Globale Lösungen nichtlinearer Viskoelastizitätsgleichungen im Ganzraumfall

Diplomarbeit

Felix Höpfner

Betreuer: Prof. Dr. Reinhard Racke

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

05. Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Formulierung des Hauptsatzes

In dieser Arbeit werden wir folgendes Cauchyproblem betrachten:

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) - \nu\Delta u_t(t,x) = (\partial_1\partial_2 u(t,x))^{\gamma+1}, \tag{1-1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x). \tag{1-2}$$

Dabei sind $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$ und $\gamma \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, und $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$. Dieses Modell tritt in der Viskoelastizitätstheorie auf. Viskoelastische Materialien sind etwa Polymere, Suspensionen und Emulsionen aber auch kompressible Gase. Betrachten wir den linearen Teil von (1-1), (1-2) im $\mathbb{R}^1$ für $x \in (0,1)$ mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0,\infty),$$

und ersetzen wir $u_{xx}(t,x)$ durch $\sigma'(u_x(t,x))u_{xx}(t,x)$, so beschreibt dies die rein longitudinale Bewegung eines homogenen Barrens, der in seinem ursprünglichen Ruhezustand Einheitswürfelgröße hat. Bezeichnet x die Position einer vertikalen Querschnittsfläche in der homogenen Ruhelage, dann ist die horizontale Auslenkung dieser Fläche gegeben durch $u(t,x)$ und die Randbedingungen bedeuten, dass beide Enden fest sind. Dies ist das einfachste Modell, bei dem die Beschleunigung $u_{tt}(t,x)$ einer Querschnittsfläche nicht nur vom Zustand zur Zeit t sondern auch von vorherigen Zuständen abhängt. Weitere Informationen zu diesem Beispiel und zu mathematischen Problemen in der Viskoelastizität im Allgemeinen findet man in [1, 2, 3].
Wir werden uns also nur für reellwertige Lösungen von (1-1), (1-2) interessieren. Das Hauptresultat dieser Arbeit wird ein (in der Zeit) globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz des Problems (1-1), (1-2) in L^2 für hinreichend kleine und glatte Anfangsdaten u_0 und u_1 sein. Zunächst

formulieren wir nun diesen Hauptsatz:

Satz 1.1
Es seien $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$ und $\gamma \in \mathbb{N}$ beliebig mit $\gamma n > 2$. Seien weiter $s \geq 12 + n$ gerade und $u_0 \in H^{s+2} \cap W^{s-2,1}$, $u_1 \in H^{s+2} \cap W^{s-4,1}$ reellwertig. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass, falls $\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_0\|_{s-2,1} + \|u_1\|_{s,2} + \|u_1\|_{s-4,1} < \delta$, eine globale reellwertige Lösung u von (1-1), (1-2) in L^2 mit

$$u \in C^1([0,\infty), H^{s+2}) \cap C^2([0,\infty), H^s)$$

existiert. Dabei ist u eindeutig in $C^0([0,\infty), H^{s_1}) \cap C^1([0,\infty), H^{s_2}) \cap C^2([0,\infty), L^2)$, falls $s_1 > 3 + \frac{n}{2}$ und $s_2 > 1 + \frac{n}{2}$.

Bemerkung 1.2
Die so erhaltene Lösung ist sogar eine klassische Lösung, denn aus dem Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 2.16, folgt $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $u_t(t,x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in [0,\infty)$.

Beim Beweis dieses Satzes orientieren wir uns an [4]. Dabei wird eine allgemeine Beweismethode benutzt, mit der sich globale Existenzsätze zu einer viel größeren Klasse von nichtlinearen Evolutionsgleichungen unter speziellen Bedingungen an die Nichtlinearität und die Anfangsdaten beweisen lassen, so z.B. für nichtlineare:

- Wellengleichungen
- Elastizitätsgleichungen
- Wärmeleitungsgleichungen
- Thermoelastizitätsgleichungen
- Schrödingergleichungen
- Klein-Gordon-Gleichungen
- Maxwellgleichungen
- Plattengleichungen

Beispiele für globale Existenzsätze zu den genannten Problemen kann man in [5] nachlesen. Unser Beweis gliedert sich in die folgenden Schritte:

1. Wir betrachten das zu (1-1), (1-2) gehörige lineare Problem in L^2 mit $u_0 = 0$. Dabei zeigen wir die Existenz einer Lösung, falls $u_1 \in H^s$ mit s groß genug gilt, und beweisen einen Satz über deren Abklingverhalten.

2. Wir beweisen einen lokalen Existenzsatz für das Problem (1-1), (1-2) in L^2 in einem Zeitintervall $[0, T]$ mit $T > 0$ aus einem anderen lokalen Existenzsatz, den wir nur zitieren, und zeigen ein Eindeutigkeitsresultat für die lokale Lösung von (1-1), (1-2).

3. Für eine lokale Lösung von (1-1), (1-2) in L^2, wie wir sie in Schritt 2 erhalten haben, beweisen wir für alle $t \in [0, T]$ eine Energieabschätzung.

4. Für eine solche lokale Lösung zeigen wir eine a priori Abschätzung, falls die Anfangsdaten hinreichend klein und glatt sind, indem wir die Lösung durch Lösungen des linearen Problems darstellen und den Satz aus Schritt 1 über das Abklingverhalten der Lösungen des linaren Problems und die Energieabschätzung aus Schritt 3 für die lokale Lösung ausnutzen.

5. Im fünften Schritt beweisen wir mit Hilfe der Energieabschätzung aus Schritt 3 und der a priori Abschätzung aus Schritt 4 für alle $t \in [0, T]$ eine Abschätzung der Energie zur Zeit t gegen die Energie zur Zeit $t = 0$ multipliziert mit einer von t, T und den Anfangsdaten unabhängigen Konstanten. Diese Abschätzung, zusammen mit dem Eindeutigkeitsresultat aus Schritt 2, welches uns auch die Eindeutigkeit der globalen Lösung liefert, erlaubt es uns nun, die lokale Lösung sukzessive fortzusetzen zu einer globalen Lösung.

Kapitel 2

Notationen und Hilfsmittel

In diesem Kapitel werden wir die verwendeten Notationen festlegen und benötigte Sätze und Definitionen vorstellen.

2.1 Notationen

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Für genügend oft differenzierbare Funktionen $u : \Gamma \subset \mathbb{R}_0^+ \to X$, $t \mapsto u(t)$, wobei X ein beliebiger Banachraum ist, benutzen wir folgende Notation für die Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
u_t(t) &:= \partial_t u(t) := \frac{\partial}{\partial t} u(t), \\
u_{tt}(t) &:= \partial_t^2 u(t), \\
u_{ttt}(t) &:= \partial_t^3 u(t).
\end{aligned}
$$

Sind $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so definieren wir

$$
|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \quad , \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}
$$

und wir schreiben

$$
\begin{aligned}
&\partial_j u := \frac{\partial}{\partial x_j} u \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n, \\
&\nabla^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{\alpha_n} u, \quad \nabla u := (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)^t\,, \quad \Delta u := \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u,
\end{aligned}
$$

falls $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto u(x)$ genügend oft (schwach) differenzierbar ist, wobei im Fall der schwachen Differenzierbarkeit $\frac{\partial}{\partial x_j}u$ die schwache Ableitung von u nach x_j bezeichnet.
Für $u : \Gamma \subset \mathbb{R}_0^+ \to L^2$, $t \mapsto u(t)$ differenzierbar mit $u(t) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in \Gamma$ gebrauchen wir außerdem die folgende Notation:

$$Du(t) \quad := \quad (\partial_t u(t), \partial_1 u(t), \ldots, \partial_n u(t))^t \, .$$

Nun führen wir die Bezeichnungen für die verwendeten Funktionenräume ein. Seien dazu $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p \le \infty$ beliebig. Dann schreiben wir:

$$\begin{aligned}
C^m(\mathbb{R}^n) &= \text{Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen} \\
C^\infty(\mathbb{R}^n) &:= \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\mathbb{R}^n) \\
C_0^\infty(\mathbb{R}^n) &:= \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad | \quad \text{supp u} \subset\subset \mathbb{R}^n\} \\
C_b^m(\mathbb{R}^n) &:= \{u \in C^m(\mathbb{R}^n) \quad | \quad \nabla^\alpha u \text{ beschränkt für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \le m\} \\
L^p(\mathbb{R}^n) &= \text{Üblicher Lebesgue-Raum mit Norm } \|\cdot\|_p \\
W^{m,p}(\mathbb{R}^n) &:= \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad | \quad \underbrace{\nabla^\alpha u}_{schwach} \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad 0 \le |\alpha| \le m\}
\end{aligned}$$

$W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ wird zu einem Banachraum mit der folgenden Definition der Norm auf $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{m,p} &:= \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\nabla^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad \text{falls } 1 \le p < \infty, \\
\|u\|_{m,\infty} &:= \max_{0\le|\alpha|\le m} \|\nabla^\alpha u\|_\infty .
\end{aligned}$$

Definieren wir für $u \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\| \quad := \quad \max_{|\alpha|\le m} \sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla^\alpha u(x)| \, ,$$

so ist auch $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.

Für $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ benutzen wir außerdem die folgende Bezeichnung:

$$\|\nabla^m u\|_p \quad := \quad \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\nabla^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Ab jetzt schreiben wir immer L^p und $W^{m,p}$ statt $L^p(\mathbb{R}^n)$ und $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ und H^m statt $W^{m,2}$.
Nun führen wir noch die Sobolevräume für vektorwertige Funktionen ein. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$

beliebig. Dann definieren wir:

$$(W^{m,p})^N \;:=\; \left\{u = (u_1, \ldots, u_N)^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^N \quad | \quad u_i \in W^{m,p} \text{ für } i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &:= \left(\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{m,p}^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty, \quad \text{und} \\ \|u\|_{m,\infty} &:= \max_{i=1,\ldots,N} \|u_i\|_{m,\infty} \end{aligned}$$

wird $(W^{m,p})^N$ zu einem Banachraum und wir schreiben einfach $W^{m,p}$.
Weiter bezeichnet $[r]$ für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl z mit $z \leq r$ und im Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 2.16, bedeutet außerdem $\hookrightarrow$ „stetige Einbettung“.

2.2 Hilfsmittel

Fouriertransformation

Um die Existenz einer Lösung des zu (1-1), (1-2) gehörigen linearen Problems und einen Satz über deren Abklingverhalten zu zeigen, benötigen wir einige Resultate aus der Theorie der Fouriertransformation.
Zunächst definieren wir den Operator der Fourier-Transformation und den Operator der inversen Fourier-Transformation auf L^1.

Definition 2.1 (Fourier-Transformation)
Für Funktionen $f \in L^1$ definieren wir Ff und $F^{-1}f$ durch

$$\begin{aligned} (Ff)(\xi) &:= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ (F^{-1}f)(x) &:= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)d\xi, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

und nennen F den Operator der Fourier-Transformation und F^{-1} den Operator der inversen Fourier-Transformation.

F und F^{-1} bilden also linear und stetig mit Norm $M_0 \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ von L^1 nach L^∞ ab, denn es gilt für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$|(Ff)(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1 \quad \text{und} \quad \left|(F^{-1}f)(x)\right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1.$$

Nun definieren wir den sogenannten Schwartz-Raum, dessen Elemente sich günstig unter der Fourier-Transformation verhalten.

Definition 2.2 (Schwartz-Raum)
Die Menge

$$S := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \forall p, q \in \mathbb{N}_0^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^q \nabla^p \varphi(x)| < \infty \right\}$$

heißt ***Schwartz-Raum****.*

Mit dieser Definition können wir nun die folgenden Sätze über die Einschränkungen von F und F^{-1} auf S formulieren:

Satz 2.3
Für alle $f \in S$ gilt:

$$(F(\nabla_x^\alpha f))(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (Ff)(\xi) \quad , \quad (F^{-1}(\nabla_\xi^\alpha f))(x) = (-i)^{|\alpha|} x^\alpha (F^{-1}f)(x),$$
$$\nabla_\xi^\alpha (Ff)(\xi) = (F((-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x)))(\xi) \quad , \quad \nabla_x^\alpha (F^{-1}f)(x) = (F^{-1}(i^{|\alpha|} \xi^\alpha f(\xi)))(x).$$

Satz 2.4
F und F^{-1} sind Automorphismen von S und es gilt für alle $f \in S$:

$$F^{-1}Ff = FF^{-1}f = f.$$

Satz 2.5 (Parsevalsche Formel)
Für alle $f \in S$ gilt:

$$\|Ff\|_2 = \|f\|_2 \quad , \quad \|F^{-1}f\|_2 = \|f\|_2.$$

Unser Ziel ist es F und F^{-1} auf den ganzen L^2 fortzusetzen. Die beiden Fortsetzungen werden Isometrien und zueinander invers auf L^2 sein und auf $L^2 \cap L^1$ mit der ursprünglichen Definition übereinstimmen. Dafür benötigen wir die folgende Dichtheitsaussage:

Satz 2.6
Für alle $m \geq 0$ *und alle* $p \in \mathbb{R}$ *mit* $1 \leq p < \infty$ *gilt:*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \textit{ ist dicht in } W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 2.7
Hier haben wir das Argument $\mathbb{R}^n$ *wieder mitnotiert, da Satz* 2.6 *sonst nicht gilt.*

Offenbar gilt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S$ und wir können somit folgern :

Korollar 2.8
Für alle $m \geq 0$ *und alle* $p \in \mathbb{R}$ *mit* $1 \leq p < \infty$ *gilt:*

$$S \textit{ ist dicht in } W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Die Beweise der vorangegangen Sätze finden sich in [6]. Dort sind F und F^{-1} mit anderen Vorfaktoren versehen, was an den Resultaten aber nichts ändert. Außerdem werden die Sätze 3.3 und 3.5 dort nur für F gezeigt. Satz 3.3 kann man für F^{-1} aber analog wie für F beweisen und die Aussage von Satz 3.5 für F^{-1} folgt aus der Aussage für F und Satz 3.4.

Nun können wir den schon erwähnten Satz über die Fortsetzungen von F und F^{-1} beweisen.

Satz 2.9
F *und* F^{-1} *lassen sich so zu Isometrien auf* L^2 *fortsetzen, dass die Fortsetzungen auf* L^2 *zueinander invers sind und auf* $L^2 \cap L^1$ *fast überall mit den ursprünglichen Definitionen in Defintion* 2.1 *übereinstimmen.*

Beweis
Wir führen den Beweis nicht in allen Details aus. Sei $f \in L^2$ beliebig. Wegen Korollar 2.8 existiert eine Folge $(\phi_n)_n \subset S$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f - \phi_n\|_2 = 0$. Dann folgt aus der Parsevalschen Formel, dass auch $(F\phi_n)_n$ und $(F^{-1}\phi_n)_n$ Cauchy-Folgen in L^2 sind. Wir definieren nun $Ff := L^2 - \lim_{n\to\infty} F\phi_n$ und $F^{-1}f := L^2 - \lim_{n\to\infty} F^{-1}\phi_n$. Diese Definitionen sind unabhängig von der gewählten Folge und die Behauptungen des Satzes folgen aus den Sätzen 3.4 und 3.5.

$\square$

Bemerkung 2.10
Definieren wir für beliebiges $f \in L^2$

$$Ff \;:=\; L^2 - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{B(0,R)} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

und

$$F^{-1}f \quad := \quad L^2 - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{B(0,R)} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi,$$

so stimmt diese Definition mit der aus dem Beweis von Satz 2.9 überein.

Dabei sind bei beiden Definitionen Ff und $F^{-1}f$ für $f \in L^2$ natürlich nur bis auf Gleichheit fast überall bestimmt. Für den Rest dieser Arbeit werden F und F^{-1} immer die Fortsetzungen nach Satz 2.9 bezeichnen. Für unsere Anwendung können wir aus den bisherigen Ergebnissen folgern:

Korollar 2.11
Es seien $f \in L^2$ und $s \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt:

$$F^{-1}f \in H^s \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq s : \; i^{|\alpha|}\xi^\alpha f(\xi) \in L^2.$$

Haben wir schon $F^{-1}f \in H^s$, so folgt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla^\alpha (F^{-1}f)(x) \quad = \quad (F^{-1}(i^{|\alpha|}\xi^\alpha f(\xi)))(x).$$

Korollar 2.12
Es seien $s \in \mathbb{N}_0$ und $f \in H^s$ beliebig. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s$ und fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$(F(\nabla^\alpha f))(\xi) \quad = \quad i^{|\alpha|}\xi^\alpha (Ff)(\xi).$$

Aus Korollar 2.12 folgt sofort:

Korollar 2.13
Es seien $s \in \mathbb{N}_0$ und $f \in H^s$ beliebig mit s gerade. Dann gilt für fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$(F((1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f))(\xi) \quad = \quad (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (Ff)(\xi).$$

Interpolation

Aus der Theorie der Interpolation benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 2.14 (Satz von Riesz-Thorin)
Es sei T eine lineare, beschränkte Abbildung von L^{p_0} nach L^{q_0} mit Norm M_0 und von L^{p_1} nach L^{q_1} mit Norm M_1 und es gelte $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ und $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$.

Dann ist T eine lineare, beschränkte Abbildung von L^p nach L^q mit Norm $M \leq M_0^{1-\Theta} M_1^{\Theta}$, falls gilt:

$$0 < \Theta < 1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\Theta}{p_0} + \frac{\Theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\Theta}{q_1}.$$

Der Beweis dieses Satzes findet sich in [7].

Wenden wir den Satz von Riesz-Thorin auf F und F^{-1} an, so erhalten wir:

Korollar 2.15
Es sei $p \in \mathbb{R}$ beliebig mit $1 \leq p \leq 2$. Dann sind F und F^{-1} lineare, beschränkte Abbildungen von L^p nach L^q mit Norm $M \leq 1$, falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Beweis
Wir haben:

$$F, F^{-1} : L^1 \to L^\infty \qquad \text{mit Norm } M_0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}, \tag{2-1}$$

$$F, F^{-1} : L^2 \to L^2 \qquad \text{mit Norm } M_1 = 1. \tag{2-2}$$

Mit dem Satz von Riesz-Thorin folgt

$$F, F^{-1} : L^p \to L^q \qquad \text{linear und beschränkt mit Norm } M \leq 1,$$

falls $\frac{1}{p} = 1 - \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} \quad$ und $\quad 0 < \theta < 1$.
Es ergibt sich also

$$F, F^{-1} : L^p \to L^q \qquad \text{linear und beschränkt mit Norm } M \leq 1,$$

falls $1 < p < 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Insgesamt folgt mit (2-1) und (2-2) die Behauptung. □

Ein Sobolevscher Einbettungsatz und Folgerungen

Wir werden mehrfach einen Sobolevschen Einbettungssatz benutzen. Dieser lautet:

Satz 2.16 (Ein Sobolevscher Einbettungssatz)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $j, m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$ beliebig. Dann gilt

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C_B^j(\mathbb{R}^n),$$

falls $mp > n$ erfüllt ist.

Allerdings werden wir nur den Fall $p = 2$ benötigen. Außerdem brauchen wir den folgenden Satz, der sich aus dem Sobolevschen Einbettungssatz ergibt:

Satz 2.17
Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ beliebig mit $mp > n$. Dann haben wir $uv \in W^{m,p}$ für alle $u, v \in W^{m,p}$, wobei uv das punktweise Produkt von u und v, definiert fast überall im $\mathbb{R}^n$, bezeichnet. Es existiert außerdem eine nur von n, m und p abhängige Konstante C, so dass für alle $u, v \in W^{m,p}$ folgendes gilt:

$$||uv||_{m,p} \leq C||u||_{m,p}||v||_{m,p}.$$

Das bedeutet: Definieren wir durch $||u||^*_{m,p} = C||u||_{m,p}$ eine neue, zu $||\cdot||_{m,p}$ äquivalente, Norm, so ist $W^{m,p}$ mit dieser Norm eine kommutative Banachalgebra bzgl. punktweiser Multiplikation.

Die Beweise der beiden vorangegangenen Sätze kann man in [8] nachlesen. Wir werden zudem das folgende Korollar von Satz 2.17 benötigen:

Korollar 2.18
Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ und $1 \leq p < \infty$ beliebig mit $mp > n$. Seien weiter u und v in $C^0([0, T], W^{m,p})$. Dann gilt auch:

$$uv \in C^0([0, T], W^{m,p}).$$

Beweis
Seien die Voraussetzungen des Satzes gegeben und $t, t_0 \in [0, T]$ beliebig. C bezeichne verschiedene, nicht von t und t_0 abhängige, Konstanten. Dann gilt wegen Satz 2.17, der Kompaktheit von $[0, T]$ und $u, v \in C^0([0, T], W^{m,p})$:

$$\begin{aligned}
||(uv)(t) - (uv)(t_0)||_{m,p} &\leq ||u(t)v(t) - u(t)v(t_0)||_{m,p} + ||u(t)v(t_0) - u(t_0)v(t_0)||_{m,p} \\
&\leq C||u(t)||_{m,p}||v(t) - v(t_0)||_{m,p} + C||v(t_0)||_{m,p}||u(t) - u(t_0)||_{m,p} \\
&\leq C||v(t) - v(t_0)||_{m,p} + C||u(t) - u(t_0)||_{m,p} \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

□

Eine Moser-Ungleichung

In Kapitel 5 und Kapitel 6 werden wir eine sogenannte Moser-Ungleichung für zusammengesetzte Funktionen benutzen. Diese lautet:

Lemma 2.19
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Konstante $C = C(m, n) > 0$ so, dass für alle $f, g \in H^m \bigcap L^\infty$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ gilt:

$$\|\nabla^\alpha (fg)\|_2 \quad \leq \quad C\left(\|f\|_\infty \|\nabla^m g\|_2 + \|\nabla^m f\|_2 \|g\|_\infty\right).$$

Ein technisches Lemma

Folgendes Lemma wird beim Beweis der a priori Abschätzung in Kapitel 6 benötigt:

Lemma 2.20
Es seien $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \geq 0$ mit

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{\gamma} \geq 1, \quad \left(\tilde{\alpha} \geq \tilde{\gamma} \quad \text{oder} \quad \tilde{\beta} \geq \tilde{\gamma}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} > \tilde{\gamma} \quad &, \quad \text{falls} \quad \tilde{\beta} = 1, \\ \tilde{\beta} > \tilde{\gamma} \quad &, \quad \text{falls} \quad \tilde{\alpha} = 1. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \int_0^t (1+t)^{\tilde{\gamma}} (1+t-r)^{-\tilde{\alpha}} (1+r)^{-\tilde{\beta}} dr < \infty.$$

Die Beweise von Lemma 2.19 und Lemma 2.20 findet man in [5].

