Universität Konstanz

Mannigfaltigkeiten mit wenig Symmetrie

Jan-Mark Iniotakis

Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik
Nr. 168, März 2002

ISSN 1430–3558

Universität Konstanz
Fach D 188, 78457 Konstanz, Germany
Email: preprints@informatik.uni–konstanz.de
WWW: http://www.informatik.uni–konstanz.de/Schriften/

Mannigfaltigkeiten mit wenig Symmetrie

Diplomarbeit
mit nachträglichem Anhang
von
Jan-Mark Iniotakis

Fakultät für Mathematik
Universität Konstanz

eingereicht am 26. September 1999

Abstract

In this *Diplomarbeit* we show that, when parametrized by their rational cohomology type, “most” compact, simply-connected 8-dimensional manifolds (with possibly one singular point) have only trivial S^1-symmetry. To obtain restrictions on the rational cohomology type in the case of a non-trivial S^1-action, we study the minimal Hirsch-Brown model of the S^1-equivariant cohomology, and derive relations between the cohomology type and the rational cohomology of the fixed point set. Some of the results obtained are interesting in their own right: We show that for a “generic” compact, simply-connected, even-dimensional $\mathbb{Q}$-Poincaré duality space X with S^1-action the fixed point set has at most one component of high formal dimension; and that the map $j_\nu^* : \check{H}^*(X) \to \check{H}^*(F_\nu)$ induced by the inclusion is an isomorphism up to a degree, which is determined by the formal dimension of the fixed point component F_ν.

Inhalt

Einleitung

Ist eine „zufällig ausgewählte“ topologische (glatte) reelle Mannigfaltigkeit der Dimension n S^1-symmetrisch? Mit dieser intuitiv gestellten Frage beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Um unter Objekten „zufällig auswählen“ zu können, bedarf es eines Parameterraumes mit geeigneter Struktur, mit Hilfe derer zwischen „generischen“ und „nicht-generischen“ Teilmengen unterschieden werden kann. Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz, einen solchen Parameterraum für Mannigfaltigkeiten durch Parametrisierung nach dem rationalen Kohomologietyp zu erhalten, wird motiviert durch Ergebnisse von D. Sullivan (vgl. Satz 1.2) bzw. S. Papadima (vgl. Satz 4.4).

Äquivariant-kohomologische Betrachtungen liefern notwendige Bedingungen für die Existenz nicht-trivialer S^1-Operationen auf der zu untersuchenden Klasse von Räumen. Als wichtigste Aussage erhalten wir dabei für eine „große“ Teilklasse dieser Räume (nämlich für diejenigen mit 2-erzeugter rationaler Kohomologie-Algebra), daß sich die rationale Kohomologie-Algebra des Raumes bis auf Isomorphie als graduierte assoziierte Algebra einer multiplikativen Filterung auf der jeweiligen rationalen Fixpunktmengenkohomologie erhalten läßt. Dies legt einen Vergleich der Freiheitsgrade der in Frage kommenden Filterungen gegenüber den Freiheitsgraden aller Kohomologietypen nahe. Eine *a priori* Abschätzung ergibt dabei jedoch, daß sowohl für Fixpunktkomponenten der formalen Dimension $n_i \geq 8$, als auch für Fixpunktkomponenten der formalen Kodimension 2 zusätzliche geeignete Abschätzungen etwa über die Anzahl dieser Fixpunktkomponenten nötig sind, um auf dem hier eingeschlagenen Weg zu dem gewünschten Ergebnis zu gelangen. Im Rahmen dieser Arbeit beschränken wir uns deshalb auf die Dimension $n = 8$. (Man beachte, daß die obige Frage für die Dimension $n = 6$ von V. Puppe in [Pu] bereits weitgehend geklärt wurde.)

Die Arbeit ist daher wie folgt aufgebaut: Im ersten Kapitel stellen wir das bereits erwähnte Resultat von D. Sullivan vor. Ihm folgend führen wir eine geeignete Kategorie $\mathcal{X}_{S^1}^n$ von S^1-Räumen ein, welche unseren Symmetrie-Untersuchungen in den Dimensionen $n = 4k$ zugrundeliegen soll. $\mathcal{X}_{S^1}^n$ enthält außer den einfach-zusammenhängenden, geschlossenen topologischen n-Mannigfaltigkeiten auch solche mit einem singulären Punkt gewissen Typs.

Im zweiten Kapitel wird für recht allgemeine S^1-Räume mit Hilfe des Satzes von Grivel-Thomas-Halperin das minimale Hirsch-Brown-Modell der äquivarianten Kohomologie eingeführt und unter anderem mit Hilfe einer Variante des aus dem Borelschen Lokalisierungsatz gewonnenen Auswertungssatzes studiert. Für den total-nicht-homologen Fall – also etwa, wenn die (nicht-äquivariante) Kohomologie des betreffenden Raumes 2-erzeugt ist – folgern wir daraus wesentliche Zusammenhänge zwischen der Kohomologie des Raumes und derjenigen der Fixpunktmenge. Insbesondere zeigen wir dabei die obige Aussage bezüglich einer Filterung auf der Kohomologie der Fixpunktmenge.

Im dritten Kapitel nutzen wir die Ergebnisse des vorigen Kapitels für die S^1-Räume der Kategorie $\mathcal{X}^8_{S^1}$ mit 2-erzeugter Kohomologie: Wir zeigen für sie erstens die Äquivalenz von trivialer S^1-Operation und dem Vorliegen einer Fixpunktkomponente der formalen Dimension 8 sowie zweitens eine Abschätzung der Anzahl der Fixpunktkomponenten von formaler Dimension 6.

Im vierten Kapitel führen wir mit Hilfe des bereits erwähnten Resultats von Papadima einen Parameterraum ein für die Isomorphieklassen einfach-zusammenhängender Poincaré-Dualitätsalgebren der formalen Dimension 8, und damit auch für die rationalen Kohomologietypen der Kategorie $\mathcal{X}^8_{S^1}$. Dieser Parameterraum ergibt sich als Orbitraum bezüglich einer nicht-eigentlichen Operation einer rationalen Lie-Gruppe auf einem rationalen Vektorraum. In diesem Vektorraum charakterisieren wir mit Hilfe der Ergebnisse von Kapitel 2 durch Bilder und Urbilder polynomialer Abbildungen eine invariante Teilmenge, deren Bild unter der Orbitabbildung ausschließlich nicht-S^1-symmetrische Kohomologietypen enthält.

Im fünften Kapitel deuten wir schließlich unter der Annahme, daß statt der rationalen die reellen Zahlen zugrunde lägen, an, auf welche Weise sich die Ergebnisse aus Kapitel 3 und 4 zu einer Aussage über generische Nicht-S^1-Symmetrie der Kategorie $\mathcal{X}^8_{S^1}$ verwenden lassen könnten.

Die Diplomarbeit wird ergänzt durch einen Anhang mit Ergebnissen, die nach Einreichung der Diplomarbeit gefunden wurden. In ihm werden wir mit einfachen Methoden der Schnitttheorie von Mannigfaltigkeiten die Ergebnisse von Kapitel 3 deutlich verbessern. Wir erhalten auf diese Weise eine gute Abschätzung über die Anzahl hochdimensionaler Fixpunktkomponenten und deren Hilbert-Funktion, die nicht auf den 8-dimensionalen Fall beschränkt ist.

Als sehr gute Einführung in die in dieser Arbeit durchgängig verwendete Čech-Alexander-Spanier-Kohomologie sei [Ma] empfohlen. Sämtliche in dieser Arbeit auftretenden Räume sind parakompakt. Wir brauchen daher nicht zwischen der auf lokal-endlichwertigen Alexander-Spanier-Koketten basierenden Kohomologie und der auf nicht notwendig lokal-endlichwertigen Alexander-Spanier-Koketten basierenden zu unterscheiden. Wir werden beide mit $\check{H}^*(-)$ bezeichnen, falls rationale Koeffizienten vorliegen. Gegebenenfalls werden die Koeffizienten explizit angegeben. Wollen wir ausdrücklich zwischen dieser Kohomologie und der Alexander-Spanier-Kohomologie mit kompaktem Träger unterscheiden, so verwenden wir für erstere die Bezeichnung $\check{H}^*_\infty(-,G)$, für letztere $\check{H}^*_c(-,G)$. Mit $\check{H}^\infty_*(-,G)$ bezeichnen wir schließlich die sogenannte Steenrod-Homologietheorie, die sich aus der Dualisierung des auf Alexander-Spanier-Koketten mit kompaktem Träger basierenden Kokettenkomplexes ergibt.

Mit der folgenden allgemeinen Definition wollen wir nun zum ersten Kapitel überleiten.

Definition 0.1 (i) Es sei allgemein $\mathcal{X}_{S^1}$ eine Unterkategorie der Kategorie von topologischen S^1-Räumen. Mit V wollen wir den Vergiß-Funktor bezeichnen, der $\mathcal{X}_{S^1}$ unter Vernachlässigung der S^1-Operation auf $\mathcal{X}$, die entsprechende Unterkategorie der Kategorie von topologischen Räumen, abbildet. Zu jedem Objekt X von $\mathcal{X}$ ist (X,σ) ein Objekt von $\mathcal{X}_{S^1}$, wenn σ die triviale S^1-Operation auf X ist. Wir wollen daher im Rahmen dieser Arbeit V als *surjektiv auf den Objekten* bezeichnen.

(ii) Zwei Objekte X und Y von $\mathcal{X}$ haben denselben *rationalen Kohomologietyp*, wenn ihre jeweiligen rationalen Kohomologie-Algebren $\check{H}^*(X)$ und $\check{H}^*(Y)$ als graduierte Algebren isomorph zueinander sind. Die Äquivalenzklassen der Objekte vom selben rationalen Kohomologietyp heißen die *rationalen Kohomologieklassen* (der Objekte) von $\mathcal{X}$.

(iii) Eine rationale Kohomologieklasse $kohom_{\mathbb{Q}}(Y)$ von $\mathcal{X}$ heiße *S^1-symmetrisch*, wenn es einen nicht-trivialen S^1-Raum (X,σ) in $\mathcal{X}_{S^1}$ gibt, so daß $V(X,\sigma) = X$ ein Repräsentant von $kohom_{\mathbb{Q}}(Y)$ ist. □

Dieser Definition gemäß werden wir im folgenden eine Kategorie $\mathcal{X}$ als *generisch nicht-S^1-symmetrisch* bezüglich einer geeigneten Parametrisierung nach dem rationalen Kohomologietyp bezeichnen, wenn im Parameterraum die nicht S^1-symmetrischen Kohomologieklassen „generisch" sind.

Kapitel 1

Wahl der $\mathbf{S^1}$-Räume

Zunächst werden wir in diesem Kapitel das bereits in der Einleitung erwähnte Ergebnis von D. Sullivan vorstellen (vgl. Satz 1.2). Für Dimensionen $n = 4k$ legt es bei einer Parametrisierung der S^1-Räume nach ihrem rationalen Kohomologietyp nahe, statt ausschließlich Mannigfaltigkeiten auch solche mit einem singulären Punkt gewissen Typs zuzulassen. Dem gemäß werden wir in diesem Kapitel eine erweiterte Kategorie $\mathcal{X}^n_{S^1}$ von S^1-Räumen definieren, die für $n = 8$ die Grundlage dieser Arbeit sein wird. Die rationalen Kohomologietypen dieser erweiterten Kategorie entsprechen dann genau den Isomorphieklassen von einfach-zusammenhängenden Poincaré-Dualitätsalgebren der formalen Dimension 8.

Zu Beginn erinnern wir noch einmal an die Definition einer rationalen Poincaré-Dualitätsalgebra:

Definition 1.1 A^* sei eine positiv graduierte, graduiert kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra mit Identität. A^* heißt *Poincaré-Dualitätsalgebra* der *formalen Dimension* n, $fd(A^*) = n$, falls gilt:

(i) Es ist $A^n \cong \mathbb{Q}$.

(ii) Für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist die multiplikative Paarung $A^i \times A^{n-i} \to A^n$ eine exakte duale Paarung von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen, d.h. sie induziert jeweils Isomorphismen $A^i \cong Hom_{\mathbb{Q}}[A^{n-i}, \mathbb{Q}]$.

Gilt darüber hinaus $A^1 = 0$, so heißt die rationale Poincaré-Dualitätsalgebra A^* *einfach-zusammenhängend*. Eine *Orientierung* von A^* ist gegeben durch einen Homomorphismus $\omega : A^* \to \mathbb{Q}$ mit $ker(\omega) = A^{\neq n}$. Schließlich sei die Kategorie der Isomorphieklassen einfach-zusammenhängender, rationaler Poincaré-Dualitätsalgebren der formalen Dimension n mit $\mathrm{PD}\mathcal{A}^n$ bezeichnet. □

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß $A^0 = \mathbb{Q} \cdot 1$ sowie $A^i = 0$ für $i < 0$ oder $i > n$. Weiter sind wegen (ii) alle A^i endlich-dimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorräume.

Bei der Parametrisierung geschlossener, einfach-zusammenhängender, glatter reeller Mannigfaltigkeiten nach ihrem rationalen Kohomologietyp spielt ein bekanntes Resultat von D. Sullivan (s. [Su], Thm. 13.2) eine entscheidende Rolle. Es garantiert für alle Dimensionen $n \neq 4k$, daß sich jede einfach-zusammenhängende, rationale Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension n bis auf Isomorphie als Kohomologie-Algebra einer solchen Mannigfaltigkeit der Dimension n erhalten läßt. Für $n \neq 4k$ ist daher der Kohomologie-Funktor $\check{H}^*_\infty(-, \mathbb{Q})$ von der Kategorie $\mathcal{D}^n$ der geschlossenen, einfach-zusammenhängenden, glatten Mannigfaltigkeiten der Dimension n in die Kategorie PD$\mathcal{A}^n$ surjektiv auf den Objekten.

In den Dimensionen $n = 4k$, also insbesondere auch für den uns interessierenden Fall $n = 8$, ist diese Surjektivität jedoch nicht gegeben. Um in solchen Dimensionen ein ähnliches Ergebnis zu erhalten, muß entweder die Kategorie PD$\mathcal{A}^n$ weiter eingeschränkt (siehe [Su], Thm. 13.2) oder die Kategorie $\mathcal{D}^n$ erweitert werden. Zugunsten einer einfacheren Parametrisierung entscheiden wir uns hier für letzteres. Der für uns interessante Teil von Sullivans Resultat läßt sich daher in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 1.2 (Sullivan) *Es sei A^* eine einfach-zusammenhängende rationale Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension $n = 4k$. Dann gibt es eine geschlossene, einfach-zusammenhängende, glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit unter Umständen einem singulären Punkt, deren rationale Kohomologie-Algebra zu A^* isomorph ist. Der mögliche singuläre Punkt ergibt sich dabei aus der Errichtung des Kegels über einer (n-1)-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Kohomologie-Sphäre, welche der Rand einer kompakten, einfach-zusammenhängenden, glatten Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.* □

Dem gemäß wollen wir nun mit der folgenden Definition eine für uns geeignete Kategorie von S^1-Räumen für die Dimensionen $n = 4k$ einführen. Diese enthält neben einfach-zusammenhängenden, kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten der Dimension n auch solche mit einem singulären Punkt des besagten Typs enthält. Für den Rest des Kapitels sei der Einfachheit halber stets $n = 4k \geq 4$ angenommen.

Definition 1.3 (i) $\bar{\mathcal{S}}^n$ sei die Menge aller n-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Kohomologie-Sphären Σ^n, d.h. derjenigen geschlossenen topologischen Mannigfaltigkeiten der Dimension n, die denselben rationalen Kohomologietyp wie die Standard-Sphäre S^n haben. Insbesondere ist dabei die Standardsphäre S^n in $\mathcal{S}^n$ enthalten. Die Teilmenge $\mathcal{S}^n \subset \bar{\mathcal{S}}^n$ bestehe aus allen Kohomologie-Sphären Σ^n, die homöomorph zur Standardsphäre sind. Mit $\mathcal{S}^n_{sing} := \bar{\mathcal{S}}^n \backslash \mathcal{S}^n$ wollen wir das Komplement dazu bezeichnen.

(ii) Es sei $(\bar{\mathcal{M}}^n, \bar{\mathcal{S}}^{n-1})$ die Menge der kompakten, einfach-zusammenhängenden topologischen n-Mannigfaltigkeiten mit einer rationalen Kohomologie-Sphäre Σ^{n-1} als Rand. Die Teilmenge $(\mathcal{M}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ bestehe aus allen $M \in$

$(\bar{\mathcal{M}}^n, \bar{\mathcal{S}}^{n-1})$, deren Rand ∂M homöomorph zur Standardsphäre S^{n-1} ist. Mit $(\mathcal{M}^n_{sing}, \mathcal{S}^{n-1}_{sing}) := (\bar{\mathcal{M}}^n, \bar{\mathcal{S}}^{n-1}) \setminus (\mathcal{M}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ bezeichnen wir das Komplement dazu.

(iii) Gemäß Sullivans Resultat betrachten wir zu jedem $M \in (\bar{\mathcal{M}}^n, \bar{\mathcal{S}}^{n-1}) = (\mathcal{M}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \sqcup (\mathcal{M}^n_{sing}, \mathcal{S}^{n-1}_{sing})$ den Abbildungskegel über der Inklusion des Randes. Dies liefert uns sowohl die Menge $\mathcal{M}^n := \{M \cup_{\Sigma^{n-1}} C\Sigma^{n-1} \mid M \in (\mathcal{M}^n, \mathcal{S}^{n-1})\}$ von topologischen Mannigfaltigkeiten, als auch die Menge $\mathcal{M}^n_{sing} := \{M \cup_{\Sigma^{n-1}} C\Sigma^{n-1} \mid M \in (\mathcal{M}^n_{sing}, \mathcal{S}^{n-1}_{sing})\}$ von Räumen, die die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit nur bis auf den singulären Punkt in der Spitze des Kegels aufweisen.

(iv) Es seien nun $\mathcal{M}^n \cup \mathcal{M}^n_{sing}$ die *Objekte* der Kategorie $\mathcal{X}^n$. Als *Morphismen* dieser Kategorie wollen wir alle stetigen Abbildungen zwischen jeweils zwei Objekten ansehen.

(v) Unter einer S^1-*Operation* auf einem Objekt $X \in \mathcal{X}^n$ wollen wir demzufolge eine stetige Abbildung $\sigma : S^1 \times X \to X$ verstehen, die die üblichen Eigenschaften einer Linksoperation besitzt: $\sigma(\lambda_1, \sigma(\lambda_2, x)) = \sigma(\lambda_1\lambda_2, x)$ für $\lambda_1,\ \lambda_2 \in S^1$ und $x \in X$ sowie $\sigma(1, x) = x$ für das neutrale Element $1 \in S^1$ und $x \in X$.

(vi) Die Kategorie $\mathcal{X}^n_{S^1}$ sei nun wie folgt definiert: Die *Objekte* von $\mathcal{X}^n_{S^1}$ seien Paare (X, σ), wobei X ein Objekt aus $\mathcal{X}^n$ und σ eine S^1-Operation auf X ist. Ein *Morphismus* $f_{S^1} : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ von $\mathcal{X}^n_{S^1}$ ist durch einen Morphismus $f : X \to Y$ von $\mathcal{X}^n$ gegeben, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle (id,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S^1 \times Y & \xrightarrow{\tau} & Y \end{array}$$

Zur Unterscheidung zwischen $\mathcal{X}^n$ und $\mathcal{X}^n_{S^1}$ werden wir im folgenden die jeweiligen Objekte (X, σ) und Morphismen $f_{S^1} : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ in $\mathcal{X}^n_{S^1}$ als *äquivariante Objekte* bzw. *äquivariante Morphismen* bezeichnen. □

Im Zusammenhang mit dieser Definition wollen wir einige Aspekte unserer Fragestellung noch einmal kurz erläutern.

Bemerkung 1.4 (i) Mit den obigen Definitionen 1.3 der Kategorien $\mathcal{X}^8$ bzw. $\mathcal{X}^8_{S^1}$ gehen wir also „bis auf den möglichen singulären Punkt" der Frage nach, ob die kompakten, einfach-zusammenhängenden *topologischen* 8-Mannigfaltigkeiten generisch nicht-S^1-symmetrisch sind. (Wir meinen selbstverständlich einen singulären Punkt des oben erwähnten Typs, wenn wir hier und im folgenden von „singulärem Punkt" sprechen.)

(ii) Die Überlegungen dieser Arbeit gelten damit jedoch „bis auf den möglichen singulären Punkt“ ebenfalls hinsichtlich Frage, inwieweit kompakte, einfach-zusammenhängende *glatte* Mannigfaltigkeiten generisch nicht-S^1-symmetrisch sind. Denn ganz analog zu den obigen Definitionen 1.3 für die Kategorie $\mathcal{X}^n$ können wir eine entsprechende Kategorie $\tilde{\mathcal{X}}^n$ der „bis auf den möglichen singulären Punkt“ kompakten, einfach-zusammenhängenden *glatten* Mannigfaltigkeiten erhalten. Die rationalen Kohomologieklassen von $\tilde{\mathcal{X}}^n$ entsprechen dann einerseits dank Sullivans Ergebnis genau denjenigen von $\mathcal{X}^n$. Andererseits ist jede S^1-symmetrische rationale Kohomologieklasse von $\tilde{\mathcal{X}}^n$ als rationale Kohomologieklasse von $\mathcal{X}^n$ ebenfalls S^1-symmetrisch, denn jede stetige und bis auf den möglichen singulären Punkt differenzierbare Operation ist trivialerweise insbesondere stetig. Zusammengenommen heißt beides: Ist die Kategorie $\mathcal{X}^n$ generisch nicht-S^1-symmetrisch bezüglich einer Parametrisierung nach dem rationalen Kohomologietyp, so auch die Kategorie $\tilde{\mathcal{X}}^n$.

(iii) Ebenfalls in [Su] hat Sullivan für die Dimensionen $n = 4k$ notwendige und hinreichende Bedingungen für die Realisierung von rationalen Poincaré-Dualitätsalgebren als Kohomologie-Algebren von ausschließlich glatten Mannigfaltigkeiten ohne singulären Punkt gegeben. Wollte man also in diesen Dimensionen die entsprechenden Aussagen über reine topologische bzw. glatte Mannigfaltigkeiten erhalten, so wäre es wohl naheliegend, mit Hilfe dieser Bedingungen eine Charakterisierung derjenigen Kohomologieklassen im Parameterraum zu versuchen, die durch glatte Mannigfaltigkeiten ohne singulären Punkt repräsentiert werden. □

Im restlichen Verlauf dieses Kapitels werden wir nun sehen, daß für alle Objekte X aus $\mathcal{X}^n$ die Kohomologie-Algebra $\check{H}^*_\infty(X, \mathbb{Q})$ tatsächlich eine einfach-zusammenhängende, rationale Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension n ist. Dies ist für die Mannigfaltigkeiten $X \in \mathcal{M}^n$ wohlbekannt. Wir konzentrieren uns daher darauf, diese Aussage für die Mannigfaltigkeiten $X \in \mathcal{M}^n_{sing}$ mit singulärem Punkt zu zeigen. Unsere Ausführungen lehnen sich dabei unmittelbar an die Darstellung der Alexander-Spanier-(Ko-)Homologie für lokal-kompakte Hausdorff-Räume in [Ma] an, wobei wir insbesondere die dort verwendeten Bezeichnungen weitgehend übernehmen. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß wir für den Rest des Kapitels $n \geq 4$ vorausgesetzt haben.

Zunächst benötigen wir einen adäquaten Begriff von Orientierbarkeit, der sich einfach auf Mannigfaltigkeiten mit singulärem Punkt erweitern läßt. Da unsere Überlegungen ausschließlich auf der homologischen Ebene stattfinden werden, reicht uns die folgende Definition aus. Man beachte, daß für eine zusammenhängende, n-dimensionale Mannigfaltigkeit eine Orientierbarkeit im allgemein üblichen Sinne die hier definierte Eigenschaft, homologisch orientierbar vom Grad n zu sein, impliziert.

Definition 1.5 Es sei X ein zusammenhängender, lokal-kompakter Hausdorff-Raum.

(i) X heiße *homologisch orientierbar vom Grad n*, wenn gilt: $\check{H}_q^\infty(X,\mathbb{Z}) = 0$ für alle $q > n$, und $\check{H}_n^\infty(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

(ii) Es sei X homologisch orientierbar vom Grad n. Ein Erzeugendes der unendlich zyklischen Gruppe $\check{H}_n^\infty(X,\mathbb{Z})$ heiße *fundamentale Homologieklasse* von X und sei mit μ_X bezeichnet. Für orientierbare Mannigfaltigkeiten entspricht diese Definition einer fundamentalen Homologieklasse gerade der allgemein üblichen.

