 - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
 &\quad - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \\
 &\stackrel{(*)}{=} \operatorname{Re} \left(\langle L^{\alpha-\beta} u_2, L^{\beta-\alpha} u_1 \rangle_H + \langle L^{\alpha-\beta} u_2, L^{\beta-\alpha} A u_1 \rangle_H - \langle L^{\alpha-\beta} u_2, L^{\beta-\alpha} A^\alpha u_3 \rangle_H \right. \\
 &\quad \left. - \langle L^{\alpha-\beta} [L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} L u_1 - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
 &\quad - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \\
 &= \operatorname{Re} \left(\langle L^{\alpha-\beta} u_2, L^{\beta-\alpha} L u_1 - L^{\beta-\alpha} A^\alpha u_3 \rangle_H \right. \\
 &\quad \left. - \langle L^{\alpha-\beta} [L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} L u_1 - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
 &\quad - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \\
 &= \operatorname{Re} \left(\langle L_\gamma^{1/2} u_2, L_\gamma^{-1/2} L^{\alpha-\beta} [L^{\beta-\alpha} L u_1 - L^{\beta-\alpha} A^\alpha u_3] \rangle_H \right. \\
 &\quad \left. - \langle L^{\alpha-\beta} [L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} L u_1 - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
 &\quad - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \\
 &= - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \leq 0,
 \end{aligned}$$

dabei haben wir in (*) ausgenutzt, dass $\alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$ gilt und somit $u_2 \in D(A^{1/2}) \subset D(A^{\alpha-\beta})$.
Im dritten Fall, also $\alpha > \frac{1}{2}$ und

$$\beta \geq 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2},$$

folgt für $U = (u_1, u_2, u_3) \in D(\tilde{\mathcal{A}}_3)$

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \tilde{\mathcal{A}}_3 U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re} \left(\langle u_2, u_1 \rangle_H + \langle A^{1/2} u_2, A^{1/2} u_1 \rangle_H - \langle L_\gamma^{-1/2} L u_1 - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3, L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L^{\alpha-1/2} [L^{1/2-\alpha} A^\alpha u_2 + L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I) u_3], u_3 \rangle_H \right) \\
&\stackrel{(**)}{=} \operatorname{Re} \left(\langle L_\gamma^{1/2} u_2, L_\gamma^{-1/2} L u_1 \rangle_H - \langle L^{1/2-\alpha} A^\alpha u_2, L^{\alpha-1/2} u_3 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I) u_3, L^{\alpha-1/2} u_3 \rangle_H - \langle L_\gamma^{-1/2} L u_1 - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3, L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\langle L_\gamma^{1/2} u_2, L_\gamma^{-1/2} L u_1 \rangle_H - \langle L_\gamma^{1/2} u_2, L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L_\gamma^{-1/2} L u_1 - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha u_3, L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
&\quad - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \\
&= - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H,
\end{aligned}$$

wobei in (**) eingeht, dass $\alpha - \frac{1}{2} < 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} \leq \beta$ gilt und somit $u_3 \in D(A^\beta) \subset D(A^{1/2-\alpha})$.
Im vierten und letzten Fall

$$\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } 2\alpha - 1 \leq \beta < 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

erhalten wir für $U = (u_1, u_2, u_3) \in D(\tilde{\mathcal{A}}_4)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \tilde{\mathcal{A}}_4 U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re} \left(\langle u_2, u_1 \rangle_H + \langle A^{1/2} u_2, A^{1/2} u_1 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L^{\alpha-1/2} [L^{1/2-\alpha} A^\alpha u_2 + L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I) u_3], u_3 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L_\gamma^{-1/2} L^{2\alpha-\beta-1/2} [L^{\beta-2\alpha+1/2} L u_1 - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha u_3], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
&\stackrel{(***)}{=} \operatorname{Re} \left(\langle L^{2\alpha-\beta-1/2} u_2, L^{\beta-2\alpha+1/2} L u_1 \rangle_H - \langle L^{1/2-\alpha} A^\alpha u_2, L^{\alpha-1/2} u_3 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I) u_3, L^{\alpha-1/2} u_3 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L^{\beta-2\alpha+1/2} L u_1 - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha u_3, L^{2\alpha-\beta-1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\langle L^{2\alpha-\beta-1/2} u_2, L^{\beta-2\alpha+1/2} L u_1 \rangle_H - \langle L^{2\alpha-\beta-1/2} u_2, L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha u_3 \rangle_H \right. \\
&\quad \left. - \langle L^{\beta-2\alpha+1/2} L u_1 - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha u_3, L^{2\alpha-\beta-1/2} u_2 \rangle_H \right) \\
&\quad - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H \\
&= - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H,
\end{aligned}$$

wobei wir in (***) einerseits verwendet haben, dass $\alpha - \frac{1}{2} < 2\alpha - 1 \leq \beta$ gilt und andererseits $2\alpha - \beta - \frac{1}{2} \leq 2\alpha - (2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$, woraus $u_3 \in D(A^\beta) \subset D(A^{\alpha-1/2})$ und $u_2 \in D(A^{1/2}) \subset D(A^{2\alpha-\beta-1/2})$ folgt. □

Satz 2.6. In den Fällen (1) – (4) ist $\tilde{\mathcal{A}}_i$ dicht definiert mit $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Beweis: Als selbstadjungierter Operator ist A dicht definiert. Nach Hilfssatz 2.2 liegt $D(A)$ zudem dicht in $(D(A^x), \|\cdot\|_{D(A^x)})$ für alle $0 \leq x \leq 1$. Da außerdem in allen Fällen $D(A) \times D(A) \times D(A) \subset D(\tilde{\mathcal{A}}_i)$ gilt, folgt die Dichtheit von $D(\tilde{\mathcal{A}}_i)$ in \mathcal{H} .

Um $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}_i)$ zu beweisen, zeigen wir, dass das Problem

$$\tilde{\mathcal{A}}_i U = F \in \mathcal{H}$$

für jedes $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $U \in D(\tilde{\mathcal{A}}_i)$ besitzt, für die $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$ gilt, wobei wir mit C im gesamten Beweis eine generische Konstante bezeichnen. Dazu sei zunächst bemerkt, dass $\tilde{\mathcal{A}}_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ injektiv ist. Dies wollen wir exemplarisch für $\tilde{\mathcal{A}}_1$ zeigen, da sich die Behauptung für $\tilde{\mathcal{A}}_i$, $i = 2, 3, 4$, analog ergibt.

Es sei $U = (u, v, \theta) \in \text{kern}(\tilde{\mathcal{A}}_1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} v &= 0, \\ -L_\gamma^{-1/2} \left[L_\gamma^{-1/2} L u - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] &= 0, \\ -A^\alpha v - (A^\beta + I)\theta &= 0, \end{aligned}$$

woraus direkt $v = 0$ folgt. Da $(A^\beta + I)$ injektiv ist, folgt damit aus der dritten Gleichung $\theta = 0$. Zuletzt folgt dann aus der zweiten Gleichung $u = 0$, da sowohl $L_\gamma^{-1/2}$ als auch $L_\gamma^{-1/2} L$ injektiv sind.

Um nun die restliche Behauptung zu zeigen, untersuchen wir jeden der Fälle (1) – (4) separat.

(1) Es sei zunächst $\alpha \leq \frac{1}{2}$ mit $\beta \geq \alpha - \frac{\gamma}{2}$.

Es sei $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$. Definieren wir

$$\begin{aligned} v &:= f, \\ \theta &:= -(A^\beta + I)^{-1} (h + A^\alpha f), \\ u &:= -L^{-1} L_\gamma^{1/2} (L_\gamma^{1/2} g - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta), \end{aligned}$$

so ist $v \in D(A^{1/2})$, $\theta \in D(A^\beta)$ und $u \in D(A^{1-\gamma/2})$. Also ist $U = (u, v, \theta) \in D(\tilde{\mathcal{A}}_1)$ und es gelten

$$\begin{aligned} -A^\alpha v - (A^\beta + I)\theta &= -A^\alpha f + (A^\beta + I)(A^\beta + I)^{-1} (h + A^\alpha f) \\ &= h \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -L_\gamma^{-1/2} \left[L_\gamma^{-1/2} L u - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] &= L_\gamma^{-1/2} \left[L_\gamma^{-1/2} L L^{-1} L_\gamma^{1/2} (L_\gamma^{1/2} g - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta) + L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta \right] \\ &= L_\gamma^{-1/2} (L_\gamma^{1/2} g - L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta) \\ &= g. \end{aligned}$$

Also gilt $\tilde{\mathcal{A}}_1 U = F$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|v\|_{D(A^{1/2})} &\leq C\|f\|_{D(A^{1/2})}, \\ \|\theta\|_H &\leq C\|(A^\beta + I)\theta\|_H \\ &= \|(A^\beta + I)(A^\beta + I)^{-1} (h + A^\alpha f)\|_H \\ &\leq C(\|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}), \end{aligned}$$

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

$$\begin{aligned}
\|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C\|L^{1/2}L^{-1}(I + \mu A^\gamma)^{1/2}(L_\gamma^{1/2}g + L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta)\|_H \\
&\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|(A^\beta + I)\theta\|_H) \\
&\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}),
\end{aligned}$$

also $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$. Insgesamt folgt $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}_1)$.

(2) Sei nun $\alpha \leq \frac{1}{2}$ mit $\beta < \alpha - \frac{\gamma}{2}$. Zu $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
v &:= f, \\
\theta &:= -(A^\beta + I)^{-1}(h + A^\alpha f), \\
u &:= -L^{-1}L^{\alpha-\beta}\left(L_\gamma^{1/2}L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{1/2}g - L^{\beta-\alpha}A^\alpha\theta\right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $v \in D(A^{1/2})$, $\theta \in D(A^\beta)$ und $u \in D(A^{1-\alpha+\beta})$ sowie

$$\begin{aligned}
&L_\gamma^{-1/2}L^{\beta-\alpha}Lu - L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta \\
&= L_\gamma^{-1/2}L^{\beta-\alpha}L\left[-L^{-1}L^{\alpha-\beta}\left(L_\gamma^{1/2}L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{1/2}g - L^{\beta-\alpha}A^\alpha\theta\right)\right] - L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta \\
&= L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{1/2}g \in D(A^{\alpha-\beta}),
\end{aligned}$$

da $g \in D(A^{\gamma/2})$.

Da wie in Fall (1)

$$-A^\alpha v - (A^\beta + I)\theta = h$$

folgt und zudem

$$\begin{aligned}
&-L_\gamma^{-1/2}L^{\alpha-\beta}\left[L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-1/2}Lu - L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\right] \\
&= L_\gamma^{-1/2}L^{\alpha-\beta}\left[L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-1/2}LL^{-1}L^{\alpha-\beta}\left(L_\gamma^{1/2}L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{1/2}g - L^{\beta-\alpha}A^\alpha\theta\right) + L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\right] \\
&= L_\gamma^{-1/2}L^{\alpha-\beta}\left[\left(L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{1/2}g - L_\gamma^{-1/2}L^{\beta-\alpha}A^\alpha\theta\right) + L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\right] \\
&= g
\end{aligned}$$

gilt, ist $U \in D(\tilde{\mathcal{A}}_2)$ und $\tilde{\mathcal{A}}_2U = F$. Weiter gelten

$$\begin{aligned}
\|v\|_{D(A^{\gamma/2})} &\leq C\|f\|_{D(A^{1/2})}, \\
\|\theta\|_H &\leq C\|(A^\beta + I)\theta\|_H \\
&= \|(A^\beta + I)(A^\beta + I)^{-1}(h + A^\alpha f)\|_H \\
&\leq C(\|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}), \\
\|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C\|L^{1/2}L^{-1}L^{\alpha-\beta}(L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{1/2}g + L^{\beta-\alpha}A^\alpha\theta)\|_H \\
&\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|(A^\beta + I)\theta\|_H) \\
&\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}),
\end{aligned}$$

woraus auch in diesem Fall $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}_2)$ folgt.

(3) Für $\alpha > \frac{1}{2}$ mit $\beta \geq 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$ und $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ definieren wir

$$\begin{aligned} v &:= f, \\ \theta &:= -(A^\beta + I)^{-1}L^{\alpha-1/2}\left(L^{1/2-\alpha}h + L^{1/2-\alpha}A^\alpha f\right), \\ u &:= -L^{-1}L_\gamma^{1/2}\left(L_\gamma^{1/2}g - L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\right). \end{aligned}$$

Dann ist $v \in D(A^{1/2})$ und $u \in D(A^{1-\gamma/2})$. Da $\beta - \alpha + \frac{1}{2} \geq \beta \geq 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} \geq 0$, ist außerdem $\theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2})$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} &L^{\alpha-1/2}\left(L^{1/2-\alpha}A^\alpha v - L^{1/2-\alpha}A^\beta\theta\right) \\ &= L^{\alpha-1/2}\left(L^{1/2-\alpha}A^\alpha f \right. \\ &\quad \left. - L^{1/2-\alpha}(A^\beta + I)\left[-(A^\beta + I)^{-1}L^{\alpha-1/2}\left\{L^{1/2-\alpha}h + L^{1/2-\alpha}A^\alpha f\right\}\right]\right) \\ &= h \end{aligned}$$

und somit $L^{1/2-\alpha}A^\alpha v - L^{1/2-\alpha}(A^\beta + I)\theta \in D(A^{\alpha-1/2})$, was insgesamt $U = (u, v, \theta) \in D(\tilde{\mathcal{A}}_3)$ nach sich zieht. Da

$$\begin{aligned} -L_\gamma^{-1/2}\left[L_\gamma^{-1/2}Lu - L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\right] &= L_\gamma^{-1/2}\left[L_\gamma^{-1/2}LL^{-1}L_\gamma^{1/2}\left(L_\gamma^{1/2}g - L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\right) + L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\right] \\ &= g \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &-L^{\alpha-1/2}\left[L^{1/2-\alpha}A^\alpha v - L^{1/2-\alpha}(A^\beta + I)\theta\right] \\ &= L^{\alpha-1/2}\left[L^{1/2-\alpha}A^\alpha f + L^{1/2-\alpha}(A^\beta + I)(A^\beta + I)^{-1}L^{\alpha-1/2}\left(L^{1/2-\alpha}h + L^{1/2-\alpha}A^\alpha f\right)\right] \\ &= h, \end{aligned}$$

gilt $\tilde{\mathcal{A}}_3 U = F$. Wir erhalten außerdem die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|v\|_{D(A^{\gamma/2})} &\leq C\|f\|_{D(A^{1/2})}, \\ \|\theta\|_H &\leq C\|L^{\beta-\alpha+1/2}\theta\|_H \\ &= C\|L^{\beta-\alpha+1/2}(A^\beta + I)^{-1}L^{\alpha-1/2}(L^{1/2-\alpha}h + L^{1/2-\alpha}A^\alpha f)\|_H \\ &\leq C(\|L^{1/2-\alpha}h\|_H + \|L^{1/2-\alpha}A^\alpha f\|_H) \\ &\leq C(\|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}), \\ \|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C\|L^{1/2}L^{-1}(I + \mu A^\gamma)^{1/2}(L_\gamma^{1/2}g + L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta)\|_H \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|L_\gamma^{-1/2}A^\alpha\theta\|_H) \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|L^{\beta-\alpha+1/2}\theta\|_H) \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}). \end{aligned}$$

Also folgt $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}_3)$.

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

(4) Zuletzt sei $\alpha > \frac{1}{2}$ und $2\alpha - 1 \leq \beta \leq 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Für $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ sei $U = (u, v, \theta)$ definiert durch

$$\begin{aligned} v &:= f, \\ \theta &:= -(A^\beta + I)^{-1} L^{\alpha-1/2} \left(L^{1/2-\alpha} h + L^{1/2-\alpha} A^\alpha f \right), \\ u &:= -L^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left(L^{\beta-2\alpha-1/2} L_\gamma g - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \right). \end{aligned}$$

Es folgt direkt $v \in D(A^{1/2})$, $u \in D(A^{1-2\alpha+\beta+1/2})$. Mit $\beta - \alpha + \frac{1}{2} \geq 2\alpha - 1 - \alpha + \frac{1}{2} \geq 0$ folgt zudem $\theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2})$. Da wie in Fall 3

$$-L^{\alpha-1/2} \left[L^{1/2-\alpha} A^\alpha f - L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I) \theta \right] = h$$

gilt und

$$\begin{aligned} &-L_\gamma^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left[L^{\beta-2\alpha+1/2} L u - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \right] \\ &= L_\gamma^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left[L^{\beta-2\alpha+1/2} L L^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left(L^{\beta-2\alpha-1/2} L_\gamma g - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \right] \\ &= g, \end{aligned}$$

folgt auch hier $\tilde{\mathcal{A}}_4 U = F$.

Weiter ist

$$\begin{aligned} \|v\|_{D(A^{\gamma/2})} &\leq C \|f\|_{D(A^{1/2})}, \\ \|\theta\|_H &\leq C \|L^{\beta-\alpha+1/2} \theta\|_H \\ &= C \|L^{\beta-\alpha+1/2} (A^\beta + I)^{-1} L^{\alpha-1/2} (L^{1/2-\alpha} h + L^{1/2-\alpha} A^\alpha f)\|_H \\ &\leq C (\|h\|_H + \|L^{1/2-\alpha} A^\alpha f\|_H) \\ &\leq C (\|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}) \\ \|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C \|L^{1/2} L^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} (L^{\beta-2\alpha-1/2} L_\gamma g - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta)\|_H \\ &\leq C (\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|L^{-(\beta-(2\alpha-1))} \|L^{\beta-\alpha+1/2} \theta\|_H) \\ &\leq C (\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit auch im letzten Fall $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{A}}_4)$. □

Bemerkung 2.7. In der letzten Abschätzung von $\|u\|_{D(A^{1/2})}$ geht ein, dass wir nur $\beta \geq 2\alpha - 1$ für $\alpha > \frac{1}{2}$ behandeln, da es uns sonst nicht möglich ist, eine hinreichende Abschätzung für u zu zeigen.

Mit Satz 2.6 erhalten wir die folgenden zwei Korollare.

Korollar 2.8. $\tilde{\mathcal{A}}_i$ ist abgeschlossen für $i = 1, 2, 3, 4$.

Beweis: Dies folgt direkt aus Hilfssatz 2.3 und Satz 2.6. □

Korollar 2.9. Es gibt ein $\lambda > 0$ so, dass $R(\lambda I - \tilde{\mathcal{A}}_i) = X$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Hilfssatz 2.4 und Satz 2.6. □

Damit haben wir alles zusammen, um den Satz von Lumer-Phillips, siehe Satz A.4, anzuwenden und erhalten:

Satz 2.10. Für $i = 1, 2, 3, 4$ erzeugt der Operator $\tilde{\mathcal{A}}_i$ eine C_0 -Halbgruppe auf \mathcal{H} . Insbesondere ist das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \tilde{\mathcal{A}}_i U, \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

wohlgestellt.

Daraus können wir nun die Wohlgestellttheit des Cauchyproblems (2.2) folgern.

Korollar 2.11. Für $i = 1, 2, 3, 4$ erzeugt der Operator \mathcal{A}_i eine C_0 -Halbgruppe auf \mathcal{H} . Insbesondere ist das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}_i U, \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

wohlgestellt.

Beweis: Für $i = 1, 2, 3, 4$ ist $\mathcal{A}_i = \tilde{\mathcal{A}}_i - S$, wobei

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (I + \mu A^\gamma)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $L_\gamma^{-1/2} : H \rightarrow H$ stetig ist, ist $S \in L(\mathcal{H})$, denn für $U = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{H}$ gilt

$$\|SU\|_{\mathcal{H}}^2 = \|L_\gamma^{1/2} L_\gamma^{-1} u_1\|_H^2 + \|u_3\|_H^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Also ist S für $i = 1, 2, 3, 4$ eine lineare, beschränkte Störung und die Behauptung folgt aus Satz A.6. □

Wir haben also eine Lösung $U \in C^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty), D(\mathcal{A}_i))$ von (2.2) für Anfangsdaten $U_0 \in D(\mathcal{A}_i)$ gefunden.

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Jede Lösung von (2.2) liefert eine Lösung (u, θ) von (ATP). Die Regularität der Lösung hängt dabei davon ab, in welchem Fall wir uns befinden.

- In Fall 1 erhalten wir

$$\begin{aligned} u &\in C^2([0, \infty), D(A^{\gamma/2})) \cap C^1([0, \infty), D(A^{1/2})) \cap C^0([0, \infty), D(A^{1-\gamma/2})), \\ \theta &\in C^1([0, \infty), H) \cap C^0([0, \infty), D(A^\beta)). \end{aligned}$$

- In Fall 2 entsprechend

$$\begin{aligned} u &\in C^2([0, \infty), D(A^{\gamma/2})) \cap C^1([0, \infty), D(A^{1/2})) \cap C^0([0, \infty), D(A^{1-\alpha+\beta})), \\ \theta &\in C^1([0, \infty), H) \cap C^0([0, \infty), D(A^\beta)). \end{aligned}$$

- In Fall 3 gilt

$$\begin{aligned} u &\in C^2([0, \infty), D(A^{\gamma/2})) \cap C^1([0, \infty), D(A^{1/2})) \cap C^0([0, \infty), D(A^{1-\gamma/2})), \\ \theta &\in C^1([0, \infty), H) \cap C^0([0, \infty), D(A^{\beta-\alpha+1/2})). \end{aligned}$$

- Im letzten Fall haben wir

$$\begin{aligned} u &\in C^2([0, \infty), D(A^{\gamma/2})) \cap C^1([0, \infty), D(A^{1/2})) \cap C^0([0, \infty), D(A^{3/2-2\alpha+\beta})), \\ \theta &\in C^1([0, \infty), H) \cap C^0([0, \infty), D(A^{\beta-\alpha+1/2})). \end{aligned}$$

2.2 Frequenzanalyse

Im folgenden Abschnitt nehmen wir zusätzlich an, dass der Hilbertraum H separabel ist.

Zunächst wollen wir die hier gewählte Herangehensweise durch bekannte Resultate der Fourier-Transformation auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ motivieren. Eine kurze Einführung in die Fourier-Transformation haben wir in Anhang D zusammengefasst.

Für $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ und $A^{1/2} = (-\Delta)$ mit $A^{1/2} : D(A^{1/2}) \subset H \rightarrow H$ ist wohlbekannt, dass

- die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : H \rightarrow H$ ein isometrischer Isomorphismus ist,
- $\mathcal{F}(A^{1/2}v)(\xi) = |\xi|^2 \mathcal{F}v(\xi)$ für alle $v \in D(A^{1/2})$ gilt.

Wendet man die Fourier-Transformation auf die klassische thermoelastische Plattengleichung mit Trägheitsterm an, das heißt auf (ATP) im Fall $A := (-\Delta)^2$ und $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, vergleiche Beispiel 1.1, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (1 + \mu\lambda^{1/2})\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^{1/2}\hat{\theta}(t, \lambda) &= 0, \\ \hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^{1/2}\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^{1/2}\hat{u}_t(t, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\lambda := |\xi|^4$, $\hat{u} := \mathcal{F}u$ und $\hat{\theta} := \mathcal{F}\theta$.

Das ursprüngliche System partieller Differentialgleichungen wird für festes λ in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt, für welches wir eine Lösung angeben können. Durch die Analyse der zugehörigen Lösungen im Fourierbild können nun Aussagen über die Regularität und das Abklingen von Lösungen der partiellen Differentialgleichung gezeigt werden. Dieses Vorgehen werden wir im folgenden Abschnitt für beliebige selbstadjungierte, nicht-negative Operatoren verallgemeinern. Dazu geben wir zunächst einen Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte, nicht-negative Operatoren wieder, welchen wir in Anhang B mit allen auftretenden Notationen genauer vorstellen werden.

Satz 2.12. (Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte Operatoren)

Sei H ein separabler Hilbertraum und $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator. Dann existiert ein endliches Maß μ , ein Hilbertraumintegral $\mathcal{H} = \int^\oplus h(x)d\mu(x)$ sowie ein unitärer Operator $\mathcal{U} : H \rightarrow \mathcal{H}$ so, dass für alle $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt:

- (i) $\mathcal{U}(T^\alpha v)(\lambda) = \lambda^\alpha \mathcal{U}v(\lambda) \quad (v \in D(T^\alpha), \lambda \geq 0)$.
- (ii) $D(T^\alpha) = \{v \in H \mid \lambda \mapsto \lambda^\alpha (\mathcal{U}v)(\lambda) \in \mathcal{H}\}$.

Weiter ist $\|T^\alpha v\|_H^2 = \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} \|(\mathcal{U}v)(\lambda)\|_{h(\lambda)}^2 d\mu(\lambda)$ für alle $v \in D(T^\alpha)$.

Nach Satz 2.12 existiert nun zu unserem Operator A ein Hilbertraum \mathcal{H} sowie ein unitärer Operator $\mathcal{U} : H \rightarrow \mathcal{H}$, so dass für alle $\alpha > 0$

$$\mathcal{U}(A^\alpha v)(\lambda) = \lambda^\alpha \mathcal{U}v(\lambda) \quad (v \in D(A^\alpha))$$

gilt. Betrachten wir die \mathcal{U} -Transformierte des Systems (ATP), so erhalten wir für festes $\lambda \geq 0$ das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (1 + \mu\lambda^\gamma)\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) &= 0, \\ \hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\beta\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{u}_t(t, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\hat{u} := \mathcal{U}u$ und $\hat{\theta} := \mathcal{U}\theta$. Das System ist für $V_\lambda(t) := (\hat{u}(t, \lambda), \hat{u}_t(t, \lambda), \hat{\theta}(t, \lambda))$ äquivalent zum System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}V_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\lambda}{1+\mu\lambda^\gamma} & 0 & \frac{\lambda^\alpha}{1+\mu\lambda^\gamma} \\ 0 & -\lambda^\alpha & -\lambda^\beta \end{pmatrix} V_\lambda(t) =: \mathcal{A}_\lambda V_\lambda(t).$$

Das charakteristische Polynom von \mathcal{A}_λ ist

$$P_\lambda(\omega) := \det(\omega - \mathcal{A}_\lambda) = \omega^3 + \lambda^\beta\omega^2 + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma}\omega + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma}. \quad (2.3)$$

Wie üblich definieren wir die zugehörige Energie erster Ordnung im Frequenzspektrum durch

$$E(t, \lambda) = (1 + \mu\lambda^\gamma)\|\hat{u}_t(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \lambda\|\hat{u}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \|\hat{\theta}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2. \quad (2.4)$$

Bemerkung 2.13.

1. Auch wenn die Notation \mathcal{A}_i für $i = 1, 2, 3, 4$ bereits für den Erzeuger der in Abschnitt 2.1 untersuchten Halbgruppe vergeben ist, wollen wir die Notation \mathcal{A}_λ , für $\lambda \geq 0$, auch in diesem Zusammenhang verwenden, da zu keiner Zeit eine Verwechslungsgefahr besteht.
2. Setzen wir $H := L^2(\mathbb{R}^n)$ und $A := (-\Delta)^2$ mit $D(A) = H^4(\mathbb{R}^n)$, so erhalten wir im Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte, nicht-negative Operatoren zwar auf formaler Ebene nicht genau die klassische Fourier-Transformation auf $\mathcal{H} = H = L^2(\mathbb{R}^n)$, jedoch können alle hier gezeigten Ergebnisse ohne Anpassung auf diese übertragen werden.
3. Wie bereits für die Fourier-Transformation bekannt ist, wird sich in den folgenden Abschnitten zeigen, dass die Analyse des Verhaltens der Lösung im Frequenzbereich für kleine Frequenzen einer Analyse des Abklingverhaltens entspricht und die Analyse großer Frequenzen Aussagen über die Regularität der Lösung erlaubt.
4. In Bemerkung 1.4 haben wir gesehen, dass Lösungen von (ATP) der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\hat{v}_{ttt} + \lambda^\alpha \hat{v}_{tt} + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma} \hat{v}_t + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} \hat{v} = 0$$

genügen. Das charakteristische Polynom der gewöhnlichen Differentialgleichung entspricht dem Polynom (2.3).

2.2.1 Kleine Frequenzen

Wir werden nun das asymptotische Verhalten von Lösungen untersuchen, das heißt, wir werden Abschätzungen der Energie (2.4) für kleine Frequenzen λ zeigen. Auch wenn wir das Verhalten der zugehörigen Eigenwerte im Frequenzspektrum vollständig charakterisiert haben, ist es mit unserem Ansatz leider nicht möglich, die Abklingrate für einen beliebigen Operator A zu bestimmen, da uns im Allgemeinen genauere Kenntnisse über die unitäre Abbildung \mathcal{U} und den zugehörigen Hilbertraum \mathcal{H} fehlen.

Wie sich schon im Fall des Laplace-Operators auf $L^2(\Omega)$ zeigt, hängt das Abklingen vom Gebiet Ω sowie der Wahl konkreter Randbedingungen ab. Ist $A = -\Delta$ und Ω ein beschränktes Gebiet, so können wir unter bestimmten Voraussetzungen an die Randbedingungen, folgern, dass Lösungen exponentiell abklingen. Ist hingegen $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder Ω ein Außengebiet, so erhalten wir nur noch polynomielles Abklingen der Lösung, vergleiche auch Kapitel 5, Abschnitt 5.1.

Für $\lambda < 1$ ist die Energie (2.4) äquivalent zur Energie

$$\tilde{E}(t, \lambda) = \|\hat{u}_t(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \lambda \|\hat{u}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \|\hat{\theta}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2. \tag{2.5}$$

\tilde{E} entspricht dabei gerade der Energie des Systems ohne Inertialterm

$$\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda \hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha \hat{\theta}(t, \lambda) = 0, \tag{2.6}$$

$$\hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\beta \hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha \hat{u}_t(t, \lambda) = 0, \tag{2.7}$$

welches für $V_\lambda(t) := (u(t, \lambda), u_t(t, \lambda), \theta(t, \lambda))$ äquivalent ist zum System erster Ordnung

$$V_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda^\alpha \\ 0 & -\lambda^\alpha & -\lambda^\beta \end{pmatrix} V_\lambda(t) =: \mathcal{A}_{\lambda,0} V_\lambda(t).$$

Das charakteristische Polynom von $\mathcal{A}_{\lambda,0}$ ist

$$P_{\lambda,0}(\omega) := \det(\omega - \mathcal{A}_{\lambda,0}) = \omega^3 + \lambda^\beta \omega^2 + (\lambda^{2\alpha} + \lambda)\omega + \lambda^{1+\beta}. \quad (2.8)$$

Dabei nennen wir $\omega = \omega(\lambda)$ einen Eigenwert von $\mathcal{A}_{\lambda,0}$, falls $P_{\lambda,0}(\omega(\lambda)) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ gilt.

Das asymptotische Verhalten für $\lambda \rightarrow 0$ der Eigenwerte des charakteristischen Polynoms (2.8) $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, wurde in [DeRa06], Abschnitt 4, für die in Abbildung 2.3 dargestellten Parameter (α, β) durch den folgenden Satz charakterisiert. Alle Gleichheiten sind bis auf Terme höherer Ordnung in λ zu lesen.

Satz 2.14. Es sei $\mathfrak{A} := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \leq \beta, \beta \geq 2\alpha - \frac{1}{2}\}$. Für die Nullstellen $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, des charakteristischen Polynoms (2.8) gilt für $\lambda \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{Für } \beta = 1 \text{ und } (\alpha, \beta) \text{ im Innern von } \mathfrak{A}: \quad & \omega_1 = -r_1 \lambda^\beta, \\ & \omega_{2,3} = -r_2 \lambda^{\beta+2\alpha-1} \pm ir_3 \lambda^{1/2}. \\ \text{Für } \beta = \alpha > \frac{1}{2}: \quad & \omega_1 = -r_4 \lambda^\beta, \\ & \omega_{2,3} = -r_5 \lambda^{3\beta-1} \pm ir_6 \lambda^{1/2}. \\ \text{Für } \beta = \alpha = \frac{1}{2}: \quad & \omega_1 = -r_7 \lambda^\beta, \\ & \omega_{2,3} = -r_8 \lambda^{1/2}. \\ \text{Für } \frac{1}{2} < \beta = 2\alpha - \frac{1}{2}: \quad & \omega_1 = -r_9 \lambda^\beta, \\ & \omega_{2,3} = -r_{10} \lambda^{2\beta-1/2} \pm ir_{11} \lambda^{1/2}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir mit r_m , $m = 1, \dots, 11$, positive Konstanten, welche explizit bestimmt werden können.

(2) Für $\alpha = \frac{1}{2}$, $0 \leq \beta \leq 1$ und $j = 1, 2, 3$ haben wir

$$\operatorname{Re} \omega_j = \begin{cases} -c_j \lambda^\beta, & \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1, \\ -c_j \lambda^{1-\beta}, & 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

wobei c_j verschiedene, positive Konstanten bezeichne, die explizit bestimmt werden können.

(3) Für $\beta = \frac{1}{2}$ und $j = 1, 2, 3$ gilt

$$\operatorname{Re} \omega_j = \begin{cases} -d_j \lambda^{1/2}, & \frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -d_j \lambda^{2\alpha-1/2}, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

wobei d_j verschiedene, positive Konstanten bezeichne, die explizit bestimmt werden können.

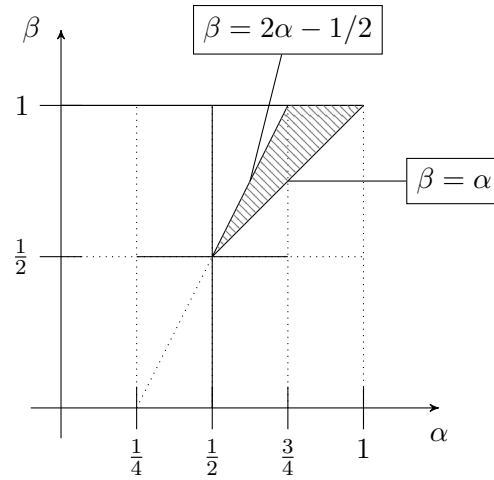


Abbildung 2.3: Parameter Region aus Satz 2.14

Aus Satz 2.14 folgt direkt:

Korollar 2.15. Für $\lambda < 1$ gilt

$$E(t, \lambda) \leq cE(0, \lambda)e^{-c\rho(\lambda)},$$

wobei c eine generische positive Konstante ist, die von α und β abhängt, und $\rho(\lambda)$ wie folgt gegeben ist:

- (1) Für $\beta = 1$: $\rho(\lambda) = \lambda^{2\alpha}$.
- (2) Für (α, β) im Innern von \mathfrak{A} : $\rho(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\alpha, & \beta \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda^{\alpha+2\beta-1}, & \beta \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$
- (3) Für $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$: $\rho(\lambda) = \lambda^{3\alpha-1}$.
- (4) Für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$: $\rho(\lambda) = \lambda^{1/2}$.
- (5) Für $\frac{1}{2} < \beta = 2\alpha - \frac{1}{2}$: $\rho(\lambda) = \lambda^{3\alpha-1}$.
- (6) Für $\alpha = \frac{1}{2}$: $\rho(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{1-\beta}, & 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda^\beta, & \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1. \end{cases}$
- (7) Für $\beta = \frac{1}{2}$: $\rho(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{1/2}, & \frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda^{2\alpha-1/2}, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}. \end{cases}$

Die Optimalität der Abschätzungen im Bezug auf das asymptotische Verhalten von ρ in allen Fällen folgt ebenfalls direkt aus Satz 2.14.

Wie sich schon in Satz 2.14 gezeigt hat, hängt die asymptotische Entwicklung der Eigenwerte von α und β ab und kann je nach Wahl stark variieren. Daher ist es uns nicht möglich, eine komplette Charakterisierung des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte für alle Parameter

$(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ zu geben, da dies den Umfang dieser Arbeit sprengen würde.

Im folgenden Satz werden wir für $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$ eine Korollar 2.15 entsprechende Energieabschätzung zeigen.

Satz 2.16. Für $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$ und $\lambda < 1$ gilt

$$E(t, \lambda) \leq cE(0, \lambda)e^{-c\rho(\lambda)},$$

wobei c eine generische positive Konstante bezeichne, die von α und β abhängt, und $\rho(\lambda)$ definiert ist durch

$$\rho(\lambda) := \lambda^{1-\beta}.$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe der Multiplikatormethode für die zum System (2.6)–(2.7) gehörige, äquivalente Energie

$$\tilde{E}(t, \lambda) = \|\hat{u}_t(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \lambda\|\hat{u}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \|\hat{\theta}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2.$$

Da wir $\alpha = \beta$ annehmen, schreibt sich das System (2.6)–(2.7) als

$$\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) = 0, \quad (2.9)$$

$$\hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{u}_t(t, \lambda) = 0. \quad (2.10)$$

Multiplikation der ersten Gleichung (2.9) mit $\bar{\hat{u}}$ und der zweiten Gleichung (2.10) mit $\bar{\hat{\theta}}$ ergibt, nach Addition der Realteile, die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{E}(t, \lambda) = -\lambda^\alpha \|\hat{\theta}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2, \quad (2.11)$$

wobei wir im restlichen Beweis der Einfachheit halber auf die Abhängigkeiten der Funktionen $\hat{u}, \hat{\theta}$ von t und λ verzichten und $|\cdot|$ anstelle von $\|\cdot\|_{h(\lambda)}$ schreiben werden.

Um weitere dissipative Terme zu erhalten, multiplizieren wir nun als Erstes (2.9) mit $\bar{\hat{u}}$, nehmen den Realteil und erhalten

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{u}}) = |\hat{u}_t|^2 - \lambda|\hat{u}|^2 + \lambda^\alpha \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}). \quad (2.12)$$

Des Weiteren multiplizieren wir (2.9) mit $\bar{\hat{\theta}}$ und (2.10) mit $\bar{\hat{u}}_t$. Addition der Realteile gibt uns

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}}) = -\lambda \operatorname{Re}(\hat{u} \bar{\hat{\theta}}) + \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - \lambda^\alpha \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}_t) - \lambda^\alpha |\hat{u}_t|^2. \quad (2.13)$$

Zuletzt multiplizieren wir (2.11), (2.12) und (2.13) mit K , $c_1\lambda^{1-\alpha}$ bzw. $c_2\lambda^{1-2\alpha}$ und addieren diese drei Gleichungen. Dabei sind K, c_1, c_2 positive Konstanten, die noch zu wählen sind. Das gibt uns

$$\frac{d}{dt} L(t, \lambda) + D(t, \lambda) = 0, \quad (2.14)$$

wobei

$$L(t, \lambda) := \frac{K}{2} \tilde{E}(t, \lambda) + c_1 \lambda^{1-\alpha} \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{u}}) - c_2 \lambda^{1-2\alpha} \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}})$$

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

und

$$D(t, \lambda) := K\lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - c_1\lambda^{1-\alpha} |\hat{u}_t|^2 + c_1\lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 - c_1\lambda^{1-\alpha} \lambda^\alpha \operatorname{Re}(\hat{\theta}\bar{\hat{u}}) \\ + c_2\lambda^{2-2\alpha} \operatorname{Re}(\hat{u}\bar{\hat{\theta}}) - c_2\lambda^{1-2\alpha} \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 + c_2\lambda^{1-\alpha} \operatorname{Re}(\hat{\theta}\bar{\hat{u}}_t) + c_2\lambda^{1-2\alpha} \lambda^\alpha |\hat{u}_t|^2.$$

Mit dem Ziel, Terme der Form $\lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2$, $\lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2$, $\lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}|^2$ und $\lambda^{1-\alpha} |\hat{u}_t|^2$ zu gewinnen, erhalten wir für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ mit der Youngschen Ungleichung

$$\lambda^\alpha \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}\bar{\hat{u}}| \leq \lambda^\alpha (\varepsilon_1 \lambda^{2-2\alpha} |\hat{u}|^2 + (4\varepsilon_1)^{-1} |\hat{\theta}|^2) \\ = \varepsilon_1 \lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 + (4\varepsilon_1)^{-1} \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2, \\ \lambda^{2-2\alpha} |\hat{\theta}\bar{\hat{u}}| \leq \lambda^{\alpha/2} \lambda^{1-\alpha/2} |\hat{\theta}\bar{\hat{u}}| \\ \leq \varepsilon_2 \lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 + (4\varepsilon_2)^{-1} \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2, \\ \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}\bar{\hat{u}}_t| \leq \varepsilon_3 \lambda^{1-\alpha} |\hat{u}_t|^2 + (4\varepsilon_3)^{-1} \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}|^2,$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung $\alpha \leq \frac{1}{2}$ verwendet haben. Anwenden auf den dissipativen Term D gibt uns die Abschätzung

$$D(t, \lambda) \geq K\lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - c_1\lambda^{1-\alpha} |\hat{u}_t|^2 + c_1\lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 - c_1\varepsilon_1 \lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 - c_1(4\varepsilon_1)^{-1} \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 \\ - c_2\varepsilon_2 \lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 - c_2(4\varepsilon_2)^{-1} \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - c_2\lambda^{1-2\alpha} \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - c_2\varepsilon_3 \lambda^{1-\alpha} |\hat{u}_t|^2 \\ - c_2(4\varepsilon_3)^{-1} \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}|^2 + c_2\lambda^{1-2\alpha} \lambda^\alpha |\hat{u}_t|^2 \\ \geq \left(\frac{K}{2} - c_2(4\varepsilon_3)^{-1} - c_2\right) \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}|^2 + \left(\frac{K}{2} - c_1(4\varepsilon_1)^{-1} - c_2(4\varepsilon_2)^{-1}\right) \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 \\ + (c_1 - c_1\varepsilon_1 - c_2\varepsilon_2) \lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 + (c_2 - c_1 - c_2\varepsilon_3) \lambda^{1-\alpha} |\hat{u}_t|^2.$$

Wählen wir $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{4}$ und $K = 3$ so erhalten wir

$$D(t, \lambda) \geq \frac{1}{2} \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}|^2 + \frac{3}{4} \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 + \frac{1}{16} \lambda^{1-\alpha} \lambda |\hat{u}|^2 + \frac{1}{8} \lambda^{1-\alpha} |\hat{u}_t|^2 \\ \geq \frac{1}{16} \lambda^{1-\alpha} \tilde{E}(t, \lambda). \quad (2.15)$$

Andererseits erhalten wir für den Energieterm mit

$$\lambda^{1-\alpha} |\hat{u}\bar{\hat{u}}_t| \leq \frac{1}{2} \lambda^{2-2\alpha} |\hat{u}|^2 + \frac{1}{2} |\hat{u}_t|^2, \\ \lambda^{1-2\alpha} |\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}| \leq \frac{1}{2} \lambda^{1-2\alpha} |\hat{\theta}|^2 + \frac{1}{2} \lambda^{1-2\alpha} |\hat{u}_t|^2, \\ \lambda^{1-2\alpha} |\hat{u}\bar{\hat{u}}_t| \leq \frac{1}{2} \lambda |\hat{u}|^2 + \frac{1}{2} |\hat{u}_t|^2$$

die Abschätzungen

$$L(t, \lambda) = \frac{3}{2} \tilde{E}(t, \lambda) + \frac{1}{4} \lambda^{1-\alpha} \operatorname{Re}(\hat{u}_t\bar{\hat{u}}) - \frac{1}{2} \lambda^{1-2\alpha} \operatorname{Re}(\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}) \\ \leq \frac{3}{2} \tilde{E}(t, \lambda) + \frac{1}{8} |\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{8} \lambda^{2-2\alpha} |\hat{u}|^2 + \frac{1}{4} \lambda^{1-2\alpha} |\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{4} \lambda^{1-2\alpha} |\hat{\theta}|^2 \\ \leq \frac{3}{2} \tilde{E}(t, \lambda) + \frac{1}{8} |\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{8} \lambda |\hat{u}|^2 + \frac{1}{4} |\hat{u}_t|^2 + \frac{1}{4} |\hat{\theta}|^2 \\ \leq \frac{15}{8} \tilde{E}(t, \lambda) \quad (2.16)$$

und

$$\begin{aligned}
 L(t, \lambda) &\geq \frac{3}{2}\tilde{E}(t, \lambda) - \frac{1}{8}\lambda^{1-2\alpha}|\hat{u}_t|^2 - \frac{1}{8}\lambda|\hat{u}|^2 - \frac{1}{4}\lambda^{1-2\alpha}|\hat{u}_t|^2 - \frac{1}{4}\lambda^{1-2\alpha}|\hat{\theta}|^2 \\
 &\geq \frac{3}{2}\tilde{E}(t, \lambda) - \frac{1}{8}|\hat{u}_t|^2 - \frac{1}{8}\lambda|\hat{u}|^2 - \frac{1}{4}|\hat{u}_t|^2 - \frac{1}{4}|\hat{\theta}|^2 \\
 &\geq \frac{9}{8}\tilde{E}(t, \lambda).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Anwenden von (2.15), (2.16) und (2.17) auf (2.14) gibt uns

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt}L(t, \lambda) + D(t, \lambda) \\
 &\geq \frac{d}{dt}L(t, \lambda) + \frac{1}{16}\lambda^{1-\alpha}\tilde{E}(t, \lambda) \\
 &\geq \frac{d}{dt}L(t, \lambda) + \frac{1}{30}\lambda^{1-\alpha}L(t, \lambda).
 \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall, siehe Anhang Satz F.2, folgt

$$L(t, \lambda) \leq e^{-\frac{1}{30}\lambda^{1-\alpha}t}L(0, \lambda),$$

was mit (2.16) und (2.17) direkt die gewünschte Abschätzung

$$\tilde{E}(t, \lambda) \leq \frac{5}{3}e^{-\frac{1}{30}\lambda^{1-\alpha}t}\tilde{E}(0, \lambda)$$

zur Folge hat. □

Die Optimalität der in Satz 2.16 gezeigten Abschätzung folgt dann aus

Satz 2.17. Sei $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$. Für die Nullstellen $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, des charakteristischen Polynoms

$$P_{\lambda,0}(\omega) = \det(\omega - \mathcal{A}_\lambda) = \omega^3 + \lambda^\alpha\omega^2 + (\lambda^{2\alpha} + \lambda)\omega + \lambda^{1+\alpha}$$

gelten für $\lambda \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \omega_1(\lambda) &= -k_1\lambda^{1-\alpha}, \\
 \omega_{2,3}(\lambda) &= -k_2\lambda^\alpha \pm ik_3\lambda^\alpha,
 \end{aligned}$$

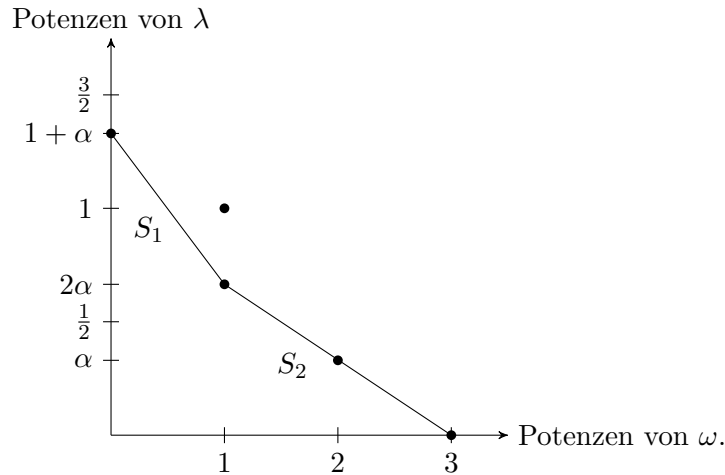
wobei $k_1, k_2 > 0$ Konstanten sind, die nicht von λ abhängen und alle Gleichheiten bis auf Terme höherer Ordnung in λ zu lesen sind.

