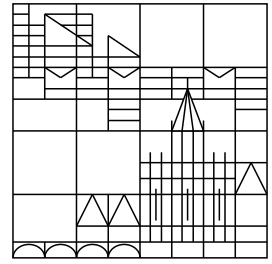


Universität Konstanz



Darstellungstheorie und Quantenmechanik

Matthias Franz

Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik

Nr. 186, März 2003

ISSN 1430–3558

Diese Notizen sind eine leicht korrigierte Fassung meiner unter der Betreuung von Prof. Volker Strassen erstellten Diplomarbeit „Anwendungen der Darstellungstheorie, insbesondere in der Quantenmechanik“ (Universität Konstanz, Fakultät für Physik, 1997).

© 1997, 2003 Matthias Franz (matthias.franz@uni-konstanz.de)

Vorwort

Der Philosoph Ian Hacking gab seiner Einführung in die Wissenschaftstheorie den Titel *Representing and Intervening* und wies damit auf die – in seinen Augen zu starke – Betonung von Theorien in den Naturwissenschaften hin. In der Tat ist die überwiegende Mehrheit der Experimentalphysiker¹ der Auffassung, daß letztlich nur das Manipulieren, das Erzeugen von Effekten oder neuen Stoffen zählt, bei dem Theorien als Werkzeug oder nur als Inspiration dienen mögen. Dagegen sind für theoretische Physiker die Modelle das Zentrale, die in mühevoller Arbeit errichteten Gedankengebäude. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist unverzichtbar (oder für den eingefleischten Ästheten zumindest erstrebenswert), und unnötig kompliziert darf eine Theorie auch nicht sein, soll sie nicht dem Ockhamschen Rasiermesser zum Opfer fallen. Doch hat Heinrich Hertz in der Einleitung zu den *Prinzipien der Mechanik* bemerkt, daß diese Forderungen derjenigen der „Zulässigkeit“ oder logischen Korrektheit nachgeordnet sind:

Als unzulässig sollten wir von vornherein solche Bilder bezeichnen, welche schon einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens in sich tragen, und wir fordern also zunächst, daß alle Bilder logisch zulässige oder kurz zulässige seien.

Als Hertz dieses schrieb, konnte er nicht ahnen, wie schwierig es sich später bei der Entwicklung der Quantenmechanik erweisen würde, dieser Forderung nachzukommen. Und zwar nicht nur bei den fundamentalen Problemen der Quantentheorie wie etwa dem Meßprozeß oder *hidden variables*, sondern in geringerem Maße bereits bei der Formulierung eines mathematischen Rahmens der Theorie. Nachdem Johann von Neumann 1932 in seinem Werk *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* die Observablen eines quantenmechanischen Systems mit selbstadjungierten Operatoren in einem Hilbertraum identifiziert hatte, vergingen noch einmal 30 Jahre, bis Kato und Ikebe die Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators eines Wasserstoffatoms nachwiesen. Kurz vor von Neumanns Buch erschienen Monographien von Hermann Weyl und Eugene P. Wigner, die die Bedeutung der Gruppen- und Darstellungstheorie für die Quantenmechanik herausstellten. Diesem Themenkreis ist auch die vorliegende Arbeit gewidmet, und der Leser wird – abgesehen von einer neueren Sprechweise – wenig finden, was nicht schon in den beiden Klassikern steht. Stattdessen ist es mein Anliegen, dem Physiker die „zulässige“ Formulierung darstellungstheoretischer Methoden zu zeigen und dem Mathematiker eine Anwendung seiner Theorien. Das bedingt, daß die physikalischen „Resultate“ dem Physiker nichts Neues sagen und der Mathematiker einige Ausführungen für weitschweifig halten wird.

Diese Arbeit basiert auf einer Reihe von Vorträgen, die ich im Sommersemester 1996 und Wintersemester 1996/97 im Rahmen des *Blauen Seminars* von Professor Strassen gehalten habe. Die nötigen Vorkenntnisse richten sich stark nach dem damaligen Zuhörerkreis und können euphemistisch „uneinheitlich“ genannt werden: Vorausgegangen war ein zweisemestriger Kurs „Darstellungstheorie“, auf dem die Arbeit aufbaut. Der physikalische Hintergrund der Zuhörer war unterschiedlich, hier wird der Text oft ausführlicher, wobei aber statt langer Rechnungen auf die Literatur verwiesen wird.

Mein Dank gilt Herrn Strassen, der diese Diplomarbeit (und die vorliegende T_EX-Version) erst ermöglichte und mir wertvolle Anregungen gab. Die Teilnehmer seines Seminars haben durch ihr Interesse an meinen Vorträgen sehr zu meiner Motivation beigetragen. Schließlich danke ich meinen Eltern für die mir gewährte Unterstützung.

Konstanz, im April 1997

Matthias Franz

¹Der angelsächsischen Praxis folgend schließt die männliche Endung das weibliche Geschlecht mit ein.

Inhalt

Vorwort	iii
Einleitung	1
1 Funktionalanalytischer Hintergrund	3
1.1 Maße und Funktionale	3
1.2 Konstruktionen mit Hilberträumen	4
1.3 L^2 -Räume	8
1.4 Zum Adjungierten eines Operators	9
1.5 Kriterien für Selbstadjungiertheit	10
1.6 Direkte Summen selbstadjungierter Operatoren	12
1.7 Das Spektrum eines Operators	12
1.8 Multiplikations- und Differentialoperatoren, Spektralsatz	13
1.9 Glattheit von Eigenfunktionen	15
2 Darstellungen kompakter Gruppen	17
2.1 Eigenschaften des Haarmaßes	17
2.2 Die Gruppe $U(\mathcal{H})$	18
2.3 Darstellungen und G -Moduln	20
2.4 Die Gruppenalgebra	23
2.5 Orthogonalitätsrelationen	27
2.6 Die Sätze von Peter und Weyl	28
2.7 Isotypische Zerlegung von G -Moduln	32
3 Darstellungen von Liegruppen und Liealgebren	35
3.1 G -Mannigfaltigkeiten	35
3.2 Das Differential einer Liegruppendarstellung	36
3.3 Darstellungen kompakter Liegruppen	41
3.4 Das Casimir-Element einer Liealgebra	43
3.5 Beispiel: $L^2(S^2)$	45
4 Liegruppen und Quantenmechanik	49
4.1 Der formale Rahmen der Quantenmechanik	49
4.2 Zusammengesetzte Systeme und Spin	51
4.3 Unbeschränkte G -Morphismen	54
4.4 Das Wasserstoffatom	56
4.5 Tensoroperatoren	61
4.6 Der Zeeman-Effekt	67
4.7 Störungstheorie	69
4.8 Auswahlregeln und Wigner-Eckart-Theorem	72
4.9 Aufspaltung atomarer Energieniveaus	75
4.10 Identische Teilchen	80
4.11 Identische Teilchen mit Spin 1/2	80
4.12 Das Periodensystem der Elemente	83

5 Projektive Darstellungen	87
5.1 Der projektive Raum und projektiv-unitäre Abbildungen	87
5.2 Darstellungen und projektive Darstellungen	89
5.3 Erweiterungen von Liegruppen und Liealgebren	94
5.4 Anmerkungen	97
A Nichtunitäre Darstellungen	101
Literaturverzeichnis	103
Index	105
Symbolverzeichnis	109

Einleitung

Das Studium von Symmetrien spielt in der Physik seit dem letzten Jahrhundert eine große Rolle. In der Kristallographie etwa bildet es die Grundlage der Klassifikation der möglichen Kristallgitter – ein theoretisches Ergebnis, das der direkten Untersuchung der Kristallstruktur durch Röntgenstrahlen lange vorausging. Auch das mathematische Konzept einer Gruppe hat seinen Ursprung unter anderem in der Kristallographie. Ein weiteres prominentes Beispiel ist der Zusammenhang zwischen (differenzierbaren) Symmetrien und Erhaltungsgrößen in der klassischen Mechanik, der von Emmy Noether hergestellt wurde.

In der Quantenmechanik entsprechen die Zustände eines Systems den eindimensionalen Unterräumen eines komplexen Hilbertraumes. Das ermöglicht den Einsatz der Darstellungstheorie, die untersucht, in welcher Weise eine Gruppe (oder eine andere algebraische Struktur) linear auf einem Vektorraum wirken kann. Viele in der Quantenmechanik auftretende Konzepte lassen sich prägnant in der Sprache der Darstellungstheorie ausdrücken. So erweisen sich die am häufigsten vorkommenden Operatoren (etwa Orts-, Impuls- und Bahndrehimpulsoperatoren) als Beispiele von Tensoroperatoren, und die Addition von Drehimpulsen ist nichts anderes als die Clebsch-Gordan-Zerlegung von $SU(2)$ -Moduln.

Andere Bereiche der Quantenmechanik sind im Kern darstellungstheoretischer Natur, so daß die Darstellungstheorie nicht nur hilfreich, sondern geradezu unverzichtbar scheint. Hier ist in erster Linie die Unterscheidung zwischen Bosonen und Fermionen bei Systemen identischer Teilchen zu nennen.

Symmetrien führen wie in der klassischen Mechanik zu einfacheren Systemen. Ist der Hamiltonoperator eines Systems äquivariant bezüglich der Darstellung einer kompakten Gruppe, dann zerfällt er in eine direkte Summe von Operatoren, die unabhängig voneinander untersucht werden können.

Auch das Wigner-Eckart-Theorem vereinfacht viele Berechnungen. Indem man größtmöglichen Nutzen aus den Transformationseigenschaften der beteiligten Größen zieht, verbleibt etwa bei der Bestimmung der Matrixelemente eines Operators oft nur ein einziger Parameter, der durch das konkrete Problem festgelegt ist. Mit dessen Kenntnis lassen sich dann alle übrigen Werte ohne langwierige Rechnungen angeben.

Weil Hamiltonoperatoren in dieser Arbeit als zeitunabhängig vorausgesetzt werden, sind die quantenmechanischen Systeme stets zeittranslationsinvariant. Mathematisch drückt sich das dadurch aus, daß die Zeitentwicklung (der Fluß des durch den Hamiltonoperator bestimmten Vektorfeldes) eine Darstellung der additiven Gruppe der reellen Zahlen ist. Aus diesem Grunde kommt die Darstellungstheorie auch bei Systemen ins Spiel, die sonst keine Symmetrie zeigen.

Die in der Quantenmechanik auftretenden Hilberträume sind in der Regel unendlichdimensional. Das hat zur Folge, daß technische Aspekte wie Fragen der Stetigkeit oder Differenzierbarkeit einen großen Raum einnehmen und den Blick auf die eher einfachen Grundideen verstellen. Daher stellt das 1. Kapitel eine Reihe funktionalanalytischer Resultate bereit, auf die wir später zurückgreifen werden. Verschiedene Konstruktionen mit Hilberträumen werden ausführlich besprochen, und auch das Standardkriterium für die Selbstadjungiertheit eines Operators wird bewiesen; danach begnüge ich mich oft mit dem Zitieren von Ergebnissen.

Die Darstellungstheorie beginnt im 2. Kapitel. Nach einer kurzen Diskussion des Haarmaßes werden unitäre Darstellungen in Hilberträumen definiert, und gleichzeitig wird die äquivalente Sprechweise der G -Moduln auf solche Darstellungen übertragen. Der größte Teil des Kapitels dient dem Nachweis, daß für kompakte Gruppen eine isotypische Zerlegung eines G -Moduls existiert und eindeutig ist.

Das 3. Kapitel widmet sich Liegruppen. Es wird gezeigt, wie man aus einer Darstellung einer Liegruppe G eine solche der Liealgebra LG erhält. Die dabei auftretenden schiefadjungierten Operatoren sind im allgemeinen unbeschränkt, weswegen man den Begriff der Liealgebrendarstellung etwas weiter (und leider sehr technisch) fassen muß.

Nach diesen drei vorbereitenden Kapiteln ist in Kapitel 4 erstmals von der Quantenmechanik die Rede. Nach einer kurzen Beschreibung des formalen Rahmens wird das Wasserstoffatom als exakt lösbares Problem ausführlich dargestellt. Das Konzept eines Tensoroperators wird durch verschiedene Beispiele illustriert und kommt bei der Berechnung der Aufspaltung der Energieniveaus von Mehrelektronenatomen zum Einsatz. Im Gegensatz zum Wasserstoffatom ist man hierbei auf Näherungsverfahren angewiesen.

Der Zusammenhang zwischen dem Spin eines Mehrelektronensystems und der (Permutations-)Symmetrie der Orts- und Spinanteile des Zustandes ist ebenfalls eine sehr schöne Anwendung der Darstellungstheorie, auf die der Text nach einer allgemeinen Diskussion der Beschreibung identischer Teilchen zu sprechen kommt. Eine theoretische Begründung des Periodensystems der Elemente beschließt diesen längsten Teil der Arbeit.

Das letzte Kapitel kehrt zu der zu Beginn gemachten Bemerkung zurück, daß Zustände eines quantenmechanischen Systems durch eindimensionale Unterräume eines Hilbertraumes beschrieben werden, also den Elementen des zugehörigen projektiven Raumes. Konsequenterweise sollte man daher statt gewöhnlicher Darstellungen projektive Darstellungen studieren. Um das Arbeiten im Hilbertraum zu rechtfertigen, wird der Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen man eine projektive Darstellung zu einer Darstellung im Hilbertraum hochheben kann. Es zeigt sich, daß das für eine große Klasse von einfach zusammenhängenden Liegruppen stets möglich ist. Damit wird schließlich das Auftreten der universellen Überlagerung $Spin(3) \simeq SU(2)$ von $SO(3)$ bei der Beschreibung des Spins in der Quantenmechanik verständlicher.

Vorausgesetzt werden auf mathematischer Seite Vertrautheit mit der Darstellungstheorie endlicher Gruppen und endlichdimensionaler Algebren (wie etwa der Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe) sowie mit Liegruppen und Liealgebren. Auch die irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ und deren Clebsch-Gordan-Zerlegung nehme ich als bekannt an. Zudem bediene ich mich größtenteils der Sprache der G -Moduln statt der Darstellungen. All diese Dinge sind in den ersten Abschnitten der Bücher [FH91], [BtD85] und [Ser77] zu finden.

Die physikalischen Vorkenntnisse beschränken sich auf die üblichen Quantenmechanik-Vorlesungen. Viele physikalische Begriffe, die ich im Text einführe, gehören zu diesem Standardstoff, erscheinen aber hier in etwas anderem Gewand, um die Nähe zur Darstellungstheorie zu betonen. Beispiele dafür sind die in Abschnitt 4.5 definierten Orts- und Impulsoperatoren. Gute Darstellungen der Quantenmechanik sind (in der Reihenfolge zunehmender Mathematisierung) die jeweils zweibändigen Werke [CT77a+b], [GP90+91] und [Jos69+73].

Abschließend seien die wichtigsten Konventionen erwähnt. [Begründungen einzelner Aussagen stehen in eckigen Klammern.]

Hilberträume sind, wenn nicht anders vermerkt, komplexe Hilberträume und werden mit den kalligraphischen Buchstaben \mathcal{H} , \mathcal{I} usw. bezeichnet. Das Skalarprodukt $\langle v, u \rangle$ zweier Vektoren $u, v \in \mathcal{H}$ ist linear im *zweiten* Argument und antilinear¹ im ersten. Dies entspricht dem Gebrauch in der Physik, da es dem Diracschen Bra-Ket-Formalismus entgegenkommt. Ich beschränke mich im vorliegenden Text auf separable Hilberträume, also solche mit abzählbarer Basis, um technische Komplikationen zu vermeiden. Allerdings sind alle Sätze (ggf. mit leichten Änderungen) auch für nichtseparable Hilberträume richtig, insbesondere gilt weiterhin der Satz von Stone.

Der Wertebereich bei Funktionenräumen ist, wenn nicht anders vermerkt, der Körper \mathbf{C} der komplexen Zahlen.

Maßräume sind stets endlich oder σ -endlich (Vereinigung abzählbar vieler Mengen endlichen Maßes). Zwar kann man jedes σ -endliche Maß durch ein endliches ersetzen, doch zusätzliche Eigenschaften wie Invarianz unter einer Gruppenwirkung können dabei verloren gehen.

Gruppen sind bis auf eine Ausnahme immer lokalkompakte (hausdorffsche) topologische Gruppen mit abzählbarer Basis der Topologie (zwei-abzählbar). Nicht in dieses Schema paßt die Gruppe $U(\mathcal{H})$ der unitären Operatoren in einem Hilbertraum \mathcal{H} , die für unendlichdimensionales \mathcal{H} nicht mehr lokalkompakt ist (s. Abschnitt 2.2).

Die reellen Matrixgruppen unterscheiden sich in der Notation von den komplexen durch die Schreibweise der Matrixgröße n : Eine Klammer wie in $SO(3)$ kennzeichnet die reellen Gruppen, ein Index die komplexen, etwa SL_2 . Die unitären Gruppen sind reelle Mannigfaltigkeiten und bekommen deswegen eine Klammer. Die zu $SU(2)$ isomorphe universelle Überlagerung von $SO(3)$ heißt $Spin(3)$, ihre Liealgebra $spin(3)$.

Bei der im Text verwandten Bezeichnung der einfachen $SU(2)$ -Moduln (durch das halbe Höchstgewicht) treten oft halbzahlige Größen auf, d. h. solche der Form $(2k + 1)/2$. Zur Vereinfachung der Notation sei vereinbart, daß sich Aufzählungen und Summationen wie a, \dots, b oder $\sum_{i=a}^b$ über die Werte $i = a, a + 1, \dots, b$ erstrecken für $b - a \in \mathbf{N}$.

Die physikalischen Konstanten c (Lichtgeschwindigkeit) und \hbar (Plancksches Wirkungsquantum/ 2π) setze ich gleich 1.

¹Eine Abbildung $\phi: U \rightarrow V$ zwischen komplexen Vektorräumen heißt **antilinear**, wenn sie additiv ist und $\phi(\lambda u) = \bar{\lambda}\phi u$ für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbf{C}$ erfüllt.

Kapitel 1

Funktionalanalytischer Hintergrund

1.1 Maße und Funktionale

In diesem Abschnitt bezeichnet X einen lokalkompakten Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.

Ein lineares Funktional λ auf $C_c(X)$ heißt **positiv**, falls $\lambda(f) \geq 0$ ist für alle Funktionen $f \in C_c(X)$ mit $f \in [0, \infty)$. Ein **Borelmaß** μ auf X ist ein (positives) Maß auf der von den offenen Mengen von X erzeugten σ -Algebra der Borelmengen, bezüglich dessen kompakte Mengen endliches Maß haben. Jedes Borelmaß bestimmt ein positives Funktional $d\mu$ auf $C_c(X)$ vermöge

$$d\mu(f) = \int f d\mu.$$

Der **Träger** $\text{supp } \mu$ von μ ist das Komplement der Vereinigung aller offenen μ -Nullmengen.

Rieszscher Darstellungssatz 1.1. *Die Zuordnung*

$$\mu \mapsto d\mu$$

ist eine Bijektion zwischen den Borelmaßen auf X und den positiven Funktionalen auf $C_c(X)$.

Beispiel 1.2. Sei M eine Riemannsche (oder nur pseudo-Riemannsche) Mannigfaltigkeit der Dimension n . Die Metrik g bestimmt die Riemannsche Dichte $|\text{vol}_g|$ auf M durch

$$|\text{vol}_g|(x)(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{|\det[g(x)(v_i, v_j)]|}$$

für $x \in M$ und $v_1, \dots, v_n \in T_x M$. Mit deren Hilfe erklärt man das Integral stetiger Funktionen auf M mit kompaktem Träger als

$$\int_M f = \int_M f |\text{vol}_g|.$$

Der Rieszsche Darstellungssatz besagt nun, daß es genau ein Borelmaß μ auf M gibt mit

$$d\mu(f) = \int_M f.$$

(Ein solches Maß μ läßt sich auch direkt angeben, indem man es lokal auf Karten als Skalierung des Lebesguemaßes mit $|\text{vol}_g|$ erklärt. Der Rieszsche Darstellungssatz liefert hier also insbesondere die Eindeutigkeit.)

Hat man ein Maß μ auf X , so ist der Hilbertraum $L^2(\mu)$ erklärt. (Der Deutlichkeit halber schreibe ich manchmal $L^2(X, \mu)$ statt $L^2(\mu)$. Besitzt X dagegen ein kanonisches Maß, so benutze ich auch die Notation $L^2(X)$.)

Satz 1.3. *Der Hilbertraum $L^2(\mu)$ ist separabel. Die Menge $C_c(X)$ liegt darin dicht; falls $X = M$ eine Mannigfaltigkeit ist, so gilt dies bereits für $C_c^\infty(M)$.*

Daß $C_c(X)$ dicht liegt in $L^2(\mu)$, folgt ziemlich direkt aus der Regularität von μ [Lan93, Ch. IX, Lemma 2.1]. Damit ergibt sich auch der erste Teil des Satzes aus der Separabilität von $C_c(X)$ (mit Supremumsnorm) [Bau90, Lemma 31.4] und der Stetigkeit der Einbettung $C_c(X) \hookrightarrow L^2(\mu)$. Für die letzte Aussage benutzt man, daß man im Falle von Mannigfaltigkeiten jede stetige Funktion mit kompaktem Träger in Supremumsnorm durch Funktionen in $C_c^\infty(M)$ approximieren kann. Um das zu beweisen, führt man die Situation über eine glatte Zerlegung der Eins [Lan95, §II.3] auf den einer offenen Teilmenge des \mathbf{R}^n zurück, wo man mit [Wer95, Lemma V.1.9] schließt.

Sind X, Y zwei Maßräume und μ ein Maß auf X , so induziert jede meßbare Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ein Maß $f_*\mu$ auf Y vermöge

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Dieses Maß heißt das **Bildmaß** von μ unter f . Ist $Y = X$ und $f_*\mu = \mu$, dann nennt man μ **invariant** unter f .

Satz 1.4 (Transformationsformel für Bildmaße). *Sei h eine bezüglich $f_*\mu$ integrierbare (banachraumwertige) Funktion auf Y . Dann ist $f^*h := h \circ f$ integrierbar bezüglich μ , und es gilt*

$$\int_X f^*h \, d\mu = \int_Y h \, df_*\mu.$$

Literatur: [Lan93, Ch. IX], [Lan95, §XI.4], [Bau90, Kap. IV]

1.2 Konstruktionen mit Hilberträumen

Der Dualraum \mathcal{H}' eines Hilbertraumes \mathcal{H} ist unter der Abbildung

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}', \quad u \mapsto (v \mapsto \langle u, v \rangle),$$

als Banachraum zu \mathcal{H} (antilinear) isometrisch isomorph [Darstellungssatz von Fréchet-Riesz]. Das Bild eines Vektors u unter dieser Abbildung bezeichne ich mit u' oder $\langle u, \cdot \rangle$. Nun kann man in \mathcal{H}' ein Skalarprodukt

$$\langle v', u' \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} = \langle u, v \rangle \quad (1)$$

erklären, wodurch \mathcal{H}' ebenfalls zu einem Hilbertraum wird. Die kanonische Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ist mit dieser Definition **antiunitär**, d. h., sie ist antilinear, surjektiv und erfüllt Gleichung (1). Insbesondere ist die vom Skalarprodukt induzierte Norm auf \mathcal{H}' gleich der schon vorhandenen (Operator-)Norm.

Sei K eine höchstens abzählbare¹ Indexmenge und $(\mathcal{H}_k)_{k \in K}$ eine Familie von Hilberträumen. Dann wird in der algebraischen direkten Summe $\bigoplus_{k \in K}^a \mathcal{H}_k$ durch

$$\langle \bigoplus v_k, \bigoplus u_k \rangle := \sum_{k \in K} \langle v_k, u_k \rangle$$

in kanonischer Weise eine Sesquilinearform erklärt. Wie man leicht nachprüft, handelt es sich hierbei sogar um ein Skalarprodukt, so daß $\bigoplus_{k \in K}^a \mathcal{H}_k$ zu einem Prähilbertraum wird, in dem die einzelnen Summanden \mathcal{H}_k paarweise orthogonale Unterräume sind.

Definition. Die **direkte Summe** $\bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k$ der Hilberträume \mathcal{H}_k ist die Vervollständigung der algebraischen direkten Summe $\bigoplus_{k \in K}^a \mathcal{H}_k$ bezüglich der vom kanonischen Skalarprodukt induzierten Norm.

Bildet $(e_{km})_{m \in M_k}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_k , dann ist $(e_{km})_{k \in K, m \in M_k}$ eine solche von $\bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k$. Insbesondere ist die direkte Summe von Hilberträumen separabel, da K höchstens abzählbar ist und wir alle Summanden als separabel voraussetzen. Falls K endlich ist, ist bereits $\bigoplus_{k \in K}^a \mathcal{H}_k$ vollständig. Außerdem ist dann die Topologie von $\bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k$ gerade die Produkttopologie.

Es ist nicht ganz einfach, die direkte Summe von Hilberträumen wie die algebraische direkte Summe durch eine universelle Eigenschaft zu kennzeichnen, da im Falle einer unendlichen Indexmenge Probleme mit der Beschränktheit von induzierten Abbildungen auftreten können. Allerdings hat man den folgenden Satz:

Satz 1.5. *Sind $(\mathcal{H}_k)_{k \in K}$ und $(\mathcal{I}_k)_{k \in K}$ zwei Familien von Hilberträumen mit gleicher Indexmenge K , und ist $(A_k)_{k \in K}$ eine Familie von Operatoren mit $A_k \in B(\mathcal{H}_k, \mathcal{I}_k)$ und $\sup_{k \in K} \|A_k\| < \infty$, so existiert genau eine Abbildung $A \in B(\bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k, \bigoplus_{k \in K} \mathcal{I}_k)$, die das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_k & \hookrightarrow & \bigoplus_{l \in K} \mathcal{H}_l \\ \downarrow A_k & & \downarrow A \\ \mathcal{I}_k & \hookrightarrow & \bigoplus_{l \in K} \mathcal{I}_l \end{array}$$

¹Diese Bedingung ist nicht wesentlich, sondern sichert nur die Separabilität der zu definierenden direkten Summe, da wir auch alle Räume \mathcal{H}_k als separabel annehmen.

für alle $k \in K$ kommutativ macht. Für dieses A gilt $\|A\| = \sup_{k \in K} \|A_k\|$.

Beweis. Ich setze $M = \sup_{k \in K} \|A_k\|$. Die Existenz einer linearen Abbildung $\tilde{A}: \bigoplus_{k \in K}^a \mathcal{H}_k \rightarrow \bigoplus_{k \in K} \mathcal{I}_k$ mit der geforderten Eigenschaft ist klar. Nun ist für $u = \bigoplus_{k \in K} u_k \in \bigoplus_{k \in K}^a \mathcal{H}_k$

$$\|\tilde{A}u\|^2 = \|\bigoplus_{k \in K} A_k u_k\|^2 = \sum_{k \in K} \|A_k u_k\|^2 \leq \sum_{k \in K} \|A_k\|^2 \|u_k\|^2 \leq M^2 \|u\|^2,$$

d. h. $\|\tilde{A}\| \leq M$. Ist andererseits $(u_n, A_{k_n})_n$ eine Folge mit $u_n \in \mathcal{H}_{k_n}$, $\|u_n\| \leq 1$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_{k_n} u_n\| = M$, so gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{A}u_n\| = M$, also $\|\tilde{A}\| \geq M$. Nun setze \tilde{A} auf $\bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k$ fort. \square

Der Operator A aus dem Satz wird mit $\bigoplus_{k \in K} A_k$ bezeichnet. Ist $(\mathcal{J}_k)_{k \in K}$ eine weitere Familie von Hilberträumen und $(B_k)_{k \in K}$ eine Familie von Operatoren mit $B_k \in B(\mathcal{I}_k, \mathcal{J}_k)$ und $\sup_{k \in K} \|B_k\| < \infty$, so prüft man leicht die Identitäten

$$\left(\bigoplus_{k \in K} A_k \right)^* = \bigoplus_{k \in K} A_k^*$$

und

$$\left(\bigoplus_{k \in K} B_k \right) \left(\bigoplus_{l \in K} A_l \right) = \bigoplus_{k \in K} B_k A_k$$

nach.² Insbesondere ist $\bigoplus_{k \in K} A_k$ normal (unitär, selbstadjungiert), falls alle A_k normal (unitär, selbstadjungiert) sind. Kanonische Isomorphismen mit direkten Summen von Hilberträumen werden zusammen mit denen von Tensorprodukten besprochen.

Lemma 1.6. Sei $\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ das algebraische Tensorprodukt von \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 . Dann gibt es genau ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ mit

$$\forall u_1, v_1 \in \mathcal{H}_1, u_2, v_2 \in \mathcal{H}_2 \quad \langle v_1 \otimes v_2, u_1 \otimes u_2 \rangle = \langle v_1, u_1 \rangle \langle v_2, u_2 \rangle.$$

Beweis. Für $v_1 \in \mathcal{H}_1, v_2 \in \mathcal{H}_2$ ist die Abbildung

$$\phi_{v_1 v_2}: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbf{C}, \quad (u_1, u_2) \mapsto \langle v_1, u_1 \rangle \langle v_2, u_2 \rangle,$$

bilinear. Also existiert genau eine Abbildung $\langle v_1 \otimes v_2, \cdot \rangle \in (\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2)'$ mit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2 \\ & \searrow \phi_{v_1 v_2} & \downarrow \langle v_1 \otimes v_2, \cdot \rangle \\ & & \mathbf{C}. \end{array}$$

Nun ist die Abbildung

$$\phi: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow (\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2)', \quad (v_1, v_2) \mapsto \langle v_1 \otimes v_2, \cdot \rangle$$

bi-antilinear (bzw. $\mathcal{H}'_1 \times \mathcal{H}'_2 \rightarrow (\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2)'$ bilinear), also gibt es genau eine antilineare Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2 \\ & \searrow \phi & \downarrow \langle \cdot, \cdot \rangle \\ & & (\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2)'. \end{array}$$

Da die Hermitizität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ offensichtlich ist, bleibt nur die Positiv-Definitheit zu zeigen. Im endlichdimensionalen Fall (d. h. \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 endlichdimensional) ist das leicht zu sehen: Wenn $(e_{km})_m$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_k ist, bildet $(e_{1m} \otimes e_{2n})_{mn}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ und aus Dimensionsgründen somit eine Basis. Schreibt man nun ein $u \in \mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ als Linearkombination dieser Basiselemente, folgt aus $\langle u, u \rangle = 0$, daß alle Koeffizienten 0 sind.

²Zum Begriff des Adjungierten A^* eines Operators A vgl. in etwas allgemeinerem Zusammenhang Abschnitt 1.4.

Ist wenigstens einer der beiden Räume unendlichdimensional, so nutzt man aus, daß jedes $u \in \mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ als Summe $u = \sum v_{1m} \otimes v_{2n}$ mit endlich vielen Gliedern geschrieben werden kann. Mit der Bezeichnung $V_m := \text{lin}\{v_{mn} : n\} \subset \mathcal{H}_m$ gibt es genau ein ι , das das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 & \xrightarrow{\otimes} & V_1 \otimes^a V_2 \\ \downarrow & & \downarrow \iota \\ \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2 \end{array}$$

Test auf einer Orthonormalbasis zeigt, daß ι eine Isometrie ist. Daher impliziert $\|u\|_{\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2} = 0$, daß $\|u\|_{V_1 \otimes^a V_2} = 0$ ist und damit $u = 0$. \square

Wiederum heißt das Skalarprodukt mit der im Lemma beschriebenen Eigenschaft das kanonische Skalarprodukt von $\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$.

Definition. Das **Tensorprodukt** $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ der Hilberträume \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 ist die Vervollständigung von $\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ bezüglich der vom kanonischen Skalarprodukt induzierten Norm. Analog definiert man das Tensorprodukt von endlich vielen Hilberträumen. Für $n > 0$ ist $\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$ (n -mal), $\mathcal{H}^{\otimes 0}$ ist \mathbf{C} .

Wenn $(e_{km})_{m \in M_k}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_k bildet für $k = 1, 2$, dann ist $(e_{1m} \otimes e_{2n})$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Insbesondere ist das Tensorprodukt separabel. Die Vervollständigung von $\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ ist tatsächlich nur nötig, falls *beide* Räume unendlichdimensional sind. Ist

$$t : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}$$

eine bilineare Abbildung in einen Hilbertraum \mathcal{H} derart, daß die Vektoren $t(e_{1m}, e_{2n})$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} bilden, dann ist \mathcal{H} zu $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ isomorph. Diese Bemerkung leitet zur „universellen Eigenschaft“ des Tensorproduktes von Hilberträumen über, die wiederum nur mit Einschränkungen formuliert werden kann.

Satz 1.7. Seien $\mathcal{H}_k, \mathcal{I}_k$ Hilberträume und $A_k \in B(\mathcal{H}_k, \mathcal{I}_k)$, $k = 1, 2$. Dann existiert genau ein $A \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \mathcal{I}_1 \otimes \mathcal{I}_2)$ mit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \\ \downarrow A_1 \times A_2 & & \downarrow A \\ \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{I}_1 \otimes \mathcal{I}_2 \end{array}$$

Für dieses A gilt $\|A\| = \|A_1\| \|A_2\|$.

Beweis. Auch hier ist die Existenz einer linearen Abbildung $A_1 \otimes^a A_2 : \mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{I}_1 \otimes \mathcal{I}_2$ mit der geforderten Eigenschaft aus der (multi-)linearen Algebra bekannt. Für die Abschätzung $\|A_1 \otimes^a A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$ genügt es wegen $A_1 \otimes^a A_2 = (A_1 \otimes^a 1)(1 \otimes^a A_2)$, die Ungleichung $\|A_1 \otimes^a 1\| \leq \|A_1\|$ zu zeigen. Sei $(e_m)_m$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_2 . Dann läßt sich jedes $u \in \mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2$ als endliche Summe $u = \sum_m v_m \otimes e_m$ schreiben für gewisse $v_m \in \mathcal{H}_1$. Nun gilt

$$\|(A_1 \otimes^a 1)u\|^2 = \left\| \sum_m A_1 v_m \otimes e_m \right\|^2 = \sum_m \|A_1 v_m\|^2 \leq \|A_1\|^2 \sum_m \|v_m\|^2 = \|A_1\|^2 \|u\|^2,$$

was zu zeigen war. Für den Nachweis $\|A_1 \otimes^a A_2\| \geq \|A_1\| \|A_2\|$ geht man ähnlich vor wie im letzten Satz und benutzt zwei Folgen $(v_{kl})_l$ in \mathcal{H}_k mit $\|v_{kl}\| \leq 1$ und $\lim_{l \rightarrow \infty} \|A_k v_{kl}\| = \|A_k\|$. Schließlich setzt man $A_1 \otimes^a A_2$ wieder auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ fort. \square

Die Notation für diesen Operator A ist $A_1 \otimes A_2$. Sind $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ zwei weitere Hilberträume und ist $B_i \in B(\mathcal{I}_i, \mathcal{J}_i)$, so gelten ähnlich der direkten Summe die Gleichheiten

$$(A_1 \otimes A_2)^* = A_1^* \otimes A_2^*$$

und

$$(B_1 \otimes B_2)(A_1 \otimes A_2) = B_1 A_1 \otimes B_2 A_2.$$

Insbesondere ist $A_1 \otimes A_2$ normal (unitär, selbstadjungiert), falls A_1 und A_2 normal (unitär, selbstadjungiert) sind.

Wenden wir uns nun den kanonischen Isomorphismen bei Konstruktionen mit Hilberträumen zu.

Lemma 1.8. *Sei $(V_k)_{k \in K}$ eine Familie von Prähilberträumen. Dann ist*

$$\overline{\bigoplus_{k \in K}^a V_k} = \overline{\bigoplus_{k \in K}^a \overline{V_k}} \quad \text{und} \quad \overline{V_1 \otimes^a V_2} = \overline{\overline{V_1} \otimes^a \overline{V_2}}.$$

(Der Strich bezeichnet die **Vervollständigung** eines Prähilbertraumes V zu einem Hilbertraum \overline{V} .)

Beweis. Die kanonischen Einbettungen

$$\bigoplus_{k \in K}^a V_k \rightarrow \overline{\bigoplus_{k \in K}^a \overline{V_k}} \quad \text{und} \quad V_1 \otimes^a V_2 \rightarrow \overline{\overline{V_1} \otimes^a \overline{V_2}}$$

sind Isometrien und lassen sich daher auf die Vervollständigungen fortsetzen. Die Bilder der Vervollständigungen sind abgeschlossen. Andererseits liegen schon $\bigoplus_{k \in K}^a V_k$ und $V_1 \otimes^a V_2$ dicht in $\overline{\bigoplus_{k \in K}^a \overline{V_k}}$ bzw. $\overline{\overline{V_1} \otimes^a \overline{V_2}}$. Also sind die auf die Vervollständigungen fortgesetzten Abbildungen surjektiv. \square

Satz 1.9. *Es gelten die folgenden kanonischen isometrischen Isomorphismen:*

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k &= \bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_{\pi(k)} \quad \text{für jede Permutation } \pi \text{ von } K, \\ \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 &= \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1, \\ \mathcal{H} \otimes \mathbf{C} &= \mathcal{H}, \\ \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 &= \mathcal{H}_1 \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3) = (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3, \\ \mathcal{H} \otimes \left(\bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k \right) &= \bigoplus_{k \in K} (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_k). \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussagen sind für die algebraische direkte Summe und das algebraische Tensorprodukt wohlbekannt, zudem sind die dabei auftretenden Isomorphismen isometrisch. Nach dem letzten Lemma kann man diese Sätze durch wiederholtes Vervollständigen auf die jetzige Situation übertragen, etwa

$$\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2 \otimes^a \mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_1 \otimes^a (\mathcal{H}_2 \otimes^a \mathcal{H}_3) \Rightarrow \overline{\mathcal{H}_1 \otimes^a \mathcal{H}_2 \otimes^a \mathcal{H}_3} = \overline{\mathcal{H}_1 \otimes^a (\mathcal{H}_2 \otimes^a \mathcal{H}_3)} = \overline{\mathcal{H}_1 \otimes^a \overline{(\mathcal{H}_2 \otimes^a \mathcal{H}_3)}}. \quad \square$$

Für einen abgeschlossenen Unterraum $U < \mathcal{H}$ ist $U \otimes \mathcal{I}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H} \otimes \mathcal{I}$ [Satz 1.7 für die Abbildungen $U \hookrightarrow \mathcal{H}$ und $\text{id}_{\mathcal{I}}$; die induzierte Abbildung ist isometrisch]. Die Distributivität des Tensorproduktes über die direkte Summe zeigt

$$(U \otimes \mathcal{I})^\perp = U^\perp \otimes \mathcal{I}, \quad (2)$$

da $\mathcal{H} \otimes \mathcal{I} = (U \oplus U^\perp) \otimes \mathcal{I} = (U \otimes \mathcal{I}) \oplus (U^\perp \otimes \mathcal{I})$ ist.

Der aufmerksame Leser wird eine aus der endlichdimensionalen linearen Algebra bekannte Beziehung vermisst haben, nämlich den Isomorphismus $U' \otimes V = \text{End}(U, V)$. Dieser überträgt sich *nicht* auf unendlichdimensionale Hilberträume. Das dieses so ist, erkennt man schon daran, daß zwar $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{I}$ ein Hilbertraum ist, nicht aber $B(\mathcal{H}, \mathcal{I})$: In diesem Raum gilt die Parallelogrammgleichung nicht, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Norm von einem Skalarprodukt induziert wird [Wer95, Satz V.1.6]. Allerdings definiert jedes Element aus $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{I}$ eine stetige, sogar kompakte Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$. Die so erhaltenen Operatoren heißen **Hilbert-Schmidt-Operatoren**, die vom Skalarprodukt auf $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{I}$ induzierte Norm Hilbert-Schmidt-Norm. Genaueres zu dieser Klasse von Operatoren findet man in [Wer95, Abschnitt VI.6] und [Rob83, Sec. I.8].

Literatur: [Pru81, §II.6], [RS80, Sec. II.4], [Wei76, Abschnitt 3.4]

1.3 L^2 -Räume

Direkte Summen und Tensorprodukte von Hilberträumen treten in natürlicher Weise bei L^2 -Räumen auf.

Satz 1.10. *Sei (X, μ) Maßraum und $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ eine Folge von disjunkten, meßbaren Teilmengen mit Vereinigungsmenge X . Dann vermitteln die Inklusionen $X_k \hookrightarrow X$ einen isometrischen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{k \in \mathbf{N}} L^2(X_k) = L^2(X).$$

Beweis. Da die X_k disjunkt sind, bilden die $L^2(X_k)$ paarweise orthogonale Unterräume von $L^2(X)$. Daher bleibt zu zeigen, daß das orthogonale Komplement ihrer direkten Summe 0 ist. Aus $\langle v, u \rangle = 0$ für ein $v \in L^2(X)$ und alle $u \in L^2(X_k)$ folgt $v_k := v|_{X_k} = 0$ fast überall und damit, wenn dieses für alle $k \in \mathbf{N}$ erfüllt ist,

$$\|v\|^2 = \int \bar{v}v = \sum_k \int \bar{v}v_k = 0$$

[Satz von der monotonen oder von der dominierten Konvergenz]. Also ist $v = 0$ der einzige Vektor, der auf allen Unterräumen $L^2(X_k)$ senkrecht steht. \square

Satz 1.11. *Für zwei Maßräume (X, Σ, μ) und (Y, \mathbf{T}, ν) sind die Räume $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu)$ und $L^2(\mu \otimes \nu)$ kanonisch isomorph unter der durch*

$$u \otimes v \mapsto (u \times v: (x, y) \mapsto u(x)v(y))$$

eindeutig bestimmten Abbildung.

Beweis. Sei ϕ die Abbildung

$$\begin{aligned} L^2(\mu) \otimes^a L^2(\nu) &\rightarrow L^2(\mu \otimes \nu) \\ u \otimes v &\mapsto (u \times v: (x, y) \mapsto u(x)v(y)). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $u \times v$ eine Funktion in $L^2(\mu \otimes \nu)$ ist [Fubini, folgt aber auch direkt aus den Definitionen], und die Zuordnung $(u, v) \mapsto \phi(u, v)$ offensichtlich bilinear. Da ϕ auch isometrisch ist [ebenfalls Fubini oder elementar], bleibt nur zu zeigen, daß das Bild von ϕ dicht liegt in $L^2(\mu \otimes \nu)$. Dafür reicht es wiederum nachzuweisen, daß Funktionen aus im ϕ dicht liegen im dichten Unterraum der Stufenfunktionen auf $X \times Y$ (*step functions* in der Terminologie von [Lan93]).

Mit $\Sigma \times \mathbf{T}$ sei die Algebra aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen der Form $A \times B$ mit $A \in \Sigma$ und $B \in \mathbf{T}$ bezeichnet. Die σ -Algebra der meßbaren Mengen von $X \times Y$ wird von $\Sigma \times \mathbf{T}$ erzeugt, und $\mu \otimes \nu$ ist das nach dem Fortsetzungssatz eindeutig bestimmte Maß mit

$$(\mu \otimes \nu)(C) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n),$$

wobei sich das Infimum über alle Folgen $(A_n \times B_n)_n$ in $\Sigma \times \mathbf{T}$ erstreckt, deren Vereinigung die meßbare Menge C enthält. Das zeigt nun, daß man jede Stufenfunktion durch Stufenfunktionen bezüglich Partitionen in $\Sigma \times \mathbf{T}$ approximieren kann, diese also dicht liegen in $L^2(\mu \otimes \nu)$. Aber Stufenfunktionen dieser Art sind offensichtlich im Bild von ϕ enthalten. \square

Nach dem Satz von Fubini liegt eine $\mu \otimes \nu$ -meßbare Funktion $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{C}$ genau dann in $L^2(\mu \otimes \nu)$, wenn für fast alle $y \in Y$ die Funktion $f_y: x \mapsto f(x, y)$ in $L^2(\mu)$ liegt und die Abbildung $y \mapsto \|f_y\|^2$ in $L^2(\nu)$. Ist $U \subset L^2(\mu)$ abgeschlossen, dann ist $V := U \otimes L^2(\nu)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mu \otimes \nu)$ (vermöge des soeben bewiesenen Isomorphismus). Eine Funktion $f \in L^2(\mu \otimes \nu)$ liegt genau dann in V , wenn $f_y \in U$ ist für fast alle $y \in Y$. Um dieses zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß genau unter dieser Bedingung das Skalarprodukt

$$\langle g, f \rangle = \iint \overline{g(x, y)} f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = 0$$

ist für alle $g \in W := U^\perp \otimes L^2(\nu)$, denn $V^\perp = U^\perp \otimes L^2(\nu) = \overline{W}$ [Gleichung (2)]. Doch das ist der Fall, denn für ein $g = u \times v$ mit $u \in U^\perp$ und $v \in L^2(\nu)$ ist $\langle g, f \rangle = \langle v, \langle u, f_y \rangle \rangle$, wobei man $\langle u, f_y \rangle$ als Funktion aus $L^2(\nu)$ auffaßt, und es gilt $\langle v, \langle u, f_y \rangle \rangle = 0$ für alle $v \Leftrightarrow \langle u, f_y \rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp f_y$ für fast alle y .

Literatur: [Lan93, §VI.8], [RS80, Sec. II.4]

1.4 Zum Adjungierten eines Operators

Für die mathematische Formulierung der Quantenmechanik nimmt der Begriff des selbstadjungierten Operators eine zentrale Rolle ein. Allerdings erweist es sich dabei als notwendig, Operatoren zuzulassen, die nicht auf dem ganzen Hilbertraum definiert oder nicht beschränkt sind. (Da es sich zeigen wird, daß selbstadjungierte Operatoren stets abgeschlossen sind, folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, daß diese beiden Probleme stets zusammen auftreten.)

Definition. $L(\mathcal{H})$ sei die Menge der linearen Operatoren $A: \text{dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$, deren Definitionsbereich $\text{dom}(A)$ ein dichter Unterraum von \mathcal{H} ist. Ist $D \subset \mathcal{H}$ Unterraum, dann bezeichnet $L_D(\mathcal{H})$ die Teilmenge derjenigen Operatoren in $L(\mathcal{H})$, die auf D definiert sind und D stabilisieren. Für $A, B \in L(\mathcal{H})$ bedeuten $A \subset B$ oder $B \supset A$, daß B eine **Fortsetzung** von A ist, also $\text{dom}(A) \subset \text{dom}(B)$ und $B|_{\text{dom}(A)} = A$.

Die Operationen

$$\lambda A, A + B, AB, [A, B] := AB - BA \quad (3)$$

mit $A, B \in L(\mathcal{H})$ und $\lambda \in \mathbf{C}$ seien überall dort definiert, wo sie sinnvoll sind. Eine Warnung: Während λA stets wieder ein Element von $L(\mathcal{H})$ ist (also dichten Definitionsbereich hat), muß dies in den anderen Fällen nicht zwangsläufig so sein! Allerdings ist $A + B$ für $A \in L(\mathcal{H})$ und $B \in B(\mathcal{H})$ wieder ein dicht definierter Operator, und falls B in $B(\mathcal{H})$ invertierbar ist, auch AB . Insbesondere liefert die Konjugation von A mit einem unitären Operator U einen Operator UAU^{-1} mit dichtem Definitionsbereich $U \text{dom}(A)$.

Um für einen Operator $A \in L(\mathcal{H})$ einen dazu adjungierten Operator definieren zu können, bemerkt man, daß zu jedem $u \in \mathcal{H}$ höchstens ein $v \in \mathcal{H}$ mit

$$\forall w \in \text{dom}(A) \quad \langle u, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

existieren kann, nämlich genau dann, wenn die Abbildung $w \mapsto \langle u, Aw \rangle$ stetig ist. [Darstellungssatz von von Fréchet-Riesz (s. Abschnitt 1.2) und die Tatsache, daß ein Funktional aus \mathcal{H}' schon durch seine Werte auf dem dichten Unterraum $\text{dom}(A)$ eindeutig bestimmt ist.]

Definition. Für $A \in L(\mathcal{H})$ heißt A^* mit

$$\begin{aligned} \text{dom}(A^*) &= \{u \in \mathcal{H} : \exists v \in \mathcal{H} \quad \forall w \in \text{dom}(A) \quad \langle u, Aw \rangle = \langle v, w \rangle\} \\ A^*u &= v \quad \text{wie oben} \end{aligned}$$

der zu A **adjungierte Operator**.

Der Definitionsbereich $\text{dom}(A)$ ist ein linearer Unterraum von \mathcal{H} und A^* ein linearer Operator. Allerdings kann $\text{dom}(A^*) = 0$ vorkommen, so daß nicht notwendigerweise $A^* \in L(\mathcal{H})$ gilt. Für $A \in B(\mathcal{H})$ ist allerdings auch $A^* \in B(\mathcal{H})$; es gilt $A^{**} := (A^*)^* = A$ und bezüglich der Norm des adjungierten Operators $\|A^*\| = \|A\|$ und $\|A^*A\| = \|A\|^2$ (die erste Gleichung folgt aus der zweiten).

Das nächste Lemma gibt an, wie sich die Adjunktion mit den in (3) angegebenen Operationen verträgt.

Lemma 1.12. Seien $A, B \in L(\mathcal{H})$.

- $B \supset A \implies B^* \subset A^*$.
- Ist $A + B$ dicht definiert, dann gilt $(A + B)^* \supset A^* + B^*$.
- Für $B \in B(\mathcal{H})$ ist sogar $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- Ist AB dicht definiert, dann gilt $(AB)^* \supset B^*A^*$.
- Falls $B \in B(\mathcal{H})$ in $B(\mathcal{H})$ invertierbar ist, gelten sogar $(AB)^* = B^*A^*$ und $(BA)^* = A^*B^*$.
- Für jeden unitären Operator U in \mathcal{H} ist $(UAU^{-1})^* = UA^*U^{-1}$.

Beweis. (a) Klar, da man an ein Element aus $\text{dom}(A^*)$ weniger Bedingungen stellt.

(b) Für $u \in \text{dom}(A + B)$ und $v \in \text{dom}(A^* + B^*)$ ist

$$\langle v, (A + B)u \rangle = \langle v, Au \rangle + \langle v, Bu \rangle = \langle A^*v, u \rangle + \langle B^*v, u \rangle = \langle (A^* + B^*)v, u \rangle.$$

(c) Ersetzt man A durch $A + B$ und B durch $-B$ in (b), dann folgt $(A + B - B)^* = A^* \supset (A + B)^* - B^*$, also $A^* + B^* \supset (A + B)^*$.

(d) Für $u \in \text{dom}(AB)$ und $v \in \text{dom}(B^*A^*)$ ist

$$\langle v, ABu \rangle = \langle A^*v, Bu \rangle = \langle B^*A^*v, u \rangle.$$

(e) Ersetze B durch $B^{-1} \in B(\mathcal{H})$ und A durch AB bzw. BA in (d).

(f) Klar nach (e). □

Definition. Sei $A \in L(\mathcal{H})$. Falls $A = A^*$ ist (also insbesondere $\text{dom}(A^*) = \text{dom}(A)$ gilt), so heißt A **selbstadjungiert**. Die Menge der selbstadjungierten Operatoren in \mathcal{H} sei mit $sa(\mathcal{H})$ bezeichnet und $sa(\mathcal{H}) \cap L_D(\mathcal{H})$ mit $sa_D(\mathcal{H})$. A heißt **hermitesch**³, falls $A \subset A^*$ gilt. Ist iA selbstadjungiert oder hermitesch, dann nenne ich A **schiefadjungiert** bzw. **schiefhermitesch**. Die Menge der schiefadjungierten Operatoren in H wird als $u(\mathcal{H})$ geschrieben. Schließlich sei $u_D(\mathcal{H}) = u(\mathcal{H}) \cap L_D(\mathcal{H})$.

Bei einem hermiteschen Operator A gilt also

$$\forall u, v \in \text{dom}(A) \quad \langle v, Au \rangle = \langle Av, u \rangle,$$

und es ist stets $A^* \in L(\mathcal{H})$.

Die Bezeichnung $u(\mathcal{H})$ für die schiefadjungierten Operatoren betont die Analogie mit der Liealgebra $u(\mathcal{H})$ für endlichdimensionales \mathcal{H} . In der Tat werden wir später sehen, daß für jeden Hilbertraum \mathcal{H} eine Bijektion zwischen den Elementen von $u(\mathcal{H})$ und den Einparameteruntergruppen von $U(\mathcal{H})$ besteht (Satz von Stone). Ebenso, wie sich die schiefadjungierten Operatoren (und nicht etwa die schiefhermiteschen) als die richtige Verallgemeinerung der endlichdimensionalen Situation ergeben, benötigt man dabei die passende Definition von Einparameteruntergruppen. All dieses wird in Abschnitt 3.2 ausführlich dargestellt.

1.5 Kriterien für Selbstadjungiertheit

Definition. Der **Graph** eines linearen Operators A ist der Untervektorraum

$$\Gamma(A) = \{(u, Au) : u \in \text{dom}(A)\}.$$

von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. A heißt **abgeschlossen**, falls $\Gamma(A) \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ abgeschlossen ist, und **abschließbar**, falls ein linearer Operator B existiert mit

$$\Gamma(B) = \overline{\Gamma(A)}.$$

In diesem Fall nennt man den Operator B den **Abschluß** von A und bezeichnet ihn mit \bar{A} .

Da die vom Skalarprodukt von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ induzierte Topologie gerade die Produkttopologie ist, kann man einen abgeschlossenen Operator ebensogut durch die folgende Eigenschaft charakterisieren:

$$\forall (u_n)_n \text{ Folge in } \text{dom}(A) \quad (u_n \rightarrow u \in \mathcal{H} \text{ und } Au_n \rightarrow v \in \mathcal{H}) \Rightarrow (u \in \text{dom}(A) \text{ und } Au = v)$$

Eine weitere Möglichkeit für die Definition des Abschlusses eines Operators besteht darin, nur die Existenz von abgeschlossenen Operatoren $B \supset A$ zu verlangen und dann \bar{A} als die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A zu definieren. Doch das ist gerade $\overline{\Gamma(A)}$. [Wenn $B \supset A$ mit B abgeschlossen gilt, ist $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(B)$ der Graph einer Restriktion von B .]

Satz 1.13. Für $A \in L(\mathcal{H})$ gelten:

- (a) A^* ist abgeschlossen.
- (b) $\ker(A^*) = \text{im}(A)^\perp$.
- (c) Im Falle $A^* \in L(\mathcal{H})$ ist A abschließbar und $\bar{A} = A^{**}$.

Beweis. Mit der Bezeichnung

$$U(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \ni K: u_1 \oplus u_2 \mapsto u_2 \oplus (-u_1)$$

folgt alles aus der Identität

$$\Gamma(A^*) = K \Gamma(A)^\perp. \tag{4}$$

(Das Anwenden von K und das Bilden des orthogonalen Komplementes vertauschen.) Im einzelnen:

- (a) Das orthogonale Komplement von $\Gamma(A)$ ist abgeschlossen.
- (b) Es ist $\ker A^* = \{v : v \oplus 0 \in \Gamma(A^*)\}$ und

$$v \oplus 0 \in \Gamma(A^*) \iff \forall u \in \text{dom}(A) \quad \langle v, Au \rangle = 0 \iff v \in \text{im}(A)^\perp.$$

³In der Literatur ist für hermitesche Operatoren auch die Bezeichnung „symmetrisch“ üblich.

(c) Es gilt

$$\Gamma(A^{**}) = K\Gamma(A^*)^\perp = K^2\Gamma(A)^{\perp\perp} = \overline{-\Gamma(A)} = \overline{\Gamma(A)}.$$

Also ist A abschließbar und $\bar{A} = A^{**}$.

Zum Beweis von Gleichung (4) bemerkt man die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} v_1 \oplus v_2 \in K\Gamma(A)^\perp &\iff \forall u \in \text{dom}(A) \quad \langle v_2, u \rangle - \langle v_1, Au \rangle = 0 \\ &\iff v_1 \in \text{dom}(A^*) \quad \text{und} \quad A^*v_1 = v_2. \end{aligned} \quad \square$$

Definition. Ein hermitescher oder schiefhermitescher Operator $A \in L(\mathcal{H})$ heißt **fast selbstadjungiert**⁴ (**fast schiefadjungiert**), falls \bar{A} selbstadjungiert (schiefadjungiert) ist. In diesem Fall heißt $\text{dom}(A)$ ein **determinierender Bereich** (englisch *core*) von \bar{A} .

(Ein hermitescher Operator A ist wegen $A \subset A^*$ gemäß dem letzten Satz immer abschließbar; der Abschluß ist ebenfalls hermitesch.)

Korollar 1.14. Sei $A \in L(\mathcal{H})$ mit $A^* \in L(\mathcal{H})$. Dann ist $A \subset A^{**} = A^{****}$ und für hermitesches A

$$\begin{array}{ccc} A \subset A^{**} & = & A^{****} \\ \cap & & \parallel \\ A^* & = & A^{***}. \end{array}$$

Insbesondere gelten

$$\begin{aligned} A = A^{**} &\iff A \text{ abgeschlossen,} \\ A = A^* &\iff A \text{ selbstadjungiert,} \\ A^* = A^{**} &\iff A \text{ fast selbstadjungiert.} \end{aligned}$$

Für später notieren wir folgende Beobachtung:

Lemma 1.15. Sei $A \in L(\mathcal{H})$ fast selbstadjungiert und $B \supset A$ eine hermitesche Erweiterung. Dann ist auch B fast selbstadjungiert mit gleichem Abschluß $\bar{B} = \bar{A}$. Insbesondere hat ein selbstadjungierter Operator keine echten selbstadjungierten Erweiterungen.

Beweis. Durch Abschließen erhält man aus $B \supset A$ die Relation $\bar{B} \supset \bar{A}$. Betrachtet man andererseits die adjungierten Operatoren, so bekommt man die umgekehrte Inklusion $\bar{A} = A^* \supset B^* \supset \bar{B}$. Der Zusatz ist klar. \square

Der Nachweis, daß ein Operator selbstadjungiert, erfolgt meistens mit dem folgenden Satz.

Satz 1.16 (Standardkriterium für Selbstadjungiertheit). Für $A \in L(\mathcal{H})$ hermitesch, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, sind äquivalent:

- (a) A ist selbstadjungiert.
- (b) A ist abgeschlossen und $\ker(A^* + \lambda) = \ker(A^* + \bar{\lambda}) = 0$.
- (c) $\text{im}(A + \lambda) = \text{im}(A + \bar{\lambda}) = \mathcal{H}$.

Beweis. Man kann $\lambda = i$ annehmen. [$\text{im}(A + \lambda) = \text{im}((\text{Im } \lambda)^{-1}(A + \text{Re } \lambda) + i)$ etc. und $(\text{Im } \lambda)^{-1}(A + \text{Re } \lambda)$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow A$ selbstadjungiert.]

(a) \Rightarrow (b): Die Abgeschlossenheit von $A = A^*$ wurde in Satz 1.13 bewiesen. Die Hermitizität von A hat zur Folge, daß $\langle u, Au \rangle$ reell ist für alle $u \in \mathcal{H}$ [$\langle u, Au \rangle = \langle Au, u \rangle = \overline{\langle u, Au \rangle}$]. Damit hat man

$$\|(A \pm i)u\|^2 = \|Au\|^2 \pm 2 \text{Re } \langle Au, iu \rangle + \|u\|^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2, \quad (5)$$

was die Injektivität von $A \pm i$ beweist.

(b) \Rightarrow (c): Wegen $\text{im}(A \pm i)^\perp = \ker(A^* \mp i) = 0$ liegt $\text{im}(A \pm i)$ dicht in \mathcal{H} . Gleichung (5) zeigt, daß der inverse Operator $(A \pm i)^{-1}: \text{im}(A \pm i) \rightarrow \text{dom}(A)$ stetig ist. Zusätzlich ist er aber abgeschlossen [A ist abgeschlossen, und $\Gamma((A \pm i)^{-1})$ geht aus $\Gamma(A)$ durch einen Homöomorphismus von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ hervor], woraus $\text{im}(A \pm i) = \text{dom}((A \pm i)^{-1}) = \mathcal{H}$ folgt. [Für jede in \mathcal{H} konvergente Folge (u_n) in $\text{im}(A \pm i)$ konvergiert auch die Bildfolge $(A \pm i)^{-1}u_n$.]

(c) \Rightarrow (a): Da wir bereits $A \subset A^*$ wissen, ist $\text{dom}(A^*) \subset \text{dom}(A)$ zu zeigen. Wähle zu $v \in \text{dom}(A^*)$ ein $u \in \text{dom}(A)$ mit $(A + i)u = (A^* + i)v$. Dann ist $u - v \in \ker(A^* + i) = \text{im}(A - i)^\perp = 0$. \square

⁴Der englische Begriff *essentially selfadjoint* wird in der deutschen Literatur gemeinhin etwas unglücklich mit „wesentlich selbstadjungiert“ übersetzt.

Die Schlüsse (c) \Rightarrow (a) und (c) \Rightarrow (b) sind übrigens für jedes $\lambda \in \mathbf{C}$ gültig.