(iii) Ein *vom Grad n homologisch orientierter* Raum X sei ein homologisch vom Grad n orientierbarer Raum X, für den eine fundamentale Homologieklasse μ_X fest gewählt wurde. Wir wollen μ_X in diesem Fall auch die *homologische Orientierung* von X nennen. □

Nach Definition 1.3 läßt sich jedes $X \in \mathcal{M}^n_{sing}$ darstellen als $X = M \cup_{\Sigma^{n-1}} C\Sigma^{n-1}$, wobei $M \in (\mathcal{M}^n_{sing}, \mathcal{S}^{n-1}_{sing})$, $(\Sigma^{n-1} \times \{0\}) \equiv \Sigma^{n-1} = \partial M \in \mathcal{S}^{n-1}_{sing}$ und $C\Sigma^{n-1} = (\Sigma^{n-1} \times [0,1]) \,/\, (\Sigma^{n-1} \times \{1\})$ ist. In Bezug auf diese Darstellung werden wir nun jeweils die beiden folgenden offenen Teilmengen von X betrachten: $M_\varepsilon^\circ := M \cup_{\Sigma^{n-1}} (\Sigma^{n-1} \times [0,\varepsilon))$, d.h. M mit einem angehefteten offenen Kragen $\Sigma^{n-1} \times [0,\varepsilon)$, und $C^\circ\Sigma^{n-1} := C\Sigma^{n-1} \setminus (\Sigma^{n-1} \times \{0\})$, der offene Kegel. Mit $\Sigma_\varepsilon^{\circ\, n-1}$ sei der Durchschnitt $M_\varepsilon^\circ \cap C^\circ\Sigma^{n-1} = \Sigma^{n-1} \times (0,\varepsilon)$ bezeichnet. Zur Definition des im folgenden verwendeten Homomorphismus $\rho_{X,U} : \check{H}_n^\infty(X,\mathbb{Z}) \to \check{H}_n^\infty(U,\mathbb{Z})$ sei an dieser Stelle noch einmal auf [Ma], S. 93, verwiesen.

Einer Idee Milnors folgend wollen wir nun von der Poincaré-Dualität der offenen Teilmengen M_ε° und $C^\circ\Sigma^{n-1}$ sowie derjenigen des Durchschnittes $\Sigma_\varepsilon^{\circ\, n-1}$ auf die Poincaré-Dualität von X schließen.

Lemma 1.6 *Es sei $X = M \cup_{\Sigma^{n-1}} C\Sigma^{n-1}$. Dann gilt:*

(i) M_ε° und $\Sigma_\varepsilon^{\circ\, n-1}$ sind homologisch orientierbar im Grad n.

(ii) X ist homologisch orientierbar im Grad n.

(iii) $C^\circ\Sigma^{n-1}$ ist homologisch orientierbar im Grad n.

(iv) Es gibt fundamentale Homologieklassen μ_X, $\mu_{M_\varepsilon^\circ}$, $\mu_{\Sigma_\varepsilon^{\circ\, n-1}}$ und $\mu_{C^\circ\Sigma^{n-1}}$, so daß gilt: $\rho_{X,M_\varepsilon^\circ}(\mu_X) = \mu_{M_\varepsilon^\circ}$, $\rho_{X,\Sigma_\varepsilon^{\circ\, n-1}}(\mu_X) = \mu_{\Sigma_\varepsilon^{\circ\, n-1}}$ und $\rho_{X,C^\circ\Sigma^{n-1}}(\mu_X) = \mu_{C^\circ\Sigma^{n-1}}$.

Beweis: Zu (i): M_ε° ist eine einfach-zusammenhängende, n-dimensionale Mannigfaltigkeit, also insbesondere orientierbar im herkömmlichen Sinne. Damit ist auch die offene Untermannigfaltigkeit $\overset{\circ}{\Sigma}{}_{\varepsilon}^{n-1}$ orientierbar im herkömmlichen Sinne. Die Behauptung folgt daher wegen [Ma], Thm. 4.19 und Thm. 4.20.

Zu (ii): Die auftretenden Inklusionen wollen wir folgendermaßen bezeichnen: $i^1 : M \hookrightarrow X$, $i^2 : C\Sigma^{n-1} \hookrightarrow X$, $j^1 : \Sigma^{n-1} \hookrightarrow M$ und $j^2 : \Sigma^{n-1} \hookrightarrow C\Sigma^{n-1}$. Man beachte, daß alle Inklusionen eigentliche Abbildungen sind. Wir betrachten zunächst die Mayer-Vietoris-Folge für $X = M \cup_{\Sigma^{n-1}} C\Sigma^{n-1}$:

$$\ldots \longrightarrow \check{H}^{\infty}_{q+1}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Delta_*} \check{H}^{\infty}_{q}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi_*} \check{H}^{\infty}_{q}(M,\mathbb{Z}) \oplus \check{H}^{\infty}_{q}(C\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\phi_*} \check{H}^{\infty}_{q}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots$$

Dabei ist der Homomorphismus $\Delta_{q+1} : \check{H}^{\infty}_{q+1}(X,\mathbb{Z}) \to \check{H}^{\infty}_{q}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z})$ gegeben durch $\Delta_* = \partial_{X,\Sigma^{n-1}} \circ \rho_{X,X\setminus\Sigma^{n-1}}$ (vgl. [Ma], S. 85), der Homomorphismus $\psi_q : \check{H}^{\infty}_{q}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \to \check{H}^{\infty}_{q}(M,\mathbb{Z}) \oplus \check{H}^{\infty}_{q}(C\Sigma^{n-1},\mathbb{Z})$ gegeben durch $\psi_q(x) = (j^1_q(x), j^2_q(x))$ und der Homomorphismus $\phi_q : \check{H}^{\infty}_{q}(M,\mathbb{Z}) \oplus \check{H}^{\infty}_{q}(C\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \to \check{H}^{\infty}_{q}(X,\mathbb{Z})$ gegeben durch $\phi_q(x,y) = i^1_q(x) - i^2_q(y)$.

Wir wollen nun diese Mayer-Vietoris-Folge mit der Homologie-Folge des Paares (M, Σ^{n-1}) vergleichen, wobei das Innere von M mit $M^\circ := M \setminus \Sigma^{n-1}$ bezeichnet sei. Da $C\Sigma^{n-1}$ eigentlich homotopie-äquivalent zum Punkt ist, gilt für alle $q > 0$: $\check{H}^{\infty}_{q}(C\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) = 0$. Wir erhalten also für $q > 1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \xrightarrow{\Delta_*} & \check{H}^{\infty}_{q}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) & \xrightarrow{j^1_*} & \check{H}^{\infty}_{q}(M,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^1_*} & \check{H}^{\infty}_{q}(X,\mathbb{Z}) \ldots \\
& {\scriptstyle =}\downarrow & & {\scriptstyle =}\downarrow & & {\scriptstyle \rho_{X,M^\circ}}\downarrow \\
\ldots \xrightarrow{\partial_{M,\Sigma^{n-1}}} & \check{H}^{\infty}_{q}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) & \xrightarrow{j^1_*} & \check{H}^{\infty}_{q}(M,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_{M,M^\circ}} & \check{H}^{\infty}_{q}(M^\circ,\mathbb{Z}) \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\ldots \xrightarrow{\Delta_*} & \check{H}^{\infty}_{q-1}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) & \xrightarrow{j^1_*} & \check{H}^{\infty}_{q-1}(M,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^1_*} & \ldots \\
& \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \\
\ldots \xrightarrow{\partial_{M,\Sigma^{n-1}}} & \check{H}^{\infty}_{q-1}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) & \xrightarrow{j^1_*} & \check{H}^{\infty}_{q-1}(M,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_{M,M^\circ}} & \ldots
\end{array}$$

Die Kommutativität der beiden entscheidenden Teildiagramme folgt dabei aus den Homologie-Eigenschaften (3c) bzw. (3c) und (4c), [Ma], S. 86. Also ist der mittlere Homomorphismus $\rho_{X,M^\circ} : \check{H}^{\infty}_{q}(X,\mathbb{Z}) \to \check{H}^{\infty}_{q}(M^\circ,\mathbb{Z})$ für $q > 1$ nach dem Fünfer-Lemma jeweils ein Isomorphismus. M° ist nach Definition eine n-dimensionale einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit, d.h. insbesondere orientierbar im üblichen Sinne. Die Behauptung (ii) ergibt sich daher auch hier aus [Ma], Thm. 4.19 und Thm. 4.20.

Zu (iii): Wir betrachten die Homologie-Folge des Paares $(C\Sigma^{n-1}, \Sigma^{n-1})$, wobei wir $\partial := \partial_{C\Sigma^{n-1},\Sigma^{n-1}}$ setzen:

$$\ldots \longrightarrow \check{H}^{\infty}_{q+1}(C\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho} \check{H}^{\infty}_{q+1}(C^{\circ}\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \ldots$$
$$\ldots \check{H}^{\infty}_{q}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \xrightarrow{j^2_*} \check{H}^{\infty}_{q}(C\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots$$

Wie bereits erwähnt, ist $\check{H}^{\infty}_{q}(C\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) = 0$ für alle $q > 0$. Deshalb liefert $\partial : \check{H}^{\infty}_{q}(C^{\circ}\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) \to \check{H}^{\infty}_{q-1}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z})$ für alle $q > 1$ einen Isomorphismus.

Zu (*iv*): Wir betrachten das folgende Diagramm, wobei mit $M_\varepsilon := M \cup_{\Sigma^{n-1}} (\Sigma^{n-1} \times [0,\varepsilon])$ der Abschluß von M°_{ε} bezeichnet sei:

$$\begin{array}{ccccc}
\check{H}^{\infty}_{n}(C^{\circ}\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) & \xleftarrow{\rho_{X,C^{\circ}\Sigma^{n-1}}} & \check{H}^{\infty}_{n}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_{X,M^{\circ}_{\varepsilon}}} & \check{H}^{\infty}_{n}(M^{\circ}_{\varepsilon},\mathbb{Z}) \\
\downarrow{\scriptstyle \partial_{C\Sigma^{n-1},\Sigma^{n-1}}} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{M_\varepsilon,\Sigma^{n-1}}} \\
\check{H}^{\infty}_{n-1}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) & \xleftarrow{=} & \check{H}^{\infty}_{n-1}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z}) & \xrightarrow{=} & \check{H}^{\infty}_{n-1}(\Sigma^{n-1},\mathbb{Z})
\end{array}$$

Beide Teildiagramme kommutieren jeweils aufgrund der bereits im Beweis zu (*ii*) erwähnten Homologie-Eigenschaften (3c) und (4c), wobei wir für die Kommutativität des rechten Teildiagramms noch die eigentliche Homotopie-Invarianz des Funktors $\check{H}^{\infty}_{*}(-,\mathbb{Z})$ benötigen. Nun ist $\partial_{M_\varepsilon,\Sigma^{n-1}}$ ein Isomorphismus nach Lemma 11.8, [Ma]. $\rho_{X,M^{\circ}_{\varepsilon}}$ ist ein Isomorphismus gemäß (*ii*) und der eigentlichen Homotopie-Äquivalenz von M° und M°_{ε}. Also ist auch Δ_n ein Isomorphismus. Weiter ist $\partial_{C\Sigma^{n-1},\Sigma^{n-1}}$ ein Isomorphismus nach (*iii*), weshalb schließlich auch $\rho_{X,C^{\circ}\Sigma^{n-1}}$ ein Isomorphismus ist. Wählen wir also eine fundamentale Homologieklasse μ_X von X, so ist $\rho_{X,M^{\circ}_{\varepsilon}}(\mu_X)$ eine fundamentale Homologieklasse von M°_{ε} und $\rho_{X,C^{\circ}\Sigma^{n-1}}(\mu_X)$ eine fundamentale Homologieklasse von $C^{\circ}\Sigma^{n-1}$. Schließlich ist nach Lemma 11.6, [Ma], $\rho_{M^{\circ}_{\varepsilon},\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}}(\mu_{M^{\circ}_{\varepsilon}}) =: \mu_{\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}}$ eine fundamentale Homologieklasse von $\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}$, da M°_{ε} eine im üblichen Sinne orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Wegen $\rho_{X,\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}} = \rho_{X,M^{\circ}_{\varepsilon}} \circ \rho_{M^{\circ}_{\varepsilon},\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}}$ (Eigenschaft (3b), [Ma], S. 85) folgt daher: $\rho_{X,\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}}(\mu_X) = \mu_{\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}}$. □

Im folgenden Lemma zeigen wir nun die Poincaré-Dualität von $C^{\circ}\Sigma^{n-1}$, M°_{ε} und $\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}$. Vermöge $\check{H}^{\infty}_{n}(-,\mathbb{Q}) \cong \check{H}^{\infty}_{n}(-,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ wollen wir dabei eine jeweilige fundamentale Homologieklasse μ_{-} als Element von $\check{H}^{\infty}_{n}(-,\mathbb{Q})$ auffassen. Das *cap-Produkt* $\cap : \check{H}^{\infty}_{p+q}(-,\mathbb{Q}) \otimes \check{H}^{p}_{\infty}(-,\mathbb{Q}) \to \check{H}^{\infty}_{q}(-,\mathbb{Q})$ sei das cap-Produkt „vom Typ A“ nach [Ma], S. 322.

Lemma 1.7 *(i) $\mu_{C^{\circ}\Sigma^{n-1}}$ sei eine fundamentale Homologieklasse von $C^{\circ}\Sigma^{n-1}$. Dann ist der Homomorphismus $\check{H}^{q}_{\infty}(C^{\circ}\Sigma^{n-1},\mathbb{Q}) \to \check{H}^{\infty}_{n-q}(C^{\circ}\Sigma^{n-1},\mathbb{Q})$, definiert durch $x \mapsto \mu_{C^{\circ}\Sigma^{n-1}} \cap x$, ein Isomorphismus.*

(ii) Es sei $\mu_{\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}}$ eine fundamentale Homologieklasse von $\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon}$. Dann ist der Homomorphismus $\check{H}^{q}_{\infty}(\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon},\mathbb{Q}) \to \check{H}^{\infty}_{n-q}(\Sigma^{\circ\,n-1}_{\varepsilon},\mathbb{Q})$, definiert durch $x \mapsto$

$\mu_{\Sigma_\varepsilon^\circ{}^{n-1}} \cap x$, *ein Isomorphismus.*

(iii) Es sei $\mu_{M_\varepsilon^\circ}$ *sei eine fundamentale Homologieklasse von* M_ε°*. Dann ist der Homomorphismus* $\check{H}^q_\infty(M_\varepsilon^\circ, \mathbb{Q}) \to \check{H}^\infty_{n-q}(M_\varepsilon^\circ, \mathbb{Q})$*, definiert durch* $x \mapsto \mu_{M_\varepsilon^\circ} \cap x$*, ein Isomorphismus.*

Beweis: Zu (i): Da $C^\circ\Sigma^{n-1}$ homotopie-äquivalent zum Punkt ist, gilt zum einen:

$$\check{H}^q_\infty(C^\circ\Sigma^{n-1}, \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, \text{ falls } q = 0 \\ 0 \text{ , falls } q \neq 0. \end{cases}$$

Aus der bereits im Beweis zu Lemma 1.6 verwendeten Homologie-Folge des Paares $(C\Sigma^{n-1}, \Sigma^{n-1})$ folgt zum anderen:

$$\check{H}_q^\infty(C^\circ\Sigma^{n-1}, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}, \text{ falls } q = n \\ 0 \text{ , falls } q \neq n. \end{cases}$$

Da der Homomorphismus $\check{H}^0_\infty(C^\circ\Sigma^{n-1}, \mathbb{Q}) \to \check{H}^\infty_n(C^\circ\Sigma^{n-1}, \mathbb{Q})$, definiert durch $1 \mapsto \mu_{C^\circ\Sigma^{n-1}} \cap 1$, ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung (i).

Zu (ii) und (iii): Für $\Sigma_\varepsilon^\circ{}^{n-1}$ und M_ε° entspricht die Behauptung der wohlbekannten Poincaré-Dualität für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Rand (vgl. [Ma], Thm. 11.4). □

Wir schließen nun von der Poincaré-Dualität der offenen Teilmengen M_ε° und $C^\circ\Sigma^{n-1}$ sowie derjenigen des Durchschnittes $\Sigma_\varepsilon^\circ{}^{n-1}$ auf die Poincaré-Dualität von X.

Satz 1.8 *Es sei* μ_X *eine fundamentale Homologieklasse von* X*. Dann ist der Homomorphismus* $\check{H}^q_\infty(X, \mathbb{Q}) \to \check{H}^\infty_{n-q}(X, \mathbb{Q})$*, definiert durch* $x \mapsto \mu_X \cap x$*, ein Isomorphismus.*

Beweis: Der Beweis von Thm. 11.4, Fall 2, [Ma], S. 349 läßt sich beinahe wörtlich übernehmen, weshalb wir ihn hier nicht weiter ausführen wollen. In ihm wird im wesentlichen die Kommutativität des folgenden Diagramms bestehend aus den Mayer-Vietoris-Folgen für $\check{H}^*_\infty(-, \mathbb{Q})$ und $\check{H}^\infty_*(-, \mathbb{Q})$ gezeigt:

$$\begin{tikzcd}
\check{H}^{q-1}_{\infty}(M^{\circ}_{\varepsilon}) \oplus \check{H}^{q-1}_{\infty}(C^{\circ}\Sigma^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^{q-1}_{\infty}(\Sigma_{\varepsilon}^{\circ\, n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^{q}_{\infty}(X) \dots \arrow[d] \\
\check{H}_{n-q+1}^{\infty}(M^{\circ}_{\varepsilon}) \oplus \check{H}_{n-q+1}^{\infty}(C^{\circ}\Sigma^{n-1}) \arrow[r] & \check{H}_{n-q+1}^{\infty}(\Sigma_{\varepsilon}^{\circ\, n-1}) \arrow[r] & \check{H}_{n-q}^{\infty}(X) \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \check{H}^{q}_{\infty}(M^{\circ}_{\varepsilon}) \oplus \check{H}^{q}_{\infty}(C^{\circ}\Sigma^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^{q}_{\infty}(\Sigma_{\varepsilon}^{\circ\, n-1}) \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & \check{H}_{n-q}^{\infty}(M^{\circ}_{\varepsilon}) \oplus \check{H}_{n-q}^{\infty}(C^{\circ}\Sigma^{n-1}) \arrow[r] & \check{H}_{n-q}^{\infty}(\Sigma_{\varepsilon}^{\circ\, n-1})
\end{tikzcd}$$

Die senkrechten Homomorphismen sind dabei gegeben durch das cap-Produkt mit den jeweiligen fundamentalen Homologieklassen, welche gemäß Lemma 1.6, (iv), gewählt werden. Aus Lemma 1.7 und dem Fünfer-Lemma folgt dann die Behauptung. Es sei noch auf folgendes hingewiesen: Notwendige Voraussetzung, um [Ma] gemäß die Kommutativität des obigen Diagramms zu zeigen, ist die Normalität von X. Diese Eigenschaft ermöglicht insbesondere, für offene Teilmengen U und V von X mit $U \cup V = X$ eine Mayer-Vietoris-Folge der Triade $(X; U, V)$ für die Alexander-Spanier-Kohomologie $\check{H}^{*}_{\infty}(-, \mathbb{Q})$ basierend auf lokal endlich-wertigen Koketten zu erhalten (vgl. §8.6, [Ma]). $\square$

Mit den folgenden Bemerkungen wollen wir nun das abschließende Korollar vorbereiten. Aufgrund der Konstruktion von X ist es offensichtlich, daß für X eine endliche zelluläre Zerlegung im Sinne von [Ma], §3.2, existiert. Dies bedeutet insbesondere, daß $dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^{q}_{c}(X, \mathbb{Q})) < \infty$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist. Weiter erhalten wir als Folgerung aus dem universellen Koeffiziententheorem einen Isomorphismus $\alpha : \check{H}_{q}^{\infty}(X, \mathbb{Q}) \to Hom_{\mathbb{Q}}[\check{H}^{q}_{c}(X, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}]$ (vgl. [Ma], S. 125). Beides zusammengenommen impliziert, daß die Paarung $\langle -, - \rangle : \check{H}_{q}^{\infty}(X, \mathbb{Q}) \otimes \check{H}^{q}_{c}(X, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} : u \otimes v \mapsto \alpha(u)(v) =: \langle u, v \rangle$ eine exakte duale Paarung von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen ist. Bezüglich dieser Paarung gilt $\langle u, v \cup w \rangle = \langle u \cap v, w \rangle$ (Eigenschaft (A6) des cap-Produkts vom Typ A, [Ma], S. 327) für $u \in \check{H}_{p+q}^{\infty}(X, \mathbb{Q})$, $v \in \check{H}^{p}_{\infty}(X, \mathbb{Q})$ und $w \in \check{H}^{q}_{c}(X, \mathbb{Q})$, wobei das *cup-Produkt* $\cup : \check{H}^{p}_{\infty}(X, \mathbb{Q}) \otimes \check{H}^{q}_{c}(X, \mathbb{Q}) \to \check{H}^{p+q}_{c}(X, \mathbb{Q})$ das in §10.3, [Ma], eingeführte „gemischte“ cup-Produkt ist.

Der besseren Übereinstimmung mit [Ma] wegen haben wir bisher formal zwischen $\check{H}^{*}_{\infty}(X, \mathbb{Q})$ und $\check{H}^{*}_{c}(X, \mathbb{Q})$ unterschieden, obwohl beide aufgrund der Kompaktheit von X identisch sind. Im abschließenden Korollar werden wir diese Identität jetzt ausnutzen. Wir bezeichnen nun $\check{H}^{*}_{\infty}(X, \mathbb{Q}) = \check{H}^{*}_{c}(X, \mathbb{Q})$ mit $\check{H}^{*}(X, \mathbb{Q})$.

Korollar 1.9 $\check{H}^{*}(X, \mathbb{Q})$ *ist bezüglich der durch das cup-Produkt gegebenen Multiplikation eine einfach-zusammenhängende, rationale Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension n.*

Beweis: Zum ersten ist $\check{H}^*(X,\mathbb{Q})$ bezüglich des cup-Produkts eine positiv graduierte, graduiert kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra (vgl. [Ma], §10.3). Zum zweiten ist die folgende Paarung eine exakte duale Paarung von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen:

$$\check{H}^p(X,\mathbb{Q}) \otimes \check{H}^{n-p}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup} \check{H}^n(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\langle \mu_X, - \rangle} \mathbb{Q}.$$

Denn nach den obigen Bemerkungen gilt $u \otimes v \mapsto \langle \mu_X, u \cup v \rangle = \langle \mu_X \cap u, v \rangle$, wobei die Paarung $\langle -, - \rangle$ eine exakte duale Paarung ist, und die Abbildung $\mu_X \cap - : \check{H}^p(X,\mathbb{Q}) \to \check{H}^{\infty}_{n-p}(X,\mathbb{Q})$ nach Satz 1.8 ein Isomorphismus. Zum dritten ist schließlich $\check{H}^*(X,\mathbb{Q})$ einfach-zusammenhängend, denn es gilt:

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^1(X,\mathbb{Q})) &= dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^{\infty}_{n-1}(X,\mathbb{Q})) \\ &= dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^{\infty}_{n-1}(M^\circ,\mathbb{Q})) \\ &= dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^1_{\infty}(M,\mathbb{Q})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt dabei aus Betrachtungen analog zum Beweis von 1.6, *(ii)*, für rationale Koeffizienten, das dritte Gleichheitszeichen aus der Poincaré-Dualität für orientierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand (siehe [Ma], Theorem 11.5). $\square$

Kapitel 2

$\mathbf{S^1}$-Symmetrie und das Hirsch-Brown-Modell

In diesem Kapitel wollen wir insbesondere die in Kapitel 1 beschriebene Kategorie $\mathcal{X}_{S^1}^8$ von S^1-Räumen mit Hilfe des minimalen Hirsch-Brown-Modells studieren und dadurch notwendige Bedingungen für die Existenz von (nicht-trivialen) S^1-Operationen ableiten. Die Grundlagen hierzu sind zum Beispiel in [AP], Kap. 2-3 sowie Anh. B, zu finden. Die für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtigen Resultate dieses Kapitels sind in den Korollaren 2.14 bis 2.18 zusammengefaßt. Viele Betrachtungen und einige Beweise in diesem Kapitel verlaufen ganz analog zu dem Fall einer $\mathbb{Z}_2$-Operation mit Kohomologie-Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$, welcher etwa in [AP], Kap. 1, dargestellt ist.

Wir betrachten in diesem Kapitel ganz allgemein einen kompakten (d.h. insbesondere hausdorffschen), zusammenhängenden S^1-Raum X mit Fixpunktmenge $F \subset X$, für den $\sum_{i=0}^{\infty} dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^i(X) < \infty$ gilt. $X \to X_{S^1} := ES^1 \times_{S^1} X \to BS^1$ ist das zum universellen S^1-Prinzipalbündel $S^1 \to ES^1 \to BS^1$ assoziierte Faserbündel. Als äquivariante Kohomologie-Theorie werden wir die äquivariante Borelkohomologie $\check{H}^*_{S^1}(X) := \check{H}^*(X_{S^1})$, d.h. die Alexander-Spanier-Kohomologie der Borel-Konstruktion mit rationalen Koeffizienten verwenden (vgl. [AP], S. 130, oben).