Beweis: Um die asymptotische Entwicklung der Eigenwerte zu berechnen, verwenden wir den Newton-Puiseux-Algorithmus, den wir im Anhang, Kapitel C, genauer vorstellen. Dafür müssen wir zunächst $\alpha \in \mathbb{Q}$ voraussetzen.

Das Newton-Polygom, das zum charakteristischen Polynom

$$P_{\lambda,0}(\omega) = \omega^3 + \lambda^\alpha\omega^2 + (\lambda^{2\alpha} + \lambda)\omega + \lambda^{1+\alpha}$$

gehört, ist gegeben durch



Die Nullstellen des Polynoms $P_{\lambda,0}$ sind von der Form $\omega = c_1\lambda^{m_1} + c_2\lambda^{m_1+m_2} + \dots$, wobei die Wahl von m_1 gerade der negativen Steigung der Segmente des Newton Polygons entspricht. Das erste Segment S_1 hat die Steigung $\alpha - 1$, den y-Achsenabschnitt $y_1 = 1 + \alpha$ und die Länge 1, das zweite Segment hat die Steigung $-\alpha$, die Länge 2 sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse bei $y_1 = 3\alpha$.

Sei zuerst $m_1 = 1 - \alpha$.

Einsetzen von $\omega = \lambda^{1-\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$, wobei $\tilde{\omega}_1 = c_2\lambda^{m_2} + c_3\lambda^{m_2+m_3} + \dots$, in $P_{\lambda,0}$ gibt uns

$$P_{\lambda,0}(\omega) = \lambda^{3-3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + \lambda^{2-\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + (\lambda^{1+\alpha} + \lambda^{2-\alpha})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} = 0.$$

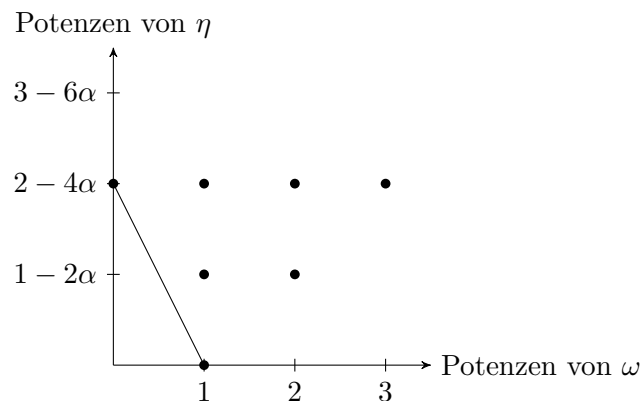
Alle Terme niederster Ordnung $1 + \alpha$ müssen verschwinden. Daher folgt $c_1 = -1$.

Um später im Beweis die Behauptung für irrationale α beweisen zu können, müssen wir einen weiteren Schritt im Algorithmus ausführen:

Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{\omega}_1) &:= \lambda^{-y_1} P_{\lambda,0}(\omega) \\ &= \lambda^{-1-\alpha} [\lambda^{3-3\alpha}(-1 + \tilde{\omega}_1)^3 + \lambda^{2-\alpha}(-1 + \tilde{\omega}_1)^2 + (\lambda^{1+\alpha} + \lambda^{2-\alpha})(-1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha}] \\ &= \tilde{\omega}_1^3 \lambda^{2-4\alpha} + \tilde{\omega}_1^2 (-3\lambda^{2-4\alpha} + \lambda^{1-2\alpha}) + \tilde{\omega}_1 (3\lambda^{2-4\alpha} + 1 - \lambda^{1-2\alpha}) - \lambda^{2-4\alpha}. \end{aligned}$$

Das Newton-Polygon von P_2 ist gegeben durch



Somit ist $m_2 = 2 - 4\alpha = y_2$, da wir nur noch die Segmente mit negativer Steigung betrachten. Setzen wir nun $\tilde{\omega}_1 = \lambda^{2-4\alpha}(c_2 + \tilde{\omega}_2)$ in P_2 ein, so folgt

$$P_2(\tilde{\omega}_1) = \lambda^{8-16\alpha}(c_2 + \tilde{\omega}_2)^3 + (c_2 + \tilde{\omega}_2)^2(-3\lambda^{6-12\alpha} + \lambda^{3-6\alpha}) + (c_2 + \tilde{\omega}_2)(3\lambda^{4-8\alpha} + \lambda^{2-4\alpha} - \lambda^{3-6\alpha}) - \lambda^{2-4\alpha}.$$

Dies impliziert $c_2 = 1$, da die Terme der Ordnung $y_2 = 2 - 4\alpha$ verschwinden müssen, was uns gerade

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \lambda^{1-\alpha}(c_1 + \lambda^{2-4\alpha}(c_2 + \tilde{\omega}_2)) \\ &= -\lambda^{1-\alpha} + \lambda^{3-5\alpha} + \lambda^{3-5\alpha}\tilde{\omega}_2 \end{aligned}$$

liefert. Wir untersuchen nun das zweite Segment. Mit $m_1 = \alpha$ und $\omega = \lambda^\alpha(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ erhalten wir

$$P_{\lambda,0}(\omega) = \lambda^{3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + \lambda^{3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + (\lambda^{3\alpha} + \lambda^{1+\alpha})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} = 0.$$

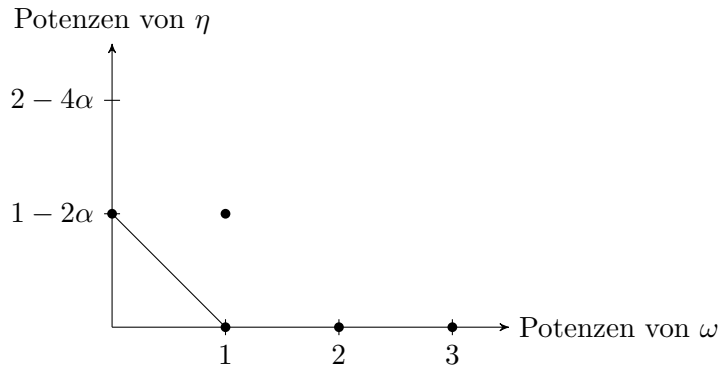
Wieder müssen die Terme niedrigster Ordnung 3α verschwinden. Dies impliziert $c_1^3 + c_1^2 + c_1 = 0$, woraus $c_{1,k} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k = 1, 2$ folgt.

Auch hier müssen wir einen weiteren Entwicklungsschritt machen:

Da $\omega_2 = \overline{\omega_3}$, können wir ohne Einschränkung $c_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ annehmen. Damit ist

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{\omega}_1) &:= \lambda^{-y_1} P_{\lambda,0}(\omega) \\ &= \lambda^{-3\alpha} [\lambda^{3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + \lambda^{3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + (\lambda^{3\alpha} + \lambda^{1+\alpha})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha}] \\ &= \tilde{\omega}_1^3 + \tilde{\omega}_1^2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \tilde{\omega}_1 \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda^{1-2\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\lambda^{1-2\alpha}. \end{aligned}$$

Das Newton Polygon von P_2 ist



Also ist $m_2 = y_2 = 1 - 2\alpha$. Durch Einsetzen von $\tilde{\omega}_1 = \lambda^{1-2\alpha}(c_2 + \tilde{\omega}_2)$ in P_2 folgt $c_2 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Insgesamt erhalten wir

$$\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^\alpha \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^\alpha + \left(\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\lambda^{1-\alpha} + \lambda^{1-\alpha}\tilde{\omega}_2.$$

Es sei nun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und wie oben

$$P_{\lambda,0}(\omega) = \omega^3 + \lambda^\alpha\omega^2 + (\lambda^{2\alpha} + \lambda) + \lambda^{1+\alpha}.$$

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Dann existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ mit $\alpha_n \rightarrow \alpha$ für $n \rightarrow \infty$. Mit dem oben gezeigten erhalten wir für die Polynome

$$P_\lambda^n(\omega) := \omega^3 + \lambda^{\alpha_n} \omega^2 + (\lambda^{2\alpha_n} + \lambda) + \lambda^{1+\alpha_n}$$

die Nullstellen

$$\begin{aligned} \omega_1^n(\lambda) &= -\lambda^{1-\alpha_n} + \lambda^{3-5\alpha_n} + \lambda^{3-5\alpha_n} \tilde{\omega}_2^{(1,n)}, \\ \omega_{2,3}^n(\lambda) &= -\frac{1}{2} \lambda^{\alpha_n} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda^{\alpha_n} + \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \lambda^{1-\alpha_n} + \lambda^{1-\alpha_n} \tilde{\omega}_2^{(2,n)}. \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten von P_λ^n für festes λ gegen die Koeffizienten von $P_{\lambda,0}$ konvergieren, folgt aus Satz C.1, dass

$$\omega_k^n(\lambda) \rightarrow \omega_k(\lambda),$$

wobei wir mit $\omega_k(\lambda)$, $k = 1, 2, 3$ die Nullstellen von $P_{\lambda,0}$ bezeichnen.

Weiter gilt

$$\lambda^{1-\alpha_n} \rightarrow \lambda^{1-\alpha}, \quad \lambda^{\alpha_n} \rightarrow \lambda^\alpha \quad \text{und} \quad \lambda^{3-5\alpha_n} \rightarrow \lambda^{3-5\alpha},$$

woraus folgt, dass $\tilde{\omega}_2^{(1)}$, $\tilde{\omega}_2^{(2)}$ existieren so, dass

$$\tilde{\omega}_2^{(k,n)} \rightarrow \tilde{\omega}_2^{(k)}$$

für $k = 1, 2$. Schließlich folgt

$$\begin{aligned} \omega_1(\lambda) &= -\lambda^{1-\alpha} + \lambda^{3-5\alpha} + \lambda^{3-5\alpha} \tilde{\omega}_2^{(1)}, \\ \omega_{2,3}(\lambda) &= -\frac{1}{2} \lambda^\alpha \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda^\alpha + \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \lambda^{1-\alpha} + \lambda^{1-\alpha} \tilde{\omega}_2^{(2)}. \end{aligned}$$

□

2.2.2 Große Frequenzen

Wir wollen nun das asymptotische Verhalten der Eigenwerte für große Frequenzen λ untersuchen, um damit Aussagen über die Regularität von Lösungen des α - β - γ -Systems treffen zu können.

Wir werden zeigen, dass Lösungen von (ATP) genau im Parameterbereich

$$\mathcal{S}_\gamma := \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1) \mid \frac{1}{2} \leq \alpha + \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \leq \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

eine sogenannte Glättungseigenschaft haben, die sich im asymptotischen Verhalten der Eigenwerte im Frequenzspektrum und damit auch in Abschätzungen der Energie (2.4) widerspiegeln. Beim Übergang in den Bereich $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}_{2,\gamma}$, wobei

$$\mathcal{N} := \{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1) \mid \beta < 2\alpha - 1 \}$$

und

$$\mathcal{N}_{2,\gamma} := \{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1) \mid 2\alpha + \beta < \max\{2\beta + \gamma, 1\} \},$$

wird diese Glättungseigenschaft verloren gehen und es wird sich stattdessen ein sogenannter Regularitätsverlust einstellen.

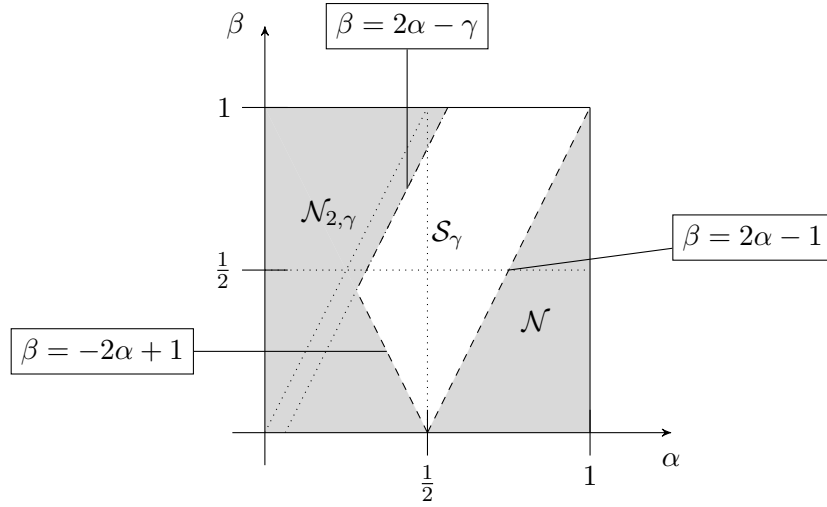


Abbildung 2.4: Region der Glättungseigenschaft und des Regularitätsverlusts

Definition 2.18.

- (i) Das System (ATP) hat die „Glättungseigenschaft“, falls für die Eigenwerte $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$ von P_λ gilt

$$\exists C > 0 \exists \delta \geq 0 \exists \lambda_1 > 0 \forall \lambda \geq \lambda_1 : \operatorname{Re}(\omega_j(\lambda)) \leq -C\lambda^\delta.$$

- (ii) Im System liegt ein „Regularitätsverlust“ vor, falls ein Eigenwert $\omega(\lambda)$ von P_λ existiert mit

$$\exists c > 0 \exists \varepsilon > 0 \exists \lambda_1 > 0 \forall \lambda \geq \lambda_1 : -c\lambda^{-\varepsilon} \leq \operatorname{Re}(\omega(\lambda)).$$

Bemerkung 2.19.

- (i) Es sei bemerkt, dass für alle Eigenwerte $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, $\operatorname{Re}(\omega_j(\lambda)) < 0$ für alle $\lambda > 0$ gilt.
- (ii) Wir werden eine asymptotische Entwicklung der Eigenwerte beweisen. In unserem Fall lässt sich die Glättungseigenschaft und der Regularitätsverlust somit wie folgt formulieren: Wir schreiben $f \in \Theta(g)$, falls g eine asymptotisch scharfe Schranke von f ist, d.h. falls sowohl $f \in \mathcal{O}(g) = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C > 0 \exists x_0 > 0 \forall x > x_0 : |h(x)| \leq C|g(x)|\}$ als auch $f \in \Omega(g) = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C > 0 \exists x_0 > 0 \forall x > x_0 : C|g(x)| \leq |h(x)|\}$ gilt. Die Glättungseigenschaft ist dann gerade gleichbedeutend mit

$$\exists \delta \geq 0 : \operatorname{Re}(\omega_j(\lambda)) \in \Theta(\lambda^\delta),$$

für $j = 1, 2, 3$.

Entsprechend lässt sich der Regularitätsverlust wie folgt formulieren

$$\exists \varepsilon > 0 : \operatorname{Re}(\omega_j(\lambda)) \in \Theta(\lambda^{-\varepsilon}),$$

für ein $j \in \{1, 2, 3\}$.

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

(iii) Falls das System die Glättungseigenschaft besitzt, erfüllt die Energie erster Ordnung im Frequenzspektrum (2.4) die folgende Abschätzung

$$\exists C, c > 0 \exists \delta \geq 0 \exists \lambda_1 > 0 \forall \lambda \geq \lambda_1 \forall t \geq 0 : E(t, \lambda) \leq C e^{-c\lambda^\delta t} E(0, \lambda). \quad (2.18)$$

Andererseits ist eine Energieabschätzung wie in (2.18) auch hinreichend, um auf die Glättungseigenschaft zu schließen.

Eine entsprechende Energieabschätzung ist jedoch im Allgemeinen nicht hinreichend, um auf das Auftreten eines Regularitätsverlustes schließen zu können.

(iv) Es seien Anfangsdaten u_0, u_1, θ_0 so gegeben, dass nach Satz 2.11 eine Lösung (u, θ) von (ATP) existiert. Sind (α, β, γ) nun so gewählt, dass das System die Glättungseigenschaft hat, so gilt für die Lösung bereits

$$u(t) \in D(A^m) \text{ und } \theta \in D(A^m)$$

für alle $t > 0$ und für alle $m \in \mathbb{N}$, was wir in Abschnitt 2.2.4 beweisen werden.

(v) Im Gegensatz zur Glättungseigenschaft, die uns Regularität der Lösung liefert, spiegelt sich der sogenannte Regularitätsverlust allerdings nicht in einem Verlust an Regularität wieder, wie die Bezeichnung zunächst vermuten lässt, sondern in Abschätzungen der Norm.

In Kapitel 5 werden wir einige Beispiele dazu betrachten und diskutieren, wie sich dieser „Defekt der Regularität“ in entsprechenden Normabschätzungen zeigt.

(vi) Im Fall einiger Gleichungen ist bekannt, dass sich das Fehlen von exponentieller Stabilität beim Übergang vom beschränkten Gebieten zum Ganzraumfall in einem Regularitätsverlust widerspiegelt. Einige Beispiele dazu werden wir in Kapitel 5 zusammenfassen.

Satz 2.20. Sei $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{S}_\gamma := \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \frac{1}{2} \leq \alpha + \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \leq \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}$. Dann hat (ATP) die Glättungseigenschaft.

Beweis: Wir leiten zunächst eine Basisenergie-Gleichung für das System

$$(1 + \mu\lambda^\gamma)\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) = 0, \quad (2.19)$$

$$\hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\beta\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{u}_t(t, \lambda) = 0, \quad (2.20)$$

her. Dazu sei die Energie des Systems definiert wie in (2.4), also

$$E(t, \lambda) = (1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}_t|^2 + \lambda|\hat{u}|^2 + |\hat{\theta}|^2,$$

wobei wir der Einfachheit halber im Folgenden erneut die Abhängigkeiten der Funktionen $\hat{u}, \hat{\theta}$ von t und λ weglassen und $|\cdot|$ anstelle von $\|\cdot\|_{h(\lambda)}$ schreiben.

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\bar{\hat{u}}_t$ und der zweiten Gleichung mit $\bar{\hat{\theta}}$ ergibt, nach Addition der Realteile die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t, \lambda) = -\lambda^\beta |\hat{\theta}|^2. \quad (2.21)$$

Durch passende Wahl weiterer Multiplikatoren werden wir nun weitere dissipative Terme finden. Dazu multiplizieren wir (2.19) mit $\bar{\hat{u}}$. Betrachten des Realteils liefert

$$(1 + \mu\lambda^\gamma) \frac{d}{dt} \operatorname{Re} (\hat{u}_t \bar{\hat{u}}) = (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - \lambda |\hat{u}|^2 + \lambda^\alpha \operatorname{Re} (\hat{\theta} \bar{\hat{u}}). \quad (2.22)$$

Multiplizieren wir nun (2.19) mit $\bar{\hat{\theta}}$ und (2.20) mit $(1 + \mu\lambda^\gamma) \bar{\hat{u}}_t$ und addieren die Realteile, so erhalten wir

$$(1 + \mu\lambda^\gamma) \frac{d}{dt} \operatorname{Re} (\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}}) + \lambda \operatorname{Re} (\hat{u} \bar{\hat{\theta}}) - \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 + (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^\beta \operatorname{Re} (\hat{\theta} \bar{\hat{u}}_t) + \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 = 0. \quad (2.23)$$

Zuletzt multiplizieren wir (2.21), (2.22) und (2.23) mit $K\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)$, $c_1 c_2 \lambda^\alpha$ bzw. c_1 und addieren diese drei Gleichungen. Dabei sind K, c_1, c_2, x positive Konstanten, die noch zu bestimmen sind. Das gibt uns

$$\frac{d}{dt} L(t, \lambda) = D(t, \lambda),$$

wobei

$$L(t, \lambda) := \frac{1}{2} K \lambda^x (1 + \mu\lambda^\gamma) E(t) + c_1 c_2 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re} (\hat{u}_t \bar{\hat{u}}) + c_1 (1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re} (\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}})$$

und

$$D(t, \lambda) := -K(1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^{\beta+x} |\hat{\theta}|^2 + c_1 c_2 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - c_1 c_2 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 c_2 \lambda^{2\alpha} \operatorname{Re} (\hat{\theta} \bar{\hat{u}}) - c_1 \lambda \operatorname{Re} (\hat{u} \bar{\hat{\theta}}) + c_1 \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - c_1 (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^\beta \operatorname{Re} (\hat{\theta} \bar{\hat{u}}_t) - c_1 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2.$$

Für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ erhalten wir mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \lambda^{2\alpha} |\hat{\theta} \bar{\hat{u}}| &\leq (4\varepsilon_1)^{-1} \lambda^{3\alpha-1} |\hat{\theta}|^2 + \varepsilon_1 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2, \\ \lambda |\hat{u} \bar{\hat{\theta}}| &\leq \varepsilon_2 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 + (4\varepsilon_2)^{-1} \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}|^2, \\ (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^\beta |\hat{\theta} \bar{\hat{u}}_t| &\leq (4\varepsilon_3)^{-1} (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^{2\beta-\alpha} |\hat{\theta}|^2 + \varepsilon_3 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} D(t) &\leq -K(1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^{\beta+x} |\hat{\theta}|^2 + c_1 c_2 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - c_1 c_2 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 c_2 (4\varepsilon_1)^{-1} \lambda^{3\alpha-1} |\hat{\theta}|^2 \\ &\quad + c_1 c_2 \varepsilon_1 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 \varepsilon_2 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 (4\varepsilon_2)^{-1} \lambda^{1-\alpha} |\hat{\theta}|^2 \\ &\quad + c_1 \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 + c_1 (4\varepsilon_3)^{-1} (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^{2\beta-\alpha} |\hat{\theta}|^2 + c_1 \varepsilon_3 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - c_1 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 \\ &= -\lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 [K \lambda^{\beta+\gamma+x-\alpha} - c_1 c_2 (4\varepsilon_1)^{-1} \lambda^{2\alpha-1} - c_1 - c_1 c (4\varepsilon_3)^{-1} \lambda^{2\beta+\gamma-2\alpha} - c_1 (4\varepsilon_2)^{-1} \lambda^{1-2\alpha}] \\ &\quad - \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 [c_1 - c_1 c_2 - c_1 \varepsilon_3] - \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 [c_1 c_2 - c_1 c_2 \varepsilon_1 - c_1 \varepsilon_2]. \end{aligned}$$

Damit die rechte Seite für große λ negativ proportional zu $\lambda^\alpha L(t, \lambda)$ gewählt werden kann, müssen die Potenzen von λ die folgenden Ungleichungen erfüllen

$$\beta \leq \alpha + x, \quad \beta \geq 1 - (\alpha + x + \gamma), \quad \beta + x + \gamma \geq 3\alpha - 1, \quad \beta + x + \gamma \geq \alpha. \quad (2.24)$$

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - (\alpha + x + \gamma) &\leq \beta - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} + \alpha + x \leq -\frac{1}{2} + (\alpha + x + \gamma) \\ \Rightarrow |\beta - \frac{1}{2}| &\leq -\frac{1}{2} + (\alpha + x + \gamma). \end{aligned}$$

Die erste und dritte Ungleichung ergeben weiter

$$3\alpha - 1 \leq \alpha + 2x + \gamma \Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{2} \leq x + \frac{\gamma}{2}.$$

Für K hinreichend groß können unter diesen Bedingungen an α , β und γ die Konstanten $c_1, c_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, so gewählt werden, dass

$$\frac{d}{dt}L(t, \lambda) \leq -C\lambda^\alpha E(t, \lambda). \quad (2.25)$$

Mit $\alpha - \frac{1}{2} \leq x + \frac{\gamma}{2}$ erhalten wir für den Energieterm die Abschätzungen

$$\begin{aligned} L(t, \lambda) &= \frac{1}{2}K\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)E(t, \lambda) + c_1c_2\lambda^\alpha(1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re}(\hat{u}_t\bar{\hat{u}}) \\ &\quad + c_1(1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re}(\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}) \\ &\leq \frac{1}{2}K\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)E(t, \lambda) + c_1c_2(1 + \mu\lambda^\gamma)\lambda^{\alpha-1/2}|\hat{u}_t|\lambda^{1/2}|\hat{u}| \\ &\quad + \frac{c_1}{2}(1 + \mu\lambda^\gamma)(|\hat{u}_t|^2 + |\hat{\theta}|^2) \\ &\leq \frac{1}{2}K\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)E(t, \lambda) + \frac{c_1c_2}{2}(1 + \mu\lambda^\gamma)\lambda^x(\lambda^\gamma|\hat{u}_t|^2 + \lambda|\hat{u}|^2) \\ &\quad + \frac{c_1}{2}(1 + \mu\lambda^\gamma)(|\hat{u}_t|^2 + |\hat{\theta}|^2) \\ &\leq C\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)E(t, \lambda) \end{aligned} \quad (2.26)$$

und

$$\begin{aligned} L(t, \lambda) &\geq \frac{1}{2}K\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)E(t, \lambda) - c_1c_2\lambda^{\alpha-1/2}(1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}_t|\lambda^{1/2}|\hat{u}| \\ &\quad - c_1(1 + \mu\lambda^\gamma)\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}_t\bar{\hat{\theta}}| \\ &\geq C\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)E(t, \lambda). \end{aligned}$$

Aus (2.25) und (2.26) folgt

$$\frac{d}{dt}L(t, \lambda) \leq -C\frac{\lambda^{\alpha-x}}{1+\mu\lambda^\gamma}L(t, \lambda).$$

Dies impliziert, zusammen mit dem Lemma von Gronwall, siehe Anhang Satz F.2,

$$L(t, \lambda) \leq e^{-C\frac{\lambda^{\alpha-x}}{1+\mu\lambda^\gamma}t}L(0, \lambda).$$

Insgesamt folgt

$$E(t, \lambda) \leq Ce^{-C\frac{\lambda^{\alpha-x}}{1+\mu\lambda^\gamma}t}E(0, \lambda) \leq Ce^{-C\lambda^{\alpha-x-\gamma}t}E(0, \lambda).$$

Wählen wir nun

$$x < \alpha - \gamma,$$

so folgt die gewünschte Energieabschätzung. Die bestmögliche Wahl für x ist also eine Zahl echt kleiner als $\alpha - \gamma$, die sehr nah an $\alpha - \gamma$ liegt. Zusammen mit den Bedingungen (2.24) erhalten wir die Relationen

$$\begin{aligned} |\beta - \frac{1}{2}| &\leq -\frac{1}{2} + (\alpha + x + \gamma) < -\frac{1}{2} + \alpha, \\ 3\alpha - 1 &\leq \beta + x + y \leq \beta + \alpha &\Leftrightarrow &\alpha - \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2}, \\ \beta &\leq a + x \leq 2\alpha - \gamma &\Leftrightarrow &\frac{\gamma}{2} \leq \alpha - \frac{\beta}{2}, \\ 1 - \alpha &\leq \beta + x + \gamma < \beta + \alpha &\Leftrightarrow &\frac{1}{2} < \alpha + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

□

Satz 2.21. Für $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{N} \cup \mathcal{N}_{2,\gamma}$ liegt ein Regularitätsverlust vor. Insbesondere hat das System somit für $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{N} \cup \mathcal{N}_{2,\gamma}$ keine Glättungseigenschaft.

Beweis: Der Beweis entspricht dem Vorgehen in [FeLiRa19], Abschnitt 3, in dem die Region charakterisiert wird, in der die zugehörige Halbgruppe nicht exponentiell stabil ist. Der Vollständigkeit halber wollen wir den Beweis auch hier mit entsprechenden Anpassungen wiedergeben. Wir betrachten erneut die \mathcal{U} -Transformierte von (ATP)

$$\begin{aligned} (1 + \mu\lambda^\gamma)\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) &= 0, \\ \hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\beta\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{u}_t(t, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

was für $V_\lambda(t) := (\hat{u}(t, \lambda), \hat{u}_t(t, \lambda), \hat{\theta}(t, \lambda))$ äquivalent ist zum System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}V_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\lambda}{1+\mu\lambda^\gamma} & 0 & \frac{\lambda^\alpha}{1+\mu\lambda^\gamma} \\ 0 & -\lambda^\alpha & -\lambda^\beta \end{pmatrix} V_\lambda(t) = \mathcal{A}_\lambda V_\lambda(t).$$

Das charakteristische Polynom von \mathcal{A}_λ ist

$$P_\lambda(\omega) = \det(\omega - \mathcal{A}_\lambda) = \omega^3 + \lambda^\beta\omega^2 + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma}\omega + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma}.$$

Wir zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \exists \omega_\lambda, P_\lambda(\omega_\lambda) = 0 : \operatorname{Re} \omega \geq -\varepsilon.$$

Für $0 < \varepsilon \ll 1$ betrachten wir dazu $z := \omega + \varepsilon$ und $P_{\lambda,\varepsilon}(z) := P_\lambda(z - \varepsilon)$ und zeigen, dass

$$\forall 0 < \varepsilon \ll 1 \exists \lambda > 0 \exists z_\lambda, P_{\lambda,\varepsilon}(z_\lambda) = 0 : \operatorname{Re} z \geq 0$$

gilt mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, vgl. Anhang C, Satz C.3.

Betrachte

$$P_{\lambda,\varepsilon}(z_\lambda) = q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0,$$

wobei

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

$$\begin{aligned}
 q_3 &= 1, \\
 q_2 &= -3\varepsilon + \lambda^\beta, \\
 q_1 &= 3\varepsilon^2 - 2\lambda^\beta\varepsilon + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma}, \\
 q_0 &= -\varepsilon^3 + \lambda^\beta\varepsilon^2 - \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma}\varepsilon + \frac{\lambda^{\beta+1}}{1 + \mu\lambda^\gamma}.
 \end{aligned}$$

Für λ hinreichend groß gilt

$$D_{1,\lambda} = -3\varepsilon + \lambda^\beta > 0.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$D_{2,\lambda} = q_2q_1 - q_0q_3 < 0 \quad \text{oder} \quad D_{3,\lambda} = q_0D_{2,\lambda} < 0$$

gilt, für λ hinreichend groß. Dafür bestimmen wir zunächst das Vorzeichen von q_0 . Dazu schreiben wir

$$q_0 = \frac{1}{1 + \mu\lambda^\gamma} \tilde{q}_0,$$

mit

$$\tilde{q}_0 = (\lambda^\beta\varepsilon^2 + \mu\lambda^{\beta+\gamma}\varepsilon^2 + \lambda^{1+\beta}) - (\mu\lambda^\gamma\varepsilon^3 + \lambda^{2\alpha}\varepsilon + \lambda\varepsilon + \varepsilon^3).$$

Um das Vorzeichen von \tilde{q}_0 zu bestimmen, betrachten wir verschiedene Fälle.

- **Fall 1:** $\alpha = \beta = 0$.

Dann ist

$$\tilde{q}_0 = \mu\lambda^\gamma\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \lambda(1 - \varepsilon) + (\varepsilon^2 - \varepsilon - \varepsilon^3) > 0,$$

falls λ hinreichend groß.

- **Fall 2:** $\alpha = 0, \beta > 0$.

Es ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_0 &= (\lambda^\beta\varepsilon^2 + \lambda^{\beta+\gamma}\mu\varepsilon^2 + \lambda^{1+\beta}) - (\mu\lambda^\gamma\varepsilon^3 + \varepsilon + \lambda\varepsilon + \varepsilon^3) \\
 &= \lambda^\beta\varepsilon^2 + \mu\lambda^\gamma\varepsilon^2(\lambda^\beta(1 - \varepsilon)) + \lambda(\lambda^\beta - \varepsilon) - (\varepsilon + \varepsilon^3) > 0,
 \end{aligned}$$

falls λ hinreichend groß.

- **Fall 3:** $\alpha > 0, \beta = 0$.

Es ist

$$\tilde{q}_0 = \mu\lambda^\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) + \lambda(1 - \varepsilon) - \lambda^{2\alpha}\varepsilon + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3).$$

Das Vorzeichen von \tilde{q}_0 hängt in diesem Fall von α ab:

- Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ist $\tilde{q}_0 = \mu\lambda^\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) + \lambda^{2\alpha}(\lambda^{1-2\alpha}(1 - \varepsilon) - \varepsilon) + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) > 0$, falls λ hinreichend groß.
- Für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ ist $\tilde{q}_0 = \mu\lambda^\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) + \lambda((1 - \varepsilon) - \lambda^{2\alpha-1}\varepsilon) + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) < 0$, falls λ hinreichend groß.

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

- **Fall 2:** $\alpha = 0, \beta > 0$.

Da $\beta < \beta + \gamma < 2\beta + \gamma$, ist

$$d_{2,\lambda} = (\lambda^\beta(8\varepsilon^2 + 1) + 8\mu\lambda^{\beta+\gamma}\varepsilon^2) - 2\mu\lambda^{2\beta+\gamma}\varepsilon - (8\mu\lambda^\gamma\varepsilon^3 + 2\lambda^{2\beta}\varepsilon + 2\varepsilon + 2\lambda\varepsilon + 8\varepsilon^3) < 0,$$

für λ hinreichend groß.

- **Fall 3:** $\alpha > 0, \beta = 0$.

Dann ist

$$d_{2,\lambda} = \lambda^{2\alpha}(1 - 2\varepsilon) - \mu\lambda^\gamma\varepsilon(2 - 8\varepsilon + 8\varepsilon^2) - 2\lambda\varepsilon - \varepsilon(2 - 8\varepsilon + 8\varepsilon^2).$$

Wie oben hängt auch hier das Vorzeichen von $d_{2,\lambda}$ von α ab.

- Für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ist λ der dominierende Term, woraus $d_{2,\lambda} < 0$ folgt, falls λ hinreichend groß.
- Für $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ ist $d_{2,\lambda} > 0$, für λ hinreichend groß, da $\lambda^{2\alpha}$ der dominierende Term ist.

- **Fall 4:** $\alpha > 0, \beta > 0$.

In diesem Fall hängt das Vorzeichen vom Verhältnis zwischen 2α und γ ab.

- Ist $2\alpha < \gamma$, so ist $\beta < 2\alpha + \beta < \gamma + \beta < \gamma + 2\beta$, woraus $d_{2,\lambda} < 0$ folgt, für λ hinreichend groß.
- Ist $2\alpha \geq \gamma$ müssen wir zusätzlich die folgenden Fälle unterscheiden.
 - * Ist $2\alpha + \beta \geq \max\{2\beta + \gamma, 1\}$, also

$$2\alpha - \beta \geq \gamma \text{ und } 2\alpha + \beta \geq 1,$$

so ist $\lambda^{2\alpha+\beta}$ der dominierende Term und wir erhalten $d_{2,\lambda} > 0$, für λ hinreichend groß.

- * Ist hingegen $2\alpha + \beta < \max\{2\beta + \gamma, 1\}$, so gilt

$$2\alpha - \beta < \gamma \text{ oder } 2\alpha + \beta < 1.$$

Der dominierende Term ist somit $-(2\lambda^{2\beta+\gamma}\varepsilon + 2\lambda\varepsilon)$ und wir erhalten $d_{2,\lambda} < 0$, für λ hinreichend groß.

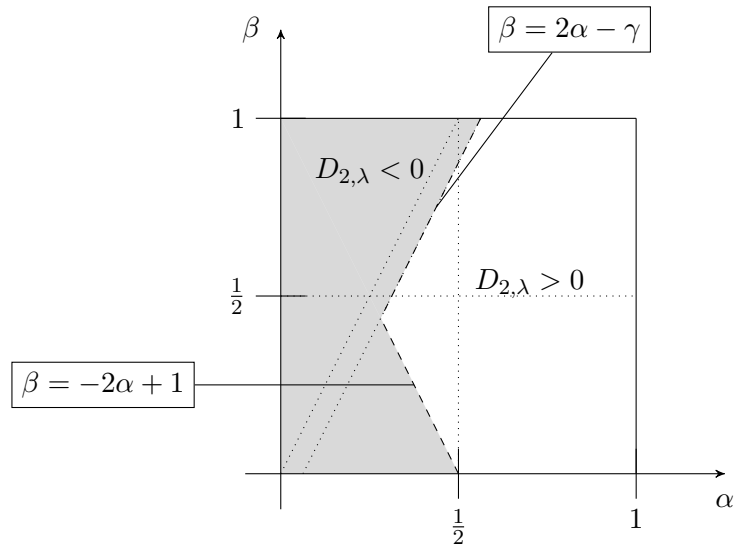


Abbildung 2.6: Vorzeichen von $D_{2,\lambda}$

Mit dem eben Gezeigten ergibt sich das Vorzeichen von $D_{3,\lambda} = q_0 D_{2,\lambda}$ wie in der nachfolgenden Abbildung.

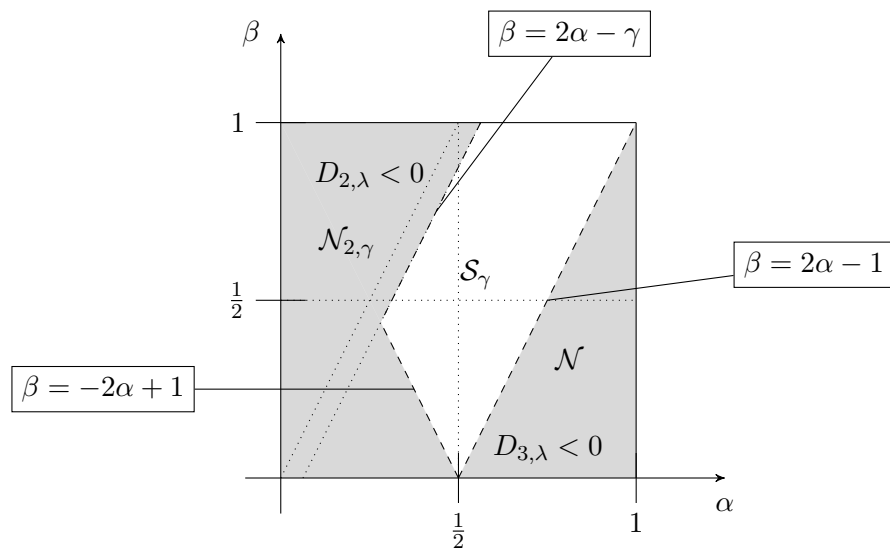


Abbildung 2.7: Region des Regularitätsverlusts

□

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Auch für das System ohne zusätzlichen Trägheitsterm ($\mu = 0$) können wir die Region, in der das System die Glättungseigenschaft hat genau bestimmen. Diese stimmt mit der Region

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \frac{1}{2} \leq \alpha + \frac{\beta}{2}, 0 \leq \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

überein.

In [MuRa96], Abschnitt 3, Theorem 3.1, wurde für das allgemeinere System ohne Inertialterm ($\gamma = 0$) mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} u_{tt} + M(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)Au + N(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)A^\alpha &= 0, \\ R(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)\theta_t + Q(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)A^\beta\theta - N(\|A^{1/2}u\|_H^2, \|\theta\|_H^2)A^\alpha u_t &= 0, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

gezeigt, dass in der Region \mathcal{S}_0 die Glättungseigenschaft gilt. Dabei sind A ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator, H ein separabler Hilbertraum und M , N , Q und R glatte, reellwertige, strikt positive Funktionen.

Genauer wurde der folgende Satz bewiesen:

Satz 2.22. Es seien $(u_0, u_1, \theta_0) \in D(A^2) \times D(A) \times D(A)$, dann hat das System (2.27) die Glättungseigenschaft, falls

$$1 - 2\alpha < \beta < 2\alpha, \quad \beta > 2\alpha - 1.$$

Das heißt die Lösung (u, θ) erfüllt

$$u, \theta \in C^2((0, T), D(A^\infty)).$$

Darüber hinaus haben wir, falls M , N , R und Q C^∞ -Funktionen sind,

$$u, \theta \in C^\infty((0, T), D(A^\infty)).$$

Es lässt sich zudem für das System ohne Trägheitsterm mit konstanten Koeffizienten analog zu Satz 2.21 das folgende Korollar beweisen.

Korollar 2.23. Für das System ohne Inertialterm

$$\begin{aligned} u_{tt} + Au - A^\alpha\theta &= 0, \\ \theta_t + A^\beta\theta + A^\alpha u_t &= 0, \end{aligned}$$

liegt in $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}_{2,0}$ ein Regularitätsverlust vor.

2.2.3 Eigenwertentwicklung

Wie aus Satz 2.21 und Korollar 2.23 folgt, hängt das Auftreten und Verschwinden des Regularitätsverlustes nur in

$$\mathcal{N}_\gamma = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid 2\alpha - \gamma \leq \beta \leq 2\alpha, \beta \geq -2\alpha + 1 \right\}$$

von γ ab.

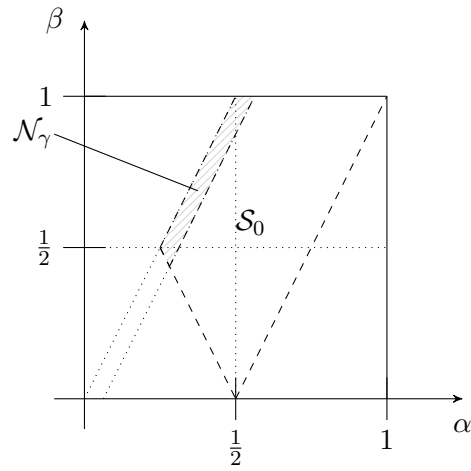


Abbildung 2.8: Region \mathcal{N}_γ für ein $\gamma > 0$.

