Universität Konstanz

Differenzierbarkeit im Bild und Abbildungseigenschaften verallgemeinerter Fouriertransformationen bei variablen Koeffizienten im Außengebiet und Anwendungen auf Gleichungen vom Kirchhoff-Typ

Charlotte Kerler

Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik
Nr. 67, Juni 1998

ISSN 1430–3558

Differenzierbarkeit im Bild und Abbildungseigenschaften verallgemeinerter Fouriertransformationen bei variablen Koeffizienten im Außengebiet und Anwendungen auf Gleichungen vom Kirchhoff-Typ

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
an der Universität Konstanz
Fakultät für Mathematik und Informatik
vorgelegt von

Charlotte Kerler

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Mai 1998

Referent: Professor Dr. R. Racke, Universität Konstanz
Referent: Professor Dr. K. J. Witsch, Universität GH Essen

Abstract

In this thesis the differentiability in the range and mapping properties of generalized Fourier transforms are investigated and their application to equations of Kirchhoff-type is discussed.

Such a generalized Fourier transform is an isometric mapping from $L^2(\Omega)$ to $L^2(\mathbb{R}^n)$ where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an exterior domain, that means its complement is bounded. Like the classical Fourier transform diagonalizes the Laplacian defined on $L^2(\mathbb{R}^n)$, the generalized Fourier transform diagonalizes an elliptic selfadjoint and possibly infinite perturbation $A = -\partial_j a_{jk}(x)\partial_k + a_0(x)$ of the Laplacian with variable coefficients on Ω.

In this approach the generalized Fourier transform is an integral transform constructed by arguments of spectral and perturbation theory. Therefore its kernel contains the resolvent of the operator A evaluated on the continuous spectrum and applied to a given function. The resolvent is extended onto the continuous spectrum by the *principle of limiting absorption* as an operator from $L^2_s(\Omega)$ to $L^2_{-t}(\Omega)$ where $s > 1/2$ and $-t < -1/2$ are the degrees of the polynomial weight functions of these weighted $L^2(\Omega)$–spaces.

In order to show the differentiability in the range of a generalized Fourier transform the resolvent has to be differentiated with respect to the spectral parameter on the continuous spectrum. In the resolvent set these derivatives are, modulus some multiplicative constants, powers of the resolvent acting on $L^2(\Omega)$. If s and t in the degrees of the weight functions are large enough these powers of the resolvent can be extended in a locally uniform manner onto the real line as an operator acting between these weighted $L^2(\Omega)$–spaces. This is shown by induction where in each step a suitable identity consisting of sum of special types of weighted pseudodifferential operators is plugged in. Each term is then treated with induction hypotheses and *microlocal resolvent estimates.* In these microlocal estimates products of pseudodifferential operators and the resolvent are estimated in appropriate weighted spaces.

As an application of this generalized Fourier transform to time dependent problems, the homogeneous Dirichlet problem for the nonlinear wave-equation of Kirchhoff type, i.e. for $u = u(t,x)$:

$$u_{tt} + (1 + \langle Au, u\rangle)Au = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

with the nonlocal nonlinearity $\langle Au, u\rangle Au$ is treated. The application of the generalized Fourier transform, that corresponds to the operator A, to the linearized equation leads to a family of ordinary differential equations. These can be solved and via the inverse transformation we receive a representation formula for the solution of the linearized equation. In order to get estimates with time decay for this solution of the linearized equation, oscillatory

integrals, where the integrand consists of products of generalized Fourier transforms, have to be estimated. This is done using integration by parts and thus exploiting the results on the differentiability in the range of the generalized Fourier transform.

These estimates of solutions to the linearized problem and Schauder's fixed point theorem yield the global existence and some time asymptotic behavior for the solutions of the nonlinear equation for a class of small data.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Differenzierbarkeit im Bild und Abbildungseigenschaften einer verallgemeinerten Fouriertransformation untersucht.

Eine solche verallgemeinerte Fouriertransformation ist eine isometrische Abbildung von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet ist, d.h. beschränktes Komplement hat. So wie die klassische Fouriertransformation den (negativen) Laplaceoperator im Ganzraumfall diagonalisiert, diagonalisiert die verallgemeinerte Fouriertransformation eine elliptische, selbstadjungierte und möglicherweise unendliche Störung A des (negativen) Laplaceoperators mit variablen Koeffizienten im Außengebiet Ω.

In der Darstellung dieser Transformation als Integraltransformation, die man mittels störungstheoretischer Argumente erhält, tritt im Integralkern die Resolvente des Operators A auf dem kontinuierlichen Spektrum (hier die nichtnegative reelle Achse) auf. Deswegen wird zunächst gezeigt, daß diese Resolvente, angewandt auf Funktionen aus $L^2_s(\Omega)$, einem Raum mit hinreichend starkem Gewicht, bezüglich des Spektralparameters auf der positiven reellen Achse differenzierbar ist. Dies wird benutzt, um zu zeigen, daß die verallgemeinerten Fouriertransformierten von Funktionen, die in $L^2_s(\Omega)$ liegen, differenzierbar sind. Umgekehrt wird gezeigt, daß die Ausgangsfunktionen einer gewissen Klasse differenzierbarer Funktionen aus dem Bild der verallgemeinerten Fouriertransformation in Räumen mit polynomialen Gewicht liegen.

Als Anwendung dieser Abbildungseigenschaften der verallgemeinerten Fouriertransformation wird mit geeigneten Fourierintegralabschätzungen und einem Fixpunktargument die globale Existenz zu einer Klasse von kleinen Daten für Gleichungen vom Kirchhoff Typ

$$u_{tt} + (1 + \langle Au, u\rangle)Au = 0, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

und die Aussage $\frac{d}{dt}\langle Au, u\rangle = \mathcal{O}(t^{-k}), k \in \mathbb{N}$ geeignet, über das zeitasymptotische Verhalten der Lösung u gezeigt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein Anwendungsgebiet der *klassischen Fouriertransformation* im Bereich der partiellen Differentialgleichungen sind die Fragen nach dem zeitasymptotischen Verhalten und der globalen Existenz von Lösungen nichtlinearer Evolutionsgleichungen.

So geht eine Evolutionsgleichung der Form $V_t + AV = F$, deren linearer Differentialoperator A bezüglich des Ortes auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ operiert und konstante Koeffizienten hat, unter der klassischen Fouriertransformation in eine Schar gewöhnlicher Differentialgleichungen bezüglich der Zeit über. Im Fall linearer Gleichungen gewinnt man aus der Lösungsdarstellung Aussagen über das zeitasymptotische Verhalten der Lösung. Diese werden weiter ausgenutzt, um die globale Existenz von Lösungen des zugehörigen nichtlinearen Problems zu kleinen Daten zu zeigen (vgl. [Rac92]).

Aber auch bei Gleichungen vom Kirchhoff-Typ, $u_{tt} + (1 + \langle Au, u\rangle)Au = F$, die eine nichtlokale Nichtlinearität der Form $\langle Au, u\rangle Au$ enthalten, zeigt man über die Gleichung im Fourierbild geeignete a priori Abschätzungen für das linearisierte Problem. Mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes erhält man neben der globalen Existenzaussage hieraus auch eine über das zeitasymptotische Verhalten der Lösung u: $\frac{d}{dt}\langle Au, u\rangle = \mathcal{O}(t^{-k})$, $t \to \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ geeignet (vgl. [DS94]).

Ausgenutzt werden bei diesen Anwendungen insbesondere die Isometrie- und die Diagonalisierungseigenschaft der klassischen Fouriertransformation.

Gemäß ihrer Konstruktion über die Spektralschar bzw. als Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen, besitzt auch die *verallgemeinerte Fouriertransformation* bezüglich einer elliptischen, selbstadjungierten Störung A des Laplaceoperators mit variablen Koeffizienten auf einem Außengebiet (d.h. das Komplement ist beschränkt) diese Eigenschaften. Somit lassen sich auch allgemeinere Evolutionsgleichungen in eine Schar gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Zeit transformieren.

Im Gegensatz zur klassischen Fouriertransformation sind jedoch gewisse Eigenschaften, wie die Surjektivität, die Differenzierbarkeit im Fourierbild oder andere Abbildungseigenschaften, nicht sofort klar. Diese sind einerseits von eigenständigem Interesse, andererseits benötigt man beispielsweise die Differenzierbarkeit in der zweiten oben angeführten Anwendung.

Die Existenz einer solchen verallgemeinerten Fouriertransformation wurde für den Laplaceoperator auf einem Außengebiet von Wilcox in [Wil75] gezeigt. Es wird sogar gezeigt, daß diese Abbildung unitär von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ abbildet, also insbesondere auch surjektiv ist. Dies läßt sich auf den Fall der endlichen Störungen des Laplaceoperators übertragen. Für den Schrödingeroperator $H = \Leftrightarrow\Delta + V$ mit einem langreichweitigen Potential V im Ganzraumfall gibt es entsprechende Ergebnisse von Saito [Sai79] und Isozaki [Iso82]. Isozaki untersucht in [Iso85] auch die Differenzierbarkeit im Fourierbild und zeigt für die Lösung der homogenen, linearen, zeitabhängigen Schrödingergleichung $\frac{1}{i}\frac{d}{dt}u + Hu = 0$ die in [Iso86] optimierte Abschätzung $\|\chi(H)u\|_{-s} \leq C_s(1+t)^{-s}\|u_0\|_s$. Dabei ist u_0 der Anfangswert und χ eine Abschneidefunktion, die angewandt auf H den niederfrequenten Anteil annulliert.

Für den Fall der Störung des Laplaceoperators durch variable Koeffizienten in der Form $\Leftrightarrow\partial_j a_{jk}(x)\partial_k$, wobei die Koeffizientenfunktionen $a_{jk}(x)$ für große x gegen das Kroneckersymbol abfallen, wird die Existenz der verallgemeinerten Fouriertransformation in [Ker93] gezeigt. Hieraus läßt sich leicht die Existenz der verallgemeinerten Fouriertransformation zu einer um ein „Potential“ a_0, welches entsprechenden Regularitäts- und Abklingeigenschaften genügt, erweiterten Störung $\Leftrightarrow\partial_j a_{jk}(x)\partial_k + a_0(x)$ des Laplaceoperators ableiten.

Für den als letzten aufgeführten Fall von Störungen des Laplaceoperators in der Form $\Leftrightarrow\partial_j a_{jk}(x)\partial_k + a_0(x)$ soll in dieser Arbeit die Differenzierbarkeit im Fourierbild untersucht werden. Es wird dabei die Darstellung

$$\mathcal{F}w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int\limits_{\Omega}\left[e^{-ix\xi}j(x) + \overline{R(|\xi|^2 \pm i0)M(\cdot,\xi)(x)}\right]w(x)\,dx \quad \xi \text{ - f.ü.}$$

der verallgemeinerten Fouriertransformation aus [Ker93] verwandt, wobei wegen der störungstheoretischen Konstruktion im Integralkern die Resolvente des Operator A auf dem kontinuierlichen Spektrum auftritt.

In Kapitel 1 wird zunächst der Operators A eingeführt und das Prinzip der Grenzabsorption, d.h. die stetige Fortsetzung der Resolvente von A auf das kontinuierliche Spektrum, das hier auf der reellen Achse liegt, gezeigt. Die Resolvente ist dabei als Operator in geeignet gewichteten Räumen lokal gleichmäßig in $\mathbb{R}_0^+$ beschränkt. Im Spezialfall des Schrödingeroperators $A = \Leftrightarrow\Delta + V$ gelingt es nach Ideen von Morawetz [Mor75b, Mor75a], für geeignete Gebiete sogar eine gleichmäßige Beschränktheit mit einer Abklingrate in ganz $\mathbb{R}_0^+$ zu zeigen. Im allgemeinen ist dies für variable Koeffizienten

a_{jk} nicht zu erwarten, da man sonst für die Wellengleichung $u_{tt} \Leftrightarrow \Delta u = 0$ auf einer Vielzahl von Gebieten und insbesondere auch solchen mit „trapping"-Eigenschaft, durch Gebietstransformationen lokalen Energieabfall der Lösung mit einer Abklingrate beweisen könnte.

Die Differenzierbarkeit der Resolvente auf dem kontinuierlichen Spektrum wird in Kapitel 2 untersucht, wobei den Überlegungen Arbeiten von Isozaki und Kitada [IK84, IK85, Iso85] zugrunde liegen. Zunächst wird im Ganzraumfall mit Hilfe mikrolokaler Resolventenabschätzungen induktiv die in $\mathbb{R}^+$ lokal gleichmäßige Beschränktheit von Potenzen der bis auf die reelle Achse fortgesetzten Resolvente in geeignet gewichteten Räumen gezeigt. Aufgrund der in der Resolventenmenge gültigen Formel

$$\left(\tfrac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda + i\varepsilon) = N!\,\big(R(\lambda + i\varepsilon)\big)^{N+1}, \qquad \varepsilon > 0$$

erhält man daraus die Differenzierbarkeit der Resolvente auf dem kontinuierlichen Spektrum.

Wegen der variablen Koeffizienten läßt sich die zeitabhängige Methode aus [IK85] nicht ohne weiteres übertragen, da dort nichtlineare Eikonalgleichungen der Art

$$a_{jk}(x)(\partial_j \phi(x))(\partial_k \phi(x)) = 1$$

auftreten.

Weiterhin muß im Gegensatz zu [IK84] für die Behandlung auftretender Störterme an die Koeffizientenfunktion $a_{jk}(x)$ sogenanntes „kurzreichweitiges" Verhalten (anstelle von „langreichweitigem") vorausgesetzt werden. D.h. die Koeffizienten müssen für große x mit einer Abklingrate $\Leftrightarrow\tau$ mit $\tau > 1$ (anstelle von $\tau > 0$) gegen den Laplaceoperator abfallen.

Anschließend werden die mikrolokalen Resolventenabschätzungen mit einer Abschneidetechnik auf den Außenraumfall übertragen und die Differenzierbarkeit der Resolvente auch für diesen Fall gefolgert.

Mit den Ergebnissen aus dem ersten Kapitel und unter den entsprechenden Voraussetzungen an das Gebiet wird für den Schrödingeroperator im Außenraum die gleichmäßige Beschränktheit bezüglich der Hochfrequenzasymptotik mit der gleichen Abklingrate wie im Ganzraumfall, der in [Iso85] untersucht wurde, gezeigt.

Die Resultate aus dem zweiten Kapitel werden in Kapitel 3 verwandt, um für Funktionen, die in einem Raum mit hinreichend großem Gewicht liegen, die Differenzierbarkeit im Bild der verallgemeinerten Fouriertransformation außerhalb des Nullpunktes zu zeigen.

Mit einer expliziten Darstellung der verallgemeinerten Eigenfunktionen wird für das Beispiel des Laplaceoperators auf dem Äußeren einer Kugel gezeigt, daß die zugehörige verallgemeinerte Fouriertransformation auch in

$\xi = 0$ differenzierbar ist. Dies legt die Vermutung nahe, daß der Ausschluß der Null im Fourierbild eher „technische Ursachen“ hat, d.h. hier in der gewählten Darstellung des Integralkerns begründet ist.

In Anlehnung an die klassische Fouriertransformation werden dann Aussagen über die Abbildungseigenschaften der verallgemeinerten Fouriertransformation bewiesen. Insbesondere wird quasi als Umkehrung der Differenzierbarkeit gezeigt, daß die Urbilder gewisser hinreichend differenzierbarer Funktionen aus dem Fourierbild in Räumen mit polynomialen Gewicht (positiven Grades) liegen.

Als Anwendung werden in Kapitel 4 homogene Gleichungen vom Kirchhoff-Typ betrachtet:

$$u_{tt} + (1 + \langle Au,u \rangle)Au = 0,$$

wobei A die elliptische, selbstadjungierte Störung des Laplaceoperators aus Kapitel 1 ist. Mit Hilfe der verallgemeinerten Fouriertransformation und den Aussagen über die Differenzierbarkeit im Fourierbild aus Kapitel 2 wird, wie oben erwähnt, die globale Existenz und $\frac{d}{dt}\langle Au, u\rangle = \mathcal{O}(t^{-k})$, $t \to \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ geeignet, für das zeitasymptotische Verhalten von Lösungen zu einer Klasse von kleinen Anfangsdaten gezeigt.

Das Vorgehen in diesem Teil orientiert sich an Arbeiten von D'Ancona & Spagnolo [DS94] und Racke [Rac95].

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Reinhard Racke für die Anregung zu dieser Arbeit und die gute Betreuung, sowie Herrn Prof. Dr. Karl Josef Witsch für viele wertvolle Hinweise danken. Weiter gilt mein Dank Frau Dr. Ute Durek, Herrn Dr. Helmut J. Heiming und Herrn Dipl.–Math. Raimund Pauen für viele hilfreiche Diskussionen, sowie meinen Eltern für ihre beständige Unterstützung.

Bezeichnungen

Mengen:

$\mathbb{C}$: komplexe Zahlen

Q $:= \{z \in \mathbb{C} \,|\, a \leq \operatorname{Re} z \leq b, 0 < \operatorname{Im} z \leq c\}$ mit $a, b, c \in (0, \infty)$, $a < b$

$\tilde{Q}$ $:= \{z \in \mathbb{C} \,|\, a \leq \operatorname{Re} z \leq b, \Leftrightarrow c \leq \operatorname{Im} z < 0\}$ mit $a, b, c \in (0, \infty)$, $a < b$

$\mathbb{R}^n$: der n-dimensionale reelle Vektorraum

$\mathbb{R}^n_x$: $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Variablen x $\qquad$ $\mathbb{R}^n_\xi$: $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Variablen ξ

$\mathbb{R}^+$: die positiven reellen Zahlen, $\qquad$ $\mathbb{R}^+_0 := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < R\}$ Ball mit Radius R um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^n$

G : Gebiet, d.h. $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend

Ω : Außengebiet, d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\exists R > 0 : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B_R(0)$, das Komplement ist also insbesondere beschränkt

K_{ab} : für $0 < a < b < \infty$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, a \leq |x| \leq b\} = \overline{B_b(0) \setminus B_a(0)}$

K_a : für $a > 0$ das Komplement von $B_a(0)$: $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \geq a\}$

S_R : für $R > 0$ die Sphäre vom Radius R: $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| = R\}$

$\operatorname{supp} v := \overline{\{x \in G \,|\, v(x) \neq 0\}}$ der Träger der Funktion v

supp_x : Träger bezüglich der Variablen x

Ableitungssymbole:

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ für } j = 1, \ldots, n \qquad \partial_{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l} \text{ für } l = 1, \ldots, n$$

$$\nabla = \nabla_x := (\partial_1, \ldots, \partial_n)' \qquad \nabla_\xi := (\partial_{\xi_1}, \ldots, \partial_{\xi_n})' \quad \text{Gradienten}$$

$$\nabla' = \nabla'_x := (\partial_1, \ldots, \partial_n) \qquad \nabla'_\xi := (\partial_{\xi_1}, \ldots, \partial_{\xi_n}) \quad \text{Divergenzen}$$

$$\Delta := \nabla' \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \quad \text{Laplaceoperator}$$

für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\partial_x^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \qquad \partial_\xi^\alpha := \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{\xi_n}^{\alpha_n}$$

$$D_x^\alpha := (\Leftrightarrow i)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha, \qquad D_\xi^\alpha := (\Leftrightarrow i)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha$$

sonstige Symbole und Schreibweisen:

$M \subset\subset N$: die Menge M ist kompakt enthalten in N, also $\overline{M} \subset N$ kompakt

$\alpha \leq \beta$: für Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ bedeutet $\alpha_j \leq \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$

$x \cdot y$ $:= \sum\limits_{j=0}^{n} x_j \overset{(-)}{y_j}$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

$\hat{x}$ $:= \frac{x}{|x|}$ Einheitsvektor in Richtung von x

x^α : sowohl der Vektor $x^\alpha \in \mathbb{R}^n$, als auch die Funktion $x \mapsto x^\alpha$

$|x|$: sowohl der Betrag $|x| \in \mathbb{R}$, als auch die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$

$\langle x \rangle$ $:= (1 + |x|^2)^{1/2}$ (vergleichbar mit $(1 + |x|)$)

$o(\cdot), \mathcal{O}(\cdot)$: die üblichen Landauschen Symbole

$\mathcal{B}(X, Y)$: der Raum der stetigen linearen Operatoren von X nach Y

$A \leq B$: für $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ Hilbertraum: $\forall x \in \mathcal{H}\ \langle Ax, x\rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle Bx, x\rangle_{\mathcal{H}}$

$[A,B]$ $:= AB \Leftrightarrow BA$ der Kommutator zweier Operatoren A und B

δ_{jk} $:= \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ Kroneckersymbol

$\partial_j a_{jk} \partial_k$ $:= \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a_{jk} \partial_k$ Einsteinsche Summenkonvention, d.h. es wird über doppelt auftretende Indizes summiert

$:= \partial_j (a_{jk} \partial_k(\cdot))$ die Anwendungen von Operatoren werden immer von rechts nach links gelesen, Abweichungen hiervon werden durch Klammerungen gekennzeichnet

$C_{q,\ldots}$: bezeichne Konstanten größer als Null, die sich von Rechenschritt zu Rechenschritt ändern können und von $q, \ldots$ oder den im Text mittels $C = C(q, \ldots)$ angegebenen Größen abhängen

Resolventen und Fouriertransformationen:

$R(z)$ $:= (A \Leftrightarrow z)^{-1}$ Resolvente des Operators A

$R_0(z)$ $:= (\Leftrightarrow\Delta \Leftrightarrow z)^{-1}$ Resolvente des negativen Laplaceoperators $\Leftrightarrow\Delta$

$R_S(z)$ $:= (\Leftrightarrow\Delta + V \Leftrightarrow z)^{-1}$ Resolvente des Schrödingeroperators $\Leftrightarrow\Delta + V$

$\mathcal{F}$: verallgemeinerte Fouriertransformation zum Operator A

$\mathcal{F}_0$: klassische Fouriertransformation (zum negativen Laplaceoperator)

$\mathcal{F}_1$: verallgemeinerte Fouriertransformation zum negativen Laplaceoperator $\Leftrightarrow\Delta$ auf dem Außengebiet $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$

$\mathcal{F}_S$: verallgemeinerte Fouriertransformation zum Schrödingeroperator

Funktionenräume und Normen:

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, so benutzen wir für Räume reell- oder komplexwertiger Funktionen die folgenden Bezeichnungen:

$\mathcal{C}^m(G)$: der Raum der in G m-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$\mathcal{C}^\infty(G)$ $:= \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(G), \qquad \mathcal{C}(G) := \mathcal{C}^0(G)$

$\mathcal{B}^m(G)$ $:= \{v \in \mathcal{C}^m(G) \mid \max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in G} |\partial_x^\alpha v(x)| < \infty\}, \quad \mathcal{B}(G) := \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{B}^m(G)$

$\mathcal{C}_0^m(G)$ $:= \{v \in \mathcal{C}^m(G) \mid \operatorname{supp} v \subset\subset G\}$, die in G m-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger

$\mathcal{C}_0^\infty(G)$ $:= \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}_0^m(G), \qquad \mathcal{C}_0(G) := \mathcal{C}_0^0(G)$

$\mathcal{S}$ $:= \{v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \;\; \exists C_{\alpha\beta} \; : \; \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta v(x)| < C_{\alpha\beta}\}$ Schwartzraum oder Raum der schnell abfallenden Funktionen

$X_{\mathrm{loc}}(G)$: Raum aller Funktionen, die lokal in $X(G)$ liegen, d.h. $v \in X_{\mathrm{loc}}(G) \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(G) : \varphi v \in X(G)$

$X_{\mathrm{Loc}}(G) := \{v \in X_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid \psi v \in X(G), \text{falls } \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \psi \equiv 1 \text{ nahe } \partial G\}$

$L^1(G)$: Raum der auf G meßbaren, absolut integrierbaren Funktionen

$L^1_s(G)$: für $s \in \mathbb{R}$ der Raum $\{v \in L^1_{\mathrm{loc}}(G) \mid \langle x\rangle^s v \in L^1(G)\}$

$L^2(G)$: Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen

$L^2_s(G)$: für $s \in \mathbb{R}$ der Hilbertraum $\{v \in L^2_{\mathrm{loc}}(G) \mid \langle x\rangle^s v \in L^2(G)\}$

$L^2_{ac}(G)$: absolut stetiger Teilraum des auftretenden Operators

$L^\infty(G)$: Raum der wesentlich beschränkten Funktionen

$W^{m,2}(G)$: für $m \in \mathbb{N}_0$ der übliche Sobolevraum, vgl. [Ada75]

$\mathring{W}^{1,2}(G)$: Sobolevraum mit verallgemeinerten Nullranddaten, vgl. [Ada75]

$W^{m,2}_s(G) := \{v \in W^{m,2}_{\mathrm{loc}}(G) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m : \langle x\rangle^s \partial_x^\alpha v \in L^2(G)\}$

$\|\cdot\|_X$: : die Norm auf dem Raum X

$\|\cdot\|$ $:= \|\cdot\|_{L^2(G)}$ die L^2-Norm

$\|\cdot\|_s$ $:= \|\langle x\rangle^s \cdot\|$: die L^2_s-Norm

$\langle f, g\rangle$ $:= \int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx$: das $L^2(G)$-Skalarprodukt

Kapitel 1

Prinzip der Grenzabsorption

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird zunächst der Operator A, der zu einer Klasse von Störungen des Laplaceoperators mit variablen Koeffizienten auf einem Außengebiet Ω gehört, eingeführt. Anschließend wird das sogenannte „Prinzip der Grenzabsorption“, kurz PdGA, für diesen Operator gezeigt, d.h. wie und in welchem Sinne sich die Resolvente von A auf das kontinuierliche Spektrum fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung $R(\lambda)$ ist als Operator zwischen geeignet gewichteten Räumen für $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ lokal gleichmäßig beschränkt.

Der zweite Teil des Kapitels behandelt den Spezialfall des Schrödingeroperators, in dem sich unter etwas stärkeren Voraussetzungen an das Gebiet Ω und die Abklingrate τ der Koeffizienten sogar eine bezüglich $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ gleichmäßige Beschränktheit der Resolvente zeigen läßt.

1.1 Störungen mit variablen Koeffizienten

Unter Störungen des Laplaceoperators mit variablen Koeffizienten auf einem Außengebiet wollen wir folgendes verstehen:

Es sei $n \geq 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet, so daß $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B_R(0)$. Weiterhin habe Ω einen glatten, d.h. $\mathcal{C}^2$-Rand $\partial\Omega$. Wir betrachten dort den Differentialoperator

$$\mathcal{A} := \Leftrightarrow \partial_j a_{jk}(\cdot)\partial_k + a_0(\cdot).$$

Die Koeffizientenfunktionen a_{jk}, $j, k = 1, \ldots, n$ und a_0 seien reellwertig und es gelte:

1. $\forall\, j, k = 1, \ldots, n: \quad a_{jk}, a_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$ (Regularität)
2. $\forall\, j, k = 1, \ldots, n, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}: \quad a_{jk}(x) = a_{kj}(x)$ (Symmetrie)

3. $\exists c_0 > 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n: \qquad a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq c_0|\xi|^2$ (Elliptizität)
4. $\exists \tau > 1\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n:\ \partial_x^\alpha a_0(x), \partial_x^\alpha(a_{jk}(x) \Leftrightarrow \delta_{jk}) = \mathcal{O}(|x|^{-\tau-|\alpha|})$ für $|x| \to \infty$ (Abklingeigenschaft)

Es bezeichne

$$A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

die selbstadjungierte Realisierung von $\mathcal{A}$ zu homogenen Dirichletrandwerten, d.h. es ist insbesondere (vgl. [Lei86]

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega) \mid \exists f \in L^2(\Omega) : \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega) : \langle a_{jk}\partial_k u, \partial_j v\rangle + \langle a_0 u, v\rangle = \langle f, v\rangle\}.$$

Aufgrund der vierten Forderung an die Koeffizienten fassen wir A als eine (in x möglicherweise unendliche) Störung des negativen Laplaceoperators $\Leftrightarrow\Delta$ auf.

Da der Operator A selbstadjungiert ist, ist das Residualspektrum leer und die nichtreellen komplexen Zahlen liegen in der Resolventenmenge, d.h. zu einem $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ findet man für jedes $f \in L^2(\Omega)$ ein $u \in \mathcal{D}(A)$, so daß

$$\begin{aligned} (A \Leftrightarrow z)u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

im schwachen Sinne gilt. Man schreibt für die Lösung u dann auch

$$u = R(z)f,$$

wobei $R(z) := (A \Leftrightarrow z)^{-1}$ die Resolvente des Operators A ist.

Wie in [Ker93] zeigt man, daß das kontinuierliche Spektrum des Operators A (d.h. alle solchen $z \in \mathbb{C}$ für die $R(z)$ zwar noch existiert und dicht definiert ist, aber als Operator auf $L^2(\Omega)$ nicht mehr beschränkt ist) gerade die nichtnegative reelle Achse ist. Ist die Koeffizientenfunktion $a_0 \geq 0$, so ist das Punktspektrum von A wegen der Regularität der Koeffizienten leer, ansonsten können negative Eigenwerte, deren Betrag sich durch $\|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ abschätzen läßt, auftreten.

Vorbereitend für Theorem 1.3 formulieren wir die folgenden Resultate aus der elliptischen Regularitätstheorie, die auch in anderen Teilen der Arbeit verwendet werden:

Lemma 1.1 (Regularitätslemma)

i) Es sei $s \in \mathbb{R}, u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{Loc}(\Omega)$ und $Au \in L^2_s(\Omega)$. Ist $u \in L^2_s(\Omega)$, so folgt $u \in W^{2,2}_s(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung:

$$\|u\|_{W^{2,2}_s(\Omega)} \leq c(\|u\|_s + \|Au\|_s).$$

ii) Es seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s \leq t$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega) \cap W^{1,2}_s(\Omega)$ so, daß $(A \Leftrightarrow z)u \in L^2_t(\Omega)$ ist. Dann ist $u \in L^2_r(\Omega)$ mit $r = \min(s + 1/2, t)$.

Beweis: Die Aussage *i)* ist in [WW97a, Lemma 4] enthalten.

Für den Schrödingeroperator (sogar mit komplexwertigem Potential) wird die zweite Aussage in [Sai74] bewiesen. Wir gehen, dem dortigen Verweis folgend, wie im Beweis von [IS72, Lemma 2.4] vor, um sie auch für unseren Fall der variablen Koeffizienten zu zeigen:

Wir multiplizieren die Gleichung

$$(A \Leftrightarrow z)u = f$$

mit $\langle x\rangle^{2r}\bar{u}$, integrieren für $R_0 < R < \infty$ über die Menge $K_{R_0,R}$ und erhalten nach partieller Integration:

$$\int_{K_{R_0,R}} \langle x\rangle^{2r} a_{jk}\partial_k u \partial_j \bar{u}\, dx + \int_{K_{R_0,R}} \frac{\partial\langle x\rangle^{2r}}{\partial|x|}\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\, dx \Leftrightarrow \int_{S_R} \langle x\rangle^{2r}\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\, do$$
$$+ \int_{S_{R_0}} \langle x\rangle^{2r}\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\, do + \int_{K_{R_0,R}} \langle x\rangle^{2r}(a_0 \Leftrightarrow z)|u|^2\, dx = \int_{K_{R_0,R}} f\langle x\rangle^{2r}\bar{u}\, dx.$$

Nehmen wir den Imaginärteil, so haben wir:

$$\operatorname{Im} \int_{K_{R_0,R}} \frac{\partial\langle x\rangle^{2r}}{\partial|x|}\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\, dx \Leftrightarrow \operatorname{Im} \int_{S_R} \langle x\rangle^{2r}\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\, do$$
$$+ \operatorname{Im} \int_{S_{R_0}} \langle x\rangle^{2r}\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\, do \Leftrightarrow \operatorname{Im} z \int_{K_{R_0,R}} \langle x\rangle^{2r}|u|^2\, dx = \operatorname{Im} \int_{K_{R_0,R}} f\langle x\rangle^{2r}\bar{u}\, dx$$

und somit

$$\tfrac{|\operatorname{Im} z|}{2} \int_{K_{R_0,R}} \langle x\rangle^{2r}|u|^2\, dx \leq \int_{K_{R_0,R}} \Big|\frac{\partial\langle x\rangle^{2r}}{\partial|x|}\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\Big|\, dx + \int_{S_R} \langle x\rangle^{2r}\Big|\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\Big|\, do$$
$$+ \int_{S_{R_0}} \langle x\rangle^{2r}\Big|\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\Big|\, do + \tfrac{1}{2|\operatorname{Im} z|} \int_{K_{R_0,R}} \langle x\rangle^{2r}|f|^2\, dx$$

Es sind $u, (\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u) \in L^2_s(\Omega)$ und $\frac{\partial\langle x\rangle^{2r}}{\partial|x|} = \mathcal{O}(|x|^{2s})$ für $|x| \to \infty$. Also ist $\frac{\partial\langle x\rangle^{2r}}{\partial|x|}(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u)\bar{u}$ absolut integrierbar und es gilt

$$\liminf_{R\to\infty} \int_{S_R} \langle x\rangle^{2r}\Big|\Big(\frac{x_j}{|x|} a_{jk}\partial_k u\Big)\bar{u}\Big|\, do = 0.$$

Da nach Voraussetzung $\operatorname{Im} z \neq 0$ und $f \in L^2_t(\Omega)$ ist, folgt

$$\int_{\Omega\setminus B_{R_0}} \langle x\rangle^{2r}|u|^2\, dx < \infty$$

und somit $u \in L^2_r(\Omega)$.

□

Wir definieren nun einen Lösungsbegriff auf dem kontinuierlichen Spektrum von A:

Definition 1.2 (Strahlungslösung)
Es sei $\lambda \geq 0$ und $f \in L^2_{loc}(\Omega)$. Dann ist u Strahlungslösung, falls

$$\begin{aligned} (A \Leftrightarrow \lambda)u &= f \quad \textit{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

im schwachen Sinne gilt und die Strahlungsbedingung

$$u \in \bigcup_{t > \begin{cases} -3/2, & \lambda > 0 \\ -n/2, & \lambda = 0 \end{cases}} L^2_t(\Omega) \quad \textit{und} \quad \nabla(e^{\pm i\sqrt{\lambda}r}u) \in \bigcup_{t > \begin{cases} -1/2, & \lambda > 0 \\ 1-n/2, & \lambda = 0 \end{cases}} L^2_t(\Omega)$$

erfüllt ist. Dabei heißt u einstrahlend, wenn das Pluszeichen und ausstrahlend, wenn das Minuszeichen in der letzten Bedingung gewählt ist.

Betrachtet man die Resolvente als Operator zwischen geeignet gewichteten Räumen, so läßt sie sich entsprechend der Definition der Strahlungslösung stetig auf die positive reelle Achse, also das kontinuierliche Spektrum fortsetzen.

Für die jeweils zweite Variante in den Theoremen 1.3 und 1.9 müssen wir $\lambda = 0$ als Eigenwert des fortgesetzten Operators ausschließen. Hinreichend hierfür ist die folgende Bedingung an die Koeffizientenfunktion a_0, das „Potential“:

5. $a_0(x) = \mathcal{O}(|x|^{-\tau-2})$ für $|x| \to \infty$ und $\|\langle x\rangle^2 a_0^-\|_{L^\infty(\Omega)} < c_0 c_{\text{Poinc.}}$,

wobei $a_0^-(x) = \max(a_0(x), 0)$ und $c_{\text{Poinc.}} = \frac{n-2}{2}$ die Konstante aus der III. Poincaréschen Ungleichung (vgl. [Lei86, S.57]) ist.

Theorem 1.3 (Prinzip der Grenzabsorption (PdGA))
Es seien $s, t > 1/2$ (bzw. $s, t > 1$, $\tau > 2$ und es gelte zusätzlich 5.). Dann existieren zu jedem $\lambda > 0$ (bzw. $\lambda \geq 0$) die starken Grenzwerte $s \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} R(\lambda \pm i\varepsilon) =: R(\lambda \pm i0)$ in $\mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_{-t}(\Omega))$. Zu jedem $f \in L^2_s(\Omega)$ ist $u := R(\lambda \pm i0)f$ eindeutige Strahlungslösung, und darüber hinaus gibt es zu jedem kompakten Intervall $J = [a, b] \subset (0, \infty)$ (bzw. $\subset [0, \infty)$) eine Konstante $C = C(a, b) > 0$, so daß für alle $f \in L^2_s(\Omega)$ und alle $\lambda \in J$ gilt:

$$\|u\|_{-t} = \|R(\lambda \pm i0)f\|_{-t} \leq C\|f\|_s.$$

Beweis: Die Existenz des Grenzwertes und die Eindeutigkeit der Strahlungslösung im Falle $s, t > 1/2, \lambda > 0$ und $J \subset (0, \infty)$ werden in Theorem 1 [WW93] gezeigt. Die in $\lambda \in (0, \infty)$ lokal gleichmäßige Abschätzung erhält man auf folgende Weise:

Zunächst zeigt man, daß die in [WW93] verwendete a priori Abschätzung

$$\|u\|_{-s} \leq C\big(\|f\|_s + \|u\|_{s-\tau}\big) \tag{1.1}$$

(insbesondere für $s \in (1/2, \min(1, \tau/2))$ nicht nur gleichmäßig für $\lambda \in Q$, sondern sogar gleichmäßig für $\lambda \in \overline{Q}$ gilt. Hierfür kann man im Beweis entweder Theorem 1.5 aus [Sai74] zitieren oder wie folgt argumentieren:

Sei $(\lambda_n)_n \subset Q$ mit $\lambda_n \to \lambda \in [a, b]$ und u_n die zu λ_n gehörige Lösung bei rechter Seite $f \in L^2_s(\Omega) \subset L^2_{s'}(\Omega)$ für $s' = s \Leftrightarrow \delta'$ mit $\delta' \in (0, s \Leftrightarrow 1/2)$. Wir wissen bereits, daß eine Lösung $u \in W^{1,2}_{-s'}(\Omega)$ der Gleichung $Au \Leftrightarrow \lambda u = f$ existiert und können somit für die Differenz $w_n = (u \Leftrightarrow u_n)$ über die Differentialgleichung folgern, daß diese in $W^{1,2}_{-s'}(\Omega)$ beschränkt ist, also dort schwach konvergiert. Somit konvergieren die w_n auch stark in $L^2(\Omega_\varepsilon)$ für jede beschränkte Menge $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ und wegen der eindeutigen Lösbarkeit folgt die Konvergenz gegen Null. Aus der Abschätzung $\|w_n\|_{-s'-\delta} \leq \|w_n\|(\Omega_\varepsilon) + \varepsilon\|w_n\|_{-s'}$, die für jedes $\delta > 0$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ mit passendem $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ gültig ist, folgt die starke Konvergenz bezüglich der $L^2_{-s'-\delta}(\Omega)$–Norm. Für $s' \Leftrightarrow \tau < \Leftrightarrow s'$ (weswegen $\tau > 1$ sein muß, da $s' > 1/2$ war) haben wir also beim Grenzübergang $n \to \infty$:

$$\|u\|_{-s'-\delta} \leq C(\|f\|_{s'} + \|u\|_{s'-\tau}) \leq C(\|f\|_{s'+\delta} + \|u\|_{s'+\delta-\tau}).$$

Wählen wir $\delta = \delta'$ und ersetzen $s = s' + \delta'$, so erhalten wir das Gewünschte.

Die Behauptung des Theorems bezüglich der lokalen Gleichmäßigkeit der Abschätzung für den Fall $t = s$ zeigt man nun durch Widerspruch:
Dann gäbe es Folgen $(\lambda_n)_n \subset \overline{Q}$, $(f_n)_n \subset L^2_s(\Omega)$ mit $\|f_n\|_s = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß $\|u_n\|_{-s} \to \infty$ für $n \to \infty$. Setzt man nun $\hat{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{-s}}$, $\hat{f}_n := \frac{f_n}{\|u_n\|_{-s}}$, so ist $\|\hat{u}_n\|_{-s} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|\hat{f}_n\|_s \to 0$ für $n \to \infty$. Wie oben zeigt man, daß $(\hat{u}_n)_n$ in $L^2_{-s}(\Omega)$ gegen Null konvergiert, was im Widerspruch zu $\|\hat{u}_n\|_{-s} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ steht.

Im Falle $s > 1$, $\tau > 2$, der zusätzlichen Voraussetzung 5., $\lambda \geq 0$ und $J \subset [0, \infty)$ wird die Eindeutigkeit der Strahlungslösung in [WW93, Korollar 2] bzw. [WW97a, Korollar 1] gezeigt. Um wie in [WW93, Theorem 1] die Existenz des Grenzwertes und wie oben die lokal gleichmäßige Beschränktheit der Resolvente zu zeigen, benutzt man eine entsprechende a priori Abschätzung der Form (1.1), die in diesem Falle auch für $\lambda \geq 0$ gilt. Für den Beweis einer solchen a priori Abschätzung verwendet man anstelle der Resultate von Ikebe

& Saito [IS72] in der Abschätzung des Ganzraumproblems das das folgende Resultat von Ben-Artzi & Devinatz:

Für die Resolvente $R_0(z) = (\Leftrightarrow\Delta \Leftrightarrow z)^{-1}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ des Laplaceoperators im Ganzraumfall existieren bei festem $s > 1$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \searrow 0} R_0(\lambda \pm i\varepsilon) =: R_0(\lambda \pm i0)$ in der gleichmäßigen Operatortopologie von $\mathcal{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n), L_{-s}^2(\mathbb{R}^n))$. Desweiteren gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|R_0(\lambda \pm i0)\|_{\mathcal{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n), L_{-s}^2(\mathbb{R}^n))} \leq C(1 + |\lambda|)^{-1/2}.$$

Der Beweis dieses Resultates findet sich in [BAK92] (Beweis zu Theorem 2), der auf die Theorem 2.3 und Theorem A.6 aus [BAD84] zurückgreift.