Beginnen wollen wir nun mit einigen zusammenfassenden Bemerkungen über minimale ČAS-(Čech-Alexander-Spanier)-Sullivan-Modelle (siehe z.B. [AP], §§2.1-2, 2.6, oder [AH]).

Bemerkung 2.1 (i) Zu jeder simplizialen Menge S läßt sich eine differentielle, positiv graduierte, graduiert kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra konstruieren, die rationale Sullivan-de Rham-Algebra $A(S)$. Jedem topologischen Raum T läßt sich damit die rationale Sullivan-de Rham-Algebra $A(T) := A(Sing(T))$ seiner simplizialen Menge $Sing(T)$ der singulären Simplizes zuordnen. Diese

Zuordnung liefert einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie $\partial gk\mathcal{A}$ der differentiellen, positiv graduierten, graduiert kommutativen $\mathbb{Q}$-Algebren. (Eine solche Algebra bezeichnen wir im folgenden mit ∂gkA.) Bei Anwendung des Homologie-Funktors in $\partial gk\mathcal{A}$ ergibt sich dabei ein natürlicher Isomorphismus $H(A(T), \partial) \cong H^*(T)$ von graduierten Algebren.

(ii) Ein Koszul-Sullivan-Komplex K ist eine ∂gkA, für die es eine wohlgeordnete Teilmenge $E = \{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset K$ derart gibt, daß erstens $K = S(E) := \mathbb{Q}[x \mid x \in E^{ev}] \otimes \Lambda[x \mid x \in E^{od}]$ durch E erzeugt wird und daß zweitens für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt: $\partial(x_\alpha) \in S(E_\alpha)$, wobei $E_\alpha := \{x_\beta \mid \beta \in \mathcal{A}\ \mathit{und}\ \beta < \alpha\}$.

(iii) Es sei nun A eine ∂gkA. Ein Modell von A ist ein Koszul-Sullivan-Komplex K zusammen mit einer schwachen Äquivalenz $K \to A$ (d.h. die in der Homologie induzierte Abbildung liefert einen Isomorphismus $H(K) \cong H(A)$). Erfüllt K zusätzlich die Forderungen, daß drittens $deg(x_\alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ ist, und daß viertens für alle $\alpha,\ \beta \in \mathcal{A}$ gilt: $deg(x_\beta) < deg(x_\alpha) \Rightarrow \beta < \alpha$, so heißt K das minimale Modell $\mathcal{M}(A)$ von A.

(iv) Für jeden weg-zusammenhängenden, topologischen Raum Y existiert ein minimales Modell $\mathcal{M}(Y) := \mathcal{M}(A(Y)) \to A(Y)$, das minimale Sullivan-Modell von Y. Obwohl in $\partial gk\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig, ist $\mathcal{M}(Y)$ in Y nur bis auf Homotopie funktoriell. Der Differentialoperator des minimalen Modells verschwindet im allgemeinen nicht, auch wenn zum Beispiel für BS^1 gilt: $\mathcal{M}(BS^1) = H^*(BS^1) = \mathbb{Q}[t]$ mit $deg(t) = 2$.

(v) Für jeden topologischen Raum T kann eine rationale ČAS-Sullivan-de Rham-Algebra $\check{A}(T)$ in der Kategorie $\partial gk\mathcal{A}$ wie folgt definiert werden: Zu einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von T bezeichne $\check{\mathcal{U}}$ den Vietoris-Nerv. $\check{\mathcal{U}}_0$ sei diejenige simpliziale Menge, deren n-Simplizes genau den geordneten $(n+1)$-tupeln von Ecken der n-Simplizes von $\check{\mathcal{U}}$ entsprechen. Wir setzen nun

$$\check{A}(T) := \underset{\longrightarrow\,\mathcal{U}}{lim}\ A(\check{\mathcal{U}}_0),$$

wobei der direkte Limes über die durch Verfeinerung teilgeordnete Menge aller offenen Überdeckungen von T zu nehmen ist. Die Homologie $H(\check{A}(T), \partial)$ der ČAS-Sullivan-de Rham-Algebra ist dann natürlich isomorph zu $\check{H}^*(T)$.

(vi) Für jeden zusammenhängenden, topologischen Raum Y existiert in $\partial gk\mathcal{A}$ ein minimales Modell $\check{\mathcal{M}}(Y)$ von $\check{A}(Y)$, das bis auf Isomorphie eindeutig, aber ebenfalls nur bis auf Homotopie funktoriell ist. $\check{\mathcal{M}}(Y)$ heißt das minimale ČAS-Sullivan-Modell von Y. □

Das folgende Resultat erhalten wir als eine Konsequenz des Satzes von Grivel-Halperin-Thomas (siehe z.B. [AP], Kor. (2.6.6)). Es gilt allgemein für Faserbündel

$X \to X_G \to BG$ für kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppen G und parakompakte, zusammenhängende G-Räume X. Hier ist es bereits auf $X \to X_{S^1} \to BS^1$ angewandt und liefert uns das erste für dieses Kapitel grundlegende Ergebnis.

Satz 2.2 (Grivel-Halperin-Thomas) *Das folgende Diagramm ist ein kommutatives Diagramm differentieller, graduiert kommutativer $\mathbb{Q}$-Algebren:*

$$\begin{array}{ccccc} \check{A}(BS^1) & \longrightarrow & \check{A}(X_{S^1}) & \longrightarrow & \check{A}(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}(BS^1) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{M}(BS^1)\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X) & \xrightarrow{\pi} & \check{\mathcal{M}}(X). \end{array}$$

In diesem Diagramm sind die waagrechten Morphismen der oberen Zeile gegeben durch die Anwendung des Funktors $\check{A}(-)$ auf die Bündelabbildungen. Alle senkrechten Morphismen sind schwache Äquivalenzen. Der Morphismus $\rho : \mathcal{M}(BS^1) \to \mathcal{M}(BS^1) \otimes 1$ kann als eine „Inklusion des ersten Faktors" aufgefaßt werden, $\pi : \mathcal{M}(BS^1)\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X) \to \check{\mathcal{M}}(X)$ vermöge $\mathcal{M}(BS^1) = \mathbb{Q}[t]$ als „Auswertung an der Stelle $t = 0$". $\square$

Die Anwendung des Homologie-Funktors liefert nun das folgende kommutative Diagramm, wobei der senkrechte Isomorphismus $H\left(\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X), \tilde{\partial}\right) \to \check{H}^*_{S^1}(X)$ natürlich in X ist.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}[t] & \longrightarrow & \check{H}^*(X_{S^1}) = \check{H}^*_{S^1}(X) & \longrightarrow & \check{H}^*(X) \\ {\scriptstyle =}\uparrow & & {\scriptstyle \cong}\uparrow & & {\scriptstyle =}\uparrow \\ \mathbb{Q}[t] & \longrightarrow & H\left(\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X), \tilde{\partial}\right) & \longrightarrow & \check{H}^*(X), \end{array}$$

Das getwistete Tensorprodukt $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ in der Kategorie $\partial gk\mathcal{A}$, das für (Ko-)Kettenkomplexe dieser Art von G. Hirsch ([Hi]) und E.H. Brown ([Br]) eingeführt wurde, ist also ein Modell der äquivarianten Borel-Kohomologie $\check{H}^*_{S^1}(X)$, ein sogenanntes *Hirsch-Brown-Modell*.

Bemerkung 2.3 Ein homogenes Element $\tilde{x} \in \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ vom Grad n eines Hirsch-Brown-Modells kann als Polynom in t mit Koeffizienten in $\check{\mathcal{M}}(X)$ angesehen werden:

$$\tilde{x} = \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes t^i,$$

wobei x_i wegen $deg(t) = 2$ jeweils im $(n-2i)$-ten Grad von $\check{\mathcal{M}}(X)$ liegt. Das getwistete Differential $\tilde{\partial}$ eines Hirsch-Brown-Modells $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ ist eine $\mathbb{Q}[t]$-lineare Abbildung, die den Grad um 1 erhöht. Sie kann aufgefaßt werden als 1-parametrige Deformation des Differentials ∂ auf $\check{\mathcal{M}}(X)$. So gilt etwa für $1 \otimes x \in$

$\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$:

$$\tilde{\partial}(1 \otimes x) = 1 \otimes \partial_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \otimes \partial_i(x),$$

wobei $\partial_0 : \check{\mathcal{M}}(X) \to \check{\mathcal{M}}(X)$ mit ∂ auf $\check{\mathcal{M}}(X)$ übereinstimmt und die übrigen $\mathbb{Q}$-linearen Abbildungen $\partial_i : \check{\mathcal{M}}(X) \to \check{\mathcal{M}}(X)$ den Grad um jeweils $2i-1$ erniedrigen. □

Es liegt nun nahe, auch hier wieder nach einem ausgezeichneten Hirsch-Brown-Modell mit gewissen Minimalitätseigenschaften zu fragen. Bevor wir jedoch dieser Frage nachgehen, wollen wir einen Spezialfall des aus dem Borelschen Lokalisierungssatz gewonnenen Auswertungsatzes vorstellen, das zweite grundlegende Resultat für die Betrachtungen dieses Kapitels. Dazu skizzieren wir zunächst, was es heißt, $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ an einer Stelle $t = \alpha \in \mathbb{Q}$ auszuwerten.

Bemerkung 2.4 Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ sei $\mathbb{Q}_\alpha$ definiert als $\mathbb{Q}$, versehen mit der durch den Homomorphismus $\alpha : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}, t \mapsto \alpha$, induzierten $\mathbb{Q}[t]$-Modulstruktur. Der Auswertungsfunktor $\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (-)$ ist ein kovarianter (für $\alpha \neq 0$ exakter) Funktor von $\mathbb{Q}[t]$-$\partial g\mathcal{M}od$, der Kategorie der graduierten, differentiellen $\mathbb{Q}[t]$-Moduln, nach $\mathbb{Q}$-$\partial g\mathcal{V}ek$, der Kategorie der $\mathbb{Z}_2$-graduierten, differentiellen $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Die Parität der Graduierung des $\mathbb{Q}[t]$-Moduls induziert dabei wegen $deg(t) = 2$ die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Auf diese Weise können zum Beispiel $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ oder $\check{H}^*_{S^1}(X)$, aufgefaßt als $\mathbb{Q}[t]$-Moduln, an einer Stelle $t = \alpha$ ausgewertet werden. Das homogene Element $\tilde{x} = \sum_{i=0}^n x_i \otimes t^i \in \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ etwa ergibt so an der Stelle $t = \alpha$ ausgewertet

$$\tilde{x}_\alpha = \sum_{i=0}^{n} x_i \alpha^i \in \mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}^*(X)),$$

und das Differential $\tilde{\partial}$ auf $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ ergibt das Differential $\tilde{\partial}_\alpha$ auf $\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}^*(X))$. Die Darstellung von $\tilde{\partial}$ als 1-parametrige Deformation gemäß Bemerkung 2.3 liefert dabei eine entsprechende Darstellung von $\tilde{\partial}_\alpha$. So ist zum Beispiel $\tilde{\partial}_\alpha$, angewandt auf $(1 \otimes x)_\alpha \in \mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}^*(X))$, gegeben durch:

$$\tilde{\partial}_\alpha((1 \otimes x)_\alpha) = 1 \otimes \partial_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \partial_i(x),$$

mit sämtlichen $\partial_i : \check{\mathcal{M}}^*(X) \to \check{\mathcal{M}}^*(X)$ gemäß der Bemerkung 2.3. □

Wir betrachten nun $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha := H(\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)), \tilde{\partial}_\alpha)$. Da die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung von $\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ mit $\tilde{\partial}_\alpha$ verträglich ist, wird sie auf $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha$ vererbt. Für $\alpha \neq 0$ wird bezüglich dieser Graduierung vermöge des Isomorphismus $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha \cong \mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^*_{S^1}(X)$ eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte $\mathbb{Q}$-Algebrenstruktur auf $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha$

induziert. Für $\alpha = 0$ erbt $\check{H}^*_{S^1}(X)_0$ sogar die $\mathbb{Z}$-Graduierung von $\check{\mathcal{M}}(X)$ und trägt bezüglich dieser eine durch $\check{H}^*_{S^1}(X)_0 = \check{H}^*(X)$ induzierte $\mathbb{Z}$-graduierte $\mathbb{Q}$-Algebrenstruktur. (Man beachte, daß im allgemeinen $\check{H}^*_{S^1}(X)_0 \not\cong \mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^*_{S^1}(X)$ ist.)

Damit können wir den aus dem Borelschen Lokalisierungssatz gewonnenen Auswertungssatz im Spezialfall einer S^1-Operation formulieren. Die Voraussetzungen für eine Anwendung des Lokalisierungssatzes sind dabei mit der Kompaktheit von X erfüllt (vgl. [AP], Kap. 3). In voller Allgemeinheit kann der Auswertungssatz für Torus-Operationen zum Beispiel in ([AP], §3.5) gefunden werden.

Satz 2.5 (Auswertungssatz für $\mathbf{S^1}$-Operationen) *Es gilt:*

(i) Für $\alpha = 0$ ist $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha := H(\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)), \tilde{\partial}_\alpha)$ als graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra natürlich isomorph zu $\check{H}^*(X)$.

(ii) Für $\alpha \neq 0$ ist $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha := H(\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)), \tilde{\partial}_\alpha)$ als $\mathbb{Z}_2$-graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra natürlich isomorph zu $\check{H}^{(*)}(F)$, d.h. zu $\check{H}^*(F)$ versehen mit der durch die Parität gegebenen $\mathbb{Z}_2$-Graduierung. □

Wir wollen nun die Fage nach einem minimalen Hirsch-Brown-Modell wieder aufnehmen. Ergänzende Darstellungen dazu sind zum Beispiel in [AP], u.a. Anhang B, zu finden. Wir werden hier nur die für uns wesentlichen Aspekte in der folgenden Bemerkung zusammenfassen.

Bemerkung 2.6 Im allgemeinen läßt sich $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ in $\partial gk\mathcal{A}$ nicht weiter minimieren. Betrachtet man $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ jedoch unter Vernachlässigung der multiplikativen Struktur in der Kategorie $\mathbb{Q}[t]$-$\partial g\mathcal{M}od$, dann kann $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ bis auf Homotopie-Äquivalenz durch den freien $\mathbb{Q}[t]$-Modul $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ ersetzt werden (vgl. [AP], (B.2.4)). Wir nennen $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ das minimale Hirsch-Brown-Modell für den Homotopietyp von $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$. Der wesentliche Vorteil des minimalen Hirsch-Brown-Modells ist, daß der nullte Term der Deformationsentwicklung seines getwisteten Randoperators, δ_0, identisch mit dem Randoperator δ auf $\check{H}^*(X)$ ist und somit verschwindet. Durch die beiden Forderungen nach Homotopie-Äquivalenz und nach Verschwinden von δ_0 ist das minimale Hirsch-Brown-Modell in $\mathbb{Q}[t]$-$\partial g\mathcal{M}od$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Die Algebrenstruktur von $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ vererbt sich im allgemeinen jedoch nur „bis auf Homotopie" auf das minimale Hirsch-Brown-Modell. Schließlich induziert jeder Morphismus $f : X \to Y$ von S^1-Räumen in $\mathbb{Q}[t]$-$\partial g\mathcal{M}od$ einen im allgemeinen ebenfalls nur „bis auf Homotopie" eindeutigen Morphismus $\tilde{f}^* : \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(Y) \to \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ zwischen den minimalen Hirsch-Brown-Modellen. □

Wir können nun das im Auswertungssatz verwendete Hirsch-Brown-Modell durch das minimale Hirsch-Brown-Modell ersetzen:

Lemma 2.7 *Die Homologie $H(\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)), \tilde{\delta}_\alpha)$ des an der Stelle $t = \alpha$ ausgewerteten minimalen Hirsch-Brown-Modells ist zur Homologie $H(\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)), \tilde{\partial}_\alpha)$ natürlich isomorph.*

Beweis: Der Auswertungsfunktor $\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (-)$ führt Homotopie-Äquivalenzen in $\mathbb{Q}[t]$-$\partial g\mathcal{M}od$ über in Homotopie-Äquivalenzen in $\mathbb{Q}$-$\partial g\mathcal{V}ek$. □

Bemerkung 2.8 Wir wollen die Situation für die Inklusion der Fixpunktmenge noch einmal in einem Diagramm darstellen: Wir betrachten die Inklusionen $i : X \hookrightarrow X_{S^1}$ und $i_F : F \hookrightarrow F_{S^1} = BS^1 \times F$ sowie $j : F \hookrightarrow X$. Die jeweilige Auswertung an der Stelle $t = 0$ sei mit $p_0 : \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(-) \to \mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(-))$ bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc}
\check{H}^*_{S^1}(X) & \xrightarrow{j^*_{S^1}} & \check{H}^*_{S^1}(F) \\
{\scriptstyle p_0^*=i^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_F^*=p_0^*} \\
\check{H}^*(X) & \xrightarrow{j^*} & \check{H}^*(F)
\end{array}$$

Man beachte darüber hinaus, daß die zu $i_F : F \hookrightarrow F_{S^1} = BS^1 \times F$ linksinverse Projektion $pr_F : F_{S^1} = BS^1 \times F \to F$ eine Inklusion $pr_F^* : \check{H}^*(F) \hookrightarrow \check{H}^*_{S^1}(F)$ induziert. □

Wir werden nun sehen, unter welchen Bedingungen das minimale Hirsch-Brown-Modell eines S^1-Raumes mit dessen äquivarianter Borel-Kohomologie tatsächlich übereinstimmt. Auf den folgenden Satz werden wir diesbezüglich noch öfters zurückgreifen. Der in [AP], (1.3.14), für den Fall $(\mathbb{Z}_2, \mathbb{F}_2)$ gegebene Beweis kann hier fast wörtlich übernommen werden. Man beachte dabei, daß sich einige der Aussagen im Hinblick auf die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung auch weiter präzisieren lassen. Für uns reicht jedoch die hier aufgeführte Version.

Definition 2.9 X heißt *total nicht-homolog zu Null (TNHN)* in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$, wenn die durch die Inklusion $i : X \hookrightarrow X_{S^1}$ induzierte Abbildung $i^* : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \check{H}^*(X)$ ein Rechtsinverses besitzt. □

Satz 2.10 *Für X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt: $dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^{ev}(F) = dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^{ev}(X)$ und $dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^{od}(F) = dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^{od}(X)$.*

(ii) *Das Differential $\tilde{\delta}$ des minimalen Hirsch-Brown-Modells $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ verschwindet, d.h. $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \cong \check{H}^*_{S^1}(X)$.*

(iii) *Die durch die Inklusion $j : F \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung $j^*_{S^1} : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \check{H}^*_{S^1}(F)$ ist injektiv.*

(iv) *Es gilt: $Tor^{\mathbb{Q}[t]}(\check{H}^*_{S^1}(X), \mathbb{Q}_0) = 0$.*

(v) Die Auswertung $p_0 : \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \to \check{H}^*(X)$, $t \mapsto 0$ induziert einen Isomorphismus $\mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^*_{S^1}(X) \cong \check{H}^*(X)$.

(vi) Die Auswertung $p_0 : \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \to \check{H}^*(X)$ induziert eine Surjektion $p_0^* : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \check{H}^*(X)$, d.h. X ist TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Da $\check{H}^*(F) \cong \check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha$ für $\alpha \neq 0$ gilt (vgl. Auswertungssatz 2.5), ist (i) äquivalent zu $\tilde{\delta}_\alpha = 0$ für $\alpha \neq 0$. Man beachte dabei, daß $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha$ die Homologie eines Kokettenkomplexes ist, dessen zugrundeliegender $\mathbb{Q}$-Vektorraum gerade mit dem von $\check{H}^*(X)$ übereinstimmt, wobei das Differential $\tilde{\delta}_\alpha$ durch das Differential $\tilde{\delta}$ des minimalen Hirsch-Brown-Modells $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$, ausgewertet an der Stelle $t = \alpha$, gegeben ist. Wir faktorisieren nun $\tilde{\delta}$ in eine Surjektion auf den Korand $\tilde{B}^*$, gefolgt von einer Injektion. Da der Auswertungsfunktor $\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (-)$ für $\alpha \neq 0$ exakt ist, erhalten wir eine analoge Faktorisierung von $\tilde{\delta}_\alpha$. Aber $\tilde{B}_\alpha = \tilde{\delta}_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X))) = 0$, weshalb auch $\tilde{B} = 0$ sein muß. Denn $\tilde{B}$ ist als Untermodul des freien $\mathbb{Q}[t]$-Moduls $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ ebenfalls ein freier $\mathbb{Q}[t]$-Modul. Also ist $\tilde{\delta} = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Die Abbildung $j : F \hookrightarrow X$ induziert einen Morphismus minimaler Hirsch-Brown-Modelle $\tilde{j}^* : \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \to \mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(F)$. Da die Differentiale auf beiden Komplexen verschwinden, ist $\tilde{j}^*$ bereits identisch zu $j^*_{S^1} : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \check{H}^*_{S^1}(F)$. Es sei nun $\tilde{K} := ker(j^*_{S^1})$. Für $\alpha \neq 0$ ist dann $\tilde{K}_\alpha := \mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \tilde{K} = 0$, da $\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} j^*_{S^1}$ nach dem Auswertungssatz 2.5 ein Isomorphismus ist. Aber wegen $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) = \check{H}^*_{S^1}(X)$ ist $\tilde{K}$ als Untermodul ein freier $\mathbb{Q}[t]$-Modul, weshalb aus $\tilde{K}_\alpha = 0$ die Behauptung folgt.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Da $\check{H}^*_{S^1}(X)$ zu einem Untermodul von $\check{H}^*_{S^1}(F) \cong \mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(F)$ isomorph ist, ist $\check{H}^*_{S^1}(X)$ ein freier $\mathbb{Q}[t]$-Modul. Also gilt $Tor^{\mathbb{Q}[t]}(\check{H}^*_{S^1}(X), \mathbb{Q}_0) = 0$.

$(iv) \Leftrightarrow (v)$: Gemäß dem universellen Koeffizienten-Theorem gibt es eine kurze exakte Folge:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^*_{S^1}(X) \xrightarrow{\phi} H(\mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)), \tilde{\delta}_0) \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\psi} Tor^{\mathbb{Q}[t]}(\check{H}^*_{S^1}(X), \mathbb{Q}_0) \longrightarrow 0$$

Der mittlere Term der Folge ist nichts anderes als $\check{H}^*(X)$. Also ist das Verschwinden des Torsionsterms äquivalent zu (v).

$(v) \Leftrightarrow (vi)$: Die Auswertung $p_0 : \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \to \check{H}^*(X)$, $t \mapsto 0$, induziert eine Abbildung $p_0^* : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \check{H}^*(X)$, welche durch $\mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^*_{S^1}(X)$ faktorisiert, d.h. $p_0^* = \phi \circ \rho$, wobei

$$\rho : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^*_{S^1}(X) \cong \check{H}^*_{S^1}(X)/t\check{H}^*_{S^1}(X)$$

die kanonische Projektion ist, und ϕ wie oben. Da ρ stets surjektiv ist, und ϕ stets injektiv, sind (v) und (vi) äquivalent.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Der für $\alpha \neq 0$ exakte Auswertungsfunktor $\mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (-)$ kommutiert in $\mathbb{Q}[t]$-$\partial g\mathcal{M}od$ mit dem Homologie-Funktor, weshalb für $\alpha \neq 0$ gilt: $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha = \mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^*_{S^1}(X)$. Wir erhalten daher einerseits:

$$dim_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^{ev}_{S^1}(X) = dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^{ev}_{S^1}(X)_\alpha + dim_{\mathbb{Q}}\, Tor^{\mathbb{Q}[t]}(\check{H}^{ev}_{S^1}(X), \mathbb{Q}_0)$$

Andererseits gilt mit dem universellen Koeffizienten-Theorem:

$$\begin{aligned} &dim_{\mathbb{Q}}\, H(\mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^{ev}(X)), \tilde{\delta}_0) = \\ &\qquad\qquad dim_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}_0 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \check{H}^{ev}_{S^1}(X) \;+\; dim_{\mathbb{Q}}\, Tor^{\mathbb{Q}[t]}(\check{H}^{ev}_{S^1}(X), \mathbb{Q}_0) \end{aligned}$$

Mit dem Auswertungssatz 2.5 folgt aus den beiden Gleichungen schließlich:

$$dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^{ev}(X) - dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^{ev}(F) = 2 \cdot dim_{\mathbb{Q}}\, Tor^{\mathbb{Q}[t]}(\check{H}^{ev}_{S^1}(X), \mathbb{Q}_0)$$

In den ungeraden Graden erfolgt der Beweis analog. □

Mit dem Satz 2.10 folgt also insbesondere: Ist X TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$, dann ist $F \neq \emptyset$.

