

Teil II

Allgemein-relativistische Theorie

des

Zwei-Flüssigkeits-Modells

zur

Entwicklung von Galaxien

4 Allgemein-relativistische Theorie des Zwei-Flüssigkeits-Modells

Im Jahre 1946 hat E. Lifshitz [47] die erste allgemein-relativistische Theorie zur Entwicklung kleiner Dichtefluktuationen in einem Friedman-Universum vorgestellt, indem er die Materie als ideales Gas durch eine einzige Zustandsgleichung beschreibt. Dieses Ein-Komponenten-Modell ist von S. Weinberg verbessert worden, indem er sowohl die Materie als auch die Strahlung in seine Rechnungen mit einbezogen hat. Da S. Weinberg für Materie und Strahlung die gleiche Geschwindigkeit ansetzt, handelt es sich in unserem Sinne jedoch um ein Ein-Komponenten-System.

Im folgenden stellen wir die fundamentalen Gleichungen des zu Beginn von Kapitel 1 beschriebenen Zwei-Flüssigkeits-Modells in allgemein-relativistischer Formulierung auf, die wir anschließend analog zum Newtonschen Teil im Rahmen einer linearen Störungstheorie betrachten. Auf diese Weise gewinnen wir die Feldgleichungen für die Störungen der Metrik und die Bewegungsgleichungen für die Perturbationen der Materie- sowie der Strahlungsdichte und können nach $3+1$ -Zerlegung der fundamentalen Gleichungen 1. Ordnung die gekoppelten Schallwellengleichungen des Zwei-Komponenten-Systems für die Dichtefluktuationen in konsequenter 1. Ordnung der Störungen herleiten. Da diese zusammen mit den Feldgleichungen für die gestörte Metrik lediglich numerisch gelöst werden können, gehen wir mittels einer c^{-2} -Entwicklung zum Newton-Limes der Schallwellengleichungen über und untersuchen diese analog zu den Kapiteln 2 und 3 im Newtonschen Teil, d.h. wir bestimmen einerseits die stabilen und instabilen Fluktuationsmoden mit Hilfe der Dispersionsrelations-Methode und berechnen andererseits die exakte zeitliche Entwicklung der Dichtefluktuationen numerisch. Der Vorteil eines manifest relativistischen Zugangs besteht darin, daß die Strahlung von vornherein vollständig berücksichtigt ist, während beim rein Newtonschen Zugang relativistische Korrekturterme für die Strahlung von Hand eingeführt werden mußten.

4.1 Die fundamentalen Gleichungen

4.1.1 Die Feldgleichungen

Wie die Raumkrümmung des Universums durch die Massenverteilung verursacht wird, zeigen die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation, die in der durch die kosmologische Konstante Λ erweiterten Form

$$R_{\mu\nu} = -\kappa S_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

mit $R_{\mu\nu}$ den Komponenten des Ricci-Tensors,

κ der Einsteinschen Naturkonstante, $\kappa = 8\pi G/c^4 = 2.07 \cdot 10^{-48} \text{ s}^2 \text{ g}^{-1} \text{ cm}^{-1}$
(G : Newtonsche Gravitationskonstante),

$S_{\mu\nu}$ dem Quellterm
und $g_{\mu\nu}$ dem metrischen Tensor
geschrieben werden können.

Der symmetrische Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ geht aus dem Riemannschen Krümmungstensor

$$R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\kappa|\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu|\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} \quad (4.2)$$

durch Verjüngung bzgl. der Indizes λ und κ hervor:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad (4.3)$$

wobei $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ die Christoffel-Symbole¹⁷ bezeichnen, die durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ bestimmt sind:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma|\nu} + g_{\nu\sigma|\mu} - g_{\mu\nu|\sigma}) \quad (4.4)$$

und aufgrund von $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ in den unteren Indizes symmetrisch sind

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (4.5)$$

In den Feldgleichungen (4.1) ist der Quellterm $S_{\mu\nu}$ durch den Energie-Impuls-Spannungs-Tensor $T_{\mu\nu}$ und seine Spur T festgelegt:

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

wobei sich der Energie-Impuls-Spannungs-Tensor $T_{\mu\nu}$ aus zwei Anteilen zusammensetzt, da das kosmische Substrat im Fall des Zwei-Flüssigkeits-Modells aus den beiden Komponenten Plasma (Materie) und Photonengas (Strahlung) besteht:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(p)} + T_{\mu\nu}^{(r)} \quad (4.7)$$

mit $T_{\mu\nu}^{(p)}$ dem Materieanteil und $T_{\mu\nu}^{(r)}$ dem Strahlungsanteil. Außerdem betrachten wir jede Komponente des kosmischen Substrats als isotrope ideale Flüssigkeit, so daß die beiden Anteile des Energie-Impuls-Spannungs-Tensors wie folgt lauten:

(i) der Materieanteil

$$T_{\mu\nu}^{(p)} = \varrho_p c^2 v_{\mu} v_{\nu} - p_p h_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

wobei ϱ_p die Materie- bzw. Plasmadichte,
 v^{μ} die Vierer-Geschwindigkeit des Plasmas (Materie),

¹⁷Insgesamt existieren im vierdimensionalen Raum 64 Christoffel-Symbole, deren Anzahl sich wegen der Symmetrie (4.5) auf 40 verschiedene reduziert.

p_p den auf die Materie wirkenden Druck, der sich aus dem Gasdruck p_g (1.6), dem hydrostatischen Druck des Photonengases auf das Plasma $p_{\gamma \rightarrow e}$ und der Rückreaktion des hydrostatischen Drucks des Photonengases auf das Plasma $p_{e \leftarrow \gamma}^R$ zusammensetzt,
 und ${}^{(p)}h_{\mu\nu}$ den Projektor in den Ruhraum des Plasmas bezeichnet, der durch

$${}^{(p)}h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu \quad (4.9)$$

definiert ist und allgemein folgende Eigenschaften besitzt:

$${}^{(p)}h_{\mu\nu} v^\nu = 0, \quad {}^{(p)}h_\mu{}^\mu = 3; \quad (4.10)$$

(ii) und der Strahlungsanteil

$${}^{(r)}T_{\mu\nu} = \varrho_r c^2 c_\mu c_\nu - p_s {}^{(r)}h_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

mit ϱ_r der Strahlungsdichte,
 c^μ der Vierer-Geschwindigkeit des Photonengases,
 p_s dem auf die Strahlung ausgeübten Druck, der die Summe aus dem Strahlungsdruck p_r (1.7), dem hydrostatischen Druck des Plasmas auf das Photonengas $p_{e \rightarrow \gamma}$ und der Rückreaktion des hydrostatischen Drucks des Plasmas auf das Photonengas $p_{\gamma \leftarrow e}^R$ ist,
 und ${}^{(r)}h_{\mu\nu}$ dem Projektor in den Ruhraum des Photonengases:

$${}^{(r)}h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - c_\mu c_\nu \quad \text{mit} \quad {}^{(r)}h_{\mu\nu} c^\nu = 0, \quad {}^{(r)}h_\mu{}^\mu = 3. \quad (4.12)$$

Die zusätzlich benötigten Zustandsgleichungen geben wir in dem Abschnitt *Lösung der fundamentalen Gleichungen* auf S. 113 an.

4.1.2 Die Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für das gesamte kosmische Substrat lauten gemäß den Einsteinschen Feldgleichungen (4.1)¹⁸

$$T_{\mu}{}^\nu{}_{\parallel\nu} = T_{\mu}{}^\nu{}_{\parallel\nu}{}^{(p)} + T_{\mu}{}^\nu{}_{\parallel\nu}{}^{(r)} = 0, \quad (4.13)$$

¹⁸ \parallel_ν bedeutet die kovariante Ableitung bzgl. der Koordinate x^ν .

wobei für die beiden Anteile des Energie-Impuls-Spannungs-Tensors die Energie-Impuls-Gesetze folgende Gestalt annehmen:

$$\text{für das Plasma:} \quad T_{\mu \parallel \nu}^{(p)} = C_{\mu}^{(p,r)} \quad \text{und} \quad (4.14)$$

$$\text{für das Photonengas:} \quad T_{\mu \parallel \nu}^{(r)} = C_{\mu}^{(r,p)} = -C_{\mu}^{(p,r)} \quad (4.15)$$

$$\text{mit} \quad C_{\mu}^{(p,r)} = \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_{\gamma}} \varrho_r (c^{\mu} - v^{\mu}) + \varrho_p \frac{\bar{v}_e c}{l_e} (c^{\mu} - v^{\mu}) \quad (4.16)$$

dem Energie-Impuls-Übertrag zwischen Strahlung und Materie (dynamischer Druck, Staudruck). Wie in Abschnitt 1.1, S. 19, ausgeführt, vernachlässigen wir den letzten Term in (4.16), da die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen \bar{v}_e für die betrachteten Zeiten wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist.

Durch Bilden der kovarianten Ableitung der Energie-Impuls-Spannungs-Tensoren (4.8) bzw. (4.11) erhalten wir unter Verwendung der Gleichungen (4.14) resp. (4.15) und (4.16) mit $\bar{v}_e \ll c$ folgende Bewegungsgleichungen

- für das Plasma (Materie):

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{\parallel\nu}{}^{(p)} &= (\varrho_p c^2 + p_p)_{|\nu} v^{\mu} v^{\nu} + (\varrho_p c^2 + p_p) v^{\mu}_{\parallel\nu} v^{\nu} + (\varrho_p c^2 + p_p) v^{\mu} v^{\nu}_{\parallel\nu} - p_p{}_{|\nu} g^{\mu\nu} = \\ &= + \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_{\gamma}} \varrho_r (c^{\mu} - v^{\mu}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

- und für das Photonengas (Strahlung):

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{\parallel\nu}{}^{(r)} &= (\varrho_r c^2 + p_s)_{|\nu} c^{\mu} c^{\nu} + (\varrho_r c^2 + p_s) c^{\mu}_{\parallel\nu} c^{\nu} + (\varrho_r c^2 + p_s) c^{\mu} c^{\nu}_{\parallel\nu} - p_s{}_{|\nu} g^{\mu\nu} = \\ &= - \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_{\gamma}} \varrho_r (c^{\mu} - v^{\mu}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

deren räumliche Komponenten die Impulserhaltung und deren 4. Komponente die Energieerhaltung beschreiben.

4.2 Lösung der fundamentalen Gleichungen

Aufgrund der Nichtlinearität der Einsteinschen Feldgleichungen (4.1) können nur in besonders einfachen Fällen exakte Lösungen gefunden werden, d.h. Funktionen $g_{\mu\nu}$ und $T_{\mu\nu}$ angegeben werden, die die Gleichungen (4.1) erfüllen. Deshalb spalten wir zur näherungsweisen Lösung der fundamentalen Gleichungen wie im nicht-relativistischen Teil das reale Universum in einen homogenen Hintergrund und kleine Störungen auf diesem auf. Dies bedeutet, daß wir einen störungstheoretischen Ansatz der Form:

$$g_{\mu\nu} = \overset{0}{g}_{\mu\nu} + \overset{1}{g}_{\mu\nu}(x^\alpha), \quad (4.19a)$$

$$\varrho_p = \overset{0}{\varrho}_p(x^4) + \overset{1}{\varrho}_p(x^\alpha), \quad p_p = \overset{0}{p}_p(x^4) + \overset{1}{p}_p(x^\alpha), \quad (4.19b)$$

$$\varrho_r = \overset{0}{\varrho}_r(x^4) + \overset{1}{\varrho}_r(x^\alpha), \quad p_s = \overset{0}{p}_s(x^4) + \overset{1}{p}_s(x^\alpha), \quad (4.19c)$$

$$v^\mu = \overset{0}{v}^\mu + \overset{1}{v}^\mu(x^\alpha), \quad c^\mu = \overset{0}{c}^\mu + \overset{1}{c}^\mu(x^\alpha) \quad (4.19d)$$

wählen, bei dem die mit 0 gekennzeichneten Größen eine bekannte Lösung darstellen und die mit 1 versehenen Größen nur geringfügig von dieser Lösung abweichen. Im folgenden berücksichtigen wir höchstens Terme, die linear in den Abweichungen sind.

Nach Abschnitt 1.1 und Annex E mit Annex C gilt für die Druckterme $\overset{0}{p}_p$, $\overset{1}{p}_p$, $\overset{0}{p}_s$ und $\overset{1}{p}_s$ (Zustandsgleichungen):

$$\overset{0}{p}_p = \frac{3}{5} \overset{0}{\varrho}_p c_s^2, \quad \overset{1}{p}_p = \overset{1}{\varrho}_p c_s^2 + p_{e \leftarrow \gamma}^R + p_{\gamma \rightarrow e} = \quad (4.20a)$$

$$= \left(1 - e^{l_e^2/3 \Delta}\right) \overset{1}{\varrho}_p c_s^2 + \frac{1}{3} e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \overset{1}{\varrho}_r c^2, \quad (4.20b)$$

$$\overset{0}{p}_s = \frac{1}{3} \overset{0}{\varrho}_r c^2, \quad \overset{1}{p}_s = \frac{1}{3} \overset{1}{\varrho}_r c^2 + p_{\gamma \leftarrow e}^R + p_{e \rightarrow \gamma} = \quad (4.20c)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}\right) \overset{1}{\varrho}_r c^2 + e^{l_e^2/3 \Delta} \overset{1}{\varrho}_p c_s^2, \quad (4.20d)$$

wobei c_s^2 das Quadrat der Schallgeschwindigkeit des reinen Plasmas nach (1.18a) oder (1.18b) bezeichnet und der hydrostatische Druck $p_{\gamma \rightarrow e}$, $p_{\gamma \leftarrow e}^R$, $p_{e \rightarrow \gamma}$ und $p_{e \leftarrow \gamma}^R$ jeweils ein Störterm 1. Ordnung ist, da in diesen Termen der generalisierte Laplace-Operator Δ bzgl. der Hintergrundmetrik ($\Delta = 1/R^2 \partial_m \partial_m$) auftritt.

Die ungestörte Vierer-Geschwindigkeit des Plasmas $\overset{0}{v}^\mu$ und des Photonengases $\overset{0}{c}^\mu$ sei (siehe Gl. (4.22a)):

$$\overset{0}{v}^\mu = \overset{0}{v}_\mu = (0|0|0|1) = \delta_4^\mu \quad \text{mit} \quad \overset{0}{v}^\mu \overset{0}{v}_\mu = 1, \quad (4.21a)$$

$$\overset{0}{c}^\mu = \overset{0}{c}_\mu = (0|0|0|1) = \delta_4^\mu \quad \text{mit} \quad \overset{0}{c}^\mu \overset{0}{c}_\mu = 1. \quad (4.21b)$$

4.2.1 Der homogene Hintergrund

Nachdem das Weltall auf großen Skalen räumlich homogen und isotrop ist, setzen wir für den Hintergrund die Robertson-Walker-Metrik an, die die allgemeinste Raum-Zeit-Metrik ist, die einen Kosmos beschreibt, der dem *kosmologischen Prinzip*, daß keine Position und keine Richtung im Universum ausgezeichnet ist, genügt. Die Komponenten der Robertson-Walker-Metrik lauten:

$${}^0g_{mn} = -R^2(t) \tilde{g}_{mn}(x) \quad {}^0g_{4n} = 0 \quad {}^0g_{44} = 1, \quad (4.22a)$$

wobei m sowie n über die drei räumlichen mitbewegten Koordinaten laufen, 4 die kosmische Zeitkomponente und $R(t)$ der kosmische Skalenparameter ist. Die Metrik ${}^0\tilde{g}_{mn}$ beschreibt einen dreidimensionalen, maximal symmetrischen Unterraum räumlich konstanter Krümmung:

$${}^0\tilde{g}_{mn} = \left(1 + \frac{1}{4} \varepsilon r^2\right) \delta_{mn} \quad \text{mit} \quad r^2 = x^k x^l \delta_{kl} \quad (4.22b)$$

und mit ε einer Konstante, dem Krümmungsparameter, die derart skaliert werden kann, daß sie lediglich die Werte -1 , 0 und 1 (negative, verschwindende und positive Raumkrümmung) annimmt, und die in der Newtonschen Kosmologie die Rolle einer Energiedichte spielt.

Wird im Rahmen der Standardkosmologie in den Einsteinschen Feldgleichungen (4.1) für den aus dem Materie- und Strahlungsanteil bestehenden Energie-Impuls-Spannungstensor jeweils derjenige einer homogenen und isotropen idealen Flüssigkeit eingesetzt, so sind die Lösungen der Feldgleichungen (4.1) die kosmologischen Friedman-Gleichungen:

$$\left(\frac{R_{|4}}{R}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \alpha^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} (\varrho_p + \varrho_r) + \frac{1}{3} \Lambda - \frac{\varepsilon}{R^2}, \quad (4.23)$$

$$\frac{R_{|4|4}}{R} = \frac{1}{c^2} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varrho_p + 2\varrho_r) + \frac{1}{3} \Lambda \quad (4.24)$$

mit $R(t)$ dem kosmischen Skalenparameter, der für $\varepsilon \pm 1$ den Krümmungsradius beschreibt und für $\varepsilon = 0$ keine geometrische, sondern nur eine rein kinematische Bedeutung besitzt. Die Lösungen der Friedman-Gleichung (4.23) bilden die kosmologischen Friedman-Modelle, von denen im Fall verschwindender kosmologischer Konstante Λ die drei topologisch verschiedenen Varianten existieren:

- das offene Universum mit $\varepsilon = -1$ (Friedman, 1922),
- der geschlossene Kosmos mit $\varepsilon = +1$ (Friedman-Lemaître-Modell, 1922 / 1927)
- und als Grenzfall die flache Welt mit $\varepsilon = 0$ (Einstein-de-Sitter-Modell, 1932).

Bei Berücksichtigung der kosmologischen Konstante Λ treten abhängig vom Wert des Krümmungsparameters ε drei Hauptklassen an kosmologischen Modellen auf, für $\varepsilon = -1$

sowie $\varepsilon = 0$ mit offener Topologie und für $\varepsilon = 1$ mit geschlossener Topologie. Abhängig vom Vorzeichen der kosmologischen Konstante Λ zerfallen die offenen Weltmodelle nochmals in drei Unterklassen und die Modelle mit $\varepsilon = 1$ in acht Unterklassen, was ausführlich z.B. in [5] oder [23] dargestellt ist.

Da es sich bei der Galaxienentwicklung im Sinne der Kosmologie um ein lokales Phänomen handelt, betrachten wir lediglich lokale Dichtefluktuationen, für deren lineare Abmessung, d.h. für deren Wellenlänge λ

$$\lambda = R r \ll R \quad \Leftrightarrow \quad r \ll 1 \quad (4.25)$$

gilt. Folglich lassen wir als Näherung den dimensionslosen Parameter r gegen Null gehen ($r \rightarrow 0$), so daß im folgenden die Terme εr oder εr^2 vernachlässigt werden. Wird, wie in der Friedman-Gleichung (4.23), der Krümmungsparameter ε nicht mit einer Potenz des Parameters r multipliziert, so sind diese Terme mitzunehmen, was immer dann der Fall ist, wenn der zweite räumliche Differentialquotient der Metrik auftritt.

Unter Verwendung der Metrik (4.22a) mit (4.22b) berechnen sich aus der Definition (4.4) die einzigen von Null verschiedenen Christoffel-Symbole 0. Ordnung zu:

$$\overset{0}{\Gamma}_{m4}^l = \tilde{\alpha} \delta_m^l, \quad \overset{0}{\Gamma}_{mn}^4 = \tilde{\alpha} R^2 \delta_{mn} \quad \text{mit} \quad \tilde{\alpha} = \frac{R_{|4}}{R} = \frac{1}{c^2} \frac{R_{|t}}{R}, \quad (4.26a)$$

$$\overset{0}{\Gamma}_{mn}^l = -\frac{2\varepsilon x_n}{4 + \varepsilon r^2} \delta_m^l, \quad \overset{0}{\Gamma}_{bc}^a = \frac{2\varepsilon x_a}{4 + \varepsilon r^2} \delta_{bc} \quad \text{für} \quad b \neq a. \quad (4.26b)$$

Für $\varepsilon x_i \rightarrow 0$ verschwinden in 0. Ordnung die Christoffel-Symbole (4.26b) und lauten die Komponenten der Robertson-Walker-Metrik:

$$\overset{0}{g}_{mn} = -R^2 \delta_{mn} \quad \overset{0}{g}_{4n} = 0 \quad \overset{0}{g}_{44} = 1 \quad (\text{kovariante Metrik}), \quad (4.27a)$$

$$\overset{0}{g}^{mn} = -\frac{1}{R^2} \delta^{mn} \quad \overset{0}{g}^{4n} = 0 \quad \overset{0}{g}^{44} = 1 \quad (\text{kontravariante Metrik}), \quad (4.27b)$$

wobei der kosmische Skalenparameter $R(t)$ die 1. und 2. Friedman-Gleichung (4.23) und (4.24) erfüllt.

Aus den Gleichungen (4.17) und (4.18) ergeben sich die Bewegungsgleichungen 0. Ordnung

- für die Materie:

$$\begin{aligned} \overset{(p)}{T}{}^{\mu\nu}{}_{|\nu} &= (\overset{0}{\varrho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p)_{|\nu} \overset{0}{v}{}^\mu \overset{0}{v}{}^\nu + (\overset{0}{\varrho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p) (\overset{0}{v}{}^\mu{}_{|\nu} + \overset{0}{\Gamma}{}^\mu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda) \overset{0}{v}{}^\nu + \\ &+ (\overset{0}{\varrho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p) \overset{0}{v}{}^\mu (\overset{0}{v}{}^\nu{}_{|\nu} + \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda) - \overset{0}{p}_{p|\nu} \overset{0}{g}{}^{\mu\nu} = \\ &= + \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \overset{0}{\varrho}_r (c^\mu - \overset{0}{v}{}^\mu) \end{aligned} \quad (4.28)$$

- und für die Strahlung:

$$\begin{aligned}
\overset{(r)}{T}{}^{\mu\nu}{}_{|\nu} &= (\overset{0}{\varrho}_r c^2 + \overset{0}{p}_s)_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\mu \overset{0}{c}{}^\nu + (\overset{0}{\varrho}_r c^2 + \overset{0}{p}_s) (\overset{0}{c}{}^\mu{}_{|\nu} + \overset{0}{\Gamma}{}^\mu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{c}{}^\lambda) \overset{0}{c}{}^\nu + \\
&+ (\overset{0}{\varrho}_r c^2 + \overset{0}{p}_s) \overset{0}{c}{}^\mu (\overset{0}{c}{}^\nu{}_{|\nu} + \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{c}{}^\lambda) - \overset{0}{p}_{s|\nu} \overset{0}{g}{}^{\mu\nu} = \\
&= -\frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \overset{0}{\varrho}_r (\overset{0}{c}{}^\mu - \overset{0}{v}{}^\mu).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Hiervon sind lediglich die Gleichungen mit $\mu = 4$ nicht-trivial. Die 4. Komponente ($\mu = 4$) der Gleichung (4.28) stellt den Energieerhaltungssatz bzw. die Kontinuitätsgleichung der Materie für den homogenen Hintergrund dar:

$$\overset{0}{\varrho}_{p|4} + 3\tilde{\alpha} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{c_s^2}{c^2}\right) \overset{0}{\varrho}_p \underset{c_s^2/c^2 \ll 1}{=} \overset{0}{\varrho}_{p|4} + 3\tilde{\alpha} \overset{0}{\varrho}_p = 0, \tag{4.30}$$

und für $\mu = 4$ folgt aus Gleichung (4.29) der Energieerhaltungssatz der Strahlung für den homogenen Hintergrund:

$$\overset{0}{\varrho}_{r|4} + 4\tilde{\alpha} \overset{0}{\varrho}_r = 0. \tag{4.31}$$

Beide Gleichungen stimmen mit den kosmologischen Hintergrundgleichungen überein, die bei der Newtonschen Behandlung in Abschnitt 1.2.1, S. 22, verwendet und integriert worden sind (siehe Gl. (1.30)).

4.2.2 Störungen 1. Ordnung

In diesem Unterabschnitt betrachten wir die Störungen auf dem homogenen Hintergrund, die nur geringfügig von den Größen 0. Ordnung abweichen sollen. Zunächst behandeln wir die Perturbationen der in den Einsteinschen Feldgleichungen (4.1) auftretenden Terme bis zur 1. Ordnung und führen anschließend eine 3 + 1-Zerlegung durch, d.h. wir zerlegen die Größen in ihren räumlichen ($\mu = m = 1, 2, 3$) und zeitlichen ($\mu = 4$) Anteil, da das Fluktuationsphänomen des Plasmas nicht-relativistisch ist (Schallwellen). Außerdem wählen wir eine der Fragestellung angepaßte Eichung für die gestörte Metrik. Nachdem wir die Einsteinschen Feldgleichungen für die Störgrößen berechnet haben, leiten wir die Impuls- und Energieerhaltungssätze in 1. Ordnung ab.

Anstelle dieser Vorgehensweise könnten wir, um Koordinateneffekte von vornherein auszuschließen, die Erhaltungssätze in gleicher Weise wie in Annex E mit Hilfe des Projektionstensors gewinnen, was einer koordinatenunabhängigen 3 + 1-Zerlegung entspricht, und anschließend zu angepaßten Koordinaten übergehen.

Perturbationen der Vierer-Geschwindigkeit

Aus der Normierung der Vierer-Geschwindigkeit des Plasmas

$$v^\mu v_\mu = 1 \quad (4.32)$$

folgt bei Betrachtung von linearen Störungen

$${}^0 v^\mu {}^1 v_\mu + {}^1 v^\mu {}^0 v_\mu = 0. \quad (4.33)$$

Somit besteht unter Verwendung der ungestörten Vierer-Geschwindigkeit (4.21a) folgende Beziehung zwischen der kovarianten und der kontravarianten 4. Komponente der gestörten Vierer-Geschwindigkeit:

$${}^1 v_4 = -{}^1 v^4. \quad (4.34)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen kontra- und kovarianten Komponenten

$$v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu \quad (4.35)$$

erhalten wir nach Einsetzen des störungstheoretischen Ansatzes für die Metrik (4.19a) und die Vierer-Geschwindigkeit (4.19d)

$$\begin{aligned} {}^0 v^\mu + {}^1 v^\mu &= ({}^0 g^{\mu\nu} + {}^1 g^{\mu\nu}) ({}^0 v_\nu + {}^1 v_\nu) = {}^0 v^\mu + {}^0 g^{\mu\nu} {}^1 v_\nu + {}^1 g^{\mu 4} {}^0 v_4 + 2. \text{ Ord.} \\ \Rightarrow {}^1 v^\mu &= {}^0 g^{\mu\nu} {}^1 v_\nu + {}^1 g^{\mu 4}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Die 3 + 1-Zerlegung von (4.36) ergibt für die 4. Komponente der gestörten Vierer-Geschwindigkeit des Plasmas (siehe auch Gl. (4.40c)):

$$\begin{aligned} {}^1 v^4 &= {}^1 v_4 + {}^1 g^{44} \stackrel{(4.34)}{=} -{}^1 v^4 + {}^1 g^{44} \\ \Rightarrow {}^1 v^4 &= \frac{1}{2} {}^1 g^{44} = -\frac{1}{2} {}^1 g_{44}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

so daß ${}^1 v^4$ direkt mit dem Newton-Potential in Zusammenhang steht.

Die Relationen (4.32) – (4.37) gelten analog für die gestörte Vierer-Geschwindigkeit ${}^1 c^\mu$ des Photonengases.

Perturbationen der Metrik

Aus der Bedingung

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu \quad \text{mit} \quad {}^0 g^{\mu\lambda} {}^0 g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (4.38)$$

folgt bei Vernachlässigung von Störungen 2. Ordnung

$${}^0 g^{\mu\lambda} {}^1 g_{\lambda\nu} + {}^1 g^{\mu\lambda} {}^0 g_{\lambda\nu} = 0. \quad (4.39)$$

Mit Hilfe der Relation (4.39) kann durch 3 + 1-Zerlegung eine Beziehung zwischen den kontravarianten und kovarianten Komponenten der gestörten Metrik abgeleitet werden:

$$\mu = m, \nu = n : \quad {}^1 g^{mn} = -\frac{1}{R^4} {}^1 g_{mn}, \quad (4.40a)$$

$$\mu = m, \nu = 4 : \quad {}^1 g^{m4} = {}^1 g^{4m} = \frac{1}{R^2} {}^1 g_{m4}, \quad (4.40b)$$

$$\mu = 4, \nu = 4 : \quad {}^1 g^{44} = -{}^1 g_{44}. \quad (4.40c)$$

Perturbationen der Christoffel-Symbole

Durch Einsetzen des Ansatzes für die Metrik (4.19a) in die Definition der Christoffel-Symbole (4.4) erhalten wir bis zur 1. Ordnung:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \overset{1}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \quad (4.41)$$

mit

$$\overset{1}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = -{}^0 g^{\lambda\alpha} {}^1 g_{\alpha\beta} \overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\beta} + \frac{1}{2} {}^0 g^{\lambda\sigma} \left({}^1 g_{\mu\sigma|\nu} + {}^1 g_{\nu\sigma|\mu} - {}^1 g_{\mu\nu|\sigma} \right), \quad (4.42)$$

wobei zu beachten ist, daß bei der Berechnung der gestörten Christoffel-Symbole (4.42) die inverse Metrik auftritt:

$${}^0 g_{\mu\lambda} {}^1 g^{\lambda\nu} = -{}^1 g_{\mu\lambda} {}^0 g^{\lambda\nu}. \quad (4.43)$$

Die 3 + 1-Zerlegung der gestörten Christoffel-Symbole (4.42) lautet:

$$\overset{1}{\Gamma}_{mn}^l = \tilde{\alpha} {}^1 g_{l4} \delta_{mn} - \frac{1}{2R^2} \left({}^1 g_{ml|n} + {}^1 g_{nl|m} - {}^1 g_{mn|l} \right), \quad (4.44a)$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{mn}^4 = -\tilde{\alpha} R^2 {}^1 g_{44} \delta_{mn} + \frac{1}{2} \left({}^1 g_{m4|n} + {}^1 g_{n4|m} - {}^1 g_{mn|4} \right), \quad (4.44b)$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{4n}^l = \frac{\tilde{\alpha}}{R^2} {}^1 g_{ln} - \frac{1}{2R^2} \left({}^1 g_{4l|n} + {}^1 g_{nl|4} - {}^1 g_{4n|l} \right), \quad (4.44c)$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{44}^l = -\frac{1}{2R^2} \left(2 {}^1 g_{4l|4} - {}^1 g_{44|l} \right), \quad (4.44d)$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{4n}^4 = -\tilde{\alpha} {}^1 g_{4n} + \frac{1}{2} {}^1 g_{44|n}, \quad (4.44e)$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{44}^4 = \frac{1}{2} {}^1 g_{44|4}. \quad (4.44f)$$

Eichung der Metrik

Da die Einsteinschen Feldgleichungen (4.1) die Eigenschaft der allgemeinen Kovarianz besitzen, d.h. in beliebigen Koordinatensystemen gelten, legen sie die Metrik nicht eindeutig fest: es existieren nur sechs funktional unabhängige Feldgleichungen, jedoch zehn unabhängige Komponenten der Metrik. Diese Unbestimmtheit muß durch Wahl eines Koordinatensystems beseitigt werden. Das kann dazu genutzt werden, die Lösung eines Problems durch die Wahl geeigneter Koordinaten zu vereinfachen, was der Festlegung einer Eichbedingung entspricht. Allerdings gelten die berechneten Ergebnisse lediglich in dem gewählten Koordinatensystem.

In Zusammenhang mit den kosmischen Störungen gehen wir davon aus, daß die Einsteinschen Feldgleichungen für den Hintergrund gelöst sind, die Wahl einer Eichung bzgl. des Hintergrunds somit getroffen ist. Weiterhin bleibt die Freiheit, vier Eichbedingungen für die zugehörigen metrischen Perturbationen, d.h. für die linearisierten Störfeldgleichungen, zu wählen, wobei der Hintergrund bzgl. dieser Eichtransformationen festgehalten wird.

In der gängigen Literatur (z.B. [19], [86]) wird bei der Berechnung von gravitativen Instabilitäten für die Metrikperturbationen meist die synchrone Eichung

$${}^1g_{\mu 4} = 0 \tag{4.45}$$

verwendet, um die Feld- und Bewegungsgleichungen zu vereinfachen. Da in diesem Bezugssystem die 44-Komponente der metrischen Störungen ${}^1g_{44}$ Null gesetzt ist, wird kein Newton-Potential der Metrikperturbationen beobachtet, so daß der Newton-Limes der linearisierten Gravitationstheorie verloren geht [72]. Gleichzeitig treten, wie Rose et al. [72] gezeigt haben, bei synchroner Eichung anwachsende Instabilitäten auf, die ein reiner Koordinateneffekt sind und folglich keine physikalische Relevanz besitzen.

Deshalb wählen wir in dieser Arbeit für die gestörte Metrik ${}^1g_{\mu\nu}$ die DeDonder-Eichung, d.h. verallgemeinerte harmonische Koordinaten, mit folgenden Eigenschaften [72] – [73]:

- Sie ist die Verallgemeinerung der Lorentz-Eichung in der Elektrodynamik [73].
- Die Feldgleichungen für die metrischen Perturbationen ${}^1g_{\mu\nu}$ sind verallgemeinerte Wellengleichungen auf einem gekrümmten Hintergrund und beschreiben die Propagation von Störungen, wie sie von einem Hintergrund-Beobachter aus gesehen werden, z.B. Gravitationswellen. (Der mit der DeDonder-Eichung verknüpfte Beobachter ist bzgl. des Hintergrunds in Ruhe.)
- Sie ist eine kovariante Eichung bzgl. des Hintergrunds.
- Die DeDonder-Eichung führt zum korrekten Newton-Limes der Propagation der Störungen.

Dies wird in dieser Arbeit direkt gezeigt, da wir einerseits die Schallwellengleichungen für die Dichtestabilitäten nach der Newtonschen Theorie und andererseits ihren Newton-Limes, der aus der allgemein-relativistischen Theorie folgt, herleiten.

Die DeDonder-Eichung ist wie folgt definiert (z.B. [30]):

$$\Gamma^\alpha \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0. \quad (4.46)$$

Nachdem die Eichung für den Hintergrund bereits gewählt ist, erhalten wir mit dem Ansatz (4.19a) und den Christoffel-Symbolen (4.41) in 1. Ordnung:

$${}^0g^{\mu\nu} \overset{1}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = 0, \quad (4.47)$$

wobei $\overset{1}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ die gestörten Christoffel-Symbole (4.42) sind. Dies ist gleichbedeutend damit, daß für die Funktion

$$\overset{1}{\psi}_{\mu\nu} = \overset{1}{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{1}{g}_{\alpha\beta} \overset{0}{g}^{\alpha\beta} \overset{0}{g}_{\mu\nu} \quad \text{die Bedingung} \quad \overset{1}{\psi}_{\mu^\lambda; \lambda} = 0 \quad (4.48)$$

gilt, wobei Indexheben und -senken mittels der Hintergrundmetrik erfolgt und ; die kovariante Ableitung bzgl. des Hintergrunds bedeutet, d.h. die kovarianten Ableitungen werden mit den ungestörten Christoffel-Symbolen (4.26a) gebildet und die Funktion $\overset{1}{\psi}_{\mu\nu}$ ist bzgl. des Hintergrunds kovariant divergenzfrei.

Von $\overset{1}{\psi}_{\mu^\lambda}$ aus (4.48) lautet die 3 + 1-Zerlegung:

$$\overset{1}{\psi}_m{}^l = \overset{1}{g}_m{}^l - \frac{1}{2} \left(\overset{1}{g}_a{}^a + \overset{1}{g}_4{}^4 \right) \delta_m{}^l, \quad \overset{1}{\psi}_m{}^4 = \overset{1}{g}_m{}^4, \quad (4.49a)$$

$$\overset{1}{\psi}_4{}^4 = \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4{}^4 - \frac{1}{2} \overset{1}{g}_a{}^a, \quad \overset{1}{\psi}_4{}^l = \overset{1}{g}_4{}^l, \quad (4.49b)$$

so daß wir aus der Bedingung in (4.48) folgende vier Nebenbedingungen erhalten:

$$\overset{1}{\psi}_m{}^{\lambda; \lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \overset{1}{g}_m{}^n{}_{|n} - \frac{1}{2} \overset{1}{g}_a{}^a{}_{|m} + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4{}^4{}_{|m} - \overset{1}{g}_m{}^4{}_{|4} - 3 \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m{}^4 = 0, \quad (4.50a)$$

$$\overset{1}{\psi}_4{}^{\lambda; \lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \overset{1}{g}_4{}^n{}_{|n} + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4{}^4{}_{|4} - \frac{1}{2} \overset{1}{g}_a{}^a{}_{|4} + 3 \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4{}^4 - \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_a{}^a = 0. \quad (4.50b)$$

Perturbationen des Ricci-Tensors

Für den Ricci-Tensor (4.3) ergibt sich unter Verwendung der Christoffel-Symbole (4.41):

$$R_{\mu\nu} = \overset{0}{R}_{\mu\nu} + \overset{1}{R}_{\mu\nu} \quad (4.51)$$

mit

$$\overset{1}{R}_{\mu\nu} = \overset{1}{\Gamma}_{\mu\lambda|\nu}^\lambda - \overset{1}{\Gamma}_{\mu\nu|\lambda}^\lambda + \overset{0}{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \overset{1}{\Gamma}_{\nu\sigma}^\lambda + \overset{1}{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \overset{0}{\Gamma}_{\nu\sigma}^\lambda - \overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma \overset{1}{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\lambda - \overset{1}{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma \overset{0}{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\lambda \quad (4.52)$$

den Störungen des Ricci-Tensors, die von den gestörten Christoffel-Symbolen $\overset{1}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ hervorgerufen werden und entweder unter Verwendung der Palatini-Identität [86] oder direkt berechnet werden können.