Kapitel 3

Existenz und Abklingverhalten einer Lösung des linearen Problems

In diesem Kapitel werden wir die Existenz einer Lösung des zu (1-1), (1-2) gehörigen linearen Problems in geeigneten Räumen zeigen und die Abklingeigenschaften dieser Lösung untersuchen. Diese benötigen wir, um die a priori Abschätzung einer lokalen Lösung des nichtlinearen Problems in Kapitel 6 zu beweisen.
Wir betrachten also das folgende Anfangswertproblem:

$$y_{tt}(t,x) - \Delta y(t,x) - \nu \Delta y_t(t,x) = 0, \tag{3-1}$$

$$y(0,x) = y_0(x) = 0, \quad y_t(0,x) = y_1(x). \tag{3-2}$$

Dabei ist $(t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$ und y und y_1 können auch komplexwertig sein, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\nu > 0$ beliebig, aber fest, gewählt sind. Es reicht hier aus, den Fall $y_0 = 0$ zu betrachten, da wir später die lokale Lösung allein durch solche Lösungen von (3-1), (3-2) darstellen können. Es sei erwähnt, dass wir auch eine Lösung von (3-1), (3-2) ohne die Bedingung $y_0 = 0$ durch solche Lösungen erhalten. Außerdem benötigen wir keine klassischen Lösungen, sondern nur Lösungen von (3-1), (3-2) in L^2. Wie in [4] nutzen wir die Theorie der Fouriertransformation, um die globale Existenz einer Lösung und ein Resultat über deren Abklingverhalten zu beweisen, falls $y_1 \in H^s$ mit s groß genug gilt.

Zunächst wollen wir unseren Ansatz motivieren. Dazu nehmen wir an, es existiere eine geeignet glatte Lösung y von (3-1), (3-2). Mit den Greenschen Formeln erhalten wir für die Fouriertransformierte dieser Lösung:

$$\begin{aligned}
(Fy)_{tt}(t,\xi) &= \partial_t^2 \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} y(t,x)dx \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} y_{tt}(t,x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} (\Delta y(t,x) + \nu \Delta y_t(t,x))dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \left(-|\xi|^2 y(t,x) - \nu |\xi|^2 y_t(t,x) \right) dx \\
&= -|\xi|^2 (Fy)(t,\xi) - \nu |\xi|^2 (Fy)_t(t,\xi). \qquad (3\text{-}3)
\end{aligned}$$

Für festes $\xi \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir also eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Fouriertransformierte der Lösung mit den Anfangswerten $(Fy)(0,\xi) = 0$ und $(Fy)_t(0,\xi) = (Fy_1)(\xi)$. Um diese zu lösen, transformieren wir (3-3) auf ein System erster Ordnung. Dazu setzen wir:

$$\tilde{w}(t,\xi) = \begin{pmatrix} (Fy)(t,\xi) \\ (Fy)_t(t,\xi) \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\tilde{w}_t(t,\xi) \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -|\xi|^2 & -\nu|\xi|^2 \end{pmatrix}}_{=:A} \tilde{w}(t,\xi).$$

Nun berechnen wir die Eigenwerte von A. Für diese muss

$$\det(A - \lambda E_2) \;\overset{!}{=}\; \lambda(\lambda + \nu|\xi|^2) + |\xi|^2 \;=\; 0$$

gelten, wobei E_2 die Standardmatrix im $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bezeichnet. Damit haben wir folgende Eigenwerte:

$$\lambda_{1/2} \;=\; -\frac{\nu|\xi|^2}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\nu^2|\xi|^4}{4} - |\xi|^2}}_{=:\omega}.$$

Um ein Fundamentalsystem zu erhalten, benötigen wir Eigenvektoren $v_{1/2}$ zu den Eigenwerten $\lambda_{1/2}$. Diese sind z.B.:

$$v_{1/2} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1/2} \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir als Fundamentalsystem zu $\tilde{w}_t(t,\xi) = A\tilde{w}(t,\xi)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t,\xi) &= e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix},\\
\varphi_2(t,\xi) &= e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also:

$$\tilde{w}(t,\xi) = c_1(\xi)\cdot e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix} + c_2(\xi)e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Jetzt legen wir c_1 und c_2 durch die Anfangsdaten fest. Da $\tilde{w}(0,\xi) = \begin{pmatrix}(Fy)(0,\xi)\\ (Fy)_t(0,\xi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ (Fy_1)(\xi)\end{pmatrix}$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned}
c_1(\xi) + c_2(\xi) &= 0,\\
c_1(\xi)\lambda_1 + c_2(\xi)\lambda_2 &= (Fy_1)(\xi).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
c_1(\xi) &= \frac{(Fy_1)(\xi)}{\lambda_1-\lambda_2},\\
c_2(\xi) &= -\frac{(Fy_1)(\xi)}{\lambda_1-\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Da $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{\frac{\nu^2|\xi|^4}{4} - |\xi|^2} = 2\omega$ gilt, erhalten wir für Fy:

$$(Fy)(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi) = e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi). \tag{3-4}$$

Dies führt zu folgendem Ansatz für unsere Lösung in L^2 für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$y(t) := F^{-1}\left((Fy)(t,\xi)\right) = F^{-1}\left(e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi)\right). \tag{3-5}$$

Wir definieren abkürzend

$$\tilde{y}(t,\xi) := e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi) \tag{3-6}$$

für alle $(t, \xi) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$, womit gilt:

$$y(t) \quad = \quad F^{-1}(\tilde{y}(t, \xi)) .$$

Später werden wir die partiellen Ableitungen von $\tilde{y}$ nach t bis zur 3. Ordnung benötigen. Diese sind für alle $(t, \xi) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{y}_t(t,\xi) \quad = \quad \left(-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)(Fy_1)(\xi), \tag{3-7}$$

$$\tilde{y}_{tt}(t,\xi) \quad = \quad \left(\left(\frac{\nu^2}{2}|\xi|^4 - |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} - \nu|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)(Fy_1)(\xi), \tag{3-8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{ttt}(t,\xi) \quad = \quad & \left(\left(-\frac{\nu^3}{2}|\xi|^6 + \frac{3\nu}{2}|\xi|^4\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\right.\\ & \left. + \left(\nu^2|\xi|^4 - |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)(Fy_1)(\xi).\end{aligned} \tag{3-9}$$

Bevor wir zeigen, dass die in (3-5) definierte Funktion, falls $y_1 \in H^s$ mit s groß genug gilt, das Problem (3-1), (3-2) in L^2 löst, beweisen wir einige Lemmata, die wir benötigen.

Lemma 3.1
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\nu > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\right| \quad \leq \quad \left\{\begin{array}{ll} t, & 0 \leq |\xi| \leq \frac{2}{\nu} \\ te^{\omega t}, & \frac{2}{\nu} \leq |\xi| \end{array}\right\}.$$

Beweis
Es seien also $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Sei außerdem zunächst $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $|\xi| \leq \frac{2}{\nu}$. Dann gilt $\frac{\nu^2|\xi|^4}{4} - |\xi|^2 \leq 0$ und damit

$$\omega = \sqrt{\frac{\nu^2|\xi|^4}{4} - |\xi|^2} = i\sqrt{|\xi|^2 - \frac{\nu^2|\xi|^4}{4}} =: i\bar{\omega},$$

wobei $\bar{\omega} \geq 0$ rein reell ist. Es folgt:

$$\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} = \frac{e^{i\bar{\omega}t}-e^{-i\bar{\omega}t}}{2i\bar{\omega}} = \frac{\sin(\bar{\omega}t)}{\bar{\omega}}. \tag{3-10}$$

Definieren wir nun für $x > 0$

$$f_t(x) := \frac{\sin(xt)}{x},$$

so gilt mit der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} f_t(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(xt)}{x} = \lim_{x\to 0} t\frac{\cos(xt)}{1} = t. \tag{3-11}$$

f_t lässt sich also stetig auf $[0,\infty)$ fortsetzen und in diesem Sinne ist $\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \leq \frac{2}{\nu}$ wohldefinert und stetig. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bzw. aus einer Taylor-Entwicklung von $\sin(xt)$ um $x = 0$ bis zur 1. Ordnung folgt außerdem für alle $x > 0$

$$\sin(xt) = \sin(0) + t\cos(\vartheta t)x = t\cos(\vartheta t)x \quad \text{für ein } \vartheta \in (0,x)$$

und damit

$$\left|\frac{\sin(xt)}{x}\right| \leq |t\cos(\vartheta t)| \leq t. \tag{3-12}$$

Aus (3-10)-(3-12) erhalten wir also:

$$\left|\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\right| \leq t. \tag{3-13}$$

Sei nun $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$. Dann gilt $\frac{\nu^2|\xi|^4}{4} - |\xi|^2 \geq 0$ und damit ist ω rein reell mit $\omega \geq 0$. Definieren wir nun für $x > 0$

$$g_t(x) := \frac{e^{xt}-e^{-xt}}{2x},$$

so gilt wieder mit der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} g_t(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{xt}-e^{-xt}}{2x} = \lim_{x\to 0} t\frac{e^{xt}+e^{-xt}}{2} = t. \tag{3-14}$$

g_t lässt sich also stetig auf $[0,\infty)$ fortsetzen und in diesem Sinne ist $\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$ wohldefinert und stetig. Wie oben folgt für alle $x > 0$ aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$e^{xt} - e^{-xt} = \left(e^0 - e^0\right) + t\left(e^{\vartheta t} + e^{-\vartheta t}\right)x = t\left(e^{\vartheta t} + e^{-\vartheta t}\right)x \quad \text{für ein } \vartheta \in (0,x)$$

und damit

$$\left|\frac{e^{xt}-e^{-xt}}{2x}\right| = \left|t\frac{e^{\vartheta t}+e^{-\vartheta t}}{2}\right| \leq te^{xt}. \tag{3-15}$$

Aus (3-14), (3-15) und wegen $e^z \geq 1$ für $z \geq 0$ erhalten wir also:

$$\left|\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega}\right| \leq t e^{\omega t}. \tag{3-16}$$

Da $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig war, folgt aus (3-13) und (3-16) die Behauptung. □

Leichter zu beweisen ist folgendes Lemma.

Lemma 3.2

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\nu > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right| \leq \left\{\begin{array}{ll} 1, & |\xi| \leq \frac{2}{\nu} \\ e^{\omega t}, & |\xi| \geq \frac{2}{\nu} \end{array}\right\}.$$

Beweis

Es seien also $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Sei außerdem zunächst $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $|\xi| \leq \frac{2}{\nu}$. Dann definieren wir wie im Beweis von Lemma 3.1:

$$\bar{\omega} = \sqrt{|\xi|^2 - \frac{\nu^2|\xi|^4}{4}}.$$

Dann ist $\bar{\omega}$ wieder rein reell mit $\bar{\omega} \geq 0$ und es gilt $\omega = i\bar{\omega}$. Wir erhalten also:

$$\left|\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right| = \left|\frac{e^{i\bar{\omega} t} + e^{-i\bar{\omega} t}}{2}\right| = |\cos(\bar{\omega} t)| \leq 1.$$

Sei jetzt $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$. Dann ist ω rein reell mit $\omega \geq 0$ und es folgt:

$$\left|\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right| \leq e^{\omega t}.$$

Da $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig war, ist das Lemma bewiesen. □

Wir benötigen außerdem eine Abschätzung von $e^{\omega t}$ für große ξ. Aus einer Taylor-Entwicklung von $\sqrt{1-\epsilon}$ um $\epsilon = 0$ bis zur 1.Ordnung erhalten wir folgendes Lemma:

Lemma 3.3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\nu > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$:

$$e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{\omega t} \leq e^{-\frac{1}{\nu} t}.$$

Beweis

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$. Für beliebiges $\epsilon \in [0,1]$ folgt aus der Taylorschen Formel die Existenz eines $\vartheta \in (0,\epsilon)$ mit:

$$\sqrt{1-\epsilon} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\vartheta}}\epsilon \leq 1 - \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Wegen $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$ folgt $\frac{4}{\nu^2|\xi|^2} \leq 1$ und damit

$$\sqrt{1 - \frac{4}{\nu^2|\xi|^2}} \leq 1 - \frac{2}{\nu^2|\xi|^2},$$

woraus sich insgesamt ergibt:

$$e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{\omega t} = e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t\sqrt{1-\frac{4}{\nu^2|\xi|^2}}} \leq e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t\left(1-\frac{2}{\nu^2|\xi|^2}\right)} = e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{-\frac{1}{\nu}t} = e^{-\frac{1}{\nu}t}.$$

Da $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$ beliebig waren, ist die Behauptung gezeigt. □

Weiter beweisen wir das folgende Lemma:

Lemma 3.4

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ und $s > 0$ beliebig. Dann existiert ein $C > 0$ mit:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^r e^{-|\xi|^2 s} d\xi \quad \leq \quad C.$$

C hängt dabei von n, r und s ab.

Beweis

Es seien also $n \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ und $s > 0$ beliebig. C wird im Verlauf des Beweises verschiedene positive, von n, r und s abhängige, Konstanten bezeichnen. Wir teilen das Integral auf in zwei Teilintegrale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^r e^{-|\xi|^2 s} d\xi \quad = \quad \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^r e^{-|\xi|^2 s} d\xi + \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^r e^{-|\xi|^2 s} d\xi. \tag{3-17}$$

Für das erste Integral gilt:

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^r e^{-|\xi|^2 s} d\xi \leq \int_{|\xi|\leq 1} d\xi \leq C. \tag{3-18}$$

Außerdem exsitiert wegen der Reihendarstellung der Exponentialfunktion für alle $\xi \neq 0$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $C(m,s) > 0$, so dass $e^{-|\xi|^2 s} \leq C(m,s)|\xi|^{-2m}$ gilt. Wir wählen m nun minimal mit $r - 2m + n < 0$. Dann folgt mit dem Satz von Fubini bzw. dem Cavalierischen Prinzip für das zweite Integral:

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\xi|\geq 1} |\xi|^r e^{-|\xi|^2 s} d\xi \;&\leq\; \int\limits_{|\xi|\geq 1} |\xi|^r C|\xi|^{-2m} d\xi \;=\; C\int\limits_1^\infty \int\limits_{|\xi|=\rho} |\xi|^{r-2m} dA d\rho \\ &=\; C\int\limits_1^\infty \int\limits_{|\xi|=\rho} \rho^{r-2m} dA d\rho \;=\; C\int\limits_1^\infty \lambda_{n-1}(\partial B(0,\rho))\rho^{r-2m} d\rho.\end{aligned}$$

Es bezeichnet $\lambda_{n-1}(\partial B(0,\rho))$ den Oberflächeninhalt der Kugel mit Radius ρ um den Ursprung im $\mathbb{R}^n$. Für diesen haben wir:

$$\lambda_{n-1}(\partial B(0,\rho)) \;=\; \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\rho^{n-1}.$$

Dabei ist Γ die Gammafunktion, für die gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!2^{2n}}, \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Wir erhalten also für das zweite Integral

$$\int\limits_{|\xi|\geq 1} |\xi|^r e^{-|\xi|^2 s} d\xi \;\leq\; C\int\limits_1^\infty \rho^{r-2m+n-1} d\rho \;=\; C\left[\frac{1}{r-2m+n}\rho^{r-2m+n}\right]_1^\infty \;\leq\; C, \tag{3-19}$$

da $r - 2m + n < 0$ ist. Aus (3-17)-(3-19) folgt die Behauptung. □

Ähnlich beweist man auch das nächste Lemma:

Lemma 3.5

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ beliebig und es gelte $s > r + n$. Dann existiert eine, von n, r und s abhängige, Konstante $C > 0$ mit:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^r}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi \;\leq\; C.$$

Beweis

Es seien also $n \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ beliebig und es gelte $s > r + n$. C bezeichne wieder verschiedene positive, von n, r und s abhängige, Konstanten. Wie im Beweis von Lemma 3.4 teilen wir das Integral in zwei Teilintegrale auf:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^r}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi \;\leq\; \int\limits_{|\xi|\leq 1} \frac{|\xi|^r}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi + \int\limits_{|\xi|\geq 1} \frac{|\xi|^r}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi. \tag{3-20}$$

Für das erste Integral gilt dann wieder

$$\int\limits_{|\xi|\leq 1} \frac{|\xi|^r}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi \;\leq\; \int\limits_{|\xi|\leq 1} 1 d\xi \;\leq\; C \tag{3-21}$$

und für das zweite Integral folgt wie im Beweis von Lemma 3.4 mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\xi|\geq 1} \frac{|\xi|^r}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi \;&\leq\; \int\limits_1^\infty \int\limits_{|\xi|=\rho} |\xi|^{r-s} dA d\rho \;\leq\; C \int\limits_1^\infty \rho^{r-s+n-1} d\rho \\ &=\; C \left[\frac{1}{r-s+n} \rho^{r-s+n} \right]_1^\infty \;\leq\; C, \end{aligned} \tag{3-22}$$

da wir $r - s + n < 0$ haben. Aus (3-20)-(3-22) ergibt sich die Behauptung. □

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun die beiden folgenden Lemmata beweisen.

Lemma 3.6

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$, $r \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq l \leq \infty$ beliebig und es gelte $s > r + \frac{n}{l}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l \;\leq\; C(1+t)^{-\frac{r-2}{2} - \frac{n}{2l}}.$$

Dabei hängt C nur von n, ν, r, l und s ab und im Fall $l = \infty$ genügt $s \geq r$.

Beweis

Es seien also $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$ beliebig. C bezeichne wieder verschiedene positive, nur von n, ν, r, l und s abhängige, Konstanten. Sei zunächst $1 \leq l < \infty$ beliebig und es gelte $s > r + \frac{n}{l}$. Dann haben wir für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l^l \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi$$

$$= \int\limits_{|\xi|\le\frac{2}{\nu}} \ldots + \int\limits_{|\xi|\ge\frac{2}{\nu}} \ldots \;=: \; I_1 + I_2. \tag{3-23}$$

Sei nun erst $t \geq 1$. Dann folgt für das erste Integral aus Lemma 3.1 und Lemma 3.4:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{|\xi|\le\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left|\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega}\right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \;\le\; \int\limits_{|\xi|\le\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} t^l d\xi \\ &= \int\limits_{|\vartheta|\le\frac{2}{\nu}\sqrt{t}} t^{-\frac{rl}{2}} |\vartheta|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2 l} t^l t^{-\frac{n}{2}} d\vartheta \;\le\; t^{-\frac{r-2}{2}l-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\vartheta|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2 l} d\vartheta \\ &\le \; Ct^{-\frac{r-2}{2}l-\frac{n}{2}}. \end{aligned} \tag{3-24}$$

Für das zweite Integral haben wir wiederum mit Lemma 3.1

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{|\xi|\ge\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left|\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega}\right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \\ &\le \int\limits_{|\xi|\ge\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} t^l e^{\omega tl} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \end{aligned}$$

und aus Lemma 3.3 und Lemma 3.5 folgt

$$\begin{aligned} I_2 &\le \; t^l e^{-\frac{l}{\nu}t} \int\limits_{|\xi|\ge\frac{2}{\nu}} \frac{|\xi|^{rl}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \;\le\; t^l e^{-\frac{l}{\nu}t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{rl}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \\ &\le \; Ct^l e^{-\frac{l}{\nu}t}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $m \geq \frac{r}{2}l + \frac{n}{2}$, so folgt aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion und aus $t \geq 1$

$$e^{-\frac{l}{\nu}t} \le Ct^{-m} \le Ct^{-\frac{r}{2}l-\frac{n}{2}}$$

und es ergibt sich

$$I_2 \;\le\; Ct^{-\frac{r-2}{2}l-\frac{n}{2}}. \tag{3-25}$$

Wir erhalten also aus (3-23)-(3-25) und wegen $t \geq 1$

$$\begin{aligned}\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l^l &\leq Ct^{-\frac{r-2}{2}l-\frac{n}{2}}(1+t)^{\frac{r-2}{2}l+\frac{n}{2}}(1+t)^{-\frac{r-2}{2}l-\frac{n}{2}} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{r-2}{2}l-\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

und damit

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l \leq C(1+t)^{-\frac{r-2}{2}-\frac{n}{2l}}. \tag{3-26}$$

Gelte nun $0 \leq t \leq 1$. Dann haben wir mit Lemma 3.1 für I_1:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \\ &\leq \int\limits_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} t^l d\xi \leq \int\limits_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} C d\xi \leq C. \end{aligned} \tag{3-27}$$

Wiederum wegen Lemma 3.1 haben wir für das zweite Integral

$$I_2 = \int\limits_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq \int\limits_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} t^l e^{\omega tl} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi$$

und es folgt mit Lemma 3.3 und Lemma 3.5:

$$I_2 \leq \int\limits_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{l}{\nu}t} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{rl}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq C. \tag{3-28}$$

Aus (3-23), (3-27) und (3-28) erhalten wir also

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l^l \leq C$$

und damit

$$\begin{aligned}\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l &\leq C = C(1+t)^{\frac{r-2}{2}+\frac{n}{2l}}(1+t)^{-\frac{r-2}{2}-\frac{n}{2l}} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{r-2}{2}-\frac{n}{2l}}. \end{aligned} \tag{3-29}$$

Wegen (3-26) und (3-29) ist das Lemma für $1 \leq l < \infty$ bewiesen.