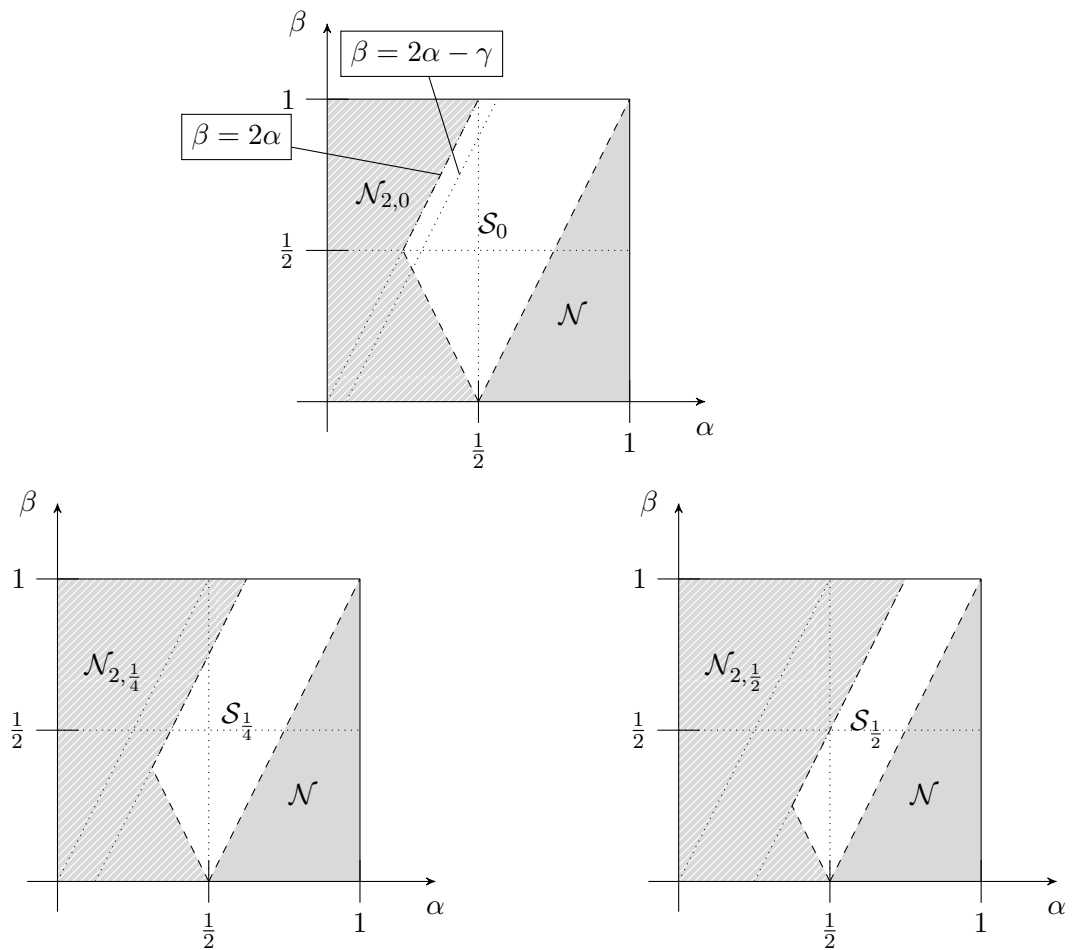


Abbildung 2.9: Region des Regularitätsverlusts für $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{1}{4}$ und $\gamma = \frac{1}{2}$

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Mit wachsendem γ wird die Region \mathcal{N}_γ größer, vgl. Abbildung 2.9. Diese Abhängigkeit von γ wird sich auch im folgenden Satz wiederfinden, in dem wir beispielhaft für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ das Verhalten der Eigenwerte in Abhängigkeit von γ für $\lambda \rightarrow \infty$ bestimmen werden. Je nach Wahl von γ wird dabei entweder $(\alpha, \beta) \in S_\gamma$ oder $(\alpha, \beta) \in \mathcal{N}_\gamma$ gelten.

Satz 2.24. Sei $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Die Nullstellen $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, des charakteristischen Polynoms (2.8) verhalten sich für $\lambda \rightarrow \infty$ wie

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -k_1 \lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_{2,3} &= -k_2 \lambda^{\frac{1-2\gamma}{2}} \pm i \lambda^{\frac{1-\gamma}{2}},\end{aligned}$$

wobei $k_1, k_2 > 0$ Konstanten sind, die nicht von λ oder γ abhängen und alle Gleichheiten bis auf Terme niedriger Ordnung in λ zu lesen sind.

Beweis: Um die behauptete Eigenwertentwicklung zu beweisen, verwenden wir erneut den Newton-Puiseux-Algorithmus.

Wir können ohne Einschränkung $\gamma \in \mathbb{Q}$ annehmen, da sich aus der gezeigten Eigenwertentwicklung wie in Satz 2.17 durch Approximation von γ durch eine Folge von rationalen Zahlen auch hier die Behauptung für $\gamma \in \mathbb{R}$ folgern lässt.

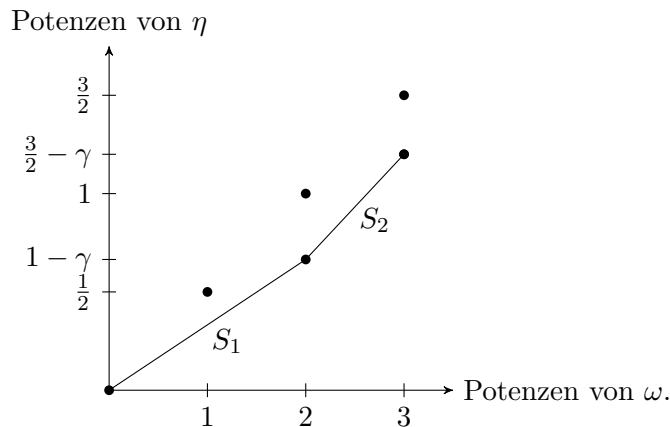
Der Einfachheit halber sei $\mu = 1$. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned}P_\lambda(\omega) &= \omega^3 + \lambda^{1/2} \omega^2 + \frac{\lambda^1 + \lambda^1}{1 + \lambda^\gamma} \omega + \frac{\lambda^{3/2}}{1 + \lambda^\gamma} \\ &= \omega^3 + \eta^{-1/2} \omega^2 + \frac{2\eta^{-1}}{1 + \eta^{-\gamma}} \omega + \frac{\eta^{-3/2}}{1 + \eta^{-\gamma}},\end{aligned}\tag{2.28}$$

wobei $\eta := \lambda^{-1}$. Des Weiteren erhalten wir

$$\begin{aligned}P_\lambda(\omega) &= 0 \\ \iff P_\eta(\omega) &:= \left(\eta^{3/2-\gamma} + \eta^{3/2}\right) \omega^3 + (\eta^{1-\gamma} + \eta) \omega^2 + 2\eta^{1/2} \omega + 1 = 0.\end{aligned}$$

Das Newton Polygon von $P_\eta(\omega)$ ist



Die Nullstellen von P_η sind von der Form $\omega = c_1 \eta^{m_1} + c_2 \eta^{m_1+m_2} + \dots$, wobei die Wahl von m_1 der negativen Steigung der Segmente des Newton Polygons entspricht.

Das erste Segment S_1 hat die Steigung $\frac{1-\gamma}{2}$ und die Länge 2, das zweite Segment S_2 hat die Steigung $\frac{1}{2}$ sowie die Länge 1.

Wir betrachten zunächst das Segment S_2 . Damit ist $m_1 = -\frac{1}{2}$.

Einsetzen von $\omega = \eta^{-1/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$, wobei $\tilde{\omega}_1 = c_2\eta^{m_2} + c_3\eta^{m_2+m_3} + \dots$, in P_η liefert

$$P_\eta(\omega) = (1 + \eta^{-\gamma})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (1 + \eta^{-\gamma})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + 2(c_1 + \tilde{\omega}_1) + 1 = 0.$$

Da alle Terme der Ordnung $-\gamma$ verschwinden müssen, folgt $c_1 = -1$.

Damit erhalten wir $\omega_1 = -\lambda^{1/2}$.

Wir untersuchen nun das erste Segment S_1 . Sei also $m_1 = -\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$ und $\omega = \eta^{m_1}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$.

Wir erhalten

$$P_\eta(\omega) = \left(\eta^{\gamma/2} + \eta^{3\gamma/2}\right)(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (1 + \eta^\gamma)(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + 2\eta^{\gamma/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1) + 1 = 0.$$

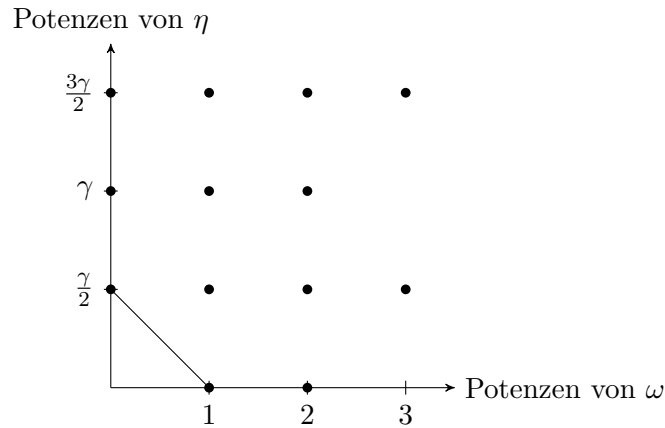
Da die Terme der Ordnung 0 verschwinden müssen, folgt $c_1^2 + 1 = 0$, was $c_1 = \pm i$ impliziert. Da $\omega_2 = \bar{\omega}_3$, genügt es, den Fall $c_1 = i$ zu betrachten.

Der vertikale Schnittpunkt des Segmentes mit der y -Achse, den wir mit y_1 bezeichnen, ist bei 0.

Damit ist

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{\omega}_1) &:= \eta^{-y_1} P_\eta(\omega) \\ &= \left(\eta^{\gamma/2} + \eta^{3\gamma/2}\right)(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (1 + \eta^\gamma)(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + 2\eta^{\gamma/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1) + 1 \\ &= \tilde{\omega}_1^3 \left(\eta^{\gamma/2} + \eta^{3\gamma/2}\right) + \tilde{\omega}_1^2 \left(3i\eta^{\gamma/2} + 3i\eta^{3\gamma/2} + \eta^\gamma + 1\right) \\ &\quad + \tilde{\omega}_1 \left(-3\eta^{3\gamma/2} + 2i\eta^\gamma - \eta^{\gamma/2} + 2i\right) + \left(-i\eta^{3\gamma/2} - \eta^\gamma + i\eta^{\gamma/2}\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Das Newton Polygon von $P_2(\omega)$ ist gegeben durch



Somit ist $m_2 = \frac{\gamma}{2} = y_2$, da wir nur Segmente mit negativer Steigung betrachten. Einsetzen von $\tilde{\omega}_1 = \eta^{m_2}(c_2 + \tilde{\omega}_2)$ in P_2 liefert uns

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{\omega}_1) &= (\eta^{2\gamma} + \eta^{3\gamma})(c_2 + \tilde{\omega}_2)^3 + \left(3i\eta^{5\gamma/2} + \eta^{2\gamma} + 3i\eta^{3\gamma/2} + \eta^\gamma\right)(c_2 + \tilde{\omega}_2)^2 \\ &\quad + \left(-3\eta^{2\gamma} + 2i\eta^{3\gamma/2} - \eta^\gamma + 2i\eta^{\gamma/2}\right)(c_2 + \tilde{\omega}_2) + \left(-i\eta^{3\gamma/2} - \eta^\gamma + i\eta^{\gamma/2}\right). \end{aligned}$$

Kapitel 2: Verallgemeinerte thermoelastische Plattengleichungen

Wieder müssen alle Terme niederster Ordnung $\frac{\gamma}{2}$ verschwinden, woraus

$$2ic_2 + i = 0 \iff c_2 = -\frac{1}{2}$$

folgt. Insgesamt erhalten wir

$$\omega_2 = \eta^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(i + \eta^{\frac{\gamma}{2}} (c_2 + \tilde{\omega}_2) \right) = i\eta^{\frac{\gamma-1}{2}} - \frac{1}{2}\eta^{\frac{2\gamma-1}{2}} + \eta^{\frac{2\gamma-1}{2}} \tilde{\omega}_2.$$

Das impliziert $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1-2\gamma}{2}} \pm i\lambda^{\frac{1-\gamma}{2}}$.

□

Bemerkung 2.25. Da $\omega_{2,3} = \lambda^{\frac{1-2\gamma}{2}}$, zeigt sich in der asymptotischen Entwicklung der Eigenwerte das Auftreten eines Regularitätsverlustes für $\gamma > \frac{1}{2}$ sowie die Glättungseigenschaft für $\gamma \leq \frac{1}{2}$.

Korollar 2.26.

Die Energie im Frequenzspektrum erfüllt die punktweise Abschätzung

$$\begin{aligned} (1 + \lambda^\gamma) |\hat{u}_t(t, \lambda)|^2 + |\hat{u}(t, \lambda)|^2 + |\hat{\theta}(t, \lambda)|^2 \\ \leq C e^{-\rho(\lambda)t} \left((1 + \lambda^\gamma) |\hat{u}_1(\lambda)|^2 + |\hat{u}_0(\lambda)|^2 + |\hat{\theta}_0(\lambda)|^2 \right) \end{aligned}$$

für alle $t > 0$, wobei

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{\frac{1}{2}}, & \lambda \leq 1, \\ \lambda^{\frac{1-2\gamma}{2}}, & \lambda > 1. \end{cases}$$

Beweis: Die punktweise Abschätzung ist eine direkte Folgerung aus den in Satz 2.14 und Satz 2.24 gezeigten Entwicklungen der Eigenwerte.

□

2.2.4 Höhere Regularität der Lösung

Wir haben in Abschnitt 2.1 gezeigt, dass das lineare System (ATP) für $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{W}$ und für $U_0 = (u_0, u_1, \theta_0)$ mit $U_0 \in D(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, eine Lösung $U(t) = (u, u_t, \theta)(t) \in D(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, besitzt. In den Fällen (2)-(4) treten dabei Regularitätsprobleme der Lösung auf, da die einzelnen Komponenten der Lösung nicht getrennt in den Definitionsbereichen der entsprechenden Potenzen des Operators A liegen, sondern nur bestimmte Summen von ihnen.

In diesem kurzen Unterabschnitt wollen wir nun zeigen, dass die Lösung des Cauchyproblems sowohl im Bereich der Glättungseigenschaft eine höhere Regularität hat, als auch im Bereich des Regularitätsverlustes unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Anfangsdaten.

Genauer zeigen wir im Fall der Glättungseigenschaft, dass für Anfangsdaten $U_0 \in D(\mathcal{A}_i)$ bereits $U(t) = (u, u_t, \theta)(t) \in D(A^s) \times D(A^s) \times D(A^s)$ für $t > 0$ und für alle $s \in \mathbb{R}^+$ folgt. Im Fall, dass ein Regularitätsverlust vorliegt, müssen wir hingegen eine höhere Regularität an die Anfangsdaten voraussetzen, um ein entsprechendes Resultat zu beweisen. Wir werden zeigen, dass für alle $s \in \mathbb{R}^+$ bereits $U(t) = (u, u_t, \theta)(t) \in D(A^s) \times D(A^s) \times D(A^s)$, falls wir an die Anfangsdaten $U_0 \in D(A^s) \times D(A^s) \times D(A^s) \cap D(\mathcal{A}_i)$ voraussetzen.

Satz 2.27. (Höhere Regularität der Lösung im Fall der Glättungseigenschaft)

Es seien $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{S}_\gamma$ und $(u_0, u_1, \theta) \in D(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dann gilt für die Lösung

$$u(t) \in D(A^s) \text{ und } \theta(t) \in D(A^s)$$

für alle $t > 0$ und für alle $s \in \mathbb{R}^+$.

Beweis: Es sei zunächst $s \geq \frac{1}{2}$. Nach (2.21) ist

$$\frac{d}{dt}E(t, \lambda) \leq 0,$$

woraus $E(t, \lambda) \leq E(0, \lambda)$ folgt.

Da (ATP) nach Satz 2.20 in \mathcal{S}_γ die Glättungseigenschaft hat, existieren ein $\delta \geq 0$, $C, c > 0$ und ein $\lambda_1 > 0$, so dass

$$E(t, \lambda) \leq C e^{-c\lambda^\delta t} E(0, \lambda)$$

für alle $\lambda \geq \lambda_1$ gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{2s} \|(\mathcal{U}u)(t)\|_{h(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) &= \int_0^{\lambda_1} \lambda^{2s} \|(\mathcal{U}u)(t)\|_{h(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) + \int_{\lambda_1}^\infty \lambda^{2s} \|(\mathcal{U}u)(t)\|_{h(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) \\ &\leq \int_0^{\lambda_1} \lambda^{2s-1} E(t, \lambda) d\mu(\lambda) + \int_{\lambda_1}^\infty \lambda^{2s-1} E(t, \lambda) d\mu(\lambda) \\ &\leq \int_0^{\lambda_1} \lambda_1^{2s-1} E(t, \lambda) d\mu(\lambda) + \int_{\lambda_1}^\infty \lambda^{2s-1} E(t, \lambda) d\mu(\lambda) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \int_0^{\lambda_1} \lambda_1^{2s-1} E(0, \lambda) d\mu(\lambda) + \int_{\lambda_1}^\infty C \underbrace{\lambda^{2s-1} e^{-c\lambda^\delta t}}_{\leq C_1} E(0, \lambda) d\mu(\lambda) \\ &\leq \int_0^{\lambda_1} \lambda_1^{2s-1} E(0, \lambda) d\mu(\lambda) + \int_{\lambda_1}^\infty C C_1 E(0, \lambda) d\mu(\lambda) \\ &\leq \underbrace{\max\{C C_1, \lambda_1^{2s-1}\}}_{:= \tilde{C}} \int_0^\infty E(0, \lambda) d\mu(\lambda) \\ &= \tilde{C} (\|A^{1/2} u_0\|_H^2 + \|(1 + \mu A^\gamma)^{1/2} u_1\|_H^2 + \|\theta_0\|_H^2), \end{aligned}$$

wobei wir für (*) zum einen verwendet haben, dass die Energie monoton fallend ist und zum anderen, dass die Glättungseigenschaft vorliegt. Daraus folgt bereits $u(t) \in D(A^s)$ nach dem Diagonalisierungssatz. Ersetzen wir u durch θ , so folgt die Behauptung auch für θ .

Ist $s < \frac{1}{2}$, so folgt die Behauptung direkt aus $D(A^{1/2}) \subset D(A^s)$.

□

Satz 2.28. (Höhere Regularität der Lösung im Fall eines Regularitätsverlustes)

Es seien $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{N} \cup \mathcal{N}_{2,\gamma}$ und $(u_0, u_1, \theta) \in (D(A^s) \times D(A^s) \times D(A^s)) \cap D(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Lösung

$$u(t) \in D(A^s) \text{ und } \theta \in D(A^s)$$

für alle $t > 0$.

Beweis: Nach Multiplikation mit λ^{2s} sowie Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{2s} \|(\mathcal{U}u)(t)\|_{h(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) &\leq \int_0^\infty \lambda^{2s-1} E(t, \lambda) d\mu(\lambda) \leq \int_0^\infty \lambda^{2s-1} E(0, \lambda) d\mu(\lambda) \\ &\leq \int_0^\infty \lambda^{2s-1} [(1 + \mu\lambda^\gamma) \|(\mathcal{U}u_1)(\lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \lambda \|(\mathcal{U}u_0)(\lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \|(\mathcal{U}\theta_0)(\lambda)\|_{h(\lambda)}^2] d\mu(\lambda) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Mit dem Diagonalisierungssatz folgt damit bereits $u(t) \in D(A^s)$. Mit analoger Rechnung folgt die Behauptung für θ . □

Bemerkung 2.29. Die Rechnungen in den Beweisen von Satz 2.27 und Satz 2.28 zeigen, dass die gezeigten Regularitätsresultate nicht vom Cauchyproblem selbst abhängt, sondern nur davon, wie sich die Eigenwerte für $\lambda \rightarrow \infty$ verhalten.

2.3 Kopplungsterme

Wir wollen nun auf Systeme eingehen, bei denen die auftretenden Potenzen in den Kopplungstermen nicht übereinstimmen, das heißt wir betrachten Systeme der Form

$$\begin{aligned} u_{tt} + \mu A^\gamma u_{tt} + Au - A^{\alpha_1} \theta &= 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^{\alpha_2} u_t &= 0, \end{aligned}$$

für $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in [0, 1]$, mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$, und $\gamma \in (0, 1]$.

Da ein solches System im Allgemeinen nicht länger dissipativ ist, wollen wir das System in ein System der Form (ATP) zurückführen.

Hierfür unterscheiden wir zwei Fälle.

- Ist $\alpha_1 < \alpha_2$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $\alpha_2 - \frac{\delta}{2} = \alpha_1 + \frac{\delta}{2}$. Formales Anwenden von $A^{\delta/2}$ auf die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} A^{\delta/2} u_{tt} + \mu A^\gamma A^{\delta/2} u_{tt} + A A^{\delta/2} u - A^{\alpha_1 + \delta/2} \theta &= 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^{\alpha_2 - \delta/2} A^{\delta/2} u_t &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $v := A^{\delta/2} u$ so schreibt sich das System als

$$\begin{aligned} v_{tt} + \mu A^\gamma v_{tt} + Av - A^\alpha \theta &= 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^\alpha v_t &= 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei $\alpha := \alpha_1 + \frac{\delta}{2} = \alpha_2 - \frac{\delta}{2}$.

- Ist hingegen $\alpha_2 < \alpha_1$ und $\delta > 0$ mit $\alpha_2 + \frac{\delta}{2} = \alpha_1 - \frac{\delta}{2}$, so erhalten wir durch Anwenden von $A^{\delta/2}$ auf die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} + \mu A^\gamma u_{tt} + Au - A^{\alpha_1 - \delta/2} A^{\delta/2} \theta &= 0, \\ A^{\delta/2} \theta_t + A^\beta A^{\delta/2} \theta + A^{\alpha_2 + \delta/2} u_t &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\eta = A^{\delta/2} \theta$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{tt} + \mu A^\gamma u_{tt} + Au - A^\alpha \eta &= 0, \\ \eta_t + A^\beta \eta + A^\alpha u_t &= 0, \end{aligned} \tag{2.31}$$

wobei $\alpha := \alpha_2 + \frac{\delta}{2} = \alpha_1 - \frac{\delta}{2}$.

In beiden Fällen können wir jetzt die Ergebnisse aus den Kapiteln 2.1 und 2.2 auf (2.30) und (2.31) anwenden, um die Wohlgestellttheit zu zeigen und Aussagen über das Abklingen zu treffen. Allerdings liegt in beiden Fällen im Allgemeinen keine Äquivalenz der Systeme vor, da aus $A^{\delta/2} u$ bzw. $A^{\delta/2} \theta$ im Fall $0 \notin \rho(A)$ weder u noch θ eindeutig zurückgewonnen werden können.

Kapitel 3

Gedämpfte Systeme

Wir betrachten die thermoelastischen Plattengleichungen mit Fourierschem Wärmeleitungsgesetz

$$\begin{aligned}(I - \mu\Delta)u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta\theta &= 0, \\ \theta_t - \Delta\theta - \Delta u_t &= 0,\end{aligned}$$

für die wir in Kapitel 5, Abschnitt 5.1 genaueres zur Modellierung angeben werden. Neben den hier bereits berücksichtigten physikalischen Gesetzmäßigkeiten ist es in der Anwendung zusätzlich interessant, verschiedene physikalische Dämpfungseffekte mathematisch mit zu modellieren. In der Modellierung von Plattengleichungen können verschiedene Dämpfungsmechanismen durch Addition eines zusätzlichen Terms berücksichtigt werden. So ergibt sich eine Plattengleichung mit Reibungsdämpfung durch Addition des Terms u_t . Eine strukturelle Dämpfung ist hingegen von der Form $(-\Delta)u_t$. Auch sogenannte viskoelastische Dämpfungen oder Dämpfungen vom Kelvin-Voigt-Typ der Form $\Delta^2 u_t$ finden in der Modellierung Anwendung. Deshalb ist es naheliegend, gedämpfte thermoelastische Platten der Form

$$\begin{aligned}(I - \mu\Delta)u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta\theta + (-\Delta)^{2\delta}u_t &= 0, \\ \theta_t - \Delta\theta - \Delta u_t &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

zu studieren. Dabei beschreibt $\delta = 0$ das System mit Reibungsdämpfung, $\delta = \frac{1}{2}$ den Fall einer strukturellen Dämpfung und entsprechend wird durch $\delta = 1$ das System mit viskoelastischer Dämpfung repräsentiert.

Übersetzen wir diese Überlegungen in unseren allgemeinen Rahmen, so erhalten wir für $\delta \in [0, 1]$ das gedämpfte α - β - γ -System

$$\text{(GTP)} \quad \begin{cases} u_{tt} + \mu A^\gamma u_{tt} + Au - A^\alpha \theta + A^\delta u_t = 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^\alpha u_t = 0 \end{cases}$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

In [Ch20] wurde das System (3.1) in \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, bereits untersucht. Darin wurden verschiedene Eigenschaften der Lösung zu den unterschiedlichen Dämpfungseffekten studiert. Neben der

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Wohlgestelltheit in $L^2(\mathbb{R}^n)$, die mit Hilfe einer Lösungsdarstellung im Fourierbild gezeigt wurde, wurden auch Glättungseffekte in sogenannten Gevrey-Räumen bewiesen, welche Räumen zwischen dem Raum der glatten Funktionen und dem der reell-analytischen Funktionen entsprechen. Zudem wurden Energieabschätzungen in Sobolev-Normen sowie L^p - L^q -Abschätzungen, auch für nicht Hölder-konjugierte Exponenten, bewiesen.

Im folgenden Abschnitt zeigen wir zunächst die Wohlgestelltheit des gedämpften Systems in der Parameterregion

$$\mathcal{W}_\delta = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times [0, 1] \mid \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ oder } (\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } \beta \geq 2\alpha - 1) \right\},$$

in dem wir das zugehörige Cauchyproblem je nach auftretender Abhängigkeit der Parameter δ und γ entweder als gestörtes Problem des ungedämpften Systems auffassen oder erneut mit bekannten Resultaten der Halbgruppentheorie die Wohlgestelltheit beweisen. Da die Region der Wohlgestelltheit somit nicht von δ abhängt und insbesondere mit der Region \mathcal{W} übereinstimmt, werden wir im folgenden auf die Abhängigkeit von δ verzichten.

In Abschnitt 3.2 untersuchen wir dann durch Analyse des Verhaltens der Eigenwerte für kleine Frequenzen, welchen Effekt der zusätzliche Dämpfungsterm auf das Verhalten der Eigenwerte im Fall $\alpha = \beta \in [0, 1]$ und $(\gamma, \delta) \in (0, 1] \times [0, 1]$ beliebig, hat, und für große Frequenzen, für welche Parameter $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times [0, 1]$ eine Glättungseigenschaft vorliegt und für welche ein Regularitätsverlust auftritt.

3.1 Wohlgestelltheit

In diesem Abschnitt wollen wir mit Hilfe der Halbgruppentheorie die Wohlgestelltheit des zu (GTP) gehörigen Cauchyproblems in der Parameterregion

$$\mathcal{W} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times [0, 1] \mid \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ oder } (\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } \beta \geq 2\alpha - 1) \right\}$$

zeigen. Im Vergleich zum ungedämpften Fall ändert sich die Region, in der wir die Wohlgestelltheit zeigen können, also nicht.

Dazu transformieren wir das System wie im Abschnitt 2.1 als Erstes auf ein System erster Ordnung:

Multiplizieren wir die erste Gleichung von (GTP) zunächst formal mit $(I + \mu A^\gamma)^{-1}$, so erhalten wir

$$\begin{cases} u_{tt} + (I + \mu A^\gamma)^{-1} A u - (I + \mu A^\gamma)^{-1} A^\alpha \theta + (I + \mu A^\gamma)^{-1} A^\delta u_t = 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^\alpha u_t = 0, \\ (u, u_t, \theta)(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases}$$

Substitution mit $v := u_t$ liefert uns dann das System erster Ordnung

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = -(I + \mu A^\gamma)^{-1} [A u - A^\alpha \theta + A^\delta v], \\ \theta_t = -A^\alpha v - A^\beta \theta, \\ (u, v, \theta)(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases}$$

Formal lässt sich das Cauchyproblem für $U = (u, u_t, \theta)$ also durch

$$\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(I + \mu A^\gamma)^{-1}A & -(I + \mu A^\gamma)^{-1}A^\delta & (I + \mu A^\gamma)^{-1}A^\alpha \\ 0 & -A^\alpha & -A^\beta \end{pmatrix} U$$

schreiben. Wie im Fall ohne zusätzlichen Dämpfungsterm, vgl. Abschnitt 2.1, ist auch hier das System nur formal zu lesen, da sich ebenfalls zeigen wird, dass u, v, θ im Allgemeinen nicht einzeln in den entsprechenden Definitionsbereichen von Potenzen von A liegen.

Es wird sich zudem zeigen, dass das zu (GTP) gehörige Cauchyproblem für $\delta - \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$ als gestörtes Problem von (ATP) aufgefasst werden kann, wobei es sich je nach Verhältnis von γ und δ entweder um eine beschränkte Störung handelt oder um eine Kato-Störung.

Für $\delta - \frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}$ wird sich hingegen zeigen, dass nicht mit klassischer Störungstheorie argumentiert werden kann, um die Wohlgestelltheit von (GTP) zu zeigen.

Wir untersuchen zunächst den Fall

$$\delta - \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Dazu definieren wir den Hilbertraum \mathcal{H} sowie die Operatoren $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2, 3, 4$, für die entsprechend gegebenen Relationen von α, β und γ wie in Kapitel 2, Abschnitt 2.1.

Weiter sei

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(I + \mu A^\gamma)^{-1}A^\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $D(\mathcal{B}) := \mathcal{H}$, für $\delta \leq \gamma$, und $D(\mathcal{B}) := \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{\delta-\gamma/2})\}$, für $\delta > \gamma$ und $\delta - \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Dann schreibt sich (GTP) als

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}_i U + \mathcal{B}U \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

für $i = 1, 2, 3, 4$, wobei $U_0 = (u_0, u_1, \theta_0)$.

Satz 3.1. Für $\delta - \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$ und $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{W}$ ist das Cauchyproblem (3.2) wohlgestellt.

Beweis: Gilt $\delta \leq \gamma$, so ist \mathcal{B} eine lineare Selbstabbildung auf \mathcal{H} . Insbesondere gilt für $i = 1, 2, 3, 4$ $D(\mathcal{A}_i) \subset D(\mathcal{B}) = \mathcal{H}$. \mathcal{B} ist zudem eine beschränkte Abbildung, denn für alle $U = (u, v, \theta) \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(I + \mu A^\gamma)^{1/2}(I + \mu A^\gamma)^{-1}A^\delta v\|_H^2 \\ &= \int_0^\infty (1 + \mu\lambda^\gamma)(1 + \mu\lambda^\gamma)^{-2}\lambda^{2\delta} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\ &= \int_0^1 (1 + \mu\lambda^\gamma)(1 + \mu\lambda^\gamma)^{-2}\lambda^{2\delta} d\langle E_\lambda v, v \rangle + \int_1^\infty (1 + \mu\lambda^\gamma)(1 + \mu\lambda^\gamma)^{-2}\lambda^{2\delta} d\langle E_\lambda v, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 (1 + \mu\lambda^\gamma) d\langle E_\lambda v, v \rangle + \int_1^\infty (1 + \mu\lambda^\gamma) \mu^{-2} \lambda^{2(\delta-\gamma)} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\
&\leq \int_0^1 (1 + \mu\lambda^\gamma) d\langle E_\lambda v, v \rangle + \mu^{-2} \int_1^\infty (1 + \mu\lambda^\gamma) d\langle E_\lambda v, v \rangle \\
&\leq \underbrace{\max\{\mu^{-2}, 1\}}_{=:C} \int_0^\infty (1 + \mu\lambda^\gamma) d\langle E_\lambda v, v \rangle \\
&= C \|(1 + \mu A^\gamma)^{1/2} v\|_H^2 \\
&\leq C \|U\|_H^2.
\end{aligned}$$

Mit Korollar 2.11 und Satz A.6 folgt die Wohlgestellttheit des Cauchyproblems.

Ist hingegen

$$\gamma < \delta \text{ und } \delta - \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2},$$

so ist $D(\mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{H}$.

Es ist

$$D(\mathcal{A}_1) = \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-\gamma/2}), \theta \in D(A^\beta)\},$$

$$D(\mathcal{A}_2) = \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-\alpha+\beta}), \theta \in D(A^\beta), \\ L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} A u - L_\gamma^{-1/2} L^{\beta-\alpha} A^\alpha \theta \in D(A^{\alpha-\beta})\},$$

$$D(\mathcal{A}_3) = \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-\gamma/2}), \theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2}), \\ L^{1/2-\alpha} A^\alpha v - L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \in D(A^{\alpha-1/2})\},$$

$$D(\mathcal{A}_4) = \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), u \in D(A^{1-2\alpha+\beta+1/2}), \theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2}), \\ L^{\beta-2\alpha+1/2} A u - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta \in D(A^{2\alpha-\beta-1/2-\gamma/2}), \\ L^{1/2-\alpha} A^\alpha v - L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \in D(A^{\alpha-1/2})\}.$$

Also ist $D(\mathcal{A}_i) \subset D(\mathcal{B})$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $\lambda_0 = (\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2\delta-\gamma}}$, dann gilt für alle $U = (u, v, \theta) \in D(\mathcal{A}_i)$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(1 + \mu A^\gamma)^{1/2} (I + \mu A^\gamma)^{-1} A^\delta v\|_H^2 \\
&= \int_0^\infty (1 + \mu\lambda^\gamma)^{-1} \lambda^{2\delta} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\
&\leq \int_0^\infty \mu^{-1} \lambda^{2\delta-\gamma} d\langle E_\lambda v, v \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\lambda_0} \mu^{-1} \lambda^{2\delta-\gamma} d\langle E_\lambda v, v \rangle + \int_{\lambda_0}^{\infty} \mu^{-1} \lambda^{2\delta-\gamma} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\
 &\leq \mu^{-1} \lambda_0^{2\delta-\gamma} \int_0^{\lambda_0} d\langle E_\lambda v, v \rangle + \mu^{-1} \lambda_0^{2\delta-\gamma} \int_{\lambda_0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{2\delta-\gamma} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \mu^{-1} \lambda_0^{2\delta-\gamma} \int_0^{\lambda_0} d\langle E_\lambda v, v \rangle + \mu^{-1} \lambda_0^{2\delta-\gamma-1} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda d\langle E_\lambda v, v \rangle \\
 &= \mu^{-1} \lambda_0^{2\delta-\gamma} \|v\|_H^2 + \mu^{-1} \lambda_0^{2\delta-\gamma-1} \|A^{1/2}v\|_H^2 \\
 &\leq \varepsilon \|\mathcal{A}_i U\|_{\mathcal{H}}^2 + \mu^{-1} \lambda_0^{2\delta-\gamma-1} \|U\|_{\mathcal{H}}^2,
 \end{aligned}$$

wobei wir in (*) $\delta - \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$ verwendet haben.

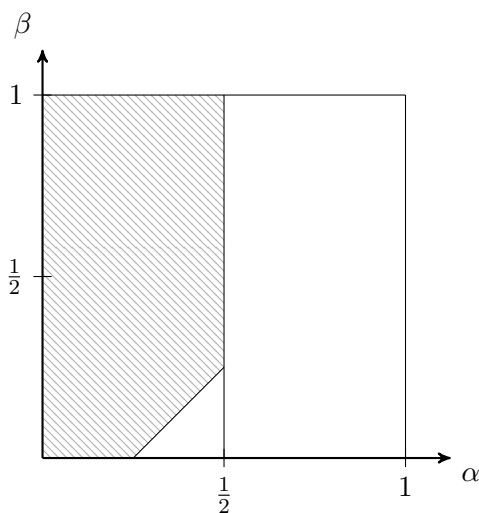
Also ist \mathcal{B} eine Kato-Störung von \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Mit Korollar 2.11 und Satz A.7 folgt die Behauptung. \square

Im Fall $\delta - \frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}$ kann die Wohlgestellttheit nicht mit klassischen Störungsargumenten gezeigt werden, da $D(\mathcal{A}_i) \not\subseteq D(\mathcal{B})$, $i = 1, 2, 3, 4$, gilt. Daher werden wir die Wohlgestellttheit wie in Kapitel 2, Abschnitt 2.1 mit Hilfe des Satzes von Lumer-Phillips beweisen.

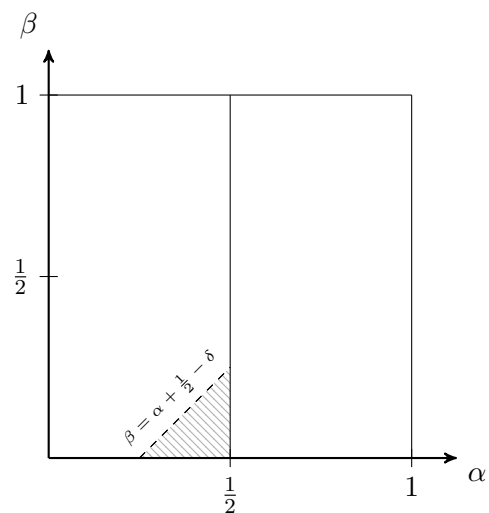
Es sei wieder $L_\gamma = (I + \mu A^\gamma)$ und $L = (A + I)$.

Für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ unterscheiden wir dazu die zwei Fälle

$$(1) \beta \geq \alpha + \left(\frac{1}{2} - \delta\right), \quad (2) \beta < \alpha + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)$$



Fall 1



Fall 2

 Abbildung 3.1: Parameterregionen für die Wohlgestellttheit im Fall $\alpha \leq \frac{1}{2}$

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Im Fall (1) definieren wir den Operator $\mathcal{B}_1 : D(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ durch

$$\mathcal{B}_1 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\delta-1/2} [L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} Au - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -A^\alpha v - A^\beta \theta \end{pmatrix},$$

mit

$$D(\mathcal{B}_1) := \left\{ (u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), \theta \in D(A^\beta), u \in D(A^{3/2-\delta}), \right. \\ \left. L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} Au - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \in D(A^{\delta-1/2}) \right\}.$$

Im zweiten Fall (2) definieren wir $\mathcal{B}_2 : D(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ durch

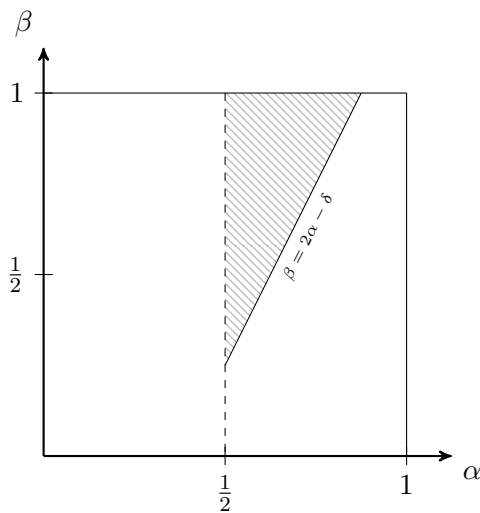
$$\mathcal{B}_2 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\alpha-\beta} [L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} Au - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -A^\alpha v - A^\beta \theta \end{pmatrix},$$

mit

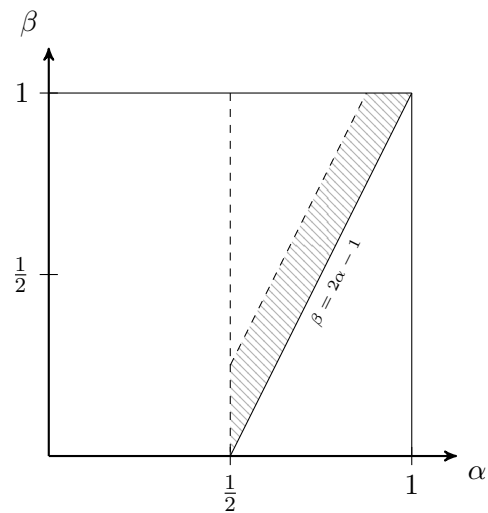
$$D(\mathcal{B}_2) := \left\{ (u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), \theta \in D(A^\beta), u \in D(A^{1-\alpha+\beta}), \right. \\ \left. L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} Au - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \in D(A^{\alpha-\beta}) \right\}.$$

Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so unterscheiden wir zudem die Fälle

$$(3) \beta \geq 2\alpha - \delta, \quad (4) 2\alpha - 1 \leq \beta < 2\alpha - \delta.$$



Fall 3



Fall 4

Abbildung 3.2: Parameterregionen für die Wohlgestelltheit für $\alpha > \frac{1}{2}$

Im Fall (3) definieren wir $\mathcal{B}_3 : D(\mathcal{B}_3) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ durch

$$\mathcal{B}_3 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\delta-1/2} [L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A u - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -L^{\alpha-1/2} [L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta] \end{pmatrix},$$

mit Definitionsbereich

$$D(\mathcal{B}_3) := \left\{ (u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), \theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2}), u \in D(A^{3/2-\delta}), \right. \\ \left. L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A u - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \in D(A^{\delta-1/2}) \right. \\ \left. L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \in D(A^{\alpha-1/2}) \right\}.$$

Im letzten Fall (4) sei der Operator $\mathcal{B}_4 : D(\mathcal{B}_4) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ definiert durch

$$\mathcal{B}_4 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{2\alpha-\beta-1/2} [L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} A u - L^{\beta+1/2-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -L^{\alpha-1/2} [L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta] \end{pmatrix},$$

mit

$$D(\mathcal{B}_4) := \left\{ (u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in D(A^{1/2}), \theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2}), u \in D(A^{3/2+\beta-\alpha}), \right. \\ \left. L^{\beta+1/2-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A u - L^{\beta+1/2-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \in D(A^{2\alpha-\beta-1/2}) \right. \\ \left. L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \in D(A^{\alpha-1/2}) \right\}.$$

Wie schon im Beweis der Wohlgestellttheit des Systems ohne den Dämpfungsterm „ $A^\delta v$ “, siehe Abschnitt 2.1, wird die Wohlgestellttheit nicht direkt für die Operatoren \mathcal{B}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, bewiesen, sondern für gestörte Operatoren $\tilde{\mathcal{B}}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, die wie folgt definiert sind:

Gilt (1), so definieren wir $\tilde{\mathcal{B}}_1 : D(\tilde{\mathcal{B}}_1) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ durch

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\delta-1/2} [L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -A^\alpha v - (A^\beta + I)\theta \end{pmatrix},$$

mit Definitionsbereich

$$D(\tilde{\mathcal{B}}_1) := D(\mathcal{B}_1).$$

Im Fall (2) sei $\tilde{\mathcal{B}}_2 : D(\tilde{\mathcal{B}}_2) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{B}}_2 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\alpha-\beta} [L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A u - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -A^\alpha v - (A^\beta + I)\theta \end{pmatrix},$$

mit

$$D(\tilde{\mathcal{B}}_2) := D(\mathcal{B}_2).$$

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Im Fall (3) definieren wir $\tilde{\mathcal{B}}_3 : D(\tilde{\mathcal{B}}_3) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ durch

$$\tilde{\mathcal{B}}_3 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{\delta-1/2} [L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -L^{\alpha-1/2} [L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I)\theta] \end{pmatrix},$$

mit

$$D(\tilde{\mathcal{B}}_3) := D(\mathcal{B}_3).$$

Im letzten Fall (4) sei der Operator $\tilde{\mathcal{B}}_4 : D(\tilde{\mathcal{B}}_4) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für $U := (u, v, \theta)$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{B}}_4 U := \begin{pmatrix} v \\ -L_\gamma^{-1/2} L^{2\alpha-\beta-1/2} [L^{\beta+1/2-\alpha} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{\beta+1/2-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta+1/2-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v] \\ -L^{\alpha-1/2} [L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I)\theta] \end{pmatrix},$$

mit

$$D(\tilde{\mathcal{B}}_4) := D(\mathcal{B}_4).$$

Satz 3.2. Für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{\mathcal{B}}_i U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H - \|A^{\delta/2} u_2\|_H$$

für alle $U = (u_1, u_2, u_3) \in D(\tilde{\mathcal{B}}_i)$. Insbesondere ist $\tilde{\mathcal{B}}_i$ dissipativ.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung nur für $\tilde{\mathcal{B}}_1$. Die restlichen Fälle folgen mit analoger Rechnung, wie im Beweis von Satz 2.5.

Sei $U = (u_1, u_2, u_3) \in D(\tilde{\mathcal{B}}_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle \tilde{\mathcal{B}}_1 U, U \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \operatorname{Re} \left(\langle u_2, u_1 \rangle_H + \langle A^{1/2} u_2, A^{1/2} u_1 \rangle_H - \langle A^\alpha u_2, u_3 \rangle_H - \langle (A^\beta + I) u_3, u_3 \rangle_H \right. \\ & \quad \left. + \langle L_\gamma^{1/2} L_\gamma^{-1/2} L^{\delta-1/2} [L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v], L_\gamma^{1/2} u_2 \rangle_H \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\langle (I + \mu A^\gamma)^{1/2} u_2, (I + \mu A^\gamma)^{-1/2} u_1 \rangle_H + \langle (I + \mu A^\gamma)^{1/2} u_2, (I + \mu A^\gamma)^{-1/2} A u_1 \rangle_H \right. \\ & \quad - \langle (I + \mu A^\gamma)^{-1/2} u_1, (I + \mu A^\gamma)^{1/2} u_2 \rangle_H - \langle (I + \mu A^\gamma)^{-1/2} A u_1, (I + \mu A^\gamma)^{1/2} u_2 \rangle_H \\ & \quad + \langle (I + \mu A^\gamma)^{-1/2} A^\alpha u_3, (I + \mu A^\gamma)^{1/2} u_2 \rangle_H - \langle (I + \mu A^\gamma)^{-1/2} A^\alpha u_3, (I + \mu A^\gamma)^{1/2} u_2 \rangle_H \\ & \quad \left. - \|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H - \|A^{\delta/2} v\|_H \right) \\ &= -\|(A^\beta + I)^{1/2} u_3\|_H - \|A^{\delta/2} v\|_H. \end{aligned}$$

□

Satz 3.3. In den Fällen (1) – (4) ist $\tilde{\mathcal{B}}_i$ dicht definiert mit $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{B}}_i)$.