Sowohl in den Komponenten des Ricci-Tensors als auch nachfolgend in den Feldgleichungen und Schallwellengleichungen treten die gestörten räumlichen Komponenten der Metrik $\overset{1}{g}_{mn}$ immer zusammen mit dem Faktor $1/R^2$ auf, so daß $1/R^2 \overset{1}{g}_{mn}$ die eigentliche Variable der Gravitationspotentiale ist. Deshalb ziehen wir ihn mit Hilfe der kontravarianten Metrik 0. Ordnung (4.27a) in die Potentiale:

$$\frac{1}{R^2} \overset{1}{g}_{mn} = -\overset{0}{g}^{n\lambda} \overset{1}{g}_{\lambda m} = -\overset{1}{g}_m{}^n. \quad (4.53)$$

In gleicher Weise werden räumliche partielle Ableitungen nach oben gezogen. Um eine einheitliche Schreibweise zu erzielen, formen wir außerdem zeitliche Komponenten der Metrik und partielle Ableitungen nach der 4. Koordinate entsprechend mit der kontravarianten 44-Komponente der Metrik 0. Ordnung (4.27a) um.

Nach 3 + 1-Zerlegung und unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (4.50a) und (4.50b) aus der DeDonder-Eichung folgt:

- die mn -te Komponente des gestörten Ricci-Tensors

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}_m{}^n &= \frac{1}{2} \overset{1}{g}_m{}^n|_4{}^4 + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_m{}^n|_l{}^l + \frac{5}{2} \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m{}^n|_4 + \tilde{\alpha} (\overset{1}{g}_4{}^m|_n + \overset{1}{g}_4{}^n|_m) + \\ &+ \left(4\tilde{\alpha}^2 + \frac{R_{|4}{}^4}{R} \right) \overset{1}{g}_m{}^n - \left[\left(\frac{R_{|4}{}^4}{R} - \tilde{\alpha}^2 \right) \overset{1}{g}_4{}^4 + \tilde{\alpha}^2 \overset{1}{g}_l{}^l \right] \delta_m{}^n \end{aligned} \quad (4.54a)$$

mit der Spur

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}_m{}^m &= \frac{1}{2} \overset{1}{g}_m{}^m|_4{}^4 + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_m{}^m|_l{}^l - \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4{}^4|_4 + \frac{5}{2} \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m{}^m|_4 - \\ &- 3 \left(\frac{R_{|4}{}^4}{R} + \tilde{\alpha}^2 \right) \overset{1}{g}_4{}^4 + \left(\frac{R_{|4}{}^4}{R} + \tilde{\alpha}^2 \right) \overset{1}{g}_m{}^m \end{aligned} \quad (4.54b)$$

- und die 44-Komponente des gestörten Ricci-Tensors:

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}_4{}^4 &= \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4{}^4|_4{}^4 + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4{}^4|_l{}^l + \frac{5}{2} \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4{}^4|_4 - \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m{}^m|_4 + \\ &+ 3\tilde{\alpha}^2 \overset{1}{g}_4{}^4 - \left(\frac{R_{|4}{}^4}{R} + \tilde{\alpha}^2 \right) \overset{1}{g}_m{}^m. \end{aligned} \quad (4.54c)$$

Perturbationen des Energie-Impuls-Spannungs-Tensors

Der Energie-Impuls-Spannungs-Tensor des Zwei-Komponenten-Systems (4.7) lautet unter Verwendung der Gleichungen (4.8) und (4.11):

$$T_{\mu\nu} = \overset{(p)}{T}_{\mu\nu} + \overset{(r)}{T}_{\mu\nu} = (\varrho_p c^2 + p_p) v_\mu v_\nu + (\varrho_r c^2 + p_s) c_\mu c_\nu - (p_p + p_s) g_{\mu\nu} \quad (4.55)$$

und zerfällt nach Einsetzen des störungstheoretischen Ansatzes (4.19a) – (4.19d) sowie bei Berücksichtigung linearer Störungen in eine 0. und 1. Ordnung:

$$T_{\mu\nu} = \overset{0}{T}_{\mu\nu} + \overset{1}{T}_{\mu\nu}, \quad (4.56)$$

wobei für die Störung 1. Ordnung gilt:¹⁹

$$\begin{aligned} \overset{1}{T}_{\mu\nu} = & \left(\overset{0}{\varrho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p \right) \left(\overset{0}{v}_\mu \overset{1}{v}_\nu + \overset{1}{v}_\mu \overset{0}{v}_\nu \right) + \left(\overset{1}{\varrho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p \right) \overset{0}{v}_\mu \overset{0}{v}_\nu + \\ & + \left(\overset{0}{\varrho}_r c^2 + \overset{0}{p}_s \right) \left(\overset{0}{c}_\mu \overset{1}{c}_\nu + \overset{1}{c}_\mu \overset{0}{c}_\nu \right) + \left(\overset{1}{\varrho}_r c^2 + \overset{1}{p}_s \right) \overset{0}{c}_\mu \overset{0}{c}_\nu - \\ & - \left(\overset{1}{p}_p + \overset{1}{p}_s \right) \overset{0}{g}_{\mu\nu} - \left(\overset{0}{p}_p + \overset{0}{p}_s \right) \overset{1}{g}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Für die Spur des Energie-Impuls-Spannungs-Tensors erhalten wir bis zur 1. Ordnung aus den Gleichungen (4.56), (4.57) und (4.19a):

$$T = T_\mu{}^\mu = T_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \overset{0}{T} + \overset{0}{T}_{\mu\nu} \overset{1}{g}^{\nu\mu} + \overset{1}{T}_{\mu\nu} \overset{0}{g}^{\nu\mu} = \overset{0}{T} + \overset{1}{T} \quad (4.58)$$

mit

$$\overset{0}{T} = \left(\overset{0}{\varrho}_p + \overset{0}{\varrho}_r \right) c^2 - 3 \left(\overset{0}{p}_p + \overset{0}{p}_s \right), \quad \overset{1}{T} = \left(\overset{1}{\varrho}_p + \overset{1}{\varrho}_r \right) c^2 - 3 \left(\overset{1}{p}_p + \overset{1}{p}_s \right). \quad (4.59)$$

Perturbationen des Quellterms

Mit Hilfe der Gleichungen (4.56) – (4.59) und des Ansatzes (4.19a) geht der Quellterm (4.6) in

$$S_{\mu\nu} = \overset{0}{S}_{\mu\nu} + \overset{1}{S}_{\mu\nu} = \overset{0}{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{0}{T} \overset{0}{g}_{\mu\nu} + \overset{1}{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{0}{T} \overset{1}{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{1}{T} \overset{0}{g}_{\mu\nu} \quad (4.60)$$

mit

$$\overset{1}{S}_{\mu\nu} = \overset{1}{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{0}{T} \overset{1}{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{1}{T} \overset{0}{g}_{\mu\nu} \quad (4.61)$$

¹⁹ $\overset{0}{T}_{\mu\nu}$ ist bereits in (4.23) und (4.24) eingegangen und wird im folgenden nicht mehr benötigt.

den Störungen des Quellterms über, die durch

$$\begin{aligned}
{}^1\dot{S}_{\mu\nu} &= ({}^0\varrho_p c^2 + {}^0\dot{p}_p)({}^0v_\mu v_\nu + {}^1v_\mu {}^0v_\nu) + ({}^1\varrho_p c^2 + {}^1\dot{p}_p) {}^0v_\mu {}^0v_\nu + \\
&\quad + ({}^0\varrho_r c^2 + {}^0\dot{p}_s)({}^0c_\mu c_\nu + {}^1c_\mu {}^0c_\nu) + ({}^1\varrho_r c^2 + {}^1\dot{p}_s) {}^0c_\mu {}^0c_\nu - \\
&\quad - ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) {}^0g_{\mu\nu} - ({}^0\dot{p}_p + {}^0\dot{p}_s) {}^1g_{\mu\nu} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[({}^0\varrho_p + {}^0\varrho_r) c^2 - 3 ({}^0\dot{p}_p + {}^0\dot{p}_s) \right] {}^1g_{\mu\nu} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[({}^1\varrho_p + {}^1\varrho_r) c^2 - 3 ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) \right] {}^0g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

gegeben sind und gleichzeitig die Quelle der Metrikperturbationen darstellen.

Nach 3+1-Zerlegung des gestörten Quellterms ${}^1\dot{S}_{\mu\nu}$ ergibt sich

- dessen mn -te Komponente zu

$${}^1\dot{S}_m{}^n = -\frac{1}{2} \left[({}^1\varrho_p + {}^1\varrho_r) c^2 - ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) \right] \delta_m{}^n - \frac{1}{2} \left[({}^0\varrho_p + {}^0\varrho_r) c^2 - ({}^0\dot{p}_p + {}^0\dot{p}_s) \right] {}^1g_m{}^n \tag{4.63a}$$

mit der Spur

$${}^1\dot{S}_m{}^m = -\frac{3}{2} \left[({}^1\varrho_p + {}^1\varrho_r) c^2 - ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) \right] - \frac{1}{2} \left[({}^0\varrho_p + {}^0\varrho_r) c^2 - ({}^0\dot{p}_p + {}^0\dot{p}_s) \right] {}^1g_m{}^m \tag{4.63b}$$

- und dessen 44-Komponente zu

$${}^1\dot{S}_4{}^4 = \frac{1}{2} \left[({}^1\varrho_p + {}^1\varrho_r) c^2 + 3 ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) \right] + \frac{1}{2} \left[({}^0\varrho_p + {}^0\varrho_r) c^2 + 3 ({}^0\dot{p}_p + {}^0\dot{p}_s) \right] {}^1g_4{}^4. \tag{4.63c}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (4.20a) und (4.20c) kann sowohl der Strahlungsdruck als auch der Plasmadruck in 0. Ordnung durch die entsprechende Dichte ausgedrückt werden, wobei wir c_s^2/c^2 -Terme wegen $c_s^2/c^2 \ll 1$ vernachlässigen. Anschließend formen wir die Komponenten des gestörten Quellterms um, indem wir die Hintergrunddichten ${}^0\varrho_p$ und ${}^0\varrho_r$ durch geeignete Addition der 1. und 2. Friedman-Gleichung (4.23) und (4.24) substituieren:

$${}^1\dot{S}_m{}^n = -\frac{1}{2} \left[({}^1\varrho_p + {}^1\varrho_r) c^2 - ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) \right] \delta_m{}^n - \frac{c^4}{8\pi G} \left(2\tilde{\alpha}^2 + \frac{R_{|4|}{}^4}{R} - \Lambda + 2 \frac{\varepsilon}{R^2} \right) {}^1g_m{}^n, \tag{4.64a}$$

$${}^1\dot{S}_m{}^m = -\frac{3}{2} \left[({}^1\varrho_p + {}^1\varrho_r) c^2 - ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) \right] - \frac{c^4}{8\pi G} \left(2\tilde{\alpha}^2 + \frac{R_{|4|}{}^4}{R} - \Lambda + 2 \frac{\varepsilon}{R^2} \right) {}^1g_m{}^m, \tag{4.64b}$$

$${}^1\dot{S}_4{}^4 = \frac{1}{2} \left[({}^1\varrho_p + {}^1\varrho_r) c^2 + 3 ({}^1\dot{p}_p + {}^1\dot{p}_s) \right] - \frac{3c^4}{8\pi G} \left(\frac{R_{|4|}{}^4}{R} - \frac{1}{3} \Lambda \right) {}^1g_4{}^4. \tag{4.64c}$$

Die Feldgleichungen für die Störgrößen in DeDonder-Eichung

Nachdem wir den Ricci-Tensor und den Quellterm in 1. Ordnung kennen, können wir die Feldgleichungen für die Störgrößen unter der Voraussetzung, daß der Hintergrund durch Robertson-Walker-Koordinaten (4.27a) beschrieben wird, angeben:

$${}^1R_{\mu\nu} = -\kappa \dot{S}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \Lambda {}^1g_{\mu\nu}. \quad (4.65)$$

Da wir für die folgenden Rechnungen lediglich die Feldgleichungen für die Dreier-Spur des räumlichen Anteils und die 44-Komponente benötigen, beschränken wir uns auf die Angabe dieser beiden Gleichungen. Außerdem berücksichtigen wir für die Metrikperturbationen die vier Nebenbedingungen aus der DeDonder-Eichung (4.50a) und (4.50b).

• Die Dreier-Spur des räumlichen Anteils der Feldgleichungen (4.65) in DeDonder-Eichung lautet unter Verwendung des gestörten Ricci-Tensors ${}^1R_m{}^m$ (4.54b) und des Quellterms 1. Ordnung $\dot{S}_m{}^m$ (4.64b):

$$\begin{aligned} & {}^1g_m{}^m|_4|_4 + {}^1g_m{}^m|l|l - 2\tilde{\alpha} g_4{}^4|_l + 5\tilde{\alpha} {}^1g_m{}^m|_4 - 6 \left(\frac{R_{|4|}{}^4}{R} + \tilde{\alpha}^2 \right) g_4{}^4 - \left(2\tilde{\alpha}^2 - 2\frac{\varepsilon}{R^2} \right) g_m{}^m = \\ & = \frac{24\pi G}{c^4} \left[(\dot{\varrho}_p + \dot{\varrho}_r) c^2 - (\dot{p}_p + \dot{p}_s) \right] = \\ & \stackrel{c_s^2/c^2 \ll 1}{=} \frac{24\pi G}{c^2} \left(\dot{\varrho}_p + \frac{2}{3} \dot{\varrho}_r \right), \end{aligned} \quad (4.66)$$

wobei m und l von 1 bis 3 laufen und über gleiche Indizes summiert wird.

• Für die 44-Komponente in DeDonder-Eichung ergibt sich mit den Gleichungen (4.54c) und (4.64c) unter Beachtung der Summenkonvention:

$$\begin{aligned} & {}^1g_4{}^4|_4|_4 + {}^1g_4{}^4|l|l + 5\tilde{\alpha} g_4{}^4|_4 - 2\tilde{\alpha} {}^1g_m{}^m|_4 + 6\tilde{\alpha}^2 g_4{}^4 - 2 \left(\frac{R_{|4|}{}^4}{R} + \tilde{\alpha}^2 \right) g_m{}^m = \\ & = -\frac{8\pi G}{c^4} \left[(\dot{\varrho}_p + \dot{\varrho}_r) c^2 + 3(\dot{p}_p + \dot{p}_s) \right] = \\ & \stackrel{c_s^2/c^2 \ll 1}{=} -\frac{8\pi G}{c^2} (\dot{\varrho}_p + 2\dot{\varrho}_r). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Beim Übergang von der 2. zur 3. Zeile in den Feldgleichung (4.66) und (4.67) sind jeweils für die Druckterme \dot{p}_p und \dot{p}_s die Ausdrücke (4.20a) und (4.20c) eingesetzt worden und gleichzeitig ist berücksichtigt worden, daß die Schallgeschwindigkeit c_s wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist und das Quadrat des Quotienten c_s/c gegen Eins vernachlässigt werden kann.

Die Bewegungsgleichungen für die Störgrößen

Allgemein sind die Bewegungsgleichungen in Abschnitt 4.1 hergeleitet worden. Im folgenden geben wir diese für die Störgrößen an und führen anschließend eine $3+1$ -Zerlegung durch, um den Impuls- und Energiesatz für die Perturbationen zu erhalten.

(i) Bewegungsgleichungen für das Plasma (Materie)

Das Einsetzen des störungstheoretischen Ansatzes (4.19a)–(4.19d) in den Erhaltungssatz (4.17) führt auf die Bewegungsgleichung 1. Ordnung für das Plasma:

$$\begin{aligned}
& (\overset{0}{\rho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p)_{|\nu} (\overset{0}{v}^\mu \overset{1}{v}^\nu + \overset{1}{v}^\mu \overset{0}{v}^\nu) + (\overset{1}{\rho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p)_{|\nu} \overset{0}{v}^\mu \overset{0}{v}^\nu + \\
& + (\overset{0}{\rho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p) \left[\overset{1}{v}^\mu_{|\nu} \overset{0}{v}^\nu + \overset{0}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \overset{1}{v}^\lambda \overset{0}{v}^\nu + \overset{1}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \overset{0}{v}^\nu + \overset{0}{v}^\mu_{|\nu} \overset{1}{v}^\nu + \overset{0}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \overset{1}{v}^\nu \right] + \\
& + (\overset{1}{\rho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p) \left[\overset{0}{v}^\mu_{|\nu} \overset{0}{v}^\nu + \overset{0}{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \overset{0}{v}^\nu \right] + \\
& + (\overset{0}{\rho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p) \left[\overset{0}{v}^\mu \overset{1}{v}^\nu_{|\nu} + \overset{0}{v}^\mu \overset{0}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{1}{v}^\lambda + \overset{0}{v}^\mu \overset{1}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda + \overset{1}{v}^\mu \overset{0}{v}^\nu_{|\nu} + \overset{1}{v}^\mu \overset{0}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \right] + \\
& + (\overset{1}{\rho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p) \left[\overset{0}{v}^\mu \overset{0}{v}^\nu_{|\nu} + \overset{0}{v}^\mu \overset{0}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \right] - \overset{0}{p}_{p|\nu} \overset{1}{g}^{\mu\nu} - \overset{1}{p}_{p|\nu} \overset{0}{g}^{\mu\nu} = \\
& = + \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \left[\overset{0}{\rho}_r (\overset{1}{c}^\mu - \overset{1}{v}^\mu) + \overset{1}{\rho}_r (\overset{0}{c}^\mu - \overset{0}{v}^\mu) \right].
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Durch $3+1$ -Zerlegung der Gleichung (4.68) ergibt sich

- der Impulssatz für die Materie mit $\mu = m$:

$$\begin{aligned}
& (\overset{0}{\rho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p)_{|\nu} (\overset{0}{v}^m \overset{1}{v}^\nu + \overset{1}{v}^m \overset{0}{v}^\nu) + (\overset{1}{\rho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p)_{|\nu} \overset{0}{v}^m \overset{0}{v}^\nu + \\
& + (\overset{0}{\rho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p) \left[\overset{1}{v}^m_{|\nu} \overset{0}{v}^\nu + \overset{0}{\Gamma}^m_{\nu\lambda} \overset{1}{v}^\lambda \overset{0}{v}^\nu + \overset{1}{\Gamma}^m_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \overset{0}{v}^\nu + \overset{0}{v}^m_{|\nu} \overset{1}{v}^\nu + \overset{0}{\Gamma}^m_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \overset{1}{v}^\nu \right] + \\
& + (\overset{1}{\rho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p) \left[\overset{0}{v}^m_{|\nu} \overset{0}{v}^\nu + \overset{0}{\Gamma}^m_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \overset{0}{v}^\nu \right] + \\
& + (\overset{0}{\rho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p) \left[\overset{0}{v}^m \overset{1}{v}^\nu_{|\nu} + \overset{0}{v}^m \overset{0}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{1}{v}^\lambda + \overset{0}{v}^m \overset{1}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda + \overset{1}{v}^m \overset{0}{v}^\nu_{|\nu} + \overset{1}{v}^m \overset{0}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \right] + \\
& + (\overset{1}{\rho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p) \left[\overset{0}{v}^m \overset{0}{v}^\nu_{|\nu} + \overset{0}{v}^m \overset{0}{\Gamma}^\nu_{\nu\lambda} \overset{0}{v}^\lambda \right] - \overset{0}{p}_{p|\nu} \overset{1}{g}^{m\nu} - \overset{1}{p}_{p|\nu} \overset{0}{g}^{m\nu} = \\
& = + \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \left[\overset{0}{\rho}_r (\overset{1}{c}^m - \overset{1}{v}^m) + \overset{1}{\rho}_r (\overset{0}{c}^m - \overset{0}{v}^m) \right]
\end{aligned} \tag{4.69}$$

- und der Energiesatz für die Materie mit $\mu = 4$:

$$\begin{aligned}
& \left(\overset{0}{\varrho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p \right)_{|\nu} \left(\overset{0}{v}{}^4 \overset{1}{v}{}^\nu + \overset{1}{v}{}^4 \overset{0}{v}{}^\nu \right) + \left(\overset{1}{\varrho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p \right)_{|\nu} \overset{0}{v}{}^4 \overset{0}{v}{}^\nu + \\
& + \left(\overset{0}{\varrho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p \right) \left[\overset{1}{v}{}^4{}_{|\nu} \overset{0}{v}{}^\nu + \overset{0}{\Gamma}{}^4{}_{\nu\lambda} \overset{1}{v}{}^\lambda \overset{0}{v}{}^\nu + \overset{1}{\Gamma}{}^4{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda \overset{0}{v}{}^\nu + \overset{0}{v}{}^4{}_{|\nu} \overset{1}{v}{}^\nu + \overset{0}{\Gamma}{}^4{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda \overset{1}{v}{}^\nu \right] + \\
& + \left(\overset{1}{\varrho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p \right) \left[\overset{0}{v}{}^4{}_{|\nu} \overset{0}{v}{}^\nu + \overset{0}{\Gamma}{}^4{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda \overset{0}{v}{}^\nu \right] + \tag{4.70} \\
& + \left(\overset{0}{\varrho}_p c^2 + \overset{0}{p}_p \right) \left[\overset{0}{v}{}^4 \overset{1}{v}{}^\nu{}_{|\nu} + \overset{0}{v}{}^4 \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} \overset{1}{v}{}^\lambda + \overset{0}{v}{}^4 \overset{1}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda + \overset{1}{v}{}^4 \overset{0}{v}{}^\nu{}_{|\nu} + \overset{1}{v}{}^4 \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda \right] + \\
& + \left(\overset{1}{\varrho}_p c^2 + \overset{1}{p}_p \right) \left[\overset{0}{v}{}^4 \overset{0}{v}{}^\nu{}_{|\nu} + \overset{0}{v}{}^4 \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{v}{}^\lambda \right] - \overset{0}{p}_{p|\nu} \overset{1}{g}{}^{4\nu} - \overset{1}{p}_{p|\nu} \overset{0}{g}{}^{4\nu} = \\
& = + \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \left[\overset{0}{\varrho}_r \left(\overset{1}{c}{}^4 - \overset{1}{v}{}^4 \right) + \overset{1}{\varrho}_r \left(\overset{0}{c}{}^4 - \overset{0}{v}{}^4 \right) \right].
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Christoffel-Symbole $\overset{0}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu}$ (4.26a) sowie $\overset{1}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu}$ (4.42), der Vierergeschwindigkeiten $\overset{0}{v}{}^\mu$ (4.21a) sowie $\overset{0}{c}{}^\mu$ (4.21b), der Definition der Dichtekontraste $\overset{0}{\delta}_p$ sowie δ_r (1.44), der Druckterme $\overset{0}{p}_p$, $\overset{1}{p}_p$, $\overset{0}{p}_s$ und $\overset{1}{p}_s$ nach (4.20a) – (4.20d) und der Kontinuitätsgleichungen 0. Ordnung (4.30), (4.31) mit $c_s^2/c^2 \ll 1$ vereinfachen sich

- der Impulssatz (4.69) für das Plasma

$$\begin{aligned}
& \overset{1}{v}{}^m{}_{|4} + 2 \tilde{\alpha} \overset{1}{v}{}^m - \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^4{}_{|m} + \overset{1}{g}{}^m{}_{|4} + 2 \tilde{\alpha} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{c_s^2}{c^2} \right) \overset{1}{g}{}^m + \\
& + \frac{3}{5} \frac{c_s^2}{c^2} \frac{\chi_{|4}}{1 + \chi} \left(\overset{1}{v}{}^m + \overset{1}{g}{}^m \right) - \tag{4.71} \\
& - \frac{c_s^2}{c^2} \left(1 - e^{l_e^2/3 \Delta} \right) \delta_p{}^{|m} - \frac{1}{3} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r{}^{|m} = \\
& = + \frac{4}{3} \frac{d}{l_\gamma} \left(\overset{1}{c}{}^m - \overset{1}{v}{}^m \right)
\end{aligned}$$

- und der Energiesatz (4.70) für das Plasma

$$\delta_p{}_{|4} - 3 \tilde{\alpha} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + \tilde{\alpha} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \overset{1}{v}{}^m{}_{|m} + \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^m{}_{|4} = 0. \tag{4.72}$$

Wegen der Größenordnung kann nachfolgend im Impulssatz (4.71) in der 1. Zeile der c_s^2/c^2 -Term gegen Eins gestrichen werden.

(ii) Die Bewegungsgleichungen für das Photonengas (Strahlung)

Nach analogem Vorgehen wie unter (i) für die Materie folgen die Erhaltungssätze für das Photonengas aus Gleichung (4.18):

- der Impulssatz für die Strahlung ($\mu = m$):

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \overset{1}{c}{}^m|_4 - \frac{2}{3} \overset{1}{g}_4{}^4|m + \frac{4}{3} \overset{1}{g}_4{}^m|_4 + \frac{4}{3} \tilde{\alpha} (\overset{1}{c}{}^m + \overset{1}{g}_4{}^m) - \\ - \frac{1}{3} (1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}) \delta_r{}^m - \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p{}^m = \\ = -\frac{4}{3} \frac{1}{l_\gamma} (\overset{1}{c}{}^m - \overset{1}{v}{}^m) \end{aligned} \quad (4.73)$$

- und der Energiesatz für die Strahlung ($\mu = 4$):

$$\delta_r{}|_4 - \tilde{\alpha} e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + 3 \tilde{\alpha} \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + \frac{4}{3} \overset{1}{c}{}^m|_m + \frac{2}{3} \overset{1}{g}_m{}^m|_4 = 0. \quad (4.74)$$

Anzumerken ist, daß bei der Herleitung der Erhaltungssätze (4.71) – (4.74) keine Eichbedingung verwendet worden ist, so daß die im Buch von S. Weinberg [86] angegebenen Erhaltungssätze in synchroner Eichung (4.45) aus den Gleichungen (4.71) bzw. (4.72) und (4.73) bzw. (4.74) folgen, indem in diesen Gleichungen die gestörten Komponenten der Metrik $\overset{1}{g}_4{}^4$ und $\overset{1}{g}_4{}^m$ Null gesetzt werden.

Mit den Feldgleichungen (4.66) sowie (4.67) für die Gravitationspotentiale, den Impulssätzen (4.71) sowie (4.73) und den Kontinuitätsgleichungen (4.72) sowie (4.74) für das Plasma und das Photonengas sind die Bestimmungsgleichungen für die Störungen vollständig.

4.2.3 Herleitung der Schallwellengleichungen

Zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Dichtestörungen leiten wir analog zur Newtonschen Vorgehensweise die Schallwellengleichungen für den Dichtekontrast des Plasmas δ_p und des Photonengases δ_r her, die es anschließend zu lösen gilt.

Wie in der gewöhnlichen Schallwellentheorie verknüpfen wir die Energie- und Impulssätze zu einer Wellengleichung: In die Divergenz der Bewegungsgleichungen (4.71) und (4.73) setzen wir die Größen $\overset{1}{v}{}^m|_m|_4$ und $\overset{1}{c}{}^m|_m|_4$, die wir durch Differentiation des entsprechenden Energiesatzes (4.72) bzw. (4.74) nach der 4. Koordinate berechnen, und die Größen $\overset{1}{v}{}^m|_m$ sowie $\overset{1}{c}{}^m|_m$ ein, die sich direkt aus den Energiesätzen (4.72) und (4.74) ergeben. Die entstehenden Gleichungen sind die gesuchten Schallwellengleichungen für

den Materie- und den Strahlungsdichtekontrast. Im folgenden wird das kurz skizzierte Verfahren ausführlich dargelegt:

Die Divergenz des Impulssatzes für die Materie (4.71) lautet

$$\begin{aligned}
& \dot{v}^m|_m|^4 + 2\tilde{\alpha}\dot{v}^m|_m + 2\tilde{\alpha}g_4^m|_m + \frac{3}{5}\frac{c_s^2}{c^2}\frac{\chi_{|4}}{1+\chi}\left(\dot{v}^m|_m + g_4^m|_m\right) + \\
& + \dot{g}_4^m|_m|^4 - \frac{1}{2}g_4^4|_m|^m - \frac{c_s^2}{c^2}\left(1 - e^{l_e^2/3\Delta}\right)\delta_{p|m}{}^m - \frac{1}{3}d e^{4/9}l_\gamma^2\Delta\delta_{r|m}{}^m = \\
& = + \frac{4}{3}\frac{d}{l_\gamma}\left(\dot{c}^m|_m - \dot{v}^m|_m\right)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

und diejenige des Impulssatzes für die Strahlung (4.73):

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3}\dot{c}^m|_m|^4 + \frac{4}{3}\tilde{\alpha}\left(\dot{c}^m|_m + \frac{1}{2}g_4^m|_m\right) + \frac{4}{3}g_4^m|_m|^4 - \frac{2}{3}g_4^4|_m|^m - \\
& - \frac{1}{3}\left(1 - e^{4/9}l_\gamma^2\Delta\right)\delta_{r|m}{}^m - \frac{1}{d}\frac{c_s^2}{c^2}e^{l_e^2/3\Delta}\delta_{p|m}{}^m = \\
& = - \frac{4}{3}\frac{1}{l_\gamma}\left(\dot{c}^m|_m - \dot{v}^m|_m\right).
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Um die in den Gleichungen (4.75) und (4.76) auftretende gestörte Vierer-Geschwindigkeit der Materie \dot{v}^m und der Strahlung \dot{c}^m zu eliminieren, differenzieren wir den Energiesatz für die Materie (4.72) und die Strahlung (4.74) nach der 4. Koordinate, wobei die zeitliche Abhängigkeit der in den Gleichungen (4.72) und (4.74) stehenden Koeffizienten zu berücksichtigen ist. Insbesondere ist der generalisierte Laplace-Operator $\Delta = 1/R^2 \partial_m \partial_m$ zeitabhängig, da in ihm das Quadrat des Skalenparameters R vorkommt.

Die Differentiation der zeitabhängigen Koeffizienten nach der 4. Koordinate in den Energiesätzen (4.72) und (4.74) lautet:

$$\tilde{\alpha}_{|4} = \frac{R_{|4}}{R} - \tilde{\alpha}^2, \quad \left(e^{l_e^2/3\Delta}\right)_{|4} = \frac{2}{3}l_e^2\Delta\left(3\tilde{\alpha} - \frac{\chi_{|4}}{\chi}\right)e^{l_e^2/3\Delta}, \tag{4.77a}$$

$$d_{|4} = -\tilde{\alpha}d, \quad \left(e^{4/9}l_\gamma^2\Delta\right)_{|4} = \frac{8}{9}l_\gamma^2\Delta\left(2\tilde{\alpha} - \frac{\chi_{|4}}{\chi}\right)e^{4/9}l_\gamma^2\Delta, \tag{4.77b}$$

$$d^{-1}_{|4} = \tilde{\alpha}d^{-1}, \quad c_s^2_{|4} = -\left(\tilde{\alpha} - \frac{\chi_{|4}}{1+\chi}\right)c_s^2. \tag{4.77c}$$

Unter Berücksichtigung von (4.77a) – (4.77c) erhalten wir für die Größe $\overset{1}{v}{}^m|_m|4$ aus dem Energiesatz für das Plasma (4.72):

$$\begin{aligned}
\overset{1}{v}{}^m|_m|4 &= -\delta_{p|4}|4 - \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^m|_m|4|4 + \\
&+ \frac{R|4|4}{R} \left[3 \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right] + \\
&+ \tilde{\alpha}^2 \left[-6 \frac{c_s^2}{c^2} (1 - l_e^2 \Delta) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + 2d \left(1 - \frac{8}{9} l_\gamma^2 \Delta \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right] + \\
&+ \tilde{\alpha} \left[3 \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|4} - d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|4} \right] + \\
&+ \tilde{\alpha} \frac{\chi|4}{\chi} \left[\frac{c_s^2}{c^2} \left(\frac{3\chi}{1+\chi} - 2l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + \frac{8}{9} d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right]
\end{aligned} \tag{4.78}$$

und für $\overset{1}{c}{}^m|_m|4$ aus dem Energiesatz für das Photonengas (4.74):

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3} \overset{1}{c}{}^m|_m|4 &= -\delta_{r|4}|4 - \frac{2}{3} \overset{1}{g}{}^m|_m|4|4 + \\
&+ \frac{R|4|4}{R} \left[e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - 3 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right] + \\
&+ \tilde{\alpha}^2 \left[- \left(1 - \frac{16}{9} l_\gamma^2 \Delta \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + 3 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} (1 - 2l_e^2 \Delta) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right] + \\
&+ \tilde{\alpha} \left[e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|4} - 3 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|4} \right] + \\
&+ \tilde{\alpha} \frac{\chi|4}{\chi} \left[-\frac{8}{9} d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} \left(\frac{3\chi}{1+\chi} - 2l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right].
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Nach Einsetzen von $\overset{1}{v}{}^m|_m|4$ aus (4.78), $\overset{1}{v}{}^m|_m$ aus (4.72) und $\overset{1}{c}{}^m|_m$ aus (4.74) in die Divergenz des Impulssatzes (4.75) für das Plasma ergibt sich die Schallwellengleichung für den

Dichtekontrast δ_p der Materie:

$$\begin{aligned}
& - \delta_{p|4}{}^4 - \frac{c_s^2}{c^2} \left[1 - (1 - 6 \tilde{\alpha}^2 l_e^2) e^{l_e^2/3 \Delta} \right] \delta_{p|m}{}^m - \frac{1}{3} d \left(1 - \frac{16}{3} \tilde{\alpha}^2 l_\gamma^2 \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|m}{}^m - \\
& - 2 \tilde{\alpha} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \right) \delta_{p|4} - \tilde{\alpha} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|4} - \frac{4}{3} \frac{d}{l_\gamma} \left(\delta_{p|4} - \frac{3}{4} \delta_{r|4} \right) + \\
& + \left[\frac{R_{|4}{}^4}{R} + \frac{1}{3} \frac{\tilde{\alpha}}{l_\gamma} (3 + 4d) \right] \left(3 \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right) \\
& + \tilde{\alpha} \frac{\chi_{|4}}{\chi} \left[\frac{c_s^2}{c^2} \left(3 \frac{\chi}{1 + \chi} - 2 l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + \frac{8}{9} d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right] - \\
& - \frac{3}{5} \frac{\chi_{|4}}{1 + \chi} \frac{c_s^2}{c^2} \left[\delta_{p|4} + \tilde{\alpha} e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} d \delta_r \right] = \tag{4.80} \\
& = - \frac{1}{2} \overset{1}{g}_m{}^m{}_{|4}{}^4 + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4{}^4{}_{|m}{}^m - \overset{1}{g}_4{}^m{}_{|m}{}^4 - 3 \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m{}^m{}_{|4} - \\
& - 2 \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4{}^m{}_{|m} + \frac{3}{5} \frac{c_s^2}{c^2} \frac{\chi_{|4}}{1 + \chi} \left[\frac{1}{2} \overset{1}{g}_m{}^m{}_{|4} - \overset{1}{g}_4{}^m{}_{|m} \right].
\end{aligned}$$

Für den Dichtekontrast δ_r der Strahlung folgt die Schallwellengleichung analog unter Verwendung der Gleichungen (4.76), (4.79), (4.74) und (4.72):

$$\begin{aligned}
& - \delta_{r|4}{}^4 - \frac{1}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{16}{3} \tilde{\alpha}^2 l_\gamma^2 \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \right] \delta_{r|m}{}^m - \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} (1 - 6 \tilde{\alpha}^2 l_e^2) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|m}{}^m - \\
& - \tilde{\alpha} (1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}) \delta_{r|4} - 3 \tilde{\alpha} \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|4} + \frac{4}{3} \frac{1}{l_\gamma} \left(\delta_{p|4} - \frac{3}{4} \delta_{r|4} \right) + \\
& + \left[\frac{R_{|4}{}^4}{R} + \frac{1}{3} \frac{\tilde{\alpha}}{l_\gamma} (3 + 4d) \right] \left(e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - 3 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right) + \\
& + \tilde{\alpha} \frac{\chi_{|4}}{\chi} \left[-\frac{8}{9} l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} \left(3 \frac{\chi}{1 + \chi} - 2 l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right] = \tag{4.81} \\
& = \frac{2}{3} \overset{1}{g}_4{}^4{}_{|m}{}^m + \frac{2}{3} \overset{1}{g}_m{}^m{}_{|4}{}^4 - \frac{4}{3} \overset{1}{g}_4{}^m{}_{|m}{}^4 - \frac{2}{3} \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m{}^m{}_{|4} - \\
& - \frac{4}{3} \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4{}^m{}_{|m} + \frac{4}{3} \left(\frac{R_{|4}{}^4}{R} - 5 \tilde{\alpha}^2 \right) \overset{1}{g}_m{}^m.
\end{aligned}$$

Dabei ist in die Gleichungen (4.80) und (4.81) bisher keine Eichbedingung für die Metrik-perturbationen eingesetzt worden. Im folgenden formen wir in den Schallwellengleichungen (4.80) und (4.81) die gemischten Komponenten der gestörten Metrik $\overset{1}{g}_4{}^m$, d.h. die Terme

$\overset{1}{g}_4^m|_m|_4$ und $\overset{1}{g}_4^m|_m$, mittels der Nebenbedingung (4.50a) aus der DeDonder-Eichung um. Berücksichtigen wir zusätzlich, daß $c_s^2/c^2 \ll 1$ gilt, können wir die Schallwellengleichungen in folgender Form angeben:

- Schallwellengleichung für den Dichtekontrast δ_p des Plasmas:

$$\begin{aligned}
& - \delta_{p|4}|_4 - \frac{c_s^2}{c^2} \left[1 - (1 - 6 \tilde{\alpha}^2 l_e^2) e^{l_e^2/3 \Delta} \right] \delta_{p|m}|^m - \frac{1}{3} d \left(1 - \frac{16}{3} \tilde{\alpha}^2 l_\gamma^2 \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|m}|^m - \\
& - 2 \tilde{\alpha} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \right) \delta_{p|4} - \tilde{\alpha} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|4} - \frac{4}{3} \frac{d}{l_\gamma} \left(\delta_{p|4} - \frac{3}{4} \delta_{r|4} \right) + \\
& + \left[\frac{R|_4|^4}{R} + \frac{1}{3} \frac{\tilde{\alpha}}{l_\gamma} (3 + 4d) \right] \left(3 \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right) + \\
& + \tilde{\alpha} \frac{\chi|_4}{\chi} \left[\frac{c_s^2}{c^2} \left(3 \frac{\chi}{1 + \chi} - 2 l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + \frac{8}{9} d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right] - \\
& - \frac{3}{5} \frac{\chi|_4}{1 + \chi} \frac{c_s^2}{c^2} \left[\delta_{p|4} + \tilde{\alpha} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right] = \tag{4.82} \\
& = \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4^4|_4|^4 + \frac{1}{2} \overset{1}{g}_4^4|_m|^m + 4 \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4^4|_4 - \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m^m|_4 + 3 \left(\frac{R|_4|^4}{R} + \tilde{\alpha}^2 \right) \overset{1}{g}_4^4 - \\
& - \left(\frac{R|_4|^4}{R} + \tilde{\alpha}^2 \right) \overset{1}{g}_m^m + \frac{3}{5} \frac{c_s^2}{c^2} \frac{\chi|_4}{1 + \chi} \left[\frac{1}{2} \overset{1}{g}_4^4|_4 + 3 \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4^4 - \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m^m \right],
\end{aligned}$$

- Schallwellengleichung für den Dichtekontrast δ_r des Photonengases:

$$\begin{aligned}
& - \delta_{r|4}|_4 - \frac{1}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{16}{3} \tilde{\alpha}^2 l_\gamma^2 \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \right] \delta_{r|m}|^m - \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} (1 - 6 \tilde{\alpha}^2 l_e^2) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|m}|^m - \\
& - \tilde{\alpha} (1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}) \delta_{r|4} - 3 \tilde{\alpha} \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|4} + \frac{4}{3} \frac{1}{l_\gamma} \left(\delta_{p|4} - \frac{3}{4} \delta_{r|4} \right) + \\
& + \left[\frac{R|_4|^4}{R} + \frac{1}{3} \frac{\tilde{\alpha}}{l_\gamma} (3 + 4d) \right] \left(e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - 3 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right) - \\
& - \tilde{\alpha} \frac{\chi|_4}{\chi} \left[\frac{8}{9} l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} \left(3 \frac{\chi}{1 + \chi} - 2 l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right] = \tag{4.83} \\
& = \frac{2}{3} \overset{1}{g}_4^4|_4|^4 + \frac{2}{3} \overset{1}{g}_4^4|_m|^m + \frac{14}{3} \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_4^4|_4 - \frac{4}{3} \tilde{\alpha} \overset{1}{g}_m^m|_4 + \\
& + 4 \frac{R|_4|^4}{R} \overset{1}{g}_4^4 - \frac{4}{3} \frac{R|_4|^4}{R} \overset{1}{g}_m^m.
\end{aligned}$$

Die Schallwellengleichungen (4.82) und (4.83) für den Dichtekontrast δ_p und δ_r sind mit den Differentialgleichungen (4.66) und (4.67) für die gestörte Metrik ${}^1g_4^4$ und ${}^1g_m^m$ gekoppelt und stellen die vier Wellengleichungen des selbstgravitierenden Zwei-Flüssigkeits-Systems in konsequenter 1. Ordnung der Störungen dar.