Sei nun $l = \infty$ und es gelte nur $s \geq r$. Dann zerlegen wir den $\mathbb{R}^n$ wieder in die gleichen zwei Teilgebiete und haben für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned}
\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_\infty &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \\
&\leq \sup_{|\xi| \leq \frac{2}{\nu}} \{\ldots\} + \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \{\ldots\} \\
&=: S_1 + S_2. \qquad (3\text{-}30)
\end{aligned}$$

Sei wieder zuerst $t \geq 1$. Dann haben wir wegen Lemma 3.1

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sup_{|\xi| \leq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \\
&\leq \sup_{|\xi| \leq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} t \right\} \leq \sup_{|\vartheta| \leq \frac{2}{\nu}\sqrt{t}} \left\{ t^{-\frac{r}{2}} |\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} t \right\}.
\end{aligned}$$

Für $|\vartheta| \leq 1$ gilt $|\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} \leq 1$ und für $|\vartheta| \geq 1$ folgt aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
|\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} &\leq C|\vartheta|^r (|\vartheta|^2)^{-\frac{r}{2}} = C \quad , \quad \text{falls r gerade,} \\
|\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} &\leq C|\vartheta|^r (|\vartheta|^2)^{-\frac{r+1}{2}} \leq C \quad , \quad \text{falls r ungerade.}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für S_1:

$$S_1 \leq C t^{-\frac{r-2}{2}}. \qquad (3\text{-}31)$$

Mit Lemma 3.1 und Lemma 3.3 erhalten wir folgende Abschätzung für das zweite Supremum:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \leq \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} t e^{\omega t} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \\
&\leq \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r t e^{-\frac{1}{\nu} t} |\xi|^{-s} \right\} = t e^{-\frac{1}{\nu} t} \left(\frac{2}{\nu} \right)^{r-s} \leq C t e^{-\frac{1}{\nu} t}.
\end{aligned}$$

Aus $t \geq 1$ und der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt:

$$S_2 \leq C t t^{-r} \leq C t t^{-\frac{r}{2}} = C t^{-\frac{r-2}{2}}. \qquad (3\text{-}32)$$

Aus (3-30)-(3-32) und $t \geq 1$ erhalten wir schließlich

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_\infty \leq Ct^{-\frac{r-2}{2}}(1+t)^{\frac{r-2}{2}}(1+t)^{-\frac{r-2}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{r-2}{2}}. \quad (3\text{-}33)$$

Sei nun $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt wegen Lemma 3.1:

$$S_1 = \sup_{|\xi| \leq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \leq \sup_{|\xi| \leq \frac{2}{\nu}} \{ |\xi|^r t \} \leq C. \quad (3\text{-}34)$$

Für S_2 folgt aus Lemma 3.1 und Lemma 3.3:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \leq \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} t e^{\omega t} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \\ &\leq \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{1}{\nu} t} t |\xi|^{-s} \right\} \leq \sup_{|\xi| \geq \frac{2}{\nu}} \{ |\xi|^{r-s} \} \leq C. \end{aligned} \quad (3\text{-}35)$$

Aus (3-30), (3-34) und (3-35) folgt also:

$$\begin{aligned} \left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_\infty &\leq C = C(1+t)^{\frac{r-2}{2}}(1+t)^{-\frac{r-2}{2}} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{r-2}{2}}. \end{aligned} \quad (3\text{-}36)$$

Wegen (3-33) und (3-36) ist das Lemma nun auch für $l = \infty$ bewiesen. □

Das folgende Lemma ist wieder etwas leichter zu zeigen:

Lemma 3.7

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$, $r \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq l \leq \infty$ beliebig und es gelte $s > r + \frac{n}{l}$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ folgende Abschätzung gilt:

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l \leq C(1+t)^{-\frac{r}{2}-\frac{n}{2l}}.$$

Dabei hängt C nur von n, ν, r, l und s ab und im Fall $l = \infty$ genügt $s \geq r$.

Beweis

Es seien also $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$ beliebig. C wird im Verlauf des Beweises wieder verschiedene positive, nur von n, ν, r und l abhängige, Konstanten bezeichnen. Sei außerdem zunächst $1 \leq l < \infty$ beliebig und es gelte $s > r + \frac{n}{l}$. Wir zerlegen den $\mathbb{R}^n$ in die gleichen Teile wie im Beweis von Lemma 3.6. Damit haben wir für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$
\begin{aligned}
\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l^l &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \\
&= \int\limits_{|\xi|\leq \frac{2}{\nu}} \ldots + \int\limits_{|\xi|\geq \frac{2}{\nu}} \ldots \\
&=: I_1 + I_2. \qquad (3\text{-}37)
\end{aligned}
$$

Sei zuerst $t \geq 1$. Dann haben wir mit Lemma 3.2 und Lemma 3.4

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{|\xi|\leq \frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq \int\limits_{|\xi|\leq \frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} d\xi \\
&= \int\limits_{|\vartheta|\leq \frac{2}{\nu}\sqrt{t}} t^{-\frac{rl}{2}} |\vartheta|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2 l} t^{-\frac{n}{2}} d\vartheta \leq t^{-\frac{rl}{2}-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\vartheta|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2 l} d\vartheta \leq C t^{-\frac{rl}{2}-\frac{n}{2}}. \qquad (3\text{-}38)
\end{aligned}
$$

Für das zweite Integral folgt mit Lemma 3.2, Lemma 3.3 und Lemma 3.5:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{|\xi|\geq \frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq \int\limits_{|\xi|\geq \frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} e^{\omega tl} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \\
&\leq \int\limits_{|\xi|\geq \frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{l}{\nu}t} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq e^{-\frac{l}{\nu}t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{rl}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq C e^{-\frac{l}{\nu}t}.
\end{aligned}
$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $m \geq \frac{rl}{2} + \frac{n}{2}$. Dann folgt aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion und aus $t \geq 1$

$$
e^{-\frac{l}{\nu}t} \leq C t^{-m} \leq C t^{-\frac{rl}{2}-\frac{n}{2}}
$$

und damit

$$
I_2 \leq C t^{-\frac{rl}{2}-\frac{n}{2}}. \qquad (3\text{-}39)
$$

Aus (3-37)-(3-39) erhalten wir also

$$
\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l^l \leq C t^{-\frac{rl}{2}-\frac{n}{2}}
$$

und es folgt

$$
\begin{aligned}
\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l &\leq Ct^{-\frac{r}{2}-\frac{n}{2l}} = Ct^{-\frac{r}{2}-\frac{n}{2l}}(1+t)^{\frac{r}{2}+\frac{n}{2l}}(1+t)^{-\frac{r}{2}-\frac{n}{2l}} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{r}{2}-\frac{n}{2l}}. \qquad (3\text{-}40)
\end{aligned}
$$

Sei nun $0 \leq t \leq 1$. Dann haben wir mit Lemma 3.2 und Lemma 3.4 für I_1

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq \int\limits_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{rl}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq C \qquad (3\text{-}41)
\end{aligned}
$$

und für das zweite Integral

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right|^l \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq \int\limits_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} |\xi|^{rl} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 tl} e^{\omega tl} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \\
&\leq e^{-\frac{l}{\nu}t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{rl}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{sl}{2}}} d\xi \leq C. \qquad (3\text{-}42)
\end{aligned}
$$

Es folgt also aus (3-37), (3-41) und (3-42)

$$
\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l^l \leq C
$$

und damit:

$$
\begin{aligned}
\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_l &\leq C = C(1+t)^{\frac{r}{2}+\frac{n}{2l}}(1+t)^{-\frac{r}{2}-\frac{n}{2l}} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{r}{2}-\frac{n}{2l}}. \qquad (3\text{-}43)
\end{aligned}
$$

Wegen (3-40) und (3-43) ist das Lemma für $1 \leq l < \infty$ gezeigt.

Sei jetzt $l = \infty$ und es gelte nur $s \geq r$. Dann zerlegen wir den $\mathbb{R}^n$ wieder gleich und erhalten für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$
\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^n} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\}
$$

$$\leq \sup_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} \ldots + \sup_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} \ldots \leq S_1 + S_2. \qquad \text{(3-44)}$$

Sei nun zunächst wieder $t \geq 1$. Dann folgt für S_1 aus Lemma 3.2:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sup_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \\ &\leq \sup_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \right\} \leq \sup_{|\vartheta|\leq\frac{2}{\nu}\sqrt{t}} \left\{ t^{-\frac{r}{2}} |\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Lemma 3.6 haben wir für $|\vartheta| \leq 1$

$$|\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} \leq 1$$

und für $|\vartheta| \geq 1$ aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} |\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} &\leq C|\vartheta|^r (|\vartheta|^2)^{-\frac{r}{2}} = C \quad , \quad \text{falls r gerade,} \\ |\vartheta|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\vartheta|^2} &\leq C|\vartheta|^r (|\vartheta|^2)^{-\frac{r+1}{2}} \leq C \quad , \quad \text{falls r ungerade.} \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$S_1 \leq C t^{-\frac{r}{2}}. \qquad \text{(3-45)}$$

Für das zweite Supremum haben wir mit Lemma 3.2 und Lemma 3.3

$$\begin{aligned} S_2 &= \sup_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \leq \sup_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{\omega t} |\xi|^{-s} \right\} \\ &\leq e^{-\frac{1}{\nu}t} \sup_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^{r-s} \right\} \leq C e^{-\frac{1}{\nu}t}. \end{aligned}$$

Aus $t \geq 1$ und der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt

$$e^{-\frac{1}{\nu}t} \leq C t^{-r} \leq C t^{-\frac{r}{2}}$$

und wir erhalten:

$$S_2 \leq C t^{-\frac{r}{2}}. \qquad \text{(3-46)}$$

Insgesamt haben wir wegen (3-44)-(3-46)

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_\infty \leq Ct^{-\frac{r}{2}} = Ct^{-\frac{r}{2}}(1+t)^{\frac{r}{2}}(1+t)^{-\frac{r}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{r}{2}}. \tag{3-47}$$

Sei jetzt $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt mit Lemma 3.2 und Lemma 3.3

$$S_1 = \sup_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \leq \sup_{|\xi|\leq\frac{2}{\nu}} \left\{ \frac{|\xi|^r}{(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}} \right\} \leq 1 \tag{3-48}$$

und

$$S_2 = \sup_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \left| \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \right| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\} \leq \sup_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} e^{\omega t} |\xi|^{-s} \right\} \leq e^{-\frac{1}{\nu}t} \sup_{|\xi|\geq\frac{2}{\nu}} \left\{ |\xi|^{r-s} \right\} \leq C. \tag{3-49}$$

Es folgt aus (3-44), (3-48) und (3-49):

$$\left\| |\xi|^r e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \right\|_\infty \leq C = C(1+t)^{\frac{r}{2}}(1+t)^{-\frac{r}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{r}{2}}. \tag{3-50}$$

Wegen (3-47) und (3-50) ist die Behauptung also auch für $l = \infty$ gezeigt. □

Nun können wir den folgenden Existenzsatz beweisen:

Satz 3.8

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $s \in \mathbb{N}$ beliebig mit $s \geq 5$. Gelte außerdem $y_1 \in H^s$ und sei y definiert wie in (3-5). Dann gilt:

(i) y ist wohldefiniert.

(ii) $y \in C^0([0,\infty), H^{s-1}) \cap C^1([0,\infty), H^{s-3}) \cap C^2([0,\infty), H^{s-5})$.
Ist sogar $s \geq 7$, so haben wir $y \in C^3([0,\infty), H^{s-7})$.

(iii) y löst (3-1),(3-2) in L^2.

Beweis

Seien also $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $s \in \mathbb{N}$ beliebig mit $s \geq 5$ und es gelte $y_1 \in H^s$. Sei außerdem y definiert wie in (3-5) und es bezeichne $\bar{s}$ die größte gerade Zahl z mit $z \leq s$. Dann gilt natürlich

$\bar{s} \geq s-1$ und $y_1 \in H^{\bar{s}}$. C wird im Verlauf des Beweises verschiedene, nicht von t, t_m und h_m abhängige, Konstanten bezeichnen.

zu (i):
Mit (3-6) haben wir

$$y(t) \;=\; F^{-1}\left(\tilde{y}(t,\xi)\right) \tag{3-51}$$

und aus der Hölderschen Ungleichung, Lemma 3.6, Korollar 2.13 und Satz 2.9 folgt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{y}(t,\xi)\|_2 &= \left\| e^{-\frac{\nu}{2}\cdot|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\leq \left\| e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\leq C(1+t)\left\|F((1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1)\right\|_2 \;\leq\; C(1+t)\left\|(1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1\right\|_2 \\
&\leq C(1+t)\|y_1\|_{\bar{s},2} \;<\; \infty.
\end{aligned}$$

Es gilt also $\tilde{y}(t,\cdot) \in L^2$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und somit ist y als Abbildung von $\mathbb{R}_0^+$ nach L^2 mit Satz 2.9 wohldefiniert.

zu (ii):
Als erstes zeigen wir $y \in C^0([0,\infty), H^{s-1})$.
Dazu weisen wir zunächst nach, dass wir $y(t) = F^{-1}(\tilde{y}(t,\xi)) \in H^{s-1}$ für alle $t \in [0,\infty)$ haben. Sei also $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Nach Korollar 2.11 genügt es zu zeigen, dass $i^{|\alpha|}\xi^\alpha\tilde{y}(t,\xi) \in L^2$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \leq s-1$ gilt. Sei dazu $\alpha \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $|\alpha| \leq s-1$. Dann erhalten wir mit (3-6), der Hölderschen Ungleichung, Lemma 3.6, Korollar 2.13 und Satz 2.9:

$$\begin{aligned}
\|i^{|\alpha|}\xi^\alpha\tilde{y}(t,\xi)\|_2 &\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|-2}{2}}\left\|F((1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1)\right\|_2 \;\leq\; C(1+t)\left\|(1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1\right\|_2 \\
&\leq C(1+t)\,\|y_1\|_{\bar{s},2} \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

was $i^{|\alpha|}\xi^\alpha\tilde{y}(t,\xi) \in L^2$ bedeutet.
Um nun $y \in C^0([0,\infty), H^{s-1})$ zu zeigen, benutzen wir den Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. Seien dafür $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ beliebig mit $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$. Ohne Einschränkung gelte $t_m \in [0, t_0+1)$. Sei außerdem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| \leq s-1$ beliebig. Dann

folgt aus (3-51), Korollar 2.11 und Satz 2.9:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha(y(t_m)-y(t_0))\|_2^2 &= \|\nabla^\alpha\left(F^{-1}(\tilde{y}(t_m,\xi))-F^{-1}(\tilde{y}(t_0,\xi))\right)\|_2^2 = \|\nabla^\alpha\left(F^{-1}(\tilde{y}(t_m,\xi)-\tilde{y}(t_0,\xi))\right)\|_2^2 \\
&= \|F^{-1}(i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\tilde{y}(t_m,\xi)-\tilde{y}(t_0,\xi)))\|_2^2 = \|i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\tilde{y}(t_m,\xi)-\tilde{y}(t_0,\xi))\|_2^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{y}(t_m,\xi)-\tilde{y}(t_0,\xi)|^2\,|\xi|^{2|\alpha|}d\xi.
\end{aligned}$$

Wir definieren nun für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$f_m^{(0)}(\xi) := |\tilde{y}(t_m,\xi)-\tilde{y}(t_0,\xi)|^2\,|\xi|^{2|\alpha|}.$$

Dann gilt $\lim_{m\to\infty} f_m^{(0)}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und wir haben wegen (3-6) folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|f_m^{(0)}(\xi)| &\leq \left|e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_m}\frac{e^{\omega t_m}-e^{-\omega t_m}}{2\omega} - e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right|^2 |\xi|^{2|\alpha|}\,|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
&\leq \left(e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_m}\left|\frac{e^{\omega t_m}-e^{-\omega t_m}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right|\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1 und Lemma 3.3 folgt für alle $|\xi| \leq \frac{2}{\nu}$

$$\begin{aligned}
&\left(e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_m}\left|\frac{e^{\omega t_m}-e^{-\omega t_m}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right|\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\ & (t_m+t_0)^2\,|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \leq (2t_0+1)^2\,|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \leq C|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
=:\ & g_0(\xi)
\end{aligned}$$

und für alle $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$

$$\begin{aligned}
&\left(e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_m}\left|\frac{e^{\omega t_m}-e^{-\omega t_m}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right|\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\ & \left(e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_m}t_m e^{\omega t_m} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}t_0 e^{\omega t_0}\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\ & \left(e^{-\frac{1}{\nu}t_m}t_m + e^{-\frac{1}{\nu}t_0}t_0\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \leq C|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
=\ & g_0(\xi).
\end{aligned}$$

Wir haben also insgesamt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $m \in \mathbb{N}$:

$$|f_m^{(0)}(\xi)| \leq g_0(\xi).$$

Weiter ist $g_0 \in L^1$, denn es folgt aus der Hölderschen Ungleichung, Korollar 2.13 und Satz 2.9

$$\begin{aligned}
\|g_0\|_1 &= C\left\||\xi|^{|\alpha|}(Fy_1)(\xi)\right\|_2^2 \le C\left\|\frac{|\xi|^{|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty^2 \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2^2\\
&\le C\left\|F((1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1)\right\|_2^2 = C\left\|(1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1\right\|_2^2 \le C\|y_1\|_{\bar{s},2}^2\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir also

$$\lim_{m\to\infty} \|\nabla^\alpha(y(t_m)-y(t_0))\|_2^2 = 0$$

und damit

$$\lim_{m\to\infty} \|y(t_m)-y(t_0)\|_{s-1,2} = 0,$$

weil $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le s-1$ beliebig war. Da außerdem $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ mit $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$ beliebig waren, gilt:

$$y \in C^0([0,\infty), H^{s-1}). \tag{3-52}$$

Als nächstes wollen wir $y \in C^1([0,\infty), H^{s-3})$ erhalten.
Dafür zeigen wir zuerst, dass $F^{-1}(\tilde{y}_t(t,\xi)) \in H^{s-3}$ für alle $t \in [0,\infty)$ gilt, denn es wird $y_t(t) = F^{-1}(\tilde{y}_t(t,\xi))$ sein. Sei dazu $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Wieder genügt es wegen Korollar 2.11 nachzuweisen, dass $i^{|\alpha|}\xi^\alpha\tilde{y}_t(t,\xi) \in L^2$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \le s-3$ gilt. Sei also $\alpha \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $|\alpha| \le s-3$. Dann ergibt sich aus (3-7), der Hölderschen Ungleichung, Lemma 3.6,
Lemma 3.7, Korollar 2.13 und Satz 2.9:

$$\begin{aligned}
\|i^{|\alpha|}\xi^\alpha\tilde{y}_t(t,\xi)\|_2 &\le \left\|\frac{\nu}{2}|\xi|^{2+|\alpha|}e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 + \left\||\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}(Fy_1)(\xi)\right\|_2\\
&\le C\left\||\xi|^{2+|\alpha|}e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2\\
&\quad + \left\||\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2\\
&\le C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\left\|F((1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1)\right\|_2 + C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\left\|F((1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1)\right\|_2\\
&\le C\left\|(1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}}y_1\right\|_2 \le C\|y_1\|_{\bar{s},2} < \infty.
\end{aligned}$$

Um nun $y \in C^1([0,\infty), H^{s-3})$ zu zeigen, benutzen wir wieder den Satz von Lebesgue. Seien dazu $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ beliebig mit $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$ und $t_m \ne t_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Ohne

Einschränkung gelte $t_m \in [0, t_0 + 1)$. Sei außerdem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s - 3$ beliebig. Dann folgt aus (3-51), Korollar 2.11, dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Satz 2.9

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^\alpha\left(\frac{y(t_m) - y(t_0)}{t_m - t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_t(t_0, \xi)\right)\right)\right\|_2^2 &= \left\|\nabla^\alpha\left(F^{-1}\left(\frac{\tilde{y}(t_m, \xi) - \tilde{y}(t_0, \xi)}{t_m - t_0} - \tilde{y}_t(t_0, \xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
&= \left\|F^{-1}\left(i^{|\alpha|}\xi^\alpha\left(\frac{\tilde{y}(t_m, \xi) - \tilde{y}(t_0, \xi)}{t_m - t_0} - \tilde{y}_t(t_0, \xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
&= \left\|F^{-1}\left(i^{|\alpha|}\xi^\alpha\left(\tilde{y}_t(h_m(\xi), \xi) - \tilde{y}_t(t_0, \xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
&= \left\|i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\tilde{y}_t(h_m(\xi), \xi) - \tilde{y}_t(t_0, \xi))\right\|_2^2 \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\tilde{y}_t(h_m(\xi), \xi) - \tilde{y}_t(t_0, \xi)|^2\,|\xi|^{2|\alpha|} d\xi
\end{aligned}$$

für gewisse $h_m(\xi) \in (t_0, t_m)$ bzw. $h_m(\xi) \in (t_m, t_0)$. Wir definieren für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$f_m^{(1)}(\xi) \;:=\; |\tilde{y}_t(h_m(\xi), \xi) - \tilde{y}_t(t_0, \xi)|^2\,|\xi|^{2|\alpha|}.$$

Dann haben wir $\lim_{m\to\infty} f_m^{(1)}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und aus (3-7) folgt:

$$\begin{aligned}
|f_m^{(1)}(\xi)| &= \left|-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right. \\
&\quad \left. +\frac{\nu}{2}|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega} - e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\right|^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
&\leq \left(C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right|\right. \\
&\quad \left. + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\right|\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.1, Lemma 3.2 und Lemma 3.3 erhalten wir für alle $|\xi| \leq \frac{2}{\nu}$

$$\begin{aligned}
&\left(C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right|\right. \\
&\quad \left. + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\right|\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\;& \left(C|\xi|^2 h_m(\xi) + 1 + C|\xi|^2 t_0 + 1\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \;\leq\; C\left(|\xi|^2 + 1\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
=:\;& g_1(\xi)
\end{aligned}$$

und für alle $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$

$$
\begin{aligned}
& \left(C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right|\right. \\
& \left. + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right| + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\right|\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \;& \left(C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} h_m(\xi) e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} e^{\omega h_m(\xi)} + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} t_0 e^{\omega t_0} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} e^{\omega t_0}\right)^2 \\
& \cdot |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \;& \left(C|\xi|^2 h_m(\xi) e^{-\frac{1}{\nu} h_m(\xi)} + e^{-\frac{1}{\nu} h_m(\xi)} + C|\xi|^2 t_0 e^{-\frac{1}{\nu} t_0} + e^{-\frac{1}{\nu} t_0}\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \;& C\left(|\xi|^2 + 1\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \;=\; g_1(\xi).
\end{aligned}
$$