Bemerkung 2.11 Sind die zueinander äquivalenten Aussagen aus Satz 2.10 erfüllt, dann induziert $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{\mathcal{M}}(X)$ wegen des verschwindenden Differentials $\tilde{\delta}$ tatsächlich (d.h. nicht nur bis auf Homotopie, vgl. Bem. 2.6) eine Algebrenstruktur auf $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$, die dann mit dem cup-Produkt auf $\check{H}^*_{S^1}(X)$ übereinstimmt. Sie ist gegeben durch eine $\mathbb{Q}[t]$-bilineare Abbildung

$$\tilde{\mu} : (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)) \otimes (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)) \to \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X).$$

$\tilde{\mu}$ kann als eine 1-parametrige Deformation der Standardmultiplikation auf $\mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(X)$ durch Terme von höherer Ordnung in t aufgefaßt werden, welche ausgewertet an der Stelle $t = 0$ auf $\check{H}^*(X)$ das cup-Produkt μ induziert. Wir werden deshalb $\tilde{\mu}$ im folgenden als „getwistete Multiplikation“ bezeichnen. So gilt etwa für $x_p \in \check{H}^p(X)$ und $x_q \in \check{H}^q(X)$:

$$\tilde{\mu}(1 \otimes x_p, 1 \otimes x_q) = 1 \otimes \tilde{\mu}_0(x_p, x_q) + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \otimes \tilde{\mu}_i(x_p, x_q),$$

wobei $\tilde{\mu}_0 \equiv \mu$ in $\check{H}^*(X)$ ist, und $\tilde{\mu}_i(x_p, x_q) \in \check{H}^{p+q-2i}(X)$ für alle $i \geq 0$. Operiert S^1 trivial auf X, so entspricht $\tilde{\mu}$ jedoch der („nicht getwisteten“) Standardmultiplikation auf $\mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(X)$. □

Die obigen Ergebnisse wollen wir nun in den Korollaren 2.14 bis 2.18 für S^1-Räume X, die TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$ sind, ausnutzen. Mit dem folgenden Lemma 2.13 gelten diese Korollare dann insbesondere in dem für uns wesentlichen Fall, daß $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt ist.

Definition 2.12 Es sei A^* eine endlich erzeugte, zusammenhängende, positiv graduierte, graduiert kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra. Mit $\bar{A} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^i$ bezeichnen wir das Augmentationsideal der kanonischen Augmentation $\varepsilon : A^* \to \mathbb{Q}$ von A^*. Da A^* endlich erzeugt ist, gibt es insbesondere eine endliche Menge homogener Erzeugender $\{a_1, \ldots, a_s\} \subset \bar{A}$.

(i) A^* heißt *n-erzeugt*, wenn es eine solche Menge homogener Erzeugender $\{a_1, \ldots, a_s\} \subset A^n$ gibt.

(ii) Läßt sich A^* nicht mit weniger als r Erzeugenden darstellen, so heißt ein Erzeugendensystem $(a_1, \ldots, a_r)$ ein *minimales Erzeugendensystem* von A^*. In diesem Falle bildet das System $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r)$ der Restklassen eine Basis des graduierten Vektorraums $\bar{A} \,/\, (\bar{A} \cdot \bar{A})$, so daß gilt: $r = dim_{\mathbb{Q}} \, (\bar{A} \,/\, (\bar{A} \cdot \bar{A}))$. □

Lemma 2.13 *Ist die Algebra $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt, dann ist X TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$.*

Beweis: Wir wollen die Darstellung von $\check{H}^*_{S^1}(X)$ durch das minimale Hirsch-Brown-Modell ausnutzen und die Surjektivität der Abbildung $i^* : \check{H}^*_{S^1}(X) \cong H(\mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} \check{H}^*(X), \tilde{\delta}) \to \check{H}^*(X)$ zeigen. Da $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt ist, reicht es, die Surjektivität für $\check{H}^2(X)$ zu zeigen. Betrachten wir also $1 \otimes [z] \in \mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} \check{H}^*(X)$ für einen Kozykel $z \in Z^2(X)$. Dann gilt für das Differential des minimalen Hirsch-Brown-Modells (vgl. Bem. 2.6): $\tilde{\delta}(1 \otimes [z]) = 1 \otimes \delta_0([z]) + t \otimes \delta_1([z]) + \sum_{i=2}^{\infty} t^i \otimes \delta_i([z]) = 0$. Denn erstens verschwindet $\delta_0 \equiv \delta$ auf $\check{H}^*(X)$, zweitens verschwinden alle übrigen Summanden wegen $im\ (\delta_i) \subset \check{H}^{3-2i}(X)$ aus Gradgründen. Damit ist $1 \otimes [z]$ ein Kozykel in $\mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} \check{H}^*(X)$, und also $[1 \otimes [z]] \in H(\mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} \check{H}^*(X), \tilde{\delta})$ ein Urbild von $[z] \in \check{H}^2(X)$ unter i^* gemäß der Bemerkung 2.8. □

Das folgende Korollar 2.14 zeigt, daß $\tilde{\mu}$ ausgewertet an der Stelle $\alpha \in \mathbb{Q}$ für $\alpha = 0$ das cup-Produkt auf $\check{H}^*(X)$ liefert, und das cup-Produkt auf $\check{H}^*(F)$ für $\alpha \neq 0$.

Korollar 2.14 *Ist X TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$, so liefert $\check{H}^*_{S^1}(X) = \mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} \check{H}^*(X)$ eine einparametrige Schar von Deformationen des cup-Produkts von $\check{H}^*(X)$ im Sinne von Bem. 2.11, so daß gilt:*

(i) Für $\alpha = 0$ ist $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha = \mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} \check{H}^*(X))$ als graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra natürlich isomorph zu $\check{H}^*(X)$.

(ii) Für $\alpha \neq 0$ ist $\check{H}^*_{S^1}(X)_\alpha = \mathbb{Q}_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X))$ als $\mathbb{Z}_2$-graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra natürlich isomorph zu $\check{H}^{(*)}(F)$.

Beweis: Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung unmittelbar klar. Es sei also $\alpha \neq 0$. Ist X TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$, so verschwindet nach Satz 2.10 das Differential $\tilde{\delta}$ des minimalen Hirsch-Brown-Modells $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$, d.h. $\check{H}^*_{S^1}(X) = \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$. Damit folgt die Behauptung aus dem Auswertungssatz und Lemma 2.7. $\square$

Mit der Definition 2.15 und Lemma 2.16 wollen wir nun kurz an einige Algebreninvarianten erinnern, die in den weiteren Korollaren verwendet werden.

Definition 2.15 Es sei A^* eine zusammenhängende, positiv graduierte, graduiert kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra, für die gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} dim_{\mathbb{Q}}\, A^i < \infty$.

(i) Es sei $\mathcal{G}_0(A^*) = dim_{\mathbb{Q}}\, \bar{A}^{ev}/(\bar{A}^* \cdot \bar{A}^*)^{ev}$ die *minimale Anzahl der Erzeugenden* der Algebra A^* in *geraden* Graden.

(ii) Es sei $\mathcal{G}_1(A^*) = dim_{\mathbb{Q}}\, \bar{A}^{od}/(\bar{A}^* \cdot \bar{A}^*)^{od}$ die *minimale Anzahl der Erzeugenden* der Algebra A^* in *ungeraden* Graden.

(iii) $c\ell\,(A^*) = max\{q \mid dim_{\mathbb{Q}}\, \bar{A}^*/(\bar{A}^*)^q < dim_{\mathbb{Q}}\, \bar{A}^*\}$ heiße die *Produktlänge* von A^* bzw. die *cup-Länge* von A^*, falls A^* eine Kohomologie-Algebra ist.

(iv) Es sei $Typ\,(A^*) := dim_{\mathbb{Q}}\, ker\,(\hat{\mu})$ für die zur Multiplikation $\mu : \bar{A}^* \otimes \bar{A}^* \to \bar{A}^*$ adjungierte Abbildung $\hat{\mu} : \bar{A}^* \to Hom_{\mathbb{Q}}(\bar{A}^*, \bar{A}^*)$, $\bar{a} \mapsto \hat{\mu}_{\bar{a}}$ mit $\hat{\mu}_{\bar{a}}(\bar{b}) = \bar{a}\bar{b}$ für alle $\bar{b} \in \bar{A}^*$. $\square$

Das folgende Lemma zeigt dabei die Bedeutung des Typs für eine solche Algebra A^*.

Lemma 2.16 *Es sei A^* eine $\mathbb{Q}$-Algebra wie in Definition 2.15. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A^* ist eine Poincaré-Dualitätsalgebra.

(ii) Es ist $Typ\,(A^*) = 1$.

Beweis: Es sei A^* eine Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension $fd\ A^* = n_0$. Dann gilt: $ker\,(\hat{\mu}) = A^{n_0} \cong \mathbb{Q}$. Also ist $Typ\,(A^*) = 1$.

Es sei umgekehrt $Typ\,(A^*) = 1$. Nach Voraussetzung ist A^* endlich-dimensional. Es gibt daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $A^i = 0$ für alle $i \geq n_0$, aber $A^{n_0} \neq 0$ gilt. Daraus folgt einerseits $A^{n_0} \subset ker\,(\hat{\mu})$ und andererseits $dim\ A^{n_0} \geq 1$, weshalb $A^{n_0} = ker\,(\hat{\mu})$ gilt. Nun ist noch die Dualität der multiplikativen Paarung $A^i \times A^{n_0 - i} \to A^{n_0} \cong \mathbb{Q}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ zu zeigen. Zu jedem $0 \neq a \in A^i$, wobei ohne Beschänkung der Allgemeinheit $0 < i < n_0$ angenommen werden kann, konstruieren wir induktiv ein duales Element $\tilde{a} \in A^{n_0 - i}$. Da $a \notin A^{n_0} = ker(\hat{\mu})$ ist, gibt es ein $b \in A^j$, für ein gewisses $j > 0$, so daß gilt: $0 \neq ab \in A^{i+j}$ mit $0 < i < i+j < n_0$. Ist $i+j = n_0$, so setzen wir $\tilde{a} := b$. Anderenfalls haben wir $0 \neq ab \in A^{i+j}$ mit $0 < i+j < n_0$, und also wiederum $ab \notin A^{n_0} = ker(\hat{\mu})\ldots$etc, die Konstruktion des zu a dualen Elementes $\tilde{a}$ ist nach höchstens $n_0 - i$ Schritten beendet. $\square$

Der Beweis des folgenden Korollars entspricht beinahe wörtlich dem des Theorems (1.3.16) in [AP] für den Fall $(G, k) = (\mathbb{Z}_2, \mathbb{F}_2)$.

Korollar 2.17 *Es sei $F_i \subset F$ eine Komponente der Fixpunktmenge. Ist X TN-HN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$, dann gilt:*

(i) $dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{ev}(F_i)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(F_i)}^{\,q})^{ev} \leq dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{ev}(X)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(X)}^{\,q})^{ev}$ *für* $q = 2, 3, \ldots$, *insbesondere ist* $\mathcal{G}_0(\check{H}^*(F_i)) \leq \mathcal{G}_0(\check{H}^*(X))$.

(ii) $dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{od}(F_i)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(F_i)}^{\,q})^{od} \leq dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{od}(X)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(X)}^{\,q})^{od}$ *für* $q = 2, 3, \ldots$, *insbesondere ist* $\mathcal{G}_1(\check{H}^*(F_i)) \leq \mathcal{G}_1(\check{H}^*(X))$.

(iii) Ist F zusammenhängend, dann ist $c\ell\,(\check{H}^*(F)) \geq c\ell\,(\check{H}^*(X))$.

(iv) Typ $(\check{H}^*(F_i)) \leq$ Typ $(\check{H}^*(X))$, insbesondere vererbt sich die Poincaré-Dualität von $\check{H}^*(X)$ auf $\check{H}^*(F_i)$.

Beweis: Nach Voraussetzung sind alle äquivalenten Bedingungen des Satzes 2.10 erfüllt. Wir haben deshalb eine $\mathbb{Q}[t]$-Algebrenstruktur

$$\tilde{\mu} : (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)) \otimes (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)) \to \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$$

auf $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$, so daß die Auswertung von $\tilde{\mu}$ bei $t = 0$ das cup-Produkt auf $\check{H}^*(X)$ liefert, und die Auswertung von $\tilde{\mu}$ bei $t = \alpha \neq 0$ das cup-Produkt auf $\check{H}^{(*)}(F)$ (welches nach Voraussetzung als $\mathbb{Z}_2$-graduierter $\mathbb{Q}$-Vektorraum zu $\check{H}^{(*)}(X)$, versehen mit der durch die Parität induzierten $\mathbb{Z}_2$-Graduierung, isomorph ist). Wir wählen einen Punkt P in der Komponente $F_i \subset F \subset X$, der uns eine Augmentation

$$\tilde{\varepsilon} : \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \to \mathbb{Q}[t] \cong \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(P)$$

der Algebra $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ liefert. Man beachte, daß $\tilde{\varepsilon}$ im allgemeinen nicht die vermeintlich naheliegende Erweiterung von $\varepsilon : \check{H}^*(X) \to \mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ ist. (Letztere wäre mit der getwisteten Multiplikation auf $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ nicht verträglich.) Aber die Auswertung von $\tilde{\varepsilon}$ bei $t = 0$ liefert die Augmentation $\varepsilon : \check{H}^*(X) \to \mathbb{Q}$, und die Auswertung bei $t = \alpha \neq 0$ liefert die durch die Inklusion $P \in F_i \subset F$ induzierte Augmentation von $\check{H}^{(*)}(F)$. Die Multiplikation $\tilde{\mu}$ induziert eine Multiplikation $\overline{\tilde{\mu}}$ auf $ker(\tilde{\varepsilon})$, die sich für $q = 2, 3, \ldots$ zu $\mathbb{Q}[t]$-linearen Abbildungen

$$\overline{\tilde{\mu}}^q : \underbrace{ker\,(\tilde{\varepsilon}) \otimes \cdots \otimes ker\,(\tilde{\varepsilon})}_{q-mal} \to ker\,(\tilde{\varepsilon})^{ev} \oplus ker\,(\tilde{\varepsilon})^{od}$$

fortsetzen läßt. Mit dem Auswertungssatz 2.5 gilt nun:

$$coker\,(\overline{\tilde{\mu}}{}^q_\alpha) \cong \overline{\check{H}^{ev}(X)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(X)}{}^q)^{ev} \oplus \overline{\check{H}^{od}(X)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(X)}{}^q)^{od} \quad , \text{für } \alpha = 0,$$
$$coker\,(\overline{\tilde{\mu}}{}^q_\alpha) \cong \overline{\check{H}^{ev}(F)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(F)}{}^q)^{ev} \oplus \overline{\check{H}^{od}(F)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(F)}{}^q)^{od} \quad , \text{für } \alpha = 1,$$

wobei wir $\overline{\check{H}^{ev}(F)} := ker\,(\tilde{\varepsilon}_1)^{ev}$ und $\overline{\check{H}^{od}(F)} := ker\,(\tilde{\varepsilon}_1)^{od}$ setzen ($\tilde{\varepsilon}_1 : \check{H}^*(F) \to \mathbb{Q}$ ist dabei die durch die Inklusion $P \in F_i \subset F$ induzierte Augmentation). Aus der Halbstetigkeit von $rang\,(\overline{\tilde{\mu}}{}^q_\alpha)$ (als Funktion von α, vgl. [AP], A.7), die wegen $deg\,(t) = 2$ die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung respektiert, folgt:

$$dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{ev}(F)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(F)}{}^q)^{ev} \leq dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{ev}(X)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(X)}{}^q)^{ev},$$
$$dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{od}(F)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(F)}{}^q)^{od} \leq dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^{od}(X)} \,/\, (\overline{\check{H}^*(X)}{}^q)^{od}.$$

Wir wollen nun die Behauptung (i) folgern. Die disjunkte Vereinigung $F = F_i \sqcup F'$ ergibt $\check{H}^*(F) = \check{H}^*(F_i) \times \check{H}^*(F')$. Die Augmentation $\tilde{\varepsilon}_1 : \check{H}^*(F) \to \mathbb{Q}$ entspricht dann der Projektion auf $\check{H}^*(F_i)$ gefolgt von der kanonischen Augmentation von $\check{H}^*(F_i)$. Also gilt:

$$ker\,(\tilde{\varepsilon}_1)^{ev} = \overline{\check{H}^{ev}(F)} = \overline{\check{H}^{ev}(F_i)} \times \check{H}^*(F'),$$

und da $\check{H}^*(F')$ eine Einheit enthält,

$$ker\,(\tilde{\varepsilon}_1)^q = \overline{\check{H}^*(F_i)}{}^q \times \check{H}^*(F').$$

Hieraus folgt schließlich:

$$\begin{aligned} ker\,(\tilde{\varepsilon}_1)^{ev} \,/\, (ker\,(\tilde{\varepsilon}_1)^q)^{ev} &= \overline{\check{H}^{ev}(F_i)} \times \check{H}^*(F') \,/\, (\overline{\check{H}^{ev}(F_i)}{}^q)^{ev} \times \check{H}^*(F') \\ &\cong \overline{\check{H}^{ev}(F_i)} \,/\, (\overline{\check{H}^{ev}(F_i)}{}^q)^{ev}. \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung (i), der Beweis von Behauptung (ii) erfolgt analog.

Zu (iii): Die Behauptung (iii) ergibt sich aus (i) und (ii). Mit $q := c\ell\,(\check{H}^*(X))$ gilt: $dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^*(X)} \,/\, \overline{\check{H}^*(X)}{}^q < dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^*(X)}$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^*(F)} \,/\, \overline{\check{H}^*(F)}{}^q &\leq dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^*(X)} \,/\, \overline{\check{H}^*(X)}{}^q \\ &< dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^*(X)} \\ &= dim_{\mathbb{Q}}\, \overline{\check{H}^*(F)}. \end{aligned}$$

Also ist $\overline{\check{H}^*(F)}^{\,q} \neq 0$, woraus sich $c\ell\,(\check{H}^*(F)) \geq q$ ergibt.

Zu (iv): Wir betrachten die Abbildung $\hat{\tilde{\mu}} : ker\,(\tilde{\varepsilon}) \to Hom_{\mathbb{Q}}\,[ker\,(\tilde{\varepsilon}), ker\,(\tilde{\varepsilon})]$, welche adjungiert ist zu $\overline{\tilde{\mu}} : ker\,(\tilde{\varepsilon}) \otimes ker\,(\tilde{\varepsilon}) \to ker\,(\tilde{\varepsilon})$. Aus der Halbstetigkeit von $rang\,(\hat{\tilde{\mu}}\,{}^q_\alpha)$ folgt:

$$dim_{\mathbb{Q}}\,ker\,(\hat{\tilde{\mu}}_0) \geq dim_{\mathbb{Q}}\,ker\,(\hat{\tilde{\mu}}_1),$$

wobei $\underline{\hat{\tilde{\mu}}_1} : \overline{\check{H}^*(F)} \to Hom_{\mathbb{Q}}\,[\overline{\check{H}^*(F)}, \overline{\check{H}^*(F)}]$ adjungiert ist zu der Multiplikation in $\overline{\check{H}^*(F)}$. (Man beachte, daß die Auswertung bei $t = \alpha$ mit dem Übergang auf die adjungierten Abbildungen vertauscht.) Da nun $Hom_{\mathbb{Q}}\,[\overline{\check{H}^*(F_i)}, \overline{\check{H}^*(F_i)}]$ unter der kanonischen Abbildung injektiv nach

$$Hom_{\mathbb{Q}}\,[\overline{\check{H}^*(F_i)} \times \check{H}^*(F'), \overline{\check{H}^*(F_i)} \times \check{H}^*(F')] = Hom_{\mathbb{Q}}\,[\overline{\check{H}^*(F)}, \overline{\check{H}^*(F)}]$$

abgebildet wird, ist die Dimension des Kerns derjenigen Abbildung $\overline{\check{H}^*(F_i)} \to Hom_{\mathbb{Q}}\,[\overline{\check{H}^*(F_i)}, \overline{\check{H}^*(F_i)}]$, die zur Multiplikation in $\overline{\check{H}^*(F_i)}$ adjungiert ist, nach oben beschränkt durch $dim_{\mathbb{Q}}\,ker\,(\hat{\tilde{\mu}}_1))$. Also gilt

$$Typ\,(\check{H}^*(F_i)) \leq Typ\,(\check{H}^*(X)).$$

Die Vererbung der Poincaré-Dualität ergibt sich damit schließlich aus Lemma 2.16 und der offensichtlichen Tatsache, daß schon allein wegen $\sum_{i=0}^{\infty} dim_{\mathbb{Q}}\,\check{H}^i(F_i) < \infty$ aus Gradgründen $Typ\,(\check{H}^*(F_i)) \geq 1$ gilt. $\square$

Korollar 2.18 *Ist X TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$, dann gibt es eine multiplikative Filterung $\{\mathcal{F}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ auf $\check{H}^*(F)$ derart, daß gilt:*

(i) Die graduierte assoziierte Algebra von $\{\mathcal{F}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ ist als graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra isomorph zu $\check{H}^*(X)$.

(ii) Es gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$: $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{E}_m$, wobei $\{\mathcal{E}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ mit $\mathcal{E}_m := \oplus_{i=0}^m \check{H}^i(F)$ die durch die Graduierung auf $\check{H}^*(F)$ gegebene Filterung ist.

(iii) Ist $\check{H}^*(X)$ insbesondere 2-erzeugt, so gilt bezüglich dieser Filterung für alle $m \in \mathbb{Z}$ sogar: $pr_i(\mathcal{F}_m) = pr_i(\mathcal{E}_m)$, wobei $F_i \subset F$ eine beliebige Komponente der Fixpunktmenge sei, und $pr_i : \check{H}^*(F) \to \check{H}^*(F_i)$ die kanonische Projektion.

Beweis: Zu (i): Ist X TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$, dann sind $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \cong \check{H}^*_{S^1}(X)$ natürlich isomorph (vgl. Satz 2.10). Wir wollen nun eine geeignete, bezüglich der Multiplikation $\tilde{\mu}$ auf $\check{H}^*_{S^1}(X) \cong \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ multiplikative Filterung $\{\mathcal{F}''_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ auf $\check{H}^*_{S^1}(X)$ definieren und anschließend durch Auswertung auf $\check{H}^*(F)$ übertragen. Es sei also:

$$\mathcal{F}''_m(\check{H}^*_{S^1}(X)) := \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}(\oplus_{i=0}^m \check{H}^i(X)).$$

Es sei weiter $p_1 : \check{H}^*_{S^1}(X) = \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}(X) \to \mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}(X))$ der durch die Auswertung bei $t = 1$ gegebene Algebrenhomomorphismus (vgl. Korollar 2.14). Damit läßt sich eine Filterung $\{\mathcal{F}'_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}(X))$ definieren:

$$\mathcal{F}'_m(\mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}(X))) := p_1(\mathcal{F}''_m(\check{H}^*_{S^1}(X)).$$

Die Multiplikativität von $\{\mathcal{F}'_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ folgt dabei unmittelbar aus der Tatsache, daß sich jedes homogene Element in $\check{H}^*_{S^1}(X)$ bei Auswertung an der Stelle $t = \alpha$ in $\mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}(X))$ auf kleinere oder gleiche Grade derselben Parität konzentriert (vgl. Bem. 2.4). Wir zeigen nun, daß die graduierte assoziierte Algebra von $\{\mathcal{F}'_m\}_{m\in\mathcal{Z}}$ als graduierte Algebra isomorph zu $\check{H}^*(X)$ ist. Dazu betrachten wir zunächst noch einmal die Multiplikation $\tilde{\mu}$ auf $\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$ (vgl. Bem. 2.11). Für $x_p \in \check{H}^p(X)$ und $x_q \in \check{H}^q(X)$ etwa ist das Produkt

$$\tilde{\mu}(1 \otimes x_p, 1 \otimes x_q) = 1 \otimes \mu_0(x_p, x_q) + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \otimes \mu_i(x_p, x_q),$$

wobei $\mu_0 \equiv \mu$ in $\check{H}^*(X)$ ist, und $\mu_i(x_p, x_q) \in \check{H}^{p+q-2i}(X)$ für alle $i \geq 0$. Unter der Auswertung p_1 ergibt sich deswegen für x_p und x_q:

$$p_1 \circ \tilde{\mu}(1 \otimes x_p, 1 \otimes x_q) \equiv \mu(x_p, x_q) mod\, \mathcal{F}_{p+q-1}{}'.$$

Also entspricht die auf der assoziierten Algebra induzierte Multiplikation $\bar{\mu}_1$: $\mathcal{F}'_p/\mathcal{F}'_{p-1} \times \mathcal{F}'_q/\mathcal{F}'_{q-1} \to \mathcal{F}'_{p+q}/\mathcal{F}'_{p+q-1}, ([x_p], [x_q]) \mapsto [\tilde{\mu}_0(x_p, x_q)]$ der Multiplikation μ in $\check{H}^*(X)$. Als Vektorraum ist $\mathcal{F}'_p/\mathcal{F}'_{p-1} = (\oplus_{i=0}^p \check{H}^i(X))/(\oplus_{i=0}^{p-1} \check{H}^i(X))$ jedoch für alle $p \in \mathbb{Z}$ ohnehin isomorph zu $\check{H}^p(X)$. Damit brauchen wir die Filterung $\{\mathcal{F}'_m\}_{m\in\mathcal{Z}}$ nur noch vermöge des Isomorphismus $\tilde{j}_1^* : \mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}(X)) \to \check{H}^{(*)}(F)$ auf $\check{H}^{(*)}(F)$ zu übetragen (siehe Diagramm unten):

$$\mathcal{F}_m(\check{H}^*(F)) := \tilde{j}_1^*(\mathcal{F}'_m(\mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}(X))).$$

Man beachte, daß die Graduierung auf $\check{H}^*(F)$ zur Definition von $\{\mathcal{F}_m\}_{m\in\mathcal{Z}}$ nicht benötigt wird.