Da in den Schallwellengleichungen (4.82) und (4.83) die zweifache Ableitung nach der 4. Koordinate und nach den räumlichen Koordinaten der Metrikperturbation ${}^1g_4^4$ auftritt, d.h. der D'Alembert-Operator angewandt auf ${}^1g_4^4$, können wir diesen mit Hilfe des zeitlichen Anteils der Feldgleichungen (4.67) in DeDonder-Eichung eliminieren. Außerdem kann das Quadrat der Expansionsgeschwindigkeit $\tilde{\alpha}^2$ und der Faktor $R_{|4}^{|4}/R$ unter Verwendung der Friedman-Gleichungen (4.23) und (4.24) durch die Hintergrunddichten $\overset{\circ}{\varrho}_p$ und $\overset{\circ}{\varrho}_r$ bzw. deren Verhältnis d ausgedrückt werden. Nach dieser Umformung nehmen die Schallwellengleichungen (4.82) und (4.83) folgende Gestalt an:

- die Schallwellengleichung für den Dichtekontrast δ_p :

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{c_s^2}{c^2} (1 - e^{l_e^2/3 \Delta}) \delta_{p|m}{}^m + \frac{1}{3} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|m}{}^m \right] - \delta_{p|4}{}^4 - \\
& - \tilde{\alpha} \left[2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \right) \delta_{p|4} + d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|4} + \frac{3}{2} {}^1g_4^4{}_{|4} \right] + \\
& + \frac{1}{l_\gamma} \left[d \left(\delta_{r|4} - \frac{4}{3} \delta_{p|4} \right) + \tilde{\alpha} (3 + 4d) \left(\frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - \frac{1}{3} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right) \right] + \\
& + \frac{4\pi G}{3c^2} \overset{\circ}{\varrho}_p \left[3 \frac{c_s^2}{c^2} [4(1+d) l_e^2 \Delta - (1+2d)] e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + \right. \\
& \quad \left. + \left[(1+2d) - \frac{32}{9} (1+d) l_\gamma^2 \Delta \right] d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + 3(1+2d) {}^1g_4^4{}_{|4} \right] + \\
& + \frac{1}{3} \Lambda \left[3 \frac{c_s^2}{c^2} (1 + 2l_e^2 \Delta) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - d (1 + \frac{16}{9} l_\gamma^2 \Delta) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - 3 {}^1g_4^4{}_{|4} \right] - \\
& - \frac{\varepsilon}{R^2} \left[6 \frac{c_s^2}{c^2} l_e^2 \Delta e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - \frac{16}{9} d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right] + \\
& + \frac{4\pi G}{c^2} \overset{\circ}{\varrho}_p (\delta_p + 2d \delta_r) + \tag{4.84} \\
& + \tilde{\alpha} \frac{\chi_{|4}}{\chi} \left[\frac{8}{9} d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \frac{c_s^2}{c^2} \left(3 \frac{\chi}{1+\chi} - 2l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - \right. \\
& \left. - \frac{\chi}{1+\chi} \frac{c_s^2}{c^2} \left(\frac{3}{5} d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \frac{9}{5} {}^1g_4^4{}_{|4} - \frac{3}{5} {}^1g_m^m \right) \right] - \frac{3}{5} \frac{\chi_{|4}}{1+\chi} \frac{c_s^2}{c^2} \left(\delta_{p|4} - \frac{1}{2} {}^1g_4^4{}_{|4} \right) = 0
\end{aligned}$$

- und die Schallwellengleichung für den Dichtekontrast δ_r :

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1}{3} (1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}) \delta_{r|m} |^m + \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|m} |^m \right] - \delta_{r|4} |^4 - \\
& - \tilde{\alpha} \left[(1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}) \delta_{r|4} + 3 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|4} + \frac{4}{3} g_4^1 |^4 \right] + \\
& + \frac{1}{l_\gamma} \left[\frac{4}{3} \delta_{p|4} - \delta_{r|4} - \tilde{\alpha} (3 + 4d) \left(\frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - \frac{1}{3} e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right) \right] + \\
& + \frac{16\pi G}{3c^2} \varrho_p \left[(3 + 4d) g_4^1 |^4 - \frac{2}{3} (1 + d) g_m^1 |^m \right] - \\
& - \frac{4\pi G}{3c^2} \varrho_p \left[3 \left[4(1 + d) l_e^2 \Delta - (1 + 2d) \right] \frac{c_s^2}{c^2} \frac{1}{d} e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + \right. \\
& \quad \left. + \left[(1 + 2d) - \frac{32}{9} (1 + d) l_\gamma^2 \Delta \right] e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r \right] + \\
& + \frac{1}{3} \Lambda \left[\left(1 + \frac{16}{9} l_\gamma^2 \Delta \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - 3 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} (1 + 2 l_e^2 \Delta) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p - \frac{4}{3} g_m^1 |^m \right] - \\
& - \frac{\varepsilon}{R^2} \left[\frac{16}{9} l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - 6 \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} l_e^2 \Delta e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p + 4 g_4^1 |^4 - \frac{4}{3} g_m^1 |^m \right] + \\
& + \frac{16\pi G}{3c^2} \varrho_p (\delta_p + 2d \delta_r) - \tag{4.85} \\
& - \tilde{\alpha} \frac{\chi |^4}{\chi} \left[\frac{8}{9} l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \frac{1}{d} \frac{c_s^2}{c^2} \left(3 \frac{\chi}{1 + \chi} - 2 l_e^2 \Delta \right) e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_p \right] = 0.
\end{aligned}$$

Nachdem die Schallwellengleichungen (4.84) und (4.85) für den Dichtekontrast δ_p und δ_r zusammen mit den Differentialgleichungen (4.66) und (4.67) für die gestörte Metrik g_4^1 und g_m^1 lediglich numerisch gelöst werden können, gehen wir im folgenden Abschnitt mittels einer c^{-2} -Entwicklung zum Newton-Limes der Schallwellengleichungen (4.84) und (4.85) über, so daß u.a. die Metrikperturbationen in diesen herausfallen.

4.3 Newton-Limes der Schallwellengleichungen

Bevor wir den Newton-Limes der Schallwellengleichungen (4.84) und (4.85) für die Dichtekontraste δ_p und δ_r herleiten, schätzen wir die g_4^4 - und die c_s^2/c^2 -Terme ab.

Abschätzung der g_4^4 -Terme

Da die Metrikstörungen g_4^4 mit dem Newton-Potential verknüpft sind, folgt aus der Poisson-Gleichung (1.5) (siehe auch Gl. (4.67)):

$$-\frac{1}{2} g_4^4 |^m = -\frac{4\pi G}{c^2} \varrho_p^0 (\delta_p + 2 d \delta_r). \quad (4.86)$$

Wählen wir für die Komponente g_4^4 den Ansatz

$$g_4^4 = \tilde{C} e^{i(\omega t - \vec{k} R \vec{x})} \quad \text{mit} \quad \vec{k} R = \text{const. und der Amplitude } \tilde{C}, \quad (4.87)$$

so geht die Poisson-Gleichung (4.86) in

$$\frac{1}{2} k^2 g_4^4 = -\frac{4\pi G}{c^2} \varrho_p^0 (\delta_p + 2 d \delta_r) \quad (4.88)$$

über, und für die Metrikperturbation g_4^4 ergibt sich direkt:

$$g_4^4 = -\frac{8\pi G}{c^2 k^2} \varrho_p^0 (\delta_p + 2 d \delta_r), \quad (4.89)$$

wodurch der g_4^4 -Term skalenabhängig ist. In der Schallwellengleichung für die Materie (4.84) tritt der Term $[4\pi G/c^2] \varrho_p^0 (\delta_p + 2 d \delta_r)$ und in derjenigen (4.85) für die Strahlung $[16\pi G/3c^2] \varrho_p^0 (\delta_p + 2 d \delta_r)$ in Konkurrenz zum g_4^4 -Term auf, so daß der g_4^4 -Term vernachlässigt werden kann, falls

$$\frac{8\pi G}{c^2 k^2} \varrho_p^0 \ll 1 \quad (4.90)$$

gilt. Unter Verwendung der Ausdehnung der Fluktuationen nach (2.13) mit (2.19g) erhalten wir folgende Bedingung für die Masse $M = N \cdot M_\odot$:

$$\frac{2G}{\pi c^2} \varrho_p^0{}^{1/3} M_\odot^{2/3} N^{2/3} \ll 1 \quad \text{bzw. mit (2.18)} \quad N \ll 6.73 \cdot 10^{19} s^{3/2}. \quad (4.91)$$

Die numerische Auswertung von (4.91) zeigt, daß der g_4^4 -Term erst ab ca. $10^{19} M_\odot$ zum Tragen kommt.

Die c_s^2/c^2 -Terme

Außerdem betrachten wir noch die Terme, die das Quadrat des Quotienten aus der Schallgeschwindigkeit c_s und der Lichtgeschwindigkeit c enthalten, das im isothermen Fall (1.18b) durch

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{k_B T_H^0}{mc^2} z (1 + \chi) = 3.42 \cdot 10^{-10} \frac{1}{s} (1 + \chi) \quad (4.92)$$

gegeben und nicht skalenabhängig ist.

Der numerische Vergleich des Quotienten (4.92) mit der Bedingung an den g_4^1 -Term (4.91) zeigt, daß

- im Niedermassenbereich für Werte $s \leq 1$ beide Terme von der gleichen Größenordnung sind;
- bereits bei $N = 10^8$ der g_4^1 -Term schon um einen Faktor 10 größer ist als der Schallgeschwindigkeits-Term, wobei sich dieser Unterschied für zunehmende Massen vergrößert.

Das bedeutet, daß beim Übergang zum Newton-Limes der Schallwellengleichungen (4.84) und (4.85) die c_s^2/c^2 -Terme noch vor den g_4^1 -Termen vernachlässigbar sind. Es ist jedoch zu beachten, daß die c_s^2/c^2 -Terme (und g_4^1 -Terme) nur gegenüber konkurrierenden Termen von der Ordnung Eins vernachlässigt werden dürfen. Existieren diese nicht, sind die c_s^2/c^2 -Terme mitzunehmen.

Übergang zum Newton-Limes

Beim Übergang zum Newton-Limes der Schallwellengleichungen (4.84) und (4.85) für den Dichtekontrast δ_p und δ_r ist zu beachten, daß

$$|^4 = \frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c} |^t, \quad \tilde{\alpha} = \frac{R|_4}{R} = \frac{1}{c} \alpha, \quad (4.93a)$$

$$|^4 g_4^1 = o(c^{-2}), \quad |^m g_m^1 = o(c^{-2}), \quad |^m g_4^1 = o(c^{-3}) \quad (4.93b)$$

gilt, wobei die Größenordnungen in (4.93b) für die Gravitationspotentiale g_4^1 und g_m^1 direkt aus den Feldgleichungen (4.66) sowie (4.67) und für g_4^m aus der Nebenbedingung (4.50a) folgen. Durch Einsetzen der Relationen (4.93a) in die Schallwellengleichungen (4.84) und (4.85) und nachfolgende Multiplikation mit c^2 können wir einen Größenvergleich der einzelnen Terme nach Ordnungen von c^{-2} durchführen, wobei im Newton-Limes alle Terme der Ordnung c^{-2} bzw. c^{-4} vernachlässigt werden. Gleichzeitig berücksichtigen wir im folgenden, daß $c_s \ll c$ gilt (s.o.).

In der Schallwellengleichung (4.84) für den Dichtekontrast δ_p werden folgende Terme im Newton-Limes nicht berücksichtigt:

- in der 2. Zeile der c_s^2 -Term und der $g_4^4|_4$ -Term: $o(c^{-2})$
- in der 3. Zeile der $c_s^2 \delta_p$ -Term, der gegenüber dem Term $c^2 \delta_r$ vernachlässigt wird,
- in der 4. Zeile der c_s^2 -Term: $o(c^{-2})$
- in der 6. Zeile der $c_s^2 \delta_p$ - und g_4^4 -Term, die beide gegenüber dem Term $c^2 \delta_r$ vernachlässigt werden,
- in der 7. Zeile der $c_s^2 \delta_p$ -Term, der gegenüber dem Term $c^2 \delta_r$ vernachlässigt wird,
- in der 9. Zeile der c_s^2 -Term: $o(c^{-2})$
- in der 10. Zeile der Term $c_s^2 \delta_r$: $o(c^{-2})$

und die Terme mit $c_s^2 \delta_p|_4$, g_4^4 , g_m^m und $g_4^4|_4$: $o(c^{-4})$.

Bei der Schallwellengleichung (4.85) für den Dichtekontrast δ_r werden folgende Terme vernachlässigt:

- in der 2. Zeile der c_s^2 -Term und der $g_4^4|_4$ -Term: $o(c^{-2})$
- in der 3. Zeile der $c_s^2 \delta_p$ -Term, der gegenüber dem Term $c^2 \delta_r$ vernachlässigt wird,
- in der 4. Zeile der g_4^4 - und der g_m^m -Term: $o(c^{-2})$
- in der 5. Zeile der c_s^2 -Term: $o(c^{-2})$
- in der 7. und 8. Zeile der $c_s^2 \delta_p$ - und g_m^m -Term, die beide gegenüber dem Term $c^2 \delta_r$ vernachlässigt werden,
- in der 10. Zeile der c_s^2 -Term: $o(c^{-2})$.

Nach dem Weglassen der vorangehend diskutierten Terme erhalten wir die gekoppelten Schallwellengleichungen im Newton-Limes:

- für die Materiedichtefluktuationen δ_p :

$$\begin{aligned}
& - \left[\underbrace{c_s^2 (1 - e^{l_e^2/3 \Delta}) \delta_{p|m} |^m + \frac{1}{3} d c^2 e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|m} |^m}_{\text{stabilisierende Wirkung}} \right] - \delta_{p|t} |^t - \\
& - \alpha \left[2 \delta_{p|t} + d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_{r|t} \right] + \\
& + \frac{c}{l_\gamma} \left[d \left(\delta_{r|t} - \frac{4}{3} \delta_{p|t} \right) - \underbrace{\alpha \left(1 + \frac{4}{3} d \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r}_{\text{Term 1}} \right] + \\
& + \frac{4\pi G}{3} \varrho_p \left[(1 + 2d) - \frac{32}{9} (1 + d) l_\gamma^2 \Delta \right] d e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - \\
& - \frac{1}{3} \Lambda c^2 d \left(1 + \frac{16}{9} l_\gamma^2 \Delta \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon}{R^2} c^2 d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \\
& + \underbrace{4\pi G \varrho_p (\delta_p + 2d \delta_r)}_{\text{destabilisierende Wirkung}} + \\
& + \frac{8}{9} \tilde{\alpha} \frac{\chi_{|t}}{\chi} d l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r = 0
\end{aligned} \tag{4.94}$$

- und für die Strahlungsdichtefluktuationen δ_r :

$$\begin{aligned}
& - \left[\underbrace{\frac{1}{3} c^2 (1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}) \delta_{r|m} |^m + \frac{1}{d} c_s^2 e^{l_e^2/3 \Delta} \delta_{p|m} |^m}_{\text{stabilisierende Wirkung}} \right] - \delta_{r|t} |^t - \\
& - \alpha (1 - e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta}) \delta_{r|t} + \\
& + \frac{c}{l_\gamma} \left[\frac{4}{3} \delta_{p|t} - \delta_{r|t} + \underbrace{\alpha \frac{1}{d} \left(1 + \frac{4}{3} d \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r}_{\text{Term 2}} \right] - \\
& - \frac{4\pi G}{3} \varrho_p \left[(1 + 2d) - \frac{32}{9} (1 + d) l_\gamma^2 \Delta \right] e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \\
& + \frac{1}{3} \Lambda c^2 \left(1 + \frac{16}{9} l_\gamma^2 \Delta \right) e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r - \frac{16}{9} \frac{\varepsilon}{R^2} c^2 l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r + \\
& + \underbrace{\frac{16\pi G}{3} \varrho_p (\delta_p + 2d \delta_r)}_{\text{destabilisierende Wirkung}} - \\
& - \frac{8}{9} \alpha \frac{\chi_{|t}}{\chi} l_\gamma^2 \Delta e^{4/9 l_\gamma^2 \Delta} \delta_r = 0
\end{aligned} \tag{4.95}$$

mit der Zeitableitung des Ionisationsgrades χ gemäß der Saha-Gleichung (2.90):

$$\chi|_t = \alpha \left(\chi - \left(1 + \frac{4}{S} \right)^{-1/2} \right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\chi_e}{k_B T} \right), \quad (4.96)$$

wobei die in (4.96) auftretenden Größen anschließend an die Gleichung (2.90) beschrieben sind. In den Gleichungen (4.94) und (4.95) ist gekennzeichnet, welche Terme auf die Materiedichtefluktuationen aufgrund des Strahlungsdrucks eine stabilisierende bzw. aufgrund der Gravitation eine destabilisierende Wirkung ausüben. Die mit *Term 1* und *2* bezeichneten Reaktionsterme spielen im folgenden Kapitel eine besondere Rolle.

Zur Berechnung der gekoppelten Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) für die Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen im Newton-Limes sind nur die Hintergrundgleichungen (4.23), (4.30) und (4.31), nicht jedoch die Wellengleichungen (4.66) und (4.67) für die Gravitationspotentiale g_4^1 und g_m^m erforderlich. Letztere zeigen lediglich, daß die Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen entsprechend (4.94) und (4.95) die Quelle von mit den Fluktuationen korrelierten Gravitationsfeldern darstellen (siehe Gl. (4.89)).

Vergleichen wir die aus der allgemein-relativistischen Theorie hergeleiteten Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) im Newton-Limes mit denjenigen, die wir nach der Newton-Theorie in mit dem Hintergrund mitbewegten Koordinaten auf S. 27, Gleichungen (1.49) und (1.50), erhalten haben, so stellen wir fest, daß die Verwendung der DeDonder-Eichung zum richtigen Newton-Limes führt. Neben den Λ - und ε -Termen treten Änderungen gegenüber der Newton-Theorie auf, die in zusätzlichen Faktoren und Summanden bestehen, da die Strahlung in den Energiesätzen im Rahmen der Newton-Theorie nicht hinreichend genau behandelt werden kann: In den Kontinuitätsgleichungen (1.3) und (1.4) bzw. (1.45) ist die Wechselwirkung zwischen Photonengas und Plasma nicht berücksichtigt, während dies in den allgemein-relativistischen Kontinuitätsgleichungen (4.72) und (4.74) automatisch der Fall ist.

Wird nachfolgend von allgemein-relativistischer Theorie oder allgemein-relativistischen Gleichungen gesprochen, so beziehen wir uns grundsätzlich auf die allgemein-relativistische Theorie oder die allgemein-relativistischen Gleichungen *im Newton-Limes*.

Analog zum Newtonschen Teil lösen wir die Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) für die Dichtefluktuationen δ_p und δ_r in Kapitel 5 mit Hilfe der Dispersionsrelations-Methode als Approximationsverfahren, um die stabilen und instabilen Moden des Zwei-Komponenten-Systems zu bestimmen. Anschließend berücksichtigen wir in Kapitel 6 die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten in den Differentialgleichungen (4.94) sowie (4.95) und untersuchen das zeitliche Verhalten der Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen im Laufe der kosmischen Entwicklung von Zeiten vor der Rekombination bis zur Gegenwart.

5 Die Dispersionsrelations-Methode

5.1 Herleitung der Dispersionsrelation

Die homogenen und linearen Differentialgleichungen für den Dichtekontrast δ_p (4.94) und δ_r (4.95) lösen wir im folgenden in gleicher Weise wie in Kapitel 2, indem wir eine Fourier-Zerlegung der Dichtefluktuationen von Materie und Strahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum der Fourier-Transformierten \tilde{A} und \tilde{B} durchführen:

$$\delta_p = \int \tilde{A}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{q}\vec{x})} d^3k, \quad \delta_r = \int \tilde{B}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{q}\vec{x})} d^3k \quad (5.1)$$

$$\text{mit } \vec{q} = \vec{k} R = \text{const.} \quad \text{und} \quad |\tilde{A}(\vec{k})|, |\tilde{B}(\vec{k})| \ll 1.$$

In dem Ansatz (5.1) bezeichnet q die konstante gemessene Wellenzahl und gibt die Anzahl der Wellen pro Koordinateneinheit an, während k die zeitunabhängige Wellenzahl pro Längeneinheit darstellt, so daß wir von einer festen Anzahl an Wellen ausgehen, deren gemessene Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ durch die kosmische Expansion gestreckt wird und die typische räumliche Skala der Störungen bildet. Die Wellenzahl k ist mit der Masse der Materiedichtefluktuationen gemäß Gleichung (2.13) verknüpft.

Aufgrund der Linearität der Differentialgleichungen (4.94) und (4.95) können diese für eine Fourier-Komponente gelöst werden. Außerdem rechnen wir mit nahezu konstanter Frequenz ω , d.h. wir setzen bzgl. des Weltalters t langsam veränderliche Koeffizienten in den Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) voraus (siehe S. 29), so daß die Bedingung für die Gültigkeit der Dispersionsrelations-Methode gemäß (2.5) retrospektiv zu überprüfen ist (adiabatische Näherung).

Gleichzeitig interessiert uns dieses näherungsweise Lösungsverfahren insbesondere zur Bestimmung der instabilen Fluktuationsmoden vor und während der Rekombination, mit denen wir analog zu Abschnitt 3.2.1 die Anfangswerte zur Diskussion der zeitlichen Entwicklung der Dichtefluktuationen in Kapitel 6 festlegen. Ein Vergleich des Materiedichte-, des Krümmungs- und des kosmologischen Terms in den Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95)

$$\frac{4\pi G \varrho_p^0}{\Lambda c^2} = \frac{4\pi G \varrho_{\text{pH}}^0}{\Lambda c^2} \frac{z_{\text{R}}^3}{s} \approx \frac{1.5 \cdot 10^7}{s} \quad \frac{4\pi G \varrho_p^0}{\varepsilon c^2 / R^2} = \frac{4\pi G \varrho_{\text{pH}}^0}{\varepsilon c^2 / R_{\text{H}}^2} \frac{z_{\text{R}}}{s} \approx \frac{300}{s} \quad (5.2)$$

mit den Werten nach W. Priester (Abschnitt 6.3.4) $\varepsilon = 1$, $\Lambda = 3.28 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$ sowie $R_{\text{H}} = 3.39 \cdot 10^{28} \text{ cm} = 3.58 \cdot 10^{10} \text{ ly}$ zeigt, daß bis kurz nach der Rekombination sowohl der Λ - als auch der ε -Term gegenüber dem Materiedichteterm vernachlässigt werden kann.

Bestimmungsgleichungen für die Amplituden \tilde{A} und \tilde{B}

Indem wir die einzelnen Moden aus den Fourier-Integralen (5.1) in die Schallwellengleichungen für den Dichtekontrast δ_p (4.94) und δ_r (4.95) im Newton-Limes bei Vernachlässigung des kosmologischen Terms und des Krümmungsterms gemäß der Abschätzung (5.2) einsetzen, erhalten wir zwei algebraische Gleichungen für die Amplituden \tilde{A} und \tilde{B} :

- die Materiegleichung:

$$\begin{aligned} & \tilde{A} \left[\omega^2 - i\omega \left(2\alpha + \frac{4}{3} d \frac{c}{l_\gamma} \right) - c_s^2 k^2 (1 - e^{-k^2 l_e^2 / 3}) + 4\pi G \varrho_p^0 \right] + \\ & + \tilde{B} \left[-i\omega \left(\alpha d e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} - d \frac{c}{l_\gamma} \right) - \frac{1}{3} d c^2 k^2 e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} + 8\pi G d \varrho_p^0 - \right. \\ & \left. - d (f_1 + f_3) + \frac{4\pi G}{3} \varrho_p^0 d f_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

- und die Strahlungsgleichung:

$$\begin{aligned} & \tilde{B} \left[\omega^2 - i\omega \left(\alpha (1 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2}) + \frac{c}{l_\gamma} \right) - \frac{1}{3} c^2 k^2 (1 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2}) + \right. \\ & \left. + \frac{32\pi G}{3} \varrho_p^0 d - \frac{4\pi G}{3} \varrho_p^0 f_2 + f_1 + f_3 \right] + \\ & + \tilde{A} \left[\frac{4}{3} \frac{c}{l_\gamma} i\omega - \frac{1}{d} c_s^2 k^2 e^{-k^2 l_e^2 / 3} + \frac{16\pi G}{3} \varrho_p^0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit den Abkürzungen

$$f_1 = \alpha \frac{c}{l_\gamma} \left(1 + \frac{4}{3} d \right) e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2}, \quad (5.5a)$$

$$f_2 = \left[(1 + 2d) + \frac{32}{9} (1 + d) k^2 l_\gamma^2 \right] e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2}, \quad (5.5b)$$

$$f_3 = \frac{8}{9} \alpha \frac{\chi|t}{\chi} k^2 l_\gamma^2 e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2}. \quad (5.5c)$$

Dispersionsrelation

Für das System linearer homogener Gleichungen (5.3) und (5.4) existieren nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante seiner Koeffizientenmatrix verschwindet, so daß wir analog zu S. 32 eine *Dispersionsrelation* erhalten:

$$\omega^4 + i\omega^3 A - \omega^2 B - i\omega C + D = 0, \quad (5.6)$$

in der die Koeffizienten A , B , C und D anstelle von (2.17a) – (2.17d) folgende Form besitzen:

$$A = -\alpha \left(3 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} \right) - \frac{c}{l_\gamma} \left(1 + \frac{4}{3} d \right), \quad (5.7a)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{3} c^2 k^2 \left(1 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} \right) + c_s^2 k^2 \left(1 - e^{-k^2 l_e^2 / 3} \right) + \\ & + 2\alpha \left[\alpha \left(1 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} \right) + \frac{c}{l_\gamma} \left(1 + \frac{2}{3} d \right) \right] - \\ & - 4\pi G \varrho_p^0 \left(1 + \frac{8}{3} d - \frac{1}{3} f_4 \right) - f_1 - f_3, \end{aligned} \quad (5.7b)$$

$$\begin{aligned} C = & \alpha \left[-\frac{2}{3} c^2 k^2 \left(1 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} \right) - c_s^2 k^2 \left(1 - e^{-k^2 l_e^2 / 3} - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} \right) + \right. \\ & \left. + 4\pi G \varrho_p^0 \left[1 + \frac{16}{3} d - \left(1 + \frac{4}{3} d \right) e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} - \frac{2}{3} f_2 \right] - 2(f_1 + f_3) \right] + \\ & + \frac{c}{l_\gamma} \left[-c_s^2 k^2 - \frac{4}{9} d c^2 k^2 + 4\pi G \varrho_p^0 \left(1 + 4d + \frac{32}{9} d^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (5.7c)$$

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{3} c_s^2 c^2 k^4 \left(1 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} - e^{-k^2 l_e^2 / 3} \right) - c_s^2 k^2 (f_1 + f_3) + \\ & + \frac{4\pi G}{3} \varrho_p^0 \left[c_s^2 k^2 \left(6 e^{-k^2 l_e^2 / 3} - 8d \left(1 - e^{-k^2 l_e^2 / 3} \right) + f_2 \right) - \right. \\ & \left. - c^2 k^2 \left[1 - e^{-4/9 k^2 l_\gamma^2} \left(1 + \frac{4}{3} d \right) \right] + \right. \\ & \left. + 3 \left(1 + \frac{4}{3} d \right) (f_1 + f_3) - 4\pi G \varrho_p^0 \left(1 + \frac{4}{3} d \right) f_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.7d)$$

Das i.a. komplexe Amplitudenverhältnis $r = \tilde{A}/\tilde{B}$ berechnen wir analog zur Newtonschen Theorie entweder aus der Materiegleichung (5.3) oder der Strahlungsgleichung (5.4).

Die Dispersionsrelation (5.6) ist mit derjenigen der Newton-Theorie (2.16) strukturmäßig identisch, so daß wir das Lösungsverfahren aus Kapitel 2 direkt übernehmen und uns entsprechend kurz fassen können. Anstelle der Koeffizienten A , B , C und D nach (2.17a) – (2.17d) sind im weiteren lediglich diejenigen nach der allgemein-relativistischen Theorie (5.7a) – (5.7d) einzusetzen.

Mit dem Ansatz (2.23) für die komplexe Frequenz ω erhalten wir aus der Dispersionsrelation (5.6) die Realteilgleichung (2.32a) und die Imaginärteilgleichung (2.32b) allerdings mit den Koeffizienten nach (5.7a) – (5.7d), wobei aufgrund letzterer nicht-schwingende und schwingende Moden zu unterscheiden sind.

Analytisch gewinnen wir die Lösungen der Dispersionsrelation (5.6) für Zeiten bis kurz nach der Rekombination

- *im nicht-schwingenden Fall* mit Hilfe des Cardanschen Verfahrens, wie auf S. 40 ff. dargestellt ist, und
- *im schwingenden Fall*, indem wir die Realteilgleichung (2.32a) entsprechend S. 50 ff. faktorisieren.

Nachfolgend diskutieren wir die Lösungen der Dispersionsrelation (5.6) im allgemein-relativistischen Fall und vergleichen diese mit den Resultaten aus der Newtonschen Theorie.

5.2 Diskussion der Dispersionsrelation

Bei der numerischen Auswertung verwenden wir für die heutige Materiedichte und Temperatur des Hintergrunds die Werte (1.37). Die z -Abhängigkeit der in den Koeffizienten (5.7a) – (5.7d) auftretenden Größen ist entsprechend (2.19a) – (2.19g) gegeben. Weiterhin berücksichtigen wir folgende Punkte:

- In die freien Weglängen l_γ (1.9a) sowie l_e (1.9b) und die Schallgeschwindigkeit c_s (1.18b) bzw. (1.18a) bauen wir von vornherein den Ionisationsgrad χ gemäß der Saha-Gleichung (2.90) ein, was im Newtonschen Teil dem Abschnitt 2.2.4 entspricht.
- Bis zur Wasserstoffrekombination behandeln wir das Plasma im Gegensatz zum Newtonschen Teil isotherm und wählen somit die isotherme Schallgeschwindigkeit (1.18b), da die Elektronen bis zur Rekombination in das riesige Wärmebad der Photonen eingebettet sind, wobei die Anzahl der Photonen zu derjenigen der Elektronen etwa $6 \cdot 10^9$ beträgt (siehe Annex E.2.2).
- Nach der Rekombination kühlt die Materie adiabatisch schneller ab als die Strahlung. Dieser Tatsache tragen wir entsprechend Gleichung (2.65) Rechnung und gehen gleichzeitig zu der Schallgeschwindigkeit für die freie adiabatische Wasserstoff-Schallwelle (1.18a) über.

Nachdem sich insbesondere bei den nicht-schwingenden Moden das Vorzeichen der Diskriminante D_1 (2.41b) auf die Anzahl der reellen Lösungen und die damit verbundenen Lösungsbereiche der Gleichung 4. Grades (2.33) für die 'Frequenz' b auswirkt, diskutieren wir zunächst die Diskriminante.

s -Bereich	Anzahl der Nullstellen	Massenbereich	Vorzeichen der Diskriminante D_1
$1.17 < s \leq 1.201$	3	$0 < M < M_0$	$D_1 < 0$
		$M_0 < M < M_1$	$D_1 > 0$
		$M_1 < M < M_2$	$D_1 < 0$
		$M_2 < M$	$D_1 > 0$
$1.201 < s \leq 1.256$	5	$0 < M < M_0$	$D_1 < 0$
		$M_0 < M < M_1$	$D_1 > 0$
		$M_1 < M < M_2$	$D_1 < 0$
		$M_2 < M < M_3$	$D_1 > 0$
		$M_3 < M < M_4$	$D_1 < 0$
$M_4 < M$	$D_1 > 0$		
$1.256 < s \leq 1.339$	4	$0 < M < M_0$	$D_1 < 0$
		$M_0 < M < M_1$	$D_1 > 0$
		$M_1 < M < M_2$	$D_1 < 0$
		$M_2 < M < M_3$	$D_1 > 0$
$M_3 < M$	$D_1 < 0$		
$1.339 < s \leq 1.659$	3	$0 < M < M_0$	$D_1 < 0$
		$M_0 < M < M_1$	$D_1 > 0$
		$M_1 < M < M_2$	$D_1 < 0$
		$M_2 < M$	$D_1 > 0$
$1.659 < s$	2	$0 < M < M_0$	$D_1 < 0$
		$M_0 < M < M_1$	$D_1 > 0$
		$M_1 < M$	$D_1 < 0$

Tab. 5.1: Vorzeichen der Diskriminante D_1 in Abhängigkeit von der Masse M und vom Zeitparameter s . Der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der Diskriminante D_1 und der Anzahl der reellen/komplexen Wurzeln der Gleichung 4. Grades ist in Tab. 2.1 dargestellt. Die Massenwerte werden im folgenden angegeben.

Die Diskriminante

Aus Tab. 2.1 ist zu entnehmen, welche Lösungen die Gleichung 4. Grades (2.33) für die 'Frequenz' b abhängig vom Vorzeichen der Diskriminante D_1 (2.41b) besitzt.

Für $s < 1.06$ ist die Diskriminante D_1 im allgemein-relativistischen Fall, d.h. bei Verwendung der Koeffizienten A , B , C und D nach (5.7a) – (5.7d), im gesamten Massenbereich positiv, so daß die Gleichung (2.33) zwei reelle Lösungen besitzt und im Gegensatz zum

Newtonschen Fall die Lösungsbereiche nicht zu unterscheiden sind. Um abzuklären, welche Terme verhindern, daß bei der Diskriminante im Hochmassenbereich Nullstellen auftreten, ist die Wirkung der im Vergleich zur Newton-Theorie zusätzlichen Terme in den Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) untersucht worden: Die in den Gleichungen (4.94) und (4.95) mit *Term 1* und *Term 2* gekennzeichneten Terme halten die Diskriminante positiv. Es sind Reaktionsterme, die ihren Ursprung in dem Staudruckterm besitzen und von der korrekten Beschreibung der Strahlung in den Energieerhaltungssätzen (4.72) und (4.74) herrühren.

In gleicher Weise wie im Newtonschen Fall wird die Diskriminante für $s > 1.06$ im Niedermassenbereich negativ; die Nullstelle M_0 fällt für alle s -Werte mit derjenigen aus der Newton-Rechnung zusammen.

Außerdem ändert die Diskriminante D_1 ab $s > 1.17$ ihr Verhalten im Hochmassenbereich: in dem Übergangsbereich $1.17 < s < 1.66$ treten abhängig vom s -Wert bis zu vier Nullstellen M_j ($j = 1 \dots 4$) auf, was in Tab. 5.1 dargestellt ist. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die bereits erwähnten Terme 1 und 2 in den Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) umgekehrt proportional zur freien Weglänge l_γ sind und folglich deren Wirkung für abfallenden Ionisationsgrad χ stark abnimmt.

Für $s \geq 1.66$ besitzt die Diskriminante wie nach der Newtonschen Theorie neben der Nullstelle im Niedermassenbereich eine Nullstelle im Hochmassenbereich.

Nachfolgend betrachten wir insbesondere die nicht-schwingenden Moden, da aus Teil I, Kapitel 2, bekannt ist, daß bei diesen die Massengrenzen für Galaxien auftreten und der instabile Massenbereich nach der Rekombination erhalten bleibt.²⁰

5.2.1 Die nicht-schwingenden Moden

Abhängig vom s -Wert vergleichen wir im folgenden die Lösungen b_1 bis b_4 (2.43a) – (2.43d) der Dispersionsrelation (5.6) für verschwindende Frequenz a mit denjenigen aus dem Newtonschen Teil. Wie dort sind diese Moden entweder rein akustisch oder rein optisch.