Korollar 1.17 (Standardkriterium für Fast-Selbstadjungiertheit). Für $A \in L(\mathcal{H})$ hermitesch, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, sind äquivalent:

- (a) A ist fast selbstadjungiert,
- (b) $\ker(A^* + \lambda) = \ker(A^* + \bar{\lambda}) = 0$.
- (c) $\overline{\text{im}(A + \lambda)} = \overline{\text{im}(A + \bar{\lambda})} = \mathcal{H}$.

Beweis. (a) \Leftrightarrow (b): Zu zeigen ist die Selbstadjungiertheit von A^{**} . Wende also Satz 1.16 auf A^{**} an und beachte $A^{***} = A^*$.

(b) \Leftrightarrow (c): Satz 1.13(b). □

Literatur: [Wer95, Abschnitt VII.2]

1.6 Direkte Summen selbstadjungierter Operatoren

Sei $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k$ direkte Summe von Hilberträumen, und für jedes $k \in K$ sei ein Operator $A_k \in L(\mathcal{H}_k)$ gegeben. Dann kann man durch lineare Fortsetzung einen Operator A in \mathcal{H} mit Definitionsbereich

$$\text{dom}(A) = \bigoplus_{k \in K}^a \text{dom}(A_k)$$

erklären. Da die Definitionsbereiche aller A_k dicht im jeweiligen Hilbertraum liegen, ist auch $\text{dom}(A)$ dicht in $\bigoplus_{k \in K}^a \mathcal{H}_k$ und damit in \mathcal{H} . Der so erklärte Operator aus $L(\mathcal{H})$ sei mit $\bigoplus_{k \in K}^a A_k$ bezeichnet.

Sind alle A_k selbstadjungiert, so ist es auch A , denn A ist offensichtlich hermitesch und

$$\text{im}(A \pm i) = \bigoplus_{k \in K}^a \text{im}(A_k \pm i)$$

liegt dicht in \mathcal{H} , so daß das Standardkriterium für Fast-Selbstadjungiertheit angewandt werden kann. Die **direkte Summe**

$$\bigoplus_{k \in K} A_k$$

der A_k sei definitionsgemäß der Abschluß des Operators $\bigoplus_{k \in K}^a A_k$.

Daß der oben definierte Operator A fast selbstadjungiert ist, kann man auch direkt beweisen: Aufgrund der Hermitizität von A ist $A^* \subset \bar{A}$ zu zeigen. Ist $u = \bigoplus_k u_k \in \text{dom}(A^*)$, dann muß insbesondere $u_k \in \text{dom}(A_k^*)$ sein und $A_k^* u_k = (A^* u)_k$ gelten. [Für alle $v_k \in \text{dom}(A_k)$ ist $\langle (A^* u)_k, v_k \rangle_{\mathcal{H}_k} = \langle A^* u, v_k \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, A v_k \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_k, A_k v_k \rangle_{\mathcal{H}_k}$.] Also ist $A^* u = \bigoplus_k A_k^* u_k$. Da alle $(u_k, A_k^* u_k)$ im Abschluß von $\Gamma(A_k)$ liegen, ist $(u, A^* u)$ folglich im Abschluß von $\Gamma(A)$.

1.7 Das Spektrum eines Operators

In der (endlichdimensionalen) linearen Algebra ist das Spektrum eines linearen Operators A die Menge der Eigenwerte. Es zeigt sich, daß es angebracht ist, im Fall von Hilberträumen (oder allgemeiner Banachräumen) den Begriff des Spektrums etwas weiter zu fassen. Hilfreich ist dabei die Beobachtung, daß bei endlichdimensionalen Vektorräumen die Eigenwerte von A gerade die Werte λ sind, für die $\lambda - A$ kein Inverses besitzt.

Definition. Falls für $A \in L(\mathcal{H})$ und $\lambda \in \mathbf{C}$ der zu $\lambda - A: \text{dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ inverse Operator existiert und stetig ist, heißt er die **Resolvente** $R(A, \lambda)$ oder $(\lambda - A)^{-1}$ von A im Punkt λ . Die Menge $\rho(A)$ aller λ , für die die Resolvente $R(A, \lambda)$ existiert, heißt **Resolventenmenge** von A . Das Komplement $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$ ist das **Spektrum** von A . Des weiteren definiert man

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda - A \text{ nicht injektiv}\} \\ \sigma_c(A) &= \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda - A \text{ injektiv, nicht surjektiv, mit dichtem Bild}\} \\ \sigma_r(A) &= \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda - A \text{ injektiv, ohne dichtes Bild}\} \end{aligned}$$

und bezeichnet diese Mengen als **Punktspektrum**, **kontinuierliches Spektrum** und **Restspektrum** (residuales Spektrum).

Die Namen für die Teilmengen des Spektrums rühren daher, daß $\sigma_p(A)$ oft eine diskrete Teilmenge des Spektrums, $\sigma_c(A)$ nicht diskret und $\sigma_r(A)$ leer ist.

Für das Spektrum eines abgeschlossenen Operators $A \in L(\mathcal{H})$ gilt

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \dot{\cup} \sigma_c(A) \dot{\cup} \sigma_r(A).$$

Daß die Mengen disjunkt sind, ist klar. Für $\lambda \in \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A))$ wäre $\lambda - A: \text{dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ bijektiv, aber $(\lambda - A)^{-1}$ nicht stetig. Doch das ist ein Widerspruch, denn wenn A abgeschlossen ist, ist es auch $(\lambda - A)^{-1}$, weil $\Gamma((\lambda - A)^{-1})$ aus $\Gamma(A)$ durch einen Homöomorphismus von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ hervorgeht. Da $(\lambda - A)^{-1}$ zudem auf ganz \mathcal{H} definiert ist, handelt es nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen um eine stetige Abbildung.

Über das Spektrum eines selbstadjungierten Operators kann man mehr aussagen.

Satz 1.18. *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators A ist eine nichtleere Teilmenge von \mathbf{R} , und das Restspektrum ist leer.*

Beweis. $\sigma(A) \subset \mathbf{R}$: Für $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ ist $\lambda - A$ bijektiv [Standardkriterium für Selbstadjungiertheit]. Die Stetigkeit von $(\lambda - A)^{-1}$ ist im Beweisteil (b) \Rightarrow (c) des Standardkriteriums gezeigt worden.

$\sigma_r(A) = \emptyset$: Sei $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbf{R}$. Dann gilt

$$\lambda - A \text{ injektiv} \Leftrightarrow \ker(\lambda - A) = 0 \Leftrightarrow \text{im}(\lambda - A)^\perp = 0 \Leftrightarrow \text{im}(\lambda - A) \subset \mathcal{H} \text{ dicht.}$$

Also ist $\lambda \notin \sigma_r(A)$.

$\sigma(A) \neq \emptyset$: Dies wird sich im nächsten Abschnitt als Korollar 1.22 aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren ergeben. \square

1.8 Multiplikations- und Differentialoperatoren, Spektralsatz

Definition und Satz 1.19. *Sei (Ω, μ) Maßraum, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ meßbar. Dann ist der Multiplikationsoperator*

$$\begin{aligned} M_f: \text{dom}(M_f) &= \{u \in L^2(\mu) : fu \in L^2(\mu)\} \\ M_f u &= fu \end{aligned}$$

in $L^2(\Omega)$ dicht definiert und mit Norm

$$\|M_f\| = \text{ess sup } |f| = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

bzw. unbeschränkt, falls das wesentliche Supremum nicht existiert. Das Spektrum von M_f ist der Träger des Bildmaßes $f_*\mu$, und die Eigenwerte sind diejenigen $\lambda \in \mathbf{C}$, für die $\{\lambda\}$ positives $f_*\mu$ -Maß hat, also $U_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\})$ positives μ -Maß. Dann ist der Eigenraum zu λ durch

$$\text{eig}(M_f, \lambda) = L^2(U_\lambda, \mu) = \{u \in L^2(\mu) : u(x) = 0 \text{ für } f(x) \neq \lambda\}$$

gegeben. Das Restspektrum $\sigma_r(M_f)$ ist leer. Der zu M_f adjungierte Operator ist

$$M_f^* = M_{\bar{f}},$$

insbesondere ist M_f abgeschlossen, normal und für reellwertiges f selbstadjungiert.

Der Einfachheit halber bezeichne ich den zur Funktion f assoziierten Multiplikationsoperator M_f oftmals ebenfalls mit f .

Da zwei meßbare reellwertige Funktionen f_1 und f_2 , die sich nur auf einer Menge vom Maß 0 unterscheiden, den gleichen Operator $M_{f_1} = M_{f_2}$ liefern, kann man natürlich auch Multiplikationsoperatoren von Funktionen f , die nur auf dem Komplement einer Menge vom Maß 0 meßbar sind, definieren, insbesondere also für μ -meßbare Funktionen.

Beispiel 1.20. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie und μ ein Borelmaß auf X . Dann ist für jede stetige reellwertige Funktion f der Multiplikationsoperator M_f im Hilbertraum $L^2(\mu)$ selbstadjungiert und fast selbstadjungiert auf $C_c(X)$. Falls $X = M$ Mannigfaltigkeit ist und f glatt, dann ist auch $C_c^\infty(M)$ ein determinierender Bereich von M_f .

[Die Funktion $v = (f \pm i)^{-1}u$ ist stetig mit kompaktem Träger, wenn u es ist, und es gilt $(f \pm i)v = u$. Also ist das Bild von $C_c(X) \subset \text{dom}(M_f)$ unter $M_f \pm i$ liegt dicht in $L^2(\mu)$. Damit ist das Standardkriterium für Fast-Selbstadjungiertheit erfüllt. Genauso zeigt man die letzte Aussage. Beidesmal benutzt mal, daß $C_c(X)$ bzw. $C_c^\infty(X)$ dicht liegen in $L^2(\mu)$, vgl. Satz 1.3.]

Die besondere Bedeutung der Multiplikationsoperatoren M_f liegt darin, daß damit für reellwertiges f im wesentlichen alle Beispiele selbstadjungierter Operatoren erschöpft sind.

Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren 1.21 (Multiplikationsversion). *Sei A ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum \mathcal{H} . Dann existieren ein endlicher Maßraum (X, μ) , ein unitärer Operator $U: \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mu)$ und eine meßbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ derart, daß*

$$A = U^{-1}M_fU$$

ist.

Jeder selbstadjungierte Operator ist also zu einem Multiplikationsoperator unitär äquivalent. Den nicht gerade einfachen Beweis dieses zentralen Resultates aus der Theorie selbstadjungierter Operatoren kann man zum Beispiel bei [RS80, Sec. VIII.3] oder [Wer95, Kap. VII] nachlesen.

Korollar 1.22. *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators ist nicht leer.*

Beweis. Gemäß dem Spektralsatz können wir uns auf Multiplikationsoperatoren beschränken. Doch da ist die Aussage nach Satz 1.19 klar, denn der Träger des durch f induzierten Bildmaßes auf \mathbf{C} (in diesem Falle genauer auf \mathbf{R}) kann nicht leer sein, weil \mathbf{C} eine abzählbare Basis der Topologie besitzt [supp $f_*\mu = 0 \Rightarrow \mu(\mathbf{C}) = 0$]. \square

Um die Selbstadjungiertheit von Differentialoperatoren zu zeigen, führt man sie – im Falle konstanter Koeffizienten – mittels Fouriertransformation auf Multiplikationsoperatoren zurück. Die Fouriertransformation \mathcal{F} ist ein unitärer Operator in $L^2(\mathbf{R}^n)$, und für $u \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)$ ist

$$(\mathcal{F}u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} u(y)e^{-i\langle x, y \rangle} dy.$$

Sei $P(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}x^{\alpha}$ ein Polynom in den Komponenten von $x \in \mathbf{R}^n$ (summiert wird über den Multiindex α). Dazu definiert man den **Differentialoperator**

$$D_P = \mathcal{F}^{-1}M_P\mathcal{F}$$

in $L^2(\mathbf{R}^n)$. Da die Fouriertransformation Multiplikation und Differentiation in bestimmter Weise vertauscht [Wer95, Lemma 5.2.4], ist D_Pu für $u \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ tatsächlich ein Differentialausdruck,

$$D_Pu = D(P)u \quad \text{mit} \quad D(x^{\alpha}) = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Satz 1.23. *Sei P ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann ist der Differentialoperator D_P selbstadjungiert mit determinierendem Bereich $C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$.*

Beispiel 1.24. Der selbstadjungierte Operator

$$H_0 = \frac{1}{2m}D_{\|x\|^2}$$

in $L^2(\mathbf{R}^n)$ heißt **Hamiltonoperator des freien Teilchens** mit Masse $m > 0$. Für $u \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ ist

$$H_0u = -\frac{1}{2m}\Delta u.$$

Aus dem Sobolewschen Lemma (Satz 1.27) wird sich mit Lemma 1.26 ergeben, daß im Definitionsbereich von H_0 nur stetige Funktionen liegen.

Definition. Für $u \in \text{dom}(D_P)$ heißt D_Pu die **verallgemeinerte Ableitung** von u bezüglich des Differentialausdrucks $D(P)$. Insbesondere nennt man im Falle $P(x) = x^{\alpha}$ die Funktion $D_{x^{\alpha}}u$ die verallgemeinerte α -te Ableitung von u .

Weil $C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ ein determinierender Bereich von D_P ist, liegt $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ genau dann im Definitionsbereich von D_P , wenn es ein $v \in L^2(\mathbf{R}^n)$ derart gibt, daß für alle $w \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ die Gleichung

$$\langle u, D(P)w \rangle = \langle v, w \rangle \tag{6}$$

gilt, und dann ist $D_Pu = v$. Dabei ist $D(P)w$ ein *klassischer* Differentialausdruck. Mittels dieses Kriteriums kann man den Begriff der verallgemeinerten Ableitung für beliebige offene Teilmengen des \mathbf{R}^n erklären. Von Bedeutung ist die folgende Beobachtung:

Lemma 1.25. *Existiert für ein $u \in \text{dom}(D_P)$ lokal, d. h. für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^n$, der klassische Differentialausdruck $D(P)u$, so stimmt $D_P u$ auf U mit $D(P)u$ überein.*

Beweis. Weil die verallgemeinerte Ableitung $D_P u$ existiert, gilt Gleichung (6) insbesondere für alle $w \in C_c^\infty(U)$ ($C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ durch triviale Fortsetzung). Dann kann man die Skalarprodukte aber als solche im Hilbertraum $L^2(U)$ auffassen, in dem $C_c^\infty(U)$ dicht liegt. Da die Gleichung auch für $v = (D(P)u)|_U$ immer erfüllt ist [alle Randterme bei partieller Integration verschwinden, da w kompakten Träger in U hat], müssen $D_P u$ und $D(P)u$ auf U übereinstimmen. \square

Literatur: [Wei76, Abschnitte 4.1, 5.1, 5.2, 10.1, 10.2], [Wer95, Abschnitt V.2]

1.9 Glattheit von Eigenfunktionen

Definition. Für $m \in \mathbf{N}$ heißt der Vektorraum

$$W^m(\mathbf{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) : \forall |\alpha| \leq m \quad u \in \text{dom}(D_{x^\alpha})\}$$

der m -te **Sobolewraum** auf \mathbf{R}^n .

Gemäß der Definition der Differentialoperatoren D_{x^α} als Fouriertransformierte der entsprechenden Multiplikationsoperatoren bedeutet dies, daß $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ genau dann ein Element von $W^m(\mathbf{R}^n)$ ist, wenn für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$ die Funktion $x^\alpha \mathcal{F}u$ quadratintegabel ist. Es ist klar, daß man für $m < m'$ die Inklusion $W^m(\mathbf{R}^n) \supset W^{m'}(\mathbf{R}^n)$ hat.

Man kann auch für offene Teilmengen $U \subset \mathbf{R}^n$ den Sobolewraum $W^m(U)$ definieren, wobei man sich des im Anschluß an die Definition der verallgemeinerten Ableitung formulierten Kriteriums (6) bedient.

Lemma 1.26. *Der Definitionsbereich des Hamiltonoperators H_0 des freien Teilchens ist der Sobolewraum $W^2(\mathbf{R}^n)$.*

Beweis. Für $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ gelten die Äquivalenzen

$$u \in \text{dom}(H_0) \iff \|x\|^2 \mathcal{F}u \in L^2(\mathbf{R}^n) \iff (1 + \|x\|^2) \mathcal{F}u \in L^2(\mathbf{R}^n).$$

Schätzt man für $|\alpha| \leq 2$ den Betrag von x^α durch

$$|x^\alpha| = |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^{|\alpha|} \leq 1 + \|x\|^2$$

ab, so zeigt dies die Inklusion $\text{dom}(H_0) \subset W^2(\mathbf{R}^n)$. Ist andererseits $u \in W^2(\mathbf{R}^n)$, so ist nach Definition $\|x\|^2 \mathcal{F}u = \sum_{i=1}^n x_i^2 \mathcal{F}u$ quadratintegabel, also $u \in \text{dom}(H_0)$. \square

Satz 1.27 (Sobolewsches Lemma für \mathbf{R}^n). *Es gilt*

$$u \in W^m(\mathbf{R}^n) \implies \forall l < m - \frac{n}{2} \quad u \in C^l(\mathbf{R}^n).$$

Dieser klassische Satz, der auch für offene Teilmengen des \mathbf{R}^n gilt, ist zum Beispiel in [Wer95, Satz V.2.12] bewiesen. Mit Hilfe des Sobolewschen Lemmas kann man Aussagen über die Glattheit von Eigenfunktionen von „Schrödinger-Operatoren“ der Form $H_0 + V$ machen.

Satz 1.28 (Weylsches Lemma für \mathbf{R}^n). *Sei $V \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ beschränkt mit beschränkten Ableitungen. Dann ist jede Eigenfunktion u von $H = H_0 + M_V$ glatt und eine klassische Lösung der Differentialgleichung*

$$-\frac{1}{2m} \Delta u + V u = E u,$$

wobei E der Eigenwert zu u ist.

Beweis. Aufgrund des Sobolewschen Lemmas reicht es, $u \in W^m(\mathbf{R}^n)$ für alle m zu zeigen [u klassische Lösung: Lemma 1.25]. Wir überlegen uns zunächst, daß für $m \geq 2$

$$u \in W^m(\mathbf{R}^n) \quad \text{und} \quad H_0 u \in W^m(\mathbf{R}^n) \implies u \in W^{m+2}(\mathbf{R}^n) \quad (7)$$

gilt: Nach Voraussetzung sind für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$ die Funktionen $x^\alpha \mathcal{F}(-\Delta u) = x^\alpha \|x\|^2 \mathcal{F}u$ und $x^\alpha \mathcal{F}u$ quadratintegabel, also auch alle Funktionen $x^\alpha (1 + \|x\|^2) \mathcal{F}u$. Die Beträge dieser Funktionen dominieren aber alle Funktionen vom Typ $x^\beta \mathcal{F}u$ mit $|\beta| \leq |\alpha| + 2$.

Nach Voraussetzung ist $u \in W^2(\mathbf{R}^n)$. Da V glatt ist, liegt auch Vu im zweiten Sobolewraum: Mittels partieller Integration beweist man eine Art Leibnizregel, nämlich daß für $k = 1, \dots, n$ und $v \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle Vu, D(x_k)v \rangle &= \int \overline{Vu}(-i) \frac{\partial v}{\partial x_k} = \int \bar{u} \left(D(x_k)(\bar{V}v) + \overline{D(x_k)V}v \right) \\ &= \langle u, D(x_k)(\bar{V}v) \rangle + \langle (D(x_k)V)u, v \rangle = \langle VD_{x_k}u + (D(x_k)V)u, v \rangle \end{aligned}$$

gilt. Also existieren alle verallgemeinerten Ableitungen ersten Grades von Vu , und es ist

$$D_{x_k}(Vu) = (D(x_k)V)u + VD_{x_k}u.$$

Da $VD_{x_k}u$ und $(D(x_k)V)u$ jeweils das Produkt einer glatten Funktion und einer Funktion aus $W^1(\mathbf{R}^n)$ sind, kann man diese „Leibnizregel“ auf jeden Term einzeln erneut anwenden und damit $Vu \in W^2(\mathbf{R}^n)$ zeigen.

Die Funktion u erfüllt die Eigenwertgleichung

$$Hu = H_0u + Vu = Eu \tag{8}$$

für ein $E \in \mathbf{C}$. Nach dem bisher Bewiesenen ist

$$H_0u = Eu - Vu \in W^2(\mathbf{R}^n).$$

Daraus folgt aber $u \in W^4(\mathbf{R}^n)$ mit Formel (7). So zeigt man induktiv

$$u \in W^m(\mathbf{R}^n) \implies Vu \in W^m(\mathbf{R}^n) \implies H_0u \in W^m(\mathbf{R}^n) \implies u \in W^{m+2}(\mathbf{R}^n),$$

wobei man im ersten Schritt die „Leibnizregel“ auf höhere Ableitungen ausweitet. \square

In dieser Form ist das Weylsche Lemma wenig hilfreich, weil die an V gestellten Bedingungen allzu restriktiv sind. Entscheidend ist aber, daß dieser Satz auch lokal seine Gültigkeit behält. (Man muß dafür zeigen, daß man auch lokal wie in (7) schließen kann.)

Weylsches Lemma 1.29. *Sei $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ Lebesgue-meßbar und auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^n$ glatt. Dann ist jede Eigenfunktion u von $H = H_0 + M_V$ ebenfalls glatt in U und dort eine klassische Lösung der Differentialgleichung*

$$-\frac{1}{2m}\Delta u + Vu = Eu,$$

wobei E der Eigenwert zu u ist.

Sofern das Potential V glatt ist, kann man sich also beim Bestimmen von Eigenfunktion von H auf das Lösen *klassischer* Differentialgleichungen beschränken.

Literatur: [RS75, Sec. IX.6]

Kapitel 2

Darstellungen kompakter Gruppen

In diesem Kapitel bezeichnen die Buchstaben G und H Gruppen im Sinne der Einleitung.

Für endlichdimensionale G -Moduln einer endlichen Gruppe G existiert stets eine eindeutige Zerlegung in isotypische Komponenten, die sogenannte isotypische Zerlegung. In diesem Kapitel wird es darum gehen, dieses Ergebnis auf unitäre Darstellungen kompakter Gruppen in beliebigen Hilberträumen zu übertragen. Obwohl wir das Ergebnis nur für kompakte Liegruppen benötigen, wird es ohne die Voraussetzung einer differenzierbaren Struktur bewiesen.¹

2.1 Eigenschaften des Haarmaßes

Ein Borelmaß auf G heißt linksinvariant, wenn für die durch die Linkstranslationen $l(g): h \mapsto gh$, $g \in G$, induzierten Bildmaße

$$l(g)_*\mu = \mu$$

gilt. Entsprechend bedeutet Rechtsinvarianz von μ , daß $r(g)_*\mu = \mu$ ist für alle Rechtstranslationen $r(g): h \mapsto hg$.

Links- und Rechtstranslation einer Gruppe G induzieren Linkswirkungen L und R auf $C_c(G)$, dem Raum der stetigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger, mit

$$(L(g)a)(h) = (a \circ l(g^{-1}))(h) = a(g^{-1}h) \quad \text{und} \quad (R(g)a)(h) = (a \circ r(g))(h) = a(hg).$$

Ein **Haarmaß** auf G ist ein linksinvariantes Borelmaß $\mu \neq 0$ auf G . Von fundamentaler Bedeutung für alles weitere ist nun, daß auf einer (lokal-kompakten, hausdorffschen, zwei-abzählbaren) Gruppe ein Haarmaß stets existiert und im Falle kompakter Gruppen durch die Forderung der Normiertheit sogar eindeutig bestimmt ist. Dabei heißt μ normiert, falls

$$d\mu(1) = \int 1 d\mu = 1$$

ist. (Für einen Beweis siehe etwa [Lan93, Ch. XII]. Die einzige nicht kompakte Gruppe, die im folgenden eine Rolle spielen wird, ist \mathbf{R} mit dem Lebesguemaß als Haarmaß.) Auf der Ebene des durch ein Haarmaß μ eindeutig bestimmten Funktionals $d\mu$ auf $C_c(G)$ drückt sich die Linksinvarianz durch die Identität

$$L(g)^*d\mu := d\mu \circ L(g) = d\mu$$

aus. Es ist klar, daß der Träger $\text{supp } \mu$ des Haarmaßes ganz G ist, da er wie μ linksinvariant sein muß, aber nicht leer sein kann wegen $\mu \neq 0$. Ich werde ein Haarmaß auf einer kompakten Gruppe G stets als normiert voraussetzen und mit μ_G oder kurz μ bezeichnen. Da in diesem Falle G endliches Maß hat, ist μ sogar regulär.

Für den Rest dieses Abschnittes werden alle Gruppen als kompakt vorausgesetzt.

Satz 2.1. *Das Haarmaß μ auf einer Gruppe G ist auch unter Rechtstranslationen und Inversion invariant.*

Beweis. Wegen der Gleichheit $r(g) \circ l(h) = l(h) \circ r(g)$ ist $r(g)_*\mu$ ein Haarmaß auf G , denn

$$l(h)_*(r(g)_*\mu) = (l(h) \circ r(g))_*\mu = (r(g) \circ l(h))_*\mu = r(g)_*(l(h)_*\mu) = r(g)_*\mu$$

[normiert, positiv, regulär: klar], also gleich μ . Weil $l(g) \circ \iota = \iota \circ r(g^{-1})$ gilt und damit auch

$$l(g)_*(\iota_*\mu) = \iota_*(r(g^{-1})_*\mu) = \iota_*\mu,$$

ist $\iota_*\mu$ ebenfalls ein Haarmaß. □

¹Zu der Frage, inwiefern dadurch größere Allgemeinheit erreicht wird, vergleiche die Diskussion des Satzes von Montgomery-Zippin-Gleason in Abschnitt 5.4.

Es ist also für jedes $f \in C(G)$ und $g \in G$

$$\int f(h) dh = \int f(gh) dh = \int f(hg) dh = \int f(h^{-1}) dh.$$

Sei $H < G$ eine abgeschlossene Untergruppe und $p: G \rightarrow G/H$ Quotient bezüglich der Rechtswirkung. Dann wirkt G stetig auf G/H , und p wird zu einer G -Abbildung, wenn G auf sich durch Linkstranslationen wirkt. G/H ist **G -Raum**, d. h. ein lokalkompakter und zwei-abzählbarer Hausdorffraum mit stetiger Wirkung $G \times X \rightarrow X$, sogar **homogener** G -Raum (G wirkt transitiv). Auf diese Weise erhält man alle homogenen G -Räume [G kompakt, G -Raum hausdorffsch]. Weiterhin liefert p ein Borelmaß $p_*\mu$ auf den Borelmengen von G/H [$p_*\mu$ wie μ endlich]. Auch das durch μ bestimmte Funktional $d\mu$ kann auf G/H vorgeschoben werden zu einem Funktional $p_*d\mu$ auf $C(G/H)$ mit $(p_*d\mu)(f) = d\mu(f \circ p)$. Die Transformationsformel für Bildmaße zeigt nun, daß

$$dp_*\mu = p_*d\mu$$

ist, denn für jedes $f \in C(G/H)$ gilt

$$d(p_*\mu)(f) = \int_{G/H} f dp_*\mu = \int_G f \circ p d\mu = p_*(d\mu)(f).$$

„Fubini“-Lemma 2.2. Sei $a \in C(G)$. Dann ist die Funktion $g \mapsto \int a(gh) d\mu_H(h)$ stetig und auf H -Bahnen konstant, und es gilt

$$\int a(g) d\mu_G(g) = \iint a(gh) d\mu_H(h) dp_*\mu_G(gH). \quad (1)$$

Insbesondere ist das induzierte Borelmaß $p_*\mu_G$ auf G/H durch Normiertheit und G -Invarianz eindeutig bestimmt.

(Für die Integration bezüglich $p_*\mu_G$ faßt man $\int a(gh) d\mu_H(h)$ als Funktion auf G/H auf.)

Beweis. Aufgrund der Kompaktheit von G ist a (bezüglich der durch die Gruppe definierten uniformen Struktur) gleichmäßig stetig. Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung U der $1 \in G$ mit

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad g_2 \in Ug_1 \Rightarrow |a(g_1) - a(g_2)| \leq \epsilon.$$

Für solch ein Paar (g_1, g_2) ist dann auch

$$\left| \int a(g_1h) d\mu_H(h) - \int a(g_2h) d\mu_H(h) \right| \leq \int |a(g_1h) - a(g_2h)| d\mu_H(h) \leq \epsilon,$$

was die Stetigkeit beweist. Da H von rechts wirkt, ist die Funktion $g \mapsto \int a(gh) d\mu_H(h)$ auf H -Bahnen konstant. Die behauptete Gleichheit (1) folgt schließlich aus der Eindeutigkeit des Haarmaßes. (Die rechte Seite ist linksinvariant, da $p_*\mu$ G -invariant ist.)

Aus dieser Beobachtung ergibt sich auch der Zusatz: Jedes G -invariante und normierte Borelmaß auf G/H liefert durch Doppelintegration wie in (1) ein Haarmaß auf G . Diese Zuordnung ist injektiv, da jede Funktion aus $C(G/H)$ als auf H -Bahnen konstante stetige Funktion auf G aufgefaßt werden kann und in diesem Sinne $d\mu_G|_{C(G/H)} = d\mu$ gilt. Also ist $p_*\mu_G$ das einzige Maß auf G/H mit den angegebenen Eigenschaften. \square

Literatur: [BtD85, §I.5]

2.2 Die Gruppe $U(\mathcal{H})$

An Darstellungen topologischer Gruppen wird man gewisse Stetigkeitsforderungen stellen und sich daher auf solche in Vektorräumen mit topologischer Struktur beschränken. Hier soll nur der Fall von unitären Darstellungen in Hilberträumen behandelt werden.

Eine unitäre Darstellung einer (topologischen) Gruppe G in einem endlichdimensionalen Hilbertraum V ist ein stetiger Gruppenmorphismus $T: G \rightarrow U(V)$ in den Raum der unitären Operatoren in V . Falls G Liegruppe ist, dann ist T notwendigerweise glatt und folglich Liemorphismus. Um diese Definition

auf unitäre Darstellungen in unendlichdimensionalen Hilberträumen übertragen zu können, muß man der Gruppe $U(\mathcal{H})$ eine Topologie geben. Ein möglicher Kandidat ist die Normtopologie, doch zeigt sich, daß man eine gröbere Topologie wählen muß, um zum einen die in Anwendungen auftretenden Situationen erfassen zu können und um zum anderen schöne Ergebnisse (wie den Satz von Stone) zu erhalten. Obwohl man unitäre Darstellungen von topologischen Gruppen auch ohne den Nachweis definieren könnte, daß $U(\mathcal{H})$ selbst topologische Gruppe ist, sei er an dieser Stelle erbracht, weil wir in Kapitel 5 darauf zurückgreifen werden.

Als für das weitere Vorgehen geeignete Topologie auf $U(\mathcal{H})$ erweist sich die **starke Topologie**, also die grösste Topologie, für die alle Abbildungen

$$ev_u: U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad A \mapsto Au,$$

mit $u \in \mathcal{H}$ stetig sind.

Ab jetzt ist $U(\mathcal{H})$ immer als topologischer Raum, ausgestattet mit der starken Topologie, zu verstehen.

Um zu zeigen, daß die Gruppenoperationen von $U(\mathcal{H})$ stetig sind, benötigen wir eine Vorbemerkung, die – obwohl sie länger ist als ihr Beweis – als Lemma formuliert sei, um sie später besser zitieren zu können.

Lemma 2.3. *Sei X ein topologischer Raum und $T: X \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine Abbildung. Für $u \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung*

$$X \rightarrow \mathcal{H}, \quad x \mapsto T(x)u,$$

genau dann stetig bei $x_0 \in X$, wenn die Abbildung

$$X \rightarrow \mathbf{C}, \quad x \mapsto \langle T(x_0)u, T(x)u \rangle,$$

stetig bei x_0 ist. Insbesondere ist T genau dann stetig, wenn für alle $u, v \in \mathcal{H}$ die Abbildung

$$X \rightarrow \mathbf{C}, \quad x \mapsto \langle v, T(x)u \rangle,$$

stetig ist.

Die letzte Aussage kann man auch so formulieren: Auf $U(\mathcal{H})$ stimmen starke und schwache Topologie [RS80, Sec. VI.1] überein.

Beweis. Die eine Implikation und der Zusatz sind klar. Für die andere bemerkt man, daß

$$\begin{aligned} \|T(x)u - T(x_0)u\|^2 &= \|T(x)u\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T(x_0)u, T(x)u \rangle + \|T(x_0)u\|^2 \\ &= 2\|T(x_0)u\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T(x_0)u, T(x)u \rangle \end{aligned}$$

nach Voraussetzung für $x \rightarrow x_0$ gegen 0 konvergiert. □

Satz 2.4. *$U(\mathcal{H})$ ist eine (hausdorffsche) topologische Gruppe.*

Beweis. Da die Abbildungen ev_u , $u \in \mathcal{H}$, die Punkte von $U(\mathcal{H})$ trennen und ihre Werte in einem Hausdorffraum annehmen, ist auch $U(\mathcal{H})$ hausdorffsch. Die Gruppeninversion ι ist nach dem letzten Lemma stetig, weil für $u, v \in \mathcal{H}$ die Abbildung

$$U(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{C}, \quad A \mapsto \langle v, A^{-1}u \rangle = \langle Av, u \rangle,$$

stetig ist. Damit kann man auch die Stetigkeit der Multiplikation μ erschließen, denn

$$(A, B) \mapsto \langle v, \mu(A, B)u \rangle = \langle \iota(A)v, Bu \rangle$$

ist eine stetige Funktion auf $U(\mathcal{H}) \times U(\mathcal{H})$. □

Falls \mathcal{H} endlichdimensional ist, fallen Normtopologie und starke Topologie von $U(\mathcal{H})$ zusammen. Außerdem ist $U(\mathcal{H})$ dann sogar Liegruppe, was zum Beispiel die Definition einer Liealgebrendarstellung zu einer gegebenen Darstellung einer Liegruppe deutlich erleichtert. Für $\dim \mathcal{H} = \infty$ ist all dieses nicht mehr richtig; $U(\mathcal{H})$ ist dann nicht einmal mehr lokalkompakt. (Allerdings ist $U(\mathcal{H})$ zwei-abzählbar, falls \mathcal{H} wie angenommen separabel ist. Das folgt aus der einfachen Verallgemeinerung von Lemma 2.5(d) auf beliebige Abbildungen; wegen der Separabilität von \mathcal{H} kann S abzählbar gewählt werden). Wir werden in Kapitel 3 sehen, daß es in diesem Falle sehr viel schwieriger ist, von einer Darstellung einer Liegruppe G zu einer der Liealgebra LG überzugehen.

Literatur: [BR77, §5.1]

2.3 Darstellungen und G -Moduln

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Gruppe $U(\mathcal{H})$ der unitären Operatoren in einem Hilbertraum \mathcal{H} untersucht haben, können wir jetzt die gewohnten Definitionen von G -Moduln und Darstellungen auf unendlichdimensionale Hilberträume übertragen.

Definition. Sei G eine Gruppe und \mathcal{H} ein Hilbertraum. \mathcal{H} heißt **stetiger G -Modul**, falls \mathcal{H} im algebraischen Sinn G -Modul ist, das Skalarprodukt von \mathcal{H} G -invariant und die Abbildung

$$G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (g, u) \mapsto gu$$

stetig. Ein Unterraum $U < \mathcal{H}$ heißt **G -Unterm modul**, falls $U \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen und G -stabil ist. Ein (Modul oder) Unterm modul U ist **einfach**, wenn 0 und U die einzigen Unterm odulen von U sind. Zwei G -Moduln \mathcal{H}, \mathcal{I} heißen **isomorph**, wenn es einen stetigen G -Morphismus $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$ mit stetigem Inversen gibt. Eine **unitäre Darstellung** von G in \mathcal{H} ist ein stetiger Gruppenmorphismus

$$T: G \rightarrow U(\mathcal{H}).$$

Unterm odulen von stetigen G -Moduln sind also selbst stetige G -Moduln. Jeder stetige G -Modul liefert eine unitäre Darstellung von G , da die G -Invarianz des Skalarproduktes explizit gefordert wurde. Es gilt sogar die Umkehrung:

Lemma 2.5. Sei G Gruppe, \mathcal{H} Hilbertraum und $T: G \rightarrow U(\mathcal{H})$ Gruppenmorphismus. Dann sind äquivalent:

- (a) \mathcal{H} ist vermöge T stetiger G -Modul.
- (b) T ist stetig.
- (c) T ist stetig bei $g = 1$.
- (d) Für alle u einer dichten Teilmenge $S \subset \mathcal{H}$ ist $g \mapsto \langle u, T(g)u \rangle$ bei $g = 1$ stetig.

Beweis. (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) Klar.

(d) \Rightarrow (c) Für $u \in S$ ist die Abbildung $G \rightarrow \mathcal{H}, g \mapsto T(g)u$, gemäß Lemma 2.3 bei $g = 1$ stetig. Jetzt sei $u \in \mathcal{H}$ beliebig und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle dann ein $v \in S$ mit $\|v - u\| < \epsilon$ und eine Umgebung U von $1 \in G$ mit $\|T(g)v - v\| < \epsilon$ für $g \in U$. Damit ist für alle $g \in U$

$$\|T(g)u - u\| \leq \|T(g)(u - v)\| + \|T(g)v - v\| + \|v - u\| = 2\|u - v\| + \|T(g)v - v\| < 3\epsilon,$$

womit die Stetigkeit bei $g = 1$ bewiesen ist.

(c) \Rightarrow (a) Zu zeigen ist die Stetigkeit der Abbildung $(g, u) \mapsto T(g)u$, wobei man sich auf den Nachweis bei $(1, u)$ beschränken kann [T Gruppenmorphismus]. Wähle zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Umgebung V von u mit $\|v - u\| < \epsilon$ für alle $v \in V$ und eine Umgebung U von $1 \in G$ mit $\|T(g)u - u\| < \epsilon$. Dann ist für $(g, v) \in U \times V$

$$\|T(g)v - u\| \leq \|T(g)(v - u)\| + \|T(g)u - u\| = \|v - u\| + \|T(g)u - u\| < 2\epsilon.$$

Also ist \mathcal{H} stetiger G -Modul. □

Ab jetzt sind alle Darstellungen, wenn nicht anders angekündigt, (stark stetige) unitäre Darstellungen in Hilberträumen. Entsprechend sind G -Moduln stetige G -Moduln (mit G -invariantem Skalarprodukt) und G -Morphismen stetige G -Morphismen. Weiterhin sind G -Projektionen stets orthogonale G -Projektionen.

Die geforderte Unitarität bedeutet für kompakte Gruppen keine große Einschränkung, da man aus jedem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ durch Mittelung ein G -invariantes Skalarprodukt

$$\langle v, u \rangle = \int \langle gv, gu \rangle_1 dg$$

gewinnen kann.

Zwei isomorphe (unitäre) G -Moduln sind stets isometrisch isomorph: Sei $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$ ein G -Morphismus zweier endlichdimensionaler Moduln. In der Polarzerlegung

$$A = US$$

mit unitärem U und selbstadjungiertem S ist auch

$$S = \sqrt{A^*A} \tag{2}$$

G -Morphismus und folglich $U = AS^{-1}$ ein unitärer G -Isomorphismus. Bei unendlichdimensionalen Moduln schließt man auf gleiche Weise, allerdings benötigt man jetzt den Funktionalkalkül (beschränkter) selbstadjungierter Operatoren, um (2) einen Sinn zu geben.

An wenigen Stellen werden uns Darstellungen begegnen, die nicht unitär sind. Darunter sind dann Gruppenmorphisme $G \rightarrow GL(\mathcal{H})$ zu verstehen, die in der starken Topologie von $GL(\mathcal{H})$ (wie für $U(\mathcal{H})$ definiert) stetig sind.

In Abschnitt 1.2 wurden direkte Summen und Tensorprodukte von Hilberträumen definiert. Auch der Dualraum eines Hilbertraumes wurde mit einer Hilbertraumstruktur versehen. Wie man es sich wünschen würde, kann man diese Konstruktionen auch mit G -Moduln durchführen.

Satz 2.6. *Dualräume, direkte Summen und Tensorprodukte von G -Moduln sind G -Moduln, und das äußere Tensorprodukt eines G_1 - und eines G_2 -Moduls ist ein $G_1 \times G_2$ -Modul.*

Beweis. Dualraum: Daß der Dualraum \mathcal{H}' eines Hilbertraumes \mathcal{H} eine G -Modulstruktur im algebraischen Sinn trägt, ist bekannt. Die zugehörigen Darstellungen seien mit T (in \mathcal{H}) und T' (in \mathcal{H}') bezeichnet. Es reicht zu zeigen, daß T' stetig und unitär ist. Für $g \in G$, $u', v' \in \mathcal{H}'$ und $w \in \mathcal{H}$ gilt

$$(T'(g)u')(w) = \langle u, T(g^{-1})w \rangle = \langle u, T(g)^*w \rangle = (T(g)u)'(w), \tag{3}$$

also

$$\langle T'(g)v', T'(g)u' \rangle = \langle (T(g)v)', (T(g)u)' \rangle = \langle T(g)u, T(g)v \rangle = \langle u, v \rangle = \langle v', u' \rangle,$$

was die Unitarität beweist. Da die kanonische Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ stetig ist, folgt aus Gleichung (3) auch die Stetigkeit von T' aus der von T .

Direkte Summe: Da die Darstellungen auf den (eventuell unendlich vielen) Summanden unitär sind, kann die Darstellung (im algebraischen Sinn) auf der algebraischen direkten Summe auf die direkte Summe der Hilberträume fortgesetzt werden; die Fortsetzung ist unitär. Die Stetigkeit auf der algebraischen direkten Summe ist klar, so daß Kriterium (d) von Lemma 2.5 das gewünschte Ergebnis liefert [die algebraische direkte Summe liegt dicht].

Tensorprodukt: Entweder geht man analog zur direkten Summe vor, oder man benutzt, daß das G -Modul-Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ die Restriktion des $G \times G$ -Moduls $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vermöge $g \mapsto (g, g)$ ist, und den nächsten Punkt.

Äußeres Tensorprodukt: Auch hier kann die algebraische Darstellung auf dem algebraischen Tensorprodukt zu einer auf dem Hilbertraum-Tensorprodukt ausgeweitet werden. Der Nachweis der Stetigkeit erfährt eine kleine Variation, da dieses Mal Kriterium (d) von Lemma 2.5 wörtlich benutzt wird: Sei \mathcal{H}_k G_k -Modul und $u_k \in \mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$. Dann ist die Funktion

$$(g_1, g_2) \mapsto \langle u_1 \otimes u_2, (g_1, g_2)u_1 \otimes u_2 \rangle = \langle u_1, g_1u_1 \rangle \langle u_2, g_2u_2 \rangle$$

stetig und damit auch endliche Summen dieser Art, so daß als Menge S das algebraische Tensorprodukt genommen werden kann. \square

Mit Gleichung (3) wurde übrigens gezeigt, daß die Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, $u \mapsto u'$, ein antiunitärer G -Morphismus ist. Auch die bei der direkten Summe und beim Tensorprodukt auftretenden Abbildungen sind G -äquivariant, ebenso wie die in Satz 1.9 genannten Isomorphismen.

Die der direkten Summe und dem Tensorprodukt von G -Moduln entsprechenden Konstruktionen mit Darstellungen seien mit

$$\bigoplus_{k \in K} T_k \quad \text{und} \quad T_1 \otimes T_2$$

bezeichnet.

Sei G Gruppe und X G -Raum. Besitzt X ein G -invariantes Borelmaß μ , dann wirkt G unitär auf $L^2(\mu)$ vermöge

$$T(g)u = u \circ g^{-1},$$

denn für $u \in L^2(\mu)$ ist auch $u \circ g^{-1}$ wieder ein Element von $L^2(\mu)$, und es gilt

$$\langle T(g)v, T(g)u \rangle = \int (\bar{v} \circ g^{-1})(u \circ g^{-1}) d\mu = \int \bar{v}u d\mu = \langle v, u \rangle$$

aufgrund der G -Invarianz von μ .

Satz 2.7. *T ist eine Darstellung von G .*

Beweis. Zu beweisen ist noch die Stetigkeit von T . Gemäß Lemma 2.5 reicht es zu zeigen, daß die Abbildung

$$g \mapsto \langle u, T(g)u \rangle = \int \overline{u(x)} u(g^{-1}x) d\mu(x)$$

für $u \in C_c(X)$ bei $g = 1$ stetig ist, denn $C_c(X)$ liegt dicht in $L^2(\mu)$ [Satz 1.3]. Weil die Topologie von G eine abzählbare Basis besitzt, kann man sich dabei auf Folgenkonvergenz beschränken. Wähle eine kompakte Umgebung U von $1 \in G$ [G lokalkompakt]. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} f: U \times X &\rightarrow \mathbf{C}, \\ (g, x) &\mapsto \overline{u(x)} u(g^{-1}x), \end{aligned}$$

stetig und mit kompaktem Träger $\text{supp } f \subset U \times \text{supp } u$. Für jede Folge $g_n \rightarrow 1$ in U konvergiert $f(g_n, x)$ punktweise gegen $f(1, x)$ und wird von $\|u\|_\infty |u|$ dominiert, so daß der Satz von der dominierten Konvergenz das gewünschte Resultat liefert. \square

Beispiel 2.8. Sei μ ein (linksinvariantes) Haarmaß auf G . Dann ist die durch Linkstranslation induzierte (stetig auf $L^2(G)$ fortgesetzte) Wirkung L eine Darstellung von G in $L^2(G, \mu)$, die **reguläre Darstellung**. Der zugehörige G -Modul heißt **regulärer G -Modul**. Ist G kompakt, so ist auch R eine Darstellung.

Beispiel 2.9. Die Wirkung einer kompakten Gruppe G auf einem homogenen Raum G/H liefert eine Darstellung von G in $L^2(G/H)$. (Weil bei kompakten Gruppen das Maß auf der Gruppe und auf homogenen Räumen kanonisch ist, wird es nicht extra bezeichnet.)

Analog zu einem G -Raum ist eine **G -Mannigfaltigkeit** eine Mannigfaltigkeit mit glatter Wirkung einer Liegruppe G .

Beispiel 2.10. Sei G Liegruppe und M Riemannsche G -Mannigfaltigkeit mit G -invarianter Metrik. Integration bezüglich der durch die Metrik bestimmten Riemannschen Dichte liefert ein G -invariantes Funktional auf $C_c(M)$ und damit ein G -invariantes Borelmaß μ (vgl. Beispiel 1.2) [μ invariant: μ ist durch $d\mu$ eindeutig bestimmt]. Also bekommt man eine Darstellung von G im Raum $L^2(M)$. (Auch hier unterbleibt die Angabe des durch die Metrik kanonisch bestimmten Maßes.)

Literatur: [BR77, §§5.1+2]

2.4 Die Gruppenalgebra

Bis zum Ende dieses Kapitels bezeichnen G und H kompakte Gruppen. Ausgenommen sind zwei Stellen in diesem Abschnitt, bei denen die Kompaktheit von G explizit nicht vorausgesetzt wird.

Zu einer endlichen Gruppe G betrachtet man den freien Vektorraum über G , die sogenannte Linearisierung $\mathbf{C}[G]$. Vermöge der Faltung

$$(a * b)(g) = \sum_{h \in G} a(h^{-1})b(hg)$$

wird $\mathbf{C}[G]$ zu einer Algebra mit Einselement, in der G durch

$$g \mapsto 1_{\{g\}}$$

eingebettet ist. Ziel dieses Abschnittes ist es, zu einer beliebigen kompakten Gruppe G eine Algebra zu erklären. Allerdings ist jetzt der freie Vektorraum über G viel zu groß und nimmt auch nicht auf die topologische Struktur von G Bezug, so daß sich die Frage nach der passenden Verallgemeinerung von $\mathbf{C}[G]$ stellt. Obwohl der natürliche Raum für die Faltung der Raum $L^1(G)$ ist, beschränke ich mich hier auf den Hilbertraum $L^2(G)$, der gleichzeitig der reguläre G -Modul ist. Dies genügt nicht nur für die Anwendungen (Sätze von Peter-Weyl), sondern ermöglicht auch ein besonders schönes Resultat, nämlich daß die Faltung zweier Elemente der Algebra stetig ist.

Wie stets bei Räumen mit normiertem Maß liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung die Abschätzung

$$\|a\|_1 = \int |a| d\mu = \langle 1, |a| \rangle \leq \|a\|_2$$

für $a \in L^2(G)$, so daß man insgesamt folgende Einbettungen, jeweils mit Norm 1, erhält:

$$C(G) \hookrightarrow L^2(G) \hookrightarrow L^1(G) \tag{4}$$

Für das nächste Lemma sei für $a \in L^2(G)$ die Notation

$$\tilde{a} = \bar{a} \circ \iota \in L^2(G), \quad \text{also} \quad \tilde{a}(g) = \overline{a(g^{-1})}$$

eingeführt [$\tilde{a} \in L^2(G)$: Invarianz des Haarmaßes]. Die Operation $a \mapsto \tilde{a}$ ist **involutiv**, erfüllt also $\tilde{\tilde{a}} = a$ für alle a , und antiunitär.

Definition und Lemma 2.11. Für $a, b \in L^2(G)$ definiert

$$(a * b)(g) = \int a(h^{-1})b(hg) dh$$

eine stetige Funktion auf G , die **Faltung** $a * b$ von a und b , und es gilt

$$(a * b)(g) = \langle \tilde{a}, R(g)b \rangle.$$

Die Faltung ist eine stetige Abbildung $L^2(G) \times L^2(G) \rightarrow C(G)$ mit

$$\|a * b\|_\infty \leq \|a\|_2 \|b\|_2.$$

für alle $a, b \in L^2(G)$.

Beweis. Es gilt

$$(a * b)(g) = \int a(h^{-1})b(hg) dh = \int a(h^{-1})(R(g)b)(h) dh = \langle \tilde{a}, R(g)b \rangle.$$

Da $R(g)$ unitär ist, liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung die behauptete Abschätzung der Supremumsnorm von $a * b$. \square

Aufgrund der Invarianz des Haarmaßes unter Translationen und Inversion schreibt sich die Faltung alternativ als

$$(a * b)(g) = \int a(h^{-1})b(hg) dh = \int a(gh^{-1})b(h) dh = \int a(h)b(h^{-1}g) dh = \int a(gh)b(h^{-1}) dh.$$

Wegen der Stetigkeit der Einbettung $C(G) \hookrightarrow L^2(G)$ folgt aus dem letzten Lemma auch die Abschätzung

$$\|a * b\|_2 \leq \|a\|_2 \|b\|_2.$$

Insbesondere ist die Faltung als Abbildung nach $L^2(G)$ stetig. Als nächstes werden wir zeigen, daß der Raum $L^2(G)$ auf diese Weise zu einer Algebra im folgenden Sinne wird.

Definition. Eine involutive Banachalgebra oder ***-Algebra** ist eine assoziative Algebra A (nicht notwendig mit Einselement) mit einer Operation $*$ (Involution) und Norm $\|\cdot\|$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (a) $(A, \|\cdot\|)$ ist Banachraum,
- (b) $\forall a, b \in A \quad \|ab\| \leq \|a\| \|b\|$,
- (c) $*$ ist antilinear, isometrisch und involutiv,
- (d) $\forall a, b \in A \quad (ab)^* = b^* a^*$,

Ein Morphismus involutiver Banachalgebren oder kurz ***-Morphismus** ist ein stetiger Algebrenmorphismus ϕ mit $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ für alle $a \in A$. Ein ***-Isomorphismus** ist ein *-Morphismus mit stetigem Inversen.

Satz und Definition 2.12. *Der Raum $L^2(G)$ mit der Faltungsoperation und der Involution $a \mapsto \tilde{a}$ ist eine *-Algebra, die Gruppenalgebra.*

Beweis. Nachzuweisen sind noch die Assoziativität und Punkt (d) der Definition einer *-Algebra.

assoziativ: Seien $a, b, c \in L^2(G)$. Wegen Fubini und der Invarianz des Haarmaßes gilt

$$\begin{aligned} (a * (b * c))(g) &= \int a(gh^{-1})(b * c)(h) dh = \iint a(gh^{-1})b(hk^{-1})c(k) dk dh \\ &= \iint a(gk^{-1}h^{-1})b(h)c(k) dh dk = \int (a * b)(gk^{-1})c(k) dk = ((a * b) * c)(g). \end{aligned}$$

(d): Für $a, b \in L^2(G)$ ist

$$\widetilde{a * b}(g) = \overline{(a * b)(g^{-1})} = \int \overline{a(h^{-1})b(hg^{-1})} dg = \int \tilde{a}(h)\tilde{b}(gh^{-1}) dg = (\tilde{b} * \tilde{a})(g). \quad \square$$

Falls G eine endliche Gruppe ist, besitzt die Algebra $L^2(G)$ ein Einselement, und G ist kanonisch in $\mathbf{C}[G]$ eingebettet. Man kann zeigen, daß die Existenz der Eins auch hinreichend für die Endlichkeit der Gruppe ist [NŠ82, Sec. IV.3.1, Prop. I]. Ihr Fehlen macht es gerade nötig, bei den Beweisen von Sätzen über Darstellungen kompakter Gruppen neue Wege zu gehen, obwohl die Resultate Verallgemeinerungen von solchen endlicher Gruppen sind.

Auch der Raum $B(\mathcal{H})$ aller beschränkten linearen Operatoren in einem Hilbertraum \mathcal{H} mit der Komposition von Abbildungen, der Operatornorm und der Adjunktion als Involution ist eine *-Algebra.² Das ermöglicht eine kurze Definition einer Darstellung einer *-Algebra.

Definition. Eine **Darstellung einer *-Algebra** A in \mathcal{H} ist ein *-Morphismus $T: A \rightarrow B(\mathcal{H})$. Ein **A-Modul** ist ein Hilbertraum \mathcal{H} , der algebraischer A-Modul ist mit stetiger Operation $(a, u) \mapsto au$ derart, daß a^* der zu a adjungierte Operator in \mathcal{H} ist. Ein **A-Morphismus** zwischen zwei A-Moduln \mathcal{H} und \mathcal{I} ist ein $B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{I})$, das mit den A-Operationen vertauscht, also $Ba = aB$ für alle $a \in A$ erfüllt.

Bei Gruppendarstellungen haben wir die G -Invarianz des Skalarproduktes von G -Moduln gefordert, damit sich die Begriffe „Modul“ und „Darstellung“ entsprechen. Diese Entsprechung ergibt sich für Algebren ohne weitere Voraussetzung, denn eine *bilineare* Abbildung $s: A \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist genau dann stetig, wenn die zugehörige Abbildung $A \rightarrow B(\mathcal{H})$, $a \mapsto s(a, \cdot)$, stetig ist [s stetig $\Leftrightarrow \exists M > 0 \forall a \in A, u \in \mathcal{H} \quad \|s(a, u)\| \leq M\|a\| \|u\|$].

²Da zusätzlich die Identität $\|A^*A\| = \|A\|^2$ für alle $A \in B(\mathcal{H})$ gilt, handelt es sich hierbei sogar um eine sogenannte C^* -Algebra.

Bei einer endlichen Gruppe G erhält man eine Darstellung von $\mathbf{C}[G]$ aus einer von G durch Gewichtung der G zugeordneten Automorphismen von \mathcal{H} mittels $a \in \mathbf{C}[G]$,

$$T(a) = \sum_{g \in G} a(g)T(g).$$

Wir definieren die naheliegende Verallgemeinerung auch für nicht kompakte Gruppen, weil wir im Zusammenhang mit Darstellungen von Liegruppen in Abschnitt 3.2 darauf zurückgreifen werden.

Definition. Zu einer Darstellung T einer nicht notwendig kompakten Gruppe G in \mathcal{H} und $a \in L^1(G, \mu)$ sei der Operator $T(a)$ durch

$$T(a)u = \int a(g)T(g)u \, dg$$

für $u \in \mathcal{H}$ gegeben.

(Zur Integration vektorwertiger Funktionen siehe [Lan93, Ch. VI].) $T(a)$ ist wohldefiniert, denn die Stetigkeit von T sichert die μ -Meßbarkeit des Integranden, und die Abschätzung

$$\int \|a(g)T(g)u\| \, dg = \|u\| \int |a(g)| \, dg = \|a\|_1 \|u\| \quad (5)$$

beweist, daß $a(g)T(g)u$ integrabel ist, und zudem $T(a) \in B(\mathcal{H})$ mit $\|T(a)\| \leq \|a\|_1$. Also kann man T als stetige lineare Abbildung $L^1(G, \mu) \rightarrow B(\mathcal{H})$ mit Norm ≤ 1 auffassen. Bei kompaktem G ist T auch eine stetige Abbildung $L^2(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$ mit Norm ≤ 1 . Auch die übrigen Kriterien einer $*$ -Darstellung überprüft man leicht:

Satz 2.13. *Jede Darstellung T von G in \mathcal{H} liefert eine ebenfalls mit T bezeichnete Darstellung der Gruppenalgebra $L^2(G)$. Dabei sind G -Morphismen gleichzeitig $L^2(G)$ -Morphismen und G -Untermoduln $L^2(G)$ -Untermoduln.*

Beweis. Seien $a, b \in L^2(G)$ und $u, v \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(a * b)u &= \int (a * b)(g)T(g)u \, dg = \iint a(gh^{-1})b(h) \, dh T(g)u \, dg = \iint a(gh^{-1})b(h)T(g)u \, dg \, dh \\ &= \iint a(g)b(h)T(gh)u \, dg \, dh = \int a(g)T(g)T(b)u \, dg = T(a)T(b)u, \end{aligned}$$

und die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle T(a)u, v \rangle &= \int \overline{a(g)} \langle T(g)u, v \rangle \, dg = \int \overline{a(g)} \langle u, T(g^{-1})v \rangle \, dg \\ &= \int \tilde{a}(g) \langle u, T(g)v \rangle \, dg = \langle u, T(\tilde{a})v \rangle \end{aligned}$$

beweist $T(a)^* = T(\tilde{a})$. Also ist T eine Darstellung von $L^2(G)$. Jeder G -Morphismus $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$ ist $L^2(G)$ -Morphismus, denn mit der Bezeichnung S für die Darstellung in \mathcal{I} gilt

$$BT(a)u = B \int a(g)T(g)u \, dg = \int a(g)BT(g)u \, dg = \int a(g)S(g)Bu \, dg = S(a)Bu.$$

Weil die Orthogonalprojektion auf einen Untermodul G -Morphismus ist, folgt damit auch die letzte Behauptung. \square

Es stellt sich die Frage, ob man – wie bei endlichen Gruppen – den hier beschriebenen Prozeß auch umkehren, also zu einer Darstellung der Gruppenalgebra (in eindeutiger Weise) eine Darstellung der Gruppe erklären kann. In dieser Form ist die Frage zu verneinen. Weil die Algebra $L^2(G)$ im allgemeinen kein Einselement besitzt, kann man an einen $*$ -Morphismus, also insbesondere an eine Darstellung T keine Bedingung der Gestalt $T(1) = 1 \in B(\mathcal{H})$ stellen. Nach unserer Definition ist daher auch die triviale Abbildung $T = 0$ eine Darstellung der Gruppenalgebra. Es ist nicht schwer einzusehen, daß eine Darstellung T von G niemals die Algebrendarstellung $T = 0$ liefert. (Vergleiche die Bemerkung im Anschluß an Satz 3.10.) Beschränkt man sich auf sogenannte nichtsinguläre Algebrendarstellungen, bei denen zu jedem $u \in \mathcal{H}$ ein $a \in L^2(G)$ existiert mit $T(a)u \neq 0$, dann erhält man wie für endliche Gruppen eine Bijektion zwischen Gruppendarstellungen und Gruppenalgebrendarstellungen. Der Beweis ist in [NŠ82, Sec. IV.3.2] (mit der Wahl von $L^1(G)$ als Gruppenalgebra) ausgeführt.

Abschließend sei in diesem Abschnitt noch weitere wichtige Eigenschaften der Faltung im $L^2(G)$ erwähnt.

Lemma 2.14. Für jedes $u \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung

$$L^2(G) \rightarrow \mathcal{H}, \quad a \mapsto T(a)u,$$

ein G -Morphismus des regulären Moduls in den Modul \mathcal{H} ; als Formel

$$T(L(g)a) = T(g)T(a)$$

für alle $g \in G$ und $a \in L^2(G)$. Diese Gleichung gilt ohne Voraussetzung der Kompaktheit von G für alle $a \in L^1(G, \mu)$. Bei kompaktem G gilt zusätzlich für alle $b \in L^2(G)$

$$T(R(g)b) = T(b)T(g^{-1}).$$

Beweis. Wegen der Linksinvarianz des Haarmaßes ist

$$\begin{aligned} T(L(g)a)u &= \int (L(g)a)(h)T(h)u \, dh = \int a(g^{-1}h)T(h)u \, dh = \int a(h)T(gh)u \, dh \\ &= T(g) \int a(h)T(h)u \, dh = T(g)T(a)u. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung rechnet man analog

$$\begin{aligned} T(R(g)b)u &= \int (R(g)b)(h)T(h)u \, dh = \int b(hg)T(h)u \, dh = \int b(h)T(hg^{-1})u \, dh \\ &= \int b(h)T(h)T(g^{-1})u \, dh = T(b)T(g^{-1})u, \end{aligned}$$

weil bei kompaktem G das Haarmaß auch rechtsinvariant ist. \square

Die G -Modulstruktur des regulären Moduls liefert nach Satz 2.13 eine $L^2(G)$ -Modulstruktur zusätzlich zur vorhandenen vermögte Faltung. Beide sind identisch.