Zu (*ii*): X ist TNHN in $X_{S^1} \to BS^1$ bezüglich $\check{H}^*(-)$. Die Inklusion j : $F \hookrightarrow X$ induziert den graderhaltenden Morphismus $\tilde{j}^* = j^*_{S^1} : \check{H}^*_{S^1}(X) = \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) \to \mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(F) = \check{H}^*_{S^1}(F)$. Anwenden des Auswertungsfunktors $\mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (-)$ liefert das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X) & \xrightarrow{\tilde{j}^*} & \mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(F) \\
{\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_1} \\
\mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)) & \xrightarrow{\tilde{j}_1^*} & \check{H}^{(*)}(F)
\end{array}$$

Es sei nun $\tilde{x} := t^s \otimes x_s + \sum_{i=s+1}^{\infty} t^i \otimes x_i \in \mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} \check{H}^*(X)$ mit $0 \neq x_s$ ein homogenes Element vom Gesamtgrad q. $\tilde{x}$ wird unter $\tilde{j}^*$ abgebildet auf $y = t^s \otimes (\sum_{j=0}^{\infty} t^j \otimes y_{sj}) + \sum_{i=s+1}^{\infty} t^i \otimes (\sum_{j=0}^{\infty} t^j \otimes y_{ij})$, wobei $y_{ij} \in \check{H}^{q-2(i+j)}(F)$ für alle $i \geq s,\ j \geq 0$ ist, da $\tilde{j}^*$ den Gesamtgrad erhält. Damit ist einerseits $\tilde{j}_1^* \circ p_1(\tilde{x}) \in \mathcal{E}_{q-2s}$. Andererseits ist $\tilde{j}_1^* \circ p_1(\tilde{x}) \in \mathcal{F}_{q-2s}$. Aus der Surjektivität von $\tilde{j}_1^* \circ p_1 : \mathbb{Q}[t] \tilde{\otimes} (\oplus_{i=0}^m \check{H}^i(X)) \to \mathcal{F}_m$ folgt damit die Behauptung.

Zu (iii): Ist $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt, so ist sowohl $\check{H}^*(X)$, als auch $\check{H}^*(F)$ in geraden Graden konzentriert. Für alle ungeraden $m \in \mathbb{Z}$ gilt daher $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{m-1}$ nach obiger Konstruktion von $\{\mathcal{F}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ und $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m-1}$ nach Definition von $\{\mathcal{E}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Es reicht daher aus, nur gerade Grade zu betrachten. Wir wollen die Behauptung nun induktiv beweisen. Für $m = 0$ ist die Behauptung wegen $pr_i(\mathcal{F}_0) = \check{H}^0(F_i) = pr_i(\mathcal{E}_0)$ wahr. Wir betrachten also $m \geq 2$, m gerade, und nehmen an, die Behauptung sei wahr für alle $n < m$. Mit (ii) reicht es aus, $pr_i(\mathcal{E}_m) \subset pr_i(\mathcal{F}_m)$ zu zeigen. Aufgrund der Induktionsannahme reicht es weiter aus, lediglich $\check{H}^m(F_i) \subset pr_i(\mathcal{F}_m)$ zu zeigen. Nach Satz 2.10 ist $dim_{\mathbb{Q}} \check{H}^*(F) = dim_{\mathbb{Q}} \check{H}^*(X)$. Also existiert wegen (i) ein gerade ganze Zahl m_0, so daß $\mathcal{F}_{m_0} = \check{H}^*(F)$. Folglich gilt für m_0 auch $pr_i(\mathcal{F}_{m_0}) = \check{H}^*(F_i)$. Für $x \in \check{H}^m(F_i)$ können wir daher definieren:

$$m(x) := \min_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in pr_i(\mathcal{F}_k)\}.$$

Nach der Vorüberlegung ist auch $m(x)$ gerade, etwa $m(x) = 2 \cdot a(x)$. Setzen wir $pr_i(\mathcal{F}_2) =: pr_i(\mathcal{F}_0) \oplus \mathcal{F}_2^i \subset \check{H}^0(F_i) \oplus \check{H}^2(F_i)$ so folgt mit (i) aus der 2-Erzeugtheit von $\check{H}^*(X)$:

$$pr_i(\mathcal{F}_{m(x)}) = \underbrace{\mathcal{F}_2^i \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}_2^i}_{a(x)-mal} + pr_i(\mathcal{F}_{m(x)-2}).$$

Dabei ist der erste Summand auf $\check{H}^{m(x)}(F_i)$ konzentriert, und der zweite auf $\bigoplus_{j=0}^{a(x)-1} \check{H}^{2j}(F_i)$. Wäre daher $m(x) > m$, so läge das homogene x in $pr_i(\mathcal{F}_{m(x)-2})$, was im Widerspruch zur Minimalität von $m(x)$ stünde. Also ist $m(x) \leq m$, und folglich gilt:

$$x \in pr_i(\mathcal{F}_{m(x)}) \subset pr_i(\mathcal{F}_m).$$

□

Aufgrund der 2-Erzeugtheit von $\check{H}^*(X)$ werden sämtliche $\mathcal{F}_m$ für $m \geq 2$ von $\mathcal{F}_2$ erzeugt. Wegen (iii) erzeugt $pr_i(\mathcal{F}_2)$ daher auch sämtliche $pr_i(\mathcal{F}_m)$ für $m \geq 2$. Damit vererbt sich die 2-Erzeugtheit von $\check{H}^*(X)$ auf $\check{H}^*(F_i)$.

Kapitel 3

Fixpunktkomponenten der formalen Dimensionen 6 und 8

Wir wollen nun die Ergebnisse aus Kapitel 2 auf S^1-Räume aus der Kategorie $\mathcal{X}^8_{S^1}$ anwenden. Dabei werden wir in diesem Kapitel für diejenigen $(X,\sigma) \in \mathcal{X}^8_{S^1}$ mit 2-erzeugter Kohomologie-Algebra $\check{H}^*(X)$ erstens beweisen, daß die einzig mögliche Fixpunktkomponente der formalen Dimension 8 der Raum X selbst ist (Satz 3.1), und zweitens eine obere Abschätzung für die Anzahl der Fixpunktkomponenten der formalen Dimension 6 gewinnen (Satz 3.2). Diese Ergebnisse über Fixpunktkomponenten der formalen Dimensionen 6 und 8 werden wir bei der Parametrisierung der (nicht-trivialen) S^1-Räume im nächsten Kapitel entscheidend benötigen. (Die Beschränkung dieses Kapitels auf die Dimension 8 dient lediglich der vereinfachten Darstellung. Man beachte jedoch, daß eine Abschätzung der formal 2-kodimensionalen Fixpunktkomponenten analog zu 3.2 für Dimensionen größer 8 qualitativ wesentlich schlechter ausfällt.)

Es sei also im gesamten Kapitel $(X,\sigma) \in \mathcal{X}^8_{S^1}$, so daß die Poincaré-Dualitätsalgebra $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt ist. Die minimale Anzahl r der Erzeugenden von $\check{H}^*(X)$ ist also insbesondere gleich $dim_{\mathbb{Q}}\, \check{H}^2(X)$. Mit F bezeichnen wir die Fixpunktmenge der Operation von σ auf X, welche sich disjunkt in k Zusammenhangskomponenten $F_1, \ldots, F_k$ zerlegen lasse. Eine solche Fixpunktkomponente F_i habe die *formale Dimension* n_i, wenn gilt: $fd\,(\check{H}^*(F_i)) = n_i$. Wegen Korollar 2.18 vererbt sich unter diesen Voraussetzungen die Poincaré-Dualität von $\check{H}^*(X)$ auf alle $\check{H}^*(F_i)$ (siehe z.B. [AP], §5.2, für eine Verallgemeinerung dieses Resultates auf geeignete G-CW-Komplexe mit Torus- oder p-Torus-Operationen).

Es ist offensichtlich, daß jede Fixpunktkomponente F_i eine formale Dimension kleiner oder gleich 8 hat. Mit denjenigen der formalen Dimension 8 beschäftigt sich nun der folgende Satz. Für die zum Beweis benötigten Ergebnisse über Kohomologie und Kohomologie mit kompaktem Träger sei auch hier wieder auf [Ma] verwiesen.

Satz 3.1 *Die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) σ *operiert trivial auf* X, *d.h.* $F = X$.

(ii) Es gibt eine Fixpunktkomponente der formalen Dimension 8.

(iii) Die Fixpunktmenge F *ist zusammenhängend.*

Beweis: Die Implikation $(i) \Rightarrow (iii)$ ist offensichtlich, und die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ folgt unmittelbar aus Korollar 2.18.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es sei etwa $j_1 : F_1 \hookrightarrow X$ die Inklusion einer Fixpunktkomponente der formalen Dimension 8. Wir setzen $U := X \setminus F_1$ und werden zeigen, daß $U = \emptyset$ bzw. $F_1 = X$ gilt. Mit X ist auch die abgeschlossene Teilmenge F_1 kompakt, Kohomologie $\check{H}^*(-)$ und Kohomologie $\check{H}^*_c(-)$ mit kompaktem Träger sind daher für X und F_1 identisch. Gemäß [Ma], Thm. 1.6, gibt es eine exakte Kohomologie-Folge für X und F_1 bezüglich $\check{H}^*_c(-)$:

$$\ldots \longrightarrow \check{H}^p_c(U) \longrightarrow \check{H}^p_c(X) \xrightarrow{j_1^p} \check{H}^p_c(F_1) \longrightarrow \check{H}^{p+1}_c(U) \longrightarrow \ldots$$

Es ist klar, daß aus Dimensionsgründen $\check{H}^9_c(U) = 0$ gilt (vgl. z.B. [Ma], Kap. 3). Also ist $j_1^8 : \check{H}^8_c(X) \to \check{H}^8_c(F_1)$ surjektiv. Da nach Voraussetzung $dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^8_c(F_1)) = 1 = dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^8_c(X))$ gilt, ist j_1^8 sogar ein Isomorphismus. Weiter ist aufgrund der Voraussetzung sowohl $\check{H}^*_c(X)$, als wegen Satz 2.18 auch $\check{H}^*_c(F_1)$ in geraden Graden konzentriert. Es gilt also insbesondere $\check{H}^7_c(X) = 0 = \check{H}^7_c(F_1)$. Aus der obigen exakten Folge ergibt sich daher: $\check{H}^8_c(U) = 0$. Wir werden nun die Annahme $U \neq \emptyset$ zum Widerspruch führen. Nach Definition ist U eine offene Teilmenge von X. Es sei U_1 eine (nicht-leere) Zusammenhangskomponente davon. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir einerseits annehmen, daß U_1 eine zusammenhängende, orientierbare 8-Mannigfaltigkeit ist, weshalb gilt: $\check{H}^8_c(U_1) \neq 0$. (Für den Fall, daß U_1 die singuläre Kegelspitze S enthält, betrachten wir $\tilde{U_1} := U_1 \setminus \{S\}$, anstatt U_1.) Andererseits gilt aber wegen $\check{H}^8_c(U) = 0$ auch $\check{H}^8_c(U_1) = 0$. (Betrachten wir $\tilde{U_1}$, so folgt $\check{H}^8_c(\tilde{U_1}) = 0$ aus $\check{H}^8_c(U_1) = 0$ und der obigen exakten Kohomologie-Folge, welche allgemein für lokal-kompakte Hausdorff-Räume gilt.) Dies liefert den gewünschten Widerspruch zur Annahme. Folglich ist $U = \emptyset$. □

Es sei nun im folgenden σ eine nicht-triviale Operation auf X. Dies bedeutet nach dem vorigen Satz, daß alle Fixpunktkomponenten von einer formalen Dimension kleiner als 8 sind. Darüber hinaus kann es keine Fixpunktkomponenten von ungerader formaler Dimension geben, da sämtliche $\check{H}^*(F_i)$ nach 2.18 wegen der 2-Erzeugtheit von $\check{H}^*(X)$ in den geraden Graden konzentriert sind (vgl. dazu [AP], §5.2). Im verbleibenden Teil dieses Kapitels wollen wir für die Anzahl k_6 der Fixpunktkomponenten mit formaler Dimension 6 eine obere Abschätzung erhalten, welche für die Überlegungen des vierten Kapitels wesentlich sein wird.

Satz 3.2 *Es gebe eine Fixpunktkomponente der formalen Dimension 6, etwa F_1. Deren Kohomologie-Algebra $\check{H}^*(F_1)$ habe eine minimale Anzahl von $r_1 = dim_{\mathbb{Q}}(\check{H}^2(F_1))$ Erzeugenden. Dann gilt für die Anzahl k_6 der Fixpunktkomponenten mit formaler Dimension 6:*

$$k_6 \leq 2(r - r_1) + 1.$$

Beweis: Der Beweis folgt einer Idee von C. Allday. Die Bezeichnungen im Verlauf des Beweises richten sich nach dem folgenden kommutierenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\check{H}^*(X) \otimes \check{H}^*(X) \arrow[d, "\mu"'] & \check{H}^*_{S^1}(X) \otimes \check{H}^*_{S^1}(X) \arrow[l, "p_0^* \otimes p_0^*"'] \arrow[r, "j^*_{S^1} \otimes j^*_{S^1}"] \arrow[d, "\tilde{\mu}"'] & \check{H}^*_{S^1}(F) \otimes \check{H}^*_{S^1}(F) \arrow[d, "\tilde{\mu}_F"'] \\
\check{H}^*(X) & \check{H}^*_{S^1}(X) \arrow[l, "p_0^*"'] \arrow[r, "j^*_{S^1}"] & \check{H}^*_{S^1}(F)
\end{tikzcd}$$

Dabei ist nach Satz 2.10 der Homomorphismus $p_0^* : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \check{H}^*(X)$ surjektiv und der graderhaltende Homomorphismus $j^*_{S^1} : \check{H}^*_{S^1}(X) \to \check{H}^*_{S^1}(F)$ injektiv. Außerdem gilt wegen des verschwindenden Randoperators der jeweiligen Hirsch-Brown-Modelle: $\check{H}^*_{S^1}(X) \cong \mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)$, $\check{H}^*_{S^1}(F) \cong \mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(F)$ und auch $\check{H}^*_{S^1}(F_i) \cong \mathbb{Q}[t] \otimes \check{H}^*(F_i)$ für alle F_i. Die disjunkte Vereinigung $F = \sqcup_{i=1}^k F_i$ der Fixpunktkomponenten liefert uns die folgenden kanonische Projektionen $\tilde{pr}_1 : \check{H}^*_{S^1}(F) = \prod_{i=1}^k \check{H}^*_{S^1}(F_i) \to \check{H}^*_{S^1}(F_1)$ und $\tilde{pr}_2 : \check{H}^*_{S^1}(F) = \prod_{i=1}^k \check{H}^*_{S^1}(F_i) \to \prod_{i=2}^k \check{H}^*_{S^1}(F_i)$. Der Beweis gliedert sich nun in drei Schritte: Ziel der ersten beiden Schritte wird es sein, für einen geeigneten, zu $\check{H}^4(X)$ isomorphen Untervektorraum Q von $\check{H}^*_{S^1}(X)$ die Injektivität des Homomorphismus $\tilde{pr}_2 \circ j^*_{S^1}|_Q : Q \to \prod_{i=2}^k \check{H}^4_{S^1}(F_i)$ zu zeigen. In dritten Schritt werden wir dann daraus die Behauptung folgern.

Schritt 1: Es sei $(a_1, \ldots, a_r)$ eine Basis von $\check{H}^2(X)$. Dann gibt es zu dieser Basis *lifts* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r \in \check{H}^2_{S^1}(X)$ bezüglich p_0^*, so daß gilt: $\tilde{pr}_1 \circ j^*_{S^1}(\bar{a}_i) \in \check{H}^2(F_1) \subset \check{H}^2(F) \oplus t \cdot \check{H}^0(F) \cong \check{H}^2_{S^1}(F)$ (vgl. Bem. 2.8). Um dies zu zeigen, betrachten wir einen Punkt $P \in F_1$ und die folgende Reihe von Inklusionen:

$$P \xrightarrow{\varepsilon_1} F_1 \xrightarrow{h_1} F = \bigsqcup_{i=1}^k F_i \xrightarrow{j} X$$

Dabei besitzt $\varepsilon := j \circ h_1 \circ h : P \to X$ ein Linksinverses $r : X \to P$. Wir erhalten damit das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\check{H}^2(X) \arrow[d, "\varepsilon^*"'] & \check{H}^2_{S^1}(X) \cong \check{H}^2(X) \oplus t \cdot \check{H}^0(X) \arrow[l, "p_0^*"'] \arrow[r, "j^*_{S^1}"] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}^*"'] & \check{H}^2_{S^1}(F) \arrow[d, "\tilde{pr}_1 = (h_1)^*_{S^1}"'] \\
\check{H}^2(P) & \check{H}^2_{S^1}(P) \cong \check{H}^2(P) \oplus t \cdot \check{H}^0(P) \arrow[l, "p_0^*"'] & \check{H}^2_{S^1}(F_1), \arrow[l, "\tilde{\varepsilon}_1^*"']
\end{tikzcd}$$

wobei zu den Augmentationen $\tilde{\varepsilon}^*$ bzw. ε^* jeweils die Rechtsinversen $\tilde{r}^*$ bzw. r^* existieren. Aus beliebigen *lifts* $a'_1, \ldots, a'_r$ der $a_1, \ldots, a_r$ unter p_0^* erhalten wir *lifts* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r$ mit der gesuchten Eigenschaft $\tilde{pr}_1 \circ j_{S^1}^*(\bar{a}_i) \in \check{H}^2(F_1)$, indem wir für $1 \leq i \leq r$ definieren: $\bar{a}_i := a'_i - \tilde{r}^* \circ \tilde{\varepsilon}^*(a'_i)$. Denn damit gilt sowohl $p_0^*(\bar{a}_i) = a_i$ als auch $\bar{a}_i \in \mathit{ker}\,(\tilde{\varepsilon}^*)$.

Schritt 2: Da $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt ist, gibt es nun für eine geeignet gewählte Indexmenge I eine Basis $(a_i a_j)_{(i,j)\in I}$ von $\check{H}^4(X)$. Dazu sei $Q \subset \check{H}^4_{S^1}(X)$ der durch die Basis $(\bar{a}_i\bar{a}_j)_{(i,j)\in I}$ erzeugte Untervektorraum in $\check{H}^4_{S^1}(X)$. $p_0^*|_Q : Q \to \check{H}^4(X)$ ist damit ein Isomorphismus. Insbesondere kommutiert nach dieser Konstruktion das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes Q & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \check{H}^8_{S^1}(X) \\ {\scriptstyle (p_0^*|_Q)\otimes(p_0^*|_Q)}\downarrow \cong & & \downarrow {\scriptstyle p_0} \\ \check{H}^4(X) \otimes \check{H}^4(X) & \xrightarrow{\mu} & \check{H}^8(X) \end{array}$$

Der Untervektorraum $\bar{K} \subset Q$ sei definiert durch $\bar{K} := \mathit{ker}\,(\tilde{pr}_2 \circ j_{S^1}^*|_Q)$, und der Untervektorraum $K \subset \check{H}^4(X)$ durch $K := p_0^*(\bar{K})$ unter dem Isomorphismus $p_0^*|_Q$, womit das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xrightarrow{j_{S^1}^*|_Q} & \check{H}^4_{S^1}(F) & \xrightarrow{=} & \prod_{i=1}^k \check{H}^4_{S^1}(F_i) \\ \subset\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{pr}_2} \\ \bar{K} & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\subset} & \prod_{i=2}^k \check{H}^4_{S^1}(F_i) \\ {\scriptstyle p_0^*|_Q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_0^*} & & \\ K & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Der Untervektorraum $K^\perp \subset \check{H}^4(X)$ sei definiert als das orthogonale Komplement zu K bezüglich der durch die Multiplikation gegebene dualen Paarung auf $\check{H}^4(X)$. Wir behaupten, es gilt: $K^\perp = \check{H}^4(X)$. Nach Konstruktion ist $K^\perp \subset \check{H}^4(X)$. Wir zeigen also $K^\perp \supset \check{H}^4(X)$ im restlichen Teil des Schritts 2. Es sei $y \in \check{H}^4(X)$. Statt $\mu(x,y) = 0$, reicht es nun für alle $x \in K$ zu zeigen (siehe erstes und zweites Diagramm), daß gilt: $\tilde{\mu}_F(j_{S^1}^*(\bar{x}), j_{S^1}^*(\bar{y})) = 0$, wobei $\bar{x} := (p_0^*|_Q)^{-1}(x) \in \bar{K}$ und $\bar{y} := (p_0^*|_Q)^{-1}(y) \in Q$. Denn nach Satz 2.10 ist die Abbildung $j_{S^1}^* : \check{H}^8_{S^1}(X) \to \check{H}^8_{S^1}(F)$ injektiv. Da $\tilde{\mu}_F$ auf $\check{H}^*_{S^1}(F)$ komponentenweise gegeben ist, reicht es weiter aus, einerseits $\tilde{\mu}_{F_1}(\tilde{pr}_1 \circ j_{S^1}^*(\bar{x}), \tilde{pr}_1 \circ j_{S^1}^*(\bar{y})) = 0$ und andererseits $\tilde{\mu}_{F\setminus F_1}(\tilde{pr}_2 \circ j_{S^1}^*(\bar{x}), \tilde{pr}_2 \circ j_{S^1}^*(\bar{y})) = 0$ zu zeigen. Der erste Teil dieser Behauptung gilt mit folgender Überlegung: Nach Konstruktion gibt es Darstellungen $\bar{x} := \sum_{(i,j)\in I} \lambda_{ij}\bar{a}_i\bar{a}_j$ und $\bar{y} := \sum_{(i,j)\in I} \nu_{ij}\bar{a}_i\bar{a}_j$ für gewisse $\lambda_{ij},\ \nu_{ij} \in \mathbb{Q}$. Dabei gilt für alle $(i,j) \in I$, daß $\tilde{pr}_1 \circ j_{S^1}^*(\bar{a}_i\bar{a}_j) \in \check{H}^4(F_1) \subset \check{H}^4_{S^1}(F_1)$ ist, da die Multiplikation auf $\check{H}^*_{S^1}(F_1)$ nicht getwistet ist (vgl. Bem. 2.8 bzw. 2.11). Mit derselben

Begründung ist dann auch $\tilde{\mu}_{F_1}(\tilde{pr}_1 \circ j^*_{S^1}(\bar{x}), \tilde{pr}_1 \circ j^*_{S^1}(\bar{y}))$ auf $\check{H}^8(F_1) \subset \check{H}^8_{S^1}(F_1)$ konzentriert und verschwindet damit aus Gradgründen. Der zweite Teil der obigen Behauptung gilt schließlich ebenfalls: $\tilde{\mu}_{F \setminus F_1}(\tilde{pr}_2 \circ j^*_{S^1}(\bar{x}), \tilde{pr}_2 \circ j^*_{S^1}(\bar{y})) = 0$ folgt, da $\bar{x}$ nach Konstruktion bereits in $\bar{K} := ker\,(\tilde{pr}_2 \circ j^*_{S^1}|_Q)$ liegt.