Moden bis zur Rekombination

Bis zur Rekombination ist die Diskriminante D_1 im gesamten Massenbereich positiv, so daß im allgemein-relativistischen Fall lediglich die Moden b_1 und b_2 existieren, deren Verlauf qualitativ in Abb. 5.1 gezeigt ist und demjenigen in Abb. 2.2 entspricht. Außerdem tritt kein maßgeblicher Unterschied beim Vergleich der in Abb. 5.2 und Abb. 2.3 qualitativ dargestellten Amplitudenverhältnisse r_1 und r_2 auf. Zu beachten ist, daß die Zahlenwerte in Abb. 2.2 und Abb. 2.3 unter Voraussetzung vollständiger Ionisation angegeben sind.

²⁰Die numerische Auswertung erfolgt mit dem Computer-Algebra-Programm *Mathematica*.

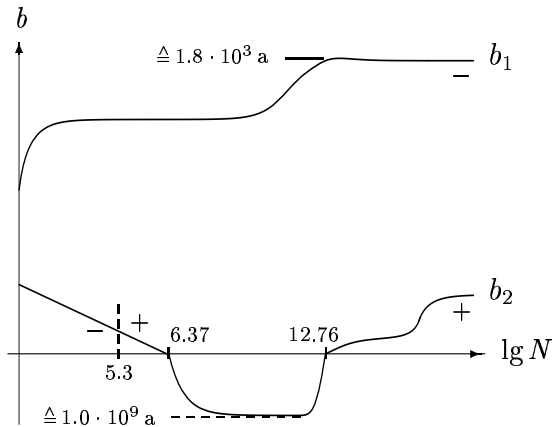


Abb. 5.1: Qualitativer Verlauf der Lösungen b_1 und b_2 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ für $s < 1.06$ im Fall der nicht-schwingenden Moden ($N = M/M_\odot$; +: akustische Moden; -: optische Moden).

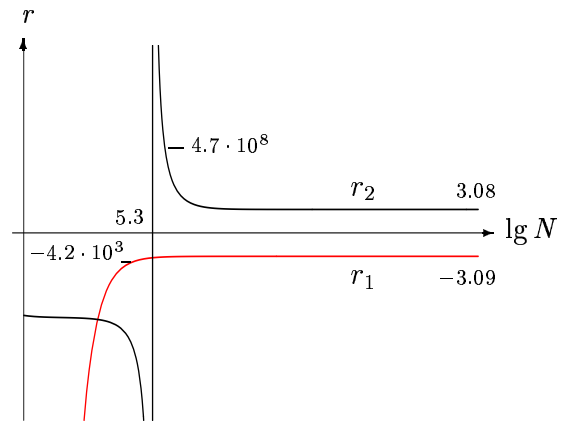


Abb. 5.2: Qualitativer Verlauf des Amplitudenverhältnisses r der Moden b_1 und b_2 (Abb. 5.1) in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ für $s < 1.06$; die Werte für die Amplitude im Niedermassenbereich beziehen sich auf die untere Stabilitätsgrenze.

Die Mode b_1

Bei der optischen Mode b_1 treten weder bei den Relaxationszeiten τ_1 (Abb. 5.3) noch beim Amplitudenverhältnis r_1 Änderungen zu Kapitel 2.2.4 auf.

Die Mode b_2

Der Phasenübergang von einer optischen zu einer akustischen Mode im Niedermassenbereich verschiebt sich um einen Faktor 1/2 zu kleineren Massenwerten hin, d.h. bei $s = 1$ von $3.98 \cdot 10^5 M_\odot$ zu $1.99 \cdot 10^5 M_\odot$.

Weiterhin ändern sich leicht die Werte für die Stabilitätsgrenzen: Da die untere Stabilitätsgrenze eine Folge der Gravitation ist und die zur Newton-Theorie zusätzlichen Terme in den Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) von der Strahlung herrühren, erhalten wir zunächst nach beiden Theorien die gleichen Untergrenzen. Allerdings wirkt sich der Wert der Schallgeschwindigkeit auf die Lage der unteren Stabilitäts/Instabilitätsgrenze aus. Diese wird bei Verwendung der isothermen anstelle der adiabatischen Schallgeschwindigkeit zu etwas geringeren Massen hin verschoben, was in Tab. 5.2 aufgeführt ist.

Dagegen spielt der Wert der Schallgeschwindigkeit c_s^2 bei der Obergrenze keine Rolle. Jedoch verschiebt sich die obere Instabilitäts/Stabilitätsgrenze bei der allgemein-relativistischen Rechnung zu geringfügig höheren Massen (Tab. 5.2), da diese durch den Strahlungsdruck bedingt wird, der in der Newton-Rechnung nicht ganz korrekt eingebaut ist (siehe Bemerkung S. 138).

s -Wert	Untergrenze [M_{\odot}]		Obergrenze [M_{\odot}]	
	isotherme Schallgeschwindigkeit	adiabatische Schallgeschwindigkeit	Newtonsche Behandlung	relativistische Behandlung
0.5	$3.37 \cdot 10^6$	$6.87 \cdot 10^6$	$6.46 \cdot 10^9$	$9.86 \cdot 10^9$
0.8	$3.41 \cdot 10^6$	$7.32 \cdot 10^6$	$1.47 \cdot 10^{11}$	$2.23 \cdot 10^{11}$
1.0	$2.33 \cdot 10^6$	$5.01 \cdot 10^6$	$3.89 \cdot 10^{12}$	$5.80 \cdot 10^{12}$

Tab. 5.2: Die untere Stabilitätsgrenze für isotherme und adiabatische Schallgeschwindigkeit sowie die obere Stabilitätsgrenze bei Newtonscher und allgemein-relativistischer Behandlung für $s = 0.5, 0.8, 1$.

Aufgrund der Vergrößerung des Instabilitätsbereichs (Abb. 5.4) verschiebt sich dementsprechend die Lage des Minimums der Lösung b_2 : bei $s = 0.5$ von $1.58 \cdot 10^9 M_{\odot}$ zu $3.16 \cdot 10^9 M_{\odot}$ und bei $s = 1$ von $10^{11} M_{\odot}$ zu $10^{12} M_{\odot}$. Jedoch wird die Relaxationszeit $|\tau_2|$ nicht verändert und beträgt im Instabilitätsbereich weiterhin ca. 10^9 a.

In Abb. 5.5 ist das Instabilitätstal der Mode b_2 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ und dem Zeitparameter s veranschaulicht. Zusätzlich zeigt Abb. 5.6 das Instabilitätstal, wenn der hydrostatische Druck $p_{e \rightarrow \gamma}^{(R)}$ des Plasmas auf das Photonengas nicht berücksichtigt wird, bei dem die obere und untere Stabilitätsgrenze für $s = 0.169$ ($z = 8166$) bzw. für ein Weltalter von $t = 1.49 \cdot 10^4$ a zusammenfallen. Wie bereits in Abschnitt 2.2.1 ausgeführt,

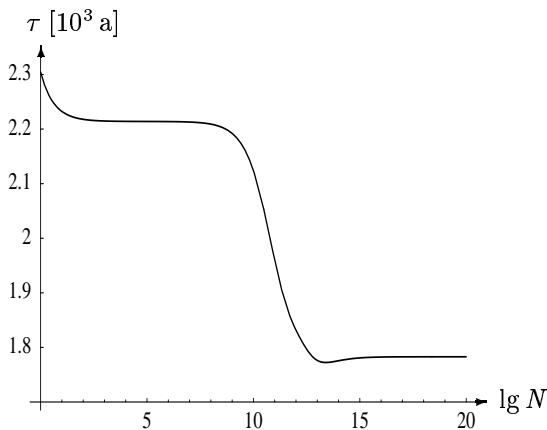


Abb. 5.3: Die Relaxationszeit τ_1 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ für $s = 1$.

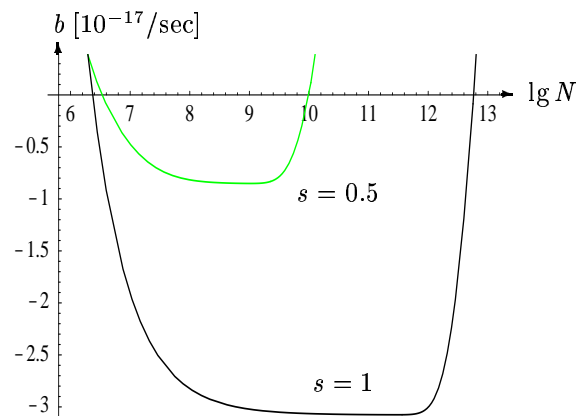


Abb. 5.4: Der Instabilitätsbereich der Mode b_2 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ für $s = 0.5$ und $s = 1$.

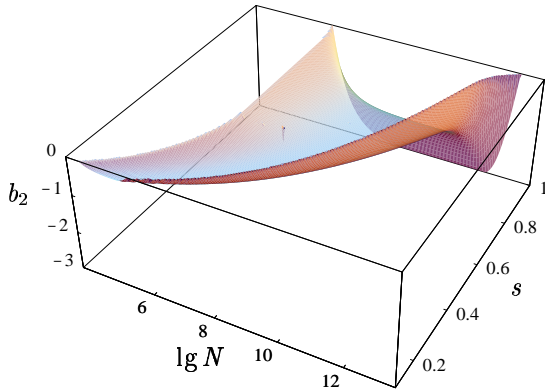


Abb. 5.5: Das Instabilitätstal der Mode b_2 [10^{-17} /sec] in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ und dem Zeitparameter s für $0.1 \leq s \leq 1$.

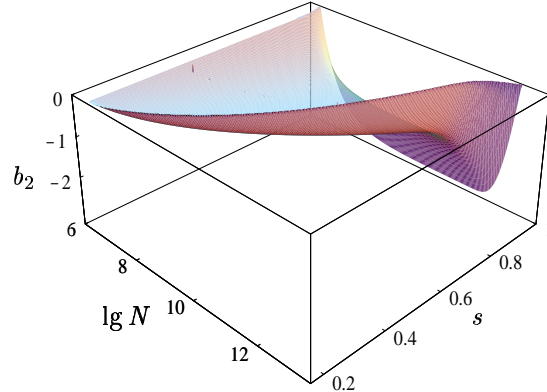


Abb. 5.6: Das Instabilitätstal der Mode b_2 [10^{-17} /sec] in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ und dem Zeitparameter s für $0.1 \leq s \leq 1$ mit $p_{e \rightarrow \gamma} = 0$.

bewirkt der Druck $p_{e \rightarrow \gamma}^{(R)}$, daß die untere Massengrenze kleiner als die Jeans-Masse M_J und mit der oberen Massengrenze niemals identisch wird. Allerdings werden instabile Massen mit $M < M_J$ im Laufe der Zeit stabil und folglich zeigt Abb. 5.6 das Tal, innerhalb dessen die Massen liegen, die mit der Zeit zunehmende Instabilität besitzen. Die Galaxienentstehung kann bei $z = 8166$ geringfügig früher als im Newtonschen Fall einsetzen, bei dem der früheste Zeitpunkt bei $z = 7605$ bzw. einem Weltalter von $t = 1.70 \cdot 10^4$ a gelegen hat.

Beim Amplitudenverhältnis r_2 tritt ausschließlich im Hochmassenbereich eine Änderung auf: für $s = 1$ beträgt dieses bei $10^{19} M_\odot$ statt 0.75 jetzt 3.32, so daß nach der allgemein-relativistischen Rechnung die Materiedichtefluktuationen stärker angeregt sind als diejenigen der Strahlung und es damit fraglich ist, ob ein beobachtbarer Einfluß auf die Daten der Hintergrundstrahlung auftritt.²¹

Abschließend stellen wir die Bedingung für die Gültigkeit der Dispersionsrelations-Methode, die entsprechend Gleichung (2.45) berechnet worden ist, in Abhängigkeit vom Zeitparameter s unter Verwendung der Mode b_1 sowie b_2 in Abb. 5.7 für $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$ und $10^9 M_\odot$ und in Abb. 5.8 für $10^4 M_\odot$ und $10^{12} M_\odot$ dar. Bei der Mode b_1 ist die Bedingung für alle Massenwerte wie im Newtonschen Teil leicht verletzt, während diese bei der Mode b_2 abgesehen von den Instabilitätsgrenzen für Massen $M < 10^{12} M_\odot$ gut erfüllt ist.

²¹Mit dem Strahlungsdichtekontrast ist eine Temperaturfluktuation entsprechend $\delta_r = 4 \Delta T/T$ verknüpft. Nach der allgemein-relativistischen Theorie entsteht ein zweiter Beitrag infolge der Rotverschiebung aus der Änderung des Gravitationspotentials gemäß $\Delta T/T = \frac{1}{g_4^4} / 2$ (siehe Gl. (4.89)).

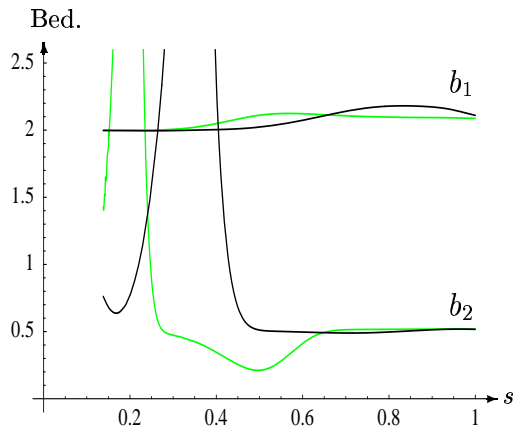


Abb. 5.7: Darstellung der Bedingung für die Gültigkeit der Dispersionsrelations-Methode für die Mode b_1 sowie b_2 und $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$ (gepunktet) sowie $10^9 M_\odot$ (fett).

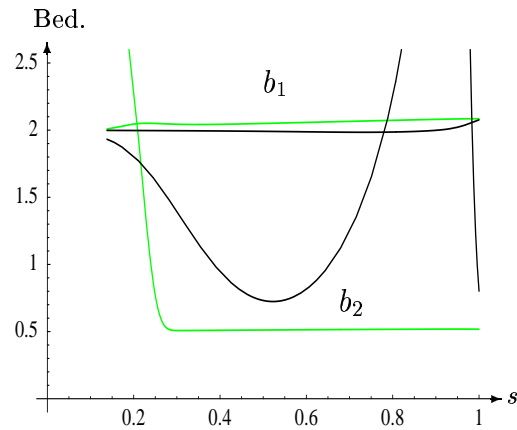


Abb. 5.8: Darstellung der Bedingung für die Gültigkeit der Dispersionsrelations-Methode für die Mode b_1 sowie b_2 und $10^4 M_\odot$ (gepunktet) sowie $10^{12} M_\odot$ (fett).

Moden während und nach vollständiger Rekombination

Im Newtonschen Fall sind die nicht-schwingenden Moden während der Rekombination in Abschnitt 2.2.4 und die Ära danach in Abschnitt 2.2.3 diskutiert, die bei $s \approx 2$ einsetzt, wenn der Ionisationsgrad χ auf nahezu Null abfällt.

Wenn ab $s > 1.06$ im Niedermassenbereich die Nullstelle M_0 der Diskriminante D_1 auftritt, existiert für $M < M_0$ in gleicher Weise wie nach der Newton-Theorie keine reelle Wurzel der Gleichung 4. Grades (2.33) für die 'Frequenz' b . Im Hochmassenbereich besitzt die Diskriminante D_1 für $1.17 < s < 1.66$ bis zu vier Nullstellen (Tab. 5.1), die jedoch bei Massenwerten in der Nähe von $10^{19} M_\odot$ liegen, so daß nach der Abschätzung auf S. 134 die g_4^4 -Terme nicht mehr vernachlässigbar sind. Deshalb ist es kritisch, über die Relaxationszeiten und Amplitudenverhältnisse der Moden b_3 und b_4 , die in Massenbereichen mit $D_1 < 0$ reell werden, eine Aussage zu treffen bzw. sind diese mit Vorsicht zu genießen.

Im folgenden diskutieren wir abhängig von den in Tab. 5.1 aufgeführten s -Bereichen die Moden b_1 bis b_4 , wobei wir jeweils einen Wert s_m herausgreifen, auf den sich die numerischen Angaben beziehen.

Der Bereich $1 < s \leq 1.17$ – $s_m = 1.15$

In diesem Bereich existieren die optische Mode b_1 mit Zerfallszeiten von $\tau_1 \approx 5 \cdot 10^4$ a und die Mode b_2 , wobei sich der Instabilitätsbereich auf $2.22 \cdot 10^6 M_\odot \leq M \leq 1.57 \cdot 10^{17} M_\odot$ vergrößert hat (Abb. 5.9) und die Wachstumszeit $|\tau_2|$ auf ca. $6.6 \cdot 10^7$ a gefallen ist.

Der Bereich $1.17 < s \leq 1.201$ – $s_m = 1.186$

Ab $s > 1.17$ besitzt die Diskriminante D_1 neben der Nullstelle $M_0 = 2.63 \cdot 10^3 M_\odot$ im Niedermassenbereich zwei weitere Nullstellen im Hochmassenbereich: $M_1 = 7.38 \cdot 10^{17} M_\odot$ und $M_2 = 2.41 \cdot 10^{19} M_\odot$.

In Analogie zur Newton-Theorie existiert für $M < M_0$ keine reelle Lösung der Gleichung (2.33) für die 'Frequenz' b . Für $M_0 < M$ treten die optische Mode b_1 und die Mode b_2 auf, wobei für $s > 1.17$ die obere Stabilitätsgrenze wegfällt, da nach der Rekombination aufgrund der fehlenden Thomson-Streuung der Photonen an den Elektronen der Strahlungsdruck wegfällt.

Im Hochmassenbereich $M_2 \leq M \leq M_3$ entspringen die Wurzeln b_3 und b_4 bei $M = M_2$ wie im Newtonschen Fall aus einer Bifurkation (Abb. 5.10). Die Mode b_3 ist zunächst optisch und wird bei $M = 5.62 \cdot 10^{18} M_\odot$ akustisch, wobei das Amplitudenverhältnis $-2.49 \leq r \leq 1.44$ und die Relaxationszeit ca. $5 \cdot 10^5$ a beträgt. Dagegen ist die Mode b_4 optisch mit $-2.57 \leq r \leq -1.95$ und wird bei $M = 8.42 \cdot 10^{18} M_\odot$ instabil mit Relaxationszeiten um 10^6 a.

Der Bereich $1.17 < s \leq 1.201$ – $s_m = 1.23$

In diesem schmalen s -Bereich treten neben der Nullstelle $M_0 = 2.36 \cdot 10^4 M_\odot$ weitere vier Nullstellen der Diskriminante D_1 im Hochmassenbereich auf: $M_1 = 1.63 \cdot 10^{18} M_\odot$, $M_2 = 2.49 \cdot 10^{18} M_\odot$, $M_3 = 3.57 \cdot 10^{20} M_\odot$ und $M_4 = 6.99 \cdot 10^{21} M_\odot$.

Aus Tab. 5.1 ist zu entnehmen, in welchen Massenbereichen die Diskriminante D_1 kleiner als Null wird: für $M < M_0$ gibt es keine reelle Wurzel der Gleichung (2.33) und in den Bereichen $M_1 \leq M \leq M_2$ sowie $M_3 \leq M \leq M_4$ existieren die vier Moden, während für $M_0 < M < M_1$, $M_2 < M < M_3$ und $M_4 < M$ nur die Lösungen b_1 und b_2 reell sind.

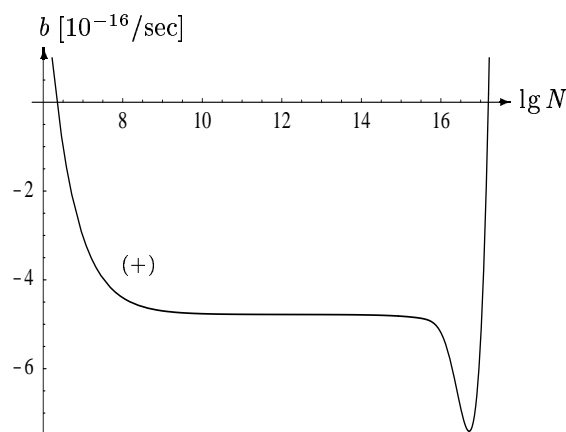


Abb. 5.9: Der Instabilitätsbereich der Mode b_2 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ bei $s = 1.15$.

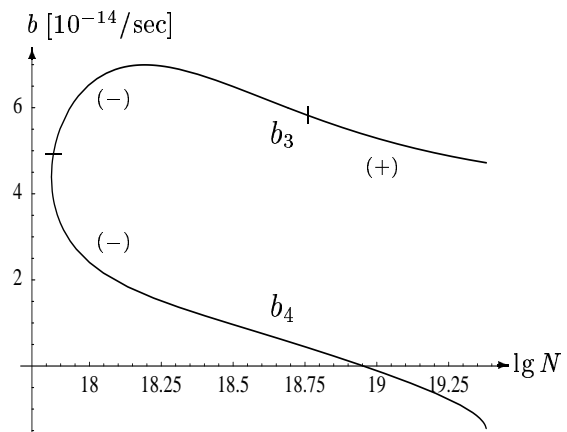


Abb. 5.10: Die Moden b_3 und b_4 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ bei $s = 1.186$.

Der Bereich $1.256 < s \leq 1.339$ – $s_m = 1.3$

Die Nullstellen der Diskriminante D_1 liegen bei $M_0 = 1.47 \cdot 10^5 M_\odot$, $M_1 = 3.30 \cdot 10^{18} M_\odot$, $M_2 = 7.46 \cdot 10^{19} M_\odot$ und $M_3 = 4.35 \cdot 10^{23} M_\odot$.

Für $M < M_0$ gibt es keine reelle Lösung. Im Bereich $M > M_0$ existieren die optische Mode b_1 und die Mode b_2 , die für $M \geq 1.75 \cdot 10^6 M_\odot$ instabil wird. Gleichzeitig fällt der Phasenübergang der Mode b_2 von optisch nach akustisch im Niedermassenbereich weg.

Zusätzlich kommen die Moden b_3 und b_4 im Bereich $M_1 \leq M \leq M_2$ und $M_3 \leq M$ hinzu. In Abb. 5.11 sind die Moden b_3 und b_4 im Bereich $M_1 \leq M \leq M_2$ dargestellt, die aus einer Bifurkation entspringen und Relaxationszeiten $|\tau_3| \approx 10^5$ a und $|\tau_4| \approx 10^6$ a besitzen. Für $M \geq 10^{19} M_\odot$ wird die Mode b_4 instabil (vgl. Abb. 5.11).

Der Bereich $1.339 < s \leq 1.659$ – $s_m = 1.5$

Für $s = 1.5$ liegen die drei Nullstellen der Diskriminante bei $M_0 = 2.65 \cdot 10^5 M_\odot$, $M_1 = 8.38 \cdot 10^{18} M_\odot$ und $M_2 = 4.95 \cdot 10^{25} M_\odot$, wobei für $M > M_0$ zusätzlich zu den Moden b_1 und b_2 im Bereich $M_1 \leq M \leq M_2$ die Moden b_3 und b_4 existieren.

Der Bereich $1.659 < s$ – $s_m = 2$

Hier treten wie im Newtonschen Fall die Nullstelle $M_0 = 2.07 \cdot 10^5 M_\odot$ im Niedermassenbereich und $M_1 = 2.16 \cdot 10^{19} M_\odot$ im Hochmassenbereich auf.

Im Bereich $M < M_0$ existiert keine nicht-schwingende Mode. Bei $M = M_0$ entspringen die Moden b_1 und b_2 und bei $M = M_1$ die Moden b_3 und b_4 aus einer Bifurkation (Abb. 5.12).

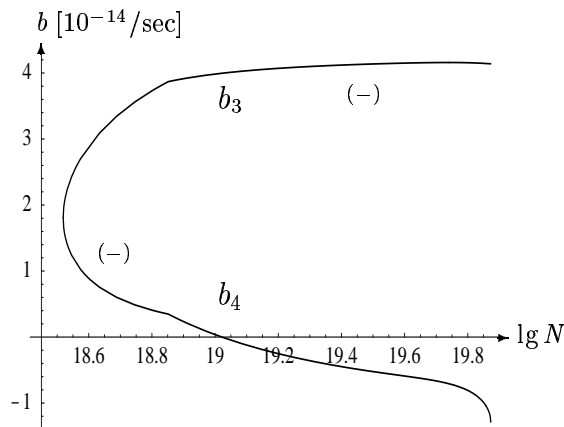


Abb. 5.11: Die Moden b_3 und b_4 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ bei $s = 1.3$.

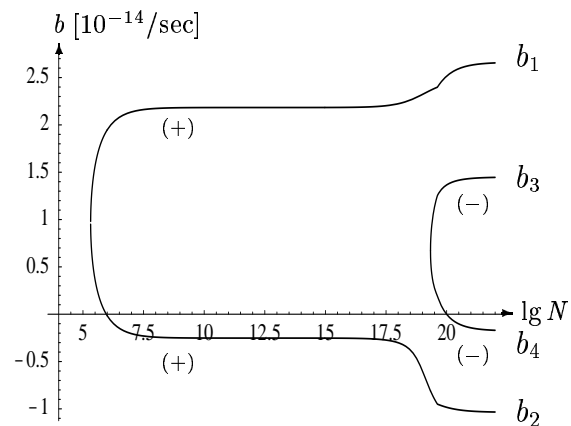


Abb. 5.12: Die Moden b_1 bis b_4 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ bei $s = 2$.

Wie in Abschnitt 2.2.3 ist sowohl die Mode b_1 als auch b_2 akustisch mit identischem Amplitudenverhältnis, wobei für die Amplituden im mittleren Massenbereich $\tilde{A} \gg \tilde{B}$ gilt, so daß die Materiedichtefluktuationen stark angeregt sind. Die Moden b_1 und b_2 unterscheiden sich nur im Zeitverhalten, wobei die Relaxationszeiten bei $|\tau_1| \approx 10^6$ a und $|\tau_2| \approx 10^7$ a liegen. Dagegen sind die Moden b_3 und b_4 optisch mit nahezu gleichem Amplitudenverhältnis von ca. -3 .

Nach der Rekombination, wenn sich der Strahlungsdruck nicht mehr auswirkt, fallen die Lösungen der Gleichung 4. Grades (2.33) für die 'Frequenz' b nach der Newtonschen und der allgemein-relativistischen Theorie zusammen.

5.2.2 Die schwingenden Moden

Im Vergleich zur Newtonschen Auswertung treten bei den schwingenden Moden für $s < 1$ einige Änderungen auf.

Moden bis zur Rekombination

Nachdem die Diskriminante keine Nullstelle besitzt, ist keine Aufspaltung des Lösungsbereichs erforderlich. Im gesamten Massenbereich existiert lediglich die vollständige Lösung (a_2, b_2) , wobei die 'Frequenz' b_2 bei $s = 1$ in dem Massenbereich $7.41 \cdot 10^{12} M_\odot \leq M \leq 5.89 \cdot 10^{15} M_\odot$ und $1.32 \cdot 10^{17} M_\odot \leq M$ negative Werte annimmt (Abb. 5.13), d.h. die Mode schaukelt sich auf.

Im Minimum von b_2 des erstgenannten Instabilitätsbereichs liegt die Relaxationszeit $|\tau_2|$ bei ca. $7.8 \cdot 10^5$ a, während die Periode $T_2 = 1.7 \cdot 10^4$ a beträgt, so daß wie im Newtonschen Fall $T_2 < |\tau_2|$ gilt (S. 55) und die Mode sich nur langsam aufschaukelt.

Dagegen liegt in dem instabilen Massenbereich $M \geq 10^{17} M_\odot$ die Periode T_2 um ca. 20% über der Wachstumszeit $|\tau_2|$, so daß wir hier von einem quasi-instabilen Bereich sprechen können (siehe S. 35), den wir mit der Void-Struktur in Verbindung bringen. Diese zunächst schwingende Mode wird zur Zeit der Rekombination eingefroren und bleibt nach der Rekombination instabil. Aus

$$M = \varrho_{\text{pH}}^0 z_{\text{R}}^3 \lambda_{\text{R}}^3 \quad \rightarrow \quad \lambda_{\text{R}} = \frac{1}{z_{\text{R}}} \left(\frac{M}{\varrho_{\text{pH}}^0} \right)^{1/3} \quad (5.8)$$

berechnet sich die heutige Ausdehnung λ_{H} der Voids für $M = 8 \cdot 10^{17} M_\odot$ zu

$$\lambda_{\text{H}} = \lambda_{\text{R}} z_{\text{R}} = 2 \cdot 10^{27} \text{ cm} = 2 \cdot 10^9 \text{ ly}, \quad (5.9)$$

was ganz gut zu der von W. Priester et al. [69] angegebenen Größe paßt. Bei Wahl der DeDonder-Eichung können Strahlungsperturbationen nicht durch den Einfluß der Eigengravitation anwachsen, sondern werden unabhängig von ihrer räumlichen Ausdehnung durch

den Strahlungsdruck stabilisiert, was B. Rose in [75] betrachtet hat. Diese Argumentation ist u.a. in [40] dargestellt und geht auf O. Klein [44] zurück, der zeigen konnte, daß Lichtsterne nicht existieren.

Der Betrag des Amplitudenverhältnisses $|r_2|$ steigt bis etwa $10^{17} M_\odot$ langsam von $2 \cdot 10^{-4}$ auf 1 und anschließend bis $10^{20} M_\odot$ stärker auf 3.1 an, so daß im niederen und mittleren Massenbereich die Strahlungsdichtefluktuationen stärker angeregt sind als diejenigen der Materie. Bei einer Phase von $-90^\circ \leq \varphi \leq 122^\circ$ handelt es sich eher um eine akustische als um eine optische Mode.

Ähnlich wie nach der Newton-Theorie nimmt die Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = a_2/k$ für $s = 1$ bis $10^8 M_\odot$ den Wert derjenigen des freien Photonengases an, so daß nach den Bedingungen (2.58a) und (2.58b) für die Amplituden

$$\tilde{A} \ll 10^{-5} \quad \text{und} \quad \tilde{B} \ll 0.1 \quad (5.10)$$

gelten sollte, was mit dem Betrag des Amplitudenverhältnisses verträglich ist.

Moden während und nach der Rekombination

Wenn für $s > 1.06$ die Nullstelle M_0 der Diskriminante im Niedermassenbereich auftritt, existieren für $M \leq M_0$ wie im Newtonschen Teil anstelle der Lösung (a_2, b_2) die Lösungen (a_5, b_5) und (a_6, b_6) , wobei für $M = M_0$ die Lösung b_1 an b_5 und b_2 an b_6 anschließt. Bei den Perioden T und den Relaxationszeiten τ treten keine Änderungen zu Abschnitt 2.2.3 und 2.2.4 auf.

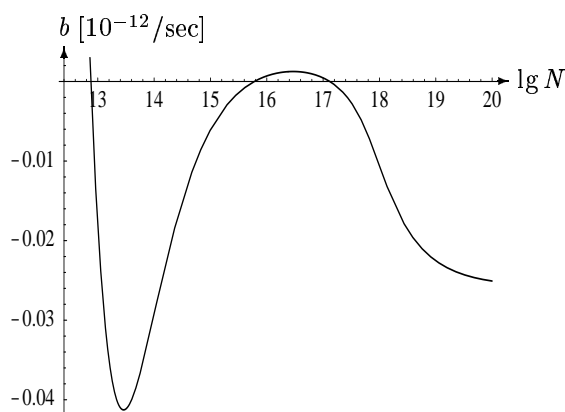


Abb. 5.13: Der Instabilitätsbereich der Lösung b_2 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ bei $s = 1$.

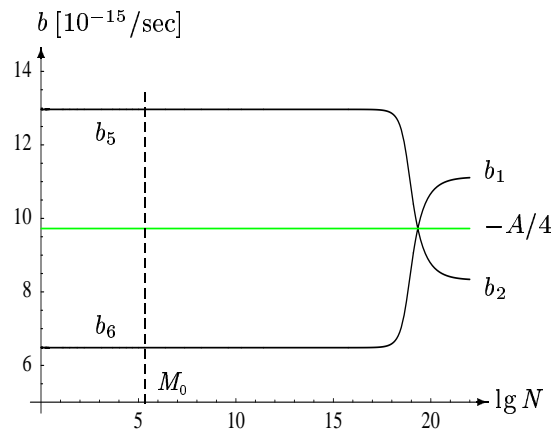


Abb. 5.14: Die Lösungen b_1, b_2, b_5 und b_6 in Abhängigkeit von der Masse $\lg N$ bei $s = 1.7$ mit $M_0 = 2.34 \cdot 10^5 M_\odot$.

Abschließend sind in Abb. 5.14 die Lösungen b_1 , b_2 , b_5 und b_6 zusammen mit der Geraden $-A/4$ für $s = 1.7$ dargestellt: es handelt sich um leicht gedämpfte Moden mit $\tau > T$. Vollständige Lösungen der Dispersionsrelation (5.6) bilden jedoch lediglich die Moden (a_5, b_5) und (a_6, b_6) für $M < M_0$ und die Mode (a_2, b_2) für $M_0 < M$, nicht dagegen die Lösung (a_1, b_1) , da die Frequenz a_1 komplex ist.

6 Zeitliche Entwicklung der Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen

Da die in Kapitel 5 durchgeführte Dispersionsrelation-Methode aufgrund der kosmischen Expansion lediglich ein adiabatisches Approximationsverfahren zur Lösung der Schallwellengleichungen im Newton-Limes (4.94) und (4.95) für die Dichtekontraste δ_p und δ_r darstellt, untersuchen wir in diesem Kapitel entsprechend Kapitel 3 die zeitliche Entwicklung der Dichtekontraste δ_p der Materie und δ_r der Strahlung von Zeiten vor der Rekombination bis zur Gegenwart.

6.1 Herleitung der Differentialgleichungen für die Amplituden der Dichtefluktuationen

Analog zu Abschnitt 3.1 erhalten wir das zeitliche Verhalten der Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen, indem wir für die einzelnen Fluktuationen

$$\delta_p = f(t) e^{-i R \vec{k} \vec{x}} \quad \text{und} \quad \delta_r = g(t) e^{-i R \vec{k} \vec{x}} \quad \text{mit} \quad R \vec{k} = \text{const.} \quad (6.1)$$

ansetzen, wobei gemäß (3.1) für die Amplituden $f(t)$ und $g(t)$ $|f|, |g| \ll 1$ gilt und diese das zeitliche Verhalten des Dichtekontrasts δ_p bzw. δ_r beschreiben. Die Wellenzahl $k = |\vec{k}|$ ist gemäß (1.48) definiert und mit der Masse der Materiedichtefluktuationen über (2.13) verknüpft.