Lemma 2.15. Für alle $a, b \in L^2(G)$ ist

$$a * b = L(a)b.$$

Insbesondere ist die Funktionen $L(a)b$ immer stetig.

Beweis. Für alle $c \in L^2(G)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle c, L(a)b \rangle &= \int a(g)\langle c, L(g)b \rangle \, dg = \int a(g) \int \overline{c(h)}b(g^{-1}h) \, dh \, dg \\ &= \int \int \overline{c(h)}a(g)b(g^{-1}h) \, dg \, dh = \int \overline{c(h)} \int a(g^{-1})b(gh) \, dg \, dh \\ &= \int \overline{c(h)}(a * b)(h) \, dh = \langle c, a * b \rangle, \end{aligned}$$

was zur Behauptung äquivalent ist. \square

Für den nächsten Satz sei an den Begriff des **kompakten Operators** erinnert: Ein linearer Operator zwischen normierten Räumen heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen in solche überführt, deren Abschluß kompakt ist (solche Mengen werden **präkompakt** genannt). Kompakte Operatoren sind immer stetig. Für die Präkompaktheit einer Teilmenge eines Raumes stetiger Funktionen gibt es ein einfaches Kriterium:

Satz 2.16 (Arzelà-Ascoli). Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $V \subset C(X)$ (mit Supremumsnorm) genau dann präkompakt, wenn V beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Dabei heißt V **gleichgradig stetig**, wenn zu jedem $x \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U \subset X$ von x derart existiert, daß für alle $y \in U$ und alle $f \in V$ $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ ist. Für den Beweis siehe etwa [Lan93, §III.3]. (Man beachte, daß der dort für metrische Räume geführte Beweis für beliebige topologische Räume gültig ist.)

Satz 2.17. Für $a \in L^2(G)$ ist der Operator $L(a)$ kompakt.

Beweis. Wir zeigen sogar die Kompaktheit von $L(a): L^2(G) \rightarrow C(G)$ (wohldefiniert und stetig: letztes Lemma), dann folgt die von $L(a): L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ aus der Stetigkeit der Einbettung $C(G) \hookrightarrow L^2(G)$. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli genügt der Nachweis, daß für beschränktes $V \subset L^2(G)$ die Menge $L(a)V \subset C(G)$ gleichgradig stetig ist.

Doch das folgt aus dem letzten Lemma und der Definition der Faltung: Sei etwa $\|b\|_2 < 1$ für alle $b \in V$, ein $\epsilon > 0$ gegeben und U eine symmetrische Umgebung der $1 \in G$ mit $\|R(g)\tilde{a} - \tilde{a}\|_2 < \epsilon$ für alle $g \in U$. Dann gilt für $h \in Ug$

$$|(L(a)b)(h) - (L(a)b)(g)| = |(a*b)(h) - (a*b)(g)| = |\langle R(h^{-1})\tilde{a} - R(g^{-1})\tilde{a}, b \rangle| \leq \|R(hg^{-1})\tilde{a} - \tilde{a}\|_2 \|b\|_2 < \epsilon.$$

Also ist $L(a)V$ sogar gleichmäßig gleichgradig stetig.³ \square

Literatur: [BtD85, §III.2]

2.5 Orthogonalitätsrelationen

Um die Sätze von Peter-Weyl im nächsten Abschnitt beweisen zu können, benötigen wir ein letztes Hilfsmittel.

Satz 2.18 (Orthogonalitätsrelationen). Seien U und V endlichdimensionale einfache G -Moduln. Dann gilt für alle $u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$

$$\int \overline{\langle v_2, gv_1 \rangle} \langle u_2, gu_1 \rangle dg = \begin{cases} \frac{1}{\dim U} \overline{\langle v_2, u_2 \rangle} \langle v_1, u_1 \rangle & U = V \\ 0 & U \neq V \end{cases}.$$

Beweis. Man hat für beliebige endlichdimensionale G -Moduln U, V eine lineare Abbildung

$$\text{Hom}(V, U) \rightarrow \text{Hom}_G(V, U), \quad f \mapsto \int gf dg.$$

(gf ist die Abbildung $g \circ f \circ g^{-1}$.) Sind U, V einfach, folgt daraus

$$\int gf dg = \begin{cases} \frac{1}{\dim U} \text{tr } f & U = V \\ 0 & U \neq V \end{cases},$$

denn nach Schur ist $\text{Hom}_G(V, U) = 0$, falls $U \neq V$ ist, und im Falle $U = V$ muß $\int gf dg = \lambda \text{id}$ für ein $\lambda \in \mathbf{C}$ sein. Wegen $\text{tr}(gf) = \text{tr}(g \circ f \circ g^{-1}) = \text{tr } f$ ist

$$\lambda \dim U = \text{tr } \lambda = \int \text{tr}(gf) dg = \int \text{tr } f dg = \text{tr } f.$$

Jetzt wählt man $f = \langle v_1, \cdot \rangle u_1$, d. h. $f(v) = \langle v_1, v \rangle u_1$. Dann gilt

$$\overline{\langle v_2, gv_1 \rangle} \langle u_2, gu_1 \rangle = \langle v_1, g^{-1}v_2 \rangle \langle u_2, gu_1 \rangle = \langle u_2, (gf)(v_2) \rangle.$$

Integration liefert also

$$\int \overline{\langle v_2, gv_1 \rangle} \langle u_2, gu_1 \rangle dg = \left\langle u_2, \left(\int gf dg \right) (v_2) \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\dim U} \langle u_2, v_2 \rangle \text{tr } f & U = V \\ 0 & U \neq V \end{cases},$$

was das gewünschte Resultat ist, denn bei $U = V$ ist $\text{tr } f = \langle v_1, u_1 \rangle$. \square

³Das ist kein Zufall, sondern liegt an der Kompaktheit von G . Ebenso wie eine stetige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum X notwendig gleichmäßig stetig ist, muß eine gleichgradig stetige Teilmenge von $C(X)$ schon gleichmäßig gleichgradig stetig sein.

Definition. Für einen endlichdimensionalen G -Modul V mit zugehöriger Darstellung T heißt

$$\chi_V: G \rightarrow \mathbf{C}, \quad g \mapsto \operatorname{tr} T(g),$$

der **Charakter** von V . Man bezeichnet χ_V als **irreduzibel**, falls V einfach ist. Die Menge der irreduziblen Charaktere einer Gruppe G sei $X(G)$.

Der Charakter χ_V ist eine stetige Klassenfunktion auf G . Wie im Falle endlicher Gruppen (und mit identischen Beweisen) gelten die Beziehungen

- (a) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$,
- (b) $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$,
- (c) $\chi_{V'} = \chi_V \circ \iota$ (V' ist der Dualraum von V),
- (d) $\chi_V(1) = \dim V$.

Da die Darstellung unitär ist, gilt außerdem

$$(e) \quad \tilde{\chi}_V = \chi_V, \quad \text{also} \quad \chi_{V'} = \bar{\chi}_V,$$

denn $\tilde{\chi}_V(g) = \overline{\operatorname{tr} T(g^{-1})} = \operatorname{tr} T^*(g^{-1}) = \operatorname{tr} T(g) = \chi(g)$.

Korollar 2.19. Seien U und V zwei nichtisomorphe endlichdimensionale einfache G -Moduln mit zugehörigen unitären Matrixdarstellungen $[s_{ij}]$ und $[t_{ij}]$ und Charakteren χ_U, χ_V . Dann gelten für alle i, j, k und l :

- (a) $s_{ij} * s_{kl} = \frac{1}{\dim U} \delta_{jk} s_{il}, \quad s_{ij} * t_{kl} = 0.$
- (b) $\chi_U * s_{kl} = s_{kl} * \chi_U = \frac{1}{\dim U} s_{kl}, \quad \chi_U * t_{kl} = t_{kl} * \chi_U = 0.$
- (c) $\chi_U * \chi_U = \frac{1}{\dim U} \chi_U, \quad \chi_U * \chi_V = 0.$

Beweis. (a) Es ist

$$(s_{ij} * t_{kl})(g) = \int s_{ij}(gh^{-1})t_{kl}(h) dh = \sum_m s_{im}(g) \int \overline{s_{jm}(h)} t_{kl}(h) dh,$$

wobei man

$$s_{ij}(gh^{-1}) = \sum_m s_{im}(g) s_{mj}(h^{-1}) = \sum_m s_{im}(g) \overline{s_{jm}(h)}$$

ausnutzt [Gruppenmorphismus und Unitarität]. Jetzt wendet man die Orthogonalitätsrelationen an.

(b)+(c) Man schreibt $\chi_U = \sum_i s_{ii}$, $\chi_V = \sum_k t_{kk}$ und benutzt (a). □

Ersetzt man Summation durch Integration bezüglich des Haarmaßes, so überträgt sich auch der Beweis der Formel

$$\langle \chi_U, \chi_V \rangle = \dim \operatorname{Hom}_G(U, V)$$

auf kompakte Gruppen, und damit auch die verschiedenen Korollarien für *endlichdimensionale* G -Moduln [endlichdimensionale G -Moduln sind halbeinfach]. Für zwei solche Moduln U, V gelten:

- (a) Für U, V einfach ist $\langle \chi_V, \chi_U \rangle = \begin{cases} 1 & U \simeq V \\ 0 & U \not\simeq V \end{cases}$.
- (b) Für U einfach ist $\operatorname{mult}_{[U]} V = \langle \chi_U, \chi_V \rangle$.
- (c) U einfach $\iff \|\chi_U\| = 1 \iff U'$ einfach.
- (d) Eine Darstellung ist bis auf Isomorphie durch ihren Charakter bestimmt.

Literatur: [BtD85, §II.4]

2.6 Die Sätze von Peter und Weyl

Definition. Eine Funktion $a \in C(G)$ heißt **Matrixelement** (oder *representative function*), wenn es zwei Vektoren u, v eines endlichdimensionalen G -Moduls derart gibt, daß $a(g) = \langle v, gu \rangle$ für alle $g \in G$ ist.

Isomorphe endlichdimensionale G -Moduln liefern die gleichen Matrixelemente. Im folgenden wird oft benutzt werden, daß die Menge der Matrixelemente von G eine unter Konjugation abgeschlossene Algebra bildet. [Die Summe zweier Matrixelemente ist ein solches der direkten Summe, das Produkt eines vom Tensorprodukt und das Konjugierte eines Matrixelementes eines vom dualen Modul.] Das kann man ausnutzen, um den Approximationssatz von Peter-Weyl auf eine andere Art zu beweisen. Siehe dazu die Bemerkungen im Anschluß den Beweis.

Approximationssatz 2.20 (Peter-Weyl). *Die Matrixelemente liegen bezüglich der Supremumsnorm dicht in $C(G)$.*

Entscheidend für den Beweis dieses Satzes ist der Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren, demzufolge ein solcher Operator A als in Operatornorm unbedingt konvergente Reihe

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda$$

geschrieben werden kann, wobei P_λ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum zum (reellen) Eigenwert λ ist. Die Bilder der P_λ sind paarweise orthogonale Unterräume, deren direkte Summe der ganze Hilbertraum ist, und für $\lambda \neq 0$ endlichdimensional [Wer95, Kor. VI.3.3].

Beweis (des Approximationssatzes). (i) Jedes $a \in C(G)$ läßt sich beliebig genau durch (stetige) Funktionen $L(b)a$ mit $b \in C(G)$, $\tilde{b} = b$, approximieren:⁴ Weil a gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine symmetrische Umgebung U von $1 \in G$ mit $g \in Uh \Rightarrow |a(g) - a(h)| \leq \epsilon$. Nach dem Urysohnschen Lemma existiert eine stetige, nichtnegative Funktion $c \neq 0$ auf G mit Träger in U [G normal]. Sei b das auf $\int b = 1$ normierte Vielfache von $c + \bar{c}$. Dann ist $\tilde{b} = b$ und wegen $\text{supp } b \subset U$

$$|(L(b)a)(g) - a(g)| = |(b * a)(g) - a(g)| = \left| \int b(gh^{-1})(a(h) - a(g)) dh \right| \leq \int b(gh^{-1})|a(h) - a(g)| dh \leq \epsilon$$

für alle $g \in G$ und damit $\|L(b)a - a\|_\infty \leq \epsilon$.

Also genügt es für den Beweis des Approximationssatzes zu zeigen, daß die Matrixelemente den Funktionen $L(b)a$ beliebig nahe kommen. Für die folgenden Beweisschritte bezeichne ich den regulären Modul genauer als linksregulären Modul, um ihn vom rechtsregulären Modul (Modulstruktur auf $L^2(G)$ vermöge R) zu unterscheiden.

(ii) Die Operatoren $L(b) \in B(L^2(G))$ mit $\tilde{b} = b$ sind kompakte, selbstadjungierte G -Endomorphismen des rechtsregulären Moduls: Alle Operatoren $R(g)$ sind Morphismen des linksregulären G -Moduls und damit auch des linksregulären $L^2(G)$ -Moduls [Satz 2.13]. Also sind die Operatoren $L(b)$ Morphismen des rechtsregulären G -Moduls. Die Kompaktheit von $L(b)$ wurde in Satz 2.17 bewiesen, die Selbstadjungiertheit folgt aus $\tilde{b} = b$ [L *-Morphismus].

(iii) Für $\lambda \neq 0$ enthält der Eigenraum $\text{eig}(L(b), \lambda)$ von $L(b)$ nur Matrixelemente: Die Eigenräume von $L(b)$ sind Untermoduln des rechtsregulären Moduls. Sie enthalten nur stetige Funktionen, denn $\text{eig}(L(b), \lambda) = \lambda^{-1}L(b)\text{eig}(L(b), \lambda)$, und sind endlichdimensional [$L(b)$ kompakt]. Definiert man die Abbildung $\text{eig}(L(b), \lambda)' \ni \tau: c \mapsto c(1)$, dann kann jedes $c \in \text{eig}(L(b), \lambda)$ in der Form $c(g) = \tau(R(g)c)$ geschrieben werden, also als Matrixelement.

(iv) Jedes $L(b)a$ kann in Supremumsnorm beliebig genau durch Matrixelemente approximiert werden: Gemäß dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren kann $L(b)$ als Reihe

$$L(b) = \sum_{\lambda \in \sigma_p(L(b))} \lambda P_\lambda$$

geschrieben werden, wobei P_λ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum zum Eigenwert λ ist. Schreibt man jetzt $a = \oplus_\lambda a_\lambda$, $a_\lambda \in \text{eig}(L(b), \lambda)$, dann ist $L(b)a = \oplus_{\lambda \neq 0} \lambda a_\lambda$ (Konvergenz in Supremumsnorm) [$L(b): L^2(G) \rightarrow C(G)$ stetig].

Damit ist der Satz bewiesen. □

⁴An dieser Stelle ist die Stetigkeit von b nicht wirklich nötig. Schaut man sich den Beweis an, so ließe er sich sogar etwas verkürzen, wenn man (bis auf Normierung) $b = 1_U$ setzte. Allerdings läßt sich die Theorie bis hierher – und weiter – entwickeln, indem man den Raum $L^2(G)$ als Vervollständigung von $C(G)$ unter dem kanonischen Skalarprodukt definiert, ohne genaue Kenntnis darüber zu haben, wie Elemente dieses Raumes konkret aussehen. Daher erscheint es mir angemessener, hier auf maßtheoretische Konzepte zu verzichten.

Mit diesem Resultat lassen sich jetzt recht einfach wichtige Aussagen über die Darstellungen kompakter Gruppen beweisen, etwa diejenige, daß die endlichdimensionalen einfachen Darstellungen von G die Punkte von G trennen: Zu jedem $g \neq 1$ existiert eine solche Darstellung T mit $T(g) \neq 1$. [Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es eine stetige Funktion a mit $a(g) \neq a(1)$. Der Approximationssatz liefert nun, daß dann auch ein Matrixelement b mit $b(g) \neq b(1)$ existiert.] Zu verwandten Resultaten sei auf [Rob83, Sec. I.4] verwiesen.

Alternativ zu dem hier geführten Beweis des Approximationssatzes kann man auch als erstes zeigen, daß die Matrixelemente die Punkte von G trennen (wobei man ebenfalls auf die Theorie kompakter selbstadjungierter Operatoren in Hilberträumen zurückgreift). Mit Hilfe des Satzes von Stone-Weierstraß folgt dann aus der Beobachtung, daß die Matrixelemente eine unter Konjugation abgeschlossene Algebra bilden, mit einem Schlage das gewünschte Resultat [Zel73, §31].

Der Raum $L^2(G)$ ist sowohl bezüglich der regulären Darstellung L als auch bezüglich R ein G -Modul. Da L und R miteinander vertauschen, kann man $L^2(G)$ als $G \times G$ -Modul auffassen vermöge

$$((g_1, g_2), a) \mapsto L(g_1)R(g_2)a = R(g_2)L(g_1)a.$$

Mit Hilfe des Approximationssatzes kann nun die Zerlegung von $L^2(G)$ in einfache Moduln durchgeführt werden.

Fundamentalsatz 2.21 (Peter-Weyl). *Sei \mathcal{U} eine Repräsentantensystem endlichdimensionaler, einfacher G -Moduln. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} L^2(G) &\leftarrow \bigoplus_{U \in \mathcal{U}} U' \otimes U, & (6) \\ (g \mapsto \sqrt{\dim U} \langle v, gu \rangle) &\leftarrow v' \otimes u \quad \text{für } u \in U, v' \in U' \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus von $G \times G$ -Moduln.

Dabei sind alle Räume $U' \otimes U$ als äußere Tensorprodukte $G \times G$ -Moduln und damit auch die direkte Summe [Satz 2.6]. Die Darstellung auf dem Faktor U' entspricht L , die auf U der Darstellung R . Die Wohldefiniertheit der Abbildung wird sich aus dem Beweis ergeben.

Beweis. (i) Sei ϕ die Einschränkung von (6) auf die algebraische direkte Summe $\bigoplus_{U \in \mathcal{U}}^a U' \otimes U$. Die Orthogonalitätsrelationen zeigen die Isometrie von ϕ . Folglich läßt sich ϕ auf $\bigoplus_{U \in \mathcal{U}} U' \otimes U$ fortsetzen; die Fortsetzung sei mit $\bar{\phi}$ bezeichnet.

(ii) Das Bild von ϕ sind die Matrixelemente von G : Jedes $\phi(v' \otimes u)$ ist Matrixelement von einem einfachen G -Modul, und damit sind alle Matrixelemente von einfachen G -Moduln in $\text{im } \phi$ enthalten [isomorphe G -Moduln liefern die gleichen Matrixelemente]. Die Summe solcher Vektoren ist dann ein Matrixelement auf der direkten Summe der entsprechenden Moduln, und jedes Matrixelement erhält man auf diese Art [Zerlegung des G -Moduls in einfache].

(iii) $\bar{\phi}$ $G \times G$ -Morphismus: Es reicht, dies für die Einschränkungen auf $U' \otimes U$ nachzuweisen. Da $\phi(U' \otimes U) \subset C(G)$ ist, kann man rechnen:

$$\begin{aligned} \phi((g_1, g_2)(v' \otimes u))(h) &= \phi((g_1 v') \otimes g_2 u)(h) = \sqrt{\dim U} \langle g_1 v', h g_2 u \rangle = \sqrt{\dim U} \langle v', g_1^{-1} h g_2 u \rangle \\ &= (L(g_1)R(g_2)\phi(v' \otimes u))(h) = ((g_1, g_2)\phi(v' \otimes u))(h). \end{aligned}$$

(iv) $\bar{\phi}$ surjektiv: Nach dem Approximationssatz liegen die Matrixelemente, also das Bild von ϕ , dicht in $C(G)$ bezüglich der Supremumsnorm. Damit liegen sie aber auch in L^2 -Norm dicht in $C(G)$ und folglich auch in $L^2(G)$ [Satz 1.3]. Da $\bar{\phi}$ isometrisch ist, ist es auch surjektiv. \square

Dieser Satz zeigt, daß der Raum $L^2(G)$ eine direkte Summe paarweise nichtisomorpher, endlichdimensionaler, einfacher $G \times G$ -Untermoduln ist, wobei jeder Isomorphietyp $[U]$ endlichdimensionaler, einfacher G -Moduln einen Summanden $\simeq U' \otimes U$ beisteuert [paarweise nichtisomorph, einfach: betrachte Charaktere]. Schränkt man die Darstellung zu L oder R (also einen Faktor von $G \times G$) ein, so zerlegt sich ein solcher Summand in $\dim U$ einfache G -Moduln. Man hat also im Vergleich zu endlichen Gruppen ganz analoge Verhältnisse, wobei entscheidend ist, daß in dieser Zerlegung keine unendlichdimensionalen einfachen G -Moduln auftreten – eine Eigenschaft, die letztlich in der Kompaktheit von G begründet ist. Nicht kompakte Gruppen können unendlichdimensionale irreduzible Darstellungen besitzen; ein physikalisch bedeutendes Beispiel dafür ist die (eigentliche) Lorentzgruppe und ihre universelle Überlagerung SL_2 .

Korollar 2.22. *Das Zentrum der Gruppenalgebra ist*

$$Z(L^2(G)) = \bigoplus_{\chi \in \mathbf{X}(G)} \mathbf{C}\chi.$$

Beweis. Korollar 2.19(b) zeigt, daß die Charaktere einfacher G -Moduln mit allen Matrixelementen vertauschen, also aufgrund der Stetigkeit der Faltung mit allen Elementen der Gruppenalgebra. Das beweist die eine Inklusion. Sei umgekehrt $a \in Z(L^2(G))$ mit Zerlegung $a = \oplus a_U$, $a_U \in U' \otimes U$, vermöge (6). Nun ist $a * b = a_U * b$ für ein Matrixelement b aus U , und die Faltung der Matrixelemente aus U ist bis auf Skalierung die gewöhnliche Matrixmultiplikation [Korollar 2.19(a)]. Wegen $Z(\text{End}(U)) = \mathbf{C} \text{id}$ ist a_U dann ein Vielfaches des Charakters χ_U . \square

Beispiel 2.23. Sei $G = U(1) \simeq SO(2) \approx S^1 \subset \mathbf{C}$. Da G abelsch ist, sind alle irreduziblen Darstellungen von G eindimensional [Schur] und daher mit den irreduziblen Charakteren identisch. (Es ist übrigens nicht schwer, mit dem Fundamentalsatz die Umkehrung zu zeigen.) Für jedes $\lambda \in \mathbf{N}$ ist

$$\psi_\lambda: G \rightarrow U(1), \quad z \mapsto z^\lambda,$$

eine Darstellung von G . Da die lineare Hülle der ψ_λ eine unter Konjugation abgeschlossene Algebra bildet, die Konstanten enthält [$\psi_0 = 1$] und die Punkte von G trennt [$\psi_1 = \text{id}$], gibt es keine weiteren irreduziblen Charaktere [Stone-Weierstraß]. Der Fundamentalsatz ist in diesem Falle nichts anderes als eine Reformulierung des aus der Theorie der Fourierreihen bekannten Resultates, daß die Funktionen ψ_λ eine Orthonormalbasis des Raumes $L^2(S^1)$ bilden.

Dieses Beispiel illustriert einen bemerkenswerten Punkt: Falls eine endlichdimensionale Darstellung U von G bereits die Punkte von G trennt (im Beispiel ψ_1), dann sind in den Tensorprodukten der Form

$$U^{\otimes m} \otimes U'^{\otimes n}, \quad m, n \in \mathbf{N},$$

bereits *alle* Isomorphieklassen endlichdimensionaler, einfacher Moduln vertreten. Der Beweis dieser Behauptung erfolgt wiederum mit dem Satz von Stone-Weierstraß: Die Matrixelemente von Tensorprodukten der angegebenen Gestalt bilden eine unter Konjugation abgeschlossene Unter algebra A von $C(G)$ (mit der gewöhnlichen Multiplikation), die die Punkte von G trennt [$U^{\otimes 1} \otimes U'^{\otimes 0}$] und die Konstanten enthält [$U^{\otimes 0} \otimes U'^{\otimes 0}$]. Gemäß dem Satz von Stone-Weierstraß liegt A dicht in $C(G)$ bezüglich der Supremumsnorm und damit auch dicht in $L^2(G)$. Folglich kann es keinen nicht in solchen Tensorprodukten auftretenden endlichdimensionalen, einfachen G -Modul geben, denn dessen Matrixelemente lägen im orthogonalen Komplement von A .

Wie schon bemerkt, prüft man mit Hilfe der Charaktere leicht nach, daß bei der Zerlegung von $L^2(G)$ in einfache $G \times G$ -Untermodule die einzelnen Summanden paarweise nichtisomorph und einfach sind. Allgemeiner gilt für G -Moduln U_1, U_2 und H -Moduln V_1, V_2 , alle endlichdimensional und einfach,

$$U_1 \otimes V_1 \simeq U_2 \otimes V_2 \iff U_1 \simeq U_2 \quad \text{und} \quad V_1 \simeq V_2.$$

Die so erhaltenen $G \times H$ -Moduln sind einfach, und alle einfachen $G \times H$ -Moduln erhält man so:

Korollar 2.24. *Seien \mathcal{U} und \mathcal{V} Repräsentantensysteme endlichdimensionaler, einfacher G - bzw. H -Moduln. Dann ist $\{U \otimes V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ ein Repräsentantensystem endlichdimensionaler, einfacher $G \times H$ -Moduln.*

Beweis. Zu zeigen ist noch die Vollständigkeit des Repräsentantensystems. Gemäß Satz 1.11 und dem Fundamentalsatz, angewandt auf G und H , ist

$$\begin{aligned} L^2(G \times H) &= L^2(G) \otimes L^2(H) = \left(\bigoplus_{U \in \mathcal{U}} U' \otimes U \right) \otimes \left(\bigoplus_{V \in \mathcal{V}} V' \otimes V \right) \\ &= \bigoplus_{(U,V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}} (U \otimes V)' \otimes (U \otimes V). \end{aligned}$$

Unter den angewandten kanonischen Isomorphismen wird $(u'_2 \otimes v'_2) \otimes (u_1 \otimes v_1) \in (U \otimes V)' \otimes (U \otimes V)$ auf das Matrixelement

$$(g, h) \mapsto \langle u_2, g u_1 \rangle \langle v_2, g v_1 \rangle = \langle u_2 \otimes v_2, g(u_1 \otimes v_1) \rangle$$

von $G \times H$ abgebildet, also wie in Abbildung (6). Weil die direkte Summe dieser $G \times H$ -Moduln bereits ganz $L^2(G \times H)$ ist, folgt aus dem Fundamentalsatz, daß $G \times H$ keine weiteren Isomorphieklassen endlichdimensionaler, einfacher Moduln besitzt. \square

Abschließend sei noch eine Beobachtung formuliert, die im nächsten Abschnitt benötigt wird. Dabei sei zu einen irreduziblen Charakter χ die stetige Funktion $e_\chi = \chi(1)\bar{\chi}$ definiert. ($\chi(1)$ ist die Dimension der zu χ gehörenden einfachen G -Moduln.)

Korollar 2.25.

- (a) *Der Operator $L(e_\chi)$ ist Orthogonalprojektion auf den (eindeutig bestimmten) endlichdimensionalen, einfachen $G \times G$ -Unterm modul von $L^2(G)$ mit Charakter $(g_1, g_2) \mapsto \chi(g_1)\bar{\chi}(g_2)$.*
 (b) *Für jedes $a \in L^2(G)$ ist*

$$a = \sum_{\chi \in X(G)} L(e_\chi)a.$$

Beweis. Gemäß den Orthogonalitätsrelationen für Charaktere (Korollar 2.19) ist für ein Matrixelement b eines endlichdimensionalen, einfachen G -Moduls mit Charakter ψ

$$L(e_\chi)b = \begin{cases} b & \chi = \psi \\ 0 & \chi \neq \psi \end{cases}.$$

Also ist (in der Notation des Beweises des Fundamentalsatzes mit $\chi = \chi_U$) $L(e_\chi)$ Orthogonalprojektion auf $\phi(U \otimes U')$. Dieses ist auch der einzige $G \times G$ -Unterm modul mit dem angegebenen Charakter: Nach Schur ist für jeden solchen Modul V

$$L(e_\psi)V = 0$$

für alle irreduziblen Charaktere $\psi \neq \chi$, weshalb V in $\phi(U \otimes U')$ enthalten ist, denn die direkte Summe der Bilder der $L(e_\chi)$ ist der ganze $L^2(G)$. Damit ist (a) bewiesen, und erneutes Anwenden des Fundamentalsatzes zeigt die zweite Behauptung. \square

Für einen irreduziblen Charakter χ_U ist $L(e_{\chi_U})$ die Projektion auf den Unterm modul der Matrixelemente aus U' bzw. in der Zerlegung (6) der Gruppenalgebra auf den Summanden $U \otimes U'$ (und nicht auf $U' \otimes U$).

Literatur: [BtD85, §III.3], [Puk67, §I.II.2], [Rob83, Sec. I.4]

2.7 Isotypische Zerlegung von G -Moduln

Die im letzten Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse über die reguläre Darstellung lassen sich ohne große Mühe auf beliebige G -Moduln erweitern.

Satz 2.26. *Für eine Darstellung T von G in \mathcal{H} gelten:*

- (a) *Die Operatoren $T(e_\chi)$ sind G -Projektionen auf paarweise orthogonale Untermodule $\mathcal{H}_\chi = \text{im } T(e_\chi)$.*
 (b) *Es gilt*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in X(G)} \mathcal{H}_\chi.$$

- (c) *\mathcal{H}_χ ist die Vereinigung aller χ -isotypischen endlichdimensionalen Untermodule von \mathcal{H} .*

Beweis. (a) G -Morphismen: Für jeden Charakter χ ist $L(g)\chi = R(g^{-1})\chi$ [χ Klassenfunktion, deshalb $(L(g)\chi)(h) = \chi(g^{-1}h) = \chi(hg^{-1}) = (R(g^{-1})\chi)(h)$], also [Lemma 2.14]

$$T(g)T(e_\chi) = T(L(g)e_\chi) = T(R(g^{-1})e_\chi) = T(e_\chi)T(g).$$

Orthogonalprojektionen: Das Korollar 2.19(c) liefert $T(e_\chi)T(e_\psi) = T(e_\chi * e_\psi) = 0$ für $\chi \neq \psi$ und $T(e_\chi)^2 = T(e_\chi)$. Aufgrund der Eigenschaft (e) von Charakteren unitärer Darstellungen (Abschnitt 2.5) sind die Operatoren $T(e_\chi)$ zudem selbstadjungiert [L *-Morphismus], also Orthogonalprojektionen auf paarweise orthogonale Unterräume.

- (b) Es ist zu zeigen, daß $V := \bigoplus_{\chi} \mathcal{H}_\chi$ ganz \mathcal{H} ist.

Sei $u \in V^\perp$. Dann ist die Funktion $a(g) = \langle u, T(g)u \rangle$ stetig und für $\chi \in X(G)$ gilt $[e_\chi \circ \iota = e_{\bar{\chi}}]$

$$(L(e_\chi)a)(g) = \int e_\chi(h^{-1})\langle u, T(hg)u \rangle dh = \langle u, \int e_{\bar{\chi}}(h)T(h)T(g)u dh \rangle = \langle u, T(e_{\bar{\chi}})T(g)u \rangle = 0,$$

da V^\perp G -stabil und $\bar{\chi}$ wie χ ein irreduzibler Charakter ist. Wenn nun aber alle $L(e_\chi)a = 0$ sind, ist $a = 0$ [Korollar 2.25(b)] und damit auch $\|u\|^2 = a(1) = 0$. Es folgt $\mathcal{H} = V$.

(c) Die Funktion e_χ liegt in dem χ -isotypischen endlichdimensionalen Untermodul $W_\chi = L(e_\chi)L^2(G)$ des regulären Moduls [Korollar 2.25(a)]. Weil die Abbildung

$$W_\chi \rightarrow \mathcal{H}, \quad a \mapsto T(a)v,$$

für jedes $v \in \mathcal{H}$ G -Morphismus ist [Lemma 2.14], liegt jedes $u = T(e_\chi)u \in \mathcal{H}_\chi$ in einem χ -isotypischen endlichdimensionalen Untermodul. Also ist \mathcal{H}_χ in der Vereinigung aller χ -isotypischen endlichdimensionalen Untermoduln enthalten.

Daraus folgt auch, daß für jeden endlichdimensionalen, einfachen Untermodul $W < \mathcal{H}$ mit Charakter χ die Projektion $T(e_\psi)W$ trivial ist für $\psi \neq \chi$ [Schur]. Wegen (b) ist dann aber W in \mathcal{H}_χ enthalten, womit die in (c) behauptete Gleichheit gezeigt ist. \square

Definition. Der Untermodul $\mathcal{H}_\chi = \text{im } T(e_\chi)$ heißt die χ -isotypische Komponente und

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in X(G)} \mathcal{H}_\chi$$

die isotypische Zerlegung von \mathcal{H} .

Korollar 2.27. Die isotypischen Komponenten eines Untermoduls $U < \mathcal{H}$ sind die Schnitte von U mit den isotypischen Komponenten von \mathcal{H} .

Beweis. Die Inklusion $U \cap \mathcal{H}_\chi \subset U_\chi$ folgt aus Satz 2.26(c). Betrachtet man die Einbettung $U \hookrightarrow \mathcal{H}$, muß nach Schur $U_\chi \subset \mathcal{H}_\chi$ sein. \square

Korollar 2.28. Sei \mathcal{H} G -Modul und $U < \mathcal{H}$ einfacher algebraischer Untermodul, also nicht notwendig abgeschlossen. Dann ist U endlichdimensional. Insbesondere sind einfache G -Moduln endlichdimensional.

Beweis. Sei χ irreduzibler Charakter mit $T(e_\chi)U \neq 0$. Dann ist U als algebraischer G -Modul zu einem algebraischen Untermodul V von \mathcal{H}_χ isomorph [U einfach, Schur]. Nach Punkt (c) des letzten Satzes ist jedes $v \in V$ in einem endlichdimensionalen Untermodul von \mathcal{H}_χ enthalten. Also ist U endlichdimensional [sonst wäre, falls $V \cap W \neq 0$ ist mit endlichdimensionalem W , $V \cap W$ zu einem endlichdimensionalen Untermodul von U isomorph]. \square

Ab jetzt können wir also auf das Attribut „endlichdimensional“ bei einfachen Moduln verzichten.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll kurz der wichtige Spezialfall der Funktionenräume auf homogenen Räumen behandelt werden. Die Projektion $p: G \rightarrow G/H$ ($H < G$ abgeschlossen) induziert eine isometrische G -Abbildung

$$i: L^2(G/H) \rightarrow L^2(G), \quad f \mapsto f \circ p,$$

in den regulären Modul. (Die Isometrie folgt aus der Transformationsformel für Bildmaße.) Da die Fasern von p gerade die (rechten) H -Bahnen sind, ist im i ein abgeschlossener Untermodul von $L^2(G)^H$ [abgeschlossen: i isometrisch]. Dabei faßt man $L^2(G)$ als $G \times H$ -Modul auf, so daß $L^2(G)^H$ G -Modul wird. Es gilt sogar im $i = L^2(G)^H$: Die isotypischen Komponenten von $L^2(G)^H$ sind die Schnitte von $L^2(G)^H$ mit den isotypischen Komponenten von $L^2(G)$ [Korollar 2.27], also gilt für einen irreduziblen Charakter χ

$$(L^2(G)^H)_\chi = (\text{im } L(e_\chi))^H.$$

Nun ist aber $\text{im } L(e_\chi) \subset C(G)$, so daß $(\text{im } L(e_\chi))^H$ sicher im Bild von i liegt. Aber dann gilt gleiches auch für die direkte Summe aller isotypischen Komponenten von $L^2(G)^H$ [im i abgeschlossen].

Wenn U einen einfachen G -Modul mit Charakter χ bezeichnet, hat man des weiteren

$$(L^2(G)^H)_\chi \simeq (U \otimes U')^H = U \otimes U'^H.$$

[Der Wirkung R auf $\text{im } L(e_\chi)$ entspricht in $U \otimes U'$ die Wirkung auf U' .] Also ist die Multiplizität von $[U]$ in $L^2(G/H)$ gleich der der trivialen Darstellung von H in U' . Da die aber gleich der der trivialen Darstellung in U ist [$\langle 1, \chi_{U'} \rangle_H = \langle 1, \chi_U \circ \iota \rangle_H = \langle 1, \chi_U \rangle_H$ wegen der Invarianz des Haarmaßes], ist insgesamt also gezeigt:

Satz 2.29. *Sei $H < G$ abgeschlossen und $p: G \rightarrow G/H$ Quotient bezüglich der Rechtswirkung. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} L^2(G/H) &= L^2(G)^H \\ f &\mapsto f \circ p \end{aligned}$$

isometrischer Isomorphismus von G -Moduln. Die Multiplizität einer einfachen Isomorphieklasse $[U]$ in $L^2(G/H)$ ist gleich der der trivialen Darstellung von H in U .

Die letzte Aussage ist ein Spezialfall des Reziprozitätssatzes von Frobenius, denn man kann $L^2(G/H)$ als die von der trivialen Darstellung von H auf G induzierte Darstellung auffassen. Wie für endliche Gruppen hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G U, V) = \mathrm{Hom}_H(U, \mathrm{res}_H^G V),$$

wenn man sich auf eine bestimmte Klasse von Abbildungen, die Hilbert-Schmidt-Operatoren, beschränkt. (Zur Definition von Hilbert-Schmidt-Operatoren sei auf die Bemerkungen am Ende von Abschnitt 1.2 verwiesen.) Mehr über induzierte Darstellungen in Hilberträumen findet man in [Rob83, Sec. I.8].

Literatur: [BtD85, §III.5], [Puk67, §I.II.3]

Kapitel 3

Darstellungen von Liegruppen und Liealgebren

In diesem Kapitel bezeichnet G eine Liegruppe.

3.1 G -Mannigfaltigkeiten

Die Kenntnis von glatten G -Wirkungen wird im nächsten Abschnitt von Bedeutung sein, um zu einer Darstellung einer Liegruppe eine Liealgebrendarstellung erklären zu können. Weil dieses Thema jedoch von unabhängigem Interesse ist und zum Beispiel in der klassischen Mechanik auch von großer Bedeutung, sei darauf etwas ausführlicher eingegangen.

Definition. Sei M eine G -Mannigfaltigkeit. Dann ist für $X \in LG$ das **Killingsche Vektorfeld** X_M auf M durch

$$X_M(x) = \left. \frac{d}{dt} \exp(tX)x \right|_{t=0} = T_1 a_x \cdot X$$

für $x \in M$ erklärt, wobei $a_x(g) = gx$ ist. Soll die G -Wirkung a explizit angegeben werden, so bezeichne ich das Killingsche Vektorfeld auch mit X_a .

Beispiel 3.1. Betrachtet man G als G -Mannigfaltigkeit vermöge der (Links-)Wirkungen l bzw. $r \circ \iota$, so überprüft man leicht die Identitäten

$$X_l = X^r \quad \text{und} \quad X_{r \circ \iota} = -X^l,$$

wobei X^l das durch X eindeutig bestimmte linksinvariante Vektorfeld auf G bezeichnet, also $X^l(g) = T_1 l(g) \cdot X$, und X^r das entsprechende rechtsinvariante Vektorfeld $X^r(g) = T_1 r(g) \cdot X$.

Beispiel 3.2. Sei U ein endlichdimensionaler (und damit glatter) G -Modul. Dann ist das Killingsche Vektorfeld X_U zu $X \in LG$ linear. Der zugehörige Endomorphismus ist $X \in \mathfrak{gl}(U)$.

Für den nächsten Satz sei an den Begriff der Lieableitung längs eines Vektorfeldes erinnert. Die **Liableitung** $Y[u] \in C^\infty(M)$ von $u \in C^\infty(M)$ längs des Vektorfeldes Y ist durch

$$Y[u](x) = T_x u \cdot Y(x) = du(Y)(x)$$

gegeben. Falls $Y = X_M$ ein Killingsches Vektorfeld ist, läßt sich das zu

$$X_M[u](x) = T_1(u \circ a_x) \cdot X = \left. \frac{d}{dt} u(\exp(tX)x) \right|_{t=0}$$

umformen. Die Menge $\mathcal{X}(M)$ der (glatten) Vektorfelder auf M ist nicht nur in kanonischer Weise Vektorraum, sondern auch (unendlichdimensionale) Liealgebra, indem man die Lieklammer zweier Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ durch

$$[X, Y][u] = X[Y[u]] - Y[X[u]] \tag{1}$$

für $u \in C^\infty(M)$ definiert. (Daß diese Gleichung eindeutig ein Vektorfeld auf M bestimmt und $\mathcal{X}(M)$ zu einer Liealgebra macht, ist ein Resultat der Analysis auf Mannigfaltigkeiten und z. B. in [AMR88, Sec. 4.2] bewiesen. Für das folgende reicht es, Gleichung (1) als reine Notationsvereinbarung zu betrachten.)

Satz 3.3. *Für eine G -Mannigfaltigkeit M ist die Zuordnung*

$$LG \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad X \mapsto -X_M,$$

ein Liealgebrenmorphismus.

Beweis. Die Linearität folgt aus der Definition von X_M . Da die Abbildung $X \mapsto X_M[u](x)$ linear ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
[X, Y]_M[u](x) &= (\text{ad}(X)Y)_M[u](x) = \frac{d}{ds} (\text{Ad}(\exp sX)Y)_M[u](x) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} u(\exp(sX) \exp(tY) \exp(-sX)x) \Big|_{s,t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} u(\exp(sX) \exp(tY)x) + \frac{\partial}{\partial s} u(\exp(tY) \exp(-sX)x) \right) \Big|_{s,t=0} \\
&= \frac{d}{dt} X_M[u](\exp(tY)x) \Big|_{t=0} + \frac{d}{ds} Y_M[u](\exp(-sX)x) \Big|_{s=0} \\
&= Y_M[X_M[u]](x) - X_M[Y_M[u]](x) = -[X_M, Y_M][u](x).
\end{aligned}$$

In der Rechnung wurde benutzt, daß $\text{Ad}(g)$ das Differential der Konjugation $\text{In}(g)$ mit g ist und ad das Differential von $\text{Ad}: G \rightarrow GL(LG)$. \square

Literatur: [AM78, Sec. 4.1]

3.2 Das Differential einer Liegruppendarstellung

Wie zu endlichdimensionalen Darstellungen einer Liegruppe G möchte man auch zu (stark stetigen, unitären) Darstellungen in beliebigen Hilberträumen durch Differentiation eine Darstellung der Liealgebra LG erhalten.

Definition. Sei \mathcal{H} Hilbertraum. Eine **Einparameteruntergruppe** T von $U(\mathcal{H})$ ist eine Darstellung von \mathbf{R} in \mathcal{H} , also ein stetiger Gruppenmorphismus $T: \mathbf{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$. Der **Generator** A von T ist der lineare Operator

$$\begin{aligned}
\text{dom}(A) &= \{u \in \mathcal{H} : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)u - u) \text{ existiert}\}, \\
Au &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)u - u).
\end{aligned}$$

Sei T Darstellung von G . Das **Differential** LT von T diejenige Abbildung, die jedem $X \in LG$ den Generator von $t \mapsto T(\exp tX)$ zuordnet.

Falls \mathcal{H} endlichdimensional ist, ist die Definition einer Einparameteruntergruppe zur üblichen äquivalent, denn dann ist T auch normstetig und damit Liemorphismus. Die sehr technische Definition der Generatoren deutet schon an, daß sich die Generatoren als im allgemeinen unbeschränkte (schiefadjungierte) Operatoren erweisen. Aus diesem Grund ist die Übertragung der Theorie der endlichdimensionalen Darstellungen mit gewissen technischen Schwierigkeiten verknüpft. Wir beginnen mit einer Beobachtung.

Lemma 3.4. Sei T Darstellung von G in \mathcal{H} . Dann gilt für alle $g \in G$ und $X \in LG$

$$LT(\text{Ad}(g)X) = \text{Ad}(T(g))LT(X).$$

Die Schiefadjungiertheit der Generatoren vorwegnehmend bezeichnet $\text{Ad}(T(g))$ die Konjugation mit dem unitären Operator $T(g)$ (vgl. Abschnitt 4.3).

Beweis. Da die Einparameteruntergruppen $T(\exp tX)$ und $T(\exp t \text{Ad}(g)X)$ durch $T(g)$ konjugiert sind,

$$T(\exp(t \text{Ad}(g)X)) = T(g(\exp tX)g^{-1}) = T(g)T(\exp tX)T(g)^{-1},$$

gilt entsprechendes auch für deren Generatoren. \square

Bevor wir auf weitere Eigenschaften der Generatoren eingehen, seien zunächst zwei Beispiele behandelt, die die Generatoren zu vertrauteren Objekten in Beziehung setzen.

Beispiel 3.5. Ein Falle einer endlichdimensionalen Darstellung von G ist LT das Differential des Lie-morphismus $G \rightarrow U(\mathcal{H})$, also

$$LT: LG \rightarrow u(\mathcal{H}).$$

Satz 3.6. Sei M eine G -Mannigfaltigkeit mit G -invariantem Borelmaß μ und T die Darstellung von G in $L^2(\mu)$. Dann liegt der Raum $C_c^\infty(M)$ im Definitionsbereich aller Generatoren $LT(X)$, $X \in LG$, und wird von all diesen Operatoren stabilisiert. Für $X \in LG$ und $u \in C_c^\infty(G)$ ist

$$LT(X)u = -X_M[u].$$

Beweis. Um den Mittelwertsatz auf die Funktion $t \mapsto (T(\exp tX)u)(x)$ anwenden zu können, bemerken wir zunächst, daß für alle $x \in M$ und $s \in \mathbf{R}$ der punktweise Limes

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} (T(\exp tX)u - T(\exp sX)u)(x) &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} (u(\exp(-tX)x) - u(\exp(-sX)x)) \\ &= -X_M[u](\exp(-sX)x) \end{aligned}$$

existiert und insbesondere für $s = 0$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger definiert. Nun ist die Konvergenz sogar gleichmäßig: Wähle zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $t \in (-\delta, \delta)$ und $x \in M$

$$|X_M[u](\exp(-tX)x) - X_M[u](x)| < \epsilon$$

ist [möglich, da $\text{supp } u$ kompakt]. Wegen

$$\frac{1}{t}(T(\exp tX)u - u)(x) = -X_M[u](\exp(-sX)x)$$

für ein s mit $|s| \leq |t| < \delta$ [Mittelwertsatz] ist dann

$$\left| \frac{1}{t}(T(\exp tX)u - u)(x) + X_M[u](x) \right| < \epsilon.$$

Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz und damit auch die Konvergenz in L^2 -Norm, was $LT(X)u = -X_M[u]$ beweist. Daraus folgt schließlich sofort, daß $C_c^\infty(M)$ von allen Generatoren stabilisiert wird. \square

Ein wesentliches Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, daß auch für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} eine Bijektion zwischen den Einparameteruntergruppen von $U(\mathcal{H})$ und den schiefadjungierten Operatoren $u(\mathcal{H})$ existiert (Satz von Stone, Korollar 3.11). Wir beginnen mit einer Existenzaussage, bei der wir auf den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren zurückgreifen.

Satz 3.7. Zu jedem schiefadjungierten Operator A in einem Hilbertraum \mathcal{H} existiert genau eine Einparameteruntergruppe T von $U(\mathcal{H})$ mit Generator A . Der Definitionsbereich von A ist T -stabil, und für alle $u \in \text{dom}(A)$ gilt

$$AT(t)u = T(t)Au. \quad (2)$$

Weiterhin ist zu $u \in \text{dom}(A)$ die Funktion $w(t) = T(t)u$ die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}w(t) = Aw(t), \quad w(0) = u.$$

Dabei kommen als Lösungen natürlich nur differenzierbare Funktionen mit $w(t) \in \text{dom}(A)$ für alle t in Betracht.

Beweis. Gemäß dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren können wir $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ annehmen und $A = M_{if}$ für eine reellwertige, meßbare Funktion f .

Wir werden zunächst zeigen, daß

$$T(t) = M_{e^{itf}}$$

eine Einparameteruntergruppe von $U(\mathcal{H})$ mit Generator A ist. Der Operator $T(t)$ ist gemäß Satz 1.19 unitär, da $|e^{itf(x)}| = 1$ ist für alle $x \in X$. Die Abbildung $t \rightarrow T(t)$ ist algebraischer Gruppenmorphismus, und die Stetigkeit erschließt man mit dem Satz über die dominierte Konvergenz. Mit der Bezeichnung B für den Generator von T ist $A = B$ zu zeigen.

⊃: Für $u \in \text{dom}(B)$ und $t_n \rightarrow 0$ konvergiert

$$v_n = \frac{1}{t_n}(e^{it_n f} - 1)u \rightarrow Bu \quad \text{in } L^2\text{-Norm.}$$

Folglich konvergiert eine Teilfolge der v_n fast überall gegen Bu [Lan93, Ch. VII, Th. 1.4]. Weil v_n auch punktweise gegen ifu konvergiert, ist $Bu = ifu$, damit $u \in \text{dom}(A)$ und $Au = Bu$.

⊂: Sei $u \in \text{dom}(A)$, also $fu \in L^2(X, \mu)$. Die punktweise Konvergenz $v_n \rightarrow ifu$ wird von der Funktion $|fu| \in L^2(X, \mu)$ dominiert, weil für jedes $s \in \mathbf{R}$ die Ungleichung $|e^{is} - 1| = |2ie^{is/2} \sin \frac{s}{2}| \leq |s|$ gilt [setze $s = tf(x)$ und dividiere durch t]. Also liegt Konvergenz im L^2 -Sinne vor, woraus $u \in \text{dom}(B)$ folgt.

Für $u \in \text{dom}(A)$ zeigt

$$T(t)Au = T(t) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}(T(s)u - u) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}(T(s)T(t)u - T(t)u) = AT(t)u$$

die T -Stabilität von $\text{dom}(A)$ und Gleichung (2).

Damit ist auch klar, daß die Funktion $w(t) = T(t)u$ Lösung des angegebenen Anfangswertproblems ist. Die Eindeutigkeit der Lösung ist wegen der Linearität der Differentialgleichung nur für $u = 0$ zu zeigen. Doch in diesem Fall ergibt sie sich daraus, daß für jede Lösung $w(t)$ des Anfangswertproblems die Norm $\|w(t)\|$ konstant sein muß aufgrund der Schiefhermitizität von A :

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = \left\langle \frac{d}{dt}w(t), w(t) \right\rangle + \left\langle w(t), \frac{d}{dt}w(t) \right\rangle = 2 \text{Re} \langle w(t), Aw(t) \rangle = 0.$$

Daraus folgt jetzt, daß jede Einparameteruntergruppe S mit Generator A auf $\text{dom}(A)$ mit T für jedes $t \in \mathbf{R}$ übereinstimmt, denn für jedes $u \in \text{dom}(A)$ ist auch $S(t)u$ Lösung des Anfangswertproblems. Weil $\text{dom}(A)$ dicht liegt in \mathcal{H} , stimmen $S(t)$ und $T(t)$ überall überein. \square

In Analogie zu der Liegruppe $U(\mathcal{H})$ für endlichdimensionales \mathcal{H} bezeichnet man die eindeutig bestimmte Einparameteruntergruppe mit Generator $A \in u(\mathcal{H})$ durch

$$\exp(tA).$$

Nelsonsches Lemma 3.8. *Sei T eine Einparameteruntergruppe von $U(\mathcal{H})$ mit Generator A und D ein in $\text{dom}(A)$ enthaltener, T -stabiler, dichter Unterraum. Dann ist A ein schiefadjungierter Operator mit determinierendem Bereich D , und für alle $t \in \mathbf{R}$ gilt $T(t) = \exp(tA)$.*

Beweis. Die Einschränkung B von A auf D ist schiefhermitesch, denn für $u, v \in D$ ist

$$\langle v, Bu \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle v, T(t)u - u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle T(-t)v - v, u \rangle = -\langle Bv, u \rangle.$$

Als nächstes bestimmen wir den Kern von $B^* - 1$. Sei $v \in \ker(B^* - 1)$ und $u \in D$. Dann gilt $[T(t)u \in D]$

$$\frac{d}{dt} \langle v, T(t)u \rangle = \langle v, BT(t)u \rangle = \langle B^*v, T(t)u \rangle = \langle v, T(t)u \rangle.$$

Das heißt, die Funktion $f(t) = \langle v, T(t)u \rangle$ erfüllt die Differentialgleichung $f' = f$. Folglich ist $f(t) = f(0)e^t$. Da aber $|f(t)| \leq \|v\| \|u\|$ beschränkt ist, muß $f(0) = \langle v, u \rangle = 0$ sein. Weil D dicht liegt in \mathcal{H} , ist $v = 0$. Genauso zeigt man, daß die Gleichung $B^*v = -v$ nur die triviale Lösung hat. Nach dem Standardkriterium für Fast-Selbstadjungiertheit ist damit B fast schiefadjungiert.

Nach dem letzten Satz gibt es eine Einparameteruntergruppe $\exp(t\bar{B})$ mit Generator \bar{B} . Es reicht nun zu zeigen, daß $\exp(t\bar{B}) = T(t)$ ist [dann folgt $\bar{B} = A$]. Das folgt nun mit Satz 3.7 daraus, daß für jedes u im dichten Unterraum D die Abbildungen $T(t)u$ und $\exp(t\bar{B})u$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}w(t) = \bar{B}w(t), \quad w(0) = u,$$

sind [D T -stabil], denn aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung sind für jedes $t \in \mathbf{R}$ die Operatoren $T(t)$ und $\exp(t\bar{B})$ auf D und damit überall gleich. \square

Wie wir sehen werden, leistet das Nelsonsche Lemma große Dienste, wenn es darum geht, zu entscheiden, ob ein gegebener Unterraum determinierender Bereich für einen schiefadjungierten (oder selbstadjungierten) Operator ist. Allerdings muß man dafür die zugehörige Einparameteruntergruppe bereits kennen. Wesentliche Voraussetzung des Nelsonschen Lemmas ist die Dichtheit (eines Unterraums) des Definitionsbereiches $\text{dom}(A)$. Tatsächlich ist diese Bedingung für jeden Generator erfüllt. Um zu zeigen, daß es stets genügend „differenzierbare Vektoren“ gibt, auf denen sich dann noch eine Liealgebrendarstellung erklären läßt, greifen wir auf die Resultate des letzten Abschnittes zurück. Doch zuvor eine (an [BR77, S. 318] angelehnte) Definition.

Definition. Sei \mathfrak{g} eine reelle Liealgebra. Eine Abbildung

$$S: \mathfrak{g} \rightarrow u(\mathcal{H})$$

heißt **Darstellung** von \mathfrak{g} , wenn es einen dichten Unterraum $D \subset \mathcal{H}$ derart gibt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) S bildet nach $u_D(\mathcal{H})$ ab, d. h. D liegt im Definitionsbereich aller Operatoren $S(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, und wird von diesen stabilisiert.
- (b) Die Abbildung

$$S \rightarrow \text{End}(D), \quad X \mapsto S(X)|_D,$$

ist Liealgebrenmorphismus. Ausgeschrieben heißt das, daß für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ und $u \in D$

$$\begin{aligned} S(\lambda X + \mu Y)u &= \lambda S(X)u + \mu S(Y)u \quad \text{und} \\ S([X, Y])u &= [S(X), S(Y)]u \end{aligned}$$

gelten.

- (c) D ist ein determinierender Bereich für alle Operatoren $S(X)$, $X \in \mathfrak{g}$.

In diesem Fall ist D ein **determinierender Bereich** von S . Die Darstellung heißt **stetig**, falls alle Operatoren $S(X)$ stetig sind. Analog definiert man (**stetige**) **\mathfrak{g} -Moduln**.

Wir wollen nun zeigen, daß das Differential LT zu einer Darstellung T von G eine Darstellung von LG im Sinne obiger Definition ist. Wir beginnen mit dem Fall einer G -Mannigfaltigkeit und übertragen die dort gewonnenen Erkenntnisse – ähnlich wie bei der isotypischen Zerlegung von G -Moduln in Abschnitt 2.7 – anschließend auf beliebige G -Moduln.

Satz 3.9. Sei M eine G -Mannigfaltigkeit mit G -invariantem Maß μ . Mit der Bezeichnung T für die Darstellung von G auf $L^2(\mu)$ ist LT eine Darstellung von LG mit G -stabilem determinierendem Bereich $C_c^\infty(M)$.

Beweis. Kriterium (a) der Definition einer Liealgebrendarstellung folgt direkt aus der Gleichung

$$LT(X)u = -X_M[u],$$

wie schon in Satz 3.6 bemerkt wurde. Damit ist gemäß Satz 3.3 auch das zweite Kriterium erfüllt, denn

$$\begin{aligned} LT([X, Y])u &= -[X, Y]_M u = [-X_M, -Y_M]u = -X_M[-Y_M[u]] + Y_M[-X_M[u]] \\ &= LT(X)LT(Y)u - LT(Y)LT(X)u = [LT(X), LT(Y)]u. \end{aligned}$$

(Die Linearität ist klar.) Weil $C_c^\infty(M)$ offensichtlich G -stabil ist, beweist das Nelsonsche Lemma schließlich Punkt (c). \square

In diesem Fall ergibt sich Lemma 3.4 übrigens auch aus der Identität

$$\begin{aligned} (\text{Ad}(g)X)_M &= (g^{-1})^* X_M, \quad \text{d. h.} \\ (\text{Ad}(g)X)_M[u] &= g(X_M[g^{-1}u]), \end{aligned}$$

für Killingsche Vektorfelder [AM78, Prop. 4.1.26]. (Der rechte Ausdruck in der oberen Zeile ist das *pull-back* des Vektorfeldes X_M durch den Diffeomorphismus $g^{-1}: M \rightarrow M$.) Für Vektoren in $C_c^\infty(M)$ ist das nämlich bereits die in Lemma 3.4 behauptete Aussage, für andere schließt man mit den bekannten Argumenten über Fast-Schiefadjungiertheit.

Definition. Für eine Darstellung T von G in einem Hilbertraum \mathcal{H} heißt

$$D_T = \text{lin}\{T(a)u : a \in C_c^\infty(G), u \in \mathcal{H}\}$$

der **Gårding-Unterraum** zu T .

Satz 3.10. Sei T eine Darstellung von G in \mathcal{H} . Dann ist LT eine Darstellung von LG mit determinierendem Bereich D_T .

Beweis. Wir zeigen zunächst die Dichtheit von D_T . Sei $u \in \mathcal{H}$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle eine symmetrische Umgebung U der $1 \in G$ mit $\|T(g)u - u\| \leq \epsilon$ für alle $g \in U$ [T stetig] und dazu eine reellwertige, glatte Funktion $b \neq 0$ auf G mit kompaktem Träger in U . (Solch eine Funktion kann man lokal in einer die 1 enthaltenden Karte definieren, vgl. [AMR88, Lemma 4.2.13].) Sei a das auf $\int a = 1$ normierte Vielfache von $b + \tilde{b}$. Dann ist $\tilde{a} = a$ und wegen $\text{supp } a \subset U$

$$\|T(a)u - u\| = \left\| \int (a(g)T(g)u - a(g)u) dg \right\| \leq \int a(g) \|T(g)u - u\| dg \leq \epsilon.$$

Also liegt D_T dicht.

Um die etwas verwirrende Notation LL für das Differential der Darstellung L zu vermeiden, schreibe ich in diesem Beweis Λ für die Darstellung von G in dem regulären Modul. Da $C_c^\infty(G)$ Λ -stabil ist, ist es nach Lemma 2.14 auch D_T . Zudem liegt D_T im Definitionsbereich aller Operatoren $LT(X)$, $X \in LG$, und für $a \in C_c^\infty(G)$ und $u \in \mathcal{H}$ gilt

$$LT(X)T(a)u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T(\exp tX)T(a)u - T(a)u) = T\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Lambda(\exp tX)a - a)\right)u = T(L\Lambda(X)a)u.$$

Mittels dieser Gleichung zeigt man nun, daß sich auch die anderen Kriterien einer Liealgebrendarstellung von $L\Lambda$ [Satz 3.9] auf LT übertragen, etwa

$$LT([X, Y])T(a)u = T(L\Lambda([X, Y])a)u = T(L\Lambda(X)L\Lambda(Y)a - L\Lambda(Y)L\Lambda(X)a)u = [LT(X), LT(Y)]T(a)u.$$

Zum Nachweis der Fast-Schiefadjungiertheit benutzt man wieder das Nelsonsche Lemma. \square

Man beachte, daß der Nachweis der Dichtheit von D_T sehr dem Schritt (i) des Beweises des Approximationssatzes ähnelt. Ließe man bei der Definition des Gårding-Unterraumes stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu, so folgte, daß D_T für jedes G dicht in \mathcal{H} läge.

Korollar 3.11 (Satz von Stone). Die Abbildung, die jeder Einparameteruntergruppe ihren Generator zuordnet, ist eine Bijektion zwischen der Menge der Einparameteruntergruppen von $U(\mathcal{H})$ und der Menge $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ der schiefadjungierten Operatoren in \mathcal{H} mit Inversem \exp .