Schritt 3: Aus der Behauptung von Schritt 2 folgt unmittelbar, daß gilt: $dim_{\mathbb{Q}}\,(K) = 0$ und also auch $dim_{\mathbb{Q}}\,(\bar{K}) = 0$. Damit ist die Abbildung $\tilde{pr}_2 \circ j^*_{S^1}|_Q : Q \to \prod_{i=2}^k \check{H}^4_{S^1}(F_i)$ injektiv, was die folgende Dimensionsabschätzung liefert:

$$dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^4(X)) = dim_{\mathbb{Q}}\,(Q) \leq dim_{\mathbb{Q}}\,(\textstyle\prod_{i=2}^k \check{H}^4_{S^1}(F_i)).$$

Nach Satz 3.1 liegen dabei nur Fixpunktkomponenten der formalen Dimension kleiner oder gleich 6 vor. Ferner ist $\check{H}^*(F_i))$ für sämtliche Fixpunktkomponenten in geraden Graden konzentriert. Mit $dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^4_{S^1}(F_i)) = \sum_{s=0}^4 dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^s(F_i))$ läßt sich daher aus der obigen Ungleichung folgern:

$$dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^*(X)) - 2r - 2 \leq dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^*(F)) - dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^*(F_1)) - (k_6 - 1),$$

was schließlich wegen $dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^*(X)) = dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^*(F))$ umgeformt werden kann zu:

$$k_6 \leq 2r + 3 - dim_{\mathbb{Q}}\,(\check{H}^*(F_1)) = 2(r - r_1) + 1.$$

$\square$

Kapitel 4

Parametrisierung

In diesem Kapitel werden wir mit Hilfe eines Resultates von S. Papadima einen Parameterraum für die Isomorphieklassen von einfach-zusammenhängenden rationalen Poincaré-Dualitätsalgebren der formalen Dimension 8 erhalten, und damit eine Parametrisierung der Kategorie X^8 nach ihrem rationalen Kohomologietyp. Mit Hilfe der Ergebnisse von Kapitel 2 und 3 werden wir dann in diesem Parameterraum durch Bilder und Urbilder geeigneter polynomialer Abbildungen eine Teilmenge charakterisieren, die keine S^1-symmetrischen Kohomologieklassen enthält. Die topologische Struktur des Parameterraumes ist jedoch sehr kompliziert, weshalb wir ihn während dieses Kapitels ausschließlich als Punktmenge betrachten wollen.

Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Bemerkungen und Definitionen für das Ergebnis Papadimas.

Bemerkung 4.1 (i) Es sei $g := (g_1, \dots, g_s) \in \mathbb{N}^s$ für $s \geq 1$ ein s-tupel von natürlichen Zahlen. Dann bestimmt g einen bis auf (graduierte) Isomorphie eindeutigen, positiv graduierten, endlich-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^g = \mathbb{Q}^{g_1} \times \cdots \times \mathbb{Q}^{g_s}$, so daß jeweils die Komponente $\mathbb{Q}^{g_i}$ im Grade i die Dimension g_i habe. Umgekehrt läßt sich jedem positiv graduierten, endlich-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum C eindeutig das Tupel der Dimensionen in den jeweiligen Graden zuordnen. Dieses Tupel heiße die *Erzeugendenkonstellation* von C.

(ii) Für $g \in \mathbb{N}^s$ sei $\Lambda^*(g)$ sei die von $\mathbb{Q}^g$ erzeugte freie, graduierte, graduiert-kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra mit $\Lambda^n(g)$ als n-ter homogener Komponente. Den zugehörigen Dualraum $Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^n(g), \mathbb{Q}]$ kürzen wir gelegentlich mit $L(g,n)$ ab. Schließlich sei $G(g)$ die Gruppe der graduierten Algebren-Automorphismen von $\Lambda^*(g)$.

(iii) Die Teilmenge $L^{reg}(g,n) \subset L(g,n)$ der *regulären Funktionale* bestehe aus allen $f \in L(g,n)$, für welche die folgende Bedingung für alle $p \leq n$ erfüllt ist:

$$\{b \in \Lambda^p(g) \mid \forall a \in \Lambda^{n-p}(g) : f(a \cdot b) = 0\} \subset (\Lambda^+(g) \cdot \Lambda^+(g))^p.$$

(iv) Die Produktgruppe $G(g) \times GL(1)$ operiert auf $L(g,n)$ vermöge $f \cdot \alpha := f \circ \alpha$ für $f \in L(g,n)$ und $\alpha \in G(g)$ bzw. vermöge skalarer Multiplikation mit Elementen aus $GL(1)$. Die Teilmenge $L^{reg}(g,n)$ der regulären Funktionale ist unter dieser Operation invariant. Wir bezeichnen die entsprechenden Quotientenräume mit $\overline{L}(g,n)$ bzw. mit $\overline{L}^{reg}(g,n)$. □

Definition 4.2 (i) Unter einer *orientierten Poincarè-Dualitätsalgebra mit ausgezeichneten Erzeugenden*, im folgenden kurz PDA$_{oe}$, wollen wir ein Tripel (A^*, a_g, ω) verstehen. Dabei sei erstens A^* eine rationale Poincaré-Dualitätsalgebra; zweitens $a_g := (a_1^1, \ldots, a_{g_1}^1, \ldots, a_1^s, \ldots, a_{g_s}^s)$ mit $a_*^i \in A^i$ ein minimales Erzeugendensystem; und drittens $\omega \in Hom_{\mathbb{Q}}[A^*, \mathbb{Q}]$ eine Orientierung von A^*. Alle üblichen Begriffe wie formale Dimension, einfacher Zusammenhang etc. übertragen sich von A^* auf das Tripel (A^*, a_g, ω).

(ii) Zwei orientierte Poincaré-Dualitätsalgebren mit ausgezeichneten Erzeugenden (A^*, a_g, ω) und (B^*, b_h, ψ) heißen *isomorph*, falls gilt:

(a) Es ist $s = t$ sowie $g_i = h_i$ für $i = 1, \ldots, s$.

(b) A^* ist vermöge der Zuordnung $a_j^i \mapsto b_j^i$ für $i = 1, \ldots, s$ und $j = 1, \ldots, g_i$ als graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra isomorph zu B^*.

(c) Es ist: $\omega(\prod_{j=1}^u a_{k_j}^{i_j}) = \psi(\prod_{j=1}^u b_{k_j}^{i_j})$ für alle endlichen Produkte von Elementen aus $(a_1^1, \ldots, a_{g_s}^s)$ bzw. $(b_1^1, \ldots, b_{h_t}^t)$.

(iii) Die Menge der Isomorphieklassen von einfach-zusammenhängenden, orientierten Poincaré-Dualitätsalgebren der formaler Dimension n mit ausgezeichneten Erzeugenden bezeichnen wir durch PD$\mathcal{A}_{oe}^n$.

(iv) Eine Isomorphieklasse $[(A^*, a_g, \omega)] \in$ PD$\mathcal{A}_{oe}^n$ heiße S^1-symmetrisch, wenn es einen S^1-Raum $X \in \mathcal{X}_{S^1}^n$ mit nicht-trivialer S^1-Operation und mit der Eigenschaft gibt, daß zu $\check{H}^*(X)$ ein minimales Erzeugendensystem b_h und eine Orientierung ψ existieren, so daß gilt: $(A^*, a_g, \omega) \cong (\check{H}^*(X), b_h, \psi)$. Die Teilmenge der S^1-symmetrischen Isomorphieklassen in PD$\mathcal{A}_{oe}^n$ bezeichnen wir mit S^1-PD$\mathcal{A}_{oe}^n$. □

Bemerkung 4.3 (i) Es sei A^* eine rationale Poincaré-Dualitätsalgebra. Als *Erzeugendenkonstellation von A^** bezeichnen wir die Erzeugendenkonstellation $g \in \mathbb{N}^s$ des graduierten $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $C_{A^*} := A^+/(A^+ \cdot A^+)$ der

Erzeugenden. Insbesondere ist A^* also genau dann homogen erzeugt, wenn genau ein $g_i \neq 0$ ist.

(ii) Mit $\mathrm{PD}\mathcal{A}^n(g)$ bezeichnen wir die Menge der Isomorphieklassen von Poincaré-Dualitätsalgebren mit der formalen Dimension n und der Erzeugendenkonstellation g. Mit $\mathrm{PD}\mathcal{A}^n_{oe}(g)$ bezeichnen wir analog die Menge der Isomorphieklassen von orientierten Poincaré-Dualitätsalgebren mit ausgezeichneten Erzeugenden der Konstellation g, die eine formale Dimension n aufweisen.

(iii) Jeder PDA_{oe} (A^*, a_g, ω) der formalen Dimension n läßt sich wie folgt ein reguläres Funktional $f \in L^{reg}(g,n) = Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^n(\mathbb{Q}^g), \mathbb{Q}]$ zuordnen: Wir setzen $f(\prod_{j=1}^u e_{k_j}^{i_j}) := \omega(\prod_{j=1}^u a_{k_j}^{i_j})$ für alle endlichen Produkte vom Gesamtgrad n, wobei $(e_1^1, \ldots, e_{g_1}^1, \ldots, e_1^s, \ldots, e_{g_s}^s)$ die kanonische Einheitsbasis des graduierten Vektorraums $\mathbb{Q}^g$, d.h. das kanonische Erzeugendensystem für $\Lambda^*(g)$ sei.

(iv) Umgekehrt läßt sich jedem regulären Funktional $f \in L(g,n)$ eine PDA_{oe} $(A_f^*, \bar{e}_g, \omega_f)$ der formalen Dimension n wie folgt zuordnen: Durch

$$\begin{cases} I_f^p := \{b \in \Lambda^p(g) \mid \forall a \in \Lambda^{n-p}(g) : f(a \cdot b) = 0\} & \text{für } p \leq n, \\ I_f^p := \Lambda^p(g) & \text{für } p > n, \end{cases}$$

ist zu f ein graduiertes Ideal $I_f^* \subset \Lambda^*(g)$ gegeben, woraus wir $A_f^* := \Lambda^*(g)/I_f^*$ erhalten. Durch das Bild des kanonischen Erzeugendensystems von $\Lambda^*(g)$ unter der Quotientenabbildung ist das minimale Erzeugendensystem $(\bar{e}_1^1, \ldots, \bar{e}_{g_1}^1, \ldots, \bar{e}_1^s, \ldots, \bar{e}_{g_s}^s)$ gegeben. Die Orientierung $\omega \in Hom_{\mathbb{Q}}[A_f^*, \mathbb{Q}]$ erhalten wir schließlich wie folgt: Für alle endlichen Produkte vom Gesamtgrad n setzen wir $\omega(\prod_{j=1}^u \bar{e}_{k_j}^{i_j}) := f(\prod_{j=1}^u e_{k_j}^{i_j})$, wobei $(e_1^1, \ldots, e_{g_1}^1, \ldots, e_1^s, \ldots, e_{g_s}^s)$ das kanonische Erzeugendensystem für $\Lambda^*(g)$ ist. Auf allen anderen Graden sei $\omega \equiv 0$. □

Damit können wir nun das angekündigte Ergebnis Papadimas zur Parametrisierung von rationalen Poincaré-Dualitätsalgeben formulieren. Dabei wird in [Pa] nur die Aussage *(ii)* des folgenden Satzes explizit bewiesen. Implizit ist jedoch im dort angegeben Beweis die Aussage *(i)* ebenfalls enthalten.

Satz 4.4 (Papadima) *(i) Die Isomorphieklassen der orientierten Poincaré-Dualitätsalgebren mit ausgezeichneten Erzeugenden zu den gegebenen Invarianten n und g stehen in Bijektion zu den regulären Funktionalen $L^{reg}(g,n) \subset L(g,n)$. Die Bijektion $\Psi(g,n) : PD\mathcal{A}^n_{oe}(g) \to L^{reg}(g,n)$ ist dabei gegeben durch die Zuordnungen gemäß Bemerkung 4.3, (iii) und (iv).*

(ii) Die Isomorphieklassen der Poincaré-Dualitätsalgebren zu den gegebenen Invarianten n und g stehen in Bijektion zu den Orbits der $G(g) \times GL(1)$-Operation auf dem Raum der regulären Funktionale $L^{reg}(g,n) \subset L(g,n)$. Die Bijektion $\overline{\Psi}(g,n) : PD\mathcal{A}^n(g) \to \overline{L^{reg}}(g,n)$ wird dabei induziert durch $\Psi(g,n) : PD\mathcal{A}^n_{or} \to L^{reg}(g,n)$. □

Wie in der Einleitung motiviert, werden wir uns nunmehr ausschließlich mit der Dimension $n = 8$ beschäftigen.

Definition 4.5 Es sei $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Die Menge $\mathcal{G}(r)$ der *möglichen Erzeugendenkonstellationen* für einfach-zusammenhängende Poincarè-Dualitätsalgebren der formalen Dimension 8 mit minimal r Erzeugenden bestehe aus allen 8-tupeln $(g_1, \ldots, g_8) \in \mathbb{N}^8$, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) Es sei $\sum_{i=1}^{8} g_i = r$.

(ii) Es gelte $0 \leq g_i \leq r$ für $i = 2, \ldots, 6$ sowie $g_1 = g_7 = 0$ und $0 \leq g_8 \leq 1$.

□

Das Ergebnis Papadimas können wir mit Hilfe dieser Definition in dem folgenden kommutativen Diagramm von Mengen zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccc}
PD\mathcal{A}^8_{oe}(r) := \coprod\limits_{g \in \mathcal{G}(r)} PD\mathcal{A}^8_{oe}(g) & \underset{\cong}{\xrightarrow{\Psi}} & \coprod\limits_{g \in \mathcal{G}(r)} L^{reg}(g,8) & \subset & \coprod\limits_{g \in \mathcal{G}(r)} L(g,8) =: \mathcal{P}ar\,(r,8) \\
\big\downarrow /\sim & & & & \big\downarrow /\sim \\
PD\mathcal{A}^8(r) := \coprod\limits_{g \in \mathcal{G}(r)} PD\mathcal{A}^8(g) & \underset{\cong}{\xrightarrow{\overline{\Psi}}} & \coprod\limits_{g \in \mathcal{G}(r)} \overline{L^{reg}}(g,8) & \subset & \coprod\limits_{g \in \mathcal{G}(r)} \overline{L}(g,8) =: \overline{\mathcal{P}ar}\,(r,8)
\end{array}$$

Wir wollen nun Untermengen der Parameterräume $\mathcal{P}ar\,(r,8)$ bzw. $\overline{\mathcal{P}ar}\,(r,8)$ wie folgt einführen:

(i) Die Untermenge 2-$\mathcal{P}ar\,(r,8) := L(g',8) \subset \mathcal{P}ar\,(r,8)$ mit $g' := (0, r, 0, \ldots 0) \in \mathcal{G}(r)$ enthält unter anderem sämtliche Isomorphieklassen 2-erzeugter orientierter Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden.

(ii) Die Untermenge 2-$\mathcal{R}eg\,(r,8) := L^{reg}(g',8) \subset \mathcal{P}ar\,(r,8)$ enthält genau sämtliche Isomorphieklassen 2-erzeugter orientierter Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden.

(iii) Die Untermenge 2-$\mathcal{S}ym\,(r,8) \subset$ 2-$\mathcal{R}eg\,(r,8) \subset \mathcal{P}ar\,(r,8)$ wird zu Ende dieses Kapitels in 4.10 definiert werden. Sie enthält unter anderem sämtliche S^1-symmetrischen Isomorphieklassen von 2-erzeugten orientierten Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden (s. Satz 4.11).

(iv) Die drei Untermengen $2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8)$, $2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r,8)$ und $2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8)$ sind invariant unter der $G(g')\times GL(1)$-Operation auf $L(g',8)$. (Dies ist für $2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8)$ nach Definition erfüllt und für $2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r,8)$ offensichtlich. Für $2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8)$ werden wir dies in Satz 4.11 zeigen.) Wir können daher die entsprechenden Orbitmengen $2\text{-}\overline{\mathcal{P}ar}\,(r,8)$, $2\text{-}\overline{\mathcal{R}eg}\,(r,8)$ und $2\text{-}\overline{\mathcal{S}ym}\,(r,8)$ in $\overline{\mathcal{P}ar}\,(r,8)$ erhalten.

Mit Hilfe dieser drei Untermengen von $\mathcal{P}ar\,(r,8)$ bzw. $\overline{\mathcal{P}ar}\,(r,8)$ werden wir im letzten Kapitel wenigstens in Ansätzen die folgenden für uns eigentlich interessanten Untermengen studieren: die Untermenge

$$\mathcal{S}ym\,(r,8) := (\mathcal{P}ar\,(r,8) \setminus\ 2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r,8)) \cup 2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8),$$

welche unter anderem alle S^1-symmetrischen Isomorphieklassen von orientierten Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden enthält, und ihr Komplement

$$\mathcal{S}ym^c\,(r,8) := \mathcal{P}ar\,(r,8) \setminus \mathcal{S}ym\,(r,8) = 2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r,8) \setminus 2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8),$$

welches ausschließlich nicht-S^1-symmetrische Isomorphieklassen von orientierten Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden enthält; beziehungsweise die Untermenge

$$\overline{\mathcal{S}ym}\,(r,8) := (\overline{\mathcal{P}ar}\,(r,8) \setminus 2\text{-}\overline{\mathcal{R}eg}\,(r,8)) \cup 2\text{-}\overline{\mathcal{S}ym}\,(r,8),$$

welche unter anderem alle S^1-symmetrischen Isomorphieklassen von Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden enthält, und ihr Komplement

$$\overline{\mathcal{S}ym}^c\,(r,8) := \overline{\mathcal{P}ar}\,(r,8) \setminus \overline{\mathcal{S}ym}\,(r,8) = 2\text{-}\overline{\mathcal{R}eg}\,(r,8) \setminus 2\text{-}\overline{\mathcal{S}ym}\,(r,8),$$

welches ausschließlich nicht-S^1-symmetrische Isomorphieklassen von Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden enthält.

Für den Rest des Kapitels werden wir uns nun mit den beiden Untermengen $2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8) \setminus 2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r,8)$ und $2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8)$ von $2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8)$ beschäftigen. Unser Ziel ist dabei unter anderem, beide Mengen jeweils durch Bilder oder Urbilder geeigneter polynomialer Abbildungen zu charakterisieren.

Zur Charakterisierung von $2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8) \setminus 2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r,8)$ benötigen wir dabei die folgenden Bezeichnungen: Wir setzen $\rho_\alpha := \binom{r+3}{4}$ und $\rho_\beta := \binom{r+2}{3}$. Mit $\mathcal{A} := (\alpha(1), \ldots, \alpha(\rho_\alpha))$ bezeichnen wir die Menge der Permutationsklassen von Multi-Indizes aus $\mathbb{N}^r$, mit $|\alpha(i)| = |(\alpha(i)_1, \ldots, \alpha(i)_r)| = 4$ für $i = 1, \ldots, \rho_\alpha$. Wir wollen $\mathcal{A}$ als lexikalisch geordnet ansehen, indem wir im folgenden aus jeder Permutationsklasse den bezüglich der lexikalischen Ordnung der Multi-Indizes minimalen Repräsentanten betrachten. Entsprechend sei $\mathcal{B} := (\beta(1), \ldots \beta(\rho_\beta))$ mit $|\beta(i)| = 3$

für $i = 1, \dots, \rho_\beta$ und einer lexikalischen Ordnung gewählt. Mit $(e_1, \dots, e_r)$ als kanonischer Einheitsbasis von $\mathbb{Q}^r$ erhalten wir die kanonische Basis $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ von $\Lambda^8(\mathbb{Q}^r)$ und die dazu duale Basis $(e^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ von $Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}] = 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r, 8)$. Mit Hilfe dieser dualen Basis werden im folgenden stets $Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$ mit $\mathbb{Q}^{\rho_\alpha}$ identifizieren. Ganz analog gehen wir bei $\Lambda^6(\mathbb{Q}^r)$ bzw. $Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$ vor. Schließlich verwenden wir für $1 \le i \le r$ noch die folgenden linearen Operatoren $\partial_i : Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}] \to Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$:

$$\partial_i(e^\alpha) = \begin{cases} e^{\alpha - \epsilon_i} & \text{falls } \alpha_i > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, daß die so definierten ∂_i jeweils bis auf die Koeffizienten mit den symbolischen partiellen Ableitungen übereinstimmen.

Lemma 4.6 *Für $q = \sum_{i=1}^{\rho_\alpha} q_i\, e^{\alpha(i)} \in Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}] = 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r, 8)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es ist $q \in 2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r, 8)$, d.h. q ist regulär.

(ii) $\partial_1 q, \dots, \partial_r q$ sind in $Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$ linear unabhängig.

Beweis: (Analog zum entsprechenden Teilschritt in [Pa], Prop. 9.) Die Definition für Regularität in 4.1, *(iii)*, reduziert sich für Funktionale $q \in 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r, 8)$ zu:

$$\{b \in \Lambda^2(\mathbb{Q}^r) \mid \forall a \in \Lambda^{n-2}(\mathbb{Q}^r) : q(a \cdot b) = 0\} = 0. \qquad (*)$$

Betrachten wir die Matrix $(q\,(e_{\beta(i)} \cdot e_j))_{ij} \in M(\rho_\beta \times r; \mathbb{Q})$, so ist $(*)$ äquivalent dazu, daß gilt:

$$rang\,\Big(q\,(e_{\beta(i)} \cdot e_j)\Big)_{ij} = r. \qquad (**)$$

Für $1 \le j \le r$ definieren wir $\kappa_j := \sum_{i=1}^{\rho_\beta} q\,(e_{\beta(i)} \cdot e_j)\, e^{\beta(i)} \in Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$. Die Aussage $(**)$ ist dann äquivalent dazu, daß die $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ in $Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$ linear unabhängig sind. Für $1 \le j \le r$ gilt jedoch $\kappa_j = \partial_j q \in Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$, wie sich durch Auswertung auf den Basis-Monomen $e_{\beta(i)}$ von $\Lambda^6(\mathbb{Q}^r)$ leicht zeigen läßt. $\square$

Das vorige Lemma motiviert, eine polynomiale Abbildung $\Phi(r) : \mathbb{Q}^r \backslash \{0\} \times Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}] \to Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$ wie folgt einzuführen, um $2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r, 8)$ zu charakterisieren: Für alle $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Q}^r \backslash \{0\}$ sei die Matrix $(\phi_{ij})(\lambda) \in M(\rho_\beta \times \rho_\alpha, \mathbb{Q})$ gegeben durch

$$\phi_{ij}(\lambda) := \Big\langle (\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \partial_k)\,(e^{\alpha(j)})\,,\, e^{\beta(i)} \Big\rangle,$$

d.h. durch den Koeffizienten vor dem Monom $e^{\beta(i)}$, den der Operator $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \partial_k$ ausgewertet auf $e^{\alpha(j)}$ ergibt. Damit definieren wir $\Phi(r)(\lambda, q)$ für $\lambda \in \mathbb{Q}^r \backslash \{0\}$ und $q := \sum_{i=1}^{\rho_\alpha} q_i \, e^{\alpha(i)} \in Hom_{\mathbb{Q}} [\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$ vermöge

$$\Phi(r)(x, f) := p = \sum_{i=1}^{\rho_\beta} p_i \, e^{\beta(i)} \in Hom_{\mathbb{Q}} [\Lambda^6(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}] \text{ mit } p := (\phi_{ij}(x))_{ij} \cdot q.$$

Mit diesen Überlegungen ergibt sich nun aus Lemma 4.6 unmittelbar die folgende Charakterisierung der Menge $2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r, 8) \setminus 2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r, 8)$:

Satz 4.7 *Ist* $pr : \mathbb{Q}^r \backslash \{0\} \times Hom_{\mathbb{Q}} [\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}] \to Hom_{\mathbb{Q}} [\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$ *die kanonische Projektion, so gilt:*

$$2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r, 8) \setminus 2\text{-}\mathcal{R}eg\,(r, 8) = pr\,[\Phi(r)^{-1}(0)].$$

□

Im nächsten Kapitel werden wir noch das folgende Lemma bezüglich der Abbildung $\Phi(r)$ benötigen.

Lemma 4.8 *Die Matrix* $(\phi_{ij}(\lambda))_{ij} \in M(\rho_\beta \times \rho_\alpha; \mathbb{Q})$ *hat für alle* $\lambda \in \mathbb{Q}^r \backslash \{0\}$ *vollen Rang* ρ_β.

Beweis: Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda_1 \neq 0$. Die Matrix $(\phi_{ij}(\lambda))_{ij}$ hat auf Grund der lexikalischen Ordnung der Multi-Indizes die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & ? \\ 0 & \lambda_1 & ? & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & ? \\ 0 & 0 & \lambda_1 & ? & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & ? \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_1 & ? & \cdot & \cdots & ? \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_1 & ? & \cdots & ? \end{pmatrix}$$

□

Schließlich wenden wir uns zum Ende dieses Kapitels der Untermenge $2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r, 8)$ zu. Der folgende Gedanke steht dabei hinter unseren eher technischen Ausführungen: Ist die Kohomologie-Algebra eines nicht-trivialen S^1-Raumes $X \in \mathcal{X}_{S^1}^8$ 2-erzeugt, so läßt sie sich durch geeignete Filterung und Übergang zur graduierten assoziierten Algebra aus den niederdimensionalen Kohomologie-Algebren der Fixpunktkomponenten zurückgewinnen (vgl. Kor. 2.18). Wir führen deshalb eine Menge ein, die für alle potentiellen Fixpunktmengenkonstellationen und Filterungen die wesentlichen Informationen zur Konstruktion einer graduierten assoziierten Algebra enthält.