Nach Einsetzen des Ansatzes (6.1) für die Dichtekontraste δ_p und δ_r in die Schallwellengleichungen (4.94) und (4.95) ergeben sich folgende gekoppelte lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung:

- für die Amplitude $f(t)$ der Materiedichtefluktuationen ($\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$):

$$\begin{aligned} & \ddot{f} + 2\alpha \dot{f} + \alpha d e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} \dot{g} - d \frac{c}{l_\gamma} \left(\dot{g} - \frac{4}{3} \dot{f} \right) + \\ & + c_s^2 k^2 \left(1 - e^{-l_\gamma^2 k^2 / 3} \right) f + \frac{1}{3} d c^2 k^2 e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g + \alpha d \frac{c}{l_\gamma} \left(1 + \frac{4}{3} d \right) e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g - \\ & - \frac{4\pi G}{3} \varrho_p^0 \left[(1 + 2d) + \frac{32}{9} (1 + d) k^2 l_\gamma^2 \right] d e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g + \\ & + \frac{1}{3} \Lambda c^2 \left(1 - \frac{16}{9} l_\gamma^2 k^2 \right) d e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon}{R^2} c^2 d l_\gamma^2 k^2 e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g + \\ & + \frac{8}{9} \alpha \frac{\dot{\chi}}{\chi} d l_\gamma^2 k^2 e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g - 4\pi G \varrho_p^0 (f + 2d g) = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

- und für die Amplitude $g(t)$ der Strahlungsdichtefluktuations:

$$\begin{aligned}
& \ddot{g} + \alpha \left(1 - e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2}\right) \dot{g} - \frac{c}{l_\gamma} \left(\frac{4}{3} \dot{f} - \dot{g}\right) + \\
& + \frac{1}{3} c^2 k^2 \left(1 - e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2}\right) g + \frac{1}{d} c_s^2 k^2 e^{-l_e^2 k^2/3} f - \alpha \frac{c}{l_\gamma} \left(1 + \frac{4}{3} d\right) e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g + \\
& + \frac{4\pi G}{3} \varrho_p \left[\left(1 + 2d\right) + \frac{32}{9} (1+d) k^2 l_\gamma^2 \right] e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g - \\
& - \frac{1}{3} \Lambda c^2 \left(1 - \frac{16}{9} l_\gamma^2 k^2\right) e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g - \frac{16}{9} \frac{\varepsilon}{R^2} c^2 l_\gamma^2 k^2 e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g - \\
& - \frac{8}{9} \alpha \frac{\dot{\chi}}{\chi} k^2 l_\gamma^2 e^{-4/9 l_\gamma^2 k^2} g - \frac{16\pi G}{3} \varrho_p (f + 2dg) = 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Da wir die Koeffizienten in den Gleichungen (6.2) und (6.3) als Funktion der Rotverschiebung z kennen, gehen wir im folgenden analog zu Abschnitt 3.1 von den Differentialgleichungen (6.2) und (6.3) in Abhängigkeit von der Zeit t zu denjenigen in Abhängigkeit von der Rotverschiebung z über. Die zeitliche Ableitung der Rotverschiebung z lautet unter Verwendung der Gleichung (3.5) sowie der Friedman-Gleichung (4.23) und dem heutigen Weltalter t_H ohne Berücksichtigung der Strahlungsdichte nach (3.5a):

$$\frac{dz}{dt} = -z\alpha = -z \left[\frac{4}{9} \frac{1}{t_H^2} z^3 (1 + d_H z) + \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{\varepsilon}{R_H^2} c^2 z^2 \right]^{1/2}, \tag{6.4}$$

so daß für die Amplituden f resp. g folgt ($' = \frac{\partial}{\partial z}$):

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= -z\alpha f' \\
\frac{d^2 f}{dt^2} &= z^2 \alpha^2 f'' + z \alpha^2 f' + f' \left[\frac{2}{9} \frac{z^4}{t_H^2} (3 + 4d_H z) - \frac{\varepsilon c^2}{R_H^2} z^3 \right],
\end{aligned} \tag{6.5}$$

wobei wir gegenüber den Ausdrücken (3.6) und (3.7) die Expansionsgeschwindigkeit α aufgrund des Λ - und ε -Terms nachfolgend stehen lassen. Setzen wir die Relationen (6.5) und die z -Abhängigkeit der Koeffizienten gemäß (2.19a) – (2.19g) in die Gleichungen (6.2) und (6.3) ein und verwenden wir wie auf S. 84f. den Zeitparameter s (2.18), so ergeben sich folgende Differentialgleichungen

- für die Amplitude $f(s)$ ($' = \frac{\partial}{\partial s}$):

$$\begin{aligned}
& s^7 \alpha^2 f'' + f' \left[3 s^6 \alpha^2 - s^2 \frac{2}{9} \frac{1}{t_H^2} (3s + 4 d_H z_R) + s^4 \frac{\varepsilon}{R_H^2} c^2 z_R^2 + s^2 \alpha \frac{4}{3} z_R^4 d_H \frac{c}{l_{\gamma H}} \right] + \\
& + g' \left[s^5 \alpha^2 d_H z_R e^{-4 k_H^2 l_{\gamma H}^2 s^4 / 9 z_R^4} - s^2 \alpha z_R^4 d_H \frac{c}{l_{\gamma H}} \right] + \\
& + f \left[s^2 z_R^3 c_{\text{SH}}^2 k_H^2 (1 - e^{-k_H^2 l_{\text{eH}}^2 s^6 / 3 z_R^6}) - s^2 \frac{2}{3} \frac{1}{t_H^2} z_R^3 \right] + \\
& + g \left[\left(\frac{1}{3} s^2 c^2 k_H^2 d_H z_R^3 + \alpha d_H \frac{c}{l_{\gamma H}} z_R^4 (s + \frac{4}{3} d_H z_R) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{9} \frac{1}{t_H^2} d_H z_R^4 [(s + 2 d_H z_R) + \frac{32}{9} (s + d_H z_R) k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{s^4}{z_R^4}] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{3} \Lambda c^2 d_H z_R s^4 (1 - \frac{16}{9} k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{s^4}{z_R^4}) + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon}{R_H^2} c^2 d_H k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{s^6}{z_R} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{8}{9} \alpha^2 \frac{s^9}{z_R^3} d_H k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{\chi'}{\chi} \right) e^{-4 k_H^2 l_{\gamma H}^2 s^4 / 9 z_R^4} - \frac{4}{3} \frac{1}{t_H^2} d_H z_R^4 s \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.6}$$

- und für die Amplitude $g(s)$:

$$\begin{aligned}
& s^6 \alpha^2 g'' + g' \left[s^5 \alpha^2 (2 - e^{-4 k_H^2 l_{\gamma H}^2 s^4 / 9 z_R^4}) - s \frac{2}{9} \frac{1}{t_H^2} z_R^3 (3s + 4 d_H z_R) + \right. \\
& \quad \left. + s^3 \frac{\varepsilon}{R_H^2} c^2 z_R^2 + s^2 \alpha z_R^3 \frac{c}{l_{\gamma H}} \right] - \\
& - f' \frac{4}{3} s^2 \alpha z_R^3 \frac{c}{l_{\gamma H}} + \\
& + g \left[\frac{1}{3} s^2 c^2 k_H^2 z_R^2 (1 - e^{-4 k_H^2 l_{\gamma H}^2 s^4 / 9 z_R^4}) - \left(\alpha \frac{c}{l_{\gamma H}} z_R^3 (s + \frac{4}{3} d_H z_R) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{9} \frac{1}{t_H^2} z_R^3 [(s + 2 d_H z_R) + \frac{32}{9} (s + d_H z_R) k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{s^4}{z_R^4}] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{3} \Lambda c^2 s^4 (1 - \frac{16}{9} k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{s^4}{z_R^4}) + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon}{R_H^2} c^2 k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{s^6}{z_R^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{8}{9} \alpha^2 \frac{s^7}{z_R^3} k_H^2 l_{\gamma H}^2 \frac{\chi'}{\chi} \right) e^{-4 k_H^2 l_{\gamma H}^2 s^4 / 9 z_R^4} - \frac{16}{9} \frac{1}{t_H^2} d_H z_R^4 \right] + \\
& + f \left[s^2 z_R^2 \frac{1}{d_H} c_{\text{SH}}^2 k_H^2 e^{-k_H^2 l_{\text{eH}}^2 s^6 / 3 z_R^6} - s \frac{8}{9} \frac{1}{t_H^2} z_R^3 \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

mit χ' der Ableitung des Ionisationsgrades χ (2.90) nach dem Parameter s :

$$\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial s} = \left[\chi - \sqrt{1 + \frac{4}{S}}^{-1} \right] \left(\frac{3}{2s} - \frac{\chi_e}{k_B T_H z_R} \right) \quad (6.8)$$

und α der Expansionsgeschwindigkeit entsprechend der Friedman-Gleichung (4.23).

Zur numerischen Integration des gekoppelten Differentialgleichungssystems (6.6) und (6.7) mit zwei Gleichungen 2. Ordnung für die Amplituden f und g der Dichtefluktuationen in FORTRAN gehen wir analog zu Abschnitt 3.2.2 zu einem Differentialgleichungssystem mit vier Gleichungen 1. Ordnung über und verwenden in Hinblick auf die geringste Rechenzeit die NAG-Routine **D02BAF** (siehe S. 92 f.).

Die Anfangswerte der Funktionen f , f' , g und g' berechnen wir wiederum, wie in Abschnitt 3.2.1 angegeben, mit Hilfe der Dispersionsrelations-Methode. Da auch nach der allgemein-relativistischen Rechnung bei der Mode b_2 der Instabilitätsbereich für Galaxien (Abschnitt 5.2) auftritt, wählen wir im folgenden diese Mode zur Berechnung der Anfangswerte gemäß (3.43) im phasigen Fall und (3.44) im gegenphasigen Fall.

Als numerische Werte für die heutigen Größen in den Differentialgleichungen (6.6) und (6.7) setzen wir die Werte (1.37) und (2.19a) – (2.19g) ein, wobei wir bis zur Rekombination die isotherme Schallgeschwindigkeit c_s (1.18b) verwenden (siehe S. 142). Weiterhin berücksichtigen wir den Ionisationsgrad χ gemäß der Saha-Gleichung (2.90) und nach der Rekombination sowohl die adiabatische Abkühlung der Materie entsprechend (2.65) als auch die adiabatische Schallgeschwindigkeit c_s (1.18a).

Um einen Vergleich mit der Newtonschen Theorie herstellen zu können, untersuchen wir zunächst die Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen im Fall verschwindender kosmologischer Konstante Λ und verschwindender Krümmung ($\varepsilon = 0$) bis zu einem Zeitpunkt, zu dem die Wasserstoffrekombination abgeschlossen ist. Gleichzeitig betrachten wir das Verhalten der Strahlungsdichtefluktuationen in der Nähe des Anfangswerts, was bei der Newtonschen Behandlung offen blieb (siehe S. 95 ff.).

Zur Bestimmung der Entwicklung der Dichteinstabilitäten bis zur Gegenwart, die maßgeblich von den gewählten kosmologischen Parametern Λ und ε abhängen dürfte, integrieren wir das Differentialgleichungssystem (6.6) und (6.7) in Abschnitt 6.3 für vier verschiedene kosmologische Modelle bis minimal über den Wert $s = 1380$ hinaus, der einer Rotverschiebung von $z = 1$ und damit der Gegenwart entspricht. Genaugenommen gilt nach Gleichung (1.35)

$$z = z_{\text{kos}} + 1, \quad (6.9)$$

wobei z_{kos} die tatsächlich gemessene kosmologische Rotverschiebung darstellt, deren Wert heute $z_{\text{kos}} = 0$ beträgt.

6.2 Numerische Integration bis kurz nach der Rekombination

Um die Newtonschen Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.2 bis zu Zeiten kurz nach der Wasserstoffrekombination mit den Resultaten der allgemein-relativistischen Rechnung vergleichen zu können, vernachlässigen wir gemäß der Abschätzung (5.2) in den Differentialgleichungen (6.6) und (6.7) für die Amplituden der Dichtefluktuationen die mit der kosmologischen Konstante Λ und mit dem Krümmungsparameter ε multiplizierten Terme.

6.2.1 Vergleich mit der Newtonschen Theorie

Wie in Abschnitt 3.2.2 verwenden wir als Startwert für den Zeitparameter $s_i = 10^{-0.55} = 0.282$, entsprechend einer Rotverschiebung von $z_i = 4896$ und einem Weltalter von $t_i = 4.1 \cdot 10^4$ a. Die Integration beenden wir bei $s_f = 3.5$ ($z_f = 394.3$), d.h. einem Weltalter von $t_f = 4.92 \cdot 10^6$ a, so daß die Rekombination der Elektronen und Protonen vollständig abgeschlossen ist.

Zum Vergleich mit den Newtonschen Resultaten wählen wir den Massenwert $M = 3.16 \cdot 10^7 M_\odot$, für den die Lösung b_2 nach der Newtonschen Theorie am Startwert akustisch und minimal ist (maximale Wachstumsrate), und die stabile Masse $M = 10^4 M_\odot$, für die die Mode b_2 optisch ist.

Gleichzeitig normieren wir die Amplituden f und g der Dichtefluktuationen auf ihre Anfangswerte f_i bzw. g_i , da die Anfangswerte nur bis auf die Konstante \tilde{B} festgelegt sind (siehe S. 89). Folglich kann aus den Abbildungen das Verhältnis f/g nicht direkt abgelesen werden, sondern erst nach Multiplikation mit dem anfänglichen Amplitudenverhältnis f_i/g_i .

Der Massenwert $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$

Nachdem die Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen für die Mode b_2 am Startwert $s_i = 0.282$ in Phase sind, berechnen sich die Anfangswerte nach (3.43):

$$f = 1.98 \cdot 10^7 \tilde{B}, \quad f' = 6.64 \cdot 10^2 \tilde{B}, \quad g = \tilde{B}, \quad g' = 3.35 \cdot 10^{-5} \tilde{B} \quad (6.10)$$

mit der offenen Amplitude \tilde{B} .

In Abb. 6.1a ist die zeitliche Entwicklung der normierten Amplitude f/f_i sowohl nach der allgemein-relativistischen als auch der Newtonschen Theorie veranschaulicht. Bis $s \approx 1.4$ fallen die normierten Amplituden f/f_i nach beiden Theorien zusammen, während für $s \gtrsim 1.4$ der relative Amplitudenanstieg im Newtonschen Fall stärker ist, was aufgrund des geringeren Einflusses der Strahlung nach der Newtonschen Theorie verständlich ist (siehe S. 138).

Entsprechend Abb. 6.1b führen bei den normierten Amplituden g/g_i beide Theorien bis $s \approx 2$ zum gleichen Ergebnis. Für $s \gtrsim 2$ treten minimale, jedoch unbedeutende Abweichungen auf.

Der Massenwert $3.16 \cdot 10^7 M_{\odot}$

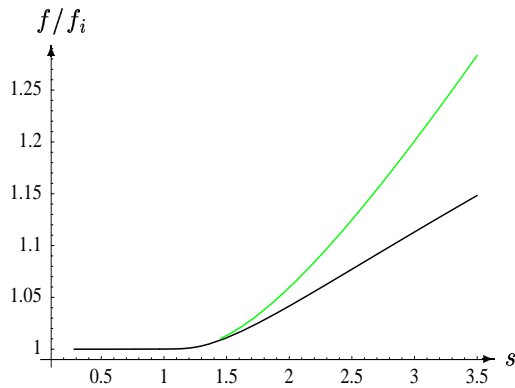


Abb. 6.1a: Amplitude f der Materiedichtefluktuationen, normiert auf den Anfangswert f_i (6.10), für die Masse $3.16 \cdot 10^7 M_{\odot}$ nach der allgemein-relativistischen (fett) und der Newtonschen (gepunktet) Theorie.

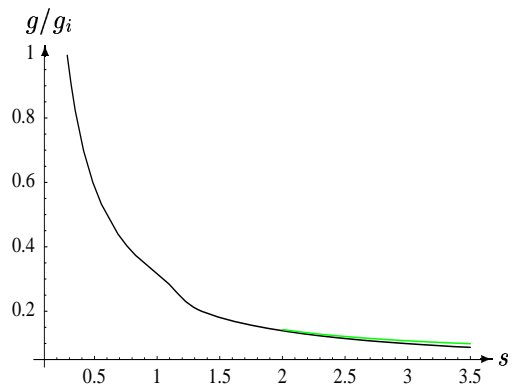


Abb. 6.1b: Amplitude g der Strahlungsdichtefluktuationen, normiert auf den Anfangswert g_i (6.10), für die Masse $3.16 \cdot 10^7 M_{\odot}$ nach der allgemein-relativistischen (fett) und der Newtonschen (gepunktet) Theorie.

Der Massenwert $10^4 M_{\odot}$

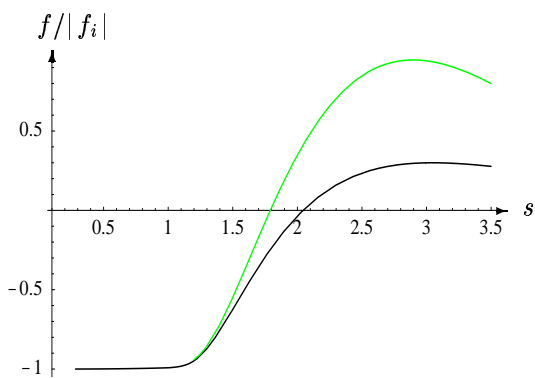


Abb. 6.2a: Amplitude f der Materiedichtefluktuationen, normiert auf den Betrag des Anfangswerts f_i (6.11), für die Masse $10^4 M_{\odot}$ nach der allgemein-relativistischen (fett) und der Newtonschen (gepunktet) Theorie.

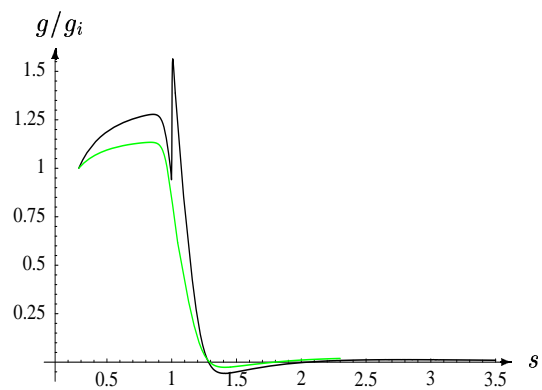


Abb. 6.2b: Amplitude g der Strahlungsdichtefluktuationen, normiert auf den Anfangswert g_i (6.11), für die Masse $10^4 M_{\odot}$ nach der allgemein-relativistischen (fett) und der Newtonschen (gepunktet) Theorie.

Der Massenwert $10^4 M_\odot$

Für den Startwert $s_i = 0.282$ schwingen die Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen unter Verwendung der Mode b_2 gegenphasig, so daß die Anfangswerte nach (3.44) lauten:

$$f = -2.23 \cdot 10^9 \tilde{B}, \quad f' = 3.76 \cdot 10^6 \tilde{B}, \quad g = \tilde{B}, \quad g' = -1.61 \cdot 10^{-3} \tilde{B}. \quad (6.11)$$

Bei der auf den Betrag des Anfangswerts normierten Amplitude $f/|f_i|$ (Abb. 6.2a) ergibt sich erst für $s \gtrsim 1.4$ nach der allgemein-relativistischen Theorie eine Änderung: die Materiedichtefluktuationen bauen sich nicht bereits bei $s \approx 1.79$ sondern erst bei $s \approx 2$ mit einem geringeren Amplitudenanstieg auf. Entsprechend beider Theorien fällt die Amplitude $f/|f_i|$ für $s \gtrsim 2.8$ wieder ab, so daß sich in Übereinstimmung mit der Beobachtung für $10^4 M_\odot$ keine Galaxien ausbilden können.

In Abb. 6.2b ist gezeigt, daß die normierte Amplitude g/g_i bis zur Rekombination nach der allgemein-relativistischen Rechnung stärker ansteigt als im Newtonschen Fall. Gleichzeitig ist der Prozeß der Abkopplung von Strahlung und Materie um $s = 1$ eindeutig zu erkennen. Für $s \gtrsim 2$ zerfallen die Strahlungsdichtefluktuationen nach beiden Theorien.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß sich die Ergebnisse nach der Newtonschen und allgemein-relativistischen Theorie nicht signifikant unterscheiden. Die aufgezeigten Abweichungen rühren daher, daß in den Newtonschen Kontinuitätsgleichungen (1.3) und (1.4) die Wechselwirkung zwischen Photonengas und Plasma nicht berücksichtigt ist.

Damit sich Galaxien der heutigen Größe ausbilden können, ist jedoch ein starker Anstieg der Amplitude f während der weiteren Evolution des Universums notwendig. Die zeitliche Entwicklung der Materiedichtefluktuationen bis heute diskutieren wir in Abschnitt 6.3.

6.2.2 Fluktuationen in der Nähe der Anfangswerte

Wie bereits im Newtonschen Teil auf S. 95 und S. 98 angemerkt, zeigen die Strahlungsdichtefluktuationen einen anderen Verlauf, als nach dem Anfangswert von g' zu erwarten ist. Deshalb stellen wir in Abb. 6.3 und Abb. 6.4 für die Massen $10^4 M_\odot$ und $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$ den Verlauf der Funktion g/g_i in der Nähe des Anfangswerts dar, indem wir die s -Berechnung in diesem Bereich erheblich genauer durchführen.

Obwohl der Anfangswert von g' für die Masse $10^4 M_\odot$ negativ ist, steigt in Abb. 6.2b die normierte Amplitude g/g_i unmittelbar an. In Abb. 6.3 ist gezeigt, daß die Funktion g/g_i in der Nähe des Startwerts $s_i = 10^{-0.55}$ entsprechend des Vorzeichens von $g'(s_i)$ zunächst wirklich abfällt, jedoch für s -Werte, die minimal größer sind als der Startwert, ansteigt.

Das Entsprechende gilt für die Masse $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$: der nach dem Anfangswert $g'(s_i)$ zu erwartende Verlauf der Funktion g/g_i tritt, wie in Abb. 6.4 veranschaulicht, lediglich für s -Werte, die minimal größer sind als der Startwert s_i , auf.

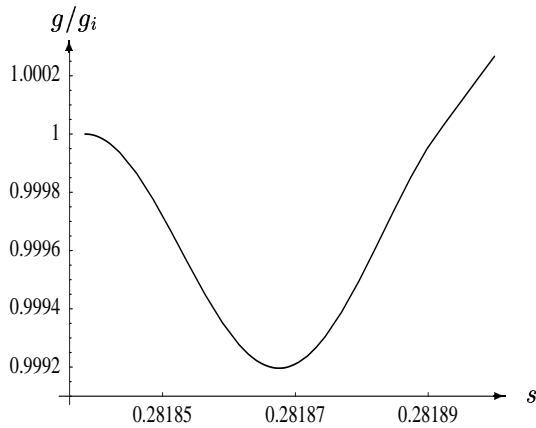


Abb. 6.3: Amplitude g der Strahlungsdichtefluktuationen, normiert auf den Anfangswert g_i , für die Masse $10^4 M_\odot$ in der Nähe des Anfangswerts.

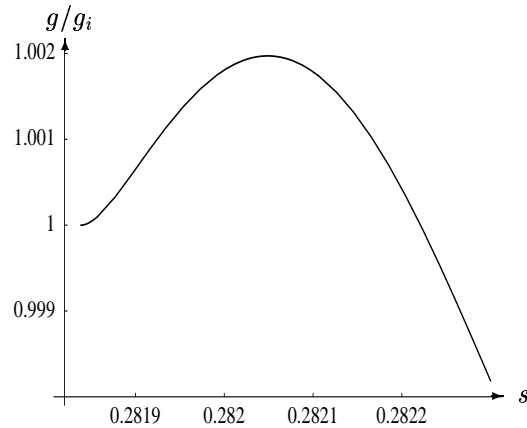


Abb. 6.4: Amplitude g der Strahlungsdichtefluktuationen, normiert auf den Anfangswert g_i , für die Masse $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$ in der Nähe des Anfangswerts.

Folglich setzt die Entkopplung von Materie und Strahlung bereits für Zeiten ein, die minimal größer sind als der Anfangswert, auch wenn die Strahlung noch verhindern kann, daß die Materiedichtefluktuationen instabil werden (Übergewicht der Photonen).

6.3 Numerische Integration bis zur Gegenwart

In den Abschnitten 3.2.2 und 6.2 haben wir die zeitliche Entwicklung der Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen bis zu Zeiten kurz nach der Wasserstoffrekombination untersucht, wobei wir die Krümmung des Universums und die kosmologische Konstante vernachlässigt haben, was für diese Zeiten entsprechend der Abschätzung (5.2) sinnvoll ist. Für Massen, die nach den Resultaten der Dispersionsrelations-Methode im Instabilitätsbereich der Mode b_2 liegen, steigt die Amplitude der Materiedichtefluktuationen nach der Rekombination verhältnismäßig stark an.

Nun stellt sich die Frage, wie insbesondere die Amplitude der Materiedichtefluktuationen bis zur heutigen Zeit verläuft und ob somit im Rahmen unseres Zwei-Flüssigkeits-Modells Galaxienbildung unterstützt wird. Die zeitliche Entwicklung der Amplituden der Dichtefluktuationen dürfte maßgeblich von den kosmologischen Parametern und damit vom kosmologischen Modell abhängen, das bei der Integration des Differentialgleichungssystems (6.6) und (6.7) zugrunde gelegt wird. In den folgenden Abschnitten wählen wir

- (i) das Einstein-de-Sitter-Universum mit $\varepsilon = 0$, $\Lambda = 0$,
- (ii) das Friedman-Modell mit $\varepsilon = 0$, $\Lambda_F = 2 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$,
- (iii) das Priester-Modell mit $\varepsilon = +1$, $\Lambda_P = 3.279 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$ und

(iv) das Lemaître-Universum mit $\varepsilon = +1$, $\Lambda_L = 2.206 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$.

Außerdem interessiert uns das Alter der Welt in dem jeweiligen kosmologischen Modell, so daß wir im nächsten Unterabschnitt zunächst das heutige Weltalter allgemein herleiten.

In den nachfolgenden Unterabschnitten setzen wir für die numerische Integration des Differentialgleichungssystems (6.6) und (6.7) als Startwert für den Zeitparameter $s_i = 0.5$ ($z_i = 2760$) entsprechend einem Weltalter von $t_i = 1.25 \cdot 10^5 \text{ a}$ an und berechnen die Anfangswerte der Funktionen f , f' , g und g' mit der Mode b_2 , die im Galaxienmassenbereich instabil ist. Die Integration erfolgt bis $s_f = 1400$ ($z_f = 0.99$), d.h. minimal über die Gegenwart hinaus.

Zur Untersuchung der Amplitude der Materiedichtefluktuationen in Abhängigkeit vom kosmologischen Modell verwenden wir in den Unterabschnitten 6.3.2 – 6.3.5 folgende instabile Massen, für die die Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen in Phase schwingen, so daß die Anfangswerte f_i , f'_i , g_i und g'_i aus (3.43) folgen:

- die Masse $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$, die für $s_i = 0.5$ nahe der unteren Stabilitätsgrenze $M_u = 3.37 \cdot 10^6 M_\odot$ im Instabilitätstal liegt, mit

$$f_i = 1.63 \cdot 10^8 \tilde{B}, \quad f'_i = 2.32 \cdot 10^3 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = 1.42 \cdot 10^{-5} \tilde{B}, \quad (6.12)$$

- die Masse $5.01 \cdot 10^6 M_\odot$, die für $s_i = 0.5$ und $s = 1$ auf b_2 -Werte im Instabilitätstal führt, mit

$$f_i = 1.37 \cdot 10^8 \tilde{B}, \quad f'_i = 4.39 \cdot 10^3 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = 3.19 \cdot 10^{-5} \tilde{B}, \quad (6.13)$$

- die Masse $10^7 M_\odot$, die für $s_i = 0.5$ und $s = 1$ auf b_2 -Werte im Instabilitätstal führt, mit

$$f_i = 8.39 \cdot 10^7 \tilde{B}, \quad f'_i = 6.12 \cdot 10^3 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = 7.29 \cdot 10^{-5} \tilde{B}, \quad (6.14)$$

- die Masse $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$, die für $s_i = 0.5$ und $s = 1$ auf b_2 -Werte im Instabilitätstal führt, mit

$$f_i = 3.78 \cdot 10^7 \tilde{B}, \quad f'_i = 4.21 \cdot 10^3 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = 1.11 \cdot 10^{-4} \tilde{B}, \quad (6.15)$$

- die Masse $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$, die für $s_i = 0.5$ und $s = 1$ auf b_2 -Werte im Instabilitätstal führt, mit

$$f_i = 1.17 \cdot 10^7 \tilde{B}, \quad f'_i = 1.50 \cdot 10^3 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = 1.29 \cdot 10^{-4} \tilde{B}, \quad (6.16)$$

- die Masse $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$, die für $s_i = 0.5$ nahe der oberen Stabilitätsgrenze $9.86 \cdot 10^9 M_\odot$ im Instabilitätstal liegt, mit

$$f_i = 9.27 \cdot 10^5 \tilde{B}, \quad f'_i = 3.58 \cdot 10^1 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = 3.86 \cdot 10^{-5} \tilde{B} \quad (6.17)$$

- und die Masse $5.01 \cdot 10^{12} M_\odot$, die für $s = 1$ nahe der oberen Stabilitätsgrenze $5.80 \cdot 10^{12} M_\odot$ im Instabilitätstal liegt, mit

$$f_i = 1.26 \cdot 10^4 \tilde{B}, \quad f'_i = -2.64 \cdot 10^1 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = -2.10 \cdot 10^{-3} \tilde{B}. \quad (6.18)$$

In der Zusammenfassung 6.3.6 vergleichen wir für die instabilen Massen $3.86 \cdot 10^6 M_\odot$ und $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$ sowohl die Amplitude der Materie- als auch der Strahlungsdichtefluktuationen, wie sie sich abhängig vom kosmologischen Modell ergeben.

Außerdem diskutieren wir die Amplitude der Materiedichtefluktuationen für zwei Massen außerhalb des Instabilitätstals: die Masse $10^4 M_\odot$, für die die Materie- und Strahlungsdichtefluktuationen am Startwert gegenphasig schwingen und die Anfangswerte nach (3.44) lauten:

$$f_i = -1.85 \cdot 10^9 \tilde{B}, \quad f'_i = 1.16 \cdot 10^7 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = -6.29 \cdot 10^{-3} \tilde{B}, \quad (6.19)$$

und die Masse $10^{15} M_\odot$, für die die Mode b_2 akustisch ist, mit den Anfangswerten nach (3.43)

$$f_i = 5.52 \cdot 10^2 \tilde{B}, \quad f'_i = -6.64 \tilde{B}, \quad g_i = \tilde{B}, \quad g'_i = -1.20 \cdot 10^{-2} \tilde{B}. \quad (6.20)$$

Abschließend berücksichtigen wir in dem Unterabschnitt 6.3.7 zusätzlich zur baryonischen Materie kalte nicht-baryonische Dunkelmaterie, wobei wir als kosmologisches Modell das Lemaître-Universum wählen.

Wiederum tragen wir die auf ihre Anfangswerte normierten Amplituden f und g auf, um deren relative Entwicklung zu verdeutlichen (siehe S. 94).

6.3.1 Das heutige Weltalter

Das heutige Weltalter t_H können wir durch Integration der Friedman-Gleichung (4.23) in der Form

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\varrho_p + \varrho_r) + \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{\varepsilon c^2}{R^2} \quad (6.21)$$

bestimmen. Multiplizieren wir die Gleichung (6.21) mit R^2 und drücken wir die Materie- und Strahlungsdichte mit Hilfe der integrierten kosmologischen Hintergrundgleichungen (4.30) und (4.31) aus:

$$\varrho_p = \varrho_{pH} \frac{R_H^3}{R^3} \quad \text{und} \quad \varrho_r = \varrho_{rH} \frac{R_H^4}{R^4}, \quad (6.22)$$

so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{R_H}\right)\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\overset{\circ}{\varrho}_{\text{pH}} \frac{R_H}{R} + \overset{\circ}{\varrho}_{\text{rH}} \frac{R_H^2}{R^2}\right) + \frac{1}{3} \Lambda c^2 \frac{R^2}{R_H^2} - \frac{\varepsilon c^2}{R_H^2}. \quad (6.23)$$

Mit der Substitution $x = R/R_H$ erhalten wir folgendes Integral für das heutige Weltalter:

$$t_H = \int_0^1 dx x \left[\frac{8\pi G}{3} (\overset{\circ}{\varrho}_{\text{pH}} x + \overset{\circ}{\varrho}_{\text{rH}}) + \frac{1}{3} \Lambda c^2 x^4 - \frac{\varepsilon c^2}{R_H^2} x^2 \right]^{-1/2}, \quad (6.24)$$

wobei die heutige Materiedichte $\overset{\circ}{\varrho}_{\text{pH}}$ den Wert (1.37) besitzt,

die heutige Strahlungsdichte durch $\overset{\circ}{\varrho}_{\text{rH}} = \sigma \overset{\circ}{T}_{\text{rH}}^4 / c^2$ (siehe S. 17) mit $\overset{\circ}{T}_{\text{rH}}$ nach (1.37) gegeben ist,

und die kosmologische Konstante Λ , der Krümmungsparameter ε und der heutige Skalenparameter R_H vom gewählten Weltmodell abhängen.

Das Integral (6.24) für das heutige Weltalter t_H kann lediglich im Fall $\Lambda = 0$ analytisch gelöst werden; für die flache Welt ($\varepsilon = 0$) ist die Integration auf S. 23f. durchgeführt. In den Fällen mit nicht-verschwindender kosmologischer Konstante Λ ist eine numerische Integration erforderlich.

6.3.2 Einstein-de-Sitter-Universum

Das Weltmodell mit $\Lambda = 0$ und $\varepsilon = 0$, das wir sowohl in Abschnitt 3.2.2 als auch in Abschnitt 6.2 für Zeiten bis kurz nach der Rekombination herangezogen haben, ist als Einstein-de-Sitter-Universum bekannt, bei dem die Welt flach ist und ewig expandiert. Durch Integration der Friedman-Gleichung (4.23) ergibt sich, daß zwischen dem Skalenparameter R und dem Weltalter t die Relation $R \propto t^{2/3}$ besteht.

Nach Gleichung (6.24) oder (1.36) beträgt das heutige Weltalter $63 \cdot 10^9$ a, was gut zum Alter der ältesten Sterne paßt. Jedoch folgt aus der Friedman-Gleichung (4.23) eine viel zu geringe Hubble-Konstante²² von 10.3 km/sec Mpc. Bei Festlegung der Hubble-Konstante H auf 75 km/sec Mpc sollte die heutige Materiedichte $1.06 \cdot 10^{-29}$ g/cm³ betragen, deren Wert im Vergleich zu dem aus der primordialen Nukleosynthese bestimmten Wert von

²²Bis heute konnte der Wert der Hubble-Konstante H noch nicht eindeutig bestimmt werden. E. Hubble selbst ging 1929 von $H = 530$ km/sec Mpc aus, A.R. Sandage berechnete 1958 $H = 75$ km/sec Mpc. In den folgenden Jahren erhielten einerseits A.R. Sandage und G.A. Tammann u.a. $H = 50$ km/sec Mpc und andererseits G. de Vaucouleurs u.a. $H = 100$ km/sec Mpc, jedoch gab es auch den Wert $H = 75$ km/sec Mpc. Trotz Einsatz des Hubble-Space-Telesopes mit seiner großen Reichweite konnte der Wert dieses in der Kosmologie grundlegenden Parameters noch nicht eindeutig festgelegt werden. J. Overduin & W. Priester [58] wählen den Bereich $70 \text{ km/sec Mpc} \leq H \leq 90 \text{ km/sec Mpc}$. Von den Astronomen wird heute eine Hubble-Konstante von 65 ± 10 km/sec Mpc favorisiert.

$2.0 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3$ wesentlich zu hoch ist. Für $H = 75 \text{ km/sec Mpc}$ sinkt das heutige Weltalter auf $8.6 \cdot 10^9 \text{ a}$, was im Vergleich zum Alter der ältesten Kugelsternhaufen von $(12 \pm 2) \cdot 10^9 \text{ a}$ [85] wesentlich zu gering ist. Da die Werte der kosmologischen Parameter bzw. des Weltalters schlecht mit der Beobachtung übereinstimmen, ist dieses Weltmodell nicht sehr realistisch.

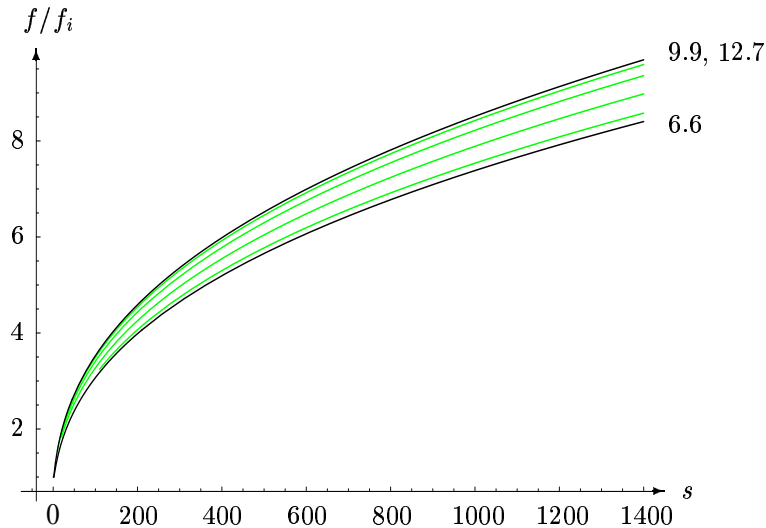


Abb. 6.5: Zeitliche Entwicklung der Amplitude f der Materiedichtefluktuationen, jeweils auf den Anfangswert f_i (6.12) – (6.18) normiert, im Einstein-de-Sitter-Universum für die Massen $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$ ($\lg N = 6.6$), $5.01 \cdot 10^6 M_\odot$, $10^7 M_\odot$, $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$, $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$, $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$ ($\lg N = 9.9$) und $5.01 \cdot 10^{12} M_\odot$ ($\lg N = 12.7$).

In Abb. 6.5 ist die auf ihren Anfangswert normierte Amplitude f/f_i in Abhängigkeit vom Zeitparameter s für die auf S. 163f. aufgeführten instabilen Massen aufgetragen. Auffällig ist in Abb. 6.5, daß die Amplituden für steigende Massenwerte immer näher beieinander liegen bzw. im Rahmen der Darstellungsgenauigkeit zusammenfallen. Der Anstieg der Funktion f/f_i ist, wie bereits vielfältig in der Literatur diskutiert, wesentlich zu gering, um auf Galaxien heutiger Größe zu führen (maximaler Verstärkungsfaktor 9).

6.3.3 Friedman-Modell

Da der Anstieg der normierten Amplitude f/f_i im Einstein-de-Sitter-Universum zur Erklärung der Galaxienentwicklung nicht ausreichend ist, berücksichtigen wir im folgenden bei verschwindender Krümmung die kosmologische Konstante Λ . Dieses unendlich expandierende Friedman-Modell besitzt wie das Einstein-de-Sitter-Universum eine offene Topologie. Zu Beginn ist der zeitliche Verlauf der Expansionsrate, wie bei allen Urknall-Modellen, identisch demjenigen im Einstein-de-Sitter-Kosmos, d.h. $R \propto t^{2/3}$. Allerdings

tritt bei der weiteren Entwicklung eine Periode auf, in der sich die Expansionsrate verlangsamt, bevor sie wiederum anwächst und asymptotisch proportional zu $\exp[(\Lambda/3)^{1/3} t]$ wird. Somit besitzt die $R(t)$ -Kurve einen Wendepunkt.

Den Wert der kosmologischen Konstante Λ_F bestimmen wir aus der Friedman-Gleichung (4.23), indem wir die heutigen Werte für die einzelnen Größen einsetzen, wobei α_H gleich der Hubble-Konstante H ist. Für $\varepsilon = 0$ folgt aus Gleichung (4.23):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\varrho_{\text{pH}}^0 + \varrho_{\text{rH}}^0) + \frac{1}{3} \Lambda_F c^2 \quad (6.25)$$

und damit für die kosmologische Konstante:

$$\Lambda_F c^2 = 3H^2 - 8\pi G (\varrho_{\text{pH}}^0 + \varrho_{\text{rH}}^0). \quad (6.26)$$

Durch Einsetzen der heutigen Materie- sowie Strahlungsdichte des Hintergrunds nach (1.37) in Gleichung (6.26) und Wahl der Hubble-Konstante $H = 75 \text{ km/sec Mpc}$ erhalten wir im Fall $\varepsilon = 0$ für die kosmologische Konstante den Wert $\Lambda_F = 2 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$, mit dem nach (6.24) das heutige Weltalter $t_H = 23 \cdot 10^9 \text{ a}$ beträgt. Der Wendepunkt der $R(t)$ -Kurve liegt gemäß der Friedman-Gleichung (4.24) bei $z = 4.75$ ($s \approx 290$) bzw. $z_{\text{kos}} = 3.75$.

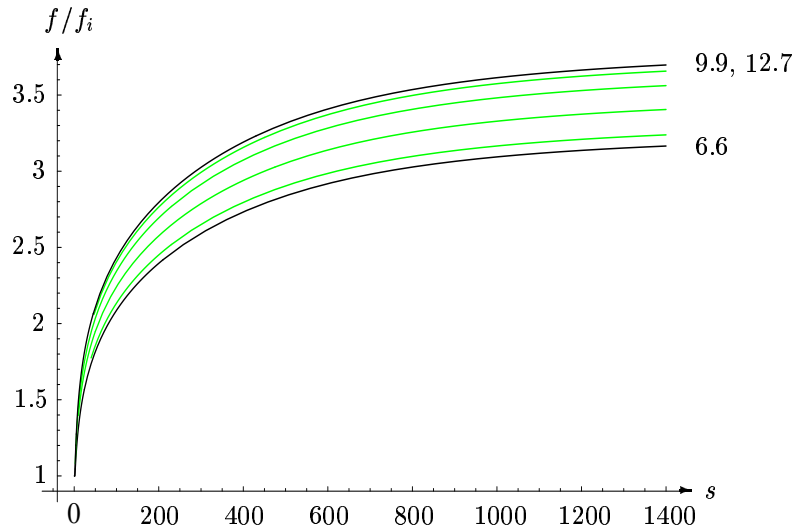


Abb. 6.6: Zeitliche Entwicklung der Amplitude f der Materiedichtefluktuationen, jeweils auf den Anfangswert f_i (6.12) – (6.18) normiert, im Friedman-Universum für die Massen $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$ ($\lg N = 6.6$), $5.01 \cdot 10^6 M_\odot$, $10^7 M_\odot$, $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$, $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$, $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$ ($\lg N = 9.9$) und $5.01 \cdot 10^{12} M_\odot$ ($\lg N = 12.7$).