Beweis. Da eine Einparameteruntergruppe von $U(\mathcal{H})$ eine Darstellung von \mathbf{R} ist, zeigt der letzte Satz, daß deren Generator schiefadjungiert ist, so daß man Satz 3.7 anwenden kann. \square

Korollar 3.12. Für eine Darstellung T von G in \mathcal{H} kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} LG & \xrightarrow{LT} & \mathfrak{u}(\mathcal{H}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{T} & U(\mathcal{H}) \end{array}$$

Beweis. Für $X \in LG$ ist $T(\exp tX)$ Einparameteruntergruppe mit Generator $LT(X)$. Jetzt wende man den Satz von Stone an. \square

Wie wir in Satz 3.10 und für den Spezialfall $\mathcal{H} = L^2(M)$ in Satz 3.9 gesehen haben, kann man den determinierenden Bereich einer Liealgebrendarstellung LT zu einer Liegruppendarstellung T stets T -stabil wählen. Deswegen sei vereinbart:

Ein determinierender Bereich einer Darstellung LT wird ab jetzt stets als T -stabil angenommen.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wenden wir die Theorie auf Tensorprodukte von Darstellungen an.

Satz 3.13. Seien T_k Darstellungen von G in \mathcal{H}_k mit determinierendem Bereich D_k der Liealgebren-darstellung LT_k für $k = 1$ und 2 .

Dann ist $D = D_1 \otimes^a D_2$ ein determinierender Bereich der Darstellung LT von LG zur Tensorprodukt-darstellung $T = T_1 \otimes T_2$ von G in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, und für alle $X \in LG$ und $u_1 \otimes u_2 \in D$ ist

$$LT(X)(u_1 \otimes u_2) = LT_1(X)u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes LT_2(X)u_2.$$

Beweis. Es ist klar, daß D in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ dicht liegt und T -stabil ist. Für $X \in LG$ und $u_1 \otimes u_2 \in D$ ist

$$\frac{1}{t}(T(\exp tX)(u_1 \otimes u_2) - u_1 \otimes u_2) = \frac{1}{t}(T_1(\exp tX)u_1 - u_1) \otimes T_2(\exp tX)u_2 + u_1 \otimes \frac{1}{t}(T_2(\exp tX)u_2 - u_2).$$

Durch Grenzübergang sieht man $u_1 \otimes u_2 \in \text{dom}(LT(X))$ und die im Satz behauptete Gleichung. Insbesondere folgt, daß D stabil unter allen Operatoren $LT(X)$ ist und daß die Zuordnung $X \mapsto LT(X)$ Kriterium (b) der Definition einer Liealgebren-darstellung erfüllt. Das Nelsonsche Lemma beweist schließlich, daß D ein determinierender Bereich für alle Operatoren $LT(X)$ ist. \square

Gemäß diesem Satz ist D ein determinierender Bereich für den Operator $LT_1(X) \otimes^a 1 + 1 \otimes^a LT_2(X)$ [Lemma 1.15]. Der Abschluß dieses Operators sei mit

$$LT_1(X) \otimes 1 + 1 \otimes LT_2(X) \quad \text{oder kurz} \quad LT_1(X) + LT_2(X)$$

bezeichnet. Die zweite Schreibweise werde ich insbesondere dann benutzen, wenn (etwa) T_2 die triviale Darstellung ist. In diesem Fall fasse ich also einen schiefadjungierten Operator in \mathcal{H}_1 als einen solchen in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ auf. Entsprechendes gilt für selbstadjungierte Operatoren.

Eine Satz 3.13 entsprechende Aussage kann man für eine direkte Summe von Darstellungen auf gleiche Weise zeigen. Im Zuge der Diskussion der Darstellungen kompakter Liegruppen wird dieses Ergebnis auf eine andere Art bewiesen.

Literatur: [RS80, Sec. VIII.4], [BR77, §11.1]

3.3 Darstellungen kompakter Liegruppen

Die Ergebnisse des letzten Abschnittes sind insbesondere für kompakte Liegruppen gültig. Aufgrund der Existenz der isotypischen Zerlegung, die sich in Abschnitt 2.7 aus den Sätzen von Peter und Weyl ergab, kann man in diesem Spezialfall mehr Informationen über die Generatoren gewinnen. Als Nebeneffekt werden wir dabei sehen, daß man bei kompakten Liegruppen nicht auf den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren zurückgreifen muß, um eine Liealgebren-darstellung zu erhalten.

Stetige Morphismen von Liegruppen sind notwendigerweise glatt, also sind (stetige) endlichdimensionale G -Moduln immer glatte G -Moduln. Ein Repräsentantensystem von Isomorphieklassen einfacher G -Moduln ist daher für kompaktes G das gleiche wie ein solches einfacher glatter G -Moduln. Aus dem gleichen Grunde sind Matricelemente einer Liegruppe glatte Funktionen. Aus den Sätzen von Peter und Weyl folgen daher die Korollarien

Korollar 3.14. Für eine kompakte Liegruppe G liegen die glatten Funktionen dicht in $C(G)$ (mit Supremumsnorm) und in $L^2(G)$. Das gleiche gilt für homogene Räume von G .

Korollar 3.15. Für eine kompakte Liegruppe G enthält ein endlichdimensionaler Untermodul von $L^2(G)$ (mit Modulstruktur vermöge L , R oder beider) nur glatte Funktionen. Das gleiche gilt für homogene Räume von G .

Beide Resultate kann man auch direkter erhalten: Im ersten Fall kann man über eine glatte Zerlegung der Eins den entsprechenden Satz für offene Teilmengen des \mathbf{R}^n benutzen; im zweiten zieht man Lemma 2.11 heran sowie die Tatsache, daß für einen einfachen Untermodul $U < L^2(G)$ (vermöge L beispielsweise) $U = \text{lin}\{L(g)(\tilde{a} * a) : g \in G\}$ für jedes $a \in U \setminus \{0\}$ ist. Da U endlichdimensional ist, sind alle Funktionen $\tilde{a} * a = \langle a, R(g)a \rangle$ glatt und damit auch alle Translate $L(g)(\tilde{a} * a)$.

Als nächstes untersuchen wir die Generatoren $LT(X)$ einer Darstellung T einer kompakten Liegruppe G . Wir wenden uns in einer Vorbetrachtung dem Spezialfall eines $[U]$ -isotypischen G -Moduls $\mathcal{H} \neq 0$ mit zugehöriger Darstellung T zu. T_U bezeichne die Darstellung auf U . Da alle $u \in \mathcal{H}$ in einem endlichdimensionalen $[U]$ -isotypischen Untermodul von \mathcal{H} liegen [Satz 2.26(c)], existiert der Grenzwert

$$LT(X)u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T(\exp tX)u - u)$$

für alle u . Es ist klar, daß die Zuordnung $u \mapsto LT(X)u$ einen linearen Operator $LT(X)$ in \mathcal{H} definiert. $LT(X)$ ist auch beschränkt mit Norm $\|LT(X)\| = \|LT_U(X)\|$ und schiefadjungiert [für jede endliche direkte Summe $V = \bigoplus U < \mathcal{H}$ ist $LT(X)|_V = \bigoplus LT_U(X)$]. Ebenso leicht sieht man, daß die Abbildung

$$LT: LG \rightarrow u(\mathcal{H}) \cap B(\mathcal{H}), \quad X \mapsto LT(X),$$

ein Morphismus von Liealgebren ist [für jedes $u \in \mathcal{H}$ ist $LT([X, Y])u = [LT(X), LT(Y)]u$].

Für den nächsten Satz sei an die Definition der direkten Summe von selbstadjungierten Operatoren (Abschnitt 1.6) erinnert; in gleicher Weise kann man natürlich auch die direkte Summe von schiefadjungierten Operatoren erklären. Wir formulieren den Satz auch für nicht kompakte Liegruppen, da der Beweis nicht von der Kompaktheit abhängt und wir in Abschnitt 4.3 die allgemeinere Aussage benötigen werden.

Satz 3.16. *Sei K eine höchstens abzählbare Indexmenge, und seien $T_k, k \in K$, Darstellungen einer Liegruppe G in Hilberträumen \mathcal{H}_k . Dann gilt mit der Bezeichnung $T = \bigoplus_k T_k$ für die Darstellung auf der direkten Summe die Identität*

$$LT(X) = \bigoplus_{k \in K} LT_k(X)$$

für jedes $X \in LG$.

Beweis. Zur Abkürzung setze ich $\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$ und $A = \bigoplus_{k \in K}^a LT_k(X)$. Zu zeigen ist dann $\bar{A} = LT(X)$.

$LT(X) \subset \bar{A}$: Sei $u \in \text{dom}(LT(X))$, so daß $LT(X)u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T(\exp tX)u - u)$ existiert. Projektion auf den Untermodul \mathcal{H}_k liefert $(LT(X)u)_k = LT_k(X)u_k$. Es folgt $u \in \text{dom}(\bar{A})$ und $\bar{A}u = LT(X)u$.

$\bar{A} \subset LT(X)$: Da $A \subset LT(X)$ klar ist, genügt es zu zeigen, daß $LT(X)$ abgeschlossen ist. Sei $(u_n \oplus LT(X)u_n)_n$ eine Folge in $\Gamma(LT(X))$, die gegen $u \oplus v \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ konvergiert. Schreibt man die Gleichung

$$\frac{d}{dt}T(\exp tX)u_n = T(t)LT(X)u_n$$

mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (der auch im Falle eines unendlichdimensionalen Wertebereiches gilt [Lan93, §XIII.3]) als Integralgleichung

$$T(\exp tX)u_n - u_n = \int_0^t T(\exp sX)LT(X)u_n ds$$

(das Integral kann man als Riemann-Integral auffassen), so folgt durch Grenzübergang

$$T(\exp tX)u - u = \int_0^t T(\exp sX)v ds,$$

denn aufgrund der Unitarität von T konvergiert $T(\exp tX)LT(X)u_n \rightarrow T(\exp tX)v$ gleichmäßig. Erneutes Anwenden des Hauptsatzes beweist nun $u \in \text{dom}(LT(X))$ und $LT(X)u = v$. \square

Wählt man für kompaktes G und eine Darstellung T in \mathcal{H} die Indexmenge $K = X(G)$ und die einzelnen Summanden als die isotypischen Komponenten, dann folgt die Schiefadjungiertheit von $LT(X)$ aus der der einzelnen Summanden LT_χ .

Wie beim Tensorprodukt in Satz 3.13 hätte man auch im letzten Satz den umgekehrten Weg gehen können: Man *definiert* die direkte Summe schiefadjungierter Operatoren als den Generator der entsprechenden Darstellung auf der direkten Summe und erschließt mit Hilfe des Nelsonschen Lemmas (das allerdings vom Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren Gebrauch macht), daß die algebraische direkte Summe ein determinierender Bereich für diesen Operator ist.

Wir können nun folgendes Resultat notieren:

Satz 3.17. *Sei T eine Darstellung einer kompakten Liegruppe G in \mathcal{H} . Dann ist LT eine Darstellung der Liealgebra LG mit determinierendem Bereich*

$$D_X = \bigoplus_{\chi \in X(G)}^a \mathcal{H}_\chi,$$

der algebraischen direkten Summe der isotypischen Komponenten. Jede Einschränkung LT_χ von LT auf eine isotypische Komponente liefert eine stetige Darstellung von LG .

Beweis. Es ergibt sich alles direkt aus den Definitionen, aus den Eingangsbemerkungen oder aus dem letzten Satz mit $K = X(G)$. \square

3.4 Das Casimir-Element einer Liealgebra

Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache (reelle oder komplexe) Liealgebra, also mit nicht ausgearteter Killingform κ . Wähle eine Basis (Z_i) von \mathfrak{g} und dazu eine Basis (\tilde{Z}_i) mit

$$\kappa(\tilde{Z}_i, Z_j) = \delta_{ij},$$

was möglich ist, da κ einen Isomorphismus $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ vermittelt. Für einen stetigen \mathfrak{g} -Modul \mathcal{H} definiert man dann

$$C := \sum_i Z_i \tilde{Z}_i \in B(\mathcal{H}).$$

C ist unabhängig von der gewählten Basis (Z_i) : Sei (Y_i) eine weitere Basis mit $Y_i = \sum_j a_{ij} Z_j$. Dann ist $\tilde{Y}_i = \sum_j b_{ji} \tilde{Z}_j$, wobei $[b_{ij}]$ die zu $[a_{ij}]$ inverse Matrix bezeichnet, denn

$$\kappa(\tilde{Y}_i, Y_j) = \sum_k \sum_l b_{ki} a_{jl} \kappa(\tilde{Z}_k, Z_l) = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \delta_{ij}.$$

Also gilt

$$\sum_i Y_i \tilde{Y}_i = \sum_{i,j,k} a_{ij} b_{ki} Z_j \tilde{Z}_k = \sum_k Z_k \tilde{Z}_k.$$

Also ist C wohldefiniert und heißt das **Casimir-Element** von \mathfrak{g} bezüglich \mathcal{H} . C ist selbstadjungiert, weil die Liealgebraelemente schiefadjungierte Operatoren in \mathcal{H} sind, denn

$$C^* = \sum_i \tilde{Z}_i^* Z_i^* = \sum_i \tilde{Z}_i Z_i = C$$

aufgrund der Unabhängigkeit von der Basiswahl.

Mittels einer universellen Konstruktion, der universellen einhüllenden Algebra, kann man das Casimir-Element unabhängig von einer gewählten Darstellung definieren. Der Endomorphismus C , der hier eingeführt wurde, ist dann das Bild dieses Casimir-Elementes unter einer Darstellung der universellen einhüllenden Algebra, die von einer Darstellung von \mathfrak{g} induziert wird. Aus diesem Grund werde ich das Casimir-Element zu einer stetigen Darstellung S von \mathfrak{g} auch mit $S(C)$ bezeichnen. Dies ist rein symbolisch zu verstehen, um Casimir-Elemente in verschiedenen Moduln unterscheiden zu können.

Die wesentliche Eigenschaft von C ist die folgende:

Lemma 3.18. *Das Casimir-Element ist ein \mathfrak{g} -Morphismus.*

Beweis. Zu zeigen ist $[C, X] = 0 \in B(\mathcal{H})$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Man kann jedes $Y \in \mathfrak{g}$ schreiben als $Y = \sum_i \kappa(\tilde{Z}_i, Y) Z_i = \sum_i \kappa(Z_i, Y) \tilde{Z}_i$, also ist

$$[Z_i, X] = \sum_j \kappa(\tilde{Z}_j, [Z_i, X]) Z_j = - \sum_j \kappa([Z_i, \tilde{Z}_j], X) Z_j$$

und

$$[\tilde{Z}_i, X] = \sum_j \kappa(Z_j, [\tilde{Z}_i, X]) \tilde{Z}_j = \sum_j \kappa([Z_j, \tilde{Z}_i], X) \tilde{Z}_j,$$

wobei von der Assoziativität der Killingform Gebrauch gemacht wurde. Damit hat man in $B(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} [C, X] &= \sum_i [Z_i \tilde{Z}_i, X] = \sum_i \left([Z_i, X] \tilde{Z}_i + Z_i [\tilde{Z}_i, X] \right) \\ &= - \sum_{i,j} \kappa([Z_i, \tilde{Z}_j], X) Z_j \tilde{Z}_i + \sum_{i,j} \kappa([Z_j, \tilde{Z}_i], X) Z_i \tilde{Z}_j = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Wenn \mathcal{H} ein einfacher \mathfrak{g} -Modul ist, dann wirkt C als Homothetie.

Beispiel 3.19. Zur Illustration betrachten wir die komplexe Liealgebra sl_2 . Die Elemente

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von sl_2 . Man überprüft leicht, daß bezüglich dieser Basis die Killingform die Gestalt

$$\kappa = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{(H,X,Y)}$$

hat. Also ist

$$\tilde{H} = \frac{1}{8}H, \quad \tilde{X} = \frac{1}{4}Y \quad \text{und} \quad \tilde{Y} = \frac{1}{4}X,$$

und das Casimir-Element schreibt sich als

$$C = \frac{1}{8}(H^2 + 2XY + 2YX).$$

Die Isomorphieklassen einfacher sl_2 -Moduln sind eindeutig durch das Höchstgewicht $2l$, $l \in \mathbf{N}$, bestimmt. Ich werde dieses l , also das Halbfache des Höchstgewichtes, wie [Sch95, (III.3.11)] als den **Spin** eines sl_2 -Moduls bzw. einer Darstellung von sl_2 ($SU(2)$, $SO(3)$ etc.) bezeichnen und zur Parametrisierung der Isomorphieklassen verwenden, wie es in der physikalischen, nicht aber in der mathematischen Literatur üblich ist. (Der physikalische Ursprung dieser Terminologie wird im nächsten Kapitel deutlich werden.) Diejenigen einfachen sl_2 -Moduln, die auch eine $SO(3)$ -Modulstruktur tragen, werden also durch ganzzahligen Spin charakterisiert.

Um den Skalierungsfaktor des Casimir-Elementes in einem einfachen Modul mit Spin l zu bestimmen, wende ich C auf einen maximalen Vektor $u \in V_{2l} \setminus \{0\}$ an. Dann ist nämlich $Xu = 0$ und $Hu = XYu = 2lu$, also $Cu = \frac{1}{2}l(l+1)u$, das heißt

$$C = \frac{1}{2}l(l+1)\text{id}.$$

Dieses Ergebnis ist auch für alle reellen Formen von sl_2 richtig, insbesondere für $su(2) \simeq so(3)$. [Die Killingform einer Komplexifizierung ist die \mathbf{C} -bilineare Fortsetzung der Killingform der reellen Liealgebra.]

Im allgemeinen führt eine Darstellung T von G nicht zu einer stetigen Darstellung der Liealgebra LG . Trotzdem kann man im Falle einer kompakten Liegruppe auf einfache Weise den Begriff des Casimir-Elementes verallgemeinern.

Satz 3.20. *Sei T eine Darstellung einer kompakten Liegruppe G in \mathcal{H} und (Z_i) eine Basis von LG . Dann ist der Operator*

$$C' = \sum_i Z_i \tilde{Z}_i \quad \text{mit} \quad \text{dom}(C') = \{u \in \mathcal{H} : \forall i u \in \text{dom}(\tilde{Z}_i) \text{ und } \tilde{Z}_i u \in \text{dom}(Z_i)\}$$

fast selbstadjungiert. Der Abschluß von C' ist

$$LT(C) := \bigoplus_{\chi \in X(G)} LT_\chi(C),$$

also von der Wahl der Basis (Z_i) unabhängig.

Beweis. Da $LT(C)$ auf D_X fast selbstadjungiert ist [Abschnitt 1.6], reicht es zum Beweis des Satzes,

$$\bigoplus_{\chi \in X(G)}^a LT_\chi(C) \subset C' \subset LT(C)$$

zu zeigen. Die erste Inklusion ist klar. Für $u \in \text{dom}(C')$ ist $(LT(\tilde{Z}_i)u)_\chi = LT_\chi(\tilde{Z}_i)u_\chi$ und damit

$$C'u = \sum_i LT(Z_i)LT(\tilde{Z}_i)u = \bigoplus_\chi \sum_i LT_\chi(Z_i)LT_\chi(\tilde{Z}_i)u_\chi = \bigoplus_\chi LT_\chi(C)u_\chi = LT(C)u. \quad \square$$

Der Operator $LT(C)$ heißt das **Casimir-Element** von LG bezüglich \mathcal{H} . Man beachte, daß die isotypische Zerlegung von \mathcal{H} und der determinierende Bereich D_X zwar im Nachweis der Fast-Selbstadjungiertheit von C' benutzt wurden, deren Kenntnis aber nicht nötig ist, um das Casimir-Element tatsächlich zu konstruieren.

3.5 Beispiel: $L^2(S^2)$

Die Sphäre S^2 ist als $O(3)$ -stabile abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der $O(3)$ -Mannigfaltigkeit \mathbf{R}^3 selbst $O(3)$ -Mannigfaltigkeit. Schränkt man die Wirkung von $O(3) = SO(3) \times \mathbf{Z}_2$ auf $SO(3)$ ein, so kann man bekanntlich die Sphäre als homogenen Raum $SO(3)/SO(2)$ auffassen vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} SO(3)/SO(2) &\rightarrow S^2 \\ gSO(2) &\mapsto ge_3, \end{aligned}$$

wobei e_3 den dritten kanonischen Basisvektor des \mathbf{R}^3 bezeichnet.

Weiterhin erbt die Sphäre als Untermannigfaltigkeit von \mathbf{R}^3 dessen Riemannsche Metrik. Da diese Metrik $O(3)$ -invariant ist, bestimmt sie ein $O(3)$ -invariantes Borelmaß auf S^2 (vgl. Beispiel 2.10), das allerdings nicht normiert ist; der Flächeninhalt der Sphäre ist nämlich 4π . Da invariante Borelmaße auf homogenen Räumen bis auf Skalierung eindeutig sind [Lemma 2.2], handelt es sich dabei um das Maß $4\pi\mu$, wenn μ das von $SO(3)$ induzierte Maß auf der als homogenen Raum betrachteten Sphäre bezeichnet. Wenn bei S^2 nicht ausdrücklich auf ein bestimmtes Maß Bezug genommen wird, so ist immer das durch die Metrik induzierte Maß $4\pi\mu$ gemeint. Es ist klar, daß der Unterschied zwischen beiden Maßen keinerlei Einfluß auf die $O(3)$ -Modulstruktur des L^2 -Raumes über der Sphäre hat.

Als erstes soll in diesem Abschnitt der $O(3)$ -Modul $L^2(S^2)$ in isotypische Komponenten zerlegt werden, wobei wir uns zunächst auf die $SO(3)$ -Modulstruktur beschränken.

Die einfachen $SO(3)$ -Moduln stehen in Bijektion zu den einfachen sl_2 -Moduln U_l mit ganzzahligem Spin l (vgl. Beispiel 3.19). Gemäß der Frobeniusschen Reziprozität (Satz 2.29) ist die Multiplizität der Isomorphieklasse eines einfachen Moduls U_l von $SO(3)$ in $L^2(S^2)$ gleich der der trivialen Darstellung von $SO(2)$ in U_l . Bevor wir diese bestimmen, konstruieren wir eine Überlagerung $SU(2) \rightarrow SO(3)$, die auch später von Nutzen sein wird.

Der lineare Isomorphismus

$$A: \mathbf{R}^3 \rightarrow su(2), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ix_3 & -ix_1 - x_2 \\ -ix_1 + x_2 & ix_3 \end{pmatrix},$$

wird zu einem Liealgebrenmorphismus, wenn man in \mathbf{R}^3 mit kanonischer Basis (e_k) das Vektorprodukt

$$e_{\pi(1)} \times e_{\pi(2)} := \text{sign } \pi e_{\pi(3)}, \quad \pi \in S_3,$$

einführt. Die Bilder der e_k unter A sind¹

$$Y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Versieht man \mathbf{R}^3 zusätzlich mit dem kanonischen Skalarprodukt, dann gilt bezüglich der Killingform κ von $su(2)$ für alle $x, y \in \mathbf{R}^3$

$$\kappa(Ax, Ay) = -2\langle x, y \rangle.$$

Diese Gleichung nehmen wir zum Anlaß, auf $su(2)$ das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\kappa(X, Y) \tag{3}$$

zu definieren, so daß A zu einer isometrischen Abbildung wird. Weil κ unter der adjungierten Darstellung von $SU(2)$ invariant ist und $SU(2)$ zusammenhängend, erhält man einen Liemorphismus

$$\text{Ad}: SU(2) \rightarrow SO(su(2))$$

¹In der Notation von Beispiel 3.19 ist

$$Y_1 = -\frac{i}{2}(Y + X), \quad Y_2 = \frac{1}{2}(Y - X) \quad \text{und} \quad Y_3 = -\frac{i}{2}H.$$

Die Abbildung A ist so gewählt, daß $\sigma_k = 2iY_k$ die Pauli-Matrizen sind.

mit Kern $\{\pm 1\}$, also aus Dimensionsgründen eine Isogenie. Aufgrund des einfachen Zusammenhangs von $SU(2)$ handelt es sich dabei um die universelle Überlagerung. Berücksichtigt man den Isomorphismus $A: \mathbf{R}^3 \simeq SU(2)$, so liefert Ad eine universelle Überlagerung $SU(2) \rightarrow SO(3)$. Durch Differenzieren und erneutes Anwenden von A bekommen wir insgesamt einen Liealgebrenmorphismus $\mathbf{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)$. Dabei wird die Basis (e_k) des \mathbf{R}^3 auf die Elemente

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{so}(3)$ abgebildet. Diese erzeugen als Einparameteruntergruppe gerade die Drehungen um die Koordinatenachsen e_k ; so ist zum Beispiel

$$t \mapsto \exp tZ_3 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die (kanonisch eingebettete) Untergruppe $SO(2)$. Zu beachten ist allerdings, daß das Vektorprodukt (und damit auch die Identifizierung $\mathbf{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)$) von der gewählten Orientierung des \mathbf{R}^3 abhängt. Die Basisvektoren Z_k von $\mathfrak{so}(3)$ erfüllen analog zur Basis (e_k) die Vertauschungsrelationen

$$[Z_{\pi(1)}, Z_{\pi(2)}] = \text{sign } \pi Z_{\pi(3)}, \quad \pi \in S_3, \quad (4)$$

gleiches gilt für die Basis (Y_k) von $\mathfrak{su}(2)$.

Die Gewichtszerlegung eines endlichdimensionalen $SU(2)$ - bzw. \mathfrak{sl}_2 -Moduls V bezüglich $H \in \mathfrak{sl}_2$ (wie in Beispiel 3.19) läßt sich auf $Y_3 = -\frac{i}{2}H$ übertragen. Man erhält:

$$V = \bigoplus_m V_m, \quad Y_3 v = -im v \quad \text{für } v \in V_m, \quad 2m \in \mathbf{N}. \quad (5)$$

(Die sehr unnatürlich wirkende Vorzeichenwahl ist derart, daß sich das m in Abschnitt 4.6 als magnetische Quantenzahl ergibt.) Dieses ist gleichzeitig die isotypische Zerlegung von V bezüglich der zusammenhängenden Untergruppe $G \simeq U(1)$ von $SU(2)$ mit $LG = \mathbf{R}Y_3$, denn

$$\exp(tY_3)v = \exp(-imt)v \quad \text{für } v \in V_m,$$

und die irreduziblen Charaktere von $U(1) \approx S(1) \subset \mathbf{C}$, die gleichzeitig die irreduziblen Darstellungen sind, haben die Form $\psi_\lambda: z \mapsto z^\lambda$, $\lambda \in \mathbf{Z}$ [Beispiel 2.23]. V_m ist G -Modul mit Charakter ψ_{-2m} (man beachte die Vorzeichenwahl und $\exp(2\pi Y_3) = -1$). Speziell ist für einen einfachen $SU(2)$ -Modul U_l mit Spin l die G -isotypische Zerlegung von der Form

$$U_l = \bigoplus_{m=-l}^l U_{l,m} \quad \text{mit} \quad \dim U_{l,m} = 1. \quad (6)$$

Da bei kompakten Gruppen die isotypische Zerlegung von G -Moduln stets existiert, ist die Gewichtszerlegung (5) auch bei unendlichdimensionalen $SU(2)$ -Moduln möglich.

Faßt man U_l für ganzzahligen Spin l als $SO(3)$ -Modul auf, dann lautet die isotypische Zerlegung der Restriktion auf $SO(2)$ wie in (6), weil $SO(2)$ von G überlagert wird. Diese Überlagerung ist zweiblättrig, so daß der Charakter des $SO(2)$ -Moduls $U_{l,m}$ gleich ψ_{-m} ist. Als Ergebnis notieren wir daher für die Multiplizität der durch ψ_λ bestimmten Isomorphieklasse $[V_\lambda]$ von $SO(2)$ im $SO(3)$ -Modul U_l

$$\text{mult}_\lambda U_l = \begin{cases} 1 & -\lambda \in \{-l, \dots, l\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Insbesondere kommt die triviale Darstellung von $SO(2)$ in jedem U_l , $l \in \mathbf{N}$, genau einmal vor. Folglich ist auch die Multiplizität von $[U_l]$ in $L^2(S^2)$ für jedes $l \in \mathbf{N}$ gleich 1. Den χ_l -isotypischen einfachen $SO(3)$ -Untermodule von $L^2(S^2)$ bezeichne ich mit $L^2(S^2)_l$.

Für später bemerken wir noch, daß es eine Zerlegung wie in (5) für jedes $X \in \mathfrak{su}(2)$ gibt: Die Ad-Bahnen von $\mathfrak{su}(2)$ sind die Sphären $\{Y \in \mathfrak{su}(2) : \|Y\| = \text{const}\}$, wobei $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm (die ungleich der Operatornorm ist) bezeichnet. Folglich liegt X in der gleichen Bahn

wie $\|X\|_{Y_3}$. Weil konjugierte Endomorphismen gleiche Eigenvektoren besitzen, existiert schließlich eine Zerlegung

$$V = \bigoplus_m V_m \quad Xv = -im\|X\|v \quad \text{für } v \in V_{2m}. \quad (7)$$

Bevor wir uns überlegen, wie die Inversion $-\text{id} \in O(3)$ in den isotypischen Komponenten wirkt, soll gezeigt werden, daß das Casimir-Element von $o(3) = so(3)$ bezüglich $L^2(S^2)$ für glatte Funktionen bis auf Skalierung gerade der Laplace-Beltrami-Operator Δ_{S^2} ist. Daß diese Funktionen im Definitionsbereich des Casimir-Operators liegen, folgt aus Satz 3.6 und Satz 3.20: $C^\infty(S^2)$ ist im Definitionsbereich aller Generatoren von $so(3)$ enthalten und wird von diesen stabilisiert. Daher liegen die glatten Funktionen bereits im Definitionsbereich eines jeden „formalen“ Casimir-Operators C' . Als bekannt wird im folgenden nur vorausgesetzt, daß der Zusammenhang zwischen dem Laplaceoperator im \mathbf{R}^3 und Δ_{S^2} in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}, \quad (8)$$

lautet und daß Δ_{S^2} , etwa mit den glatten Funktionen als Definitionsbereich, ein hermitescher Operator ist.

Sei $P^l(\mathbf{R}^3)$ der Raum der homogenen komplexen Polynome vom Grade l auf \mathbf{R}^3 . $P^l(\mathbf{R}^3)$ ist $O(3)$ -Modul, und die Einschränkungen des Laplaceoperators

$$\Delta: P^l(\mathbf{R}^3) \rightarrow P^{l-2}(\mathbf{R}^3) \quad \text{für } l \geq 2$$

sind $O(3)$ -Morphismen ($P^0(\mathbf{R}^3)$ und $P^1(\mathbf{R}^3)$ liegen im Kern von Δ).

Der Laplaceoperator auf den komplexen Polynomen auf \mathbf{R}^3 und alle obigen Einschränkungen sind surjektiv. Um das zu beweisen, reicht es zu zeigen, daß alle Elemente der Form

$$p_0q \quad \text{mit } p_0 \in \mathbf{C}[x_1], q \in \mathbf{C}[x_2, x_3]$$

im Bild von Δ liegen. Da die Surjektivität in einer Raumdimension klar ist, existieren komplexe Polynome $p_l \in \mathbf{C}[x_1]$, $l \in \mathbf{N}$, mit

$$\Delta p_{l+1} = p_l.$$

Setzt man

$$s = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l p_{l+1} \Delta^l q,$$

(nur endlich viele Terme sind von 0 verschieden), so ergibt sich

$$\Delta s = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l ((\Delta p_{l+1}) \Delta^l q + p_{l+1} \Delta^{l+1} q) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (p_l \Delta^l q + p_{l+1} \Delta^{l+1} q) = p_0 q,$$

was die Surjektivität beweist.

Der Untermodul $H^l(\mathbf{R}^3) \subset P^l(\mathbf{R}^3)$ der **harmonischen Polynome** vom Grade l ist definitionsgemäß der Kern des Laplaceoperators auf den homogenen Polynomen l -ten Grades,

$$H^l(\mathbf{R}^3) = \ker \Delta|_{P^l(\mathbf{R}^3)}.$$

Wegen der Surjektivität von Δ ist²

$$\dim H^l(\mathbf{R}^3) = \dim P^l(\mathbf{R}^3) - \dim P^{l-2}(\mathbf{R}^3) = \binom{l+2}{l} - \binom{l}{l-2} = 2l + 1.$$

Diese Formel gilt auch für $l < 2$. Um zu zeigen, daß $H^l(\mathbf{R}^3)$ ein einfacher $SO(3)$ -Modul mit Spin l ist, genügt es aus Dimensionsgründen, ein $h \in H^l(\mathbf{R}^3)$ zu finden mit

$$\exp(tZ_3)h = e^{ilt}h.$$

²Der gleiche Beweis zeigt

$$\dim H^l(\mathbf{R}^n) = \binom{l+n-1}{l} - \binom{l+n-3}{l-2}$$

für $n \geq 1$ und $l \geq 2$.

Betrachten wir $h = (x_1 - ix_2)^l$. h ist harmonisch, denn

$$\Delta h = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) h$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) h = l(x_1 - ix_2)^{l-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (x_1 - ix_2) = 0.$$

Identifiziert man \mathbf{R}^2 in kanonischer Weise mit \mathbf{C} , dann wirkt $\exp(tZ_3)$ in der Gaußschen Ebene gerade als Multiplikation mit e^{it} (so daß $(\exp(tZ_3)f)(z) = f(e^{-it}z)$ für eine auf \mathbf{C} definierte Funktion f gilt), und man hat

$$\exp(tZ_3)h = (\exp(tZ_3)(x_1 - ix_2))^l = e^{ilt}h.$$

Durch Einschränkung der Polynome auf die Sphäre bekommen wir Abbildungen

$$R_l: H^l(\mathbf{R}^3) \rightarrow L^2(S^2).$$

Diese Abbildungen sind injektiv, da homogene Polynome durch ihre Werte auf der Sphäre eindeutig bestimmt sind. Weil wir bereits wissen, daß jede Isomorphieklasse $[U_l]$ in $L^2(S^2)$ genau einmal vorkommt, folgt

$$\text{im } R_l = L^2(S^2)_l.$$

Um die $O(3)$ -Wirkung zu beschreiben, ist es zweckmäßig, einen neuen Begriff einzuführen. Schränkt man eine Darstellung von $O(3) = SO(3) \times \mathbf{Z}_2$ auf $\mathbf{Z}_2 = \{\pm \text{id}\}$ ein, so ist die isotypische Zerlegung von der Form

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-,$$

wobei \mathcal{H}_+ den Invariantenraum und \mathcal{H}_- die sign-isotypische Komponente bezeichnet. Von einem Untermodul $U < \mathcal{H}_+$ sagt man, er hat positive **Parität** (+1); einem Untermodul $V < \mathcal{H}_-$ gibt man negative Parität (-1).

Satz 3.21.

- (a) Die isotypische Zerlegung des $O(3)$ -Moduls $L^2(S^2)$ ist

$$L^2(S^2) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} L^2(S^2)_l,$$

wobei $L^2(S^2)_l$ ein einfacher $O(3)$ -Modul mit Spin l und Parität $(-1)^l$ ist, dessen Elemente die Einschränkungen harmonischer Polynome l -ten Grades auf S^2 sind.

- (b) Der auf den glatten Funktionen $C^\infty(S^2)$ definierte Laplace-Beltrami-Operator Δ_{S^2} ist fast selbstadjungiert mit Abschluß $-2C$, dem (-2) -fachen des Casimir-Elementes von $so(3)$ bezüglich $L^2(S^2)$. Insbesondere ist für ein $Y \in L^2(S^2)_l$

$$\Delta_{S^2} Y = -l(l+1)Y.$$

Beweis. (a) Zu zeigen ist noch die Verallgemeinerung von $SO(3)$ auf $O(3)$. Doch daß $L^2(S^2)_l$ ein isotypischer $O(3)$ -Modul mit Parität $(-1)^l$ ist, folgt aus der Tatsache, daß seine Elemente Einschränkungen von homogenen Polynomen vom Grade l sind.

- (b) Für $Y \in L^2(S^2)_l$ ist $r^l Y \in H^l(\mathbf{R}^3)$ und gemäß Gleichung (8)

$$0 = \Delta(r^l Y) = (l(l-1) + 2l + \Delta_{S^2})r^{l-2}Y,$$

woraus die behauptete Identität für Y folgt. Diese zeigt, daß der Laplace-Beltrami-Operator bis auf den Faktor -2 in jeder isotypischen Komponente mit dem Casimir-Element C übereinstimmt. Also ist $-\frac{1}{2}\Delta_{S^2}$ eine hermitesche Erweiterung des auf $\bigoplus_l^a L^2(S^2)_l$ eingeschränkten Casimir-Elementes. Folglich ist der Laplace-Beltrami-Operator fast selbstadjungiert, und sein Abschluß ist $-2C$ [Lemma 1.15]. \square

Literatur: [Ste94, Sec. 4.4], [Tri72, § 31]

Kapitel 4

Liegruppen und Quantenmechanik

4.1 Der formale Rahmen der Quantenmechanik

In der klassischen Punktmechanik beschreibt man Zustände eines Systems durch Punkte einer Mannigfaltigkeit, etwa in der Hamiltonschen Formulierung durch solche des Kotangentialbündels $T'K$ (Phasenraum) einer Mannigfaltigkeit K (Konfigurationsraum). Die Quantenmechanik steht da der Kontinuumsmechanik näher, wie auch ihr älterer Name „Wellenmechanik“ andeutet. Selbst ein einzelnes Teilchen wie ein Elektron erfordert zur Beschreibung eine komplexwertige Funktion auf dem Konfigurationsraum K . Deren Betragsquadrat deutet man als die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen an diesem Ort zu finden. Da das Teilchen sich irgendwo aufhalten muß, sollte das Integral über das Betragsquadrat der Funktion, also die L^2 -Norm, gleich 1 sein. Auf diese Weise kommt der Hilbertraum $L^2(K)$ ins Spiel. Wie bei der Hamiltonschen Mechanik, bei der man von $T'K$ zu beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten verallgemeinert, so wählt man in der Quantenmechanik komplexe Hilberträume als Grundlage. Der sich darauf aufbauende Formalismus, wie er im folgenden ausgeführt wird, geht entscheidend auf von Neumann zurück. Mittlerweile gibt es alternative Modelle, die zum Beispiel auf C^* -Algebren beruhen.

Genauer: Zustände eines quantenmechanischen Systems werden durch eindimensionale Unterräume eines für ein gegebenes System festen komplexen Hilbertraumes \mathcal{H} beschrieben, also durch Elemente des **projektiven Raumes** $\mathbf{P}\mathcal{H}$. Den durch einen Vektor $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ bestimmten Zustand schreibe ich als $[u]$. Oftmals nennt man auch u einen Zustand, wobei man nicht vergessen darf, daß zwei von Null verschiedene, linear abhängige Vektoren den gleichen Zustand beschreiben. (Für $u \in \mathcal{H} = L^2(K)$ ist die Interpretation von $|u(x)|^2$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte nur dann richtig, wenn u auf $\|u\| = 1$ normiert ist.) Ganz generell arbeitet man lieber im Hilbertraum \mathcal{H} als im projektiven Raum $\mathbf{P}\mathcal{H}$, um sich dessen linearer Struktur bedienen zu können.

Anders als in der klassischen Mechanik spielt der Begriff der Messung eine entscheidende Rolle. Damit trägt man der Tatsache Rechnung, daß jede Messung das zu untersuchende System beeinflusst. Bei der Beschreibung makroskopischer Systeme kann dieser Effekt vernachlässigt werden, was den Unterschied zu klassischen Modellen erklärt. Observable (Meßgrößen) assoziiert man mit selbstadjungierten Operatoren in \mathcal{H} . Der Operator zur Observablen (Gesamt-)Energie heißt Hamiltonoperator und wird gewöhnlich durch den Buchstaben H symbolisiert. Falls es zu einer Observablen ein klassisches Analogon gibt, erhält man den zugehörigen Operator in der Regel durch geeignetes Übersetzen des klassischen Ausdrucks, basierend auf der bekannten Form von Orts- und Impulsoperator (Beispiele 4.16 und 4.15). Allerdings ist dieses Verfahren nicht universell; eine wesentliche Schwierigkeit liegt darin, daß man von einer abelschen Funktionenalgebra in eine nichtabelsche Operatoralgebra abbildet.

Die zeitliche Entwicklung des Systems erfolgt auf zwei Arten. Solange keine Messung erfolgt, liegt die Zeitentwicklung in Händen der durch den schiefadjungierten Operator $-iH$ erzeugten Einparameteruntergruppe von $U(\mathcal{H})$. (Das Minuszeichen ergibt sich aus der konventionellen Wahl von Zeit- und Energieskala.) Befindet sich das System etwa zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $w(0) = u$, so ist der Zustand zu jedem anderen Zeitpunkt durch

$$w(t) = \exp(-itH)u \tag{1}$$

gegeben. Weil alle Operatoren $\exp(-itH)$ unitär sind, nennt man dieses die unitäre Zeitentwicklung. Für Zustände $u \in \text{dom}(H)$ ist Gleichung (1) nach Satz 3.7 äquivalent dazu, daß w die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$i \frac{d}{dt} w(t) = Hw(t), \quad w(0) = u \tag{2}$$

ist. Gleichung (2) wird die zeitabhängige Schrödingergleichung genannt. Ein Zustand u heißt stationär, wenn er sich im Laufe der Zeit nicht verändert. Nach der weiter oben gemachten Bemerkung, daß der Zustand eigentlich $[u]$ und nicht u ist, bedeutet dies, daß $[\exp(-itH)u]$ konstant ist. Wegen der Unitarität der Einparameteruntergruppe $\exp(-itH)$ ist dann die Abbildung $t \mapsto \langle u, \exp(-itH)u \rangle$ ein stetiger

Gruppenmorphismus $\mathbf{R} \rightarrow U(1)$, folglich glatt und von der Form e^{-itE} für ein $E \in \mathbf{R}$. Also ist $[u]$ genau dann stationär, wenn es ein Eigenvektor von H ist [die Umkehrung ist klar]. Die Eigenwertgleichung

$$Hu = Eu$$

heißt zeitunabhängige Schrödingergleichung.

Im Rahmen der unitären Zeitentwicklung kennt man das System in alle Zukunft und alle Vergangenheit. Mathematisch formuliert ist das durch $-iH$ gegebene lineare Vektorfeld auf \mathcal{H} vollständig. Das ist anders als in der klassischen Mechanik und liegt an der postulierten Selbstadjungiertheit von H .

Bis hierher könnte man auch die Quantenmechanik noch klassisch nennen: Ein komplexer Hilbertraum ist eine (unendlichdimensionale) symplektische Mannigfaltigkeit mit konstanter symplektischer Form $\omega(X, Y) = 2 \operatorname{Im} \langle X, Y \rangle$, und abgesehen von Schwierigkeiten mit Definitionsbereichen ist $u \mapsto -iHu$ gerade das Hamiltonsche Vektorfeld zu der Funktion $u \mapsto \langle u, Hu \rangle$ [AMR88, Example 8.1.13]. Radikales Umdenken erfordert dagegen der Meßprozeß. Mögliche Meßwerte einer Observablen sind die Elemente des Spektrums $\sigma(A)$ des zugehörigen selbstadjungierten Operators A , das gemäß Satz 1.18 nicht leer ist und nur reelle Zahlen umfaßt. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung einen Wert aus der Borelmenge $V \subset \mathbf{R}$ zu erhalten, ist für einen Zustand $[u]$ gleich

$$P(A, [u], V) = \|u\|^{-2} \langle u, 1_V(A)u \rangle,$$

wobei 1_V die Indikatorfunktion von V bezeichnet und $1_V(A)$ den Projektionsoperator, der im Sinne des meßbaren Funktionalkalküls von A zu dieser Funktion gehört (vgl. [RS80, Th. VIII.5]). Für einen Eigenwert λ von A beispielsweise ist $1_{\{\lambda\}}(A)$ gerade die Projektion P_λ auf den zugehörigen Eigenraum. Das Spektralmaß von A induziert also für jeden Zustand ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbf{R} . Dessen Mittelwert heißt der Erwartungswert $E(A, [u])$ von A im Zustand $[u]$. Der Erwartungswert muß nicht existieren, für $u \in \operatorname{dom}(A) \setminus \{0\}$ ist er durch

$$E(A, [u]) = \|u\|^{-2} \langle u, Au \rangle$$

gegeben.¹ Die Wahrscheinlichkeit $P(A, [u], V)$, einen Meßwert aus V zu erhalten, kann man also auch als den Erwartungswert des Operators $1_V(A)$ auffassen. Beschreibt $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$ ein Punktteilchen in einer Dimension, dann ist die Projektion $1_V(X)$ zum Ortsoperator X , der zur Observablen „Position des Teilchens“ gehört, gerade durch Multiplikation mit der Indikatorfunktion 1_V gegeben, und für normiertes $u \in L^2(\mathbf{R})$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in V anzutreffen, gleich

$$P(X, [u], V) = \int_V |u(x)|^2 dx;$$

für den dreidimensionalen Fall verallgemeinert man in offensichtlicher Weise. Das rechtfertigt die Interpretation des Betragsquadrates eines Zustandes als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte.

Nach der hauptsächlich auf Bohr zurückgehenden „Kopenhagener Interpretation“ der Quantenmechanik ist die alleinige Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung möglicher Meßresultate kein Defekt der Quantentheorie, sondern umfaßt alles, was man über ein System überhaupt wissen kann.

Jede Messung unterbricht die unitäre Zeitentwicklung. Stattdessen „bricht die Wellenfunktion zusammen“, bei Erhalt etwa des Eigenwertes λ als Meßergebnis ist der Zustand unmittelbar nach der Messung nicht mehr u , sondern $P_\lambda u$. (Bei $P_\lambda u = 0$ ist es nach dem bisher Gesagten unmöglich, λ als Meßresultat zu erhalten, so daß $P_\lambda u$ tatsächlich wieder ein Zustand ist.) Dieses Ereignis nennt man die Reduktion des Zustandsvektors. Danach setzt die unitäre Zeitentwicklung wieder ein. Aus klassischer Sicht ist dieser instantan ablaufende Vorgang schwer nachzuvollziehen. Man möchte Meßgeräten kaum einen besonderen ontologischen Status zubilligen, da die Entscheidung, ob ein physikalisches Objekt ein Meßgerät ist oder ob an einem System eine Messung vollzogen wird, subjektiv vom Betrachter entschieden zu werden scheint. Jemand anderer könnte behaupten, daß eben nicht gemessen wird, sondern daß zwei Systeme miteinander wechselwirken. Trotzdem scheinen die beteiligten Teilchen zu wissen, ob sie Teil eines Meßprozesses sind, und richten sich danach. Es gibt keinerlei experimentellen Befunde, die zu dieser – hier etwas provozierend formulierten – Theorie im Widerspruch stehen. Die philosophischen Diskussionen darüber haben mit dem Aufkommen der Quantenmechanik begonnen (man denke an die vehemente Kritik Einsteins, dessen Relativitätstheorien ja durch und durch klassisch sind) und sind bis heute nicht verebht.

¹Es ist möglich, dieser Formel für weitere u einen Sinn zu geben [GP90, S. 52]. Übrigens kann man auch klassische Zufallsvariablen angeben, die keinen Mittelwert besitzen.

4.2 Zusammengesetzte Systeme und Spin

Hat man zwei klassische mechanische Systeme mit Konfigurationsräumen K_1 und K_2 , so werden Konfigurationen des Gesamtsystems durch Punkte von $K_1 \times K_2$ beschrieben. Läßt man sich von der Erfahrung leiten, daß Zustände des dazu korrespondierenden quantenmechanischen Systems durch quadratintegrierbare Funktionen auf dem Konfigurationsraum repräsentiert werden, so gelangt man zum Hilbertraum [Satz 1.11, hier nehmen wir die Existenz zweier σ -endlicher Maße auf K_1 und K_2 an]

$$L^2(K_1 \times K_2) = L^2(K_1) \otimes L^2(K_2).$$

Daher formulieren wir die allgemeine Regel, daß Zustände eines Systems, das aus Teilsystemen mit Hilberträumen \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 besteht, durch Vektoren im Hilbertraumtensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ repräsentiert werden. Einer Observablen, der ein selbstadjungierter Operator A in \mathcal{H}_1 entsprach, ordnen wir dabei den Operator $A \otimes 1$ in \mathcal{H} zu (zur Definition vgl. Bemerkung im Anschluß an Satz 3.13).

Der Hamiltonoperator eines Systems gehört zur Observablen Gesamtenergie. Betrachtet man zwei Systeme, die nicht miteinander wechselwirken, so ist die Gesamtenergie gleich der Summe der Energien der einzelnen Systeme. Demzufolge sollte der Hamiltonoperator H des Gesamtsystems gleich der Summe der beiden gegebenen Operatoren H_1 und H_2 sein. Mit unserem Wissen über Tensorarstellungen von Liegruppen können wir auch die Frage der Selbstadjungiertheit von H klären, denn aus Satz 3.13 folgt das

Korollar 4.1 (Variablenseparation in der Quantenmechanik). *Sei H_k ein selbstadjungierter Operator in \mathcal{H}_k , $k = 1, 2$. Dann ist der Operator $H = H_1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2$ mit $\text{dom}(H) = \text{dom}(H_1) \otimes \text{dom}(H_2)$ fast selbstadjungiert, und für alle $t \in \mathbf{R}$ gilt*

$$\exp(-it\overline{H}) = \exp(-itH_1) \otimes \exp(-itH_2).$$

Wie in der klassischen Mechanik besteht das Ziel der Variablenseparation darin, die Lösung eines gegebenen Problems auf die einfacheren Teilprobleme zu reduzieren. Konkret versucht man, zu einem System \mathcal{H} mit Hamiltonoperator H ein Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ und eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ derart zu finden, daß

$$UHU^{-1} = H_1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2$$

für zwei selbstadjungierte Operatoren H_1 und H_2 ist. Diese Methode soll anhand des Wasserstoffatoms illustriert werden.

Ein Wasserstoffatom besteht aus einem Proton und einem Elektron mit ungleichnamigen Ladungen $+e$ und $-e$. Die Kraft zwischen den beiden oder allgemeiner zwischen zwei Teilchen mit Ladungen q_1 und q_2 wird durch das Coulombpotential

$$V_C(x^{(2)} - x^{(1)}) = \frac{q_1 q_2}{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}$$

beschrieben. Dabei ist $x \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ ein Punkt des Konfigurationsraumes des Zweiteilchensystems und $x^{(k)} = (x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k})$ der Ortsvektor des k -ten Teilchens. Entsprechend bezeichnet $\Delta^{(k)}$ im weiteren den Differentialausdruck

$$\Delta^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial x_{3k-2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{3k-1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{3k}^2}.$$

Für den Hamiltonoperator des Wasserstoffs, der zur Observablen Energie gehört, ist der natürliche Kandidat (bei Vernachlässigung der Spins der beiden Teilchen) der Operator

$$H = -\frac{1}{2m_1}\Delta^{(1)} - \frac{1}{2m_2}\Delta^{(2)} + V_C(x^{(2)} - x^{(1)})$$

in $L^2(\mathbf{R}^3) \otimes L^2(\mathbf{R}^3) = L^2(\mathbf{R}^6)$, etwa mit Definitionsbereich $C_c^\infty(K)$, wobei auf

$$K = \{x \in \mathbf{R}^6 : x^{(1)} \neq x^{(2)}\}$$

der in H auftretende Potentialausdruck wohldefiniert ist. H ist zwar symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert. Wie häufig bei der mathematisch strengen Formulierung der Quantenmechanik ist man vor das Problem gestellt, bei einem gegebenen Operator, eventuell ohne spezifizierten Definitionsbereich, zu untersuchen, ob er selbstadjungierte Erweiterungen besitzt oder sogar fast selbstadjungiert ist. Die

folgenden Überlegungen dienen im wesentlichen dazu, die Definition (6) des (selbstadjungierten) Hamiltonoperators des Wasserstoffatoms zu motivieren.

Mit der linearen Transformation

$$S \in SL(\mathbf{R}^6): x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \mapsto y = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

gilt für glattes $u \in C_c^\infty(K')$, $K' = SK = \{y \in \mathbf{R}^6 : y^{(2)} \neq 0\}$,

$$(H(u \circ S)) \circ S^{-1} = \left(-\frac{1}{2M} \Delta^{(1)} - \frac{1}{2m} \Delta^{(2)} + V_C(y^{(2)}) \right) u, \quad (4)$$

wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse und $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die reduzierte Masse heißt. Zudem induziert S eine unitäre Transformation $U: u \mapsto u \circ S$ in $L^2(\mathbf{R}^6)$, und Gleichung (4) zeigt, daß $U^{-1} H U$ formal von der Gestalt $H = H_1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2$ ist mit

$$H_1 = H_0 = -\frac{1}{2M} \Delta \quad \text{und} \quad H_2 = H_C := -\frac{1}{2m} \Delta + V_C. \quad (5)$$

Kato und Ikebe haben gezeigt, daß H_C , der **Hamiltonoperator eines Teilchens im Coulombpotential**, selbstadjungiert ist mit gleichem Definitionsbereich wie H_0 , der Hamiltonoperator des freien Teilchens. Zudem ist jeder determinierende Bereich von H_0 auch ein solcher von H_C . Der Beweis ist etwa in [RS75, Sec. IX.7+X.2] dargestellt und beruht auf der Theorie der Störungen selbstadjungierter Operatoren, denn man kann V_C als eine in gewissem Sinne „kleine“ (nämlich infinitesimal H_0 -beschränkte) Störung von H_0 auffassen, die an Definitionsbereich und Selbstadjungiertheit nichts ändert.

Jetzt drehen wir diese Überlegungen um: Wir *definieren* den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms als

$$H := U(H_0 \otimes 1 + 1 \otimes H_C)U^{-1} \quad (6)$$

und erhalten so gemäß dem letzten Korollar einen selbstadjungierten Operator zur Beschreibung zweier geladener Teilchen. Mit dem Operator H_C , der in Abschnitt 4.4 genauer untersucht wird, kann man die experimentellen Befunde beim Wasserstoffatom nicht vollständig erklären. Es fehlen relativistische Korrekturen und die Berücksichtigung des Kern- und vor allem des Elektronenspins. Auf den Spin von Teilchen kommen wir am Ende dieses Abschnittes zu sprechen.

Neben einer Vereinfachung der unitären Zeitentwicklung wünscht man sich, daß die Variablenseparation auch bei der Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung von Nutzen ist, also bei der Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren von H .

Wenn A ein selbstadjungierter Operator in \mathcal{H} ist und B ein solcher in \mathcal{I} , dann ist klar, daß mit $Au = \kappa u$ und $Bv = \lambda v$ der Vektor $u \otimes v$ Eigenvektor von $A + B$ zum Eigenwert $\kappa + \lambda$ ist (falls $u, v \neq 0$). Bei unserer Konvention, nur separable Hilberträume zu betrachten, sind tatsächlich alle Eigenwerte von dieser Gestalt:

Satz 4.2. *Seien A und B selbstadjungierte Operatoren in \mathcal{H} bzw. \mathcal{I} . Dann ist das Punktspektrum des selbstadjungierten Operators $A + B$ in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{I}$ durch*

$$\sigma_p(A + B) = \sigma_p(A) + \sigma_p(B) = \{\kappa + \lambda : \kappa \in \sigma_p(A), \lambda \in \sigma_p(B)\}$$

gegeben, und für die Eigenräume gilt

$$\text{eig}(A + B, \lambda) = \bigoplus_{\kappa \in \mathbf{R}} \text{eig}(A, \kappa) \otimes \text{eig}(B, \lambda - \kappa).$$

(Zu der direkten Summe tragen nur die κ mit $\kappa \in \sigma_p(A)$ und $\lambda - \kappa \in \sigma_p(B)$ bei.)

Beweis. Gemäß dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren können wir $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ und $\mathcal{I} = L^2(Y, \nu)$ für zwei endliche Maßräume X und Y annehmen und zudem $A = M_f$ und $B = M_g$ für zwei reellwertige, meßbare Funktionen auf X bzw. Y . Die Eigenwerte von M_f sind diejenigen $\kappa \in \mathbf{R}$, die bezüglich des Bildmaßes $f_*\mu$ positives Maß haben [Satz 1.19],

$$\sigma_p(A) = \{\kappa \in \mathbf{R} : f_*\mu(\{\kappa\}) = \mu(U_\kappa) > 0\} \quad \text{mit} \quad U_\kappa = f^{-1}(\{\kappa\}),$$

und die Eigenräume sind

$$\text{eig}(A, \kappa) = L^2(U_\kappa) = \{u \in L^2(\mu) : u(x) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } f(x) \neq \kappa\}.$$

(Für $\kappa \notin \sigma_p(A)$ ist mit dieser Definition $\text{eig}(A, \kappa) = 0$.) Entsprechendes gilt für M_g , hier setzen wir $V_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\})$. Dem Operator $A + B$ in $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu) = L^2(\mu \otimes \nu)$ [Satz 1.11] entspricht die Funktion $h = f \times 1 + 1 \times g$, denn M_h ist eine selbstadjungierte Erweiterung von $M_f \otimes^a 1 + 1 \otimes^a M_g$.

Gesucht sind die λ , für die

$$W_\lambda := h^{-1}(\{\lambda\}) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) + g(y) = \lambda\}$$

positives Maß hat. Nun ist

$$W_\lambda = \left(\bigcup_{\kappa \in \sigma_p(M_f)} U_\kappa \times V_{\lambda-\kappa} \right) \cup \left(\bigcup_{\kappa \notin \sigma_p(M_f)} U_\kappa \times V_{\lambda-\kappa} \right),$$

wobei die zweite Menge mit Fubini eine $(\mu \otimes \nu)$ -Nullmenge ist, da sie endliches Maß hat und die Faser über jedem $y \in Y$ eine μ -Nullmenge ist. Also ist

$$\begin{aligned} \text{eig}(M_h, \lambda) &= L^2(W_\lambda) = L^2\left(\bigcup_{\kappa \in \sigma_p(M_f)} U_\kappa \times V_{\lambda-\kappa}\right) = \bigoplus_{\kappa \in \sigma_p(M_f)} L^2(U_\kappa) \otimes L^2(V_{\lambda-\kappa}) \\ &= \bigoplus_{\kappa \in \mathbf{R}} \text{eig}(M_f, \kappa) \otimes \text{eig}(M_g, \lambda - \kappa). \end{aligned}$$

Bei der Umformung konnte Satz 1.10 benutzt werden, weil $\sigma_p(M_f)$ höchstens abzählbar ist aufgrund der Separabilität von \mathcal{H} . \square

Experimente wie der Zeeman-Effekt oder der Stern-Gerlach-Versuch legen nahe, daß Teilchen einen inneren Freiheitsgrad besitzen, der mit äußeren Magnetfeldern wechselwirkt und Spin genannt wird. Beim Zeeman-Effekt plaziert man ein Atom in ein homogenes Magnetfeld. Dabei spaltet ein Energieniveau in der Regel in mehrere neue auf, was in Abschnitt 4.6 ausführlich besprochen wird. Didaktisch wäre es am sinnvollsten, erst danach den Spin in die Quantentheorie einzuführen, wie es auch der historischen Entwicklung entspräche. Weil die formale Beschreibung des Spins der des Bahndrehimpulses sehr ähnlich ist, diskutiere ich beide gleichzeitig. Lesern, die nicht mit dem Spin vertraut sind, erscheinen die folgenden Ausführungen daher recht unmotiviert.

Die Anzahl der neuen Niveaus beim Zeeman-Effekt ist bei verschwindendem Bahndrehimpuls für alle Teilchen einer Teilchensorte dieselbe; wenn $2s + 1$ neue Niveaus entstehen, dann sagt man, das Teilchen hat den Spin s . (Falls es sich nicht um ein Elementarteilchen handelt, hängt der Spin genaugenommen von inneren Anregungen ab.) Der Spin kann halbzahlig sein (Elektron, Proton, Neutron: $s = \frac{1}{2}$) oder ganzzahlig (Photon, Orthohelium: $s = 1$, π -Meson, Parahelium: $s = 0$). Da der „klassische Konfigurationsraum“ eines Punktteilchens mit Spin demnach von der Form $K \times \{-s, \dots, s\}$ mit $K \simeq \mathbf{R}^3$ wäre, dient zur quantenmechanischen Beschreibung der Raum

$$\mathcal{H} = L^2(K \times \{-s, \dots, s\}) = L^2(K) \otimes U_s.$$

Dabei ist U_s nicht nur Hilbertraum der Dimension $2s + 1$, sondern einfacher $\text{Spin}(K)$ -Modul mit Spin s . ($\text{Spin}(K) \simeq SU(2)$ ist die universelle Überlagerung von $SO(K)$.) Daß man diese Modulstruktur auf U_s wählt, rechtfertigt sich letztlich durch den Erfolg dieses Modells; doch weil $L^2(K)$ $O(K)$ -Modul ist, liegt die Frage nicht fern, ob und wie die Drehgruppe auf U_s wirken kann. Aus Dimensionsgründen ist es naheliegend, einen einfachen $so(K)$ -Modul mit Spin s zu vermuten. Nun gibt es zu halbzahligem s keinen einfachen $SO(K)$ -Modul mit Spin s (und für eine befriedigende Beschreibung des Spins ist die Einfachheit, wie wir sehen werden, unerlässlich). Jetzt ist wieder entscheidend, daß die quantenmechanische Arena in Wirklichkeit der projektive Raum \mathbf{PH} ist, den man nur aus Gründen der Bequemlichkeit oft durch \mathcal{H} ersetzt. Eine projektive Darstellung von $SO(K)$ kann man in \mathbf{PH} erklären, und indem man zur universellen Überlagerung $\text{Spin}(K)$ von $SO(K)$ übergeht, ist es möglich, diese projektive Darstellung zu einer Darstellung in \mathcal{H} hochzuheben. Dieser Zusammenhang zwischen projektiven und gewöhnlichen Darstellungen ist das Thema des 5. Kapitels, in dem auch die formale Definition von projektiven Darstellungen zu finden ist.