Setzt man mit einer Abschneidefunktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\operatorname{supp} \eta \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$, $\eta \equiv 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{R+1}(0)$ die Lösung u von $(A \Leftrightarrow \lambda)u = f$ auf den ganzen $\mathbb{R}^n$ fort, so genügt die Fortsetzung $v := \eta u$ der Differentialgleichung:

$$(\Leftrightarrow\Delta \Leftrightarrow \lambda)v = g := \eta f + [\Leftrightarrow\Delta, \eta]u \Leftrightarrow \eta(\mathcal{A} + \Delta)u.$$

Hierauf wenden wir das obige Resultat von Ben-Artzi & Devinatz an und schätzen die rechte Seite unter Verwendung von Lemma 1.1 weiter ab:

$$\begin{aligned} \|v\|_{-s} &\leq C\|g\|_s \leq C\big(\|\eta f\|_s + \|[\Leftrightarrow\Delta, \eta]u\|_s + \|\eta(\mathcal{A} + \Delta)u\|_s\big) \\ &\leq C\big(\|f\|_s + \|u\|_{s-\tau}\big) \end{aligned}$$

Mit $\|u\|_{L_{-s}^2(\mathbb{R}^n \setminus B_{R+1}(0))} \leq \|v\|_{-s}$ und $\|u\|_{L_{-s}^2(\Omega \cap B_{R+1}(0))} \leq C\|u\|_{s-\tau}$ erhalten wir die gewünschte a priori Abschätzung

$$\|u\|_{-s} \leq C\big(\|f\|_s + \|u\|_{s-\tau}\big).$$

Für den Widerspruchsbeweis zum PdGA muß es s mit $s \Leftrightarrow \tau < \Leftrightarrow s$ geben, weswegen wir $\tau > 2$ fordern müssen, da $s > 1$ war.

Wir erhalten somit in beiden Fällen für alle $\lambda \in J$ die Abschätzung

$$\|R(\lambda \pm i0)f\|_{-s} \leq C\|f\|_s.$$

Um hieraus die Abschätzung des Theorems zu folgern, nutzen wir die Inklusionseigenschaften der gewichteten Räume aus:
Für $t > s$ läßt sich die linke Seite nach unten gegen $\|R(\lambda \pm i0)f\|_{-t}$ abschätzen, für $t < s$ ist $f \in L_t^2(\Omega)$ und es folgt

$$\|R(\lambda \pm i0)f\|_{-t} \leq C\|f\|_t \leq C\|f\|_s.$$

□

Bemerkung 1.4

Verwendet man anstelle des zitierten Ergebnisses von Ben-Artzi & Devinatz das PdGA aus [Lei86, Theorem 4.37] für $n \geq 3$, so erhält man wie in [WW97b, Lemma 10, Theorem 9] ausgeführt für $\tau > (n+1)/2$, $s \in (1/2, n/2)$ und $t > (n+1)/2 \Leftrightarrow s$ das PdGA für $\lambda = 0$ mit $\|u\|_{-t} = \|R(\lambda \pm i0)f\|_{-t} \leq C\|f\|_s$.

1.2 Störungen in Form eines Schrödingeroperators

Da im Spezialfall der Störung in Form eines (stationären) Schrödingeroperators $A = \Leftrightarrow\Delta + V$, d.h. $a_{jk} = \delta_{jk}\ \forall\, j,k = 1,\ldots,n$ und $a_0 = V$, unter gewissen Voraussetzungen an das Gebiet Ω und mit einer stärkeren Strahlungsbedingung, bessere Resultate bezüglich der Hochfrequenzasymptotik gezeigt werden können, soll dieser hier gesondert behandelt werden.

Für den Ganzraumfall sind die Resultate dieses Abschnitts von Ikebe & Saito in [IS72] und [Sai74] gezeigt worden. Der Beweis im Falle des Außengebietes, das gewissen Bedingungen, die im weiteren noch präzisiert werden, genügt, geht auf Ideen von Morawetz [Mor75b] zurück, die geeignete Abschätzungen für den Laplaceoperator auf einem solchen Gebiet zeigt.

In diesem Abschnitt sollen die folgenden zusätzlichen Voraussetzungen gelten:

Voarussetzungen 1.5

1. *An das Gebiet Ω:*

   Es existiere eine Familie von Phasenfunktionen $\{\chi_j\}_{j=1,\ldots,N} \subset \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ mit $|\nabla\chi_j| = 1$, sowie Koeffizienten $b_j, j = 1,\ldots,N$, so daß gilt:

   (a) *Jede einzelne Phasenfunktion hat mit einem $t > 1/2$ für $|x| \to \infty$ das asymptotische Verhalten*

   $$\chi_j = |x| + \mathcal{O}(1), \quad \nabla\chi_j = \frac{x}{|x|} + \mathcal{O}(|x|^{-t}),$$
   $$\partial_x^\beta \chi_j = \mathcal{O}(|x|^{-t}), |\beta| = 2, \quad \partial_x^\beta \chi_j = \mathcal{O}(|x|^{-2t}), |\beta| = 3, 4.$$

   (b) *Für den Gradienten der Linearkombination $\psi := \sum_{j=1}^N b_j\chi_j$ ist:*

   $$\Leftrightarrow\nabla\psi\cdot\nu \geq c_1 \geq 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega, \tag{1.2}$$

   wobei ν die äußere Normale zu Ω bezeichnet.

   (c) *Die Hessematrix $[\nabla(\nabla\psi)'] := (\partial^2\psi/\partial x_j \partial x_k)_{jk}$ erfülle*

   $$[\nabla(\nabla\psi)'] > d(|x|)Id > 0, \tag{1.3}$$

   wobei mit einem $\alpha > 1$ gilt: $d(|x|)|x|^\alpha > c_2 > 0$ für $|x| \to \infty$.

   (d) *Bezüglich der Regularität der Linearkombination ψ gelte:*

   $$\psi \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega}).$$

2. *An das Potential V:*

   Es genüge der stärkeren Abklingeigenschaft

   $$\partial_x^\alpha V = \mathcal{O}(|x|^{-\tau-|\alpha|}) \quad \text{mit einem } \tau > 3/2 \quad \text{für } |x| \to \infty.$$

3. *An die Strahlungslösung u:*

   Die Strahlungslösung u genüge der Strahlungsbedingung (S), d.h.

   $$\nabla(e^{\pm i\sqrt{\lambda}r}u) \in L^2(\Omega).$$

Bemerkung 1.6

1. *Wie in [Mor75b] ausgeführt, erfüllen beispielsweise Gebiete, deren Komplement strikt sternförmig ist, die Bedingungen an das Gebiet:*

   Die Wahl $\psi(x) = |x|$ für ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$, dessen Komplement strikt sternförmig bezüglich des Nullpunktes ist „genügt" nicht, da zwar $\nabla\psi > c_1 > 0$ ist, aber die Hessematrix den Eigenwert Null besitzt. Wählt man jedoch $\chi_j(x) = |x \Leftrightarrow z_j|$, $j = 1, 2, 3$, wobei die z_j drei linear unabhängige Punkte nahe dem Ursprung sind, bezüglich derer $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ auch noch strikt sternförmig ist ($\nabla\chi_j \cdot \nu > c > 0$), so erfüllt $\psi = \sum_{j=1}^3 |x \Leftrightarrow z_j|$ alle Voraussetzungen an die Phasenfunktionen. Es ist nun 0 kein Eigenwert der Hessematrix H von ψ, denn wäre y Eigenvektor, so müßte auch $H_j y = 0$, $j = 1, 2, 3$ für die Hessematrizen der χ_j sein. Als skalares Vielfaches der jeweiligen Eigenvektoren muß dann $y = \kappa_1(x \Leftrightarrow z_1) = \kappa_2(x \Leftrightarrow z_2) = \kappa_3(x \Leftrightarrow z_3)$ sein, woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der z_j $y = 0$ folgt.

2. *Für die Behandlung auftretender Randterme, hätte die Forderung „kurzreichweitig", d.h. $\tau > 1$ (wie bisher), an das Potential genügt. Unter der obigen stärkeren Voraussetzung an das Potential V wird aber für rechte Seiten $f \in L^2_s(\Omega)$ mit $s \geq 1$ in [Jäg67, Satz 6] die Existenz und Eindeutigkeit einer Strahlungslösung, die der geforderten Strahlungsbedingung (S) genügt, gezeigt. Nach [WW93, Theorem 1] ist diese dann auch Strahlungslösung im Sinne von Definition 1.2.*

Das nächste Lemma enthält eine für das nachfolgende Abschätzungstheorem grundlegende Ungleichung:

Lemma 1.7
Es seien $s > 1/2$, $f \in L^2_s(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ und u Strahlungslösung der Gleichung

$$(\Leftrightarrow\Delta + V)u \Leftrightarrow \lambda u = f \quad \text{in } \Omega$$

zu homogenen Dirichletrandwerten. Dann ist $u \in W^{1,2}_{-s}(\Omega)$ *und für hinreichend große* λ *gilt:*

$$\|u\|^2_{-s} \leq \frac{C}{\lambda}(\|f\|^2_{-s} + \|\nabla u\|^2_{-s})$$

Beweis: Aus 1.3 wissen wir, daß

$$u \in \bigcap_{t>1/2} L^2_{-t}(\Omega)$$

ist. Mit Hilfe des Regularitätslemmas 1.1 können wir, da $\lambda u + f \in L^2_{-s}(\Omega)$ ist, auf $u \in W^{1,2}_{-s}(\Omega)$ schließen.

Für die behauptete Abschätzung multiplizieren wir die Gleichung

$$(\Leftrightarrow\Delta + V)u \Leftrightarrow\lambda u = f,$$

mit $\langle x\rangle^{-2s}\bar{u}$, integrieren über Ω und erhalten nach partieller Integration unter Berücksichtigung der Nullrandwerte von u auf dem Rand $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega \langle x\rangle^{-2s}|\nabla u|^2\,dx + \mathrm{Re}\int_\Omega \bar{u}\nabla\langle x\rangle^{-2s}\nabla u\,dx + \int_\Omega \langle x\rangle^{-2s}(V \Leftrightarrow\lambda)|u|^2\,dx =$$
$$= \mathrm{Re}\int_\Omega \langle x\rangle^{-2s} f\bar{u}\,dx$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen und der Youngschen Ungleichung folgt für alle $\kappa_1, \kappa_2 > 0$:

$$(2(\lambda \Leftrightarrow V) \Leftrightarrow(\kappa_1 + \kappa_2))\int_\Omega \langle x\rangle^{-2s}|u|^2\,dx \;\leq\; C(\tfrac{1}{2\kappa_1}\|f\|^2_{-s} + C(\kappa_2)\|\nabla u\|^2_{-s}).$$

Gilt nun $\lambda \geq (\kappa_1 + \kappa_2) + 2\max_{x\in\Omega} V(x)$, so läßt sich die linke Seite weiter nach unten gegen $\lambda\|u\|^2_{-s}$ abschätzen, und wir erhalten die Behauptung des Lemmas.

□

Theorem 1.8 (Abschätzungstheorem)
Es seien $s \geq 1$, $f \in L^2_s(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ *und* u *Strahlungslösung der Gleichung*

$$(\Leftrightarrow\Delta + V)u \Leftrightarrow\lambda u = f \quad \text{in } \Omega$$

zu homogenen Dirichletrandwerten, die der Strahlungsbedingung (S) genügt. Dann ist für hinreichend großes λ

$$\|\nabla u\|_{-s} \leq C\|f\|_s$$

und

$$\|u\|_{-s} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}\|f\|_s.$$

Beweis: Der Übersichtlichkeit halber führen wir den Beweis hier für ausstrahlende Strahlungslösungen, der für einstrahlende verläuft analog.

Da $\lambda \geq 0$ aus dem kontinuierlichen Spektrum und u eine Strahlungslösung ist, liegen i.a. weder u noch ∇u in $L^2(\Omega)$. Da u ausstrahlend ist, hat aber das Produkt $e^{-i\sqrt{\lambda}|x|}u$ erste Ableitungen in $L^2(\Omega)$. Dies ist immer noch wahr, wenn wir $|x|$ durch eine Phasenfunktion χ mit $|\nabla\chi| = 1$ ersetzen, die sich asymptotisch wie $|x|$ für $|x| \to \infty$ verhält. Setzen wir also

$$v := ue^{-i\sqrt{\lambda}\chi},$$

so genügt v der Gleichung,

$$(\Leftrightarrow\Delta + V)v \Leftrightarrow 2i\sqrt{\lambda}\nabla\chi\nabla v \Leftrightarrow i\sqrt{\lambda}\Delta\chi v = fe^{-i\sqrt{\lambda}\chi},$$

die keinen Faktor λ mehr sondern lediglich einen Faktor $\sqrt{\lambda}$ enthält. Multiplizieren wir diese Gleichung nun mit $2(2\nabla\chi\nabla\bar{v} + \Delta\chi\bar{v})$, so erhalten wir:

$$2\mathrm{Re}\,(2\nabla\chi\nabla\bar{v} + \Delta\chi\bar{v})(\Leftrightarrow\Delta + V)v = 2\mathrm{Re}\,(2\nabla\chi\nabla\bar{v} + \Delta\chi\bar{v})fe^{-i\sqrt{\lambda}\chi}, \tag{1.4}$$

wo auch $\sqrt{\lambda}$ nicht länger als Koeffizient auftritt. Die linke Seite läßt sich in der Form

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}\,\nabla'[(2(\nabla\chi\cdot\nabla\bar{v})\nabla v) + (\Delta\chi\bar{v}\nabla v) \Leftrightarrow (\nabla\chi|v|^2V)] + 2\nabla'(\nabla\chi|\nabla v|^2)\\ + \nabla'(\nabla\Delta\chi|v|^2) \Leftrightarrow \Delta\Delta\chi|v|^2 + 4\mathrm{Re}\,\nabla'\bar{v}[\nabla\nabla'\chi]\nabla v \Leftrightarrow 2(\nabla\chi\cdot\nabla V)|v|^2\end{aligned}$$

schreiben. Integrieren wir Gleichung (1.4) über Ω und beachten, daß es keinen Beitrag von $|x| = \infty$ gibt und daß $v = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\chi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma + 4\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}\nabla'\bar{v}[\nabla\nabla'\chi]\nabla v\,dx = \qquad (1.5)\\ &= \int\limits_{\Omega}(\Delta\Delta\chi + 2(\nabla\chi\cdot\nabla V))|v|^2\,dx + 2\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}(2(\nabla\chi\cdot\nabla\bar{v}) + \Delta\chi\bar{v})fe^{-i\sqrt{\lambda}\chi}\,dx.\end{aligned}$$

Dabei verschwindet wegen der Nullrandwerte von v auch die tangentiale Ableitung von v auf dem Rand, so daß:

$$\nabla\chi\nabla\bar{v}\frac{\partial v}{\partial\nu} = |\nabla v|^2\frac{\partial\chi}{\partial\nu} = \frac{\partial\chi}{\partial\nu}\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wir wollen Gleichung (1.5) nun wieder in Abhängigkeit von u schreiben:

Aus $|\nabla\chi| = 1$ folgt, daß $[\nabla(\nabla\chi)']\nabla\chi = 0 = (\nabla\chi)'[\nabla(\nabla\chi)']$ ist, so daß

$$\nabla'\bar{v}[\nabla(\nabla\chi)']\nabla v \quad = \quad \nabla'\bar{u}[\nabla(\nabla\chi)']\nabla u$$

ist. Wegen der Nullrandwerte gilt $\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|$ auf $\partial\Omega$ und wir erhalten:

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{\partial\Omega}(\nabla\chi\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma + 4\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}(\nabla\bar{u}[\nabla(\nabla\chi)']\nabla u)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega}(\Delta\Delta\chi + 2(\nabla\chi\cdot\nabla V))|u|^2\,dx + 2\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}(2(\nabla\chi\cdot\nabla\bar{u}) + (2i\sqrt{\lambda} + \Delta\chi)\bar{u})f\,dx,$$

wobei wir wieder $|\nabla\chi| = 1$ ausgenutzt haben. Diese Gleichung ist linear in χ, so daß für eine Linearkombination $\psi = \sum_{j=1}^{N} b_j\chi_j$ verschiedener Phasenfunktionen χ_j mit $B := \sum b_j$ gilt:

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{\partial\Omega}(\nabla\psi\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma + 4\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}(\nabla\bar{u}[\nabla(\nabla\psi)']\nabla u)\,dx +$$
$$= \int\limits_{\Omega}(\Delta\Delta\psi + 2(\nabla\psi\cdot\nabla V))|u|^2\,dx + 2\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}(2(\nabla\psi\cdot\nabla\bar{u}) + (2i\sqrt{\lambda}B + \Delta\psi)\bar{u})f\,dx.$$

Aufgrund der Eigenschaften (1.2) und (1.3) haben wir dann die folgende Abschätzung:

$$2c_1\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma + 4\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}d(x)|\nabla u|^2\,dx \leq$$
$$\leq \int\limits_{\Omega}(\Delta\Delta\psi + 2(\nabla\psi\cdot\nabla V))|u|^2\,dx + 2\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega}(2(\nabla\psi\cdot\nabla\bar{u}) + (2i\sqrt{\lambda}B + \Delta\psi)\bar{u})f\,dx.$$

Wie in [Mor75b] kann man nun die Terme auf der rechten Seite für $|\lambda| > \lambda_0 > 0$ gegen

$$\frac{C}{\lambda + C}(\|f\|_{-s}^2 + \|d\nabla u\|^2) \qquad \text{bzw.} \qquad C(\|f\|_s^2 + \varepsilon\|d\nabla u\|^2)$$

abschätzen, wobei für den ersten Term wieder die Abklingeigenschaften des Potentials V ausgenutzt werden.

Ist nun λ hinreichend groß und ε geeignet klein gewählt, so lassen sich die Terme mit ∇u auf der linken Seite „absorbieren“ und wir erhalten:

$$2c_1\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + 4\|\nabla u\|_{-s}^2 \leq C\|f\|_s^2,$$

womit die erste Aussage des Theorems gezeigt ist.

Die zweite folgt nun durch erneute Anwendung von Lemma 1.7.

□

Theorem 1.9 (PdGA für den Schrödingeroperator)
Es seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$, die Voraussetzungen 1.5 erfüllt und $s > 1$. Dann existieren zu jedem $\lambda \geq 0$ die starken Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \searrow 0} R_S(\lambda \pm i\varepsilon)f =: R_S(\lambda \pm i0)f$ in $\mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_{-s}(\Omega))$. Darüber hinaus gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $f \in L^2_s(\Omega)$ und alle $\lambda \geq a > 0$ gilt:

$$\|R_S(\lambda \pm i0)f\|_{-s} \leq C(1+\lambda)^{-1/2}\|f\|_s.$$

Genügt das Potential V auch noch der Bedingung 5. aus Abschnitt 1.1, so gilt die Abschätzung für alle $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Beweis: Die Existenz der Grenzwerte folgt wie in Bemerkung 1.6 erwähnt mit [Jäg67, Satz 6].

Kombiniert man für λ in einer hinreichend großen Umgebung von $\lambda = 0$ die lokale Aussage von Theorem 1.3 (das insbesondere auch unter den in diesem Abschnitt geforderten Voraussetzungen gültig ist) mit der des Abschätzungstheorems 1.8 für große λ, so erhält man mit einer geeignet gewählten Konstante $C > 0$ die behauptete in λ gleichmäßige Abschätzung der Resolvente gegen die rechte Seite.

□

Bemerkung 1.10
In [Mor75a] wird für den Fall $n = 3$ ein im Vergleich zu Theorem 1.8 etwas allgemeineres Resultat gezeigt. Dort braucht die Hessematrix der Phasenfunktion lediglich positiv semidefinit zu sein womit mehr Gebiete Ω zugelassen werden können. Da dies jedoch nur für den Fall $n = 3$ gilt und in Theorem 1.8 die wohlbekannte Klasse der Gebiete, deren Komplement strikt sternförmig ist, enthalten ist, haben wir uns hier auf diesen Fall beschränkt.

Kapitel 2

Differenzierbarkeit der Resolvente

In diesem Kapitel wird die Differenzierbarkeit der Resolvente der im vorangegangenen Kapitel eingeführten Störungen des Laplaceoperators bezüglich des Spektralparameters λ untersucht.

Auf der Resolventenmenge des Operators, die nach den Aussagen des letzten Kapitels über das Spektrum von A die Menge $\mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq \Leftrightarrow \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$ umfaßt, ist die Resolvente holomorph.

In Kapitel 1 wurde die Resolvente, aufgefaßt als Operator zwischen gewichteten Räumen, stetig auf die nichtnegative Achse, also das kontinuierliche Spektrum fortgesetzt. Durch ein ähnliches Fortsetzungsargument für die Ableitungen wird nun die Differenzierbarkeit der Resolvente bezüglich des Spektralparameters auf der positiven reellen Achse gezeigt. Dazu werden im ersten Abschnitt für den Ganzraumfall „mikrolokale Resolventenabschätzungen“ bewiesen, mit denen es im zweiten gelingt, Potenzen der Resolvente auf der positiven reellen Achse lokal gleichmäßig abzuschätzen. Dies läßt sich mit Hilfe einer Abschneidetechnik auch auf den Außenraumfall übertragen und über die Formel für die Ableitungen der Resolvente erhält man deren Differenzierbarkeit auf der positiven reellen Achse und die lokal gleichmäßige Beschränktheit der Ableitung.

Für den Spezialfall des Schrödingeroperators im Ganzraumfall (auch mit langreichweitigem Potential V) ist die Differenzierbarkeit der Resolvente bereits von Isozaki in [Iso85] gezeigt worden. Die N-te Ableitung läßt sich gleichmäßig für große λ mit einer Abklingrate $\lambda^{-(N+1)/2}$ entsprechend dem PdGA ($N = 0$) abschätzen. Unter Voraussetzungen, die denen von Theorem 1.9 entsprechen, übertragen wir dies mit den Ergebnissen aus dem vorangegangenen Kapitel im dritten Abschnitt mit derselben Abklingrate auf den Außenraumfall.

Am Ende des Kapitels zeigen wir noch die einmalige Differenzierbarkeit der Resolventen in $\lambda = 0$ für eine Klasse von rechten Seiten und diskutieren die auftretenden Schwierigkeiten bei höheren Ableitungen.

2.1 Mikrolokale Resolventenabschätzungen im Ganzraumfall

In diesem Abschnitt betrachten wir $\Omega = \mathbb{R}^n$, also den Ganzraumfall. Die Hauptergebnisse sind die Theoreme 2.13, 2.16, 2.31 und 2.34, die sogenannten mikrolokalen Resolventenabschätzungen. In diesen werden Produkte aus der Resolvente und Pseudodifferentialoperatoren, die bestimmten Voraussetzungen genügen, ähnlich wie im Prinzip der Grenzabsorption, in gewichteten Normen gegen die rechte Seite abgeschätzt. Im Ganzraumfall für Schrödingeroperatoren mit langreichweitigem Potential sind solche Abschätzungen von Isozaki & Kitada [IK84] gezeigt worden, woran wir uns auch im Falle der variablen Koeffizienten orientieren werden.

Die Übertragung der Ergebnisse auf den Außenraumfall werden wir im Zusammenhang mit der Differenzierbarkeit der Resolvente in Abschnitt 2.2.2 vornehmen.

Zunächst fassen wir einige Ergebnisse aus der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren zusammen, die wir sowohl in den Beweisen der mikrolokalen Resolventenabschätzungen als auch im Beweis der Differenzierbarkeit der Resolventen benutzen werden. Diese Ergebnisse kann man beispielsweise in [Kg82], [Hö85] oder in dem einleitenden Abschnitt von [IK84] nachlesen. Sie behandeln eine kleinere Klasse von Pseudodifferentialoperatoren, als die in [Tay81] betrachteten.

2.1.1 Pseudodifferentialoperatoren

Wie in [Kg82, Definition 1.1(1) bzw. 1.6] definieren wir:

Definition 2.1 (Symbole der Klasse $S^m_{\rho,\delta}$)

1. *Es seien $p = p(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$, $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta \le \rho \le 1$ und $\delta < 1$. Dann ist p ein Symbol der Klasse $S^m_{\rho,\delta}$, wenn es zu jedem Paar (α,β) von Multiindizes eine Konstante $C_{\alpha,\beta}$ gibt, so daß*

$$|D^\beta_x \partial^\alpha_\xi p(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}.$$

Für $\rho = 1$ und $\delta = 0$ schreiben wir $S^m_{1,0} =: S^m$.

2. *Seien* $p_j(x,\xi) \in S^{m_j}_{\rho,\delta}$, $j = 0, 1, \ldots$, *mit* $m_0 \geq m_1 \geq \cdots \geq m_j \geq m_{j+1} \geq \ldots$ *und* $m_j \to \Leftrightarrow\infty$ *für* $j \to \infty$. *Dann hat* $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ *die (asymptotische) Entwicklung*

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi),$$

wenn für jedes $N \geq 1$ *gilt:*

$$p(x,\xi) \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x,\xi) =: r_N(x,\xi) \in S^{m_N}_{\rho,\delta}.$$

Mit diesen Symbolklassen lassen sich nun die Pseudodifferentialoperatoren (PDOen) definieren (vgl. [Kg82, Definition 1.1(2)]):

Definition 2.2 (Pseudodifferentialoperator (PDO))
Ein linearer Operator $P : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *in* $\mathbb{R}^n_x$ *ist ein Pseudodifferentialoperator (PDO) mit Symbol* $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, *wenn sich* Pu *durch*

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x,\xi)(\mathcal{F}_0 u)(\xi)\, d\xi$$

für $u \in \mathcal{S}$ *darstellen läßt. Wir schreiben dann* $P = p(x,D) \in S^m_{\rho,\delta}$ *und bezeichnen das Symbol* p *von* P *mit* $\sigma(P)$. *Als* Hauptsymbol *von* P *bezeichnet man die Äquivalenzklasse von* $p(x,\xi)$ *in* $S^m_{\rho,\delta}/S^{m-(2\rho-1)}_{\rho,\delta}$ *bzw. jedes Element dieser Äquivalenzklasse.*

Es ist hier dasselbe Symbol $S^m_{\rho,\delta}$ sowohl für die Funktionenklasse wie auch für die Klasse von PDOen gewählt worden. Es bezeichnet so eigentlich zwei verschiedene Dinge, doch ist dies gerechtfertigt durch die Identifizierung gemäß des nachfolgenden Theorems.

Über die Darstellung als oszillierendes Integral erhält man, daß auch die Anwendung von PDOen auf Funktionen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Sinn macht. Nach [Kg82, Theorem 1.3] sind PDOen sowohl von $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ als auch von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ stetig.

Zwischen Symbolen und PDOen besteht die folgende Beziehung (vgl. [Kg82, Proposition 1.2]):

Theorem 2.3
Die Abbildung $S^m_{\rho,\delta} \ni p(x,\xi) \mapsto P = p(x,D) \in S^m_{\rho,\delta}$ *ist eine Bijektion. Das Symbol* $p(x,\xi)$ *zu einem gegebenen PDO* P *berechnet sich,* ξ *als Parameter auffassend, durch*

$$p(x,\xi) = e^{-ix\xi} P(e^{ix\xi}).$$

Als Spezialfall von [Kg82, Thoerem 4.1] formulieren wir:

Theorem 2.4 (L^2 - Beschränktheit)
Ist P ein PDO mit Symbol $p \in S^0$, so ist P als Operator in $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ beschränkt und es gilt:

$$\|Pu\|_{L^2} \leq C\ |p| \|u\|_{L^2},$$

mit der Seminorm

$$|p| := \sup_{x,\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha+\beta| \leq l} \langle \xi \rangle^{|\alpha|} |D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)|,$$

wobei sowohl C als auch l lediglich von n abhängen.

Diese Abschätzung wird zunächst für Funktionen $u \in \mathcal{S}$ gezeigt und mit einem Approximationsargument sind somit PDOen auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ - Funktionen erklärt.

Im weiteren betrachten wir den folgenden Typ gewichteter PDOen und definieren etwas allgemeiner als in [IK84, Definition 2.2]:

Definition 2.5
Seien $m \in \mathbb{R}$ und $\mu \geq 0$. Dann ist $p(x,\xi) \in GS^m(\mu)$, wenn es zu jedem Paar (α, β) von Multiindizes eine Konstante $C_{\alpha,\beta}$ gibt, so daß

$$|D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle x \rangle^{-\mu-|\beta|} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}.$$

Für $m = 0$ schreiben wir $GS^0(\mu) =: GS(\mu)$.

Ein Symbol $p(x,\xi)$ heißt „schnell abfallend in x“, wenn $p(x,\xi) \in GS^m(\mu)$ für alle $\mu \geq 0$ gilt.

Ein PDO P gehört zu $GS^m(\mu)$, wenn sein Symbol zu $GS^m(\mu)$ gehört. Weiter definieren wir die Seminorm

$$|p|_{l,m,\mu} := \sup_{x,\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\beta|,|\alpha| \leq l} \langle x \rangle^{\mu+|\beta|} \langle \xi \rangle^{-m+|\alpha|} |D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)|.$$

Wie in [IK84, Theorem 2.3] gilt mit [Kg82, Theorem 1.7] für das Produkt zweier gewichteter PDOen:

Theorem 2.6 (Asymptotische Entwicklung des Produktes)
Seien P_1, P_2 PDOen mit Symbolen $p_j(x,\xi) \in GS^{m_j}(\mu_j), j = 1, 2$. Dann ist auch ihr Produkt P_1P_2 ein PDO, der in $GS^{m_1+m_2}(\mu_1 + \mu_2)$ liegt, und für $N \geq 1$ hat sein Symbol $\sigma(P_1P_2)$ die Entwicklung

$$\sigma(P_1P_2) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha p_1(x,\xi))(D_x^\alpha p_2(x,\xi)) + r_N(x,\xi).$$

Hierbei genügt $r_N(x,\xi)$ der Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|D_x^\beta \partial_\xi^\alpha r_N(x,\xi)| \leq \\
&\quad \leq C_{\alpha,\beta,N} \sum_{|\gamma|=N} |p_1^{(\gamma)}|_{l_1',m_1,\mu_1} |p_{2(\gamma)}|_{l_2',m_2,\mu_2} \langle x\rangle^{-N-\mu_1-\mu_2-|\beta|} \langle \xi\rangle^{-N+m_1+m_2-|\alpha|},
\end{aligned}$$

wobei $p_1^{(\gamma)}(x,\xi) := \langle\xi\rangle^{|\gamma|}\partial_\xi^\gamma p_1(x,\xi)$, $p_{2(\gamma)} := \langle x\rangle^{|\gamma|} D_x^\gamma p_2(x,\xi)$, $l_j' = l_j + |\alpha| + |\beta|$, $j = 1,2$, und l_j, $j = 1,2$, nur von n abhängige Konstanten sind.

Bemerkung 2.7
Ist das Symbol des Operators P_2 in Theorem 2.6 nur von ξ und nicht von x abhängig, so reduziert sich die Entwicklung auf den ersten Term

$$\sigma(P_1 P_2) = p_1(x,\xi) p_2(\xi).$$

Zum Beweis dieser Aussage benutze man Definition 2.2.

Weiterhin erhalten wir wie in [IK84, Theorem 2.4] mit [Kg82, Theorem 1.7] für den adjungierten Operator, der formal über

$$\langle Pu, v\rangle = \langle u, P^* v\rangle, \qquad u, v \in \mathcal{S}$$

definiert ist:

Theorem 2.8 (Asymptotische Entwicklung der Adjungierten)
Sei P ein PDO mit Symbol $p(x,\xi) \in GS^m(\mu)$. Dann gehört auch seine Adjungierte P^* zu $GS^m(\mu)$ und für $N \geq 1$ hat ihr Symbol $p^*(x,\xi)$ die Entwicklung:

$$p^*(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \overline{p(x,\xi)} + r_N(x,\xi).$$

Hierbei genügt $r_N(x,\xi)$ der Ungleichung

$$|D_x^\beta \partial_\xi^\alpha r_N(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,N} \sum_{|\gamma|=N} |p_{(\gamma)}^{(\gamma)}|_{l+|\alpha|+|\beta|,m,\mu} \langle x\rangle^{-N-\mu-|\beta|} \langle\xi\rangle^{-N+m-|\alpha|},$$

wobei $p_{(\gamma)}^{(\gamma)}(x,\xi) := \langle x\rangle^{|\gamma|}\langle\xi\rangle^{|\gamma|} D_x^\gamma \partial_\xi^\gamma p(x,\xi)$ und l eine nur von n abhängige Konstante ist.

Schließlich haben wir noch die folgende Aussage über die Stetigkeit von gewichteten PDOen in gewichteten Räumen (vgl. [IK84, Theorem 2.5]).

Theorem 2.9
Ist $P \in GS(\mu)$, dann sind für alle $s \in \mathbb{R}$ die Operatoren $\langle x\rangle^\mu P$ und $P\langle x\rangle^\mu$ in $\mathcal{B}(L_s^2(\mathbb{R}^n), L_s^2(\mathbb{R}^n))$.

2.1.2 Einseitige Lokalisierungen

Bevor wir die zu Beginn des Abschnitts erwähnten Hauptergebnisse formulieren, müssen wir zunächst die Voraussetzungen an die PDOen, die von einem Parameter λ abhängen und deren Produkt mit der Resolvente abgeschätzt werden soll, präzisieren. Dafür erweitern wir zunächst die Symbolklasse $GS^m(\mu)$ auf Symbole, die vom Parameter $\lambda \in [a, b]$ abhängen:

Definition 2.10
Seien $m \in \mathbb{R}$, $\mu \geq 0$ und $0 < a \leq b < \infty$. Dann ist $p(x, \xi, \lambda) \in S^m(\mu)$, wenn es zu jedem Paar (α, β) von Multiindizes eine Konstante $C_{\alpha,\beta}$ gibt, so daß gilt

$$\sup_{\lambda \in [a,b]} |D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x, \xi, \lambda)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle x \rangle^{-\mu-|\beta|} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}.$$

Falls $m = 0$ ist, so schreiben wir auch $S^0(\mu) =: S(\mu)$ und ein PDO $P(\lambda) \in S^m(\mu)$, wenn sein Symbol zu $S^m(\mu)$ gehört.

Nun können wir die speziellen Symbolklassen definieren, für welche wir anschließend die mikrolokalen Resolventenabschätzungen zeigen werden:

Definition 2.11
Es ist $p(x, \xi, \lambda) \in S_\infty$, falls

(1) $p(x, \xi, \lambda) \in S(0)$,

(2) Es gibt eine Konstante $\epsilon > 0$, so daß

$$p(x, \xi, \lambda) = 0, \qquad \textit{falls} \quad |\tfrac{|\xi|}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow 1| < \epsilon, \ \lambda \in [a, b]$$

(ϵ darf von p abhängen).

Ein PDO $P(\lambda) \in S_\infty$, wenn sein Symbol zu S_∞ gehört.

Definition 2.12
Es ist $p_\pm(x, \xi, \lambda) \in S_\pm$, falls

(1) $p_\pm(x, \xi, \lambda) \in S(0)$,

(2) Es gibt eine Konstante $\epsilon > 0$, so daß

$$p_\pm(x, \xi, \lambda) = 0, \qquad \textit{falls} \quad |\tfrac{|\xi|}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow 1| > \epsilon, \ \lambda \in [a, b]$$

(ϵ darf von $p_\pm$ abhängen).

(3) Es gibt Konstanten $\mu_\pm$, so daß $\Leftrightarrow 1 < \mu_\pm < 1$ und

$$\begin{aligned} p_+(x,\xi,\lambda) &= 0 \qquad \text{falls} \quad \hat{x}\cdot\hat{\xi} < \mu_+ \\ p_-(x,\xi,\lambda) &= 0 \qquad \text{falls} \quad \hat{x}\cdot\hat{\xi} > \mu_-, \end{aligned}$$

($\mu_\pm$ dürfen von $p_\pm$ abhängen).

Ein PDO $P(\lambda) \in S_\pm$, wenn sein Symbol zu $S_\pm$ gehört.

Nun zu den Resolventenabschätzungen mit PDOen aus S_∞:

Theorem 2.13
Sei $P(\lambda) \in S_\infty$. Dann gibt es für jedes $s > 1/2$ eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

(1) $\|P(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_s \le C\|f\|_s, \quad \lambda \in [a,b]$,

(2) $\|R(\lambda \mp i0)P(\lambda)^* f\|_{-s} \le C\|f\|_{-s}, \quad \lambda \in [a,b]$.

(Die zweite Ungleichung lese man zunächst für $f \in \mathcal{S}$ und approximiere dann $f \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$ durch Funktionen aus $\mathcal{S}$.)
Beweis: Wir setzen:

$$\tfrac{1}{\lambda}p_0(x,\xi,\lambda) = \tfrac{1}{\lambda}p(x,\xi,\lambda)(\tfrac{|\xi|^2}{\lambda} \Leftrightarrow 1)^{-1} \qquad \in S_\infty,$$

wobei letzteres wegen der Abschneideeigenschaften richtig ist.
Der zu $\frac{1}{\lambda}p_0(x,\xi,\lambda)$ gehörige Operator $\frac{1}{\lambda}P_0(\lambda)$ ist dann sogar in $S^{-2}(0)$:

$$\begin{aligned} |D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p_0(x,\xi,\lambda)| &= |D_x^\beta \partial_\xi^\alpha \frac{p(x,\xi,\lambda)}{(\frac{|\xi|^2}{\lambda} \Leftrightarrow 1)}| \\ &= |\sum_{\gamma\le\alpha} C_{\alpha,\gamma}\partial_\xi^{\alpha-\gamma}(D_x^\beta p(x,\xi,\lambda)) \cdot \partial_\xi^\gamma(\tfrac{|\xi|^2}{\lambda} \Leftrightarrow 1)^{-1}| \\ &\le C_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma\le\alpha}\langle\xi\rangle^{-|\alpha-\gamma|}\lambda\langle\xi\rangle^{-2-|\gamma|} \\ &\le C_{\alpha,\beta}\,\lambda\langle\xi\rangle^{-2-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Es wird im folgenden auch die selbstadjungierte L^2–Realisierung von $\Leftrightarrow\Delta$ im Ganzraumfall mit $\Leftrightarrow\Delta$ bezeichnet. Mit $R_0(z) = (\Leftrightarrow\Delta \Leftrightarrow z)^{-1}$ ist dann

$$P(\lambda)R_0(\lambda \pm i0) = \tfrac{1}{\lambda}P_0(\lambda)$$

und aus der Resolventengleichung folgt:

$$P(\lambda)R(\lambda \pm i0) = \tfrac{1}{\lambda}P_0(\lambda) \Leftrightarrow \tfrac{1}{\lambda}P_0(\lambda)(A+\Delta)R(\lambda \pm i0).$$

Da $\frac{1}{\lambda}P_0(\lambda) \in S^{-2}(0)$ und $(A+\Delta) \in S^2(\tau)$ folgt mit Theorem 2.6, daß

$$\tfrac{1}{\lambda}P_0(\lambda)(A+\Delta) \in S(\tau)$$

ist und

$$\sigma(P_0(\lambda)(A+\Delta)) = \sum_{|\beta|<N} \tfrac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta p_0(x,\xi,\lambda) D_x^\beta[\xi_j(a_{jk}(x) \Leftrightarrow \delta_{jk})\xi_k + a_0(x)] + q_N(x,\xi,\lambda),$$

mit $q_N(x,\xi,\lambda) \in S(N)$. Somit ist

$$P(\lambda)R(\lambda \pm i0) = \tfrac{1}{\lambda}\Big(P_0(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{|\beta|<N} P_\beta(\lambda)(A+\Delta)_\beta R(\lambda \pm i0) + Q_N(\lambda)R(\lambda \pm i0)\Big), \tag{2.1}$$

wobei $(A+\Delta)_\beta = D_x^\beta(A+\Delta) \in S^2(\tau)$, $\frac{1}{\lambda}P_\beta(\lambda) \in S^{-2}(0)$ und $\frac{1}{\lambda}Q_N(\lambda) \in S(N)$. Also ist für $s, t > 1/2$ und $f \in L_s^2$ mit den Theoremen 2.6, 2.9 und 1.3:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\lambda}P_\beta(\lambda)(A+\Delta)_\beta R(\lambda \pm i0)f &\in L^2_{-t+\tau}(\mathbb{R}^n) \\ \tfrac{1}{\lambda}Q_N(\lambda)R(\lambda \pm i0)f &\in L^2_{-t+\tau}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Für $s \geq \Leftrightarrow t + \tau$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|P(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_{-t+\tau} \leq & \frac{C}{\lambda}\Big(\|P_0(\lambda)f\|_{-t+\tau} + \sum_{|\beta|<N} \|P_\beta(\lambda)(A+\Delta)_\beta R(\lambda \pm i0)f\|_{-t+\tau} \\ & \qquad + \|Q_N(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_{-t+\tau}\Big) \\ \leq & \frac{C}{\lambda}\|f\|_s \leq C\,\|f\|_s, \end{aligned}$$

so daß $P(\lambda)R(\lambda \pm i0) : L_s^2(\mathbb{R}^n) \to L^2_{-t+\tau}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist. Ist $s < \Leftrightarrow t + \tau$, so ersetzt man in der obigen Abschätzung $(\Leftrightarrow t + \tau)$ durch s und erhält bereits die Aussage des Theorems.