Es gilt also für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $m \in \mathbb{N}$

$$
|f_m^{(1)}(\xi)| \;\leq\; g_1(\xi)
$$

und außerdem $g_1 \in L^1$, denn es folgt aus der Hölderschen Ungleichung, Korollar 2.13 und Satz 2.9:

$$
\begin{aligned}
\|g_1\|_1 \;&=\; C \left\|\left(|\xi|^2 + 1\right) |\xi|^{|\alpha|} (Fy_1)(\xi)\right\|_2^2 \;\leq\; C \left\|\frac{\left(|\xi|^2 + 1\right)|\xi|^{|\alpha|}}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty^2 \left\|(1 + |\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}} (Fy_1)(\xi)\right\|_2^2 \\
&\leq\; C \left\|F((1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}} y_1)\right\|_2^2 \;=\; C \left\|(1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}} y_1\right\|_2^2 \;\leq\; C\|y_1\|_{\bar{s},2}^2 \\
&<\; \infty.
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$
\lim_{m\to\infty} \left\|\nabla^\alpha \left(\frac{y(t_m) - y(t_0)}{t_m - t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_t(t_0, \xi)\right)\right)\right\|_2^2 \;=\; 0
$$

und damit

$$
\lim_{m\to\infty} \left\|\left(\frac{y(t_m) - y(t_0)}{t_m - t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_t(t_0, \xi)\right)\right)\right\|_{s-3,2} \;=\; 0,
$$

da $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s - 3$ beliebig war. Weil auch $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ beliebig waren mit $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$ und $t_m \neq t_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, erhalten wir

$$
y \in C^1([0, \infty), H^{s-3}) \tag{3-53}
$$

und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$y_t(t) \quad = \quad F^{-1}\left(\tilde{y}_t(t,\xi)\right). \tag{3-54}$$

Jetzt zeigen wir $y \in C^2([0,\infty), H^{s-5})$.
Wir weisen zunächst nach, dass $F^{-1}\left(\tilde{y}_{tt}(t,\xi)\right) \in H^{s-5}$ für alle $t \in [0,\infty)$ gilt, denn es wird $y_{tt}(t) = F^{-1}\left(\tilde{y}_{tt}(t,\xi)\right)$ sein. Sei also $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Wegen Korollar 2.11 genügt es, zu zeigen, dass $i^{|\alpha|}\xi^\alpha \tilde{y}_{tt}(t,\xi) \in L^2$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \le s-5$ gilt. Sei dazu $\alpha \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $|\alpha| \le s-5$. Dann erhalten wir mit (3-8), der Hölderschen Ungleichung, Lemma 3.6, Lemma 3.7, Korollar 2.13 und Satz 2.9:

$$\begin{aligned}
\|i^{|\alpha|}\xi^\alpha \tilde{y}_{tt}(t,\xi)\|_2 \;\le\;& \left\| |\xi|^{|\alpha|}\left(\frac{\nu^2}{2}|\xi|^4 - |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&+ \left\| \nu|\xi|^{2+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
\le\;& C\left\| |\xi|^{4+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&+ \left\| |\xi|^{2+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&+C\left\| |\xi|^{2+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
\le\;& C\left((1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2}} + (1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}} + (1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2}}\right)\left\|F((1-\Delta)^{\frac{\tilde{s}}{2}}y_1)\right\|_2 \\
\le\;& C\left\|(1-\Delta)^{\frac{\tilde{s}}{2}}y_1\right\|_2 \;\le\; C\,\|y_1\|_{\tilde{s},2} \;<\; \infty.
\end{aligned}$$

Um $y \in C^2([0,\infty), H^{s-5})$ zu zeigen, benutzen wir erneut den Satz von Lebesgue. Seien $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ beliebig mit $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$ und $t_m \ne t_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung gelte $t_m \in [0, t_0+1)$. Sei zudem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| \le s-5$ beliebig. Dann folgt aus (3-54), Korollar 2.11, dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Satz 2.9

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^\alpha\left(\frac{y_t(t_m)-y_t(t_0)}{t_m-t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 \;=\;& \left\|\nabla^\alpha\left(F^{-1}\left(\frac{\tilde{y}_t(t_m,\xi)-\tilde{y}_t(t_0,\xi)}{t_m-t_0} - \tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
=\;& \left\|F^{-1}\left(i^{|\alpha|}\xi^\alpha\left(\frac{\tilde{y}_t(t_m,\xi)-\tilde{y}_t(t_0,\xi)}{t_m-t_0} - \tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
=\;& \left\|F^{-1}\left(i^{|\alpha|}\xi^\alpha\left(\tilde{y}_{tt}(h_m(\xi),\xi) - \tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
=\;& \left\|i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\tilde{y}_{tt}(h_m(\xi),\xi) - \tilde{y}_{tt}(t_0,\xi))\right\|_2^2 \\
\le\;& \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{y}_{tt}(h_m(\xi),\xi) - \tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)|^2\,|\xi|^{2|\alpha|}d\xi
\end{aligned}$$

für gewisse $h_m(\xi) \in (t_0, t_m)$ bzw. $h_m(\xi) \in (t_m, t_0)$. Wir definieren nun wieder für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$f_m^{(2)}(\xi) \quad := \quad |\tilde{y}_{tt}(h_m(\xi), \xi) - \tilde{y}_{tt}(t_0, \xi)|^2 \, |\xi|^{2|\alpha|}.$$

Dann gilt $\lim_{m\to\infty} f_m^{(2)}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und es ergibt sich aus (3-8) folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|f_m^{(2)}(\xi)| \quad = \quad & \Bigg|\left(\frac{\nu^2}{2}|\xi|^4 - |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega} - \nu|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2} \\
& -\left(\frac{\nu^2}{2}|\xi|^4 - |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega} + \nu|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\Bigg|^2 \, |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \quad & \Bigg(\left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right| + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right| \\
& + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right| + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\right|\Bigg)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1, Lemma 3.2 und Lemma 3.3 folgt für alle $|\xi| \leq \frac{2}{\nu}$

$$\begin{aligned}
& \Bigg(\left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right| + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right| \\
& + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right| + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\right|\Bigg)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \quad & \left(\left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) h_m(\xi) + C|\xi|^2 + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) t_0 + C|\xi|^2\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \quad & C\left(|\xi|^4 + |\xi|^2\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
=: \quad & g_2(\xi)
\end{aligned}$$

und für alle $|\xi| \geq \frac{2}{\nu}$

$$\begin{aligned}
& \Bigg(\left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} - e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right| + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} \left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)} + e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right| \\
& + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right| + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} \left|\frac{e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}}{2}\right|\Bigg)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \quad & \Big(\left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} h_m(\xi) e^{\omega h_m(\xi)} + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)} e^{\omega h_m(\xi)} \\
& + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} t_0 e^{\omega t_0} + C|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0} e^{\omega t_0}\Big)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \quad & \left(\left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) h_m(\xi) e^{-\frac{1}{\nu} h_m(\xi)} + C|\xi|^2 e^{-\frac{1}{\nu} h_m(\xi)} + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) t_0 e^{-\frac{1}{\nu} t_0} + C|\xi|^2 e^{-\frac{1}{\nu} t_0}\right)^2 \\
& \cdot |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq \quad & C\left(|\xi|^4 + |\xi|^2\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(Fy_1)(\xi)|^2 \;=\; g_2(\xi).
\end{aligned}$$

Somit haben wir für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $m \in \mathbb{N}$

$$|f_m^{(2)}(\xi)| \leq g_2(\xi).$$

Weiter gilt $g_2 \in L^1$, denn mit der Hölderschen Ungleichung, Korollar 2.13 und Satz 2.9 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\|g_2\|_1 &= C\left\|\left(|\xi|^4 + |\xi|^2\right)|\xi|^{|\alpha|}(Fy_1)(\xi)\right\|_2^2 \leq C\left\|\frac{\left(|\xi|^4 + |\xi|^2\right)|\xi|^{|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}}\right\|_\infty^2 \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\tilde{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2^2 \\
&\leq C\left\|F((1-\Delta)^{\frac{\tilde{s}}{2}}y_1)\right\|_2^2 = C\left\|(1-\Delta)^{\frac{\tilde{s}}{2}}y_1\right\|_2^2 \leq C\|y_1\|_{\tilde{s},2}^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir also

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\nabla^\alpha\left(\frac{y_t(t_m)-y_t(t_0)}{t_m-t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 = 0$$

und damit

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\left(\frac{y_t(t_m)-y_t(t_0)}{t_m-t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_{s-5,2} = 0,$$

weil $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s-5$ beliebig war. Da außerdem $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ beliebig waren mit $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$ und $t_m \neq t_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, ergibt sich

$$y \in C^2([0,\infty), H^{s-3}) \tag{3-55}$$

und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$y_{tt}(t) = F^{-1}\left(\tilde{y}_{tt}(t,\xi)\right). \tag{3-56}$$

Gelte nun sogar $s \geq 7$. Wir wollen $y \in C^3([0,\infty), H^{s-7})$ zeigen.
Dafür weisen wir zunächst nach, dass $F^{-1}\left(\tilde{y}_{ttt}(t,\xi)\right) \in H^{s-7}$ für alle $t \in [0,\infty)$ gilt, denn es wird $y_{ttt}(t) = F^{-1}\left(\tilde{y}_{ttt}(t,\xi)\right)$ sein. Sei dazu $t \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Wegen Korollar 2.11 genügt es, zu zeigen, dass $i^{|\alpha|}\xi^\alpha\tilde{y}_{ttt}(t,\xi) \in L^2$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \leq s-7$ gilt. Sei also $\alpha \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $|\alpha| \leq s-7$.
Dann erhalten wir mit (3-9), der Hölderschen Ungleichung, Lemma 3.6, Lemma 3.7,
Korollar 2.13 und Satz 2.9

$$
\begin{aligned}
\| i^{|\alpha|}\xi^\alpha \tilde{y}_{ttt}(t,\xi)(Fy_1(\xi)\|_2 &\leq \left\| \left(\frac{\nu^3}{2}|\xi|^6 + \frac{3\nu}{2}|\xi|^4\right)|\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\quad + \left\| \left(\nu^2|\xi|^4 + |\xi|^2\right)|\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\leq C \left\| |\xi|^{6+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\quad + C \left\| |\xi|^{4+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\quad + C \left\| |\xi|^{4+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\quad + \left\| |\xi|^{2+|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}}\right\|_\infty \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_2 \\
&\leq C\left((1+t)^{-\frac{|\alpha|+4}{2}} + (1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2}} + (1+t)^{-\frac{|\alpha|+4}{2}} + (1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2}}\right) \\
&\quad \left\| F((1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}} y_1)\right\|_2 \\
&\leq C \left\|(1-\Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}} y_1\right\|_2 \leq C\, \|y_1\|_{\bar{s},2} < \infty.
\end{aligned}
$$

Wir zeigen nun $y \in C^3([0,\infty), H^{s-7})$, indem wir noch einmal den Satz von Lebesgue anwenden. Seien dazu $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ beliebig mit $\lim_{m\to\infty} t_m = t_0$ und $t_m \neq t_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung gelte $t_m \in [0, t_0 + 1)$. Sei außerdem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| \leq s - 7$ beliebig. Dann folgt aus (3-56), Korollar 2.11, dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Satz 2.9

$$
\begin{aligned}
\left\| \nabla^\alpha \left(\frac{y_{tt}(t_m) - y_{tt}(t_0)}{t_m - t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_{ttt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 &= \left\| \nabla^\alpha \left(F^{-1}\left(\frac{\tilde{y}_{tt}(t_m,\xi) - \tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)}{t_m - t_0} - \tilde{y}_{ttt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
&= \left\| F^{-1}\left(i^{|\alpha|}\xi^\alpha \left(\frac{\tilde{y}_{tt}(t_m,\xi) - \tilde{y}_{tt}(t_0,\xi)}{t_m - t_0} - \tilde{y}_{ttt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
&= \left\| F^{-1}\left(i^{|\alpha|}\xi^\alpha \left(\tilde{y}_{ttt}(h_m(\xi),\xi) - \tilde{y}_{ttt}(t_0,\xi)\right)\right)\right\|_2^2 \\
&= \left\| i^{|\alpha|}\xi^\alpha (\tilde{y}_{ttt}(h_m(\xi),\xi) - \tilde{y}_{ttt}(t_0,\xi))\right\|_2^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{y}_{ttt}(h_m(\xi),\xi) - \tilde{y}_{ttt}(t_0,\xi)|^2\, |\xi|^{2|\alpha|} d\xi
\end{aligned}
$$

für gewisse $h_m(\xi) \in (t_0, t_m)$ bzw. $h_m(\xi) \in (t_m, t_0)$. Wir definieren für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$
f_m^{(3)}(\xi) \;:=\; |\tilde{y}_{ttt}(h_m(\xi),\xi) - \tilde{y}_{ttt}(t_0,\xi)|^2\, |\xi|^{2|\alpha|}.
$$

Dann haben wir $\lim_{m\to\infty} f_m^{(3)}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und es ergibt sich aus (3-9) die folgende

Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
|f_m^{(3)}(\xi)| \leq\ & \Bigg|\left(-\frac{\nu^3}{2}|\xi|^6+\frac{3\nu}{2}|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\frac{e^{\omega h_m(\xi)}-e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega} \\
& +\left(\nu^2|\xi|^4-|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\frac{e^{\omega h_m(\xi)}+e^{-\omega h_m(\xi)}}{2} \\
& -\left(-\frac{\nu^3}{2}|\xi|^6+\frac{3\nu}{2}|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}-\left(\nu^2|\xi|^4-|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\frac{e^{\omega t_0}+e^{-\omega t_0}}{2}\Bigg|^2 \\
& \cdot|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\ & \Bigg(\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)}-e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right| \\
& +\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)}+e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right| \\
& +\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right|+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}+e^{-\omega t_0}}{2}\right|\Bigg)^2 \\
& \cdot|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2.
\end{aligned}
$$

Aus Lemma 3.1, Lemma 3.2 und Lemma 3.3 folgt für alle $|\xi|\leq\frac{2}{\nu}$

$$
\begin{aligned}
& \Bigg(\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)}-e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right|+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)}+e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right| \\
& +\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right|+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}+e^{-\omega t_0}}{2}\right|\Bigg)^2 \\
& \cdot|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\ & \left(\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)h_m(\xi)+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)+\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)t_0+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)\right)^2|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\ & C\left(|\xi|^6+|\xi|^4+|\xi|^2\right)^2|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
=:\ & g_3(\xi)
\end{aligned}
$$

und für alle $|\xi|\geq\frac{2}{\nu}$

$$
\begin{aligned}
& \Bigg(\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)}-e^{-\omega h_m(\xi)}}{2\omega}\right|+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}\left|\frac{e^{\omega h_m(\xi)}+e^{-\omega h_m(\xi)}}{2}\right| \\
& +\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}-e^{-\omega t_0}}{2\omega}\right|+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}\left|\frac{e^{\omega t_0}+e^{-\omega t_0}}{2}\right|\Bigg)^2 \\
& \cdot|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2 \\
\leq\ & \Big(\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}h_m(\xi)e^{\omega h_m(\xi)}+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 h_m(\xi)}e^{\omega h_m(\xi)} \\
& +\left(C|\xi|^6+C|\xi|^4\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}t_0e^{\omega t_0}+\left(C|\xi|^4+|\xi|^2\right)e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t_0}e^{\omega t_0}\Big)^2|\xi|^{2|\alpha|}|(Fy_1)(\xi)|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Big(\left(C|\xi|^6 + C|\xi|^4\right) h_m(\xi) e^{-\frac{1}{\nu} h_m(\xi)} + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{1}{\nu} h_m(\xi)} \\
&\quad + \left(C|\xi|^6 + C|\xi|^4\right) t_0 e^{-\frac{1}{\nu} t_0} + \left(C|\xi|^4 + |\xi|^2\right) e^{-\frac{1}{\nu} t_0} \Big)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(F y_1)(\xi)|^2 \\
&\leq C \left(|\xi|^6 + |\xi|^4 + |\xi|^2\right)^2 |\xi|^{2|\alpha|} |(F y_1)(\xi)|^2 \\
&= g_3(\xi).
\end{aligned}
$$

Damit gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $m \in \mathbb{N}$

$$
|f_m^{(3)}(\xi)| \leq g_3(\xi)
$$

und außerdem $g_3 \in L^1$, denn aus der Hölderschen Ungleichung, Korollar 2.13 und Satz2.9 folgt:

$$
\begin{aligned}
\|g_3\|_1 &= C \left\| \left(|\xi|^6 + |\xi|^4 + |\xi|^2\right) |\xi|^{|\alpha|} (F y_1)(\xi) \right\|_2^2 \\
&\leq C \left\| \frac{\left(|\xi|^6 + |\xi|^4 + |\xi|^2\right) |\xi|^{|\alpha|}}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}}} \right\|_\infty^2 \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{\bar{s}}{2}} (F y_1)(\xi) \right\|_2^2 \\
&\leq C \left\| F((1 - \Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}} y_1) \right\|_2^2 = C \left\| (1 - \Delta)^{\frac{\bar{s}}{2}} y_1 \right\|_2^2 \leq C \|y_1\|_{\bar{s},2}^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Mit dem Satz von Lebesgue ergibt sich also

$$
\lim_{m \to \infty} \left\| \nabla^\alpha \left(\frac{y_{tt}(t_m) - y_{tt}(t_0)}{t_m - t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_{ttt}(t_0, \xi)\right) \right) \right\|_2^2 = 0
$$

und damit

$$
\lim_{m \to \infty} \left\| \left(\frac{y_{tt}(t_m) - y_{tt}(t_0)}{t_m - t_0} - F^{-1}\left(\tilde{y}_{ttt}(t_0, \xi)\right) \right) \right\|_{s-7,2} = 0,
$$

da $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s - 7$ beliebig war. Weil auch $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und $(t_m)_m \subset \mathbb{R}_0^+$ beliebig waren mit $\lim_{m \to \infty} t_m = t_0$ und $t_m \neq t_0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, erhalten wir

$$
y \in C^3([0, \infty), H^{s-7}) \tag{3-57}
$$

und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$
y_{ttt}(t) = F^{-1}\left(\tilde{y}_{ttt}(t, \xi)\right). \tag{3-58}
$$

zu (iii):

Aus (3-51) und (3-6) folgt sofort $y(0) = 0$. Weiter haben wir wegen (3-54) und (3-7):

$$y_t(0) \;=\; F^{-1}\left(\tilde{y}_t(0,\xi)\right) \;=\; F^{-1}((Fy_1)(\xi)) \;=\; y_1.$$

Die Anfangsbedingungen sind also erfüllt. Außerdem gilt in L^2 wegen (3-51)-(3-54), (3-56), Korollar 2.11 und (3-6)-(3-8) für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned}
& y_{tt}(t) - \Delta y(t) - \nu\Delta y_t(t) \\
=\; & F^{-1}(\tilde{y}_{tt}(t,\xi)) - \Delta F^{-1}(\tilde{y}(t,\xi)) - \nu\Delta F^{-1}(\tilde{y}_t(t,\xi)) \\
=\; & F^{-1}(\tilde{y}_{tt}(t,\xi)) - F^{-1}(-|\xi|^2\tilde{y}(t,\xi)) - \nu F^{-1}(-|\xi|^2\tilde{y}_t(t,\xi)) \\
=\; & F^{-1}\left(\tilde{y}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^2\tilde{y}(t,\xi) + \nu|\xi|^2\tilde{y}_t(t,\xi)\right) \;=\; F^{-1}(0) \\
=\; & 0.
\end{aligned}$$

□

Damit haben wir also eine geeignete Lösung gefunden. Nun beweisen wir den folgenden Satz über deren Abklingverhalten.

Satz 3.9

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $s \in \mathbb{N}$ beliebig mit $s \geq 5$ und es gelte $y_1 \in H^s$. Es seien weiter y die Lösung aus Satz 3.8, $m \in \mathbb{N}$ gerade mit $m \leq s$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$, $p \geq 2$ beliebig.
Dann folgt für $l \in [2,\infty]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{l}$:

(i)(a) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| < m - \frac{n}{l}$ gilt:

$$\|\nabla^\alpha y(t)\|_p \;\leq\; C(1+t)^{-\frac{|\alpha|-2}{2}-\frac{n}{2l}}\|y_1\|_{m,2}.$$

(ii)(a) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| < m - 2 - \frac{n}{l}$ gilt:

$$\|\nabla^\alpha y_t(t)\|_p \;\leq\; C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2l}}\|y_1\|_{m,2}.$$

(iii)(a) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| < m - 4 - \frac{n}{l}$ gilt:

$$\|\nabla^\alpha y_{tt}(t)\|_p \;\leq\; C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2l}}\|y_1\|_{m,2}.$$

Gilt zusätzlich $y_1 \in W^{m,1}$, so haben wir für $l \in [1,2]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{l}$:

(i)(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| < m - \frac{n}{l}$ gilt:

$$\|\nabla^\alpha y(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|-2}{2}-\frac{n}{2l}}\|y_1\|_{m,1}.$$

(ii)(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| < m - 2 - \frac{n}{l}$ gilt:

$$\|\nabla^\alpha y_t(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2l}}\|y_1\|_{m,1}.$$

(iii)(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| < m - 4 - \frac{n}{l}$ gilt:

$$\|\nabla^\alpha y_{tt}(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2l}}\|y_1\|_{m,1}.$$

Dabei hängt C jeweils nur von n, ν, $|\alpha|$, l und m ab. Das Abklingverhalten von y_{ttt}, falls zusätzlich $s \geq 7$ gilt, werden wir nicht benötigen.