Bei mehreren Teilchen mit Spin kann man den Hilbertraum in der Form

$$\mathcal{H} = \bigotimes_i (L^2(K) \otimes U_{s_i}) = \left(\bigotimes_i L^2(K) \right) \otimes \left(\bigotimes_i U_{s_i} \right) = \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$$

schreiben. Dabei ist auf \mathcal{H}_K in kanonischer Weise eine Darstellung der Gruppe $O(K) = SO(K) \times \mathbf{Z}_2$ erklärt und damit auch eine von $\text{Spin}(K)$. Ich werde beide Darstellungen mit T_L bezeichnen und auch die

dadurch bestimmte Darstellung auf \mathcal{H} . Die $Spin(K)$ -Darstellung auf \mathcal{H}_S nenne ich T_S . Das Tensorprodukt beider Darstellungen bestimmt eine Darstellung $T_J = T_L \otimes T_S$ von $Spin(K)$ in \mathcal{H} . Diese Darstellungen werden uns bei der Diskussion der Drehimpulsoperatoren in Abschnitt 4.5 wieder begegnen. Man beachte, daß \mathcal{H}_S stets endlichdimensional ist und daher sogar glatter $Spin(K)$ -Modul.

4.3 Unbeschränkte G -Morphismen

In der Quantenmechanik treten häufig Operatoren auf, die trotz ihrer Unbeschränktheit in gewissem Sinne äquivariant sind bezüglich der Wirkung einer Gruppe, also mit den Operatoren der Gruppe vertauschen. Als ein Beispiel wird sich der Hamiltonoperator H_C eines Teilchens im Coulombpotential erweisen. In diesem Abschnitt sollen daher die Kenntnisse von beschränkten G -Morphismen auf unbeschränkte erweitert werden.

Die Menge $U(\mathcal{H})$ der unitären Operatoren in \mathcal{H} wirkt auf den dicht definierten Operatoren durch Konjugation. Diese Wirkung sei mit In bezeichnet, also

$$\text{In}(U)A = UAU^{-1}$$

für $U \in U(\mathcal{H})$ und $A \in L(\mathcal{H})$. ($\text{In}(U)A \in L(\mathcal{H})$, da $\text{dom}(\text{In}(U)A) = U \text{dom}(A)$ dicht liegt in \mathcal{H} .) Bei schief- oder selbstadjungierten Operatoren schreibe ich die Konjugation in Analogie zu den Matrixgruppen bisweilen auch in der Form $\text{Ad}(U)$. Nach Lemma 1.12(f) ist dabei die Menge $sa(\mathcal{H})$ der selbstadjungierten Operatoren Ad -stabil, und natürlich ebenso die der schiefadjungierten Operatoren.

Ist T eine Darstellung einer Gruppe G in \mathcal{H} , so bekommt man eine Wirkung $\text{In} \circ T$ von G auf $L(\mathcal{H})$. Wenn ich \mathcal{H} als G -Modul betrachte, schreibe ich auch $\text{In}(g)$ für $\text{In}(T(g))$.

Definition. Ein Operator $A \in L(\mathcal{H})$ heißt **unbeschränkter G -Morphismus**, falls er $\text{In} \circ T$ -invariant ist. Entsprechend sind selbstadjungierte G -Morphismen etc. definiert.

Bei einem solchen Operator A gilt also für alle $g \in G$

$$\text{In}(T(g))A = T(g)AT(g)^{-1} = A.$$

Noch anders formuliert: G stabilisiert den Definitionsbereich von A , und für alle $u \in \text{dom}(A)$ ist

$$AT(g)u = T(g)Au.$$

Man beachte, daß ein unbeschränkter G -Morphismus nicht notwendigerweise unbeschränkt ist. Diese sprachliche Inkorrektheit sei erlaubt, um einerseits G -Morphismen nicht in „beschränkte G -Morphismen“ umtaufen zu müssen und andererseits Ungetüme wie „nicht notwendig beschränkte G -Morphismen“ zu vermeiden.

Beispiel 4.3. Der Casimir-Operator $LT(C)$ ist ein selbstadjungierter G -Morphismus: Gemäß Satz 3.20 ist $LT(C)$ auf D_X fast selbstadjungiert. Weil dieser Raum von G stabilisiert wird, ist D_X auch ein determinierender Bereich von $\text{In}(T(g))LT(C)$ für jedes $g \in G$. Doch das Casimir-Element ist in jeder isotypischen Komponente ein LG - und damit auch G -Morphismus [jedes $u \in \mathcal{H}_\chi$ liegt in einem endlichdimensionalen Untermodul]. Daher stimmen $LT(C)$ und $\text{In}(T(g))LT(C)$ auf D_X und folglich überall überein.

Beispiel 4.4. Sei X G -Raum mit G -invariantem Borelmaß μ und $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ meßbar. Dann ist der Multiplikationsoperator M_f genau dann ein selbstadjungierter G -Morphismus, wenn f G -invariant ist, wenn also

$$\forall g \in G \quad f \circ g^{-1} = f \quad \text{fast überall}$$

gilt. Denn unter dieser Bedingung hat man für alle $u \in \text{dom}(M_f)$ und $g \in G$ die Identität (von μ -meßbaren Funktionen) $f(gu) = g(fu)$, was beweist, daß G den Definitionsbereich von M_f stabilisiert und dort mit M_f vertauscht. Existiert andererseits eine meßbare Menge A mit positivem Maß, auf der f und $f \circ g^{-1}$ verschieden sind, so gibt es auch eine meßbare Teilmenge $B \subset A$ und eine Konstante $M > 0$ derart, daß B endliches positives Maß hat und $|f|$ auf B durch M abgeschätzt werden kann. [Man schöpfe A wie im Beweis von Satz 1.19 aus. Dann nehme man als M ein k , für das Ω_k positives Maß hat, und als B eine meßbare Teilmenge von Ω_M mit $0 < \mu(B) < \infty$.] Dann liegt die Indikatorfunktion 1_B im Definitionsbereich von M_f , aber die Funktionen $g(f1_B)$ und $f(g1_B)$ sind auf gB verschieden, so daß im Falle $g1_B \in \text{dom}(M_f)$ die Vektoren $M_f(g1_B)$ und $g(M_f1_B)$ nicht übereinstimmen.

Beispiel 4.5. Der Hamiltonoperator H_0 des freien Teilchens in $L^2(\mathbf{R}^n)$ (Beispiel 1.24) ist ein selbstadjungierter Morphismus bezüglich der **Euklidische Gruppe** $E(n) = \mathbf{R}^n \rtimes O(n)$, dem semidirekten Produkt aus der zu \mathbf{R}^n (als abelscher Gruppe) isomorphen Gruppe der Translationen in \mathbf{R}^n und der orthogonalen Gruppe $O(n)$: Da H_0 auf $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ fast selbstadjungiert ist [Satz 1.23], ist es auch $\text{In}(g)H_0$ für alle $g \in E(n)$ [$E(n)$ stabilisiert $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$], und der Abschluß ist gerade der Operator $\text{In}(g)H_0$. Auf glatten Funktionen mit kompaktem Träger ist aber H_0 bis auf Skalierung der gewöhnliche Laplaceoperator, der bekanntlich mit Translationen und Orthogonaltransformationen kommutiert. Also stimmen H_0 und $\text{In}(g)H_0$ auf $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ und somit überall überein.

Beispiel 4.6. Der Hamiltonoperator $H_C = H_0 + V_C$ eines Teilchens im Coulombpotential ist ein selbstadjungierter $O(3)$ -Morphismus. Dies folgt aus den beiden vorhergehenden Beispielen.

Bei schiefadjungierten Operatoren kann man die Eigenschaft, G -Morphismus zu sein, auch an der zugehörigen Einparameteruntergruppe ablesen.

Lemma 4.7. Sei G Gruppe, \mathcal{H} G -Modul und A ein schiefadjungierter Operator in \mathcal{H} . Dann ist A genau dann schiefadjungierter G -Morphismus, wenn für alle $t \in \mathbf{R}$ der unitäre Operator $\exp tA$ G -Morphismus ist.

Beweis. Weil der Generator von $\text{In}(g) \exp(tA)$ gleich $\text{Ad}(g)A$ ist (vgl. den Beweis von Lemma 3.4) und die Zuordnung des Generators zu einer Einparameteruntergruppe von $U(\mathcal{H})$ bijektiv [Satz von Stone], gilt

$$A = \text{Ad}(g)A \iff \forall t \in \mathbf{R} \exp(tA) = \text{In}(g) \exp(tA). \quad \square$$

Korollar 4.8. Unter den Voraussetzungen des letzten Lemmas kann man in \mathcal{H} in kanonischer Weise eine $G \times \mathbf{R}$ -Modulstruktur erklären durch

$$(g, t) \mapsto \exp(tA)g. \quad (7)$$

Beweis. Weil nach dem letzten Lemma die Operatoren $\exp(tA)$ und g vertauschen, wird durch Gleichung (7) eine Darstellung im algebraischen Sinne erklärt, deren Unitarität klar ist. Zum Nachweis der Stetigkeit genügt es zu beobachten, daß für $u, v \in \mathcal{H}$ die Abbildung

$$(g, t) \mapsto \langle v, \exp(tA)gu \rangle = \langle \exp(-tA)v, gu \rangle$$

stetig ist [Lemma 2.5]. □

Ist G eine kompakte Gruppe, dann muß ein (beschränkter) G -Morphismus A die isotypischen Komponenten \mathcal{H}_χ von \mathcal{H} stabilisieren [Schur] und sich folglich in der Form

$$A = \bigoplus_{\chi \in X(G)} A_\chi \quad \text{mit } A_\chi := A|_{\mathcal{H}_\chi} \in B(\mathcal{H}_\chi)$$

schreiben lassen. Erfreulicherweise gilt entsprechendes auch für schiefadjungierte (und damit auch selbstadjungierte) G -Morphismen:

Satz 4.9. Sei G kompakte Gruppe, \mathcal{H} G -Modul und A schiefadjungierter G -Morphismus in \mathcal{H} . Dann ist für jeden irreduziblen Charakter χ die Einschränkung A_χ von A auf $\text{dom}(A) \cap \mathcal{H}_\chi$ ein schiefadjungierter G -Morphismus in \mathcal{H}_χ , und A läßt sich als direkte Summe

$$A = \bigoplus_{\chi \in X(G)} A_\chi.$$

schreiben.

Beweis. Gemäß dem letzten Lemma und der soeben angestellten Überlegung gilt mit der Bezeichnung $T(t) = \exp tA$

$$T(t) = \bigoplus_{\chi \in X(G)} T(t)_\chi,$$

d. h., die isotypischen Komponenten bezüglich G sind T -Untermodule. Mit Satz 3.16 folgt sofort die Behauptung, denn $\text{dom}(LT(1)_\chi) = \text{dom}(LT(1)) \cap \mathcal{H}_\chi$. □

4.4 Das Wasserstoffatom

In diesem Abschnitt soll die Nützlichkeit der Darstellungstheorie zur Lösung konkreter Probleme am quantenmechanischen Paradeferd, dem Wasserstoffatom, beispielhaft vorgeführt werden. Ziel ist dabei, das Linienspektrum der Strahlung, die der Wasserstoff nach Anregung emittiert, theoretisch zu erklären.

In Abschnitt 4.2 wurde gezeigt, daß der Hamiltonoperator H des Wasserstoffatoms ohne Spin,

$$H = -\frac{1}{2m_1}\Delta^{(1)} - \frac{1}{2m_2}\Delta^{(2)} + V_C(x^{(2)} - x^{(1)}),$$

durch Koordinatentransformation in die direkte Summe $H_0 + H_C$ separiert, bei der H_0 die Bewegung des Schwerpunktes beschreibt und

$$H_C = H_0 + V_C = -\frac{1}{2m}\Delta + \frac{q_1 q_2}{\|x\|}$$

die eines Punktteilchens im Coulombpotential. (Nötige Korrekturen werden in den Abschnitten 4.7 und 4.9 besprochen.) Nun hängt das Linienspektrum des Wasserstoffs eng mit dem Spektrum (im mathematischen Sinne) von H_C zusammen: Die Frequenzen der Spektrallinien sind Differenzen von Elementen aus $\sigma(H_C)$. (Vor diesem Hintergrund ist also das Spektrum eines Operators etwas sehr Konkretes.) Daß die Schwerpunktsbewegung keinen Einfluß hat, ist anschaulich plausibel, weil die Strahlungsemission durch Wechselwirkung der beiden Teilchen untereinander entsteht. Mathematisch drückt sich dieses dadurch aus, daß die Operatoren, die die Strahlungsemission beschreiben, (im wesentlichen der elektrische Dipoloperator, aber auch die anderen elektrischen Multipoloperatoren aus Beispiel 4.17 und ihre magnetischen Pendanten) bei der Variablenseparation als „Störungen“ zu H_C hinzutreten. Im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie (Abschnitt 4.7) bewirken diese Störungen Übergänge zwischen den verschiedenen Energieniveaus (Eigenwerten) von H_C , was sich in der Emission oder Absorption von elektromagnetischer Strahlung bemerkbar macht.

Wir betrachten also den Operator H_C im Hilbertraum $L^2(\mathbf{R}^3)$, von dem wir aus Beispiel 2.10 bereits wissen, daß er eine $O(3)$ -Modulstruktur trägt. Man kann jedes von 0 verschiedene $x \in \mathbf{R}^3$ in diffeomorpher Weise als Produkt eines Skalars $r \in \mathbf{R}^+ = (0, \infty)$ und eines Einheitsvektors $\omega \in S^2$,

$$x = r\omega,$$

schreiben, so daß Definitionen der Form $u(r\omega) := u_1(r)u_2(\omega)$ sinnvoll sind (u ist dann fast überall erklärt). Für $r \in \mathbf{R}^+$ und $u \in L^2(\mathbf{R}^3)$ bezeichnet u_r die Funktion

$$u_r: S^2 \rightarrow \mathbf{C}, \quad \omega \mapsto u(r\omega);$$

in gleicher Weise ist u_ω definiert.

Schreibt man das Skalarprodukt im $L^2(\mathbf{R}^3)$ in Polarkoordinaten,

$$\langle v, u \rangle = \int_{\mathbf{R}^+} \int_{S^2} \overline{v(r\omega)} u(r\omega) r^2 d\omega dr,$$

so erkennt man, daß

$$L^2(\mathbf{R}^3) = L^2(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}) = L^2(\mathbf{R}^+, r^2\lambda) \otimes L^2(S^2)$$

als Hilbertraumtensorprodukt ist. ($r^2\lambda$ bezeichnet das Maß $A \mapsto \int 1_A r^2 dr$.) Da die Wirkung von $O(3)$ auf \mathbf{R}^3 bei dieser Zerlegung von der auf S^2 induziert wird, gilt obige Gleichung sogar, wenn man alle Räume als $O(3)$ -Moduln auffaßt, wobei $L^2(\mathbf{R}^+, r^2\lambda)$ mit der trivialen Modulstruktur versehen wird. Die isotypische Zerlegung von $L^2(\mathbf{R}^3)$ ist also durch

$$L^2(\mathbf{R}^3) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} L^2(\mathbf{R}^+, r^2\lambda) \otimes L^2(S^2)_l = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l$$

gegeben, wobei der Kürze halber $L^2(\mathbf{R}^+, r^2\lambda) \otimes L^2(S^2)_l = \mathcal{H}_l$ gesetzt wurde.

Orientiert man sich am klassischen Keplerproblem, so ist zu erwarten, daß H_C nur bei einer attraktiven Wechselwirkung ($q_1 q_2 < 0$) Eigenwerte hat und diese sämtlich negativ sind, denn Eigenvektoren von H_C entsprechen stationären (gebundenen) Zuständen im Atom. Die Korrektheit dieser Annahme bestätigt man mit folgendem

Virialsatz 4.10. Sei $u \in \text{dom}(H_C)$ Eigenvektor von H_C . Dann gilt

$$\langle u, H_0 u \rangle = -\frac{1}{2} \langle u, V_C u \rangle. \quad (8)$$

Das ist die Übertragung des klassischen Virialsatzes, der bei homogenem Potential das Verhältnis der zeitlichen Mittelwerte von potentieller zu kinetischer Energie angibt, auf die Quantenmechanik. Die in Physikbüchern zu findende Begründung dieses Satzes basiert auf der Berechnung von Kommutatoren von Orts- und Impulsoperatoren mit H_C . Dabei ist nicht ohne weiteres klar, daß man bei den Zwischenschritten innerhalb der Definitionsbereiche der einzelnen Operatoren bleibt. Zwar läßt sich die Argumentation streng durchführen, wird dann aber viel länger als der folgende Beweis.

Beweis (Weidmann). Der Raum \mathbf{R}^3 ist \mathbf{R}^\times -Modul vermöge Skalarmultiplikation. In Anhang A wird gezeigt, daß die dadurch induzierte nichtunitäre Darstellung T in $L^2(\mathbf{R}^3)$ stark stetig ist. T stabilisiert den Definitionsbereich von H_C , und für $\lambda \in \mathbf{R}^\times$ und $v \in \text{dom}(H_C)$ gilt

$$H_0 T(\lambda)v = \lambda^{-2} T(\lambda) H_0 v.$$

[Für glattes v ist dies klar; für $v \in \text{dom}(H_C)$ beliebig² folgt es durch Grenzübergang.] Für den Eigenvektor u , der die Gleichung $H_0 u + V_C u = E u$ für ein $E \in \mathbf{R}$ erfüllt, ist also

$$H_0 T(\lambda)u = \lambda^{-2} (E T(\lambda)u - \lambda V_C T(\lambda)u)$$

wegen $V_C(\lambda^{-1}x) = \lambda V_C(x)$. Weil H_0 und M_{V_C} selbstadjungiert sind, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u, H_0 T(\lambda)u \rangle - \langle H_0 u, T(\lambda)u \rangle \\ &= \lambda^{-2} E \langle u, T(\lambda)u \rangle - \lambda^{-1} \langle u, V_C T(\lambda)u \rangle - E \langle u, T(\lambda)u \rangle + \langle V_C u, T(\lambda)u \rangle \\ &= (\lambda^{-2} - 1) E \langle u, T(\lambda)u \rangle - (\lambda^{-1} - 1) \langle V_C u, T(\lambda)u \rangle. \end{aligned}$$

Dividiert man für $\lambda \neq 1$ durch $(\lambda^{-1} - 1)$ und läßt $\lambda \rightarrow 1$ gehen, so erhält man schließlich

$$0 = 2 \langle u, E u \rangle - \langle u, V_C u \rangle = 2 \langle u, H_0 u \rangle + \langle u, V_C u \rangle,$$

was zu zeigen war. □

Mit diesem Satz kann man obige Vermutung sofort beweisen: Für $q_1 q_2 > 0$ ist der Multiplikationsoperator V_C **streng positiv**, d. h.

$$\forall u \in \text{dom}(M_{V_C}) \quad \langle u, V_C u \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle u, V_C u \rangle = 0 \iff u = 0,$$

da V_C fast überall positiv ist [man schreibe das Skalarprodukt als Integral]. Genauso ist H_0 , der aus dem Multiplikationsoperator mit der fast überall positiven Funktion $\frac{1}{2m} \|x\|^2$ durch Fouriertransformation hervorgeht, streng positiv. Daher kann nur die triviale Lösung $u = 0$ einer Eigenwertgleichung von H_C Gleichung (8) erfüllen. Im Falle $q_1 q_2 < 0$ folgt aus dem Virialsatz für einen Eigenwert E von H_C mit normiertem Eigenvektor u

$$E = \langle u, E u \rangle = \frac{1}{2} \langle u, V_C u \rangle < 0,$$

da dieses Mal V_C negativ ist. Also liegt das Punktspektrum auf der negativen Halbachse.

Ab jetzt nehmen wir ein attraktives Coulombpotential an, also $q_1 q_2 < 0$.

Aufgrund der $O(3)$ -Invarianz des Coulombpotentials ist H_C ein selbstadjungierter $O(3)$ -Morphismus [Beispiel 4.6]. Also zerlegt sich H_C in eine direkte Summe

$$H_C = \bigoplus_{l=0}^{\infty} H_{C,l},$$

wobei $H_{C,l}$ ein selbstadjungierter $O(3)$ -Morphismus in \mathcal{H}_l ist. Für das Punktspektrum von H_C ergibt sich sofort als Konsequenz

$$\sigma_p(H_C) = \bigcup_{l=0}^{\infty} \sigma_p(H_{C,l}),$$

²Aufgrund des Weylschen Lemmas könnte man sich hier natürlich auf glatte v beschränken.

denn jeder Eigenvektor von $H_{C,l}$ ist auch einer von H_C , und falls $u \in \text{dom}(H_C)$ Eigenvektor von H_C ist, so ist jede Komponente $u_l \in \text{dom}(H_{C,l})$ von u Eigenvektor von $H_{C,l}$ zum gleichen Eigenwert. Dieses Argument beweist auch die Gleichung

$$\text{eig}(H_C, E) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \text{eig}(H_{C,l}, E)$$

für die Eigenräume von H_C .

Wir wissen bereits, daß eine Eigenfunktion u von $H_{C,l}$ stetig sein muß [$\text{dom}(H_C) = \text{dom}(H_0)$ und Beispiel 1.24]. Zudem [Weylsches Lemma] ist u außerhalb des Koordinatenursprunges glatt und erfüllt dort die klassische Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2m}\Delta u + \frac{q_1 q_2}{\|x\|} u = E u \quad (9)$$

für ein $E < 0$. In Polarkoordinaten schreibt sich der Laplaceoperator als

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} u_r. \quad (10)$$

Dabei ist $\frac{\partial}{\partial r}$ die radiale Ableitung. Nun sind die Funktionen aus \mathcal{H}_l gerade diejenigen $u \in L^2(\mathbf{R}^3)$, bei denen für fast alle r die Funktion u_r in $L^2(S^2)_l$ liegt [Bemerkung nach Satz 1.11]. Weil u stetig ist, gilt dies hier sogar für alle $r \in \mathbf{R}^+$. [Zu jedem r existiert eine gegen r konvergente Folge (r_n) derart, daß die Funktionen u_{r_n} stetig sind. Diese konvergieren gleichmäßig gegen u_r , weil S^2 kompakt ist. Also liegt u_r in $L^2(S^2)_l$.] Dann ist aber [Satz 3.21(b)]

$$\Delta_{S^2} u_r = -l(l+1)u_r,$$

und in Gleichung (10) stehen effektiv nur Ableitungen nach r . Für jeden Punkt $\omega \in S^2$ erfüllt dann die Funktion $v(r) = r u_\omega(r)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v'' + \left(2mE - \frac{2mq_1 q_2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) v = 0. \quad (11)$$

Dabei ist u_ω genau dann aus $L^2(\mathbf{R}^+, r^2 \lambda)$, wenn v aus $L^2(\mathbf{R}^+)$, also quadratintegabel, ist. Es ist hilfreich, die unabhängige Variable zu

$$\rho = \sqrt{-8mE} r$$

zu wählen und zusätzlich noch eine Funktion $w(\rho) = e^{\rho/2} v(r)$ einzuführen, die dann Lösung von

$$\rho^2 w'' - \rho^2 w' + (\lambda \rho - l(l+1)) w = 0 \quad (12)$$

ist mit der neuen Konstanten

$$\lambda = -q_1 q_2 \sqrt{-\frac{m}{2E}} > 0.$$

Gleichung (12) kann man als komplexe Differentialgleichung auffassen, deren Lösungen für $\rho \neq 0$ holomorph sind. Ein Potenzreihenansatz

$$w(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \rho^i$$

liefert folgende Rekursionsformel für die Koeffizienten a_i :

$$\begin{aligned} l(l+1)a_0 &= 0, \\ (i(i+1) - l(l+1))a_{i+1} &= (i - \lambda)a_i. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $l(l+1)a_1 = \lambda a_0$. Es folgt, daß die Koeffizienten a_i für $i \leq l$ verschwinden und die für $i \geq l+1$ vermöge der Formel

$$a_{i+1} = \frac{i - \lambda}{i(i+1) - l(l+1)} a_i$$

eindeutig durch a_{l+1} bestimmt sind. Man erhält also nur eine Potenzreihenlösung w_1 .³

Betrachten wir nun deren Konvergenzverhalten: Ist $\lambda = n + l + 1$ beziehungsweise

$$E = E_{n+l+1} := -\frac{m(q_1 q_2)^2}{2(n+l+1)^2}$$

für ein $n \in \mathbf{N}$, so bricht die Potenzreihe ab. Die Funktion w_1 ist ein Polynom vom Grade $n + l + 1 \geq 1$, und $v_1 = e^{-\rho/2} w_1$ ist eine quadratintegrale Lösung der Differentialgleichung (11). Schreibt man w_1 in der Form $w_1 = \rho^{l+1} L_n^{2l+1}(\rho)$, so erfüllt das Polynom L_n^{2l+1} die Differentialgleichung

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (2(l+1) - \rho) \frac{d}{d\rho} + n \right) L_n^{2l+1} = 0.$$

Die bis auf Skalierung einzige polynomiale Lösung dieser Gleichung heißt verallgemeinertes Laguerresches Polynom und läßt sich in folgender Form angeben:

$$L_\alpha^\beta(z) = (-1)^\beta \frac{d^\beta}{dz^\beta} L_{\alpha+\beta}(z) \quad \text{mit} \quad L_\alpha(z) = e^z \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} (z^\alpha e^{-z})$$

(Wäre es nicht die einzige solche Lösung, so würde auch ein von w_1 unabhängiges Polynom Gleichung (12) lösen.)

Ist λ nicht von dieser Form, so sind alle a_i , $i \geq l+1$, von 0 verschieden, falls a_{l+1} es ist. Wegen

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{i - \lambda}{i(i+1) - l(l+1)} \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty \quad (13)$$

konvergiert die Reihe überall [Quotientenkriterium] und stellt somit eine Lösung der Differentialgleichung (12) dar. Allerdings ist in diesem Fall die Funktion $v_1 = e^{-\rho/2} w_1$ nicht quadratintegabel. Um das zu sehen, bemerkt man, daß gemäß (13) für jedes $\epsilon \in (0, 1)$ eine natürliche Zahl k derart existiert, daß für alle $i \geq k$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} > \frac{1 - \epsilon}{i + 1}$$

ist. Man darf $a_k = \frac{1}{k!} (1 - \epsilon)^k$ annehmen, indem man k groß genug wählt und die Koeffizienten gegebenenfalls umskaliert. Dann ist aber

$$a_i \geq \frac{1}{i!} (1 - \epsilon)^i$$

für alle $i \geq k$, und wir erhalten

$$w_1(\rho) \geq \exp((1 - \epsilon)\rho) + P(\rho)$$

für ein Polynom P vom Grade $< k$ und damit

$$v_1(r) \geq \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)\rho\right) + \exp(-\rho/2)P(\rho).$$

Für $\epsilon < \frac{1}{2}$ zeigt dies nun, daß v_1 für $r \rightarrow \infty$ unbeschränkt anwächst (also auch alle skalaren Vielfache $\neq 0$), und eine solche Funktion ist nicht quadratintegabel auf \mathbf{R}^+ .

Als nächstes bestimmen wir eine zweite, zur Potenzreihenlösung w_1 linear unabhängige Lösung w_2 . Ein Variationsansatz liefert

$$w_2(\rho) = w_1 \int \frac{e^\sigma}{w_1(\sigma)^2} d\sigma.$$

Entscheidend ist nun das Verhalten von w_2 bei 0: Da w_1 dort eine Nullstelle der Ordnung $l+1$ hat, besitzt w_2 dort einen Pol l -ter Ordnung und die Funktion $u_2(r) = e^{-\rho/2} w_2/r$ einen der Ordnung $l+1 > 0$. Dann kann aber $c_1 u_1 + c_2 u_2$ für $c_2 \neq 0$ nicht der Radialteil einer stetigen Funktion auf \mathbf{R}^3 sein und damit keine Eigenfunktion von $H_{C,l}$.⁴

³Die Differentialgleichung (12) hat bei $\rho = 0$ einen regulär-singulären Punkt mit charakteristischen Exponenten $l+1$ und $-l$. Da deren Differenz ganzzahlig ist, kann man nur eine Lösung durch einen Potenzreihenansatz bestimmen. Zusätzlich sieht man sofort, daß eine zu w_1 unabhängige Lösung bei 0 einen Pol der Ordnung l hat (und möglicherweise einen logarithmischen Anteil, dessen Koeffizient sich aber zu 0 ergeben wird) und folglich u_2 einen Pol mindestens der Ordnung 1.

⁴Man beachte, daß im Falle $l = 0$ auch die Funktion v_2 und damit jede Lösung von (11) bei 0 lokal quadratintegabel ist. Man kann zeigen [BR69, §10.18, Lemma 2], daß es eine Lösung v von (11) gibt, die für $r \rightarrow \infty$ exponentiell abfällt und daher in $L^2(\mathbf{R}^+)$ liegt. Daß das zugehörige $u = v/r$ als Radialteil einer Eigenfunktion von H_C ausgeschlossen wird, liegt allein an der überaus technisch anmutenden Bedingung, daß im Definitionsbereich von H_C nur stetige Funktionen liegen. In der physikalischen Literatur, die für gewöhnlich Bereichsfragen meidet, wird daher oft durch Diskussion verschiedener singularer Potentiale eine „Endlichkeitsbedingung“ für Eigenfunktionen des Hamiltonoperators „hergeleitet“, die diesen mißliebigen Kandidaten dann entfernt [LL66, §§ 35, 36].

Wir wissen also jetzt, daß es für $E \notin \{E_{n+l+1} : n \in \mathbf{N}\}$ keine quadratintegrale Lösung der Eigenwertgleichung geben kann und sonst höchstens Lösungen u , bei denen für alle $\omega \in S^2$ die Funktion u_ω ein Vielfaches von

$$R_{nl}(r) = \rho^l e^{-\rho/2} L_n^{2l+1}(\rho) \quad (14)$$

ist. Also liegen alle Eigenfunktionen zum Eigenwert E_{n+l+1} im Untermodul $\mathbf{C}R_{nl} \otimes L^2(S^2)_l$. Um zu beweisen, daß tatsächlich alle Funktionen in diesem Untermodul Eigenvektoren von $H_{C,l}$ sind, bleibt mit Lemma 1.25 nur noch zu zeigen, daß sie in $\text{dom}(H_C) = \text{dom}(H_0)$ liegen, denn die Funktionen sind in \mathcal{H}_l , außerhalb des Ursprungs glatt [R_{nl} glatt und Korollar 3.15] und erfüllen dort (9).

Da H_0 auf $C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ fast selbstadjungiert ist, reicht es dazu, für $u(r\omega) = R_{nl}(r)Y(\omega)$, $Y \in L^2(S^2)_l$, und alle $v \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ die Identität $\langle v, \Delta u \rangle = \langle \Delta v, u \rangle$, also

$$\int \bar{v}(\Delta u) - (\Delta \bar{v})u \, dx = 0, \quad (15)$$

zu zeigen [Gleichung (1.6); Δu ist fast überall definiert]. Wenn man die Integration nur über die Kugelschale $W_{r_1 r_2} = \{x \in \mathbf{R}^3 : r_1 \leq \|x\| \leq r_2\}$, $0 < r_1 < r_2$, erstreckt, kann man dieses Integral nach dem zweiten Greenschen Satz in ein Oberflächenintegral umformen:

$$\int 1_{W_{r_1 r_2}} (\bar{v}(\Delta u) - (\Delta \bar{v})u) \, dx = \int_{W_{r_1 r_2}} \bar{v}(\Delta u) - (\Delta \bar{v})u \, dx = \int_{\partial W_{r_1 r_2}} \bar{v} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} u \, ds \quad (16)$$

Da v kompakten Träger hat, kann man über eine Kugelschale integrieren, deren äußerer Radius r_2 so groß ist, daß der Integrand dort bereits verschwindet und das Oberflächenintegral über den äußeren Rand wegfällt. Offensichtlich bleibt

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r\omega) = \frac{d}{dr} R_{nl}(r)Y(\omega)$$

genauso wie die radiale Ableitung von \bar{v} in einer Umgebung des Ursprungs (sogar im ganzen punktierten Raum) beschränkt. Folglich verschwindet das Integral (16) für $r_1 \rightarrow 0$. Andererseits konvergiert der Integrand des linken Integrals von (16) punktweise gegen den von (15) und wird vom Betrag dieses Integranden dominiert. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz ist damit (15) gezeigt.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen:

Satz 4.11. *Der Hamiltonoperator eines spinlosen Punktteilchens im Coulombpotential,*

$$H_C = H_0 + V_C$$

mit $q_1 q_2 \neq 0$, ist ein selbstadjungierter $O(3)$ -Morphismus in $L^2(\mathbf{R}^3)$ und läßt sich in eine direkte Summe

$$H_C = \bigoplus_{l=0}^{\infty} H_{C,l}$$

mit selbstadjungierten $O(3)$ -Morphismen $H_{C,l}$ in $L^2(\mathbf{R}^+, r^2 \lambda) \otimes L^2(S^2)_l$ zerlegen. Für $q_1 q_2 > 0$ besitzt $H_{C,l}$ keine Eigenwerte. Für $q_1 q_2 < 0$ ist das Punktspektrum von $H_{C,l}$ durch

$$\sigma_p(H_{C,l}) = \{E_{n+l+1} : n \in \mathbf{N}\} \quad \text{mit} \quad E_N = -\frac{m(q_1 q_2)^2}{2N^2}$$

gegeben; der Eigenraum zum Eigenwert E_{n+l+1} ist

$$\text{eig}(H_{C,l}, E_{n+l+1}) = \mathbf{C}R_{nl} \otimes L^2(S^2)_l$$

mit R_{nl} wie in (14) und hat die Dimension $2l + 1$. Das Punktspektrum von H_C ist die Vereinigung der Punktspektren der $H_{C,l}$, im Falle $q_1 q_2 > 0$ also leer. Für $q_1 q_2 < 0$ ist

$$\sigma_p(H_C) = \{E_N : N \geq 1\};$$

der Eigenraum zu E_N ist die direkte Summe der Eigenräume der $H_{C,l}$ zum gleichen Eigenwert,

$$\text{eig}(H_C, E_N) = \bigoplus_{l=0}^{N-1} \mathbf{C}R_{N-l-1,l} \otimes L^2(S^2)_l,$$

und hat die Dimension N^2 .

Die im Satz gemachten Behauptungen über die Dimensionen der Eigenräume prüft man leicht nach, da $\dim L^2(S^2)_l = 2l + 1$ ist.

Zahlen wie N und l , mit denen die Eigenvektoren von Hamiltonoperatoren gekennzeichnet werden, heißen Quantenzahlen. N wird Hauptquantenzahl genannt, weil die Energie der Niveaus beim Wasserstoffatom nur von N abhängt, und der Eigenraum von H_C zum Eigenwert E_N Schale. Es zeigt sich, daß alle Zustände einer Schale einen vergleichbaren „Radius“ haben, innerhalb dessen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons merklich von Null verschieden ist. Wie wir in Abschnitt 4.5 sehen werden, gibt das bereits in Gleichung (11) aufgetretene Produkt $l(l+1)$ den Betrag des Bahndrehimpulses eines Teilchens bzw. hier der Relativbewegung an. Aus diesem Grunde nennt man l die Bahndrehimpulsquantenzahl. Die Eigenräume der Operatoren $H_{C,l}$ heißen Unterschalen und werden durch Angabe von N und eines Buchstabens, der die Bahndrehimpulsquantenzahl l festlegt, bezeichnet. Diese Buchstaben haben ihren Ursprung in der Spektroskopie und sind die Anfangsbuchstaben der englischen Attribute, mit denen die Serien von Spektrallinien charakterisiert wurden, die durch Übergänge von Zuständen aus \mathcal{H}_l zu (bestimmten) anderen entstehen. Die Drehimpulse $l = 0, 1, 2, 3$ werden *s(harp)*, *p(rincipal)*, *d(iffuse)* und *f(undamental)* abgekürzt, nach f nimmt man die darauf folgenden Buchstaben im Alphabet. Beispielsweise ist $3d$ die Bezeichnung der Eigenvektoren zum tiefsten Eigenwert von $H_{C,2}$.

Der Begriff „Quantenzahl“ weist darauf hin, daß viele Größen, die in der klassischen Mechanik kontinuierliche Werte annehmen können, in der Quantenmechanik auf gewisse Werte beschränkt, eben „quantisiert“ sind. Die theoretische Erklärung dieses Phänomens, das namensgebend für die ganze Disziplin war, markiert einen Meilenstein in der Entwicklung der Physik.

Haupt- und Bahndrehimpulsquantenzahl zusammen reichen noch nicht, um einen Eigenzustand von H_C eindeutig zu klassifizieren. Das wird die magnetische Quantenzahl m erlauben, auf die wir in Abschnitt 4.6 zu sprechen kommen. Allgemein nennt man einen Eigenwert eines Hamiltonoperators H entartet, wenn der zugehörige Eigenraum mehrdimensional ist. Ist H G -Morphismus für eine Gruppe G , dann sind die Eigenräume G -Untermoduln, und man unterscheidet zwischen minimaler und zufälliger Entartung: Ein Eigenwert heißt minimal entartet, wenn der zugehörige Eigenraum einfacher Untermodul ist, im anderen Fall zufällig entartet. Wie wir gesehen haben, sind die Eigenräume von H_C zufällig entartet.⁵ Diese zufällige Entartung wird bei Atomen mit mehreren Elektronen durch deren gegenseitige Coulombabstoßung aufgehoben, wie in Abschnitt 4.7 ausgeführt wird. Trotzdem benutzt man auch in diesem Falle den Begriff „Schale“ und meint damit die direkte Summe aller Unterschalen zu einem gegebenen Wert der Hauptquantenzahl N .

Für das kontinuierliche Spektrum von H_C gilt

$$\sigma_c(H_C) = \sigma_c(H_0) = [0, \infty). \quad (17)$$

Für den Beweis, der hier nur angedeutet sei, ist der Begriff des **wesentlichen Spektrums** eines Operators $A \in sa(\mathcal{H})$ nützlich: Der Wert $\lambda \in \sigma(A)$ gehört zum wesentlichen Spektrum $\sigma_{\text{ess}}(A)$, falls λ kein Eigenwert endlicher Vielfachheit ist. Die Bezeichnung „wesentliches Spektrum“ kommt daher, daß $\sigma_{\text{ess}}(A)$ unter einer bestimmten Klasse von Störungen, den relativ kompakten Störungen, stabil bleibt (Weylsches Theorem). Weil das Coulombpotential eine relativ kompakte Störung von H_0 ist, gilt demnach

$$\sigma_{\text{ess}}(H_C) = \sigma_{\text{ess}}(H_0).$$

Es ist relativ leicht einzusehen, daß $\sigma(H_0) = \sigma_c(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [0, \infty)$ ist, denn H_0 geht durch Fouriertransformation aus dem Multiplikationsoperator $\frac{1}{2m}\|x\|^2$ hervor (vgl. Satz 1.19). Da wir das Punktspektrum von H_C bereits kennen, folgt damit (17). Mehr über relativ kompakte Störungen und das Weylsche Theorem ist in [HS96, Ch. 14] zu finden.

Literatur: [LS75, Sec. V.7], [Ste94, Sec. 4.5], [Tri72, § 36], [Wei76, Abschnitt 10.5]

4.5 Tensoroperatoren

In Abschnitt 4.3 haben wir unbeschränkte G -Morphismen als diejenigen Operatoren in \mathcal{H} kennengelernt, die unter Konjugation mit Operatoren der Form $T(g)$ invariant sind. Jetzt wenden wir uns Operatoren mit einem reichhaltigeren Transformationsverhalten zu.

⁵Hier stellt sich natürlich – wie bei jeder zufälligen Entartung – die Frage, ob die Entartung nicht minimal bezüglich einer größeren Gruppe $G \supset O(3)$ ist. In diesem Fall hätte man die Symmetrie von H durch $O(3)$ nicht vollständig beschrieben. Tatsächlich kann man auf dem Unterraum von $L^2(\mathbf{R}^3)$, der im Sinne des meßbaren Funktionalkalküls zur Indikatorfunktion des negativen Teils des Spektrums von H_C gehört, (d. h. auf der direkten Summe aller Eigenräume) unter Zuhilfenahme des Runge-Lenz-Vektors eine Darstellung von $SO(4)$ erklären, bezüglich der die Eigenräume von H_C einfach sind [GP90, Sec. 6.7], [GS90].

Definition. Sei G eine Gruppe, T eine Darstellung von G in \mathcal{H} und $D \subset \mathcal{H}$ ein T -stabiler, dichter Unterraum. Eine Abbildung

$$R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$$

von einem endlichdimensionalen G -Modul W in die Menge der dicht definierten Operatoren in \mathcal{H} , die auf D definiert sind und D stabilisieren, heißt **komplexer Tensoroperator** (oder *representation operator*) zu T , falls die Abbildung

$$W \rightarrow \text{End}(D), \quad w \mapsto R(w)|_D,$$

ein Morphismus von algebraischen G -Moduln ist, wobei G auf $\text{End}(D)$ vermöge $\text{In} \circ T$ wirkt. Wenn W ein endlichdimensionaler reeller G -Modul ist und R eine Abbildung von W in die Menge der hermiteschen Operatoren in \mathcal{H} , so nennt man R unter den ansonsten gleichen Bedingungen einen **reellen Tensoroperator** zu T . (In diesem Fall faßt man $\text{End}(D)$ als reellen algebraischen G -Modul auf.)

Ist $R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ ein reeller oder komplexer Tensoroperator zu T , so gelten für alle $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ bzw. \mathbf{C} , $g \in G$ und $u \in D$

$$\begin{aligned} R(\lambda v + \mu w)u &= \lambda R(v)u + \mu R(w)u & \text{und} \\ R(gv)u &= T(g)R(v)T(g^{-1})u. \end{aligned}$$

In den Beispielen aus der Quantenmechanik werden ausschließlich reelle Tensoroperatoren auftreten. Aus mathematischer Sicht lassen sich einige Sätze aber einfacher für komplexe Tensoroperatoren formulieren. Dabei ist klar, daß man durch Komplexifizierung und lineare Fortsetzung aus jedem reellen Tensoroperator $R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ einen komplexen Tensoroperator $R_{\mathbf{C}}: W_{\mathbf{C}} \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ gewinnen kann. Falls aus dem Kontext ersichtlich ist, auf welche Darstellung bei einem Tensoroperator bezug genommen wird, werde ich einfach von einem Tensoroperator zu G oder schlicht von einem Tensoroperator sprechen.

Beispiel 4.12. Jeden hermiteschen G -Morphismus A kann man als reellen Tensoroperator zur trivialen Darstellung von G auf \mathbf{R} auffassen vermöge der Abbildung $R: \lambda \mapsto \lambda A$. Analog bestimmt jeder unbeschränkte G -Morphismus einen komplexen Tensoroperator.

Beispiel 4.13 (adjungierter Tensoroperator). Sei T Darstellung einer Liegruppe G in \mathcal{H} mit (nach der in Abschnitt 3.2 getroffenen Vereinbarung T -stabilem) determinierenden Bereich D für die Liealgebrendarstellung LT . Dann ist

$$iLT: LG \rightarrow sa_D(\mathcal{H}), \quad X \mapsto iLT(X),$$

ein reeller Tensoroperator, wobei LG G -Modul vermöge der adjungierten Darstellung von G ist. Auf diese Weise bekommt man zu jeder Darstellung einer Liegruppe in kanonischer Weise einen Tensoroperator geliefert, den **adjungierten Tensoroperator**. Die geforderten Eigenschaften eines Tensoroperators ergeben sich direkt aus der Definition einer Liealgebrendarstellung und aus Lemma 3.4.

Beispiel 4.14 (Drehimpulsoperatoren). Wie in der klassischen Mechanik gibt es auch in der Quantenmechanik einen Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls eines Teilchens und den Generatoren von Drehungen. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$ der Hilbertraum eines quantenmechanischen Systems mit Spin. Der **Bahndrehimpulsoperator** L ist der adjungierte Tensoroperator zur Darstellung T_L von $O(K)$ oder $Spin(K)$. Zu jedem $X \in so(K)$ gibt $L(X)$ den Bahndrehimpuls bezüglich X an. (Die Drehimpulsoperatoren L_x, L_y und L_z , wie man sie in Lehrbüchern der Quantenmechanik findet, sind in der hier verwendeten Notation die Operatoren $L(Z_k)$ mit der in Abschnitt 3.5 definierten Basis (Z_k) .) Für $u \in C_c^\infty(K)$ und $X \in spin(K) \subset \text{End}(K)$ ist

$$L(X)u = -iX_K[u] = -iT_x \cdot X, \quad \text{d. h.} \quad (L(X)u)(x) = -iT_x u \cdot Xx.$$

Konkret gilt für $K = \mathbf{R}^3$

$$L(Z_3)u = -i \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right),$$

ebenso für zyklische Permutationen der Indizes.

Der selbstadjungierte Operator $2LT_L(C)$, das Zweifache des Casimir-Elementes zur Darstellung T_L , gehört zur Observablen „Betrag des Bahndrehimpulses“. In der l -isotypischen Komponente \mathcal{H}_l ist $2LT_L(C)$ gerade die Skalierung mit $l(l+1)$. Die Zerlegung von \mathcal{H} in die isotypischen Komponenten bezüglich T_L bedeutet physikalisch eine Trennung in Zustände mit verschiedenen großen Bahndrehimpulsen, daher auch der

Name „Bahndrehimpulsquantenzahl“ für l . Daß das Casimir-Element zum Betrag des Bahndrehimpulses gehört, wird am Ende dieses Abschnittes nachvollziehbar werden bei der Diskussion von „Skalarprodukten“ $\langle L, L \rangle$ von Tensoroperatoren.

Der adjungierte Tensoroperator zur Darstellung T_S von $Spin(K)$ heißt **Spinoperator** S und der zu T_J **Gesamtdrehimpulsoperator** J . Die Bezeichnung „Gesamtdrehimpuls“ bezieht sich auf die Tatsache, daß sowohl Bahndrehimpuls als auch Spin berücksichtigt sind. Besteht das System aus mehreren Teilchen, so beschreibt L die Summe der Bahndrehimpulse der einzelnen Teilchen und S die der Spins. Wenn in einem Mehrteilchensystem der Form $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ auf ein bestimmtes Teilchen Bezug genommen wird, schreibe ich zum Beispiel L_k für den Bahndrehimpulsoperator zum k -ten Teilchen. Da für jedes $X \in spin(K)$ der Operator $S(X)$ beschränkt ist, gilt

$$J(X) = L(X) + S(X) \quad \text{mit} \quad \text{dom}(J(X)) = \text{dom}(L(X)); \quad (18)$$

zudem vertauschen die Operatoren $L(X)$ und $S(Y)$ auf $\text{dom}(L(X))$ für alle $X, Y \in spin(K)$. Die Operatoren $2LT_S(C)$ und $2LT_J(C)$ werden als Beträge des Spins und des Gesamtdrehimpulses interpretiert. Analog zur Bahndrehimpulsquantenzahl l führt man zudem die Spinquantenzahl s und die Gesamtdrehimpulsquantenzahl j ein.

Die Drehimpulsoperatoren werden auch zur Beschreibung von geladenen Teilchen in einem homogenen Magnetfeld $B \in \wedge^2 K'$ benötigt. Dabei identifiziere ich $\wedge^2 K'$ mit $spin(K)$ vermöge des Isomorphismus von $Spin(K)$ -Moduln⁶

$$\wedge^2 K' \rightarrow spin(K) \subset \text{End}(K), \quad x' \wedge y' \mapsto (z \mapsto \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x)$$

(vgl. [FH91, S. 303]; x und y sind die Urbilder von x' und y' unter der kanonischen Abbildung $K \rightarrow K'$). Im Falle eines Teilchens mit Ladung q und Masse m ist

$$W_L(B) = -\frac{q}{2m}L(B) = -\gamma_L L(B)$$

die Wechselwirkungsenergie zwischen dem Magnetfeld und dem durch den Bahndrehimpuls induzierten magnetischen Moment. Der Faktor $\gamma_L = \frac{q}{2m}$ heißt gyromagnetisches Verhältnis und beschreibt wie in der klassischen Elektrodynamik das Verhältnis zwischen dem Bahndrehimpuls und dem magnetischen Moment. Oft gibt man das gyromagnetische Verhältnis als Vielfaches von $\frac{q}{2m}$ an und nennt es dann den Landéschen g -Faktor. Der g -Faktor zum Bahndrehimpuls des Elektrons ist (wie bei jedem Punktteilchen) gleich 1 und das gyromagnetische Verhältnis gleich dem negativen des Bohrschen Magnetons $\mu_B = \frac{e}{2m_e}$. Auch der Spin wechselwirkt mit einem Magnetfeld, hier ergibt sich in Analogie zu oben der Ausdruck

$$W_S(B) = -\gamma_S S(B),$$

allerdings mit einem anderen gyromagnetischen Verhältnis γ_S , zum Beispiel $\gamma_S \approx 2\gamma_L$ für Elektronen. Die Summe

$$W_J = W_L + W_S,$$

die die gesamte Wechselwirkung eines Teilchens mit einem Magnetfeld beschreibt, heißt **magnetischer Dipoloperator**.

Für einen Normalteiler $N \triangleleft G$ ist $LN \triangleleft LG$ Ad-stabil. In diesem Fall ist die Einschränkung des adjungierten Tensoroperators auf LN ein Tensoroperator bezüglich G und jeder Untergruppe davon.

Beispiel 4.15 (Impulsoperator). Die Euklidische Gruppe $E(K)$ (Beispiel 4.5) besitzt eine kanonische Darstellung in \mathcal{H}_K . Die Einschränkung des zugehörigen adjungierten Tensoroperators auf $LK = K$ ist der **Impulsoperator**

$$\begin{aligned} P: LK = K &\rightarrow sa_D(\mathcal{H}), \\ P(x)u &= -iT u \cdot x \quad \text{für } u \in D = C_c^\infty(K). \end{aligned}$$

Man faßt P in der Regel als Tensoroperator zu $O(K)$ (d. h. zur Darstellung T_L) auf, weil die K -Modulstruktur trivial ist.

⁶Berücksichtigt man zusätzlich das in Abschnitt 3.5 definierte Skalarprodukt in $spin(K)$ und das kanonische Skalarprodukt in $\wedge^2 K'$ [AMR88, Prop. 6.2.11; es ist gerade das von $K' \otimes K'$ induzierte], so ist der Isomorphismus auch isometrisch. Man beachte zudem, daß $\wedge^2 K'$ im Gegensatz zu $spin(K)$ zwar eine $O(K)$ -Modulstruktur trägt, jedoch mit positiver Parität. Die Frage, wie man die Rauminversion in $spin(K)$ darstellen soll, beantwortet sich damit auf triviale Weise.

Als nächstes wenden wir uns Multiplikationsoperatoren zu. Sei \mathcal{L} der Vektorraum der Lebesgue-meßbaren Funktionen auf dem Einteilchenkonfigurationsraum K (modulo Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maß 0 unterscheiden). Die Gruppe $O(K)$ wirkt in kanonischer Weise auf \mathcal{L} , und für jedes $f \in \mathcal{L}$ und $g \in G$ gilt für die Operatoren in \mathcal{H}_K

$$M_{gf} = \text{In}(g)M_f.$$

(Dies beweist man wie in Beispiel 4.4.) Damit stehen die Chancen, auf diese Weise Tensoroperatoren zu T_L zu erhalten, nicht schlecht. Allerdings muß man sich gemäß der Definition von Tensoroperatoren auf endlichdimensionale Untermoduln von \mathcal{L} beschränken:

Beispiel 4.16 (Ortsoperator). Die Abbildung

$$T_X: K' \rightarrow U(L^2(K)), \quad \tau \mapsto M_{e^{-i\tau}}$$

ist eine Darstellung von K' (vgl. den Beweis von Satz 3.7); der zu T_X adjungierte Tensoroperator heißt **Ortsoperator** X . Es gilt

$$X(\tau) = M_\tau.$$

Auch hier ist die Modulstruktur auf K' zunächst trivial. Nach der oben angestellten Überlegung ist X aber $O(K)$ -Tensoroperator. Der Vorteil davon, X als adjungierten Tensoroperator einer Darstellung einzuführen, liegt darin, daß damit automatisch die Frage der Selbstadjungiertheit (bzw. der Hermitizität) beantwortet ist.

Der **elektrische Dipoloperator** $-qX$ zu einem Teilchen mit Ladung q tritt bei homogenen elektrischen Feldern auf. In einem solchen Feld der Stärke $E \in \bigwedge^1 K' = K'$ gibt $-qX(E)$ die Wechselwirkungsenergie des Teilchens mit dem Feld an.

Man beachte, daß der Ortsoperator – wie alle Tensoroperatoren – diejenige Abbildung ist, die jedem Vektor τ einen Operator $X(\tau)$ im Hilbertraum zuordnet. Der in Abschnitt 4.1 als Beispiel angegebene Ortsoperator in einer Raumdimension würde mit der jetzt getroffenen Definition als $X(e_1)$ geschrieben werden mit dem kanonischen Basisvektor $e_1 = 1$ von \mathbf{R} .

Beispiel 4.17 (Multipoloperatoren). Als Verallgemeinerung des vorhergehenden Beispiels betrachten wir den $O(K)$ -Modul $H^l(K, \mathbf{R})$ der harmonischen Polynome l -ten Grades auf K mit reellen Koeffizienten. Man bekommt zu einem Teilchen mit Ladung q eine Familie von elektrischen **Multipoloperatoren** genannten reellen Tensoroperatoren

$$Q^{(l)}: H^l(K, \mathbf{R}) \rightarrow sa_D(L^2(K)), \quad h \mapsto -qM_h,$$

etwa mit dichtem Unterraum $D = C_c^\infty(K)$ [Beispiel 1.20]. Definiert man die **Parität** eines $O(K)$ -Tensoroperators $R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ als die Parität von W (vgl. Abschnitt 3.5), dann hat der Multipoloperator $Q^{(l)}$ die Parität $(-1)^l$.

Diese Operatoren treten bei geladenen quantenmechanischen Systemen mit äußerem elektrostatischen Potential ϕ auf. In Raumbereichen, die frei von den das Potential erzeugenden Ladungen sind, ist ϕ harmonisch. Setzt man ϕ in einem derartigen Gebiet, etwa in einer Umgebung des Koordinatenursprunges, als reell analytisch voraus, dann muß jedes einzelne homogene Taylorpolynom $p^{(l)}$ harmonisch sein, denn

$$\Delta\phi = \Delta \sum_l p^{(l)} = \sum_l \Delta p^{(l)} = 0 \implies \Delta p^{(l)} = 0 \quad \text{für alle } l.$$

Die Taylorentwicklung liefert vermöge der Multipoloperatoren eine Familie von Multiplikationsoperatoren

$$Q^{(l)}(p^{(l)})$$

in $L^2(K)$. Man kann nun das exakte Potential ϕ durch eine endliche Taylorreihe approximieren in der Hoffnung, daß die zeitliche Entwicklung des Systems mit dem approximierten Potential eine Näherung der des wahren Systems ist. Der Vorteil der Multipoloperatoren liegt in ihrem einfachen Transformationsverhalten unter $O(K)$, so daß man gut darstellungstheoretische Methoden anwenden kann, wie wir im folgenden sehen werden.

Sind \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 G -Moduln und $R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H}_1)$ ein Tensoroperator zu G , dann erhält man zur Darstellung von G in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ einen Tensoroperator

$$\tilde{R}: W \rightarrow L_{\tilde{D}}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), \quad w \mapsto \tilde{R}(w) = R(w) \otimes^a 1,$$

mit $\tilde{D} = D \otimes^a \mathcal{H}_2$. Sind alle Operatoren $R(w)$ sogar selbstadjungiert (wie etwa bei adjungierten Tensoroperatoren), dann sei die Fortsetzung \tilde{R} durch $\tilde{R}(w) = R(w) \otimes 1$ gegeben, so daß man wieder selbstadjungierte Operatoren erhält. Ich werde diese Erweiterungen von Tensoroperatoren oftmals nicht mit eigenen Namen kennzeichnen. Man kann also die in den Beispielen 4.14 bis 4.17 definierten Tensoroperatoren wahlweise als solche zur Darstellung T_L in \mathcal{H}_K oder $\mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$ oder zur Darstellung T_J in $\mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$ auffassen.

In der Quantenmechanik, etwa bei der Störungstheorie (Abschnitt 4.7), ist man häufig an **Matrixelementen** genannten Ausdrücken der Form $\langle v, Au \rangle$ mit $A \in sa(\mathcal{H})$, $u \in \text{dom}(A)$ und $v \in \mathcal{H}$ interessiert. (Dieser physikalische Gebrauch des Begriffes „Matrixelement“ ist von der Definition auf Seite 28 zu trennen. Aus dem Kontext wird allerdings immer hervorgehen, welche Bedeutung gemeint ist.) Ist nun $R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ ein komplexer Tensoroperator, so bekommt man eine Abbildung

$$\mathcal{H} \times W \times D \rightarrow \mathbf{C}, \quad (v, w, u) \mapsto \langle v, R(w)u \rangle, \quad (19)$$

die antilinear im ersten Argument und linear in den beiden übrigen ist. Ich bezeichne Abbildung (19) (und mögliche Einschränkungen davon auf Untermoduln von \mathcal{H} bzw. D) als **Matrixelementenabbildung** zu R . Jede Matrixelementenabbildung bestimmt durch Übergang zum Dualraum im ersten Argument eine trilineare Abbildung $\mathcal{H}' \times W \times D \rightarrow \mathbf{C}$, die im algebraischen Sinn G -Morphismus ist, wenn man \mathbf{C} als trivialen G -Modul auffaßt.

Eine ähnliche Situation liegt bei Erwartungswerten vor: Ein reeller oder komplexer Tensoroperator $R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ induziert für jedes $u \in D$ eine lineare Abbildung $E_R(u): W \rightarrow \mathbf{R}$ bzw. \mathbf{C} , $w \mapsto E(R(w), u)$. (Da die Operatoren $R(w)$ bei einem reellen Tensoroperator hermitesch sind, bildet in diesem Fall $E_R(u)$ tatsächlich nach \mathbf{R} ab. Aus genau diesem Grunde wurde in der Definition von reellen Tensoroperatoren die Hermitizität gefordert.) Man erhält eine Abbildung von G -Mengen

$$E_R: D \rightarrow W', \quad u \mapsto E_R(u).$$

Daß E_R nur Abbildung von G -Mengen ist, liegt an der fehlenden Linearität in u .

Korollar 4.18. *Sei \mathcal{H} G -Modul, $R: LG \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ der adjungierte Tensoroperator und H ein selbstadjungierter G -Morphismus derart, daß $D \subset \text{dom}(H)$ von H und $\exp(-itH)$ stabilisiert wird.⁷ Dann gilt*

$$E_R \circ \exp(-itH) = E_R$$

für alle $t \in \mathbf{R}$.

Wenn H der Hamiltonoperator des Systems ist, sind die Werte $E_R(\exp(-itH)u)(X)$ für $u \in D$ also Konstanten der Bewegung. Dies ist die quantenmechanische Version des Noetherschen Theorems.

Beweis. Weil H selbstadjungierter G -Morphismus ist, bekommt man eine Darstellung von $G \times \mathbf{R}$ in \mathcal{H} [Korollar 4.8]. Dabei kann man R als Einschränkung des adjungierten Tensoroperators zu $G \times \mathbf{R}$ auffassen. Also ist

$$E_R(\exp(-itH)u) = \text{Ad}(t)E_R(u) = E_R(u),$$

da \mathbf{R} auf LG trivial wirkt. □

Beispiel 4.19. Der Hamiltonoperator H_0 eines freien Teilchens ist selbstadjungierter $E(K)$ -Morphismus [Beispiel 4.5]. Folglich sind Impuls- und Drehimpulserwartungswerte Konstanten der Bewegung.