Im Falle $s \geq \Leftrightarrow t + \tau$ beachte man nun, da $p(x,\xi,\lambda) = 0$ für $|\frac{|\xi|}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow 1| < \epsilon$ ist, daß dies auch für $p_0(x,\xi,\lambda)$, $p_0(x,\xi,\lambda)\sigma(A+\Delta)$ und $\frac{1}{\lambda}\langle x\rangle^\tau p_0(x,\xi,\lambda)\sigma(A+\Delta)$ gilt, und deswegen

$$\tilde{P}(\lambda) := \tfrac{1}{\lambda}\langle x\rangle^\tau P_0(\lambda)(A+\Delta) \in S_\infty$$

ist. Wenden wir auf $\tilde{P}(\lambda)$ das obige Vorgehen an, so gilt

$$\tilde{P}(\lambda)R(\lambda \pm i0) : L_s^2(\mathbb{R}^n) \to L^2_{-t+\tau}(\mathbb{R}^n),$$

also insgesamt:

$$P(\lambda)R(\lambda \pm i0) : L^2_s(\mathbb{R}^n) \to L^2_{-t+2\tau}(\mathbb{R}^n),$$

falls $s \geq -t + 2\tau$, denn

$$\|P(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_{-t+2\tau} \leq \frac{C}{\lambda}\left(\|P_0(\lambda)f\|_{-t+2\tau} + \|\tilde{P}(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_{-t+\tau}\right).$$

Im Fall $s < -t + 2\tau$ ersetze man wieder $-t + 2\tau$ durch s.

Dieses Vorgehen setzt man solange fort, bis $s < -t + k\tau$ ist, ersetzt dann $-t + k\tau$ durch s und erhält schließlich die erste Behauptung des Theorems.

Die zweite Behauptung des Theorems erhält man nun durch den Übergang zur adjungierten Abbildung (im Banachraumsinn bezüglich des $L^2(\Omega)$-Skalarproduktes).

□

Als zweite einseitige Lokalisierung zeigen wir die Resolventenabschätzungen mit PDOen aus $S_\pm$:

Da wir im folgenden die Resolvente $R(z)$ auch für $\operatorname{Im} z \neq 0$ betrachten werden, führen wir komplexe Versionen, d.h. $\lambda \widehat{=} z \in \mathbb{C}$ für die PDOen $P_\pm(\lambda)$ und die Symbolklassen $S(\mu)$ bzw. $S_\pm$ ein:

Definition 2.14
Für $\mu \geq 0$ ist $p(x,\xi,z) \in \tilde{S}(\mu)$, wenn es zu jedem Paar (α,β) von Multiindizes eine Konstante $C_{\alpha,\beta}$ gibt, so daß

$$\sup_{z \in \overline{Q}} |D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi,z)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle^{-\mu-|\beta|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}.$$

Definition 2.15
Es ist $p_\pm(x,\xi,z) \in \tilde{S}_\pm$, wenn

i) $p_\pm(x,\xi,z) \in \tilde{S}(0)$

ii) $\exists \epsilon > 0 : p_\pm(x,\xi,z) = 0,$ *falls* $|\frac{|\xi|}{\sqrt{\operatorname{Re} z}} - 1| > \epsilon,\ z \in \overline{Q}$

iii) $\exists \mu_\pm \in (-1,1) : \begin{cases} p_-(x,\xi,z) & = 0, \text{ falls } \hat{x}\cdot\hat{\xi} > \mu_- \\ p_+(x,\xi,z) & = 0, \text{ falls } \hat{x}\cdot\hat{\xi} < \mu_+ \end{cases}$

iv) $p_\pm(x,\xi,z)$ *ist mit all seinen Ableitungen nach x und ξ stetig für $z \in Q$ und gleichmäßig bezüglich (x,ξ) stetig für* $\operatorname{Im} z \to 0$.

Mit diesen Definitionen formulieren wir nun die Resolventenabschätzungen mit PDOen $P_\pm(\lambda)$aus $S_\pm$, die wie in Theorem 2.13 zu interpretieren sind:

Theorem 2.16
Seien $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$. Dann existieren zu jedem $s > 1/2$ die starken Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \searrow 0} P_\mp(\lambda + i\varepsilon)R(\lambda \pm i\varepsilon)$ in $\mathcal{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), L^2_{s-1-\delta}(\mathbb{R}^n))$ mit einem beliebigen $\delta > 0$, und es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_{s-1} \leq C\,\|f\|_s \qquad \forall\, \lambda \in [a,b].$$

Bevor wir zum eigentlichen Beweis von Theorem 2.16 kommen, bedarf es einiger Vorbereitungen:

Wie in [IK84] definieren wir die Zerlegbarkeit von Operatoren und geben für diese Eigenschaft ein Kriterium an.

Definition 2.17 (Zerlegbarkeit von Operatoren)
Ein beschränkter Operator B auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ heißt zerlegbar bezüglich x_n, wenn für jedes x_n ein $B(x_n) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{n-1}), L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ existiert, so daß

$$(Bf)(x) = (Bf)(x', x_n) = (B(x_n)f(\cdot, x_n))(x') \qquad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Theorem 2.18
Ein PDO P mit Symbol $p(x,\xi) \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}^{2n})$ (Raum der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit beschränkten Ableitungen) ist genau dann bezüglich x_n zerlegbar, wenn $\frac{\partial}{\partial \xi_n} p(x,\xi) = 0$ gilt.

Ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis von Theorem 2.16 ist das folgende Theorem aus der zeitabhängigen Theorie, in welchem eine Abschätzung für die Lösung der abstrakten Differentialgleichung (kurz DGL):

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}u(t) = B(t)u(t) + \tilde{f}(t) \qquad (\Leftrightarrow\!\infty < t \leq 0). \tag{2.2}$$

gezeigt wird, (vgl. [IK84, Theorem 1.8]):

Theorem 2.19 (Abschätzung der Lösung einer abstrakten DGL)
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und es gelte:

i) $u(t) \in \mathcal{C}^1((\Leftrightarrow\!\infty, 0], \mathcal{H})$ *und* $\liminf_{t \to -\infty} \|u(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$

ii) $\int_{-\infty}^0 \|\tilde{f}(t)\|_{\mathcal{H}}\, dt < \infty$

iii) $B(t) \in \mathcal{C}((\Leftrightarrow\!\infty, 0], \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}))$

iv) $\exists B_1(t) : (\Leftrightarrow\!\infty, 0] \to \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}) | T$ *ist selbstadjungiert*$\}$, *so daß:* $i(B(t) \Leftrightarrow B(t)^*) \leq B_1(t)$ *sowie* $\int_{-\infty}^{0} \|B_1(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})}\, dt < \infty$.

Ist $u(t)$ die Lösung der Differentialgleichung (2.2), so gilt für jedes $s > 1$:

$$\int_{-\infty}^{0} (1 - t)^{s-2} \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \, dt \le \frac{\delta C_s^2 C_0 + C_s}{\delta - \delta^2 C_s} \int_{-\infty}^{0} (1 - t)^s \|f(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \, dt,$$

wobei $C_0 = \exp\Big(\int\limits_{-\infty}^{0} \|B_1(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \, dt \Big) \int\limits_{-\infty}^{0} \|B_1(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \, dt$ *und* $C_s = (s - 1)^{-1}$ *sowie* $0 < \delta C_s < 1$.

Schließlich nehmen wir noch die grundlegende Lokalisierung im Impulsraum vor:

Lokalisierung der DGL $(A - \lambda)u = f$ im Impulsraum:

Es sei $\omega^0 = (\omega_1^0, \ldots, \omega_n^0) \in S^{n-1}$ fest mit $\omega_n^0 > 0$ und

$$\hat{U}_\epsilon = \{\omega \in S^{n-1} \,|\, |\omega - \omega^0| < \epsilon\}.$$

Wir wählen ϵ hinreichend klein, so daß

$$\hat{U}_{4\epsilon} \subset \{\omega \in S^{n-1} \,|\, \omega_n > 0\}$$

und $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$ so, daß

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & ||\xi| - 1| < \epsilon/2 \\ 0 & ||\xi| - 1| > \epsilon \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \psi_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in \hat{U}_\epsilon \\ 0 & \omega \notin \hat{U}_{2\epsilon} \end{cases}$$

und setzen

$$\Phi(\xi, z) := \rho\Big(\frac{\xi}{\sqrt{\operatorname{Re} z}}\Big)\psi_0(\hat{\xi}), \qquad z \in \overline{Q}.$$

Mit $\Phi(D, z)$ bezeichnen wir den PDO mit dem Symbol $\Phi(\xi, z)$. Dieser kommutiert mit $(-\Delta - z)$, und wir erhalten mit $u(z) := R(z)f$,

$$(-\Delta + (A + \Delta) - z)\Phi(D, z)u(z) \;=\; \Phi(D, z)f + [A + \Delta, \Phi(D, z)]u(z).$$

Wir spalten nun den „Störterm“ $A + \Delta$ in zwei Anteile auf:

$$A + \Delta = A_1 + A_2,$$

so daß sich die Symbole der Operatoren A_1 und A_2 mit einer Abschneidefunktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \eta \le 1$, $\operatorname{supp} \eta \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{\tilde{R}}(0)$ und $\eta \equiv 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{\tilde{R}+1}(0)$ für ein $\tilde{R} > 0$, in der Form

$$\begin{aligned} \sigma(A_1)(x, \xi) &= \eta(x)((-i\partial_j a_{jk}(x) + (a_{jk}(x) - \delta_{jk})\xi_j)\xi_k) + \eta(x)a_0(x) \\ &=: a_1(x, \xi) + a_3(x) \\ \sigma(A_2)(x, \xi) &= (1 - \eta(x))((-i\partial_j a_{jk}(x) + (a_{jk}(x) - \delta_{jk})\xi_j)\xi_k) + (1 - \eta(x))a_0(x) \\ &=: a_2(x, \xi) + a_4(x) \end{aligned}$$

schreiben lassen. Es ist dann $\sigma(A_2)(\cdot,\xi) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\sigma(A_1)(x,\xi)|$ kann mit der Wahl von $\tilde{R}$ in Abhängigkeit von ξ beliebig klein gewählt werden. Wir haben somit:

$$
\begin{aligned}
(\Leftrightarrow\Delta + A_1 \Leftrightarrow z)\Phi(D,z)u(z) = \Phi(D,z)f + [A+\Delta,\Phi(D,z)]u(z) \\
\Leftrightarrow A_2\Phi(D,z)u(z) \quad (2.3)
\end{aligned}
$$

Der Operator $[A+\Delta,\Phi(D,z)]$ gehört wegen der Abklingeigenschaften von $A+\Delta$ und den Abschneideeigenschaften von $\Phi(\xi,z)$ bezüglich ξ zu der Klasse $S(\tau)$.

Beweis von Theorem 2.16: Der Beweis, der zunächst für den Fall $P_-(\lambda)R(\lambda+i0)$ geführt wird, gliedert sich in die folgenden Schritte:

1. Unter Ausnutzung der Eigenschaften von A_1 und Φ konstruiert man einen Operator $B(z)$ und bringt Gleichung (2.3) auf die Form der abstrakten DGL aus Theorem 2.19:
$$\Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n} \Leftrightarrow B(z)\Big)\Phi(D,z)u(z) = F(z,x_n).$$

2. Man zeigt, daß der Operator $B(z)$ (nach Konstruktion) bzgl. x_n zerlegbar ist, und daß es eine beschränkte stetige Funktion $B_1(z,x_n)$ gibt, die der Voraussetzung *iv)* von Theorem 2.19 genügt.

3. Man weist die restlichen Voraussetzungen für Theorem 2.19 nach und wendet es auf die DGL aus 1. an. Die gewonnene Ungleichung wird dann weiter so nach oben und unten abgeschätzt, daß man auf
$$\|P(z)u(z)\|_{s-1} \le C\,\big(\|P_1(z)f\|_s + \|f\|_{-N} + \|P_2(z)u(z)\|_{s-\tau} + \|u(z)\|_{-N}\big),$$
kommt. Dabei ist $P(z)$ ein spezieller PDO, dessen Symbol sich aus Abschneidefunktionen zusammensetzt, und es sind $P_1(z), P_2(z) \in \tilde{S}_-$.

4. Man verwendet eine weitere Lokalisierung und die Abschätzung aus 3., um mit einer von z unabhängigen Konstanten L und Operatoren $P_j^{(m)}(z) \in \tilde{S}_-$, $j=1,2$ die folgende *fundamentale Abschätzung* zu zeigen:
$$
\begin{aligned}
\|P_-(z)u(z)\|_{s-1} \le C\,\Big(\sum_{m=1}^{L} \|P_1^{(m)}(z)f\|_s + \|f\|_{-N} \\
+ \sum_{m=1}^{L} \|P_2^{(m)}(z)u(z)\|_{-\gamma} + \|u(z)\|_{-N}\Big).
\end{aligned}
$$

5. Unter Ausnutzung des Prinzips der Grenzabsorption läßt man in der fundamentalen Abschätzung $\operatorname{Im} z$ gegen Null gehen und erhält so die Aussage des Theorems für den Fall $P_-(\lambda)R(\lambda + i0)$.

6. Argumentation im Fall $P_+(\lambda)R(\lambda \Leftrightarrow i0)$.

Um auf die spezielle Gestalt in 1. zu kommen, muß für die hier betrachteten Störungen A des Laplaceoperators der Operator $B(z)$ etwas anders als in [IK84] definiert werden, da der Summand ξ_n^2 in der Symbolschriebweise nicht explizit auftritt. Um den auftretenden Störterm zu behandeln, wird das kurzreichweitige Verhalten der Koeffizientenfunktionen a_{jk} ausgenutzt. Der Operator $B(z)$ wird wie in [IK84] so konstruiert, daß sein Symbol nicht von ξ_n abhängt und 2. direkt folgt. Die Abschätzungen in 3. sind im wesentlichen die gleichen wie in [IK84], da die Symbole der auftretenden Operatoren kompakten Träger in $\xi \in K_{ab}$ haben. Deswegen, aber auch weil dies schon im PdGA nicht der Fall ist, erhält man keine Abklingrate in λ. Schritt 5. unterscheidet sich bis auf die Abklingrate kaum von dem Vorgehen in [IK84], es wird lediglich noch die Konvergenz in der richtigen Norm gezeigt, wie dies schon in [Iso85] angedeutet ist. Im 6. Schritt wird für den vorliegenden Fall erläutert wie der entsprechende Operator $\tilde{B}(z)$ für angegebenen Fall zu wählen ist.

<u>zu 1.:</u>

Bei der Konstruktion von $\Phi(\xi, z) = \rho(\frac{\xi}{\sqrt{\operatorname{Re} z}})\psi_0(\hat{\xi})$ kann man ϵ hinreichend klein wählen, so daß mit Konstanten $a', a'', b', b'' > 0, b' < 1$ gilt:

$$\operatorname{supp} \Phi(\xi, z) \subset \{\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid a' \leq \tfrac{|\xi'|}{\sqrt{\operatorname{Re} z}} \leq b', a'' \leq \tfrac{\xi_n}{\sqrt{\operatorname{Re} z}} \leq b''\},$$

d.h. insbesondere, da $\operatorname{Re} z \in [a, b]$, daß $\Phi(\xi, z)$ beschränkten Träger in ξ hat. Man wählt nun Abschneidefunktionen $\psi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ bzw. $\psi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $j = 1, 2$, mit

$$\psi_1(\xi') = \begin{cases} 1 & a' < |\xi'| < b' \\ 0 & |\xi'| < a' \Leftrightarrow \epsilon',\ |\xi'| > b' + \epsilon' \end{cases}$$

$$\text{bzw.} \qquad \psi_2(\xi) = \begin{cases} 1 & a'' < \xi_n < b'' \\ 0 & \xi_n < a'' \Leftrightarrow \epsilon',\ \xi_n > b'' + \epsilon'. \end{cases}$$

und es seien:

$$a_1'(x, \xi') := \eta(x)\big(\sum_{j,k=1}^{n-1} (a_{jk}(x) \Leftrightarrow \delta_{jk})\xi_j\xi_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} i\partial_j a_{jk}(x)\xi_k\big)$$

$$\bar{a}^2(x, \xi) := 1 + \eta(x)\big[2\sum_{j=1}^{n-1}(a_{jn}(x) \Leftrightarrow \delta_{jn})\frac{\xi_j}{\xi_n} + (a_{nn}(x) \Leftrightarrow \delta_{nn})\big],$$

also
$$\operatorname{Re} a_1'(x,\xi') + \xi_n^2 \bar{a}^2(x,\xi) = \xi_n^2 + \operatorname{Re} a_1(x,\xi).$$
Damit hat man die folgende Darstellung:

Behauptung 2.20
Für $z \in \overline{Q}$ sei
$$b(x,\xi',z) := \Big[(z \Leftrightarrow a_3(x) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_1'(x,\xi') \Leftrightarrow |\xi'|^2)\psi_1(\tfrac{\xi'}{\sqrt{\operatorname{Re} z}})\Big]^{1/2}.$$
Dann ist der Operator $(\Leftrightarrow\Delta + A_1(x) \Leftrightarrow z)\Phi(D,z)$ ein Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol
$$\Big[\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\operatorname{Im} a_1(x,\xi)\big)^{1/2} \Leftrightarrow b(x,\xi',z)\Big] \\ \times \Big[\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\operatorname{Im} a_1(x,\xi)\big)^{1/2} + b(x,\xi',z)\Big]\Phi(\xi,z).$$

Behauptung 2.21
Die Funktion η kann so gewählt werden, daß auf dem Träger von $\Phi(\xi,z)$ gilt:
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\big((z \Leftrightarrow a_3(x) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_1'(x,\xi') \Leftrightarrow |\xi'|^2)\psi_1(\tfrac{\xi'}{\sqrt{\operatorname{Re} z}})\big) &> 0 \\ \operatorname{Im}\big((z \Leftrightarrow a_3(x) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_1'(x,\xi') \Leftrightarrow |\xi'|^2)\psi_1(\tfrac{\xi'}{\sqrt{\operatorname{Re} z}})\big) &\geq 0 \\ \operatorname{Re}\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\operatorname{Im} a_1(x,\xi)\big) &> 0. \end{aligned}$$

Beweis: Auf $\operatorname{supp}\Phi$ gilt $a'\sqrt{\operatorname{Re} z} < |\xi'| < b'\sqrt{\operatorname{Re} z}$ und somit:
$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\big((z \Leftrightarrow a_1(x) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_1'(x,\xi') \Leftrightarrow |\xi'|^2)\psi_1(\tfrac{\xi'}{\sqrt{\operatorname{Re} z}})\big) = \\ &\quad = \big(\operatorname{Re} z \Leftrightarrow a_3(x) + \eta(x)\sum_{j=1}^{n-1}(a_{jk}(x) \Leftrightarrow \delta_{jk})\xi_j\xi_k \Leftrightarrow |\xi'|^2\big)\psi_1(\tfrac{\xi'}{\sqrt{\operatorname{Re} z}}) \\ &\quad \geq \operatorname{Re} z \Leftrightarrow |a_3(x)| \Leftrightarrow |\eta(x)|\sum_{j=1}^{n-1}|a_{jk}(x) \Leftrightarrow \delta_{jk}|(b'\sqrt{\operatorname{Re} z})^2 \Leftrightarrow (b'\sqrt{\operatorname{Re} z})^2 \\ &\quad = \operatorname{Re} z\big(1 \Leftrightarrow (\mathcal{O}(|x|^{-\tau}) + 1)b'^2\big) \Leftrightarrow \mathcal{O}(|x|^{-\tau}). \end{aligned}$$
Da $\operatorname{Re} z \geq a > 0$, $b' < 1$ und die Abschneidefunktion η so gewählt werden kann, daß die Terme $\mathcal{O}(|x|^{-\tau})$ hinreichend klein werden, gilt insgesamt:
$$\operatorname{Re}\big((z \Leftrightarrow a_3(x) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_1'(x,\xi') \Leftrightarrow |\xi'|^2)\psi_1(\tfrac{\xi'}{\sqrt{\operatorname{Re} z}})\big) > 0.$$
Weiter ist
$$\operatorname{Im}\big((z \Leftrightarrow a_3(x) \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_1'(x,\xi') \Leftrightarrow |\xi'|^2)\psi_1(\tfrac{\xi'}{\sqrt{\operatorname{Re} z}})\big) = \operatorname{Im} z \geq 0.$$

Auf $\operatorname{supp}\Phi$ ist $a''\sqrt{\operatorname{Re} z} < \xi_n < b''\sqrt{\operatorname{Re} z}$ und somit:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\operatorname{Im} a_1(x,\xi)\big) &= \xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) \\
&= \xi_n^2\big(1+\eta(x)\big[2\sum_{j=1}^{n-1}(a_{jn}(x)\Leftrightarrow\delta_{jn})\frac{\xi_j}{\xi_n} + (a_{nn}(x)\Leftrightarrow\delta_{nn})\big]\big) \\
&= b''^2\operatorname{Re} z(1\Leftrightarrow O(|x|^{-\tau})).
\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Argumenten wie oben erhält man:

$$\operatorname{Re}\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\operatorname{Im} a_1(x,\xi)\big) > 0.$$

□

Lemma 2.22
Für $z \in \overline{Q}$ seien $u(z) = R(z)f$,

$$g_0(x,\xi,z) := \Big[\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\operatorname{Im} a_1(x,\xi)\big)^{1/2} + b(x,\xi',z)\Big]^{-1}\psi_2\big(\tfrac{\xi}{\sqrt{\operatorname{Re} z}}\big) \tag{2.4}$$

und $B(z), G_0(z)$ die Pseudodifferentialoperatoren mit den Symbolen $b(x,\xi',z)$ bzw. $g_0(x,\xi,z)$. Dann gilt für $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\Leftrightarrow B(z)\Big)\Phi(D,z)u(z) = \\
&\quad = G_0(z)\Phi(D,z)f + G_0(z)[A+\Delta,\Phi(D,z)]u(z)\Leftrightarrow G_0(z)A_2\Phi(D,z)u(z) \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow\langle x\rangle^{-\tau}P^{(N)}(z)u(z) + Q_N(z)u(z),
\end{aligned}$$

wobei $P^{(N)}(z) \in \tilde{S}(0), Q_N(z) \in \tilde{S}(N)$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{supp}_\xi \sigma(P^{(N)}(z))(x,\xi) \subset \operatorname{supp}_\xi \Phi(\xi,z)$.

Beweis: Die Funktion $g_0(x,\xi,z)$ ist wohldefiniert, denn in der vorangegangenen Behauptung wurde gezeigt, daß der Realteil des Nenners in der Definition von $g_0(x,\xi,z)$ auf dem Träger von ψ_2 echt größer als Null ist. Multipliziert man Gleichung (2.3) mit $G_0(z)$ so erhält man:

$$\begin{aligned}
&G_0(z)(\Leftrightarrow\Delta + A_1\Leftrightarrow z)\Phi(D,z)u(z) = \\
&\quad = G_0(z)\Phi(D,z)f + G_0(z)[A+\Delta,\Phi(D,z)]u(z)\Leftrightarrow G_0(z)A_2\Phi(D,z)u(z).
\end{aligned}$$

Das Symbol des Operators auf der linken Seite hat die Entwicklung:

$$\begin{aligned}
&\sigma(G_0(z)(\Leftrightarrow\Delta + A_1(x)\Leftrightarrow z)\Phi(D,z)) = \\
&\quad = \big((\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\operatorname{Im} a_1(x,\xi))^{1/2}\Leftrightarrow b(x,\xi',z)\big)\Phi(\xi,z) \\
&\qquad + \sum_{1\leq|\alpha|\leq N}\tfrac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha g_0(x,\xi,z)D_x^\alpha(|\xi|^2 + a_1(x,\xi) + a_3(x)\Leftrightarrow z)\Phi(\xi,z) \\
&\qquad + \ q_N(x,\xi,z).
\end{aligned}$$

Es ist $g_0(x,\xi,z)) \in \tilde{S}(0)$ und wegen des geforderten Abklingverhaltens der Koeffizienten sowie des beschränkten Trägers von $\Phi(\xi,z)$ bezüglich ξ ist $D_x^\alpha(|\xi|^2 + a_1(x,\xi) + a_3(x) \Leftrightarrow z)\Phi(\xi,z) \in \tilde{S}(\tau + |\alpha|)$. Somit lassen sich die Terme der Entwicklung in der Form

$$\big((\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi)+i\mathrm{Im}\,a(x,\xi))^{1/2} \Leftrightarrow b(x,\xi',z)\big)\Phi(\xi,z)+\langle x\rangle^{-\tau}p^{(N)}(x,\xi,z)+q_N(x,\xi,z),$$

mit $p^{(N)}(x,\xi,z) \in \tilde{S}(0)$ und $q_N(x,\xi,z) \in \tilde{S}(N)$ zusammenfassen.

Um nun auf die Form der Differentialgleichung (2.2) zu kommen, beachten wir, daß der Operator $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\Phi(D,z)$ das Symbol $\xi_n\Phi(\xi,z)$ hat und betrachten die Differenz:

$$\begin{aligned}
&\Big[\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\mathrm{Im}\,a_1(x,\xi)\big)^{1/2} \Leftrightarrow \xi_n\Big]\Phi(\xi,z) = \\
&= \frac{\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\mathrm{Im}\,a_1(x,\xi) \Leftrightarrow \xi_n^2}{\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\mathrm{Im}\,a_1(x,\xi)\big)^{1/2} + \xi_n}\Phi(\xi,z) \\
&= \frac{\xi_n^2\Big(\eta(x)\big[2\sum_{j=1}^{n-1}(a_{jn}(x) \Leftrightarrow \delta_{jn})\frac{\xi_j}{\xi_n} + (a_{nn}(x) \Leftrightarrow \delta_{nn})\big]\Big)}{\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\mathrm{Im}\,a_1(x,\xi)\big)^{1/2} + \xi_n}\Phi(\xi,z) \\
&\qquad \Leftrightarrow \frac{i\eta(x)(\partial_j a_{jk}(x))\xi_k}{\big(\xi_n^2\bar{a}^2(x,\xi) + i\mathrm{Im}\,a_1(x,\xi)\big)^{1/2} + \xi_n}\Phi(\xi,z) \\
&= \mathcal{O}(|x|^{-\tau}) \qquad \text{für } |x| \to \infty,
\end{aligned}$$

da der Nenner wegen $\xi_n > a''\sqrt{\mathrm{Re}\,z}$ und $\bar{a}^2 + 1 > 0$ gleichmäßig bezüglich x von der Null weg beschränkt ist. Also ist dieser Differenzterm auch von der Art

$$\langle x\rangle^{-\tau}p^{(N)}(x,\xi,z) \qquad \text{mit} \quad p^{(N)}(x,\xi,z) \in \tilde{S}(0)$$

und die Entwicklung von $G_0(z)(\Leftrightarrow\Delta + A_1 \Leftrightarrow z)\Phi(D,z)$ läßt sich wie folgt schreiben:

$$\big(\xi_n \Leftrightarrow b(x,\xi',z)\big)\Phi(\xi,z) + \langle x\rangle^{-\tau}p^{(N)}(x,\xi,z) + q_N(x,\xi,z),$$

mit $p^{(N)}(x,\xi,z) \in \tilde{S}(0)$ und $q_N(x,\xi,z) \in \tilde{S}(N)$.

Interpretiert man nun die obigen Symbole mit den zugehörigen PDOen, so erhält man die Behauptung von Lemma 2.22 und somit Schritt 1 des Beweises, d.h. die Umformung der DGL (2.3) auf die Form der abstrakten DGL aus Theorem 2.19.

$\square$

zu 2.:

Lemma 2.23
Der Operator $B(z)$ aus Lemma 2.22 ist bezüglich x_n zerlegbar, so daß $B(z) = \{B(z,x_n)\}_{x_n=-\infty}^{\infty}$. Für $z \in \overline{Q}$ existiert eine stetige Funktion $B_1(z,x_n) : \mathbb{R} \to \{T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{n-1}), L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \mid T \text{ ist selbstadjungiert } \}$, so daß für alle $z \in \overline{Q}$ und $x_n \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Im} B(z,x_n) := \frac{1}{2i}(B(z,x_n) \Leftrightarrow B(z,x_n)^*)$ gilt:

$$\operatorname{Im} B(z,x_n) \geq B_1(z,x_n), \quad \sup_{z \in Q} \int_{-\infty}^{0} \|B_1(z,x_n)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{n-1}),L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} dx_n < \infty.$$

Beweis: Die Zerlegbarkeit von $B(z)$ folgt wegen $\frac{\partial}{\partial \xi_n} b(x,\xi',z) = 0$ aus Theorem 2.18 über die Zerlegbarkeit von PDOen.

Um die Existenz des Operators $B_1(z,x_n)$ mit den geforderten Eigenschaften zu zeigen, geht man wie im Beweis von [IK84, Lemma 3.9] vor:

Man faßt $B(z,x_n)$ als einen PDO auf $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ mit Symbol $b(x',x_n,\xi',z)$ auf. Das Symbol von $\operatorname{Im} B(z,x_n)$ hat die asymptotische Entwicklung

$$\operatorname{Im} b(x,\xi',z) \Leftrightarrow \frac{1}{2i} \sum_{1<|\alpha|<N} D_{x'}^{\alpha} \partial_{\xi'}^{\alpha} \overline{b(x,\xi',z)} + q_N(x,\xi',z).$$

Weiter bezeichnet man mit $C(z,x_n)$ den PDO mit dem Symbol $(\operatorname{Im} b(x,\xi',z))^{1/2}$. Dann gilt:

$$\sigma(C(z,x_n)^* C(z,x_n)) = \operatorname{Im} b(x,\xi',z) + b_1(x,\xi',z),$$

wobei es zu jedem Paar (α,β) von Multiindizes eine Konstante $C_{\alpha,\beta}$ gibt, so daß:

$$\sup_{z \in \overline{Q}} |D_{x'}^{\alpha} \partial_{\xi'}^{\beta} b_1(x,\xi',z)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle x \rangle^{-1-\tau-|\alpha|} \langle \xi' \rangle^{-|\beta|}. \tag{2.5}$$

Wir haben dann

$$\operatorname{Im} B(z,x_n) = C(z,x_n)^* C(z,x_n) + B_1(z,x_n) \geq B_1(z,x_n).$$

Es ist $B_1(z,x_n)$ der PDO mit den geforderten Eigenschaften, denn mit Theorem 2.4 und Ungleichung (2.5) haben wir auch

$$\sup_{z \in Q} \int_{-\infty}^{0} \|B_1(z,x_n)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{n-1}),L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} dx_n \leq |b_1| \int_{-\infty}^{0} \langle x_n \rangle^{-1-\tau} dx_n < \infty.$$

□

zu 3.:

Die unter 3. beschriebene Vorgehensweise findet sich im Beweis des nachfolgenden Lemmas wieder. Zuvor definieren wir aber noch den dort verwendeten speziellen PDO:

Definition 2.24 (spezieller PDO $P(z)$)
Sei $\chi(\omega) \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$ so, daß $\operatorname{supp}\chi \subset \{\omega \in S^{n-1} \,|\, \omega_n < 0\}$. Wähle $\rho_0(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, daß $\operatorname{supp}\rho_0 \subset \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ und $\rho_0 \equiv 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ ist. Dann bezeichnen wir mit $P(z)$ den PDO mit dem Symbol

$$\rho_0(x)\chi(\hat{x})\Phi(\xi, z).$$

Lemma 2.25
Sei $P(z)$ der PDO aus Definition 2.24. Dann gibt es zu jedem $s > 1/2$ und jeder ganzen Zahl $N \geq 1$ Operatoren $P_1(z), P_2(z) \in \tilde{S}_-$, so daß

$$\|P(z)u(z)\|_{s-1} \leq C \ \left(\|P_1(z)f\|_s + \|f\|_{-N} + \|P_2(z)u(z)\|_{s-\tau} + \|u(z)\|_{s-N}\right),$$

wobei die Konstante C unabhängig von $z \in Q$ ist. Darüber hinaus gilt für $j = 1, 2$:

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{supp}_\xi \sigma(P_j(z))(x,\xi) & \subset & \operatorname{supp}_\xi \Phi(\xi, z) & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ \operatorname{supp}_x \sigma(P_j(z))(x,\xi) & \subset & \{x \,|\, \hat{x}e_n < \varepsilon_1\} & \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

wobei ε_1 ein positive Konstante ist, die beliebig klein gewählt werden kann.

Beweis: Wähle ε_1 klein genug und $\tilde{\chi}(\omega) \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$, so daß

$$\tilde{\chi}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_n > \varepsilon_1 \\ 1, & \omega_n < 0 \end{cases}.$$

Insbesondere sei $\tilde{\chi}(\omega) = 0$, falls $\omega \in \hat{U}_{2\varepsilon}$.
Für $x_n < 0$ schreiben wir die DGL aus 1. in der Form:

$$\Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n} \Leftrightarrow B(z)\Big)\Phi(D, z)u(z) = \sum_{j=1}^{4} g_j(z),$$

wobei

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \rho_0(x)\tilde{\chi}(\hat{x})G_0(z)\Phi(D, z)f \\ g_2(z) &= (1 \Leftrightarrow \rho_0(x))G_0(z)\Phi(D, z)f \\ g_3(z) &= \rho_0(x)\tilde{\chi}(\hat{x})G_0(z)[A + \Delta, \Phi(D, z)]u(z) \\ &\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \langle x\rangle^{-\tau}\rho_0(x)\tilde{\chi}(\hat{x})P^{(N)}(z)u(z) \\ g_4(z) &= (1 \Leftrightarrow \rho_0(x))\big[G_0(z)[A + \Delta, \Phi(D, z)] + \langle x\rangle^{-\tau}P^{(N)}(z)\big]u(z) \\ &\qquad\qquad\qquad + G_0(z)A_2\Phi(D, z)u(z) + Q_N(z)u(z). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die obige Gleichung auf $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ als gewöhnliche Differentialgleichung für $x_n < 0$. Sie ist dann, mit x_n anstelle von t, von der Form der abstrakten Differentialgleichung (2.2).

Für $\operatorname{Im} z > 0$ ist $u(z) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und deswegen gilt:

$$\liminf_{x_n \to -\infty} \|u(z)(\cdot, x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = 0$$

und damit dann auch

$$\liminf_{x_n \to -\infty} \|\Phi(D,z)u(z)(\cdot, x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = 0,$$

also ist Voraussetzung *i*) aus Theorem 2.19 erfüllt.

Mit Lemma 2.23 sind die Voraussetzungen *iii*) und *iv*) erfüllt, denn es ist

$$i(B(z,x_n) - B(z,x_n)^*) = -2\operatorname{Im} B(z,x_n) \leq -2B_1(z,x_n).$$

Die rechte Seite

$$\begin{aligned} F(z,x_n) &= \tilde{f}(x_n) \\ &:= G_0(z)\Phi(D,z)f - G_0(z)A_2\Phi(D,z)u(z) - G_0(z)[A+\Delta, \Phi(D,z)]u(z) \\ &\qquad - \langle x\rangle^{-\tau}P^{(N)}(z)u(z) + Q_N(z)u(z) \end{aligned}$$

genügt der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{0} \|F(z,x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dx_n < \infty \qquad z \in \overline{Q},$$

denn für den ersten Summanden ist $\int_{-\infty}^{0} \|f(\cdot,x_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dx_n \leq \int_{-\infty}^{0} (1 + |x_n|)^{-2s} dx_n \|f\|_s^2 \leq C_s \|f\|_s^2 < \infty$, da $s > 1/2$ ist und die übrigen Terme haben in x mindestens ein Abklingen der Rate $-\tau$. Somit ist auch Voraussetzung *ii*) erfüllt und wir erhalten mit der Anwendung von Theorem 2.19:

$$\int_{-\infty}^{0} (1+|x_n|)^{2(s-1)} \|\Phi(D,z)u(z)(\cdot,x_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dx_n \leq$$
$$\leq C_s \sum_{j=1}^{4} \int_{-\infty}^{0} (1+|x_n|)^{2s} \|g_j(z)(\cdot,x_n)\|^2 dx_n.$$

<u>Abschätzungen der rechten Seite (nach oben):</u>

1. Summand:
   Die Entwicklung des Produktes zweier PDOen liefert:

$$\rho_0(x)\tilde{\chi}(\hat{x})G_0(z)\Phi(D,z) = P_1(z) + P_{N,1}(z),$$

mit $P_1(z) \in \tilde{S}_-, P_{N,1}(z) \in \tilde{S}(N)$ und

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{supp}_\xi \sigma(P_1(z))(x,\xi) & \subset & \mathrm{supp}_\xi \Phi(\xi,z) & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ \mathrm{supp}_x \sigma(P_1(z))(x,\xi) & \subset & \mathrm{supp}_x \tilde{\chi}(\hat{x}) & \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Es ist $P_1(z) \in \tilde{S}_-$, da das Hauptsymbol von $P_1(z)$

$$\rho_0(x)\tilde{\chi}(\hat{x})g_0(x,\xi,z)\Phi(\xi,z) \in \tilde{S}(0)$$

ist und mit den Trägereigenschaften von $\Phi(\xi,z)$ ist auch die zweite Bedingung für $\tilde{S}_-$ erfüllt. Nach der Wahl von $\tilde{\chi}(\hat{x})$ können $\hat{x} \in \mathrm{supp}_x\tilde{\chi}(\hat{x})$ und $\hat{\xi} \in \mathrm{supp}_\xi \Phi(\xi,z)$ nie gleich gerichtet sein, d.h. $\hat{\xi}\cdot\hat{x} \neq 1$. Somit gibt es ein $\mu_- \in (\Leftrightarrow 1, 1)$, so daß $p_1(x,\xi,z) = 0$ für $\hat{x}\cdot\hat{\xi} > \mu_-$, womit auch die letzte Bedingung für S_- erfüllt ist. Also haben wir:

$$\begin{aligned} \Big(\int_{-\infty}^0 (1+|x_n|)^{2s} \|g_1(z)(\cdot,x_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dx_n\Big)^{1/2} &\leq \|g_1(z)\|_s \\ &\leq C\,\big(\|P_1(z)f\|_s + \|f\|_{s-N}\big). \end{aligned}$$

2. und 4. Summand:
   Da jeweils mit $1 \Leftrightarrow \rho_0(x)$, $A_2(x)$ oder $Q_N(z)$, also einer Funktion mit kompaktem Träger oder starkem Abklingen in x multipliziert wird, kann man beliebig bzw. mit Gewicht N gewichten (d.h. das Gewicht $\langle x\rangle$ hat den Exponenten N), also ist:

$$\begin{aligned} &\Big(\int_{-\infty}^0 (1+|x_n|)^{2s}\big[\|g_2(z)(\cdot,x_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \|g_4(z)(\cdot,x_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\big]\,dx_n\Big)^{1/2} \leq \\ &\qquad \leq C\,\big(\|g_2(z)\|_s + \|g_4(z)\|_s\big) \leq C\,\big(\|f\|_{-N} + \|u(z)\|_{s-N}\big). \end{aligned}$$

3. Summand:
   Die Entwicklung des Produktes zweier PDOen liefert:

$$\rho_0(x)\tilde{\chi}(\hat{x})G_0(z)[A+\Delta, \Phi(D,z)] = \langle x\rangle^{-\tau}\big(P_2'(z) + P_{2,N}'(z)\big),$$

   wobei $P_2'(z) \in \tilde{S}_-, P_{2,N}'(z) \in \tilde{S}(N)$ und

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{supp}_\xi \sigma(P_2'(z))(x,\xi) & \subset & \mathrm{supp}_\xi \Phi(\xi,z) & \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\ \mathrm{supp}_x \sigma(P_2'(z))(x,\xi) & \subset & \mathrm{supp}_x \tilde{\chi}(\hat{x}) & \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

   Die Abklingrate erhält man aus dem $A + \Delta$ Term und argumentiert ansonsten wie im Falle des ersten Summanden, wobei man für

$P_2'(z) \in \tilde{S}(0)$ benutzt, daß $\Phi(\xi, z)$ beschränkten Träger in ξ hat. Man erhält:

$$\Big(\int_{-\infty}^{0}(1+|x_n|)^{2s}\|g_3(z)(\cdot,x_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}dx_n\Big)^{1/2} \leq \quad \|g_3(z)\|_s$$
$$\leq C\,\big(\|P_2(z)u(z)\|_{s-\tau}+\|u(z)\|_{s-N}\big),$$

wobei $P_2(z) \in \tilde{S}_-$ und die gleichen Trägereigenschaften wie für $P_2'(z)$ gelten. Dabei setzt sich $P_2(z)$ aus $P_2'(z)$ und $P^{(N)}(z)$, das vom zweiten Term des dritten Summanden kommt, zusammen.

<u>Abschätzung der linken Seite (nach unten):</u>
In dem Kegel $\{x \,|\, \hat{x} \in \operatorname{supp}\chi\}$ sind $|x|$ und $|x_n|$ vergleichbar, denn es war $\chi(\omega) \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$, so daß $\operatorname{supp}\chi \subset \{\omega \in S^{n-1} \,|\, \omega_n < 0\}$. Also haben wir:

$$\|P(z)u(z)\|^2_{s-1} \leq C\,\int_{-\infty}^{0}(1+|x_n|)^{2(s-1)}\|\Phi(D,z)u(z)(\cdot,x_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}dx_n.$$

Setzt man nun alle Abschätzungen zusammen, so erhält man die Aussage des Lemmas.