Definition 4.9 Es sei $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Die Menge $\mathcal{K}(r)$ der *möglichen Fixpunktmengenkonstellationen* für 2-erzeugte Poincarè-Dualitätsalgebren der formalen Dimension 8 mit minimal r Erzeugenden und nicht-trivialer S^1-Symmetrie bestehe aus allen Tupeln $(k_6, k_4, k_2, k_0, s_1, \ldots, s_{k_6}, t_1, \ldots, t_{k_4})$ von natürlichen Zahlen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen: (Man beachte dabei, daß die k_d jeweils der möglichen Anzahl von d-dimensionalen Fixpunktkomponenten, die s_i jeweils der möglichen minimalen Erzeugendenzahl der 6-dimensionalen Fixpunktkohomologien und die t_i jeweils der möglichen minimalen Erzeugendenzahl der 4-dimensionalen Fixpunktkohomologien entsprechen.)

(i) Es sei $\ell(k) := \sum_{i=1}^{k_6}(2s_i + 2) + \sum_{i=1}^{k_4}(t_i + 2) + 2k_2 + k_0 \leq \binom{r+1}{2} + 2r + 2$. (Diese Forderung entspricht der bekannten maximalen Länge einer Poincaré-Dualitätsalgebra mit minimal r Erzeugenden.)

(ii) Es sei $1 \leq s_i \leq r$ für $i = 1, \ldots k_6$ sowie $1 \leq t_i \leq r$ für $i = 1, \ldots k_4$. (Diese Forderung entspricht der Abschätzung für die minimale Erzeugendenzahl der jeweiligen Fixpunktkohomologien in Korollar 2.17.)

(iii) Es sei $k_6 \leq 2\,(r - max\,\{s_i \mid i = 1, \ldots, k_6\}) + 1$. (Diese Forderung entspricht der Abschätzung für die Anzahl der 6-dimensionalen Fixpunktkomponenten in Satz 3.2.) $\square$

Man beachte, daß mit dieser Definition die Menge $\mathcal{K}(r)$ der möglichen Fixpunktmengenkonstellationen zu gegebenem r endlich ist. Zu jeder möglichen Fixpunktmengenkonstellation $k \in \mathcal{K}(r)$ betrachten wir nun eine Menge $\mathcal{F}ix(r,k)$, welche in gewissem Sinne „alle möglichen Filterungen zu einer gegebenen Fixpunktmengenkonstellation parametrisiert“. $\prod_{i=1}^{k_6} Hom_{\mathbb{Q}}\,[\Lambda^6(\mathbb{Q}^{s_i}), \mathbb{Q}]$ „enthält“ so etwa die „Information über die multplikative Struktur der 6-dimensionalen Fixpunktkomponenten“, $\prod_{i=1}^{k_6} M(r \times (s_i + 1), \mathbb{Q})$ die „Information über die Projektion der zweiten Filterkomponenten auf die entsprechenden 6-dimensionalen Fixpunktkohomologien“ und $\mathbb{Q}^{\ell(k)}$ die „Information über die Orientierung“. Letzlich wird die Motivation für die folgende Einführung von $\mathcal{F}ix(r,k)$ und die damit verbundenen Konstruktionen jedoch durch den Beweis von Satz 4.11 gegeben.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}ix(r,k) := \prod_{i=1}^{k_6}(Hom_{\mathbb{Q}}\,[\Lambda^6(\mathbb{Q}^{s_i}), \mathbb{Q}] \;\times\; M(r \times (s_i+1), \mathbb{Q}))\ldots \\ \ldots \times \prod_{i=1}^{k_4}(Hom_{\mathbb{Q}}\,[\Lambda^4(\mathbb{Q}^{t_i}), \mathbb{Q}] \;\times\; M(r \times (t_i+1), \mathbb{Q}))\ldots \\ \ldots \times \prod_{i=1}^{k_2} M(r \times 2, \mathbb{Q}) \times \prod_{i=1}^{k_0} M(r \times 1, \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^{\ell(k)}.\end{aligned}$$

Für $k \in \mathcal{K}(r)$ werden wir nun eine polynomiale Abbildung

$$\Theta(r,k) : \mathcal{F}ix(r,k) \to Hom_{\mathbb{Q}}\,[\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}],$$

$$\pi := (\underbrace{\zeta^i, (\eta^i_{nm})}_{i=1,\dots k_6}, \underbrace{\xi^i, (\varrho^i_{nm})}_{i=1,\dots k_4}, \underbrace{(\varsigma^i_{nm})}_{i=1,\dots k_2}, \underbrace{(\tau^i_n)}_{i=1,\dots k_0}, \underbrace{(\upsilon_n)}_{n=1,\dots \ell(k)}) \longmapsto \Theta(r,k)[\pi]$$

einführen. (Man beachte dabei, daß diese Definition von $\Theta(r,k)[\pi]$ im intuitiven Sinne „den Übergang zur graduierten assoziierten Algebra einer durch π gegebenen Filterung“ darstellt.) Zur besseren Darstellung verwenden wir dabei die folgenden $\ell(k)$ Variablen ...

$$\dots \text{ für } \begin{cases} 1 \le i \le k_6 & : \quad a^i_0, a^i_1, \dots, a^i_{s_i}, a^{i,*}_1, \dots, a^{i,*}_{s_i}, a^{i,*}_0, \\ 1 \le i \le k_4 & : \quad b^i_0, b^i_1, \dots, b^i_{t_i}, b^{i,*}_0, \\ 1 \le i \le k_2 & : \quad c^i_0, c^{i,*}_0, \\ 1 \le i \le k_0 & : \quad d^i_0, \end{cases}$$

die wir gemäß dieser Auflistung mit $T_1, \dots, T_{\ell(k)}$ identifizieren wollen. Zunächst setzen wir für $1 \le n \le r$:

$$x^F_n := \sum_{i=1}^{k_6} \sum_{j=0}^{s_i} \eta^i_{nj}\, a^i_j + \sum_{i=1}^{k_4} \sum_{j=0}^{t_i} \varrho^i_{nj}\, b^i_j + \sum_{i=1}^{k_2} (\varsigma^i_{n1}\, c^i_0 + \varsigma^i_{n2}\, c^{i,*}_0) + \sum_{i=1}^{k_0} \tau^i_n\, d^i_0.$$

In einem weiteren Zwischenschritt definieren wir $\Theta_T(r,k)[\pi]$ auf sämtlichen Monomen $e_{\kappa\lambda\mu\nu} \in \Lambda^8(\mathbb{Q}^r)$ wie folgt:

$$\Theta_T(r,k)[\pi](e_{\kappa\lambda\mu\nu}) := x^F_\kappa x^F_\lambda x^F_\mu\, x^F_\nu$$

Mit dieser Definition können wir $\Theta_T(r,k)[\pi](e_{\kappa\lambda\mu\nu})$ als Element eines Polynomrings $\mathbb{Q}[T_1, \dots, T_{\ell(k)}]$ auffassen, in dem jedoch im Unterschied zum Standard-Polynomring die Produkte zweier Variabler wie folgt definiert sein sollen:

$$\text{für } 1 \le i \le k_6 : \begin{cases} a^i_0\, a^i_n = a^i_n \;\text{ sowie }\; a^i_0\, a^{i,*}_n = a^{i,*}_n \;\text{ für } 0 \le n \le s_i \\ a^i_n\, a^i_m = \sum_{j=1}^{s_i} \zeta^i(e_{nmj})\, a^{i,*}_j \;\text{ für } 1 \le n,m \le s_i \\ a^i_n\, a^{i,*}_m = \delta_{nm} \;\text{ für } 1 \le n,m \le s_i, \end{cases}$$

$$\text{für } 1 \le i \le k_4 : \begin{cases} b^i_0\, b^i_n = b^i_n \;\text{ für } 0 \le n \le t_i \;\text{ sowie }\; b^i_0\, b^{i,*}_0 = b^{i,*}_0 \\ b^i_n\, b^i_m = \sum_{j=1}^{t_i} \xi^i(e_{nmj})\, b^{i,*}_j \;\text{ für } n,m = 1, \dots t_i, \end{cases}$$

$$\text{für } 1 \le i \le k_2 : \begin{cases} c^i_0\, c^i_0 = c^i_0 \;\text{ sowie }\; c^i_0\, c^{i,*}_0 = c^{i,*}_0, \end{cases}$$

$$\text{für } 1 \leq i \leq k_0: \left\{ \quad d_0^i \, d_0^i = d_0^i. \right.$$

Alle übrigen zweifachen Produkte von Variablen mögen verschwinden. Durch Ausmultiplizieren gemäß dieser Regeln läßt sich $\Theta_T(r,k)[\pi](e_{\kappa\lambda\mu\nu})$ nun als Linearkombination bezüglich der Variablen $T_1, \ldots, T_{\ell(k)}$ darstellen:

$$\begin{aligned}
\Theta_T(r,k)[\pi](e_{\kappa\lambda\mu\nu}) = \sum_{i=1}^{k_6} \sum_{j=0}^{s_i} P_j^i\,(\zeta^i, (\eta_{nm}^i))\, a_j^i + \sum_{i=1}^{k_6} \sum_{j=0}^{s_i} P_j^{i,*}\,(\zeta^i, (\eta_{nm}^i))\, a_j^{i,*} + \ldots \\
\ldots + \sum_{i=1}^{k_4} \sum_{j=0}^{t_i} Q_j^i\,(\xi^i, (\varrho_{nm}^i))\, b_j^i + \sum_{i=1}^{k_4} Q_0^{i,*}\,(\xi^i, (\varrho_{nm}^i))\, b_0^{i,*} + \ldots \\
\ldots + \sum_{i=1}^{k_2} R^i\,(\varsigma_{nm}^i)\, c_0^i + \sum_{i=1}^{k_2} R^{i,*}\,(\varsigma_{nm}^i)\, c_0^{i,*} + \sum_{i=1}^{k_0} S^i(\tau_n^i) d_0^i,
\end{aligned}$$

wobei die $P_j^i, P_j^{i,*}, Q_j^i, Q_0^{i,*}, R^i, R^{i,*}$ und S^i sämtlich polynomiale Abbildungen in den Komponenten ihrer jeweiligen Argumente sind. Damit können wir schließlich die gesuchte Form $\Theta(r,k)[\pi]$ definieren: Wir erhalten $\Theta(r,k)[\pi](e_{\kappa\lambda\mu\nu})$ dadurch, daß wir $\Theta_T(r,k)[\pi](e_{\kappa\lambda\mu\nu})$ als Polynom in $T_1, \ldots, T_{\ell(k)}$ an der Stelle $v \in \mathbb{Q}^{\ell(k)}$ auswerten.

Damit definieren wir nun die Untermenge $2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8) \subset 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8)$:

Definition 4.10 Es sei

$$2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8) := \bigcup_{k \in \mathcal{K}(r)} \Theta(r,k)\,[\mathcal{F}ix\,(r,k)].$$

□

Der Beweis des folgenden Satzes motiviert schließlich die Einführung von $\mathcal{K}(r)$, $\mathcal{F}ix(k,r)$ und $\Theta(k,r) : \mathcal{F}ix(k,r) \to 2\text{-}\mathcal{P}ar(r,8)$.

Satz 4.11 *(i) $2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8)$ enthält unter anderem sämtliche S^1-symmetrische Isomorphieklassen von 2-erzeugten, orientierten Poincaré-Dualitätsalgebren mit minimal r Erzeugenden.*

(ii) $2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8)$ ist invariant unter der $G(g') \times GL(1)$-Operation auf $2\text{-}\mathcal{P}ar(r,8)$.

Beweis: Jeder S^1-symmetrischen Isomorphieklasse in $S^1\text{-PD}\mathcal{A}_{oe}^8(g')$ läßt sich wie folgt eine Fixpunktmengenkonstellation $k \in \mathcal{K}(r)$ zuordnen: $(\check{H}^*(X), b_h, \psi)$ sei eine zugehörige PDA_{oe} gemäß Definition 4.2, der ein nicht-trivialer S^1-Raum $X \in \mathcal{X}_{S^1}^8$ zugrunde liegt. Wir setzen erstens k_d als die Anzahl der d-dimensionalen Fixpunktkomponenten für $d = 0, 2, 4, 6$, zweitens s_i als die minimale Erzeugendenzahl der i-ten 6-dimensionalen Fixpunktkomponente und drittens t_i als die minimale Erzeugendenzahl der i-ten 4-dimensionalen Fixpunktkomponente. Diejenigen S^1-symmetrischen Isomorphieklassen, denen sich auf diese Weise die Fixpunktmengenkonstellation $k \in \mathcal{K}(r)$ zuordnen läßt, wollen wir in der Untermenge S^1-PD$\mathcal{A}^8_{oe}(g', k) \subset$ PD$\mathcal{A}^8_{oe}(g')$ zusammenfassen. Zum Beweis der ersten Behauptung reicht es nun, eine Abbildung $\Upsilon(r,k) : S^1\text{-PD}\mathcal{A}^8_{oe}(g',k) \to \mathcal{F}ix(r,k)$ derart anzugeben, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S^1\text{-PD}\mathcal{A}^8_{oe}(g',k) & \xrightarrow{\Upsilon(r,k)} & \mathcal{F}ix(r,k) \\ {\scriptstyle\subset}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Theta(r,k)} \\ \text{PD}\mathcal{A}^8_{oe}(g') & \xrightarrow{\Psi(g',8)} & 2\text{-}\mathcal{P}ar(r,8) \end{array}$$

Betrachten wir eine S^1-symmetrische Isomorphieklasse $[(\check{H}^*(X), (x_1, \ldots, x_r), \omega)]$ aus S^1-PD$\mathcal{A}^8_{oe}(g', k)$, wobei der Repräsentant $(\check{H}^*(X), (x_1, \ldots, x_r), \omega)$ im obigen Sinne die Fixpunktmengenkonstellation k aufweise. Wir definieren $\Upsilon(r, k)$ auf $[(\check{H}^*(X), (x_1, \ldots, x_r), \omega)]$ durch

$$\Upsilon(r,k)([(\check{H}^*(X), (x_1, \ldots, x_r), \omega)]) := (\zeta^i, (\eta^i_{nm}), \xi^i, (\varrho^i_{nm}), (\varsigma^i_{nm}), (\tau^i_n), (\upsilon_n)),$$

wobei wir $(\zeta^i, (\eta^i_{nm}), \xi^i, (\varrho^i_{nm}), (\varsigma^i_{nm}), (\tau^i_n), (\upsilon_n))$ wie folgt erhalten:

Aus der i-ten 6-dimensionalen Fixpunktkohomologie $\check{H}^*(F^6_i)$ erhalten wir nach Wahl eines minimalen Erzeugendensystems $(a^i_1, \ldots, a^i_{s_i})$ und einer Orientierung ω^i_6 die Form $\zeta^i \in Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^6(\mathbb{Q}^{s_i}), \mathbb{Q}]$ gemäß Bemerkung 4.3, (*iii*), vermöge $\zeta^i(e_{\lambda\mu\nu}) := \omega^i_6(a^i_\lambda\, a^i_\mu\, a^i_\nu)$.

Analog erhalten wir aus der Kohomologie-Algebra der i-ten 4-dimensionalen Fixpunktkomponente $\check{H}^*(F^4_i)$ nach Wahl eines minimalen Erzeugendensystems $(b^i_1, \ldots, b^i_{t_i})$ und einer Orientierung ω^i_4 die Form $\xi^i \in Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^4(\mathbb{Q}^{t_i}), \mathbb{Q}]$ vermöge $\xi^i(e_{\mu\nu}) := \omega^i_4(a^i_\mu\, a^i_\nu)$.

Die so gewählten minimalen Erzeugendensysteme der 4- und 6-dimensionalen Fixpunktkohomologien ergänzen wir durch die jeweiligen Eins-Elemente $1^6_i =: a^i_0$, $1^4_i =: b^i_0$, $1^2_i =: c^i_0$ und $1^0_i =: d^i_0$ der 6-, 4-, 2- und 0-dimensionalen Fixpunktkohomologien sowie um die zu jeweils c^i_0 dualen Elemente $c^{i,*}_0$ der 2-dimensionalen Fixpunktkohomologien. Wir erhalten so eine Basis von $\check{H}^2_{S^1}(F) = \check{H}^2(F) \oplus t \cdot \check{H}^0(F)$. Es seien $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r \in \check{H}^2_{S^1}(X)$ *lifts* von $x_1, \ldots, x_r$ bezüglich p^*_0 (vgl. Satz 2.10). Aus $j^*_{S^1}(\bar{x}_1), \ldots, j^*_{S^1}(\bar{x}_r) \in \check{H}^2_{S^1}(F)$ ausgedrückt als Linearkombination bezüglich der oben erhaltenen Basis erhalten wir (η^i_{nm}), (ϱ^i_{nm}), (ς^i_{nm}) und (τ^i_n) wie folgt:

(i) Für $1 \leq i \leq k_6$, $1 \leq n \leq r$ und $0 \leq m \leq s_i$ sei η^i_{nm} gegeben durch den Koeffizienten von $j^*_{S^1}(\bar{x}_n)$ vor a^i_m.

(ii) Für $1 \leq i \leq k_4$, $1 \leq n \leq r$ und $0 \leq m \leq t_i$ sei ϱ^i_{nm} gegeben durch den Koeffizienten von $j^*_{S^1}(\bar{x}_n)$ vor b^i_m.

(iii) Für $1 \leq i \leq k_2$ und $1 \leq n \leq r$ sei ς_{n1}^i gegeben durch den Koeffizienten von $j_{S^1}^*(\bar{x}_n)$ vor c_0^i und ς_{n2}^i durch den Koeffizienten von $j_{S^1}^*(\bar{x}_n)$ vor $c_0^{i,*}$.

(iv) Für $1 \leq i \leq k_0$ und $1 \leq n \leq r$ sei τ_n^i gegeben durch den Koeffizienten von $j_{S^1}^*(\bar{x}_n)$ vor d_0^i.

Für $i = 1, \ldots, k_6$ ergänzen wir nun die Vektoren $a_0^i, \ldots, a_{s_i}^i$ durch die dazu in $\check{H}^*(F_i^6)$ dualen Vektoren $a_0^{i,*}, \ldots, a_{s_i}^{i,*}$ sowie für $i = 1, \ldots, k_4$ die Vektoren $b_0^i, \ldots, b_{t_i}^i$ durch den zu b_0^i in $\check{H}^*(F_i^4)$ dualen Vektor $b_0^{i,*}$. Dies liefert für $\check{H}^*(F)$ eine Basis $\mathcal{B}$,

$$\text{welche für } \begin{cases} 1 \leq i \leq k_6 & : \quad a_0^i, a_1^i, \ldots, a_{s_i}^i, a_1^{i,*}, \ldots, a_{s_i}^{i,*}, a_0^{i,*}, \\ 1 \leq i \leq k_4 & : \quad b_0^i, b_1^i, \ldots, b_{t_i}^i, b_0^{i,*}, \\ 1 \leq i \leq k_2 & : \quad c_0^i, c_0^{i,*}, \\ 1 \leq i \leq k_0 & : \quad d_0^i \end{cases}$$

enthält, wobei wir die Basisvektoren als in dieser Ordnung von 1 bis $\ell(k)$ durchindiziert ansehen wollen. Für $n = 1, \ldots, r$ setzen wir $x_n^F := p_1(j_{S^1}^*(\bar{x}_n))$, wobei $p_1 : \check{H}_{S^1}^*(F) \to \check{H}^*(F)$ die Auswertung an der Stelle $t = 1$ ist. Man beachte, daß damit die $x_1^F, \ldots, x_r^F$ zusammen mit dem Eins-Element 1_F von $\check{H}^*(F)$ eine Basis von $\mathcal{F}_2$, der zweiten Komponente der Filterung auf $\check{H}^*(F)$ aus Korollar 2.18 bilden. Gemäß der Konstruktion dieser Filterung erzeugen die $(x_\lambda^F\, x_\mu^F\, x_\nu^F | 1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq r)$ deshalb die Komponenten $\mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_7$ als Vektorraum, wobei $\mathcal{F}_7$ nach Korollar 2.18 in $\check{H}^*(F)$ 1-kodimensional ist. Es gibt daher $\gamma \in Hom_{\mathbb{Q}}[\check{H}^*(F), \mathbb{Q}]$ derart, daß erstens $ker\, \gamma = \mathcal{F}_7$ gilt, und zweitens: $\gamma(x_\kappa^F\, x_\lambda^F\, x_\mu^F\, x_\nu^F) = \omega(x_\kappa\, x_\lambda\, x_\mu\, x_\nu)$ für alle $1 \leq \kappa, \lambda, \mu, \nu \leq r$. Für $n = 1, \ldots, \ell(k)$ definieren wir damit v_n, indem wir γ auf dem n-ten Basisvektor der Basis $\mathcal{B}$ auswerten. Nach diesen Definitionen läßt sich schließlich die oben behauptete Kommutativität des Diagramms durch etwas Nachrechnen bestätigen.

Die zweite Behauptung, die Invarianz von 2-$\mathcal{S}ym\,(r, 8)$ unter der $G(g') \times GL(1)$-Operation auf 2-$\mathcal{P}ar(r, 8)$, ergibt sich mit diesen Überlegungen unmittelbar aus der Definition der Abbildung $\Theta(r, k) : \mathcal{F}ix(r, k) \to Hom_{\mathbb{Q}}[\Lambda^8(\mathbb{Q}^r), \mathbb{Q}]$. $\square$

Kapitel 5

Ausblick

Zu Beginn dieses letzten Kapitels kehren wir zu unserer Leitfrage zurück, die wir mit den Überlegungen des vorigen Kapitel wie folgt formulieren können: Ist $\overline{\mathcal{S}ym}^c(r,8)$ in $\overline{\mathcal{P}ar}(r,8)$ „generisch"? Dabei wäre der Versuch naheliegend, diese Frage in zwei Schritten zu beantworten: Man zeige, daß erstens $\mathcal{S}ym^c(r,8)$ in $\mathcal{P}ar(r,8)$ derart „generisch" ist, daß sich diese „Generizität" dann zweitens auf den Quotienten $\overline{\mathcal{S}ym}^c(r,8)$ in $\overline{\mathcal{P}ar}(r,8)$ übertragen läßt. Dazu müßten wir einen geeigneten Begriff von „Generizität" und eine damit verbundene zusätzliche Struktur für die Parameterräume $\mathcal{P}ar(r,8)$ bzw. $\overline{\mathcal{P}ar}(r,8)$ finden, die wir bisher nur als Punktmengen betrachtet haben. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten beruhen nicht zuletzt darauf, daß unseren Betrachtungen die rationalen Zahlen zugrunde liegen. (Diese Schwierigkeiten deuten sich bereits bei einem einfachen Beispiel, etwa den Isomorphieklassen einer symmetrischen Bilinearform über einem rationalen Vektorraum an.)

Wie sich der erste Schritt wenigstens im Fall einer analogen Fragestellung über $\mathbb{R}$ – statt über $\mathbb{Q}$ – durchführen läßt, wollen wir nun zum Abschluß der Arbeit in der Kategorie der reellen semi-algebraischen Mengen mit Hilfe des damit verbundenen Dimensionsbegriffs zeigen.

Eine Einführung in die Theorie reeller algebraischer und semi-algebraischer Mengen wird zum Beispiel in [BR] gegeben. In der folgenden Bemerkung wollen wir die dabei für uns wichtigen Ergebnisse zusammenfassen.

Bemerkung 5.1 (i) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *semi-algebraisch*, wenn sie sich darstellen läßt als

$$V = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, P_{ij}(x)\ s_{ij}\ 0\},$$

wobei $s_{ij} \in \{>, =, <\}$ und $P_{ij}(T) \in \mathbb{R}[T]$, $T = (T_1, \ldots T_n)$. Die Familie der semi-algebraischen Mengen im $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen bezüglich der Bildung endlicher Vereinigungen, endlicher Durchschnitte und des Komplements.

(ii) Es seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ semi-algebraische Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt semi-algebraisch, wenn ihr Graph eine semi-algebraische Menge im $\mathbb{R}^{n+m}$ ist. Alle polynomialen Abbildungen sind semi-algebraisch, insbesondere die kanonischen Projektionen.

(iii) Es gilt das Theorem von Tarski-Seidenberg: Für eine semi-algebraische Abbildung $f : X \to Y$ ist das Bild $f(X) \subset Y$ eine semi-algebraische Menge.