Beispiel 4.20 (Spinpräzession). Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$ der Hilbertraum zur Beschreibung eines Systems mit Spin. Der Hamiltonoperator sei von der Form

$$H = H_K \otimes 1 + W_S(B) = H_K \otimes 1 - 1 \otimes \gamma_S S(B)$$

⁷Diese Bedingung ist nicht wirklich von Bedeutung und dient hier nur dazu, den Beweis in der Terminologie der Tensoroperatoren zu führen, weil meiner Ansicht nach die zugrunde liegenden Strukturen auf diese Weise deutlicher zutage treten. Letztlich genügt $u \in \text{dom}(R(X))$ für ein $X \in LG$, um die zeitliche Konstanz von $E(R(X), \exp(-itH)u)$ zu beweisen.

etwa $H_K = H_0 - \gamma_L L(B)$ für ein Teilchen in einem homogenen Magnetfeld $B \in \bigwedge^2 K'$ (vgl. nächsten Abschnitt). Die Zeitentwicklung wird dann durch

$$\exp(-itH) = \exp(-itH_K) \otimes \exp(it\gamma_S S(B))$$

beschrieben. Bezüglich des Erwartungswertes des Spins gilt für normiertes $u \in \mathcal{H}$ und $X \in \mathfrak{spin}(K)$

$$\begin{aligned} E_S(\exp(-itH)u)(X) &= \langle \exp(-itH)u, S(X) \exp(-itH)u \rangle \\ &= \langle \exp(it\gamma_S S(B))u, (\text{In}(\exp(itH_K)S(X)) \exp(it\gamma_S S(B))u) \rangle \\ &= \langle \exp(it\gamma_S S(B))u, S(X) \exp(it\gamma_S S(B))u \rangle \\ &= E_S(\exp(it\gamma_S S(B))u)(X). \end{aligned} \quad (20)$$

Dabei wurde S in Zeile (20) als Tensoroperator zu dem Tensorprodukt von Darstellungen

$$\mathbf{R} \times \text{Spin}(K) \rightarrow U(\mathcal{H}), \quad (t, g) \mapsto \exp(itH_K) \otimes T_S(g),$$

aufgefaßt. Nun ist aber

$$\exp(it\gamma_S S(B)) = \exp(LT_S(-t\gamma_S B)) = T_S(\exp(-t\gamma_S B)),$$

so daß man schließlich

$$E_S(\exp(-itH)u) = \exp(-t\gamma_S B)E_S(u).$$

erhält. Der Erwartungswert beschreibt eine Bahn in $\mathfrak{spin}(K)'$ unter der koadjungierten Darstellung. Der Zustand $u \in \mathcal{H}$ tritt nur noch insofern in Erscheinung, als er den Anfangswert $E_S(u)$ bestimmt. Durch Symmetrieüberlegungen kann man also die Dynamik vom unendlichdimensionalen Raum \mathcal{H} auf den Dualraum der Liealgebra zurückspielen.

Stellt man sich das Funktional $E_S(\exp(-itH)u)$ als einen Vektor im \mathbf{R}^3 vor vermöge des Isomorphismus $\mathbf{R}^3 \simeq \mathfrak{su}(2)'$ von $SU(2)$ -Moduln (Abschnitt 3.5), so zeigt die letzte Gleichung, daß die Zeitentwicklung dem Präzedieren dieses Vektors um die durch $\gamma_S B$ bestimmte Drehachse mit der Winkelgeschwindigkeit $\|\gamma_S B\|$ entspricht.

In diesem Beispiel wurde nebenbei gezeigt, daß bei einem zusammengesetzten System ohne Wechselwirkung, also mit Hamiltonoperator $H_1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2$, die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte eines Teilsystems unabhängig von dem anderen Teilsystem ist. Genau das würde man bei Fehlen jeglicher Wechselwirkung erwarten.

Wenn man in der Definition von E_R auf die Normierung von u verzichtet, also $E_R(u)(w) = \langle u, R(w)u \rangle$ setzt, dann bekommt man im Falle eines adjungierten Tensoroperators eine äquivariante Impulsabbildung (*equivariant momentum map*).⁸ Solche Abbildungen treten auch in der klassischen Mechanik auf: Bei einem Teilchen mit Phasenraum $K \times K'$ (Kotangentialbündel) ist $E_X = \text{pr}_K$ die Projektion auf die erste Komponente von $K \times K'$ [$K'' = K$], $E_P = \text{pr}_{K'}$ und $E_L(x, p)(X) = p(Xx)$. Um die letzte Formel einzusehen, schreibe man neben $x = \vec{x}$ auch p und (vermöge des Isomorphismus $\mathbf{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)$ aus Abschnitt 3.5) X als Vektoren $\vec{p}, \vec{X} \in K$. Dann ist

$$p(Xx) = \langle \vec{p}, \vec{X} \times \vec{x} \rangle = \langle \vec{X}, \vec{x} \times \vec{p} \rangle;$$

dem Funktional $E_L(x, p)$ entspricht also der klassische Drehimpulsvektor $\vec{x} \times \vec{p}$.

Literatur: [Ste94, Sec. 3.6]

⁸Daß die Äquivarianz der Abbildung E_R gesondert angegeben wird, deutet darauf hin, daß die charakteristische Eigenschaft einer Impulsabbildung eine andere ist: Hat man eine G -Wirkung auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit M derart, daß die symplektische Form G -invariant ist, dann heißt $J: M \rightarrow \mathfrak{g}'$ Impulsabbildung zu G , wenn für jedes $X \in \mathfrak{g}$ das Hamiltonsche Vektorfeld zu der Funktion $x \mapsto J(x)(X)$ auf M gleich dem Killingschen Vektorfeld X_M ist. Diese Bedingung ist hier (modulo der Schwierigkeiten mit Definitionsbereichen) mit der in Abschnitt 4.1 angegebenen symplektischen Form ω erfüllt, denn beide Vektorfelder ergeben sich zu $u \mapsto LT(X)u$. Mehr über Impulsabbildungen einschließlich Beispielen aus der Quantenmechanik findet man in [MR94, Ch. 11].

4.6 Der Zeeman-Effekt

Setzt man Atome einem äußeren Magnetfeld aus, dann zeigen ihre Spektren eine Aufspaltung der Linien in viele neue. Für die Spektroskopie ist dieser sogenannte Zeeman-Effekt von Bedeutung, weil man aus seiner Beobachtung Rückschlüsse auf den (Gesamt-)Drehimpuls eines Zustandes und das gyromagnetische Verhältnis ziehen kann. In Abschnitt 4.9 werden wir den Zeeman-Effekt für schwache Magnetfelder mit Hilfe der Störungstheorie untersuchen. Bei zentralsymmetrischen Potentialen kann die Rechnung jedoch für beliebige homogene Magnetfelder exakt durchgeführt werden. Wir nehmen im folgenden ein Coulombpotential an; die Rechnung läßt sich aber leicht auf andere Potentiale übertragen. Das Ergebnis, das wir erhalten werden, beschreibt die Aufspaltung der Energieniveaus beim Wasserstoffatom. Einzige Näherung dabei ist, daß man das Proton als unendlich schwer und damit ruhend annimmt, also mit dem Schwerpunkt gleichsetzt. Der Grund dafür liegt darin, daß bei Anwesenheit eines Magnetfeldes die Variablenseparation nicht mehr möglich ist. Diese Näherung ist aber wegen der fast zweitausendfachen größeren Masse des Protons gegenüber dem Elektron gerechtfertigt.

Wir betrachten zunächst den Fall eines spinlosen Teilchens im Coulombpotential und mit Magnetfeld $B \in \wedge^2 \mathbf{R}^3$. Da die Wechselwirkungsenergie des Teilchens mit dem Magnetfeld durch den Operator $W_L(B)$ gegeben ist, liegt es nahe, den Operator

$$H_Z = H_C + W_L(B) = H_0 + \frac{q_1 q_2}{\|x\|} - \gamma_L L(B)$$

in $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^3)$ zu betrachten. Dabei ist als erstes ein Definitionsbereich anzugeben und die Frage der Selbstadjungiertheit zu klären. Wir wissen bereits, daß sich der $O(3)$ -Morphismus H_C als direkte Summe

$$H_C = \bigoplus_{l=0}^{\infty} H_{C,l}$$

schreiben läßt. Da auch $W_L(B)$ eine Darstellung der Form

$$W_L(B) = - \bigoplus_{l=0}^{\infty} \gamma_L L_l(B)$$

mit sogar beschränkten Summanden $L_l(B) = iLT_{L,l}(B)$ zuläßt [Satz 3.17], ist

$$H_Z := \overline{H_C + W_L(B)} = \bigoplus_l (H_{C,l} - \gamma_L L_l(B))$$

selbstadjungiert mit determinierendem Bereich $D_X \cap \text{dom}(H_0)$.⁹

Sei $SO(2) \simeq G < SO(3)$ die zusammenhängende Untergruppe mit $LG = \mathbf{R}B$. Wie in Abschnitt 3.5 bemerkt wurde, ist die isotypische Zerlegung des G -Moduls \mathcal{H} ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \mathcal{H}_m = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \bigoplus_{l \geq |m|} \mathcal{H}_{l,m},$$

gleichzeitig die Gewichtszerlegung bezüglich B ,

$$L(B)u = iLT_L(B)u = mu \quad \text{für } u \in \mathcal{H}_m$$

(vgl. Gleichung (3.7) und beachte den Faktor i bei der Definition des adjungierten Tensoroperators). H_Z ist ein selbstadjungierter G -Morphismus [$\text{In}(g)L(B) = L(\text{Ad}(g)B) = L(B)$] und schreibt sich bei obiger Zerlegung als direkte Summe

$$H_Z = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \bigoplus_{l \geq |m|} (H_{C,l,m} - \gamma_L \|B\| m).$$

Die Zahl m , die dabei die G -isotypischen Komponenten kennzeichnet, heißt magnetische (Bahndrehimpuls-)Quantenzahl. Innerhalb eines einfachen $Spin(3)$ -Moduls nimmt m die Werte $-l, \dots, l$ an. Physikalisch ist m die Projektion des als Vektor gedachten Drehimpulses auf die durch B gegebene Achse.¹⁰

⁹Bemerkt man, daß $C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ dicht liegt im Hilbertraum $W^2(\mathbf{R}^3)$, so ist es nicht schwer zu zeigen, daß $C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ ein determinierender Bereich von H_Z ist [Tri72, Lemma 37.1].

¹⁰Hätte man in Gleichung (3.5) auf das Minuszeichen verzichtet, dann würde es jetzt auftreten, und die magnetische Quantenzahl wäre $-m$. Diese Situation illustriert die generelle Schwierigkeit, daß aus mathematischer Sicht die schiefadjungierten Operatoren das Primäre sind, vom physikalischen Standpunkt die selbstadjungierten.

Wie in der klassischen Elektromechanik ist die Ausrichtung eines magnetischen Dipols parallel zum Magnetfeld energetisch am günstigsten.

Nun ist jede Lösung $u \in \text{dom}(H_{Z,l,m})$ von

$$H_{Z,l,m}u = (H_{C,l,m} - \gamma_l \|B\|m)u = Eu \quad (21)$$

Lösung von

$$H_{C,l}u = E'u \quad \text{mit} \quad E' = E + \gamma_L \|B\|m.$$

Also ist $E' = E_{n+l+1}$ für ein n , und u liegt im eindimensionalen G -Untermodul

$$\text{eig}(H_{C,l,m}, E_{n+l+1}) = \mathbf{C}R_{nl} \otimes L^2(S^2)_{l,m}. \quad (22)$$

Da umgekehrt jedes Element dieses Untermoduls Gleichung (21) erfüllt, folgt für das Punktspektrum von H_Z

$$\sigma_p(H_Z) = \{E_{n+l+1} - \gamma_L \|B\|m : n \geq 0, l \geq 0, |m| \leq l\}.$$

Unter dem Einfluß des Magnetfeldes spaltet also ein Energieniveau in $2l + 1$ äquidistante neue auf; der Abstand benachbarter Niveaus ist proportional zur Magnetfeldstärke. Die Angabe der magnetischen Quantenzahl zusätzlich zu Haupt- und Bahndrehimpulsquantenzahl ermöglicht eine eindeutige Notation für die Eigenvektoren von H_C und H_Z .

Im allgemeinen ist der Eigenraum zu einem Eigenwert $E \in \sigma_p(H_Z)$ eindimensional und durch Gleichung (22) gegeben. In diesem Fall sagt man, daß das Magnetfeld die Entartung der Niveaus vollständig aufgehoben hat. Dies trifft nicht zu, wenn mehrere Tripel (n, l, m) den gleichen Eigenwert $E_{n+l+1} - \gamma_L \|B\|m$ bestimmen. Man überlegt sich aber leicht, daß die Eigenräume von H_Z stets endlichdimensional sind.

An dieser Stelle ist eine Bemerkung über die Motivation des Spins in der Quantenmechanik angebracht: Da die Bahndrehimpulsquantenzahl l ganzzahlig ist, spaltet ein Niveau in einem homogenen Magnetfeld gemäß obiger Beschreibung in eine *ungerade* Anzahl neuer Niveaus auf. Das widerspricht dem experimentellen Befund: Beim Wasserstoff ist die Anzahl der neuen Niveaus stets gerade, so wie bei allen Atomen mit einer ungeraden Anzahl Elektronen. Bei einer geraden Anzahl Elektronen entsteht eine ungerade Anzahl an Niveaus. Das deutet darauf hin, daß der Drehimpuls eines Elektrons nur halbzahlige Werte annehmen kann. Weil beim Wasserstoff die Niveaus mit $l = 0$ in zwei Linien aufspalten, schreibt man dem Elektron den Eigendrehimpuls (Spin) $s = 1/2$ zu. Aus der Clebsch-Gordan-Zerlegung von $SU(2)$ -Moduln ergibt sich dann, daß der Gesamtdrehimpuls j eines Elektrons stets halbzahlige Werte annehmen kann. Wie wir in Abschnitt 4.9 sehen werden, läßt sich die Berechnung der Aufspaltung unter Bezug auf den Gesamtdrehimpuls in im wesentlichen gleicher Weise durchführen, so daß man für ein Elektron tatsächlich eine Aufspaltung in eine gerade Anzahl Linien erhält. Weil die Bahndrehimpulsoperatoren Generatoren von $SO(3)$ -Darstellungen sind, ergänzt man den Zustandsraum eines Elektrons um einen einfachen $Spin(3)$ -Modul $U_{1/2}$ als Faktor im Tensorprodukt. Die Verallgemeinerung auf Teilchen mit höherem Spin ist klar.

Besitzt das Teilchen den Spin s , dann muß zusätzlich der Energieterm $W_S(B)$ berücksichtigt werden. Damit gelangt man zum Operator

$$H_{Z,S} = H_Z + W_S(B) = \overline{H_C + W_J(B)}$$

in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K \otimes U_s$. (Im rechten Teil der Gleichung ist der Abschluß nötig, weil die nach Satz 3.13 getroffene Vereinbarung hier nicht zutrifft.) Mit der Bezeichnung $G' \simeq U(1)$ für die zusammenhängende Untergruppe von $Spin(3)$ mit $LG' = \mathbf{R}B$ (G' überlagert G) schreibt sich dieser als direkte Summe

$$H_{Z,S} = \bigoplus_{m_s=-s}^s (H_Z - \gamma_S \|B\|m_s)$$

in der durch die isotypische Zerlegung von U_s als G' -Modul induzierten Zerlegung von \mathcal{H} . Also ist

$$\sigma_p(H_{Z,S}) = \bigcup_{m_s} (\sigma_p(H_Z) - \gamma_S \|B\|m_s);$$

die Eigenräume ergeben sich mit den gleichen Überlegungen wie für H_Z aus denen von H_C . Die Zahl m_s heißt magnetische Spinquantenzahl; zur besseren Unterscheidung schreibt man die magnetische Bahndrehimpulsquantenzahl oft als m_l .

Literatur: [Tri72, § 37]

4.7 Störungstheorie

Die allermeisten Probleme in der Quantenmechanik lassen sich nicht exakt lösen, so daß man auf Näherungsverfahren angewiesen ist, und zwar bei der Lösung sowohl der zeitunabhängigen als auch der zeitabhängigen Schrödingergleichung. In beiden Fällen geht man von einem Hamiltonoperator H , den man bereits „gut kennt“, und einer im Vergleich zu H „kleinen“ Störung W , etwa einem zusätzlichen Potential, aus und versucht dann, Aussagen über den Operator $H' = H + W$ zu machen.

Zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung dient die zeitabhängige Störungstheorie. Um eine Lösung des Anfangswertproblems

$$i \frac{d}{dt} w(t) = H' w(t) = (H + W) w(t), \quad w(0) = u, \quad (23)$$

zu bestimmen, sucht man eine Lösung $w(t)$ der Form

$$w(t) = \exp(-itH)v(t)$$

(Variation der Konstanten) in der Erwartung, daß sich bei „kleiner“ Störung W die Funktion v nur langsam mit der Zeit ändert. Die resultierende Differentialgleichung für v ,

$$i \frac{d}{dt} v(t) = \exp(itH) W \exp(-itH) v(t),$$

geht man mit dem Picardschen Iterationsverfahren an: Man setzt $v^{(0)}(t) = u$ und bestimmt durch Integration Funktionen $v^{(n)}$, $n \geq 1$, mit

$$i \frac{d}{dt} v^{(n)}(t) = \exp(itH) W \exp(-itH) v^{(n-1)}(t) \quad \text{und} \quad v^{(n)}(0) = u. \quad (24)$$

Anders als beim Satz von Picard-Lindelöf, bei dem Stetigkeit und lokale Lipschitzstetigkeit eines zeitabhängigen Vektorfeldes Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sichern, bleibt im vorliegenden Fall unklar, ob die Folge $(v^{(n)})_n$ überhaupt konvergiert und welche Eigenschaften ein allfälliger Grenzwert besitzt. Um nicht mit leeren Händen dastehen zu müssen, sieht der Physiker darüber hinweg und übersetzt Gleichung (23) unter der Annahme der Existenz einer Orthonormalbasis (e_k) aus Eigenvektoren von H , $H e_k = E_k e_k$, in ein System von skalaren Differentialgleichungen für die Koeffizienten $c_k(t)$ von $v(t) = \sum_k c_k(t) e_k$. Das Resultat ist

$$i \frac{d}{dt} c_k(t) = \sum_l e^{i(E_k - E_l)t} W_{kl} c_l(t), \quad (25)$$

dabei sind $W_{kl} = \langle e_k, W e_l \rangle$ die Matrixelemente von W in das Basis (e_k) . Betrachtet man das System aus dem Blickwinkel der Eigenvektoren von H , so induziert W Übergänge zwischen diesen, weil sie eben nicht Eigenvektoren von H' sind. Nimmt man an, daß sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im dem Eigenzustand e_k befindet, dann ergibt sich als Übergangswahrscheinlichkeit $P_{kl}(t) = |\langle e_l, w(t) \rangle|^2$, das System zum Zeitpunkt t im Zustand e_l zu finden, in linearer Näherung (d. h. ein Iterationsschritt in Gleichung (24)) der Ausdruck

$$P_{kl}(t) \approx \left| \int_0^t e^{i(E_l - E_k)s} W_{lk} ds \right|^2.$$

Insbesondere ist ein Übergang $k \rightarrow l$ in 1. Ordnung Störungstheorie ausgeschlossen, wenn das Matrixelement W_{lk} verschwindet. Es ist klar, daß diese lineare Näherung, wenn sie überhaupt sinnvoll ist, nur für kleine Zeiten das System näherungsweise beschreibt. So kann sich in Anwendungen beispielsweise ergeben, daß $P_{kl}(t)$ linear von t abhängt, was mit der Bedingung $0 \leq P_{kl}(t) \leq 1$ nicht vereinbar ist.

Die zeitabhängige Störungstheorie wird auch angewandt, wenn die Störung selbst zeitabhängig ist, wie etwa bei der Wechselwirkung eines Atoms mit elektromagnetischer Strahlung. Formal macht es in Gleichung (25) keinen großen Unterschied, wenn auch W_{kl} von t abhängt. Allerdings ist bei zeitabhängigen Hamiltonoperatoren Satz 3.7 nicht mehr anwendbar, so daß mathematisch die Frage nach Existenz von Lösungen der Schrödingergleichung neu aufgerollt werden müßte. (Der Eindeutigkeitsbeweis wäre weiterhin gültig.) Aus diesem Grund beschränke ich mich auf zeitunabhängige Hamiltonoperatoren.

Die zeitunabhängige Störungstheorie ist eine Methode zur approximativen Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren von H' . Die recht komplizierte mathematische Begründung dieses Verfahrens geht auf Kato zurück und beruht auf der Potenzreihenentwicklung von Resolventen. Außerdem sind die Voraussetzungen, die dabei an H und W gestellt werden (um dem weiter oben verwandten Begriff „klein“ einen Sinn zu geben), in der Praxis oft nicht erfüllt. Das tut der Popularität der Methode keinen Abbruch, weil die Kenntnis von Spektrum und Eigenräumen in der Quantenmechanik unverzichtbar ist. Auch ich werde nicht in mathematischer Strenge vorgehen und zum Beispiel stets annehmen, daß der Definitionsbereich von W den von H enthält. Durch die zeitunabhängige Störungstheorie erhält man Eigenwerte und -vektoren von H' als Reihen in den Eigenwerten bzw. -vektoren von H . In der ersten Näherung, die oftmals ausreicht, ergibt sich dabei folgendes: Ein Eigenraum $\text{eig}(H, \lambda)$ spaltet im allgemeinen in eine direkte Summe von Eigenräumen $\text{eig}(H', \lambda'_k)$ auf und verschiebt sich, insbesondere geht kein (mit Multiplizitäten gezählter) Eigenwert „verloren“. Mit der Bezeichnung P_λ für die Projektion auf $\text{eig}(H, \lambda)$ sind die Verschiebungen $\lambda'_k - \lambda$ der Eigenwerte (und die neuen Multiplizitäten) gerade die des Operators $P_\lambda W$ in $\text{eig}(H, \lambda)$. Auch die Eigenräume von H' lassen sich aus der Kenntnis von H und W berechnen; für die Formel sei auf die Literatur verwiesen.

Oft wird die Situation so sein, daß H Morphismus bezüglich einer Gruppe G ist und W (und damit auch H') Morphismus bezüglich einer kleineren Gruppe $G' \subset G$. Entscheidend ist dann folgender Sachverhalt: Weil H und H' G' -Morphismen sind, ist der Projektionsoperator, der einen Eigenraum von H isomorph auf die Summe der daraus hervorgehenden Eigenräume von H' abbildet, selbst G' -Morphismus. Die G' -Modulstruktur dieser Eigenräume von H' ist daher die gleiche wie die des ursprünglichen Eigenraumes, muß also mit der Restriktion des G -Moduls $\text{eig}(H, \lambda)$ auf G' verträglich sein. Ist diese Restriktion insbesondere multiplizitätenfrei, dann kann $\text{eig}(H, \lambda)$ nicht feiner aufspalten als in G' -isotypische Komponenten.

Es gibt übrigens durchaus Zusatzterme W , die sich nicht störungstheoretisch behandeln lassen. Ein Beispiel dafür ist der Stark-Effekt, bei dem ein Atom in ein homogenes elektrisches Feld plaziert wird. Dann verschwinden alle Eigenwerte von H , und das kontinuierliche Spektrum ist ganz \mathbf{R} [GP91, Sec. 10.8]. Physikalisch ist das Fehlen von gebundenen Zuständen zu erwarten, denn die Raumbereiche mit beliebig tiefem Potential gestatten stets das „Tunneln“ eines gebundenen Teilchens ins Freie.

Oft wird der bekannte Operator H durch mehrere Zusatzterme gleichzeitig gestört, zum Beispiel in der Form

$$H' = H + W_1 + W_2.$$

Falls die einzelnen Störungen unterschiedlich „groß“ sind, kann man die zeitunabhängige Störungstheorie in mehreren Schritten anwenden. Ist etwa W_1 die dominante Störung, dann berechnet man zuerst die Störungen der Eigenwerte und -vektoren von $H + W_1$. Weil W_2 , wenn es deutlich kleiner ist als W_1 , die durch W_1 bewirkte Aufspaltung nur noch leicht verändern wird, macht es Sinn, W_2 als Störung von $H + W_1$ aufzufassen und die neuen Korrekturen an Spektrum und Eigenvektoren zu bestimmen. Ist dagegen W_2 deutlich größer als W_1 , so beginnt man bei der Berechnung mit W_2 . Eine solche Reihenfolge, in der verschiedene Störungen berücksichtigt werden, heißt Kopplungsschema. Falls W_1 und W_2 ungefähr gleich groß sind, dann muß man $W_1 + W_2$ in einem Schritt als Störung von H berücksichtigen. In diesem Fall spricht man von intermediärer Kopplung (zwischen den beiden Kopplungsschemata mit dominantem W_1 oder W_2).

Welches Kopplungsschema das angemessene ist, hängt vom konkreten System ab. In den folgenden Abschnitten werden wir uns mit den Energieniveaus des Hamiltonoperators eines Atoms beschäftigen. Den Atomkern nehmen wir dabei aufgrund seiner sehr viel größeren Masse als ruhend an;¹¹ der Hilbertraum zur Beschreibung der n Elektronen ist dann

$$\mathcal{H}^{\otimes n},$$

wobei $\mathcal{H} = L^2(K) \otimes U_{1/2}$ die Zustände eines einzelnen Elektron beschreibt. (Tatsächlich spielt nur ein Unterraum von $\mathcal{H}^{\otimes n}$ eine Rolle, nämlich der der antisymmetrischen Tensoren. Darauf werden wir in

¹¹Unter Einbeziehung des Atomkernes würde man auch nicht einen Hamiltonoperator der Form (26) erhalten. Die der Gleichung (3) entsprechende Transformation ($x^{(0)}$: Kern, $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$: Elektronen)

$$y^{(0)} = \frac{1}{m_K + nm_e} \left(m_K x^{(0)} + m_e \sum_{k=1}^n x^{(k)} \right), \quad y^{(k)} = x^{(k)} - x^{(0)} \quad \text{für } k \geq 1$$

separiert zwar die Schwerpunktsbewegung und macht die Potentiale nur noch von jeweils einer Koordinate abhängig, führt aber für die Elektronen zu einem unangenehmen Differentialausdruck. Mittels Jacobikoordinaten ist es möglich, wieder eine Summe von Laplaceoperatoren zu erhalten [Jos69, Abschnitt IV.4], doch hängen dann alle Potentiale von allen Relativkoordinaten ab. Zudem ist diese Transformation nicht mit der S_n -Wirkung auf dem Elektronenkonfigurationsraum K^n verträglich, so daß sie keine Abbildung in $\bigwedge^n L^2(K)$ induziert.

Abschnitt 4.10 in Zusammenhang mit der symmetrischen Gruppe S_n zu sprechen kommen. Momentan stehen $O(K)$ - und $Spin(K)$ -Symmetrien im Vordergrund.) Der Atomkern wechselwirkt mit den ihn umgebenden Elektronen ebenso wie die Elektronen untereinander. Wenn wir zunächst diese Elektron-Elektron-Wechselwirkung vernachlässigen, gelangen wir zum Modell unabhängiger Teilchen. In diesem Falle ist der Hamiltonoperator eines neutralen Atoms mit n Elektronen von der Form

$$H^{(n)} := H \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes H \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes H, \quad (26)$$

wobei

$$H = H_C = -\frac{1}{2m}\Delta - \frac{ne^2}{\|x\|}$$

der Einteilchenoperator unter Vernachlässigung der als nächstes zu besprechenden Fein- und Hyperfeinstruktur ist. (Es kann sinnvoll sein, schon in diesem ersten Schritt H_C durch einen anderen Operator H zu ersetzen, vgl. Abschnitt 4.12.) In unserer Beschreibung sei der Hamiltonoperator erweitert zu

$$H' = H_C^{(n)} + W_C + W_f + W_{\text{hf}}.$$

Dabei repräsentiert der Term

$$W_C = \sum_{k < l} \frac{e^2}{\|x^{(k)} - x^{(l)}\|}$$

die gegenseitige Abstoßung der Elektronen. Der Feinstrukturoperator

$$W_f = W_\gamma + W_D + W_{LS}$$

enthält die Terme, die sich als führende Korrekturen aus einer relativistischen Theorie auf Grundlage der Dirac-Gleichung ergeben: W_γ berücksichtigt die korrekte relativistische Beziehung zwischen Geschwindigkeit und kinetischer Energie, der Darwin-Term W_D beschreibt „nicht-lokale“ Effekte durch Entkopplung der beiden Spinorkomponenten einer Lösung der Dirac-Gleichung und W_{LS} die Spin-Bahn-Kopplung, die man (bis auf einen Faktor $1/2$) auch durch klassische (nichtrelativistische) Argumente herleiten kann. Der Hyperfeinstrukturoperator W_{hf} schließlich nimmt die Wechselwirkungen der Elektronenspins mit dem Kernspin in die Theorie auf. (Dafür muß man zunächst den Hilbertraum erweitern, um die Freiheitsgrade des Kern beschreiben zu können.) Wie der Name andeutet, ist die durch W_{hf} bewirkte Aufspaltung der Niveaus, die sogenannte Hyperfeinstruktur, deutlich kleiner als die Feinstruktur der Linien, die durch W_f verursacht wird. Vergleicht man Coulombabstoßung W_C und Feinstrukturoperator, so hängt es von der Größe des Atoms bzw. von dessen Kernladungszahl ab, welcher Term der größere ist. Bei leichten Atomen dominiert W_C deutlich gegenüber W_f , so daß man W_f als Störung von $H_C^{(n)} + W_C$ auffassen kann. Dieses Kopplungsschema nennt man *LS*- oder nach seinen Urhebern *Russell-Saunders-Kopplung*. Bei schwereren Atomen ist die Spin-Bahn-Kopplung und damit W_f größer, aber nicht groß genug, um W_C als Störung von $H_C^{(n)} + W_f$ rechtfertigen zu können. (Ein solches, hier eben nicht realisiertes Kopplungsschema heißt *jj*-Kopplung.) Es liegt also ein Fall von intermediärer Kopplung zwischen *LS* und *jj* vor.

Die Namen der Kopplungsschemata erklären sich wie folgt: Der Operator $H_C^{(n)}$ ist selbstadjungierter Morphismus bezüglich der Gruppe

$$(O(K) \times Spin(K))^n.$$

(Die S_n -Symmetrie vernachlässigen wir. Die Rechtfertigung dafür erfolgt in Abschnitt 4.11.) Bei *LS*-Kopplung wird durch W_C die Symmetrie reduziert auf $O(K) \times Spin(K)$, so daß ein minimal entarteter Eigenraum von der Form $U_l \otimes U_s$ ist. Einem solchen, Term genannten Untermodul kann man die Bahndrehimpulsquantenzahl l und die Spinquantenzahl s zuordnen, die sich jeweils auf die Summe aller Elektronen beziehen.¹² Die Störung W_f bewirkt dann eine Aufspaltung in $Spin(K)$ -Untermoduln mit verschiedenen Gesamtdrehimpulsquantenzahlen j . Bei *jj*-Kopplung wird im ersten Störungsschritt die Symmetrie auf $Spin(K)^n$ reduziert; jedem Elektron kommt eine Gesamtdrehimpulsquantenzahl j_k zu.

¹²Nach einer auf Russell und Saunders zurückgehenden Notation kennzeichnet man Quantenzahlen, die zur Gesamtheit aller Elektronen gehören, durch Großbuchstaben L, S, J etc., im Gegensatz zu den Quantenzahlen l, s, j eines einzelnen Elektrons. Dieser in der Physik üblichen (und sinnvollen) Konvention folge ich nicht, um die Quantenzahlen von den (in dieser Form in der Physik nicht vorkommenden) Drehimpulsoperatoren zu unterscheiden. Ein kleiner Trost liegt darin, daß ich so einige Formeln nicht einmal mit kleinen und danach mit großen Buchstaben aufschreiben und beweisen muß, denn die mathematischen Überlegungen sind oft unabhängig von der physikalischen Interpretation der Größen. Zum Zusammenhang mit Orangen vergleiche Mackey in [BL81, S. xxix]

Nach der zweiten Störung W_f ist wie bei Russell-Saunders-Kopplung nur noch $Spin(K)$ Symmetriegruppe. Bei LS -Kopplung setzt sich also der Gesamtdrehimpuls des Systems im letzten Störungsschritt aus dem Gesamtbahndrehimpuls l und dem Gesamtspin s zusammen, bei jj -Kopplung aus den Drehimpulsen j_k der einzelnen Elektronen.

In den nächsten Abschnitten werden Beispiele aus der LS -Kopplung vorgestellt. Dabei beschränke ich mich auf Schritte, die zum einen aus darstellungstheoretischer Sicht besonders interessant sind und zum anderen wichtige qualitative Eigenschaften der Atomspektren beschreiben. Die Veränderung der Energieniveaus durch die Coulombabstoßung W_C wird kurz beschrieben, wenn das Periodensystem der Elemente besprochen wird. Vom Feinstrukturoperator W_f ist vor allem die Spin-Bahn-Kopplung W_{LS} von Bedeutung, da dieser Term für die Brechung der $O(K) \times Spin(K)$ -Symmetrie und damit für die Aufspaltung der Niveaus verantwortlich ist. Schließlich wird noch der Fall eines Atoms im homogenen Magnetfeld betrachtet.

Literatur: [CT77b, Ch. XI+XIII], [GP91, Sec. 10.7], [Jos69, Abschnitt V.1], [LL66, Kap. 4], [CO80, 9²-11²]

4.8 Auswahlregeln und Wigner-Eckart-Theorem

Die Leistungsfähigkeit der Darstellungstheorie in der Quantenmechanik zeigt sich auch darin, daß man mit ihrer Hilfe leicht Aussagen darüber machen kann, wann eine Matrixelementenabbildung trivial ist, also immer 0 liefert. Die physikalische Interpretation davon ist zum Beispiel, daß gewisse Übergänge in der zeitabhängigen Störungstheorie ausgeschlossen werden können. Das läßt sich experimentell am Fehlen von Spektrallinien oder an ihrer geringeren Intensität nachweisen.

Lemma 4.21. *Sei G Gruppe. Dann ist für drei endlichdimensionale G -Moduln U, V und W*

$$\text{Hom}_G(V', W, U; \mathbf{C}) = \text{Hom}_G(W \otimes U, V) \quad (\text{kanonisch isomorph}).$$

Beweis. Es ist

$$\text{Hom}_G(V', W, U; \mathbf{C}) = \text{Hom}_G(V' \otimes W \otimes U, \mathbf{C}) = (V' \otimes W' \otimes U')^G = \text{Hom}_G(W \otimes U, V). \quad \square$$

Korollar 4.22 (Auswahlregel). *Sei \mathcal{H} G -Modul, $R: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ komplexer Tensoroperator und $V \subset \mathcal{H}$ und $U \subset D$ endlichdimensionale Untermoduln. Falls V und $W \otimes U$ disjunkt sind, ist die Matrixelementenabbildung*

$$V \times W \times U \rightarrow \mathbf{C}, \quad (v, w, u) \mapsto \langle v, R(w)u \rangle,$$

trivial.

Dabei heißen zwei G -Moduln **disjunkt**, wenn sie keine isomorphen einfachen Untermoduln besitzen. Da alle Darstellungen als unitär vorausgesetzt sind und folglich jeder Untermodul U komplementiert ist (nämlich durch U^\perp), ist diese Bedingung nach dem Lemma von Schur äquivalent zum Fehlen nichttrivialer G -Morphismen.

Dieses Korollar trägt den Namen „Auswahlregel“, weil es einem im Rahmen der Störungstheorie ein Kriterium an die Hand gibt, zu entscheiden, welche Übergänge zwischen verschiedenen Zuständen möglich sind (also beobachtet werden können) und welche nicht. Die Betonung liegt dabei auf dem zweiten Aspekt: Mit Hilfe der Darstellungstheorie lassen sich einige Übergänge definitiv ausschließen. Falls aber $W \otimes U$ und V nicht disjunkt sind, kann die von R induzierte Matrixelementenabbildung trotzdem trivial sein.

Im Falle $G = SU(2)$ läßt sich sehr viel Genaueres über die Matrixelementenabbildung sagen.

Korollar 4.23. *Seien U_l, U_{l_1} und U_{l_2} drei einfache $SU(2)$ -Moduln mit Spin l, l_1 bzw. l_2 . Dann ist*

$$\dim \text{Hom}_{SU(2)}(U_{l_2}', U_l, U_{l_1}; \mathbf{C}) = \begin{cases} 1 & l_2 \in \{|l - l_1|, \dots, l + l_1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Aus der Clebsch-Gordan-Zerlegung von $U_l \otimes U_{l_1}$ ergibt sich

$$\text{mult}_{[U_{l_2}]} U_l \otimes U_{l_1} = \begin{cases} 1 & l_2 \in \{|l - l_1|, \dots, l + l_1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad \square$$

Das Kriterium

$$|l - l_1| \leq l_2 \leq l + l_1$$

wird auch Dreiecksbedingung genannt, weil es ebenfalls für die Seitenlängen eines Dreiecks zutrifft. Es ist ebenso wie die im Korollar enthaltene Forderung der Halb- bzw. Ganzzahligkeit von l_2 symmetrisch in l , l_1 und l_2 . [Für l_1 , l_2 und $l_3 = l$ muß $l_1 + l_2 + l_3 \in \mathbf{N}$ und $l_{\pi(1)} + l_{\pi(2)} \geq l_{\pi(3)}$ für jede Permutation $\pi \in S_3$ sein.]

Seien U_{l_1} und U_{l_2} Untermoduln eines $SU(2)$ -Moduls \mathcal{H} und $R: U_l \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ ein komplexer $SU(2)$ -Tensoroperator mit $U_{l_1} \subset D$ und $l_2 \in \{|l - l_1|, \dots, l + l_1\}$. Wählt man ein von 0 verschiedenes Element E von $\text{Hom}_{SU(2)}(U'_{l_2}, U_l, U_{l_1}; \mathbf{C})$, dann muß nach dem letzten Korollar die zugehörige Matrixelementenabbildung, aufgefaßt als trilinearer G -Morphismus, ein Vielfaches von E sein. Dieses (nach Wahl von E eindeutig bestimmte) Vielfache nennt man das **reduzierte Matrixelement** und bezeichnet es mit

$$\langle U_{l_2} \| R \| U_{l_1} \rangle_E.$$

(Falls $l_2 \notin \{|l - l_1|, \dots, l + l_1\}$ ist, setzt man das reduzierte Matrixelement gleich 0.) Diese Erkenntnis heißt das

Wigner-Eckart-,Theorem“ 4.24. Für $l \notin \{|l_1 - l_2|, \dots, l_1 + l_2\}$ ist die durch den komplexen $SU(2)$ -Tensoroperator R bestimmte Matrixelementenabbildung trivial. Anderenfalls gibt es zu jedem von 0 verschiedenen $E \in \text{Hom}_{SU(2)}(U'_{l_2}, U_l, U_{l_1}; \mathbf{C})$ ein eindeutig bestimmtes $\langle U_{l_2} \| R \| U_{l_1} \rangle_E \in \mathbf{C}$ mit

$$\langle u_2, R(u)u_1 \rangle = \langle U_{l_2} \| R \| U_{l_1} \rangle_E E(u'_2, u, u_1)$$

für alle $u_1 \in U_{l_1}$, $u_2 \in U_{l_2}$ und $u \in U_l$. Entsprechendes gilt für reelle Tensoroperatoren.

Dieser Satz ist einfach eine Übertragung von Korollar 4.23 auf die quantenmechanische Situation. Als einzige spezielle Eigenschaft von $SU(2)$ wurde im Beweis von Korollar 4.23 benutzt, daß das Tensorprodukt zweier irreduzibler Darstellungen multiplizitätenfrei ist. Gruppen mit dieser Eigenschaft nennt man **einfach reduzibel**. Beispielsweise folgt aus Korollar 2.24, daß zu zwei kompakten, einfach reduziblen Gruppen G und H auch das Produkt $G \times H$ einfach reduzibel ist. Die Verallgemeinerung des Wigner-Eckart-Theorems auf einfach reduzible Gruppen liegt auf der Hand.

Seien in U_l , U_{l_1} und U_{l_2} Basen aus Gewichtsvektoren gewählt, und zwar durch Anwendung des „Leiters“ $Y \in su(2)$ auf Höchstgewichtsvektoren. Wenn man sich dann noch bei der Clebsch-Gordan-Zerlegung auf eine bestimmte Methode zur Konstruktion neuer Basen aus denen von U_l , U_{l_1} und U_{l_2} einigt, dann ist das reduzierte Matrixelement $\langle U_{l_2} \| R \| U_{l_1} \rangle$ eindeutig festgelegt und hängt nur noch von der Wahl der Höchstgewichtsvektoren ab. (Zwei verschiedene, normierte Höchstgewichtsvektoren unterscheiden sich um ein $\lambda \in U(1)$.) Die Einträge der Basiswechsellmatrix einer in der Physik verbreiteten Methode dieser Art heißen Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Eine schöne Diskussion dazu findet man in [Ste94, Sec. 4.7]. Wichtiger als die konkreten Zahlenwerte ist wohl die Tatsache, daß man die Einträge der Basiswechsellmatrix reell wählen kann, wie es bei den Clebsch-Gordan-Koeffizienten getan ist.

Beispiel 4.25 (Auswahlregeln für Multipolübergänge). Mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems können wir ohne weitere Rechnerei die Auswahlregeln für durch die elektrischen Multipoloperatoren aus Beispiel 4.17 induzierten Übergänge zwischen verschiedenen Niveaus eines Atoms angeben.

Sei $Q^{(l)}: H^l(K, \mathbf{R}) \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ der l -te Multipoloperator, und seien $U_{l_1} \subset D$, $U_{l_2} \subset \mathcal{H}$ einfache $Spin(K)$ -Untermoduln (\mathcal{H} $Spin(K)$ -Modul vermöge T_L oder T_J). Zu einem $X \in su(2)$ mit (beispielsweise) $\|X\| = 1$ sei in der Komplexifizierung $H^l(K)$ von $H^l(K, \mathbf{R})$ eine Basis (h_m) aus Gewichtsvektoren gewählt, $Xh_m = -im h_m$ für $-l \leq m \leq l$ (vgl. Abschnitt 3.5), und ebenfalls solche Basen (u_{m_1}) und (v_{m_2}) in U_{l_1} bzw. U_{l_2} . Setzt man $w = v'_{m_2} \otimes h_m \otimes u_{m_1}$, so zeigt die Gleichung

$$Xw = Xv'_{m_2} \otimes h_m \otimes u_{m_1} + v'_{m_2} \otimes Xh_m \otimes u_{m_1} + v'_{m_2} \otimes h_m \otimes Xu_{m_1} = -i(m + m_1 - m_2)w$$

[$Xv'_{m_2} = im_2 v'_{m_2}$], daß w Element des Gewichtsraumes zum Gewicht $\lambda = -i(m + m_1 - m_2)$ ist. Im Falle $\lambda \neq 0$ muß w in einem zum Invariantenraum disjunkten Untermodul liegen. Folglich verschwindet in diesem Fall das Matrixelement $\langle v_{m_2}, Q^{(l)}(h_m)u_{m_1} \rangle$. Für dessen Nichtverschwinden sind also

$$\begin{aligned} l_2 &\in \{|l - l_1|, \dots, l + l_1\} && \text{und} \\ m_2 &= m + m_1 \end{aligned}$$

notwendige Bedingungen. Die physikalische Interpretation ist die folgende: Der Multipoloperator $Q^{(l)}$ beschreibt die Absorption von Photonen mit Bahndrehimpulsquantenzahl l . Wird ein Photon absorbiert,

dann trägt sein Bahndrehimpuls zu dem des Atoms (Quantenzahl l_1) bei, so daß der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt. Insbesondere addieren sich die Projektionen m_1 und m längs X . Der Emission eines Photons entspricht die Absorption eines solchen mit entgegengesetztem Drehimpuls.

Da diese Überlegungen sowohl für die Darstellung T_L als auch für T_J , d. h. den Gesamtdrehimpuls, gelten, erhält man insgesamt vier Auswahlregeln. Zudem ist die Herleitung sowohl für Ein- als auch Mehrteilchensysteme gültig.

Weil der nullte Multipoloperator, der ein konstantes, physikalisch bedeutungsloses Potential beschreibt, als Homothetie wirkt, bewirkt er keine Übergänge zwischen verschiedenen Niveaus. Auch die übrigen Multipoloperatoren können aufgrund der Dreiecksbedingung keine Übergänge zwischen verschiedenen Niveaus mit jeweils $l = 0$ oder $j = 0$ induzieren. Also erhalten wir, daß Übergänge

$$l: 0 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad j: 0 \rightarrow 0$$

für alle Multipoloperatoren („in jeder Ordnung“) verboten sind.

Eine weitere Auswahlregel kommt durch Paritätserhaltung zustande. Im Falle der Darstellung T_L sind U_l , U_{l_1} und U_{l_2} $O(K)$ -Untermodule und besitzen als solche wohldefinierte Paritäten π , π_1 und π_2 , die die Darstellungen von $\mathbf{Z}_2 < O(K)$ beschreiben (vgl. Abschnitt 3.5). Da die Parität von $U_l \otimes U_{l_1}$ gleich $\pi\pi_1$ ist, erfordert eine nichttriviale Matricelementenabbildung gemäß Korollar 4.22

$$\pi_2 = \pi\pi_1$$

als notwendige Bedingung. In Abschnitt 3.5 hatten wir gesehen, daß bei nur einem Teilchen, also bei $\mathcal{H}_K = L^2(K)$, die Parität eines einfachen $O(K)$ -Untermoduls eindeutig durch die $SO(K)$ -Isomorphieklasse $[U_k]$ bestimmt ist zu $(-1)^k$. (Bei mehreren Teilchen gilt dies *nicht* mehr.) Dann läßt sich die Paritätserhaltung als

$$l + l_1 + l_2 \quad \text{gerade}$$

formulieren.

Es ist klar, wie man die Summe $R_1 + R_2$ zweier Tensoroperatoren $R_1, R_2: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ definiert und dadurch einen neuen Tensoroperator erhält. Für die nächsten Beispiele sind zwei weitere Konstruktionen mit Tensoroperatoren nützlich.

Seien $R_1: W_1 \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ und $R_2: W_2 \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ komplexe Tensoroperatoren zu einer Gruppe G . Dann ist auch

$$\begin{aligned} R_1 \otimes R_2: W_1 \otimes W_2 &\rightarrow L_D(\mathcal{H}), \\ w_1 \otimes w_2 &\mapsto R_1(w_1) R_2(w_2)|_D, \end{aligned}$$

ein komplexer Tensoroperator zu G . (Die Einschränkung auf D ist nötig, um die Definition durch Tensoren der Form $w_1 \otimes w_2$ im Hinblick auf den Definitionsbereich eindeutig zu machen.) Sind R_1, R_2 reelle Tensoroperatoren, die auf D **vertauschen**, d. h., für die

$$\forall w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, u \in D \quad R_1(w_1)R_2(w_2)u = R_2(w_2)R_1(w_1)u \quad (27)$$

gilt, dann ist $R_1 \otimes R_2$, wie man leicht nachprüft, wieder ein reeller Tensoroperator.

Sei W endlichdimensionaler reeller oder komplexer G -Modul, also mit G -invarianter, nicht-ausgearteter Bi- bzw. Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und seien $R_1, R_2: W \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ reelle bzw. komplexe Tensoroperatoren. Nach Wahl einer Orthonormalbasis (e_k) kann man den Operator

$$\langle R_1, R_2 \rangle = \sum_k R_1(e_k)R_2(\tilde{e}_k)$$

mit Definitionsbereich D definieren. Tatsächlich ist diese Definition unabhängig von der gewählten Basis, und $\langle R_1, R_2 \rangle$ ist ein unbeschränkter G -Morphismus. (Beweis wie für das Casimir-Element in Abschnitt 3.4.) Faßt man R_1 und R_2 durch Restriktion als Elemente von $\text{Hom}_G(W, \text{End}(D))$ auf, dann ist die Zuordnung

$$(R_1, R_2) \mapsto \langle R_1, R_2 \rangle$$

eine bilineare Abbildung

$$\text{Hom}_G(W, \text{End}(D)) \times \text{Hom}_G(W, \text{End}(D)) \rightarrow \text{End}_G(D).$$

Ist $R_1 = R_2$ oder vertauschen R_1 und R_2 auf D , so ist $\langle R_1, R_2 \rangle$ hermitesch.

Man beachte im Falle eines adjungierten Tensoroperators R einer halbeinfachen Liegruppe G die enge Verbindung zwischen $\langle R, R \rangle$ und dem Casimir-Element der Liealgebrendarstellung. Beispielsweise gilt für das Casimir-Element bezüglich eines $SU(2)$ -Moduls

$$C = \frac{1}{2} \langle R, R \rangle,$$

der Vorfaktor ist der gleiche wie in Gleichung (3.3). Insbesondere ist

$$\langle R, R \rangle = l(l+1) \text{id}$$

in einem l -isotypischen $SU(2)$ -Modul.

In der klassischen Mechanik ist der Betrag des Drehimpulses die Norm des zugehörigen Drehimpulsvektors $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ (vgl. Abschnitt 4.5). Da wir das kanonische Skalarprodukt von \mathbf{R}^3 in Abschnitt 3.5 auf $SU(2) = Spin(3)$ übertragen haben, ist ein Zusammenhang zwischen $\langle L, L \rangle$ und dem Betragsquadrat des Bahndrehimpulses in der Quantenmechanik zu erwarten. Daß $\langle L, L \rangle$ sich im wesentlichen als das Casimir-Element von $so(3)$ erweist, ist nützlich, weil es zeigt, daß D_X ein determinierender Bereich dieses Operators ist.

Literatur: [CT77b, Compl. E_X]

4.9 Aufspaltung atomarer Energieniveaus

Mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems sollen jetzt im Rahmen der LS -Kopplung drei Fälle besprochen werden, bei denen die Niveaus eines Atoms aufspalten.

Wir beginnen mit der Spin-Bahn-Kopplung und betrachten zunächst ein einzelnes Teilchen mit Spin im Coulombpotential. Durch die Bewegung des Teilchens mit Masse m und Ladung q_1 um den Ursprung (Ladung q_2) entsteht im Ruhesystem des Teilchens ein Magnetfeld, das mit dem Spin wechselwirkt. Dieser Effekt heißt Spin-Bahn-Kopplung, die Wechselwirkungsenergie ergibt sich bei einem zentralsymmetrischen Potential V zu [CT77b, XII.B.b.β]

$$\begin{aligned} W_{LS} &= \xi(\|x\|) \langle L, S \rangle \quad \text{mit} \\ \xi(r) &= \frac{1}{2m^2 r} \frac{dV}{dr} \\ &= -\frac{q_1 q_2}{2m^2 r^3} \quad \text{für } V(r) = V_C(r) = \frac{q_1 q_2}{r}. \end{aligned}$$

Um einen Definitionsbereich für W_{LS} anzugeben, betrachten wir die Zerlegung

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S = L^2(\mathbf{R}^+, r^2 \lambda) \otimes L^2(S^2) \otimes \mathcal{H}_S. \quad (28)$$

M_ξ ist ein selbstadjungierter Operator im trivialen $O(K)$ -Modul $L^2(\mathbf{R}^+, r^2 \lambda)$ und $\langle L, S \rangle$ ein hermitescher $Spin(K)$ -Operator in $L^2(S^2) \otimes \mathcal{H}_S$, etwa mit Definitionsbereich $D \otimes^a \mathcal{H}_S$, wobei $D = D_X$ die algebraische direkte Summe der isotypischen Komponenten von $L^2(S^2)$ bezeichnet [L und S vertauschen auf $D \otimes^a \mathcal{H}_S$]. Also ist W_{LS} mit Definitionsbereich

$$\text{dom}(W_{LS}) = \text{dom}(M_\xi) \otimes^a D \otimes^a \mathcal{H}_S$$

ein hermitescher $Spin(K)$ -Morphismus. (Bemerkt man, daß bei isotypischer Zerlegung von $L^2(S^2) \otimes \mathcal{H}_S$ der Operator $\langle L, S \rangle$ in eine direkte Summe beschränkter selbstadjungierter Operatoren zerfällt, dann ergibt sich mit der gleichen Argumentation wie für H_Z in Abschnitt 4.6, daß der Operator $\langle L, S \rangle$ fast selbstadjungiert ist und folglich [RS80, Th. VIII.33] auch W_{LS} .) Insbesondere bricht W_{LS} die $O(K) \times Spin(K)$ -Symmetrie des Hamiltonoperators $H_0 + V$, wodurch die Energieniveaus aufspalten. Diese Aufspaltung wollen wir so weit wie möglich durch die Quantenzahlen l , s und j beschreiben.

Aufgrund der Zerlegung (28) und der Form der Eigenräume von Operatoren mit rotationssymmetrischem Potential wie H_C (Satz 4.11) ist ein minimal entarteter Eigenraum von der Gestalt

$$\mathbf{C}v \otimes U_l \otimes U_s.$$

Nach der generellen störungstheoretischen Annahme $\text{dom}(W_{LS}) \supset \text{dom}(H_0)$ gilt $v \in \text{dom}(M_\xi)$; zudem sei v normiert. Unter der Störung W_{LS} spaltet $U_l \otimes U_s$ in eine direkte Summe einfacher $Spin(K)$ -Untermodule U_j auf. Wegen Gleichung (18) und der Bilinearität der Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt

$$2\langle L, S \rangle = \langle J, J \rangle - \langle L, L \rangle - \langle S, S \rangle$$

und damit für ein $u_j = v \otimes w_j$ mit normiertem $w_j \in U_j \subset U_l \otimes U_s$

$$\begin{aligned} E(W_{LS}, u_j) &= E(M_\xi, v) \langle w_j, \langle L, S \rangle w_j \rangle = \frac{1}{2} E(M_\xi, v) \langle w_j, (\langle J, J \rangle - \langle L, L \rangle - \langle S, S \rangle) w_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} E(M_\xi, v) (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)). \end{aligned}$$

Die Energiedifferenz

$$E(W_{LS}, u_j) - E(W_{LS}, u_{j-1}) = E(M_\xi, v) j$$

benachbarter Niveaus ist linear in j (Landésche Intervallregel). Der Faktor $E(M_\xi, v)$ ist für alle realistischen Potentiale, die mit zunehmendem Abstand vom Zentrum anwachsen, positiv. Folglich ist der Zustand mit minimalem j der energetisch günstigste.

Bei n Teilchen (die ich der einfacheren Notation wegen mit gleicher Masse und Ladung annehme) ergibt sich

$$W_{LS} = \sum_{k=1}^n \xi(\|x^{(k)}\|) \langle L_k, S_k \rangle$$

als Spin-Bahn-Kopplungsenergie, wenn man Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Teilchen vernachlässigt. Da jeder einzelne Summand ein hermitescher $Spin(K)$ -Morphismus ist bezüglich der Darstellung T_J (dem Produkt der Darstellungen T_{J_k}), ist es auch W_{LS} .

Jetzt ist es hilfreich, jeden Term $\langle L_k, S_k \rangle$ als einen Wert des Tensoroperators $L_k \otimes S_k$ (zum äußeren Produkt der Darstellungen T_{L_k} und T_{S_k} oder T_L und T_S) aufzufassen, nämlich zu einem Vektor des eindimensionalen Invariantenraumes des $Spin(K)$ -Moduls $so(K) \otimes spin(K)$. Damit ist auch W_{LS} der Wert eines Tensoroperators zum äußeren Tensorprodukt von T_L und T_S , nämlich zu der Summe

$$X \otimes Y \mapsto \sum_{k=1}^n \xi(\|x^{(k)}\|) L_k(X) \otimes S_k(Y).$$

Wir betrachten nun einen einfachen $O(K) \times Spin(K)$ -Modul $U_l \otimes U_s \subset \text{dom}(W_{LS})$. Da die Dreiecksbedingung sowohl für l als auch für s gilt, müssen beide Werte von Null verschieden sein, wenn die durch W_{LS} gelieferte Abbildung $(U_l \otimes U_s) \otimes (U_l \otimes U_s) \rightarrow \mathbf{C}$ nicht trivial sein soll [$so(K) \otimes spin(K) \simeq U_1 \otimes U_1$]. Dann wirkt aber auch der Tensoroperator $L \otimes S$ in $U_l \otimes U_s$ nicht trivial, und nach dem Wigner-Eckart-Theorem, angewandt auf $O(K) \times Spin(K)$, muß

$$\langle v, W_{LS} u \rangle = \zeta \langle v, \langle L, S \rangle u \rangle$$

sein für ein $\zeta \in \mathbf{R}$ [für $u = v$ sind beide Seiten reell] und alle $u, v \in U_l \otimes U_s$. Also ist für ein normiertes $u_j \in U_j \subset U_l \otimes U_s$

$$E(W_{LS}, u_j) = \zeta \langle u_j, \langle L, S \rangle u_j \rangle = \frac{\zeta}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$$

Wichtig ist, daß ζ zwar vom Untermodul $U_l \otimes U_s$ abhängt, nicht aber von j . Man erhält also eine Aufspaltung wie im Falle eines Teilchens. Allerdings muß jetzt der Faktor ζ nicht mehr positiv sein. Ist er es, dann nennt man den Term normal, bei negativem ζ heißt der Term invertiert. Für $\zeta = 0$ gibt es keine Aufspaltung.

Bei Anwesenheit eines Magnetfeldes B tritt der Dipoloperator $W_J(B)$ zum Hamiltonoperator H hinzu, der eine Aufspaltung der Niveaus bewirkt (Zeeman-Effekt). Von der Stärke des Magnetfeldes hängt es ab, wie das Kopplungsschema geändert werden muß, um die Verschiebung der Energieniveaus zu bestimmen. Solange B klein ist, berechnet man zuerst die Feinstrukturaufspaltung. (Derart kleine Magnetfelder, für die $W_J(B)$ im Bereich der Feinstrukturaufspaltung liegt, seien vernachlässigt.) Bei starken Magnetfeldern dominiert der magnetische Dipoloperator den Feinstrukturoperator W_f . Obwohl man bei den experimentell erzeugbaren Magnetfeldern eher im Bereich intermediärer Kopplung bleibt,

berechnet man die Störung $W_{\mathfrak{f}}$ nach der Störung $W_J(B)$. Man spricht in diesem Fall vom Paschen-Back-Effekt, im Gegensatz zum Zeeman-Effekt im engeren Sinne, der bei schwachen Magnetfeldern vorliegt. Wir gehen im folgenden von kleinem B aus.

Die nach der Spin-Bahn-Kopplung verbliebene $Spin(K)$ -Symmetrie wird durch $W_J(B)$ gebrochen; die Eigenräume von H , die $Spin(K)$ -Untermodule sind, spalten sich auf. Zunächst sei das Problem etwas allgemeiner behandelt.

Sei \mathcal{H} ein $SU(2)$ -Modul, $R: su(2) \rightarrow L_D(\mathcal{H})$ ein Tensoroperator zur adjungierten Darstellung von $SU(2)$ und $U_j \subset D$ ein einfacher Untermodul. Gesucht ist eine einfache Methode zur Berechnung der Skalarprodukte

$$\langle v, R(X)u \rangle$$

mit $X \in su(2)$ und $u, v \in U_j$. Wir können $j > 0$ annehmen, weil diese Matrixelementenabbildung sonst aufgrund der Dreiecksbedingung trivial ist. Da in diesem Fall die Matrixelementenabbildung

$$\begin{aligned} U_j \times su(2) \times U_j &\rightarrow \mathbf{C}, \\ (v, X, u) &\mapsto \langle v, J(X)u \rangle, \end{aligned}$$

mit dem adjungierten Tensoroperator J wohldefiniert und nicht trivial ist, muß nach dem Wigner-Eckart-Theorem

$$\langle v, R(X)u \rangle = \langle U_j \| R \| U_j \rangle_J \langle v, J(X)u \rangle$$

sein. Um $\langle U_j \| R \| U_j \rangle_J \in \mathbf{R}$ zu bestimmen, betrachtet man den unbeschränkten $SU(2)$ -Morphismus $\langle R, J \rangle$. (Ohne den Definitionsbereich von $\langle R, J \rangle$ näher anzugeben, gehen wir davon aus, daß er U_j enthält, denn U_j ist unter allen Operatoren $R(X)$, $J(X)$ stabil.) Bezeichnet (Y_i) eine Orthonormalbasis von $su(2)$, so gilt $[J(Y_i)$ stabilisiert $U_j]$

$$\langle v, \langle R, J \rangle u \rangle = \sum_k \langle v, R(Y_k)J(Y_k)u \rangle = \langle U_j \| R \| U_j \rangle_J \langle v, \langle J, J \rangle u \rangle.$$

Da neben $\langle R, J \rangle$ auch $\langle J, J \rangle = j(j+1) \text{id} \neq 0$ in U_j als Homothetie wirkt, folgt

$$\langle v, R(X)u \rangle = \langle v, (j(j+1))^{-1} \langle R, J \rangle J(X)u \rangle.$$

Diese Gleichung nennt man den Projektionssatz, da der Operator im rechten Skalarprodukt formal die Gestalt

$$\frac{\langle R, J \rangle}{\langle J, J \rangle} J$$

der Projektion von R auf J hat und nur diese „Projektion“ zu der Matrixelementenabbildung beiträgt.¹³

Sei jetzt speziell $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$ und

$$R = W_J = W_L + W_S = -\gamma_L L - \gamma_S S$$

der magnetische Dipoloperator mit $D = D_X$. Mit Hilfe des Projektionssatzes können wir die Schwierigkeit, daß W_J kein skalares Vielfaches von J ist, überwinden. Wie bei der Rechnung zur Spin-Bahn-Kopplung zeigt man ohne Schwierigkeit die Formeln

$$\begin{aligned} 2\langle L, J \rangle &= \langle L, L \rangle - \langle S, S \rangle + \langle J, J \rangle \quad \text{und} \\ 2\langle S, J \rangle &= \langle S, S \rangle - \langle L, L \rangle + \langle J, J \rangle. \end{aligned}$$

Für einen einfachen $Spin(K)$ -Untermodul $U_j < U_l \otimes U_s < D$ erhalten wir das Resultat

$$\langle v, W_J(B)u \rangle = -\gamma_{lsj} \langle v, J(B)u \rangle \tag{29}$$

mit

$$\gamma_{lsj} = \frac{(l(l+1) - s(s+1) + j(j+1))\gamma_L + (s(s+1) - l(l+1) + j(j+1))\gamma_S}{2j(j+1)}. \tag{30}$$

Wenn man sich also in der Matrixelementenabbildung (29) auf einen festen Untermodul U_j beschränkt, dann ist die Energie W_J wie vorher W_L und W_S proportional zu einem Drehimpuls, nämlich dem

¹³Der Projektionssatz legitimiert die Berechnung im Rahmen des Vektormodells des Drehimpulses, bei der man sich die den Gesamtdrehimpuls J bestimmenden Drehimpulse L und S als um J präzedierend vorstellt, so daß sich die Komponenten senkrecht zu J im zeitlichen Mittel wegheben [CT77b, S. 1238].