Beweis

Seien also $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ und $s \in \mathbb{N}$ beliebig mit $s \geq 5$ und es gelte $y_1 \in H^s$. Seien außerdem y die Lösung aus Satz 3.8, $m \in \mathbb{N}$ gerade mit $m \leq s$, $t \in \mathbb{R}_0^+$, $p \geq 2$ beliebig und p' gegeben durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. C wird im Verlauf des Beweises verschiedene nur von n, ν, $|\alpha|$, l und m abhängige Konstanten bezeichnen.

zu (i)(a) und (i)(b):

Wegen $y(t) \in H^{s-1}$ erhalten wir aus (3-51), Korollar 2.11 und Korollar 2.15 für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s-1$:

$$\begin{aligned} \|\nabla^\alpha y(t)\|_p &= \left\|\nabla^\alpha F^{-1}\left(\tilde{y}(t,\xi)\right)\right\|_p = \left\|F^{-1}\left(i^{|\alpha|}\xi^\alpha \tilde{y}(t,\xi)\right)\right\|_p \\ &\leq \left\|i^{|\alpha|}\xi^\alpha \tilde{y}(t,\xi)\right\|_{p'} \leq \left\||\xi|^{|\alpha|}\tilde{y}(t,\xi)\right\|_{p'}. \end{aligned} \tag{3-59}$$

Aus $y_1 \in H^m$ folgt mit (3-6) und Korollar 2.13

$$\begin{aligned} \left\||\xi|^{|\alpha|}\tilde{y}(t,\xi)\right\|_{p'} &= \left\||\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}(Fy_1)(\xi)\right\|_{p'} \\ &= \left\||\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2\omega}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}}(F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}}y_1))(\xi)\right\|_{p'}. \end{aligned} \tag{3-60}$$

Seien nun $l \in [2,\infty]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{l}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| < m - \frac{n}{l} \leq s$. Dann ergibt sich aus (3-59), (3-60), der Hölderschen Ungleichung, Lemma 3.6 und Satz 2.9

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y(t)\|_p &\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \left\| (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}})y_1)(\xi) \right\|_2 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|-2}{2} - \frac{n}{2l}} \left\| (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1 \right\|_2 \leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|-2}{2} - \frac{n}{2l}} \|y_1\|_{m,2},
\end{aligned}$$

da $\frac{1}{l} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ gilt.
Gelte nun zusätzlich $y_1 \in W^{s,1}$ und es seien $l \in [1,2]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{l}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| < m - \frac{n}{l} \leq s$. Dann folgt wieder aus (3-59), (3-60), der Hölderschen Ungleichung, Lemma 3.6 und Korollar 2.15

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y(t)\|_p &\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \left\| (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1))(\xi) \right\|_\infty \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|-2}{2} - \frac{n}{2l}} \left\| (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1 \right\|_1 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|-2}{2} - \frac{n}{2l}} \|y_1\|_{m,1}
\end{aligned}$$

wegen $\frac{1}{l} + 0 = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$.

zu (ii)(a) und (ii)(b):

Aus $y(t) \in H^{s-3}$ folgt wegen (3-54), Korollar 2.11 und Korollar 2.15 für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s-3$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y_t(t)\|_p &= \left\| \nabla^\alpha F^{-1}\left(\tilde{y}_t(t,\xi)\right) \right\|_p = \left\| F^{-1}\left(i^{|\alpha|} \xi^\alpha \tilde{y}_t(t,\xi) \right) \right\|_p \\
&\leq \left\| i^{|\alpha|} \xi^\alpha \tilde{y}_t(t,\xi) \right\|_{p'} \leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} \tilde{y}_t(t,\xi) \right\|_{p'}. \qquad (3\text{-}61)
\end{aligned}$$

Da $y_1 \in H^m$ gilt, erhalten wir mit (3-7) und Korollar 2.13

$$\begin{aligned}
\left\| |\xi|^{|\alpha|} \tilde{y}_t(t,\xi) \right\|_{p'} &= \Bigg\| |\xi|^{|\alpha|} \left(-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \\
&\qquad \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} (F y_1)(\xi) \Bigg\|_{p'} \\
&= \Bigg\| |\xi|^{|\alpha|} \left(-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \\
&\qquad \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1))(\xi) \Bigg\|_{p'}. \qquad (3\text{-}62)
\end{aligned}$$

Seien jetzt $l \in [2,\infty]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{l}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| < m - 2 - \frac{n}{l} \leq s-2$. Dann folgt aus (3-61), (3-62), der Hölderschen Ungleichung, Satz 2.9, Lemma 3.6 und Lemma 3.7

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y_t(t)\|_p &\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} \left(-\frac{\nu}{2} |\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \\
&\quad \cdot \left\| (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}}) y_1)(\xi) \right\|_2 \\
&\leq \left(C \left\| |\xi|^{|\alpha|+2} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \right. \\
&\quad \left. + \left\| |\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \right) \left\| (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1 \right\|_2 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{2l}} \|y_1\|_{m,2} ,
\end{aligned}$$

da $\frac{1}{l} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ gilt.
Gelte nun zusätzlich $y_1 \in W^{s,1}$ und es seien $l \in [1,2]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{l}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| < m-2-\frac{n}{l} \leq s-2$. Dann erhalten wir wieder aus (3-61), (3-62), der Hölderschen Ungleichung, Korollar 2.15, Lemma 3.6 und Lemma 3.7

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y_t(t)\|_p &\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} \left(-\frac{\nu}{2} |\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} + e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \\
&\quad \cdot \left\| (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}}) y_1)(\xi) \right\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(C \left\| |\xi|^{|\alpha|+2} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l + \left\| |\xi|^{|\alpha|} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \right) \left\| (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1 \right\|_1 \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{2l}} \|y_1\|_{m,1} ,
\end{aligned}$$

weil wir $\frac{1}{l} + 0 = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ haben.

zu (iii)(a) und (iii)(b):

Da $y_{tt}(t) \in H^{s-5}$ gilt, erhalten wir aus (3-56), Korollar 2.11 und Korollar 2.15 für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s-5$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y_{tt}(t)\|_p &= \left\| \nabla^\alpha F^{-1} \left(\tilde{y}_{tt}(t,\xi) \right) \right\|_p = \left\| F^{-1} \left(i^{|\alpha|} \xi^\alpha \tilde{y}_{tt}(t,\xi) \right) \right\|_p \\
&\leq \left\| i^{|\alpha|} \xi^\alpha \tilde{y}_{tt}(t,\xi) \right\|_{p'} \leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} \tilde{y}_{tt}(t,\xi) \right\|_{p'} .
\end{aligned} \tag{3-63}$$

Wegen $y_1 \in H^m$ ergibt sich außerdem mit (3-8) und Korollar 2.13

$$\begin{aligned}
\left\| |\xi|^{|\alpha|} \tilde{y}_{tt}(t,\xi) \right\|_{p'} &= \left\| |\xi|^{|\alpha|} \left(\left(\frac{\nu^2}{2} |\xi|^4 - |\xi|^2 \right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} - \nu |\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} (F y_1)(\xi) \right\|_{p'}
\end{aligned}$$

$$= \left\| |\xi|^{|\alpha|} \left(\left(\frac{\nu^2}{2}|\xi|^4 - |\xi|^2 \right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} - \nu|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1))(\xi) \right\|_{p'} . \tag{3-64}$$

Seien wieder $l \in [2, \infty]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{l}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| < m - 4 - \frac{n}{l} \leq s - 4$. Dann folgt aus (3-63), (3-64), der Hölderschen Ungleichung, Satz 2.9, Lemma 3.6, Lemma 3.7 und Satz 2.9

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y_{tt}(t)\|_p &\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} \left(\left(\frac{\nu^2}{2}|\xi|^4 - |\xi|^2 \right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} - \nu|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \\
&\quad \cdot \left\| (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1))(\xi) \right\|_2 \\
&\leq \left(C \left\| |\xi|^{|\alpha|+4} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l + \left\| |\xi|^{|\alpha|+2} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \right. \\
&\quad \left. + C \left\| |\xi|^{|\alpha|+2} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \right) \left\| (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1 \right\|_2 \\
&\leq C \left(C(1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2} - \frac{n}{2l}} + (1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{2l}} + C(1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2} - \frac{n}{2l}} \right) \|y_1\|_{m,2} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{2l}} \|y_1\|_{m,2}
\end{aligned}$$

wegen $\frac{1}{l} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$.
Gelte nun auch noch $y_1 \in W^{s,1}$ und es seien $l \in [1, 2]$ gegeben durch $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{l}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| < m - 4 - \frac{n}{l} \leq s - 4$. Dann ergibt sich wieder aus (3-63), (3-64), der Hölderschen Ungleichung, Korollar 2.15, Lemma 3.6 und Lemma 3.7

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha y_{tt}(t)\|_p &\leq \left\| |\xi|^{|\alpha|} \left(\left(\frac{\nu^2}{2}|\xi|^4 - |\xi|^2 \right) e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} - \nu|\xi|^2 e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \\
&\quad \cdot \left\| (F((1-\Delta)^{\frac{m}{2}}) y_1)(\xi) \right\|_\infty \\
&\leq \left(C \left\| |\xi|^{|\alpha|+4} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l + \left\| |\xi|^{|\alpha|+2} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2\omega} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \right. \\
&\quad \left. + C \left\| |\xi|^{|\alpha|+2} e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t} \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} \right\|_l \right) \left\| (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} y_1 \right\|_1 \\
&\leq C \left(C(1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2} - \frac{n}{2l}} + (1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{2l}} + C(1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2} - \frac{n}{2l}} \right) \|y_1\|_{m,1} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{2l}} \|y_1\|_{m,1} ,
\end{aligned}$$

da $\frac{1}{l} + 0 = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ gilt.

□

Bemerkung 3.10

Wir müssten gar nicht interpolieren, also gar keinen Gebrauch von Korollar 2.15 *machen, da wir später nur das Abklingverhalten für* $p = 2$ *und* $p = \infty$ *benötigen.*

Kapitel 4

Ein lokaler Existenzsatz des nichtlinearen Problems

In diesem Kapitel wollen wir einen lokalen Existenzsatz des Problems (1-1), (1-2) erhalten. Den Beweis können wir hier aber nicht ausführen. Da wir auch nicht direkt einen passenden Satz zitieren können, linearisieren wir Gleichung (1-1) bzgl. Ableitungen 2.Ordnung. Dazu nehmen wir die Transformation $v := \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ \partial_1 u \end{pmatrix}$ vor und erhalten das folgende System:

$$v_{tt}(t) - \Delta v(t) - \nu \Delta v_t(t) = \begin{pmatrix} (\partial_2 v_2(t))^\gamma & 0 \\ 0 & (\gamma+1)\,(\partial_2 v_2(t))^\gamma \end{pmatrix} \partial_1 \partial_2 v(t), \tag{4-1}$$

$$v(0) = v_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \partial_1 u_0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_t(0) = v_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \partial_1 u_1 \end{pmatrix}. \tag{4-2}$$

Für dieses System gilt der folgende lokale Existenzsatz:

Satz 4.1
Seien $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$ und $\gamma \in \mathbb{N}$ beliebig. Seien weiter s und m gerade mit $s \geq m > 4 + \frac{n}{2}$ und $v_0 \in H^{s+1}$ und $v_1 \in H^s$ reellwertig. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass, falls $\|v_0\|_{m,2}^2 + \|v_1\|_{m,2}^2 < \delta$, ein $T > 0$ existiert, das nur von $\|v_0\|_{m+1,2}$ und $\|v_1\|_{m,2}$ abhängt, so dass eine reellwertige Lösung v von (4-1), (4-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$ existiert mit

$$v \in C^0([0,T], H^{s+1}) \cap C^1([0,T], H^s) \cap C^2([0,T], H^{s-2}).$$

Reellwertig soll dabei bedeuten, dass $v(t)$ für alle $t \in [0,T]$ fast überall reellwertig ist. Der Beweis eines Satzes für skalare, allgemeinere, bzgl. Ableitungen 2. Ordnung lineare Probleme der Form

$$\begin{aligned} v_{tt}(t) - \Delta v(t) - \nu\Delta v_t(t) &= a_{jk}(Dv(t))\partial_j\partial_k v(t), \\ v(0) = v_0, \quad v_t(0) = v_1 & \end{aligned}$$

unter gewissen Bedingungen an die Funktionen a_{jk}, die garantieren, dass die Nichtlinearität den Laplace-Operator für kleine Lösungen nicht entscheidend stört, findet sich in [9]. Wir gehen davon aus, dass sich der Beweis unter passenden Voraussetzungen an die dann Matrix-wertigen Funktionen a_{jk}, die unser System erfüllt, auf allgemeine Systeme übertragen lässt.
Mit diesem Satz können wir nun einen lokalen Existenzsatz des Problems (1-1), (1-2) beweisen. Um für die so erhaltene Lösung eine bessere Regularität nachzuweisen, benötigen wir einen Existenzsatz und ein Eindeutigkeitsresultat für das folgende lineare Problem:

$$u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \nu\Delta u_t(t) = f(t), \tag{4-3}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \tag{4-4}$$

Der Existenzsatz, den wir ebenfalls nur zitieren, lautet:

Satz 4.2
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$, $\gamma \in \mathbb{N}$, $T > 0$ und $s \in \mathbb{N}$ mit $s > 4 + \frac{n}{2}$ beliebig. Gelte weiter $f \in C^0([0,T], H^{s-2})$, $f_t \in L^2([0,T], H^{s-3})$ und $u_0, u_1 \in H^s$. Dann existiert eine Lösung u von (4-3), (4-4) in L^2 im Zeitintervall $[0,T]$ mit

$$u \in C^1([0,T], H^s) \cap C^2([0,T], H^{s-2}).$$

Den Beweis eines allgemeineren Satzes kann man wiederum in [9] nachlesen. Allerdings ist dort $\nu = 1$. Da der Satz ansonsten allgemeiner ist, $b_{jk}\partial_j\partial_k$ statt Δ unter gewissen Voraussetzungen an die b_{jk}, erhalten wir durch die Variablentransformation $x \mapsto \sqrt{\nu}x$ die gewünschte Lösung.
Weiter haben wir das folgende Eindeutigkeitsresultat:

Satz 4.3
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$, $\gamma \in \mathbb{N}$ und $T > 0$ beliebig, $f = u_0 = u_1 = 0$ und u eine Lösung des Problems (4-3), (4-4) in L^2 im Zeitintervall $[0,T]$ mit

$$u \in C^1([0,T], H^1) \cap C^2([0,T], L^2).$$

Dann ist $u = 0$.

Beweis
Wir nehmen an, dass alle Voraussetzungen gelten und u die Lösung bezeichne. Sei außerdem $t \in [0, T]$ beliebig. Wir bilden das L^2-Skalarprodukt von (4-3) mit $u_t(t)$ und erhalten durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_{tt}(t), u_t(t)\rangle + \langle \nabla u(t), \nabla u_t(t)\rangle + \nu \langle \nabla u_t(t), \nabla u_t(t)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\partial_t \left\{ \|u_t(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} + \nu \|\nabla u_t(t)\|_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\partial_t \|Du(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{4-5}$$

Da t beliebig war , gilt dies für alle $t \in [0, T]$. Sei nun $t_0 \in [0, T]$ beliebig. Dann liefert die Integration von (4-5) von 0 bis t_0:

$$\|Du(t_0)\|_2 \leq \|Du(0)\|_2 = 0.$$

Es folgt also $Du(t_0) = 0$ und insbesondere $\nabla u(t_0) = 0$, woraus sich $u(t_0) = c(t_0)$ ergibt. Wegen $u(t_0) \in L^2$ erhalten wir $0 = c(t_0) = u(t_0)$. Da $t_0 \in [0, T]$ beliebig war, ist die Behauptung gezeigt.

□

Nun können wir den gewünschten lokalen Existenzsatz für das Problem (1-1), (1-2) formulieren und aus den bisher in diesem Kapitel aufgeführten Resultaten beweisen.

Satz 4.4
Es seien $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$ und $\gamma \in \mathbb{N}$ beliebig. Seien weiter s und m gerade mit $s \geq m > 4 + \frac{n}{2}$ und $u_0, u_1 \in H^{s+2}$ reellwertig. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass, falls $\|u_0\|_{m+1,2} + \|u_1\|_{m+1,2} < \delta$, ein $T > 0$ existiert, das nur von $\|u_0\|_{m+2,2}$ und $\|u_1\|_{m+1,2}$ abhängt, so dass eine reellwertige Lösung u von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$ existiert mit

$$u \in C^1([0, T], H^{s+2}) \cap C^2([0, T], H^s).$$

Beweis
Seien also $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$ und $\gamma \in \mathbb{N}$ beliebig, s und m gerade mit $s \geq m > 4 + \frac{n}{2}$ und $u_0, u_1 \in H^{s+2}$ reellwertig. C wird im Verlauf des Beweises verschiedene von t unabhängige Konstanten bezeichnen. Sei außerdem δ_1 wie in Satz 4.1 und es gelte $\|u_0\|_{m+1,2} + \|u_1\|_{m+1,2} < \sqrt{\frac{\delta_1}{2}} =: \delta$. Dann folgt natürlich $2\|u_0\|_{m+1,2}^2 + 2\|u_1\|_{m+1,2}^2 \leq 2 \left(\|u_0\|_{m+1,2} + \|u_1\|_{m+1,2}\right)^2 < \delta_1$. Wir definieren nun $v_0 := \begin{pmatrix} u_0 \\ \partial_1 u_0 \end{pmatrix} \in H^{s+1}$ und $v_1 := \begin{pmatrix} u_1 \\ \partial_1 u_1 \end{pmatrix} \in H^s$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{m,2}^2 + \|v_1\|_{m,2}^2 &= \|u_0\|_{m,2}^2 + \|\partial_1 u_0\|_{m,2}^2 + \|u_1\|_{m,2}^2 + \|\partial_1 u_1\|_{m,2}^2 \\ &\leq 2\|u_0\|_{m+1,2}^2 + 2\|u_1\|_{m+1,2}^2 < \delta_1. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.1 existiert also ein $T_1 > 0$, nur von $\|v_0\|_{m+1,2}$ und $\|v_1\|_{m,2}$ abhängig, so dass eine reellwertige Lösung v von (4-1), (4-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T_1]$ existiert mit

$$v \in C^0([0, T_1], H^{s+1}) \cap C^1([0, T_1], H^s) \cap C^2([0, T_1], H^{s-2}).$$

Sei nun $t \in [0, T_1]$ beliebig. Dann erfüllen die einzelnen Komponenten von v:

$$v_{tt}^{(1)}(t) - \Delta v^{(1)}(t) - \nu\Delta v_t^{(1)}(t) = (\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma(\partial_1\partial_2 v^{(1)}(t)), \tag{4-6}$$
$$v_{tt}^{(2)}(t) - \Delta v^{(2)}(t) - \nu\Delta v_t^{(2)}(t) = (\gamma+1)(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma(\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t)). \tag{4-7}$$

Wir zeigen nun $v^{(2)}(t) = \partial_1 v^{(1)}(t)$, denn dann gilt:

$$v_{tt}^{(1)}(t) - \Delta v^{(1)}(t) - \nu\Delta v_t^{(1)}(t) = (\partial_1\partial_2 v^{(1)}(t))^{\gamma+1}. \tag{4-8}$$

Dazu setzen wir $w := \partial_1 v^{(1)}$. Dann erhalten wir durch Ableiten von (4-6):

$$\begin{aligned} & w_{tt}(t) - \Delta w(t) - \nu\Delta w_t(t) \\ = \;& \partial_1\left((\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma(\partial_1\partial_2 v^{(1)}(t))\right) \\ = \;& (\partial_1\partial_2 w(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma + \gamma(\partial_2 v^{(2)}(t))^{\gamma-1}(\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t))(\partial_2 w(t)). \end{aligned} \tag{4-9}$$

Jetzt zeigen wir, dass die Differenz von w und $v^{(2)}$ gleich Null ist. Sei also $z := w - v^{(2)}$. Dann ergibt sich aus (4-7) und (4-9):

$$\begin{aligned} & z_{tt}(t) - \Delta z(t) - \nu\Delta z_t(t) \\ = \;& (\partial_1\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma + \gamma(\partial_2 v^{(2)}(t))^{\gamma-1}(\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t))(\partial_2 w(t)) - \gamma(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma(\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t)) \\ = \;& (\partial_1\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma + \gamma(\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^{\gamma-1}(\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t)). \end{aligned} \tag{4-10}$$

Wir bilden das L^2-Skalarprodukt von (4-10) mit $z_t(t)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} & \langle z_{tt}(t), z_t(t)\rangle - \langle \Delta z(t), z_t(t)\rangle - \nu\langle \Delta z_t(t), z_t(t)\rangle \\ = \;& \left\langle (\partial_1\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma, z_t(t)\right\rangle + \left\langle \gamma(\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^{\gamma-1}(\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t)), z_t(t)\right\rangle. \end{aligned} \tag{4-11}$$

Mit partieller Integration ergibt die linke Seite von (4-11)

$$\begin{aligned}
& \langle z_{tt}(t), z_t(t)\rangle - \langle \Delta z(t), z_t(t)\rangle - \nu \langle \Delta z_t(t), z_t(t)\rangle \\
= \; & \langle z_{tt}(t), z_t(t)\rangle + \langle \nabla z(t), \nabla z_t(t)\rangle + \nu \langle \nabla z_t(t), \nabla z_t(t)\rangle \\
= \; & \frac{1}{2}\partial_t \|Dz(t)\|^2 + \nu \|\nabla z_t(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{4-12}$$

Die beiden Summanden der rechten Seite von (4-11) schätzen wir getrennt ab. Wegen $s-1 > \frac{n}{2}$ haben wir mit dem Sobolevschen Einbettungssatz $\partial_2 v^{(2)}, \partial_1\partial_2 v^{(2)} \in C^0([0,T_1], C_b^0)$. Es existieren also Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\max_{t\in[0,T_1]} \|\partial_2 v^{(2)}(t)\|_\infty \leq C_1, \qquad \max_{t\in[0,T_1]} \|\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t)\|_\infty \leq C_2.$$

Damit erhalten wir durch partielle Integration und für beliebgies $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle (\partial_1\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma, z_t(t)\right\rangle\right| & \leq C_1^\gamma \, |\langle \partial_1\partial_2 z(t), z_t(t)\rangle| \\
& \leq C_1^\gamma \, |\langle \partial_2 z(t), \partial_1 z_t(t)\rangle| \\
& = C_1^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_2 z(t))(x)(\partial_1 z_t(t))(x)| dx \\
& \leq C_1^\gamma \left(\frac{\|\partial_2 z(t)\|_2^2}{4\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \|\partial_1 z_t(t)\|_2^2 \right),
\end{aligned}$$

da $ab \leq \left(\frac{a^2}{4\varepsilon^2} + \varepsilon^2 b^2\right)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Wählen wir nun $\varepsilon = \sqrt{\frac{\nu}{C_1^\gamma}}$, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle (\partial_1\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^\gamma, z_t(t)\right\rangle\right| & \leq C \|\partial_2 z(t)\|_2^2 + \nu \|\partial_1 z_t(t)\|_2^2 \\
& \leq C \|Dz(t)\|_2^2 + \nu \|\nabla z_t(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4-13}$$