In Abb. 6.6 steigt die normierte Amplitude f/f_i in Abhängigkeit vom Zeitparameter s für alle auf S. 163f. angegebenen Massen um ca. 40 % geringer an als im Einstein-de-Sitter-Universum (Abb. 6.5), so daß die Zunahme der kosmologischen Konstante in einer flachen Welt die Situation in Hinblick auf die Galaxienentwicklung noch verschlechtert.

6.3.4 Priester-Modell

Aufgrund der Probleme der Standardmodelle, wie u.a. dem zu geringen Weltalter im Vergleich zum Alter der ältesten Kugelsternhaufen von $(12 \pm 2) \cdot 10^9$ a [85] und dem relativ kurzen Zeitraum zur Entwicklung von Galaxien, haben W. Priester et al. die Friedman-Gleichungen mit positiver kosmologischer Konstante im Hinblick auf weitere Vergleiche mit der Beobachtung genauer analysiert. So haben sie versucht, mit Hilfe eines Lemaître-Modells den Lyman- α -Forest, d.h. die Lyman- α -Absorptionslinien in Quasarspektren, zu erklären. Diese spiegeln die Anordnung von Wasserstoffwolken entlang der Sichtlinie in Richtung eines Quasars wider und bieten somit Information über die Struktur des Raumes zwischen einem Quasar und dem Beobachter. Der Ansatz war erfolgreich: Die Topologie des Priester-Modells, das auch als Λ -Modell bekannt ist, ergibt sich als geschlossen ($\varepsilon = 1$), während die Welt ewig expandiert. Außerdem dauert die Periode, in der sich die Expansionsrate verlangsamt, erheblich länger an als in dem Friedman-Modell in Abschnitt 6.3.3, bevor diese wieder stark anwächst. Die heutige baryonische Hintergrunddichte beläuft sich auf $\rho_{\text{pH}}^0 = 2 \cdot 10^{-31}$ g/cm³, während die kosmologische Konstante Λ_{P} und der heutige Skalenparameter R_{H} folgende Werte annehmen:

$$\Lambda_{\text{P}} = 3.279 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2} \quad \text{und} \quad R_{\text{H}} = 3.388 \cdot 10^{28} \text{ cm} = 3.58 \cdot 10^{10} \text{ ly}, \quad (6.27)$$

wobei der entsprechende Wert der Hubble-Konstante $H = 93.4$ km/sec Mpc beträgt und nach (6.24) die Welt $29.3 \cdot 10^9$ a alt ist. Der Wendepunkt der $R(t)$ -Kurve liegt bei $z = 5.60$ ($s = 246$) und der minimale Wert der Expansionsgeschwindigkeit $\alpha_{\text{min}} = 63.5$ km/sec Mpc wird für $z = 4.68$ ($s = 295$) erreicht und somit später als der Wendepunkt.

In Abb. 6.7 ist der Anstieg der normierten Amplitude f/f_i der Materiedichtefluktuationen in Abhängigkeit vom Zeitparameter s bis zur Gegenwart für die auf S. 163f. angeführten Massen veranschaulicht. Im Vergleich zum Einstein-de-Sitter-Universum (vgl. Abb. 6.5) wird die Funktion f/f_i wesentlich stärker verstärkt, insgesamt um einen Faktor 400 bis 500, was jedoch für die Entwicklung von Galaxien noch nicht ausreichend sein dürfte. Allerdings steigt die Amplitude f/f_i in der Nähe des Wendepunkts der $R(t)$ -Kurve bei $s = 246$ stark an.

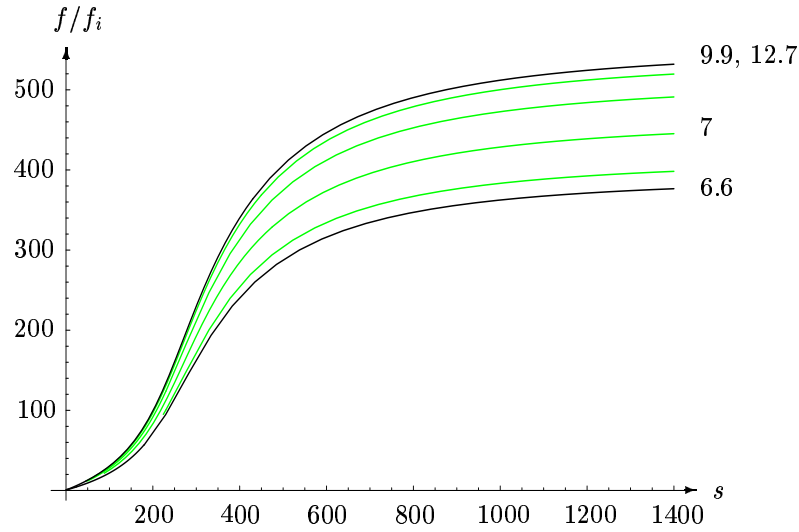


Abb. 6.7: Zeitliche Entwicklung der Amplitude f der Materiedichtefluktuationen, jeweils auf den Anfangswert f_i (6.12) – (6.18) normiert, im Priestley-Universum für die Massen $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$ ($\lg N = 6.6$), $5.01 \cdot 10^6 M_\odot$, $10^7 M_\odot$, $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$, $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$, $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$ ($\lg N = 9.9$) und $5.01 \cdot 10^{12} M_\odot$ ($\lg N = 12.7$).

6.3.5 Lemaître-Universum mit $\varepsilon = 1$ und $\Lambda_L = \Lambda_c (1 + \delta)$

Der kritische Wert Λ_c der kosmologischen Konstante ist derart festgelegt, daß in den Friedman-Gleichungen (4.23) und (4.24) $\dot{R} = \ddot{R} = 0$ gilt. Es handelt sich hierbei um das erste von A. Einstein 1917 vorgeschlagene relativistische Modell, das statische Einstein-Universum. A. Einstein hatte die kosmologische Konstante zunächst eingeführt, um überhaupt eine statische Lösung seiner Feldgleichungen zu erhalten, bei der die gravitative Anziehung der Massen im Universum und die kosmische Abstoßung durch die Konstante Λ_c im Gleichgewicht stehen. Der Skalenparameter beträgt konstant $R = R_c$. Da kleine Abweichungen genügen, um eine Kontraktion oder Expansion einzuleiten, ist diese Lösung nicht stabil. Das war der Anlaß, nach Hinweisen auf eine Expansion des Universums zu suchen, was 1929 zur Entdeckung der Galaxienflucht durch E. Hubble geführt hat.

Beim Lemaître-Modell weicht der Wert der kosmologischen Konstante nur geringfügig vom kritischen Wert ab: $\Lambda_L = \Lambda_c (1 + \delta)$ mit $|\delta| \ll 1$; die Topologie ist geschlossen ($\varepsilon = 1$). Das Lemaître-Modell beginnt von $R = 0$ bei $t = 0$, expandiert für eine endliche Zeit, verlangsamt zu einer quasi-statischen Periode mit $\ddot{R} = 0$, $\dot{R} \approx 0$, d.h. die Expansion kommt nahezu zum Stillstand, und beschleunigt anschließend auf die heutige Epoche. Bereits 1969 ist die Dauer dieser quasi-statischen Periode von K. Brecher & J. Silk [11] abgeschätzt worden, die sie durch die beobachteten z -Werte einerseits von Quasar-Absorptionslinien und andererseits von normalen Galaxien begrenzen. Viele Autoren nach G. Lemaître hofften, daß diese quasi-statische Epoche lange genug andauert, um Galaxienentwicklung zu

fördern.

Im folgenden bestimmen wir zunächst den Wert der kosmologischen Konstante Λ_c . Dazu betrachten wir die materiedominierte Ära in der kosmischen Entwicklung des Universums, was wir nachträglich rechtfertigen werden. Die Friedman-Gleichungen (4.23) und (4.24) für den Staubkosmos bei positiver Krümmung lauten

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \varrho_p + \frac{1}{3} \Lambda c^2, \quad (6.28)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho_p + \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{c^2}{R^2}. \quad (6.29)$$

Die kosmologische Konstante Λ_c und der kritische Skalenparameter R_c

Aus Gleichung (6.28) folgt für $\ddot{R} = 0$ unmittelbar die kritische kosmologische Konstante:

$$\Lambda_c c^2 = 4\pi G \varrho_{pc} \quad (6.30)$$

und für $\dot{R} = 0$ aus Gleichung (6.29) zusammen mit Gleichung (6.30):

$$R_c^2 = \frac{1}{\Lambda_c} \quad (6.31)$$

der kritische Skalenparameter R_c .

Der heutige Skalenparameter R_H

Die kritische Materiedichte ϱ_{pc} ergibt sich aus der integrierten kosmologischen Hintergrundgleichung (4.30):

$$\varrho_{pc} = \varrho_{pH} \frac{R_H^3}{R_c^3} = \varrho_{pH} (z_{kosc} + 1)^3 \quad (6.32)$$

mit z_{kosc} der kritischen kosmologischen Rotverschiebung, so daß wir den kritischen Skalenparameter in Abhängigkeit von der heutigen Materiedichte und dem heutigen Skalenparameter berechnen können:

$$\varrho_{pH} = \varrho_{pc} \frac{R_c^3}{R_H^3} \stackrel{(6.30)}{=} \frac{\Lambda_c c^2}{4\pi G} \frac{R_c^3}{R_H^3} \stackrel{(6.31)}{=} \frac{c^2}{4\pi G} \frac{R_c}{R_H^3} \quad (6.33)$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{4\pi G}{c^2} \varrho_{pH} R_H^3. \quad (6.34)$$

Um den Wert des heutigen Skalenparameters R_H zu erhalten, geben wir die Hubble-Konstante H mit Hilfe der Friedman-Gleichung (6.29) an:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho_{pH} + \frac{1}{3} \Lambda_c c^2 - \frac{c^2}{R_H^2}, \quad (6.35)$$

aus der sich unter Verwendung der Gleichungen (6.31) und (6.34) eine Gleichung 3. Grades für die Variable R_{H}^2/c^2 ergibt:

$$\left(3H^2 - 8\pi G \varrho_{\text{pH}}^0\right) \frac{R_{\text{H}}^6}{c^6} + 3 \frac{R_{\text{H}}^4}{c^4} - \frac{1}{\varrho_{\text{pH}}^0 (4\pi G)^2} = 0, \quad (6.36)$$

deren einzige reelle Lösung für eine Hubble-Konstante von $H = 75 \text{ km/sec Mpc}$ und eine heutige Materiedichte von $\varrho_{\text{pH}}^0 = 2 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3$ (siehe Gl. (1.37)) auf einen heutigen Skalenparameter von

$$R_{\text{H}} = 3.3064215 \cdot 10^{28} \text{ cm} = 3.4951602 \cdot 10^{10} \text{ ly} \quad (6.37a)$$

führt. Den kritischen Wert der kosmologischen Konstante Λ_{c} und den kritischen Skalenparameter R_{c} erhalten wir aus den Gleichungen (6.31) und (6.34):

$$\Lambda_{\text{c}} = 2.2059964 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}, \quad R_{\text{c}} = \Lambda_{\text{c}}^{-1/2} = 6.7328292 \cdot 10^{27} \text{ cm}. \quad (6.37b)$$

Für diesen Λ -Wert tritt ein 'horizontaler Wendepunkt' der $R(t)$ -Kurve bei $z_{\text{kos c}} = 3.91$ auf. Gleichzeitig können wir mit diesem z_{kos} -Wert rechtfertigen, daß wir vorausgehend die Berechnung der kritischen kosmologischen Konstante und des heutigen Skalenparameters für den Staubkosmos durchgeführt haben.

Zur Berechnung der Amplitude f der Materiedichtefluktuationen wählen wir für den Wert der kosmologischen Konstante einen minimal kleineren Wert als Λ_{c}

$$\Lambda_{\text{L}} = \Lambda_{\text{c}} (1 - \delta) \quad \text{mit} \quad \delta = 1.6 \cdot 10^{-6} \quad (6.38a)$$

und für den heutigen Skalenparameter

$$R_{\text{H}} = 3.306 \cdot 10^{28} \text{ cm} = 3.495 \cdot 10^{10} \text{ ly}, \quad (6.38b)$$

so daß nach (6.24) das heutige Weltalter dieses Lemaître-Modells $57 \cdot 10^9 \text{ a}$ beträgt und somit mit dem Alter der ältesten Sterne sehr gut verträglich ist. Eine obere Grenze für das Weltalter scheint es nicht zu geben.

In Abb. 6.8 ist die zeitliche Entwicklung der normierten Amplitude f/f_i in Abhängigkeit vom Zeitparameter s für die auf S. 163 f. angegebenen instabilen Massen dargestellt. Der relative Anstieg der Amplitude f/f_i beträgt $1.4 \cdot 10^4$ und ist signifikant stärker als beim Priester-Modell (Abb. 6.7), so daß das gewählte Lemaître-Modell in Hinblick auf die Galaxienentstehung zu bevorzugen ist. Insbesondere gehorcht der Anstieg der Funktion f/f_i in der Nähe des bei $s = 281$ gelegenen 'horizontalen Wendepunkts' der $R(t)$ -Kurve, dessen z_{kos} -Wert ungefähr demjenigen der Quasare entspricht, eher einem Exponential- als einem Potenzgesetz.

Wie in Abschnitt 6.3.2 erwähnt liegen auch im Lemaître-Universum die Amplituden für steigende Massenwerte immer näher beieinander, so daß die Amplitude f/f_i , die zu der während der Rekombination gebildeten oberen Stabilitätsgrenze gehört, eine 'Häufungslinie' darstellt.

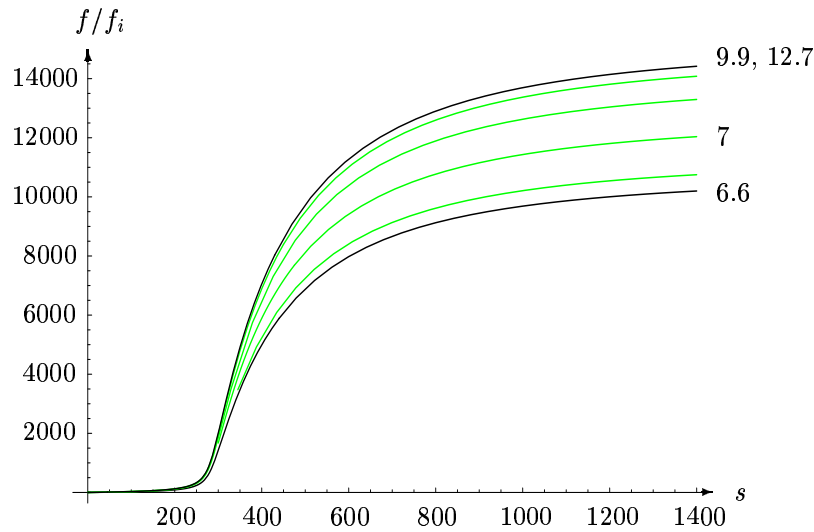


Abb. 6.8: Zeitliche Entwicklung der Amplitude f der Materiedichtefluktuationen, jeweils auf den Anfangswert f_i (6.12) – (6.18) normiert, im Lemaître-Universum für die Massen $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$ ($\lg N = 6.6$), $5.01 \cdot 10^6 M_\odot$, $10^7 M_\odot$, $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$, $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$, $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$ ($\lg N = 9.9$) und $5.01 \cdot 10^{12} M_\odot$ ($\lg N = 12.7$).

6.3.6 Vergleich der Amplitude der Dichtefluktuationen in den vier Weltmodellen

Um die zeitliche Entwicklung der Amplitude f in den gewählten kosmologischen Modellen, (i) dem Einstein-de-Sitter-Universum, (ii) dem Friedman-Modell mit $\varepsilon = 0$ und $\Lambda > 0$, (iii) dem Priester-Modell und (iv) dem Lemaître-Modell direkt vergleichen zu können, stellen wir in Abb. 6.9 die normierte Amplitude f/f_i der Materiedichtefluktuationen in Abhängigkeit vom Zeitparameter s für die Massen $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$ und $7.94 \cdot 10^6 M_\odot$, die am Startwert $s_i = 0.5$ in der Nähe der unteren bzw. oberen Stabilitätsgrenze im Instabilitätstal liegen, doppeltlogarithmisch dar.

Eindeutig zu erkennen ist, daß der Amplitudenanstieg im Fall (i) für die Galaxienbildung zu gering ist und im Fall (ii), d.h. bei Berücksichtigung einer positiven kosmologischen Konstante, noch geringer ist. Im Jahre 1956 hat W.B. Bonnor [6] gezeigt, daß in allgemein-relativistischen Weltmodellen mit verschwindender kosmologischer Konstante Galaxien nicht aus Gravitationsinstabilitäten, die aus von der statistischen Theorie vorausgesagten Fluktuationen hervorgehen, entstanden sein können. Dieses Ergebnis können wir bestätigen und hinzufügen, daß die Hinzunahme einer positiven kosmologischen Konstante in einer flachen Welt die Situation noch verschlechtert.

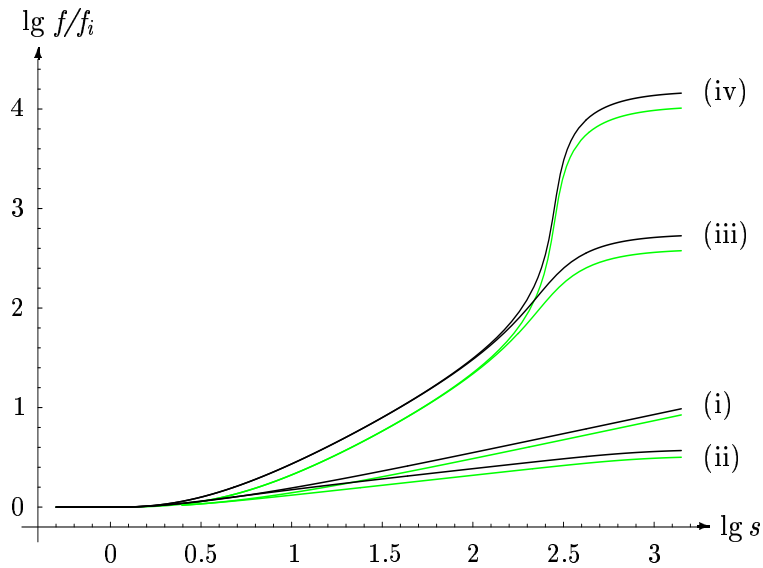


Abb. 6.9: Vergleich der zeitlichen Entwicklung der Amplitude f der Materiedichtefluktuationen, jeweils auf den Anfangswert f_i (6.12) bzw. (6.17) normiert, im (i) Einstein-de-Sitter-Universum, (ii) Friedman-Universum, (iii) Priester-Modell und (iv) Lemaître-Universum für die Massen $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$ (gestrichelt) und $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$ (fett).

W.B. Bonnor [6] führt zur Erklärung der Galaxienentstehung u.a. die Möglichkeit an, ein Modell mit einer längeren Zeitskala, z.B. das Eddington-Lemaître-Modell, das durch eine Störung des Einstein-Kosmos hervorgeht, zu verwenden, so daß die kleinen Fluktuationen längere Zeit anwachsen können.

Bei Betrachtung der Friedman-Gleichung (4.23) erkennen wir, daß die Expansion nur für einen positiven Krümmungsparameter zum Stillstand gebracht werden kann. Außerdem tritt eine quasi-statische Epoche für eine positive kosmologische Konstante $\Lambda > \Lambda_c$ auf, deren Dauer für das Lemaître-Universum am längsten ist. Demzufolge ist der Anstieg der Amplitude f/f_i in Abb. 6.9 für das Priester-Modell (iii) geringer als im Fall (iv), jedoch wesentlich stärker als in den Fällen (i) und (ii).

Bei Zugrundelegung des Lemaître-Universums beträgt der Anstieg des Materiedichtekontrasts sogar vier Größenordnungen, so daß Galaxienbildung stark gefördert wird. In der quasi-statischen Epoche werden die Dämpfungsterme, die $\propto \dot{f}$ - und $\propto \dot{g}$ -Terme, in den Differentialgleichungen (6.6) und (6.7) vernachlässigbar, so daß der Dichtekontrast der Materie exponentiell anwachsen kann. Dieser Anstieg ist bei Rotverschiebungen am stärksten, die denjenigen von Quasaren entsprechen.

Das bedeutet, daß diese Ergebnisse für ein Weltmodell mit positiver kosmologischer Konstante (Quintessence, dunkle Energie) und positiver Krümmung sprechen, das auch einerseits von W. Priester et al. z.B. in [68] vorgeschlagen wird und andererseits mit den

Resultaten der Analyse der Winkelintensitätsverteilung der Hintergrundstrahlung übereinstimmt [58], [48]. Gleichzeitig wird ein Modell mit positiver kosmologischer Konstante durch die Beobachtung unterstützt, daß wir uns heute in einer Phase beschleunigter kosmischer Expansion befinden [70]. Allerdings widerspricht diese Feststellung der heute häufig favorisierten Annahme einer flachen Welt, die aus einem inflationären Modell folgt.

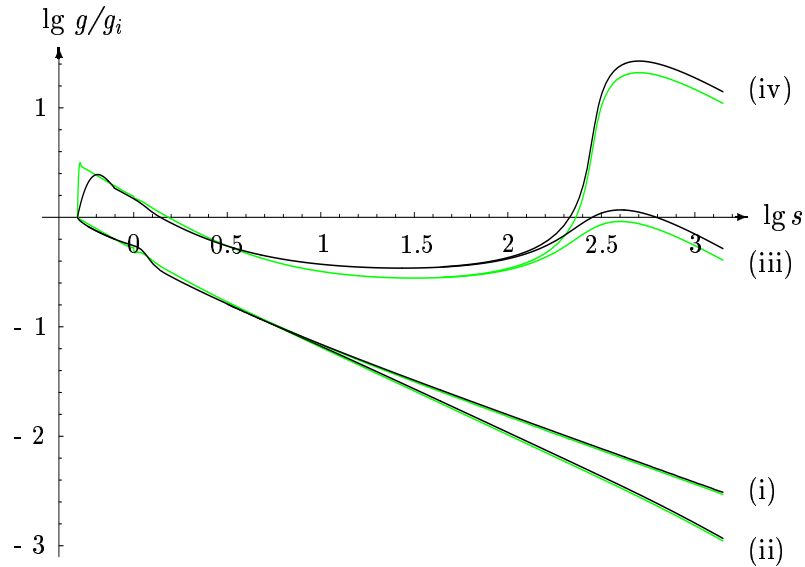


Abb. 6.10: Vergleich der zeitlichen Entwicklung der Amplitude g der Strahlungsdichtefluktuationen, jeweils auf den Anfangswert g_i (6.12) bzw. (6.17) normiert, im (i) Einstein-de-Sitter-Universum, (ii) Friedman-Universum, (iii) Priester-Modell und (iv) Lemaître-Universum für die Massen $3.98 \cdot 10^6 M_\odot$ (gestrichelt) und $7.94 \cdot 10^9 M_\odot$ (fett).

In Abb. 6.10 ist die zeitliche Entwicklung der normierten Amplitude g/g_i der Strahlungsdichtefluktuationen für die gleichen Massen und Fälle wie in Abb. 6.9 doppellogarithmisch veranschaulicht. Nachdem die Strahlung während der Wasserstoffrekombination von der Materie entkoppelt, zerfallen die Strahlungsdichtefluktuationen für die betrachteten Massen sehr schnell. In den Fällen (iii) und (iv) nimmt die Amplitude g/g_i in den Bereichen, in denen der Materiedichtekontrast exponentiell ansteigt, aufgrund der gravitativen Kopplung leicht zu. Dieses Verhalten entspricht nicht mehr demjenigen einer Eigenmode des instabilen Zwei-Flüssigkeits-Systems, so daß das System infolge der kosmischen Expansion aus der anfänglichen Eigenmode herausläuft.

Zusätzlich untersuchen wir die Amplitude der Materiedichtefluktuationen für die zur Zeit der Rekombination stabilen Massen $10^4 M_\odot$ und $10^{15} M_\odot$.

In Abb. 6.11 haben wir die auf den Betrag des Anfangswerts f_i (6.19) normierte Amplitude f für den Massenwert $10^4 M_\odot$ bis $s_f = 60$ ($z_f = 23$) entsprechend einem Weltalter von ca. 10^8 a für die vier Weltmodelle (i) – (iv) bestimmt. Im Fall des Einstein-de-Sitter-

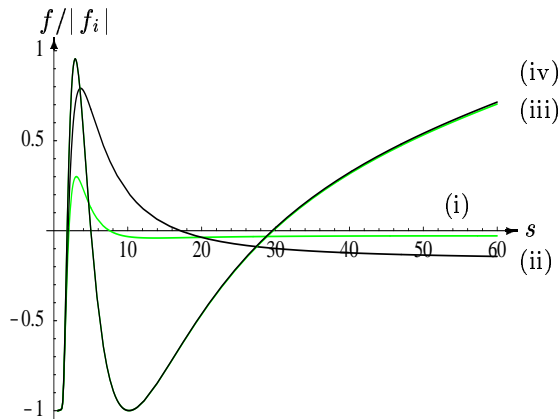


Abb. 6.11: Zeitliche Entwicklung der auf den Betrag des Anfangswerts f_i (6.19) normierten Amplitude f der Materiedichtefluktuationen im (i) Einstein-de-Sitter-Universum, (ii) Friedman-Universum, (iii) Priester-Modell und (iv) Lemaître-Universum für die Masse $10^4 M_\odot$.

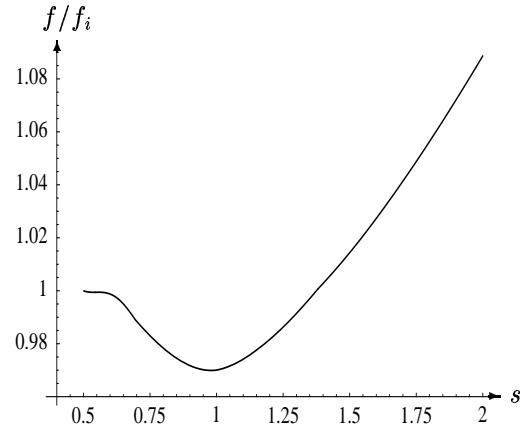


Abb. 6.12: Zeitliche Entwicklung der auf den Anfangswert f_i (6.20) normierten Amplitude f der Materiedichtefluktuationen für die Masse $10^{15} M_\odot$, die bis $s = 2$ in den vier kosmologischen Modellen gleich ist.

Universums (i) und des Friedman-Modells (ii) lösen sich die Materiedichtefluktuationen nach der Rekombination auf und können sich nach dem zweiten Nulldurchgang der Funktion $f/|f_i|$ nahezu nicht mehr aufbauen. Dagegen nimmt der Betrag der Funktion $f/|f_i|$ im Priester- und Lemaître-Modell nach dem zweiten Nulldurchgang in Abb. 6.11 nochmals zu, so daß hier bis $s \approx 10$ ein geringer Anstieg der Fluktuationsamplitude²³ auftritt und anschließend die Materiedichtefluktuationen wieder zerfallen, d.h. es zeigt sich eine Art schwingendes Verhalten. Für $s > 30$ steigt die Amplitude $f/|f_i|$ in den Fällen (iii) und (iv) wieder an, jedoch ist dieser Anstieg in Hinblick auf die Galaxienentwicklung unbedeutend.

In Abb. 6.12 ist die normierte Amplitude f/f_i der Materiedichtefluktuationen für die Masse $10^{15} M_\odot$ gezeigt, die entsprechend der Resultate der Dispersionsrelations-Methode aus Kapitel 5.2 erst kurz nach der Rekombination instabil wird. Um dies zu verdeutlichen, haben wir lediglich bis $s_f = 2$ integriert, so daß eine Unterscheidung der Weltmodelle nicht erforderlich ist. Nachdem für Massen, die zur Zeit der Wasserstoffrekombination größer sind als die obere Stabilitätsgrenze $M_o = 5.8 \cdot 10^{12} M_\odot$, nach der Rekombination kein Material mehr vorhanden sein dürfte, das sich anhäufen könnte, ist dieser Anstieg der Amplitude f/f_i in Bezug auf die Galaxienentwicklung nicht von Bedeutung.

²³Negative und positive f - und g -Werte haben wegen des räumlichen Sinus-Verhaltens der Fluktuation gleiche Bedeutung.

6.3.7 Berücksichtigung von nicht-baryonischer kalter Dunkelmaterie

Um mit der astronomischen Beobachtung in Einklang zu sein, führen inzwischen viele Autoren Dunkelmaterie und zusätzlich die kosmologische Konstante Λ ein, so daß das in der Einleitung angesprochene Λ CDM-Modell (Λ -'cold dark matter model') entsteht. Sowohl die Existenz von Dunkelmaterie als auch einer nicht-verschwindenden kosmologischen Konstante wird heute jedoch noch kontrovers diskutiert.

Die heute sichtbare baryonische Dichte von $\rho_{\text{pH}}^0 = 2 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3$, die aus der primordialen Häufigkeit der leichten Elemente folgt, entspricht bei verschwindender kosmologischer Konstante und einer Hubble-Konstante von $H \approx 75 \text{ km/sec Mpc}$ einem offenen Universum mit hyperbolischer Topologie, was der Beobachtung widerspricht.

In den Hubble-Plot, bei dem die scheinbare visuelle Helligkeit von Galaxien ein und desselben Typs (Standardkerzen) über der Rotverschiebung z_{kos} aufgetragen wird, gehen sowohl die Krümmung und die Dichte des Universums als auch die kosmologische Konstante ein. Entsprechend diesem Diagramm wird heute eine beschleunigte Expansion beobachtet, was auf eine positive kosmologische Konstante hindeutet. Aus den weiteren Beobachtungen wie

- den flachen Rotationskurven von Spiralgalaxien, d.h. diese fallen außerhalb der leuchtenden Materie nicht, wie nach der Newtonschen Gravitationstheorie zu erwarten, wie $1/\sqrt{r}$ ab, sondern verlaufen konstant²⁴,
- und der Tatsache, daß die mit Hilfe des Virialsatzes aus der zur heutigen baryonischen Dichte ρ_{pH}^0 gehörenden gravitativen potentiellen Energie berechnete kinetische Energie von Galaxienhaufen zu niedrig ist verglichen mit der Geschwindigkeitsverteilung der Galaxien eines Galaxienhaufens²⁵,

wird heute geschlossen, daß die Dichte im Universum wesentlich höher als die heute sichtbare ist (Faktor ≈ 10). Bisher wird diese Diskrepanz in der Dichte häufig mit der Existenz von nicht-baryonischer Dunkelmaterie erklärt, wobei deren Natur unbekannt ist.

Um den Einfluß von Dunkelmaterie auf die zeitliche Entwicklung der Dichtefluktuationen abzuschätzen, fügen wir in den kosmologischen Hintergrundgleichungen verschiedene Anteile an nicht-baryonischer kalter Dunkelmaterie ρ_{D}^0 , die ausschließlich gravitativ koppelt, zu der Materiedichte ρ_{p}^0 hinzu. Folglich ist in den Friedman-Gleichungen (4.23) und (4.24)

$$\rho_{\text{p}}^0 \quad \text{durch} \quad \rho_{\text{p}}^0 (1 + d_{\text{D}}) \quad \text{mit} \quad d_{\text{D}} = \rho_{\text{p}}^0 / \rho_{\text{D}}^0 = \rho_{\text{pH}}^0 / \rho_{\text{DH}}^0 \quad (6.39)$$

²⁴Die flachen Rotationskurven könnten auch darauf hinweisen, daß das Newtonsche $1/r$ -Gesetz auf großen Skalen von 10 - 20 kpc zu modifizieren ist, was z.B. die MOND-Theorie versucht.

²⁵Für die Gültigkeit des Virialsatzes wird allerdings thermodynamisches Gleichgewicht vorausgesetzt, was bei Galaxienhaufen kritisch sein könnte.

zu ersetzen. Weiterhin gehen wir zur Vereinfachung der Rechnung davon aus, daß die Dunkelmaterie nicht an den Fluktuationen beteiligt ist.²⁶

Als kosmologisches Modell setzen wir das Lemaître-Universum, Abschnitt 6.3.5, voraus, da bei diesem ohne Berücksichtigung der Dunkelmaterie der stärkste Anstieg des Materiedichtekontrasts aufgetreten ist. Die Integration starten wir wieder bei $s_i = 0.5$ und als Massenwert wählen wir $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$, der für diesen Startwert in der Mitte zwischen den Massengrenzen des Instabilitätstals liegt. Zur Bestimmung der Anfangswerte f_i , f'_i , g und g'_i ziehen wir die nicht-schwingende Mode b_2 heran, wobei wir bei deren Berechnung ebenfalls das Verhältnis d_D in der Expansionsgeschwindigkeit α berücksichtigen.

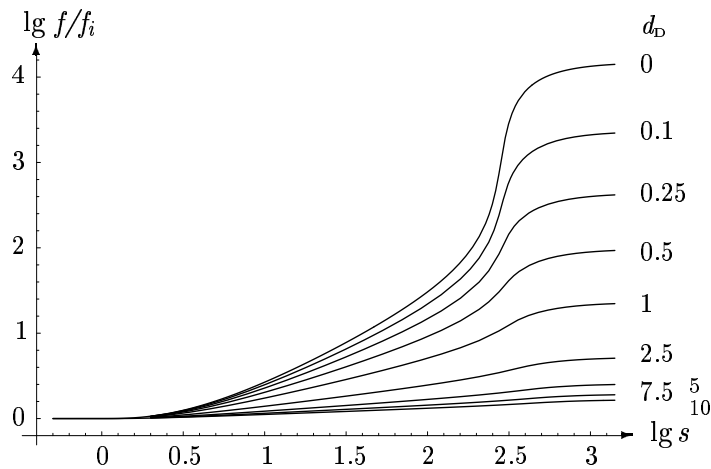


Abb. 6.13: Zeitliche Entwicklung der normierten Amplitude f/f_i der Materiedichtefluktuationen im Lemaître-Universum für $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$ bei Existenz verschiedener Anteile d_D an kalter nicht-baryonischer Dunkelmaterie.

In den Abb. 6.13 und 6.14 sind die auf ihre Anfangswerte normierten Amplituden f/f_i und g/g_i in Abhängigkeit vom Zeitparameter s für verschiedene Verhältnisse d_D von Dunkelmaterie zu baryonischer Materie doppeltlogarithmisch dargestellt. Der Vergleich mit dem Fall $d_D = 0$ zeigt, daß bereits ein kleiner Anteil an nicht-baryonischer kalter Dunkelmaterie den Anstieg der Materiedichtefluktuationen (Abb.6.13) drastisch reduziert. Der 'horizontale Wendepunkt' der $R(t)$ -Kurve wird für ein steigendes Verhältnis d_D zu immer kleineren Rotverschiebungen z_{kos} hin verschoben: für $d_D = 0$ liegt dieser bei $z_{\text{kos}} = 3.91$, für $d_D = 5$ bei $z_{\text{kos}} = 1.90$ und für $d_D = 10$ bei $z_{\text{kos}} = 1.47$.

²⁶Letzteres würde auf ein Drei-Komponenten-Modell führen, was den Rahmen der Arbeit sprengt.

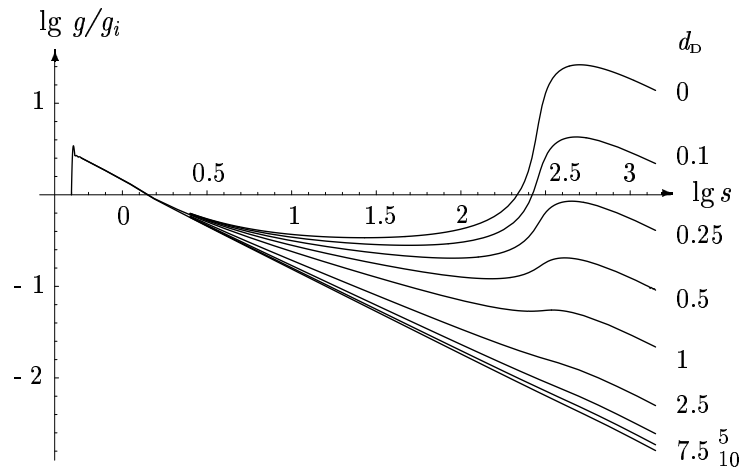


Abb. 6.14: Zeitliche Entwicklung der normierten Amplitude g/g_i der Strahlungsdichtefluktuationen im Lemaître-Universum für $1.8 \cdot 10^8 M_\odot$ bei Existenz verschiedener Anteile d_D an kalter nicht-baryonischer Dunkelmaterie.

Folglich tritt die quasi-statische Epoche für zunehmendes Verhältnis d_D im Laufe der Evolution des Universums so spät auf, daß die Amplituden der Materiedichtefluktuationen bis heute nicht genügend anwachsen können. Deshalb kann in Hinblick auf die Galaxienentwicklung kein wesentlicher Anteil an kalter nicht-baryonischer Dunkelmaterie im Universum existieren.

Ergebnisse und Ausblick

Durch Verwendung des in dieser Dissertation beschriebenen Zwei-Flüssigkeits-Modells, in dem die Wechselwirkung von Materie und Strahlung detailliert berücksichtigt ist, können wir zunächst mit Hilfe der Dispersionsrelations-Methode den beobachteten Massenbereich $10^6 M_\odot \lesssim M \lesssim 10^{12} M_\odot$ von Galaxien erklären. Hierfür ist die Beschreibung der Kopplung von Strahlung und Plasma über einen skalenabhängigen Strahlungsdruck ganz wesentlich, wobei letzterer operatorwertig eingeführt wird, so daß keine speziellen Fluktuationen ausgezeichnet werden. Ferner bringen wir den quasi-instabilen Massenbereich um $10^{18} M_\odot$ der anwachsenden schwingenden Fluktuationsmoden mit der beobachteten Void-Struktur in Verbindung. Bei Zugrundelegung dieses Zwei-Flüssigkeits-Modells existiert ein frühest möglicher Zeitpunkt, ab dem während der kosmischen Entwicklung Galaxien entstehen können, der bei einer Rotverschiebung von $z \approx 8200$, d.h. einem Weltalter von ca. $1.5 \cdot 10^4$ a, liegt.