Beweis: Mit der selben Argumentation wie im Beweis von Satz 2.6 folgt die Dichtheit von $D(\tilde{\mathcal{B}}_i)$ in \mathcal{H} .

Wir beweisen nun noch $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{B}}_i)$. Dafür zeigen wir, dass für jedes $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $U \in D(\tilde{\mathcal{B}}_i)$ des Problems

$$\tilde{\mathcal{B}}_i U = F \in \mathcal{H}$$

existiert, für die $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$ gilt, wobei wir mit C im gesamten Beweis eine generische Konstante bezeichnen.

Dazu betrachten wir jeden der Fälle (1) – (4) separat. Die Injektivität folgt in allen Fällen wie im Beweis von Satz 2.6.

(1) Es sei zunächst $\alpha \leq \frac{1}{2}$ mit $\beta \geq \alpha + (\frac{1}{2} - \delta)$.

Es sei $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$. Definieren wir

$$\begin{aligned} v &:= f, \\ \theta &:= -(A^\beta + I)^{-1}(h + A^\alpha f), \\ u &:= -L^{-3/2+\delta} \left(L_\gamma^{1/2} L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g - L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} A^\delta v \right), \end{aligned}$$

so ist $v \in D(A^{1/2})$, $\theta \in D(A^\beta)$, $u \in D(A^{3/2-\delta})$ und

$$\begin{aligned} &L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\ &= -L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} L L^{-1+\delta-1/2} \left(L_\gamma^{1/2} L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g - L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} A^\delta v \right) \\ &\quad - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\ &= L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g + L_\gamma^{-1/2} L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta - L^{1/2-\delta} A^\delta v - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\ &= L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g \in D(A^{\delta-1/2}), \end{aligned}$$

da $\delta > \delta - \frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}$.

Damit ist $U = (u, v, \theta) \in D(\tilde{\mathcal{B}}_1)$ und es gilt $\tilde{\mathcal{B}}_1 U = F$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|v\|_{D(A^{\gamma/2})} &\leq C\|f\|_{D(A^{1/2})}, \\ \|\theta\|_H &\leq C\|(A^\beta + I)\theta\|_H \\ &= \|(A^\beta + I)(A^\beta + I)^{-1}(h + A^\alpha f)\|_H \\ &\leq C(\|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}), \\ \|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C\|L^{1/2} L^{-1+\delta-1/2} (L_\gamma^{1/2} L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g - L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} A^\delta v)\|_H \\ &\leq C\|L_\gamma^{1/2} L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g - L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} A^\delta v\|_H \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|(A^\beta + I)\theta\|_H + \|L^{1/2} v\|_H) \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}), \end{aligned}$$

also $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$. Insgesamt folgt $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{B}}_1)$.

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

(2) Sei nun $\alpha \leq \frac{1}{2}$ mit $\beta < \alpha + (\frac{1}{2} - \delta)$. Zu $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ definieren wir

$$\begin{aligned} v &:= f, \\ \theta &:= -(A^\beta + I)^{-1}(h + A^\alpha f), \\ u &:= -L^{-1}L^{\alpha-\beta} \left(L_\gamma^{1/2} L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{1/2} g - L^{\beta-\alpha} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{1/2} A^\delta v \right), \end{aligned}$$

woraus $v \in D(A^{1/2})$, $\theta \in D(A^\beta)$, $u \in D(A^{1-\alpha+\beta})$ folgt sowie

$$\begin{aligned} &L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\ &= -L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} L L^{-1+\alpha-\beta} \left(L_\gamma^{1/2} L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{1/2} g - L^{\beta-\alpha} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{1/2} A^\delta v \right) \\ &\quad - L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\ &= L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{1/2} g \in D(A^{\alpha-\beta}), \end{aligned}$$

da $\beta < \alpha + (\frac{1}{2} - \delta) < \alpha$.

Also ist $U \in D(\tilde{\mathcal{B}}_2)$ und $\tilde{\mathcal{B}}_2 U = F$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|v\|_{D(A^{1/2})} &\leq C \|f\|_{D(A^{1/2})}, \\ \|\theta\|_H &\leq C \|(A^\beta + I)\theta\|_H \\ &= \|(A^\beta + I)(A^\beta + I)^{-1}(h + A^\alpha f)\|_H \\ &\leq C(\|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}), \\ \|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C \|L^{1/2} L^{-1} L^{\alpha-\beta} (L_\gamma^{1/2} L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{1/2} g - L^{\beta-\alpha} A^\alpha \theta + L^{\beta-\alpha} L_\gamma^{1/2} A^\delta v)\|_H \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{1/2})} + \|(A^\beta + I)\theta\|_H) + \|L^{1/2} v\|_H \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{1/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}). \end{aligned}$$

Somit folgt auch im zweiten Fall $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{B}}_2)$.

(3) Für $\alpha > \frac{1}{2}$ mit $\beta - \alpha + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \delta + \alpha$ und $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ definieren wir

$$\begin{aligned} v &:= f, \\ \theta &:= -(A^\beta + I)^{-1} L^{\alpha-1/2} \left(L^{1/2-\alpha} h + L^{1/2-\alpha} A^\alpha f \right), \\ u &:= -L^{-3/2+\delta} \left(L_\gamma^{1/2} L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g - L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} A^\delta v \right). \end{aligned}$$

Dann ist $v \in D(A^{1/2})$ und $u \in D(A^{3/2-\delta})$. Da außerdem $\beta - \alpha + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \delta + \alpha > 1 - \delta \geq 0$, ist $\theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2})$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} &L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I)\theta \\ &= -L^{1/2-\alpha} A^\alpha f + L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I)(A^\beta + I)^{-1} L^{\alpha-1/2} \left(L^{1/2-\alpha} h + L^{1/2-\alpha} A^\alpha f \right) \\ &= L^{1/2-\alpha} h \in D(A^{\alpha-1/2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\
 &= -L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} L L^{-3/2+\delta} \left(L_\gamma^{1/2} L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g - L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} A^\delta v \right) \\
 &\quad - L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\
 &= L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g \in D(A^{\delta-1/2}),
 \end{aligned}$$

was uns $U = (u, v, \theta) \in D(\tilde{\mathcal{B}}_3)$ und $\tilde{\mathcal{B}}_3 U = F$ liefert. Wir erhalten zudem die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{D(A^{1/2})} &\leq C \|f\|_{D(A^{1/2})}, \\
 \|\theta\|_H &\leq C \|(A+I)^{\beta-\alpha+1/2} \theta\|_H \\
 &= \|(A+I)^{\beta-\alpha+1/2} (A^\beta + I)^{-1} L^{\alpha-1/2} (L^{1/2-\alpha} h + L^{1/2-\alpha} A^\alpha f)\|_H \\
 &\leq C (\|L^{1/2-\alpha} h\|_H + \|L^{1/2-\alpha} A^\alpha f\|_H) \\
 &\leq C (\|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C \|L^{1/2} L^{-3/2+\delta} (L_\gamma^{1/2} L^{1/2-\delta} L_\gamma^{1/2} g - L^{1/2-\delta} A^\alpha \theta + L^{1/2-\delta} A^\delta v)\|_H \\
 &\leq C (\|g\|_{D(A^{1/2})} + \|L_\gamma^{1/2} A^\alpha \theta\|_H + \|L^{1/2} v\|_H) \\
 &\leq C (\|g\|_{D(A^{1/2})} + \|L^{\beta-\alpha+1/2} \theta\|_H + \|L^{1/2} v\|_H) \\
 &\leq C (\|g\|_{D(A^{1/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}).
 \end{aligned}$$

Es folgt $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{B}}_3)$.

- (4) Zuletzt sei $\alpha > \frac{1}{2}$ und $\beta - \alpha + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \delta + \alpha$ und $2\alpha - 1 \leq \beta$.
Für $F \in \mathcal{H}$ sei $U = (u, v, \theta)$ definiert durch

$$\begin{aligned}
 v &:= f, \\
 \theta &:= -(A^\beta + I)^{-1} L^{\alpha-1/2} (L^{1/2-\alpha} h + L^{1/2-\alpha} A^\alpha f), \\
 u &:= -L^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left(L_\gamma^{1/2} L^{\beta-2\alpha+1/2} L_\gamma^{1/2} g + L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\delta v \right).
 \end{aligned}$$

Dann ist $v \in D(A^{1/2})$. Da $\frac{3}{2} + \beta - \alpha \geq \frac{3}{2} + 2\alpha - 1 - \alpha = \alpha - \frac{1}{2} > 0$, ist $u \in D(A^{3/2+\beta-\alpha})$ und unter Ausnutzung von $\beta \geq 2\alpha - 1 \geq \alpha - \frac{1}{2}$ folgt $\theta \in D(A^{\beta-\alpha+1/2})$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
 & L^{1/2-\alpha} A^\alpha v + L^{1/2-\alpha} A^\beta \theta \\
 &= L^{1/2-\alpha} A^\alpha f - L^{1/2-\alpha} (A^\beta + I) (A^\beta + I)^{-1} L^{\alpha-1/2} (L^{1/2-\alpha} h + L^{1/2-\alpha} A^\alpha f) \\
 &= L^{1/2-\alpha} h \in D(A^{\alpha-1/2})
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 & L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} L u - L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\
 &= -L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} L L^{-1} L^{2\alpha-\beta-1/2} \left(L_\gamma^{1/2} L^{\beta-2\alpha+1/2} L_\gamma^{1/2} g + L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\alpha \theta - L^{\beta-2\alpha+1/2} A^\delta v \right) \\
 &\quad - L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\alpha \theta + L^{\beta+1/2-2\alpha} L_\gamma^{-1/2} A^\delta v \\
 &= L^{\beta-2\alpha+1/2} L_\gamma^{1/2} g \in D(A^{\beta-2\alpha+1/2}).
 \end{aligned}$$

Schließlich folgt $U \in D(\tilde{\mathcal{B}}_4)$ und U ist die eindeutige Lösung von $\tilde{\mathcal{B}}_4 U = F$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \|v\|_{D(A^{\gamma/2})} &\leq C \|f\|_{D(A^{1/2})}, \\ \|\theta\|_H &\leq C \|L^{\beta-\alpha+1/2}\theta\|_H \\ &= \|L^{\beta-\alpha+1/2}(A^\beta + I)^{-1}L^{\alpha-1/2}(L^{1/2-\alpha}h + L^{1/2-\alpha}A^\alpha f)\|_H \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}), \\ \|u\|_{D(A^{1/2})} &\leq C \|L^{1/2}L^{-1}L^{2\alpha-\beta-1/2}(L_\gamma^{1/2}L^{\beta-2\alpha+1/2}L_\gamma^{1/2}g + L^{\beta-2\alpha+1/2}A^\alpha\theta - L^{\beta-2\alpha+1/2}A^\delta v)\|_H \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|L^{\beta-\alpha+1/2}\theta\|_H) \\ &\leq C(\|g\|_{D(A^{\gamma/2})} + \|h\|_H + \|f\|_{D(A^{1/2})}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir auch im letzten Fall $0 \in \rho(\tilde{\mathcal{B}}_4)$.

□

Bemerkung 3.4. Wie schon im ungedämpften Fall zeigt sich auch hier in der letzten Abschätzung, warum wir für $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in ([0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times [0, 1]) \setminus \mathcal{W}$ mit unserem Ansatz keine Wohlgestelltheit zeigen können, vgl. Bemerkung 2.7.

Mit Satz 3.3 erhalten wir die beiden Korollare.

Korollar 3.5. $\tilde{\mathcal{B}}_i$ ist abgeschlossen für $i = 1, 2, 3, 4$.

Korollar 3.6. Es gibt ein $\lambda > 0$ so, dass $R(\lambda I - \tilde{\mathcal{B}}_i) = X$, $i = 1, 2, 3, 4$, gilt.

Somit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Lumer-Phillips A.4 erfüllt und wir erhalten

Satz 3.7. Für $i = 1, 2, 3, 4$ erzeugt der Operator $\tilde{\mathcal{B}}_i$ eine C_0 -Halbgruppe auf \mathcal{H} .

Hieraus können wir nun wie in Kapitel 2, Abschnitt 2.1, die Wohlgestelltheit des Cauchyproblems mit dem selben Störungsargument folgern.

Korollar 3.8. Für $i = 1, 2, 3, 4$ erzeugt der Operator \mathcal{B}_i eine C_0 -Halbgruppe auf \mathcal{H} .

3.2 Frequenzanalyse

Wir nehmen im folgenden Abschnitt erneut an, dass der Hilbertraum H separabel ist.

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, welchen Effekt der zusätzliche Dämpfungsterm auf die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Frequenzanalyse ausübt. Dabei werden wir zunächst untersuchen, wie sich die Dämpfung in der Entwicklung der Eigenwerte für kleine Frequenzen widerspiegelt. Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, liefert uns die Kenntnis über das Verhalten der Eigenwerte für kleine Frequenzen, bei bestimmter Wahl des Operators sowie des zugrundeliegenden Hilbertraums, Abklingraten der zugehörigen Lösung in bestimmten Normen. Dabei

ist es entscheidend, dass zusätzliche Kenntnisse über die unitäre Abbildung \mathcal{U} bekannt sind. Wir wollen außerdem prüfen, ob die Dämpfung Einfluss auf die in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Regularitätseffekte hat. Hierfür werden wir eine Frequenzanalyse der großen Frequenzen von (GTP) durchführen, um den Parameterbereich zu bestimmen, in dem das System die Glättungseigenschaft besitzt und um den Bereich, in dem dieser Effekt in einen Regularitätsverlust übergeht, zu charakterisieren. Wie wir in Kapitel 5 sehen werden, scheinen die Begriffe der exponentiellen Stabilität und der Glättungseigenschaft Hand in Hand einherzugehen. Dort werden wir drei Beispiele von partiellen Differentialgleichungen vorstellen, bei denen sich das Fehlen exponentieller Stabilität beim Übergang vom beschränkten Gebiet zum Ganzraumfall in einem Regularitätsverlust widerspiegelt, was hier vor allem die Analyse der großen Frequenzen interessant macht.

Es wird sich dabei zeigen, dass die Dämpfung für $\delta \leq \gamma$ den Bereich, in dem das System die Glättungseigenschaft hat im Vergleich zum ungedämpften Fall unverändert lässt, wohingegen der zusätzliche Dämpfungseffekt für $\delta > \gamma$ die Region der Glättungseigenschaft auf die Region der Wohlgestelltheit erweitert.

Hierfür betrachten wir die \mathcal{U} -Transformierte des Systems (GTP)

$$\begin{aligned} (1 + \mu\lambda^\gamma)\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\delta\hat{u}_t(t, \lambda) &= 0, \\ \hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\beta\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{u}_t(t, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\hat{u} := \mathcal{U}u$ und $\hat{\theta} := \mathcal{U}\theta$. Für $V_\lambda(t) := (\hat{u}(t, \lambda), \hat{u}_t(t, \lambda), \hat{\theta}(t, \lambda))$ ist dies äquivalent zum System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}V_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\lambda}{1+\mu\lambda^\gamma} & \frac{-\lambda^\delta}{1+\mu\lambda^\gamma} & \frac{\lambda^\alpha}{1+\mu\lambda^\gamma} \\ 0 & -\lambda^\alpha & -\lambda^\beta \end{pmatrix} V_\lambda(t) =: \mathcal{A}_{\lambda,\delta}V_\lambda(t).$$

Das charakteristische Polynom von $\mathcal{A}_{\lambda,\delta}$ ist gegeben durch

$$P_{\lambda,\delta}(\omega) := \det(\omega - \mathcal{A}_{\lambda,\delta}) = \omega^3 + \left(\lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) \omega^2 + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} \omega + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma}. \quad (3.3)$$

Die Energie erster Ordnung im Frequenzspektrum ist wieder durch

$$E(t, \lambda) := (1 + \mu\lambda^\gamma)\|\hat{u}_t(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \lambda\|\hat{u}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 + \|\hat{\theta}(t, \lambda)\|_{h(\lambda)}^2 \quad (3.4)$$

definiert.

Wir wollen nun das Verhalten der Eigenwerte von (3.3) für kleine Frequenzen λ analysieren. Entsprechend den Sätzen 2.14 und 2.17 erhalten wir für $\alpha = \beta \in [0, 1]$ den nachstehenden Satz, wobei die Gleichheiten bis auf Terme höherer Ordnung in λ zu lesen sind.

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Satz 3.9. Für die Nullstellen $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, des charakteristischen Polynoms (3.3) gilt für $\lambda \rightarrow 0$:

(1) Ist $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, so gilt

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\lambda^{1-\delta}, \\ \omega_2 &= -\lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_3 &= -\lambda^\delta,\end{aligned}$$

falls $\delta < \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -k_1\lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_{2,3} &= -k_2\lambda^{\frac{1}{2}} \pm ik_3\lambda^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

falls $\delta \geq \frac{1}{2}$.

(2) Für $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\lambda^{1-\delta}, \\ \omega_2 &= -\lambda^\alpha, \\ \omega_3 &= -\lambda^\delta,\end{aligned}$$

falls $\delta < \alpha$ und

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -k_4\lambda^{1-\alpha}, \\ \omega_{2,3} &= -k_5\lambda^\alpha \pm ik_6\lambda^\alpha,\end{aligned}$$

falls $\delta \geq \alpha$.

(3) Für $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$ und $\delta < \alpha$ gilt

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\lambda^{1-\delta}, \\ \omega_2 &= -\lambda^\alpha, \\ \omega_3 &= -\lambda^\delta,\end{aligned}$$

falls $\delta \leq \frac{1}{2}$ und $\alpha + \delta \geq 1$ oder $\alpha + \delta < 1$ und

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\lambda^\alpha, \\ \omega_{2,3} &= -\frac{1}{2}\lambda^\alpha \pm i\lambda^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

falls $\delta > \frac{1}{2}$ und $\alpha + \delta \geq 1$.

(4) Für $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$ und $\delta \geq \alpha$ gilt

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\lambda^\alpha, \\ \omega_{2,3} &= -k_7\lambda^\delta,\end{aligned}$$

falls $\delta - \frac{1}{2} \leq 2\alpha - 1$ oder $\delta - \frac{1}{2} > 2\alpha - 1$ und $\delta - 2\alpha + \frac{1}{2} < \alpha - \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\lambda^\alpha, \\ \omega_{2,3} &= -k_8\lambda^{3\alpha-1},\end{aligned}$$

falls $\delta - \frac{1}{2} > 2\alpha - 1$ und $\delta - 2\alpha + \frac{1}{2} \geq \alpha - \frac{1}{2}$.

Dabei bezeichnen wir mit k_1, \dots, k_8 positive Konstanten, die nicht von λ abhängen und explizit bestimmt werden können.

Beweis: Wie schon im Beweis von Satz 2.17 werden wir auch hier den Newton-Puiseux-Algorithmus verwenden, um die behaupteten Entwicklungen der Eigenwerte zu beweisen.

Wir nehmen ohne Einschränkung $\alpha, \delta \in \mathbb{Q}$ an, da sich aus der gezeigten Eigenwertentwicklung wie in Satz 2.17 durch Approximation von α und δ durch rationale Folgen auch hier die Behauptung für $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ folgern lässt.

Dazu bemerken wir außerdem, dass wir wie in Abschnitt 2.2.1 ohne Einschränkung $\mu = 0$ annehmen können.

Damit genügt es die asymptotische Entwicklung der Eigenwerte des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\delta}(\omega) &:= \omega^3 + (\lambda^\beta + \lambda^\delta) \omega^2 + (\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\beta}) \omega + \lambda^{1+\beta} \\ &= \omega^3 + (\lambda^\alpha + \lambda^\delta) \omega^2 + (\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\alpha}) \omega + \lambda^{1+\alpha} \end{aligned}$$

zu untersuchen.

Die Nullstellen des Polynoms $P_{\lambda,\delta}$ sind von der Form $\omega = c_1 \lambda^{m_1} + c_2 \lambda^{m_1+m_2} + \dots$, wobei die Wahl von m_1 gerade der negativen Steigung der Segmente des Newton Polygons entspricht.

- (1) Es sei zunächst $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.
Dann ist

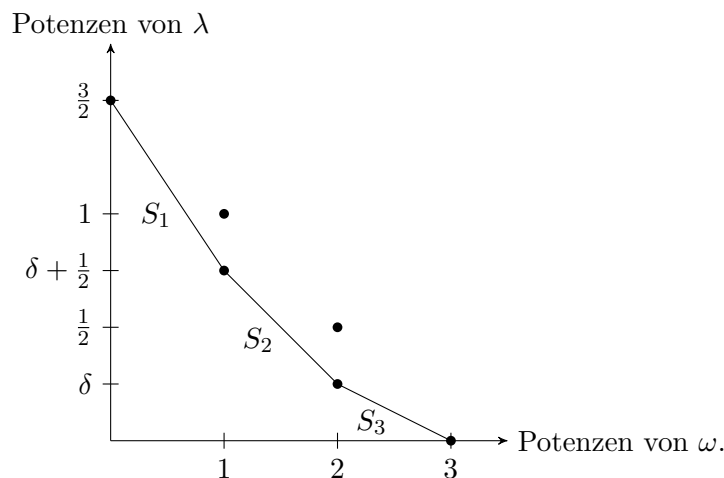
$$P_{\lambda,\delta}(\omega) = \omega^3 + (\lambda^{1/2} + \lambda^\delta) \omega^2 + (2\lambda + \lambda^{\delta+1/2}) \omega + \lambda^{3/2}. \quad (3.5)$$

Das heißt das Newton-Polygon von $P_{\lambda,\delta}$ muss die Punkte

$$(0, 3/2), (1, 1), (1, \delta + 1/2), (2, 1/2), (2, \delta), (3, 0)$$

enthalten, weshalb wir zusätzlich die Fälle $\delta < \frac{1}{2}$, $\delta > \frac{1}{2}$ und $\delta = \frac{1}{2}$ unterscheiden müssen.

- (i) Für $\delta < \frac{1}{2}$ besteht das Newton Polygon von $P_{\lambda,\delta}$ aus drei Segmenten der Länge 1 und ist gegeben durch



Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Das erste Segment S_1 hat die Steigung $-(1 - \delta)$, das zweite Segment hat die Steigung $-\frac{1}{2}$ und das dritte Segment hat die Steigung $-\delta$.

Wir untersuchen zunächst das erste Segment. Sei dazu $m_1 = 1 - \delta$.

Einsetzen von $\omega = \lambda^{1-\delta}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$, wobei $\tilde{\omega}_1 = c_2\lambda^{m_2} + c_3\lambda^{m_2+m_3} + \dots$, in $P_{\lambda,\delta}$ gibt uns

$$P_{\lambda,\delta}(\omega) = \lambda^{3-3\delta}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (\lambda^{5/2-2\delta} + \lambda^{2-\delta})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 \\ + (2\lambda + \lambda^{3/2})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{3/2}.$$

Alle Terme niedrigster Ordnung $\frac{3}{2}$ müssen verschwinden. Daher folgt $c_1 = -1$, was uns gerade $\omega_1 = -\lambda^{1-\delta}$ liefert.

Betrachten wir nun das zweite Segment, so folgt mit $m_1 = \frac{1}{2}$, durch Einsetzen von $\omega = \lambda^{1/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ in $P_{\lambda,\delta}$ wieder $c_1 = -1$ und wir erhalten $\omega_2 = -\lambda^{1/2}$.

Für das dritte Segment folgt für $m_1 = \delta$ und $\omega = \lambda^\delta(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ mit analogem Vorgehen ebenfalls $c_1 = -1$, woraus $\omega_3 = -\lambda^\delta$ folgt.

- (ii) Für $\delta > \frac{1}{2}$ besteht das Newton Polygon von $P_{\lambda,\delta}$ aus einem Segment der Länge 3 mit Steigung $-\frac{1}{2}$.

Sei also $m_1 = \frac{1}{2}$.

Einsetzen von $\omega = \lambda^{1/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$, wobei $\tilde{\omega}_1 = c_2\lambda^{m_2} + c_3\lambda^{m_2+m_3} + \dots$, in $P_{\lambda,\delta}$ gibt uns

$$P_{\lambda,\delta}(\omega) = \lambda^{3/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (\lambda^{3/2} + \lambda^{\delta+1})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 \\ + (2\lambda + \lambda^{\delta+1/2})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{3/2}.$$

Da alle Terme niederster Ordnung $\frac{3}{2}$ verschwinden müssen, folgt

$$c_1^3 + c_1^2 + 2c_1 + 1 = 0.$$

Mit der Cardanischen Lösungsformel folgt, dass die Lösungen von $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ durch

$$x_1 = -\frac{1}{3}(1 + y), \quad x_2 = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}y + i\frac{\sqrt{3}}{2}z\right), \quad x_3 = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}y - i\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

mit

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2\sqrt{69} + 11)} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2\sqrt{69} - 11)}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2\sqrt{69} + 11)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2\sqrt{69} - 11)}$$

gegeben sind. Es sei zudem bemerkt, dass $0 < y < 1$ gilt. Also gilt $\operatorname{Re} x_k < 0$ für $k = 1, 2, 3$. Insgesamt erhalten wir damit $\omega_k = x_k\lambda^{1/2}$ für $k = 1, 2, 3$.

- (iii) Für $\delta = \frac{1}{2}$ besteht das Newton Polygon von $P_{\lambda,\delta}$ ebenfalls aus einem Segment der Länge 3 mit Steigung $-\frac{1}{2}$. Durch analoge Rechnung wie im Fall $\delta > \frac{1}{2}$ folgt, dass

$$c_1^3 + 2c_1^2 + 3c_1 + 1 = 0$$

gelten muss. Auch hier lässt sich mit der Cardanischen Lösungsformel zeigen, dass für die Lösungen x_k von

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$\operatorname{Re} x_k < 0$, für $k = 1, 2, 3$, gilt, was uns $\omega_k = x_k\lambda^{1/2}$ liefert.

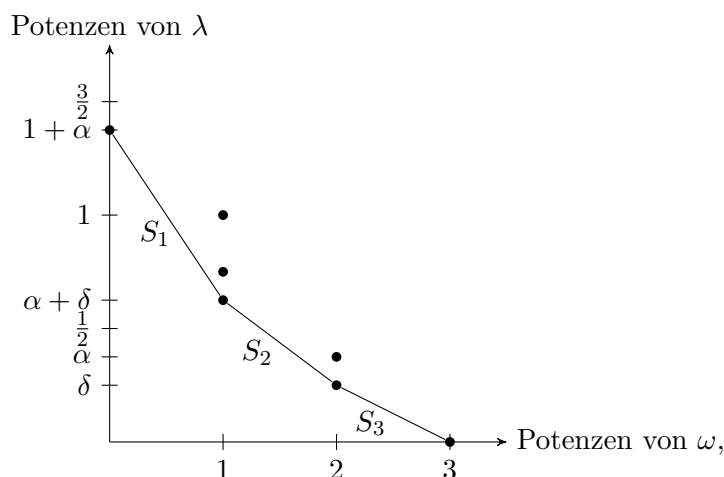
(2) Es sei nun $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$.

Das Newton Polygon muss die Punkte

$$(0, 1 + \alpha), (1, 1), (1, \delta + \alpha), (1, 2\alpha), (2, \alpha), (2, \delta), (3, 0)$$

enthalten, was auch hier eine weitere Fallunterscheidung zwischen $\delta < \alpha$, $\delta > \alpha$ und $\delta = \alpha$ erforderlich macht.

(i) Für $\delta < \alpha$ ist das Newton Polygon von $P_{\lambda, \delta}$ gerade



das heißt, das Newton Polygon hat drei Segmente der Länge 1.

Das erste Segment S_1 hat die Steigung $-(1 - \delta)$ und den y -Achsenabschnitt $y_1 = 1 + \alpha$. Setzen wir $\omega = \lambda^{1-\delta}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$, wobei $\tilde{\omega}_1 = c_2\lambda^{m_2} + c_3\lambda^{m_2+m_3} + \dots$, in $P_{\lambda, \delta}$ ein, so erhalten wir

$$P_{\lambda, \delta}(\omega) = \lambda^{3-3\delta}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + \left(\lambda^{2+\alpha-2\delta} + \lambda^{2-\delta}\right)(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + \left(\lambda^{1+2\alpha-\delta} + \lambda^{1-\delta} + \lambda^{1+\alpha}\right)(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} = 0.$$

Da $y_1 = 1 + \alpha$, müssen die Terme der Ordnung $1 + \alpha$ verschwinden, woraus $c_1 = -1$ folgt. Insgesamt erhalten wir also $\omega_1 = -\lambda^{1-\delta}$.

Wir untersuchen nun das zweite Segment S_2 , für das $m_1 = \alpha$ und $y_1 = 2\alpha + \delta$ gilt. Durch Einsetzen von $\omega = \lambda^\alpha(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ in $P_{\lambda, \delta}$ folgt

$$P_{\lambda, \delta}(\omega) = \lambda^{3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + \left(\lambda^{3\alpha} + \lambda^{2\alpha+\delta}\right)(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + \left(\lambda^{3\alpha} + \lambda^{1+\alpha} + \lambda^{2\alpha+\delta}\right)(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} = 0.$$

Alle Terme niedrigster Ordnung $y_1 = 2\alpha + \delta$ müssen verschwinden, woraus

$$c_1^2 + c_1 = 0$$

folgt. Da triviale Lösungen ausgeschlossen werden, erhalten wir $c_1 = -1$, was schließlich $\omega_2 = -\lambda^\alpha$ nach sich zieht.

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Zuletzt betrachten wir noch das dritte Segment S_3 mit $m_1 = \delta$ und $y_1 = 3\delta$. Setzen wir $\omega = \lambda^\alpha(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ in $P_{\lambda,\delta}$ ein, so folgt

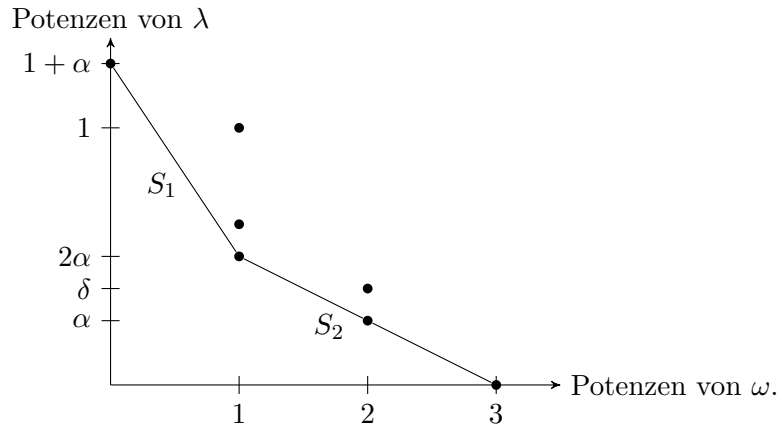
$$P_{\lambda,\delta}(\omega) = \lambda^{3\delta}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (\lambda^{3\delta} + \lambda^{2\delta+\alpha})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 \\ + (\lambda^{2\delta+\alpha} + \lambda^{1+\delta} + \lambda^{2\alpha+\delta})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} = 0.$$

Da die Terme der Ordnung $y_1 = 3\delta$ verschwinden müssen, folgt

$$c_1^3 + c_1^2 = 0.$$

Wie oben impliziert das $c_1 = -1$. Insgesamt erhalten wir $\omega_3 = -\lambda^\delta$.

(ii) Für $\delta > \alpha$ ist das Newton Polygon von $P_{\lambda,\delta}$



Das erste Segment S_1 hat die Steigung $-1 + \alpha$ und die Länge 1, das zweite Segment S_2 hat die Steigung $-\alpha$ und die Länge 2.

Wir untersuchen als erstes S_1 . Es ist $m_1 = 1 - \alpha$ und $y_1 = 1 + \alpha$. Für $\omega = \lambda^{1-\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ erhalten wir

$$P_{\lambda,\delta}(\omega) = \lambda^{3-3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (\lambda^{2-\alpha} + \lambda^{2-2\alpha+\delta})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 \\ + (\lambda^{1+\alpha} + \lambda^{2-\alpha} + \lambda^{1+\delta})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} \\ = 0.$$

Damit folgt $c_1 + 1 = 0$, woraus $c_1 = -1$ und somit $\omega_1 = -\lambda^{1-\alpha}$ folgt.

Betrachten wir nun S_2 , so erhalten wir mit $\omega = \lambda^\alpha(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ und $y_1 = 3\alpha$

$$P_{\lambda,\delta}(\omega) = \lambda^{3\alpha}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (\lambda^{3\alpha} + \lambda^{2\alpha+\delta})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 \\ + (\lambda^{3\alpha} + \lambda^{1+\alpha} + \lambda^{2\alpha+\delta})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} = 0,$$

was $c_1^3 + c_1^2 + c_1 = 0$ impliziert. Die nichttrivialen Lösungen sind von der Form $c_{1,k} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, was $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^\alpha \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^\alpha$ nach sich zieht.

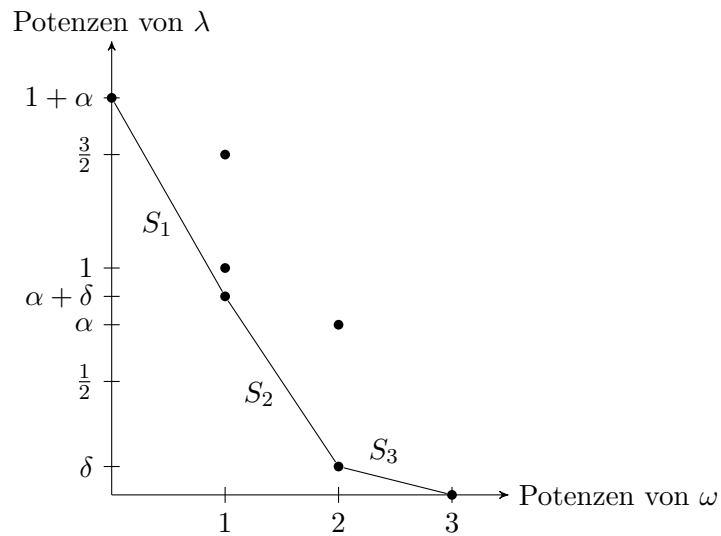
(iii) Für $\delta = \alpha$ erhält man das gleiche Newton Polygon wie im Fall $\delta > \alpha$. Eine analoge Rechnung liefert uns hier $\omega_1 = -\frac{1}{2}\lambda^{1-\alpha}$ und $\omega_{2,3} = -1 \pm i\lambda^\alpha$.

- (3) Es sei nun $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$ und $\delta < \alpha$. Wie im vorherigen Fall muss das Newton-Polygon die Punkte

$$(0, 1 + \alpha), (1, 1), (1, \delta + \alpha), (1, 2\alpha), (2, \alpha), (2, \delta), (3, 0)$$

enthalten, also müssen wir auch hier weitere Fälle unterscheiden.

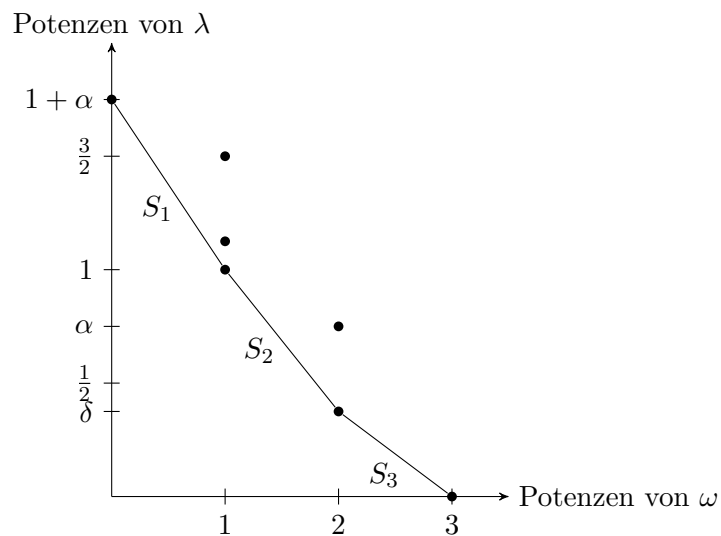
- (i) Es sei zunächst $\alpha + \delta < 1$, dann ist das Newton Polygon von $P_{\lambda, \delta}$ von der Form:



Für das erste Segment S_1 ist $m_1 = 1 - \delta$ und $y_1 = 1 + \alpha$, für S_2 ist $m_1 = \alpha$ und $y_1 = 2\alpha + \delta$ und für S_3 gilt $m_1 = \delta$ und $y_1 = 3\delta$. Genau wie in Fall (2)(i) folgt

$$\omega_1 = -\lambda^{1-\delta}, \omega_2 = -\lambda^\alpha, \omega_3 = -\lambda^\delta.$$

- (ii) Auch für $\alpha + \delta \geq 1$ und $\delta \leq \frac{1}{2}$ besteht das Newton Polygon von $P_{\lambda, \delta}$ aus drei Segmenten der Länge 1:

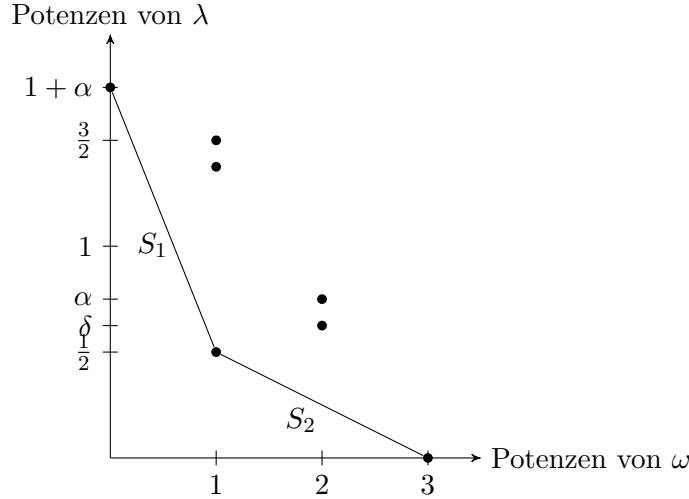


Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Das erste Segment S_1 hat die Steigung $-\alpha$ und den y -Achsenabschnitt $y_1 = 1 + \alpha$, für das Segment S_2 gilt $m_1 = 1 - \delta$ und $y_1 = 2 - \delta$ und für das letzte Segment S_3 erhalten wir $m_1 = \delta$ und $y_1 = 3\delta$. Mit analoger Rechnung erhalten wir wie im vorherigen Fall

$$\omega_1 = -\lambda^\alpha, \quad \omega_2 = -\lambda^{1-\delta}, \quad \omega_3 = -\lambda^\delta.$$

(iii) Ist hingegen $\delta > \frac{1}{2}$, was $\alpha + \delta > 1$ impliziert, so ist das Newton Polygon durch



gegeben. Es besteht also aus einem Segment der Länge 1 mit $m_1 = \alpha$ und $y_1 = 1 + \alpha$ und einem Segment der Länge 2 mit $m_1 = \frac{1}{2}$ und $y_1 = \frac{3}{2}$.

Für S_1 folgt wie im vorherigen Fall $\omega_1 = -\lambda^\alpha$.

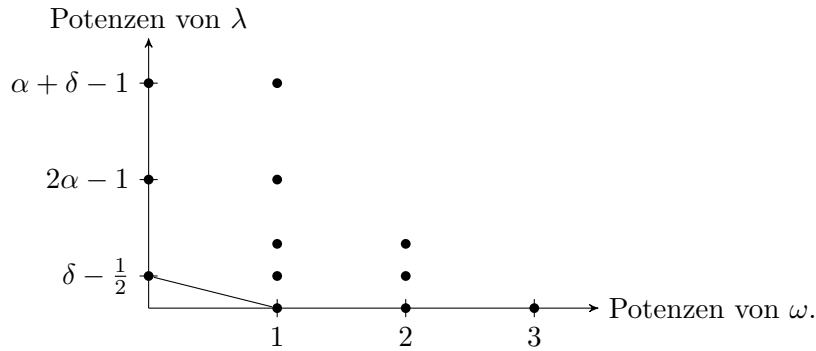
Für das zweite Segment erhalten wir mit $\omega = \lambda^{1/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\delta}(\omega) &= \lambda^{3/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (\lambda^{1+\alpha} + \lambda^{\delta+1})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 \\ &\quad + (\lambda^{2\alpha+1/2} + \lambda^{3/2} + \lambda^{\delta+1})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{1+\alpha} = 0, \end{aligned}$$

was $c_1^3 + c_1 = 0$ impliziert, woraus $c_1 = \pm i$ folgt. Da $\omega_2 = \bar{\omega}_3$ gilt, können wir ohne Einschränkung mit $c_1 = i$ fortfahren. Da der vertikale Schnittpunkt von S_2 mit der y -Achse gerade $y_1 = \frac{3}{2}$ ist, ist

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{\omega}_1) &:= \lambda^{-y_1} P_{\lambda,\delta}(\omega) \\ &= (i + \tilde{\omega}_1)^3 + (\lambda^{\alpha-1/2} + \lambda^{\delta-1/2})(i + \tilde{\omega}_1)^2 \\ &\quad + (\lambda^{2\alpha-1} + 1 + \lambda^{\alpha+\delta-1})(i + \tilde{\omega}_1) + \lambda^{\alpha-1/2} \\ &= \tilde{\omega}_1^3 + \tilde{\omega}_1^2(3i + \lambda^{\delta-1/2} + \lambda^{\alpha-1/2}) \\ &\quad + \tilde{\omega}_1(-2 + 2i\lambda^{\delta-1/2} + 2i\lambda^{\alpha-1/2} + \lambda^{\alpha+\delta-1} + \lambda^{2\alpha-1}) \\ &\quad + (-\lambda^{\delta-1/2} + i\lambda^{2\alpha-1} + i\lambda^{\alpha+\delta-1}). \end{aligned}$$

Da $\delta - \frac{1}{2} \leq \delta - \frac{1}{2} + \alpha - \frac{1}{2} = \delta + \alpha - 1$, wobei sowohl $\alpha > \frac{1}{2}$ als auch $\delta - \frac{1}{2} \leq \alpha - \frac{1}{2} \leq 2\alpha - 1$ eingehet, ist das Newton Polygon von $P_2(\omega)$ gegeben durch



Somit ist $m_2 = \delta - \frac{1}{2}$ und $y_2 = \delta - \frac{1}{2}$. Einsetzen von $\tilde{\omega}_1 = \lambda^{\delta-1/2}(c_2 + \tilde{\omega}_2)$ in P_2 gibt uns

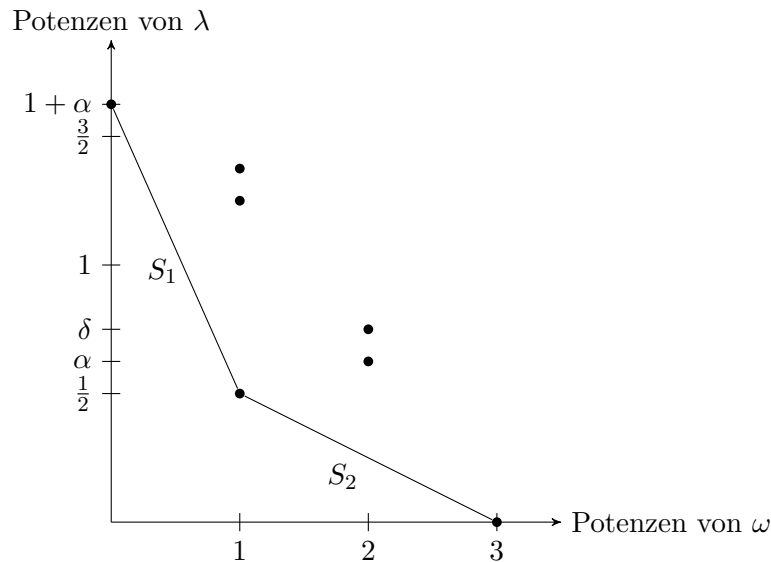
$$\begin{aligned}
 P_2(\tilde{\omega}_1) = & \lambda^{3\delta-3/2}(c_2 + \tilde{\omega}_2)^3 + (c_2 + \tilde{\omega}_2)^2(3i\lambda^{2\delta-1} + \lambda^{3\delta-3/2} + \lambda^{2\delta+\alpha-3/2}) \\
 & + (c_2 + \tilde{\omega}_2)(-2\lambda^{\delta-1/2} + 2i\lambda^{2\delta-1} + 2i\lambda^{\alpha+\delta-1} + \lambda^{2\delta+\alpha-3/2} + \lambda^{2\alpha+\delta-3/2}) \\
 & + (-\lambda^{\delta-1/2} + i\lambda^{2\alpha-1} + i\lambda^{\alpha+\delta-1}).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt $-2c_2 - 1 = 0$, was $c_2 = -\frac{1}{2}$ impliziert. Insgesamt erhalten wir damit

$$\omega_2 = \lambda^{1/2}(i + \lambda^{\delta-1/2}(\frac{1}{2} + \tilde{\omega}_2)) = -\frac{1}{2}\lambda^\delta + i\lambda^{1/2} + \lambda^\delta\tilde{\omega}_2,$$

woraus schlußendlich $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^\delta \pm i\lambda^{1/2}$ folgt.