□

<u>zu 4.</u>

Theorem 2.26 (Fundamentale Abschätzung)
Seien $u(z) = R(z)f$, $t > 1/2$ hinreichend nahe bei $1/2$ und $P_-(z) \in \tilde{S}_-$. Dann gibt es zu jedem $s > 1/2$, $N \geq 1$ und $\epsilon' \in (0,\epsilon)$ bzw. $\mu'_- \in [\mu_-, 1)$ Konstanten L, C unabhängig von $z \in \overline{Q}$, so daß

$$\|P_-(z)u(z)\|_{s-1} \leq C\,\big(\sum_{m=1}^{L}\|P_1^{(m)}(z)f\|_s+\|f\|_{-N}$$
$$+\sum_{m=1}^{L}\|P_2^{(m)}(z)u(z)\|_{-t}+\|u(z)\|_{s-N}\big),$$

wobei $P_j^{(m)}(z) \in \tilde{S}_-$ mit $\epsilon' \in (0,\epsilon), \mu'_- \in [\mu_-, 1)$ und $\operatorname{supp}_\xi \sigma(P_j^{(m)}(z))(x,\xi)$, $j = 1, 2, m = 1, \ldots, L$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\operatorname{supp}_\xi \sigma(P_-(z))(x,\xi)$ für jedes x enthalten sind.

Beweis: Wie im Beweis zu [IK84, Theorem 3.11] wählen wir zwei hinreichend feine Partitionen der Eins $\{\phi_j\}_j, \{\chi_k\}_k$ auf S^{n-1} und setzen:

$$b_{jk}(x,\xi,z) := \rho(x)\chi_k(\hat{x})\phi_j(\hat{\xi})p_-(x,\xi,z),$$

wobei $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\rho \in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ und $\rho(x) \equiv 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$. Da $P_-(z) \in \tilde{S}_-$ können wir o.B.d.A. annehmen, daß $b_{jk}(x,\xi,z) = 0$, falls $\operatorname{supp}\chi_k$ und $\operatorname{supp}\phi_j$ nicht disjunkt sind. Sind sie disjunkt, so wählen wir $\phi, \chi \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$, so daß:

$$\phi(\omega) = 1 \quad \text{auf } \operatorname{supp}\phi_j \qquad \text{und} \qquad \chi(\omega) = 1 \quad \text{auf } \operatorname{supp}\chi_k,$$

wobei $\operatorname{supp}\phi$ und $\operatorname{supp}\chi$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\operatorname{supp}\phi_j$ bzw. $\operatorname{supp}\chi_k$ enthalten und insbesondere disjunkt sein sollen.

Weiterhin seien $\rho_1(x), \rho_2(\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1/2 \\ 0, & |x| < 1/4 \end{cases}, \qquad \rho_2(\xi) = \begin{cases} 1, & ||\xi| \Leftrightarrow 1| < \epsilon \\ 0, & ||\xi| \Leftrightarrow 1| > 2\varepsilon \end{cases}$$

und wir setzen:

$$p_1(x,\xi,z) = \rho_1(x)\chi(\hat{x})\phi(\hat{\xi})\rho_2(\tfrac{\xi}{\sqrt{\operatorname{Re} z}}).$$

Damit gilt:

$$p_1(x,\xi,z) b_{jk}(x,\xi,z) = b_{jk}(x,\xi,z). \tag{2.6}$$

Es seien $B_{jk}(z)$ und $P_1(z)$ die PDOen mit den Symbolen $b_{jk}(x,\xi,z)$ bzw. $p_1(x,\xi,z)$. Dann haben wir:

$$\sigma(B_{jk}(z)P_1(z)) = b_{jk}(x,\xi,z) + \sum_{1\le|\alpha|\le N} \tfrac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha b_{jk}(x,\xi,z) D_x^\alpha p_1(x,\xi,z) + q_N(x,\xi,z),$$

mit $q_N(x,\xi,z) \in \tilde{S}(N)$. Da $b_{jk}(x,\xi,z) \in \tilde{S}_-$ ist, sind $\partial_\xi^\alpha b_{jk}(x,\xi,z) \in \tilde{S}_-$ und $D_x^\alpha p_1 \in S(1)$ für $|\alpha| \ge 1$, so daß

$$B_{jk}(z) = B_{jk}(z)P_1(z) + \langle x\rangle^{-1} P_2(z) + Q_N(z), \tag{2.7}$$

mit $P_2(z) \in \tilde{S}_-$ und $Q_N(z) \in \tilde{S}(N)$, sowie:

$$\operatorname{supp}_{x,\xi}\sigma(P_2(z)) \subset \operatorname{supp}_{x,\xi}\sigma(P_-(z)).$$

Mit Theorem 2.9 (Stetigkeit von PDOen vom Grade $m = 0$ auf gewichteten Räumen) ist

$$\|B_{jk}(z)P_1(z)u(z)\|_{s-1} \le C\,\|P_1(z)u(z)\|_{s-1}.$$

Nach Konstruktion ist der PDO $P_1(z)$ vom Typ des speziellen PDOs aus Definition 2.24, wobei ρ_1 dem ρ_0 und das ρ_2 dem ρ, das ein Faktor der Abschneidefunktion $\Phi(\xi,z)$ war, entspricht. Mit einer geeigneten Drehung des Koordinatensystems, die ρ_1, ρ_2 und $\|P_1(z)u(z)\|_{s-1}$ invariant läßt, sieht man auch die Entsprechung der Winkelfunktionen χ und ϕ ein.

Somit können wir Lemma 2.25 anwenden und erhalten insgesamt aus Gleichung (2.7):

$$\begin{aligned}
&\|B_{jk}(z)u(z)\|_{s-1} \leq \\
&\qquad \leq \|B_{jk}(z)P_1(z)u(z)\|_{s-1} + \|\langle x\rangle^{-1}P_2(z)u(z)\|_{s-1} + \|Q_N(z)u(z)\|_{s-1} \\
&\qquad \leq C\left(\|P_1(z)u(z)\|_{s-1} + \|P_2(z)u(z)\|_{s-2} + \|u(z)\|_{s-1-N}\right) \qquad (2.8) \\
&\quad \leq C\big(\|P_1'(z)f\|_s + \|f\|_{-N} + \|P_2'(z)u(z)\|_{s-\tau} + \|P_2(z)u(z)\|_{s-2} + \|u(z)\|_{s-N}\big),
\end{aligned}$$

wobei $P_1'(z), P_2'(z) \in \tilde{S}_-$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{supp}_\xi \sigma(P_1'(z))(x,\xi), \mathrm{supp}_\xi \sigma(P_2'(z))(x,\xi) \subset \mathrm{supp}_\xi \sigma(P_1(z))(x,\xi).$$

Da $\mathrm{supp}_\xi \sigma(P_1(z))(x,\xi)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathrm{supp}_\xi \sigma(P_-(z))(x,\xi)$ enthalten ist, gilt dies auch für $P_1'(z), P_2'(z)$.

Mit geeigneter Wahl der Abschneidefunktionen ρ_2 für die zweite Eigenschaft sowie χ und ϕ für die dritte für $\tilde{S}_-$, kann man erreichen, daß $P_1'(z), P_2'(z) \in \tilde{S}_-$ mit vorgegebenen $\epsilon' \in (0,\epsilon)$ und $\mu_-' \in [\mu_-, 1)$.

Da

$$\rho(x)p_-(x,\xi,z) = \sum_{j,k} b_{jk}(x,\xi,z)$$

ist, können wir aus Abschätzung (2.8) mit Summation über j und k folgern, daß

$$\begin{aligned}
\|P_-(z)u(z)\|_{s-1} \leq C\Big(&\sum_{m=1}^{L} \|P_1^{(m)}(z)f\|_s + \|f\|_{-N} \\
&+ \sum_{m=1}^{L} \|P_2^{(m)}(z)u(z)\|_{s-\tau} + \|u(z)\|_{s-N}\Big), \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

wobei $P_j^{(m)}(z) \in \tilde{S}_-, \epsilon' \in (0,\epsilon), \mu_-' \in [\mu_-, 1)$ und $\mathrm{supp}_\xi \sigma(P_j^{(m)}(z))(x,\xi), j = 1,2, m = 1,\ldots,L$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathrm{supp}_\xi \sigma(P_-(z))(x,\xi)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ enthalten ist.

Ist $s \Leftrightarrow \tau + 1 = s \Leftrightarrow (\tau \Leftrightarrow 1) > 1/2$, so können wir Ungleichung (2.9) benutzen, um den Term $\|P_2^{(m)}(z)u(z)\|_{s-\tau}$ abzuschätzen und folglich auf der rechten Seite $s \Leftrightarrow \tau$ durch $s \Leftrightarrow \tau + 1 \Leftrightarrow \tau = s \Leftrightarrow 2\tau + 1$ ersetzen. Ähnlich wie im Beweis zu Theorem 2.13 wiederholen wir dieses Vorgehen k-mal, so daß für $s \notin \{m(\tau \Leftrightarrow 1) + 1/2 \mid m \in \mathbb{N}\}$ gilt: $s \Leftrightarrow k(\tau \Leftrightarrow 1) > 1/2$ und $s \Leftrightarrow k(\tau \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow \tau + 1 = s \Leftrightarrow (k+1)(\tau \Leftrightarrow 1) < 1/2$. Wir erhalten dann das gewünschte Resultat mit $\Leftrightarrow t \geq s \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow (k+1)(\tau \Leftrightarrow 1) = s \Leftrightarrow \tau \Leftrightarrow k(\tau \Leftrightarrow 1)$. Für $s \in \{m(\tau \Leftrightarrow 1) + 1/2 \mid m \in \mathbb{N}\}$

führt man das gleiche Verfahren mit einem $\tau' \in (1, \tau)$, so daß $s \notin \{m(\tau' \Leftrightarrow 1) + 1/2 \mid m \in \mathbb{N}\}$ ist, durch.

□

<u>zu 5.:</u>

Bilden wir in der fundamentalen Abschätzung das Supremum über alle $z \in \overline{Q}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\overline{Q}} \|P_-(z)u(z)\|_{s-1} &\leq C \sup_{z\in\bar{Q}} \Big(\sum_{m=1}^{L} \|P_1^{(m)}(z)f\|_s + \|f\|_{-N} \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{L} \|P_2^{(m)}(z)u(z)\|_{-t} + \|u(z)\|_{s-N}\Big) \\
&\leq C \left(\|f\|_s + \sup_{z\in\overline{Q}} \|u(z)\|_{-t}\right) \\
&\leq C\,\|f\|_s,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Theorem 1.3 benutzt haben.

Mit dem Prinzip der Grenzabsorption und der geforderten Stetigkeit an $p(x, \xi, z)$ bezüglich z wissen wir mit den Theoremen 2.4 und 2.9, daß $P_-(z)u(z)$ in $L^2_{-t}(\mathbb{R}^n)$, $t > 1/2$, für $\operatorname{Im} z \to 0$ gegen $P_-(\lambda)u(\lambda + i0)$ konvergiert. Aus der Beschränktheit in $L^2_{s-1}(\mathbb{R}^n)$, der Konvergenz in $L^2_{-t}(\mathbb{R}^n)$ und der Interpolationsungleichung

$$\forall v \in L^2_{s-1}(\mathbb{R}^n): \qquad \|v\|_{(s-1)(1-\theta)-\theta t} \leq \|v\|_{s-1}^{1-\theta} \|v\|_{-t}^{\theta}, \qquad \theta \in [0, 1] \quad (2.10)$$

erhalten wir die Konvergenz in $L^2_{s-1-\delta}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $\delta > 0$.

<u>zu 6.:</u>

Im Fall $P_+(\lambda)R(\lambda \Leftrightarrow i0)$ müssen $\chi(\omega)$ und $\phi(\Leftrightarrow\omega)$ disjunkten Träger haben, damit ξ und x nicht entgegengesetzt gerichtet sein können. Das bedeutet aber, daß $\xi_n < 0$ sein muß. Man definiere also Φ so, daß $\operatorname{supp}\Phi(x, \xi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_n < 0\}$ ist. Damit man im entsprechenden Beweis zu Lemma 2.22 zu einem Nenner $\neq 0$ „erweitern“ kann, muß diese Erweiterung

$$\Leftrightarrow\Big(\xi_n^2 \bar{a}^2(x, \xi) + i\operatorname{Im} a_1(x, \xi)\Big)^{1/2} + \xi_n \qquad \text{mit Re } < 0$$

sein. Das bedeutet aber, daß auch auf der linken Seite für die Differenz

$$\Leftrightarrow\Big(\xi_n^2 \bar{a}^2(x, \xi) + i\operatorname{Im} a_1(x, \xi)\Big)^{1/2} \Leftrightarrow\xi_n$$

stehen muß. Somit muß man

$$\tilde{g}_0(x, \xi, z) = \Big[\Leftrightarrow(\xi_n^2 \bar{a}^2(x, \xi) + i\operatorname{Im} a_1(x, \xi))^{1/2} \Leftrightarrow b(x, \xi, z)\Big]^{-1} \psi_2\big(\tfrac{\xi}{\sqrt{\operatorname{Re} z}}\big)$$

setzen, wobei $\mathrm{Re}\,\frac{1}{\tilde{g}_0} < 0$ ist, also $\tilde{g}_0$ wohldefiniert ist.
Setzen wir nun

$$\tilde{b}(x, \xi', z) = -b(x, \xi', z),$$

so erhält die Gleichung (2.3) wieder die gewünschte Form der abstrakten DGL mit $\tilde{B}(z)$ dem PDO mit Symbol $\tilde{b}(x, \xi', z)$. Um die Voraussetzungen von Theorem 2.19 zu erfüllen, muß jedoch $\mathrm{Im}\,\tilde{b}(x, \xi', z) \geq 0$ sein, d.h.:

$$\mathrm{Im}\,\tilde{b}(x, \xi', z) = -\mathrm{Im}\,b(x, \xi', z) = -\mathrm{Im}\,z \geq 0,$$

also

$$\mathrm{Im}\,z \leq 0,$$

Dies bedeutet, daß $z \in \overline{\tilde{Q}}$ gewählt werden muß, damit wir genau wie vorher vorgehen können, was dann insgesamt zur Konvergenz von $P_+(\lambda - i\varepsilon)R(\lambda - i\varepsilon)f$ in $L^2_{s-1-\delta}(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$ und zur Abschätzung

$$\|P_+(z)R(\lambda - i0)f\|_{s-1} \leq C\,\|f\|_s$$

führt. Damit ist der Beweis von Theorem 2.16 vollständig.

□

Mit Theorem 2.16 und der Entwicklung der Adjungierten eines PDOs hat man auch das folgende Theorem (das mit der gleichen Interpretation wie Theorem 2.16 zu lesen ist):

Theorem 2.27
Sei $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$. Dann gilt für jedes $s > 1/2$ und für alle $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$:

(1) $\|P^*_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_{s-1} \leq C\|f\|_s, \quad \lambda \in [a, b],$

(2) $\|R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_{-s} \leq C\|f\|_{1-s}, \quad \lambda \in [a, b].$

Bemerkung 2.28
Aus Theorem 2.16 erhält man sofort für $s > 1/2$ und für alle $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f \in L^2_{1-s}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)^* f\|_{-s} \leq C\|f\|_{1-s}, \quad \lambda \in [a, b],$$

beim Übergang zur adjungierten Abbildung.

2.1.3 Zweiseitige Lokalisierungen

Für die Formulierung zweiseitiger Lokalisierungen benötigen wir die folgende Definition:

Definition 2.29
Die Symbole $p(x,\xi,\lambda), q(x,\xi,\lambda) \in S(0)$ bilden ein disjunktes Paar (vom Typ I), wenn gilt:

$$\inf_{x\,\in\,\mathbb{R}^n,\,\lambda\,\in\,[a,b]} \mathit{dist}\,(\mathit{supp}_\xi p(x,\xi,\lambda), \mathit{supp}_\xi q(x,\xi,\lambda)) > 0,$$

wobei dist $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ den Abstand der Mengen $\mathcal{M},\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Die folgenden Theoreme lassen sich ähnlich wie in [IK84] zeigen. Dabei ist das erste nur der Vollständigkeit halber und ohne Beweis aufgeführt.

Theorem 2.30
Es seien $P(\lambda), Q(\lambda) \in S_\infty$ und bilden ein disjunktes Paar (vom Typ I). Dann gilt für jedes $s > 0$ und für alle $f \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|P(\lambda)R(\lambda \pm i0)Q(\lambda)f\|_s \leq C\,\|f\|_{-s} \qquad \lambda \in [a,b].$$

Theorem 2.31
Seien $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$ und $Q(\lambda) \in S_\infty$. Angenommen, $\{P_\pm(\lambda), Q(\lambda)\}$ bilden disjunkte Paare (vom Typ I). Dann gilt für $s,t \geq 0$ und für alle $f \in L^2_{-t}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|Q(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_s \leq C\,\|f\|_{-t} \qquad \lambda \in [a,b].$$

Beweis: Wir multiplizieren Gleichung (2.1) mit $Q(\lambda)$ anstelle $P(\lambda)$ von rechts mit $P_\pm(\lambda)$ und erhalten:

$$Q(\lambda)R(\lambda\pm i0)P_\pm(\lambda) = \tfrac{1}{\lambda}\Big(Q_0(\lambda)P_\pm(\lambda) \Leftrightarrow \sum_{|\beta|<N} Q_\beta(\lambda)(A+\Delta)_\beta R(\lambda\pm i0)P_\pm(\lambda)$$
$$+ Q_N(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)\Big),$$

wobei $\frac{1}{\lambda}Q_0(\lambda), \frac{1}{\lambda}Q_\beta(\lambda) \in S^{-2}(0)$, $Q_N(\lambda) \in S(N)$ und $\{Q_0(\lambda), P_\pm(\lambda)\}$ bzw. $\{Q_\beta(\lambda), P_\pm(\lambda)\}$ disjunkte Paare (vom Typ I) bilden. Da die Symbole von $Q_0(\lambda)$ und $P_\pm(\lambda)$ keinen gemeinsamen Träger in ξ haben, folgt aufgrund der Symbolentwicklung aus Theorem 2.6, daß $\frac{1}{\lambda}Q_0(\lambda)P_\pm(\lambda) \in S(N)$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Mit Theorem 2.27 (2) und der Argumentation aus dem Beweis zu Theorem 2.13 erhalten wir die Behauptung des Theorems.

□

Gehen wir in Theorem 2.31 zur Adjungierten über, so haben wir:

Theorem 2.32
Seien $P_\pm(\lambda), Q(\lambda)$ wie in Theorem 2.31, dann gilt für alle $s, t \geq 0$:

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)Q(\lambda)f\|_s \leq C\,\|f\|_{-t}$$

Das anschließende Theorem dient als Vorbereitung für Theorem 2.34, welches neben Theorem 2.31 eines der Hauptresultate dieses Abschnitts ist.

Theorem 2.33
Seien $P_\pm(\lambda) \in S_\pm, Q(\lambda) \in S(0)$. Angenommen, $\{P_\pm(\lambda), Q(\lambda)\}$ bilden disjunkte Paare (vom Typ I). Dann gilt für jedes $s \geq 0$ und $t > 1/2$ und für alle $f \in L^2_t(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$:

i) $\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)Q(\lambda)f\|_s \leq C\,\|f\|_t \qquad \lambda \in [a,b]$

ii) $\|Q(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_{-t} \leq C\,\|f\|_{-s} \qquad \lambda \in [a,b]$

Beweis: Sei $u(\lambda) := R(\lambda + i0)Q(\lambda)f$. Mit der fundamentalen Abschätzung aus Theorem 2.26 gilt für jedes $s > 1/2$ und $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|P_-(\lambda)u(\lambda)\|_{s-1} \leq C\,\Big(\sum_{m=1}^{L}\|P_1^{(m)}(\lambda)Q(\lambda)f\|_s + \|Q(\lambda)f\|_{-N} \\ + \sum_{m=1}^{L}\|P_2^{(m)}(\lambda)u(\lambda)\|_{-t} + \|u(\lambda)\|_{s-N}\Big),\end{aligned}$$

wobei $P_j^{(m)}(\lambda) \in S_-$ sind und $\{P_j^{(m)}, Q(\lambda)\}$, $j = 1, 2$, $m = 1, \ldots, L$, disjunkte Paare (vom Typ I) bilden. Da $P_1^{(m)}(\lambda)Q(\lambda) \in S(N)$, $m = 1, \ldots, L$, für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ist, kann der erste Term auf der rechten Seite durch $C\|f\|_{-N}$ nach oben abgeschätzt werden. Der zweite Term kann offensichtlich gegen dieselbe Schranke abgeschätzt werden. Die verbleibenden Terme können gegen $C\|u(\lambda)\|_{-t} \leq C\,\|f\|_t$ abgeschätzt werden, woraus die erste Aussage des Theorems folgt.
Die zweite folgt, indem man in der ersten zur Adjungierten übergeht.

□

Theorem 2.34
Seien $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$ und $\{P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar (vom Typ I). Dann gilt für jedes $s > 0$ und für alle $f \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_s \leq C\,\|f\|_{-s} \qquad \lambda \in [a,b].$$

Beweis: Theorem 2.33 besagt, daß für jedes $\tilde{s} > 0$ und $t > 1/2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|P_-(\lambda)R(\lambda + i0)P_+(\lambda)f\|_{\tilde{s}} &\leq C\,\|f\|_t \\
\|P_-(\lambda)R(\lambda + i0)P_+(\lambda)f\|_{-t} &\leq C\,\|f\|_{-\tilde{s}}.
\end{aligned}$$

Interpolieren wir diese beiden Ungleichungen mit Hilfe des anschließenden Interpolationstheorems 2.35 (vgl. [IK84, Theorem 1.5]), so erhalten wir die Aussage des Theorems.

Dabei setze man für die Parameter des Interpolationstheorems $r := \tilde{s}$, $s := t$, $r + q := \Leftrightarrow t$ und $s + p := \Leftrightarrow \tilde{s}$. Dann sind $r + \theta q = (1 \Leftrightarrow \theta)\tilde{s} \Leftrightarrow \theta t$ und $s + \theta p = (1 \Leftrightarrow \theta)t \Leftrightarrow \theta \tilde{s}$. Setzt man für s aus der Behauptung des Theorems $s = r + \theta q = (1 \Leftrightarrow \theta)\tilde{s} \Leftrightarrow \theta t$, so ist $\Leftrightarrow s = \theta t \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow \theta)\tilde{s} \geq (1 \Leftrightarrow \theta)t \Leftrightarrow \theta \tilde{s} = s + \theta p$ für $\theta \in [1/2, 1)$. Mit kleinem t und großem $\tilde{s}$ werden beliebig große Werte für s erreicht und mit $t = \tilde{s}$ und $\theta = 1/2$ erreicht man sogar $s = 0$.

□

Theorem 2.35 (Interpolationstheorem)
Sei $A \in \mathcal{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), L^2_r(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{B}(L^2_{s+p}(\mathbb{R}^n), L^2_{r+q}(\mathbb{R}^n))$ und erfülle

$$\|Af\|_r \leq C_0\,\|f\|_s, \qquad \|Af\|_{r+q} \leq C_1\,\|f\|_{s+p}$$

für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für jedes $0 \leq \theta \leq 1$, daß $A \in \mathcal{B}(L^2_{s+\theta p}(\mathbb{R}^n), L^2_{r+\theta q}(\mathbb{R}^n))$ und

$$\|Af\|_{r+\theta q} \leq C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}\,\|f\|_{s+\theta p}.$$

2.2 Differenzierbarkeit und lokal gleichmäßige Beschränktheit der Ableitungen

In diesem Abschnitt zeigen wir die lokale Differenzierbarkeit der Resolvente auf dem kontinuierlichen Spektrum. Ähnlich wie in [Iso85, Theorem 1.8 und 1.9] betrachten wir zunächst Potenzen der Resolvente und schätzen diese im Ganzraumfall in geeignet gewichteten Räumen gegen die rechte Seite ab. Über die Beziehung $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i\varepsilon) = N!R(\lambda \pm i\varepsilon)^{N+1}$ für $\varepsilon > 0$ erhalten wir dann die Differenzierbarkeit.

Im zweiten Teilabschnitt behandeln wir den Außenraumfall, den wir mit einer Abschneidetechnik auf den Ganzraumfall zurückführen (vgl. auch [Iso87]).

2.2.1 Ganzraumfall

Bevor wir die Abschätzung von Potenzen der Resolvente mit einem Induktionsbeweis zeigen, führen wir noch eine abkürzende Schreibweise ein. Weiterhin zeigen wir ein Kriterium, wann zwei Operatoren aus $S_\pm$ ein disjunktes

Paar (vom Typ I) bilden. Dies stellt einen Zusammenhang zwischen den von Isozaki in [Iso85] definierten disjunkten Paaren vom Typ I und II her.

Definition 2.36
Es sei $z \in \overline{Q}$. Dann ist der in $z \in Q$ stetige Operator $T(z)$ in

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_s, L^2_r),$$

wenn der starke Grenzwert $s\text{-}\lim_{\varepsilon \searrow 0} T(\lambda + i\varepsilon) =: T(\lambda + i0)$ in $\mathcal{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), L^2_r(\mathbb{R}^n))$ existiert und für $\lambda \in [a, b]$ gilt:

$$\|T(\lambda + i0) f\|_r \leq C\, \|f\|_s.$$

Lemma 2.37
Es seien $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$, und $\{P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$ bilden ein disjunktes Paar vom Typ II, das heißt für die zugehörigen Symbole $p_\pm(x, \xi, \lambda)$ gelte:
Es gibt ein $\epsilon \in (0, 1)$ und $\Leftrightarrow 1 < \mu_- < \mu_+ < 1$, so daß

$$p_\pm(x, \xi, \lambda) = 0, \qquad \text{für} \quad \left|\frac{|\xi|}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow 1\right| > \epsilon, \;\; \lambda \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} p_+(x, \xi, \lambda) &= 0 \qquad \hat{x} \cdot \hat{\xi} < \mu_+, \;\; \lambda \in [a, b] \\ p_-(x, \xi, \lambda) &= 0 \qquad \hat{x} \cdot \hat{\xi} > \mu_-, \;\; \lambda \in [a, b] \end{aligned}$$

und $p_+(x, \xi, \lambda) = 0$ oder $p_-(x, \xi, \lambda) = 0$ in einer Umgebung von $x = 0$.
Dann bilden $\{P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar vom Typ I, d.h. es gilt

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [a,b]} \mathit{dist}\,(\mathit{supp}_\xi\, p_+(x, \xi, \lambda), \mathit{supp}_\xi\, p_-(x, \xi, \lambda)) > 0.$$

Beweis: Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Träger von $p_+(x, \xi, \lambda)$ und $p_-(x, \xi, \lambda)$ in den Mengen

$$\begin{aligned} H_+ &:= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \left|\tfrac{|\xi|}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow 1\right| \leq \epsilon, \hat{x} \cdot \hat{\xi} \geq \mu_+\} \\ \text{bzw.} \quad H_- &:= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \left|\tfrac{|\xi|}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow 1\right| \leq \epsilon, \hat{x} \cdot \hat{\xi} \leq \mu_-\} \end{aligned}$$

enthalten. Wegen der Voraussetzung $\mu_- < \mu_+$ sind H_+ und H_- disjunkt. Da sie kompakte Mengen bilden, gibt es Punkte, die den Abstand realisieren. Mit $\operatorname{dist}(H_+, H_-)$ haben wir eine untere Schranke für den Abstand $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}_\xi p_+(x, \xi, \lambda), \operatorname{supp}_\xi p_-(x, \xi, \lambda))$.

Es ist nun $\xi = \xi^{\|} + \xi^{\perp}$, wobei $\xi^{\|}$ der Anteil von ξ parallel zu x und $\xi^{\perp}$ der Anteil von ξ senkrecht zu x ist. Dann haben wir für $\xi \in H_+$ und $\xi' \in H_-$:

$$|\xi \Leftrightarrow \xi'|^2 = |\xi^{\|} \Leftrightarrow \xi'^{\|}|^2 + |\xi^{\perp} \Leftrightarrow \xi'^{\perp}|^2 \geq |\xi^{\|} \Leftrightarrow \xi'^{\|}|^2.$$

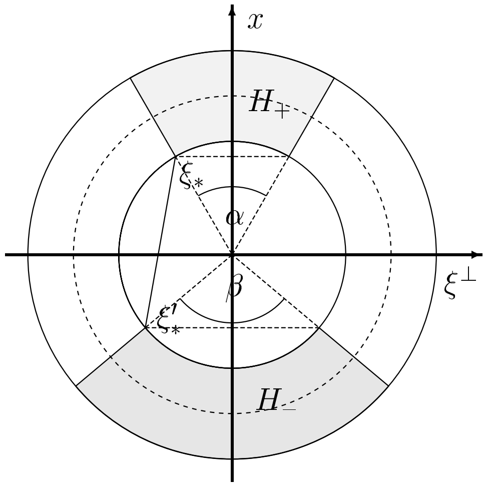

Bild 1: $\mu_- < 0 < \mu_+$

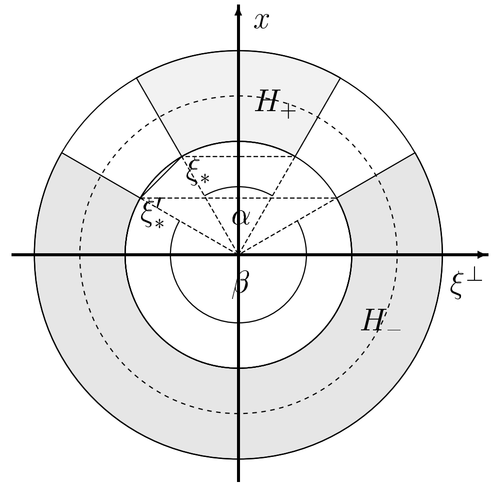

Bild 2: $\mu_\pm > 0$

Der Abstand $|\xi - \xi'|$ wird dann minimal, wenn $|\xi^\perp - {\xi'}^\perp|$ minimal ist, was wiederum der Fall ist, wenn $\xi^\perp$ und ${\xi'}^\perp$ dieselbe Richtung haben. Dies können wir ohne Einschränkung annehmen, da $H_\pm$ invariant unter Rotationen um die x-Achse ist. Für ξ und ξ', die in der Richtung der senkrechten Komponente übereinstimmen, betrachten wir die Ebene im ξ-Raum, die durch diese Richtung und die x Richtung aufgespannt wird. Dort haben wir Bilder wie Bild 1 oder Bild 2 bzw. die zu Bild 2 symmetrische Situation für $\mu_\pm < 0$. Die konzentrischen Kreise um den Nullpunkt haben die Radien $(1-\epsilon)\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda}$ bzw. $(1+\epsilon)\sqrt{\lambda}$, so daß die Mengen $H_\pm$ zwischen den beiden äußeren liegen. Weiter ist der Winkelbereich H_+ um x durch $\mu_+ = \cos(\frac{\alpha}{2})$ bestimmt und der „entgegengesetzte“ H_- durch $\mu_- = \cos(\pi - \frac{\beta}{2})$.

Eine untere Schranke für $\operatorname{dist}(H_+, H_-)$ ist die Länge der eingezeichneten Sehne des innersten Kreises, die die Eckpunkte ξ_* und ξ'_* der verschiedenen Winkelbereiche (auf derselben Seite von x) verbindet. Eine untere Schranke für die Länge dieser Sehne ist für jede Wahl von $-1 < \mu_- < \mu_+ < 1$ die Differenz der Anteile $\xi_*^\|, {\xi'_*}^\|$ der Eckpunkte in Richtung von x. Für die Differenz berechnen wir:

$$\begin{aligned}\xi_*^\| - {\xi'_*}^\| &= (1-\epsilon)\sqrt{\lambda}\cos(\tfrac{\alpha}{2}) - (1-\epsilon)\sqrt{\lambda}\cos(\pi - \tfrac{\beta}{2}) = (1-\epsilon)\sqrt{\lambda}(\mu_+ - \mu_-)\\ &\geq (1-\epsilon)\sqrt{a}(\mu_+ - \mu_-)\end{aligned}$$

Wir haben also insgesamt für alle $\xi \in \operatorname{supp}_\xi p_+(x,\xi,\lambda)$ und $\xi' \in \operatorname{supp}_\xi p_-(x,\xi,\lambda)$:

$$|\xi - \xi'| \geq (1-\epsilon)\sqrt{a}(\mu_+ - \mu_-) =: c(\epsilon, a, \mu_\pm) > 0.$$

Da $c(\epsilon, a, \mu_\pm) > 0$ nicht von x oder λ abhängt, können wir das Infimum bilden und erhalten:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n,\, \lambda \in [a,b]} \operatorname{dist}\left(\operatorname{supp}_\xi p_+(x,\xi,\lambda), \operatorname{supp}_\xi p_-(x,\xi,\lambda)\right) \geq c(\epsilon, a, \mu_\pm) > 0.$$

□

Bemerkung 2.38

1. *Der Beweis des nachfolgenden Theorems, in welchem die Potenzen der Resolvente abgeschätzt werden, basiert auf dem PdGA und den mikrolokalen Resolventenabschätzungen aus den Theoremen 2.13, 2.16, 2.34 und 2.31. Das bedeutet insbesondere, daß es für die spätere Übertragung auf den Außenraum genügt, diese Resultate auch für den Außenraumfall zu zeigen.*

2. *Aus den mikrolokalen Resolventenabschätzungen folgt, ähnlich wie am Ende vom Beweis zu Theorem 2.16, mit der Interpolationsungleichung (2.10), daß der starke Grenzwert von Produkten aus PDOen und Resolvente für* $\varepsilon \searrow 0$ *als beschränkter Operator, der in einen etwas stärker gewichteten Raum abbildet existiert. Für das Produkt* $P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i\varepsilon)$ *aus Theorem 2.16 bedeutet das beispielsweise:* $\exists$ s-$\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i\varepsilon)$ *in* $\mathcal{B}(L^2_s(\mathbb{R}^n), L^2_{s-1-\delta}(\mathbb{R}^n))$ *für jedes* $\delta > 0$.

Theorem 2.39
Für alle $N \in \mathbb{N}$, $s > 1/2$ *und* $\lambda \in [a,b]$ *gelten:*

1. $\exists$s-$\lim_{\varepsilon \searrow 0} R(\lambda \pm i\varepsilon)^N =: R(\lambda \pm i0)^N$ *in* $\mathcal{B}(L^2_{s+N-1}(\mathbb{R}^n), L^2_{-s-N+1}(\mathbb{R}^n))$, *und es ist*
$$\|R(\lambda \pm i0)^N f\|_{-s-N+1} \leq C\, \|f\|_{s+N-1},$$

2. *Seien* $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$ *mit* $\epsilon \in (0,1)$ *(in der zweiten* $S_\pm$ *definierenden Bedingung). Dann gilt:* $\forall\, t \geq N+s, \delta > 0 : \exists$ s- $\lim_{\varepsilon \searrow 0} P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i\varepsilon)^N$ *in* $\mathcal{B}(L^2_t(\mathbb{R}^n), L^2_{t-N-\delta}(\mathbb{R}^n))$, *und es ist*
$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)^N f\|_{t-N} \leq C\, \|f\|_t,$$

3. *Seien* $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$ *mit* $\epsilon \in (0,1)$. *Dann gilt:* $\forall\, t \geq N+s, \delta > 0$: $\exists$ s-$\lim_{\varepsilon \searrow 0} R(\lambda \pm i\varepsilon)^N P_\pm(\lambda)$ *in* $\mathcal{B}(L^2_{-t+N}(\mathbb{R}^n), L^2_{-t-\delta}(\mathbb{R}^n))$, *und es ist*
$$\|R(\lambda \pm i0)^N P_\pm(\lambda) f\|_{-t} \leq C\, \|f\|_{-t+N},$$

4. *Seien* $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$ *mit* $\epsilon \in (0,1)$ *und* $\{P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$ *bilden ein disjunktes Paar vom Typ II (vgl. Lemma 2.37). Dann gilt:* $\forall\, t > 0$: $\exists$ s-$\lim_{\varepsilon\to 0} P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i\varepsilon)^N P_\pm(\lambda)$ *in* $\mathcal{B}(L^2_{-t}(\mathbb{R}^n), L^2_t(\mathbb{R}^n))$, *und es ist*

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)^N P_\pm(\lambda) f\|_t \leq C\,\|f\|_{-t},$$

5. *Sei* $Q(\lambda) \in S_\infty, t \geq s + N \Leftrightarrow 1$. *Dann gilt:* $\forall\, \delta > 0$: $\exists$ s- $\lim_{\varepsilon\searrow 0} Q(\lambda)R(\lambda \pm i\varepsilon)^N$ *in* $\mathcal{B}(L^2_t(\mathbb{R}^n), L^2_{t-N+1-\delta}(\mathbb{R}^n))$, *und es ist*

$$\|Q(\lambda)R(\lambda \pm i0)^N f\|_{t-N+1} \leq C\,\|f\|_t,$$

wobei jeweils $C = C(a,b,N)$ *ist.*

Beweis: Induktion über N:
<u>Induktionsanfang $N = 1$:</u>

1. Theorem 1.3
2. Theorem 2.16
3. Theorem 2.27
4. Lemma 2.37 und Theorem 2.34
5. Theorem 2.13

<u>Induktionsannahme:</u> Behauptungen 1.–5. gelten für N.

<u>Induktionsschritt $N \to N+1$:</u>
Wir wählen die folgenden Abschneidefunktionen aus $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:

$$\phi_0(\xi) = \begin{cases} 1, & ||\xi| \Leftrightarrow 1| < \epsilon \\ 0, & ||\xi| \Leftrightarrow 1| > 2\epsilon \end{cases}, \quad \chi_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, \quad \rho_+(w) = \begin{cases} 0, & w < \tilde{\mu}_+ \\ 1, & w > \tilde{\mu}_- \end{cases}, \tag{2.11}$$

$$\phi_\infty(\xi) = 1 \Leftrightarrow \phi_0(\xi), \qquad \chi_\infty(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_0(x), \qquad \rho_-(w) = 1 \Leftrightarrow \rho_+(w),$$

wobei $\epsilon \in (0,1)$ und $\Leftrightarrow 1 < \tilde{\mu}_+ < \tilde{\mu}_- < 1$ sind, und es seien nun $A(\lambda), B(\lambda), \tilde{P}_\pm(\lambda)$ die PDOen mit den Symbolen

$$\phi_\infty(\tfrac{\xi}{\sqrt{\lambda}}), \quad \chi_0(x)\phi_0(\tfrac{\xi}{\sqrt{\lambda}}), \quad \chi_\infty(x)\rho_\pm(\hat{x}\cdot\hat{\xi})\phi_0(\tfrac{\xi}{\sqrt{\lambda}}).$$

Dann sind $A(\lambda) \in S_\infty, \tilde{P}_\pm(\lambda) \in S_\pm$, das Symbol von $B(\lambda)$ hat kompakten Träger in x und es gilt:

$$A(\lambda) + B(\lambda) + \tilde{P}_+(\lambda) + \tilde{P}_-(\lambda) = \mathrm{Id}.$$

Für den Induktionsschritt werden wir in jedem Teil des Theorems den $(N+1)$-ten Term mit Hilfe dieser Identität aufspalten und dann die einzelnen Terme mit der Induktionsvoraussetzung und anderen, bereits gezeigten Resultaten behandeln.

Beweis von 1. für $N+1$: Wir spalten $R(\lambda+i\varepsilon)^{N+1}$ wie folgt auf:

$$\begin{aligned} R(\lambda+i\varepsilon)^{N+1} &= R(\lambda+i\varepsilon)^{N} A(\lambda) R(\lambda+i\varepsilon) + R(\lambda+i\varepsilon)^{N} B(\lambda) R(\lambda+i\varepsilon) \\ &\quad + R(\lambda+i\varepsilon)^{N} \tilde{P}_{+}(\lambda) R(\lambda+i\varepsilon) + R(\lambda+i\varepsilon)^{N} \tilde{P}_{-}(\lambda) R(\lambda+i\varepsilon) \qquad (2.12) \end{aligned}$$

i) Nach Theorem 2.13 ist $A(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N-1}, L^2_{s+N-1})$ und mit der Induktionsannahme für 1. $R(\lambda+i\varepsilon)^N \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N-1}, L^2_{-s-N+1})$. Somit ist der erste Term in $\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N-1}, L^2_{-s-N+1})$ und wegen $s+N \Leftrightarrow 1 \leq s+(N+1) \Leftrightarrow 1 = s+N$ auch in

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+(N+1)-1}, L^2_{-s-(N+1)+1}) = \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_{-s-N}).$$

ii) Da das Symbol von $B(\lambda)$ kompakten Träger in x hat, gilt: $R(\lambda+i\varepsilon)^N B(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-s}, L^2_{-s-N+1})$. Kombiniert mit Theorem 1.3 ergibt dies, daß der zweite Term zu $\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s}, L^2_{-s-N+1})$, also auch zu

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_{-s-N})$$

gehört.

iii) Mit Theorem 1.3 und der Induktionsannahme 3. haben wir mit einem $\tilde{s} \in (1/2, s)$, daß $R(\lambda+i\varepsilon) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_s, L^2_{-\tilde{s}})$ und $R(\lambda+i\varepsilon)^N \tilde{P}_{+}(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-\tilde{s}}, L^2_{-s-N})$, ($\tilde{s} = s+\delta$ mit einem $\delta > 0$). Also ist der dritte Term in

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_s, L^2_{-s-N}) \subset \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_{-s-N}).$$

iv) Benutzen wir die Induktionsannahmen für 1. und 2., so haben wir für $\delta \in (0, s \Leftrightarrow 1/2)$: $\tilde{P}_{-}(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_{s+N-1-\delta})$, und $R(\lambda+i\varepsilon)^N \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s-\delta+N-1}, L^2_{-s+\delta-N+1})$, womit der vierte Term zu

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_{-s+\delta-N+1}) \subset \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_{-s-N})$$

gehört.