Für den zweiten Summanden haben wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \gamma(\partial_2 z(t))(\partial_2 v^{(2)}(t))^{\gamma-1}(\partial_1\partial_2 v^{(2)}(t)), z_t(t)\right\rangle\right| & \leq \gamma C_1^{\gamma-1} C_2^\gamma \, |\langle \partial_2 z(t), z_t(t)\rangle| \\
& \leq \gamma C_1^{\gamma-1} C_2^\gamma \|Dz(t)\|_2^2 \; = \; C \|Dz(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4-14}$$

Aus (4-11)-(4-14) folgt

$$\partial_t \|Dz(t)\|^2 \quad \leq \quad C \|Dz(t)\|_2^2. \tag{4-15}$$

Da $t \in [0, T_1]$ beliebig war, können wir Gleichung (4-15) für beliebiges $t_0 \in [0, T_1]$ von 0 bis t_0 integrieren und erhalten

$$||Dz(t_0)||^2 \leq ||Dz(0)||^2 + \int_0^{t_0} C||Dz(r)||_2^2 dr,$$

woraus sich mit der Gronwallschen Ungleichung folgendes ergibt:

$$||Dz(t_0)||^2 \leq ||Dz(0)||^2 \exp\left\{\int_0^{t_0} C dr\right\} \leq CT_1||Dz(0)||^2.$$

Wegen $z(0) = \partial_1 u_0 - \partial_1 u_0 = 0 = \partial_1 u_1 - \partial_1 u_1 = z_t(0)$ folgt $Dz(t_0) = 0$, woraus wir insbesondere $\nabla z(t_0) = 0$ und damit $z(t_0) = c(t_0)$ erhalten. Wegen $z(t_0) \in L^2$ ergibt sich $0 = c(t_0) = z(t_0)$. Da $t_0 \in [0, T_1]$ beliebig war, folgt $z = 0$, was $\partial_1 v^{(1)} = w = v^{(2)}$ bedeutet. Es gilt also (4-8). Da $t \in [0, T_1]$ beliebig war, gilt (4-8) für alle $t \in [0, T_1]$ und außerdem haben wir $v^{(1)}(0) = u_0$ und $v_t^{(1)}(0) = u_1$ aufgrund der speziellen Wahl der Anfangsdaten. Setzen wir nun $u := v^{(1)}$, so ist u also eine Lösung von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T_1]$ mit

$$u \in C^0([0, T_1], H^{s+1}) \cap C^1([0, T_1], H^s) \cap C^2([0, T_1], H^{s-2}).$$

Um die behauptete Regularität von u zu erhalten, benutzen wir die Sätze 4.2 und 4.3. Wegen $\partial_1\partial_2 u = \partial_2\partial_1 v^{(1)} = \partial_2 v^{(2)} \in C^0([0, T_1], H^s) \cap C^1([0, T_1], H^{s-1})$ folgt durch sukzessive Anwendung von Korollar 2.18:

$$\begin{aligned}
(\partial_1\partial_2 u)^{\gamma+1} &\in C^0([0, T_1], H^s) \\
\partial_t(\partial_1\partial_2 u)^{\gamma+1} &= (\gamma + 1)(\partial_1\partial_2 u)^\gamma(\partial_t\partial_1\partial_2 u) \\
&\in C^0([0, T_1], H^{s-1}) \subset L^2([0, T_1], H^{s-1}).
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.3 existiert damit eine Lösung $\tilde{u}$ des Problems (4-3), (4-4) für $f = (\partial_1\partial_2 u)^{\gamma+1}$ in L^2 im Zeitintervall $[0, T_1]$ mit

$$\tilde{u} \in C^1([0, T_1], H^{s+2}) \cap C^2([0, T_1], H^s).$$

Somit ist die Differenz $u - \tilde{u}$ eine Lösung von (4-3), (4-4) für $f = u_0 = u_1 = 0$ in L^2 im Zeitintervall $[0, T_1]$ mit

$$u - \tilde{u} \in C^1([0, T_1], H^s) \cap C^2([0, T_1], H^{s-2}) \subset C^1([0, T_1], H^1) \cap C^2([0, T_1], L^2)$$

und es folgt $u - \tilde{u} = 0$ mit Satz 4.3. Das bedeutet also auch

$$u \in C^1([0,T_1],H^{s+2}) \cap C^2([0,T_1],H^s).$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \|v_0\|^2_{m+1,2} &= \|u_0\|^2_{m+1,2} + \|\partial_1 u_0\|^2_{m+1,2} \le 2\|u_0\|^2_{m+2,2} \quad \text{und} \\ \|v_1\|^2_{m+1,2} &= \|u_1\|^2_{m+1,2} + \|\partial_1 u_1\|^2_{m+1,2} \le 2\|u_1\|^2_{m+2,2} \end{aligned}$$

und damit

$$\|v_0\|_{m+1,2} \le \sqrt{2}\|u_0\|_{m+2,2}, \quad \|v_1\|_{m+1,2} \le \sqrt{2}\|u_1\|_{m+2,2}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1\left(\|v_0\|_{m+1,2}, \|v_1\|_{m+1,2}\right) \ge T_1\left(\sqrt{2}\|u_0\|_{m+2,2}, \sqrt{2}\|u_1\|_{m+2,2}\right) \\ &=: T\left(\|u_0\|_{m+2,2}, \|u_1\|_{m+2,2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Wegen $T \le T_1$ löst u das Problem auch in $[0,T]$ und die Behauptung ist gezeigt.

□

Für das Fortsetzungsargument im Beweis des Hauptsatzes und für die Eindeutigkeit der damit gewonnenen globalen Lösung benötigen wir folgendes Eindeutigkeitsresultat für lokale Lösungen von (1-1), (1-2):

Satz 4.5
Es seien $n \in \mathbb{N}^{\ge 2}$, $\nu > 0$, $\gamma \in \mathbb{N}$ und $s, \tilde{s} \in \mathbb{N}$ mit $s > 3 + \frac{n}{2}$, $\tilde{s} > 1 + \frac{n}{2}$ beliebig. Es seien weiter $T, T_1 \in \mathbb{R}$ beliebig mit $0 \le T < T_1$ und u_1, u_2 Lösungen von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[T,T_1]$ mit $u_1(T) = u_2(T)$, $\partial_t u_1(T) = \partial_t u_2(T)$ und

$$u_i \in C^0([T,T_1],H^s) \cap C^1([T,T_1],H^{\tilde{s}}) \cap C^2([T,T_1],L^2), \quad i = 1,2.$$

Dann gilt: $u_1 = u_2$.

Beweis
Es seien die Voraussetzungen des Satzes gegeben und $t \in [T,T_1]$ beliebig. C wird im Verlauf des Beweises verschiedene, nicht von t und x abhängige, Konstanten bezeichnen. Wir definieren $u := u_2 - u_1$. Dann hat u die gleiche Regularität wie u_1 und u_2 und es gilt folgende Gleichheit

in L^2:

$$u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \nu\Delta u_t(t) = (\partial_1\partial_2 u_2(t))^{\gamma+1} - (\partial_1\partial_2 u_1(t))^{\gamma+1}.$$

Jetzt bilden wir das L^2-Skalarprodukt mit $u_t(t)$ und erhalten

$$\langle u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \nu\Delta u_t(t), u_t(t)\rangle = \left\langle (\partial_1\partial_2 u_2(t))^{\gamma+1} - (\partial_1\partial_2 u_1(t))^{\gamma+1}, u_t(t)\right\rangle. \tag{4-16}$$

Mit partieller Integration ergibt die linke Seite von (4-16):

$$\begin{aligned}
&\langle u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \nu\Delta u_t(t), u_t(t)\rangle \\
=\ & \langle u_{tt}(t), u_t(t)\rangle + \langle \nabla u(t), \nabla u_t(t)\rangle + \nu\langle \nabla u_t(t), \nabla u_t(t)\rangle \\
=\ & \frac{1}{2}\partial_t\left\{\|u_t(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right\} + \nu\|\nabla u_t(t)\|_2^2 \\
=\ & \frac{1}{2}\partial_t\|Du(t)\|_2^2 + \nu\|\nabla u_t(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4-17}$$

Nun wollen wir die rechte Seite von Gleichung (4-16) abschätzen. Für $i \in \{1,2\}$ gilt $u_i \in C^0([T,T_1], H^s)$ und es folgt mit dem Sobolevschen Einbettungssatz $u_i \in C^0([T,T_1], C_b^3)$ wegen $s > 3 + \frac{n}{2}$. Genauso haben wir $\partial_t u_i \in C^0([T,T_1], C_b^1)$. Jetzt fassen wir u_i und $\partial_t u_i$ als Funktion von t und x auf und erhalten die folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
&(\partial_1\partial_2 u_2(t,x))^{\gamma+1} - (\partial_1\partial_2 u_1(t,x))^{\gamma+1} \\
=\ & \int_0^1 \frac{d}{dr}(r\partial_1\partial_2 u_2(t,x) + (1-r)\partial_1\partial_2 u_1(t,x))^{\gamma+1}\,dr \\
=\ & \int_0^1 (r\partial_1\partial_2 u_2(t,x) + (1-r)\partial_1\partial_2 u_1(t,x))^{\gamma}\,(\partial_1\partial_2 u_2(t,x) - \partial_1\partial_2 u_1(t,x))dr \\
=\ & \partial_1\partial_2 u(t,x)\int_0^1 (r\partial_1\partial_2 u_2(t,x) + (1-r)\partial_1\partial_2 u_1(t,x))^{\gamma}\,dr.
\end{aligned}$$

Weil für klassisch differenzierbare Funktionen die schwachen und die starken Ableitungen fast überall übereinstimmen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle (\partial_1\partial_2 u_2(t))^{\gamma+1} - (\partial_1\partial_2 u_1(t))^{\gamma+1}, u_t(t)\right\rangle\right| \\
=\ & \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1\partial_2 u(t,x))\left(\int_0^1 (r\partial_1\partial_2 u_2(t,x) + (1-r)\partial_1\partial_2 u_1(t,x))^{\gamma}\,dr\right) u_t(t,x)dx\right|.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also unter Ausnutzung partieller Integration, mit dem Satz über parameterabhängige Integrale und wegen der Kompaktheit von $[T, T_1]$:

$$
\begin{aligned}
& \left|\left\langle (\partial_1\partial_2 u_2(t))^{\gamma+1} - (\partial_1\partial_2 u_1(t))^{\gamma+1}, u_t(t)\right\rangle\right| \\
\leq\ & \left| -\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_2 u(t,x))(\partial_1 u_t(t,x)) \left(\int\limits_0^1 (r\partial_1\partial_2 u_2(t,x) + (1-r)\partial_1\partial_2 u_1(t,x))^\gamma\, dr \right) dx \right| \\
& + \left| -\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_2 u(t,x)) u_t(t,x) \left(\partial_1 \int\limits_0^1 (r\partial_1\partial_2 u_2(t,x) + (1-r)\partial_1\partial_2 u_1(t,x))^\gamma\, dr \right) dx \right| \\
\leq\ & \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_2 u(t,x)| \cdot |\partial_1 u_t(t,x)| \left(|\partial_1\partial_2 u_2(t,x)| + |\partial_1\partial_2 u_1(t,x)|\right)^\gamma dx \\
& + \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_2 u(t,x)| \cdot |u_t(t,x)| \left(|\partial_1\partial_2 u_2(t,x)| + |\partial_1\partial_2 u_1(t,x)|\right)^{\gamma-1} \left(|\partial_1^2\partial_2 u_2(t,x)| + |\partial_1^2\partial_2 u_1(t,x)|\right) dx \\
\leq\ & C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_2 u(t,x)| \cdot |\partial_1 u_t(t,x)| dx + C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_2 u(t,x)| \cdot |u_t(t,x)| dx.
\end{aligned}
$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $\epsilon > 0$ gilt $ab \leq \frac{a^2}{4\epsilon^2} + \epsilon^2 b^2$ und wir erhalten für beliebiges $\epsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
& \left|\left\langle (\partial_1\partial_2 u_2(t))^{\gamma+1} - (\partial_1\partial_2 u_1(t))^{\gamma+1}, u_t(t)\right\rangle\right| \\
\leq\ & \frac{C}{4\epsilon^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_2 u(t,x)|^2 + C\epsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_1 u_t(t,x)|^2 + C\|\partial_2 u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \\
\leq\ & \frac{C}{4\epsilon^2} \|\partial_2 u(t)\|_2^2 + C\epsilon^2 \|\partial_1 u_t(t)\|_2^2 + C\|\partial_2 u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \\
\leq\ & \left(\frac{C}{4\epsilon^2} + C\right) \|Du(t)\|_2^2 + C\epsilon^2 \|\nabla u_t(t)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

weil starke und schwache Ableitungen übereinstimmen. Wählt man nun $\epsilon = \sqrt{\frac{\nu}{C}}$, ergibt sich

$$
\left|\left\langle (\partial_1\partial_2 u_2(t))^{\gamma+1} - (\partial_1\partial_2 u_1(t))^{\gamma+1}, u_t(t)\right\rangle\right| \leq C\|Du(t)\|_2^2 + \nu\|\nabla u_t(t)\|_2^2. \tag{4-18}
$$

Aus den Gleichungen (4-16)-(4-18) folgt schließlich:

$$
\partial_t \|Du(t)\|_2^2 \leq 2C\|Du(t)\|_2^2. \tag{4-19}
$$

Da $t \in [T, T_1]$ beliebig war, gilt Gleichung (4-19) für alle $t \in [T, T_1]$. Deshalb erhalten wir durch Integration von (4-19) von T bis t_0 für beliebiges $t_0 \in [T, T_1]$

$$\|Du(t_0)\|_2^2 \quad \leq \quad \|Du(T)\|_2^2 + \int_T^{t_0} 2C\|Du(r)\|_2^2 dr$$

und die Gronwallsche Ungleichung liefert

$$\|Du(t_0)\|_2^2 \quad \leq \quad \|Du(T)\|_2^2 \exp\left\{ \int_T^{t_0} 2C dr \right\} \;\leq\; C\|Du(T)\|_2^2.$$

Aus $u_1(T) = u_2(T)$ und $\partial_t u_1(T) = \partial_t u_2(T)$ ergibt sich $Du(T) = 0$ und damit $Du(t_0) = 0$, woraus insbesondere $\nabla u(t_0) = 0$ folgt. Es gilt also $u(t_0) = c(t_0)$ und wegen $u(t_0) \in L^2$ erhalten wir $0 = c(t_0) = u(t_0)$. Da $t_0 \in [T, T_1]$ beliebig war, ist die Behauptung gezeigt.

□

Kapitel 5

Energieabschätzung der lokalen Lösung

In diesem Kapitel werden wir eine Energieabschätzung für eine lokale Lösung von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$ wie durch Satz 4.4 gegeben beweisen, wobei wir uns wieder an [4] orientieren. Dafür benötigen wir zunächst das folgende Lemma, das sich aus der Moser-Ungleichung, Lemma 2.19, ergibt:

Lemma 5.1
Es seien $n, s \in \mathbb{N}$ beliebig und es gelte $f \in H^s \cap L^\infty$. Dann existiert für alle $\gamma \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le s$ eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$||\nabla^\alpha (f)^{\gamma+1}||_2 \quad \le \quad C||f||_\infty^\gamma ||\nabla^s f||_2. \tag{5-1}$$

Insbesondere haben wir $f^{\gamma+1} \in H^s \cap L^\infty$. C hängt dabei nur von n und s ab.

Beweis
Der Beweis erfolgt durch Induktion über γ. C wird verschiedene, nur von n und s abhängige, Konstanten bezeichnen. Es seien also $n, s \in \mathbb{N}$ beliebig und es gelte $f \in H^s \cap L^\infty$.
$\underline{\gamma = 1:}$
Mit Lemma 2.19 folgt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le s$

$$\begin{aligned} ||\nabla^\alpha (f)^{1+1}||_2 \quad &\le \quad C\,\{||f||_\infty ||\nabla^s f||_2 + ||\nabla^s f||_2 ||f||_\infty\} \\ &\le \quad C||f||_\infty^1 ||\nabla^s f||_2 \end{aligned}$$

und damit auch $f^{1+1} \in H^s \cap L^\infty$ wegen $||\nabla^s f||_2 \le ||f||_{s,2}$.
$\underline{\gamma \to \gamma + 1:}$
Wir nehmen an, dass die Behauptung für ein $\gamma \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist also $f^{\gamma+1} \in H^s \cap L^\infty$. Dann haben wir wiederum mit Lemma 2.19 für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le s$

$$\begin{aligned} \|\nabla^\alpha (f)^{\gamma+1+1}\|_2 &\leq C\left\{\|f\|_\infty \|\nabla^s (f)^{\gamma+1}\|_2 + \|\nabla^s f\|_2 \|(f)^{\gamma+1}\|_\infty\right\} \\ &\leq C\left\{\|f\|_\infty \|\nabla^s (f)^{\gamma+1}\|_2 + \|\nabla^s f\|_2 \|f\|_\infty^{\gamma+1}\right\}. \end{aligned} \tag{5-2}$$

Nun nutzen wir die Induktionsvoraussetzung (5-1) aus. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|\nabla^s (f)^{\gamma+1}\|_2^2 &= \sum_{|\alpha|=s} \|\nabla^\alpha (f)^{\gamma+1}\|_2^2 \leq \sum_{|\alpha|=s} C^2 \|f\|_\infty^{2\gamma} \|\nabla^s f\|_2^2 \\ &\leq C\|f\|_\infty^{2\gamma} \|\nabla^s f\|_2^2. \end{aligned}$$

Ziehen der Wurzel liefert:

$$\|\nabla^s (f)^{\gamma+1}\|_2 \leq C\|f\|_\infty^{\gamma} \|\nabla^s f\|_2. \tag{5-3}$$

Gleichung (5-3) eingesetzt in Gleichung (5-2) ergibt

$$\begin{aligned} \|\nabla^\alpha (f)^{\gamma+1+1}\|_2 &\leq C\left\{\|f\|_\infty C\|f\|_\infty^{\gamma} \|\nabla^s f\|_2 + \|\nabla^s f\|_2 \|f\|_\infty^{\gamma+1}\right\} \\ &\leq C\|f\|_\infty^{\gamma+1} \|\nabla^s f\|_2 \end{aligned}$$

und somit auch $f^{\gamma+1+1} \in H^s \cap L^\infty$. □

Jetzt können wir die folgende Energieabschätzung beweisen.

Satz 5.2

Es seien $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$, $\gamma \in \mathbb{N}$ und $T > 0$ beliebig. Seien weiter $s \in \mathbb{N}$ mit $s > \frac{n}{2}$ beliebig, $u_0, u_1 \in H^{s+2}$ und u eine Lösung von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$ mit

$$u \in C^1([0, T], H^{s+2}) \cap C^2([0, T], H^s).$$

Dann existiert eine von T, u_0 und u_1 unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$\|Du(t)\|_{s,2} \leq \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{\int_0^t C\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{\gamma} \left(\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{\gamma} + 1\right) dr\right\}.$$

Beweis

Seien also die Voraussetzungen des Satzes gegeben und $t \in [0, T]$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig mit $|\alpha| \leq s$. C wird im Verlauf des Bweises verschiedene, nicht von T, u_0 und u_1 abhängige, Konstanten bezeichnen. Wir wenden ∇^α auf die Differentialgleichung (1-1) an und bilden das L^2-Skalarprodukt mit $\nabla^\alpha u_t$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla^\alpha u_{tt}(t), \nabla^\alpha u_t(t)\rangle - \langle \nabla^\alpha \Delta u(t), \nabla^\alpha u_t(t)\rangle - \langle \nabla^\alpha \nu \Delta u_t(t), \nabla^\alpha u_t(t)\rangle \\ = \; & \left\langle \nabla^\alpha (\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}, \nabla^\alpha u_t(t)\right\rangle . \end{aligned} \tag{5-4}$$

Durch partielle Integration erhalten wir für die linke Seite von (5-4):

$$\begin{aligned} & \langle \nabla^\alpha u_{tt}(t), \nabla^\alpha u_t(t)\rangle - \langle \nabla^\alpha \Delta u(t), \nabla^\alpha u_t(t)\rangle - \langle \nabla^\alpha \nu \Delta u_t(t), \nabla^\alpha u_t(t)\rangle \\ = \; & \langle \nabla^\alpha u_{tt}(t), \nabla^\alpha u_t(t)\rangle + \langle \nabla^\alpha \nabla u(t), \nabla^\alpha \nabla u_t(t)\rangle + \nu \langle \nabla^\alpha \nabla u_t(t), \nabla^\alpha \nabla u_t(t)\rangle \\ = \; & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\|\nabla^\alpha u_t(t)\|_2^2 + \|\nabla^\alpha \nabla u(t)\|_2^2\right\} + \nu\|\nabla^\alpha \nabla u_t(t)\|_2^2 \\ = \; & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla^\alpha D u(t)\|_2^2 + \nu\|\nabla^\alpha \nabla u_t(t)\|_2^2 . \end{aligned} \tag{5-5}$$

Jetzt schätzen wir die rechte Seite von (5-4) ab. Hier müssen wir zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ unterscheiden. Wegen $\partial_1\partial_2 u(t) \in H^s$ und $s > \frac{n}{2}$ erhalten wir aus dem Sobolevschen Einbettungssatz $\partial_1\partial_2 u(t) \in L^\infty$ und damit für $\alpha = 0$ mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \nabla^\alpha (\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}, \nabla^\alpha u_t(t)\right\rangle\right| &= \left|\left\langle (\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}, u_t(t)\right\rangle\right| \\ &\leq \|(\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}\|_2 \|u_t(t)\|_2 \\ &\leq \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^\gamma \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \\ &\leq \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^\gamma \|D u(t)\|_{s,2}^2 . \end{aligned} \tag{5-6}$$

Sei nun $\alpha \neq 0$ und etwa $\alpha_j \neq 0$. Dann erhalten wir durch partielle Integration:

$$\left|\left\langle \nabla^\alpha (\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}, \nabla^\alpha u_t(t)\right\rangle\right| = \left|\left\langle \nabla^{(\alpha-e_j)} (\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}, \partial_j \nabla^\alpha u_t(t)\right\rangle\right| . \tag{5-7}$$