- (4) Es sei nun $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$ mit $\delta > \alpha$. Das zu $P_{\lambda,\delta}$ gehörige Newton Polygon ist in diesem Fall



Das erste Segment S_1 hat die Länge 1, die Steigung $-\alpha$ und den vertikalen Schnittpunkt mit der y-Achse bei $y_1 = 1 + \alpha$. Wie in Fall (3)(ii) ergibt sich hier $\omega_1 = -\lambda^\alpha$.

Wir untersuchen nun das zweite Segment S_2 , welches die Länge 2 hat. Es ist $m_1 = \frac{1}{2}$ und $y_1 = \frac{3}{2}$. Wie in Fall (3)(iii) folgt $c_1 = \pm i$. Betrachten wir wieder ohne Einschränkung $c_1 = i$, so ist

$$\begin{aligned}
 P_2(\tilde{\omega}_1) &:= \lambda^{-y_1} P_{\lambda, \delta}(\omega) \\
 &= \tilde{\omega}_1^3 + \tilde{\omega}_1^2 (3i + \lambda^{\delta-1/2} + \lambda^{\alpha-1/2}) + \tilde{\omega}_1 (-2 + 2i\lambda^{\delta-1/2} + 2i\lambda^{\alpha-1/2} + \lambda^{\alpha+\delta-1} + \lambda^{2\alpha-1}) \\
 &\quad + (-\lambda^{\delta-1/2} + i\lambda^{2\alpha-1} + i\lambda^{\alpha+\delta-1}).
 \end{aligned}$$

Da $\delta > \alpha$, ist $2\alpha - 1 < \alpha + \delta - 1$. Um das Newton Polygon für P_2 zu bestimmen, müssen wir weitere Fälle unterscheiden, da in diesem Fall im Allgemeinen weder $\delta - \frac{1}{2} \leq 2\alpha - 1$ noch $\delta - \frac{1}{2} \geq 2\alpha - 1$ gilt.

(i) Ist $\delta - \frac{1}{2} \leq 2\alpha - 1$ so folgt $\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^\delta$, wie in Fall (3)(iii).

(ii) Ist hingegen $\delta - \frac{1}{2} > 2\alpha - 1$, so folgt mit $\tilde{\omega}_1 = \lambda^{2\alpha-1}(c_2 + \tilde{\omega}_2)$ und $y_2 = 2\alpha - 1$

$$\begin{aligned}
 P_2(\tilde{\omega}_1) &= (c_2 + \tilde{\omega}_2)^3 \lambda^{6\alpha-3} + (c_2 + \tilde{\omega}_2)^2 (3i\lambda^{4\alpha-2} + \lambda^{4\alpha+\delta-5/2} + \lambda^{5\alpha-5/2}) \\
 &\quad + (c_2 + \tilde{\omega}_2) (-2\lambda^{2\alpha-1} + 2i\lambda^{2\alpha+\delta-3/2} + 2i\lambda^{3\alpha-3/2} + \lambda^{3\alpha+\delta-3/2} + \lambda^{4\alpha-2}) \\
 &\quad + (-\lambda^{\delta-1/2} + i\lambda^{2\alpha-1} + i\lambda^{\alpha+\delta-1}),
 \end{aligned}$$

woraus $-2c_2 + i = 0$, also $c_2 = \frac{i}{2}$ folgt. Weiter ist

$$\begin{aligned}
 P_3(\tilde{\omega}_2) &:= \lambda^{-y_2} P_2(\tilde{\omega}_1) \\
 &= \tilde{\omega}_2^3 \lambda^{4\alpha-2} + \tilde{\omega}_2^2 \left(\frac{3}{2}i\lambda^{4\alpha-2} + 3i\lambda^{2\alpha-1} + \lambda^{2\alpha+\delta-3/2} - \frac{1}{4}\lambda^{2\alpha+\delta-3/2} + \lambda^{3\alpha-3/2} \right) \\
 &\quad + \tilde{\omega}_2 \left(-\frac{3}{4}\lambda^{4\alpha-2} - 2\lambda^{2\alpha-2} + i\lambda^{2\alpha+\delta-3/2} + i\lambda^{3\alpha-3/2} - 2 \right. \\
 &\quad \quad \left. + 2i\lambda^{\delta-1/2} + 2i\lambda^{\alpha-1/2} + \lambda^{\alpha+\delta-1} \right) \\
 &\quad + \left(-\frac{i}{8}\lambda^{4\alpha-2} - \frac{1}{4}\lambda^{3\alpha-3/2} - \frac{i}{4}\lambda^{2\alpha-1} + \frac{i}{2}\lambda^{\alpha+\delta-1} + -\lambda^{\delta-1/2} \right. \\
 &\quad \quad \left. + i\lambda^{\delta-\alpha} - \lambda^{\alpha-1/2} - \lambda^{\delta-2\alpha+1/2} \right).
 \end{aligned}$$

Da das Newton Polygon von P_3 die Punkte $(1, 0)$ und $(2, 0)$ enthalten muss, ist nur die kleinste in λ auftretende Potenz in der letzten Klammer von Bedeutung. Es ist

$$\begin{aligned}
 4\alpha - 2 &\geq 3\alpha - \frac{3}{2} \geq 2\alpha - 1 \geq \alpha - \frac{1}{2}, \\
 \alpha + \delta - 1 &\geq 2\alpha - 1, \\
 \delta - \frac{1}{2} &\geq \alpha - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\alpha - \frac{1}{2} \leq \delta - \alpha \iff 2\alpha - 1 \leq \delta - \frac{1}{2}.$$

Damit müssen wir eine letzte Fallunterscheidung machen:

- Ist $\alpha - \frac{1}{2} < \delta - 2\alpha + \frac{1}{2}$, so ist $\tilde{\omega}_2 = \lambda^{\alpha-1/2}(c_3 + \tilde{\omega}_3)$. Einsetzen in P_3 liefert $-2c_3 - 2 = 0$, also $c_3 = -\frac{1}{2}$.
Insgesamt erhalten wir hier

$$\begin{aligned}
 \omega_{2,3} &= \lambda^{1/2}(\pm i + \tilde{\omega}_1) \\
 &= \lambda^{1/2}(\pm i + \lambda^{2\alpha-1}(\pm \frac{i}{2} + \tilde{\omega}_2)) \\
 &= \lambda^{1/2}(\pm i + \lambda^{2\alpha-1}(\pm \frac{i}{2} + \lambda^{\alpha-1/2}(c_3 + \tilde{\omega}_3))) \\
 &= -\frac{1}{2}\lambda^{3\alpha-1} \pm i\lambda^{1/2} \pm \frac{i}{2}\lambda^{2\alpha-1/2} - \frac{1}{2}\lambda^{3\alpha-1}\tilde{\omega}_3.
 \end{aligned}$$

- Ist $\alpha - \frac{1}{2} > \delta - 2\alpha + \frac{1}{2}$, so erhalten wir durch Einsetzen von $\tilde{\omega}_2 = \lambda^{\delta-2\alpha+1/2}(c_3 + \tilde{\omega}_3)$ in P_3 ebenfalls $c_3 = -\frac{1}{2}$. Alles in Allem folgt damit

$$\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^\delta.$$

- Für $\alpha - \frac{1}{2} = \delta - 2\alpha + \frac{1}{2}$ folgt wie in den beiden Fällen zuvor $c_3 = -1$ und damit

$$\omega_{2,3} = -\lambda^\delta.$$

□

Bemerkung 3.10. *Vergleichen wir nun die in Satz 2.14 und Satz 2.17 bewiesenen Entwicklungen der Eigenwerte mit den eben gezeigten, so zeigt sich, dass der Dämpfungsterm für $\alpha = \beta \leq \frac{1}{2}$ nur Auswirkungen auf die Entwicklung hat, falls $\delta < \alpha$ gilt. Im Fall $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$ lässt der Dämpfungsterm die Entwicklungen hingegen lediglich im letzten Fall $\delta \geq \alpha$ und $\delta - \frac{1}{2} > 2\alpha - 1$ und $\delta - 2\alpha + \frac{1}{2} \geq \alpha - \frac{1}{2}$ unverändert.*

Die Ergebnisse zur Analyse der auftretenden Regularitätseffekte und damit der großen Frequenzen spiegeln sich im nachfolgenden Satz wider.

Satz 3.11. Sei $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{S} := \tilde{\mathcal{S}}_\gamma \cup \tilde{\mathcal{S}}_2$, wobei

$$\tilde{\mathcal{S}}_\gamma := \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times [0, 1] \mid \gamma \geq \delta, \frac{1}{2} \leq \alpha + \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \leq \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

und

$$\tilde{\mathcal{S}}_2 := \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times [0, 1] \mid \gamma < \delta, \beta \geq 2\alpha - 1 \right\}.$$

Dann hat (GTP) die Glättungseigenschaft.

Beweis: Wir leiten zunächst eine Basisenergie-Gleichung für das System

$$(1 + \mu\lambda^\gamma)\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\delta\hat{u}_t(t, \lambda) = 0, \quad (3.6)$$

$$\hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\beta\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{u}_t(t, \lambda) = 0 \quad (3.7)$$

her. Dazu sei die Energie des Systems definiert wie in (3.4), also

$$E(t, \lambda) = (1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}_t|^2 + \lambda|\hat{u}|^2 + |\hat{\theta}|^2,$$

wobei wir der Einfachheit halber auch in diesem Beweis die Abhängigkeiten der Funktionen $\hat{u}, \hat{\theta}$ von t und λ weglassen und $|\cdot|$ anstelle von $\|\cdot\|_{h(\lambda)}$ schreiben.

Multiplikation der ersten Gleichung mit \tilde{u}_t und der zweiten Gleichung mit $\tilde{\theta}$ ergibt, nach Addition der Realteile, die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t, \lambda) = -\lambda^\beta |\hat{\theta}|^2 - \lambda^\delta |\hat{u}_t|^2. \quad (3.8)$$

Sei zunächst $\gamma \geq \delta$. Ohne Einschränkung sei $\lambda > 1$. Dann ist $\lambda^\delta \leq \lambda^\gamma$.

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Um weitere dissipative Terme zu erzeugen multiplizieren wir (3.6) mit $\bar{\hat{u}}$. Betrachten des Realteils liefert

$$(1 + \mu\lambda^\gamma) \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{u}}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \lambda^\delta |\hat{u}|^2 = (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - \lambda |\hat{u}|^2 + \lambda^\alpha \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}). \quad (3.9)$$

Multiplizieren wir nun (3.6) mit $\bar{\hat{\theta}}$ und (3.7) mit $(1 + \mu\lambda^\gamma) \bar{\hat{u}}_t$ so ergibt sich nach Addition der Realteile

$$(1 + \mu\lambda^\gamma) \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}}) + \lambda \operatorname{Re}(\hat{u} \bar{\hat{\theta}}) - \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 + \lambda^\delta \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}}) \\ + (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^\beta \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}_t) + \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 = 0. \quad (3.10)$$

Zuletzt multiplizieren wir (3.8), (3.9) und (3.10) mit $K\lambda^x(1 + \mu\lambda^\gamma)$, $c_1 c_2 \lambda^\alpha$ bzw. c_1 und addieren diese drei Gleichungen. Dabei sind K, c_1, c_2, x positive Konstanten, die noch zu wählen sind. Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} L_1(t, \lambda) = D_1(t, \lambda),$$

wobei

$$L_1(t, \lambda) := \frac{1}{2} K \lambda^x (1 + \mu\lambda^\gamma) E(t) + c_1 c_2 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{u}}) \\ + \frac{c_1 c_2}{2} \lambda^\alpha \lambda^\delta |\hat{u}|^2 + c_1 (1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}})$$

und

$$D_1(t, \lambda) := -K(1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^{\beta+x} |\hat{\theta}|^2 - K(1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^{\delta+x} |\hat{u}_t|^2 + c_1 c_2 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 \\ - c_1 c_2 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 c_2 \lambda^{2\alpha} \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}) - c_1 \lambda \operatorname{Re}(\hat{u} \bar{\hat{\theta}}) + c_1 \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - c_1 \lambda^\delta \operatorname{Re}(\hat{u} \bar{\hat{\theta}}) \\ - c_1 (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^\beta \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}_t) - c_1 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2.$$

Weiter sei wie im Beweis von Satz 2.20

$$L(t, \lambda) := \frac{1}{2} K \lambda^x (1 + \mu\lambda^\gamma) E(t) + c_1 c_2 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{u}}) + c_1 (1 + \mu\lambda^\gamma) \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}})$$

und

$$D(t, \lambda) := -K(1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^{\beta+x} |\hat{\theta}|^2 + c_1 c_2 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - c_1 c_2 \lambda^\alpha \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 c_2 \lambda^{2\alpha} \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}) \\ - c_1 \lambda \operatorname{Re}(\hat{u} \bar{\hat{\theta}}) + c_1 \lambda^\alpha |\hat{\theta}|^2 - c_1 (1 + \mu\lambda^\gamma) \lambda^\beta \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}_t) - c_1 \lambda^\alpha (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2.$$

Dann ist für $x < \alpha - \gamma$

$$D_1(t, \lambda) = D(t, \lambda) - c_1 \lambda^\delta \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{\theta}}) - K \lambda^{\delta+x} (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 \\ \leq D(t, \lambda) + \frac{c_1}{2} \lambda^\delta |\hat{u}_t|^2 + \frac{c_1}{2} \lambda^\delta |\hat{\theta}|^2 \\ \leq D(t, \lambda) + \frac{c_1}{2\mu} (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 + \frac{c_1}{2\mu} (1 + \mu\lambda^\gamma) |\hat{\theta}|^2 \\ \leq CD(t, \lambda)$$

sowie

$$\begin{aligned} L_1(t, \lambda) &= L(t, \lambda) + \frac{c_1 c_2}{2} \lambda^\alpha \lambda^\delta |\hat{u}|^2 \\ &\leq L(t, \lambda) + \frac{c_1 c_2}{2\mu} \lambda^x ((1 + \mu \lambda^\gamma) \lambda |\hat{u}|^2) \\ &\leq CL(t, \lambda) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L_1(t, \lambda) &= L(t, \lambda) + c_1 c_2 \lambda^\alpha \lambda^\delta |\hat{u}|^2 \\ &\geq L(t, \lambda). \end{aligned}$$

Genau wie im Beweis von Satz 2.20 lässt sich nun zeigen, dass

$$E(t, \lambda) \leq C e^{-C \frac{\lambda^{\alpha-x}}{1+\mu\lambda^\gamma}} E(0, \lambda) \leq C e^{-C \lambda^{\alpha-x-\gamma}} E(0, \lambda)$$

folgt, falls

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \tilde{\mathcal{S}}_\gamma = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times (0, 1] \mid \gamma \geq \delta, \frac{1}{2} \leq \alpha + \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \leq \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Sei nun $\gamma < \delta$.

Multiplikation von (3.8) mit K und (3.9) mit c_1 sowie Addition dieser Gleichungen liefert uns

$$\frac{d}{dt} L_2(t, \lambda) = D_2(t, \lambda),$$

mit

$$L_2(t, \lambda) := \frac{K}{2} E(t, \lambda) + \frac{c_1}{2} \lambda^\delta |\hat{u}|^2 + c_1 (1 + \mu \lambda^\gamma) \operatorname{Re}(\hat{u}_t \bar{\hat{u}})$$

und

$$D_2(t, \lambda) := -K \lambda^\beta |\hat{\theta}|^2 - K \lambda^\delta |\hat{u}_t|^2 + c_1 (1 + \mu \lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - c_1 \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 \lambda^\alpha \operatorname{Re}(\hat{\theta} \bar{\hat{u}}),$$

wobei K und c_1 erneut positive Konstanten bezeichnen, die noch zu bestimmen sind.

Mit der Youngschen Ungleichung folgt für $\varepsilon > 0$

$$\lambda^\alpha |\hat{\theta} \bar{\hat{u}}| \leq \varepsilon \lambda |\hat{u}|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \lambda^{2\alpha-1} |\hat{\theta}|^2.$$

Dies gibt uns

$$\begin{aligned} D_2(t, \lambda) &\leq -K \lambda^\beta |\hat{\theta}|^2 - K \lambda^\delta |\hat{u}_t|^2 + c_1 (1 + \mu \lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 - c_1 \lambda |\hat{u}|^2 + c_1 \varepsilon \lambda |\hat{u}|^2 + \frac{c_1}{4\varepsilon} \lambda^{2\alpha-1} |\hat{\theta}|^2 \\ &\leq -(1 + \mu \lambda^\gamma) |\hat{u}_t|^2 (K \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu}\} - c_1) - |\hat{\theta}|^2 \left(K \lambda^\beta - \frac{c_1}{4\varepsilon} \lambda^{2\alpha-1} \right) - \lambda |\hat{u}|^2 (c_1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Um die rechte Seite negativ proportional zu $E(t, \lambda)$ wählen zu können, muss $\beta \geq 2\alpha - 1$ gelten. Für K hinreichend groß können c_1, ε so gewählt werden, dass

$$\frac{d}{dt} L_2(t, \lambda) \leq -CE(t, \lambda). \tag{3.11}$$

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Weiter schätzen wir den Energieterm wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
 L_2(t, \lambda) &\leq \frac{K}{2}E(t, \lambda) + \frac{c_1}{2}\lambda^\delta|\hat{u}|^2 + \frac{c_1}{2}(1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}|^2 + \frac{c_1}{2}(1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}_t|^2 \\
 &\leq \frac{K}{2}E(t, \lambda) + \frac{c_1}{2}\lambda^\delta|\hat{u}|^2 + c_1\mu\lambda|\hat{u}|^2 + \frac{c_1}{2}(1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}_t|^2 \\
 &\leq CE(t, \lambda)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

und

$$\begin{aligned}
 L_2(t, \lambda) &\geq \frac{K}{2}E(t, \lambda) + \frac{c_1}{2}\lambda^\delta|\hat{u}|^2 - C\lambda|\hat{u}|^2 - \frac{c_1}{2}(1 + \mu\lambda^\gamma)|\hat{u}_t|^2 \\
 &\geq CE(t, \lambda).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mit (3.11) und (3.12) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}L_2(t, \lambda) \leq -C L_2(t, \lambda),$$

woraus zusammen mit dem Lemma von Gronwall, siehe Anhang Satz F.2 ,

$$L_2(t, \lambda) \leq e^{-Ct}L_2(0, \lambda).$$

folgt. Zusammen mit den Ungleichungen (3.12) und (3.13) folgt

$$E(t, \lambda) \leq Ce^{-Ct}E(0, \lambda).$$

□

Satz 3.12. Es sei $\tilde{\mathcal{N}} := \tilde{\mathcal{N}}_{1,\gamma} \cup \tilde{\mathcal{N}}_2$, wobei

$$\tilde{\mathcal{N}}_{1,\gamma} := ([0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times (0, 1]) \setminus \tilde{\mathcal{S}}_\gamma$$

und

$$\tilde{\mathcal{N}}_2 := ([0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \times (0, 1]) \setminus \tilde{\mathcal{S}}_2$$

Für $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \tilde{\mathcal{N}}$ liegt ein Regularitätsverlust vor. Insbesondere hat das System somit keine Glättungseigenschaft für $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \tilde{\mathcal{N}}$.

Beweis: Das Vorgehen entspricht gerade dem aus Satz 2.21.

Wir betrachten erneut die \mathcal{U} -Transformierte von (GTP)

$$\begin{aligned}
 (1 + \mu\lambda^\gamma)\hat{u}_{tt}(t, \lambda) + \lambda\hat{u}(t, \lambda) - \lambda^\alpha\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\delta v(t, \lambda) &= 0, \\
 \hat{\theta}_t(t, \lambda) + \lambda^\beta\hat{\theta}(t, \lambda) + \lambda^\alpha\hat{u}_t(t, \lambda) &= 0,
 \end{aligned}$$

was für $V_\lambda(t) := (\hat{u}(t, \lambda), \hat{u}_t(t, \lambda), \hat{\theta}(t, \lambda))$ äquivalent ist zum System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}V_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\lambda}{1+\mu\lambda^\gamma} & \frac{-\lambda^\delta}{1+\mu\lambda^\gamma} & \frac{\lambda^\alpha}{1+\mu\lambda^\gamma} \\ 0 & -\lambda^\alpha & -\lambda^\beta \end{pmatrix} V_\lambda(t) =: \tilde{\mathcal{A}}_{\delta,\lambda}V_\lambda(t).$$

Das charakteristische Polynom von $\tilde{\mathcal{A}}_{\delta,\lambda}$ ist gegeben durch

$$P_{\lambda,\delta} = \det(\omega - \tilde{\mathcal{A}}_{\delta,\lambda}) = \omega^3 + \left(\lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) \omega^2 + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} \omega + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma}.$$

Wir zeigen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \exists \omega_\lambda, P_{\lambda,\delta}(\omega_\lambda) = 0 : \operatorname{Re} \omega \geq -\varepsilon.$$

Dazu betrachten wir für $0 < \varepsilon \ll 1$ und $z := \omega + \varepsilon$ das Polynom $P_{\delta,\lambda,\varepsilon}(z) := P_{\lambda,\delta}(z - \varepsilon)$ und zeigen mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, vgl. Satz C.3:

$$\forall 0 < \varepsilon \ll 1 \exists \lambda > 0 \exists z_\lambda, P_{\delta,\lambda,\varepsilon}(z_\lambda) = 0 : \operatorname{Re} z \geq 0.$$

Es ist

$$P_{\delta,\lambda,\varepsilon}(z_\lambda) = q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0,$$

wobei

$$\begin{aligned} q_3 &= 1, \\ q_2 &= -3\varepsilon + \lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma}, \\ q_1 &= 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon \left(\lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma}, \\ q_0 &= -\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \left(\lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) - \varepsilon \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma}. \end{aligned}$$

Für λ hinreichend groß gilt

$$D_{1,\lambda} = q_2 = -3\varepsilon + \lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} > 0.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$D_{2,\lambda} = q_2 q_1 - q_0 q_3 < 0 \quad \text{oder} \quad D_{3,\lambda} = q_0 D_{2,\lambda} < 0$$

gilt, für λ hinreichend groß. Dafür bestimmen wir zunächst das Vorzeichen von q_0 . Hierfür schreiben wir

$$q_0 = \frac{1}{1 + \mu\lambda^\gamma} \tilde{q}_0,$$

mit

$$\tilde{q}_0 = (\lambda^\beta \varepsilon^2 + \mu \lambda^{\beta+\gamma} \varepsilon^2 + \lambda^\delta \varepsilon^2 + \lambda^{1+\beta}) - (\mu \lambda^\gamma \varepsilon^3 + \lambda^{2\alpha} \varepsilon + \lambda \varepsilon + \lambda^{\delta+\beta} \varepsilon + \varepsilon^3).$$

Um das Vorzeichen von \tilde{q}_0 zu bestimmen, betrachten wir verschiedene Fälle:

- **Fall 1:** $\alpha = \beta = 0$.

Dann ist

$$\tilde{q}_0 = \lambda^\delta (\lambda^{1-\delta} (1 - \varepsilon) + \varepsilon (\varepsilon - 1)) + \varepsilon^2 \mu \lambda^\gamma (1 - \varepsilon) + \varepsilon (\varepsilon - \varepsilon^2 - 1) > 0,$$

falls λ hinreichend groß.

- **Fall 2:** $\alpha = 0, \beta > 0$.

Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0 &= (\lambda^\beta \varepsilon^2 + \mu \lambda^{\beta+\gamma} \varepsilon^2 + \lambda^\delta \varepsilon^2 + \lambda^{1+\beta}) - (\mu \lambda^\gamma \varepsilon^3 + \varepsilon + \lambda \varepsilon + \lambda^{\delta+\beta} \varepsilon + \varepsilon^3) \\ &= \lambda \left(\frac{\lambda^\beta}{2} - \varepsilon \right) + \lambda^{\delta+\beta} \left(\frac{\lambda^{1-\delta}}{2} - \varepsilon \right) + \varepsilon^2 \lambda^\gamma \mu (\lambda^\beta - \varepsilon) + \varepsilon (\varepsilon \lambda^\delta - 1) + \varepsilon^2 (\lambda^\beta - \varepsilon) > 0,\end{aligned}$$

falls λ hinreichend groß.

- **Fall 3:** $\alpha > 0, \beta = 0$.

Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0 &= (\varepsilon^2 + \mu \lambda^\gamma \varepsilon^2 + \lambda^\delta \varepsilon^2 + \lambda) - (\mu \lambda^\gamma \varepsilon^3 + \lambda^{2\alpha} \varepsilon + \lambda \varepsilon + \lambda^\delta \varepsilon + \varepsilon^3) \\ &= \varepsilon^2 \mu \lambda^\gamma (1 - \varepsilon) + \lambda^\delta \left(\frac{\lambda^{1-\delta}}{2} + \varepsilon^2 - \varepsilon \right) + \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) + \frac{\lambda}{2} (1 - \varepsilon) - \varepsilon \lambda^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Hier hängt das Vorzeichen von \tilde{q}_0 von α ab:

- Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ist

$$\tilde{q}_0 = \varepsilon^2 \mu \lambda^\gamma (1 - \varepsilon) + \lambda^\delta \left(\frac{\lambda^{1-\delta}}{2} + \varepsilon^2 - \varepsilon \right) + \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) + \lambda^{2\alpha} \left(\lambda^{1-2\alpha} \frac{1 - \varepsilon}{2} - \varepsilon \right) > 0,$$

falls λ hinreichend groß.

- Für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ ist $\gamma - 2\alpha < 0, \delta - 2\alpha < 0, 1 - 2\alpha < 0$, also gilt

$$\tilde{q}_0 = \lambda^{2\alpha} (-\varepsilon + \lambda^{1-2\alpha} (1 - \varepsilon) + \varepsilon^2 \mu \lambda^{\gamma-2\alpha} (1 - \varepsilon) + \varepsilon \lambda^{\delta-2\alpha} (\varepsilon - 1)) < 0,$$

falls λ hinreichend groß.

- **Fall 4:** $\alpha > 0, \beta > 0$.

Dann ist

$$\tilde{q}_0 = (\lambda^\beta \varepsilon^2 + \mu \lambda^{\beta+\gamma} \varepsilon^2 + \lambda^\delta \varepsilon^2 + \lambda^{1+\beta}) - (\mu \lambda^\gamma \varepsilon^3 + \lambda^{2\alpha} \varepsilon + \lambda \varepsilon + \lambda^{\delta+\beta} \varepsilon + \varepsilon^3).$$

Wir müssen weitere Fälle unterscheiden.

- (a) Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0 &= \lambda^{1+\beta} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \lambda^{\delta-1} \right) + \left(\lambda^\beta \varepsilon^2 + \mu \lambda^{\beta+\gamma} \varepsilon^2 + \lambda^\delta \varepsilon^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda^{1+\beta}}{2} - (\mu \lambda^\gamma \varepsilon^3 + \lambda^{2\alpha} \varepsilon + \lambda \varepsilon + \lambda^{\delta+\beta} \varepsilon + \varepsilon^3) \right).\end{aligned}$$

Da $2\alpha \leq 1 < 1 + \beta, \gamma \leq 1 < 1 + \beta$ und $\delta + \beta \leq 1 + \beta$, ist $\lambda^{1+\beta}$ der dominierende Term, woraus $\tilde{q}_0 > 0$ folgt, falls λ hinreichend groß.

- (b) Für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ ist

$$\tilde{q}_0 = (\lambda^\beta \varepsilon^2 + \mu \lambda^{\beta+\gamma} \varepsilon^2 + \lambda^\delta \varepsilon^2 + \lambda^{1+\beta}) - (\mu \lambda^\gamma \varepsilon^3 + \lambda^{2\alpha} \varepsilon + \lambda \varepsilon + \lambda^{\delta+\beta} \varepsilon + \varepsilon^3),$$

da $1 < 1 + \beta, \gamma \leq 1 < 1 + \beta$ und $\delta + \beta \leq 1 + \beta$, hängt das Vorzeichen zusätzlich vom Verhältnis zwischen $1 + \beta$ und 2α ab.

- * Für $1 + \beta \geq 2\alpha$ ist $\lambda^{1+\beta}$ der dominierende Term und wir erhalten $\tilde{q}_0 > 0$.
- * Ist hingegen $1 + \beta < 2\alpha$, so ist $-\lambda^{2\alpha}\varepsilon$ der dominierende Term woraus $\tilde{q}_0 < 0$ folgt.

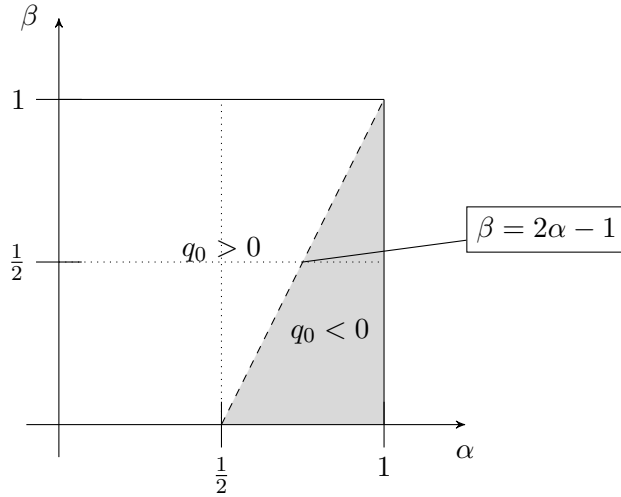


Abbildung 3.3: Vorzeichen von q_0

Als nächstes wollen wir das Vorzeichen von

$$\begin{aligned}
 D_{2,\lambda} &= q_2 q_1 - q_0 q_3 \\
 &= \left(-3\varepsilon + \lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) \left(3\varepsilon^2 - 2\varepsilon \left(\lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) \\
 &\quad + \varepsilon^3 - \varepsilon^2 \left(\lambda^\beta + \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} \right) + \varepsilon \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda + \lambda^{\delta+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} - \frac{\lambda^{\beta+1}}{1 + \mu\lambda^\gamma} \\
 &= \left(8\varepsilon^2 \lambda^\beta + 8\varepsilon^2 \frac{\lambda^\delta}{1 + \mu\lambda^\gamma} + \frac{\lambda^{2\alpha+\beta} + \lambda^{2\beta+\delta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} + \frac{\lambda^{2\alpha+\delta} + \lambda^{1+\delta} + \lambda^{2\delta+\beta}}{(1 + \mu\lambda^\gamma)^2} \right) \\
 &\quad - \left(2\varepsilon \lambda^{2\beta} + 6\varepsilon \frac{\lambda^{\delta+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma} + 8\varepsilon^3 + 2\varepsilon \frac{\lambda^{2\alpha}}{1 + \mu\lambda^\gamma} + 2\varepsilon \frac{\lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma} + 2\varepsilon \frac{\lambda^{2\delta}}{(1 + \mu\lambda^\gamma)^2} \right)
 \end{aligned}$$

bestimmen. Dazu schreiben wir

$$D_{2,\lambda} = \frac{1}{(1 + \mu\lambda^\gamma)^2} d_{2,\lambda},$$

wobei $d_{2,\lambda}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
 d_{2,\lambda} &= (8\varepsilon^2 \lambda^\beta + 16\mu\varepsilon^2 \lambda^{\beta+\gamma} + 8\varepsilon^2 \mu^2 \lambda^{\beta+2\gamma} + 8\varepsilon^2 \lambda^\delta + 8\varepsilon^2 \mu \lambda^{\delta+\gamma} + \lambda^{2\alpha+\beta} + \mu \lambda^{2\alpha+\beta+\gamma} \\
 &\quad + \lambda^{\delta+2\beta} + \mu \lambda^{\delta+2\beta+\gamma} + \lambda^{2\alpha+\delta} + \lambda^{1+\delta} + \lambda^{2\delta+\beta}) \\
 &\quad - (2\varepsilon \lambda^{2\beta} + 4\mu\varepsilon \lambda^{2\beta+\gamma} + 2\mu^2 \varepsilon \lambda^{2\beta+2\gamma} + 6\varepsilon \lambda^{\delta+\beta} + 6\varepsilon \mu \lambda^{\delta+\beta+\gamma} + 2\varepsilon \lambda^{2\delta} + 8\varepsilon^3 \\
 &\quad + 16\mu\varepsilon^3 \lambda^\gamma + 8\mu^2 \varepsilon^3 \lambda^{2\gamma} + 2\varepsilon \lambda^{2\alpha} + 2\varepsilon \mu \lambda^{2\alpha+\gamma} + 2\varepsilon \lambda + 2\varepsilon \mu \lambda^{1+\gamma}).
 \end{aligned}$$

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Um das Vorzeichen von $d_{2,\lambda}$ zu untersuchen, unterscheiden wir die selben Fälle wie zuvor.

- **Fall 1:** $\alpha = \beta = 0$.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} d_{2,\lambda} &= (8\varepsilon^2 + 16\mu\varepsilon^2\lambda^\gamma + 8\varepsilon^2\mu^2\lambda^{2\gamma} + 8\varepsilon^2\lambda^\delta + 8\varepsilon^2\mu\lambda^{\delta+\gamma} + 1 + \mu\lambda^\gamma + \lambda^\delta + \mu\lambda^{\delta+\gamma} \\ &\quad + \lambda^\delta + \lambda^{1+\delta} + \lambda^{2\delta}) \\ &\quad - (2\varepsilon + 4\mu\varepsilon\lambda^\gamma + 2\mu^2\varepsilon\lambda^{2\gamma} + 6\varepsilon\lambda^\delta + 6\varepsilon\mu\lambda^{\delta+\gamma} + 2\varepsilon\lambda^{2\delta} + 8\varepsilon^3 + 16\mu\varepsilon^3\lambda^\gamma + 8\mu^2\varepsilon^3\lambda^{2\gamma} \\ &\quad + 2\varepsilon + 2\varepsilon\mu\lambda^\gamma + 2\varepsilon\lambda + 2\varepsilon\mu\lambda^{1+\gamma}) \\ &= ((1 - 4\varepsilon) + \lambda^\gamma\mu(1 - 6\varepsilon - 16\varepsilon^2) + \lambda^\delta(2 + 8\varepsilon^2 - 6\varepsilon) + \lambda^{\delta+\gamma}\mu(1 + 8\varepsilon^2 - 6\varepsilon) \\ &\quad + \lambda^{2\delta}(1 - 2\varepsilon) + \lambda^{1+\delta}) - (\lambda^{2\gamma}\mu^2(\varepsilon(2 + 8\varepsilon^2 - 8\varepsilon)) + 2\varepsilon\lambda + 2\varepsilon\mu\lambda^{1+\gamma}). \end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \delta \leq 2\delta \leq 1 + \delta, \quad \delta \leq \delta + \gamma \leq 1 + \delta, \\ 2\gamma \leq 1 + \gamma, \quad 1 < 1 + \gamma. \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von $d_{2,\lambda}$ hängt also vom Verhältnis zwischen δ und γ ab.

- Ist $\delta \geq \gamma$, so ist $1 + \delta \geq 1 + \gamma$. Damit ist $\lambda^{1+\gamma}(1 - 3\varepsilon\lambda^{\gamma-\delta}) > 0$ der dominierende Term, woraus $d_{2,\lambda} > 0$ folgt, falls λ hinreichend groß.
- Ist dagegen $\gamma > \delta$, so ist $-2\varepsilon\mu\lambda^{1+\gamma}$ der dominierende Term und es folgt $d_{2,\lambda} < 0$, falls λ hinreichend groß.

- **Fall 2:** $\alpha = 0, \beta > 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} d_{2,\lambda} &= (8\varepsilon^2\lambda^\beta + 16\mu\varepsilon^2\lambda^{\beta+\gamma} + 8\varepsilon^2\mu^2\lambda^{\beta+2\gamma} + 8\varepsilon^2\lambda^\delta + 8\varepsilon^2\mu\lambda^{\delta+\gamma} + \lambda^\beta + \mu\lambda^{\beta+\gamma} \\ &\quad + \lambda^{\delta+2\beta} + \mu\lambda^{\delta+2\beta+\gamma} + \lambda^\delta + \lambda^{1+\delta} + \lambda^{2\delta+\beta}) \\ &\quad - (2\varepsilon\lambda^{2\beta} + 4\mu\varepsilon\lambda^{2\beta+\gamma} + 2\mu^2\varepsilon\lambda^{2\beta+2\gamma} + 6\varepsilon\lambda^{\delta+\beta} + 6\varepsilon\mu\lambda^{\delta+\beta+\gamma} + 2\varepsilon\lambda^{2\delta} + 8\varepsilon^3 \\ &\quad + 16\mu\varepsilon^3\lambda^\gamma + 8\mu^2\varepsilon^3\lambda^{2\gamma} + 2\varepsilon + 2\varepsilon\mu\lambda^\gamma + 2\varepsilon\lambda + 2\varepsilon\mu\lambda^{1+\gamma}). \end{aligned}$$

Da $\beta < \beta + \gamma < 2\beta + \gamma$, hängt das Vorzeichen von $d_{2,\lambda}$ wieder von der Relation zwischen γ und δ ab.

- Ist $\delta < \gamma$, so ist

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma < 2\beta + \gamma, \quad \delta + 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma, \\ \delta + 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma, \quad 2\delta + \beta < 2\gamma + \beta < 2\gamma + 2\beta \\ 1 + \delta < 1 + \gamma. \end{aligned}$$

Es werden also alle positiven Terme von negativen Termen dominiert, woraus $d_{2,\lambda} < 0$ folgt, für λ hinreichend groß.

- Ist $\gamma < \delta$, so ist

$$2\beta + 2\gamma < 2\beta + \delta + \gamma, \quad \delta + \beta + \gamma < \delta + 2\beta + \gamma, \quad 1 + \gamma < 1 + \delta.$$

Somit werden alle negativen Terme von positiven Termen dominiert, woraus $d_{2,\lambda} > 0$ folgt, für λ hinreichend groß.

– Ist hingegen $\gamma = \delta$, so ist

$$\begin{aligned} 1 + \gamma &= 1 + \delta, & 2\beta + 2\gamma &= 2\beta + \gamma + \delta, \\ \delta + \beta + \gamma &= \beta + 2\gamma = \beta + 2\delta, \end{aligned}$$

sowie $\lambda^{1+\gamma}(1 - 2\varepsilon\mu) > 0$, $\lambda^{2\beta+2\gamma}\mu(1 - 2\mu\varepsilon) > 0$ und $\lambda^{\delta+\beta+\gamma}(1 + 8\varepsilon^2\mu^2 - 6\varepsilon\mu) > 0$.
Insgesamt folgt also $d_{2,\lambda} > 0$, falls λ hinreichend groß.

• **Fall 3:** $\alpha > 0$, $\beta = 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} d_{2,\lambda} &= \lambda^\delta(1 + 8\varepsilon^2 - 6\varepsilon) + \lambda^{\delta+\gamma}\mu(1 + 8\varepsilon^2 - 6\varepsilon) + \lambda^{2\alpha}(1 - 2\varepsilon) + \lambda^{2\alpha+\gamma}\mu(1 - 2\varepsilon) \\ &\quad + \lambda^{2\alpha+\delta} + \lambda^{1+\delta} + \lambda^{2\delta}(1 - 2\varepsilon) \\ &\quad - (\varepsilon(2 + 8\varepsilon^2 - 8\varepsilon) + \lambda^\gamma\mu\varepsilon(4 + 16\varepsilon^2 - 16\varepsilon) + 2\varepsilon\lambda + 2\varepsilon\mu\lambda^{1+\gamma} + \lambda^{2\gamma}\mu^2\varepsilon(2 + 8\varepsilon^2 - 8\varepsilon)). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von $d_{2,\lambda}$ hängt sowohl von α , als auch vom Verhältnis von γ und δ ab.

- Für $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ und $\delta < \gamma$ ist $\lambda^{1+\gamma}$ der dominierende Term, woraus $d_{2,\lambda} < 0$ folgt, falls λ hinreichend groß.
- Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\gamma < \delta$ ist $\gamma < 1 + \gamma < 1 + \delta$, was für λ hinreichend groß $d_{2,\lambda} > 0$ nach sich zieht.
- Ist $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\delta < \gamma$, so ist $1 + \gamma = 2\alpha + \gamma$. Also ist $\lambda^{1+\gamma}(\mu(1 - 4\varepsilon)) > 0$ der dominierende Term. Damit folgt $d_{2,\lambda} > 0$, falls λ hinreichend groß.
- Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\gamma = \delta$ ist $\lambda^{1+\gamma}(1 - 2\varepsilon\mu) > 0$ und somit $d_{2,\lambda} > 0$, für λ hinreichend groß.
- Für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ und $\gamma < \delta$ ist $\gamma < 1 + \gamma < 1 + \delta$, woraus $d_{2,\lambda} > 0$ folgt, für λ hinreichend groß.
- Für $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ und $\delta \leq \gamma$ ist $\gamma < 1 + \gamma < 2\alpha + \gamma$, woraus $d_{2,\lambda} > 0$ folgt, für λ hinreichend groß.

• **Fall 4:** $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} d_{2,\lambda} &= (8\varepsilon^2\lambda^\beta + 16\mu\varepsilon^2\lambda^{\beta+\gamma} + 8\varepsilon^2\mu^2\lambda^{\beta+2\gamma} + 8\varepsilon^2\lambda^\delta + 8\varepsilon^2\mu\lambda^{\delta+\gamma} + \lambda^{2\alpha+\beta} + \mu\lambda^{2\alpha+\beta+\gamma} \\ &\quad + \lambda^{\delta+2\beta} + \mu\lambda^{\delta+2\beta+\gamma} + \lambda^{2\alpha+\delta} + \lambda^{1+\delta} + \lambda^{2\delta+\beta}) \\ &\quad - (2\varepsilon\lambda^{2\beta} + 4\mu\varepsilon\lambda^{2\beta+\gamma} + 2\mu^2\varepsilon\lambda^{2\beta+2\gamma} + 6\varepsilon\lambda^{\delta+\beta} + 6\varepsilon\mu\lambda^{\delta+\beta+\gamma} + 2\varepsilon\lambda^{2\delta} + 8\varepsilon^3 \\ &\quad + 16\mu\varepsilon^3\lambda^\gamma + 8\mu^2\varepsilon^3\lambda^{2\gamma} + 2\varepsilon\lambda^{2\alpha} + 2\varepsilon\mu\lambda^{2\alpha+\gamma} + 2\varepsilon\lambda + 2\varepsilon\mu\lambda^{1+\gamma}). \end{aligned}$$

In diesem Fall hängt das Vorzeichen wieder vom Verhältnis zwischen δ und γ sowie von α ab.

– Ist $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ und $\gamma < \delta$ so gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 2\beta &< 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma < 2\beta + 2\delta, & \delta + \beta &< \delta + \beta + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, \\ \gamma &< 2\gamma < 2\delta < 2\delta + \beta, & 2\alpha &< 2\alpha + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, \\ 1 &< 1 + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Damit werden alle negativen Terme von positiven dominiert, woraus $d_{2,\lambda} > 0$ folgt, für λ hinreichend groß.

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

– Ist $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ und $\delta < \gamma$, so hängt das Vorzeichen von $d_{2,\lambda}$ zusätzlich von der Relation zwischen α , β und γ ab.

* Ist $2\alpha > \gamma + \beta$, so gelten

$$\begin{aligned} 2\beta < 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, & \quad \delta + \beta < \delta + \beta + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, \\ 2\delta < 2\delta + \beta < 2\gamma + \beta < 2\alpha + \beta + \gamma, & \quad 2\alpha < 2\alpha + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, \\ 1 < 1 + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, & \quad \gamma < 2\gamma < 1 + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Der dominierende Term ist $\lambda^{2\alpha+\beta+\gamma}$, was $d_{2,\lambda} > 0$ nach sich zieht, falls λ hinreichend groß gewählt wird.

* Ist hingegen $2\alpha < \gamma + \beta$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta < \beta + \gamma < \beta + 2\gamma < 2\beta + 2\gamma, & \quad \delta < \delta + \gamma < \delta + \beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma, \\ 2\alpha + \beta < 2\alpha + \beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma, & \quad \delta + 2\beta < \delta + 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma, \\ 1 + \delta < 2\alpha + \delta < 2\alpha + \gamma < 2\beta + 2\gamma, & \quad 2\delta + \beta < 2\gamma + 2\beta. \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda^{2\beta+2\gamma}$ der dominierende Term, woraus $d_{2,\lambda} < 0$ folgt, für λ hinreichend groß.