Gesamtdrehimpuls J , allerdings mit einem neuen gyromagnetischen Verhältnis γ_{lsj} , das davon abhängt, wie sich Bahndrehimpuls und Spin zum Gesamtdrehimpuls zusammensetzen. Für den Spezialfall eines Elektrons ($\gamma_S = 2\gamma_L$, genähert) vereinfacht sich die Formel zu

$$\frac{\gamma_{lsj}}{\gamma_L} = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

Mit der Formel (30) für das gyromagnetische Verhältnis kann man nun leicht die Energieverschiebungen beim Zeeman-Effekt berechnen. Ein minimal entarteter Eigenraum U von H mit Spin j spaltet unter der Störung $W_j(B)$ in $2j+1$ eindimensionale Eigenräume auf; die Eigenwerte verändern sich um

$$\Delta E = -\gamma_{lsj} \|B\| m, \quad m \in \{-j, \dots, j\};$$

wobei m wiederum magnetische (Gesamtdrehimpuls-)Quantenzahl genannt wird. Man beachte, daß die Herleitung unabhängig von der Teilchenanzahl gilt, solange alle Teilchen die gleichen gyromagnetischen Verhältnisse γ_L und γ_S besitzen. Diese Formel macht die Bedeutung des Zeeman-Effektes besonders sichtbar: Die Anzahl der Linien, in die eine vormals einfache Linie aufspaltet, und die Breite der Aufspaltung hängen direkt mit den Drehimpulsen der beteiligten Niveaus zusammen. Die Anzahl ergibt sich aus dem Gesamtdrehimpuls, die Breite der Aufspaltung via Gleichung (29) aus dem gyromagnetischen Verhältnis, also aus den verschiedenen Drehimpulsen. Allerdings muß man die Aufspaltung von Ausgangs- und Zielniveau berücksichtigen, was die Analyse etwas erschwert. Es ist klar, daß besonders viele neue Linien entstehen, wenn die Aufspaltung beider Niveaus unterschiedlich groß ist. Obwohl dies den häufigsten Fall darstellt, wird er anomaler Zeeman-Effekt genannt. Bei gleich großer Aufspaltung und entsprechend weniger Linien spricht man vom normalen Zeeman-Effekt.

Mit Gleichung (30) kann man auch die Vermutung begründen, daß ein Teilchen nicht elementar ist: Eine (nichtrelativistische) Theorie, die ein gyromagnetisches Verhältnis $\gamma_S = 2$ für den Spin vorhersagt, läßt sich unter Verwendung von Clifford-Algebren relativ einfach angeben [GP91, Sec. 12.5]. (Die leichte Abweichung von diesem Wert beim Elektron erklärt die Quantenfeldtheorie.) Wenn nun ein Teilchen ein „krummes“ gyromagnetisches Verhältnis $\gamma_S \neq 2$ für den Spin besitzt, dann ist es wahrscheinlich aus anderen Teilchen aufgebaut, und der gemessene Wert γ_S ist in Wirklichkeit das resultierende gyromagnetische Verhältnis zu dem magnetischen Moment der Relativbewegung der Teilchen umeinander und dem der Spins. Das trifft zum Beispiel auf Proton ($\gamma_L = \gamma_N$, $\gamma_S/2 \approx 2,79\mu_N$) und Neutron ($\gamma_L = 0$, $\gamma_S/2 \approx -1,91\mu_N$) zu; $\mu_N = \frac{e}{2m_p}$ ist hierbei das Kernmagneton mit Ladung e und Masse m_p des Protons. In der Tat sagt das Quarkmodell, das beide Kernbausteine aus 3 kleineren Teilchen, sogenannten Quarks, bestehen.

Bisher wurde die Wechselwirkung des Elektronenspins mit dem Kernspin, die die Hyperfeinstruktur der Energieniveaus verursacht, vernachlässigt, da sie viel schwächer als die Spin-Bahn-Kopplung ist. Will man den Kernspin berücksichtigen, dann muß man den Hilbertraum (im Falle eines Elektrons) erweitern zu $\mathcal{H} = L^2(K) \otimes U_s \otimes U_i$ mit dem Spin $s = 1/2$ des Elektrons und Kernspin i . (Da sich der Kern aus mehreren Protonen und Neutronen, jeweils mit Spin $1/2$, zusammensetzt, kann der resultierende (Gesamt-)Kernspin i verschiedene Werte annehmen, die in der Regel zwischen 0 und $15/2$ liegen.) Auf \mathcal{H} ist eine Darstellung der Gruppe $G = O(K) \times Spin(K) \times Spin(K)$ erklärt; der adjungierte Tensoroperator zur Darstellung von $Spin(K)$ auf U_i heißt Kernspinoperator I .

Der Hyperfeinstrukturoperator W_{hf} besteht aus drei Summanden,

$$W_{\text{hf}} = W_{LI} + W_{SI}^{\text{dip}} + W_{SI}^c,$$

die unterschiedlichen Effekten Rechnung tragen und im folgenden kurz vorgestellt werden sollen. Eine ausführliche Herleitung der Terme findet man in [CT77b, Ch. XII].

Das um das Proton rotierende Elektron erzeugt am Kernort ein Magnetfeld, relativ zu dem der Kernspin verschiedene Stellungen einnehmen kann. Dieser Effekt wird durch den Operator

$$W_{LI} = -\frac{q\gamma_I}{m\|x\|^3} \langle L, I \rangle$$

beschrieben.

Der Kernspin selbst ruft auch ein Magnetfeld hervor, das mit dem Elektronenspin wechselwirkt. Hier sind zwei Situationen zu unterscheiden: Außerhalb des Kerns hat das Magnetfeld Dipolcharakter, entsprechend der Formel für die Wechselwirkungsenergie zweier Dipole (Kern und Elektron) aus der klassischen Elektromechanik ist der Operator dazu durch

$$W_{SI}^{\text{dip}} = -\frac{\gamma_S\gamma_I}{\|x\|^5} (3\langle X, S \rangle \langle X, I \rangle - \langle X, X \rangle \langle S, I \rangle)$$

gegeben.

Innerhalb des Kerns nimmt man das Magnetfeld in erster Näherung als homogen an; die Wechselwirkungsenergie sollte dann ein Ausdruck proportional zu $\langle S, I \rangle$ sein. Um anzudeuten, daß dieser Term nur in dem Maße Beiträge liefert, wie sich das Elektron am Kernort aufhält, schreibt man diesen sogenannten Kontaktterm in der Form

$$W_{SI}^c = -\frac{8\pi}{3}\gamma_S\gamma_I\langle S, I \rangle\delta(x)$$

mit der Diracschen Delta-Distribution, denn der Kern ist verglichen mit der ihn umgebenden „Wolke“ der Elektronenaufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte praktisch ein Punkt. Für die (stetigen) Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms kann man diesen Ausdruck wie in der Distributionentheorie interpretieren.

Es soll nun gezeigt werden, daß bei einem Zustand des Elektron-Kern-Systems mit Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 0$ nur der Kontaktterm einen Beitrag zur Verschiebung der Energieniveaus durch den Hyperfeinstrukturoperator liefert. Sei $V = U_l \otimes U_s \otimes U_i$ ein minimal entarteter Eigenraum. Mit der gleichen Argumentation wie bei der Spin-Bahn-Kopplung W_{LS} folgt, daß für $l = 0$ (oder $i = 0$) die Matrixelemente $\langle v, W_{LI}v \rangle$ verschwinden für jedes $v \in V$.

Der Operator W_{SI}^{dip} ist interessanter. Betrachten wir den Tensoroperator $R = X \otimes X \otimes S \otimes I$:

$$\begin{aligned} R: W = K' \otimes K' \otimes \text{spin}(K) \otimes \text{spin}(K) &\rightarrow L(\mathcal{H}), \\ \sigma \otimes \tau \otimes X \otimes Y &\mapsto X(\sigma)X(\tau)S(X)I(Y). \end{aligned}$$

zu G . Die Restriktion des G -Moduls W auf $SO(K)$ besitzt isotypische Komponenten mit Spin 0, 1 und 2,

$$W = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2,$$

die gleich den isotypischen Komponenten von $K' \otimes K'$ tensoriert mit $\text{spin}(K) \otimes \text{spin}(K)$ sind. Die isotypischen Komponenten von $K' \otimes K' = \text{End}(K)$ (kanonisch isomorph) lassen sich leicht angeben: Es sind die Skalierungen (Spin 0), die antisymmetrischen (Spin 1) und die symmetrischen spurfreien (Spin 2) Abbildungen,

$$\text{End}(K) = \mathbf{R} \text{id} \oplus \{A : A^t = -A\} \oplus \{A : A^t = A, \text{tr } A = 0\}. \quad (31)$$

Wir werden zeigen, daß W_{SI}^{dip} Wert des Tensoroperators R zu einem $w_s \in W_2$ ist. Dann folgt aus der Auswahlregel 4.22 bzw. aus dem Wigner-Eckart-Theorem, daß

$$\langle v, W_{SI}^{\text{dip}}v \rangle = 0$$

ist für alle $v \in V$. Um die einfache Rechnung übersichtlicher zu gestalten, fasse ich Elemente aus W als Matrizen aus $\text{End}(K)$ (bezüglich einer Orthonormalbasis (e_k) von K) auf, deren Einträge Vektoren aus $\text{spin}(K) \otimes \text{spin}(K)$ sind, denn dann überträgt sich die Beschreibung der isotypischen Komponenten von (31). Per Definition ist in dieser Schreibweise $W_{SI}^{\text{dip}} = R(w)$ mit

$$w = 3 \begin{pmatrix} Y_1 \otimes Y_1 - \frac{1}{3} \sum_k Y_k Y_k & Y_1 \otimes Y_2 & Y_1 \otimes Y_3 \\ Y_2 \otimes Y_1 & Y_2 \otimes Y_2 - \frac{1}{3} \sum_k Y_k Y_k & Y_2 \otimes Y_3 \\ Y_3 \otimes Y_1 & Y_3 \otimes Y_2 & Y_3 \otimes Y_3 - \frac{1}{3} \sum_k Y_k Y_k \end{pmatrix}$$

wobei (Y_k) die in Abschnitt 3.5 eingeführte Orthonormalbasis von $\text{spin}(K)$ ist. Dieses w kann man wie Elemente aus $\text{End}(K)$ in einen symmetrischen Anteil w_s und einen antisymmetrischen Anteil w_a zerlegen. Der symmetrische Anteil ist

$$w_s = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2Y_1 \otimes Y_1 - \frac{2}{3} \sum_k Y_k Y_k & Y_1 \otimes Y_2 + Y_2 \otimes Y_1 & Y_1 \otimes Y_3 + Y_3 \otimes Y_1 \\ Y_2 \otimes Y_1 + Y_1 \otimes Y_2 & 2Y_2 \otimes Y_2 - \frac{2}{3} \sum_k Y_k Y_k & Y_2 \otimes Y_3 + Y_3 \otimes Y_2 \\ Y_3 \otimes Y_1 + Y_1 \otimes Y_3 & Y_3 \otimes Y_2 + Y_2 \otimes Y_3 & 2Y_3 \otimes Y_3 - \frac{2}{3} \sum_k Y_k Y_k \end{pmatrix}$$

und liegt in W_2 , da er „spurfrei“ ist. Wegen der Symmetrie des Tensoroperators R in den ersten beiden Faktoren ist $R(w) = R(w_s)$, was zu zeigen war. Also kommen Beiträge zur Hyperfeinstruktur bei verschwindendem Bahndrehimpuls des Elektrons nur vom Kontaktterm.

Sei jetzt U_l die $1s$ -Schale des Wasserstoffatoms und $v \in V$ ein normierter Zustand. Dann ist

$$\langle v, W_{\text{hf}}v \rangle = \langle v, W_{SI}^c v \rangle = a\langle S, I \rangle$$

für ein $a \in \mathbf{R}$, in das die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons am Kernort, also die Funktion R_{00} aus Gleichung (14), eingeht. Beim Wasserstoffatom haben sowohl Elektron als auch Proton Spin $1/2$, also

kann der Gesamtspin f die Werte 0 und 1 annehmen, je nachdem, ob beide Spins parallel oder antiparallel stehen. Analog der Diskussion der Spin-Bahn-Kopplung spalten durch W_{hf} die Energieniveaus auf. Die Energiedifferenz ist für die $1s$ -Zustände nach der Landéschen Intervallregel gleich a , was einer Wellenlänge von 21cm entspricht. Diese Strahlung, die beim Umklappen der Spins relativ zueinander emittiert oder absorbiert wird, ist wichtigstes Indiz für die Wasserstoffverteilung im Universum.

Literatur: [CT77b, Compl. D_X, Ch. XII], [CS67, §3⁷]

4.10 Identische Teilchen

Wir betrachten ein quantenmechanisches System aus n Teilchen mit identischen Einteilchenräumen \mathcal{H} , etwa $\mathcal{H} = L^2(K) \otimes U_s$. Dann trägt der Raum $\mathcal{H}^{\otimes n}$ eine kanonische S_n -Modulstruktur, die durch

$$\pi(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = u_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\pi^{-1}(n)}$$

für $\pi \in S_n$ eindeutig bestimmt (und offensichtlich unitär) ist. Die isotypische Zerlegung ist

$$\mathcal{H}^{\otimes n} = \text{Sym}^n \mathcal{H} \oplus \bigwedge^n \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\chi \notin \{1, \text{sign}\}} (\mathcal{H}^{\otimes n})_\chi,$$

wobei $\text{Sym}^n \mathcal{H}$ den Untermodul der symmetrischen Tensoren (Invariantenraum) und $\bigwedge^n \mathcal{H}$ den der antisymmetrischen Tensoren (sign-isotypische Komponente) bezeichnet.

Sind die Teilchen in allen Eigenschaften identisch, so hat das Fehlen von Trajektorien in der Quantenmechanik eine weitreichende Konsequenz: Die Teilchen können nicht mehr anhand ihrer Bahnkurven unterschieden werden und sind somit vollständig ununterscheidbar.¹⁴ Wenn aber für eine Observable A alle Erwartungswerte $E(A, u)$ invariant unter S_n sind, folgt (durch Polarisation), daß A ein S_n -Morphismus ist. Eine solche Darstellung, bezüglich derer alle Observablen Morphismen sind, heißt Superauswahlregel.

Fordert man weiterhin, daß man verschiedene Zustände durch Messung geeigneter Observabler unterscheiden kann (indem man z. B. die Existenz von vollständigen Mengen kommutierender Observabler postuliert), dann scheiden alle Komponenten außer dem symmetrischen und dem antisymmetrischen Tensorprodukt aus, weil nur bei diesen beiden die einfachen Untermoduln eindimensional sind und Observable als S_n -Morphismen Vektoren in einfachen S_n -Untermoduln nicht unterscheiden können. Eine Beschreibung, die dieser Forderung Rechnung trägt, ist in der Tat möglich, und sogar mehr: Aufgrund von sehr allgemeinen Annahmen läßt sich nämlich im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie zeigen, daß von den verbliebenen zwei isotypischen Komponenten bei jeder Teilchenart abhängig vom Spin nur eine einzige auftritt.

Spin-Statistik-Theorem. *Die Zustände eines Systems identischer Teilchen mit ganzzahligem Spin werden durch symmetrische Tensoren beschrieben, die identischer Teilchen mit halbzahligem Spin durch antisymmetrische Tensoren.*

Erstere nennt man Bosonen, letztere Fermionen. Diese Bezeichnungen weisen darauf hin, welcher Verteilungsfunktion diese Teilchen im Rahmen der Quantenstatistik genügen.

Literatur: [GP91, Ch. 13]

4.11 Identische Teilchen mit Spin 1/2

Der Zustandsraum zur Beschreibung von n identischen Teilchen mit Spin 1/2 ist der Hilbertraum

$$\bigwedge^n (L^2(K) \otimes U_{1/2}) = (\mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S)_{\text{sign}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}_K = L^2(K)^{\otimes n}, \quad \mathcal{H}_S = U_{1/2}^{\otimes n}.$$

In dieser Situation kann man mit Hilfe der Darstellungstheorie genaue Aussagen über den Zusammenhang zwischen Gesamtspin und S_n -Symmetriecharakter des Orts- und des Spinanteils eines Zustandes machen.

Wir beginnen die Überlegungen mit einem beliebigen endlichdimensionalen Hilbertraum U und spezialisieren später auf $U = U_{1/2}$. Auf den S_n -Modul $V = U^{\otimes n}$ wenden wir folgenden Satz an:

¹⁴Glücklicherweise ist trotzdem eine Beschreibung von wenigen Elektronen möglich, die alle anderen Elektronen des Universums außer Acht läßt. Entscheidend dabei ist, inwieweit sich die Regionen hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit der verschiedenen Teilchen überlappen. Dieser Punkt wird in [GP91, S. 231] klargestellt. Diese Fußnote zeigt übrigens, wie sehr ich der klassischen Auffassung verhaftet bleibe: Korrekterweise müßte der erste Satz betonen, daß man in der Quantenmechanik überhaupt von verschiedenen Teilchen sprechen kann.

Satz 4.27. Sei A eine Algebra und V halbeinfacher endlichdimensionaler A -Modul. Wenn $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Repräsentantensystem einfacher A -Untermodule von V ist und $W_\lambda = \text{Hom}_A(V_\lambda, V)$ für $\lambda \in \Lambda$, dann ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \otimes W_\lambda$$

$$w(v) \leftrightarrow v \otimes w \quad \text{für } v \in V_\lambda, w \in W_\lambda$$

die isotypische Zerlegung von V bezüglich A und $\text{End}_A V$.

Für den Beweis siehe etwa [FH91, §6.2]. Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt, wenn man $A = \mathbf{C}[S_n]$ setzt. Offensichtlich hat man eine Einbettung

$$\text{End } U \hookrightarrow \text{End}_{S_n} V =: B$$

$$\phi \mapsto \phi \otimes \cdots \otimes \phi.$$

Dabei bezeichnet $\phi \otimes \cdots \otimes \phi$ ein Element von $\text{End}(U^{\otimes n})$, nicht von $(\text{End } U)^{\otimes n}$. Im Beweis des nächsten Lemmas wird bemerkt, daß dies eigentlich kein Unterschied ist.

Lemma 4.28. Es gilt $B = \text{lin}(\text{End } U)$.

Beweis. Weil der lineare Isomorphismus

$$\begin{aligned} (\text{End } U)^{\otimes n} &\rightarrow \text{End}(U^{\otimes n}), \\ \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n &\mapsto (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto \phi_1 u_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n u_n), \end{aligned} \quad (32)$$

S_n -Morphismus ist, genügt es, für endlichdimensionales W

$$\text{Sym}^n W = \text{lin}\{w \otimes \cdots \otimes w : w \in W\}$$

zu zeigen [betrachte die Invariantenräume in (32) und setze $W = \text{End } U$]. Im folgenden werde ich von der Algebrenstruktur in $\text{Sym } W$ Gebrauch machen und etwa w^n statt $w \otimes \cdots \otimes w$ schreiben (vgl. [FH91, §B.2]).

Der Fall $\dim W = 1$ ist trivial (und kann hier nicht auftreten). Ist $\dim W = 2$ und (x, y) eine Basis von W , dann bilden $x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n$ eine Basis von $\text{Sym}^n W$. Aber auch die Elemente

$$(x + ky)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} k^l x^{n-l} y^l$$

sind für $0 \leq k \leq n$ eine Basis, denn [Van-der-Mondesche Determinante]

$$\det \left[\binom{n}{l} k^l \right]_{kl} = \prod_l \binom{n}{l} \det [k^l]_{kl} = \prod_l \binom{n}{l} \prod_{k < l} (l - k) \neq 0.$$

Für $\dim W > 2$ schließt man mit Induktion über n . Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Wegen

$$\text{Sym}^{n+1} W = \text{lin}\{xz : x \in W, z \in \text{Sym}^n W\}$$

können wir uns auf Elemente der Form xz (wie oben) beschränken. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $z_i \in W$ und $\mu_i \in \mathbf{C}$ mit $z = \sum_i \mu_i z_i^n$, also

$$xz = \sum_i \mu_i x z_i^n.$$

Wegen $x z_i^n \in \text{Sym}^{n+1}(\text{lin}\{x, z_i\}) < \text{Sym}^{n+1} W$ läßt sich jeder einzelne Summand als $x z_i^n = \sum_j \nu_{ij} w_{ij}^{n+1}$ für gewisse $w_{ij} \in \text{lin}\{x, z_i\} < W$ und $\nu_{ij} \in \mathbf{C}$ schreiben und damit

$$xz = \sum_{i,j} \mu_i \nu_{ij} w_{ij}^{n+1},$$

was zu zeigen war. □

Lemma 4.29. *Sei $W < U^{\otimes n}$ Unterraum und $B = \text{End}_{S_n} V$. Dann ist W genau dann B -Unterm modul, wenn W ein $SU(U)$ -Unterm modul ist. Außerdem sind zwei Unterm oduln W_1, W_2 genau dann isomorph als B -Unterm oduln, wenn sie als $SU(U)$ -Unterm oduln isomorph sind.*

Beweis. Gemäß dem letzten Lemma ist W genau dann B -Unterm modul, wenn W $\text{End}(U)$ -Unterm modul ist. Da $GL(U)$ dicht liegt in $\text{End}(U)$ [für $A \in \text{End}(U)$ hat $\det(A - \mu)$ nur endlich viele Nullstellen] und $W \subset U^{\otimes n}$ abgeschlossen ist, ist jeder $GL(U)$ -Unterm modul auch $\text{End}(U)$ -Modul (und umgekehrt). Weil sich Elemente in $GL(U)$ von solchen in $SL(U)$ nur um Skalierungen unterscheiden, sind $GL(U)$ - und $SL(U)$ -Unterm oduln dasselbe. Bemerkt man, daß $sl(U)$ die Komplexifizierung von $su(U)$ ist, dann folgt die erste behauptete Aussage. Mit der gleichen Schlußweise beweist man auch die zweite Behauptung. \square

Lemma 4.30. *Sei G kompakte Gruppe und V_1, V_2, V_3 drei einfache G -Moduln mit $\dim V_3 = 1$. Dann ist $\text{mult}_{[V_3]} V_1 \otimes V_2 \leq 1$ und genau dann $= 1$, wenn $V_1 \simeq V_2' \otimes V_3$ ist.*

Beweis. Sei χ_k der Charakter von $V_k, k = 1, 2, 3$. Dann ist

$$\text{mult}_{[V_3]} V_1 \otimes V_2 = \langle \chi_3, \chi_{V_1 \otimes V_2} \rangle = \int \bar{\chi}_3 \chi_1 \chi_2 = \langle \chi_3 \bar{\chi}_2, \chi_1 \rangle = \text{mult}_{[V_1]} V_2' \otimes V_3.$$

Weil V_2 einfach und V_3 eindimensional ist, muß auch $V_2' \otimes V_3$ einfach sein. Damit ist das Lemma bewiesen. \square

Sei jetzt $U = U_{1/2}$. Wir haben Darstellungen von S_n und $Spin(K) \simeq SU(U_{1/2})$ auf $\mathcal{H}_S = U_{1/2}^{\otimes n}$. Gemäß Satz 4.27 und Lemma 4.29 gibt es eine isotypische Zerlegung von \mathcal{H}_S bezüglich $Spin(K)$ und S_n ,

$$\mathcal{H}_S = \bigoplus_s U_s \otimes V_s, \quad (33)$$

mit paarweise nichtisomorphen einfachen $Spin(K)$ -Moduln U_s und paarweise nichtisomorphen einfachen S_n -Moduln V_s . Folglich ist der Betrag des Gesamtspins eindeutig durch $[V_s]$, also den Symmetriecharakter des Spinanteils des Zustandes, festgelegt und umgekehrt.

Ist $U_l \otimes V < \mathcal{H}_K$ ein einfacher $Spin(K) \times S_n$ -Unterm modul, dann besitzt nach Lemma 4.30 der Unterm modul $(U_l \otimes V) \otimes (U_s \otimes V_s)$ von \mathcal{H} genau dann eine antisymmetrische Komponente, wenn

$$\chi_V = \chi_{V_s'} \text{sign} = \chi_{V_s} \text{sign}$$

ist [S_n -Charaktere sind reell]. Also bestimmen sich auch die Symmetriecharaktere von Orts- und Spinanteil des Zustandes gegenseitig in eindeutiger Weise. Im nichttrivialen Fall ist

$$((U_l \otimes V) \otimes (U_s \otimes V_s))_{\text{sign}} \simeq U_l \otimes U_s$$

als $O(K) \times Spin(K)$ -Moduln. Diese Formel rechtfertigt im Nachhinein die Rechnungen innerhalb des Russell-Saunders-Kopplungsschemas: Nach der Berücksichtigung der Coulomb-Abstoßung der Elektronen ist die Symmetriegruppe des Operators $H_C^{(n)} + W_C$ aus Abschnitt 4.7 nicht $O(K) \times Spin(K)$, sondern

$$G = O(K) \times S_n \times Spin(K) \times S_n,$$

und minimal entartete Eigenräume sind als einfache G -Unterm oduln in der Regel nicht minimal bezüglich $O(K) \times Spin(K)$. Erst die Einschränkung auf antisymmetrische Tensoren reduziert die Eigenräume auf einfache $O(K) \times Spin(K)$ -Moduln. Die Minimalität bezüglich dieser Gruppe war wesentlich bei den Rechnungen zur Niveaufspaltung in Abschnitt 4.9.

Zu beachten ist, daß es für den $Spin(K) \times S_n$ -Modul \mathcal{H}_K keine Zerlegung der Form (33) gibt, d. h. keine eindeutige Beziehung zwischen den Isomorphieklassen $[U]$ und $[V]$ der einfachen $Spin(K)$ -Moduln U und einfachen S_n -Moduln V , die bei einfachen $Spin(K) \times S_n$ -Unterm oduln $U \otimes V$ auftreten. Bei \mathcal{H}_S liegt diese spezielle Situation vor, weil die Teilchen nach Voraussetzung Spin 1/2 haben und daher Lemma 4.29 anwendbar ist.

Der Hamiltonoperator für identische Teilchen ist normalerweise derart gegeben, daß man ihn als selbstadjungierten S_n -Morphismus in $\mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$ auffassen kann (vgl. beispielsweise den Hamiltonoperator H' eines Atoms in Abschnitt 4.7). Falls er von der Form $H = H_K \otimes 1 + 1 \otimes H_S$ ist, müssen sowohl H_K als auch H_S selbstadjungierte S_n -Morphismen sein. [Man betrachte die zugehörigen Einparameteruntergruppen.] Dann stabilisiert H die isotypischen Komponenten des $S_n \times S_n$ -Moduls $\mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$. Nach den soeben angestellten Überlegungen bedeutet das für Spin-1/2-Teilchen aber, daß neben dem

Symmetriecharakter des Spinanteiles auch der des Ortsanteiles und zusätzlich der Gesamtspin s erhalten bleiben. Da diese Voraussetzung an H in der Praxis näherungsweise erfüllt ist (Vernachlässigung der Spin-Bahn-Kopplung), kann man Eigenvektoren von H nach dem Gesamtspin s klassifizieren. Die Eigenzustände, die zu einem bestimmten Wert von s gehören, also die Eigenräume der Einschränkung von H auf $(\mathcal{H}_K)_{\chi \text{ sign}} \otimes (\mathcal{H}_S)_{\chi}$ nennt man ein Termsystem. Wenn H von der beschriebenen Form ist, sind Übergänge zwischen den verschiedenen Termsystemen verboten. Diese Aussage beruht allein auf Symmetrieüberlegungen und gilt unabhängig von der konkreten Gestalt von H_K und H_S . Spektroskopisch erscheint etwa ein chemisch reines Gas als ein Gemisch aus Komponenten mit unterschiedlichem Spin, zum Beispiel Helium als eine Mischung aus Parahelium ($s = 0$) und Orthohelium ($s = 1$). Die verschiedenen Termsysteme besitzen in der Regel unterschiedliche Energieniveaus, weil die Ortsanteile der Zustände, die die Ladungsverteilung der Elektronen beschreiben, aufgrund ihrer unterschiedlichen Symmetrie zu größerer oder kleinerer Abstoßung der Elektronen untereinander führen. Obwohl die direkte Wechselwirkung der Elektronenspins untereinander vernachlässigbar klein ist, hat es wegen der Korrelation von Orts- und Spinanteil den gegenteiligen Anschein. Diese indirekte Form der Wechselwirkung heißt Austauschwechselwirkung; sie spielt bei der Erklärung des Ferromagnetismus eine entscheidende Rolle.

Literatur: [FH91, Lect. 6], [Jos73, Kap. VII]

4.12 Das Periodensystem der Elemente

Ordnet man die chemischen Elemente in einer Reihe nach aufsteigender Kernladungszahl an, so treten periodisch Elemente mit ähnlichen chemischen Eigenschaften auf. Um diesen Sachverhalt anschaulich darzustellen, unterteilt man die Reihe derart in Zeilen, daß chemisch verwandte Elemente untereinander zu stehen kommen. Auf diese Weise entsteht das Periodensystem der Elemente. Die Anordnung in Zeilen geht auf Mendelejew (1869) zurück. Weil damals die innere Struktur der Atome unbekannt war, ordnete er die Elemente nach aufsteigender Atommasse an, was an wenigen Stellen zu einer anderen Ordnung führt. In solchen Fällen mußte Mendelejew die Ordnung durchbrechen, um die Periodizität zu erhalten. Zudem waren zu seiner Zeit noch nicht alle Elemente bekannt, was zu Lücken im Periodensystem führte. Als diese Elemente später entdeckt wurden, hatten sie tatsächlich die vorhergesagten chemischen Eigenschaften.

In diesem Abschnitt soll skizziert werden, wie sich der Aufbau des Periodensystems aus dem bisher Besprochenen ergibt, namentlich aus dem Spektrum des Wasserstoffatoms und der Antisymmetrie von Fermionenzuständen. Mit der Bezeichnung $\mathcal{H} = L^2(K) \otimes U_{1/2}$ für den Zustandsraum eines Teilchens werden Zustände eines Atoms mit n Elektronen (unter Vernachlässigung der Kernbewegung) durch Vektoren in $\bigwedge^n \mathcal{H}$ beschrieben, da Elektronen als Spin-1/2-Teilchen Fermionen sind. Der Operator $H_C^{(n)}$ aus Gleichung (26) ist wohldefiniert im antisymmetrischen Tensorprodukt, da (26) einen selbstadjungierten S_n -Morphismus in $\mathcal{H}^{\otimes n}$ definiert. Gleiches trifft auf die Störterme W_C , W_f und W_{hf} zu.

Für ein qualitatives Verständnis des Periodensystems genügt es, zusätzlich zu $H_C^{(n)}$ die gegenseitige Abstoßung der Elektronen zu berücksichtigen, also die Störung W_C . Auch diese sei in einer ersten Überlegung vernachlässigt, so daß sich die Elektronen gegenseitig nicht spüren. Eine derartige Näherung wird Modell unabhängiger Teilchen genannt und ermöglicht eine einfache Bestimmung der Eigenvektoren und -räume des Hamiltonoperators. Denn weil $\bigwedge^n \mathcal{H}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}^{\otimes n}$ ist, trifft Satz 4.2 insofern zu, daß Eigenwerte und -vektoren von $H_C^{(n)}$ ausschließlich aus denen von H durch geeignete Kombination hervorgehen.

Den niedrigsten Eigenwert von $H_C^{(n)}$ erhält man offensichtlich, indem man so viele Vektoren wie möglich aus dem Eigenraum zum kleinsten Eigenwert von H_C wählt, dann sukzessive aus den darauf folgenden Eigenräumen Vektoren hinzunimmt und am Ende das antisymmetrische Produkt bildet. Dieses Antisymmetrisieren verhindert gerade, dabei zweimal denselben Eigenvektor u von H auszuwählen, denn dann verschwindet $u \wedge u \wedge u_3 \wedge \dots \wedge u_n$ für alle u_3, \dots, u_n . Das ist das Pauli-Prinzip: Zwei Elektronen (oder allgemeiner Fermionen) können nicht den gleichen Zustand besetzen. Weiterhin kann man höchstens so viele Zustände aus einem Eigenraum auswählen, wie dessen Dimension ist, weil man sie linear unabhängig zu nehmen hat.

Weil man das Spektrum des genaueren Hamiltonoperators $H_C^{(n)} + W_C$ analytisch nicht bestimmen kann, versucht man die einfache Rechnung des Modells unabhängiger Teilchen so weit wie möglich zu imitieren: In dieser sogenannten Zentralfeldnäherung nimmt man an, daß die Wechselwirkung der Elektronen untereinander in guter Näherung durch ein rotationssymmetrisches Potential beschrieben werden kann. Für vollständig gefüllte Unterschalen (Eigenräume) ist dies tatsächlich der Fall [GP91, Sec. 14.4].

Bei teilweise gefüllten Unterschalen ist die Zentralfeldnäherung nicht ganz korrekt, doch zeigt es sich, daß in der Regel höchstens eine solche Unterschale auftritt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses Zentralpotential zu erhalten. Eine besteht darin, aus der Lösung des Modells unabhängiger Teilchen die Abstoßung der Elektronen untereinander zu berechnen und über Sphären zu mitteln. Das so erhaltene Zentralpotential V addiert man zum Coulombpotential des Kerns, so daß sich der Hamiltonoperator in der Form

$$H_C^{(n)} + W_C = (H_C + V)^{(n)} + (W_C - V^{(n)})$$

schreibt. Gewonnen hat man dabei, daß die eher schwierig zu berechnende Störung W_C durch einen „kleineren“ Term ersetzt ist. Jetzt löst man (näherungsweise) das Einteilchenproblem für den Operator $H = H_C + V$ und erhält durch das Modell unabhängiger Teilchen eine verbesserte Lösung des Mehrteilchenproblems. Nun bestimmt man erneut die Wechselwirkungsenergie zwischen den Elektronen und bekommt (nach Mittelung über Sphären) ein neues Potential V' . Dieser Prozeß wird wiederholt, bis sich aufeinanderfolgende Lösungen kaum noch unterscheiden. Dann ist der Term $W_C - V^{(n)}$ in der Regel so klein, daß er für die meisten Atome keine qualitativen Veränderungen der Energieniveaus gegenüber $(H_C + V)^{(n)}$ mehr bewirkt. Bei der Zentralfeldnäherung erhält man folgendes Resultat: Die Eigenräume von H sind minimal entartet, analog zum Operator H_C numeriert man die Eigenwerte E_{Nl} von H_l in aufsteigender Reihenfolge. Für nicht zu große Werte für N und l liegen Eigenvektoren mit größerer Summe $N+l$ energetisch höher, und falls die Summe für zwei Eigenwerte gleich ist, ist derjenige mit kleinerem l der energetisch günstigere. Die Abfolge der Energieniveaus ist also

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, \dots,$$

dabei sind die Energiedifferenzen zwischen p - und s -Unterschalen besonders groß. Verglichen mit dem Wasserstoffatom, bei dem die Energie nicht von der Unterschale einer Schale abhängt, sind jetzt Zustände mit höherem Drehimpuls l nicht mehr so stark gebunden. Das ist plausibel, weil die Elektronen auf unteren Schalen, die im Mittel dem Kern näher sind, dessen positive Ladung abschirmen, so daß die effektive Kernladung, die das äußere Elektron spürt, geringer ist.

Als Beispiel sei das Mangan betrachtet. 20 der 25 Elektronen eines neutralen Manganatoms füllen die Unterschalen $1s, 2s, 2p, 3s, 3p$ und $4s$ vollständig, die übrigen 5 besetzen die $3d$ -Schale. Die energetisch günstigsten Zustände liegen also im Unterraum

$$\begin{aligned} &\bigwedge^2 \text{eig}(H, E_{10}) \otimes \bigwedge^2 \text{eig}(H, E_{20}) \otimes \bigwedge^6 \text{eig}(H, E_{21}) \otimes \bigwedge^2 \text{eig}(H, E_{30}) \otimes \\ &\bigwedge^6 \text{eig}(H, E_{31}) \otimes \bigwedge^5 \text{eig}(H, E_{32}) \otimes \bigwedge^2 \text{eig}(H, E_{40}). \end{aligned} \quad (34)$$

(An dieser Stelle benutze ich die Identität [FH91, Gleichung (B.2)])

$$\bigwedge^n (U \oplus V) \simeq \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^{n-k} U \otimes \bigwedge^k V$$

bzw. deren Verallgemeinerung auf mehrere Summanden, um (34) als Unterraum von $\bigwedge^n \mathcal{H}$ zu erkennen.) Diese Elektronenkonfiguration des Mangans gibt man durch

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$$

an. Durch die Zentralfeldnäherung enthält die Elektronenkonfiguration des Grundzustandes also immer eine Reihe von vollen Unterschalen und eventuell eine teilweise gefüllte. Diese muß aber nicht die äußerste des Atoms sein (maximales N); bei dem Übergangselement Mangan wird die $3d$ -Unterschale nach der weiter außen liegenden $4s$ -Unterschale aufgefüllt, was Einfluß zum Beispiel auf die optischen Eigenschaften hat. Bei wenigen Atomen erklärt die Zentralfeldnäherung die tatsächliche Elektronenkonfiguration nicht. So fehlt beim Chrom gegenüber dessen Nachfolger im Periodensystem, dem Mangan, ein Elektron in der $4s$ - statt in der $3d$ -Unterschale, wie es die Abfolge der Energieniveaus erwarten lassen würde. Dieser Energiegewinn durch gerade halbvolle Unterschalen läßt sich mit diesem Modell nicht deuten.

Es zeigt sich, daß die chemischen Eigenschaften eines Atoms im wesentlichen durch die äußerste Schale bestimmt werden, insbesondere durch deren Unterschale mit größtem l . Dabei sind die Anzahl der Elektronen darin und deren räumliche Wahrscheinlichkeits- bzw. Ladungsverteilung wichtig. Letztere sind für alle Unterschalen mit gleicher Bahndrehimpulsquantenzahl l ähnlich, ebenso, wie die Anzahl Elektronen, die in dieser Unterschale Platz finden können, gleich ist, denn dieses l bestimmt einen Untermodul

von $L^2(S^2)$ mit Dimension $2l + 1$ und damit auch die Winkelverteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der Elektronen. Zusätzlich sind noch die Energiedifferenzen der teilweise gefüllten Schale zu der nächsthöher- und -tieferliegenden von Bedeutung. Damit erklärt sich schließlich die Periodizität der chemischen Eigenschaften: Elemente mit der gleichen Anzahl Elektronen in äußeren Unterschalen mit gleichem l zeigen ähnliches Verhalten, und solche kommen in der Reihe der Elemente in festen Abständen vor, die durch die energetische Reihenfolge der Unterschalen und deren Dimensionen bestimmt sind. Beispielsweise gehen Atome mit aufgefüllter p -Unterschale so gut wie keine Bindungen ein, was an der großen Energiedifferenz zur nächsten Unterschale liegt. Zusammen mit Helium (volle $1s$ -Unterschale) bilden sie die Hauptgruppe der Edelgase.

Besonders interessant aus dem mathematischen Blickwinkel ist, daß die beim Periodensystem auftretenden Zahlen ihren Ursprung in der Darstellungstheorie von $SU(2)$ haben: In eine l -Unterschale passen $2(2l + 1)$ Elektronen; $2l + 1$ ist die Dimension des einfachen $SO(3)$ -Moduls U_l , und 2 die des $SU(2)$ -Moduls $U_{1/2}$, der zur Beschreibung von Spin-1/2-Teilchen ins Spiel gebracht wurde.

Die teilweise gefüllte Unterschale spaltet durch Coulombabstoßung in verschiedene Terme auf,

$$\bigwedge^n (U_l \otimes U_{1/2}) = \bigoplus_k U_{l_k} \otimes U_{s_k}.$$

Welcher Term der energetisch günstigste ist, geben die Hundschen Regeln an: Der energetisch niedrigste Term ist derjenige mit maximaler Spinquantenzahl s_k , und falls es davon mehrere gibt, liegen diejenigen mit größtem l_k am tiefsten. Beim oben angesprochenen Mangan ist nach den Hundschen Regeln der Term

$$\bigwedge^5 U_2 \otimes \text{Sym}^5 U_{1/2}$$

der energetisch günstigste, der zugehörige Gesamtspin des Mangans beträgt $5/2$ (nur die $3d$ -Schale liefert Beiträge). Dieser Term ist trivialer $O(K)$ -Modul, d. h. räumlich rotationssymmetrisch. Anschaulich ist diese Konfiguration deswegen bevorzugt, weil sich die Elektronen „maximal ausweichen“ und dadurch die gegenseitige elektrostatische Abstoßung minimieren. Auch das Chrom erreicht durch den Wechsel eines Elektrons von der $4s$ - in die $3d$ -Schale eine rotationssymmetrische Konfiguration, die energetisch unterhalb der von der Zentralfeldnäherung vorhergesagten liegt.

Literatur: [Ste94, Sec. 4.6], [GP91, Sec. 14.4]

Kapitel 5

Projektive Darstellungen

5.1 Der projektive Raum und projektiv-unitäre Abbildungen

In Abschnitt 4.1 wurde ausgeführt, daß die Zustände eines quantenmechanischen Systems in eindeutiger Weise den Elementen eines projektiven Raumes \mathbf{PH} entsprechen. Diese werden durch die Bahnen der stetigen Wirkung von $U(1)$ auf der Einheitskugel

$$S(\mathcal{H}) := \{u \in \mathcal{H} : \|u\| = 1\}$$

von \mathcal{H} vermöge Skalarmultiplikation bijektiv beschrieben. Wir machen $\mathbf{PH} = S(\mathcal{H})/U(1)$ zu einem topologischen Raum, indem wir ihn mit der Quotiententopologie versehen.¹ Die Bilder unter der Projektion

$$\pi: S(\mathcal{H}) \rightarrow S(\mathcal{H})/U(1) = \mathbf{PH}, \quad \mathbf{u} \mapsto [\mathbf{u}],$$

bezeichne ich wie bisher durch eckige Klammern. Weil $U(1)$ in $S(\mathcal{H})$ durch Homöomorphismen wirkt, ist π eine offene Abbildung, denn:

$$V \subset S(\mathcal{H}) \text{ offen} \implies U(1)V = \bigcup_{\lambda \in U(1)} \lambda V \subset S(\mathcal{H}) \text{ offen} \implies \pi(V) \subset \mathbf{PH} \text{ offen.}$$

Da offene Quotienten mit Produktbildung vertauschen [Oss92, Satz 2.5.6], induziert die Abbildung

$$S(\mathcal{H}) \times S(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{R}, \quad (v, u) \mapsto |\langle v, u \rangle|,$$

eine stetige Abbildung²

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{PH} \times \mathbf{PH} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Quantenmechanisch ist $\langle [v], [u] \rangle^2$ die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $[u]$ in den Zustand $[v]$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung „Befindet sich das System im Zustand $[v]$?“ eine positive Antwort zu erhalten, falls das System unmittelbar vor der Messung im Zustand $[u]$ ist.

Eine bijektive Abbildung $T: \mathbf{PH} \rightarrow \mathbf{PH}$ heißt **projektiv-unitär**, falls sie die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht ändert, falls also

$$\forall [u], [v] \in \mathbf{PH} \quad \langle \mathbf{T}[v], \mathbf{T}[u] \rangle = \langle [v], [u] \rangle$$

ist. Die **projektiv-unitäre Gruppe** $\tilde{U}(\mathbf{PH})$ sei die Menge aller solchen Abbildungen mit der Komposition als Gruppenoperation. Es ist klar, daß jede unitäre Abbildung eine projektiv-unitäre Abbildung in \mathbf{PH} induziert. Gleiches gilt für antiunitäre Abbildungen. Die Gruppe der antiunitären Abbildungen in \mathcal{H} bezeichne ich mit $\bar{U}(\mathcal{H})$ und die Vereinigung $U(\mathcal{H}) \cup \bar{U}(\mathcal{H})$ mit $\tilde{U}(\mathcal{H})$. $U(\mathcal{H})$ ist eine Untergruppe von $\tilde{U}(\mathcal{H})$ vom Index 2. Tatsächlich sind damit die alle Möglichkeiten, projektiv-unitäre Abbildungen zu erhalten, ausgeschöpft:

Satz 5.1 (Wigner). *Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum der Dimension ≥ 2 . Dann ist die Folge*

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow \tilde{U}(\mathcal{H}) \xrightarrow{P} \tilde{U}(\mathbf{PH}) \longrightarrow 1$$

exakt.

¹Alternativ könnte man \mathbf{PH} als Quotienten $(\mathcal{H} \setminus \{0\})/GL(1)$ definieren. Dieser ist aber zu $S(\mathcal{H})/U(1)$ homöomorph, und das müßte dann in meinem Beweis von Satz 5.2 zusätzlich gezeigt werden.

²Es ist nicht schwer, zu zeigen, daß

$$d([u], [v]) = \sqrt{1 - \langle [u], [v] \rangle}$$

eine Metrik in \mathbf{PH} definiert und die davon erzeugte Topologie gleich der Quotiententopologie ist.

Dabei bettet man $U(1)$ vermöge $\lambda \mapsto \lambda \text{id}$ in $U(\mathcal{H})$ ein. Der elementare, aber mühsame Beweis ist z. B. in [GP90, Sec. 7.2] dargestellt; der Zusammenhang mit dem Hauptsatz der Projektiven Geometrie wird in [BL81, 5.1.3] diskutiert. Der triviale Fall $\dim \mathcal{H} = 1$ ist ohne Bedeutung. Ich werde auch die Bilder unter P in der Form $P(A) = [A]$ schreiben.

Als nächstes machen wir $\bar{U}(\mathbf{P}\mathcal{H})$, oder genauer gesagt, nur $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$, das Bild von $U(\mathcal{H})$ unter P , zu einer topologischen Gruppe.³ In Abschnitt 2.2 hatten wir gesehen, daß $U(\mathcal{H})$ (mit der starken Topologie) eine topologische Gruppe ist. (Man beachte, daß man sich bei der Definition der starken Topologie auf die Abbildungen

$$\text{ev}_u: U(\mathcal{H}) \rightarrow S(\mathcal{H})$$

beschränken kann.) Die Untergruppe $U(1) \subset U(\mathcal{H})$ ist abgeschlossen: Bei einer in $U(\mathcal{H})$ konvergenten Folge von Skalierungen $(\lambda_n)_n$ aus $U(1)$ konvergiert für jedes $u \in S(\mathcal{H})$ die Folge $(\text{ev}_u(\lambda_n))_n$ gegen ein skalares Vielfaches von u , und eine lineare Abbildung, die alle Geraden stabilisiert, ist eine Skalierung. Bei Netzkonvergenz argumentiert man genauso, doch wurde in Abschnitt 2.2 bemerkt, daß bei separablem \mathcal{H} die Gruppe $U(\mathcal{H})$ zwei-abzählbar ist. (Alternativ kann man an dieser Stelle mit der Kompaktheit von $U(1)$ und der Stetigkeit der Einbettung argumentieren.) Also ist auch $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ mit der Quotiententopologie von $U(\mathcal{H})/U(1)$, die für den Moment mit τ_1 bezeichnet sei, eine topologische Gruppe.

Es gibt eine weitere Möglichkeit, $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ mit einer Topologie zu versehen, indem man nämlich die Schritte „Einführen der starken Topologie“ und „Quotientenbildung“ vertauscht: Da wir bereits $\mathbf{P}\mathcal{H}$ mit einer (Quotienten-)Topologie versehen haben, kann man $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ die starke Topologie bezüglich aller Abbildungen

$$\text{ev}_{[u]}: U(\mathbf{P}\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{P}\mathcal{H}, \quad [A] \mapsto [A][u] = [Au],$$

$[u] \in \mathbf{P}\mathcal{H}$, geben. Diese Topologie sei τ_2 genannt. Nun folgt schon aus der universellen Eigenschaft des Quotienten, daß τ_1 feiner ist als τ_2 , also $\tau_1 \supset \tau_2$: Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\text{ev}_u} & S(\mathcal{H}) \\ \downarrow P & & \downarrow \pi \\ U(\mathbf{P}\mathcal{H}) & \xrightarrow{\text{ev}_{[u]}} & \mathbf{P}\mathcal{H} \end{array}$$

kommutiert, sind die Abbildungen $\text{ev}_{[u]}$ in der Topologie τ_1 stetig. Es gilt sogar mehr:

Satz 5.2. *Es ist $\tau_1 = \tau_2$.*

Für den Beweis benötigen wir eine Vorüberlegung.

Lemma 5.3. *Die Abbildungen $\text{ev}_u: U(\mathcal{H}) \rightarrow S(\mathcal{H})$, $u \in S(\mathcal{H})$, sind offen.*

Beweis. Wir beweisen sogar die Offenheit in der Normtopologie von $U(\mathcal{H})$. Dabei können wir $\dim \mathcal{H} > 1$ annehmen, denn sonst ist ev_u ein Homöomorphismus. Sei $V \subset U(\mathcal{H})$ offen (in der Normtopologie) und $A \in V$. Zu zeigen ist, daß $\text{ev}_u(V)$ eine Umgebung von $\text{ev}_u(A)$ enthält. Da wir die Behauptung für alle u beweisen, können wir $A = 1$ annehmen. Sei also eine offene Kugel um 1, etwa mit Radius $\epsilon > 0$, in V enthalten. Wir zeigen, daß in $S(\mathcal{H})$ die offene Kugel um $\text{ev}_u(1) = u$ mit Radius $\epsilon/\sqrt{2}$ im Bild von ev_u liegt. Sei v ein Vektor in dieser Umgebung von u . Man kann u derart zu einem Orthonormalsystem (u, w) ergänzen, daß $v = \lambda u + \mu w$ ist mit $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$. Setzt man $W = \text{lin}\{u, w\}$ und

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}_{(u,w)} \in SU(W),$$

so ist $B \oplus 1$ eine unitäre Abbildung in $W \oplus W^\perp = \mathcal{H}$, und durch Nachrechnen überprüft man

$$\|B \oplus 1 - 1\|^2 = \|B - 1\|^2 \leq |\lambda - 1|^2 + |\mu|^2 + 2|\lambda\mu| \leq 2(|\lambda - 1|^2 + |\mu|^2) = 2\|v - u\|^2 < \epsilon^2.$$

Also liegt $B \oplus 1$ in V , und $\text{ev}_u(B \oplus 1) = v$. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

³Jedes $B \in \bar{U}(\mathcal{H})$ vermittelt eine Bijektion $U(\mathcal{H}) \rightarrow \bar{U}(\mathcal{H})$ (sogar einen Homöomorphismus zwischen den beiden Zusammenhangskomponenten von $\bar{U}(\mathcal{H})$, wenn man $\bar{U}(\mathcal{H})$ mit der starken Topologie versteht), also auch eine Bijektion $U(\mathbf{P}\mathcal{H}) \rightarrow \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{P}\mathcal{H}) := \mathbf{P}(\bar{\mathbf{U}}(\mathcal{H}))$. Auf diese Weise kann man jede Topologie von $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ auf $\bar{U}(\mathbf{P}\mathcal{H})$ übertragen und anschließend $\bar{U}(\mathcal{H})$ die Summentopologie $U(\mathbf{P}\mathcal{H}) \sqcup \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{P}\mathcal{H})$ geben. (Daß $U(\mathcal{H})$ und $\bar{U}(\mathcal{H})$ nicht zusammenhängen, sieht man leicht. Der Zusammenhang von $U(\mathcal{H})$ folgt aus dem Spektralsatz für normale Operatoren [Wer95, Satz VII.1.24].)

Beweis (des Satzes). Sei $V \subset U(\mathbf{PH}) = \mathbf{P}(U(\mathcal{H}))$ offen bezüglich τ_1 . Endliche Schnitte von Mengen der Form $\text{ev}_u^{-1}(W)$ mit $u \in S(\mathcal{H})$ und $W \subset S(\mathcal{H})$ offen bilden eine Basis der starken Topologie von $U(\mathcal{H})$. Wir können annehmen, daß es eine endliche Menge $K \subset S(\mathcal{H})$ und offene Teilmengen $W_u \subset S(\mathcal{H})$ für alle $u \in K$ derart gibt, daß

$$P^{-1}(V) = \bigcap_{u \in K} \text{ev}_u^{-1}(W_u) \quad (1)$$

gilt. [Ansonsten schreibe man $P^{-1}(V)$ als Vereinigung gesättigter offener Mengen, für die das gilt.] Während $P^{-1}(V)$ gesättigt ist, muß dies für die W_u nicht gelten. Allerdings gestattet es das letzte Lemma, zu gesättigten offenen Teilmengen W'_u überzugehen, indem man $W'_u = \text{ev}_u(P^{-1}(V))$ setzt. Dann gilt Gleichung (1) auch für die W'_u , und weil alle auftretenden Mengen jetzt gesättigt sind, kann man wie folgt rechnen:

$$V = P\left(\bigcap_{u \in K} \text{ev}_u^{-1}(W'_u)\right) = \bigcap_{u \in K} P(\text{ev}_u^{-1}(W'_u)) = \bigcap_{u \in K} \text{ev}_{[u]}^{-1}(\pi(W'_u))$$

Also ist V wegen der Offenheit von π eine offene Menge in der Topologie τ_2 . \square

Literatur: [Sim68, Sec. 2], [Bar54, §1]

5.2 Darstellungen und projektive Darstellungen

Im folgenden bezeichnet $U(\mathbf{PH})$ die Gruppe einschließlich der Topologie $\tau_1 = \tau_2$.

Da der quantenmechanische Zustandsraum der projektive Raum \mathbf{PH} ist, liegt es nahe, daß sich Symmetrien eines Systems als Invarianzen unter Gruppenwirkungen in \mathbf{PH} äußern.

Definition. Sei G eine Gruppe. Eine projektiv-unitäre oder kurz **projektive Darstellung** von G in \mathbf{PH} ist ein stetiger Gruppenmorphismus $G \rightarrow \tilde{U}(\mathbf{PH})$.

Es ist klar, daß jede Darstellung $T: G \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine projektive Darstellung $P \circ T$ definiert. Im weiteren wird es um die Umkehrung dieser Frage gehen: Wann kann man eine projektive Darstellung von G in \mathbf{PH} zu einer Darstellung in \mathcal{H} hochheben? Das heißt: Unter welchen Voraussetzungen gibt es zu dem Diagramm in der Kategorie der topologischen Gruppen

$$\begin{array}{ccc} & U(\mathcal{H}) & \\ & \downarrow P & \\ G & \xrightarrow{S} & \tilde{U}(\mathbf{PH}) \end{array} \quad (2)$$

einen Morphismus $T: G \rightarrow U(\mathcal{H})$, der das Diagramm kommutativ ergänzt?

$$\begin{array}{ccc} & U(\mathcal{H}) & \\ & \uparrow T & \downarrow P \\ G & \xrightarrow{S} & \tilde{U}(\mathbf{PH}) \end{array}$$

Existiert ein solches T , dann kann man die Gruppenwirkung im Hilbertraum \mathcal{H} studieren, den man gegenüber dem projektiven Raum \mathbf{PH} bevorzugt.

Lemma 5.4. Sei G eine zusammenhängende Liegruppe und S eine projektive Darstellung von G in \mathbf{PH} . Dann liegt das Bild von G unter S in $U(\mathbf{PH})$.

Beweis. Da $[\tilde{U}(\mathbf{PH}) : U(\mathbf{PH})] = \mathbf{2}$ ist, liegt jedes Quadrat in $U(\mathbf{PH})$. In einer hinreichend kleinen Umgebung der $1 \in G$ ist jedes Element ein Quadrat und wird folglich nach $U(\mathbf{PH})$ abgebildet. Weil G zusammenhängend ist, wird es von jeder Umgebung der 1 erzeugt. Also geht jedes $g \in G$ unter S nach $U(\mathbf{PH})$. \square

Man beachte, daß in diesem Beweis keine Stetigkeitsargumente bezüglich S benutzt wurden; die Behauptung folgt aus rein algebraischen Überlegungen.

Lemma 5.5. *Falls sich S zu einer Darstellung T von G hochheben läßt, dann ist die Anzahl solcher Hochhebungen gleich der der eindimensionalen Darstellungen von G .*

Beweis. Für jede Darstellung $\lambda: G \rightarrow U(1)$ ist $g \mapsto T'(g) = \lambda(g)T(g)$ ebenfalls eine Hochhebung von S zu einer Darstellung von G . Sei umgekehrt T' eine Hochhebung von S . Dann ist $T'(g) = \lambda(g)T(g)$ für eine eindimensionale Darstellung λ , die die Identität $\lambda(g) = \langle T(g)u, T'(g)u \rangle$ für jedes normierte $u \in \mathcal{H}$ erfüllt. (Die letzte Gleichung zeigt auch die Stetigkeit von λ .) Da beide Zuordnungen invers zueinander sind, ist damit das Lemma bewiesen. \square

Wir werden uns im folgenden auf zusammenhängende und einfach zusammenhängende Gruppen beschränken – zwei übliche Annahmen, wenn man versucht, Abbildungen hochzuheben. Das folgende Lemma zeigt, daß unter diesen Voraussetzungen im endlichdimensionalen Fall jede projektive Darstellung einer Liegruppe hochgehoben werden kann:

Lemma 5.6. *Sei G eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende Liegruppe, \mathcal{H} ein endlichdimensionaler Hilbertraum und $S: G \rightarrow U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ eine projektive Darstellung von G in $\mathbf{P}\mathcal{H}$. Dann läßt sich S zu einer Darstellung von G in \mathcal{H} hochheben.*

Beweis. Wir können den Quotienten $U(\mathcal{H}) \rightarrow U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ durch die Isogenie $SU(\mathcal{H}) \rightarrow U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ ersetzen, denn die stetige Bijektion

$$SU(\mathcal{H})/(U(1) \cap SU(\mathcal{H})) \rightarrow U(\mathcal{H})/U(1)$$

ist ein Homöomorphismus, da beide Räume kompakt hausdorffsch sind. Weil $U(1) \cap SU(\mathcal{H})$ diskret ist, ist $SU(\mathcal{H}) \rightarrow U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ eine Überlagerung.

Da G zusammenhängende und einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, läßt sich folglich jede stetige Abbildung $S: G \rightarrow U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ zu einer stetigen Abbildung $T: G \rightarrow SU(\mathcal{H})$ hochheben. Wegen des Zusammenhangs von G ist T dabei Morphismus von Gruppen, falls S es ist. \square

Jetzt untersuchen wird den allgemeinen Fall, bei dem keine Bedingung an die Dimension von \mathcal{H} gestellt ist. Diese Situation tritt in der Quantenmechanik fast ausschließlich auf, da selbst bei einem Hilbertraum der Form $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K \otimes \mathcal{H}_S$ mit endlichdimensionalem \mathcal{H}_S (vgl. Abschnitt 4.2) der projektive Raum $\mathbf{P}\mathcal{H}$ nicht durch $\mathbf{P}\mathcal{H}_K$ und $\mathbf{P}\mathcal{H}_S$ ersetzt werden kann. Das folgende Beispiel zeigt, daß es projektive Darstellungen gibt, die keine Hochhebung zulassen.

Beispiel 5.7. Sei T_P die Einschränkung der kanonischen Darstellung der Euklidischen Gruppe $E(K)$ (Beispiel 4.15) in $L^2(K)$ auf die Untergruppe K der Translationen. Die Kombination

$$T: (x, \tau) \mapsto T_P(x)T_X(\tau)$$

mit der Darstellung T_X aus Beispiel 4.16 liefert keine Darstellung der zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden Liegruppe $K \times K'$, weil die Gleichungen

$$\begin{aligned} (T_P(x)T_X(\tau)u)(y) &= (T_X(\tau)u)(y-x) = e^{i\tau(x)-i\tau(y)}u(y-x), \\ (T_X(\tau)T_P(x)u)(y) &= e^{-i\tau(y)}(T_P(x)u)(y) = e^{-i\tau(y)}u(y-x) \end{aligned}$$

die Weylschen Relationen

$$T_P(x)T_X(\tau) = e^{i\tau(x)}T_X(\tau)T_P(x) \tag{3}$$

beweisen, die nicht mit der Kommutativität von $K \times K'$ verträglich sind. Wegen $e^{i\tau(x)} \in U(1)$ ist aber die induzierte Abbildung $P \circ T$ eine projektive Darstellung von $K \times K'$. Allerdings zeigt Gleichung (3), daß es unmöglich ist, diese zu einer Darstellung hochzuheben, denn jede Skalierung von $T_P(x)$ und $T_X(\tau)$ (und nur das ist als Korrektur möglich) kürzt sich heraus.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Beobachtung, daß $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ mehr ist als nur Quotient von Gruppen.