Dabei bezeichnet e_j den j-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab \leq \frac{a^2}{4\epsilon^2} + \epsilon^2 b^2,$$

da $\left(\frac{a}{2\epsilon} - \epsilon b\right)^2 \geq 0$. Angewandt auf (5-7) ergibt sich:

$$\left|\left\langle \nabla^\alpha (\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}, \nabla^\alpha u_t(t)\right\rangle\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\left(\left(\nabla^{(\alpha-e_j)} (\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}\right)(x)\right)^2}{4\epsilon^2} + \epsilon^2 \left(\left(\partial_j \nabla^\alpha u_t(t)\right)(x)\right)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{4\epsilon^2}\|\nabla^{(\alpha-e_j)}(\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}\|_2^2 + \epsilon^2\|\partial_j\nabla^\alpha u_t(t)\|_2^2. \tag{5-8}$$

Jetzt schätzen wir die beiden Summanden der rechten Seite von (5-8) getrennt ab. Aus $\partial_1\partial_2 u(t) \in H^s \cap L^\infty$ folgt $\partial_1\partial_2 u(t) \in H^{s-1} \cap L^\infty$ und wir haben mit Lemma 5.1 wegen $|\alpha - e_j| \leq s-1$ und $(s-1) \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\epsilon^2}\|\nabla^{(\alpha-e_j)}(\partial_1\partial_2 u(t))^{\gamma+1}\|_2^2 &\leq \frac{1}{4\epsilon^2}C^2\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^{2\gamma}\|\nabla^{s-1}\partial_1\partial_2 u(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{C}{\epsilon^2}\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^{2\gamma}\|Du(t)\|_{s,2}^2. \end{aligned} \tag{5-9}$$

Und für den zweiten Summanden gilt:

$$\epsilon^2\|\partial_j\nabla^\alpha u_t(t)\|_2^2 \leq \epsilon^2\|\nabla^\alpha\nabla u_t(t)\|_2^2. \tag{5-10}$$

Aus (5-4)-(5-10) folgt also:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla^\alpha Du(t)\|_2^2 + \nu\|\nabla^\alpha\nabla u_t(t)\|_2^2 \\ \leq\ &\max\left\{\frac{C}{\epsilon^2}, 1\right\}\left(\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^{2\gamma} + \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^\gamma\right)\|Du(t)\|_{s,2}^2 + \epsilon^2\|\nabla^\alpha\nabla u_t(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\epsilon = \sqrt{\nu}$ gilt, ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla^\alpha Du(t)\|_2^2 \leq C\left(\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^{2\gamma} + \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^\gamma\right)\|Du(t)\|_{s,2}^2. \tag{5-11}$$

Da $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq s$ beliebig war, können wir über $|\alpha| \leq s$ summieren und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|Du(t)\|_{s,2}^2 \leq C\left(\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^{2\gamma} + \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty^\gamma\right)\|Du(t)\|_{s,2}^2. \tag{5-12}$$

Es war $t \in [0,T]$ beliebig gewählt, also gilt (5-12) für alle $t \in [0,T]$. Sei nun wiederum $t \in [0,T]$ beliebig. Dann liefert die Integration von (5-12) von 0 bis t

$$\|Du(t)\|_{s,2}^2 \leq \|Du(0)\|_{s,2}^2 + \int_0^t C\left(\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{2\gamma} + \|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^\gamma\right)\|Du(r)\|_{s,2}^2 dr$$

und mit der Gronwallschen Ungleichung erhalten wir:

$$\|Du(t)\|_{s,2}^2 \leq \|Du(0)\|_{s,2}^2 \exp\left\{\int_0^t C\left(\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{2\gamma} + \|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^\gamma\right)dr\right\}.$$

Durch Ziehen der Wurzel folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\|Du(t)\|_{s,2} &\leq \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{\int_0^t \frac{C}{2}\left(\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{2\gamma} + \|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{\gamma}\right) dr\right\} \\ &\leq \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{\int_0^t C\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{\gamma} \left(\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^{\gamma} + 1\right) dr\right\}.\end{aligned}$$

Da $t \in [0, T]$ beliebig war, ist die Behauptung gezeigt. □

Kapitel 6

A priori Abschätzung der lokalen Lösung

In diesem Kapitel werden wir eine a priori Abschätung für eine Lösung von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$, wie durch Satz 4.4 gegeben, beweisen, falls die Anfangsdaten glatt und klein genug sind. Diese wird unabhängig von der Länge des Existenzintervalls sein. Dabei nutzen wir eine spezielle Darstellung der lokalen Lösung durch die Lösung des linearen Problems (3-1), (3-2) nach Satz 3.8 und das in Satz 3.9 bewiesene Abklingverhalten letzterer aus.
Zunächst formulieren und beweisen wir das Lemma zur Darstellung der lokalen Lösung, wobei wir analog wie bei Lemma 7.3 in [5] vorgehen. Dafür definieren wir für $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 5$, $g \in H^s$ und alle $t \in [0, \infty)$

$$w(t)g \quad := \quad y(t),$$

wobei y die durch Satz 3.8 gegebene Lösung des linearen Problems (3-1), (3-2) mit $y_1 = g$ ist.

Lemma 6.1
Seien $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$, $\gamma \in \mathbb{N}$, $T > 0$ und $s \in \mathbb{N}$ beliebig mit $s > 4 + \frac{n}{2}$. Es seien weiter $u_0, u_1 \in H^{s+2}$ und u eine Lösung von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$ mit

$$u \in C^1([0, T], H^{s+2}) \cap C^2([0, T], H^s).$$

Dann gilt für alle $t \in [0, T]$ folgende Darstellungsformel:

$$u(t) \quad = \quad w(t)(u_1 - \nu\Delta u_0) + \partial_t w(t)u_0 + \int_0^t w(t - r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1} dr. \tag{6-1}$$

Beweis

Seien also die Voraussetzungen des Satzes gegeben. Wir schreiben abkürzend $f := (\partial_1\partial_2 u)^{\gamma+1}$. Dann folgt durch sukzessive Anwendung von Korollar 2.18

$$f \in C^1([0,T], H^s) \cap C^2([0,T], H^{s-2}).$$

Wir definieren nun für alle $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} v(t) &:= w(t)(u_1 - \nu\Delta u_0) + \partial_t w(t) u_0 + \int_0^t w(t-r) f(r) dr \\ &=: v_1(t) + v_2(t) + v_3(t). \end{aligned}$$

Dann haben wir mit Satz 3.8

$$\partial_t^2 v_1(t) - \Delta v_1(t) - \nu\Delta\partial_t v_1(t) = 0, \tag{6-2}$$

$$\partial_t^2 v_2(t) - \Delta v_2(t) - \nu\Delta\partial_t v_2(t) = 0 \tag{6-3}$$

und

$$v_1(0) = w(0)(u_1 - \nu\Delta u_0) = 0, \tag{6-4}$$

$$\partial_t v_1(0) = (\partial_t w(t)(u_1 - \nu\Delta u_0))(t=0) = u_1 - \nu\Delta u_0, \tag{6-5}$$

$$v_2(0) = (\partial_t w(t) u_0)(t=0) = u_0, \tag{6-6}$$

$$\partial_t v_2(0) = (\partial_t^2 w(t) u_0)(t=0) = (\Delta w(t) u_0)(t=0) + \nu(\Delta\partial_t w(t) u_0)(t=0) = \nu\Delta u_0. \tag{6-7}$$

Weiter gilt für v_3

$$\partial_t v_3(t) = w(0) f(t) + \int_0^t \partial_t w(t-r) f(r) dr = \int_0^t \partial_t w(t-r) f(r) dr \tag{6-8}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v_3(t) &= \partial_t \int_0^t \partial_t w(t-r) f(r) dr = \partial_t w(0) f(t) + \int_0^t \partial_t^2 w(t-r) f(r) dr \\ &= f(t) + \int_0^t \partial_t^2 w(t-r) f(r) dr = f(t) + \int_0^t (\Delta w(t-r) f(r) + \nu\Delta\partial_t w(t-r) f(r))\, dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(t) + \Delta \int_0^t w(t-r)f(r)dr + \nu\Delta\partial_t \int_0^t w(t-r)f(r)dr \\
&= f(t) + \Delta v_3(t) + \nu\Delta\partial_t v_3(t). \qquad (6\text{-}9)
\end{aligned}
$$

Und aus der Definition von v_3 und (6-2) folgt sofort:

$$
v_3(0) = 0, \quad \partial_t v_3(0) = 0. \qquad (6\text{-}10)
$$

Insgesamt haben wir also wegen (6-2)-(6-7), (6-9) und (6-10) auch für v:

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2 v(t) - \Delta v(t) - \nu\Delta\partial_t v(t) &= f(t), \\
v(0) = u_0, \quad \partial_t v(0) &= u_1.
\end{aligned}
$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 4.3.

□

Nun können wir die a priori Abschätzung formulieren und beweisen, wobei wir wie in [4] vorgehen.

Satz 6.2

Es seien $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$, $\gamma \in \mathbb{N}$ und $T > 0$ beliebig mit $\gamma n > 2$. Seien weiter $s \geq 12 + n$ beliebig, $\bar{s} = 4 + \left[\frac{n}{2}\right]$ und u eine Lösung von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$ zu den Anfangswerten $u_0, u_1 \in H^{s+2}$ mit

$$
u \in C^1([0,T], H^{s+2}) \cap C^2([0,T], H^s).
$$

Wir definieren außerdem für alle $\tilde{T} \in [0, T]$:

$$
M_{\bar{s}}(\tilde{T}) \ := \sup_{t\in[0,\tilde{T}]} \left\{(1+t)^{\frac{n}{2}} \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty + (1+t)^{\frac{n}{4}} \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_{\bar{s},2}\right\}. \qquad (6\text{-}11)
$$

Dann existieren $\delta > 0$ und $R > 0$ so, dass wir, falls zusätzlich $u_0 \in W^{s-2,1}$, $u_1 \in W^{s-4,1}$ und $\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_0\|_{s-2,1} + \|u_1\|_{s,2} + \|u_1\|_{s-4,1} < \delta$ gilt, $M_{\bar{s}}(T) \leq R$ haben. Dabei sind δ und R unabhängig von T, u_0 und u_1.

Beweis

Seien die Voraussetzungen des Satzes gegeben und es gelte $u_0 \in W^{s-2,1}$, $u_1 \in W^{s-4,1}$ und $\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_0\|_{s-2,1} + \|u_1\|_{s,2} + \|u_1\|_{s-4,1} < \delta$ für ein beliebiges δ mit $0 < \delta \leq 1$. Im Verlauf

des Beweises wird C verschiedene positive, von T, u_0 und u_1 unabhängige, Konstanten bezeichnen.
Sei nun $\tilde{T} \in [0, T]$ beliebig. Wir werden die zwei Summanden im Supremum in der Definition von $M_{\bar{s}}(\tilde{T})$ für alle $t \in [0, \tilde{T}]$ gegen eine Funktion von $M_{\bar{s}}(\tilde{T})$ abschätzen. Dazu schreiben wir u wie in (6-1) und nutzen das Abklingverhalten der Lösung des linearen Problems (3-1),(3-2) aus. Es sei also $t \in [0, \tilde{T}]$ beliebig.
Wir beginnen mit $(1+t)^{\frac{n}{2}} \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty$. Wegen Gleichung (6-1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty &\leq \|\partial_1\partial_2 w(t)(u_1 - \nu\Delta u_0)\|_\infty + \|\partial_1\partial_2\partial_t w(t)u_0\|_\infty \\ &\quad + \int_0^t \|\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_\infty dr \end{aligned}$$

und mit Satz 3.9

$$\begin{aligned} \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}} \|u_1 - \nu\Delta u_0\|_{s_1,1} + C(1+t)^{-1-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{s_2,1} \\ &\quad + C \int_0^t (1+t-r)^{-\frac{n}{4}} \|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{s_3,2} dr, \end{aligned}$$

falls $s_1 > 2+n$, $s_2 > 4+n$ und $s_3 > 2+\frac{n}{2}$ gerade. Wir wählen jetzt s_1, s_2 und s_3 minimal, um die benötigte Regularität möglichst klein zu halten, woraus folgt:

$$\begin{aligned} \|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}} \|u_1 - \nu\Delta u_0\|_{4+n,1} + C(1+t)^{-1-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{6+n,1} \\ &\quad + C \int_0^t (1+t-r)^{-\frac{n}{4}} \|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2} dr. \end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \|u_1 - \nu\Delta u_0\|_{4+n,1} &\leq \|u_1\|_{4+n,1} + \nu\|\Delta u_0\|_{4+n,1} \leq \|u_1\|_{4+n,1} + C\|u_0\|_{6+n,1} \\ &\leq \|u_1\|_{s-4,1} + C\|u_0\|_{s-2,1} < C\delta \end{aligned}$$

und $\|u_0\|_{6+n,1} \leq \|u_0\|_{s-2,1} < \delta$ und es ergibt sich

$$\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty \leq C\delta(1+t)^{-\frac{n}{2}} + C \int_0^t (1+t-r)^{-\frac{n}{4}} \|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2} dr. \tag{6-12}$$

Aus $s \geq \bar{s} > \frac{n}{2}$ und mit dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt $\partial_1\partial_2 u(r) \in H^{\bar{s}} \cap L^\infty$ für alle $r \in [0, t]$ und damit aus Lemma 5.1 und (6-11) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \bar{s}$ und alle $r \in [0, t]$

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_2 &\leq C\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^\gamma \|\nabla^{\bar{s}}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2 \leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma (1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}}\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_{\bar{s},2} \\
&\leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}.
\end{aligned}$$

Quadrieren, summieren über alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \bar{s}$ und Wurzel ziehen liefert:

$$\|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2} \leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{n}{2}} C\int_0^t (1+t-r)^{-\frac{n}{4}}\|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2}dr \\
&\leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1}\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2}}(1+t-r)^{-\frac{n}{4}}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}dr. \qquad (6\text{-}13)
\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.20 mit $\tilde{\gamma} = \frac{n}{2}$, $\tilde{\alpha} = \frac{n}{4}$ und $\tilde{\beta} = \frac{\gamma n}{2} + \frac{n}{4}$ folgt

$$C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1}\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{2}}(1+t-r)^{-\frac{n}{4}}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}dr \leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1}. \qquad (6\text{-}14)$$

Insgesamt ergibt sich aus (6-12)-(6-14):

$$(1+t)^{\frac{n}{2}}\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty \leq C\delta + C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1}. \qquad (6\text{-}15)$$

Nun schätzen wir $(1+t)^{\frac{n}{4}}\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_{\bar{s},2}$ ab. Wieder aus Gleichung (6-1) folgt

$$\begin{aligned}
\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_{\bar{s},2} &\leq \|\partial_1\partial_2 w(t)(u_1 - \nu\Delta u_0)\|_{\bar{s},2} + \|\partial_1\partial_2\partial_t w(t)u_0\|_{\bar{s},2} \\
&\quad + \int_0^t \|\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2}dr. \qquad (6\text{-}16)
\end{aligned}$$

Wir schätzen die Summanden nacheinander ab. Es gilt mit Satz 3.9

$$\begin{aligned}
\|\partial_1\partial_2 w(t)(u_1 - \nu\Delta u_0)\|_{\bar{s},2}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq\bar{s}}\|\nabla^\alpha\partial_1\partial_2 w(t)(u_1-\nu\Delta u_0)\|_2^2 \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq\bar{s}}\left(C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{4}}\|u_1-\nu\Delta u_0\|_{s_{4},1}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\leq \quad C\left((1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u_1-\nu\Delta u_0\|_{s_4,1}\right)^2,$$

falls $s_4 > \bar{s}+2+\frac{n}{2}$ gerade. Wieder wählen wir s_4 minimal und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\partial_1\partial_2 w(t)(u_1-\nu\Delta u_0)\|_{\bar{s},2} &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u_1-\nu\Delta u_0\|_{\bar{s}+4+[\frac{n}{2}],1} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}\left(\|u_1\|_{\bar{s}+4+[\frac{n}{2}],1}+C\|u_0\|_{\bar{s}+6+[\frac{n}{2}],1}\right) \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}\left(\|u_1\|_{s-4,1}+C\|u_0\|_{s-2,1}\right) \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}\delta. \quad (6\text{-}17)
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden folgt wieder aus Satz 3.9

$$\begin{aligned}
\|\partial_1\partial_2\partial_t w(t)u_0\|_{\bar{s},2}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq\bar{s}}\|\nabla^\alpha\partial_1\partial_2\partial_t w(t)u_0)\|_2^2 \leq \sum_{|\alpha|\leq\bar{s}}\left(C(1+t)^{-\frac{|\alpha|+2}{2}-\frac{n}{4}}\|u_0\|_{s_5,1}\right)^2 \\
&\leq C\left((1+t)^{-1-\frac{n}{4}}\|u_0\|_{s_5,1}\right)^2,
\end{aligned}$$

falls $s_5 > \bar{s}+4+\frac{n}{2}$ gerade ist. Wir wählen erneut s_5 minimal und erhalten

$$\begin{aligned}
\|\partial_1\partial_2\partial_t w(t)u_0\|_{\bar{s},2} &\leq C(1+t)^{-1-\frac{n}{4}}\|u_0\|_{\bar{s}+6+[\frac{n}{2}],1} \leq C(1+t)^{-1-\frac{n}{4}}\|u_0\|_{s-2,1} \\
&\leq C(1+t)^{-1-\frac{n}{4}}\delta. \quad (6\text{-}18)
\end{aligned}$$

Um den dritten Summanden abzuschätzen, schätzen wir zunächst $\|\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2}$ für alle $r\in[0,t]$ ab. Sei also $r\in[0,t]$ beliebig. Dann folgt aus Satz 3.9

$$\begin{aligned}
\|\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq\bar{s}}\|\nabla^\alpha\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_2^2 \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq\bar{s}}\left(C(1+t-r)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{s_6,2}\right)^2 \\
&\leq C\|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{s_6,2}^2,
\end{aligned}$$

falls $s_6 > \bar{s}+2$ gerade ist. Wir wählen wieder s_6 minimal und haben damit

$$\|\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2} \leq C\|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s}+4,2}. \quad (6\text{-}19)$$

Es folgt aus $s\geq\bar{s}+4>\frac{n}{2}$ und mit dem Sobolevschen Einbettungssatz $\partial_1\partial_2 u(r)\in H^{\bar{s}+4}\cap L^\infty$ und damit für alle $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha|\leq\bar{s}+4$ wegen Lemma 5.1 und (6-11):

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_2 &\leq C\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_\infty^\gamma\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2 \\
&\leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}}\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2.
\end{aligned}$$

Quadrieren, Summation über alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \bar{s} + 4$ und Wurzel ziehen liefert wieder:

$$\|(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s}+4,2} \leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}}\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2. \tag{6-20}$$

Nun schätzen wir $\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2$ ab. Dabei ist wichtig, dass wir nicht $\|\partial_1\partial_2 u(r)\|_{\bar{s}+4,2}$ sondern nur höhere Ableitungen abschätzen müssen. Dies liegt daran, dass in Lemma 5.1 Gagliardo-Nirenberg-Ungleichungen enthalten sind und liefert bessere Abklingraten. Es gilt

$$\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2^2 = \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2^2 \leq \left(\sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2\right)^2,$$

woraus folgt:

$$\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2 \leq \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2.$$

Damit haben wir wegen (6-1):

$$\begin{aligned}\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2 \leq{}& \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2 w(r)(u_1-\nu\Delta u_0)\|_2 + \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2\partial_t w(r)u_0\|_2 \\ &+ \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\int_0^r \|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2 w(r-\tau)(\partial_1\partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_2 d\tau. \end{aligned}\tag{6-21}$$

Wieder schätzen wir die drei Summen getrennt ab. Da wir nur höhere Ableitungen abschätzen, genügt uns bei den ersten beiden Summen die schlechtere Abschätzung mit $l = \infty$ gegen die H^m-Norm der Anfangsdaten, was die benötigte Regularität senkt. Es gilt für die erste Summe wegen Satz 3.9

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2 w(r)(u_1-\nu\Delta u_0)\|_2 &\leq \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}}\|u_1-\nu\Delta u_0\|_{s_7,2} \\ &\leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}}\|u_1-\nu\Delta u_0\|_{s_7,2},\end{aligned}$$

falls $s_7 > \bar{s} + 6$ gerade ist. Wir wählen s_7 minimal und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=\bar{s}+4}\|\nabla^{\alpha}\partial_1\partial_2 w(r)(u_1-\nu\Delta u_0)\|_2 &\leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}}\|u_1-\nu\Delta u_0\|_{\bar{s}+8,2} \\ &\leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}}\left(\|u_1\|_{\bar{s}+8,2} + C\|u_0\|_{\bar{s}+10,2}\right) \\ &\leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}}\left(\|u_1\|_{s,2} + C\|u_0\|_{s+1,2}\right) \\ &\leq C\delta(1+r)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}}. \end{aligned}\tag{6-22}$$

Für die zweite Summe haben wir wiederum mit Satz 3.9:

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} \|\nabla^\alpha \partial_1 \partial_2 \partial_t w(r) u_0\|_2 &\leq \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+6}{2}} \|u_0\|_{s_8,2} \\ &\leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+6}{2}} \|u_0\|_{s_8,2},\end{aligned}$$

falls $s_8 > \bar{s} + 8$ gerade gilt. Indem wir s_8 minimal wählen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} \|\nabla^\alpha \partial_1 \partial_2 \partial_t w(r) u_0\|_2 &\leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+6}{2}} \|u_0\|_{\bar{s}+10,2} \leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+6}{2}} \|u_0\|_{s+1,2} \\ &\leq C(1+r)^{-\frac{\bar{s}+6}{2}} \delta. \end{aligned} \tag{6-23}$$

Nun kommen wir zur dritten Summe. Wir haben mit Satz 3.9

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} \int_0^r \|\nabla^\alpha \partial_1 \partial_2 w(r-\tau)(\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_2 d\tau &\leq \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} \int_0^r C(1+r-\tau)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}} \|(\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_{s_9,2} d\tau \\ &\leq C \int_0^r (1+r-\tau)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}} \|(\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_{s_9,2} d\tau,\end{aligned}$$

falls $s_9 > \bar{s} + 6$ gerade ist. Wir wählen s_9 minimal und es ergibt sich

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} \int_0^r \|\nabla^\alpha \partial_1 \partial_2 w(r-\tau)(\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_2 d\tau \\ &\leq C \int_0^r (1+r-\tau)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}} \|(\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_{\bar{s}+8,2} d\tau. \end{aligned} \tag{6-24}$$