Also können wir insgesamt

$$R(\lambda+i\varepsilon)^{N+1} \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_{-s-N})$$

folgern und erhalten so den Induktionsschritt für den 1. Teil.

($\square$)

Beweis von 2. für $N+1$**:** Zu dem von $P_-(\lambda)$ per Definition vorgegebenen μ_- wählen wir $\tilde{\mu}_+ \in (\mu_-, 1)$ und $\tilde{\mu}_- \in (\tilde{\mu}_+, 1)$ und definieren wie in (2.11) die Abschneidefunktionen $\phi_0, \phi_\infty, \chi_0, \chi_\infty$ und $\rho_\pm$, sowie die Operatoren $A(\lambda), B(\lambda)$ und $\tilde{P}_\pm(\lambda)$. Wir multiplizieren die (2.12) entsprechende Gleichung von links mit $P_-(\lambda)$:

$$\begin{aligned} P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^{N+1} &= P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N A(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \\ &+ P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N B(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) + P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N \tilde{P}_+(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \\ &+ P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N \tilde{P}_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon). \end{aligned}$$

Mit ähnlichen Methoden wie für 1. zeigt man, daß:

$$\left.\begin{array}{l} P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N A(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \\ P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N B(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \\ P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N \tilde{P}_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \end{array}\right\} \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_t, L^2_{t-N-1-\delta})$$

für $t \geq N+1+s$ und $\delta > 0$.
Während für die Diskussion des Terms $P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N\tilde{P}_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)$ lediglich die Eigenschaft $\tilde{P}_-(\lambda) \in S_-$ ausgenutzt wird, benutzen wir für die Behandlung des Terms $P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N\tilde{P}_+(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)$ die Induktionsvoraussetzung 4. (da $\tilde{P}_+(\lambda)$ „auf der falschen Seite steht“). Dies ist möglich, da $\tilde{p}_\pm(x,\xi,\lambda) = \chi_\infty(x)\rho_\pm(\hat{x}\cdot\hat{\xi})\phi_0(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}})$ ist, und nach der Wahl $\tilde{\mu}_+ > \mu_-$ und mit der Abschneidefunktion χ_∞ die Operatoren $\{P_-(\lambda), \tilde{P}_+(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar vom Typ II bilden.

Mit der Induktionsvoraussetzung 4. ist demnach $P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N\tilde{P}_+(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-s}, L^2_r)$ für jedes $r > 0$. Kombiniert man dies mit Theorem 1.3, so folgt, daß $P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N\tilde{P}_+(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_s, L^2_r)$ für jedes $r > 0$, also auch

$$P_-(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N\tilde{P}_+(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_t, L^2_{t-N-1-\delta})$$

für alle $t \geq N+1+s$ (und $\delta < s$). Die behauptete Abschätzung folgt mit den Induktionsvoraussetzungen für 2. und 3. gemäß der obigen Aufteilung. Somit folgt der Induktionsschritt für den 2. Teil.

($\square$)

Beweis von 3. für $N+1$**:** Mit der asymptotischen Entwicklung des Symbols von $P_\pm(\lambda)^*$ haben wir:

$$P_\pm(\lambda)^* = P_\pm^{(m)}(\lambda) + Q_m(\lambda),$$

wobei $P_\pm^{(m)}(\lambda) \in S_\pm$ und für das Symbol $q_m(x,\xi,\lambda)$ von $Q_m(\lambda)$ gilt:

$$|D_x^\beta \partial_\xi^\alpha q_m(x,\xi,\lambda)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle^{-m-|\beta|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}.$$

Ist $t \geq N + s$ und $m \geq s + t \Leftrightarrow 1$ ($\Rightarrow\ m > N$), so gilt:

$$\begin{aligned}\|P_{\mp}(\lambda)^* R(\lambda \pm i\varepsilon)^{N+1} f\|_{t-(N+1)} &\leq \|P_{\mp}^{(m)}(\lambda) R(\lambda \pm i\varepsilon)^{N+1} f\|_{t-(N+1)} \\ &\qquad + \|Q_m(\lambda) R(\lambda \pm i\varepsilon)^{N+1} f\|_{t-(N+1)} \\ &\leq C\, \|f\|_t,\end{aligned}$$

wobei wir 1. und 2. für $N + 1$ ausgenutzt haben. Der Übergang zur Adjungierten bringt dann

$$\|R(\lambda \pm i\varepsilon)^{N+1} P_{\pm}(\lambda) f\|_{-t} \leq C\, \|f\|_{-t+N},$$

also folgt 3. für $N + 1$ aus 1. und 2. für $N + 1$.

($\Box$)

Beweis von 4. für $N{+}1$**:** Da $\{P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar vom Typ II bilden, ist $\Leftrightarrow 1 < \mu_- < \mu_+ < 1$. Wir wählen $\tilde{\mu}_{\pm}$ so, daß $\mu_- < \tilde{\mu}_+ < \tilde{\mu}_- < \mu_+$ in der Definition der Funktionen $\rho_{\pm}$ und setzen wie gehabt

$$\tilde{p}_{\pm}(x, \xi, \lambda) = \chi_{\infty}(x) \rho_{\pm}(x, \xi) \phi_0(\tfrac{\xi}{\sqrt{\lambda}}).$$

Dann bilden

$$\{\tilde{P}_+(\lambda), P_-(\lambda)\} \qquad \text{und} \qquad \{\tilde{P}_-(\lambda), P_+(\lambda)\}$$

disjunkte Paare vom Typ II.

Multiplizieren wir die (2.12) entsprechende Gleichung von links mit $P_-(\lambda)$ und von rechts mit $P_+(\lambda)$, so können wir für die einzelnen Terme wie folgt argumentieren:

i) Nach Definition von $S_{\pm}$ liegt der Träger von $p_{\pm}(x, \xi, \lambda)$ in einer Umgebung der Sphäre $\{\xi \mid |\xi| = \sqrt{\lambda}\}$. D.h. bei geeigneter Wahl von ϵ für $A(\lambda)$ bilden $\{A(\lambda), P_+(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar vom Typ I.

   Nach Theorem 2.31 gilt dann $A(\lambda) R(\lambda + i\varepsilon) P_+(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-\tilde{t}}, L^2_{\tilde{t}})$ für jedes $\tilde{t} > 0$. Mit der Induktionsvoraussetzung 2. wissen wir außerdem, daß $P_-(\lambda) R(\lambda + i\varepsilon)^N \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{\tilde{t}}, L^2_{\tilde{t}-N-1})$ ist. Also ist der erste Term für jedes $t > 0$ in

   $$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_t).$$

ii) Wegen des kompakten Trägers in x ist es leicht zu zeigen, daß der zweite Term in

   $$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_t)$$

   liegt.

iii) In Theorem 2.27 (2) hatten wir $\forall t > 1/2$: $\|R(\lambda + i\varepsilon)P_+(\lambda)f\|_{-t} \leq C\,\|f\|_{1-t}$, woraus $R(\lambda+i\varepsilon)P_+(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_{-t-2})$ für $t > 0$ folgt. Da $\{P_-(\lambda), \tilde{P}_+(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar vom Typ II bilden, haben wir für $t > 0$: $P_-(\lambda)R(\lambda + i\varepsilon)^N\tilde{P}_+(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t-2}, L^2_t)$. Also liegt der dritte Term in

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_t).$$

iv) Da $\{\tilde{P}_-(\lambda), P_+(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar vom Typ II bilden, ist $\tilde{P}_-(\lambda)R(\lambda+ i\varepsilon)P_+(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_t)$ für $t > 0$. Kombiniert man dies mit der Induktionesvoraussetzung für 2., so folgt, daß der vierte Term für alle $t > 0$ in $\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_{t-N})$, und somit auch in

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_t)$$

liegt.

Insgesamt folgt hieraus der Induktionsschritt für den 4. Teil.

($\square$)

Beweis von 5. für $N + 1$: Wir werden das folgende abschätzen:

$$\begin{aligned}Q(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^{N+1} &= Q(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)A(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N + Q(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)B(\lambda)R(\lambda+i\varepsilon)^N \\ &+ Q(\lambda)R(\lambda + i\varepsilon)\tilde{P}_+(\lambda)R(\lambda + i\varepsilon)^N + Q(\lambda)R(\lambda + i\varepsilon)\tilde{P}_-(\lambda)R(\lambda + i\varepsilon)^N.\end{aligned}$$

Die Behandlung der ersten beiden Terme ist einfach. Wir müssen nur die Induktionsvoraussetzung für 1. und 5. und Theorem 2.13 anwenden, um einzusehen, daß sie für $t \geq N + s$ in $\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_t, L^2_{t-N})$ liegen.

Da $Q(\lambda) \in S_\infty$ können wir nach einer geeigneten Wahl von ϵ für $\tilde{P}_+(\lambda)$ annehmen, daß $\{Q(\lambda), \tilde{P}_+(\lambda)\}$ ein disjunktes Paar vom Typ I bilden. Mit Theorem 2.33 ist dann $Q(\lambda)R(\lambda + i\varepsilon)\tilde{P}_+(\lambda) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{-t}, L^2_t)$ für $t > 0$. Kombiniert man dies mit der Induktionsannahme für 1., so erhält man, daß der dritte Term für $s > 0$ in $\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s+N}, L^2_t)$, also in

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_t, L^2_{t-N})$$

für $t \geq N + s$ liegt.

Um den vierten Term zu behandeln, benutzen wir die Induktionsvoraussetzung für 2. und beachten, daß nach Theorem 2.13 $Q(\lambda)R(\lambda + i\varepsilon) \in \mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_{s-N-\tilde{\delta}}, L^2_{s-N-\delta})$, $0 < \tilde{\delta} < \delta$ ist. Also liegt der vierte Term in

$$\mathcal{C}(\overline{Q}, L^2_t, L^2_{t-N-\delta}).$$

Fassen wir alle Aussagen zusammen, so folgt der Induktionsschritt für den 5. Teil.

$(\square)$

Der Beweis für den $R(\lambda \Leftrightarrow i0)$–Fall verläuft analog.

$\square$

Mit der Formel

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda + i\varepsilon) = N!\,(R(\lambda + i\varepsilon))^{N+1}, \qquad \varepsilon > 0$$

können wir, da sowohl die Resolvente selbst als auch ihre Ableitungen für $\varepsilon \to 0$ konvergieren, nun die starke Differenzierbarkeit der Resolvente auf der reellen Achse folgern:

Theorem 2.40
Sei $s > 1/2$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist die fortgesetzte Resolvente $R(\lambda \pm i0)$ als Operator in $\mathcal{B}(L^2_{s+N}(\mathbb{R}^n), L^2_{-s-N}(\mathbb{R}^n))$ N-mal stark differenzierbar und es gilt für alle $\lambda \in [a,b]$:

1. $$\left\| \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i0) f \right\|_{-s-N} \leq C\,\|f\|_{s+N},$$

2. *Sei $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$, dann gilt für jedes $t \geq N+1+s$:*

$$\begin{aligned} \left\| P_\mp(\lambda) \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i0) f \right\|_{t-N-1} &\leq C\,\|f\|_t, \\ \left\| \left[\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i0) \right] P_\pm(\lambda) f \right\|_{-t} &\leq C\,\|f\|_{-t+N+1}, \end{aligned}$$

3. *Sei $P_\pm(\lambda) \in S_\pm$ und $\{P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$ bilden ein disjunktes Paar vom Typ II (vgl. Lemma 2.37), dann gilt für jedes $t > 0$:*

$$\left\| P_\mp(\lambda) \left[\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i0) \right] P_\pm(\lambda) f \right\|_t \leq C\,\|f\|_{-t},$$

4. *Sei $Q(\lambda) \in S_\infty$, dann gilt für jedes $t > 0$:*

$$\left\| Q(\lambda) \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i0) f \right\|_{t-N} \leq C\,\|f\|_t,$$

mit jeweils $C = C(a,b,N)$.

Das ist das Analogon zu [Iso85, Theorem 1.9] von Isozaki für den Ganzraumfall des in Kapitel 1 definierten Störung des Laplaceoperators mit variablen Koeffizienten.

Bemerkung 2.41
In den Arbeiten [IK84], [IK85] und [Iso85] werden Schrödingeroperatoren mit langreichweitigem Potential betrachtet. Deswegen sollte es auch für die hier betrachteten Störungen des negativen Laplaceoperators kein Problem sein, die Differenzierbarkeit der Resolvente in $\lambda \geq a > 0$ mit der abgeschwächten Bedingung

$$\exists \tilde{\tau} > 0 \, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \; \partial_x^\alpha a_0(x) = \mathcal{O}(|x|^{-\tilde{\tau}-|\alpha|}) \qquad \text{für } |x| \to \infty$$

an die Abklingeigenschaften von der Koeffizientenfunktion a_0 zu zeigen.

Dies wird sich wohl auch auf den Außenraumfall übertragen lassen, dort aber nicht auf die Hochfrequenzergebnisse für den Schrödingeroperator, da in den Voraussetzungen 1.5 ein besseres Abklingen des Potentials verlangt wird. Ebenso wird bei den Niederfrequenzbetrachtungen ein stärkes Abklingen des Koeffizienten gefordert (vgl. $\tau > 2$ in Theorem 1.3 für $\lambda \geq 0$), so daß sich wohl auch hier die Ergebnisse nicht auf den langreichweitigen Fall übertragen lassen.

In den Anwendungen, wie beispielsweise bei der Existenz der verallgemeinerten Fouriertransformation, wird in dieser Arbeit jedoch das kurzreichweitige Verhalten des „Potentials“ a_0 ausgenutzt.

2.2.2 Außenraumfall

Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet und A die in Kapitel 1 eingeführte Störung des Laplaceoperators mit variablen Koeffizienten. Auch in diesem Falle läßt sich die Differenzierbarkeit und die lokal gleichmäßige Beschränktheit der Ableitungen der Resolvente beweisen. Dazu werden wir zeigen, daß sich die mikrolokalen Resolventenabschätzungen aus Abschnitt 2.1, also die Theoreme 2.13, 2.16, 2.34 und 2.31, auf den Außenraumfall übertragen lassen. So sind dann mit dem entsprechenden PdGA alle Voraussetzungen für Theorem 2.39 auch in diesem Fall gegeben. Wir erhalten in entsprechender Weise das folgende, auf den ersten und für uns wesentlichen Punkt zusammengefaßte Resultat:

Theorem 2.42
Seien $s > 1/2$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\lambda \in [a, b]$: $\exists s\text{-}\lim_{\varepsilon \searrow 0} R(\lambda \pm i\varepsilon)^N =: R(\lambda \pm i0)^N$ in $\mathcal{B}(L^2_{s+N-1}(\Omega), L^2_{-s-N+1}(\Omega))$ und es ist

$$\|R(\lambda \pm i0)^N f\|_{-s-N+1} \leq C \, \|f\|_{s+N-1}$$

mit $C = C(a, b, N)$.

Beweis: Es sei $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \eta \leq 1$, eine Abschneidefunktion mit

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| > R+1 \\ 0, & |x| < R, \end{cases}$$

so daß $\operatorname{supp} \eta \subset \Omega$, und $\tilde{A}$ ein Operator, der A auf den $\mathbb{R}^n$ glatt fortsetzt (also insbesondere die Koeffizienten a_0, a_{jk}).

Dann gilt auf $L^2(\Omega)$ die Operatoridentität:

$$\eta R(z) = \tilde{R}(z)\eta + \tilde{R}(z)[\tilde{A}, \eta]R(z), \tag{2.13}$$

wobei $\tilde{R}$ die Resolvente des Operators $\tilde{A}$ bezeichnet. Außerdem werden $L^2(\Omega)$–Funktionen durch 0 zu $L^2(\mathbb{R}^n)$–Funktionen fortgesetzt und nach Anwendung der Ganzraumoperatoren wiederum nur auf Ω betrachtet.

Der Kommutator $[\tilde{A}, \eta] = \Leftrightarrow(\partial_j a_{jk} \partial_k \eta) \Leftrightarrow 2a_{jk}(\partial_j \eta)\partial_k$ ist ein Differentialoperator erster Ordnung dessen Koeffizientenfunktionen kompakten Träger in Ω haben (es treten nur Ableitungen von η auf).

Weiterhin läßt sich $P_{\{\pm\}}(\lambda)\eta$ für $P_\pm(\lambda) \in S_\pm, P(\lambda) \in S_\infty$ in der Form

$$P_{\{\pm\}}(\lambda)\eta = P_{\{\pm\}}(\lambda) \Leftrightarrow P^\infty_{\{\pm\}}(\lambda),$$

schreiben, wobei $P^\infty_{\{\pm\}}(\lambda) = P_{\{\pm\}}(\lambda)(1 \Leftrightarrow \eta)$ ein PDO ist, dessen Symbol schnell in x abfällt, da $(1 \Leftrightarrow \eta)$ kompakten Träger in x hat. Letzteres bedeutet nach Theorem 2.9 insbesondere, daß der Operator zwischen beliebig gewichteten Räumen abbildet, da $(1 \Leftrightarrow \eta) \in S(\mu)$ für beliebiges μ ist.

Es sollen nun die Theoreme 2.13, 2.16, 2.34 und 2.31 für den Außenraumfall gezeigt werden:

<u>Übertragung von Theorem 2.13:</u>

Mit Identität (2.13) und dem obigen haben wir:

$$\begin{aligned} P(\lambda)R(\lambda \pm i0) &= P^\infty(\lambda)R(\lambda \pm i0) + P(\lambda)\eta R(\lambda \pm i0) \\ &= P^\infty(\lambda)R(\lambda \pm i0) + P(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\eta + P(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)[\tilde{A}, \eta]R(\lambda \pm i0) \\ &= P^\infty(\lambda)R(\lambda \pm i0) + P(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\eta \\ &\qquad \Leftrightarrow P(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\big((\partial_j a_{jk}\partial_k \eta) + 2a_{jk}(\partial_j \eta)\partial_k\big)R(\lambda \pm i0). \end{aligned}$$

Da $P^\infty(\lambda)$ ein PDO mit in x schnell abfallendem Symbol ist, erhalten wir mit dem PdGA und Theorem 2.13, daß

$$P^\infty(\lambda)R(\lambda \pm i0), P(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_s(\Omega)).$$

Wegen des kompakten Trägers sind $\partial_j a_{jk}\partial_k\eta, a_{jk}(\partial_j\eta) \in \mathcal{B}(L^2_{-s}(\Omega), L^2_s(\Omega))$ und mit dem Regularitätslemma 1.1 ist auch $\partial_k R(\lambda \pm i0) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_{-s}(\Omega))$. Somit gilt:

$$P(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\big((\partial_j a_{jk}\partial_k\eta) + 2a_{jk}(\partial_j\eta)\partial_k\big)R(\lambda \pm i0) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_s(\Omega)),$$

so daß insgesamt für $s > 1/2$

$$P(\lambda)R(\lambda \pm i0) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_s(\Omega))$$

ist und es gilt die Abschätzung:

$$\|P(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_s \le C\|f\|_s.$$

Übertragung von Theorem 2.16:

Die Übertragung von Theorem 2.16 verläuft wie die von Theorem 2.13: Wir schreiben wieder mit Identität (2.13):

$$\begin{aligned} P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0) &= P^\infty_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0) + P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\eta \\ &\Leftrightarrow P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\big((\partial_j a_{jk}\partial_k\eta) + 2a_{jk}(\partial_j\eta)\partial_k\big)R(\lambda \pm i0). \end{aligned}$$

Da $P^\infty_\mp(\lambda)$ wieder ein PDO mit in x schnell abfallendem Symbol ist, erhalten wir mit dem PdGA und Theorem 2.16:

$$P^\infty_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0), P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_{s-1-\delta}(\Omega)).$$

Wie oben können wir schließen, daß:

$$P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\big((\partial_j a_{jk}\partial_k\eta) + 2a_{jk}(\partial_j\eta)\partial_k\big)R(\lambda \pm i0) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_{s-1-\delta}(\Omega))$$

ist, also insgesamt, daß für $s > 1/2$, $\delta > 0$

$$P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_{s-1-\delta}(\Omega))$$

ist und die Abschätzung:

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)f\|_{s-1} \le C\|f\|_s$$

gilt.

Übertragung von Theorem 2.34:

Mit Identität (2.13) haben wir für ein disjunktes Paar $\{P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$ (vom Typ I):

$$\begin{aligned} P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) &= P^\infty_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) + P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\eta P_\pm(\lambda) \\ &\Leftrightarrow P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\big((\partial_j a_{jk}\partial_k\eta) + 2a_{jk}(\partial_j\eta)\partial_k\big)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda), \end{aligned}$$

wobei $P^\infty_\mp(\lambda)$ ein PDO mit in x schnell abfallendem Symbol ist und wegen $\eta \in S(0)$ auch $\{\eta P_+(\lambda), P_-(\lambda)\}$bzw. $\{P_+(\lambda), \eta P_-(\lambda)\}$ disjunkte Paare (vom Typ I) bilden.

Nehmen wir in der Übertragung von Theorem 2.16 die Adjungierte (bzw. nehmen wir die adjungierte Abschätzung von Theorem 2.16, die in Theorem 2.27 formuliert ist, und übertragen diese mit der entsprechenden Resolventenidentität für $R(z)\eta$), so erhalten wir für $s > 1/2$ und $\delta > 0$:

$$R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_{1-s+\delta}(\Omega), L^2_{-s}(\Omega)).$$

Benutzen wir dies und Theorem 2.34, sowie die im Beweis auftretenden Abschätzungen, so läßt sich die Übertragung mit $t > 0$ und $s > 1/2$ zeigen:

$$\begin{aligned} P^\infty_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) &\in \mathcal{B}(L^2_{-t}(\Omega), L^2_t(\Omega)) \\ P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\eta P_\pm(\lambda) &\in \mathcal{B}(L^2_{-t}(\Omega), L^2_t(\Omega)). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$P_\mp(\lambda)\tilde{R}(\lambda \pm i0)\big((\partial_j a_{jk}\partial_k\eta) + 2a_{jk}(\partial_j\eta)\partial_k\big)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_t(\Omega))$$

und wir haben insgesamt ist für $t > 0$ und $s > 1/2$

$$P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_t(\Omega))$$

sowie die Abschätzung:

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_t \le C\|f\|_s.$$

Geht man nun zur Adjungierten über, so erhält man entsprechend für $t > 0$ und $s > 1/2$:

$$P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_{-t}(\Omega), L^2_{-s}(\Omega))$$

und die Abschätzung

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_{-s} \le C\|f\|_{-t}.$$

Interpoliert man die letzten beiden Fälle wie im Beweis zu Theorem 2.34 mit Hilfe des Interpolationstheorems 2.35, so erhält man für alle $\tilde{t} > 0$:

$$P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_{-\tilde{t}}(\Omega), L^2_{\tilde{t}}(\Omega))$$

und die Abschätzung:

$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_{\tilde{t}} \le C\|f\|_{-\tilde{t}}.$$

Übertragung von Theorem 2.31:

Die Übertragung von Theorem 2.31 verläuft wie die von Theorem 2.34: Mit dem Übergang zur Adjungierten in der Übertragung von Theorem 2.13 haben wir für $s > 1/2$ und $\delta > 0$

$$R(\lambda \pm i0)Q(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_{-s-\delta}(\Omega), L^2_{-s}(\Omega)).$$

Da $\{Q(\lambda), P_\pm(\lambda)\}$ disjunkte Paare (vom Typ I) bilden, können wir hiermit und mit Theorem 2.31 bzw. Theorem 2.32 nun für $t > 0$ und $s > 1/2$ auf

$$Q(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_t(\Omega))$$

$$P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)Q(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_s(\Omega), L^2_t(\Omega))$$

sowie die Abschätzungen:

$$\|Q(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_t \leq C\|f\|_s$$
$$\|P_\mp(\lambda)R(\lambda \pm i0)Q(\lambda)f\|_t \leq C\|f\|_s$$

schließen. Durch Übergang zur Adjungierten und Interpolation erhält man wie oben für alle $\tilde{t} > 0$:

$$Q(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}(L^2_{-\tilde{t}}(\Omega), L^2_{\tilde{t}}(\Omega))$$

und die Abschätzung:

$$\|Q(\lambda)R(\lambda \pm i0)P_\pm(\lambda)f\|_{\tilde{t}} \leq C\|f\|_{-\tilde{t}},$$

woraus die Übertragung von Theorem 2.31 folgt.

Mit den auf den Außenraum übertragenen mikrolokalen Resolventenabschätzungen und dem PdGA aus Theorem 1.3 folgt nun das Analogon zu Theorem 2.39 für den Fall eines Außengebiets und somit auch die Aussage des Theorems.

$\square$

Wie im Ganzraumfall können wir nun über die Beziehung $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i\varepsilon) = N! R(\lambda \pm i\varepsilon)^{N+1}$ auf die Differenzierbarkeit schließen:

Theorem 2.43

Seien $s > 1/2$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $R(\lambda \pm i0)$ als Operator in $\mathcal{B}(L^2_{s+N}(\Omega), L^2_{-s-N}(\Omega))$ N–mal stark differenzierbar und es gilt für alle $\lambda \in [a, b]$:

$$\left\| \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R(\lambda \pm i0)f \right\|_{-s-N} \leq C\|f\|_{s+N},$$

mit $C = C(a, b, N)$.

2.3 Hochfrequenzergebnisse für den Schrödingeroperator

Auch bezüglich der Differenzierbarkeit lassen sich im Spezialfall des Schrödingeroperators weitreichendere Resultate bezüglich der Hochfrequenzasymptotik zeigen.

An dieser Stelle übernehmen wir für den Ganzraumfall direkt die Resultate von Isozaki (vgl. [Iso85, Theorem 1.8 und 1.9]), die sogar für langreichweitige Potentiale, d.h. lediglich $\tau > 0$ für die Abklingrate, gelten. Im Gegensatz zum Fall der Störung durch variablen Koeffizienten, lassen sich hier für die Potenzen bzw. die Ableitungen der Resolvente auf dem kontinuierlichen Spektrum sogar Abklingraten für große λ zeigen.

Theorem 2.44
Es seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$, $s > 1/2$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\lambda \geq a > 0$: $\exists$s-$\lim_{\varepsilon\to 0} R_S(\lambda \pm i\varepsilon)^N =: R_S(\lambda \pm i0)^N$ in $\mathcal{B}(L^2_{s+N-1}(\mathbb{R}^n), L^2_{-s-N+1}(\mathbb{R}^n))$ und es ist

$$\|R_S(\lambda \pm i0)^N f\|_{-s-N+1} \leq C\lambda^{-N/2} \, \|f\|_{s+N-1}$$

mit $C = C(a, N)$.

Theorem 2.45 (Ganzraumfall)
Es seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$, $s > 1/2$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $R_S(\lambda \pm i0)$ als Operator in $\mathcal{B}(L^2_{s+N}(\mathbb{R}^n),\, L^2_{-s-N}(\mathbb{R}^n))$ N-mal stark differenzierbar und es gilt für alle $\lambda \geq a > 0$:

$$\left\| \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N R_S(\lambda \pm i0) f \right\|_{-s-N} \leq C\lambda^{-(N+1)/2} \, \|f\|_{s+N}$$

mit $C = C(a, N)$.

Unter den Bedingungen, die wir schon für das PdGA im Falle des Aussenraums mit der für große λ gleichmäßigen Abschätzung stellen mußten, lassen sich auch die Potenzen der Resolvente bzw. deren Ableitungen nach dem Spektralparameter gleichmäßig für große λ mit der gleichen Abklingrate wie im Ganzraumfall abschätzen.

Theorem 2.46
Seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$, $s > 1$, $N \in \mathbb{N}$ und es gelten die Voraussetzungen 1.5. Dann gilt für alle $\lambda \geq a > 0$: $\exists$s-$\lim_{\varepsilon \searrow 0} R_S(\lambda \pm i\varepsilon)^N =: R_S(\lambda \pm i0)^N$ in $\mathcal{B}(L^2_{s+N-1}(\Omega), L^2_{-s-N+1}(\Omega))$ und es ist

$$\|R_S(\lambda \pm i0)^N f\|_{-s-N+1} \leq C\lambda^{-N/2} \, \|f\|_{s+N-1}$$

mit $C = C(a, N)$.

Beweis: In Abschnitt 2.2 hatten wir unter den Voraussetzungen 1.5 in Theorem 1.9 das PdGA im Falle des Schrödingeroperators für $s > 1$ mit einer Abklingrate $\lambda^{-1/2}$ für große λ gezeigt. Mit Hilfe des Abschätzungstheorems (Theorem 1.8) wissen wir, daß auch $\nabla_x R_S(\lambda \pm i0)f$ gleichmäßig für große λ gegen die rechte Seite abeschätzt werden kann. Benutzen wir dies in der Übertragung der mikrolokalen Resolventenabschätzungen auf den Außenraumfall, so bleiben die Abklingraten für große λ auch hier erhalten. Wie im Beweis zu Theorem 2.42 folgt somit die Aussage des Theorems.

□

Theorem 2.47 (Außenraumfall)
Seien $s > 1$, $N \in \mathbb{N}$ und es gelten die Voraussetzungen 1.5. Dann ist $R_S(\lambda \pm i0)$ als Operator in $\mathcal{B}(L^2_{s+N}(\Omega), L^2_{-s-N}(\Omega))$ N–mal stark differenzierbar, und es gilt für alle $\lambda \geq a > 0$:

$$\left\| \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^N R_S(\lambda \pm i0) f \right\|_{-s-N} \leq C \lambda^{-(N+1)/2} \|f\|_{s+N}$$

mit $C = C(a, N)$.

Im weiteren werden wir auf die folgende Form von Theorem 2.47 zurückgreifen:

Korollar 2.48
Seien $s > 1$, $N \in \mathbb{N}$ und es gelten die Voraussetzungen 1.5. Dann ist $R_S(\varrho^2 \pm i0)$ als Operator in $\mathcal{B}(L^2_{s+N}(\Omega), L^2_{-s-N}(\Omega))$ N–mal stark nach ϱ differenzierbar und es gilt für alle $\varrho^2 \geq a > 0$:

$$\left\| \left(\frac{d}{d\varrho} \right)^N R_S(\varrho^2 \pm i0) f \right\|_{-s-N} \leq \frac{C}{\varrho} \|f\|_{s+N}$$

mit $C = C(a, N)$.

2.4 Niederfrequenzbetrachtungen

Bisher mußten wir in den Differenzierbarkeitsbetrachtungen, bedingt durch die verwendeten Methoden, immer $\lambda > 0$ voraussetzen. Im PdGA gelang es aber, auch $\lambda = 0$ zuzulassen, was eine gesonderte Untersuchung der Niederfrequenzasymptotik motiviert. Tatsächlich gelingt es, für ungerade Raumdimensionen mit Ergebnissen aus [WW93] ($n = 3$) bzw. [WW97a] ($n \geq 3$) die einmalige Differenzierbarkeit der Resolvente in $\lambda = 0$ für rechte Seiten aus einem Raum „hinreichend regulärer Konvergenz“ zu zeigen. Dabei wird die

Resolvente als Operator von $\tilde{H}_s \subset L^2_s(\Omega) \to L^2_{4-s}(\Omega), s > 5$ aufgefaßt und die gleichmäßige Beschränktheit der Resolvente aus dem PdGA ausgenutzt.

Im zweiten Teilabschnitt diskutieren wir noch den Fall höherer Ableitungen.

Für die in diesem Abschnitt betrachteten Störungen A des negativen Laplaceoperators fordern wir ausätzlich, daß sie der Bedingung 5. aus Kapitel 1 genügen und daß für ihre Abklingrate $\tau > 2$ gilt.

2.4.1 Einmalige einseitige Differenzierbarkeit

Im folgenden stellen wir die für ungerade Raumdimensionen formulierten Resultate aus [WW93] bzw. [WW97a] zusammen, die wir im weiteren verwenden werden.

Zunächst definieren wir den Raum „regulärer Konvergenz“ und geben nach der Einführung von einigen Bezeichnungen mit dem anschließenden Theorem eine Charakterisierung dieses Raumes.

Definition 2.49 (Raum der regulären Konvergenz $\tilde{H}_s$)
Es seien $n \geq 3$ ungerade, $K \in \mathbb{N}_0$, $s > 1/2$, so daß $s+1/2 \notin \mathbb{N}$, $\tau > s \Leftrightarrow n/2 > 2K \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)/2$. Dann definieren wir durch

$$\tilde{H}_s := \{f \in L^2_s(\Omega) | R(0)^k f \in L^2_{s-2k}(\Omega), \quad \textit{für } k = 1, \ldots, K+1\}$$

den Raum der regulären Konvergenz.

In [WW97a, Theorem 2, Korollar 1] wird gezeigt, daß

$$R(0) : \bigcup_{t>2-n/2} L^2_t(\Omega) \to \bigcup_{t>-n/2} L^2_t(\Omega), \quad f \mapsto u,$$

wobei u gemäß Definition 1.2 die Strahlungslösung zu $Au = f$ ist, wohldefiniert ist, so daß die obige rekursive Definition von $R(0)^k$ Sinn macht.

$\tilde{H}_s$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2_s(\Omega)$.

Bezeichnungen:

Es sei Λ die Menge aller Tupel $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, die für jedes $\gamma_1 \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma_2 \in \{1, \ldots, (2\gamma_1 + n \Leftrightarrow 2)\frac{(n+\gamma_1-3)!}{(n-2)!\gamma_1!}\}$ die Eigenfunktionen $\sigma_{\gamma,n}$ des Laplace – Beltramioperators Δ_ω zum Eigenwert $\gamma_1(\gamma_1 + n \Leftrightarrow 2)$ indizieren.
(Der Laplaceoperator schreibt sich in Kugelkoordinaten folgendermaßen:
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega$, so daß Δ_ω gerade die Winkelableitungen und Winkelabhängigkeiten enthält.)

Weiterhin bezeichnen wir mit $E_{\gamma,n}$ die nach [WW93, Korollar 3] eindeutige Lösung mit Nullranddaten des Problems

$$\begin{aligned} \mathcal{A}E_{\gamma,n} &= 0 \\ (E_{\gamma,n} \Leftrightarrow r^{\gamma_1}\sigma_{\gamma,n}) &\in \bigcup_{t>-3/2} L_t^2(\Omega). \end{aligned}$$

Theorem 2.50
Seien $n \geq 3$ ungerade, $K \in \mathbb{N}_0$, $s > 1/2$, so daß $s + 1/2 \notin \mathbb{N}$, $f \in L_s^2(\Omega)$ und $\tau > s \Leftrightarrow n/2 > 2K \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)/2$. Dann ist $f \in \tilde{H}_s \;\Leftrightarrow$

$$\langle f, R(0)^l E_{\gamma,n}\rangle = 0 \qquad \forall\, (\gamma, l) \in \Theta_s,$$

wobei $\Theta_s := \{(\gamma, l) \in \Lambda \times \mathbb{N}_0 \mid \gamma_1 + 2l \leq s \Leftrightarrow n/2\}$.

Die Darstellung aus dem nächsten Theorem werden wir im darauffolgenden benutzen, um die einmalige Differenzierbarkeit der Resolvente zu zeigen.

Theorem 2.51
Seien $n \geq 3$ ungerade, $K \in \mathbb{N}_0$, $s > 1/2$ so, daß $s + 1/2 \notin \mathbb{N}$ und $\tau > s \Leftrightarrow n/2 > 2K \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)/2$. Dann gilt für $f \in \tilde{H}_s$ und $\lambda < \lambda_0$:

$$R(\lambda \pm i0)f = \sum_{k=0}^{K} \lambda^k R(0)^{k+1} f + \lambda^K [R(\lambda \pm i0) \Leftrightarrow R(0)] R(0)^K f.$$

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir nun die einmalige einseitige Differenzierbarkeit in $\lambda = 0$.

Theorem 2.52
Es seien $n \geq 3$ ungerade, $s > 5$, so daß $s + 1/2 \notin \mathbb{N}$ und $\tau > s \Leftrightarrow n/2$. Dann ist $R(\lambda \pm i0)$ als Operator in $\mathcal{B}(\tilde{H}_s, L^2_{4-s}(\Omega))$ einmal stark differenzierbar mit Ableitung $R(0)^2 f$.

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen haben wir nach Theorem 2.51 für $K = 2$ die Darstellung

$$R(\lambda \pm i0)f = R(0)f + \lambda R(0)^2 f + \lambda^2 R(\lambda \pm i0) R(0)^2 f.$$

Mit dem PdGA aus Theorem 1.3 können wir wegen $s \Leftrightarrow 4 > 1$ für $\lambda > 0$ folgern:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R(\lambda \pm i0)f \Leftrightarrow R(0)f}{\lambda} \Leftrightarrow R(0)^2 f \right\|_{0,4-s} &= |\lambda| \|R(\lambda \pm i0) R(0)^2 f\|_{0,4-s} \\ &\leq |\lambda| (1 + |\lambda|)^{-1/2} C \|R(0)^2 f\|_{0,s-4} \\ &\leq |\lambda| (1 + |\lambda|)^{-1/2} C \|f\|_{0,s} \\ &\to 0 \quad \text{für } \lambda \to 0, \end{aligned}$$

Also ist $R(0)^2$ unter den gegebenen Voraussetzungen die erste rechtsseitige Ableitung von $R(\lambda \pm i0)$ in $\lambda = 0$, aufgefaßt als Operator in $\mathcal{B}(\tilde{H}_s, L^2_{4-s}(\Omega))$.
$\square$

Bemerkung 2.53
Die in Theorem 2.52 gezeigte Differenzierbarkeit entspricht nicht ganz der, die wir für $\lambda > 0$ hatten, da auf anderen Räumen gearbeitet wird. So müssen wir abgesehen von den Orthogonalitätsrelationen, die $\tilde{H}_s$ charakterisieren, mit $s > 5$ anstelle von etwa $t > N + 1 = 2$ ein höheres Gewicht des Ausgangsraumes fordern, landen dann aber auch in dem stärker gewichteten Raum $L^2_{4-s}(\Omega)$ mit $4 \Leftrightarrow s < \Leftrightarrow 1$ im Gegensatz zu $\Leftrightarrow t < \Leftrightarrow 2$.

2.4.2 Diskussion zu höheren Ableitungen

Sind $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+_0$ und $f \in \tilde{H}_s$ mit $s > 2(K+1)+1$, so ist die Darstellung

$$R(z)f = \sum_{k=0}^{K-1} z^k R(0)^{k+1} f + z^K R(z) R(0)^K f$$

aus Theorem 2.51 eine Identität in $L^2(\Omega)$. Wir können deshalb $R(z)$ auf beiden Seiten anwenden und erhalten für höhere Potenzen, falls $f \in \tilde{H}_s$ mit $s > 2(K+N)+1$ ist:

$$\begin{aligned}
R(z)^N f = & \sum_{k=0}^{K} \tbinom{k+N-1}{k} z^k R(0)^{k+N} f + \sum_{k=1}^{N-1} \tbinom{K+N-1}{K+k} z^{K+k} R(z)^{k+1} R(0)^{K+N-1} f \\
& + \tbinom{K+N-1}{K} z^K \big(R(z) \Leftrightarrow R(0)\big) R(0)^{K+N-1} f \\
= & \sum_{k=0}^{K-1} \tbinom{k+N-1}{k} z^k R(0)^{k+N} f + \sum_{k=0}^{N-1} \tbinom{K+N-1}{K+k} z^{K+k} R(z)^{k+1} R(0)^{K+N-1} f.
\end{aligned}$$

Im Fall $K = 2$ bedeutet dies:

$$R(z)^N = R(0)^N f + N z R(0)^{N+1} f + \sum_{k=0}^{N-1} \tbinom{N+1}{k+2} z^{2+k} R(z)^{k+1} R(0)^{N+1} f.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{R(z)^N f \Leftrightarrow R(0)^N f}{z} \Leftrightarrow N R(0)^{N+1} f = z \sum_{k=0}^{N-1} \tbinom{N+1}{k+2} z^k R(z)^{k+1} R(0)^{N+1} f$$

Für die Differenzierbarkeit in $z = 0$ müßte nun die rechte Seite in einer gewichteten Norm gegen Null konvergieren. Auch eine Umformulierung mit

Hilfe der Resolventengleichung kann das Auftreten eines $R(z)^N$–Termes nicht verhindern. Dies kann man sich bereits im Fall $N = 2$ an Hand der folgenden formalen Rechnung klar machen:

$$\begin{aligned} R(z)^2 &= R(z)[R(0)+zR(0)^2+z^2R(z)R(0)^2] \\ &= [R(0)+zR(0)^2+z^2R(z)R(0)^2][R(0)+zR(0)^2]+z^2R(z)^2R(0)^2 \\ &= R(0)^2+2zR(0)^3+z^2R(0)^4+z^2R(z)R(0)^3+z^3R(z)R(0)^4+z^2R(z)^2R(0)^2 \\ &= R(0)^2+2zR(0)^3+z^2[2R(z)R(0)^3+R(z)^2R(0)^2]. \end{aligned}$$

Da man für die Differentiation die ersten beiden Terme von der rechten auf die linke Seite bringt und durch z teilt, muß für die gewünschte Differenzierbarkeit insbesondere $zR(z)^2R(0)^2$ gegen Null konvergieren.