Satz 5.8. *$P: U(\mathcal{H}) \rightarrow U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ ist topologisches $U(1)$ -Prinzipalbündel.*

(Da $U(1)$ im Zentrum von $U(\mathcal{H})$ liegt, braucht man nicht zwischen Links- und Rechtswirkung von $U(1)$ zu unterscheiden.)

Beweis. Für $u \in S(\mathcal{H})$ sei

$$V_u = \{A \in U(\mathcal{H}) : \langle u, Au \rangle \neq 0\} \subset U(\mathcal{H}) \text{ offen.}$$

Die V_u bilden eine Überdeckung von $U(\mathcal{H})$: Falls für ein $A \in U(\mathcal{H})$ und ein $u \in \mathcal{H}$ die Skalarprodukte $\langle u, Au \rangle = \langle Au, A(Au) \rangle = 0$ sind, dann ist für $v = (\lambda u + Au)/\sqrt{2}$

$$2\langle v, Av \rangle = \lambda + \bar{\lambda}\langle u, A^2u \rangle,$$

und dieses Skalarprodukt kann nicht gleichzeitig für $\lambda = 1$ und $\lambda = i$ verschwinden. Also liegt A in einem gewissen V_u .

Die Bilder $W_u = P(V_u)$ bilden eine offene Überdeckung von $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ [P offen und surjektiv], und ihre vollen Urbilder sind die V_u . Wir definieren noch die stetigen $U(1)$ -Abbildungen

$$\phi_u: V_u \rightarrow U(1), \quad A \mapsto \frac{\langle u, Au \rangle}{|\langle u, Au \rangle|},$$

um die lokalen Trivialisierungen

$$\psi_u: V_u \rightarrow W_u \times U(1), \quad A \mapsto (P(A), \phi_u(A)),$$

angeben zu können, deren Inverse

$$\psi_u^{-1}: (P(A), \lambda) \mapsto \lambda \phi_u(A)^{-1} A$$

wohldefiniert und stetig sind [universelle Eigenschaft des Quotienten]. \square

Man kann Diagramm (2) in kanonischer Weise durch das *pull-back* (E, p, s) zu einem kommutativen Rechteck

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & U(\mathcal{H}) \\ p \downarrow & & \downarrow P \\ G & \xrightarrow{S} & \tilde{U}(\mathbf{P}\mathcal{H}) \end{array}$$

ergänzen. Dabei ist

$$E = \{(g, A) : S(g) = P(A)\} \subset G \times U(\mathcal{H})$$

ausgestattet mit der Teilraumtopologie, und p und s sind die Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. E ist abgeschlossene Untergruppe von $G \times U(\mathcal{H})$ [abgeschlossen: E ist das Urbild der Diagonalen von $U(\mathbf{P}\mathcal{H}) \times U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ unter $S \times P$, die abgeschlossen ist, weil $U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ hausdorffsch ist.] Das *pull-back* E ist universell in dem Sinne, daß jedes Paar $p': E' \rightarrow G$, $s': E' \rightarrow U(\mathcal{H})$ von stetigen Gruppenmorphisamen, das Diagramm (2) kommutativ ergänzt, eindeutig über E faktorisiert (universelle Eigenschaft des *pull-back*⁴).

Weiterhin ist p ein $U(1)$ -Prinzipalbündel, nämlich das von S induzierte: Wenn P über $V \subset U(\mathbf{P}\mathcal{H})$ trivial ist mit $U(1)$ -Homöomorphismus

$$\psi = P \times \phi: P^{-1}(V) \rightarrow V \times U(1),$$

dann ist mit $W = S^{-1}(V)$

$$p \times (\phi \circ s): p^{-1}(W) \rightarrow W \times U(1)$$

$U(1)$ -Homöomorphismus mit Inversem $i \times (\psi^{-1} \circ (S \times \text{id}))$, wobei $i: W \hookrightarrow G$ die Inklusion bezeichnet. Insbesondere ist p Quotient, d. h.

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1, \quad (4)$$

⁴In dieser Sichtweise ist das *pull-back* nur bis auf Isomorphie festgelegt und die hier benutzte Konstruktion eine mögliche.

ist exakt, wobei $U(1)$ in das Zentrum von E eingebettet wird. [$U(1)$ liegt im Zentrum von $U(\mathcal{H})$.⁵]

Falls es eine Hochhebung T von S gibt, ergänzt das Paar (id, T) Diagramm (2), und die dadurch eindeutig bestimmte Abbildung $\sigma: G \rightarrow E$ ist ein Schnitt von p . In diesem Falle ist p also triviales $U(1)$ -Prinzipalbündel, und der durch σ induzierte Homöomorphismus $G \times U(1) \rightarrow E$ ist Gruppenmorphismus, weil σ es ist. Die Folge (4) spaltet (in der Kategorie der topologischen Gruppen), und wir erhalten folgenden Satz:

Satz 5.9. *Eine Hochhebung zu S existiert genau dann, wenn das pull-back E von S und P gleich dem Produkt (in der Kategorie der topologischen Gruppen) von G und $U(1)$ ist.*

Aus diesem Grunde sind wir an Kriterien interessiert, die sicherstellen, daß ausschließlich das Produkt $E = G \times U(1)$ die Folge (4) exakt ergänzt. Damit werden wir zum Studium von sogenannten zentralen Erweiterungen geführt: Zu gegebenen Gruppen G und H heißt (E, i, p) **Erweiterung** von G durch H , wenn die Folge

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1 \quad (5)$$

exakt ist.⁶ Eine Erweiterung wird **zentral** genannt, wenn H in das Zentrum von E abgebildet wird.

Man kann erwarten, daß Erweiterungen von Liegruppen durch Eigenschaften deren Liealgebren klassifiziert werden können. In der Tat werden wir sehen, daß man Liegruppenerweiterungen im wesentlichen auf (noch zu definierenden) Liealgebrenenerweiterungen zurückführen kann. Da letztere einfacher zu untersuchen sind, wird zunächst gezeigt, daß man das pull-back E als Liegruppe auffassen kann.

Satz 5.10. *Sei G zusammenhängende Liegruppe. Dann besitzt das pull-back E von S und P eine differenzierbare Struktur derart, daß (5) eine exakte Folge von Liegruppen ist.*

Beweis. Wir konstruieren lokale Trivialisierungen von p dergestalt, daß in ihnen die Gruppenoperationen, soweit definiert, glatt sind, ebenso wie die Übergangsfunktionen zwischen verschiedenen Trivialisierungen. Dadurch wird eine differenzierbare Struktur auf E erklärt, die E zu einer Liegruppe macht. Man beachte, daß mit G und $U(1)$ auch das Prinzipalbündel E zusammenhängend ist.

Dafür genügt es, eine lokale Trivialisierung $\psi_1: W = p^{-1}(V) \rightarrow V \times U(1)$ über einer offenen Umgebung V von $p(1) = 1 \in G$ anzugeben, in der die Gruppenoperationen, soweit definiert, glatt sind: Dann ist p über $p(e)V$ trivial für jedes $e \in E$, und der $U(1)$ -Homöomorphismus $l(e^{-1}): eW \rightarrow W$ induziert eine Trivialisierung $\psi_e := \psi_1 \circ l(e^{-1})$. Außerdem sind für $e, f \in E$ die Übergangsfunktionen

$$\psi_f \circ \psi_e^{-1}: \psi_e(eW \cap fW) \rightarrow \psi_f(eW \cap fW)$$

glatt, denn

$$\psi_f \circ \psi_e^{-1} = \psi_1 \circ l(f^{-1}e) \circ \psi_1^{-1}$$

ist gerade die Linksmultiplikation in E in der lokalen Trivialisierung ψ_1 . Auch die Gruppenoperationen sind glatt, weil man in

$$\psi_{e^{-1}} \circ \iota \circ \psi_e^{-1} = \psi_1 \circ \text{In}(e) \circ \iota \circ \psi_1^{-1}$$

die Konjugation mit e ersetzen kann durch

$$\text{In}(e) = \text{In}(e_1) \circ \cdots \circ \text{In}(e_n)$$

für gewisse $e_1, \dots, e_n \in W$, da E von jeder Umgebung der 1 erzeugt wird und die Konjugation mit jedem e_k in einer Umgebung der 1 glatt ist. Mit dem gleichen Argument folgt aus der Gleichung

$$\psi_{ef} \circ \mu \circ (\psi_e^{-1} \times \psi_f^{-1}) = \psi_1 \circ \mu \circ (\text{In}(f^{-1}) \times \text{id}) \circ (\psi_1^{-1} \times \psi_1^{-1})$$

die Glattheit der Multiplikation μ .

Wir konstruieren nun ψ_1 . Sei $\psi: p^{-1}(V) \rightarrow V \times U(1)$ eine lokale Trivialisierung. Wir setzen $V_0 = V$ und wählen offene, symmetrische Umgebungen V_1 bis V_3 von $1 \in G$ mit $V_i V_i \subset V_{i-1}$ für $i = 1, 2$ und 3. Im folgenden werde ich der Übersichtlichkeit halber nicht die maximalen Definitionsbereiche von Abbildungen angeben, sondern jeweils ein darin enthaltenes V_i . Da ψ $U(1)$ -Abbildung ist und $U(1)$ im Zentrum von E liegt, ist die Gruppenmultiplikation lokal von der Form

$$(g, a)(h, b) = (gh, \phi(g, h)ab), \quad g, h \in V_1, a, b \in U(1), \quad (6)$$

⁵Aus dem Spektralsatz für normale Operatoren folgt sogar $Z(U(\mathcal{H})) = U(1)$.

⁶Manche Autoren nennen dieses eine Erweiterung von H durch G .

für eine stetige Funktion ϕ . Wir können $\psi(1) = (1, 1)$ annehmen, woraus sich $\phi(g, 1) = \phi(1, g) = 1$ ergibt und auch

$$(g, a)^{-1} = (g^{-1}, \phi(g, g^{-1})^{-1} a^{-1}), \quad g \in V_1, a \in U(1).$$

Aufgrund der Assoziativität der Multiplikation in E gilt

$$\phi(g, h)\phi(gh, k) = \phi(g, hk)\phi(h, k)$$

für alle $g, h, k \in V_2$. Für eine stetige Funktion $\chi: V_{i-1} \rightarrow U(1)$ definieren wir den **Korand**

$$\delta\chi: V_i \times V_i \rightarrow U(1), \quad \delta\chi(g, h) = \chi(g)\chi(h)\chi(gh)^{-1}.$$

Jede solche Funktion χ erklärt einen $U(1)$ -Homöomorphismus

$$\gamma: V_{i-1} \times U(1) \rightarrow V_{i-1} \times U(1), \quad (g, a) \mapsto (g, \chi(g)a), \quad (7)$$

und damit eine mit ψ verträgliche Trivialisierung

$$\tilde{\psi} = \gamma \circ \psi|_{p^{-1}(V_{i-1})}.$$

Die Multiplikation in der neuen Trivialisierung ist wiederum von der Form (6), allerdings mit der neuen Funktion

$$\tilde{\phi}: V_i \times V_i \rightarrow U(1), \quad (g, h) \mapsto \phi(g, h)\delta\chi(g, h)^{-1} \quad (8)$$

statt ϕ , wie man durch Nachrechnen überprüft.

Für das weitere ist es zweckmäßig, statt ϕ den Logarithmus davon zu betrachten. Wir nehmen daher an, daß V_1 so klein gewählt ist, daß die Exponentialfunktion in V_1 invertiert werden kann, so daß

$$\lambda(g, h) := \log \phi(g, h) \in u(1) = i\mathbf{R}$$

wohldefiniert ist. Dabei bezeichnet \log die zur Exponentialfunktion inverse Abbildung. λ erfüllt die Gleichungen

$$\lambda(g, h) + \lambda(gh, k) = \lambda(g, hk) + \lambda(h, k) \quad \text{und} \quad \lambda(g, 1) = \lambda(1, g) = 0. \quad (9)$$

Auch hier definieren wir zu einer Funktion $\zeta: V_{i-1} \rightarrow u(1)$ einen **Korand** durch

$$\delta\zeta: V_i \times V_i \rightarrow u(1), \quad \delta\zeta(g, h) = \log((\delta \exp \zeta)(g, h)) = \zeta(g) + \zeta(h) - \zeta(gh). \quad (10)$$

Im Licht des bisher Gesagten genügt es, eine Funktion $\zeta: V_2 \rightarrow u(1)$ derart zu definieren, daß $\lambda - \delta\zeta$ eine glatte Funktion auf $V_3 \times V_3$ ist: Denn setzt man $\chi = \exp \zeta$ in (7), erhält man eine neue, mit ψ verträgliche Trivialisierung

$$\psi_1: p^{-1}(V_3) \rightarrow V_3 \times V_3,$$

in der die Gruppenoperationen, soweit definiert, glatt sind.

Wir konstruieren dieses ζ durch geeignetes Glätten von λ . (Diese Idee geht auf Iwasawa zurück.) Sei μ_l ein (linksinvariantes) Haarmaß auf G und μ_r ein rechtsinvariantes Haarmaß, und seien ν_l, ν_r zwei glatte Funktionen auf G mit kompakten Trägern in V_3 und

$$\int \nu_l d\mu_l = \int \nu_r d\mu_r = 1 \quad (11)$$

(vgl. den Beweis von Satz 3.10). Damit definieren wir

$$\begin{aligned} \zeta_1(g) &= \int \lambda(g, k)\nu_l(k) d\mu_l(k), \quad g \in V_1, \\ \lambda_1 &= \lambda - \delta\zeta_1: V_2 \times V_2 \rightarrow u(1), \\ \zeta_2(h) &= \int \lambda_1(k, h)\nu_r(k) d\mu_r(k), \quad h \in V_2, \quad \text{und} \\ \lambda_2 &= \lambda_1 - \delta\zeta_2: V_3 \times V_3 \rightarrow u(1). \end{aligned}$$

Da $\lambda_2 = \lambda - \delta(\zeta_1 + \zeta_2)$ ist, bleibt noch die Glattheit von λ_2 zu zeigen. Wegen (9), (10) und (11) ist

$$\begin{aligned} \lambda_1(g, h) &= \int (\lambda(g, h) - \lambda(g, k) - \lambda(h, k) + \lambda(gh, k))\nu_l(k) d\mu_l(k) \\ &= \int (\lambda(g, hk) - \lambda(g, k))\nu_l(k) d\mu_l(k) = \int \lambda(g, k)(\nu_l(h^{-1}k) - \nu_l(k)) d\mu_l(k), \end{aligned}$$

also hängt $\lambda_1(g, h)$ differenzierbar von h ab. Analog zeigt man

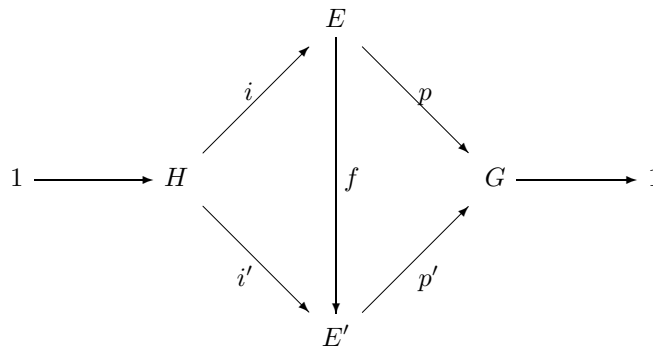
$$\lambda_2(g, h) = \int \lambda_1(k, h)(\nu_r(kg^{-1}) - \nu_r(k))d\mu_r(k),$$

womit die Glattheit von λ_2 bewiesen ist. □

Literatur: [Sim68, Sec. 2], [Kir76, §14.1], [Bar54, §4c]

5.3 Erweiterungen von Liegruppen und Liealgebren

Seien G und H Liegruppen. Zwei Erweiterungen (E, i, p) , (E', i', p') von G durch H heißen **äquivalent**, wenn es einen Lieomorphismus $f: E \rightarrow E'$ derart gibt, daß das folgende Diagramm kommutiert:



Damit ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation erklärt, denn ein solches f muß bijektiv sein [Fünfer-Lemma] und folglich Lieisomorphismus. Die Äquivalenzklasse von E bezeichne ich mit $[E]$.

Wendet man den Liefunktor L auf eine Erweiterung

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

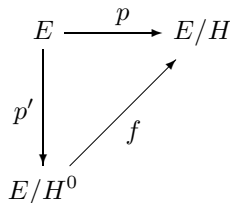
an, so erhält man die exakte Folge von Liealgebren

$$0 \longrightarrow LH \xrightarrow{Li} LE \xrightarrow{Lp} LG \longrightarrow 0.$$

In diesem Falle heißt (LE, Li, Lp) eine **Erweiterung** von LG durch LH , und zudem **zentral**, wenn LH in das Zentrum $Z(LE)$ von LE abgebildet wird. Wegen $Z(LE) = LZ(E)$ gehen zentrale Liegruppenerweiterungen unter L in zentrale Liealgebrenenerweiterungen über. Definiert man die Äquivalenz von Liealgebrenenerweiterungen analog zu der von Gruppenerweiterungen, dann folgt aus der Funktorialität von L , daß äquivalente Erweiterungen von G durch H in äquivalente Erweiterungen von LG durch LH übergehen.

Lemma 5.11. *Sei E zusammenhängende Liegruppe und $H < E$ abgeschlossene Untergruppe. Wenn der homogene Raum E/H einfach zusammenhängend ist, dann ist H zusammenhängend.*

Beweis. Sei H^0 die Zusammenhangskomponente von H , die die 1 enthält. Dann faktorisiert $p: E \rightarrow E/H$ über E/H^0 .



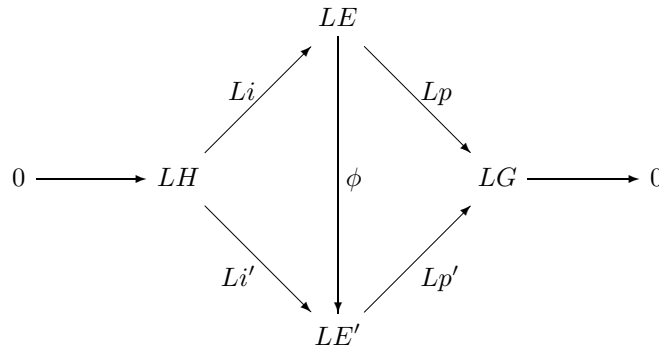
Wegen $LH^0 = LH$, der Surjektivität von Lp' und der Kommutativität des Diagramms muß Lf injektiv sein. Also ist f eine Überlagerung des einfach zusammenhängenden Raumes E/H und damit bijektiv. Es folgt $H = H^0$. □

Satz 5.12. Sei G, H zusammenhängende Liegruppen und G zusätzlich einfach zusammenhängend. Dann ist die Zuordnung

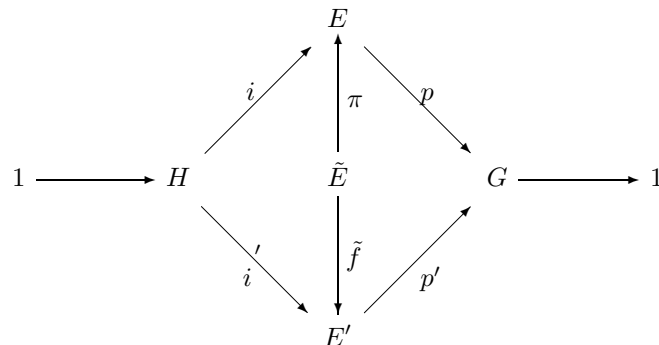
$$[E] \mapsto [LE]$$

von Äquivalenzklassen (zentraler) Erweiterungen von G durch H zu solchen (zentralen) Erweiterungen von LG durch LH injektiv.

Tatsächlich ist die Zuordnung sogar bijektiv. Der Beweis dieser Behauptung, der weitergehende Kenntnisse von Liegruppen benötigt, wird in den Anmerkungen zu diesem Kapitel (Abschnitt 5.4) besprochen. *Beweis.* Da G und H zusammenhängend sind, muß auch jede Erweiterung von G durch H zusammenhängend sein. Seien $(E, i, p), (E', i', p')$ zwei Erweiterungen von G durch H derart, daß (LE, Li, Lp) und (LE', Li', Lp') äquivalent sind, etwa



für einen Liealgebrenisomorphismus ϕ . Da der Funktor L voll ist, existiert eine Isogenie $\tilde{f}: \tilde{E} \rightarrow E'$ mit $L\tilde{f} = \phi$, wobei $\pi: \tilde{E} \rightarrow E$ die universelle Überlagerung von E bezeichnet. Damit erhält man folgendes kommutative Diagramm:



Weil G einfach zusammenhängend ist, sind die Kerne von $p \circ \pi$ und $p' \circ \tilde{f}$ gemäß dem letzten Lemma zusammenhängend. Dann stimmen sie aber schon überein, da ihre Liealgebren es tun,

$$\ker L(p \circ \pi) = \ker Lp = \ker(Lp' \circ \phi) = \ker L(p' \circ \tilde{f}).$$

Folglich faktorisiert \tilde{f} über E ; die induzierte Abbildung ist das gesuchte f . □

Unser Ausgangsproblem, zu entscheiden, ob eine projektive Darstellung S einer Liegruppe G zu einer Darstellung hochgehoben werden kann, haben wir jetzt auf die Klassifizierung von zentralen Erweiterungen von LG durch $u(1)$ reduziert, wenn wir G als zusammenhängend und einfach zusammenhängend annehmen. Unser Ziel ist es jetzt, eine Bedingung anzugeben, wann die Liealgebra LG bis auf Äquivalenz nur eine einzige zentrale Erweiterung durch $u(1)$ besitzt. Wegen der soeben bewiesenen Injektivität der Zuordnung $[E] \mapsto [LE]$ gibt es dann nur eine Äquivalenzklasse von zentralen Erweiterungen von G durch $U(1)$, nämlich $[U(1) \times G]$, insbesondere ist jedes *pull-back* von S und P isomorph zu $U(1) \times G$. Mit Satz 5.9 folgt dann schließlich, daß sich S zu einer Darstellung hochheben läßt.

Etwas allgemeiner untersuchen wir nun zentrale Erweiterungen einer Liealgebra \mathfrak{g} durch eine abelsche Liealgebra \mathfrak{h} . (\mathfrak{h} ist also im wesentlichen ein Vektorraum.) Eine bilineare Abbildung

$$c: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

heißt **Kozykel**, wenn sie antisymmetrisch ist und die Identität

$$c(X, [Y, Z]) + c(Y, [Z, X]) + c(Z, [X, Y]) = 0$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ erfüllt. c heißt **Korand**, wenn es eine lineare Abbildung $d: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ gibt mit

$$c(X, Y) = d([X, Y])$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$. Wegen der Jacobi-Identität ist jeder Korand ein Kozykel, und der **zweite Kohomologieraum** $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ von \mathfrak{g} mit Werten in \mathfrak{h} ist definiert als der Quotient der Kozykeln durch die Koränder. Die Äquivalenzklasse eines Kozykels c wird dabei mit $[c]$ bezeichnet.

Mit Hilfe eines Kozykels c kann man auf der direkten Vektorraumsumme $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$ eine Lieklammer erklären vermöge

$$[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2]_c = c(Y_1, Y_2) \oplus [Y_1, Y_2];$$

die resultierende Liealgebra bezeichne ich mit $\mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}$. Mit dieser Definition wird

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

zu einer exakten Folge von Liealgebren, bei der \mathfrak{h} in das Zentrum von $\mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}$ abgebildet wird. Also ist $\mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}$ eine zentrale Erweiterung von \mathfrak{g} durch \mathfrak{h} .

Satz 5.13. *Die Zuordnung*

$$[c] \mapsto [\mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}]$$

ist eine Bijektion zwischen $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ und der Menge der Äquivalenzklassen zentraler Erweiterungen von \mathfrak{g} durch \mathfrak{h} .

Beweis. Zuerst zeigen wir die Wohldefiniertheit der Abbildung. Sei c' ein weiterer Repräsentant von $[c]$, etwa $c'(Y_1, Y_2) = c(Y_1, Y_2) + d([Y_1, Y_2])$ für eine lineare Abbildung $d: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Setzt man

$$\phi: \mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h} \oplus_{c'} \mathfrak{g}, \quad X \oplus Y \mapsto (X + d(Y)) \oplus Y, \quad (12)$$

so zeigt Nachrechnen, daß ϕ eine Äquivalenz der Erweiterungen $\mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h} \oplus_{c'} \mathfrak{g}$ liefert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g} & & & \\
 & & & \uparrow & & \searrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & & & \mathfrak{g} & \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \downarrow \phi & \nearrow & \\
 & & & \mathfrak{h} \oplus_{c'} \mathfrak{g} & & &
 \end{array} \quad (13)$$

Folglich hängt $[\mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}]$ nicht vom Repräsentanten $c \in [c]$ ab.

Läßt umgekehrt ein Liealgebrenmorphismus ϕ das Diagramm (13) für zwei Kozykeln c und c' kommutieren, dann muß ϕ von der Gestalt (12) sein. Weil ϕ Liealgebrenmorphismus ist, folgt aus der Gleichheit von

$$\phi[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2]_c = \phi(c(Y_1, Y_2) \oplus [Y_1, Y_2]) = (c(Y_1, Y_2) + d([Y_1, Y_2])) \oplus [Y_1, Y_2]$$

und

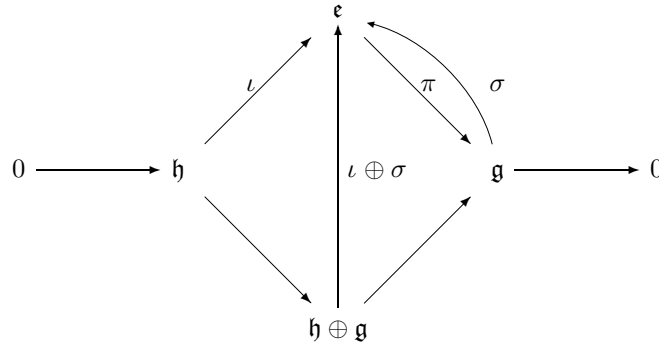
$$[\phi(X_1 \oplus Y_1), \phi(X_2 \oplus Y_2)]_{c'} = [(X_1 + d(Y_1)) \oplus Y_1, (X_2 + d(Y_2)) \oplus Y_2]_{c'} = c'(Y_1, Y_2) \oplus [Y_1, Y_2],$$

daß $[c] = [c']$ ist und die Abbildung $[c] \mapsto [\mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}]$ damit injektiv.

Nun zur Surjektivität. Sei

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

eine zentrale Erweiterung. Wählt man einen Vektorraumschnitt σ zu π , dann spaltet die Folge in der Kategorie der Vektorräume,



Mit der Definition

$$[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2] = c(Y_1, Y_2) \oplus [Y_1, Y_2],$$

wobei man

$$c(Y_1, Y_2) := [\sigma(Y_1), \sigma(Y_2)] - \sigma([Y_1, Y_2])$$

als ein Element von \mathfrak{h} auffaßt, wird $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$ zu einer Liealgebra \mathfrak{e}' und ϕ zu einem Liealgebrenisomorphismus. Wegen der Eigenschaften der Lieklammer in \mathfrak{e}' erfüllt c die Kozykleigenschaften. Also ist $\mathfrak{e}' = \mathfrak{h} \oplus_c \mathfrak{g}$, womit die Surjektivität bewiesen ist. \square

Mit der Argumentation nach Satz 5.12 können wir nun folgendes Endergebnis festhalten:

Satz 5.14 (Bargmann). *Sei G zusammenhängende und einfach zusammenhängende Liegruppe mit $H^2(LG, u(1)) = 0$. Dann läßt sich jede projektive Darstellung von G in \mathbf{PH} zu einer Darstellung in \mathcal{H} hochheben.*

Beispiel 5.15. Sei $(Y_k)_{k \in \{1,2,3\}}$ die in Abschnitt 3.5 eingeführte Basis von $su(2)$, und sei c ein Kozykel mit Werten in einer abelschen Liealgebra \mathfrak{h} . Wegen (3.4) und der Antisymmetrie von c ist

$$d: su(2) \rightarrow \mathfrak{h}, \quad [Y_k, Y_l] \mapsto c(Y_k, Y_l),$$

wohldefiniert, und damit erhält man $c(X, Y) = d([X, Y])$ für alle $X, Y \in su(2)$. Folglich ist

$$H^2(su(2), \mathfrak{h}) = 0.$$

Weil dieses insbesondere für $\mathfrak{h} = u(1)$ gilt, läßt sich jede projektive Darstellung von $SU(2)$ zu einer Darstellung hochheben. Da $su(2)$ nur eine einzige eindimensionale Darstellung besitzt, ist diese Hochhebung nach Lemma 5.5 sogar eindeutig. Auch jede projektive Darstellung von $SO(3)$ läßt sich zu einer Darstellung der universellen Überlagerung $Spin(3) \simeq SU(2)$ hochheben.

Literatur: [Bro82, Ch. IV], [Hoc51], [HN91, § II.5], [Sim68, Sec. 2]

5.4 Anmerkungen

Wie der Begriff „zweiter Kohomologieraum“ schon andeutet, sind die in diesem Kapitel auftretenden Kozykeln und Koränder genauer gesagt 2-Kozykeln und 2-Koränder von (Lie-)Gruppen und Liealgebren. Man kann sie für jedes $n \in \mathbf{N}$ erklären, wobei man einen Kokettenkomplex erhält.

Auch für eine Gruppe G (im algebraischen Sinn) kann man einen zweiten Kohomologieraum $H^2(G, H)$ definieren, dessen Elemente in Bijektion zu den Äquivalenzklassen von zentralen Erweiterungen von G durch eine abelsche Gruppe H stehen. Der Beweis verläuft analog zu Satz 5.13, insbesondere wählt man einen Schnitt zur Projektion $E \rightarrow E/H = G$. An genau dieser Stelle beginnen die Schwierigkeiten, wenn man versucht, die Ergebnisse auf topologische Gruppen zu übertragen, denn die Existenz eines stetigen Schnittes ist nicht klar. Bei Liegruppen kann man das Problem auf die Liealgebren zurückspielen, wo es stets Vektorraumschnitte gibt.

Lemma 5.11 kann man auch mit der langen exakten Homotopiefolge

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(E/H) \longrightarrow \pi_1(H) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(E/H) \longrightarrow \pi_0(H) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \pi_0(E/H), \quad (14)$$

die implizit schon im Beweis der Sätze 5.10 und 5.12 verwandt wurde, beweisen, denn aus $\pi_1(E/H) = 0$ und $\pi_0(E) = 0$ folgt $\pi_0(H) = 0$. Die Homotopiefolge ist exakt, weil $E \rightarrow E/H$ als Quotient von Liegruppen Prinzipalbündel und damit Serre-Faserung ist.

Benutzt man, daß für jede Liegruppe G die zweite Homotopiegruppe $\pi_2(G)$ trivial ist [Sim68, S. 12], [BtD85, Prop. V.7.5] (für G kompakt), so kann man leicht die Surjektivität der Zuordnung $[E] \rightarrow [LE]$ aus Satz 5.12 zeigen:

Zu einer zentralen Erweiterung von Liealgebren

$$0 \longrightarrow LH \longrightarrow \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} LG \longrightarrow 0$$

betrachtet man die Folge

$$1 \longrightarrow H' \longrightarrow \tilde{E} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1,$$

wobei \tilde{E} die zusammenhängende und einfach zusammenhängende Liegruppe mit $LE = \mathfrak{e}$ ist und H' die zusammenhängende Untergruppe von \tilde{E} mit $LH' = LH$. Diese Folge ist exakt, da p wie $Lp = \pi$ surjektiv ist und $\ker p = H'$ aus $\ker \pi = LH$ folgt, denn sowohl H' als auch $\ker p$ sind zusammenhängend [Lemma 5.11]. Also ist \tilde{E} eine zentrale Erweiterung von G durch H . Aus der exakten Homotopiefolge (14) ergibt sich nun unter Verwendung von $\pi_2(G) = 0$, daß auch H' einfach zusammenhängend ist. Daher muß $H = H'/D$ sein für eine diskrete Untergruppe D von H' . D ist auch diskrete Untergruppe von $Z(\tilde{E})$, weil H' als abgeschlossene Untergruppe die von \tilde{E} induzierte Teilraumtopologie besitzt. Man prüft leicht nach, daß mit der Bezeichnung $E = \tilde{E}/D$ das folgende Diagramm kommutativ ist mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & \tilde{E} & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

Folglich ist E eine zentrale Erweiterung von G durch H , und $LE = LE = \mathfrak{e}$. Damit ist die Surjektivität gezeigt.

Um den einfachen Zusammenhang von H' in der letzten Argumentation zu erschließen, kann man statt $\pi_2(G) = 0$ auch folgendes Resultat von Malzew verwenden [Hoc51, Lemma 3.1]:

Lemma 5.16 (Malzew). *Sei E zusammenhängende und einfach zusammenhängende Liegruppe und $H \triangleleft E$ zusammenhängender Normalteiler. Dann ist das H -Prinzipalbündel $E \rightarrow E/H$ trivial.*

Wenden wir dieses Lemma auf \tilde{E} und H' an, so folgt die Homöomorphie $\tilde{E} \approx \tilde{E}/H' \times H'$, und wegen $\pi_1(\tilde{E}) = \pi_1(\tilde{E}/H') \times \pi_1(H') = 0$ muß H' einfach zusammenhängend sein.

Um zu entscheiden, ob man eine projektive Darstellung $S : G \rightarrow U(\mathbf{PH})$ hochheben kann, wurde im Text als Bedingung angegeben, daß das *pull-back* E als Gruppe gleich $G \times U(1)$ ist. Eine andere Möglichkeit besteht darin, zunächst die Trivialität von E als $U(1)$ -Prinzipalbündel zu erkunden, was gegebenenfalls die Existenz einer stetigen Abbildung $T : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ sichert, und danach zu untersuchen, ob man T als Gruppenmorphismus wählen kann. Will man sich im zweiten Schritt Liealgebrenmethoden bedienen, ist Gewißheit darüber, daß E Liegruppe ist, unverzichtbar. Für den ersten Teil reichen jedoch die Werkzeuge der algebraischen Topologie aus. Während das systematische Vorgehen auf der Hindernistheorie beruht [Sim68, S. 12], gibt es hier eine hübsche Alternative durch die Verwendung von universellen Prinzipalbündeln [tD91, Abschnitt IV.4].

Ein H -Prinzipalbündel $P : EH \rightarrow BH$ heißt universelles H -Prinzipalbündel, wenn es numerierbar ist und es zu jedem numerierbaren H -Prinzipalbündel $E \rightarrow B$ bis auf Homotopie genau eine Bündelabbil-

dung nach P gibt. Bei jeder Bündelabbildung von p nach q

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

ist p isomorph zu dem von f induzierten Bündel. Da homotope Abbildungen $B \rightarrow BH$ isomorphe Prinzipalbündel induzieren [Homotopiesatz für Prinzipalbündel], kann man H -Prinzipalbündel bis auf Isomorphie durch Homotopieklassen $[B, BH]$ klassifizieren. Das universelle $U(1)$ -Prinzipalbündel ist gerade der zweite Eilenberg-MacLane-Raum $K(2, \mathbf{Z})$. (Beide Räume sind nur bis auf Homotopie bestimmt.) Da $[B, K(n, \mathbf{Z})]$ eine mögliche Definition der Kohomologiegruppen eines Raumes B mit Werten in \mathbf{Z} ist, werden Isomorphieklassen von $U(1)$ -Prinzipalbündeln also durch die zweite Kohomologie $H^2(B, \mathbf{Z})$ klassifiziert. Insbesondere ist jedes $U(1)$ -Prinzipalbündel $E \rightarrow G$ trivial, wenn $H^2(B, \mathbf{Z}) = 0$ ist. Doch das kann man wiederum für jede zusammenhängende und einfach zusammenhängende Liegruppe G aus $\pi_2(G) = 0$ schließen mit dem Satz von Hurewicz und dem universellen Koeffiziententheorem für die Kohomologie. Bei dem für die Quantenmechanik besonders interessanten Fall $G = SU(2)$ ergibt es sich auch direkt aus dem Homöomorphismus $SU(2) \approx S^3$.

Das *pull-back* E ist lokal euklidisch, d. h. lokal homöomorph zu einem geeigneten \mathbf{R}^n . Ein berühmtes Resultat von Montgomery, Zippin und Gleason [HN91, Bem. III.2.32] besagt, daß *jede* lokal euklidische topologische Gruppe bereits Liegruppe ist, also eine differenzierbare Struktur derart besitzt, daß die Gruppenoperationen glatt sind. Dieser Satz, der im wesentlichen das 5. Hilbertsche Problem beantwortet, macht verständlich, warum es so schwierig ist, (endlichdimensionale) topologische Gruppen anzugeben, die keine Liegruppen sind. Weil im vorliegenden Fall die Konstruktion der differenzierbaren Struktur von E mit verhältnismäßig geringem Aufwand möglich war, wollte ich nicht auf den Beweis von Satz 5.10 verzichten.

Die in der Einleitung aufgestellte Behauptung, daß das Resultat von Bargmann das Hochheben projektiver Darstellungen für eine große Klasse von Liegruppen sichert, wird durch das 2. Lemma von Whitehead gerechtfertigt: Danach ist für alle (reellen oder komplexen) Liealgebren \mathfrak{g} und \mathfrak{h} , \mathfrak{g} halbeinfach, \mathfrak{h} abelsch, der zweite Kohomologieraum $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 0$. Folglich sind für jede halbeinfache, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Liegruppe die Voraussetzungen von Satz 5.14 stets erfüllt, beispielsweise auch für die universelle Überlagerung SL_2 der eigentlichen Lorentzgruppe.

Das 2. Lemma von Whitehead gilt allgemeiner: Meine Definition von $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ist auf Satz 5.13 zugeschnitten, also auf zentrale Liealgebrenenerweiterungen. Bei einer beliebigen Erweiterung \mathfrak{e} von \mathfrak{g} durch eine abelsche Liealgebra (einen Vektorraum) \mathfrak{h} faktorisiert die adjungierte Darstellung von \mathfrak{e} auf \mathfrak{h} über \mathfrak{g} , so daß man eine Darstellung von \mathfrak{g} in \mathfrak{h} erhält. Nun kann man umgekehrt mit einer Darstellung τ von \mathfrak{g} in einem Vektorraum V beginnen und solche Erweiterungen von \mathfrak{g} durch V (als abelsche Liealgebra) betrachten, die als Darstellung von \mathfrak{g} auf V gerade τ liefern. Auch in dieser Situation stehen die Äquivalenzklassen von Erweiterungen in Bijektion zu den Elementen eines geeignet definierten zweiten Kohomologierumes $H^2(\mathfrak{g}, \tau)$.

Literatur: [Hoc51], [Bro82], [HN91, § II.5] und Lehrbücher der algebraischen Topologie, insbesondere [tD91]

Anhang A

Nichtunitäre Darstellungen

In Satz 2.7 wurde gezeigt, daß eine stetige Wirkung einer eins-abzählbaren Gruppe G auf einem topologischen Raum X mit G -invariantem Borelmaß μ zu einer unitären Darstellung T von G in $L^2(X, \mu)$ führt. Läßt man die Bedingung der G -Invarianz von μ fallen, so ist nicht einmal mehr gesichert, daß die einzelnen Operatoren $T(g)$ in ganz $L^2(X, \mu)$ definiert sind, wie das Beispiel $G = \{\pm 1\}$ und der Wirkung

$$g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, \quad x \mapsto x^g,$$

zeigt: Während die Indikatorfunktion u des Intervalls $(0, 1)$ quadratintegabel ist, trifft dieses auf $T(-1)u$ nicht zu. Aus diesem Grund beschränken wir uns auf den Fall, daß $X = V$ ein endlichdimensionaler stetiger G -Modul ist. Dabei wird G wie bisher als lokalkompakt vorausgesetzt.

Satz A.1. *Eine stetige Darstellung t einer eins-abzählbaren, lokalkompakten Gruppe G in einem Hilbertraum V induziert in kanonischer Weise eine stark stetige Darstellung T von G in $L^2(V)$.*

Beweis. Aus der Transformationsformel für Integrale folgt

$$\|T(g)u\|^2 = |\det t(g)| \|u\|^2$$

für alle $G \in G$ und $u \in L^2(V)$. Insbesondere ist $T(g)u$ stets wieder quadratintegabel.

Sei U eine offene Umgebung der $1 \in G$ mit \bar{U} kompakt, und sei $u \in C_c(V)$. Dann ist auch $W = \bar{U} \operatorname{supp} u$ kompakt, und $\|u\|_\infty 1_W \in L^2(V)$ dominiert $|T(g)u|$ für alle $g \in U$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz erhält man [G eins-abzählbar]

$$\lim_{g \rightarrow 1} T(g)u = \lim_{\substack{g \rightarrow 1 \\ g \in U}} T(g)u = u$$

(Konvergenz in L^2 -Norm).

Sei nun $v \in L^2(V)$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Da $|\det t(g)|$ stetig von g abhängt, existiert

$$M = \sup_{g \in \bar{U}} \sqrt{|\det t(g)|}.$$

Wähle ein $u \in C_c(V)$ mit $\|u - v\| < \frac{\epsilon}{M+1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|T(g)v - v\| &= \|T(g)(v - u)\| + \|T(g)u - u\| + \|u - v\| \\ &= (\sqrt{|\det t(g)|} + 1) \|u - v\| + \|T(g)u - u\| < \epsilon + \|T(g)u - u\|, \end{aligned}$$

und für alle g einer offenen Umgebung der $1 \in G$ mit $\|T(g)u - u\| < \epsilon$ ist $\|T(g)v - v\| < 2\epsilon$. □

Literaturverzeichnis

- [AM78] R. Abraham, J. E. Marsden: *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978.
- [AMR88] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, 2nd ed., Springer, New York 1988.
- [Bar54] V. Bargmann: On unitary ray representations of continuous groups, *Ann. of Math.*, 59(1):1–46, 1954.
- [Bau90] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter, New York 1990.
- [BL81] L. C. Biedenharn, J. D. Louck: *The Racah–Wigner Algebra in Quantum Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 9, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.
- [BR69] G. Birkhoff, G.-C. Rota: *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Blaisdell, Waltham, Mass., 1969.
- [BR77] A. O. Barut, R. Raczka: *Theory of Group Representations and Applications*, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977.
- [Bro82] K. S. Brown: *Cohomology of Groups*, Springer, New York 1982.
- [BtD85] T. Bröcker, T. tom Dieck: *Representations of Compact Lie Groups*, Springer, New York 1985.
- [CO80] E. U. Condon, H. Odabaşı: *Atomic Structure*, Cambridge University Press, Cambridge 1980.
- [CS67] E. U. Condon, G. H. Shortley: *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge 1967.
- [CT77a] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë: *Quantum Mechanics*, vol. 1, Wiley-Interscience, New York 1977.
- [CT77b] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë: *Quantum Mechanics*, vol. 2, Wiley-Interscience, New York 1977.
- [FH91] W. Fulton, J. Harris: *Representation Theory: A First Course*, Springer, New York 1991.
- [GP90] A. Galindo, P. Pascual: *Quantum Mechanics I*, Springer, Berlin 1990.
- [GP91] A. Galindo, P. Pascual: *Quantum Mechanics II*, Springer, Berlin 1991.
- [GS90] V. Guillemin, S. Sternberg: *Variations on a theme by Kepler*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1990.
- [Hac83] I. Hacking: *Representing and Intervening*, Cambridge University Press, Cambridge 1983.
- [Her84] H. Hertz: *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1984.
- [HN91] J. Hilgert, K.-H. Neeb: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, Braunschweig 1991.
- [Hoc51] G. Hochschild: Group extensions of Lie groups, *Ann. of Math.*, 54(1):96–109, 1951.
- [HS96] P. D. Hislop, I. M. Sigal: *Introduction to Spectral Theory: With Applications to Schrödinger Operators*, Springer, New York 1996.
- [Jos69] R. Jost: *Quantenmechanik I*, Verlag des Vereins der Mathematiker und Physiker an der ETH, Zürich 1969.

- [Jos73] R. Jost: *Quantenmechanik II*, Verlag des Vereins der Mathematiker und Physiker an der ETH, Zürich 1973.
- [Kir76] A. A. Kirillov: *Elements of the Theory of Representations*, Springer, Berlin 1976.
- [Lan93] S. Lang: *Real and Functional Analysis*, 3rd ed., Springer, New York 1993.
- [Lan95] S. Lang: *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer, New York 1995.
- [LL66] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Quantenmechanik, Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Bd. 3, 2. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1966.
- [LS75] B. M. Levitan, I. S. Sargsjan: *Introduction to Spectral Theory*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1975.
- [MR94] J. E. Marsden, T. S. Ratiu: *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, New York 1994.
- [NŠ82] M. A. Naimark, A. I. Štern: *Theory of Group Representations*, Springer, New York 1982.
- [Oss92] E. Ossa: *Topologie*, Vieweg, Braunschweig 1992.
- [Pru81] E. Prugovečki: *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, 2nd ed., Academic Press, New York 1981.
- [Puk67] L. Pukanszky: *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris 1967.
- [Rob83] A. Robert: *Introduction to the Representation Theory of Compact and Locally Compact Groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1983.
- [RS75] M. Reed, B. Simon: *Fourier Analysis, Self-Adjointness, Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 2, Academic Press, New York 1975.
- [RS80] M. Reed, B. Simon: *Functional Analysis, Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 1, rev. ed., Academic Press, New York 1980.
- [Sch95] M. Schottenloher: *Geometrie und Symmetrie in der Physik*, Vieweg, Braunschweig 1995.
- [Ser77] J.-P. Serre: *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, New York 1977.
- [Sim68] D. J. Simms: *Lie Groups and Quantum Mechanics*, Springer, Berlin 1968.
- [Ste94] S. Sternberg: *Group theory and physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1994.
- [tD91] T. tom Dieck: *Topologie*, de Gruyter, Berlin 1991.
- [Tri72] H. Triebel: *Höhere Analysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
- [vN32] J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin 1932.
- [Wei76] J. Weidmann: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teubner, Stuttgart 1976.
- [Wer95] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin 1995.
- [Wey31] H. Weyl: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2. Aufl., Hirzel, Leipzig 1931.
- [Wig31] E. P. Wigner: *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atom-spektren*, Vieweg, Braunschweig 1931. Erweiterte englische Ausgabe *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York 1959.
- [Žel73] D. P. Želobenko: *Compact Lie Groups and their Representations*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1973.

Index

- *-Algebra 24
- *-Isomorphismus 24
- *-Morphismus 24

- abgeschlossener Operator 10
- abschließbar 10
- Abschluß 10
- adjungierter Operator 9
- antilinear 2
- antiunitär 4
- Approximationssatz 29, 40
- Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte 49, 50
- Aufzählungen 2
- Austauschwechselwirkung 83
- Auswahlregel 72

- Bahndrehimpulsoperator 62
- Bahndrehimpulsquantenzahl 61, 63
- Bargmann, V. 97, 99, 103
- Bildmaß 4
- Blaues Seminar iii
- Bohr, N. 50
- Bohrsches Magneton 63
- Borelmaß 3
- Borelmenge 3
- Bosonen 80

- C^* -Algebra 24, 49
- Casimir-Element 43, 45
- Charakter 28
- Chrom 85
- Clebsch-Gordan-Koeffizienten 73
- Clebsch-Gordan-Zerlegung 2
- Coulombpotential 51

- Darstellung
 - einer *-Algebra 24
 - einer Liealgebra 39
 - nicht unitäre 21, 101
 - unitäre 20
- determinierender Bereich
 - eines Operators 11
 - einer Liealgebrendarstellung 39, 40
 - stetige 39
- Differential 36
- Differentialausdruck 14
- Differentialoperator 14
- Dipoloperator
 - elektrischer 64
 - magnetischer Dipoloperator 63
- direkte Summe von
 - Hilberträumen 4
 - G -Moduln 21
 - Operatoren 12
- disjunkt 72
- Dreiecksbedingung 73

- Eckart, C. 73
- Edelgase 85
- einfach reduzibel 73
- Einparameteruntergruppe 36
- Elektron 78
- Elektronenkonfiguration 84
- Endlichkeitsbedingung 59
- Entartung 61
 - aufgehobene 68
 - minimale 61
 - zufällige 61
- Erwartungswert 50
- Erweiterung von
 - Gruppen 92
 - äquivalente 94
 - zentrale 92
 - Liealgebren 94
 - äquivalente 94
 - zentrale 94
- Euklidische Gruppe 55, 63, 90

- Faltung 23
- fast schiefadjungiert 11
- Feinstruktur 71
- Feinstrukturoperator 71
- Fermionen 80
- Ferromagnetismus 83
- Fortsetzung 9
- Fouriertransformation 14
- Fundamentalsatz 30
- Funktionenräume 2

- Gårding-Unterraum 40
- Generator 36
- Gesamtdrehimpulsoperator 63
- Gesamtdrehimpulsquantenzahl 63
- Gesamtmasse 52
- gleichgradig stetig 26
- Graph 10
- Gruppen 2
- Gruppenalgebra 24
- gyromagnetisches Verhältnis 63, 78

- Haarmaß 17
- Hacking, I. iii, 103
- halbzahlig 2
- Hamiltonoperator 1, 49

- eines freien Teilchens 14
- eines Teilchens im Coulombpotential 52
- zeitabhängiger 70
- Hamiltonsche Mechanik 49
- Hamiltonsches Vektorfeld 50, 66
- harmonisches Polynom 47, 64
- Hauptquantenzahl 61
- Hauptsatz der Projektiven Geometrie 88
- Helium 85
- hermitesch 10
- Hertz, H. iii, 103
- Hilbert-Schmidt-Operatoren 7, 34
- Hilberträume 2
- Homotopiefolge 98
- Hundsche Regeln 85
- Hyperfeinstruktur 71, 78
- Hyperfeinstrukturoperator 71, 78

- Ikebe, T. iii, 52
- Impulsabbildung 66
- Impulsoperator 63
- intermediäre Kopplung 70, 71
- invariantes Maß 4
- Involution 24
- involutiv 23
- irreduzibel 28
- isomorphe G -Moduln 20
- χ -isotypische Komponente 33
- isotypische Zerlegung 33
- Iwasawa, K. 93

- jj*-Kopplung 71

- Kato, T. iii, 52, 70
- Kernmagneton 78
- Kernspin 71, 78
- Kernspinoperator 78
- Killingform 43
- Killingsches Vektorfeld 35
- Kohomologieraum einer
 - Gruppe 97
 - Liealgebra 96, 97, 99
- Kohomologieraum 96, 97
- kompakter Operator 26
- Konfigurationsraum 49
- Kontaktterm 79
- Kopenhagener Interpretation 50
- Kopplungsschema 70
- Korand bei
 - Gruppen 93, 97
 - Liealgebren 96, 97
- Kotangentialbündel 49
- Kozykeln bei
 - Gruppen 97
 - Liealgebren 95, 97

- Landésche Intervallregel 76
- Landéscher g -Faktor 63
- Laplace-Beltrami-Operator 47
- Lemma von Whitehead 99

- Lichtgeschwindigkeit 2
- Lieableitung 35
- Liefunktor 94
- Lorentzgruppe 30, 99
- LS -Kopplung 71

- Mackey, G. W. 72
- magnetische Quantenzahl
 - für Bahndrehimpuls 46, 67, 69
 - für Gesamtdrehimpuls 78
 - für Spin 69
- Malzew, A. 98
- G -Mannigfaltigkeit 22
- Mangan 85
- Masse 14
 - reduzierte 52
- Matrixelement 28, 65
 - reduziertes 73
- Matrixelementenabbildung 65
- Maßraum 2
- Mendelejew, D. I. 83
- Messung 49
- Modell unabhängiger Teilchen 71, 83
- A -Modul 24
- G -Modul 20, 21
- \mathfrak{g} -Modul 39
 - stetiger 39
- Modul, einfacher 20, 33
- A -Morphismus 24
- G -Morphismus 21
 - unbeschränkter 54
- Multiplikationsoperator 13, 64
- Multipoloperator 64, 73

- Nelsonsches Lemma 38
- Neumann, J. v. iii, 49, 104
- Neutron 78
- Noethersches Theorem 1, 65

- Observable 49, 51
- Orangen 71
- Orthogonalitätsrelationen 27
 - für Charaktere 28
- Ortsoperator 50, 64

- Parität
 - eines $O(3)$ -Moduls 48
 - eines $O(3)$ -Tensoroperators 64
- Paschen-Back-Effekt 77
- Pauli-Matrizen 45
- Pauli-Prinzip 83
- Periodensystem 83
- Peter, F. 29, 30
- Phasenraum 49
- Picardsches Iterationsverfahren 69
- Plancksches Wirkungsquantum 2
- präkompakt 26
- G -Projektion 21
- Projektionssatz 77
- projektiv-unitäre Abbildung 87

- projektiv-unitäre Gruppe 87
- projektive Darstellung 89
- projektiver Raum 49, 87
- Proton 78
- pull-back*
 - zweier Morphismen 91
 - eines Vektorfeldes 39
- Punktspektrum 12
- Quantenzahl 61, 72
- Quarkmodell 78
- G -Raum 18, 22
 - homogener 18
- Reduktion des Zustandsvektors 50
- reguläre Darstellung, regulärer G -Modul 22
- Resolvente 12
- Resolventenmenge 12
- Restspektrum 12
- Reziprozitätssatz von Frobenius 34
- Rieszscher Darstellungssatz 3
- Runge-Lenz-Vektor 61
- Russell-Saunders-Kopplung 71, 82
- S^2 45
- Sätze von Peter-Weyl
 - s. Approximationssatz, Fundamentalsatz
- Satz von
 - Arzelà-Ascoli 26
 - Stone 2, 40
- Schale 61
- schiefadjungiert 10
- schieferhermitesch 10
- Schrödingergleichung
 - zeitabhängige 49
 - zeitunabhängige 50
- schwache Topologie 19
- Schweizer Wort 69
- selbstadjungiert 10
- sl_2 44
- $so(3)$ 44
- Sobolewraum 15
- Sobolewsches Lemma 15
- Spektralsatz für
 - kompakte selbstadjungierte Operatoren 29
 - normale Operatoren 88, 92
 - selbstadjungierte Operatoren 14
- Spektrum 12
 - kontinuierliches 12
 - residuales 12
 - wesentliches 61
- Spin
 - eines Moduls/einer Darstellung 44
 - eines Teilchens 53, 78
- Spin-Bahn-Kopplung 71, 75, 83
- Spin-Statistik-Theorem 80
- Spinoperator 63
- Spinquantenzahl 63
- Standardkriterium für
 - Fast-Selbstadjungiertheit 12
 - Selbstadjungiertheit 11
- Stark-Effekt 70
- starke Topologie 19, 21, 88
- Stern-Gerlach-Versuch 53
- Störungstheorie
 - zeitabhängige 69
 - zeitunabhängige 69, 70
- Strassen, V. iii
- streng positiv 57
- Stufenfunktion 8
- $su(2)$ 44
- Summationen 2
- Superauswahlregel 80
- symplektische Form 50, 66
- symplektische Mannigfaltigkeit 49, 50, 66
- Tensoroperator 62
 - adjungierter 62
 - reeller 62
- Tensorprodukt von
 - Hilberträumen 6
 - G -Moduln 21
- Term 71
 - invertierter 76
 - normaler 76
- Termsystem 83
- Träger eines Maßes 3
- Transformationsformel für Bildmaße 4
- Übergangselement 84
- Übergangswahrscheinlichkeit 69, 87
- unitäre Zeitentwicklung 49
- Unterschale 61
- Untermodul 20
- Variablenseparation 51
- Vektorprodukt 45
- verallgemeinerte Ableitung 14
- Vertauschen von Operatoren 74
- Vertauschungsrelationen 46
- Vervollständigung 7
- Virialsatz 57
- Wasserstoffatom 51, 56, 80, 84
- Weidmann, J. 57, 104
- Weyl, H. iii, 29, 30, 104
- Weylsche Relationen 90
- Weylsches Lemma 15, 16
- Weylsches Theorem 61
- Wigner, E. P. iii, 73, 87, 103, 104
- Wigner-Eckart-Theorem 1, 73
- Zeeman-Effekt 53, 67, 78
 - anomaler 78
 - normaler 78
- Zentralfeldnäherung 83
- Zentrum der Gruppenalgebra 31
- Zustand 49
 - stationärer 49
- zwei-abzählbar 2

Symbolverzeichnis

$\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^+, \mathbf{C}$	natürliche Zahlen (mit 0), reelle, positive reelle und komplexe Zahlen
\mathbf{Z}_2	die Gruppe mit zwei Elementen
$\text{In}(g)$	Konjugation mit g
1_V	Indikatorfunktion der Menge V
$C(X)$	stetige Funktionen auf dem topologischen Raum X (mit Werten in \mathbf{C})
$C^\infty(M)$	glatte Funktionen auf der Mannigfaltigkeit M (mit Werten in \mathbf{C})
$C_c(X), C_c^\infty(M)$	Funktionen aus $C(X)$ bzw. $C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger
$B(\mathcal{H}, \mathcal{I})$	Raum der beschränkten linearen Abbildungen $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$
$U(\mathcal{H})$	Gruppe der unitären Operatoren in \mathcal{H} , s. auch S. 19
$\text{eig}(A, \lambda)$	Eigenraum von A zum Eigenwert λ

Die Seitenzahlen verweisen auf Definitionen oder spätere Vereinbarungen.

\mathcal{H}, \mathcal{I}	2	T	20, 25
$\langle v, u \rangle$	2	$\bigoplus_{k \in K} T_k$	22
$d\mu$	3	$T_1 \otimes T_2$	22
$\text{supp } \mu$	3	$L^2(G), L^2(G/H),$	22
$L^2(\mu), L^2(X, \mu), L^2(X)$	3	$\mathbf{C}[G]$	23
$f_*\mu$	4	\tilde{a}	23
\mathcal{H}'	4	$a * b$	23
$\bigoplus_{k \in K} A_k$	5	χ_V	28
$A_1 \otimes A_2$	7	$X(G)$	28
\bar{V}	7	P_λ	29
$L(\mathcal{H}), L_D(\mathcal{H})$	9	e_x	32
$\text{dom}(A)$	9	\mathcal{H}_x	33
$A \subset B$	9	X_M, X_a	35
$sa(\mathcal{H}), sa_D(\mathcal{H})$	10	$Y[u]$	35
$u(\mathcal{H}), u_D(\mathcal{H})$	10	$\mathcal{X}(M)$	35
\bar{A}	10	$[X, Y]$	35
$\bigoplus_{k \in K} A_k$	12	Ad, ad	36
$R(A, \lambda), (\lambda - A)^{-1}$	12	LT	36
$\rho(A)$	12	D_T	40
$\sigma(A), \sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$	12	$LT_1(X) \otimes 1 + 1 \otimes LT_2(X)$	41
M_f	13	$LT_1(X) + LT_2(X)$	41
$D_P, D(P)$	14	D_X	42
H_0	14	$C, S(C)$	43
$W^m(\mathbf{R}^n)$	15	$LT(C)$	45
$l(g), r(g)$	17	$L^2(S^2)$	45
$L(g), R(g)$	17, 22	U_l	45
μ_G, μ	17	$u \times v, \vec{u} \times \vec{v}$	45
ev_u	19	$L^2(S^2)_l$	46
ι, μ	19	Δ_{S^2}	47
		$P^l(\mathbf{R}^3), H^l(\mathbf{R}^3)$	47, 64

\mathbf{PH}	49, 87	m_s, m_l	69
$[u]$	49	$H^{(n)}$	71
$P(A, [u], V)$	50	W_{LS}, W_f, W_{hf}	71
$x^{(k)}, \Delta^{(k)}$	51	$\langle U_{l_2} \ R \ U_{l_1} \rangle_E$	73
H_C	52	γ_{lsj}	78
$\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_S$	53	μ_N	78
T_L	53	$\text{Sym}^n \mathcal{H}, \bigwedge^n \mathcal{H}$	80
T_S, T_J	54	\mathbf{PH}	87
$\text{Ad}(U)$	54	$S(\mathcal{H})$	87
$E(n), E(K)$	55	π	87
u_r, u_ω	56	$[u]$	87
R_{nl}	60	$\langle [v], [u] \rangle$	87
E_N	60	$\bar{U}(\mathcal{H})$	87
$\sigma_{\text{ess}}(A)$	61	P	87
L	62	$[A]$	88
S, J	63	$U(\mathbf{PH}), \bar{U}(\mathbf{PH})$	88
W_L, W_S, W_J	63	T_P	90
γ_L, γ_S	63	δ_X, δ_Z	93
μ_B	63	$[E]$	94
T_X	64	L	94
X	64	$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$	96
E_R	65	$[c]$	96
m	67	$[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2]_c$	96