* Ist $2\alpha = \gamma + \beta$, so ist $2\alpha + \beta + \gamma = 2\beta + 2\gamma$ und $\lambda^{2\alpha+\beta+\gamma}\mu(1 - 2\mu\varepsilon) > 0$ ist der dominierende Term. Daraus folgt $d_{2,\lambda} > 0$, für λ hinreichend groß.

– Für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ und $\gamma = \delta$ ist

$$\begin{aligned} d_{2,\lambda} &= (8\varepsilon^2\lambda^\beta + 16\mu\varepsilon^2\lambda^{\beta+\gamma} + 8\varepsilon^2\mu^2\lambda^{\beta+2\gamma} + 8\varepsilon^2\lambda^\gamma + 8\varepsilon^2\mu\lambda^{2\gamma} + \lambda^{2\alpha+\beta} + \mu\lambda^{2\alpha+\beta+\gamma} \\ &\quad + \lambda^{\gamma+2\beta} + \mu\lambda^{2\beta+2\gamma} + \lambda^{2\alpha+\gamma} + \lambda^{1+\gamma} + \lambda^{2\gamma+\beta}) \\ &\quad - (2\varepsilon\lambda^{2\beta} + 4\mu\varepsilon\lambda^{2\beta+\gamma} + 2\mu^2\varepsilon\lambda^{2\beta+2\gamma} + 6\varepsilon\lambda^{\gamma+\beta} + 6\varepsilon\mu\lambda^{\beta+2\gamma} + 2\varepsilon\lambda^{2\gamma} + 8\varepsilon^3 \\ &\quad + 16\mu\varepsilon^3\lambda^\gamma + 8\mu^2\varepsilon^3\lambda^{2\gamma} + 2\varepsilon\lambda^{2\alpha} + 2\varepsilon\mu\lambda^{2\alpha+\gamma} + 2\varepsilon\lambda + 2\varepsilon\mu\lambda^{1+\gamma}) \\ &= \lambda^\beta(8\varepsilon^2 - 2\varepsilon) + \lambda^{\beta+\gamma}(16\mu\varepsilon^2 - 6\varepsilon) + \lambda^{\beta+2\gamma}(8\varepsilon^2\mu^2 - 6\varepsilon\mu) + \lambda^\gamma(8\varepsilon^2 - 16\mu\varepsilon^3) \\ &\quad + \lambda^{2\gamma}(8\varepsilon^2\mu - 2\varepsilon - 8\mu^2\varepsilon^3) + \lambda^{2\alpha+\beta} + \mu\lambda^{2\alpha+\beta+\gamma} + \lambda^{\gamma+2\beta}(1 - 4\mu\varepsilon) - 8\varepsilon^3 \\ &\quad + \lambda^{2\beta+2\gamma}\mu(1 - 2\mu\varepsilon) + \lambda^{2\alpha+\gamma}(1 - 2\varepsilon\mu) + \lambda^{1+\gamma}(1 - 2\varepsilon\mu) \\ &\quad + \lambda^{2\gamma+\beta} - 2\varepsilon\lambda^{2\alpha} - 2\varepsilon\lambda. \end{aligned}$$

Da außerdem $\beta < \beta + \gamma < \beta + 2\gamma$, $2\gamma < \beta + 2\gamma$, $1 < 2\alpha < 2\alpha + \beta + \gamma$, werden alle negativen Terme von positiven Termen dominiert. Insgesamt folgt $d_{2,\lambda} > 0$, für λ hinreichend groß.

– Ist $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\gamma < \delta$ so gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 2\beta < 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma < 2\beta + \delta + \gamma, & \quad \delta + \beta < \delta + \beta + \gamma < \delta + 2\beta + \gamma, \\ 2\delta < 2\delta + \beta, & \quad \gamma < 2\gamma < 2\delta < 2\delta + \beta, \\ 2\alpha < 2\alpha + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, & \quad 1 < 1 + \gamma < 1 + \delta. \end{aligned}$$

Da alle negativen Terme von positiven Termen dominiert werden, folgt $d_{2,\lambda} > 0$, für λ hinreichend groß.

– Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\gamma = \delta$ ist $1 + \gamma = 1 + \delta$ und $2\beta + \delta + 2\beta + \gamma$ mit $\lambda^{1+\gamma}(1 - 2\varepsilon\mu) > 0$ und $\lambda^{2\beta+2\gamma}\mu(1 - 2\varepsilon\mu) > 0$, was wie im vorherigen Fall $d_{2,\lambda} > 0$, für λ hinreichend groß, impliziert.

– Ist $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\delta < \gamma$, so hängt das Vorzeichen von $d_{2,\lambda}$ erneut zusätzlich von der Relation zwischen α , β und γ ab.

* Ist $2\alpha + \beta > \max\{1, 2\beta + \gamma\}$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\beta < 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma < 2\beta + \delta + \gamma, & \delta + \beta < \delta + \beta + \gamma < \delta + 2\beta + \gamma, \\ 2\delta < 2\delta + \beta, & \gamma < 2\gamma < 2\beta + 2\gamma < 2\alpha + \gamma + \beta, \\ 2\alpha < 2\alpha + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma, & 1 < 1 + \gamma < 2\alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Das heißt, alle negativen Terme werden von positiven dominiert. Daraus folgt $d_{2,\lambda} > 0$, falls λ hinreichend groß.

* Ist $2\alpha + \beta < \max\{1, 2\beta + \gamma\}$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta < \beta + \gamma < \beta + 2\gamma < 2\beta + 2\gamma, & \delta < \delta + \gamma < \delta + \beta + \gamma, \\ 2\alpha + \beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma, & \delta + 2\beta < \delta + 2\beta + \gamma < 2\beta + 2\gamma, \\ 1 + \delta < 1 + \gamma, & 2\delta + \beta < 2\beta + 2\gamma. \end{aligned}$$

Hier werden alle positiven Terme von negativen dominiert. Dies impliziert $d_{2,\lambda} < 0$, für λ hinreichend groß.

* Ist $2\alpha + \beta = \max\{1, 2\beta + \gamma\}$ so ist $\mu\lambda^{2\alpha+\beta+\gamma} - 2\varepsilon\lambda - 2\mu^2\varepsilon\lambda^{2\beta+2\gamma} > 0$, für λ hinreichend groß. Damit folgt $d_{2,\lambda} > 0$.

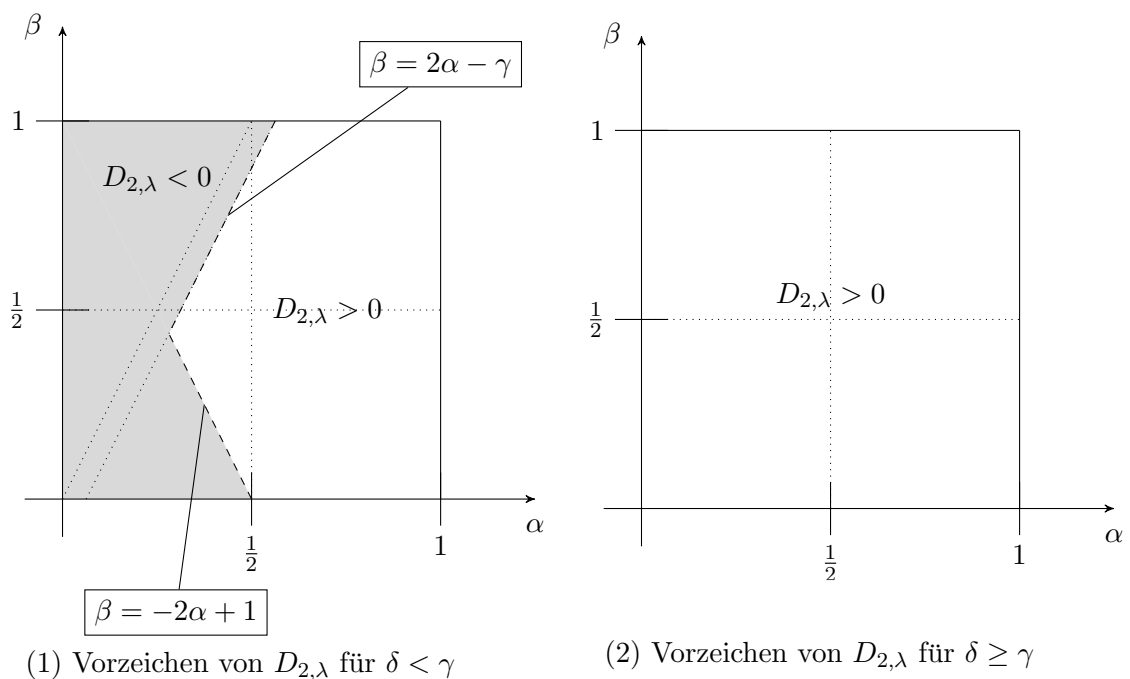


Abbildung 3.4: Vorzeichen von $D_{2,\lambda}$

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Mit dem eben Gezeigten ergibt sich das Vorzeichen von $\det D_{3,\lambda} = q_0 \det D_{2,\lambda}$ wie in den nachfolgenden Abbildungen.

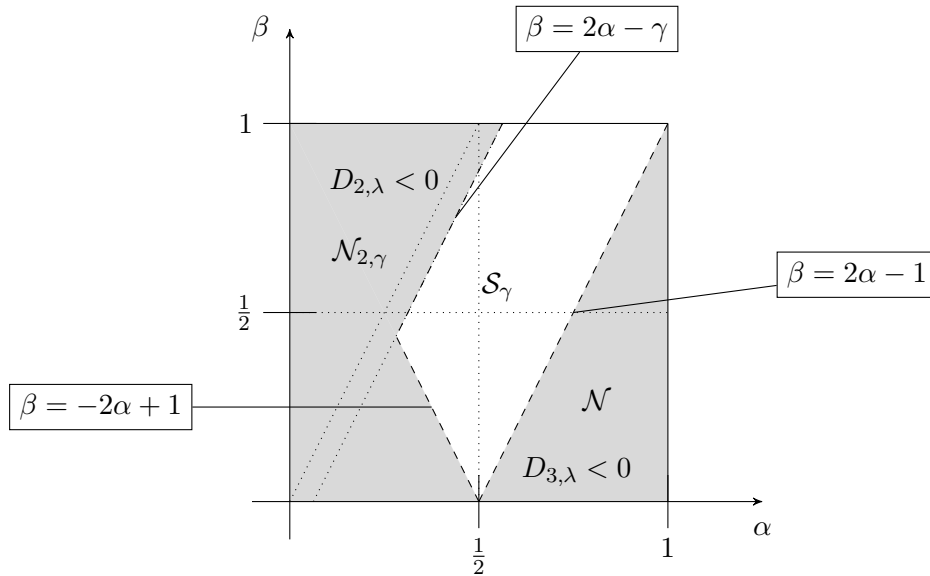


Abbildung 3.5: Region des Regularitätsverlusts für $\delta < \gamma$

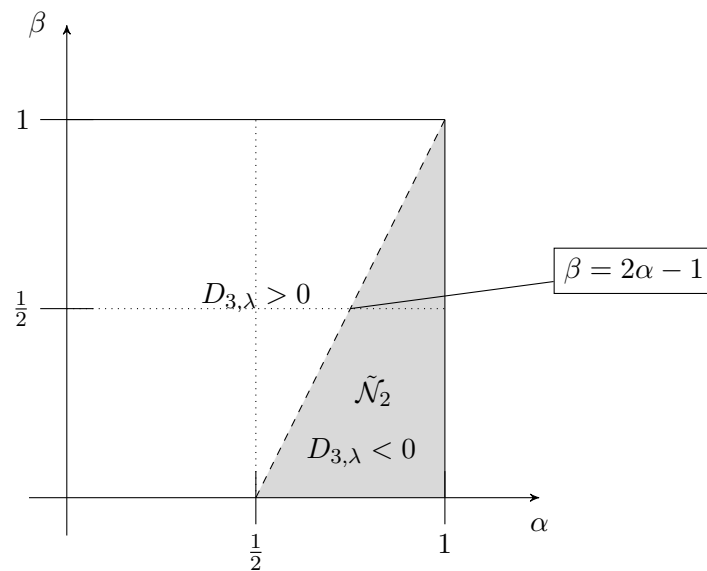


Abbildung 3.6: Region des Regularitätsverlusts für $\gamma \leq \delta$

□

Bemerkung 3.13. *Wie bereits im ungedämpften Fall lässt sich unter der zusätzlichen Annahme, dass A ein strikt positiver Operator ist, der eine abzählbare Folge von Eigenwerten $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $0 < \lambda_j \rightarrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$ und zugehörigen Eigenvektoren $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt, zeigen, dass in der Region des Regularitätsverlustes keine exponentielle Stabilität vorliegt.*

Unglücklicherweise lässt sich der Beweis von Satz 3.11 nicht direkt nutzen, um die exponentielle Stabilität im Parameterbereich der Glättungseigenschaft, unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass A strikt positiv ist, zu zeigen.

Für das System ohne Inertialterm ($\gamma = 0$) erhalten wir:

Korollar 3.14. Für das System ohne Inertialterm

$$\begin{aligned} u_{tt} + Au - A^\alpha \theta + A^\delta u_t &= 0, \\ \theta_t + A^\beta \theta + A^\alpha u_t &= 0, \end{aligned}$$

liegt in $\tilde{\mathcal{N}} := \{(\alpha, \beta, \delta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \beta < 2\alpha - 1\}$ ein Regularitätsverlust vor.

Beweis: Der Beweis läuft analog zum Beweis von Satz 3.12 ab. □

Die in Satz 3.11 und Satz 3.12 gezeigten Abhängigkeiten werden sich auch in den Eigenwertentwicklungen im folgenden Satz zeigen.

Satz 3.15. Sei $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Für die Nullstellen $\omega_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, des charakteristischen Polynoms (3.3) gilt für $\lambda \rightarrow \infty$:

(1) Ist $\delta \leq \frac{1}{2}$, so gilt

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_{2,3} &= -\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1-2\gamma}{2}} \pm i\lambda^{\frac{1-\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

(2) Für $\delta > \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_2 &= -\lambda^{1-\delta}, \\ \omega_3 &= -\lambda^{\delta-\gamma}, \end{aligned}$$

falls $\frac{1+\gamma}{2} \leq \delta < \frac{1}{2} + \gamma$ oder $\frac{1}{2} + \gamma \leq \delta$, und

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_{2,3} &= -\frac{1}{2}\lambda^{\delta-\gamma} \pm i\lambda^{\frac{1-\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

falls $\frac{1+\gamma}{2} > \delta$.

Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Beweis: Um die behauptete Entwicklung der Eigenwerte zu beweisen, verwenden wir erneut den Newton-Puiseux-Algorithmus. Wir können dabei ohne Einschränkung $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ annehmen, da sich die Behauptung wie im Beweis von Satz 2.17 durch Approximation von γ und δ durch rationale Folgen folgern lässt.

Weiter nehmen wir wieder ohne Einschränkung $\mu = 1$ an.

Für das charakteristische Polynom (3.3) gilt

$$P_{\lambda,\delta}(\omega) = \omega^3 + \left(\lambda^{1/2} + \frac{\lambda^\delta}{1 + \lambda^\gamma} \right) \omega^2 + \frac{2\lambda + \lambda^{\delta+1/2}}{1 + \lambda^\gamma} \omega + \frac{\lambda^{3/2}}{1 + \lambda^\gamma} = 0$$

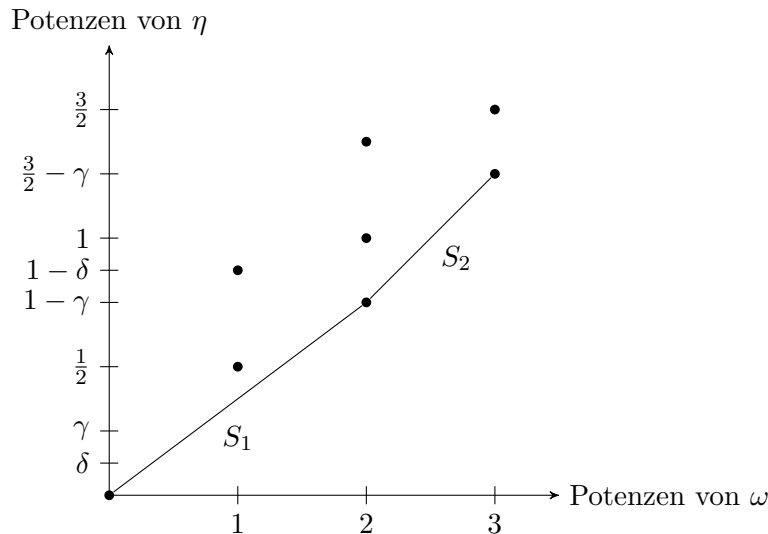
$$\iff \tilde{P}_{\eta,\delta}(\omega) = (\eta^{3/2} + \eta^{3/2-\gamma})\omega^3 + (\eta + \eta^{1-\gamma} + \eta^{3/2-\delta})\omega^2 + (2\eta^{1/2} + \eta^{1-\delta})\omega + 1 = 0,$$

wobei $\eta = \lambda^{-1}$.

Es sei zunächst $\delta \leq \frac{1}{2}$.

Das Newton Polygon von $\tilde{P}_{\lambda,\delta}$ besteht aus zwei Segmenten. Das Segment S_1 hat die Länge 2 und die Steigung $\frac{1-\gamma}{2}$. Das zweite Segment S_2 hat die Länge 1, die Steigung $\frac{1}{2}$ und den Schnittpunkt mit der vertikalen Achse bei $y_1 = -\gamma$.

Es ist gegeben durch:



Wir untersuchen zunächst das Segment S_2 . Einsetzen von $\omega = \eta^{-1/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$, wobei $\tilde{\omega}_1 = c_2\lambda^{m_2} + c_3\lambda^{m_2+m_3} + \dots$, in $\tilde{P}_{\eta,\delta}$ gibt uns

$$\tilde{P}_{\eta,\delta}(\omega) = (1 + \eta^{-\gamma})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (1 + \eta^{-\gamma} + \eta^{3/2-\delta})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 + (2 + \eta^{-\delta+1/2})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + 1 = 0.$$

was $c_1^3 + c_1^2 = 0$ impliziert. Da triviale Lösungen ausgeschlossen werden, folgt $c_1 = -1$. Damit folgt

$$\omega_1 = -\eta^{-1/2} = -\lambda^{1/2}.$$

Wir betrachten nun das Segment S_1 und setzen $\omega = \eta^{-1/2+\gamma/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\eta,\delta}(\omega) = & (\eta^{3\gamma/2} + \eta^{\gamma/2})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^3 + (\eta^\gamma + 1 + \eta^{1/2-\delta+\gamma})(c_1 + \tilde{\omega}_1)^2 \\ & + (2\eta^{\gamma/2} + \eta^{1/2-\delta+\gamma/2})(c_1 + \tilde{\omega}_1) + 1 = 0, \end{aligned}$$

was $c_1^2 + 1 = 0$, also $c_1 = \pm i$, nach sich zieht. Da $\omega_2 = \bar{\omega}_3$ können wir ohne Einschränkung mit $c_1 = i$ fortfahren. Es gilt

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{\omega}_1) &:= \eta^{-y_1} \tilde{P}_{\eta, \delta} \\ &= \tilde{\omega}_1^3 (\eta^{3\gamma/2} + \eta^{\gamma/2}) + \tilde{\omega}_1^2 (3i\eta^{3\gamma/2} + 3i\eta^{\gamma/2} + \eta^\gamma + 1 + \eta^{1/2-\delta+\gamma}) \\ &\quad + \tilde{\omega}_1 (-3\eta^{3\gamma/2} - 3\eta^{\gamma/2} + 2i\eta^\gamma + 2i\eta^{1/2-\delta+\gamma} + 2i) \\ &\quad + (-i\eta^{3\gamma/2} - \eta^\gamma - \eta^{1/2-\delta+\gamma} + i\eta^{\gamma/2} + i\eta^{1/2-\delta+\gamma/2}). \end{aligned}$$

Da das Newton-Polygon den Punkt $(1,0)$ enthalten muss, ist nur die kleinste in der letzten Klammer auftretende Potenz ausschlaggebend. Da wir $\delta \leq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt haben, ist $\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2}$. Das Newton-Polygon von P_2 hat nur ein Segment mit $m_2 = \frac{\gamma}{2} = y_2$. Setzen wir nun $\tilde{\omega}_1 = \eta^{\gamma/2}(c_2 + \tilde{\omega}_2)$ in P_2 ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} P_2(\tilde{\omega}_1) &= (c_2 + \tilde{\omega}_2)^3 (\eta^{3\gamma} + \eta^{2\gamma}) + (c_2 + \tilde{\omega}_2)^2 (3i\eta^{5\gamma/2} + 3i\eta^{3\gamma/2} + \eta^{2\gamma} + \eta^\gamma + \eta^{1/2-\delta+2\gamma}) \\ &\quad + (c_2 + \tilde{\omega}_2) (-3\eta^{2\gamma} - 3\eta^\gamma + 2i\eta^{3\gamma/2} + 2i\eta^{1/2-\delta+3\gamma/2} + 2i\eta^{\gamma/2}) \\ &\quad + (-i\eta^{3\gamma/2} - \eta^\gamma - \eta^{1/2-\delta+\gamma} + i\eta^{\gamma/2} + i\eta^{1/2-\delta+\gamma/2}). \end{aligned}$$

Daraus folgt $2ic_2 + i = 0$, was $c_2 = -\frac{1}{2}$ impliziert. Insgesamt bekommen wir

$$\omega_2 = \eta^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(i + \eta^{\frac{\gamma}{2}} (c_2 + \tilde{\omega}_2) \right) = i\eta^{\frac{\gamma-1}{2}} - \frac{1}{2}\eta^{\frac{2\gamma-1}{2}} + \eta^{\frac{2\gamma-1}{2}} \tilde{\omega}_2$$

und damit

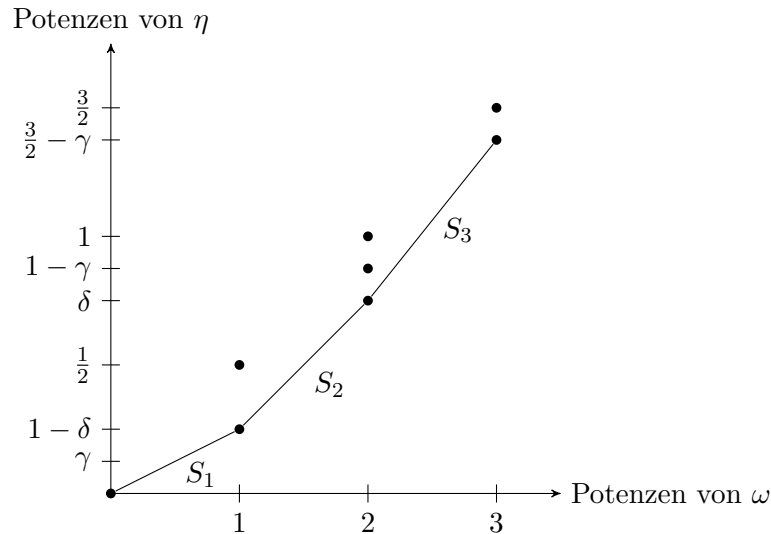
$$\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1-2\gamma}{2}} \pm i\lambda^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

Es sei nun $\delta > \frac{1}{2}$.

Wir müssen weitere Fälle unterscheiden:

- (i) Es sei $\delta \geq \frac{1}{2} + \gamma$ oder $\frac{1+\gamma}{2} \leq \delta < \frac{1}{2} + \gamma$.

Dann ist das Newton-Polygon von $\tilde{P}_{\eta, \delta}$ ist von der Form:



Kapitel 3: Gedämpfte Systeme

Es ist also durch die Punkte

$$(0, 0), (1, 1 - \delta), (2, 1 - \gamma), (3, \frac{3}{2} - \gamma)$$

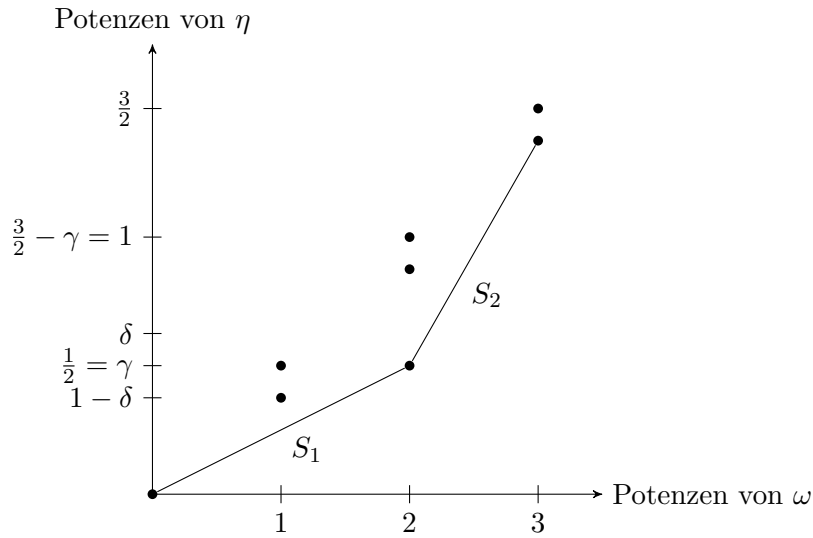
nach unten beschränkt und besteht somit aus drei Segmenten der Länge 1. Für S_1 ist $m_1 = \delta - 1$, für S_2 ist $m_1 = -\frac{1}{2}$ und für S_3 ist $m_1 = \gamma - \delta$. Durch Einsetzen von $\omega = \eta^{m_1}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ in $\tilde{P}_{\eta,\delta}$ erhalten wir unabhängig von der Wahl des Segmentes $c_1 = -1$, woraus direkt

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\eta^{-1/2} = -\lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \omega_2 &= -\eta^{\delta-1} = -\lambda^{1-\delta}, \\ \omega_3 &= -\eta^{\gamma-\delta} = -\lambda^{\delta-\gamma}\end{aligned}$$

folgt.

- (ii) Es sei nun $\delta < \frac{1+\gamma}{2}$.

In diesem Fall ist das Newton-Polygon von $\tilde{P}_{\eta,\delta}$ gegeben durch:



Es besteht daher aus einem Segment S_1 der Länge 2 mit $m_1 = -\frac{1-\gamma}{2}$ und einem Segment der Länge 1 mit $m_1 = -\frac{1}{2}$.

Wir untersuchen zunächst das Segment S_2 . Genau wie im Fall $\delta \leq \frac{1}{2}$ folgt hier

$$\omega_1 = -\eta^{-1/2} = -\lambda^{1/2}.$$

Für das erste Segment S_1 folgt wie im Fall $\delta \leq \frac{1}{2}$ für $\omega = \eta^{-1/2+\gamma/2}(c_1 + \tilde{\omega}_1)$ wieder $c_1 = \pm i$. Da $\omega_2 = \bar{\omega}_3$ können wir auch hier ohne Einschränkung mit $c_1 = i$ fortfahren. Es gilt

$$\begin{aligned}P_2(\tilde{\omega}_1) &:= \eta^{-y_1} \tilde{P}_{\eta,\delta} \\ &= \tilde{\omega}_1^3 (\eta^{3\gamma/2} + \eta^{\gamma/2}) + \tilde{\omega}_1^2 (3i\eta^{3\gamma/2} + 3i\eta^{\gamma/2} + \eta^\gamma + 1 + \eta^{1/2-\delta+\gamma}) \\ &\quad + \tilde{\omega}_1 (-3\eta^{3\gamma/2} - 3\eta^{\gamma/2} + 2i\eta^\gamma + 2i\eta^{1/2-\delta+\gamma} + 2i) \\ &\quad + (-i\eta^{3\gamma/2} - \eta^\gamma - \eta^{1/2-\delta+\gamma} + i\eta^{\gamma/2} + i\eta^{1/2-\delta+\gamma/2}).\end{aligned}$$

Da $\delta > \frac{1}{2}$, ist $\frac{1}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2}$ die kleinste Potenz in der letzten Klammer, was $m_2 = \frac{1}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2} = y_2$ impliziert. Einsetzen von $\tilde{\omega}_1 = \eta^{1/2 - \delta + \gamma/2}$ in P_2 liefert dann direkt $2ic_2 + i = 0$, und somit $c_2 = -\frac{1}{2}$.

Schließlich folgt

$$\omega_2 = \eta^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(i + \eta^{\frac{1}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2}} (c_2 + \tilde{\omega}_2) \right) = i\eta^{\frac{\gamma-1}{2}} - \frac{1}{2}\eta^{\gamma-\delta} + \eta^{\gamma-\delta}\tilde{\omega}_2$$

und damit

$$\omega_{2,3} = -\frac{1}{2}\lambda^{\delta-\gamma} \pm i\lambda^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

□

Bemerkung 3.16. *Im Vergleich zu den in Satz 2.24 bewiesenen Entwicklungen, zeigt sich hier, dass die Entwicklung für $\delta \leq \frac{1}{2}$ unverändert bleibt und der Dämpfungsterm nur für $\delta > \frac{1}{2}$ einen Einfluss auf die Entwicklungen hat.*

Kapitel 4

Anwendungsbeispiel

In diesem Kapitel werden wir eine konkrete Anwendung der in Kapitel 2 gezeigten Resultate geben. Dazu sei $H := L^2(\mathbb{R}^n)$ und $A := (-\Delta)^\eta$ für $\eta > 0$.

Dann schreibt sich (ATP) als

$$\begin{aligned} u_{tt} + \mu(-\Delta)^{\eta\gamma} u_{tt} + (-\Delta)^\eta u - (-\Delta)^{\eta\alpha} \theta &= 0, \\ \theta_t + (-\Delta)^{\eta\beta} \theta + (-\Delta)^{\eta\alpha} u_t &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, \theta(0) = \theta_0,$$

auf dem Hilbertraum

$$\mathcal{H} = D((-\Delta)^{\eta/2}) \times D((-\Delta)^{\eta\gamma/2}) \times H$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle u_1, v_1 \rangle_H + \langle (-\Delta)^{\eta/2} u_1, (-\Delta)^{\eta/2} v_1 \rangle_H \\ &\quad + \langle (I + \mu(-\Delta)^{\eta\gamma})^{1/2} u_2, (I + \mu(-\Delta)^{\eta\gamma})^{1/2} v_2 \rangle_H + \langle u_3, v_3 \rangle_H, \end{aligned}$$

für $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{H}$.

Bevor wir die in Kapitel 2 formulierten Resultate anwenden, wollen wir zunächst genauere Aussagen über $D((-\Delta)^s)$ für $s > 0$ treffen, um unter anderem eine greifbarere Charakterisierung des Hilbertraums \mathcal{H} zu erhalten. Um den Definitionsbereich von $(-\Delta)^s$ zu charakterisieren, bestimmen wir zunächst $D((-\Delta)^k)$ für $k \in \mathbb{N}$ und werden dann mit Hilfe der Interpolationstheorie den Definitionsbereich für beliebige positive Potenzen des Operators charakterisieren.

Für $s > 0$ und $p \in [1, \infty)$ ist der Besselpotential-Raum definiert durch

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{H_p^s} := \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\cdot|^2)^{s/2} \mathcal{F}f\|_{L^p} < \infty \right\}, \tag{4.2}$$

wobei \mathcal{F} die Fourier-Transformation bezeichnet. Es ist zudem bekannt, dass für $s \in \mathbb{N}$

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n),$$

Kapitel 4: Anwendungsbeispiel

wobei

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_{W^{s,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

den klassischen Sobolevraum bezeichnet.

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt offenbar $H_2^{2k}(\mathbb{R}^n) \subset D((-\Delta)^k)$. Um die Gleichheit zu zeigen, sei $u \in D((-\Delta)^k)$ und $f := u + (-\Delta)^k u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $|\alpha| \leq 2k$

$$\partial^\alpha u = \mathcal{F}^{-1} i^{|\alpha|} (\cdot)^\alpha \mathcal{F} u = i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1} \frac{(\cdot)^\alpha}{1 + |\cdot|^{2k}} \mathcal{F} f =: i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1} m_\alpha(\cdot) \mathcal{F} f.$$

Es ist $m_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, da $|\alpha| \leq 2k$, woraus mit dem Satz von Plancherel bereits $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Insgesamt erhalten wir also gerade

$$H_2^{2k}(\mathbb{R}^n) = D((-\Delta)^k). \quad (4.3)$$

Um nun $D((-\Delta)^s)$ für $s > 0$ zu bestimmen, stellen wir zunächst zwei Interpolationssätze vor, die wir ebenfalls in Anhang E zusammen mit einer kurzen Einführung in die Interpolationstheorie wiedergeben.

Satz 4.1. Es sei A ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha \geq 0, \operatorname{Re} \beta \geq 0$. Dann gilt für jedes $\theta \in (0, 1)$

$$[D(A^\alpha), D(A^\beta)]_\theta = D(A^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta}).$$

Hierbei bezeichnet $[\cdot, \cdot]$ den komplexen Interpolationsfunktorktor.

Satz 4.2. Für $0 < \theta < 1, 1 < p < \infty, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$[L^p(\mathbb{R}^n), W^{m,p}(\mathbb{R}^n)]_\theta = H_p^{m\theta}(\mathbb{R}^n).$$

Es sei nun $s > 0, s \notin \mathbb{N}$. Weiter sei $k := \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > s\}$ und $\theta := \frac{s}{k}$. Dann ist $0 < \theta < 1$. Aus Satz 4.1, Satz 4.2 und (4.3) folgt schließlich

$$\begin{aligned} D((-\Delta)^s) &= D((-\Delta)^{k\theta}) \\ &= [D((-\Delta)^0), D((-\Delta)^k)]_\theta \\ &= [L^2(\mathbb{R}^n), W^{2k,2}(\mathbb{R}^n)]_\theta \\ &= H_2^{2k\theta}(\mathbb{R}^n) \\ &= H_2^{2s}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mit dem gerade Gezeigten ist

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= D((-\Delta)^{\eta/2}) \times D((-\Delta)^{\eta\gamma/2}) \times H \\ &= H_2^\eta(\mathbb{R}^n) \times H_2^{\eta\gamma}(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

In [DeRa06] wurde das Problem (4.1) ohne Inertialterm, das heißt, für den Fall $\gamma = \mu = 0$, in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, bereits untersucht. Hier wurde neben der Wohlgestellttheit des zugehörigen Cauchyproblems in Besselpotential-Räumen auch die Region $\mathfrak{A} := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \leq \beta, \beta \geq 2\alpha - \frac{1}{2}\}$ charakterisiert, in der die zugehörige Halbgruppe analytisch ist. Ebenfalls wurden scharfe polynomielle Abklingraten für $\|u(t, \cdot), A^{1/2}u(t, \cdot), \theta(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, $2 \leq q \leq \infty$, bewiesen, die wir teilweise in Kapitel 2, Abschnitt 2.2.1, bereits vorgestellt haben.

Im ersten Abschnitt des Kapitels werden wir die eben vorgestellten Resultate über Besselpotential-Räume nutzen, um die in Kapitel 2, Abschnitt 2.1 gezeigten Wohlgestellttheitsresultate für das Problem (4.1) zu formulieren. Anschließend werden wir in Abschnitt 4.2 Energieabschätzungen der Lösung im Ganzraum sowie in Außenräumen beweisen. Dafür werden wir die in Kapitel 2, Abschnitt 2.2 gezeigten Eigenwertentwicklungen verwenden, um damit in Unterabschnitt 4.2.1 polynomielle Abklingraten im Ganzraum herzuleiten. Dieselben Resultate werden wir anschließend nutzen, um nach einer kurzen Einführung in die verallgemeinerte Fourier-Transformation im Außengebiet entsprechende polynomielle Abklingraten der Lösung im Außengebiet zu beweisen.

4.1 Wohlgestellttheit

Die Wohlgestellttheit von (4.1) können wir nun direkt aus den in Kapitel 2, Abschnitt 2.1, bewiesenen Wohlgestellttheitsresultaten folgern.

Analog zu Kapitel 2, Abschnitt 2.1, definieren wir nun für die Fälle

- (1) $\alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\beta \geq \alpha - \frac{\gamma}{2}$,
- (2) $\alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\beta < \alpha - \frac{\gamma}{2}$,
- (3) $\alpha > \frac{1}{2}$ und $\beta \geq 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$,
- (4) $\alpha > \frac{1}{2}$ und $2\alpha - 1 \leq \beta < 2\alpha - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}$

die Operatoren \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Mit der in (4.4) gezeigten Charakterisierung der Definitionsbereiche erhalten wir

$$\begin{aligned}D(\mathcal{A}_1) &= \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in H_2^\eta(\mathbb{R}^n), u \in H_2^{(2-\gamma)\eta}(\mathbb{R}^n), \theta \in H_2^{2\eta\beta}(\mathbb{R}^n)\}, \\ D(\mathcal{A}_2) &= \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in H_2^\eta(\mathbb{R}^n), u \in H_2^{2\eta(1-\alpha+\beta)}(\mathbb{R}^n), \theta \in H_2^{2\eta\beta}(\mathbb{R}^n), \\ &\quad L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-\frac{1}{2}}Au - L^{\beta-\alpha}L_\gamma^{-\frac{1}{2}}A^\alpha\theta \in H_2^{2\eta(\alpha-\beta)}(\mathbb{R}^n)\}, \\ D(\mathcal{A}_3) &= \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in H_2^\eta(\mathbb{R}^n), u \in H_2^{2\eta(1-\gamma/2)}(\mathbb{R}^n), \theta \in H_2^{2\eta(\beta-\alpha+\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^n), \\ &\quad L^{\frac{1}{2}-\alpha}A^\alpha v - L^{\frac{1}{2}-\alpha}A^\beta\theta \in H_2^{2\eta(\alpha-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^n)\}, \\ D(\mathcal{A}_4) &= \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} \mid v \in H_2^\eta(\mathbb{R}^n), u \in H_2^{2\eta(1-2\alpha+\beta+\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^n), \theta \in H_2^{2\eta(\beta-\alpha+\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^n), \\ &\quad L^{\beta-2\alpha+\frac{1}{2}}Au - L^{\beta-2\alpha+\frac{1}{2}}A^\alpha\theta \in H_2^{2\eta(2\alpha-\beta-\frac{1}{2}-\gamma/2)}(\mathbb{R}^n), \\ &\quad L^{\frac{1}{2}-\alpha}A^\alpha v - L^{\frac{1}{2}-\alpha}A^\beta\theta \in H_2^{2\eta(\alpha-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^n)\}.\end{aligned}$$

Zusammen mit Korollar 2.11 erhalten wir

Satz 4.3. Für

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{W} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, 1] \mid \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ oder } (\alpha > \frac{1}{2} \text{ und } \beta \geq 2\alpha - 1) \right\}$$

ist das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}_i U, \\ U(0) &= U_0, \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3, 4$ in

$$\mathcal{H} = H_2^\eta(\mathbb{R}^n) \times H_2^{\eta\gamma}(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$$

wohlgestellt.

Bemerkung 4.4.

- (i) Entsprechend können wir auch die Resultate aus Kapitel 3 direkt auf das Anwendungsbeispiel (4.1) übertragen.
- (ii) Betrachten wir statt dem Ganzraum ein Gebiet Ω mit glattem Rand und den Dirichlet Laplace-Operator $(-\Delta) : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ so können alle in Kapitel 2, Abschnitt 2.1, vorgestellten Wohlgestelltheitsresultate direkt übertragen werden. Allerdings ist die Bestimmung des Definitionsbereichs $D((-\Delta)^s)$ für beliebige $s > 0$ und somit die Charakterisierung des Hilbertraums \mathcal{H} deutlich komplizierter und vom Gebiet abhängig. Für natürliche Potenzen $s \in \mathbb{N}$ erhalten wir eine Beschreibung des Definitionsbereichs durch

$$D((-\Delta)^s) = \{u \in H^{2s}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = \dots = (-\Delta)^{s-1} u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Für beliebige $s > 0$ erweist sich eine solche Charakterisierung jedoch als erheblich schwieriger und soll nicht Bestandteil dieser Arbeit sein.

4.2 Energieabschätzungen

Für einen nicht-negativen Operator A , der nicht strikt positiv ist, das heißt, es gilt $0 \notin \rho(A)$, wird im Allgemeinen keine exponentielle Stabilität erwartet. Dennoch können polynomielle Abschätzungen gezeigt werden. In diesem Abschnitt werden wir die in Satz 2.14 und Satz 2.24 bewiesenen Eigenwertentwicklungen nutzen, um L^2 - L^1 -Abschätzungen der Lösung von (4.1) zu zeigen und konkrete Abklingraten im Fall $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ anzugeben. Zudem werden wir analoge Resultate im darauf folgenden Unterabschnitt für ein entsprechend formuliertes Problem im Außengebiet wiedergeben.

Der in $\mathcal{N}_{2,\gamma} \cup \mathcal{N}$ auftretende Regularitätsverlust wird sich dabei sowohl im Ganzraumfall als auch im Außengebiet in den Abschätzungen widerspiegeln.

Wir verwenden in diesem Kapitel die folgende Notation: Für $k \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir $\partial_x^k f$ für eine beliebige Ableitung von f der Ordnung k , das heißt für $\partial_x^\alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $|\alpha| = k$, dabei ist $\partial_x^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$.

4.2.1 Energieabschätzungen im Ganzraum

Satz 4.5. (L^1 - L^2 -Abschätzung im Ganzraum)

Seien $\eta > 0$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$. Des Weiteren seien $u_1, (1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_0, \theta_0 \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt die Lösung von (4.1) die folgenden Abklingabschätzungen:

Für $\gamma \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{2\eta} - \frac{n}{4\eta}} \|((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\ &\quad + Ce^{-ct} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

und für $\gamma > \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{2\eta} - \frac{n}{4\eta}} \|((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\ &\quad + C(1+t)^{\frac{l}{2\eta(\frac{1-2\gamma}{2})}} \|\partial_x^{k+l}((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

für $t \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k+l \leq s$. Es bezeichnet C eine generische, positive Konstante, die insbesondere nicht von t und den Anfangsdaten abhängt.

Beweis: Nach Korollar 2.26 erfüllt die Lösung die punktweise Abschätzung im Fourierbild

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_t(t, \xi)|^2 + |\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\hat{\theta}(t, \xi)|^2 \\ \leq Ce^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\rho(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{2\eta}, & |\xi| \leq 1, \\ |\xi|^{2\eta(\frac{1-2\gamma}{2})}, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Mit dem Satz von Plancherel folgt

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_t(t, \xi)|^2 + |\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\hat{\theta}(t, \xi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} Ce^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &= \underbrace{\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} Ce^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi}_{:=I_1} \\ &\quad + \underbrace{\int_{|\xi| > 1} |\xi|^{2k} Ce^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi}_{:=I_2}. \end{aligned}$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Damit folgt für I_1 nach Satz F.1 (i)

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2k} e^{-c|\xi|^{2\eta t}} d\xi \|((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1}^2 \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{2k+n}{2\eta}} \|((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1}^2. \end{aligned}$$

Kapitel 4: Anwendungsbeispiel

Um I_2 abzuschätzen unterscheiden wir zwei Fälle:

Sei zunächst $\gamma \leq \frac{1}{2}$, dann ist $2\eta\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right) \geq 0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2k} C e^{-c|\xi|} t^{2\eta\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq C e^{-ct} \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2k} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq C e^{-ct} \|\partial_x^k ((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma}) u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k ((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma}) u_t, u, \theta)\|_{L^2}^2 &\leq C (1+t)^{-\frac{2k+n}{2\eta}} \|((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma}) u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1}^2 \\ &\quad + C e^{-ct} \|\partial_x^k ((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma}) u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ziehen wir nun die Wurzel so folgt die behauptete Abschätzung (i) unter Verwendung der Ungleichung $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für $a, b \geq 0$.

Sei nun $\gamma > \frac{1}{2}$, das heißt es ist $2\eta\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right) < 0$. Nach Satz F.1 (ii) folgt somit für I_2 die Abschätzung

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2k} C e^{-c|\xi|} t^{2\eta\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq 1} |\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|} t^{2\eta\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)} \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2k+2l} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &\leq C (1+t)^{\frac{l}{\eta\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)}} \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2k+2l} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &= C (1+t)^{\frac{l}{\eta\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)}} \|\partial_x^{k+l} ((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma}) u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Wie im ersten Fall folgt damit die Behauptung durch Wurzelziehen. □

Bemerkung 4.6. Nach Satz 2.21 liegt für $\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}$ ein Regularitätsverlust vor, welcher für $\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$ verschwindet. Der Regularitätsverlust wird dabei im letzten Term von (4.6) sichtbar, im Gegensatz zur Abschätzung ohne Regularitätsverlust (4.5) benötigen wir hier $k+l$ Ableitungen der Anfangsdaten, um eine Abklingabschätzung für k Ableitungen der Lösung zum Zeitpunkt t zu erhalten, wohingegen wir für $l=0$ lediglich die Beschränktheit der Lösung bekommen.