Hinreichend für die Differenzierbarkeit wäre also wie im Falle $N = 1$ eine gleichmäßige Beschränktheit von $R(z)^N$ für $z \in B_{\lambda_0}(0)$ bzw. für die einseitige Differenzierbarkeit die von $R(\lambda)^N$ für $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Geht man bei der Betrachtung des Laplaceoperators im Ganzraumfall wie bei [BAD84] vor und interpretiert die N-te Ableitung der Resolvente gemäß

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{N!}\tfrac{d^N}{d\lambda^N}(\Leftrightarrow\Delta\Leftrightarrow\lambda)^{-1} &= (\Leftrightarrow\Delta\Leftrightarrow\lambda)^{-(N+1)} = [(\Leftrightarrow\Delta\Leftrightarrow\lambda)^{N+1}\Leftrightarrow(\Leftrightarrow\lambda)^{N+1}+(\Leftrightarrow\lambda)^{N+1}]^{-1} \\ &\stackrel{!}{=} \tilde{R}(\mu)|_{\mu=-(-\lambda)^{N+1}} \end{aligned}$$

als Resolvente eines selbstadjungierten Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten und dem Symbol

$$p(\xi,\lambda) := (|\xi|^2\Leftrightarrow\lambda)^{N+1}\Leftrightarrow(\Leftrightarrow\lambda)^{N+1}, \qquad \lambda \geq 0,$$

so erhält man für die Ableitung des zugehörigen Spektralmaßes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}(E(\mu)f,g) &= \left(2(N+1)\left(\sqrt[N+1]{\mu+(\Leftrightarrow\lambda)^{N+1}}\right)^N\sqrt{\sqrt[N+1]{\mu+(\Leftrightarrow\lambda)^{N+1}}+\lambda}\right)^{-1}\times \\ &\times\int_{|\xi|^2=\sqrt[N+1]{\mu+(-\lambda)^{N+1}}+\lambda}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\sigma. \end{aligned}$$

Möchte man nun im Fall $\lambda = 0$ auch μ gegen Null streben lassen, so muß man wegen

$$\frac{d}{d\mu}(E(\mu)f,g)\Big|_{\mu=0} = \tfrac{1}{2(N+1)}\lim_{\mu\to 0}\left[\left(\sqrt[N+1]{\mu}\right)^{(n-2(N+1))/2}\right]\int\limits_{|\omega|=1}\hat{f}(|\xi|\omega)\overline{\hat{g}(|\xi|\omega)}d\omega$$

für die Raumdimension mindestens

$$n \geq 2(N+1).$$

voraussetzen, da sonst die Funktionen $f = g = 1$ nahe $|\xi| = 0$ ein Gegenbeispiel für die Beschränkheit von $\frac{d}{d\mu}(E(\mu)f, g)\Big|_{\mu=0}$ liefern. Für $n = 3$ bedeutet dies lediglich, daß man auf die die Beschränktheit der Resolvente selbst schließen kann, was wir bereits im PdGA verwandt haben. Dies zeigt also, daß die Beschränktheit von Potenzen der Resolvente aufgefaßt als Operator, der zwischen lediglich polynomial gewichteten Räumen abbildet, bezüglich der gleichmäßigen Operatortopologie nicht zu erwarten ist.

Andererseits liegt die Vermutung nahe, daß man vielleicht eine gleichmäßige Schranke für Potenzen der Resolvente finden kann, solange man nur die rechten Seiten aus einem Raum hinreichend hoher regulärer Konvergenz nimmt. Tatsächlich gelingt es über die Darstellung mittels der Spektralschar zu zeigen, daß für $N \in \mathbb{N}$ und $f \in \tilde{H}_s$ mit $s > 2N + 3$

$$\langle R(z)^N f, f \rangle \leq \langle R(0)^N f, f \rangle$$

ist, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die $L^2_{-s}(\Omega) \Leftrightarrow L^2_s(\Omega)$ Paarung bezeichnet. Dies sagt aber noch nichts über die Operatornorm aus.

Eine andere Überlegung ist, das Haupttheorem aus [WW93] für höhere Potenzen der Resolvente zu zeigen, da dies gerade die noch fehlende Konvergenz gegen Null liefern würde.

Eine weitere Idee ist, mit ähnlichen Approximationsargumenten wie in [WW93], von dem folgenden Resultat von Vajnberg, vgl. [Vaj89, Kapitel IX], auf unseren Fall variabler Koeffizienten zu schließen:

Liegt exponentielles Abklingen der Koeffizienten vor, d.h. :

$$a_0, (a_{jk}(x) \Leftrightarrow \delta_{jk}) = o(e^{-|x|^2}), \quad \text{für } |x| \to \infty,$$

so läßt sich die Resolvente von A, wobei $(A \Leftrightarrow k^2)u = f$ ist, aufgefaßt als Operator von $L^2_{1/\Psi} := \{v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \,|\, e^{|\cdot|^2} v \in L^2(\Omega)\}$ nach $L^2_\Psi := \{v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \,|\, e^{-|\cdot|^2} v \in L^2(\Omega)\}$, meromorph auf die reelle Achse fortsetzen. Ist $k = 0$ kein Eigenwert, so ist die Resolvente analytisch in $k = 0$.

Kapitel 3

Die verallgemeinerte Fouriertransformation

In diesem Kapitel werden wir die Ergebnisse des letzten verwenden, um die Differenzierbarkeits- und Abbildungseigenschaften von verallgemeinerten Fouriertransformationen zu untersuchen.

Eine solche *verallgemeinerte Fouriertransformation* zu einem Operator A aus Kapitel 1 ist eine isometrische Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

die den Operator A diagonalisiert, d.h. es ist

$$(\mathcal{F}(\varphi(A)w))(\xi) = \varphi(|\xi|^2)(\mathcal{F}w)(\xi) \tag{3.1}$$

für alle Funktionen $\varphi(A)$, die durch den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren definiert sind. Sie läßt sich in der Form

$$(\mathcal{F}w)(\xi) = \int_\Omega \overline{\psi(x,\xi)} w(x)\, dx \qquad \text{f. ü.} \tag{3.2}$$

darstellen, wobei Ω ein Außengebiet mit $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B_R(0)$ ist, und der Integralkern die Gestalt

$$\psi(x,\xi) := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}[j(x)e^{ix\xi} + \psi_\pm(x,\xi)]$$

hat. Hierbei ist $j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion mit $0 \le j \le 1$, $\operatorname{supp} j \subset \{x \mid |x| \ge R\}$ und $j(x) \equiv 1$ auf $\{x \mid |x| \ge R+1\}$ sowie

$$\psi_\pm(x,\xi) = R(|\xi|^2 \pm i0)M(\cdot,\xi)(x),$$

mit der gemäß Theorem 1.3 auf die reelle Achse fortgesetzten Resolvente $R(|\xi|^2 \pm i0)$ des Operators A und der rechten Seite $M(x,\xi) := -(\mathcal{A} - |\xi|^2)(j(x)e^{ix\xi})$.

So gibt es zu einem Operator A mit der Wahl von ψ_+ oder ψ_- zwei verallgemeinerte Fouriertransformationen $\mathcal{F}_+$ bzw. $\mathcal{F}_-$, die sich jedoch in Hinblick auf die Anwendungen nur wenig unterscheiden. Deswegen werden wir im weiteren auch immer von „der“ verallgemeinerten Fouriertransformation $\mathcal{F}$ reden und meinen damit $\mathcal{F}_+$ oder $\mathcal{F}_-$.

Die Funktionen $\psi(\cdot,\xi)$ sind verallgemeinerte Eigenfunktionen des Operators A zum Eigenwert $|\xi|^2$, denn es gilt formal:

$$(A - |\xi|^2)\psi(\cdot,\xi) = 0,$$

doch sind sie wegen des ersten Summanden nicht in $L^2(\Omega)$, liegen also nicht im Definitionsbereich des Operators A. Die verallgemeinerte Fouriertransformation wird deshalb auch *Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen* genannt.

Auf ihrem Bild $\mathcal{F}(L^2(\Omega))$ existiert auch die inverse Abbildung $\mathcal{F}^{-1}$, die sich mit $\hat{w} := \mathcal{F}w$ in der Form

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x,\xi)\hat{w}(\xi)\,d\xi \qquad \text{f. ü.} \tag{3.3}$$

darstellen läßt.

Wählt man für A den negativen Laplaceoperator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, so ist $\mathcal{F}$ gerade die klassische Fouriertransformation.

Im Falle des negativen Laplaceoperators auf einem Außengebiet hat Wilcox in [Wil75] die Existenz einer verallgemeinerten Fouriertransformation gezeigt, was sich leicht auch auf den Fall endlicher Störungen übertragen läßt. Für den Schrödingeroperator mit langreichweitigem Potential im Ganzraumfall wurde diese Fragestellung beispielsweise von Saito [Sai79] und Isozaki [Iso82] behandelt, wobei letzterer in [Iso85] auch die Differenzierbarkeit im Fourierbild untersucht. Die Existenz einer verallgemeinerten Fouriertransformation für unendliche Störungen des Laplaceoperators mittels variabler Koeffizienten in der Form $-\partial_j a_{jk}(x)\partial_k$ auf einem Außengebiet wurde für $\tau > \frac{1}{2}(n+3)$ in [Ker93] gezeigt. Dies läßt sich leicht auf solche der Form $-\partial_j a_{jk}(x)\partial_k + a_0(x)$ im Sinne von Kapitel 1 erweitern.

Einige Eigenschaften, wie die Linearität, die Isometrie oder die Diagonalisierungseigenschaft der klassischen Fouriertransformation übertragen sich (nach Konstruktion) sofort auf die verallgemeinerte Fouriertransformation. Andere, wie beispielsweise die Surjektivität im Falle endlicher Störungen, sind dagegen schwieriger zu zeigen oder noch gar nicht bekannt, wie die Surjektivität im Falle unendlicher Störungen der Form $-\partial_j a_{jk}(x)\partial_k$.

Wir wenden uns jetzt der Differenzierbarkeit im Bild der verallgemeinerten Fouriertransformation zu. Im folgenden Abschnitt zeigen wir für Funktionen $w \in L^2_s(\Omega)$ mit hinreichend großem s die Differenzierbarkeit von $(\mathcal{F}w)(\xi)$ in $\xi \neq 0$. Für das Beispiel der zum negativen Laplaceoperator auf dem Äußeren einer Kugel gehörigen Fouriertransformation zeigen wir im zweiten Abschnitt auch die radiale Differenzierbarkeit in $\varrho = |\xi| = 0$. Im dritten Abschnitt untersuchen wir weitere Abbildungseigenschaften verallgemeinerter Fouriertransformationen, insbesondere, unter welchen Bedingungen an $\mathcal{F}w$ man schließen kann, daß $w \in L^2_s(\Omega)$ mit $s > 0$ ist.

Dabei werden wir mit $\mathcal{F}_0$ die klassische Fouriertransformation zum negativen Laplaceoperator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen, mit $\mathcal{F}$ die verallgemeinerte Fouriertransformation zu der allgemeinen Störung A aus Kapitel 1, mit $\mathcal{F}_S$ die zum Schrödingeroperator $A = \Leftrightarrow\Delta + V$ und mit $\mathcal{F}_1$ die zum Laplaceoperator auf dem Äußeren einer Kugel gehörige.

3.1 Differenzierbarkeit

Aus der Theorie der klassischen Fouriertransformation haben wir die folgenden Resultate über die Differenzierbarkeit im Fourierbild (vgl. [Pet83, Kapitel 2] bzw. [Tri72, Kapitel 2]:

Theorem 3.1
Seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $w \in L^1_N(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\mathcal{F}_0 w \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^n) \qquad \textit{und} \qquad \partial^\alpha \mathcal{F}_0 w = i^{-|\alpha|}\mathcal{F}_0(x^\alpha w) \quad \textit{für } |\alpha| \leq N.$$

Dabei sind die N–ten Ableitungen stetig und es ist $\lim_{|x|\to\infty} \partial^\alpha \mathcal{F}_0 w(x) \to 0$ für alle $|\alpha| = N$.

Entsprechendes gilt für die Fourierrücktransformation $\mathcal{F}_0^{-1}$.

Theorem 3.2
Es sei $N \in \mathbb{N}_0$. Dann sind

$$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0^{-1} : L^2_N(\mathbb{R}^n) \to W^{N,2}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{unitär.}$$

Das letzte Theorem motiviert die Definition von Sobolevräumen mit reeller Ordnung s:

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) := \{v \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \mathcal{F}_0 v \in L^2_s(\mathbb{R}^n)\}$$

mit der Norm $\|v\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)} := \|\mathcal{F}_0 v\|_s$.

Wir wollen nun Aussagen in der Art von Theorem 3.1 und 3.2 auch für die verallgemeinerte Fouriertransformation zeigen.

Da in der Darstellung

$$\mathcal{F}w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\left(\int\limits_\Omega e^{-ix\xi} j(x)w(x)\,dx + \int\limits_\Omega \overline{R(|\xi|^2 \pm i0)M(\cdot,\xi)(x)}w(x)\,dx\right) \quad (3.4)$$

der verallgemeinerten Fouriertransformierten von w die von ξ abhängige Resolvente des Operators A auftritt, werden wir zum Nachweis der Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}w$ die im letzten Kapitel gezeigten Ergebnisse über die Differenzierbarkeit der Resolvente verwenden. Die Ableitungen der Resolvente bilden in einen Raum mit negativem Gewicht (d.h. der Exponent der Gewichtsfunktion $\langle x\rangle$ ist negativ) ab, so daß für die Endlichkeit des Integrals die Funktion w aus einem entsprechend positiv gewichteten Raum sein muß.

Damit wir Ableitungen der Resolvente auf die spezielle Funktion $M(x,\xi)$ und deren Ableitungen nach ξ anwenden können, müssen diese in Räumen mit positivem Gewicht liegen. Auch im Hinblick auf spätere Argumentationen halten wir im folgenden Lemma das asymptotische Verhalten der Funktion $M(x,\xi)$ und deren Ableitung für große Argumente fest. Daraus lassen sich dann insbesondere die Bedingungen an die Abklingrate τ ablesen, aus denen $\partial_\xi^\alpha M(\cdot,\xi) \in L_s^2(\Omega)$ folgt.

Lemma 3.3
Die Funktion $M(x,\xi) := \Leftrightarrow(\mathcal{A} \Leftrightarrow |\xi|^2)(j(x)e^{ix\xi})$ *und ihre Ableitungen haben das folgende asymptotische Verhalten:*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta M(x,\xi)| = f_0(x)g_0(\xi) + \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(\xi) + \sum_{j,k=1}^n f_{jk}(x)g_{jk}(\xi),$$

wobei für $j,k = 1,\dots,n$ *gilt:*

$$f_0(x), f_k(x), f_{jk}(x) = \mathcal{O}(|x|^{-\tau+|\alpha|}) \quad \text{für } |x| \to \infty \quad (3.5)$$
$$g_0(x), g_k(x), g_{jk}(x) = \mathcal{O}(|\xi|^{2+|\beta|}) \quad \text{für } |\xi| \to \infty. \quad (3.6)$$

Im Falle des Schrödingeroperator $\mathcal{A} = \Leftrightarrow\Delta + V$ *haben wir anstelle von (3.6) für* $j,k = 1,\dots,n$ *sogar:*

$$g_0(x), g_k(x), g_{jk}(x) = \mathcal{O}(|\xi|^{1+|\beta|}) \quad \text{für } |\xi| \to \infty \quad (3.7)$$

Es ist also insbesondere $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta M(\cdot,\xi) \in L_s^2(\Omega)$ *lokal gleichmäßig in* ξ*, falls* $\tau > n/2 + s + |\alpha|$ *ist.*

Beweis: Es ist

$$
\begin{aligned}
M(x,\xi) &= \Leftrightarrow(\mathcal{A} \Leftrightarrow |\xi|^2)(j(x)e^{ix\xi}) \\
&= (\partial_j a_{jk}(x)\partial_k \Leftrightarrow a_0(x) + |\xi|^2)(j(x)e^{ix\xi}) \\
&= \Big(\partial_j a_{jk}(x)\partial_k j(x) + 2i\xi_j a_{jk}(x)\partial_k j(x) + \\
&\quad + j(x)\big(\Leftrightarrow a_0(x) + (i\partial_j a_{jk}(x) \Leftrightarrow \xi_j(a_{jk}(x) \Leftrightarrow \delta_{jk}))\xi_k\big)\Big)e^{ix\xi}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Hieraus erhält man sofort die Aufteilung von $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta M(x,\xi)|$ in eine Summe von Produkten aus Funktionen, die nur von x oder nur von ξ abhängen.

Die ersten beiden Terme der Gleichung (3.8) haben aufgrund der Ableitungen der Abschneidefunktion j kompakten Träger in x, während sich der dritte, vierte und fünfte mindestens wie $\mathcal{O}(|x|^{-\tau})$ für $|x| \to \infty$ verhalten. Bezüglich ξ verhält sich $M(x,\xi)$ mit dem letzten Term wie $\mathcal{O}(|\xi|^2)$ für große ξ. Ableitungen nach x liefern wegen des $e^{ix\xi}$ -Terms das gleiche Verhalten bezüglich x und eine weitere Potenz in ξ; Ableitungen nach ξ entsprechend das gleiche Verhalten bezüglich ξ und eine weitere Potenz in x.

Im Falle des Schrödingeroperators fallen die letzten beiden Summanden und somit die zweiten Potenzen in ξ weg. Im Falle des Laplaceoperators fällt auch der dritte Term weg und $M(x,\xi)$ hat sogar kompakten Träger in x (vgl. [Wil75]).

$\square$

Für die verallgemeinerte Fouriertransformation haben wir bezüglich der starken Differenzierbarkeit als Entsprechung zu Theorem 3.1:

Theorem 3.4
Es seien $N \in \mathbb{N}$, $s > 1/2$, $\tau \geq n/2 + s + N$ und $w \in L^1_N(\Omega) \cap L^2_{s+N}(\Omega)$. Dann ist die verallgemeinerte Fouriertransformierte $(\mathcal{F}w)(\xi)$ von w in $\xi \neq 0$ N–mal differenzierbar.

Beweis: Der Einfachheit halber wählen wir im Beweis die Transformation $\mathcal{F}_+$ mit der Funktion ψ_+ im Integralkern; der Beweis für $\mathcal{F}_-$ verläuft analog. Betrachten wir zunächst den Fall $N = 1$. Für die partielle Ableitung nach ξ_l, $l \in \{1,\ldots,n\}$, haben wir:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\xi_l}(\mathcal{F}w)(\xi) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\Big[\partial_{\xi_l}\int_\Omega j(x)e^{ix\xi}w(x)\,dx + \partial_{\xi_l}\int_\Omega \overline{[R(|\xi|^2+i0)M(\cdot,\xi)(x)]}w(x)\,dx\Big] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\Big[\int_\Omega j(x)ix_l e^{ix\xi}w(x)\,dx + \int_\Omega \overline{[(\partial_{\xi_l}R(|\xi|^2+i0))\,M(\cdot,\xi)(x)]}w(x)\,dx \\
&\qquad + \int_\Omega \overline{[R(|\xi|^2+i0)\partial_{\xi_l}M(\cdot,\xi)(x)]}w(x)\,dx\Big]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\Big[\int_\Omega j(x) i x_l e^{ix\xi} w(x)\,dx + \int_\Omega \overline{[2\xi_l \big(\tfrac{d}{d\lambda}R(\lambda+i0)\big)\Big|_{\lambda=|\xi|^2} M(\cdot,\xi)(x)]} w(x)\,dx$$
$$+ \int_\Omega \overline{[R(|\xi|^2+i0)\partial_{\xi_l} M(\cdot,\xi)(x)]} w(x)\,dx\Big].$$

Die Vertauschung von Differentiation und Integration für den ersten Summanden ist mit Theorem 3.1 gerechtfertigt, denn nach der Fortsetzung durch 0 auf den $\mathbb{R}^n$ ist $(x_l j w) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da nach Voraussetzung $w \in L^1_1(\Omega)$ war. Aus Theorem 2.40 wissen wir, daß die Resolvente auf der reellen Achse als Operator in $\mathcal{B}(L^2_{s+1}(\Omega), L^2_{-s-1}(\Omega))$ differenzierbar ist und auch die Ableitung einer lokal gleichmäßigen Abschätzung genügt. Da nach Voraussetzung $\tau \geq n/2 + s + 1$ ist, können wir mit Lemma 3.3 schließen, daß $M(\cdot,\xi) \in L^2_{s+1}(\Omega)$ und $\partial_{\xi_l} M(\cdot,\xi) \in L^2_s(\Omega)$ ist. Außerdem liegt $w \in L^2_{s+1}(\Omega)$, weshalb wir mit dem Satz von Lebesgue auch im zweiten und dritten Term die Grenzprozesse vertauschen dürfen.

Entsprechend geht man für höhere Ableitungen vor, wobei dann Terme der Form

$$\big(\partial_\xi^{\alpha-\gamma} R(|\xi|^2+i0)\big)\partial_\xi^\gamma M(\cdot,\xi)(x)$$

mit $\gamma \leq \alpha$ auftreten. Diese sind dann wohldefiniert, wenn $\partial_\xi^\gamma M(\cdot,\xi) \in L^2_{s+|\alpha-\gamma|}(\Omega)$ ist, was aber wegen $\tau \geq n/2 + s + N$ für $|\gamma| \leq |\alpha| \leq N$ nach Lemma 3.3 der Fall ist.

Somit haben wir die partielle Differenzierbarkeit der verallgemeinerten Fouriertransformierten nachgewiesen. Da wir wissen, daß die rechte Seite unter den gegebenen Voraussetzungen total differenzierbar ist, folgt insgesamt die zu zeigende Differenzierbarkeit.

□

Für die schwache Differenzierbarkeit zeigen wir:

Theorem 3.5
Es seien $N \in \mathbb{N}$, $s > 1/2$, $\tau \geq n/2 + s + N$ und $w \in L^2_{s+N}(\Omega)$. Dann ist die verallgemeinerte Fouriertransformierte $(\mathcal{F}w)(\xi)$ von w in $\xi \neq 0$ N–mal schwach differenzierbar und die Ableitungen liegen in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Beweis: Die schwache Differenzierbarkeit des ersten Summanden der verallgemeinerten Fouriertransformierten folgt aus Theorem 3.2 und mit der Argumentation aus dem Beweis zu Theorem 3.4 die des zweiten.

Da wir aus Theorem 2.40 lediglich eine in $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ lokal gleichmäßige Abschätzung für die Ableitungen der Resolvente haben, können wir hier nur folgern, daß die Ableitungen der verallgemeinerten Fouriertransformierten lokal in $L^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, also in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ liegen.

□

Im Spezialfall des Schrödingeroperators haben wir außerdem:

Korollar 3.6
Es seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$ ein Schrödingeroperator, $N \in \mathbb{N}$, $s > 1$, $\tau \geq n/2+s+N$, $w \in L^2_{s+N}(\Omega)$ und es gelten die Voraussetzungen 1.5. Dann ist die verallgemeinerte Fouriertransformierte $(\mathcal{F}_S w)(\xi)$ von w in $\xi \neq 0$ N–mal schwach differenzierbar und die Ableitungen eingeschränkt auf das Gebiet K_a mit $a > 0$ liegen in $L^2_{-t}(K_a)$, falls $t > n/2$.

Beweis: Die schwache Differenzierbarkeit folgt direkt aus Theorem 3.5.

Für die Aussage über die Ableitungen haben wir nach Korollar 2.48

$$\left\| \left(\frac{d}{d|\xi|}\right)^N R_S(|\xi|^2 \pm i0) f \right\|_{-s-N} \leq C|\xi|^{-1} \|f\|_{s+N}$$

für alle $|\xi| \geq a > 0$. Mit dem asymptotischen Verhalten (3.7) aus Lemma 3.3 für die Funktion M folgt, daß $\|\partial_\xi^\alpha \big(R_S(|\xi|^2 \pm i0) M(x,\xi)\big)\|_{-s-N} = \mathcal{O}(1)$ für $|\xi| \to \infty$ ist und somit bezüglich ξ, gemessen auf K_a, in $L^2_{-t}(K_a)$ liegt, falls $t > n/2$ ist. Für den ersten Summanden der verallgemeinerten Fouriertransformation beachte man, daß $L^2(K_a) \subset L^2_{-t}(K_a)$ für $t \geq 0$, also insbesondere auch für $t > n/2$ ist, so daß insgesamt die Ableitungen der verallgemeinerten Fouriertransformierten eingeschränkt auf K_a in $L^2_{-t}(K_a)$ mit $t > n/2$ liegen. □

Ist der Schrödingeroperator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert (Ganzraumfall) oder hat das Potential V endlichen Träger, d.h. es gibt ein $R_a > 0$, so daß $V(x) = 0$, falls $|x| \geq R_a$, also hier $V \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (endliche Störung des Laplaceoperators), so wissen wir nach [Iso82] bzw. [Wil75], daß die zugehörigen verallgemeinerten Fouriertransformationen surjektiv auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ abbilden. In diesen Fällen ist demnach für alle $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die Rücktransformation definiert, die sich (fast überall) in der Form

$$\mathcal{F}^{-1}v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} j(x) v(\xi)\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} R(|\xi|^2 \pm i0) M(\cdot,\xi)(x) v(\xi)\, d\xi \right) \tag{3.9}$$

darstellen läßt. Auch für diese Transformationen lassen sich entsprechende Aussagen über die Differenzierbarkeit im Bildbereich beweisen.

Hierfür benutzen wir die folgende Aussage über die Ableitungen des Integralkerns im zweiten Summanden, die für alle Schrödingeroperatoren der Form $A = \Leftrightarrow\Delta + V$ aus Kapitel 1 gilt:

Lemma 3.7
Es seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$ ein Schrödingeroperator, $s > 1$, $\tau > n/2 + s$, die Voraussetzungen 1.5 erfüllt und die Funktion $M(x,\xi) = \Leftrightarrow(\mathcal{A} \Leftrightarrow |\xi|^2)(j(x)e^{ix\xi}) = \big(\Delta j(x) + 2i\xi \cdot \nabla j(x) \Leftrightarrow j(x)V(x)\big)e^{ix\xi}$ wie zu Beginn dieses Kapitels definiert. Dann gilt:

$$\|\partial_x^\beta\big(R_S(|\xi|^2 \pm i0)M(\cdot,\xi)\big)\|_{L^2_{-s}(\Omega\setminus B_{R+1}(0))} = \mathcal{O}(|\xi|^{|\beta|}) \qquad \textit{für} \quad |\xi| \to \infty.$$

Beweis: Für den Beweis setzen wir $u := R_S(|\xi|^2 \pm i0)M(\cdot,\xi)$. Dann gilt für u im schwachen Sinn: $(A \Leftrightarrow |\xi|^2)u = M(\cdot,\xi)$, es ist also $Au = |\xi|^2 u + M(\cdot,\xi)$. Mit dem PdGA (vgl. Theorem 1.9) und der Asymptotik (3.7) aus Lemma 3.3 für die Funktion M folgt:

$$\|u\|_{-s} \leq \frac{C}{|\xi|}\|M(\cdot,\xi)\|_s = \mathcal{O}(1) \qquad \text{für } |\xi| \to \infty,$$

also die Behauptung für $|\beta| = 0$. Mit [IK84, Theorem1.4i)], das sich genauso für den Außenraumfall zeigen läßt, haben wir die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,2}_{-s}(\Omega)} \leq C\big(|\xi|\|u\|_{-s} + \frac{1}{|\xi|}\|M(\cdot,\xi)\|_{-s}\big) \leq C\big\|M(\cdot,\xi)\|_s.$$

Wir erhalten: $\|\partial_x^\beta u\|_{-s} = \mathcal{O}(|\xi|)$ für $|\beta| \leq 1$ und $|\xi| \to \infty$.

Mit dem Regularitätslemma 1.1 können wir

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2,2}_{-s}(\Omega)} &\leq C\big(\|u\|_{-s} + \|Au\|_{-s}\big)\\ &\leq C\big(\frac{1}{|\xi|}\|M(\cdot,\xi)\|_s + |\xi|^2\|u\|_{-s} + \|M(\cdot,\xi)\|_{-s}\big)\end{aligned}$$

folgern und haben somit $\|\partial_x^\beta u\|_{-s} = \mathcal{O}(|\xi|^2)$ für $|\beta| \leq 2$ und $|\xi| \to \infty$.

Für höhere Ableitungen beachte man, daß mit einer Abschneidefunktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 0$ für $|x| \leq R$ und $\eta = 1$ für $|x| \geq R + 1/2$

$$A\eta\partial_x^\beta u = |\xi|^2\eta\partial_x^\beta u + \eta\partial_x^\beta M(\cdot,\xi) + [A, \eta\partial_x^\beta]u$$

ist. Für $|\beta| \leq 1$ ist die rechte Seite in $L^2_{-s}(\Omega)$ und mit dem Regularitätslemma 1.1 folgt:

$$\begin{aligned}\|\partial_x^\beta u\|_{W^{2,2}_{-s}(\Omega\setminus B_{R+1}(0))} \leq C\big(&\|\partial_x^\beta u\|_{-s} + |\xi|^2\|\partial_x^\beta u\|_{-s} + \|\partial_x^\beta M(\cdot,\xi)\|_{-s}\\ &+ \sum_{|\gamma|=0}^{|\beta|-1} C_{\beta,\gamma}\|(\partial_x^{\beta-\gamma}V)\partial_x^\gamma u\|_{-s}\big),\end{aligned}$$

so daß $\quad \|\partial_x^\beta u\|_{L^2_{-s}(\Omega\setminus B_{R+1}(0))} = \mathcal{O}(|\xi|^3) \quad$ für $|\beta| \leq 3$ und $\;|\xi| \to \infty$.

Sukzessive erhält man auf diese Art die Aussage des Lemmas.

□

Für die Differenzierbarkeit im Bild der Rücktransformationen zeigen wir nun:

Theorem 3.8

Es sei $A = -\Delta + V$ ein Schrödingeroperator im Ganzraumfall oder mit einem Potential V, das endlichen Träger hat. Weiter seien $s > 1$, $\tau > n/2 + s$ und die Voraussetzungen 1.5 erfüllt und es gelte $\partial\Omega \in \mathcal{C}^N$. Dann ist die zugehörige verallgemeinerte Fouriertransformation $\mathcal{F}_S$ surjektiv und für die Rücktransformation gilt:

$$\begin{aligned} v \in L^1_{N+k}(\mathbb{R}^n),\; k \in \mathbb{N}, k \geq n/2 \;&\Longrightarrow\; \mathcal{F}_S^{-1} v \in \mathcal{C}^N(\Omega) \\ v \in L^2_{t+N}(\mathbb{R}^n), \quad t > n/2 \;&\Longrightarrow\; \mathcal{F}_S^{-1} v \in W^{N,2}_{-s}(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis: Die Surjektivität der verallgemeinerten Fouriertransformationen folgt wie bereits erwähnt aus [Iso82] bzw. [Wil75].

Die Abbildungseigenschaften für den ersten Summanden (vgl. Darstellung (3.9)) folgt mit den Theoremen 3.1 und 3.2. Für den zweiten Summanden folgt im ersten Fall mit dem (lokal in einer Umgebung von x angewandten) Sobolevschen Einbettungssatz, Lemma 3.7 und den Voraussetzungen an v die starke Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}_S^{-1} v$. Im zweiten Fall schließen wir aufgrund der Regularität des Randes und mit der Regularitätsaussage aus Theorem 8.13 aus [GT83] und Lemma 3.7, daß

$$\begin{aligned} &\|R(|\xi|^2 \pm i0) M(\cdot,\xi)\|_{W^{N,2}_{-s}(\Omega)} \leq \\ &\qquad \leq C\big(\|R(|\xi|^2 \pm i0) M(\cdot,\xi)\|_{-s} + \|M(x,\xi)\|_s\big) + \mathcal{O}(|\xi|^N) = \mathcal{O}(|\xi|^N) \end{aligned}$$

ist, woraus mit der Bedingung $t > n/2$ die zweite Implikation folgt.

□

Bemerkung 3.9

Auf dem Bild $\mathcal{F}(L^2(\Omega))$ ist auch für die allgemeine Störung des Laplaceoperators aus Kapitel 1 die Rücktransformation mit der Darstellung (3.9) gegeben. Im allgemeinen Fall liegt die Resolvente jedoch nur lokal in $L^2(\mathbb{R}^n)$, also in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, so daß wir für ein $v \in \mathcal{F}(L^2(\Omega))$ noch einen endlichen Träger voraussetzen müssen, um die entsprechenden Differenzierbarkeits- und Abbildungseigenschaften wie in Theorem 3.8 folgern zu können.

3.2 Diskussion eines Beispiels

Für das Beispiel des Laplaceoperators auf dem Äußeren einer Kugel gelingt es, die Differenzierbarkeit im Bild der zugehörigen verallgemeinerten Fouriertransformation mit Hilfe einer anderen Beweistechnik auch in $\xi = 0$ zu zeigen.

In diesem Abschnitt wird der Buchstabe n als Laufindex benutzt und bezeichnet nicht die feste Raumdimension 3.

Als verallgemeinerte Eigenfunktion des Laplaceoperators auf dem Außengebiet $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ muß $\psi(x, \xi)$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$(\Leftrightarrow\Delta \Leftrightarrow|\xi|^2)\psi(\cdot, \xi) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{3.10}$$

$$\psi(x, \xi)\Big|_{|x|=R} = 0, \tag{3.11}$$

wobei natürlich $\psi(x, \xi) \not\equiv 0$ sein soll.

Eine Lösung findet man durch klassisches Vorgehen bei der Beugung einer ebenen Welle an einer Kugel (Superposition der einlaufenden Welle und der reflektierten Welle) in Form einer Reihenentwicklung nach Legendrepolynomen (vgl. [TS59, Seite 498 ff] mit $n = 1$ und $k_1 = 0$ dort). So ist in Polarkoordinaten $x = (r, \vartheta, \varphi), \xi = (\varrho, \vartheta_0, \varphi_0)$ die Lösung gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(x, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}(e^{ix\xi} + \tilde{\psi}_+(x, \xi)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n\Big[j_n(\varrho r) \Leftrightarrow \frac{j_n(\varrho R)}{h_n^{(1)}(\varrho R)}h_n^{(2)}(\varrho r)\Big] \times \\
&\quad \times \sum_{m=0}^{n}(2 \Leftrightarrow\delta_{m0})\frac{(n \Leftrightarrow m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\vartheta)P_n^m(\cos\vartheta_0)\cos m(\varphi \Leftrightarrow\varphi_0)\Big).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Hierbei bezeichnen $j_n(z)$ bzw. $h_n^{(2)}(z)$ die sphärischen Bessel- bzw. Hankelfunktionen zweiter Art, die für $\nu \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$z^2\zeta_\nu''(z) + 2z\zeta_\nu'(z) + \{z^2 \Leftrightarrow\nu(\nu+1)\}\zeta_\nu(z) = 0$$

genügen und sich wie folgt aus den „normalen“ Bessel- bzw. Hankelfunktionen berechnen:

$$j_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z) \qquad \text{bzw.} \qquad h_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(z).$$

Die reflektierte Welle $\tilde{\psi}_+(x, \xi)$ verhält sich im Unendlichen wie ein auslaufende Kugelwelle, d.h. sie erfüllt die Strahlungsbedingungen:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_+(\cdot,\xi) &= \mathcal{O}(\frac{1}{r}) \quad \text{für } r \to \infty \\ (\frac{\partial\tilde{\psi}_+(\cdot,\xi)}{\partial r} \Leftrightarrow i|\xi|\tilde{\psi}_+(\cdot,\xi)) &= o(\frac{1}{r}) \quad \text{für } r \to \infty. \end{aligned}$$

Damit erfüllt sie aber auch die in Definition 1.2 geforderte (Aus-)Strahlungsbedingung. Wählt man anstelle der sphärischen Hankelfunktionen erster Art, diejenigen zweiter Art, so erhält man die entsprechende einstrahlende Lösung $\tilde{\psi}_-(x,\xi)$.

Für $\varrho > 0$ stimmt die Funktion $\psi(x,\xi)$ aus Eindeutigkeitsgründen mit der bisherigen, durch Störungsargumente berechneten, Lösung überein: Betrachten wir die Differenz der obigen verallgemeinerten Eigenfunktion des Operators und derjenigen, die wir durch die übliche Abschneidetechnik und Resolventenbildung erhalten:

$$\begin{aligned} u(x,\xi) &:= \tilde{\psi}(x,\xi) \Leftrightarrow \psi(x,\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}(e^{ix\xi} + \tilde{\psi}_+(x,\xi)) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}(j(x)e^{ix\xi} + \psi_+(x,\xi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}[(1 \Leftrightarrow j(x))e^{ix\xi} + \tilde{\psi}_+(x,\xi) \Leftrightarrow R(|\xi|^2 + i0)M(\cdot,\xi)(x)]. \end{aligned}$$

Es genügt $u(x,\xi)$ den Bedingungen (3.10) und (3.11) und auch der Strahlungsbedingung, da $(1 \Leftrightarrow j(x))$ kompakten Träger hat. Mit der Eindeutigkeit aus dem Prinzip der Grenzabsorption (Theorem 1.3) folgt dann die behauptete Gleichheit der beiden Funktionen.

Interessiert sind wir nun an der Differenzierbarkeit von $\tilde{\psi}(x,\xi)$ nach $\varrho = |\xi|$, insbesondere für $\varrho \to 0$.

Der erste Summand ist unkritisch, da er bekanntermaßen unendlich oft differenzierbar in allen $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist. Zur Untersuchung des zweiten zeigt man mit den Darstellungen halbzahliger Hankelfunktionen

$$H^{(1,2)}_{n+\frac{1}{2}}(z) = \Big(\frac{2}{\pi z}\Big)^{1/2} i^{\mp(n+1)} e^{\pm iz} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\mp 2iz)^k} \frac{(n+k)!}{k!(n \Leftrightarrow k)!}$$

(vgl. [Sch63, S.75, wo es $i^{\mp(k+1)}$ anstelle von $i^{\mp k}$ heißen muß]), daß

$$\frac{h_n^{(1)}(\varrho r)}{h_n^{(1)}(\varrho R)} = \Big(\frac{R}{r}\Big)^{n+1} e^{i\varrho(r-R)} \frac{p_n(\varrho r)}{p_n(\varrho R)}$$

ist, wobei

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n \Leftrightarrow k)!k!} \frac{1}{(\Leftrightarrow 2i)^k} z^{n-k}$$

komplexe Polynome n-ten Grades in z sind. Damit folgt:

$$\tilde{\psi}(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n\Big[j_n(\varrho r) - \Big(\frac{R}{r}\Big)^{n+1} e^{i\varrho(r-R)}\frac{p_n(\varrho r)}{p_n(\varrho R)} j_n(\varrho R)\Big] \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{n}(2-\delta_{m0})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\vartheta)P_n^m(\cos\vartheta_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)\Big). \quad (3.13)$$

Die sphärischen Besselfunktionen sind regulär für $\varrho \to 0$. Wir zeigen nun, daß die Polynome p_n keine Nullstellen in einer festen, d.h. von n unabhängigen, Umgebung von Null haben und schließen so von der Holomorphie der Koeffizienten in einer Umgebung von $|\xi| = 0$ auf die von $\tilde{\psi}(x,\xi)$.

Lemma 3.10
Die Nullstellen der Polynome p_n liegen außerhalb der Kugel mit Radius $\frac{1}{e-1}$ um den Nullpunkt in der komplexen Ebene.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} p_n(z) &= i^n \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(n-k)!k!}\frac{1}{2^k}(-iz)^{n-k} = i^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!}\frac{1}{2^{n-k}}(-iz)^k \\ &=: i^n q_n(-iz). \end{aligned}$$

Dabei sind die q_n Polynome n-ten Grades in $-iz$ mit reellen, ja sogar positiven Koeffizienten. Weiterhin ist $-iz$ genau dann eine Nullstelle von q_n, wenn z eine Nullstelle von p_n ist und es gilt $|-iz| = |z|$. Es genügt also, eine betragsmäßig untere Schranke für die Nullstellen der q_n unabhängig von n zu finden.
Sei $-iz$ Nullstelle von q_n, dann ist:

$$\begin{aligned} 0 = q_n(-iz) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(-iz)^k, \qquad a_k = \frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!}\frac{1}{2^{n-k}} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(-iz)^k \\ \Longrightarrow\ a_0 &= -\sum_{k=1}^{n} a_k(-iz)^k \le \sum_{k=1}^{n} a_k|z|^k \le \max_{k=1,\dots,n}|z|^k\sum_{k=1}^{n}a_k \\ \Longrightarrow\ \frac{a_0}{\sum_{k=1}^{n}a_k} &\le \max_{k=1,\dots,n}|z|^k = \begin{cases} |z|, & |z| \le 1 \\ |z|^n, & |z| \ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Da wir nach einer unteren Schranke für $|z|$ suchen, ist der zweite Fall uninteressant und wir betrachten im folgenden lediglich den ersten.

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{a_0} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!}\frac{1}{2^{n-k}}}{\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{2^n}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n \Leftrightarrow k)!n!}{(n \Leftrightarrow k)!k!(2n)!}2^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n \Leftrightarrow 1)\cdot \ldots \cdot (n \Leftrightarrow k+1)\cdot \overbrace{2\cdot \ldots \cdot 2}^{k\text{-mal}}}{(2n)(2n \Leftrightarrow 1)\cdot \ldots \cdot (2n \Leftrightarrow k+1)\cdot k(k \Leftrightarrow 1)\cdot \ldots \cdot 1} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad \text{da} \quad \frac{2(n \Leftrightarrow l)}{2n \Leftrightarrow l} \le 1 \quad \forall\, l \ge 0 \\
&\le e \Leftrightarrow 1 \quad \forall\, n.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad |z| \ge \frac{a_0}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \ge \frac{1}{e \Leftrightarrow 1}.$$

□

Mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit können wir von schwacher auf starke Holomorphie schließen, es vertauschen also Grenzwertbildung und Reihensummation.