Betrachten wir die zeitliche Entwicklung des Materiedichtekontrasts für die nach der Dispersionsrelations-Methode instabilen Fluktuationsmoden von Zeiten vor der Rekombination bis zur Gegenwart, so spricht alles für ein kosmologisches Modell mit positiver kosmologischer Konstante und positiver Krümmung: In einem Lemaître-Universum steigt die Amplitude des Materiedichtekontrasts sogar um vier Größenordnungen an! Dagegen verschlechtert sich die Situation dramatisch bei Hinzunahme verschiedener Anteile an nicht-baryonischer kalter Dunkelmaterie.

Gleichzeitig ist das Lemaître-Universum aus folgenden Gründen zu bevorzugen: Das Alter des Universums beträgt $57 \cdot 10^9$ a, was sehr gut zum Alter der ältesten Sterne paßt. Außerdem können nur im Fall positiver Krümmung, d.h. eines geschlossenen, sphärischen Raumes, die globalen Eigenschaften des Kosmos, wie z.B. seine Homogenität und Isotropie, empirisch überprüft werden. In diesem Zusammenhang ist die Interpretation der Ergebnisse eines inflationären Modells als zwingend für ein global flaches (unendliches) Universum problematisch und nicht überzeugend (siehe [25], [36]).

Eine Verfeinerung unseres Zwei-Flüssigkeits-Modells wird in Zukunft darin bestehen, einerseits mitschwingende Dunkelmaterie und andererseits Plasmaschwingungen zu berücksichtigen, was jeweils auf ein Drei-Komponenten-System führt.

Annex

A Abschätzung des Viskositätsterms

Zur Abschätzung des Viskositätsterms vergleichen wir diesen mit Termen aus der Bewegungsgleichung 1. Ordnung (1.39) des Plasmas und verwenden die Ergebnisse der Dispersionsrelations-Methode aus Kapitel 2.

Der Viskositätsterm $R(\eta)$ in der Navier-Stokes-Gleichung lautet:

$$R_i(\eta) = \eta \left(v_{i|k} + v_{k|i} - \frac{2}{3} v_{j|j} \delta_{ik} \right)_{|k} = \eta \left(v_{i|k|k} + v_{k|k|i} - \frac{2}{3} v_{j|j|i} \right) \quad (\text{A.1})$$

mit der Scherviskosität:

$$\eta = \varrho_p \bar{v} l = \varrho_p \bar{v}^2 \tau, \quad (\text{A.2})$$

$\tau = l/\bar{v}$ der mittleren Stoßzeit, l der mittleren freien Weglänge, \bar{v} der mittleren Geschwindigkeit der Plasmateilchen, ϱ_p der Massendichte des Plasmas und v_i der Strömungsgeschwindigkeit des Plasmas nach (2.6):

$$v_i = \tilde{A} \frac{\omega}{k^2} k_i e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (\text{A.3})$$

$$v_{i|k} = -\tilde{A} \frac{i\omega}{k^2} k_i k_k e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = v_{k|i}, \quad (\text{A.4})$$

$$v_{i|k|k} = -\tilde{A} \omega k_i e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = v_{k|k|i}. \quad (\text{A.5})$$

Somit nimmt der Viskositätsterm folgende Form an:

$$R_i(\eta) = \frac{4}{3} \eta v_{i|k|k} = -\frac{4}{3} \eta \tilde{A} \omega k_i e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = \quad (\text{A.6})$$

$$= -\frac{4}{3} \varrho_p \bar{v}^2 \tau \omega k_i \tilde{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (\text{A.7})$$

Vergleich des Viskositätsterms (A.7) mit Termen aus der Bewegungsgleichung 1. Ordnung (1.39) des Plasmas

(i) Vergleich mit dem kosmischen Dämpfungsterm $R_i(\alpha)$

$$R_i(\alpha) = \varrho_p^0 \alpha \dot{v}_i = \varrho_p^0 \alpha \tilde{A} \frac{\omega}{k^2} k_i e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (\text{A.8})$$

Aus (A.7) und (A.8) ergibt sich:

$$\frac{R_i(\eta)}{R_i(\alpha)} = \frac{4}{3} \frac{\bar{v}^2 \tau k^2}{\alpha} = \frac{4}{3} \frac{1}{\alpha \tau} l^2 k^2 = \frac{4}{3} \frac{l \bar{v} k^2}{\alpha}. \quad (\text{A.9})$$

Dieser Quotient ist schlecht abzuschätzen, da er für verschwindende Expansionsgeschwindigkeit ($\alpha \rightarrow 0$) divergiert.

(ii) Vergleich mit dem Druckterm $R_i(c_s^2)$

$$R_i(c_s^2) = c_s^2 \varrho_{|i} = -c_s^2 \varrho^0 \tilde{A} k_i e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (\text{A.10})$$

Aus (A.7) und (A.10) folgt

$$\left| \frac{R_i(\eta)}{R_i(c_s^2)} \right| = \frac{4}{3} \frac{\bar{v}^2}{c_s^2} \tau \omega. \quad (\text{A.11})$$

Mit der mittleren Geschwindigkeit der Protonen \bar{v} und der isothermen Schallgeschwindigkeit c_s (1.18b)

$$\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m} \quad \text{und} \quad c_s^2 = 2 \frac{kT}{m}$$

erhalten wir

$$\left| \frac{R_i(\eta)}{R_i(c_s^2)} \right| = 2 \tau \omega \ll 1, \quad (\text{A.12})$$

was durch Einsetzen der Stoßzeit τ_{pp} aus Annex B und der Frequenz aus der Dispersionsrelations-Methode z.B. in Abschnitt 2.2.2 folgt.

Dementsprechend kann der Viskositätsterm $R_i(\eta)$ gegenüber dem Druckterm $R_i(c_s^2)$ in der Bewegungsgleichung 1. Ordnung vernachlässigt werden und wird folglich beim Aufstellen der fundamentalen Gleichungen nicht berücksichtigt.

B Die Stoßzeiten

In diesem Annex geben wir die in dem kosmischen Substrat auftretenden Stoßzeiten an.

Stoßzeit der Protonen des Plasmas untereinander

$$\text{mittlere Stoßzeit: } \tau_{\text{pp}} = \frac{l_{\text{p}}}{\bar{v}} \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Energiesatz: } \rightarrow \bar{v}^2 = \frac{3 k T_{\text{r}}}{m_{\text{p}}} \rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{3 k T_{\text{r}}}{m_{\text{p}}}} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{mittlere freie Weglänge: } l_{\text{p}} = \frac{1}{n \sigma} = \pi \frac{m_{\text{p}}}{\rho_{\text{p}} \lambda^3} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{mit der De-Broglie-Wellenlänge: } \lambda = \frac{h}{m_{\text{p}} \bar{v}} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{und dem Streuquerschnitt: } \sigma = \frac{4 \pi}{k^2} = \frac{\lambda^2}{\pi} \quad (\text{B.5})$$

$$\rightarrow \text{mittlere freie Weglänge: } l_{\text{p}} = \frac{\pi m_{\text{p}}^3 \bar{v}^2}{\rho_{\text{p}} h^2} \quad (\text{B.6})$$

$$\rightarrow \text{Stoßzeit: } \tau_{\text{pp}} = \frac{\pi}{\bar{v}} \frac{m_{\text{p}}^3 \bar{v}^2}{\rho_{\text{p}} h^2} = \pi \frac{m_{\text{p}}^{5/2}}{\rho_{\text{p}} h^2} \sqrt{3 k T_{\text{r}}} = \pi \frac{m_{\text{p}}^{5/2}}{\rho_{\text{pH}} h^2} \sqrt{3 k T_{\text{rH}}} \frac{1}{z^{5/2}}. \quad (\text{B.7})$$

Die Stoßzeit (B.7) ist für Protonen größer als die entsprechende Stoßzeit τ_{ee} der Elektronen ($m_{\text{p}} \gg m_{\text{e}}$).

Zur Zeit der Rekombination ($z_{\text{r}} = 1380$) gilt:

$$\tau_{\text{pp,R}} \approx 6 \cdot 10^8 \text{ sec} \approx 2 \text{ a}, \quad (\text{B.8})$$

d.h. die Stoßzeit $\tau_{\text{pp}} \propto 1/z^{5/2}$ wird zur Zeit der Rekombination maximal. Demzufolge ist die Stoßzeit τ_{pp} wesentlich kleiner als die in Kapitel 2 berechneten Perioden bzw. Relaxationszeiten und das entsprechende Weltalter (1.34).

Stoßzeit der Photonen bzgl. der Elektronen

$$\text{mittlere Stoßzeit: } \tau_{\gamma\text{e}} = \frac{l_{\gamma}}{c} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{mittlere freie Weglänge (1.9a): } l_{\gamma} = \frac{m_{\text{p}}}{\sigma_{\text{Th}} \rho_{\text{p}}} = \frac{m_{\text{p}}}{\sigma_{\text{Th}} \rho_{\text{pH}} z^3}. \quad (\text{B.10})$$

Zur Zeit der Rekombination ($z_R = 1380$) gilt:

$$\tau_{\gamma e, R} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ sec} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ a}, \quad (\text{B.11})$$

so daß die Stoßzeit $\tau_{\gamma e} \propto 1/z^3$ zur Zeit der Rekombination am größten ist und wesentlich kleiner als das entsprechende Weltalter (1.34), siehe auch Fußnote 27, S. 185.

Stoßzeit der Elektronen bzgl. der Photonen

$$\text{mittlere Stoßzeit:} \quad \tau_{e\gamma} = \frac{l_e}{\bar{v}_e} \quad (\text{B.12})$$

$$\text{mittlere freie Weglänge (1.9b):} \quad l_e = \frac{3}{4} \frac{m_p}{\sigma_{\text{Th}} \rho_r} = \frac{3}{4} \frac{m_p c^2}{\sigma_{\text{Th}} \sigma T_r^4} \quad (\text{B.13})$$

$$\rightarrow \text{Stoßzeit:} \quad \tau_{e\gamma} = \frac{3}{4} \frac{m_p c^2}{\sigma_{\text{Th}} \sigma T_{\text{RH}}^4 z^{9/2}} \sqrt{\frac{m_e}{3kT_{\text{RH}}}}. \quad (\text{B.14})$$

Zur Zeit der Rekombination ($z_R = 1380$) gilt:

$$\tau_{e\gamma, R} \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ sec} \approx 9 \cdot 10^4 \text{ a}, \quad (\text{B.15})$$

so daß die Stoßzeit $\tau_{e\gamma} \propto 1/z^{9/2}$ zur Zeit der Rekombination am größten ist und wesentlich kleiner als das entsprechende Weltalter (1.34).

C Strahlungsdruck in einem optisch dünnen Medium

Bei Betrachtung von in einem Plasma eingeschlossenen Photonen ist der gewöhnliche Strahlungsdruck p_r zur Strahlungsenergiedichte u proportional:

$$p_r = \frac{1}{3} u, \quad (\text{C.1})$$

wobei diese Beziehung nur in einem optisch dichten Plasma gilt, so daß die Photonenenergiedichte u zeitlich nahezu konstant ist. Dies gilt jedoch aufgrund der stärkeren Diffusion der Photonen und ihrer Energie in einem optisch dünnen Plasma nicht mehr. Die Diffusionsgleichung für die Strahlungsenergiedichte $u(t)$ lautet:

$$\Delta u - \frac{3}{c l_\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.2})$$

mit l_γ der mittleren freien Weglänge der Photonen.

C.1 Integration der Diffusionsgleichung mittels Taylor-Entwicklung und Iteration

Der effektive Strahlungsdruck $p_{\gamma \rightarrow e}$ auf das Plasma ist durch die Photonenenergiedichte u bestimmt, die nach einer mittleren Stoßzeit $\tau_{\gamma e} = l_\gamma/c$ der Photonen mit den Plasmateilchen (Elektronen) verbleibt: ²⁷

$$p_{\gamma \rightarrow e}(t) = \frac{1}{3} u(t + \tau_{\gamma e}), \quad \tau_{\gamma e} \ll t, \quad (\text{C.3})$$

was nach Taylor-Entwicklung auf

$$p_{\gamma \rightarrow e}(t) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(t) \tau_{\gamma e}^n \quad (\text{C.4})$$

²⁷ Dabei ist zu beachten, daß die mittlere Stoßzeit der Photonen mit den Plasmateilchen

$$\tau_{\gamma e} = \frac{l_\gamma}{c} = \frac{1}{c} \frac{m}{\sigma_{\text{Th}} \varrho_{\text{pH}} z^3} \frac{1}{\chi} = 5.05 \cdot 10^3 \frac{s^3}{\chi} \text{ a}$$

mit der freien Weglänge l_γ nach (1.9a) wesentlich kleiner sein sollte als das Weltalter t (1.34) und die aus der Dispersionsrelation (2.16) numerisch berechnete Periode T . Da die in der Dispersionsrelation auftretenden l_γ -Terme für abnehmenden Ionisationsgrad, d.h. nach der Rekombination, verschwinden, ist die obige Forderung bis zur Rekombination zu betrachten: Die Stoßzeit $\tau_{\gamma e}$ ist im gesamten Massen- und s -Bereich wesentlich kleiner als das Weltalter t . Hingegen ist die Ungleichung $\tau_{\gamma e} \ll T$ lediglich für Massen erfüllt, die größer sind als Massen, die ca. zwei Größenordnungen kleiner als die obere Stabilitätsgrenze sind. Die Massen, für die $\tau_{\gamma e} = T$ gilt, sind mindestens eine Größenordnung kleiner als Massen, die zum Minimum der nicht-schwingenden Mode b_2 führen. Da sich der Strahlungsdruck erst in der Nähe der oberen Stabilitätsgrenze auswirkt, stellt diese Tatsache keine Einschränkung der Anwendbarkeit obigen Verfahrens dar. (zu Stoßzeiten siehe auch Annex B.)

führt. Andererseits folgt aus der Diffusionsgleichung (C.2) durch Iteration:

$$u^{(n)}(t) = \left(\frac{cl_\gamma}{3} \Delta \right)^n u(t). \quad (\text{C.5})$$

Nach Einsetzen des Ausdrucks (C.5) in die Taylor-Entwicklung des effektiven Strahlungsdrucks (C.4) erhalten wir unter Verwendung der Stoßzeit $\tau_{\gamma e} = l_\gamma/c$:

$$p_{\gamma \rightarrow e}(t) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{cl_\gamma}{3} \tau_{\gamma e} \Delta \right)^n u(t) = \frac{1}{3} e^{cl_\gamma/3 \tau_{\gamma e} \Delta} u(t) = \frac{1}{3} e^{l_\gamma^2/3 \Delta} u(t). \quad (\text{C.6})$$

Gleichung (C.6) führt mit Hilfe des Ausdrucks (C.1) zu der Relation

$$p_{\gamma \rightarrow e}(t) = e^{l_\gamma^2/3 \Delta} p_r(t). \quad (\text{C.7})$$

Entsprechend des Reaktionsprinzips ist die Rückreaktion auf die Strahlung durch

$$p_{\gamma \leftarrow e}^R = -p_{\gamma \rightarrow e} \quad (\text{C.8})$$

gegeben.

Die gleiche Überlegung gilt für gewöhnliche Gasteilchen, wobei im nicht-relativistischen Fall der Faktor $1/3$ in der Beziehung (C.1) durch $2/3$ zu ersetzen ist. Der Operator $e^{l_\gamma^2/3 \Delta}$ in Gleichung (C.7) berücksichtigt, daß der Druck durch die nach einer mittleren Stoßzeit verbleibenden Teilchen bestimmt wird und daß er nur auf Skalen wirkt, die größer als die mittlere freie Weglänge l der betrachteten Teilchen ist.

C.2 Integration der Diffusionsgleichung unter Verwendung des Zeitentwicklungsoperators

Andererseits können wir die Diffusionsgleichung (C.2) formal mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t)$ lösen, der für $t > t_0$ folgende Relationen erfüllt:

$$u(t) = \hat{U}(t) u(t_0) \quad \text{mit} \quad \hat{U}(t_0) = 1. \quad (\text{C.9})$$

Einsetzen der Beziehung (C.9) in die Diffusionsgleichung (C.2) führt auf die Zeitentwicklungsgleichung von $\hat{U}(t)$ unter der Annahme von beliebiger Anfangsenergiedichtenverteilung $u(t_0)$:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \frac{cl_\gamma}{3} \Delta \hat{U}. \quad (\text{C.10})$$

Das Integral der Gleichung (C.10) lautet mit der Anfangsbedingung $\hat{U}(t_0) = 1$

$$\hat{U}(t) = e^{cl_\gamma/3 \Delta (t-t_0)} \quad (\text{C.11})$$

und die Energiedichte nach Gleichung (C.9):

$$u(t) = e^{cl_\gamma/3 \Delta (t-t_0)} u(t_0). \quad (\text{C.12})$$

Der effektive Strahlungsdruck $p_{\gamma \rightarrow e}$ auf das Plasma wird durch die Photonenergiedichte bestimmt, die nach einer mittleren Stoßzeit $\tau_{\gamma e} = l_\gamma/c$ der Photonen mit den Plasmateilchen (Elektronen) verbleibt. Somit folgt mit $t = t_0 + \tau_{\gamma e}$ unter Verwendung des Strahlungsdrucks (C.1) und der Energiedichte (C.12):

$$p_{\gamma \rightarrow e}(t) = \frac{1}{3} e^{l_\gamma^2/3 \Delta} u(t - \tau_{\gamma e}) \quad (\text{C.13})$$

und im Fall $\tau_{\gamma e} \ll t$:

$$p_{\gamma \rightarrow e}(t) \stackrel{(\text{C.1})}{=} e^{l_\gamma^2/3 \Delta} p_r(t) \stackrel{(\text{C.8})}{=} -p_{\gamma \rightarrow e}, \quad (\text{C.14})$$

was mit dem Ausdruck (C.7) übereinstimmt.

D Zeitliche Entwicklung der Dichtefluktuationen bei Vernachlässigung konkurrierender Terme

Nachdem der vom Plasma auf das Photonengas wirkende hydrostatische Druck wesentlich geringer ist als derjenige, den das Photonengas auf das Plasma ausübt, können wir ersteren vernachlässigen. Das bedeutet, daß in der Differentialgleichung (3.2) für die Amplitude f der Materiedichtefluktuationen der Term

$$c_s^2 k^2 e^{-k^2 l_e^2/3} f \quad \text{gegenüber} \quad \frac{1}{3} c^2 k^2 d e^{-k^2 l_\gamma^2/3} g \quad (\text{D.1})$$

herausfällt, was auch zu entsprechenden Vereinfachungen in der Dispersionsrelation führt.

Möglich ist dies, falls

$$\ln \frac{f}{g} < \frac{1}{3} \frac{k_H^2}{\chi^2 z^4} \left(\frac{l_{\text{eH}}^2}{z^2} - l_{\gamma\text{H}}^2 \right) + \ln \left(\frac{c^2 d_{\text{H}}}{3c_{\text{sH}}^2(1 + \chi)} \right) \quad (\text{D.2})$$

gilt, wobei die Größen c_s , k , l_e und l_γ gemäß (2.19a) – (2.19g) auf ihre heutigen Werte umgerechnet sind. Unter Verwendung des Parameters s und nach Einsetzen der numerischen Werte (2.19a) – (2.19g) folgt:

$$\ln \frac{f}{g} < \frac{s^4}{\chi^2} N^{-2/3} [8.77 \cdot 10^{10} s^2 - 1.23 \cdot 10^8] + \ln \left(\frac{1.80 \cdot 10^9}{1 + \chi} \right). \quad (\text{D.3})$$

Für einen Massenwert von $M = 3.16 \cdot 10^7 M_\odot$ ergibt sich aus der Ungleichung (D.3)

$$\text{bei} \quad s = 0.5 \quad \ln \frac{f}{g} < 13600 \quad (\text{D.4})$$

$$\text{und bei} \quad s = 1 \quad \ln \frac{f}{g} < 2.99 \cdot 10^6. \quad (\text{D.5})$$

Beide Ungleichungen sind sehr gut erfüllt, da die Funktion f von der Ordnung 10^7 und die Funktion g von der Ordnung 1 ist.

In der Differentialgleichung (3.3) für die Amplitude g der Strahlungsdichtefluktuationen kann entsprechend der Term

$$\frac{1}{d} c_s^2 k^2 e^{-k^2 l_e^2/3} f \quad \text{gegenüber} \quad \frac{1}{3} c^2 k^2 e^{-k^2 l_\gamma^2/3} g \quad (\text{D.6})$$

vernachlässigt werden.

Somit wird bei der Integration des Differentialgleichungssystems (3.27) – (3.30) die Konstante a_4 (3.23b) Null gesetzt, wobei wir zur Berechnung der Anfangswerte die Mode b_2 heranziehen.

Bei den Massenwerten $10^4 M_\odot$, $1.58 \cdot 10^6 M_\odot$, $3.16 \cdot 10^7 M_\odot$ und $1.26 \cdot 10^8 M_\odot$ tritt bei Vernachlässigung der in Frage kommenden konkurrierenden Terme keine merkliche Änderung der zeitlichen Entwicklung der Amplituden der Materiedichtefluktuationen f und der Strahlungsdichtefluktuationen g sowie ihrer numerischen Werte gegenüber dem allgemeinen Fall auf, was nach der Abschätzung (D.3) zu erwarten ist.

E Herleitung der relativistischen Diffusionsgleichung

E.1 Diffusion von Strahlungsenergie durch das Elektronengas (Plasma)

Nach (4.11) lautet der Energie-Impuls-Tensor der Strahlung in gemischten Komponenten:

$$\overset{(r)}{T}_\mu{}^\nu = (\varrho_r c^2 + p_s) c_\mu c^\nu - p_s \delta_\mu{}^\nu \quad (\text{E.1})$$

und entsprechend (4.15) der Erhaltungssatz bei Vernachlässigung des Energie-Impuls-Übertrags der Elektronen auf die Photonen $\Delta \vec{p}_{e\gamma}$, siehe S. 19:

$$\overset{(r)}{T}_\mu{}^\nu{}_{\parallel\nu} = \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \varrho_r (v_\mu - c_\mu) . \quad (\text{E.2})$$

Einsetzen des Energie-Impuls-Tensors (E.1) in den Erhaltungssatz (E.2) ergibt:

$$(\varrho_r c^2 + p_s) c_{\mu\parallel\nu} c^\nu + [(\varrho_r c^2 + p_s) c^\nu]_{\parallel\nu} c_\mu - p_{s|\mu} = \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \varrho_r (v_\mu - c_\mu) . \quad (\text{E.3})$$

Um die Kontinuitätsgleichung²⁸ zu erhalten, projizieren wir den Erhaltungssatz (E.3) auf die Photonengeschwindigkeit c^μ :

$$[(\varrho_r c^2 + p_s) c^\nu]_{\parallel\nu} - p_{s|\mu} c^\mu = \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \varrho_r (v_\mu - c_\mu) c^\mu = \quad (\text{E.4})$$

$$= \frac{4}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \varrho_r \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \frac{2}{3} \frac{c^2}{l_\gamma} \varrho_r \beta^2 + o(\beta^4) , \quad (\text{E.5})$$

wobei wegen der Normierung $c_{\mu\parallel\nu} c^\mu = 0$ gilt und β die Relativgeschwindigkeit zwischen Plasma und Strahlungsfeld ist. Da $\beta^2 \ll 1$ ist, kann die Wurzel auf der rechten Seite entwickelt werden, so daß lediglich ein Term der Ordnung β^2 stehen bleibt, der ein relativistischer Term ist und den wir im Rahmen dieser Betrachtung vernachlässigen.

Zur Herleitung der Diffusionsgleichung setzen wir $p_s = p_r = 1/3 \varrho_r c^2$ und berücksichtigen somit die Wechselwirkung von Materie und Strahlung nicht. Dementsprechend folgt aus (E.4) die Bilanzgleichung

$$\frac{4}{3} (\varrho_r c^2 c^\nu)_{\parallel\nu} - \frac{1}{3} \varrho_{r|\mu} c^2 c^\mu = 0 , \quad (\text{E.6})$$

²⁸Die Projektion des Erhaltungssatzes auf die Photonengeschwindigkeit, $\overset{(r)}{T}_\mu{}^\nu{}_{\parallel\nu} c^\mu$, liefert die Kontinuitätsgleichung und die Projektion in den Hyperraum, $\overset{(r)}{T}_\mu{}^\nu{}_{\parallel\nu} h^\mu{}_\sigma$, die Bewegungsgleichungen.

die wir mit $j^\nu = \varrho_r c^2 c^\nu$ der Energiestromdichte und $u_0 = j^\nu c_\nu$ der Ruhenergiedichte der Photonen, die von der Photonenströmung aus gesehen wird, wie folgt umschreiben:

$$j^\nu{}_{|\nu} = \frac{1}{4} u_{0|\mu} c^\mu \quad \Leftrightarrow \quad j^\nu{}_{|\nu} = j^\nu{}_{|\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu j^\lambda = \frac{1}{4} u_{0|\nu} c^\nu. \quad (\text{E.7})$$

3 + 1 – Zerlegung in manifest kovarianter Weise

Wir betrachten Diffusion bzgl. eines Trägers und zwar der Photonen bzgl. des Plasmas, so daß das Plasma als Träger der diffundierenden Energiedichte wirkt mit

$$v^\mu \quad \text{der Vierer-Geschwindigkeit des Trägers} \quad (\text{E.8})$$

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu \quad \text{dem Projektor in den Ruhraum (Hyperraum) des Plasmas.} \quad (\text{E.9})$$

Die Dreier-Energiestromdichte ist die Projektion der Vierer-Energiestromdichte in den Hyperraum:

$$j^\mu = j^\sigma h_\sigma{}^\mu = j^\mu - j^\sigma v_\sigma v^\mu, \quad (\text{E.10})$$

so daß die Vierer-Energiestromdichte wie folgt geschrieben werden kann:

$$j^\mu = j^\mu + u v^\mu, \quad (\text{E.11})$$

wobei

$$u = j^\sigma v_\sigma \quad (\text{E.12})$$

die Ruhenergiedichte der Photonen bezeichnet, die von der Plasmaströmung aus gesehen wird. Zwischen den Ruhenergiedichten u_0 und u besteht die Beziehung:

$$u = u_0 c^\sigma v_\sigma = \frac{u_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = u_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2\right) \underset{\beta^2 \ll 1}{=} u_0, \quad (\text{E.13})$$

da wir in diesem Zusammenhang relativistische Terme wegen der Kleinheit der Relativgeschwindigkeit β zwischen Plasma und Strahlungsfeld vernachlässigen. Die Bilanzgleichung (E.7) wird mit Hilfe eines störungstheoretischen Ansatzes gelöst, wobei wir im folgenden nur lineare Abweichungen von der 0. Ordnung berücksichtigen:

$$j^\nu = \overset{0}{j}{}^\nu(x^4) + \overset{1}{j}{}^\nu(x^\nu) \quad \varrho_r = \overset{0}{\varrho}_r(x^4) + \overset{1}{\varrho}_r(x^\nu) \quad (\text{E.14})$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\nu = \overset{0}{\Gamma}{}_{\nu\lambda}^\nu + \overset{1}{\Gamma}{}_{\nu\lambda}^\nu \quad c^\nu = \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{1}{c}{}^\nu \quad \text{mit} \quad \overset{0}{c}{}^\nu = \delta^\nu_4. \quad (\text{E.15})$$

0. Ordnung der Bilanzgleichung (E.7)

In 0. Ordnung lautet die Bilanzgleichung

$$j^\nu{}_{|\nu} + \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} j^\lambda = \frac{1}{4} \overset{0}{u}{}_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\nu, \quad (\text{E.16})$$

wobei mit

$$\overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} j^\lambda = \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} \overset{0}{u} \overset{0}{c}{}^\lambda = 3 \alpha \overset{0}{u} \quad \text{nach (4.26a) und } \overset{0}{c}{}^\nu = \delta^\nu{}_4 \quad (\text{E.17})$$

$$\overset{0}{u}{}_{|\nu} + 4 \tilde{\alpha} \overset{0}{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overset{0}{u} R^4 = \text{const.} \quad (\text{E.18})$$

folgt, was das Verhalten der kosmischen Hintergrundstrahlung beschreibt.

Die Bilanzgleichung (E.7) in 1. Ordnung

Durch Einsetzen des Ansatzes (E.14), (E.15) in die Gleichung (E.7) erhalten wir folgende Bilanzgleichung 1. Ordnung:

$$j^\nu{}_{|\nu} + \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} j^\lambda + \overset{1}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} j^\lambda = \frac{1}{4} \left(\overset{1}{u}{}_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{0}{u}{}_{|\nu} \overset{1}{c}{}^\nu \right) \quad (\text{E.19})$$

mit

$$j^\nu = \overset{1}{\varrho}_r c^2 \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{0}{\varrho}_r c^2 \overset{1}{c}{}^\nu + 2. \text{ Ord.} . \quad (\text{E.20})$$

Zur Bestimmung und Definition der gestörten Energiedichte $\overset{1}{u}$ betrachten wir die Energiedichte u_0 :

$$u_0 = j^\nu c_\nu = \overset{0}{j}{}^\nu \overset{0}{c}{}_\nu + \overset{1}{j}{}^\nu \overset{0}{c}{}_\nu + \overset{0}{j}{}^\nu \overset{1}{c}{}_\nu = \overset{0}{\varrho}_r c^2 + \overset{1}{\varrho}_r c^2 + \overset{0}{\varrho}_r c^2 \underbrace{\left(\overset{0}{c}{}^\nu \overset{1}{c}{}_\nu + \overset{1}{c}{}^\nu \overset{0}{c}{}_\nu \right)}_{=0 \text{ nach (4.33)}}, \quad (\text{E.21})$$

was auf:

$$\overset{0}{u} = \overset{0}{\varrho}_r c^2 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u} = \overset{1}{\varrho}_r c^2 \quad (\text{E.22})$$

führt. Für die Bilanzgleichung in 1. Ord. (E.19) gilt auch (\cdot ; kovariante Ableitung bzgl. des Hintergrunds)

$$j^\nu{}_{;\nu} + \overset{1}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu\lambda} j^\lambda = \frac{1}{4} \left(\overset{1}{u}{}_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{0}{u}{}_{|\nu} \overset{1}{c}{}^\nu \right), \quad (\text{E.23})$$

was unter Verwendung von

$$j^\nu{}_{;\nu} = j^\nu{}_{|\nu} + j^\sigma{}_{|\sigma} h^{\sigma\nu}, \quad (\text{E.24})$$

$$\overset{1}{j}{}^\nu{}_{|\nu} \stackrel{(\text{E.10})}{=} j^\nu{}_{;\nu} + j^\sigma{}_{|\sigma} \overset{0}{v}{}_\sigma \overset{0}{v}{}^\nu \stackrel{(\text{E.20})}{=} j^\nu{}_{;\nu} + \overset{1}{u} \overset{0}{v}{}^\nu + \overset{0}{\varrho}_r c^2 \overset{1}{c}{}^\sigma \overset{0}{v}{}_\sigma \overset{0}{v}{}^\nu \quad \text{und} \quad (\text{E.25})$$

$$j^\sigma v_\sigma \stackrel{(E.20)}{=} \varrho_r c^2 + \varrho_r c^2 \overset{0}{c}{}^\sigma v_\sigma \stackrel{(E.22)}{=} \overset{1}{u} + \varrho_r c^2 \overset{0}{c}{}^\sigma v_\sigma \quad (E.26)$$

in

$$\left(\overset{1}{j}_\sigma \overset{0}{h}{}^{\sigma\nu} \right)_{;\nu} + \left(\overset{1}{u} v^\nu \right)_{;\nu} + \left(\varrho_r c^2 \overset{0}{c}{}^\sigma v_\sigma v^\nu \right)_{;\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^1 \varrho_r c^2 v^\lambda = \frac{1}{4} \left(\overset{1}{u}_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{0}{u}_{|\nu} \overset{1}{c}{}^\nu \right) \quad (E.27)$$

übergeht.

Ficksches Gesetz

Das Ficksche Gesetz für die Dreier-Energiestromdichte lautet:

$$j^\nu = \lambda u^{|\nu}. \quad (E.28)$$

Da \vec{j}/l_γ die auf einer freien Weglänge l_γ pro Zeiteinheit absorbierte Energiestromdichte \vec{j} darstellt, was gleich der Kraftdichte des Strahlungsdrucks ist:

$$\frac{\vec{j}}{l_\gamma} = -\text{grad } p = -\frac{1}{3} \text{grad } u = -\frac{1}{3} \text{grad } \varrho_r c^2, \quad (E.29)$$

so folgt:

$$\vec{j} = -\frac{l_\gamma}{3} \text{grad } u. \quad (E.30)$$

Da der Gradient in (E.28) nur auf die Störung wirkt, ist das Ficksche Gesetz für die Störungen $\overset{1}{u}$ anzusetzen:

$$\overset{1}{j}{}^\nu = \lambda \overset{1}{u}{}^{|\nu} = \lambda \overset{1}{u}_{|\sigma} \overset{0}{h}{}^{\sigma\nu}. \quad (E.31)$$

Der Vergleich mit (E.30) liefert:

$$\lambda = \frac{l_\gamma}{3}. \quad (E.32)$$

Wird das Ficksche Gesetz in der Form $\overset{1}{j}_\sigma = \lambda \overset{1}{u}_{|\sigma}$ in die Bilanzgleichung (E.27) eingesetzt, geht sie in

$$\left(\lambda \overset{1}{u}_{|\sigma} \overset{0}{h}{}^{\sigma\nu} \right)_{;\nu} + \left(\overset{1}{u} v^\nu \right)_{;\nu} + \left(\varrho_r c^2 \overset{0}{c}{}^\sigma v_\sigma v^\nu \right)_{;\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^1 \varrho_r c^2 v^\lambda = \frac{1}{4} \left(\overset{1}{u}_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{0}{u}_{|\nu} \overset{1}{c}{}^\nu \right) \quad (E.33)$$

über.

Nach Übergang zu angepaßten Koordinaten erhalten wir aus Gleichung (E.33):

$$\begin{aligned} & \lambda_{|n} \overset{1}{u}_{|s} \overset{0}{g}{}^{sn} + \lambda \overset{1}{u}_{|s;n} \overset{0}{g}{}^{sn} - \lambda \overset{1}{u}_{|4} v^\nu{}_{;\nu} + \\ & + \overset{1}{u}_{|4} + \overset{1}{u} v^\nu{}_{;\nu} + \varrho_r{}_{|4} c^2 \overset{1}{c}{}^4 + \varrho_r c^2 \overset{1}{c}{}^4{}_{|4} + \varrho_r c^2 v^\nu{}_{|\nu} + \Gamma_{\nu 4}^1 \varrho_r c^2 = \\ & = \frac{1}{4} \left(\overset{1}{u}_{|4} + \varrho_r{}_{|4} c^2 \overset{1}{c}{}^4 \right). \end{aligned} \quad (E.34)$$

Da folgende Relationen gelten

$$\lambda_{|n} = 0 \qquad \qquad \qquad \overset{0}{v}{}^\nu{}_{;\nu} = \overset{0}{\Gamma}{}^\nu{}_\lambda \overset{0}{v}{}^\lambda = 3\tilde{\alpha} \quad (\text{E.35})$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^\nu{}_{\nu 4} = \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}_{44|4} + \frac{\tilde{\alpha}}{R^2} \overset{1}{g}{}_{nn} - \frac{1}{2R^2} \overset{1}{g}{}_{nn|4} \qquad \overset{1}{c}{}^4 = \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^{44} = -\frac{1}{2} \overset{1}{g}{}_{44}, \quad (\text{E.36})$$

vereinfacht sich die Bilanzgleichung (E.34) zu

$$\begin{aligned} \lambda \overset{1}{u}{}_{|s|n} \overset{0}{g}{}^{sn} + \frac{3}{4} \overset{1}{u}{}_{|4} + 3\tilde{\alpha} \left(\overset{1}{u} - \frac{1}{2} \overset{0}{\varrho}_r c^2 \overset{1}{g}{}_{44} \right) - \frac{3}{8} \overset{0}{\varrho}_r c^2 \overset{1}{g}{}_{44} + \\ + \overset{0}{\varrho}_r c^2 \left[\frac{\tilde{\alpha}}{R^2} \overset{1}{g}{}_{nn} - \frac{1}{2R^2} \overset{1}{g}{}_{nn|4} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

und wir können sie mit der 0. Ordnung

$$\overset{0}{\varrho}_r c^2 = -4 \tilde{\alpha} \overset{0}{\varrho}_r c^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{R^2} \overset{1}{g}{}_{nn} \right)_{|4} = -\frac{2\tilde{\alpha}}{R^2} \overset{1}{g}{}_{nn} + \frac{1}{R^2} \overset{1}{g}{}_{nn|4} \quad (\text{E.38})$$

in die Gleichung:

$$\frac{4}{3} \lambda \overset{1}{u}{}_{|s|n} \overset{0}{g}{}^{sn} + \overset{1}{u}{}_{|4} + \underbrace{4 \tilde{\alpha} \overset{1}{u} - \frac{2}{3} \overset{0}{\varrho}_r c^2 \left(\frac{1}{R^2} \overset{1}{g}{}_{nn} \right)_{|4}}_{\text{Trans-Newton-Term}} = 0 \quad (\text{E.39})$$

umformen. Ist die zeitliche Änderung von $\overset{1}{u}$ infolge der Expansion langsam gegenüber der Diffusion, fallen der Trans-Newton-Term und der $\tilde{\alpha}$ -Term weg und die Diffusionsgleichung nimmt die Gestalt an:

$$\frac{4}{3} \lambda \overset{1}{u}{}_{|s|n} \overset{0}{g}{}^{sn} + \overset{1}{u}{}_{|4} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{3} l_\gamma. \quad (\text{E.40})$$

Zur Lösung der Diffusionsgleichung mittels Iteration (Annex C.1) ist sicherzustellen, daß der Laplace-Operator zeitunabhängig ist, was tatsächlich der Fall ist, da die Stoßzeit $\tau_{\gamma e}$ erheblich kleiner als das Weltalter $t \approx 1/\alpha$ ist.