Es können auch Abschätzungen für $(-\Delta)^{\eta/2} u$ anstelle von u gezeigt werden. Betrachte dazu die Fourier-Transformation von (4.1)

$$\begin{aligned} (1 + \mu\lambda^\gamma) \hat{u}_{tt}(t, \xi) + \lambda \hat{u}(t, \xi) - \lambda^\alpha \hat{\theta}(t, \xi) &= 0, \\ \hat{\theta}_t(t, \xi) + \lambda^\beta \hat{\theta}(t, \xi) + \lambda^\alpha \hat{u}_t(t, \xi) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\lambda = |\xi|^{2\eta}$. Das System ist für $W_\lambda(t) := ((-\Delta)^{\eta/2}u(t, \lambda), u_t(t, \lambda), \theta(t, \lambda))$ äquivalent zum System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}W_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{1/2} & 0 \\ \frac{-\lambda^{1/2}}{1+\mu\lambda^\gamma} & 0 & \frac{\lambda^\alpha}{1+\mu\lambda^\gamma} \\ 0 & -\lambda^\alpha & -\lambda^\beta \end{pmatrix} W_\lambda(t) =: \tilde{\mathcal{A}}_\lambda W_\lambda(t).$$

Das charakteristische Polynom von $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$ ist

$$\tilde{P}_\lambda(\omega) := \det(\omega - \tilde{\mathcal{A}}_\lambda) = \omega^3 + \lambda^\beta \omega^2 + \frac{\lambda^{2\alpha} + \lambda}{1 + \mu\lambda^\gamma} \omega + \frac{\lambda^{1+\beta}}{1 + \mu\lambda^\gamma}.$$

Setzen wir hingegen, wie im Beweis von Satz 2.21, $V_\lambda(t) := (\hat{u}(t, \lambda), \hat{u}_t(t, \lambda), \hat{\theta}(t, \lambda))$ so erhalten wir das System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}V_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\lambda}{1+\mu\lambda^\gamma} & 0 & \frac{\lambda^\alpha}{1+\mu\lambda^\gamma} \\ 0 & -\lambda^\alpha & -\lambda^\beta \end{pmatrix} V_\lambda(t) =: \mathcal{A}_\lambda V_\lambda(t).$$

Für das charakteristische Polynom P_λ von \mathcal{A}_λ gilt damit $P_\lambda = \tilde{P}_\lambda$. Insgesamt erhalten wir damit

Korollar 4.7. Mit den Voraussetzungen aus Satz 4.5 sowie der zusätzlichen Voraussetzung $(-\Delta)^{\eta/2}u_0 \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ erfüllt die Lösung von (4.1) die folgenden L^1 - L^2 -Abschätzungen: Für $\gamma \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_t, (-\Delta)^{\eta/2}u, \theta)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{2\eta} - \frac{n}{4\eta}} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, (-\Delta)^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\ &\quad + C e^{-ct} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, (-\Delta)^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

und für $\gamma > \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_t, (-\Delta)^{\eta/2}u, \theta)\|_{L^2} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{2\eta} - \frac{n}{4\eta}} \|\partial_x^k((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, (-\Delta)^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\ &\quad + C(1+t)^{\frac{l}{2\eta(\frac{1-2\gamma}{2})}} \|\partial_x^{k+l}((1 + (-\Delta)^{\eta\gamma})u_1, (-\Delta)^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

4.2.2 Energieabschätzungen im Außengebiet

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet, das heißt, das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ist ein beschränktes Gebiet.

Wir bezeichnen mit Δ_0 den Laplace-Operator $(-\Delta)$ mit Dirichlet-Randbedingungen und Definitionsbereich

$$D(\Delta_0) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

Der Operator Δ_0 ist nicht-negativ und selbstadjungiert.

Es sei $\eta > 0$. Für $A := (\Delta_0)^\eta$ schreibt sich (ATP) als

$$\begin{aligned} u_{tt} + \mu \Delta_0^{\eta\gamma} u_{tt} + \Delta_0^\eta u - \Delta_0^{\eta\alpha} \theta &= 0, \\ \theta_t + \Delta_0^{\eta\beta} \theta + \Delta_0^{\eta\alpha} u_t &= 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

Kapitel 4: Anwendungsbeispiel

mit Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, \theta(0) = \theta_0.$$

Um die in Kapitel 2, Abschnitt 2.2, gezeigten Resultate anwenden zu können, werden wir zunächst eine kurze Einführung in die verallgemeinerte Fourier-Transformation im Außengebiet geben. Eine vollständige Herleitung findet sich unter anderem in [Le86] und [Wi75].

Da Ω ein Außengebiet ist, existiert ein $r_0 > 0$ mit $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B(0, r_0)$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ die verallgemeinerte Fourier-Transformation, die sich in der Form

$$\hat{u}(\xi) := (\tilde{\mathcal{F}}u)(\xi) = \int_{\Omega} \overline{\psi(x, \xi)} u(x) dx$$

darstellen lässt. Dabei ist ψ eine sogenannte verallgemeinerte Eigenfunktion des Laplace-Operators, die von der Gestalt

$$\psi(x, \xi) = j(|x|)e^{ix\xi} + \psi'(x, \xi)$$

ist. Hierbei ist $j \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion, mit $j \geq 0$, $j(r) = 0$ für $r \leq r_0$ und $j(r) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ für $r \geq r_0 + 1$. Zusammen mit den nachstehenden Bedingungen wird ψ damit eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}^n : (1 - j(|\cdot|))\psi'(\cdot, \xi) &\in D(\Delta_0), \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall R > 0 : j(|\cdot|)\psi'(\cdot, \xi) &\in W^{2,2}(\Omega_R), \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n : (\Delta + |\xi|^2)\psi'(\cdot, \xi) &= -(\Delta + |\xi|^2)(j(|\cdot|)e^{i\cdot\xi}), \end{aligned}$$

wobei $\Omega_R := \{x \in \Omega \mid |x| < R\}$ für $R > 0$ sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'(x, \xi)}{\partial |x|} - i|\xi|\psi'(x, \xi) &= \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{(n+1)}{2}}\right), \\ \psi'(x, \xi) &= \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{(n-1)}{2}}\right) \end{aligned}$$

für $|x| \rightarrow \infty$.

Dann ist $\tilde{\mathcal{F}}$ ein unitärer Operator mit

$$\tilde{\mathcal{F}}(\varphi(\Delta_0)u)(\xi) = \varphi(|\xi|^2)(\tilde{\mathcal{F}}u)(\xi), \quad (4.8)$$

wobei der Operator $\varphi(\Delta_0)$ wie üblich durch den Spektralsatz definiert ist.

Die verallgemeinerte Fourier-Transformation erfüllt somit alle Eigenschaften der Abbildung \mathcal{U} im Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte, nicht-negative Operatoren.

Um nun Abschätzungen der Fourier-Transformierten zu zeigen, benötigen wir Abschätzungen der verallgemeinerten Eigenfunktionen ψ . Dafür wollen wir im restlichen Abschnitt zusätzlich annehmen, dass das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ sternförmig ist.

Unter dieser Zusatzvoraussetzung konnte in [RaZh91] der folgende Satz bewiesen werden.

Satz 4.8. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Dann existiert ein $c > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$, welches nur von n abhängt, so dass für alle $x \in \Omega$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$|\psi(x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|)^m.$$

Bemerkung 4.9. Auch für $n = 2$ konnten Satz 4.8 entsprechende Abschätzungen der verallgemeinerten Eigenfunktionen bewiesen werden. Genauer konnte in [Ru93] gezeigt werden, dass für $\lambda_0 > 0$ beliebig, aber fest, ein $c = c(\Omega, \lambda_0, j)$ existiert, so dass für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$(i) \quad |\psi(x, \xi)| \leq c(1 + |\ln(|\xi|)|)^{5/2}(1 + |\xi|) \text{ für } |\xi| \leq \lambda_0.$$

$$(ii) \quad |\psi(x, \xi)| \leq c(1 + |\ln(|\xi|)|)^{1/2}(1 + |\xi|)^{1/2} \text{ für } |\xi| \geq \lambda_0.$$

Wir beschränken uns in dieser Arbeit jedoch trotzdem auf $n \geq 3$.

Damit können wir für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, zusammen mit Satz 2.14 und Satz 2.24 die folgende Energieabschätzung beweisen.

Satz 4.10. (L^1 - L^2 -Abschätzung im Außengebiet)

Seien $\eta > 0$, $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit sternförmigem Komplement. Zudem seien $k_0 \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, dass $k_0 = 2k$, falls k_0 gerade ist, und $k_0 = 2k - 1$, falls k_0 ungerade ist. Des Weiteren seien $u_0, (1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, \theta_0 \in D(\Delta_0^s) \cap L^1(\Omega)$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$. Dann erfüllt die Lösung von (4.7) die folgenden Abklingabschätzungen:

Für $\gamma \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_x^{k_0}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{\eta} - \frac{n}{4\eta}} \|((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\ &\quad + Ce^{-ct} \|\Delta_0^{2k}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

und für $\gamma > \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\partial_x^{k_0}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{\eta} - \frac{n}{4\eta}} \|((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\ &\quad + C(1+t)^{\frac{l}{2\eta(\frac{1-2\gamma}{2})}} \|\Delta_0^{2k+l}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

für $t \geq 0$ und $k \geq 0, l \geq 0$ mit $0 \leq 2k + l \leq s$. Es bezeichnet C eine generische, positive Konstante, die insbesondere nicht von t und den Anfangsdaten abhängt.

Beweis: Mit elliptischer Regularität erhalten wir

$$\|\partial_x^{k_0}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2} \leq \|\Delta_0^{2k}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2}.$$

Nach Satz 2.14 und Satz 2.24 gilt im Fourierbild die punktweise Abschätzung

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_t(t, \xi)|^2 + |\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\hat{\theta}(t, \xi)|^2 \\ \leq Ce^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\rho(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{2\eta}, & |\xi| \leq 1, \\ |\xi|^{2\eta(\frac{1-2\gamma}{2})}, & |\xi| > 1. \end{cases}$$

Kapitel 4: Anwendungsbeispiel

Da $\tilde{\mathcal{F}}$ zudem eine unitäre Abbildung ist, für die (4.8) gilt, ist

$$\begin{aligned}
& \|\partial_x^{k_0}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_t, u, \theta)\|_{L^2}^2 \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{4k} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_t(t, \xi)|^2 + |\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\hat{\theta}(t, \xi)|^2 \right) d\xi \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{4k} C e^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\
& = \underbrace{\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{4k} C e^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi}_{=: I_1} \\
& \quad + \underbrace{\int_{|\xi| > 1} |\xi|^{4k} C e^{-c\rho(\xi)t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi}_{=: I_2}.
\end{aligned}$$

Weiter existiert nach Satz 4.8 ein $c > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $v \in L^2(\Omega) \cap L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|(\tilde{\mathcal{F}}v)(\xi)| &= \left| \int_{\Omega} \overline{\psi(x, \xi)} v(x) dx \right| \\
&\leq c(1 + |\xi|)^m \int_{\Omega} |v(x)| dx \\
&= c(1 + |\xi|)^m \|v\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \int_{|\xi| \leq 1} (1 + |\xi|)^m |\xi|^{4k} e^{-c|\xi|^{2\eta}t} d\xi \|((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1}^2 \\
&\leq C \int_{|\xi| \leq 1} 2^m |\xi|^{4k} e^{-c|\xi|^{2\eta}t} d\xi \|((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1}^2 \\
&\leq C(1 + t)^{-\frac{4k+n}{2\eta}} \|((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^1}^2,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz F.1 (ii) verwendet haben.

Ist $\gamma \leq \frac{1}{2}$, das heißt $2\eta(\frac{1-2\gamma}{2}) \geq 0$, so ergibt sich die Abschätzung von I_2 analog zum Beweis von Satz 4.5 durch

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{4k} C e^{-c|\xi|^{2\eta(\frac{1-2\gamma}{2})}t} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\
&\leq C e^{-ct} \int_{|\xi| > 1} |\xi|^{4k} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma})|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\
&\leq C e^{-ct} \|\Delta_0^{2k}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Ist hingegen $\gamma > \frac{1}{2}$ so erhalten wir unter Verwendung von Satz F.1 (ii)

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|\xi|>1} |\xi|^{4k} C e^{-c|\xi|} {}^{2\eta}\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)_t \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\
&\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq 1} |\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|} {}^{2\eta}\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)_t \int_{|\xi|>1} |\xi|^{4k+2l} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\
&\leq C(1+t) {}^{\frac{l}{\eta}\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)} \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2(2k+l)} \left((1 + |\xi|^{2\eta\gamma}) |\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right) d\xi \\
&= C(1+t) {}^{\frac{l}{\eta}\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)} \|\Delta_0^{2k+l}((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, u_0, \theta_0)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

□

Genau wie in Abschnitt 4.2 erhält man zudem eine Abschätzung für $\Delta_0^{\eta/2}u$, was uns das folgende Korollar liefert.

Korollar 4.11. Mit den Voraussetzungen aus Satz 4.10 sowie der zusätzlichen Voraussetzung $(-\Delta)^{\eta/2}u_0 \in D(\Delta_0^s) \cap L^1(\Omega)$ erfüllt die Lösung die folgenden L^1 - L^2 -Abschätzungen:

Für $\gamma \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_t, \Delta_0^{\eta/2}u, \theta)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{\eta} - \frac{n}{2\eta}} \|\Delta_0^k((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, (\Delta_0)^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\
&\quad + C e^{-ct} \|\Delta_0^k((1 + \Delta_0^{\eta\gamma})u_1, \Delta_0^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^2},
\end{aligned}$$

und für $\gamma > \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^k((1 + (\Delta_0)^{\eta\gamma})u_t, (\Delta_0)^{\eta/2}u, \theta)\|_{L^2} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{k}{\eta} - \frac{n}{2\eta}} \|\Delta_0^k((1 + (\Delta_0)^{\eta\gamma})u_1, (\Delta_0)^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^1} \\
&\quad + C(1+t) {}^{\frac{l}{2\eta}\left(\frac{1-2\gamma}{2}\right)} \|\Delta_0^{k+l}((1 + (\Delta_0)^{\eta\gamma})u_1, (\Delta_0)^{\eta/2}u_0, \theta_0)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Kapitel 5

Regularitätsverlust und exponentielle Stabilität - Eine Gegenüberstellung

Wie wir bereits in Kapitel 2, Abschnitt 2.2, beobachten konnten, stimmt für (ATP) die Region der exponentiellen Stabilität, unter den dort aufgeführten Zusatzvoraussetzungen an A , mit der Region, in der die Glättungseigenschaft vorliegt überein. Überdies fällt auch die Region ohne exponentielle Stabilität mit der Region, in der ein Regularitätsverlust vorliegt, zusammen. Auch für einige weitere Gleichungen ist bekannt, dass sich das Fehlen von exponentieller Stabilität beim Übergang vom beschränkten Gebiet zum Ganzraumfall in einem Regularitätsverlust widerspiegelt. Unglücklicherweise gibt es bisher noch keine allgemein gebräuchliche Definition des Regularitätsverlustes im Rahmen der Halbgruppentheorie. Dadurch war es bisher nicht möglich, den oben beschriebenen Effekt vom Übergang vom beschränkten Gebietes auf den Ganzraum abstrakt zu charakterisieren oder allgemein zu beweisen. Eine wesentliche Schwierigkeit liegt dabei darin, die Begriffe auf ein gemeinsames abstraktes Level zu bringen. Im beschränkten Gebiet kommt erschwerend hinzu, dass das asymptotische Verhalten der Halbgruppe im Allgemeinen von der Wahl der Randbedingungen abhängt, wodurch nicht klar ist, welche Wahl an Randbedingungen die Geeignete ist, um den dargelegten Effekt zu verifizieren.

Ein gängiges Hilfsmittel, um die exponentielle Stabilität einer Halbgruppe auf einem Hilbertraum nachzuweisen, ist der Satz von Gearhart-Prüss, welcher besagt, dass eine Halbgruppe genau dann exponentiell stabil ist, wenn die imaginäre Achse in der Resolventenmenge des Generators und die Resolventenabbildung dort gleichmäßig beschränkt ist. Auch die Zuhilfenahme von Multiplikatormethoden ist in diesem Zusammenhang ein beliebtes Werkzeug. Im Gegensatz dazu wird im Ganzraumfall häufig die Fourier-Transformation verwendet, um wiederum mit Hilfe von Multiplikatormethoden punktweise Abschätzungen der Lösung im Fourierraum zu zeigen. Deren Optimalität im Bezug auf das asymptotische Verhalten der exponentiellen Rate wird meist mittels einer Eigenwertentwicklung der zur gewöhnlichen Differentialgleichung im Fourierbild gehörigen Eigenwerte bewiesen.

In diesem Kapitel wollen wir das oben beschriebene Phänomen anhand von drei Gleichungen diskutieren, indem wir Resultate aus verschiedenen Arbeiten wiedergeben, bei denen dieser Effekt beobachtet werden kann und kurz darauf eingehen, wie die entsprechenden Ergebnisse erzielt

Kapitel 5: Regularitätsverlust und exponentielle Stabilität - Eine Gegenüberstellung

werden. Dabei werden wir im Fall eines beschränkten Gebietes nur auf ausgewählte Arbeiten genauer eingehen, da durch die Vielzahl an möglichen Randbedingungen eine vollständige Auflistung aller Resultate den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

5.1 Thermoelastische Plattengleichungen

Die linearen thermoelastischen Plattengleichungen nach Kirchhoff und Love sind durch das System von Differentialgleichungen

$$(TEP) \quad \begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \mu \Delta u_{tt} + \Delta \theta = 0, & \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ \theta_t + \operatorname{div} q - \Delta u_t = 0, & \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ \tau q_t + q + \nabla \theta = 0, & \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1, \theta(0, \cdot) = \theta_0, q(0, \cdot) = q_0, & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

für Parameter $\tau, \mu \geq 0$ gegeben.

Die Gleichung ergibt sich dabei gerade als Kopplung einer Plattengleichung mit einem Wärmeleitungssystem. Die zugrundeliegende Plattengleichung, welche auch als Kirchhoffsche Plattengleichung bekannt ist, beruht auf einer von Bernoulli getroffenen Hypothese für elastische Stäbe, welche später von Kirchhoff aufgegriffen und auf Platten übertragen wurde, vergleiche [Ki50], Abschnitt 2. Diese Hypothese diente Love als Grundlage, um das Modell der Plattengleichung nach Kirchhoff-Love aufzustellen, welches Spannungs- und Verformungszustände dünner Platten beschreibt, siehe [Lo88]. Eine detaillierte Herleitung der Gleichung mit Trägheitsterm ($\mu > 0$) und ohne ($\mu = 0$) findet sich zum Beispiel in [LaLi88]. Auch die Wahl der in (TEP) auftretenden Kopplungsterme kann der Arbeit von Langnese und Lions entnommen werden.

Der Wärmefluss kann dabei unter anderem mit dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz ($\tau = 0$)

$$q = -\kappa \nabla \theta \tag{5.2}$$

modelliert werden, wobei κ der Wärmeleitfähigkeit entspricht. In (TEP) wurde dabei ohne Einschränkung $\kappa = 1$ angenommen. Auch wenn sich das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz als adäquates Modell erwiesen hat, führt es zum Beispiel zum physikalischen Paradoxon der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Dieser unerwünschte Effekt konnte beispielsweise von Cattaneo durch Einfügen eines kleinen Relaxionsparameters $\tau > 0$ behoben werden, siehe [Ca58]. Anstelle von (5.2) erhalten wir dann das Wärmeleitungsgesetz von Cattaneo

$$\tau q_t + q = -\kappa \nabla \theta. \tag{5.3}$$

Im Ganzraumfall wurde in [RaUe17] das asymptotische Verhalten von Lösungen zur linearen thermoelastischen Plattengleichungen (TEP) für allgemeine Parameter $\mu \geq 0$ und $0 \leq \tau \leq 1$ studiert.

Es wurde neben punktweisen Abschätzungen der zugehörigen Energie im Fourierraum, die in allen Fällen mit Hilfe von Multiplikatormethoden gezeigt wurden, auch L^1 - L^2 -Abschätzungen der Lösung bewiesen, in denen sich für $\tau > 0$ und $\mu = 0$ das Auftreten eines Regularitätsverlustes ablesen lässt. Durch Entwicklung der Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms wurde zudem in allen Fällen die Optimalität der punktweisen Abschätzung der Lösung im Fourierbild im Bezug auf das asymptotische Verhalten der exponentiellen Rate bewiesen. All diese Resultate werden wir nun für die verschiedenen Fälle der Parameter τ und μ wiedergeben.

5.1: Thermoelastische Plattengleichungen

Für das Cauchyproblem mit Fourierschem Wärmeleitungsgesetz ($\tau = 0$), ohne zusätzlichen Trägheitsterm ($\mu = 0$), also

$$\begin{aligned} u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta \theta &= 0, \\ \theta_t - \Delta \theta - \Delta u_t &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

mit Anfangsdaten

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.5}$$

wurden die folgenden Sätze bewiesen.

Satz 5.1. (Punktweise Abschätzung im Fourierraum)

Die Fourier-Transformierte $(\hat{u}, \hat{\theta})$ der Lösung (u, θ) des Cauchyproblems (5.4), (5.5) genügt der punktweisen Abschätzung

$$|\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\hat{\theta}(t, \xi)|^2 \leq \frac{13}{3} e^{-\frac{1}{52} \rho_1(\xi)t} \left(|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 \right),$$

für alle $t > 0$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dabei ist $\rho_1(\xi) = |\xi|^2$.

Damit lässt sich das folgende polynomielle Abklingen zeigen.

Satz 5.2. (Abklingraten)

Seien $u_1, \Delta u_0, \theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann erfüllt die Lösung (u, θ) des Cauchyproblems das folgende polynomielle Abklingen

$$\|\partial_x^k(u_t, \Delta u, \theta)(t)\|_{L^2} \leq C t^{-\frac{n}{4} - \frac{k}{2}} \|(u_1, \Delta u_0, \theta_0)\|_{L^1},$$

für $t > 0$ und $k \geq 0$. Hier bezeichnet C eine positive Konstante, die unabhängig von den Anfangsdaten ist.

Bemerkung 5.3. Falls wir für die Anfangsdaten zusätzlich $u_1, \Delta u_0, \theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ für ein $s \in \mathbb{N}$ voraussetzen, erhalten wir für die Lösung von (5.4) außerdem

$$\|\partial_x^k(u_t, \Delta u, \theta)(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4} - \frac{k}{2}} \|(u_1, \Delta u_0, \theta_0)\|_{L^1} + C e^{-ct} \|\partial_x^k(u_1, \Delta u_0, \theta_0)\|_{L^2}$$

für $t \geq 0$ und $0 \leq k \leq s$. Dabei bezeichnet C wieder eine positive Konstante, die unabhängig von t und den Anfangsdaten ist.

Für das Problem mit zusätzlichem Trägheitsterm ($\mu > 0$), das heißt für das System

$$\begin{aligned} u_{tt} + \Delta^2 u - \mu \Delta u_{tt} + \Delta \theta &= 0, \\ \theta_t - \Delta \theta - \Delta u_t &= 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

entsprechen die in [RaUe17] gezeigten Resultate gerade der in Korollar 2.26 bewiesenen punkt-

Kapitel 5: Regularitätsverlust und exponentielle Stabilität - Eine Gegenüberstellung

weisen Abschätzung der Energie im Fourierbild für $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\eta = 2$ sowie der in Korollar 4.7 gezeigten L^1 - L^2 -Abschätzung.

Betrachten wir nun das System mit dem Wärmeleitungsgesetz von Cattaneo ($\tau > 0$) mit Trägheitsterm ($\mu > 0$)

$$\begin{aligned} u_{tt} + \Delta^2 u - \mu \Delta u_{tt} + \Delta \theta &= 0, \\ \theta_t + \operatorname{div} q - \Delta u_t &= 0, \\ \tau q_t + q + \nabla \theta &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

und Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x), \quad q(0, x) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.8}$$

so konnten analoge Abschätzungen bewiesen werden:

Satz 5.4. (Punktweise Abschätzung im Fourierraum)

Die Fourier-Transformierte $(\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{q})$ der Lösung (u, θ, q) des Cauchyproblems (5.7) mit Anfangsdaten (5.8) genügt der punktweisen Abschätzung im Fourierbild

$$\begin{aligned} (1 + \mu|\xi|^2)|\hat{u}_t(t, \xi)|^2 + |\xi|^2|\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\hat{\theta}(t, \xi)|^2 + \tau|\hat{q}(t, \xi)| \\ \leq C e^{-c\rho_2(\xi)t} \left(|\hat{u}_1(t)|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0(t)|^2 + |\hat{\theta}_0(t)|^2 + \tau|\hat{q}_0(t)|^2 \right), \end{aligned}$$

für alle $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, wobei

$$\rho_2(\xi) := \begin{cases} \frac{|\xi|^2(1+\tau\mu|\xi|^2)}{(1+\tau|\xi|^2)(1+(\tau+\mu)|\xi|^2)}, & \mu \leq 1, \\ \frac{|\xi|^2}{1+\mu|\xi|^2}, & \mu > 1. \end{cases}$$

Dabei sind C und c positive Konstanten, die nicht von t, τ, μ und den Anfangsdaten abhängen. Die Konstanten sind explizit gegeben durch

$$(C, c) := \begin{cases} \left(\frac{13}{11}, \frac{1}{2370} \right), & \mu \leq 1, \\ \left(\frac{43}{29}, \frac{1}{344} \right), & \mu > 1. \end{cases}$$

Weiter konnte damit die folgende L^2 - L^1 -Abschätzungen bewiesen werden.

Satz 5.5. (Abklingraten)

Es seien $u_1, \Delta u_1, \Delta u_0, \theta_0, q_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$. Dann erfüllt die Lösung (u, θ, q) von (5.7) die Abklingabschätzungen

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k(u_t, \mu\Delta u_t, \Delta u, \theta, \tau q)(t)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}} \|(u_1, \mu\Delta u_1, \Delta u_0, \theta_0, q_0)\|_{L^1} \\ &\quad + Ce^{-c\tau\mu t} \|\partial_x^k(u_1, \mu\Delta u_1, \Delta u_0, \theta_0, q_0)\|_{L^2}, \quad \mu \leq 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k(u_t, \mu\Delta u_t, \Delta u, \theta, \tau q)(t)\|_{L^2} &\leq C(1+\frac{t}{\mu})^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}} \|(u_1, \mu\Delta u_1, \Delta u_0, \theta_0, \tau q_0)\|_{L^1} \\ &\quad + Ce^{-\frac{ct}{\mu}} \|\partial_x^k(u_1, \mu\Delta u_1, \Delta u_0, \theta_0, \tau q_0)\|_{L^2}, \quad \mu > 1, \end{aligned}$$

für $t \geq 0$ und $0 \leq k \leq s$.

Hierbei bezeichnen C und c positive Konstanten, die unabhängig von τ, μ und den Anfangsdaten sind.

Für das System (5.7) ohne Inertialterm ($\mu = 0$) wurden die folgenden Sätze bewiesen.

Satz 5.6. (Punktweise Abschätzung im Fourierraum)

Die Fourier-Transformierte $(\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{q})$ der Lösung (u, θ, q) des Cauchyproblems (5.7) erfüllt für alle $t > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ die punktweise Abschätzung

$$\begin{aligned} |\hat{u}_t(t, \xi)|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}(t, \xi)|^2 + |\hat{\theta}(t, \xi)|^2 + \tau |\hat{q}(t, \xi)|^2 \\ \leq \frac{106}{47} e^{-\frac{1}{424}\eta(\xi)t} \left(|\hat{u}_1(\xi)|^2 + |\xi|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 + |\hat{\theta}_0(\xi)|^2 + \tau |\hat{q}_0(\xi)|^2 \right), \end{aligned}$$

wobei $\eta(\xi) := |\xi|^2 / (1 + \tau|\xi|^2)^2$.

Satz 5.7. (Abklingabschätzung)

Es seien $u_1, \Delta u_0, \theta_0, q_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$. Dann erfüllt die Lösung (u, θ, q) von (5.7) für $\mu = 0$ die Abklingabschätzung

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k(u_t, \Delta u, \theta, \sqrt{\tau}q)(t)\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}} \|(u_1, \Delta u_0, \theta_0, \tau q_0)\|_{L^1} \\ &\quad + C(1+t)^{-\frac{l}{2}} \|\partial_x^{k+l}(u_1, \Delta u_0, \theta_0, \sqrt{\tau}q_0)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

für $t \geq 0$ und $k \geq 0, l \geq 0$ mit $0 \leq k+l \leq s$. Es bezeichnet C eine generische, positive Konstante, die insbesondere nicht von t und den Anfangsdaten abhängt.

Bemerkung 5.8. *Im Gegensatz zu den in Satz 5.1, Satz 5.2, Satz 5.4 und Satz 5.5 vorgestellten Abschätzungen, kann in Satz 5.6 und Satz 5.7 ein Regularitätsverlust beobachtet werden. Dieser zeigt sich zum einen in der L^1 - L^2 -Abschätzung, da eine höhere Regularität an die Anfangsdaten vorausgesetzt werden muss, um ein Abklingen der Lösung sicherzustellen und zum anderen im asymptotischen Verhalten von η bzw. der zum System erster Ordnung im Fourierbild gehörigen Eigenwerte für $|\xi| \rightarrow \infty$. Ebenso kann in den punktweisen Abschätzungen von Satz 5.1 und Satz 5.4 direkt abgelesen werden, dass hier die Glättungseigenschaft vorliegt, da $\rho_1 \in \Theta(|\xi|^2)$ und $\rho_2 \in \Theta(1)$ für $|\xi| \rightarrow \infty$ gelten.*

Kapitel 5: Regularitätsverlust und exponentielle Stabilität - Eine Gegenüberstellung

Vor allem in beschränkten Gebieten wurden thermoelastische Plattengleichungen schon vielfach untersucht:

Im Fall der linearen thermoelastischen Plattengleichung ohne zusätzlichen Trägheitsterm ($\mu = 0$) konnte unter anderem gezeigt werden, dass das zugehörige Anfangs-Randwert-Problem für eine Vielzahl an verschiedenen Randbedingungen im Fall des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes ($\tau = 0$) typischerweise exponentielle Stabilität aufweist, während diese Eigenschaft beim Übergang zum Gesetz von Cattaneo verloren geht. Für die Randbedingungen

$$u = \Delta u = \theta = 0$$

wurde im Fall $\tau = \mu = 0$ in [MuRa95] die exponentielle Stabilität durch Anwenden des in Kapitel 2, Abschnitt 2.2, vorgestellten Diagonalisierungssatzes und Multiplikatormethoden bewiesen, wohingegen für $\tau > 0$, $\mu = 0$ in [QuRa08] und [QuRa11] das Spektrum des Generators A der zugehörigen Halbgruppe charakterisiert wurde und gezeigt wurde, dass für die Spektralschranke des Generators $s(A) = 0$ gilt, woraus gefolgert werden kann, dass die zugehörige Halbgruppe nicht exponentiell stabil ist. Im Fall $\mu > 0$ erhalten wir hingegen in beiden Fällen, $\tau = 0$ und $\tau > 0$, exponentielle Stabilität, was für $\tau > 0$ in [FeMu12] im zweidimensionalen Fall durch Anwendung des Satzes von Gerhardt-Prüss gezeigt wurde und für $\tau = 0$ in [MRSV20] mit Hilfe von Multiplikatormethoden bewiesen wurde. All diese Fälle wurden zudem in [MRSV20] zusammengefasst, wobei in allen Fällen die Abklingrate explizit in Abhängigkeit der wesentlichen Parameter (Delay $\tau \geq 0$, Trägheitskonstante $\mu \geq 0$) angegeben wurde. Die exponentielle Stabilität wurde hier in allen Fällen unter Zuhilfenahme von Energie- und Multiplikatormethoden bewiesen. Zusätzlich dazu wurden die singulären Grenzwerte $\tau \rightarrow 0$ und $\mu \rightarrow 0$ untersucht, um die jeweilige Relevanz der Parameter für das Auftreten und Fehlen der exponentiellen Stabilität in den verschiedenen Modellen zu verstehen.

5.2 Timoshenko Systeme

Timoshenko Systeme erklären als Teil der Balkentheorie das Verhalten von Schwingungen sowie von Biegungen elastischer Träger. Bei der Modellierung dieses Systems sind die Scherkraft und das Biegemoment die entscheidenden Kräfte.

Die einfachste Form eines Timoshenko Systems, das sogenannte klassische konservative Timoshenko System, ergibt sich gerade durch Kopplung zweier Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) &= 0,\end{aligned}$$

dabei sind ρ_1, ρ_2, k und b positive Konstanten. Die Unbekannten φ und ψ sind von $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$ abhängige Funktionen, die die Querverschiebung des Balkens sowie den Rotationswinkel beschreiben.

Für eine ausführliche Einführung in die Modellierung von Timoshenko Systemen wollen wir auf [ACJRA20] sowie [Ma12] verweisen.

Als rein hyperbolisches System ist das System konservativ, damit wird die Energie erhalten.

In [So99] wurde erstmals gezeigt, dass das System mit zusätzlicher Reibungsdämpfung ($d > 0$)

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + d\varphi_t &= 0\end{aligned}\tag{5.9}$$

mit Anfangsbedingungen

$$\varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \psi(0, \cdot) = \psi_0, \psi_t(0, \cdot) = \psi_1$$

sowie Dirichlet-Randbedingungen

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0 \quad (5.10)$$

für $t \geq 0$, genau dann exponentiell stabil ist, wenn

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}, \quad (5.11)$$

das heißt, genau dann, wenn die Wellengeschwindigkeiten gleich sind.

Dasselbe Ergebnis konnte ebenfalls in [MuRa03] durch einen alternativen Beweis gezeigt werden. Die exponentielle Stabilität unter der Zusatzvoraussetzung (5.11) wurde hier mit Hilfe des Satzes von Gerhardt-Prüss bewiesen. Im Fall $\frac{\rho_1}{k} \neq \frac{\rho_2}{b}$ wird ebenfalls der Satz von Gerhardt-Prüss verwendet, da dieser neben einer hinreichenden auch eine notwendige Bedingung für die exponentielle Stabilität der Halbgruppe liefert. Genauer werden Folgen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ sowie $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ konstruiert, so dass $(i\lambda_n - A)V_n = F_n$ beschränkt bleibt, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n\|_{\mathcal{H}} = \infty$, wobei A den Generator der Halbgruppe und \mathcal{H} den zugrundeliegenden Hilbertraum bezeichnen. Hieraus folgt nun, dass keine exponentielle Stabilität vorliegt.

Für das zugehörige Cauchyproblem konnten in [IdHaKa08] L^2 - L^1 -Abklingabschätzungen und punktweise Abschätzungen im Fourierraum gezeigt werden, in denen sich das Auftreten eines Regularitätsverlustes im Fall $\frac{\rho_1}{k} \neq \frac{\rho_2}{b}$ sowie das der Glättungseigenschaft im Fall $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$ widerspiegeln. Dazu wird das System mit $U := (\varphi_x - \psi, \varphi_t, \psi_x, \psi_t)$ zunächst auf ein hyperbolisches System erster Ordnung der Form

$$\begin{aligned} U_t + AU_x + LU &= 0, \\ U(0, x) &= U_0(x), \end{aligned} \quad (5.12)$$

transformiert, was nach Anwenden der Fourier-Transformation in das System

$$\begin{aligned} \hat{U}_t + i\xi A\hat{U} + L\hat{U} &= 0, \\ \hat{U}(0, \xi) &= \hat{U}_0(\xi) \end{aligned} \quad (5.13)$$

übergeht. Mit Multiplikatormethoden konnte dann die folgende punktweise Abschätzung im Fourierraum bewiesen werden

Satz 5.9. Die Lösung von (5.13) erfüllt für alle $t \geq 0$ und $\xi \in \mathbb{R}$ die folgenden punktweisen Abschätzungen:

Falls $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$, so gilt

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C e^{-c\eta_1(\xi)t} |\hat{U}_0(\xi)|,$$

und falls $\frac{\rho_1}{k} \neq \frac{\rho_2}{b}$, so gilt

$$|\hat{U}(t, \xi)| \leq C e^{-c\eta_2(\xi)t} |\hat{U}_0(\xi)|,$$

wobei $\eta_1(\xi) := \xi^2/(1 + \xi^2)$ und $\eta_2(\xi) := \xi^2/(1 + \xi^2)^2$ und C, c positive Konstanten bezeichnen.

Kapitel 5: Regularitätsverlust und exponentielle Stabilität - Eine Gegenüberstellung

Wie üblich lassen sich damit L^2 - L^1 - Abklingabschätzungen beweisen.

Satz 5.10. Es sei $U_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W^{s,2}(\mathbb{R})$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt die Lösung von (5.12) die folgenden Abklingabschätzungen:

Falls $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$, gilt

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}} \|U_0\|_{L^1} + Ce^{-ct} \|\partial_x^k U_0\|_{L^2}$$

und falls $\frac{\rho_1}{k} \neq \frac{\rho_2}{b}$, gilt

$$\|\partial_x^k U(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}} \|U_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}} \|\partial_x^{k+l} U_0\|_{L^2},$$

für $t \geq 0$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k+l \leq s$. Dabei bezeichnen C und c generische, positive Konstanten, die nicht von t und den Anfangsdaten abhängen.

Zusätzlich zu den punktweisen Abschätzungen im Fourierraum und den damit einhergehenden Abklingabschätzungen wurde in [IdHaKa08] durch asymptotische Entwicklung der Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms die Optimalität der punktweisen Abschätzung im Fourierraum im Bezug auf das asymptotische Verhalten der exponentiellen Rate bewiesen. Das Auftreten bzw. Fehlen des Regularitätsverlustes zeigt sich auch hier im asymptotischen Verhalten von η_1 bzw. η_2 für $\xi \rightarrow \infty$, da $\eta_1 \in \Theta(1)$ für $\xi \rightarrow \infty$, falls $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$ und $\eta_2 \in \Theta(\xi^{-2})$ für $\xi \rightarrow \infty$, falls $\frac{\rho_1}{k} \neq \frac{\rho_2}{b}$.

5.3 Thermoelastizitätsgleichungen

Durch die Thermoelastizitätsgleichungen wird das Verhalten eines elastischen, wärmeleitenden Körpers beschrieben. Die klassischen linearisierten Thermoelastizitätsgleichungen erhält man dabei gerade als Kopplung der hyperbolischen Elastizitätsgleichung mit der parabolischen Wärmeleitungsgleichung, welche sich durch Einbeziehen des Fourierschen Wärmeleitungsgesetz ergibt. Im einfachsten Fall eines homogenen, isotropen Mediums lauten die Gleichungen in zwei oder drei Raumdimensionen

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((2\mu + \lambda)\nabla\nabla' - \mu\nabla \times \nabla \times)u + \tilde{\gamma}\nabla\theta &= 0, \\ \tilde{\delta}\theta_t - \kappa\Delta\theta + \tilde{\gamma}\nabla'u_t &= 0, \end{aligned} \tag{5.14}$$

ohne die Berücksichtigung einer Kraft oder Wärmezufuhr auf der rechten Seite. Mit ∇ wird hier der Gradient bezeichnet und mit ∇' der Divergenz-Operator. Dabei sind $\mu, \lambda, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ und κ Konstanten. μ, λ sind die sogenannten Lamé-Konstanten mit

$$\mu > 0, \quad 2\mu + n\lambda > 0$$

und $\tilde{\delta}, \kappa > 0, \tilde{\gamma} \neq 0$.

Die Unbekannten zur Beschreibung des elastischen und thermischen Verhaltens eines Körpers sind die Verschiebung $u = u(t, x) := X(t, x) - x$, wobei $X(t, x)$ die Position des Referenzpunktes x zur Zeit t bezeichnet, und die Temperaturdifferenz $\theta = \theta(t, x) := T(t, x) - T_0$, wobei T die absolute Temperatur bezeichnet und T_0 eine gewählte feste Referenztemperatur ist. Eine Verformung des Mediums geht mit einer Temperaturänderung einher, die durch Kopplung der

Wärmeleitung und Elastizität modelliert wird. Eine ausführliche Herleitung der Gleichungen kann unter anderem [JiRa00] oder [Ra09] entnommen werden.

In einer Raumdimension reduzieren sich die Gleichungen im homogenen (und notwendigerweise isotropen) Fall auf

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \tilde{\gamma}\theta_x &= 0, \\ \tilde{\delta}\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \tilde{\gamma}u_{tx} &= 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Wie schon im Fall der thermoelastischen Plattengleichung führt das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz auch hier zum physikalischen Paradoxon der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Um diesen Modellierungsfehler zu beheben, wurden verschiedene Modelle einer hyperbolischen Wärmeleitung entwickelt, darunter auch das bereits beschriebene Gesetz von Cattaneo. Mit diesem ergibt sich für ein homogenes, isotropes Medium in zwei oder drei Raumdimensionen die Thermoelastizitätsgleichungen mit „second sound“ durch

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu + \lambda)\nabla\nabla' u + \beta\nabla\theta &= 0, \\ \tilde{\delta}\theta_t + \gamma\nabla' + q\delta\nabla' u_t &= 0, \\ \tau_0 q_t + q + \kappa\nabla\theta &= 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Parameter $\rho, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\delta}\tau_0$ und κ sind wieder positive Konstanten mit $2\mu + n\lambda > 0$. In einer Raumdimension vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\begin{aligned} u_{tt} - a u_{xx} - b\theta_x &= 0, \\ \theta_t + c q_x + d u_{tx} &= 0, \\ \tau q_t + q + \kappa\theta_x &= 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Dabei sind auch hier a, b, c, d, τ, κ positive Konstanten, die das zugrundeliegende, homogene Medium beschreiben.

In [Ra09] wurde das quantitative Verhalten beider Modelle sowohl in einer Raumdimension als auch in zwei und drei Raumdimensionen untersucht. Dabei wurden neben den zugehörigen Cauchyprobleme auch Anfangs-Randwert-Probleme analysiert.

Wir betrachten zunächst das Anfangs-Randwert-Problem der klassischen Thermoelastizitätsgleichungen in einer Raumdimension, wobei wir uns im gesamten Abschnitt erneut auf Dirichlet-Randbedingungen beschränken werden. Dazu sei $\Omega = (0, 1)$ oder $\Omega = (0, \infty)$. Versehen wir das eindimensionale Problem mit zusätzlichen Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x) \quad \text{in } \Omega,$$

sowie Dirichlet-Randbedingungen

$$u = \theta = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

so konnte in [Ra09] mit Hilfe von Multiplikatormethoden die exponentielle Stabilität gezeigt werden.

In zwei oder drei Raumdimensionen kann hingegen selbst im einfachsten Fall (5.14) mit Dirichlet-Randbedingungen im Allgemeinen keine exponentielle Stabilität mehr erwartet werden, was unter anderem in [JiRa00] untersucht wird. Hier wird gezeigt, dass der Generator der zugehörigen Halbgruppe rein imaginäre Eigenwerte haben kann. Um die exponentielle Stabilität sicherzustellen, müssen zusätzliche Voraussetzungen angenommen werden. In [Ra09] wurde für Gebiete

Kapitel 5: Regularitätsverlust und exponentielle Stabilität - Eine Gegenüberstellung

mit Lipschitz-Rand bewiesen, dass die Lösung (u, θ) exponentiell gegen Null konvergiert, falls die Rotationsfreiheit von u , d.h. $\operatorname{rot} u = \nabla \times u = 0$, vorausgesetzt wird.

Für die korrespondierenden Cauchyprobleme konnten in [Ra09] punktweise Abschätzungen der Lösung im Fourierbild gezeigt werden, mit denen L^2 - L^p -Abklingabschätzungen für $p \in [1, 2]$ gefolgert werden konnten:

In einer Raumdimension werden die klassischen Thermoelastizitätsgleichungen (5.15) dazu auf ein symmetrisches System erster Ordnung der Form

$$V_t + AV_x - BV_{xx} = 0 \quad (5.18)$$

mit $V := (\sqrt{a}u_x, u_t, \theta)$ transformiert. Mit Hilfe von Multiplikatormethoden konnte dann die folgende punktweise Abschätzungen der Lösung im Fourierbild bewiesen werden.

Satz 5.11. Es existieren Konstanten $C, C_1 > 0$, so dass die Fourier-Transformierte $\hat{V} = (\sqrt{a}\hat{u}_x, \hat{u}_t, \hat{\theta})$ der Lösung des Cauchyproblems (5.18) der folgenden punktweisen Abschätzung genügt.

$$|\hat{V}(t, \xi)|^2 \leq Ce^{-C_1\rho(|\xi|)t} |\hat{V}(0, \xi)|^2 \quad \text{für } (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

wobei $\rho(r) := r^2/(1+r^2)$.

Damit lassen sich dann wie üblich L^2 - L^p -Abklingabschätzungen beweisen.

Satz 5.12. Es seien $l, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq l$ und $p \in [1, 2]$. Weiter sei $V_0 \in W^{l,2}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass die Lösung von (5.18) die Abklingabschätzung

$$\|\partial_x^l V(t)\|_2^2 \leq C\{e^{-C_1 t} \|\partial_x^l V(0)\|_2^2 + (1+t)^{-(2\eta+l-k)} \|\partial_x^k V(0)\|_p^2\}$$

erfüllt, wobei $\eta = \frac{1}{2p} - \frac{1}{4}$ und C_1 wie in Satz 5.11.