Also gilt

$$\tilde{\psi}(x,\xi) \quad \text{ist unendlich oft radial differenzierbar in } \varrho = |\xi| = 0.$$

Bezüglich x ist $\tilde{\psi}(x,\xi)$ für jedes ξ eine L^2_{loc}- Funktion. Im Vergleich zum Fall $\varrho = |\xi| > 0$ und im Hinblick auf die Anwendung in der verallgemeinerten Fouriertransformation stellt sich nun die Frage, in welchem gewichteten Raum $L^2_s(\Omega)$ die Funktion $\tilde{\psi}_+(x,\xi)$ und deren Ableitungen nach $\varrho = |\xi|$ für $|\xi| = 0$ liegen.

Zur expliziten Berechnung von $\partial^l_\varrho \tilde{\psi}_+(x,\xi)|_{\varrho=|\xi|=0}$, $l \ge 0$ beachte man, daß

$$j_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^k (\frac{z}{2})^{n+2k}}{k!,\ (k+n+3/2)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d^l}{dz^l} j_n(z)\Big|_{z=0} = \begin{cases} 0, & n > l \text{ oder } \ (n \Leftrightarrow l) \text{ ungerade} \\ (\Leftrightarrow 1)^{\frac{l-n}{2}} \frac{l!2^n(\frac{l+n}{2})!}{(l+n+1)!(\frac{l-n}{2})!}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$p_n(\varrho r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n \Leftrightarrow k)!k!} \frac{1}{(\Leftrightarrow 2i)^k} (\varrho r)^{n-k}$$

$$\Longrightarrow \qquad \partial_\varrho^l p_n(\varrho r) = \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(n+k)!}{(n-k-l)!k!} \frac{r^{n-k}}{(-2i)^k} \varrho^{n-k-l}$$

$$\Longrightarrow \qquad \partial_\varrho^l p_n(\varrho r)\Big|_{\varrho=0} = \frac{(n+(n-l))!}{(n-(n-l)-l)!(n-l)!} \frac{r^{n-(n-l)}}{(-2i)^{n-l}} = \frac{(2n-l)!}{(n-l)!} \frac{r^l}{(-2i)^{n-l}}$$
$$= \mathcal{O}(r^l) \quad \text{für } r \to \infty.$$

Somit ergibt sich für den Radialanteil der Ableitungen von $\tilde{\psi}_+$:

$$\partial_\varrho^l \tilde{\psi}_+(x,\xi) = -\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n \partial_\varrho^l \Big[\big(\frac{R}{r}\big)^{n+1} e^{i\varrho(r-R)} \frac{p_n(\varrho r)}{p_n(\varrho R)} j_n(\varrho R)\Big] \sum_{m=0}^{n}(\dots)$$

$$\partial_\varrho^l[\dots] = \big(\frac{R}{r}\big)^{n+1} \sum_{l_1=0}^{l} \tbinom{l}{l_1} (-ir)^{l-l_1} e^{i\varrho(r-R)} \sum_{k=0}^{l_1} \tbinom{l_1}{k} \partial_\varrho^k j_n(\varrho R) \partial_\varrho^{l_1-k} \Big(\frac{p_n(\varrho r)}{p_n(\varrho R)}\Big)$$

$$\Longrightarrow \; \partial_\varrho^l[\dots]\Big|_{\varrho=0} = \mathcal{O}(r^{l-1}) \quad \text{für } r \to \infty,$$

denn der Vorfaktor $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ liefert mindestens einen Faktor der Ordnung $\frac{1}{r}$, und der zweite ist offensichtlich von der Ordnung $\mathcal{O}(r^{l-l_1})$ für $r \to \infty$. Im dritten tritt für $k=0$ die höchste Ableitung von $p_n(\varrho r)$ und damit die höchste Potenz in r auf, für welche wir bereits $\mathcal{O}(r^{l_1})$ berechnet hatten.

Da die Reihe sich bei $\varrho = 0$ wegen des Verhaltens der Ableitungen von j_n auf endlich viele Summanden reduziert, gilt für $l \in \mathbb{N}_0$:

$$\partial_\varrho^l \tilde{\psi}_+(x,\xi)\Big|_{\varrho=0} = \mathcal{O}(r^{l-1}) \quad \text{für } r \to \infty.$$

Damit ist

$$\partial_\varrho^l \tilde{\psi}_+(\cdot,\xi)\Big|_{\varrho=0} \in L^2_{-s}(\Omega) \iff l-1-s+3/2 < 0 \iff s > l + 1/2,$$

was mit dem Fall $\varrho > 0$ überein stimmt.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts fassen wir in dem folgenden Theorem zusammen:

Theorem 3.11
Es seien $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ und $\mathcal{F}_1$ die verallgemeinerte Fouriertransformation zum Laplaceoperator $-\Delta$ auf Ω. Weiter seien $N \in \mathbb{N}$ und $s > 1$, dann gilt:

$$w \in L^1_N(\Omega) \cap L^2_{s+N}(\Omega) \Longrightarrow \mathcal{F}_1 w \in \{v \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \,|\, \exists \partial^l_{|\xi|} v\big|_{|\xi|=0}, l=1,\dots,N\}$$

und für alle $t > 3/2, a > 0$:

$$w \in L^2_{s+N}(\Omega) \Longrightarrow \mathcal{F}_1 w \in \{v \in W^{N,2}_{-t}(K_a) \,|\, \exists \partial^l_{|\xi|} v\big|_{|\xi|=0}, l=1,\dots,N\}.$$

Für die Inverse gilt:

$$\begin{aligned} v \in L^1_{N+2}(\mathbb{R}^3) &\implies \mathcal{F}_1^{-1} v \in \mathcal{C}^N(\Omega) \\ v \in L^2_{t+N}(\mathbb{R}^3),\ t > 3/2 &\implies \mathcal{F}_1^{-1} v \in W^{N,2}_{-s}(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis: Wir hatten in diesem Abschnitt gezeigt, daß der Kern der verallgemeinerten Fouriertransformation unter den gleichen Bedingung wie für $\varrho = |\xi| > 0$ auch in $\varrho = |\xi| = 0$ (radial) differenzierbar ist. Somit können wir in den Theoremen 3.4 und 3.5 bzw. Korollar 3.6 für dieses Beispiel den Fall $\varrho = |\xi| = 0$ mit einschließen. Insbesondere ist $\Leftrightarrow\Delta$ auch ein Schrödingeroperator, so daß mit Korollar 3.6 für $t > 3/2$

$$\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}_1 w \in L^2_{-t}(K_a), \quad \text{sowie} \quad \partial^l_{|\xi|} \mathcal{F}_1 w \in L^2_{-t}(\mathbb{R}^n),\ l = 1, \ldots, N$$

folgt.

Die Aussagen über die Inverse folgen mit Theorem 3.8.

□

Bemerkung 3.12
Eigentlich gilt für das Beispiel $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B_{R+\delta}(0)$ für jedes $\delta > 0$, so daß man bei der Anwendung der Ergebnisse für den Schrödingeroperator immer mit $R + \delta$ anstelle von R argumentieren muß.

Dies wird auch im Weiteren so angewandt.

3.3 Abbildungseigenschaften

Mit den in Abschnitt 3.1 gezeigten Aussagen über die Differenzierbarkeit der verallgemeinerten Fouriertransformation, können wir für $N \in \mathbb{N}_0$, $s > 1/2$ und $\tau \geq n/2 + s + N$ die Abbildungseigenschaften

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} : L^1_N(\Omega) \cap L^2_{s+N}(\Omega) \to \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ \text{und} \qquad &\mathcal{F} : L^2_{s+N}(\Omega) \to W^{N,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

folgern.

Für die klassische Fouriertransformation folgt aus der Differenzierbarkeit der Fouriertransformierten mit Theorem 3.2, daß die Ausgangsfunktion in einem positiv gewichteten Raum liegt. Entsprechend zeigen wir in diesem Abschnitt, daß die Urbilder gewisser differenzierbarer Funktionen unter der verallgemeinerten Fouriertransformation in positiv gewichteten Räumen liegen. Hierfür werden wir die Regularitätsaussage des folgenden Lemmas für die Resolvente angewandt auf die spezielle Funktion $M(x, \xi)$ benötigen:

Lemma 3.13
Es seien $\varepsilon > 0$, $s \geq 0$ und $\psi^\varepsilon_\pm(x,\xi) := R(|\xi|^2 \pm i\varepsilon)M(\cdot,\xi)(x)$. Dann ist mit $M(\cdot,\xi) \in L^2_s(\Omega)$ auch $\psi^\varepsilon_\pm(\cdot,\xi) \in W^{2,2}_s(\Omega)$.

Beweis: Da $|\xi|^2 \pm i\varepsilon$ in der Resolventenmenge des Operators A liegt, wissen wir bereits, daß $\psi^\varepsilon_\pm(\cdot,\xi) \in W^{2,2}(\Omega)$ ist. Somit folgt die Behauptung durch $\lceil 2s \rceil$–maliges Anwenden von Lemma 1.1, wobei $\lceil 2s \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer gleich $2s$ bezeichnet.

□

In den Spezialfällen des Laplaceoperators auf einem Außengebiet und des Schrödingeroperators im Ganzraumfall mit einem Potential V, das endlichen Träger hat, ist das anschließende Theorem in [Rac95] gezeigt worden.

Theorem 3.14
Es seien $s > 1/2$, $N \in \mathbb{N}_0$ und $\tau > n/2 + s + N$. Dann gilt für $w \in L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)$:

$$\mathcal{F}w \in \mathcal{C}^N_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \implies w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap L^2_{N-s}(\Omega)$$
$$\mathcal{F}w \in \{v \in W^{N,2}(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathit{supp}\, v \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \implies w \in L^2_{N-s}(\Omega).$$

Beweis: OBdA führen wir den Beweis für $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+$.

Mit Hilfe der Formel (3.3) bzw. (3.9) für die Fourierrücktransformation erhalten wir mit $\hat{w} := \mathcal{F}_+ w$ (fast überall) für w die Darstellung

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [j(x)e^{ix\xi} + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \psi^\varepsilon_+(x,\xi)]\hat{w}(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} j(x)e^{ix\xi}\hat{w}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \searrow 0} [R(|\xi|^2 + i\varepsilon)M(\cdot,\xi)(x)]\hat{w}(\xi)\, d\xi \Big) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Für die Regularität in der ersten Implikation beachten wir, daß mit $e^{ix\xi}$, $j(x)$ und $M(x,\xi)$ auch $\psi_+(x,\xi)$ in x unendlich oft differenzierbar ist. Wegen des kompakten Trägers von $\hat{w}$ ist dann auch $w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Um zu zeigen, daß $w \in L^2_{N-s}(\Omega)$ ist, multiplizieren wir die Darstellung (3.14) mit $x_l^N, l \in \{1, \ldots, n\}$ und einer Abschneidefunktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, für die $0 \leq \eta \leq 1$,$\mathrm{supp}\,\eta \subset \{x \,|\, |x| \geq R\}$ und $\eta \equiv 1$ auf $\{x \,|\, |x| \geq R+1\}$ gilt. (Da $\mathbb{R}^n \setminus \Omega \subset B_R(0)$ ist, liegt der Träger von η in Ω und es ist insbesondere $\eta = 0$ in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$.) Mit den bisher gewonnen Ergebnissen zeigen wir dann, daß die rechte Seite (und somit auch die linke) für $\varepsilon \searrow 0$ in $L^2_{-s}(\Omega)$ konvergiert.

Wir führen Beweis zunächst für den Fall $N = 1$ aus, stellen dann den für $N = 2$ in kürzerer Form dar und fassen abschließend das Vorgehen und die immer wieder auftretenden Argumente für beliebiges N zusammen.

<u>Der Fall $N = 1$:</u> Da die Fouriertransformierte $\hat{w}$ nach Voraussetzung kompakten Träger auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hat, gibt es $0 < a < b < \infty$, so daß $\operatorname{supp} \hat{w} \subset K_{ab}$. Somit erhalten wir für die mit η und x_l multiplizierten Gleichung (3.14):

$$
\begin{aligned}
x_l\eta(x)w(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} x_l\eta(x)j(x)e^{ix\xi}\hat{w}(\xi)\,d\xi + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} x_l\eta(x)\psi_+(x,\xi)\hat{w}(\xi)\,d\xi \\
&= \tfrac{i}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{K_{ab}} e^{ix\xi}\eta(x)\partial_{\xi_l}\hat{w}(\xi)\,d\xi + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{K_{ab}} \lim_{\varepsilon\searrow 0}[x_l\eta(x)\psi_+^\varepsilon(x,\xi)]\hat{w}(\xi)\,d\xi. \quad (3.15)
\end{aligned}
$$

Mit den Eigenschaften der klassischen Fouriertransformation (vgl. Theorem 3.2) liegt der erste Term auf der rechten Seite in $L^2(\Omega)$ und somit auch in $L^2_{-s}(\Omega)$.

Zur Behandlung des zweiten Terms stellen wir den Integralkern $x_l\eta\psi_+^\varepsilon(\cdot,\xi)$ in geeigneter Weise als Resolvente dar und schließen dann mit den Resultaten aus dem letzten Kapitel auf die Konvergenz in $L^2_{-s}(\Omega)$ für $\varepsilon \searrow 0$.

Der Übersichtlichkeit halber lassen wir im folgenden die Argumente weg und schreiben abkürzend ψ_+^ε und M für $\psi_+^\varepsilon(x,\xi)$ und $M(x,\xi)$, sowie a_{jk}, a_0 bzw. η für $a_{jk}(x), a_0(x)$ bzw. $\eta(x)$ und $\hat{w}$ für $\hat{w}(\xi)$.

Für die Darstellung von $x_l\eta\psi_+^\varepsilon$ als Resolvente betrachten wir

$$
\begin{aligned}
(A \Leftrightarrow |\xi|^2 \Leftrightarrow i\varepsilon)x_l\eta\psi_+^\varepsilon &= x_l\eta M \Leftrightarrow 2a_{jk}\big(\partial_j(x_l\eta)\big)\partial_k\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jk}\partial_k(x_l\eta))\psi_+^\varepsilon \\
&= x_l\eta M \Leftrightarrow 2a_{lk}\eta\partial_k\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2a_{jk}x_l(\partial_j\eta)\partial_k\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jl})\eta\psi_+^\varepsilon \\
&\quad \Leftrightarrow 2a_{jl}(\partial_j\eta)\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow x_l(\partial_j a_{jk}\partial_k\eta)\psi_+^\varepsilon \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(A \Leftrightarrow |\xi|^2 \Leftrightarrow i\varepsilon)\eta\partial_k\psi_+^\varepsilon &= \eta\partial_k M + [A,\eta]\partial_k\psi_+^\varepsilon + \eta[A,\partial_k]\psi_+^\varepsilon \\
&= \eta\partial_k M \Leftrightarrow 2a_{jm}(\partial_m\eta)\partial_j\partial_k\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jm}\partial_m\eta)\partial_k\psi_+^\varepsilon \\
&\quad + \eta\partial_j(\partial_k a_{jm})\partial_m\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow \eta(\partial_k a_0)\psi_+^\varepsilon. \quad (3.17)
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Voraussetzung $\tau > n/2 + s + 1$ an die Abklingrate ist nach Lemma 3.3 $M(\cdot,\xi) \in L^2_{s+1}(\Omega)$. Nach Lemma 3.13 ist dann auch $\psi_+(\cdot,\xi) \in L^2_{s+1}(\Omega)$, womit $x_l\eta\psi_+^\varepsilon$ im Definitionsbereich des Operators A liegt. Wegen der Abschneidefunktion η, die für Nullrandwerte auf $\partial\Omega$ sorgt, gilt dies auch für $\eta\partial_k\psi_+^\varepsilon$, so daß wir mit der Anwendung der Resolvente insgesamt auf die Darstellung

$$
\begin{aligned}
x_l\eta\psi_+^\varepsilon = R(|\xi|^2 + i\varepsilon)\big[&x_l\eta M \Leftrightarrow 2a_{lk}R(|\xi|^2 + i\varepsilon)[\eta\partial_k M + \eta\partial_j(\partial_k a_{jm})\partial_m\psi_+^\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \eta(\partial_k a_0)\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2a_{jm}(\partial_m\eta)\partial_j\partial_k\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jm}\partial_m\eta)\partial_k\psi_+^\varepsilon] \\
&\Leftrightarrow 2a_{jk}x_l(\partial_j\eta)\partial_k\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jl})\eta\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2a_{jl}(\partial_j\eta)\psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow x_l(\partial_j a_{jk}\partial_k\eta)\psi_+^\varepsilon\big]
\end{aligned}
$$

kommen. Eingesetzt in den zweiten Summanden von (3.15) bedeutet dies:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\searrow 0} [x_l \eta \psi_+^\varepsilon] \hat{w}\, d\xi = \\
&= \int_{K_{ab}} \lim_{\varepsilon\searrow 0} \Big[R(|\xi|^2 + i\varepsilon) x_l \eta M \hat{w} \Leftrightarrow 2R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{lk} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \eta \partial_k M \hat{w} \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow 2R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{lk} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \eta \partial_j (\partial_k a_{jm}) \partial_m \psi_+^\varepsilon \hat{w} \\
&\qquad\qquad + 2R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{lk} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \eta (\partial_k a_0) \psi_+^\varepsilon \hat{w} \\
&\qquad\qquad + 4R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{lk} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{jm} (\partial_m \eta) \partial_j \partial_k \psi_+^\varepsilon \hat{w} \\
&\qquad\qquad + 2R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{lk} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) (\partial_j a_{jm} \partial_m \eta) \partial_k \psi_+^\varepsilon \hat{w} \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow 2R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{jk} x_l (\partial_j \eta) \partial_k \psi_+^\varepsilon \hat{w} \Leftrightarrow R(|\xi|^2 + i\varepsilon)(\partial_j a_{jl}) \eta \psi_+^\varepsilon \hat{w} \\
&\qquad \Leftrightarrow 2R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{jl} (\partial_j \eta) \psi_+^\varepsilon \hat{w} \Leftrightarrow R(|\xi|^2 + i\varepsilon) x_l (\partial_j a_{jk} \partial_k \eta) \psi_+^\varepsilon \hat{w} \Big] \, d\xi \\
&=: \quad \mathrm{I1} + \mathrm{I2} + \mathrm{I3} + \mathrm{I4} + \mathrm{I5} + \mathrm{I6} + \mathrm{I7} + \mathrm{I8} + \mathrm{I9} + \mathrm{I10}
\end{aligned}
$$

Mit $M(\cdot,\xi) \in L^2_{s+1}(\Omega)$ (s.o.) ist $x_l \eta M(\cdot,\xi) \in L^2_s(\Omega)$, und somit konvergiert I1 in $L^2_{-s}(\Omega)$. Ebenso ist die Konvergenz der Terme I7, I9 und I10 klar, da die Resolvente, wegen der Ableitungen der Abschneidefunktion η, auf Funktionen mit kompaktem Träger angewandt wird. Für den Term I8 wissen wir, daß ψ_+^ε in $L^2_{-s}(\Omega)$ konvergiert und $(\partial_j a_{jl}) = \mathcal{O}(|x|^{-\tau-1})$ ist. Das heißt die Resolvente wird hier auf eine Funktion aus $L^2_{-s+\tau+1}(\Omega)$ angewandt, was nach den Voraussetzungen an τ für $s < n/2 + 2$ eine Teilmenge von $L^2_s(\Omega)$ ist, womit die Konvergenz von I8 in $L^2_{-s}(\Omega)$ folgt.

Um die Konvergenz der übrigen Terme zu zeigen, addieren wir geeignete „Nullen“ und weisen dann die Konvergenz der entstehenden Summanden nach. Dies führen wir exemplarisch für den schwierigsten Term I3 durch; die Konvergenz von I2 und I4-I6 folgt dann in entsprechender Weise.

Wir schreiben I3 in der Form

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2 \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{K_{ab}} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) a_{lk} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \eta \partial_j (\partial_k a_{jm}) \partial_m \psi_+^\varepsilon \hat{w}\, d\xi = \\
&= \Leftrightarrow 2 \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{K_{ab}} R(|\xi|^2 + i\varepsilon)(a_{lk} \Leftrightarrow \delta_{lk}) R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \eta \partial_j (\partial_k a_{jm}) \partial_m \psi_+^\varepsilon \hat{w}\, d\xi \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow 2 \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{K_{ab}} \big(R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \big)^2 \eta \partial_j (\partial_l a_{jm}) \partial_m \psi_+^\varepsilon \hat{w}\, d\xi
\end{aligned}
$$

Aus dem Regularitätslemma 1.1 folgt, daß mit ψ_+^ε auch die ersten beiden Ableitungen, d.h. hier $\partial_m \psi_+^\varepsilon$ und $\partial_j \partial_m \psi_+^\varepsilon$, $j, m = 1, \ldots, n$ in $L^2_{-s}(\Omega)$ konvergieren. Also haben wir im ersten Summanden mit dem Faktor $(\partial_k a_{jm}) = \mathcal{O}(|x|^{-\tau-1})$ dann insgesamt Konvergenz in $L^2_{-s+\tau+1}(\Omega) \subset L^2_s(\Omega)$ für $s < n/2 + 2$. Wir können also auf $\eta \partial_j (\partial_k a_{jm}) \partial_m \psi_+^\varepsilon$ die Resolvente anwenden und wissen, daß dies dann in $L^2_{-s}(\Omega)$ konvergiert. Der Faktor $(a_{lk} - \delta_{lk}) = \mathcal{O}(|x|^{-\tau})$ sorgt dann für Konvergenz in $L^2_{-s+\tau}(\Omega) \subset L^2_s(\Omega)$ für $s < n/2+1$. Somit konvergiert schließlich auch die letzte Anwendung der Resolvente in $L^2_{-s}(\Omega)$.

Für den zweiten Term müssen wir etwas anders argumentieren, denn auch wenn es gelingt zu zeigen, daß die Funktion, auf die $\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2$ angewandt wird, in $L^2_{s+1}(\Omega)$ liegt, so können wir mit Theorem 2.42 lediglich auf Konvergenz in $L^2_{-s-1}(\Omega)$ schließen. Wir nutzen daher die Beziehung

$$\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 = \big(\nabla_\xi R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)\frac{\xi}{2|\xi|^2}$$

und die Kompaktheit des Trägers von $\hat{w}$ aus, um ohne Randwerte partiell zu integrieren. Dabei müssen wir jedoch beachten, daß $\psi^\varepsilon_+ = \psi^\varepsilon_+(x,\xi) = R(|\xi|^2+i\varepsilon)M(x,\xi)$ insbesondere auch von ξ abhängt.

$$\begin{aligned}
&-2\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{K_{ab}} \big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 \eta\partial_j(\partial_l a_{jm})\partial_m\psi^\varepsilon_+\hat{w}\,d\xi = \\
&= -2\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{K_{ab}} \big(\nabla_\xi R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)\frac{\xi}{2|\xi|^2}\eta\partial_j(\partial_l a_{jm})\partial_m R(|\xi|^2+i\varepsilon)M\hat{w}\,d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{K_{ab}} R(|\xi|^2+i\varepsilon)\nabla'_\xi\Big(\frac{\xi}{|\xi|^2}\Big)\eta\partial_j(\partial_l a_{jm})\partial_m R(|\xi|^2+i\varepsilon)M\hat{w}\,d\xi \\
&\quad + 2\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{K_{ab}} R(|\xi|^2+i\varepsilon)\eta\partial_j(\partial_l a_{jm})\partial_m\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 M\hat{w}\,d\xi \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{K_{ab}} R(|\xi|^2+i\varepsilon)\frac{\xi}{|\xi|^2}\eta\partial_j(\partial_l a_{jm})\partial_m R(|\xi|^2+i\varepsilon)(\nabla_\xi M)\hat{w}\,d\xi \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{K_{ab}} R(|\xi|^2+i\varepsilon)\frac{\xi}{|\xi|^2}\eta\partial_j(\partial_l a_{jm})\partial_m R(|\xi|^2+i\varepsilon)M\nabla_\xi\hat{w}\,d\xi.
\end{aligned}$$

Den ersten Term und die beiden letzten Terme können wir aufgrund der Konvergenz in $W^{2,2}_{-s}(\Omega)$ und da $\partial_{\xi_l}M(\cdot,\xi) \in L^2_s(\Omega)$ (vgl. Lemma 3.3) ist, mit den gleichen Argumenten wie den Term I8 behandeln.

Mit den Voraussetzungen an die Abklingrate τ ist $M(\cdot,\xi) \in L^2_{s+1}(\Omega)$, so daß nach Theorem 2.39 $\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 M(\cdot,\xi)$ in $L^2_{-s-1}(\Omega)$ konvergiert. Wegen

$$A\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 M = R(|\xi|^2+i\varepsilon)M + (|\xi|^2+i\varepsilon)\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 M$$

konvergieren mit Lemma 1.1 auch die ersten und zweiten Ableitungen von $\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 M$ in $L^2_{-s-1}(\Omega)$. Mit dem geforderten Abklingverhalten der Koeffizienten konvergiert dann $\eta\partial_j(\partial_l a_{jm})\partial_m\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 M$ in $L^2_{-s-1+\tau+1}(\Omega) = L^2_{-s+\tau}(\Omega)$. Dies ist für $s < n/2+1$ wieder eine Teilmenge von $L^2_s(\Omega)$, womit schließlich auch die Konvergenz des zweiten Terms, und so auch die von I3 in $L^2_{-s}(\Omega)$ folgt.

Wir haben also insgesamt gezeigt, daß auch der zweite Summand aus der Darstellung (3.15) in $L^2_{-s}(\Omega)$ liegt und können nun $x_l \eta w \in L^2_{-s}(\Omega)$, $l = 1, \ldots, n$, und somit

$$w \in L^2_{1-s}(\Omega)$$

folgern, also die Aussage des Theorems im Falle $N = 1$.

<u>Der Fall $N = 2$:</u> In diesem Fall multiplizieren wir die Darstellung (3.14) mit x_l^2, $l \in \{1, \ldots, n\}$, und η:

$$\begin{aligned} x_l^2 \eta w &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} x_l^2 \eta j e^{ix\xi} \hat{w}\, d\xi + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} x_l^2 \eta \psi_+ \hat{w}\, d\xi \\ &= \Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{K_{ab}} e^{ix\xi} \eta \partial^2_{\xi_l} \hat{w}\, d\xi + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{K_{ab}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} [x_l^2 \eta \psi_+^\varepsilon] \hat{w}\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Wiederum folgt mit Argumenten aus der Theorie der klassischen Fourier-transformation, daß der erste Term in $L^2(\Omega)$ liegt, also insbesondere auch in $L^2_{-s}(\Omega)$.

Für die Behandlung des zweiten Summanden stellen wir den Integralkern wieder geeignet dar und betrachten dafür:

$$\begin{aligned} (A \Leftrightarrow |\xi|^2 \Leftrightarrow i\varepsilon) x_l^2 \eta \psi_+^\varepsilon &= x_l^2 \eta M \Leftrightarrow 4 a_{lk} x_l \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2 a_{jk} x_l^2 (\partial_j \eta) \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2 a_{ll} \eta \psi_+^\varepsilon \\ &\quad \Leftrightarrow 2 (\partial_j a_{jl}) x_l \eta \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jk} \partial_k \eta) x_l^2 \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 4 a_{jl} x_l (\partial_j \eta) \psi_+^\varepsilon \\ \Longrightarrow \quad x_l^2 \eta \psi_+^\varepsilon &= R(|\xi|^2 + i\varepsilon)[\ldots] \\ &= \text{ t1 + t2 + t3 + t4 + t5 + t6 +t7} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Da wir nun $\tau > n/2 + s + 2$ voraussetzen, wird der hier, im Vergleich zum Fall $N = 1$, zusätzliche Faktor x_l (vgl. Gleichung (3.16)) „ausgeglichen", so daß es keine anderen Bedingungen an s als die bisher aufgetretenen geben wird.

Die einzelnen Terme werden mit den schon aus dem Fall $N = 1$ bekannten Argumenten behandelt:

Der Term t1 konvergiert in $L^2_{-s}(\Omega)$, da $x_l^2 \eta M \in L^2_s(\Omega)$ ist, die Terme t3, t6 und t7 wegen des kompakten Trägers in x und t5 wegen der Abklingrate von $(\partial_j a_{jl})$. Den Term t2 behandelt man wie oben I3, indem man die Summanden

$$\pm 4 R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \delta_{lk} x_l \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon$$

ergänzt. Während man für den Term $\Leftrightarrow 4R(|\xi|^2 + i\varepsilon)(a_{lk} \Leftrightarrow \delta_{lk}) x_l \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon$ wieder mit Hilfe der Abklingraten argumentiert, leitet man für die Behandlung von $\Leftrightarrow 4R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \delta_{lk} x_l \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon$ zunächst die folgende Darstellung her:

$$(A \Leftrightarrow |\xi|^2 \Leftrightarrow i\varepsilon) x_l \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon = x_l (A \Leftrightarrow |\xi|^2 \Leftrightarrow i\varepsilon) \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2 a_{jl} \eta \partial_j \partial_k \psi_+^\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow 2 a_{jl} (\partial_j \eta) \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jl}) \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon .$$

Dies führt mit Gleichung (3.17) zu

$$\begin{aligned}\int_{K_{ab}} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \delta_{lk} x_l \eta \partial_k \psi_+^\varepsilon \hat{w}\, d\xi = \int_{K_{ab}} \big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 \delta_{lk} \big[x_l \big(\eta \partial_k M + \eta \partial_j (\partial_k a_{jm}) \partial_m \psi_+^\varepsilon \\ \Leftrightarrow \eta (\partial_k a_0) \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2 a_{jm} (\partial_m \eta) \partial_j \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jm} \partial_m \eta) \partial_k \psi_+^\varepsilon \big) \\ \Leftrightarrow 2 a_{jl} \eta \partial_j \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow 2 a_{jl} (\partial_j \eta) \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jl}) (\eta \partial_k \psi_+^\varepsilon) \big] \hat{w}\, d\xi .\end{aligned}$$

Nun bemüht man wieder die Beziehung $\big(R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big)^2 = \big(\nabla_\xi R(|\xi|^2+i\varepsilon)\big) \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ und integriert partiell. Die daraus resultierenden Terme lassen sich unter Berücksichtigung der höheren Abklingrate wie im Fall $N = 1$ behandeln. Dabei müssen für den Term $\Leftrightarrow \int_{K_{ab}} R(|\xi|^2+i\varepsilon) \nabla'_\xi \Big(\frac{\xi}{|\xi|^2} a_{jl} \eta \partial_j \partial_k R(|\xi|^2+i\varepsilon) M \hat{w} \Big)\, d\xi$ die Terme

$$\pm \int_{K_{ab}} R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \nabla'_\xi \Big(\frac{\xi}{|\xi|^2} \eta \partial_l \partial_k R(|\xi|^2 + i\varepsilon) M \hat{w} \Big)\, d\xi$$

ergänzt werden. Die zweiten Ableitungen haben die Darstellung

$$\begin{aligned}\eta \partial_l \partial_k \psi_+^\varepsilon &= R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \big[\eta \partial_l \partial_k M + [A, \eta] \partial_l \partial_k \psi_+^\varepsilon + \eta [A, \partial_l \partial_k] \psi_+^\varepsilon \big] \\ &= R(|\xi|^2 + i\varepsilon) \big[\eta \partial_l \partial_k M \Leftrightarrow 2 a_{jm} (\partial_m \eta) \partial_j \partial_l \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow (\partial_j a_{jm} \partial_m \eta) \partial_l \partial_k \psi_+^\varepsilon \\ &\quad + \eta \partial_j (\partial_l \partial_k a_{jm}) \partial_m \psi_+^\varepsilon + \eta \partial_j (\partial_k a_{jm}) \partial_m \partial_l \psi_+^\varepsilon + \eta \partial_j (\partial_l a_{jm}) \partial_m \partial_k \psi_+^\varepsilon \\ &\quad \Leftrightarrow \eta (\partial_l \partial_k a_0) \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow \eta (\partial_l a_0) \partial_k \psi_+^\varepsilon \Leftrightarrow \eta (\partial_k a_0) \partial_l \psi_+^\varepsilon \big],\end{aligned}$$

woraus insgesamt mit nochmaliger partieller Integration die Konvergenz in $L^2_{-s}(\Omega)$ folgt.

Den Term t4 aus der Darstellung (3.19) behandeln wir mit einer entsprechenden Darstellung für $\eta \psi_+^\varepsilon$:

$$(A \Leftrightarrow |\xi|^2 \Leftrightarrow i\varepsilon) \eta \psi_+^\varepsilon = x_l \eta M \Leftrightarrow 2 a_{jl} (\partial_l \eta)(\partial_j \psi_+^\varepsilon) \Leftrightarrow (\partial_j a_{jl} \partial_l \eta) \psi_+^\varepsilon .$$

Insgesamt können wir nun also $x_l^2 \eta w \in L^2_{-s}(\Omega)$ folgern, womit wir

$$w \in L^2_{2-s}(\Omega),$$

also den Fall $N = 2$ des Theorems gezeigt haben.

<u>Der Fall $N > 2$:</u> Für beliebiges N geht man nun sukzessive vor, indem die Darstellung (3.14) von w über die Fourierrücktransformation mit einer Potenz x_l^N, $l \in \{1, \dots, n\}$ und der Abschneidefunktion η multipliziert und zeigt,

daß die rechte Seite in $L^2_{-s}(\Omega)$ liegt. Den ersten Summanden behandelt man jeweils mit Argumenten aus der Theorie der klassischen Fouriertransformation. Für den zweiten benutzt man neben den Ergebnissen über die Differenzierbarkeit der Resolvente, daß $\tau > n/2 + s + N$, $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta M(\cdot, \xi) \in L^2_{N+s-|\alpha|}(\Omega)$ ist und wendet immer wieder die folgenden fünf Argumente an:

1. Die Konvergenz folgt direkt für Terme, in denen die Resolvente auf Funktionen mit kompaktem Träger oder hinreichendem Abklingen angewandt wird.

2. Bei Termen, die zwischen den Anwendungen der Resolvente Ableitungen der Koeffizienten oder der Abschneidefunktionen stehen haben, wird mit der Abklingrate τ und $L^2_{-s-(N-1)+\tau}(\Omega) \subset L^2_s(\Omega)$ für $s < n/2+1$ bzw. dem kompakten Träger argumentiert.

3. Steht zwischen zwei Anwendungen der Resolvente lediglich ein Koeffizient $a_{jk}(x)$, so wir der entsprechenden Term mit dem Kroneckersymbol δ_{jk} ergänzt.

4. Treten als letzte Anwendung Potenzen der Resolvente auf, so wird partiell integriert, denn es soll die Konvergenz in $L^2_{-s}(\Omega)$ und nicht etwa in $L^2_{-s-1}(\Omega)$ nachgewiesen werden. An dieser Stelle geht der kompakte Träger und die Differenzierbarkeit von $\hat{w}$ ein.

5. Soll die Resolvente auf Terme der Art $\eta a_{jk}(x)\partial_j \psi_+^\varepsilon$ (oder höhere Ableitungen von ψ_+^ε) angewendet werden, so stellt man $\eta \partial_j \psi_+^\varepsilon$ (bzw. die höheren Ableitungen) mittels der Anwendung von $(A \Leftrightarrow |\xi|^2 \Leftrightarrow i\varepsilon)$ als Resolvente dar. Letzteres ist möglich, da die darzustellenden Funktionen aufgrund von Lemma 3.13 und der durch die Abschneidefunktion η erzeugten Nullranddaten im Definitionsbereich des Operators A liegen.

Man erhält so in jedem Schritt

$$x_l^N w \in L^2_{-s}(\Omega),$$

woraus man dann auf

$$w \in L^2_{N-s}(\Omega)$$

schließen kann.

Für die Inklusionen $L^2_{-s-(N-1)+\tau}(\Omega) \subset L^2_s(\Omega)$ mit $\tau > n/2 + s + N$ mußte $s < n/2+1$ sein. Ist nun $s > 1/2$ beliebig, so gibt es ein $\tilde{s} \leq s$ mit $\tilde{s} < n/2+1$, so daß $\tau > n/2 + s + N > n/2 + \tilde{s} + N$ ist, d.h. aus den Voraussetzungen des Theorems für s folgen die für $\tilde{s}$. Weiterhin gilt

$$L^2_{N-\tilde{s}}(\Omega) \subset L^2_{N-s}(\Omega),$$

so daß aus der Aussage des Theorems für $\tilde{s}$ die entsprechende für s folgt und somit das Theorem für alle $s > 1/2$ gezeigt ist.

□

Bemerkung 3.15
Die Aussage von Theorem 3.14 ist äquivalent zu:
Es seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $\tau > (n+1)/2 + N$. Dann gilt für $w \in L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)$:

$$\mathcal{F}w \in \mathcal{C}_0^N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \implies w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \bigcap_{s>1/2} L^2_{N-s}(\Omega)$$

$$\mathcal{F}w \in \{v \in W^{N,2}(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathit{supp}\, v \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \implies w \in \bigcap_{s>1/2} L^2_{N-s}(\Omega),$$

da es zu jedem vorgegebenen $s > 1/2$ ein $\tilde{s} \in (1/2, s]$ mit $\tau > n/2 + \tilde{s} + N$ gibt, so daß $w \in L^2_{N-\tilde{s}}(\Omega) \subset L^2_{N-s}(\Omega)$ ist.

Da der zweite Term der Darstellung (3.14) bei kompakten Träger von $\mathcal{F}w$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ unendlich oft differenzierbar von x abhängt, kann die erste Aussage auf die folgende Form abgeschwächt werden:

$$\mathcal{F}w \in \{v \in L^1_m(\mathbb{R}^n) \cap W_t^{N,2}(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathit{supp}\, v \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$$
$$\implies w \in \mathcal{C}^m(\Omega) \cap \bigcap_{s>1} L^2_{N-s}(\Omega).$$

Im Spezialfall des Schrödingeroperators läßt sich wieder etwas mehr zeigen, da wir bessere Resultate bezüglich der Hochfrequenzasymptotik zu Verfügung haben:

Korollar 3.16
Es seien $A = -\Delta + V$ ein Schrödingeroperator, $N, m \in \mathbb{N}_0$, $\tau > n/2 + 1 + N$ und die Voraussetzungen 1.5 erfüllt. Dann gilt für die zugehörige verallgemeinerte Fouriertransformation mit $t > n/2$ und $w \in L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)$:

$$\mathcal{F}_S w \in \{v \in W_t^{N,2}(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathit{supp}\, v \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \implies w \in \bigcap_{s>1} L^2_{N-s}(\Omega)$$

$$\mathcal{F}_S w \in \{v \in L^1_m(\mathbb{R}^n) \cap W_t^{N,2}(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathit{supp}\, v \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$$
$$\implies w \in \mathcal{C}^m(\Omega) \cap \bigcap_{s>1} L^2_{N-s}(\Omega).$$

Beweis: Der Beweis ist fast der gleiche wie der zum vorangegangenen Theorem, es muß unter den geforderten Voraussetzungen lediglich die Integrierbarkeit im Unendlichen gezeigt werden. Nach Lemma 3.7 ist mit einer Abschneidefunktion $\tilde{\eta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \tilde{\eta} \le 1$, $\operatorname{supp} \tilde{\eta} \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{R+1}(0)$ und $\tilde{\eta} = 1$

für $|x| \geq R+2$

$$\|\partial_x^\beta \tilde{\eta} R_S(|\xi|^2 \pm i0) M(\cdot,\xi)\|_{-s} = \mathcal{O}(|\xi|^{|\beta|}) \qquad \text{für } |\xi| \to \infty.$$

Wir benutzen anstelle von η die Abschneidefunktion $\tilde{\eta}$ und bemerken weiterhin, daß im Beweis zu Theorem 3.14 mit jeder Ableitung von $R_S(|\xi|^2 \pm i0)M$ nach x mindestens eine weitere Anwendung der Resolvente auftritt, die nach Theorem 2.46 wieder einen Faktor $\frac{1}{|\xi|}$ mit sich bringt. So ist es für die Behandlung des zweiten Summanden der Darstellung (3.14) hinreichend, wenn $\mathcal{F}_S w \in W_{-1}^{N,1}(\mathbb{R}^n)$ ist. Für den ersten Term brauchen wir nach Theorem 3.2 $\mathcal{F}_S w \in W^{N,2}(\mathbb{R}^n)$. Da $W_t^{N,2}(\mathbb{R}^n) \subset W_{-1}^{N,1}(\mathbb{R}^n)$ für $t > n/2$ ist, sind diese beiden Bedingungen erfüllt und es folgt die erste Aussage des Theorems. Die zweite folgt dann mit Theorem 3.1.