Jetzt schätzen wir $\|(\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_{\bar{s}+8,2}$ für alle $\tau \in [0, r]$ ab. Sei dazu $\tau \in [0, r]$ beliebig. Wegen $s \geq \bar{s} + 8 > \frac{n}{2}$ und mit dem Sobolevschen Einbettungssatz folgt $\partial_1 \partial_2 u(\tau) \in H^{\bar{s}+8} \cap L^\infty$ und damit für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \bar{s} + 8$ wegen Lemma 5.1

$$\begin{aligned}\|\nabla^\alpha (\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_2 &\leq C \|\partial_1 \partial_2 u(\tau)\|_\infty^\gamma \|\nabla^{\bar{s}+8} \partial_1 \partial_2 u(\tau)\|_2 \\ &\leq C \|\partial_1 \partial_2 u(\tau)\|_\infty^\gamma \|\partial_1 \partial_2 u(\tau)\|_{\bar{s}+8,2},\end{aligned}$$

woraus sich wiederum durch Quadrieren, Summation über alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \bar{s} + 8$ und Wurzel ziehen ergibt:

$$\|(\partial_1 \partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_{\bar{s}+8,2} \leq C \|\partial_1 \partial_2 u(\tau)\|_\infty^\gamma \|\partial_1 \partial_2 u(\tau)\|_{\bar{s}+8,2}. \tag{6-25}$$

Wegen $s \geq \bar{s} + 9 > \frac{n}{2}$ folgt mit der Energieabschätzung aus Satz 5.2

$$\begin{aligned}
\|\partial_1\partial_2 u(\tau)\|_{\bar{s}+8,2} &\leq \|Du(\tau)\|_{\bar{s}+9,2} \leq \|Du(0)\|_{\bar{s}+9,2} \exp\left\{\int_0^\tau C\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma + 1\right) d\rho\right\} \\
&\leq \left(\|\nabla u_0\|_{\bar{s}+9,2} + \|u_1\|_{\bar{s}+9,2}\right) \exp\left\{\int_0^\tau C\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma + 1\right) d\rho\right\} \\
&\leq \left(n\|u_0\|_{\bar{s}+10,2} + \|u_1\|_{\bar{s}+9,2}\right) \exp\left\{\int_0^\tau C\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma + 1\right) d\rho\right\} \\
&\leq \left(n\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_1\|_{s,2}\right) \exp\left\{\int_0^\tau C\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma + 1\right) d\rho\right\} \\
&\leq C\delta \exp\left\{\int_0^\tau C\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma + 1\right) d\rho\right\}.
\end{aligned}$$

Sei nun $\rho \in [0, \tau]$ beliebig. Aus der Definition von $M_{\bar{s}}(\tilde{T})$ folgt $\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty \leq M_{\bar{s}}(\tilde{T})(1+\rho)^{-\frac{n}{2}}$ und wir haben

$$C\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma + 1\right) \leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma (1+\rho)^{-\frac{\gamma n}{2}} \left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma + 1\right).$$

Da $\rho \in [0, \tau]$ beliebig war und $\gamma n > 2$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau C\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1\partial_2 u(\rho)\|_\infty^\gamma + 1\right) d\rho &\leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma \left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma + 1\right) \int_0^\tau (1+\rho)^{-\frac{\gamma n}{2}} d\rho \\
&\leq C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma \left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma + 1\right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir also:

$$\|\partial_1\partial_2 u(\tau)\|_{\bar{s}+8,2} \leq C\delta \exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma \left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma + 1\right)\right\}. \tag{6-26}$$

Da $\tau \in [0, r]$ beliebig war, folgt aus (6-24)-(6-26) und (6-11) für die dritte Summe

$$\begin{aligned}
&(1+r)^{\frac{n}{4}} \sum_{|\alpha|=\bar{s}+4} \int_0^r \|\nabla^\alpha \partial_1\partial_2 w(r-\tau)(\partial_1\partial_2 u(\tau))^{\gamma+1}\|_2 d\tau \\
\leq\ & C\delta(1+r)^{\frac{n}{4}} \int_0^r (1+r-\tau)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}} \|\partial_1\partial_2 u(\tau)\|_\infty^\gamma \exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma \left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^\gamma + 1\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \;\; C\delta(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma} \exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}+1\right)\right\} \int_0^r (1+r)^{\frac{n}{4}}(1+r-\tau)^{-\frac{\bar{s}+4}{2}}(1+\tau)^{-\frac{\gamma n}{2}}d\tau \\
&\leq \;\; C\delta(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma} \exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}+1\right)\right\}, \qquad (6\text{-}27)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 2.20 mit $\tilde{\gamma} = \frac{n}{4}$, $\tilde{\alpha} = \frac{\bar{s}+4}{2}$ und $\tilde{\beta} = \frac{\gamma n}{2}$ benutzt haben. Aus (6-21)-(6-23) und (6-27) ergibt sich also:

$$(1+r)^{\frac{n}{4}}\|\nabla^{\bar{s}+4}\partial_1\partial_2 u(r)\|_2 \;\leq\; C\delta + C\delta(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}+1\right)\right\}. \qquad (6\text{-}28)$$

Somit haben wir wegen (6-19), (6-20) und (6-28):

$$\begin{aligned}
&\|\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2} \\
\leq\;\; & C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}}\left(C\delta + C\delta(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}+1\right)\right\}\right)(1+r)^{-\frac{n}{4}} \\
\leq\;\; & C\delta\,\underbrace{(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left(1+(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}+1\right)\right\}\right)}_{=:h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}} \\
=\;\; & C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}. \qquad (6\text{-}29)
\end{aligned}$$

Da $r \in [0,t]$ beliebig war, gilt (6-29) für alle $r \in [0,t]$ und wir erhalten:

$$\int_0^t \|\partial_1\partial_2 w(t-r)(\partial_1\partial_2 u(r))^{\gamma+1}\|_{\bar{s},2}dr \;\;\leq\;\; \int_0^t C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}dr. \qquad (6\text{-}30)$$

Es folgt aus (6-16)-(6-18) und (6-30):

$$\begin{aligned}
(1+t)^{\frac{n}{4}}\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_{\bar{s},2} \;\;&\leq\;\; C\delta + (1+t)^{\frac{n}{4}}\int_0^t C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}dr \\
&=\;\; C\delta + C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{4}}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}dr.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.20 für $\tilde{\gamma} = \frac{n}{4}$, $\tilde{\alpha} = 0$ und $\tilde{\beta} = \frac{\gamma n}{2} + \frac{n}{4}$ ergibt sich

$$\int_0^t (1+t)^{\frac{n}{4}}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}-\frac{n}{4}}dr \;\;\leq\;\; C$$

und somit

$$(1+t)^{\frac{n}{4}}\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_{\bar{s},2} \leq C\delta + C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T})). \tag{6-31}$$

Es folgt also insgesamt aus (6-15) und (6-31)

$$\begin{aligned}(1+t)^{\frac{n}{2}}\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_\infty + (1+t)^{\frac{n}{4}}\|\partial_1\partial_2 u(t)\|_{\bar{s},2} &\leq C\delta + C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1} + C\delta + C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))\\ &\leq C\delta + C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1} + C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))\end{aligned}$$

und damit aus (6-11)

$$\begin{aligned}M_{\bar{s}}(\tilde{T}) &\leq C\delta + C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1} + C\delta h(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))\\ &\leq C\delta + C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma+1}\\ &\quad + C\delta(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left(1 + (M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\exp\left\{C(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}\left((M_{\bar{s}}(\tilde{T}))^{\gamma}+1\right)\right\}\right),\end{aligned} \tag{6-32}$$

da $t \in [0,\tilde{T}]$ beliebig war. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $C > 2\kappa$ gilt, wobei κ die Einbettungskonstante von $H^{\bar{s}} \hookrightarrow C_b^0$ bezeichnet. Da auch $\tilde{T} \in [0,T]$ beliebig war, gilt (6-32) für alle $\tilde{T} \in [0,T]$.
Wir definieren nun für $x \in \mathbb{R}_0^+$:

$$f(x) := C\delta + Cx^{\gamma+1} + C\delta x^{\gamma}\left(1 + x^{\gamma}\exp\left\{Cx^{\gamma}\left(x^{\gamma}+1\right)\right\}\right) - x.$$

Dann haben wir wegen (3-32) für alle $\tilde{T} \in [0,T]$:

$$f(M_{\bar{s}}(\tilde{T})) \geq 0. \tag{6-33}$$

Weiter gilt $f(0) = C\delta > 0$ und für die Ableitung von f haben wir wegen $\delta \leq 1$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= C(\gamma+1)x^{\gamma} + C\delta\gamma x^{\gamma-1}\left(1 + x^{\gamma}\exp\left\{Cx^{\gamma}\left(x^{\gamma}+1\right)\right\}\right)\\ &\quad + C\delta x^{\gamma}\left(\gamma x^{\gamma-1}\exp\left\{Cx^{\gamma}\left(x^{\gamma}+1\right)\right\} + x^{\gamma}\exp\left\{Cx^{\gamma}\left(x^{\gamma}+1\right)\right\}\left(2C\gamma x^{2\gamma-1} + C\gamma x^{\gamma-1}\right)\right) - 1\\ &\leq C\delta\gamma x^{\gamma-1} - 1\\ &\quad + Cx^{\gamma}\left(\gamma + 1 + 2\gamma x^{\gamma-1}\exp\left\{Cx^{\gamma}\left(x^{\gamma}+1\right)\right\} + x^{\gamma}\exp\left\{Cx^{\gamma}\left(x^{\gamma}+1\right)\right\}\left(2C\gamma x^{2\gamma-1} + C\gamma x^{\gamma-1}\right)\right).\end{aligned}$$

Also existiert ein $R_1 = R_1(C,\gamma) > 0$ so, dass für alle $x \in [0,R_1]$ gilt:

$$f'(x) \leq C\delta\gamma x^{\gamma-1} - \frac{1}{2}.$$

Defnieren wir $R := \min\{R_1, 1\} > 0$, so folgt für alle $x \in [0,R]$

$$f'(x) \;\leq\; C\delta\gamma - \frac{1}{2}.$$

Aus dem Hauptssatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich damit:

$$f(R) \;=\; f(0) + \int_0^R f'(\xi)d\xi \;\leq\; C\delta + \int_0^R \left(C\delta\gamma - \frac{1}{2}\right)d\xi \;=\; C\delta + \left(C\delta\gamma - \frac{1}{2}\right)R.$$

Gilt nun zusätzlich $\delta < \frac{R}{2C\gamma(1+R)}$, so haben wir:

$$\begin{aligned} f(R) \;&\leq\; C\delta + \left(C\delta\gamma - \frac{1}{2}\right)R \;<\; C\frac{R}{2C\gamma(1+R)} + \left(C\gamma\frac{R}{2C\gamma(1+R)} - \frac{1}{2}\right)R \\ &\leq\; C\frac{R}{2C(1+R)} + \left(C\frac{R}{2C(1+R)} - \frac{1}{2}\right)R \;=\; \frac{R+R^2}{2(1+R)} - \frac{1}{2}R \;=\; 0. \end{aligned}$$

Somit hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $N \in (0,R)$. Aus $\delta < \frac{R}{2C\gamma(1+R)}$ folgt $C\delta\gamma < \frac{R}{2(1+R)} < \frac{1}{2}$, weshalb $f'(x) < 0$ für alle $x \in [0,R]$ gilt. Das bedeutet, dass f auf $[0,R]$ injektiv ist. N ist also die einzige Nullstelle von f in $[0,R]$. Wegen $f(N) = 0$ folgt

$$C\delta + CN^{\gamma+1} + C\delta N^{\gamma}\left(1 + N^{\gamma}\exp\{CN^{\gamma}(N^{\gamma}+1)\}\right) - N \;=\; 0$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta \;&<\; \frac{N - CN^{\gamma+1}}{C\left(1 + N^{\gamma}\left(1 + N^{\gamma}\exp\{CN^{\gamma}(N^{\gamma}+1)\}\right)\right)} \\ &<\; \frac{N}{C\left(1 + N^{\gamma}\left(1 + N^{\gamma}\exp\{CN^{\gamma}(N^{\gamma}+1)\}\right)\right)} \;<\; \frac{N}{C}. \end{aligned}$$

Wegen $\bar{s} > \frac{n}{2}$ ergibt sich aus dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\begin{aligned} M_{\bar{s}}(0) \;&=\; ||\partial_1\partial_2 u(0)||_{\bar{s},2} + ||\partial_1\partial_2 u(0)||_{\infty} \;\leq\; ||u_0||_{\bar{s}+2,2} + \kappa||\partial_1\partial_2 u(0)||_{\bar{s},2} \\ &\leq\; 2\kappa||u_0||_{\bar{s}+2,2} \;\leq\; 2\kappa||u_0|_{s+1,2} \;<\; 2\kappa\delta \;<\; \frac{2\kappa N}{C} \;<\; N \end{aligned}$$

und somit

$$f\left(M_{\bar{s}}(0)\right) \;>\; 0.$$

Da $f(M_{\bar{s}}(\tilde{T}))$ als Funktion von $\tilde{T}$ stetig ist und $f(M_{\bar{s}}(\tilde{T})) \geq 0$ für alle $\tilde{T} \in [0,T]$ gilt, haben wir schließlich $M_{\bar{s}}(\tilde{T}) \leq N \leq R$ für alle $\tilde{T} \in [0,T]$. Insbesondere gilt $M_{\bar{s}}(T) \leq R$. Dabei ist

$R = R(C, \gamma)$ unabhängig von T, u_0 und u_1. Wählen wir also $\delta < \min\left\{1, \frac{R}{2C\gamma(1+R)}\right\}$, so folgt die Behauptung.

$\square$

Kapitel 7

Beweis des Hauptsatzes

In diesem Kapitel werden wir nun den in Kapitel 1 formulierten globalen Existenzsatz des Problems (1-1), (1-2) mit den Sätzen 4.4, 4.5, 5.2 und 6.2 beweisen können. Dabei setzen wir die lokale Lösung sukzessive zu einer globalen Lösung fort wie in [4].

Beweis von Satz 1.1

Seien also $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\nu > 0$ und $\gamma \in \mathbb{N}$ beliebig mit $\gamma n > 2$. Seien weiter $s \geq 12 + n$ gerade und $u_0 \in H^{s+2} \cap W^{s-2,1}$ und $u_1 \in H^{s+2} \cap W^{s-4,1}$ reellwertig. Wir wählen $m > 4 + \frac{n}{2}$ gerade mit $m \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 6$. Dann gilt natürlich $s \geq m > 4 + \frac{n}{2}$.

Sei nun $\delta_1 > 0$ wie in Satz 4.4 und es gelte $\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_0\|_{s-2,1} + \|u_1\|_{s,2} + \|u_1\|_{s-4,1} < \delta_1$, woraus wegen $s \geq m + 1$ unmittelbar $\|u_0\|_{m+1,2} + \|u_1\|_{m+1,2} < \delta_1$ folgt. Nach Satz 4.4 existiert also ein $T > 0$, nur abhängig von $\|u_0\|_{m+2,2}$ und $\|u_1\|_{m+1,2}$, so dass eine reellwertige Lösung u von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T]$ existiert mit

$$u \in C^1([0, T], H^{s+2}) \cap C^2([0, T], H^s).$$

Nach Satz 5.2 existiert eine von T, u_0 und u_1 unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$\|Du(t)\|_{s,2} \quad \leq \quad \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{ \int_0^t C \|\partial_1 \partial_2 u(r)\|_\infty^\gamma \left(\|\partial_1 \partial_2 u(r)\|_\infty^\gamma + 1\right) dr \right\}. \tag{7-1}$$

Nach Satz 6.2 existieren ein $\delta_2 > 0$ und ein $R > 0$ so, dass wir, falls $\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_0\|_{s-2,1} + \|u_1\|_{s,2} + \|u_1\|_{s-4,1} < \delta_2$ gilt, für alle $r \in [0, T]$

$$\|\partial_1 \partial_2 u(r)\|_\infty^\gamma \quad \leq \quad (1 + r)^{-\frac{\gamma n}{2}} (M_{\tilde{s}}(T))^\gamma \ \leq \ (1 + r)^{-\frac{\gamma n}{2}} R^\gamma \tag{7-2}$$

haben, wobei δ und R nicht von T, u_0 und u_1 abhängen.
Gelte nun also zusätzlich $\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_0\|_{s-2,1} + \|u_1\|_{s,2} + \|u_1\|_{s-4,1} < \delta_2$. Dann erhalten wir aus (7-1) und (7-2) und wegen $\gamma n > 2$ für alle $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\|Du(t)\|_{s,2} &\leq \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{\int_0^t C(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}} R^\gamma (R^\gamma + 1)\, dr\right\} \\
&\leq \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{CR^\gamma (R^\gamma + 1)\left[\frac{1}{-\frac{\gamma n}{2}+1}(1+r)^{-\frac{\gamma n}{2}+1}\right]_0^t\right\} \\
&\leq \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{CR^\gamma (R^\gamma + 1)\,\frac{1}{\frac{\gamma n}{2}-1}\right\} \\
&\leq \|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{2CR^\gamma (R^\gamma + 1)\right\}. \qquad (7\text{-}3)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich damit für alle $t \in [0, T]$ wegen $s \geq m + 1$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{m+1,2} + \|u_t(t)\|_{m+1,2} &\leq \|u(t)\|_{m+2,2} + \|u_t(t)\|_{m+1,2} \\
&\leq 2\|Du(t)\|_{s,2} \leq 2\|Du(0)\|_{s,2} \exp\left\{2CR^\gamma (R^\gamma + 1)\right\} \\
&= K\|Du(0)\|_{s,2}, \qquad (7\text{-}4)
\end{aligned}$$

wobei $K := 2\exp\{2CR^\gamma (R^\gamma + 1)\}$ unabhängig von T, u_0 und u_1 ist. Gelte nun auch noch $\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_0\|_{s-2,1} + \|u_1\|_{s,2} + \|u_1\|_{s-4,1} < \frac{\delta_1}{nK}$, dann haben wir

$$\begin{aligned}
\|Du(0)\|_{s,2} &\leq \|\partial_1 u_0\|_{s,2} + \ldots + \|\partial_n u_0\|_{s,2} + \|u_1\|_{s,2} \\
&\leq n\left(\|u_0\|_{s+1,2} + \|u_1\|_{s,2}\right) < n\frac{\delta_1}{nK} = \frac{\delta_1}{K}
\end{aligned}$$

und somit für alle $t \in [0, T]$:

$$\|u(t)\|_{m+1,2} + \|u_t(t)\|_{m+1,2} < K\frac{\delta_1}{K} = \delta_1, \qquad (7\text{-}5)$$

$$\|u(t)\|_{m+2,2} + \|u_t(t)\|_{m+1,2} < K\frac{\delta_1}{K} = \delta_1. \qquad (7\text{-}6)$$

Wegen (7-5) können wir also Satz 4.4 mit beliebigem Startzeitpunkt $t \in [0, T]$ anwenden und erhalten wegen (7-6) eine lokale Lösung im Zeitintervall $[t, t + T_1(\delta_1)]$. Zuerst wählen wir als Startzeitpunkt $t = T$ und erhalten eine lokale Lösung im Zeitintervall $[T, T + T_1(\delta_1)]$. Wir setzen die Lösungen in $[0, T]$ und $[T, T + T_1(\delta_1)]$ zusammen und erhalten die gewünschte Regularität auch in T, indem wir Satz 4.4 noch einmal anwenden, etwa mit Startzeitpunkt $t = T - \frac{1}{2}T_1(\delta_1)$, und die Eindeutigkeit der drei Lösungen nach Satz 4.5 ausnutzen.
Somit haben wir also eine Lösung u von (1-1), (1-2) in L^2 im Zeitintervall $[0, T + T_1(\delta_1)]$

gefunden mit

$$u \in C^1([0, T + T_1(\delta_1)], H^{s+2}) \cap C^2([0, T + T_1(\delta_1)], H^s).$$

Diese Lösung kann nun mit der gleichen Argumentation zu einer Lösung auf $[0, T + 2T_1(\delta_1)]$, $[0, T + 3T_1(\delta_1)]$, etc. fortgesetzt werden, da die fortgesetzten Lösungen die gleichen Anfangswerte haben und die Aussagen der Sätze 5.2 und 6.2 und damit (7-1)-(7-6) unabhängig von der Länge des Existenzintervalls der Lösung gelten.
Insgesamt erhalten wir also die gewünschte globale Lösung, indem wir $\delta < \min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{\delta_1}{nK}\right\}$ setzen. Die behauptete Eindeutigkeit folgt aus Satz 4.5.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] Andrews, G. On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$. *Journal of Differential Equations*, 35:200–231, (1980).

[2] Greenberg, G., MacCamy, R., Mizel, V. On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17:707–728, (1968).

[3] Renardy, M., Hrusa, W., Nohel, J. *Mathematical Problems in Viscoelasticity*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman Scientific & Technical, (1987).

[4] Ponce, G. Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 9:339–418, (1985).

[5] Racke, R. *Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Initial Value Problems*. Aspects of Mathematics. Vieweg, (1992).

[6] Walter, W. *Einführung in die Theorie der Distributionen*. B.I.-Wissenschaftsverlag, (1974).

[7] Bergh, J., Löfström, J. *Interpolation Spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1976).

[8] Adams, R.A. und Fournier, J.J.F. *Sobolev Spaces*. Elsevier Science Ltd., (2003).

[9] Kerler, C. Global existence of solutions to nonlinear equations of viscoelasticity in exterior domains. *Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di L'Aquila, Rapporto tecnico*, 37, (1999).

Zu guter letzt möchte ich mich bei meiner Familie für die fortwährende Unterstützung während meines Studiums und für dessen Ermöglichung bedanken.
Außerdem möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Reinhard Racke für die freundliche Betreuung während meines Studiums und der Anfertigung dieser Diplomarbeit und für die Bereitstellung des Themas bedanken.