E.2 Diffusion von Elektronenenergie durch das Photonengas

E.2.1 Adiabatische Diffusion der Elektronenenergie

Der Energie-Impuls-Tensor der Materie ist nach (4.8) in gemischten Komponenten durch:

$$\overset{(r)}{T}{}_\mu{}^\nu = \varrho_p c^2 v_\mu v^\nu - p_p (\delta_\mu{}^\nu - v_\mu v^\nu) \quad (\text{E.41})$$

gegeben, wobei sich die Energiedichte:

$$\varrho_p c^2 = n m_0 c^2 + n \frac{3}{2} kT \quad (\text{E.42})$$

aus

$$\text{der Ruhenergiedichte} \quad n m_0 c^2 = \varrho_p c^2 \quad \text{und} \quad (\text{E.43})$$

$$\text{der thermischen Energiedichte} \quad n \frac{3}{2} kT = u \quad \text{zusammensetzt.} \quad (\text{E.44})$$

(n : Anzahldichte, m_0 : Elektronenmasse).

Folglich gilt der Erhaltungssatz sowohl für die Ruhmateriedichte als auch für die thermische Energiedichte:

- Ruhmateriedichte:

$$T_{\mu}^{\nu (p)} = \varrho_p c^2 v_{\mu} v^{\nu} \quad (\text{E.45})$$

$$T_{\mu \parallel \nu}^{\nu (p)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varrho_p |_{\nu} c^2 v_{\mu} v^{\nu} + \varrho_p c^2 \underbrace{v_{\mu} v^{\nu} |_{\nu}}_{=0 \text{ (Normierung)}} = 0. \quad (\text{E.46})$$

Mit dem entsprechenden störungstheoretischen Ansatz für die Materiedichte ϱ_p und die Plasmageschwindigkeit v^{μ} folgt in 0. Ordnung die kosmologische Hintergrundgleichung (4.30) für die Materie:

$${}^0 \varrho_p R^3 = \text{const.} \quad (\text{E.47})$$

- Der Energie-Impuls-Tensor der thermischen Energie

$$T_{\mu}^{\nu (th)} = u v_{\mu} v^{\nu} - p_{th} (\delta_{\mu}^{\nu} - v_{\mu} v^{\nu}) \quad (\text{E.48})$$

geht mit der kalorischen Zustandsgleichung (nicht-relativistische Teilchen)

$$p_{th} = \frac{2}{3} u \quad (\text{E.49})$$

in

$$T_{\mu}^{\nu (th)} = \frac{5}{3} u v_{\mu} v^{\nu} - \frac{2}{3} u \delta_{\mu}^{\nu} \quad (\text{E.50})$$

über, so daß der Erhaltungssatz für die thermische Energie wie folgt lautet:

$$T_{\mu \parallel \nu}^{\nu (th)} = \frac{5}{3} u v_{\mu \parallel \nu} v^{\nu} + \frac{5}{3} (u v^{\nu})_{\parallel \nu} v_{\mu} - \frac{2}{3} u |_{\mu} = 0. \quad (\text{E.51})$$

Nach der Projektion auf die Elektronen-4-Geschwindigkeit v^{μ} folgt:

$$\frac{5}{3} (u v^{\nu})_{\parallel \nu} - \frac{2}{3} u |_{\mu} v^{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{5} u |_{\nu} v^{\nu} + u v^{\nu} |_{\nu} = 0 \quad (\text{E.52})$$

was unter Verwendung des thermischen Energiestroms $j^\nu = u v^\nu$ die Bilanzgleichung ergibt:

$$j^\nu{}_{;\nu} = \frac{2}{5} u_{|\nu} v^\nu. \quad (\text{E.53})$$

Analog dem Vorgehen bei der Diffusion von Strahlungsenergie durch das Photonengas wählen wir den entsprechenden störungstheoretischen Ansatz für die Energiestromdichte j^ν sowie den Energiestrom u und erhalten die Bilanzgleichung in 0. Ordnung:

$${}^0 j^\nu{}_{;\nu} = {}^0 j^\nu{}_{|\nu} + \Gamma^0{}_{\nu\lambda} j^\lambda = \frac{2}{5} {}^0 u_{|\nu} v^\nu \Leftrightarrow {}^0 u_{|4} + 5 \tilde{\alpha} {}^0 u = 0. \quad (\text{E.54})$$

Aus Gleichung (E.54) folgt:²⁹

$${}^0 R^5 = \text{const.} \Leftrightarrow n k T R^5 = \text{const.} \rightarrow \begin{cases} T R^2 = \text{const.} \\ n R^3 = \text{const.} \end{cases}. \quad (\text{E.55})$$

Die Bilanzgleichung (E.53) lautet in 1. Ordnung:

$${}^1 j^\nu{}_{;\nu} + \Gamma^1{}_{\nu\lambda} j^\lambda = \frac{2}{5} \left({}^1 u_{|\nu} v^\nu + {}^0 u_{|\nu} v^\nu \right). \quad (\text{E.56})$$

In diesem Fall sind die Träger des Diffusionsstroms die Photonen:

$$\text{Vierer-Geschwindigkeit des Trägers: } c^\mu \quad (\text{E.57})$$

$$\text{Projektor: } h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - c_\mu c_\nu. \quad (\text{E.58})$$

Weiterhin gilt entsprechend den Beziehungen in Annex E.1:

$${}^1 j^\nu = {}^1 j^\nu + j^\sigma c_\sigma c^\nu \quad (\text{E.59})$$

$${}^1 j^\nu = {}^1 u v^\nu + {}^0 u v^\nu \quad (\text{E.60})$$

$${}^1 j^\sigma c_\sigma = {}^1 u v^\sigma c_\sigma + {}^0 u v^\sigma c_\sigma = {}^1 u + {}^0 u v^\sigma c_\sigma \quad (\text{E.61})$$

$${}^1 j^\nu = {}^1 j^\nu + \left({}^1 u + {}^0 u v^\sigma c_\sigma \right) c^\nu. \quad (\text{E.62})$$

Unter Verwendung des Fickschen Gesetzes

$${}^1 j^\nu = \lambda {}^1 u_{|\nu} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{3} l_e \frac{\bar{v}_e}{c}, \quad (\text{E.63})$$

²⁹ $T R^2 = \text{const.}$ wird üblicherweise aus $|\vec{p}| R = \text{const.}$ abgeleitet.

l_e der mittleren freien Weglänge der Elektronen und \bar{v}_e ihrer mittleren Geschwindigkeit sowie den Relationen (E.59) – (E.62) erhalten wir die Bilanzgleichung in 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} & (\lambda \overset{1}{u}_{|\sigma} \overset{0}{h}{}^{\sigma\nu})_{;\nu} + \overset{1}{u}_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{1}{u} \overset{0}{c}{}^\nu_{;\nu} + \overset{0}{u}_{|\nu} \overset{1}{v}{}^\sigma \overset{0}{c}{}^\sigma \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{0}{u} \left(\overset{1}{v}{}^\sigma \overset{0}{c}{}^\sigma \right)_{|\nu} \overset{0}{c}{}^\nu + \overset{0}{u} \overset{1}{v}{}^\sigma \overset{0}{c}{}^\sigma \overset{0}{c}{}^\nu_{;\nu} + \\ & + \overset{1}{\Gamma}{}^\nu_{\nu\lambda} \overset{0}{u} \overset{0}{v}{}^\lambda = \frac{2}{5} \left(\overset{1}{u}_{|\nu} \overset{0}{v}{}^\nu + \overset{0}{u}_{|\nu} \overset{1}{v}{}^\nu \right), \end{aligned} \quad (\text{E.64})$$

die in angepaßten Koordinaten unter Berücksichtigung von (E.35) und (E.36) sowie der Gleichung 0. Ordnung (E.54) in

$$\frac{5}{3} \lambda \overset{1}{u}_{|s|n} \overset{0}{g}{}^{sn} + \overset{1}{u}_{|4} + 5 \tilde{\alpha} \overset{1}{u} - \underbrace{\frac{5}{6} \varrho_r c^2 \left(\frac{1}{R^2} \overset{1}{g}_{nn} \right)_{|4}}_{\text{Trans-Newton-Term}} = 0 \quad (\text{E.65})$$

übergeht. Ist die zeitliche Änderung von $\overset{1}{u}$ infolge der Expansion langsam gegenüber der Diffusion, so folgt aus Gleichung (E.65) die Diffusionsgleichung:

$$\frac{5}{3} \lambda \overset{1}{u}_{|s|n} \overset{0}{g}{}^{sn} + \overset{1}{u}_{|4} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{3} l_e \frac{\bar{v}_e}{c}. \quad (\text{E.66})$$

Bei der adiabatischen Diffusion ist die Elektronentemperatur nicht an die Photonen gekoppelt. Da jedoch die Elektronen in das riesige thermische Bad der Photonen eingeschlossen sind, ist es sinnvoll, die Diffusion der Elektronenenergie durch das Photonengas isotherm zu behandeln, was in Annex E.2.2 durchgeführt wird.

E.2.2 Isotherme Diffusion der Elektronenenergie

Zur Zeit der Rekombination gilt für die thermische Energiedichte der Elektronen:

$$u = n \frac{3}{2} k_B T \simeq 2.43 \cdot 10^{-10} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \quad \text{mit} \quad n = \frac{\overset{0}{\varrho}_{\text{PH}} z^3}{m_p}, \quad (\text{E.67})$$

für die Strahlungsenergiedichte

$$\varrho_r c^2 = \sigma T^4 \simeq 1.46 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \quad (\text{E.68})$$

und das Verhältnis aus beiden

$$\frac{\varrho_r c^2}{u} \simeq 6 \cdot 10^9, \quad (\text{E.69})$$

das vor der Rekombination erhalten bleibt. Somit ist das Photonengas für die Elektronen ein riesiges Wärmebad, so daß wir vor der Rekombination

- (i) isotherme Diffusion der Elektronenenergie betrachten und
- (ii) den Wert der isothermen Schallgeschwindigkeit wählen.

Aus der thermischen Energiedichte folgt für

$$T = \text{const.} : \quad u = n \frac{3}{2} k_B T, \quad (\text{E.70})$$

so daß es sich lediglich um die Diffusion der Elektronenzahl n handelt. Mit dem Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu}^{\nu} \stackrel{(\text{th})}{=} n v_{\mu} v^{\nu} \quad (\text{E.71})$$

und dem Erhaltungssatz

$$T_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} \stackrel{(\text{th})}{=} n v_{\mu;\nu} v^{\nu} + (n v^{\nu})_{;\nu} v_{\mu} = 0 \quad (\text{E.72})$$

erhalten wir nach Projektion auf die Elektronengeschwindigkeit v^{μ}

$$(n v^{\nu})_{;\nu} = 0 \quad (\text{E.73})$$

und unter Verwendung der Energiestromdichte $j^{\nu} = n v^{\nu}$ folgende Bilanzgleichung:

$$j^{\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (\text{E.74})$$

Nach Einsetzen des entsprechenden störungstheoretischen Ansatzes für die Elektronenzahl n und die Elektronengeschwindigkeit v^{μ} ergibt sich die Bilanzgleichung in 0. Ordnung:

$${}^0 j^{\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left({}^0 n v^{\nu} \right)_{;\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^0 n R^3 = \text{const.} \quad (\text{E.75})$$

In 1. Ordnung folgt aus der Bilanzgleichung (E.74) ($;$ kovariante Ableitung bzgl. des Hintergrunds)

$${}^1 j^{\nu}{}_{;\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} {}^0 j^{\lambda} = 0, \quad (\text{E.76})$$

wobei

$${}^1 j^{\nu} = {}^1 n v^{\nu} + {}^0 n {}^1 v^{\nu} \quad (\text{E.77})$$

und

$${}^1 j^{\nu} = {}^1 j^{\nu} + {}^1 j^{\sigma} c_{\sigma}^0 c^{\nu}, \quad {}^1 j^{\sigma} c_{\sigma}^0 = {}^1 n + {}^0 n {}^1 v^{\sigma} c_{\sigma}^0 \quad (\text{E.78})$$

gilt und die Vierer-Geschwindigkeit des Trägers c^{μ} und der Projektor $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - c_{\mu} c_{\nu}$ ist. Dementsprechend lautet die Bilanzgleichung in 1. Ordnung:

$${}^1 j^{\nu}{}_{;\nu} + \left[\left({}^1 n + {}^0 n {}^1 v^{\sigma} c_{\sigma}^0 \right) c^{\nu} \right]_{;\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} {}^0 j^{\lambda} = 0, \quad (\text{E.79})$$

die mit dem Fickschen Gesetz

$$j^{\underline{\nu}} = \lambda \dot{n}^{\underline{\nu}} = \lambda \dot{n}_{|\sigma}^{\underline{\nu}} h^{\sigma\nu} \quad (\text{E.80})$$

in folgende Gleichung übergeht:

$$\left(\lambda \dot{n}_{|\sigma}^{\underline{\nu}} h^{\sigma\nu} \right)_{;\nu} + \left[\left(\dot{n} + \dot{n}^{\underline{\nu}} v^{\sigma} c_{\sigma} \right) c^{\nu} \right]_{;\nu} + \dot{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\underline{\nu}} j^{\lambda} = 0. \quad (\text{E.81})$$

Nach Wahl von angepaßten Koordinaten und Multiplikation mit $3/2 k_B T$ sowie unter Verwendung der Relationen (E.35), (E.36) und der Gleichung 0. Ordnung (E.75) erhalten wir die Bilanzgleichung

$$\lambda \dot{u}_{|s|n} \dot{g}^{sn} + \dot{u}_{|4} + 3 \tilde{\alpha} \dot{u} - \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u} \left(\frac{1}{R^2} \dot{g}_{nn} \right)}_{\text{Trans-Newton-Term}} = 0, \quad (\text{E.82})$$

die bei Vernachlässigung des $\tilde{\alpha} \dot{u}$ -Terms (s.o.) folgende Form annimmt:

$$\lambda \dot{u}_{|s|n} \dot{g}^{sn} + \dot{u}_{|4} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{3} l_e \frac{\bar{v}_e}{c}. \quad (\text{E.83})$$

Literatur

- [1] R. Arnold: *Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universums und Jeanssche Theorie der Gravitationsinstabilitäten*, in 'Theorie der Sternentwicklung', Skriptum zum Seminar, 68 (WS 2000/2001).
- [2] F. Atrio-Barandela et al.: *Observational matter power spectrum and the height of the second acoustic peak*, Ap.J. **559**, 1 (2001).
- [3] J.M. Bardeen: *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22**(8), 1882 (1980).
- [4] J. Binney: *The physics of dissipational galaxy formation*, Ap.J. **215**, 483 (1977).
- [5] H. Bondi: *Cosmology*, Cambridge University Press, 2. Aufl., Cambridge (1968).
- [6] W.B. Bonnor: *The formation of nebulae*, Z. Astrophys. **39**, 143 (1956).
- [7] W.B. Bonnor: *Jeans' formula for gravitational instability*, M.N.R.A.S. **117**, 104 (1957).
- [8] S.A. Bonometto, G.F. De Zotti, F. Lucchin: *Evolution of density fluctuations through cosmological recombination*, A & A **54**, 405 (1977).
- [9] S.A. Bonometto, F. Lucchin: *Evolution of density fluctuations during recombination*, M.N.R.A.S. **187**, 611 (1979).
- [10] F. Bouchet et al.: *Evidence against or for topological defects in the Boomerang data?* Los Alamos preprint astro-ph/0005022.
- [11] K. Brecher, J. Silk: *Lemaître universe, galaxy formation and observations*, Ap.J. **158**, 91 (1969).
- [12] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, 20. Aufl., Verlag Harri Deutsch (1983).
- [13] M. Bruni, P.K.S. Dunsby, G.F.R. Ellis: *Cosmological perturbations and the physical meaning of gauge-invariant variables*, Ap.J. **395**, 34 (1992).
- [14] L. Cayón, G. Smoot: *Hot and cold spots in the first plus second year COBE/DMR maps*, Ap.J. **452**, 487 (1995).

- [15] R. Cen, J.P. Ostriker: *A three-dimensional hydrodynamic treatment of the hot dark matter cosmological scenario*, Ap.J. **399**, 331 (1992).
- [16] R. Cen, J.P. Ostriker: *A hydrodynamic treatment of the cold dark matter cosmological scenario*, Ap.J. **393**, 22 (1992).
- [17] R. Cen, J.P. Ostriker: *Physical bias of galaxies from large-scale hydrodynamic simulations*, Ap.J. **538**, 83 (2000).
- [18] S. Chandrasekhar: *Turbulence – a physical theory of astrophysical interest*, Ap.J. **110**, 329 (1949).
- [19] P. Coles, F. Lucchin: *Cosmology – The origin and evolution of cosmic structure*, John Wiley & Sons Ltd. (1995).
- [20] S. Cole et al.: *Hierarchical galaxy formation*, M.N.R.A.S. **319**/1, 168 (2000).
- [21] M. Corona: *Hydrodynamical approach of galaxy formation on the basis of a fluid-model of two and three components during the recombination era of the universe*, Dissertation an der Universität Konstanz (1984).
- [22] L.M. Diaz-Rivera, H. Dehnen: *Determination of the typical masses of the formed structures in the recombination epoch. A two-fluid model*, Grav. & Cosmol. **4**, 274 (1998).
- [23] R. D’Inverno: *Einführung in die Relativitätstheorie*, VCH-Verlag, Weinheim (1995).
- [24] A.G. Doroshkevich, Ya.B. Zel’dovich, I.D. Novikov, Sov. Astron.-AJ **11**, 233 (1967).
- [25] G.F.R. Ellis: *Does inflation necessarily imply $\Omega = 1$?*, Class. Quant. Grav. **5**, 891 (1988).
- [26] G.F.R. Ellis, M. Bruni: *Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations*, Phys. Rev. D **40**, 1804 (1989).
- [27] G.F.R. Ellis, J. Hwang, M. Bruni: *Covariant and gauge-independent perfect-fluid Robertson-Walker perturbations*, Phys. Rev. D **40**(6), 1819 (1989).
- [28] R.S. Ellis: *Galaxy formation and evolution: recent progress*, Lectures given at the XIth Canary Islands Winter School of Astrophysics ‘Galaxies at high redshifts’ (Nov. 1999) updated during 2000, Los Alamos preprint astro-ph/0102056.
- [29] T. Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie*, B.J. Wissenschaftsverlag (1990).
- [30] V. Fock: *Theorie von Raum, Zeit und Gravitation*, Akademie-Verlag, Berlin (1960).

- [31] G. Gamow: *The role of turbulence in the evolution of the universe*, Phys. Rev. **86**, 251 (1952).
- [32] E. Geßner: *Untersuchung zur Rekombination*, im Rahmen des Seminars 'Theorie der Sternentwicklung', unveröffentlicht (WS 2000/2001).
- [33] O. Heckmann, E. Schücking: *Newtonsche und Einsteinsche Kosmologie*, in S. Flügge: *Handbuch der Physik*, Band LIII, Springer-Verlag, Marburg (1959).
- [34] W. Heisenberg, C.F. von Weizsäcker: *Die Gestalt der Spiralnebel*, Z. Phys. **125**, 290 (1948).
- [35] S.-H. Hsieh, E.A. Spiegel: *The equation of photodynamics*, Ap.J. **207**, 244 (1976).
- [36] P. Hübner, J. Ehlers: *Inflation in curved model universes with non-critical density*, Class. Quant. Grav. **8**, 333 (1991).
- [37] J.-C. Hwang, E.T. Vishniac: *Analyzing cosmological perturbations using the covariant approach*, Ap.J. **353**, 1 (1990).
- [38] R. Jimenez: *The epoch of galaxy formation*, Los Alamos preprint astro-ph/0110232.
- [39] B.J.T. Jones: *The origin of galaxies: A review of recent theoretical developments and the confrontation with observation*, Rev. of Mod. Phys. **48**(1), 107 (1976).
- [40] P. Jordan: *Schwerkraft und Weltall, Grundlagen der theoretischen Kosmologie*, Vieweg & Sohn, Braunschweig (1955).
- [41] N. Katz, J.E. Gunn: *Dissipational galaxy formation. I. Effects of gasdynamics*, Ap.J. **377**, 365 (1991).
- [42] N. Katz, L. Hernquist, D.H. Weinberg: *Galaxies and gas in a cold dark matter universe*, Ap.J. **399**, L109 (1992).
- [43] G. Kauffmann, S.D.M. White, B. Guiderdoni: *The formation and evolution of galaxies within merging dark matter halos*, M.N.R.A.S. **264**, 201 (1993).
- [44] O. Klein, Archiv f. Math, Astr. och Fys., **341A**(19) (1947).
- [45] G. Lemaître: *The expanding universe*, M.N.R.A.S. **91**, 490 (1931).
- [46] J. Lesgourgues, M. Peloso: *Remarks on the Boomerang results, the baryon density and the leptonic asymmetry*, Phys. Rev. D **62**, 81301 (2000).
- [47] E. Lifshitz, J. Phys. U.S.S.R., **10**, 116 (1946).

- [48] S. McGaugh: *Dynamics and the second peak: cold dark matter?*, Int. J. Mod. Phys. A, Los Alamos preprint hep-ph/0010214 (2000).
- [49] S. McGaugh, S. Stacy: *Boomerang data suggest a purely baryonic universe*, Ap.J. **541**, L33 (2000).
- [50] R.W. Michie, Kitt Peak National Observatory Contr. **440** (1967).
- [51] E. Milne: *A Newtonian expanding universe*, Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 64 (1934).
W. McCrea, E. Milne: Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 73 (1934).
- [52] V.F. Mukhanov, H.A. Feldmann, R.H. Brandenberger: *Theory of cosmological perturbations*, Phys. Rep. **215**, 203 (1992).
- [53] C. Murali et al.: *The growth of galaxies in cosmological simulations of structure formation*, Los Alamos preprint astro-ph/0106282.
- [54] NAG – FORTRAN – LIBRARY – Mark 15, Volume 1, C02.
- [55] NAG – FORTRAN – LIBRARY – Mark 15, Volume 2, D02.
- [56] V.K. Narayanan, A.A. Berlind, D.H. Weinberg: *Locally biased galaxy formation and large-scale structure*, Ap.J. **528**, 1 (2000).
- [57] K.A. Olive: *Big Bang Nucleosynthesis*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **80**, 79 (2000).
- [58] J. Overduin, W. Priester: *Problems of modern cosmology: how dominant is the vacuum?*, Naturwiss. **88**, 229 (2001).
- [59] F.R. Pearce et al.: *A simulation of galaxy formation and clustering*, Ap.J. **521**, L99 (1999).
- [60] F.R. Pearce et al.: *Simulations of galaxy formation in a cosmological volume*, M.N.R.A.S. **000**, 1 (2000).
- [61] P.J.E. Peebles: *The black-body radiation content of the universe and the formation of galaxies*, Ap.J. **142**(4), 1317 (1965).
- [62] P.J.E. Peebles: *The gravitational instability of the universe*, Ap.J. **147**(3), 859 (1967).
- [63] P.J.E. Peebles, R.H. Dicke: *Origin of the globular star cluster*, Ap.J. **154**, 891 (1968).
- [64] P.J.E. Peebles: *Primeval globular clusters. II*, Ap.J. **142**(4), 1075 (1969).
- [65] P.J.E. Peebles, J.T. Yu: *Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe*, Ap.J. **162**, 815 (1970).

- [66] P.J.E. Peebles: *The large-scale structure of the universe*, Princeton University Press, Princeton (1980).
- [67] P.J.E. Peebles, S. Seager, W. Hu: *Delayed recombination*, Ap.J. **539**, L1 (2000).
- [68] W. Priester: *The scale of the universe: a unit of length*, Comments Astrophys. **17**(6), 327 (1995).
- [69] W. Priester, J. Hoell, D.-E. Liebscher, C. van de Bruck: *Friedmann-Lemaître model derived from the Lyman alpha forest in quasar spectra*, International Alexander Friedmann Seminar, Pulkov-St. Petersburg, July 1995, 1. Lecture by W. Priester (1995).
- [70] A.G. Riess et al.: *Observational evidence from Supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).
- [71] M.J. Rees, J.P. Ostriker: *Cooling, dynamics and fragmentation of massive gas clouds: clue to the masses and radii of galaxies and clusters*, M.N.R.A.S. **179**, 541 (1977).
- [72] B. Rose, S. Rahmstorf, H. Dehnen: *Propagation of self-gravitating density waves in the deDonder gauge on a gravitational background field*, GRG **20**(11), 1193 (1988).
- [73] B. Rose, H. Dehnen: *Density perturbations in the deDonder gauge on a gravitational background field II*, GRG **21**(7), 705 (1989).
- [74] B. Rose, M. Corona-Galindo: *Propagation of self-gravitating density waves in the deDonder gauge: the physical importance of gauge solutions and the problem of the initial conditions*, GRG **23**(12), 1317 (1991).
- [75] B. Rose: *Stability borders and classification of density perturbations in deDonder-gauge on a cosmological background*, GRG **25**(5), 503 (1995).
- [76] B. Rose: *Propagation of cosmological perturbations – the velocity of sound in the recombination epoch*, Il Nuovo Cimento IIIB **9**, 1125 (1996).
- [77] B. Rose: *Cosmological density perturbations and large-scale structures in the universe*, Habilitationsschrift, Universität Konstanz (1996).
- [78] R. U. Sexl, H. K. Urbantke: *Gravitation und Kosmologie, Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*, 4. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag (1995).
- [79] J. Silk: *Cosmic black-body radiation and galaxy formation*, Ap.J. **151**, 459 (1968).
- [80] J. Silk: *On the fragmentation of cosmic clouds. I. The formation of galaxies and the first generation of stars*, Ap.J. **211**, 638 (1977).
- [81] J. Silk: *Aspects of galaxy formation*, Los Alamos preprint astro-ph/0112295.

- [82] M. Steinmetz, E. Müller: *The formation of disk galaxies in a cosmological context: populations, metallicities and metallicity gradients*, A & A **281**, L97 (1994).
- [83] K. Strubecker: *Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I Grundlagen*, 2. Aufl., Oldenbourg-Verlag (1966).
- [84] A.A. Thoul, D.H. Weinberg: *Hydrodynamic simulations of galaxy formation. I. Dissipation and the maximum mass of galaxies*, Ap.J. **442**, 480 (1995).
- [85] A. Unsöld, B. Baschek: *Der neue Kosmos – Eine Einführung in die Astronomie und Astrophysik*, 6. Aufl., Springer-Verlag (1999).
- [86] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc. (1972).
- [87] C.F. von Weizsäcker: *Über die Entstehung des Planetensystems*, Z. Astrophys. **22**, 319 (1943).
- [88] C.F. von Weizsäcker, Naturwiss. **35**, 188 (1948).
- [89] S.D.M. White, M.J. Rees: *Core condensation in heavy halos: a two-stage theory for galaxy formation and clustering*, M.N.R.A.S. **183**, 341 (1978).
- [90] S.D.M. White, C.S. Frenck: *Galaxy formation through hierarchical clustering*, Ap.J. **379**, 52 (1991).
- [91] M. White, D. Scott, E. Pierpaoli: *Boomerang returns unexpectedly*, Ap.J. **545**, 1 (2000).
- [92] Ya.B. Zel'dovich: *Gravitational instability: an approximate theory of large density perturbations*, A & A **5**, 84 (1970).
- [93] W. Zimdahl: *Gauge-invariant cosmological perturbations from a thermodynamical point of view*, Class. Quant. Grav. **8**, 677 (1991).
- [94] R. Zurmühl: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, 5. Aufl., Springer Verlag, Berlin (1984).

Index

- Amplitudenverhältnis, 34, 36
 - nicht-schwingende Moden, 41, 62
 - schwingende Moden, 52, 67
- Anfangswerte
 - gegenphasiger Fall, 92
 - phasiger Fall, 92
- Ansatz
 - Echtzeitrechnung, 81, 155
 - störungstheoretischer, 20, 113
- Bedingung für die Amplituden, 31, 58
- Bestimmungsgleichungen
 - Amplituden, 31, 140
- Bewegungsgleichungen
 - Materie, 16, 19, 112
 - 0. Ordnung, 21, 22
 - 1. Ordnung, 25, 125
 - Strahlung, 17, 19, 112
 - 0. Ordnung, 21, 22, 116
 - 1. Ordnung, 25, 127
- Cardansche Lösungsformel, 40
- Cardansches Verfahren, 40
- Christoffel-Symbole, 110
 - 0. Ordnung, 115
 - Perturbationen, 118
 - 3 + 1 – Zerlegung, 118
- DeDonder-Eichung, 119
 - 3 + 1 – Zerlegung, 120
 - Definition, 120
 - Nebenbedingungen, 120
- Dichtekontrast
 - Definition, 25
- Differentialgleichung
 - Materiedichtefluktuationen, 83, 84, 157
 - Strahlungsdichtefluktuationen, 83, 84, 157
- Diffusionsgleichung, 185
 - relativistische
 - Elektronenenergie, 196, 198
 - Strahlungsenergie, 193
- Diskriminante, 41, 51, 72, 143
- Dispersionsrelation, 32, 140
- Dispersionsrelations-Methode
 - Gültigkeit der, 30, 49, 58, 66, 147
- Druck
 - hydrodynamischer, 19
 - hydrostatischer, 18
 - Plasma-, 17
 - Strahlungs-, 17
- Dunkelmaterie
 - kalte, nicht-baryonische, 176
- Eichung
 - DeDonder-, 119
 - 3 + 1 – Zerlegung, 120
 - Definition, 120
 - Nebenbedingungen, 120
 - synchrone, 119
 - Eichung der Metrik, 119
- Einstein-de-Sitter-Universum, 165
- Einstein-Universum, 169
- Einsteinsche Feldgleichungen, 109
 - allgemeine Kovarianz, 119
 - Störgrößen, 124
- Energie-Impuls-Übertrag, 112
- Energie-Impuls-Gesetz
 - Photonengas, 112
 - Plasma, 112
- Energie-Impuls-Spannungs-Tensor, 110
 - Materieanteil, 110
 - Perturbationen, 122
 - Spur, 122
 - Strahlungsanteil, 111

- Energieerhaltungssatz
 - Materie
 - 0. Ordnung, 116
 - 1. Ordnung, 126
 - Strahlung
 - 0. Ordnung, 116
 - 1. Ordnung, 127
- Euler-Gleichungen
 - Materie, 16, 19
 - 0. Ordnung, 21
 - 1. Ordnung, 25
 - Strahlung, 17, 19
 - 0. Ordnung, 21
 - 1. Ordnung, 25
- Expansionsgeschwindigkeit, 22, 33
- Feldgleichungen
 - Einsteinsche, 109
 - Störgrößen, 124
 - 44-Komponente, 124
 - Dreier-Spur, 124
- Ficksches Gesetz, 192
- freie Weglänge
 - Elektronen, 18
 - Photonen, 18
 - Plasmateilchen, 18
 - s-Abhängigkeit, 33
 - z-Abhängigkeit, 33
- Friedman-Gleichungen, 22, 114
- Friedman-Modell, 114, 166
- Galaxienentstehung
 - Abschätzung, 37
 - allgemein-relativistischer Teil, 147
 - Newtonscher Teil, 38
- Gravitationspotential
 - 0. Ordnung, 21
 - 1. Ordnung, 25
- Hintergrundgleichungen
 - kosmologische, 22, 116
- Hubble-Gesetz, 22
- Hubble-Konstante, 22, 165
- hydrodynamischer Druck, 19
- hydrostatischer Druck, 18
- Imaginärteilgleichung, 39, 59
 - schwingende Moden, 39
- Impulsübertrag, 19
- Impulssatz
 - Materie, 125, 126
 - Strahlung, 127
- instabile Moden, 35
- Jeanssche Instabilität, 15
- Jeans-Länge, 15
- Kontinuitätsgleichungen
 - Materie, 17
 - 0. Ordnung, 21, 116
 - 1. Ordnung, 25, 126
 - Strahlung, 17
 - 0. Ordnung, 21, 116
 - 1. Ordnung, 25, 127
- kosmologische Hintergrundgleichungen, 22, 116
- kosmologische Konstante, 109
 - Friedman-Modell, 167
 - kritische, 170
 - Lemaître-Modell, 171
 - Priester-Modell, 168
- Krümmungsparameter, 23, 114
- kubische Resolvente, 40
- Lemaître-Modell, 169
- Masse der Materiedichtefluktuationen, 31
- Materiedichte
 - heutige, 24
 - s-Abhängigkeit, 33
 - z-Abhängigkeit, 33
- Materiedichtefluktuationen
 - Masse der, 31

- Materietemperatur
 nach der Rekombination, 61
 vor der Rekombination, 60
- Metrik
 Eichung, 119
 Perturbationen, 117
 $3 + 1$ -Zerlegung, 118
 Nebenbedingungen, 120
- Mode b_1
 nicht-schwingende, 44, 64, 145
- Mode b_2
 nicht-schwingende, 44, 64, 145
- Mode b_3
 nicht-schwingende, 47, 66
- Moden
 instabile, 35
 nicht-schwingende, 39, 40, 61, 72, 144
 quasi-instabile, 35
 schwingende, 39, 50, 54, 66, 69, 75,
 151
 stabile, 35
- NAG-Routine
 D02BAF, 92
 D02CAF, 92
 D02EAF, 93
- Nebenbedingungen
 Metrikperturbationen, 120
- nicht-schwingende Moden, 39, 61, 72, 144
- Periode, 35
 bei vollständiger Ionisation, 55
 nach der Rekombination, 67
 während der Rekombination, 77
- Phasengeschwindigkeit, 30
 bei vollständiger Ionisation, 58
 nach der Rekombination, 68
- Plasmadruck, 17
- Poisson-Gleichung, 17
 0. Ordnung, 21
 1. Ordnung, 25
- Priester-Modell, 168
- Projektor
 Materie, 111
 Strahlung, 111
- quasi-instabile Moden, 35
- Quellterm, 110
 Perturbationen, 122
 mn -te Komponente, 123
 $3 + 1$ -Zerlegung, 123
 44-Komponente, 123
 Spur, 123
- Realteilgleichung, 39, 59
 nicht-schwingende Moden, 39
 schwingende Moden, 39
- reduzierte Gleichung 3. Grades, 40
- reduzierte Gleichung 4. Grades, 40
- Rekombination, 24, 36, 70
- Relaxationszeit, 35
 bei vollständiger Ionisation, 44, 47, 48,
 55
 nach der Rekombination, 64, 67
 während der Rekombination, 73, 74,
 77
- Ricci-Tensor, 110
 Perturbationen, 120
 mn -te Komponente, 121
 $3 + 1$ -Zerlegung, 121
 44-Komponente, 121
 Spur, 121
- Robertson-Walker-Metrik, 114, 115
- Rotverschiebung, 23
 zeitliche Ableitung, 83, 156
- Saha-Gleichung, 70
- Schallgeschwindigkeit
 adiabatische, 20
 isotherme, 20
 s-Abhängigkeit, 33
 z-Abhängigkeit, 33

Schallwellengleichung

- Materiedichtekontrast, 26, 27, 130–132

- Newton-Limes, 137

- Newton, 26

- Newton-Limes, 136

- Strahlungsdichtekontrast, 26, 27, 130, 131, 133

- Newton-Limes, 137

- schwingende Moden, 39, 50, 66, 69, 75, 151

Schwingungsperiode

- siehe* Periode

Skalenparameter, 114

- heutiger, 168, 171

- kritischer, 170

- störungstheoretischer Ansatz, 20, 113

- stabile Moden, 35

Strömungsgeschwindigkeiten

- 1. Ordnung, 30, 82

Strahlungsdruck, 17

- synchrone Eichung, 119

Temperatur

- heutige, 24

- s-Abhängigkeit, 33

- z-Abhängigkeit, 33

Universum

- Einstein-, 169

- Einstein-de-Sitter-, 165

- Friedman-, 114, 166

- Lemaître-, 169

- Modelle, 114

- Priester-, 168

Vierer-Geschwindigkeit

- gestörte, 117

- $3 + 1$ -Zerlegung, 117

- Materie

- ungestörte, 113

- Strahlung

- ungestörte, 113

Wasserstoffrekombination

- siehe* Rekombination

Wellenzahl, 31

- s-Abhängigkeit, 33

- z-Abhängigkeit, 33

Weltalter, 23

- heutiges, 24, 165

Weltmodelle

- siehe* Universum

Zwei-Flüssigkeits-Modell, 15

Danksagung

Meinen aufrichtigen Dank möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Dehnen aussprechen, zum einen für die Gelegenheit die vorliegende Arbeit an seinem Lehrstuhl durchführen zu können und zum anderen für seine ständige Bereitschaft zu fruchtbaren Diskussionen und für viele aufschlußreiche Hinweise.

Bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls Dehnen möchte ich mich ausdrücklich für die kollegiale und anregende Atmosphäre bedanken.

Ganz besonders herzlich danke ich Dr. Bertfried Fauser, der während der ganzen Zeit ein zuverlässiger Ansprechpartner für sämtliche Probleme computer-technischer, fachlicher und nicht-fachlicher Art war und zusätzlich meine Arbeit abschließend durchsah.

Meinem ehemaligen Zimmerkollegen Dr. Ralph Gensheimer danke ich für zahlreiche fachliche sowie persönliche Gespräche und Dr. Andreas Geitner für die bereitwillige Überlassung 'seiner' Yang-PC-Ressourcen.

Auch möchte ich Dr. Dieter Ebner für seine prompte Hilfe bei Computer-Fragen und für die Installation von Software danken.

Bei Frau Maria Rosner bedanke ich mich für alle organisatorischen Hilfestellungen in meiner Zeit am Lehrstuhl Dehnen.

Weiterhin danke ich meiner Freundin Sabine Ströer für die zuverlässige Betreuung von Alexandra und das Korrekturlesen meiner Arbeit sowie ihrem Mann, der einige Notoperationen am heimischen PC durchgeführt hat, ganz herzlich.

Last but not least seien mein Mann Roland und meine Tochter Alexandra erwähnt, die während der Anfertigung dieser Arbeit oft genug auf mich verzichten mußten, viel Geduld aufbrachten und mich auf vielfältige Weise unterstützten.