(iv) Jede semi-algebraische Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ läßt eine endliche semi-algebraische Stratifikation zu, d.h.: Es gibt eine endliche Partition $\{A_i\}_{i\in I}$ durch semi-algebraische Mengen von X, so daß

   (a) jedes Stratum A_i eine reell analytische, lokal abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist,

   (b) für $\overline{A_i} \cap A_j \neq \emptyset$ und $i \neq j$ gilt: $\overline{A_i} \supset A_j$ und $dim\,(A_j) < dim\,(A_i)$.

   Mit Hilfe einer solchen Stratifikation wird die Dimension von X definiert durch $dim\,(X) := max_{i\in I}\, dim\,(A_i)$. Die Dimension ist jedoch von der Wahl der Stratifikation unabhängig.

(v) Für zwei semi-algebraische Mengen X und Y aus $\mathbb{R}^n$ gilt $dim\,(X \cup Y) = max\,\{dim\,(X), dim\,(Y)\}$. Ist außerdem $X \subset Y$ mit $dim\,(X) < dim\,(Y)$, so gilt $dim\,(Y \setminus X) = dim\,(Y)$. Wir werden analog auch der disjunkten Vereinigung zweier semi-algebraischer Mengen $X \in \mathbb{R}^n$ und $Y \in \mathbb{R}^m$ eine Dimension zuordnen: $dim\,(X \sqcup Y) := max\,\{dim\,(X), dim\,(Y)\}$.

(vi) Für eine semi-algebraische und (bezüglich der metrischen Topologie) stetige Abbildung $f : X \to Y$ gilt: $dim\,(f(X)) \leq dim\,(X)$.

(vii) Die folgende Aussage ist eine einfache Anwendung des Urbild-Theorems für reguläre reell algebraische Mengen: Es sei $p = (p_1, \dots p_m) : \mathbb{R}^r\setminus\{0\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(n + r) \geq m$, eine polynomiale Abbildung und $y \in im\,(p)$ derart, daß für alle $x \in \mathbb{R}^r\setminus\{0\} \times \mathbb{R}^n$ mit $p(x) = y$ gilt:

$$rang\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}(x)\right)_{ij} = m.$$

   Dann ist $p^{-1}(y)$ eine semi-algebraische Menge der Dimension $dim\,p^{-1}(y) = n + r - m$. □

Damit können wir das folgende Lemma formulieren, wobei wir zum Beweis der Aussage *(ii)* entscheidend die in Definition 4.9 gestellten notwendigen Bedingungen an eine Fixpunktmengenkonstellation $k \in \mathcal{K}(r)$ verwenden werden:

Lemma 5.2 *(i) 2-$\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus$ 2-$\mathcal{R}eg\,(r,8,\mathbb{R})$ ist eine semi-algebraische Menge, für die gilt:*

$$dim\,(\text{2-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus \text{2-}\mathcal{R}eg\,(r,8,\mathbb{R})) \leq \tbinom{r+3}{4} - \frac{1}{6}\,r^3 + \mathcal{O}(r^2).$$

(ii) 2-$\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R})$ ist eine semi-algebraische Menge, für die für hinreichend große r gilt:

$$dim\,\text{2-}\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R}) \leq \tbinom{r+3}{4} - \frac{5}{768}\,r^4 + \mathcal{O}(r^3).$$

(iii) $\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus$ 2-$\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R})$ ist im Sinne von 5.1, (v), eine disjunkte Vereinigung semi-algebraischer Mengen, für die für hinreichend große r gilt:

$$dim\,(\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus \text{2-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}))\; \leq \tbinom{r+3}{4} - \frac{1}{6}\,r^3 + \mathcal{O}(r^2).$$

Beweis: Zu (i): Analog zu unserer Charakterisierung über $\mathbb{Q}$ in Satz 4.7 erhalten wir für 2-$\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus$ 2-$\mathcal{R}eg\,(r,8,\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$:

$$\text{2-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus \text{2-}\mathcal{R}eg\,(r,8,\mathbb{R}) = pr\,[\Phi(r,\mathbb{R})^{-1}(0)],$$

Dabei hat bereits die Matrix

$$\Big(\frac{\Phi(r,\mathbb{R})_i}{\partial\, q_j}\,(\lambda,q)\Big)_{ij} = (\phi_{ij}(\lambda))_{ij} \in M(\rho_\beta \times \rho_\alpha, \mathbb{R})$$

wegen Lemma 4.8 für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ vollen Rang. Nach Bemerkung 5.1, (ii) und (vii), ist 2-$\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus$ 2-$\mathcal{R}eg\,(r,8,\mathbb{R})$ daher eine semi-algebraische Menge, für deren Dimension gilt:

$$dim\,(\text{2-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus \text{2-}\mathcal{R}eg\,(r,8,\mathbb{R})) \leq \tbinom{r+3}{4} - \tbinom{r+2}{3} + r = \tbinom{r+3}{4} - \tfrac{1}{6}\,r^3 + \mathcal{O}(r^2).$$

Zu (ii): Analog zu unserer obigen Charakterisierung über $\mathbb{Q}$ in 4.10 erhalten wir für 2-$\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$:

$$\text{2-}\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R}) = \bigcup_{k\in\mathcal{K}(r)} \Theta(k,r,\mathbb{R})\,[\mathcal{F}ix\,(k,r,\mathbb{R})],$$

weshalb 2-$\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R})$ eine semi-algebraische Menge ist. Für die Dimension folgt hieraus

$$dim\, 2\text{-}\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R}) \le \max_{k\in\mathcal{K}(r)} [\sum_{i=1}^{k_6}(\tbinom{s_i+2}{3} + (r+2)(s_i+1)) + \dots$$

$$\dots \sum_{i=1}^{k_4}(\tbinom{t_i+1}{2} + (r+1)(t_i+1)+1) + \sum_{i=1}^{k_2}(2r+2) + \sum_{i=1}^{k_0}(r+1)]$$

Die beiden letzten Terme der rechten Seite können wie folgt abgeschätzt werden:

$$\max_{k\in\mathcal{K}(r)} \sum_{i=1}^{k_0}(r+1) \le \ell(k)\cdot(r+1) \le [\tbinom{r+1}{2} + 2r+2](r+1) = \mathcal{O}(r^3)$$

$$\max_{k\in\mathcal{K}(r)} \sum_{i=1}^{k_2}(2r+2) \le \frac{\ell(k)}{2}\cdot(2r+2) \le [\tbinom{r+1}{2} + 2r+2](r+1) = \mathcal{O}(r^3)$$

Ein Lagrange-Ansatz zur Bestimmung des Maximums des k_4-Terms unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{k_4}(t_i+2) \le \binom{r+1}{2} + 2r+2$ ergibt nach einigem Rechnen die folgende Abschätzung:

$$\max_{k\in\mathcal{K}(r)} \sum_{i=1}^{k_4}(\tbinom{t_i+1}{2} + (r+1)(t_i+1)+1) \le (\frac{r}{2}+2)[\tbinom{r+1}{2} + (r+1)^2+1] = \mathcal{O}(r^3).$$

Schließlich gilt bezüglich des k_6-Termes:

$$\begin{aligned}\max_{k\in\mathcal{K}(r)} \sum_{i=1}^{k_6}(\tbinom{s_i+2}{3}&+(r+2)(s_i+1))\\ &\le \max_{0\le s\le r}\, [2(r-s)+1]\cdot[\tbinom{s+2}{3} + (r+2)(s+1)]\\ &\le \max_{0\le s\le r}\, (r-s)\,\frac{s^3}{3} + \mathcal{O}(r^3),\end{aligned}$$

wobei das Maximum für $s = \frac{3}{4}r$ angenommen wird. Damit ergibt sich

$$\max_{k\in\mathcal{K}(r)} \sum_{i=1}^{k_6}(\tbinom{s_i+2}{3} + (r+2)(s_i+1)) \le \frac{9}{256}\,r^4 + \mathcal{O}(r^3) = \tbinom{r+3}{4} - \frac{5}{768}\,r^4 + \mathcal{O}(r^3).$$

Zu (iii): Nach Definition ist

$$\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) := \bigsqcup_{\substack{g\in\mathcal{G}(r)\\ g\ne g'}} L(g,8,\mathbb{R}) := \bigsqcup_{\substack{g\in\mathcal{G}(r)\\ g\ne g'}} Hom_{\mathbb{R}}\,[\Lambda^8(\mathbb{R}^g),\mathbb{R}],$$

und damit eine disjunkte Vereinigung semi-algebraischer Mengen. Für die Dimension von $\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R})$ im Sinne von 5.1, (v), folgt hieraus mit $g' := (0,r,0,\dots,0) \in \mathcal{G}(r)$:

$$\begin{aligned} &dim\,(\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R})) \\ &\qquad = \max_{g\in\mathcal{G}(r),\, g\neq g'} \left[\tbinom{g_2+3}{4} + \tbinom{g_2+1}{2} + g_2\tbinom{g_3}{2} + g_3g_5 + \tbinom{g_4+1}{2} + g_2g_6 + g_8\right] \\ &\qquad = \max_{g\in\mathcal{G}(r),\, g\neq g'} \left[\tbinom{g_2+3}{4} + \tbinom{g_2+1}{2} + g_2\tbinom{g_3}{2}\right] + \mathcal{O}(r^2). \end{aligned}$$

Für hinreichend große r wird dieses Maximum bei $g_2 = r-1$, $g_4 = 1$ sowie $g_i = 0$ ansonsten, angenommen. Damit folgt:

$$dim\,(\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R}) \setminus 2\text{-}\mathcal{P}ar\,(r,8,\mathbb{R})) \le \tbinom{r-1+3}{4} + \tbinom{r}{2} + \mathcal{O}(r^2) = \tbinom{r+3}{4} - \frac{r^3}{6} + \mathcal{O}(r^2).$$

□

Aus diesem Lemma ergibt sich nun unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar 5.3 *(i) $\mathcal{S}ym^c\,(r,8,\mathbb{R})$ ist eine semi-algebraische Menge, für die für hinreichend große r gilt:*

$$dim\,\mathcal{S}ym^c\,(r,8,\mathbb{R}) = \tbinom{r+3}{4}.$$

(ii) $\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R})$ ist eine disjunkte Vereinigung semi-algebraischer Mengen im Sinne von 5.1, (v), für die für hinreichend große r gilt:

$$dim\,\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R}) \le \tbinom{r+3}{4} - \frac{1}{6}r^3 + \mathcal{O}(r^2).$$

□

Es sei zum Abschluß auf folgendes hingewiesen: Aufgefaßt als reelle semi-algebraische Menge hat die Gruppe $G(g') \times GL(1)$ eine Dimension von $r^2 + 1$, was für hinreichend große r gegenüber der Kodimension von $\mathcal{S}ym\,(r,8,\mathbb{R})$ vernachlässigt werden kann.

Anhang

In den vorangehenden Kapiteln hatten wir gesehen, daß bei gegebener Zahl der Erzeugenden und gegebener formaler Dimension in gewissem Sinne die „meisten“ kompakten, einfach-zusammenhängenden $\mathbb{Q}$-Poincaré-Dualitätsräume eine rationale Kohomologie-Algebra haben, die sowohl 2-erzeugt als auch komprimiert ist. Um zu zeigen, daß die „meisten“ dieser $\mathbb{Q}$-Poincaré-Dualitätsräume lediglich eine triviale S^1-Operation zulassen, war es wichtig, gute Abschätzungen über die Anzahl und die Hilbert-Funktion hochdimensionaler Fixpunktkomponenten zu haben. Wir beweisen in diesem Anhang Resultate, welche die Ergebnisse in Kapitel 3 deutlich verbessern. Dazu werden wir einfache Methoden aus der Schnitttheorie von Mannigfaltigkeiten benutzen. Im einzelnen zeigen wir:

Satz A.1 *Es sei X ein kompakter, topologischer S^1-Raum, so daß $\check{H}^*(X)$ eine 2-erzeugte, komprimierte $\mathbb{Q}$-Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension d ist. Dann gilt für die formalen Dimensionen d_ν und d_μ zweier verschiedener Fixpunktkomponenten F_ν und F_μ der S^1-Operation:*

(i) $d_\nu + d_\mu < \frac{3}{2}\,d$, *falls d durch 4 teilbar ist,*

(ii) $d_\nu + d_\mu < \frac{3}{2}\,d + 1$, *falls d nicht durch 4 teilbar ist.*

Korollar A.2 *Es gibt höchstens eine Fixpunktkomponente der formalen Dimension d_ν, falls gilt:*

(i) $d_\nu \geq \frac{3}{4}\,d$, *falls d durch 4 teilbar ist,*

(ii) $d_\nu \geq \frac{3}{4}\,d + \frac{1}{2}$, *falls d nicht durch 4 teilbar ist.*

Satz A.3 *Es sei X ein kompakter, topologischer S^1-Raum, so daß $\check{H}^*(X)$ eine 2-erzeugte, komprimierte $\mathbb{Q}$-Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension d ist. Dann gilt:*

(i) Ist d durch 4 teilbar, dann ist für jede Fixpunktkomponente F_ν der formalen Dimension d_ν die Abbildung $j_\nu^g : \check{H}^g(X) \to \check{H}^g(F_\nu)$ in allen Graden $g \leq d_\nu - \frac{1}{2}\,d$ ein Isomorphismus.

(ii) Ist d nicht durch 4 teilbar, dann ist für jede Fixpunktkomponente F_ν der formalen Dimension d_ν die Abbildung $j^g_\nu : \check{H}^g(X) \to \check{H}^g(F_\nu)$ in allen Graden $g \leq d_\nu - (\frac{1}{2}\,d + 1)$ ein Isomorphismus.

Korollar A.4 *Es sei $d \geq 8$ durch 4 teilbar, und es gebe eine Fixpunktkomponente F_ν der formalen Kodimension 2. (Man beachte, daß es nach Korollar A.5 höchstens eine solche Fixpunktkomponente gibt.) Dann ist $\check{H}^*(F_\nu)$ komprimiert.*

Im folgenden werden wir die voranstehenden Sätze beweisen. Ausgangspunkt ist dabei das folgende Korollar zu den Überlegungen in Kapitel 2.

Korollar A.5 *Es sei X ein kompakter, topologischer S^1-Raum, so daß $\check{H}^*(X)$ eine 2-erzeugte $\mathbb{Q}$-Poincaré-Dualitätsalgebra der formalen Dimension d ist. Dann ist $\check{H}^*(F_\nu)$ für jede Komponente F_ν der Fixpunktmenge ebenfalls eine 2-erzeugte $\mathbb{Q}$-Poincaré-Dualitätsalgebra; und die formale Dimension d_ν von $\check{H}^*(F_\nu)$ ist kleiner oder gleich d.*

Für einen $\mathbb{Q}$-Poincaré-Dualitätsraum Y induziert die Orientierung ω_Y von $\check{H}^*(Y)$ einen Isomorphismus $\tilde{\omega}_Y : \check{H}^*(Y) \to \mathrm{Hom}\,(\check{H}^*(Y), \mathbb{Q})$. Wir können daher für jede Komponente F_ν mit formaler Kodimension $c_\nu := \mathrm{fd}\,(X) - \mathrm{fd}\,(F_\nu)$ den Gysin-Homomorphismus $j^\nu_! : \check{H}^*(F_\nu) \to \check{H}^{*+c_\nu}(X)$ als Adjungierte zu j^*_ν einführen:

$$j^\nu_! := \tilde{\omega}_X^{-1} \circ (j^*_\nu)^* \circ \tilde{\omega}_{F_\nu}.$$

Die folgenden Eigenschaften des Gysin-Homomorphismus ergeben sich unmittelbar aus der Definition:

Lemma A.6 *(i) Für alle $u \in \check{H}^*(F_\nu)$ und alle $v \in \check{H}^*(X)$ gilt:*

$$\omega_X\,(j^\nu_!(u)\,v) = \omega_{F_\nu}\,(u\,j^*_\nu(v)).$$

(ii) Für alle $u \in \check{H}^*(F_\nu)$ und alle $v \in \check{H}^*(X)$ gilt:

$$j^\nu_!(u)\,v = j^\nu_!(u\,j^*_\nu(v)).$$

(iii) Ist $F_\mu \neq F_\nu$ eine weitere Komponente der Fixpunktmenge, dann gilt für alle $u \in \check{H}^*(F_\nu)$:

$$j^*_\mu j^\nu_!(u) = 0.$$

Mit Hilfe des Gysin-Homomorphismus läßt sich die *(algebraische) Thom-Klasse* $\tau_\nu \in \check{H}^{c_\nu}(X)$ definieren durch $\tau_\nu := j^\nu_!(1)$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$ den Annihilator von τ_ν, d.h.

$$\mathrm{Ann}\,(\tau_\nu) := \{x \in \check{H}^*(X) \mid \tau_\nu\, x = 0\}.$$

Lemma A.7 *(i) Für jede Komponente F_ν der Fixpunktmenge gilt* $\ker j_\nu^* \subseteq \mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$. *Insbesondere ist für jede weitere Komponente $F_\mu \neq F_\nu$ die Thom-Klasse τ_μ in* $\mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$.

(ii) Ist $j_\nu^* : \check{H}^*(X) \to \check{H}^*(F_\nu)$ surjektiv, dann gilt sogar $\ker j_\nu^* = \mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$ *und die induzierte Abbildung*

$$\bar{j}_\nu^* : \check{H}^*(X)/\mathrm{Ann}\,(\tau_\nu) \to \check{H}^*(F_\nu)$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist die Thom-Klasse τ_μ nicht-trivial.

Beweis: Zu (i): Nach Lemma A.9, (ii), gilt für alle $v \in \check{H}^*(X)$:

$$\tau_\nu\, v = j_!^\nu(1)\, v = j_!^\nu(1\, j_\nu^*(v)) = j_!^\nu j_\nu^*(v).$$

Deshalb folgt $\ker j_\nu^* \subseteq \mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$. Nach Lemma A.9, (iii), ist für jede weitere Komponente F_μ die Thom-Klasse τ_μ in $\ker j_\nu^*$.

Zu (ii): Ist $j_\nu^* : \check{H}^*(X) \to \check{H}^*(F_\nu)$ surjektiv, dann ist der Gysin-Homomorphismus $j_!^\nu : \check{H}^*(F_\nu) \to \check{H}^{*+c_\nu}(X)$ injektiv, woraus $\ker j_\nu^* = \mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$ folgt. Da $\check{H}^*(F_\nu)$ nicht-trivial ist, folgt $\tau_\mu \neq 0$. □

Lemma A.8 *Ist $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt, so ist $j_\nu^* : \check{H}^*(X) \to \check{H}^*(F_\nu)$ für jede Komponente F_ν der Fixpunktmenge surjektiv.*

Beweis: Wir betrachten die surjektive Abbildung $\tilde{j}_1^* \circ pr_\nu$ im Beweis des Korollars 2.18:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Q}[t]} (\mathbb{Q}[t]\tilde{\otimes}\check{H}^*(X)) & \xrightarrow{\tilde{j}_1^*} & \check{H}^{(*)}(F) & \xrightarrow{pr_\nu} & \check{H}^{(*)}(F_\nu) \\
\subset\uparrow & & \subset\uparrow & & \subset\uparrow \\
\mathcal{F}'_m & \xrightarrow{\tilde{j}_1^*} & \mathcal{F}_m & \xrightarrow{pr_\nu} & pr_\nu(\mathcal{F}_m)
\end{array}$$

Die von $\tilde{j}_1^* \circ pr_\nu$ auf der zur Filterung $\{\mathcal{F}'\}_{m\in\mathbb{Z}}$ graduierten assozierten Algebra induzierte Abbildung

$$\check{H}^m(X) = \mathcal{F}'_m/\mathcal{F}'_{m-1} \longrightarrow pr_\nu(\mathcal{F}'_m)/pr_\nu(\mathcal{F}'_{m-1})$$

ist surjektiv und stimmt mit j_ν^m überein. Ist $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt, so gilt mit Korollar 2.18, (iii),

$$pr_\nu(\mathcal{F}'_m)\,/pr_\nu(\mathcal{F}'_{m-1}) = \check{H}^m(F_\nu).$$

□

Nach diesen Vorbereitungen können wir schließlich die zu Beginn des Anhangs angekündigten Ergebnisse beweisen:

Beweis von Satz A.4: Da $\check{H}^*(X)$ 2-erzeugt, ist die formale Dimension d gerade. Wir betrachten zunächst den Fall, daß d durch 4 teilbar ist: Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Komponenten F_ν und F_μ der Fixpunktmenge mit formalen Kodimensionen c_ν und c_μ derart, daß gilt

$$c_\nu + c_\mu \leq \frac{d}{2}.$$

Dann ist $\tau_\nu \, \tau_\mu \in \check{H}^{c_\nu + c_\mu}(X)$ nicht-trivial. Denn $\check{H}^*(X)$ ist komprimiert, und deshalb die Multiplikation bis zum (Produkt-)Grad $\frac{d}{2}$ nullteilerfrei. Nach Lemma A.10 gilt jedoch $\tau_\nu \, \tau_\mu = 0$. Daher gilt für je zwei verschiedene Komponenten F_μ und F_ν, daß

$$c_\nu + c_\mu > \frac{d}{2} \quad \text{bzw.} \quad d_\nu + d_\mu < \frac{3}{2}\, d.$$

Der Fall, daß d nicht durch 4 teilbar ist, verläuft ganz analog. Man beachte allerdings, daß die Multiplikation in diesem Fall nur bis zum (Produkt-)Grad $\frac{d}{2} - 1$ nullteilerfrei ist. $\square$

Beweis von Satz A.6: Wir betrachten zunächst den Fall, daß d durch 4 teilbar ist: $\check{H}^*(X)$ ist komprimiert, und daher die Multiplikation bis zum (Produkt-)Grad $\frac{d}{2}$ nullteilerfrei. $\tau_\nu \in \check{H}^{c_\nu}(X)$ ist nicht-trivial. Deshalb ist $\mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$ trivial in allen Graden g mit

$$c_\nu + g \leq \frac{d}{2} \quad \text{bzw.} \quad g \leq d_\nu - \frac{d}{2}.$$

Da nach Lemma A.10 $ker j_\nu^* = \mathrm{Ann}\,(\tau_\nu)$ gilt, ist $j_\nu^g : \check{H}^g(X) \to \check{H}^g(F_\nu)$ ein Isomorphismus für alle Grade $g \leq d_\nu - \frac{1}{2}\, d$. Analoges gilt im Fall, daß d nicht durch 4 teilbar ist. $\square$

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AH] C. ALLDAY, S. HALPERIN: *La théorie de Sullivan-de Rham pour la cohomologie rationelle d'Alexander-Spanier,* in: Homotopie Algébrique et Algèbre Locale, Hsg.: J.-M. Lemaire, J.-C. Thomas, Astérisque 113-114, 1984, S. 148-152.

[AP] C. ALLDAY, V. PUPPE: *Cohomological Methods in Transformation Groups.* Cambridge UP, 1993.

[BR] R. BENEDETTI, J.-J. RISLER: *Real Algebraic and Semi-algebraic Sets.* Hermann, Paris, 1990.

[Bre] G. E. BREDON: *Fixed Point Sets of Actions on Poincaré Duality Spaces,* Topology 12, 1973, S. 159-175.

[Br] E. H. BROWN: *Twisted Tensor Products I,* Ann. of Math. 69, 1959, S. 223-246.

[CS] T. CHANG, T. SKJELBRED: *Group Actions on Poincaré Duality Spaces,* Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1972, S. 1024-1026.

[Hi] G. HIRSCH: *Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés,* Bull. Soc. Math. Belg. 6, 1954, S. 79-96.

[Ma] W. S. MASSEY: *Homology and Cohomology Theory.* Dekker, 1978.

[Pa] S. PAPADIMA: *Classification of Poincaré Duality Algebras over the Rationals,* Geometriae Dedicata 17, 1984, S. 199-205.

[Pu] V. PUPPE: *Simply Connected 6-Dimensional Manifolds with Little Symmetry and Algebras with Small Tangent Space,* in: Prospects in Topology, Hsg.: F. Quinn, Ann. of Math. Stud. 138, Princeton UP, 1995, S. 283-302.

[Su] D. SULLIVAN: *Infinitesimal Computations in Topology,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 47, 1977, S. 269-331.

Danksagung

Für seine Anregung zu dieser Diplomarbeit und seine sehr gute Betreuung möchte ich Herrn Prof. Dr. V. Puppe sehr herzlich danken. Herrn PD Dr. Jürgen Hausen gilt mein Dank für hilfreiche Diskussionen. Ich bedanke mich weiter bei Andres Löh und Thomas Jacobi: Ohne sie hätte diese Arbeit vermutlich handschriftlich abgefaßt werden müssen. Schließlich gilt mein Dank Thomas Jacobi, Matthias Franz und Jürgen Hausen für ihre Hilfe beim Korrekturlesen der Arbeit.

Während meines Studiums wurde ich von der Studienstiftung des deutschen Volkes ideell und materiell großzügig gefördert, wofür ich mich stellvertretend bei Herrn Prof. Dr. Klein und Herrn Vöpel sehr bedanken möchte.