Im zwei- und dreidimensionalen Fall wird u zunächst in einen rotationsfreien Anteil u^{po} und einen divergenzfreien Anteil u^{so} durch $u = u^{po} + u^{so}$ aufgeteilt. Dies liefert uns die Zerlegung von (5.14) in die zwei Systeme

$$\begin{aligned} u_{tt}^{po} - \alpha \nabla \nabla' u^{po} + \tilde{\gamma} \nabla \theta &= 0, \\ \tilde{\delta} \theta_t - \kappa \Delta \theta + \tilde{\gamma} \nabla' u_t^{po} &= 0, \\ u^{po}(0) = (u_0)^{po}, u_t^{po}(0) = (u_1)^{po}, \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

und

$$\begin{aligned} u_{tt}^{so} - \mu \Delta u^{so} &= 0, \\ u^{so}(0) = (u_0)^{so}, u_t^{so}(0) &= (u_1)^{so}. \end{aligned}$$

Das asymptotische Verhalten von Lösungen zur Wellengleichung und damit von u^{so} ist wohlbekannt, siehe zum Beispiel [Ra15]. Es liegt kein Regularitätsverlust vor. Um das asymptotische Verhalten von u^{po} zu bestimmen, geht man für das System (5.19) wie im eindimensionalen Fall vor und zeigt unter Zuhilfenahme von Multiplikatormethoden nach Transformation auf ein symmetrisches System die Abschätzung

$$|\hat{V}(t, \xi)|^2 \leq Ce^{-C_1\rho(|\xi|)t} |\hat{V}(0, \xi)|^2 \quad \text{für } (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n,$$

wobei wieder $\rho(r) := r^2/(1 + r^2)$ und C, C_1 positive Konstanten sind. Auch hier konnten mit Hilfe der punktweisen Abschätzungen im Fourierbild Satz 5.12 entsprechende L^2 - L^p -Abklingabschätzungen bewiesen werden.

Da sowohl im eindimensionalen Fall als auch im mehrdimensionalen Fall $\rho \in \Theta(1)$ für $r \rightarrow \infty$, zeigt sich sowohl in Satz 5.11, als auch in der letzten punktweisen Abschätzung, dass das System die Glättungseigenschaft hat und kein Regularitätsverlust vorliegt. Dies spiegelt sich ebenfalls in den Normabschätzungen von Satz 5.12 wider.

Auch für das System mit „second sound“ konnte mit Hilfe von Multiplikatormethoden im eindimensionalen Fall für $\Omega = (0, L)$ die exponentielle Stabilität bewiesen werden, falls das System mit Dirichlet-Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, L) = \theta(t, 0) = \theta(t, L) = 0$$

ausgestattet wird, siehe [Ra09]. Anders als bei den thermoelastischen Plattengleichungen oder auch bei anderen verwandten hyperbolisch-parabolischen und hyperbolisch-hyperbolischen Problemen, wie Systemen vom Timoshenko-Typ, führt der Übergang vom Fourierschen Wärmeleitungsgesetz zum Cattaneoschen Wärmeleitungsgesetz also nicht zum Verlust der exponentiellen Stabilität.

Die gleiche Beobachtung kann auch für das zwei- und dreidimensionale Problem (5.16) auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n = 2, 3$ mit glattem Rand und Dirichlet-Randbedingungen

$$u(t, \cdot) = 0, \theta(t, \cdot) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

gemacht werden. Allerdings müssen wie im Fall der klassischen Thermoelastizität zusätzliche Voraussetzungen angenommen werden:

Neben der Rotationsfreiheit von u , muss zudem die Zusatzvoraussetzungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} q &= 0, & \text{in } [0, \infty) \times \Omega, \\ \nu \times q &= 0, & \text{in } [0, \infty) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

an q vorausgesetzt werden, um die exponentielle Stabilität zu sichern, die in [Ra09] mit Hilfe von Multiplikatormethoden gezeigt wurde.

Um Abschätzungen der zugehörigen Cauchyprobleme zu zeigen, geht man genau wie im Fall der klassischen Thermoelastizität vor und kann auch hier punktweise Abschätzungen der Lösung im Fourierbild beweisen, die zeigen, dass das System die Glättungseigenschaft hat.

Anhang A

Nützliches über Halbgruppen

Wir fassen in diesem Kapitel einige Begriffe und wohlbekannt Resultate der Halbgruppentheorie zusammen.

Im Weiteren sei X ein Banachraum und X' sei der zugehörige Dualraum. Es bezeichne $\langle x', x \rangle$ die Auswertung von x' in x . Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir die Norm auf X .

Für $x \in X$ definieren wir $F(x) \subset X'$ durch $F(x) := \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}$. Dabei ist $F(x) \neq \emptyset$ nach dem Satz von Hahn-Banach.

Im Folgenden betrachten wir das abstrakte Cauchyproblem in X

$$\begin{cases} \partial_t u(t) - Au(t) = 0, & (t > 0) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$u(\cdot)$ nehme dabei Werte in X an. A sei ein linearer, abgeschlossener Operator mit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ und der Anfangswert $u_0 \in X$ sei gegeben.

Definition A.1. Das Cauchyproblem (A.1) heißt (klassisch) wohlgestellt, falls

- (i) für alle $u_0 \in D(A)$ eine eindeutige klassische Lösung $u \in C^1([0, \infty), X)$ von (A.1) mit $u(t) \in D(A)$ für $t \geq 0$ existiert.
- (ii) u stetig von den Daten abhängt, das heißt,

$$\forall u_0 \in D(A) \forall T > 0 \exists C > 0 \forall 0 < t \leq T : \|u(t)\| \leq C \|u_0\|.$$

Satz A.2. Das Cauchyproblem (A.1) ist wohlgestellt genau dann, wenn A eine C_0 -Halbgruppe auf X erzeugt.

Beweis: Für einen Beweis siehe [EnNa00] Kapitel II, Korollar 6.9. □

Definition A.3. Ein linearer Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ heißt dissipativ genau dann, wenn für alle $x \in X$ ein $x' \in F(x)$ mit $\operatorname{Re}\langle x', Ax \rangle \leq 0$ existiert.

Kapitel A: Nützliches über Halbgruppen

Falls wir zusätzlich annehmen, dass X ein Hilbertraum ist, ist $F(x)$ nach dem Rieszschen Darstellungssatz für Hilberträume eine einelementige Menge und es gilt

$$A \text{ ist dissipativ} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\langle x, Ax \rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in D(A).$$

Satz A.4. (Lumer-Phillips)

Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ein linearer, abgeschlossener Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) A ist dissipativ und dicht definiert und es existiert ein $\lambda > 0$ so, dass $R(\lambda I - A) = X$ gilt.
- (ii) A ist der Erzeuger einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf X .

Beweis: Ein Beweis des Satzes findet sich in [Pa83] in Kapitel 1, Satz 4.3. □

Als eine Folgerung des Satzes von Lumer-Phillips erhalten wir

Korollar A.5. Sei A ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator und A^* bezeichne den zu A adjungierten Operator.

Falls A und A^* dissipativ sind, erzeugt A eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf X .

Beweis: Für einen Beweis siehe [Pa83] Kapitel 1, Korollar 4.4. □

Im Folgenden geben wir noch zwei Störungssätze wieder.

Satz A.6. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ auf X , die $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ für ein $\omega \in \mathbb{R}$ erfülle. Falls $B \in L(X)$, ist $A+B$ der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X mit $\|S(t)\| \leq M e^{(\omega + M\|B\|)t}$.

Beweis: Für einen Beweis siehe [Pa83] Kapitel 3, Theorem 1.1. □

Satz A.7. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ der Erzeuger einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe. Weiter sei $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ dissipativ mit $D(A) \subset D(B)$. Es gelte für alle $x \in D(A)$

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|$$

für ein $0 \leq a < 1$ und $b \geq 0$. Dann ist $A+B$ der Erzeuger einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe.

Beweis: Für einen Beweis siehe zum Beispiel [Pa83] Kapitel 3, Korollar 3.3. □

Definition A.8. Sei X ein Banachraum und seien A, B lineare Operatoren auf X . Dann heißt B Kato-Störung von A auf X , falls $D(A) \subset D(B)$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$ mit

$$\|Bx\| \leq \varepsilon \|Ax\| + C(\varepsilon) \|x\| \quad (x \in D(A))$$

existiert.

Als direkte Folgerung von Satz A.7 erhalten wir:

Korollar A.9. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ der Erzeuger einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf X . Ist B eine Kato-Störung von A , so ist $A + B$ der Erzeuger einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf X .

Anhang B

Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir neben dem klassischen Spektralsatz auch einen Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte Operatoren vorstellen, welchen wir aus [Hu76] entnehmen. Mit Hilfe des Spektralsatzes können wir Funktionen des Operators definieren.

Satz B.1. (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren)

Seien H ein Hilbertraum und $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ ein selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E , so dass für alle $x \in D(T)$ und für alle $y \in H$

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\langle E_{\lambda} x, y \rangle$$

gilt.

Ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $D_h = \{x \in H \mid \int_{\mathbb{R}} |h(\lambda)|^2 \, d\langle E_{\lambda} x, x \rangle < \infty\}$, so definiert

$$\langle h(T)x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(\lambda) \, d\langle E_{\lambda} x, y \rangle$$

einen selbstadjungierten Operator $h(T) : D_h \subset H \rightarrow H$.

Beweis: Ein Beweis des Satzes findet sich in [Wer11], Kapitel VII.4. □

Dabei sei nicht nur bemerkt, dass der Spektralsatz eine Charakterisierung des Definitionsbereichs $D(h(T))$ liefert, sondern auch, dass $h(T)$ nur von den Werten von h auf $\sigma(T)$ abhängt.

Korollar B.2. Es gelten die Voraussetzungen von Satz B.1. Zusätzlich sei T nicht-negativ. Dann gilt für $t, s \in \mathbb{R}_0^+$ mit $t \leq s$

$$D(T^s) \subset D(T^t).$$

Kapitel B: Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte Operatoren

Beweis: Es seien $h_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_1(x) := x^s$ und $h_2 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_2(x) := x^t$. Dann gilt $h_2(x) \leq h_1(x)$ für alle $x \geq 1$. Nach Satz B.1 ist für $i = 1, 2$

$$D(h_i(T)) = \left\{ v \in H \mid \int_0^\infty |h_i(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda v, v \rangle < \infty \right\}.$$

Ist nun $v \in D(h_1(T))$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\lambda|^{2t} d\langle E_\lambda v, v \rangle &= \int_0^1 |\lambda|^{2t} d\langle E_\lambda v, v \rangle + \int_1^\infty |\lambda|^{2t} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\ &\leq \int_0^1 d\langle E_\lambda v, v \rangle + \int_1^\infty |\lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle \\ &\leq \|v\|_H^2 + \int_0^\infty |\lambda|^{2s} d\langle E_\lambda v, v \rangle < \infty, \end{aligned}$$

was $v \in D(h_2(T))$ impliziert. □

Mit Hilfe des Spektralsatzes kann nun ein Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte Operatoren bewiesen werden. Bevor wir diesen wieder geben, wollen wir noch die darin auftretenden Notationen erklären:

Es sei $\{\mathcal{H}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ eine Familie von Hilberträumen.

Ein Vektorfeld $\{\varphi(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ auf \mathbb{R} ist eine Abbildung φ , die jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $\varphi(x) \in \mathcal{H}(x)$ zuordnet. Wir bezeichnen mit F den Vektorraum aller solcher Vektorfelder. Ferner sei ν ein Maß auf \mathbb{R} .

Definition B.3. $\{\mathcal{H}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ heißt ν -messbar, falls ein Unterraum $M \subset F$ existiert mit

- (i) $\forall f \in M: x \rightarrow \|f(x)\|_{\mathcal{H}(x)}$ ist ν -messbar.
- (ii) Gilt für $\varphi \in F$, dass $x \mapsto \langle f(x), \varphi(x) \rangle_{\mathcal{H}(x)}$ für alle $f \in M$ ν -messbar ist, so folgt $\varphi \in M$.
- (iii) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, so dass $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ dicht in $\mathcal{H}(x)$ liegt.

Die Vektorfelder aus M heißen ν -messbare Vektorfelder.

Ist $\{\mathcal{H}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ ν -messbar und $f \in M$, so heißt f ν -quadratintegrierbar, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_{\mathcal{H}(x)}^2 d\nu(x) < \infty.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass der Raum \mathcal{H} der ν -quadratintegrierbaren Vektorfelder versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathcal{H}(x)} d\nu(x)$$

ein Hilbertraum ist, den wir Hilbertraumintegral nennen, wir schreiben auch $\mathcal{H} =: \int^\oplus \mathcal{H}(x) d\nu(x)$.

Satz B.4. (Diagonalisierungssatz für selbstadjungierte Operatoren)

Sei H ein separabler Hilbertraum und $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ ein selbstadjungierter Operator.

Dann existiert ein endliches Maß μ , ein Hilbertraumintegral $\mathcal{H} = \int^{\oplus} h(x) d\mu(x)$ sowie ein unitärer Operator $\mathcal{U} : H \rightarrow \mathcal{H}$ so, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

- (i) $\mathcal{U}(T^m v)(\lambda) = \lambda^m \mathcal{U}v(\lambda) \quad (v \in D(T^m), \lambda \in \mathbb{R}).$
- (ii) $D(T^m) = \{v \in H \mid \lambda \mapsto \lambda^m (\mathcal{U}v)(\lambda) \in \mathcal{H}\}.$

Ferner gilt $\|T^m v\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2m} \|(\mathcal{U}v)(\lambda)\|_{h(\lambda)}^2 d\mu(\lambda)$ für alle $v \in D(T^m)$.

Setzen wir nun zusätzlich voraus, dass T ein nicht-negativer Operator ist, das heißt, es gelte

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \tag{B.1}$$

für alle $x \in D(T)$, so erhält man den folgenden Satz.

Satz B.5. Sei $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ ein selbstadjungierter nicht-negativer Operator auf einem separablen Hilbertraum H . Weiter seien \mathcal{U} und \mathcal{H} wie in Satz 2.12. Dann gilt für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\lambda \geq 0$:

- (i) $\mathcal{U}(T^\alpha v)(\lambda) = \lambda^\alpha \mathcal{U}v(\lambda) \quad (v \in D(T^\alpha)).$
- (ii) $D(T^\alpha) = \{v \in H \mid \lambda \mapsto \lambda^\alpha (\mathcal{U}v)(\lambda) \in \mathcal{H}\}.$

Weiter ist $\|T^\alpha v\|_H^2 = \int_0^{\infty} \lambda^{2\alpha} \|(\mathcal{U}v)(\lambda)\|_{h(\lambda)}^2 d\mu(\lambda)$ für alle $v \in D(T^\alpha)$.

Beweis: Setzt man anstelle der Voraussetzung (B.1) die strikte Positivität des Operators T voraus, so entspricht der Satz gerade Theorem 5.5 in [Hu76].

Auf die stärkere Voraussetzung der strikten Positivität kann allerdings verzichtet werden, da sich alle Beweise in [Hu76], die für den Beweis von Theorem 5.5 benötigt werden, direkt auf den Fall, dass T ein nicht-negativer Operator ist, übertragen lassen. Lediglich zusätzliche Eigenschaften des Operators, die Huet in [Hu76], Kapitel 5, beweist, benötigen die stärkere Voraussetzung der strikten Positivität.

□

Anhang C

Nullstellen von Polynomen

Das Verhalten von Nullstellen

Wir wollen zunächst einen Satz über die stetige Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynoms von den Koeffizienten wiedergeben. Dazu sei p ein normiertes Polynom mit Grad n

$$p(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k.$$

Weiter sei a eine Nullstelle von p der Vielfachheit m . Dann besitzt p in der abgeschlossenen Kugel $\overline{B(a, \varepsilon)}$ keine weitere Nullstelle, falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird und es ist

$$\min_{z \in \partial B(a, \varepsilon)} |p(z)| = \delta > 0.$$

Jedes Polynom q mit $\|p - q\|_{\partial B(a, \varepsilon)} < \delta$ besitzt dann ebenfalls genau m Nullstellen in $B(a, \varepsilon)$.

Der Abstand zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{C}$ sei

$$d_s(A, B) := \max_{a \in A} \text{dist}(a, B) + \max_{b \in B} \text{dist}(b, A).$$

Der Abstand zweier normierter Polynome $p(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k$ und $q(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k x^k$ vom selben Grad n sei

$$d_c(p, q) := \max_{k=1, \dots, n} |a_k - b_k|.$$

Damit lässt sich der folgende Satz, der sich in [Pö14] Kapitel 9 findet, formulieren.

Satz C.1. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k$ ein normiertes Polynom des Grades n . Weiter sei $N(p) \subset \mathbb{C}$ die Nullstellenmenge des Polynoms p . Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes normierte Polynom q vom Grad n gilt:

$$d_c(p, q) < \delta \Rightarrow d_s(N(p), N(q)) < \varepsilon.$$

Kapitel C: Nullstellen von Polynomen

Wir wollen nun das Verhalten der Nullstellen eines parameterabhängigen, normierten Polynoms der Form

$$p(\zeta, \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(\zeta)x^k \quad (\text{C.1})$$

beschreiben. Dabei sind a_0, \dots, a_{n-1} Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} . Als Polynom vom Grad n hat $p(\zeta, \cdot)$ genau n komplexe Nullstellen $\omega(\zeta)$, die entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden. Hängen die Koeffizientenfunktionen $a_k(\cdot)$ nur von reellen Werten ab, so sind die zugehörigen Nullstellen ebenfalls stetige Funktionen:

Satz C.2. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{C})$. Zu $\zeta \in I$ sei $p(\zeta, \cdot)$ definiert wie in (C.1). Dann existieren n stetige Funktionen $\omega_1, \dots, \omega_n \in C^0(I, \mathbb{C})$, so dass

$$p(\zeta, x) = \prod_{k=1}^n (x - \omega_k(\zeta))$$

für alle $\zeta \in I$ und $x \in \mathbb{C}$ gilt.

Beweis: Ein Beweis des Satzes findet sich in [HiPr05], Proposition 4.1.19. □

Das Hurwitz Kriterium

Satz C.3. (Hurwitz Kriterium)

Sei $p(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, wobei $a_0 = 1$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$. Für $a_{ij} = a_{2i-j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ und $a_k = 0$, falls $k < 0$ oder $k > n$, sei die Hurwitz-Matrix $H_p = H_p(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$H_p := \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (i) p hat nur Nullstellen mit negativem Realteil.
- (ii) Alle führenden Hauptminoren sind positiv, das heißt, es gilt

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} > 0, \quad \dots, \quad D_n = \det H_p = a_n D_{n-1} > 0.$$

Beweis: Ein Beweis findet sich in [Hur95]. □

Der Newton-Puiseux-Algorithmus

Zur Bestimmung einer Newton-Puiseux-Reihe, also einer Art verallgemeinerten Potenzreihe mit nicht natürlichen Exponenten, möchten wir in diesem Abschnitt den Newton-Puiseux-Algorithmus vorstellen. Eine vollständige Einführung sowie die dazu benötigte Theorie kann [Wa62] entnommen werden.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{C}[\zeta^{\frac{1}{n}}]'$ die Menge aller formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus \mathbb{C} in der Unbestimmten $\zeta^{\frac{1}{n}}$. Weiter bezeichnen wir mit $\mathbb{C}(\zeta^{\frac{1}{n}})'$ den Quotientenkörper von $\mathbb{C}[\zeta^{\frac{1}{n}}]'$ und setzen $\mathbb{C}(\zeta)^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}(\zeta^{\frac{1}{n}})'$. Zudem sei $\mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda]$ die Menge aller formalen Polynome in der Unbestimmten λ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}(\zeta)^*$.

Eines der Hauptergebnisse dieser Theorie besagt nun, dass $\mathbb{C}(\zeta)^*$ algebraisch abgeschlossen ist, vergleiche [Wa62], Theorem 3.1. Das heißt, dass für alle $p(\zeta, \lambda) \in (\mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda]) \setminus \mathbb{C}(\zeta)^*$ ein Element $\lambda(\zeta) \in \mathbb{C}(\zeta)^*$ existiert, so dass $p(\zeta, \lambda(\zeta)) = 0$ gilt. Der Beweis dieser Aussage ist konstruktiv und verwendet die sogenannten Newton-Polygone, um eine explizite Darstellung der Nullstellen in Form einer Newton-Puiseux-Reihe

$$\lambda(\zeta) = \sum_{k=p}^{\infty} \lambda_{\frac{k}{n}} \zeta^{\frac{k}{n}}$$

für ein $p \in \mathbb{Z}$, ein $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_{\frac{k}{n}} \in \mathbb{C}$ zu bestimmen.

Zur iterativen Bestimmung der einzelnen Summanden der Newton-Puiseux-Reihe geht man dabei wie folgt vor:

Für ein $p(\zeta, \lambda) \in \mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda]$, welches wir zur Vereinfachung der Notationen vom Grad $d \in \mathbb{N}$ und von der Form

$$p(\zeta, \lambda) = \sum_{m=0}^d \sum_{l=0}^{d_m} a_{m,l} \zeta^l \lambda^m$$

mit $d_m \in \mathbb{N}_0$ und $a_{m,l} \in \mathbb{C}$ für $m \in \{0, \dots, d\}$ und $l \in \{0, \dots, d_m\}$ annehmen, sollen die Nullstellen

$$\begin{aligned} \lambda_j(\zeta) &= \lambda_{j,\gamma_{j,1}} \zeta^{\gamma_{j,1}} + \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} \zeta^{\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} + \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} \zeta^{\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} + \dots \\ &= \zeta^{\gamma_{j,1}} (\lambda_{j,\gamma_{j,1}} + \lambda_j^{(\gamma_{j,1})}(\zeta)) \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, d$ bestimmt werden. Dabei ist

$$\lambda_j^{(\gamma_{j,1})}(\zeta) := \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}} \zeta^{\gamma_{j,2}} + \lambda_{j,\gamma_{j,1}+\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} \zeta^{\gamma_{j,2}+\gamma_{j,3}} + \dots$$

Für ein beliebiges $p(\zeta, \lambda) \in \mathbb{C}(\zeta)^*[\lambda]$ läuft das Verfahren analog ab. Zur Bestimmung der Exponenten $\gamma_{j,1} \in \mathbb{Q}$ und $\gamma_{j,k} \in \mathbb{Q}^+$ für $k \geq 2$ sowie der Koeffizienten $\lambda_{j,\gamma_{j,1}+\dots+\gamma_{j,k}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k \geq 1$ werden nun zu allen in $p(\zeta, \lambda)$ auftauchenden Termen der Form $a_{m,l} \zeta^l \lambda^m$ mit $a_{m,l} \neq 0$ die Punkte (m, l) in ein Koordinatensystem eingetragen.

Die konvexe Hülle dieser Punkte wird als Newton-Polygon bezeichnet.

Ist zum Beispiel

$$p(\zeta, \lambda) = \lambda^5 + 2\zeta\lambda^4 + 2\zeta\lambda^2 - 2\zeta^2\lambda + (-\zeta^3 + \zeta^4),$$

so ist das zugehörige Newton-Polygon wie in Abbildung C.1 gegeben.

Der Polygonzug, der das Newton-Polygon nach unten hin beschränkt, setzt sich dabei aus einzelnen Segmenten S_1, \dots, S_n für ein $n \in \{1, \dots, d\}$ zusammen, die sich gerade als Verbindungsstrecke zweier benachbarter Eckpunkte ergeben. Für ein solches Segment S_k sei nun γ die Steigung

Kapitel C: Nullstellen von Polynomen

der Geraden auf der das Segment liegt und y der Schnittpunkt mit der vertikalen Achse dieser Geraden. Betrachten wir nun die Projektion des Segmentes auf die horizontale Achse, so entspricht die Länge der Projektion der Mächtigkeit N der Menge $\{j \in \{1, \dots, d\} \mid \gamma_{j,1} = -\gamma\}$. Setzt man nun $\gamma_{k,1} := \gamma$ und $y_{k,1} := y$, so lassen sich die zugehörigen Koeffizienten $\lambda_{j,k,\gamma_{k,1}}$ für $j = 1, \dots, N$ durch

$$\sum_{(m,l) \in S_k} a_{m,l} (\lambda_{j,k,\gamma_{k,1}})^m = 0$$

berechnen, wobei wir triviale Lösungen ausschließen. Um nun $\gamma_{j,k,2}$ und $\lambda_{j,k,\gamma_{j,k,2}}$ für $j \in \{1, \dots, N\}$ zu bestimmen, wird das Verfahren für

$$p_{j,1,\gamma_{k,1}}(\zeta, \lambda_j^{(\gamma_{j,k,1})}) := \zeta^{-y_{k,1}} p(\zeta, \zeta^{\gamma_{k,1}} (\lambda_{j,k,\gamma_{k,1}} + \lambda_j^{(\gamma_{j,k,1})})) \in \mathbb{C}(\zeta)^* [\lambda_j^{(\gamma_{j,k,1})}]$$

wiederholt. Dabei werden nur noch Segmente des Newton-Polygons mit negativer Steigung betrachtet. Dieses Vorgehen kann sukzessive für

$$\begin{aligned} p_{j,m,\gamma_{j,k,m}}(\zeta, \lambda_j^{(\gamma_{j,k,m})}) &:= \zeta^{-y_{j,k,m}} p_{\gamma_{j,k,m-1}}(\zeta, \zeta^{\gamma_{j,k,m-1}} (\lambda_{j,\gamma_{j,k,m}} + \lambda_j^{(\gamma_{j,k,m})})) \\ &\in \mathbb{C}(\zeta)^* [\lambda_j^{(\gamma_{j,k,m})}], \end{aligned}$$

mit $p_{j,0,\gamma_{j,0}} := p$ und $\lambda_j^{(\gamma_{j,k,m})}(\zeta) := \lambda_{j,\gamma_{j,k,m+1}} \zeta^{\gamma_{j,k,m+1}} + \lambda_{j,\gamma_{j,k,m+2}} \zeta^{\gamma_{j,k,m+2}} + \dots$ für $m \in \mathbb{N}$ fortgeführt werden.

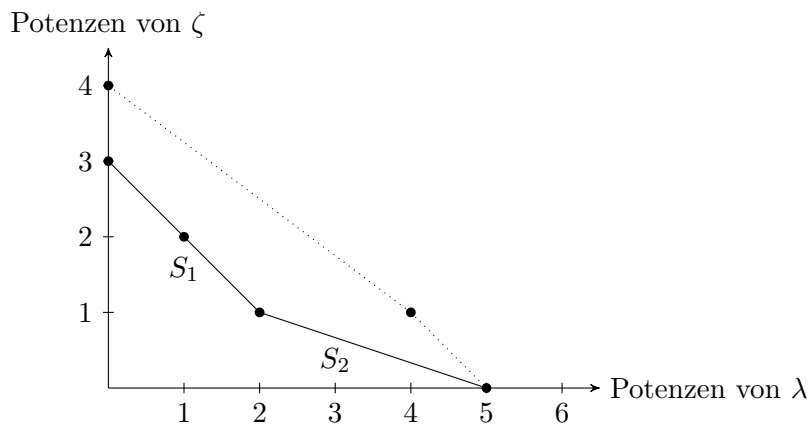


Abbildung C.1: Newton Polygon von p

Anhang D

Fourier-Transformation

Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, auch Raum der schnell fallenden Funktionen genannt, ist definiert durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall m \in \mathbb{N}_0 : p_{\alpha,m}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m) |\partial_x^\alpha \varphi(x)| < \infty \right\}.$$

Durch $\{p_{\alpha,m} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, m \in \mathbb{N}_0\}$ wird eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt. Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist die Fourier-Transformation \mathcal{F} definiert durch

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Die Fourier-Transformation ist eine lineare, stetige und bijektive Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit inverser Abbildung

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi,$$

für $x \in \mathbb{R}^n$.

Mit Hilfe des nachfolgenden Satzes lässt sich die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen.

Satz D.1. (Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, Satz von Plancherel)

Für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie bezüglich der L^2 -Norm und damit eindeutig zu einem isometrischen Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar, welche wir ebenfalls mit \mathcal{F} bezeichnen. Insbesondere ist $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: Für einen Beweis siehe [Wer11], S.218.

□

Der nächste Satz beschreibt die Wirkung der Fourier-Transformation auf die Differentiation von Lebesgue-Funktionen.

Kapitel D: Fourier-Transformation

Satz D.2. Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $f \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}f.$$

Beweis: Der Satz entspricht gerade Lemma V.2.11. in [Wer11].

□

Wir wollen nun noch eine Darstellung der Fourier-Transformation für Lebesgue-Funktionen vorstellen

Satz D.3. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad \text{fast überall.}$$

Als direkte Folgerung aus Satz D.3 erhalten wir

Korollar D.4. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Anhang E

Interpolationstheorie

Im Folgenden seien X_0, X_1, Y_0, Y_1 komplexe Banachräume.

Definition E.1. Wir nennen (X_0, X_1) ein Interpolationspaar, falls ein topologischer Hausdorffraum Z mit

$$X_0 \hookrightarrow Z \text{ und } X_1 \hookrightarrow Z$$

existiert.

Ist (X_0, X_1) ein Interpolationspaar, so sind

$$X_0 \cap X_1 = \{x \in Z \mid x \in X_0 \wedge x \in X_1\}$$

versehen mit der Norm $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$ und

$$X_0 + X_1 = \{z \in Z \mid \exists x_0 \in X_0, \exists x_1 \in X_1 : z = x_0 + x_1\}$$

versehen mit der Norm $\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_j \in X_j}} \{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\}$ Banachräume.

Definition E.2.

a) Ein Interpolationsfunktor ist eine Abbildung $[\cdot, \cdot]$, die jedem Interpolationspaar (X_0, X_1) einen Banachraum $[X_0, X_1]$ mit den folgenden Eigenschaften zuordnet:

- $X_0 \cap X_1 \subset [X_0, X_1] \subset X_0 + X_1$.
- Sind (X_0, X_1) und (Y_0, Y_1) Interpolationspaare und ist $T \in L(X_0, Y_0) \cap L(X_1, Y_1)$, dann gilt $T_{|[X_0, X_1]} \in L([X_0, X_1], [Y_0, Y_1])$.

Wir nennen $[X_0, X_1]$ Interpolationsraum zwischen X_0 und X_1 .

b) Ein Interpolationsfunktor $[\cdot, \cdot]$ heißt exakt (vom Typ $\theta \in [0, 1]$), falls für alle Interpolationspaare (X_0, X_1) und (Y_0, Y_1) und für jeden Operator $T \in L(X_0, Y_0) \cap L(X_1, Y_1)$ gilt:

$$\|T\|_{L([X_0, X_1], [Y_0, Y_1])} \leq \|T\|_{L(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{L(X_1, Y_1)}^{\theta}.$$

Kapitel E: Interpolationstheorie

Es gibt nun verschiedene Methoden, die auf eine explizite Beschreibung eines Interpolationsfunktors führen. Wir werden nur die sogenannte komplexe Interpolation wiedergeben. Für eine ausführlich Einführung in die Interpolationstheorie verweisen wir auf [Tr78].

Wir bezeichnen mit S den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$.

Definition E.3. Für ein Interpolationspaar (X_0, X_1) sei

$$\mathcal{F}(X_0, X_1) := \{f \in C^b(\bar{S}, X_0 + X_1) \mid f|_S : S \rightarrow X_0 + X_1 \text{ ist holomorph und} \\ t \mapsto f(j + it) \in C^b(\mathbb{R}, X_j), j = 0, 1\}$$

mit $\|f\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)} := \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{X_1} \right\}$.

Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ ein Banachraum ist.

Definition E.4. Für $0 < \theta < 1$ sei der komplexe Interpolationsraum $[X_0, X_1]_\theta$ definiert durch

$$[X_0, X_1]_\theta := \{x \in X_0 + X_1 \mid \exists f \in \mathcal{F}(X_0, X_1) : x = f(\theta)\}$$

versehen mit der Norm

$$\|x\|_{[X_0, X_1]_\theta} := \inf \{ \|f\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)} \mid f \in \mathcal{F}(X_0, X_1), x = f(\theta) \}.$$

Für $s \in \mathbb{N}$ bezeichne $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ den klassischen Sobolevraum

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_{W^{s,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Wir sind nun daran interessiert, eine greifbarere Beschreibung des Interpolationsraumes von Sobolev- und Lebesgue-Räumen zu geben. Dazu definieren wir zunächst für $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, und $p \in [1, \infty)$ den Besselpotential-Raum durch

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{H_p^s} := \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |x|^2)^{s/2} \mathcal{F}f\|_{L^p} < \infty \right\},$$

wobei \mathcal{F} die Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Für $s \in \mathbb{N}$ gilt

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n).$$

Eine handhabbarere Darstellung des Interpolationsraumes gibt uns der nachstehende Satz:

Satz E.5. Für $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$[L^p(\mathbb{R}^n), W_p^m(\mathbb{R}^n)]_\theta = H_p^{m\theta}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis: Ein Beweis des Satzes findet sich in [Tr78], Abschnitt 2.4.2. □

Zudem können wir mit Hilfe der komplexen Interpolation Aussagen über die Interpolation von Definitionsbereichen zu Potenzen eines selbstadjungierten, nicht-negativen Operators treffen.

Satz E.6. Es sei A ein selbstadjungierter, nicht-negativer Operator und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha \geq 0, \operatorname{Re} \beta \geq 0$. Dann gilt für jedes $\theta \in (0, 1)$

$$[D(A^\alpha), D(A^\beta)]_\theta = D(A^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta}).$$

Beweis: Unter der stärkeren Voraussetzung, dass A ein strikt positiver Operator ist, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass $(-\infty, \delta) \subset \rho(A)$ gilt, wurde der Satz bereits in [Lu09], Theorem 4.36 bewiesen. Setzen wir nun nur die Nicht-Negativität an A voraus, d.h. es gilt nur $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$, so folgt die Behauptung mit Hilfssatz 2.1 durch Verschiebung des Operators A . □

Anhang F

Ungleichungen

Satz F.1. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $y, z \in \mathbb{R}^+$ und $c > 0$. Dann gelten:

(i) Es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $t > 0$

$$\int_{\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 1\}} |\xi|^y e^{-c|\xi|^z t} d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{y+n}{z}}$$

gilt.

(ii) Es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $t > 0$

$$\sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ |\xi| \geq 1}} |\xi|^{-y} e^{-c|\xi|^z t} \leq C(1+t)^{-\frac{y}{z}}$$

gilt.

Beweis:

(i) Es bezeichne λ_{n-1} das $(n-1)$ -dimensionale Lebesgue-Maß. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 1\}} |\xi|^y e^{-c|\xi|^z t} d\xi &\leq e^c \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 1\}} |\xi|^y e^{-c|\xi|^z(1+t)} d\xi \\ &= \lambda_{n-1}(\partial B(0, 1)) e^c \int_0^1 r^{y+n-1} e^{-cr^z(1+t)} dr \\ &= \lambda_{n-1}(\partial B(0, 1)) e^c c^{-\frac{y+n}{z}} (1+t)^{-\frac{y+n}{z}} \int_0^{(c(1+t))^{1/z}} x^{y+n-1} e^{-x^z} dx \\ &\leq \lambda_{n-1}(\partial B(0, 1)) e^c c^{-\frac{y+n}{z}} (1+t)^{-\frac{y+n}{z}} \int_0^\infty x^{y+n-1} e^{-x^z} dx \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{y+n}{z}}, \end{aligned}$$

dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass $\int_0^\infty x^{y+n-1} e^{-x^z} dx = \frac{1}{z} \Gamma\left(\frac{y+n}{z}\right) < \infty$, wobei Γ die Gamma-Funktion bezeichnet.

Kapitel F: Ungleichungen

(ii) Es ist $1 < \left(1 + \frac{zc}{y|\xi|^z}t\right)^{\frac{y|\xi|^z}{zc}} \leq e$, woraus $e^{-c|\xi|^{-z}t} \leq \left(1 + \frac{zc}{y|\xi|^z}t\right)^{-\frac{y}{z}}$ folgt. Damit erhalten wir für $|\xi| \geq 1$

$$|\xi|^{-y}e^{-c|\xi|^{-z}t} \leq |\xi|^{-y}\left(1 + \frac{zc}{y|\xi|^z}t\right)^{-\frac{y}{z}} \leq C(1+t)^{-\frac{y}{z}}.$$

Dies liefert uns die Behauptung. □

Satz F.2. (Lemma von Gronwall)

Seien $T > 0$ und $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegativ und absolut stetig. Weiter seien $c_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ für $i = 1, 2$ integrierbar und es gelte die Ungleichung

$$\dot{v}(t) \leq c_1(t)v(t) + c_2(t)$$

für fast alle $t \in [0, T]$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \exp\left(\int_0^t c_1(\sigma) \, d\sigma\right) \left(v(0) + \int_0^t c_2(y) \exp\left\{-\int_0^t c_1(\sigma) \, d\sigma\right\} \, dy\right) \\ &\leq \exp\left(\int_0^t c_1(\sigma) \, d\sigma\right) \left(v(0) + \int_0^t c_2(y) \, dy\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$.

Beweis: Als absolut stetige Funktion ist v fast überall differenzierbar. Ableiten der Hilfsfunktion

$$h(t) := v(t) \exp\left(-\int_0^t c_1(\sigma) \, d\sigma\right)$$

sowie Einsetzen der Abschätzung für \dot{v} liefert uns nach Integration über $[0, t]$ die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

- [ACJRA20] Alves, M. O., Caixeta, A. H., Jorge Silva, M.A., Rodrigues, J.H., Almeida Júnior, D.S.: *On a Timoshenko system with thermal coupling on both the bending moment and the shear force*. Journal of Evolution Equations 20 (2020), 295-320.
- [AmBe00] Ammar Khodja, F., Benabdallah, A.: *Sufficient conditions for uniform stabilization of second order equations by dynamical controllers*. Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst. 7 (2000), 207-222.
- [Ca58] Cattaneo, C. R.: *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris 247 (1958), 431-433.
- [Ch20] Chen, W.: *Cauchy problems for thermoelastic plate equations with different damping mechanisms*. To appear in Commum. Math. Sci. (2020).
- [DeRa06] Denk, R., Racke, R.: *L^p -resolvent estimates and time decay for generalized thermoelastic plate equations*. Electronic J. Differential Equations 48 (2006), 1-16.
- [DKU12] Duan, R., Kawashima, S., Ueda, Y.: *Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation and its application*. Arch. Rational Mech. Anal. (2012), 205-239.
- [EnNa00] Engel, K.-J., Nagel, E.: *One-parameter semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate texts in mathematics Bd. 194. New York: Springer Verlag (2000).
- [FeLiRa19] Fernández Sare, H. D., Liu, Z., Racke, R.: *Stability of Abstract Thermoelastic Systems with Inertial Terms*. Journal of Differential Equations 267 (2019), 7085-7134.
- [FeMu12] Fernández Sare, H. D., Muñoz Rivera, J. E.: *Optimal rates of decay in 2-d thermoelasticity with second sound*. Journal of Mathematical Physics 53 (2012).
- [FeRa09] Fernández Sare, H. D., Racke, R.: *On the stability of damped Timoshenko systems - Cattaneo versus Fourier law*. Arch. Rational Mech. Anal. 194 (2009), 221-251.
- [Fi16] Fischer, L.: *Globale Lösungen zu Cauchyproblemen bei nichtlinearen thermoelastischen Plattgleichungen*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Konstanz (2016).
- [HaLi13] Hao, J., Liu, Z.: *Stability of abstract system of coupled hyperbolic and parabolic equations*. Zeitschrift angew. Math. Physik. 64 (2013), 1145-1159.

- [HaLiYo15] Hao, J., Liu, Z., Yong, J.: *Regularity analysis for an abstract system of coupled hyperbolic and parabolic equations*. Journal of Differential Equations 259 (2015), 4736-4798.
- [HiPr05] Hinrichsen, D., Pritchard, A. J.: *Mathematical Systems Theory I. Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. Texts Appl. Math. Vol 48. Berlin: Springer (2005).
- [Hu76] Huet, D.: *Décomposition spectrale et opérateurs*. Paris: Presses Universitaires de France (1976).
- [Hur95] Hurwitz, A.: *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt*. Math. Annalen 46 (1895), 273-284.
- [IdHaKa08] Ide, K., Haramoto, K., Kawashima, S.: *Decay Property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system*. Math. Models Methods Appl. Sci. 18(5) (2008), 647-667.
- [JiRa00] Jiang, S., Racke, R.: *Evolution Equations in Thermoelasticity*. In: π Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., vol 112. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press (2000).
- [Ki92] Kim, J. U.: *On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate*. SIAM J: Math. Anal. 23 (1992), 889-899.
- [Ki50] Kirchhoff, G.R.: *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle Journal) 40 (1850), 51-88.
- [LaLi88] Lagnese, J. E., Lions, J. L.: *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*, Masson, Paris: Collection RMA (1988).
- [Le86] Leis, R.: *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*. Chichester: B. G. Teubner-Verlag, John Wiley & Sons (1986).
- [LiLi97] Liu, K., Liu, Z.: *Exponential stability and analyticity of abstract linear thermoelastic systems*. Zeitschrift angew. Math. Phys. 48 (1997), 885-904.
- [Lo88] Love, A. E. H.: *On the small free vibrations and deformations of elastic shells*. London: Philosophical trans. of the Royal Society Vol. 17 (1888), 491-549.
- [Lu09] Lunardi, A.: *Interpolation Theory. 2nd edition*. Lecture Notes Scuola Normale Superiore Pisa (2009).
- [Ma12] Magrab, E. B.: *Vibration of Elastic Systems with Applications to MEMS and NEMS*. Heidelberg, London, New York: Springer (2012).
- [MuRa95] Muñoz Rivera, J. E., Racke, R.: *Smoothing properties, decay, and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelastic type*. SIAM J: Math. Anal. 26 (1995), 1547-1563.
- [MuRa96] Muñoz Rivera, J. E., Racke, R.: *Large Solutions and Smoothing Properties for Nonlinear Thermoelastic Systems*. J. Differential Equations 127 (1996), 454-483.

-
- [MuRa03] Muñoz Rivera, J. E., Racke, R.: *Global stability for damped Timoshenko systems*. Disc. Cont. Dyn. Sys. 9 (2003), 1625-1639.
- [MRSV20] Muñoz Rivera, J. E., Racke, R., Sepúlveda, M. Vera Villagrán, O.: *On exponential stability for thermoelastic plates: comparison and singular limits*. Appl. Math. Optim. (2020).
- [Pa83] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied mathematical sciences Bd. 44. New York, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag (1983).
- [Pö14] Pöschel, J.: *Noch mehr Analysis: Mehrdimensionale Integration, Fouriertheorie, Funktionentheorie*. Wiesbaden: Springer Verlag (2014).
- [QuRa08] Quintanilla, R., Racke, R.: *Qualitative aspects of solutions in resonators*. Arch. Mech. 60 (2008), 345-360.
- [QuRa11] Quintanilla, R., Racke, R.: *Addendum to: Qualitative aspects of solutions in resonators*. Konstanzer Schriften in Mathematik Nr. 277 (2011).
- [Ra09] Racke, R.: *Thermoelasticity*. In: Dafermos, C. M., et al. Handbook of Differential Equations Vol 5: Evolutionary Equations. Amsterdam: Elsevier North Holland (2009), 315-420.
- [Ra15] Racke, R.: *Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Initial Value Problems*. 2nd ed. Cham: Birkhäuser (2015).
- [RaUe17] Racke, R., Ueda, Y.: *Nonlinear thermoelastic plate equations: global existence and decay rates for the Cauchy problem*. Journal of Differential Equations 12 (2017), 601-630.
- [RaZh91] Racke, R., Zheng, S.: *Global existence of solutions to a fully nonlinear fourth-order parabolic equation in exterior domains*. Nonlinear Analysis, Vol.17 (1991), 1027-1038.
- [Ru93] Rustenbach, U.: *Supremumsabschätzungen von Lösungen der Helmholtzgleichung auf Außengebieten*. Unveröffentlichte Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (1993).
- [Sh94] Shibata, Y.: *On the exponential decay of the energy of a linear thermoelastic plate*. Comp. Appl. Math. 13 (1994), 81-102.
- [So99] Soufyane, A.: *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 328 (1999), 731-734.
- [Tr78] Triebel, H.: *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Holland Math. Library, Vol. 18. Amsterdam: North-Holland (1978).
- [Wa62] Walker, R. J.: *Algebraic curves*. New York: Dover (1962).
- [We13] Weidmann, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner (2013).
- [Wer11] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. 7. Auflage. Berlin: Springer (2011).
-

LITERATURVERZEICHNIS

- [Wi75] Wilcox, C. H.: *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*.
In: Lecture Notes in Mathematics 442. Berlin: Springer (1975).