□

Im Falle des diskutierten Beispiels erhält man entsprechend:

Korollar 3.17
Es seien $A = \Leftrightarrow\Delta$ der Laplaceoperator auf $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$, dem Äußeren einer Kugel und $N \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt mit $t > 3/2$ für $w \in L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)$:

$$\mathcal{F}_1 w \in \{v \in W_t^{N,2}(\mathbb{R}^3) \mid |\xi|^{-l}\partial_{|\xi|}^{N-l} v \in L^2(\mathbb{R}^n), l = 1,\dots,N\} \\ \Longrightarrow\ w \in \bigcap_{s>1} L^2_{N-s}(\Omega)$$

$$\mathcal{F}_1 w \in L^1_m(\mathbb{R}^3) \cap \{v \in W_t^{N,2}(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^{-l}\partial_{|\xi|}^{N-l} v \in L^2(\mathbb{R}^n), l = 1,\dots,N\} \\ \Longrightarrow\ w \in \mathcal{C}^m(\Omega) \cap \bigcap_{s>1} L^2_{N-s}(\Omega).$$

Beweis: Die partiellen Integrationen im Beweis zu Theorem 3.14 können wegen

$$\tfrac{1}{2\varrho}\tfrac{d}{d\varrho} R(\varrho^2 \pm i\varepsilon) = \big(R(\varrho^2 \pm i\varepsilon)\big)^2$$

auch in Polarkoordinaten bezüglich $\varrho = |\xi|$ durchgeführt werden. Bei jeder partiellen Integration erhalten wir einen Faktor $\frac{1}{|\xi|} = \frac{1}{\varrho}$ durch die Ableitung des Volumenelements. Nach den Ergebnissen von Abschnitt 3.2 verhält sich $\partial_\varrho^l \psi(x,\xi)\big|_{\varrho=0}$ wie $\partial_\xi^\alpha \psi(x,\xi)$, $|\alpha| = l$, $|\xi| > 0$. So bleibt noch die Integrierbarkeit in $\xi = 0$ zu zeigen. Hierfür ist mit Theorem 1.9 und der Endlichkeit von $\partial_\varrho^l \psi(x,\xi)\big|_{\varrho=0}$ hinreichend, daß $|\xi|^{-l}\partial_{|\xi|}^{N-l}\mathcal{F}_1 w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist.

□

Kapitel 4

Anwendung auf Gleichungen vom Kirchhoff-Typ

In diesem Kapitel behandeln wir als Anwendung der verallgemeinerten Fouriertransformation im Bereich der partiellen Differentialgleichungen Gleichungen vom Kirchhoff-Typ. Dies sind spezielle nichtlineare Wellengleichungen mit nichtlokalen Nichtlinearitäten. Mit einer, wie im Kapitel 1 eingeführten, elliptischen, selbstadjungierten Störung $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ des negativen Laplaceoperators lassen sie sich in der Form

$$u_{tt} + \big(1 + \|A^{1/2}u\|^2\big)Au = F(u, u_t, \nabla u)$$

darstellen, wobei die gesuchte Funktion u von der Zeit t und dem Ort x abhängt. Die rechte Seite F ist als Funktion von u und deren Ableitungen eine weitere lokale Nichtlinearität dieser hyperbolischen Integro-Differentialgleichung. Der Name dieser Gleichungen geht auf den eindimensionalen Fall mit $A = \Leftrightarrow\frac{d^2}{dx^2}$ zurück, der von Kirchhoff [Kir97] als Modell für die schwingende Saite untersucht wurde, und in dem der Vorfaktor $(1 + \|\nabla u\|^2)$ die Dehnung eines infinitesimalen Saitenstücks beschreibt.

In [DS94] wird im Falle des negativen Laplaceoperators auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ für das zugehörige Anfangswertproblem die Existenz und Eindeutigkeit einer $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$-Lösung für kleine Anfangsdaten mit kompaktem Träger und glatte, in 0 hinreichend schnell verschwindende, rechte Seiten F gezeigt. Durch ihre Beweistechnik erhalten sie auch eine Aussage über das zeitasymptotische Verhalten der Lösungen.

Wir betrachten das folgende homogene Anfangsrandwertproblem auf einem Außengebiet Ω

$$u_{tt} + \big(1 + \|A^{1/2}u\|^2\big)Au = 0 \quad t > 0, x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \tag{4.2}$$

$$u(0,\cdot) = u_0 \quad u_t(0,\cdot) = u_1, \tag{4.3}$$

und werden für eine spezielle Klasse kleiner Daten nicht nur die (in t) globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, sondern auch eine zeitliche Abklingrate von $\frac{d}{dt}\langle Au,u\rangle$ für $t \to \infty$ zeigen.

Im Ganzraumfall ist dies für den Laplaceoperator bereits in [DS94] enthalten und wird für den Schrödingeroperator mit einem Potential $V \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und den Laplaceoperator auf einem Außengebiet in [Rac95] gezeigt.

Ein entscheidendes Hilfsmittel ist dabei die Fouriertransformation bzw. deren Verallgemeinerung, wobei insbesondere die Differenzierbarkeits- und Abbildungseigenschaften ausgenutzt werden. Mit den im letzten Kapitel erhaltenen Ergebnissen können wir die obige Aussage nun auch für die allgemeineren Störungen des Laplaceoperators zeigen.

4.1 Fourierintegralabschätzungen

Vorbereitend für den Beweis der globalen Existenz und der Abklingrate von $\frac{d}{dt}\langle Au,u\rangle$ für $t \to \infty$, werden wir in diesem Abschnitt Analoga zu Lemma A aus [DS94] beweisen, in denen Fourierintegrale der Form

$$G(\sigma) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma|\xi|}\hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi)|\xi|\,d\xi$$

abgeschätzt werden. Hierbei bezeichne $\hat{w}_l$, $l = 1, 2$ jeweils die verallgemeinerte Fouriertransformierte $\mathcal{F}w_l$ von w_l.

Lemma 4.1
Seien $0 < a < b < \infty$, $N \in \mathbb{N}$, $\tau > n/2 + N + 1/2$ und $w_1, w_2 \in L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)$, so daß $\hat{w}_1, \hat{w}_2 \in \{v \in W^{N,2}_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid supp\, v \subset K_{ab}\}$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < N \Leftrightarrow 1$ eine Konstante $C > 0$, so daß mit $s \in (k + 1/2, N \Leftrightarrow 1/2)$ gilt:

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma|\xi|}\hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi)|\xi|d\xi\Big| \leq C\,(1 + |\sigma|)^{-k}\|w_1\|_s\|w_2\|_s,$$

wobei $C = C(n, a, b, k, N)$.

Beweis: Die im Laufe des Beweises auftretenden Konstanten C und C_j, die sich von Schritt zu Schritt ändern können, hängen von n, a, b und k ab.

1. Fall $|\sigma| \leq 1$, k beliebig:

$$\begin{aligned}|G(\sigma)| &\leq C\int_{K_{ab}} |\hat{w}_1(\xi)||\hat{w}_2(\xi)|\,d\xi \leq C\|w_1\|\|w_2\|\\ &\leq C2^k(1 + |\sigma|)^{-k}\|w_1\|_s\|w_2\|_s\end{aligned}$$

   für alle $s \geq 0$, also insbesondere auch für $s \in (k + 1/2, N \Leftrightarrow 1/2)$.

2. Fall $k = 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$: analog.

3. Fall $k \in \mathbb{N}$, $|\sigma| > 1$: Mit $\varrho := |\xi|$ haben wir:

$$\begin{aligned}
G(\sigma) &= (i\sigma)^{-k}(\Leftrightarrow 1)^k \int_{K_{ab}} e^{i\sigma\varrho}\big(\partial_\varrho + \frac{n \Leftrightarrow 1}{\varrho}\big)^k(\varrho\hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi))\,d\xi \\
&= (i\sigma)^{-k}\int_{K_{ab}} \sum_{\substack{j=0\\ j\le n}}^{k} C_j e^{i\sigma\varrho}\varrho^{1-j}\partial_\varrho^{k-j}(\hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi))\,d\xi
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad |G(\sigma)| \le C|\sigma|^{-k}\sum_{k_1+k_2\le k}\int_{K_{ab}}\big|\partial_\varrho^{k_1}\hat{w}_1(\xi)\big|\big|\partial_\varrho^{k_2}\hat{w}_2(\xi)\big|\,d\xi$$

$$\begin{aligned}
|\partial_\varrho^{k_l}\hat{w}_l(\xi)| &= \Big|\int_\Omega \partial_\varrho^{k_l}\overline{\psi(x,\xi)}w_l(x)\,dx\Big| \\
&\le \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\Big|\int_\Omega \partial_\varrho^{k_l}j(x)e^{-ix\xi}w_l(x)\,dx\Big| \\
&\quad + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\Big|\int_\Omega \partial_\varrho^{k_l}\overline{\big(R(\varrho^2+i0)M(\cdot,\xi)(x)\big)}w_l(x)\,dx\Big|, \qquad l = 1,2.
\end{aligned}$$

Den ersten Term können wir mit Theorem 3.2 für die klassische Fouriertransformation in der $L^2(\Omega)$ - Norm bezüglich x gegen

$$\||x|^{k_l}jw_l\| \le C\|w_l\|_{k_l} \le C\|w_l\|_s, \qquad l = 1,2,$$

abschätzen.

Da $\tau > n/2 + N + 1/2$, $k < N \Leftrightarrow 1$ und $s > k + 1/2$ ist, können wir wie im Beweis zu Theorem 3.14 folgern, daß $\partial_\varrho^{k_l}\big(R(\varrho^2+i0)M(\cdot,\xi)\big) \in L^2_{-s}(\Omega)$ ist. Weiterhin liegen mit der Voraussetzung $\tau > n/2 + N + 1/2$ nach Theorem 3.14 und Bemerkung 3.15 $w_l \in L^2_s(\Omega)$, $l = 1,2$, da $s < N \Leftrightarrow 1/2$ ist.

Es sei $s(j) := k_l \Leftrightarrow j + 1/2 + \delta$ und $\delta \in (0, \min(s \Leftrightarrow 1/2, \tau \Leftrightarrow (n+1)/2 \Leftrightarrow N))$, so daß $s(j) > k_l \Leftrightarrow j + 1/2$, und damit die Resolvente nach Theorem 2.40 $(k_l \Leftrightarrow j)$-mal als Operator in $\mathcal{B}(L^2_{s(j)}(\Omega), L^2_{-s(j)}(\Omega))$ differenzierbar ist, $\tau > j + n/2 + s(j)$, so daß nach Lemma 3.3 $\partial_\varrho^j M(\cdot,\xi) \in L^2_{s(j)}(\Omega)$ ist, und $s(j) \le s$, so daß $w \in L^2_{s(j)}(\Omega)$, $j = 1,\ldots,k_l$ ist. Dann gilt für den zweiten Term:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Omega \partial_\varrho^{k_l}\overline{\big(R(\varrho^2+i0)M(\cdot,\xi)(x)\big)}w_l(x)\,dx\Big| \\
&\qquad \le \sum_{j=0}^{k_l} C_j\Big|\int_\Omega \overline{\big(\partial_\varrho^{k_l-j}R(\varrho^2+i0)\big)\big(\partial_\varrho^j M(\cdot,\xi)\big)(x)}w_l(x)\,dx\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{k_l} C_j \|\partial_\varrho^{k_l-j} R(\varrho^2 + i0)\|_{\mathcal{B}(L^2_{s(j)}(\Omega), L^2_{-s(j)}(\Omega))} \|\partial_\varrho^j M(\cdot,\xi)\|_{s(j)} \|w_l\|_{s(j)} \\
&\leq C\|w_l\|_s, \qquad \forall\, \xi \in K_{ab}, \qquad l = 1,2,
\end{aligned}
$$

da die Abschätzungen für die Ableitungen der Resolvente und der Funktion $M(\cdot,\xi)$ gleichmäßig in $\xi \in K_{ab}$, also $\varrho \in [a,b]$ waren. Damit ist auch der zweite Term gegen

$$C\|w_l\|_s, \qquad l = 1,2,$$

mit $s \in (k + 1/2, N \Leftrightarrow 1/2)$ abgeschätzt. Bezüglich ξ wird nun über ein beschränktes Gebiet integriert, so daß wir auch in diesem Fall die Abschätzung

$$|G(\sigma)| \leq C(1 + |\sigma|)^{-k} \|w_1\|_s \|w_2\|_s$$

haben.

$\square$

Bemerkung 4.2
Da wir im letzten Lemma vorausgesetzt haben, daß die Träger der Fouriertransformierten in dem Kreisring K_{ab} liegen, hängt die in der Abschätzung auftretende Konstante C nur von a und b ab und nicht direkt von den Trägern der Fouriertransformierten.

Wie schon in den vorangegangenen Kapiteln lassen sich im Falle des Schrödingeroperators unter den Voraussetzungen 1.5 weitreichendere Resultate bezüglich der Hochfrequenzasymptotik zeigen:

Lemma 4.3
Seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$, $N \in \mathbb{N}$, $\tau > n/2 + N + 1$ und die Voraussetzungen 1.5 erfüllt. Weiter seien $a \in (0,\infty)$, $t > n/2$, $w_1, w_2 \in L^2_{ac}(\Omega)$ und es gebe t_1, t_2 mit $t_1 + t_2 > (n+1)/2$, so daß $\mathcal{F}_S w_l \in \{v \in W^{N,2}_{t+2t_l}(\mathbb{R}^n) \,|\, \operatorname{supp} v \subset K_a\}$, $l = 1,2$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < N \Leftrightarrow 2$ eine Konstante $C > 0$, so daß für $s \in (k+1, N \Leftrightarrow 1)$ gilt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma|\xi|} \hat{w}_1(\xi) \hat{w}_2(\xi) |\xi| d\xi \right| \leq C\,(1 + |\sigma|)^{-k} \|A^{t_1} w_1\|_s \|A^{t_2} w_2\|_s, \tag{4.4}$$

wobei $C = C(n,a,k,N)$.

Beweis: Mit der Voraussetzung $\mathcal{F}_S w_l \in W^{N,2}_{t+2t_l}(\mathbb{R}^n)$ folgt über die Diagonalisierungseigenschaft der verallgemeinerten Fouriertransformation (vgl. (3.1))

$$\varrho^{2t_l}(\mathcal{F}_S w_l)(\xi) = (|\xi|^2)^{t_l}(\mathcal{F}_S w_l)(\xi) = (\mathcal{F}_S(A^{t_l} w_l))(\xi), \quad l = 1, 2,$$

daß $\mathcal{F}(A^{t_l} w_l) \in W^{N,2}_t$ ist. Da $s < N \Leftrightarrow 1$ ist, folgt somit nach Korollar 3.16 die Endlichkeit der rechten Seite von (4.4).

Im Gegensatz zur allgemeineren Störung mit variablen Koeffizienten lassen wir hier auch $b = \infty$ zu. Um die Integrierbarkeit bezüglich ξ im Unendlichen zu zeigen, gehen wir ähnlich wie in [DS94] für den Term I_2 vor und nutzen die Diagonalisierungseigenschaft der verallgemeinerten Fouriertransformation aus.

Die ersten beiden Fälle, $|\sigma| \le 1$, k beliebig und $k = 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ werden wie im vorangegangenen Lemma behandelt. Im dritten Fall $|\sigma| > 1$, $k \in \mathbb{N}$ führen wir wieder die partiellen Integrationen durch, was wegen der Voraussetzung $\hat{w}_l \in W^{N,2}_{t+2t_l}(\mathbb{R}^n)$, $l = 1, 2$ zulässig ist und erhalten wiederum

$$\begin{aligned} G(\sigma) &= (i\sigma)^{-k}(\Leftrightarrow 1)^k \int_{K_a} e^{i\sigma\varrho}\big(\partial_\varrho + \frac{n \Leftrightarrow 1}{\varrho}\big)^k (\varrho\hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi))\, d\xi \\ &= (i\sigma)^{-k} \int_{K_a} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\le n}}^{k} C_j e^{i\sigma\varrho}\varrho^{1-k+j}\partial_\varrho^j(\hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi))\, d\xi. \end{aligned}$$

Mit Korollar 2.48 und den asymptotischen Eigenschaften der Funktion M aus Lemma 3.3 (3.6) können wir schließen, daß mit $\tilde{t} > 1/2$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \le N$ gilt

$$\Big\| \Big(\frac{d}{d\varrho}\Big)^m R_S(\varrho^2 \pm i0) M(\cdot, \xi)\Big\|_{-\tilde{t}-m} = \mathcal{O}(1) \quad \text{für } \varrho \to \infty.$$

Dies, wie auch die Diagonalisierungseigenschaft, verwenden wir für die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |G(\sigma)| \le C|\sigma|^{-k} & \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\le n}}^{k} C_j \int_{K_a} \varrho^{1-k+j}|\partial_\varrho^j\big(\hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi)\big)|\, d\xi \\ =& C|\sigma|^{-k} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\le n}}^{k} C_j \int_{K_a} \varrho^{1-k+j}|\partial_\varrho^j(\varrho^{-2(t_1+t_2)}\mathcal{F}_S(A^{t_1}w_1)\mathcal{F}_S(A^{t_2}w_2))|\, d\xi \\ \le& C|\sigma|^{-k} \sum_{\substack{j_1+j_2\le k \\ j_1,j_2\ge 0}} C_j \int_{K_a} \varrho^{1-2(t_1+t_2)}|\partial_\varrho^{j_1}(\mathcal{F}_S(A^{t_1}w_1)(\xi))||\partial_\varrho^{j_2}(\mathcal{F}_S(A^{t_2}w_2)(\xi))|\, d\xi \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber lassen wir im folgenden die Argumente weg und betrachten:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{K_a} \varrho^{1-2(t_1+t_2)} |\partial_\varrho^{j_1}(\mathcal{F}_S(A^{t_1}w_1))||\partial_\varrho^{j_2}(\mathcal{F}_S(A^{t_2}w_2))|\,d\xi \leq \\
&\quad\leq C\int\limits_{K_a} \varrho^{1-2(t_1+t_2)}\Big[\big|\partial_\varrho^{j_1}\int\limits_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_1}w_1\big)\,dx\big|\big|\partial_\varrho^{j_2}\int\limits_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_2}w_2\big)\,dx\big| \\
&\qquad\quad + \big|\partial_\varrho^{j_1}\int\limits_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_1}w_1\big)\,dx\big|\big|\partial_\varrho^{j_2}\int\limits_\Omega \overline{\big(R_S(\varrho^2 \pm i0)M\big)}\big(A^{t_2}w_2\big)\,dx\big| \\
&\qquad\quad + \big|\partial_\varrho^{j_1}\int\limits_\Omega \overline{\big(R_S(\varrho^2 \pm i0)M\big)}\big(A^{t_1}w_1\big)\,dx\big|\big|\partial_\varrho^{j_2}\int\limits_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_2}w_2\big)\,dx\big| \\
&\qquad + \big|\partial_\varrho^{j_1}\int\limits_\Omega \overline{\big(R_S(\varrho^2 \pm i0)M\big)}\big(A^{t_1}w_1\big)\,dx\big|\big|\partial_\varrho^{j_2}\int\limits_\Omega \overline{\big(R_S(\varrho^2 \pm i0)M\big)}\big(A^{t_2}w_2\big)\,dx\big|\Big]\,d\xi \\
&\quad\leq C\int\limits_{K_a} \big|\partial_\varrho^{j_1}\textstyle\int_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_1}w_1\big)\,dx\big|\big|\partial_\varrho^{j_2}\int_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_2}w_2\big)\,dx\big|\,d\xi \\
&\qquad + C\int\limits_{K_a}\big|\partial_\varrho^{j_1}\textstyle\int_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_1}w_1\big)\,dx\big|\varrho^{1-2(t_1+t_2)}\|\partial_\varrho^{j_2}R_S(\varrho^2 \pm i0)M\|_{-s}\|A^{t_2}w_2\|_s\,d\xi \\
&\qquad + C\int\limits_{K_a}\varrho^{1-2(t_1+t_2)}\|\partial_\varrho^{j_1}R_S(\varrho^2 \pm i0)M\|_{-s}\|A^{t_1}w_1\|_s\big|\partial_\varrho^{j_2}\textstyle\int_\Omega e^{-ix\xi} j\big(A^{t_2}w_2\big)\,dx\big|\,d\xi \\
&\qquad + C\int\limits_{K_a}\varrho^{1-2(t_1+t_2)}\|\partial_\varrho^{j_1}R_S(\varrho^2 \pm i0)M\|_{-s}\|A^{t_1}w_1\|_s \times \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \|\partial_\varrho^{j_2}R_S(\varrho^2 \pm i0)M\|_{-s}\|A^{t_2}w_2\|_s\,d\xi \\
&\quad\leq C\Big[\||x|^{j_1}A^{t_1}w_1\|\||x|^{j_2}A^{t_2}w_2\| + \||x|^{j_1}A^{t_1}w_1\|\int\limits_{K_a}\varrho^{2-4(t_1+t_2)}\|A^{t_2}w_2\|_s\,d\xi \\
&\qquad + \int\limits_{K_a}\varrho^{2-4(t_1+t_2)}\|A^{t_1}w_1\|_s\,d\xi\||x|^{j_2}A^{t_2}w_2\| + \int\limits_{K_a}\varrho^{1-2(t_1+t_2)}\|A^{t_1}w_1\|_s\|A^{t_2}w_2\|_s\,d\xi\Big] \\
&\quad\leq C\|A^{t_1}w_1\|_s\|A^{t_2}w_2\|_s,
\end{aligned}
$$

da $j_l \leq k$, $l = 1,2$ und nach Voraussetzung $2(t_1+t_2) > n+1$ war.

$\square$

Für das in Abschnitt 3.2 betrachtete Beispiel des Laplaceoperators auf dem Äußeren einer Kugel können wir das Ergebnis sogar noch auf den Fall $|\xi|$ nahe 0 erweitern:

Lemma 4.4
Seien $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$, $A = \Leftrightarrow\Delta$, $t > 3/2$, $w_1, w_2 \in L^2_{ac}(\Omega)$ und es gebe t_1, t_2 mit $t_1 + t_2 > 2$, so daß $\mathcal{F}_1 w_l \in \{v \in W^{N,2}_{t+2t_l}(\mathbb{R}^3) \,|\, |\xi|^{-l}\partial^{N-l}_{|\xi|} v \in L^2(\mathbb{R}^n), l = 1, \ldots, N\}$, $l = 1, 2$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < \min(N \Leftrightarrow 2, n+1)$ eine Konstante $C > 0$, so daß für $s \in (k+1, N \Leftrightarrow 1)$ gilt:

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma|\xi|} \hat{w}_1(\xi)\hat{w}_2(\xi)|\xi|\, d\xi \Big| \leq C\,(1 + |\sigma|)^{-k} \big(\|A^{t_1} w_1\|_s \|A^{t_2} w_2\|_s + \|w_1\|_s \|w_2\|_s \big),$$

wobei $C = C(n, k, N)$.

Beweis: Wir hatten gezeigt, daß in unserem konkreten Beispiel des Laplaceoperators außerhalb einer Kugel der Kern der verallgemeinerten Fouriertransformation auch radial differenzierbar in Null ist und für den Integralkern des zweiten Summanden gilt mit $l \in \mathbb{N}_0$ und $s > 1/2 + l$:

$$\|\partial^l_\varrho \tilde{\psi}_\pm(\cdot, \xi)\|_{-s} \leq C \quad \text{für alle } \ \xi \in B_1(0).$$

Da der Laplaceoperator ein spezieller Schrödingeroperator ist, können wir die Resultate des vorangegangenen Lemmas verwenden. Es bleibt (mit $a = 1$) im dritten Fall, $|\sigma| > 1, k \in \mathbb{N}$, lediglich das Integral

$$\sum_{j=0}^{k} \int_{B_1(0)} \varrho^{1-j} |\partial^{k-j}_\varrho (\hat{w}_1 \hat{w}_2)|\, d\xi$$

abzuschätzen. Dies verläuft ähnlich wie die Behandlung des Terms I_1 in [DS94]. Mit

$$q_j = \frac{3 \Leftrightarrow \epsilon}{(j \Leftrightarrow 1)^+}, \qquad \frac{1}{2p_j} + \frac{1}{2p_j} + \frac{1}{q_j} = 1, \quad \epsilon > 0,$$

wobei $(j \Leftrightarrow 1)^+ := \max((j \Leftrightarrow 1), 0)$ ist, haben wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} \int_{B_1(0)} \varrho^{1-j} |\partial^{k-j}_\varrho (\hat{w}_1 \hat{w}_2)|\, d\xi &\leq C \sum_{h_1+h_2+j=k} \int_{B_1(0)} \varrho^{1-j} |\partial^{h_1}_\varrho \hat{w}_1| |\partial^{h_2}_\varrho \hat{w}_2|\, d\xi \\
&\leq C \sum_{h_1+h_2+j=k} \|\varrho^{1-j}\|_{L^{q_j}(B_1(0))} \|\partial^{h_1}_\varrho \hat{w}_1\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \|\partial^{h_2}_\varrho \hat{w}_2\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \\
&\leq C \sum_{h_1+h_2+j=k} \Big[\|\partial^{h_1}_\varrho \int_\Omega e^{-ix\xi} w_1\, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \|\partial^{h_2}_\varrho \int_\Omega e^{-ix\xi} w_2\, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \\
&\qquad + \|\partial^{h_1}_\varrho \int_\Omega e^{-ix\xi} w_1\, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \|\partial^{h_2}_\varrho \int_\Omega \overline{\tilde{\psi}_\pm} w_2\, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \|\partial_\varrho^{h_1} \int_\Omega \overline{\tilde{\psi}_\pm} w_1 \, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \|\partial_\varrho^{h_2} \int_\Omega e^{-ix\xi} w_2 \, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \\
&\qquad\quad + \|\partial_\varrho^{h_1} \int_\Omega \overline{\tilde{\psi}_\pm} w_1 \, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \|\partial_\varrho^{h_2} \int_\Omega \overline{\tilde{\psi}_\pm} w_2 \, dx\|_{L^{2p_j}(B_1(0))} \big] \\
&\leq C \sum_{h_1+h_2+j=k} \big[\|(1+|x|)^{h_1} w_1\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \|(1+|x|)^{h_2} w_2\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \\
&\qquad + \|(1+|x|)^{h_1} w_1\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \|w_2\|_s + \|w_1\|_s \|(1+|x|)^{h_2} w_2\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \\
&\qquad\qquad + \|w_1\|_s \|w_2\|_s \big],
\end{aligned}
$$

wobei $(2p_j)'$ den zu $2p_j$ dualen Exponenten bezeichnet. Wir benutzen die Hölderungleichung mit Exponenten r_j und 2, wobei

$$
\frac{1}{r_j} + \frac{1}{2} = \frac{1}{(2p_j)'} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2p_j} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(1 \Leftrightarrow \frac{(j \Leftrightarrow 1)^+}{3 \Leftrightarrow \epsilon}\Big),
$$

um den ersten Term weiter abzuschätzen:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{h_1+h_2+j=k} \|(1+|x|)^{h_1} w_1\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \|(1+|x|)^{h_2} w_2\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \\
&\qquad \leq \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|)^{k-j} w_1\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \|(1+|x|)^{k-j} w_2\|_{L^{(2p_j)'}(\Omega)} \\
&\qquad \leq \sum_{j=0}^{k} \|(1+|x|)^{-j}\|^2_{L^{r_j}(\Omega)} \|(1+|x|)^k w_1\|_{L^2(\Omega)} \|(1+|x|)^k w_2\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

wobei $(1+|x|)^{-j} \in L^{r_j}(\Omega)$ ist, falls ϵ hinreichend klein ist, da $j \cdot r_j = \frac{j}{(j-1)^+} 2(3 \Leftrightarrow \epsilon) > 3$. Die Argumentation für die Mischterme folgt in entsprechender Weise, so daß insgesamt

$$
\sum_{j=0}^{k} \int_{B_1(0)} \varrho^{1-j} |\partial_\varrho^{k-j} (\hat{w}_1 \hat{w}_2)| \, d\xi \leq C \|w_1\|_s \|w_2\|_s,
$$

ist, woraus die Aussage des Lemmas folgt.

$\square$

4.2 Globale Existenz und eine Aussage über zeitasymptotisches Verhalten

Wie zu Beginn dieses Kapitels angekündigt, zeigen wir nun die globale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u zum Anfangsrandwertproblem (4.1)-(4.3) der homogenen Gleichungen vom Kirchhoff-Typ und eine zeitliche Abklingrate von $\frac{d}{dt}\langle Au,u\rangle$ für eine Klasse spezieller kleiner Daten. Einem Hinweis von N. Weck folgend, kann man zumindest für den ersten Fall, den wir betrachten werden und in welchem verlangt wird, daß die verallgemeinerte Fouriertransformierte der Anfangsdaten beschränkten Träger hat, die eindeutige Existenz auch auf andere Art zeigen, da A dann ein beschränkter Operator ist. Interessant ist also eher die Aussage über das zeitasymptotische Verhalten von $\frac{d}{dt}\langle Au,u\rangle$ für große Zeiten t.

Theorem 4.5
Seien $N \in \mathbb{N}$, $N > 2$, $\tau > n/2+N+1/2$, $0 < a < b < \infty$, $u_0 = \varepsilon\varphi_0$, $u_1 = \varepsilon\varphi_1$, $\varepsilon > 0$ und $\varphi_0, \varphi_1 \in L^2_{ac}(\Omega)$, so daß $\mathcal{F}\varphi_0, \mathcal{F}\varphi_1 \in \{v \in W^{N,2}_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid supp\, v \subset K_{ab}\}$.

Dann gibt es ein $\bar{\varepsilon} > 0$, das von $\varphi_0, \varphi_1, a, b$ abhängt, so daß für alle $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$ eine eindeutige Lösung

$$u \in \mathcal{C}^2([0,\infty), L^2_{ac}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0,\infty), W^{2,2}(\Omega))$$

zum Anfangsrandwertproblem (4.1)-(4.3) existiert.

Es bezeichne

$$d(t) := \left(1 + \|A^{1/2}u\|^2\right)^{1/2} = \left(1 + \langle Au,u\rangle\right)^{1/2},$$

dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 < k < N \Leftrightarrow 1$:

$$d'(t) = \mathcal{O}(t^{-k}),$$

falls $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(k)$ hinreichend klein ist.

Beweis: Da wir mit Lemma 4.1 ein Analogon zu [Rac95, Lemma 2.2] haben, verläuft der Beweis unter den gegebenen Voraussetzungen wie der von [Rac95, Theorem 1.2]. Wir müssen lediglich die in Lemma 4.1 auftretende Schranke $N \Leftrightarrow 1$ an die Abklingrate k berücksichtigen.

Man betrachtet das lineare Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} + d(t)^2 Au &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} &= 0 \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) &= u_1, \end{aligned}$$

das sich beispielsweise im Bild der verallgemeinerten Fouriertransformation als gewöhnliche Differentialgleichung lösen läßt, so daß u die im Theorem behauptete Regularität besitzt. Weiter definiert man

$$\tilde{d}^2(t) := 1 + \|A^{1/2}u\|^2 = 1 + \langle Au,u\rangle$$

und zeigt mit Hilfe der verallgemeinerten Fouriertransformation und Lemma 4.1 die Aussage von [Rac95, Lemma 3.1]:

Es sei d Lipschitz-stetig und erfülle

$$\exists \Lambda, K > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N}, 1 < k < N \Leftrightarrow 1, \;\; \forall\, t \geq 0 : \quad 1 \leq d(t) \leq \Lambda, \; |d'(t)| \leq K(1+t)^{-k}.$$

Dann gibt es Konstanten $B_1, B_2 > 0$, so daß, falls $K < B_1$, für alle $t \geq 0$ gilt:

$$1 \leq |\tilde{d}(t)| \leq 1 + B_2 M_0 \quad \textit{und} \quad |\tilde{d}'(t)| \leq B_2 M_0 (1+t)^{-k},$$

wobei $M_0 = M_1\|u_0\|_s\|u_1\|_s$ mit $s \in (k+1/2, N \Leftrightarrow 1/2)$ und M_1 eine Konstante ist, die im Laufe des Beweises definiert wird.

Dann betrachtet man für festes $T > 0$ die Menge

$$\mathcal{K}_T := \{d : [0,T] \to \mathbb{R} \,|\, d \text{ Lipschitz-stetig}, 1 \leq d(t) \leq \Lambda, |d'(t)| \leq K(1+t)^{-k}\},$$

wobei die Konstanten $\Lambda, K > 0$ nicht von T abhängen. Mit der obigen Aussage zeigt man, falls $1 + B_2M_0 =: \Lambda$, $B_2M_0 =: K < B_1 (= \frac{1}{4\alpha_k\Lambda^k})$, was eine Kleinheitsbedingung an die Anfangsdaten ist, daß die Abbildung $\theta : \mathcal{K}_T \to \mathcal{K}_T, d \mapsto \tilde{d}$ wohldefiniert ist. Weiter ist $\mathcal{K}_T$ eine kompakte konvexe Teilmenge von $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$ und θ stetig, so daß der Schaudersche Fixpunktsatz anwendbar ist. Da $T > 0$ beliebig war, folgt für die betrachteten Anfangsdaten die Eindeutigkeit der Lösung und somit die Aussage des Theorems.

$\square$

Im Spezialfall des Schrödingeroperators können wir folgendes zeigen:

Korollar 4.6

Seien $A = \Leftrightarrow\Delta + V$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 3$, $\tau > n/2 + N + 1/2$ und die Voraussetzungen 1.5 erfüllt. Weiter seien $a \in (0,\infty)$, $t > n/2$, $u_0 = \varepsilon\varphi_0$, $u_1 = \varepsilon\varphi_1$ mit $\varepsilon > 0, \varphi_0, \varphi_1 \in L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)$, und es gebe t_0, t_1 mit $t+2t_0 \geq 2$ und $t_0+t_1 > (n+1)/2$, so daß $\mathcal{F}_S\varphi_l, \in \{v \in W^{N,2}_{t+2t_l}(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathrm{supp}\, v \subset K_a\}$, $l = 0,1$.

Dann gibt es ein $\bar{\varepsilon} > 0$, das von $\varphi_0, \varphi_1, a, b$ abhängt, so daß für alle $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$ eine eindeutige Lösung

$$u \in \mathcal{C}^2([0,\infty), L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), \mathring{W}^{1,2}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0,\infty), W^{2,2}(\Omega))$$

zum Anfangsrandwertproblem (4.1)-(4.3) existiert.

Es bezeichne

$$d(t) := \left(1 + \|A^{1/2}u\|^2\right)^{1/2} = \left(1 + \langle Au,u\rangle\right)^{1/2},$$

dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ *mit* $1 < k < N \Leftrightarrow 2$*:*

$$d'(t) = \mathcal{O}(t^{-k}),$$

falls $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(k)$ *hinreichend klein ist.*

Beweis: Anstelle von Lemma 4.1 benutzen wir Lemma 4.3 und gehen genau so vor wie im Beweis zu Theorem 4.5. Da dort im Beweis zur entsprechenden Aussage von [Rac95, Lemma 3.1] ausgenutzt wurde, daß die verallgemeinerte Fouriertransformierten der Anfangsdaten durch $b^2 M_0$ beschränkt war, wählen wir hier $M_0 = M_1(\|u_0\|^2_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega)} + \|A^{t_0}u_0\|_s \|A^{t_1}u_1\|_s)$ und schätzen den Term $\langle Au_0,u_0\rangle$ nach oben gegen $\|A^{1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathring{W}^{1,2}(\Omega),L^2(\Omega))}\|u_0\|_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega)}$ und weiter gegen $\|A^{1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathring{W}^{1,2}(\Omega),L^2(\Omega))} M_0$ ab.

□

Für das konkrete Beispiel des Laplaceoperators auf dem Äußeren einer Kugel haben wir entsprechend das Resultat:

Korollar 4.7

Seien $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$, $A = \Leftrightarrow\Delta$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 2$ *und* $t > 3/2$. *Weiter seien* $u_0 = \varepsilon\varphi_0$, $u_1 = \varepsilon\varphi_1$ *mit* $\varepsilon > 0$, $\varphi_0, \varphi_1 \in L^2_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ *und es gebe* t_0, t_1 *mit* $t + 2t_0 \geq 2$ *und* $t_0 + t_1 > 2$, *so daß* $\mathcal{F}_1\varphi_l, \in \{v \in W^{N,2}_{t+2t_l}(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^{-j}\partial^{N-j}_{|\xi|}v \in L^2(\mathbb{R}^n), j = 1, \ldots, N\}$, $l = 0, 1$.

Dann folgt die Aussage von Korollar 4.6.

Beweis: Der Beweis unterscheidet sich von dem des vorangegangenen Korollars lediglich dadurch, daß wir anstelle von Lemma 4.3 das Lemma 4.4 verwenden und $M_0 = M_1(\|u_0\|^2_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega)} + \|u_0\|_s\|u_1\|_s + \|A^{t_0}u_0\|_s\|A^{t_1}u_1\|_s)$ setzen.

□

Bemerkung 4.8

Aus der Abklingrate für $d'(t)$ *und der Beschränktheit von* $d(t)$ *folgt unter den Voraussetzungen von Theorem 4.5, Korollar 4.6 oder Korollar 4.7 jeweils die Abklingrate*

$$\frac{d}{dt}\langle Au,u\rangle = \mathcal{O}(t^{-k}) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Literaturverzeichnis

[Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*, volume 65. Academic Press, New York et al., 1975.

[BAD84] Matania Ben-Artzi and Allen Devinatz. Resolvent estimates for a sum of tensor products with applications to the spectral theory of differential operators. *J. Anal. Math.*, 43:215–250, 1984.

[BAK92] Matania Ben-Artzi and Sergiu Klainerman. Decay and regularity for the Schrödinger equation. *J. Anal. Math.*, 58:25–37, 1992.

[DS94] Piero D'Ancona and Sergio Spagnolo. Nonlinear perturbations of the Kirchhoff equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 47(7):1005–1029, 1994.

[GT83] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order. 2nd ed.*, volume 224. Springer Verlag, Berlin et al., 1983.

[Hö85] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators III: Pseudo-differential operators*, volume 274. Springer Verlag, Berlin et al., 1985.

[IK84] Hiroshi Isozaki and Hitoshi Kitada. Micro-local resolvent estimates for 2-body Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 57:270–300, 1984.

[IK85] Hiroshi Isozaki and Hitoshi Kitada. A remark on the micro-local resolvent estimates for two body Schrödinger operators. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 21:889–910, 1985.

[IS72] Teruo Ikebe and Yoshimi Saito. Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operator. *J. Math. Kyoto Univ.*, 12:513–542, 1972.

[Iso82] Hiroshi Isozaki. On the generalized Fourier transforms associated with Schrödinger operators with long-range perturbations. *J. Reine Angew. Math.*, 337:18–67, 1982.

[Iso85] Hiroshi Isozaki. Differentiability of generalized Fourier transforms associated with Schrödinger operators. *J. Math. Kyoto Univ.*, 25:789–806, 1985.

[Iso86] Hiroshi Isozaki. Decay rates of scattering states for Schrödinger operators. *J. Math. Kyoto Univ.*, 26:595–603, 1986.

[Iso87] Hiroshi Isozaki. Singular limits for the compressible Euler equation in an exterior domain. *J. Reine Angew. Math.*, 381:1–36, 1987.

[Jäg67] Willi Jäger. Zur Theorie der Schwingungsgleichung mit variablen Koeffizienten in Außengebieten. *Math. Z.*, 102:62–88, 1967.

[Ker93] Charlotte Kerler. Existenz einer verallgemeinerten Fouriertransformation bei variablen Koeffizienten im Außengebiet. Diplomarbeit, Bonn, Juli 1993.

[Kg82] Hitoshi Kumano-go. *Pseudo-differential operators. (Updated transl. from the Japanese by the author, Remi Vaillancourt, and Michihiro Nagase).* MIT Press, Cambridge et al., 1982.

[Kir97] Gustav Kirchhoff. *Mechanik. Vorlesungen über mathematische Physik.* Teubner Verlag, Leipzig, 1897.

[Lei86] Rolf Leis. *Initial boundary value problems in mathematical physics*, volume 50. Teubner, Stuttgart; John Wiley & Sons, Chichester et al., 1986.

[Mor75a] Cathleen S. Morawetz. Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 28:229–264, 1975.

[Mor75b] Cathleen S. Morawetz. *Notes on time decay and scattering for some hyperbolic problems.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1975.

[Pet83] Bent E. Petersen. *Introduction to the Fourier transform and pseudo-differential operators*, volume 19. 1983.

[Rac92] Reinhard Racke. *Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems.* Vieweg Verlag, Braunschweig et al., 1992.

[Rac95] Reinhard Racke. Generalized Fourier transforms and global, small solutions to Kirchhoff equations. *Appl. Anal.*, 58(1-2):85–100, 1995.

[Sai74] Yoshimi Saito. The principle of limiting absorption for the non-selfadjoint Schrödinger operator in R^N $(N \neq 2)$. *Publ. Res. Inst. math. Sci., Kyoto Univ.*, 9:397–428, 1974.

[Sai79] Yoshimi Saito. *Spectral representations for Schrödinger operators with long-range potentials*, volume 727. Springer Verlag, Berlin et al.; Lecture Notes in Mathematics, 1979.

[Sch63] Friedrich W. Schäfke. *Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik.* 1963.

[Tay81] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential operators*, volume 70. Princeton University Press, 1981.

[Tri72] Hans Triebel. *Höhere Analysis*, volume 76. 1972.

[TS59] Andrej N. Tychonoff and Aleksandr A. Samarski. *Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.

[Vaj89] Boris R. Vajnberg. *Asymptotic methods in equations of mathematical physics. Transl. from the Russian by E. Primrose.* Gordon and Breach Science Publishers, New York et al., 1989.

[Wil75] Calvin H. Wilcox. *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*, volume 442. Springer Verlag, Berlin et al.; Lecture Notes in Mathematics, 1975.

[WW93] Norbert Weck and Karl J. Witsch. Complete low frequency analysis for the reduced wave equation with variable coefficients in three dimensions. *Commun. Partial Differ. Equations 17, No.9/10, 1619-1663 (1992), Correction 18, No.3/4,*, 729, 1993.

[WW97a] Norbert Weck and Karl J. Witsch. Generalized linear elasticity in exterior domains II: Low-fraquency asymptotics. *Math. Methods Appl. Sci. 20, No. 17, 1501-1530*, 1997.

[WW97b] Norbert Weck and Karl J. Witsch. Generalized linear elasticity in exterior domains I: Radiation problems. *Math. Methods Appl. Sci. 20, No. 17, 1469-1500*, 1997.