Oberseminar Hackenbroch November 1997

Parameter-elliptische Randwertprobleme

Robert Denk

1. Einleitung

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet (offen, zusammenhängend) mit Rand Γ. Wir betrachten folgendes Randwertproblem

$$\begin{aligned} A(x,D)\,u(x) - \lambda\,u(x) &= f(x) \quad \text{in } G\,, & (1.1)\\ B_j(x,D)\,u(x) &= g_j(x) \quad (j=1,\dots,m) \;\text{ auf } \Gamma\,. & (1.2) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$A = A(x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha\,,$$

mit $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\dots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ für $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Wie üblich bei Multi-Indizes ist $|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Die Randoperatoren $B_j(x,D)$ sind gegeben durch

$$B_j u = B_j(x,D)u = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(x)(D^\beta u)|_\Gamma\,,$$

wobei die Funktionen $b_{j\beta}$ auf Γ definiert sind. Es gelte $m_j < 2m$ für alle j.

Für die Formulierung der Glattheitsbedingungen an die Koeffizienten von (1.1)-(1.2) benötigt man den Raum $C^{k,\gamma}$ aller *Hölder-stetigen* (oder *Lipschitz-stetigen*) Funktionen. Dies sind alle Funktionen $f \in C^k$, für die

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \le L|x-y|^\gamma$$

für alle x, y und alle α mit $|\alpha| = k$ gilt. Dabei ist $0 < \gamma \le 1$.

Definition 1.1. Das Randwertproblem (1.1)-(1.2) heißt *minimal glatt*, falls gilt:

(i) Γ ist lokal Graph einer $C^{2m-1,1}$-Funktion.

(ii) Die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ sind meßbar und beschränkt für alle α; im Fall $|\alpha| = 2m$ (d.h. im Hauptteil von A) sind sie sogar stetig in $\overline{G}$.

(iii) Die Koeffizienten $b_{j\beta}(x)$ sind Element von $C^{2m-m_j-1,1}(\Gamma)$.

Für $1 < p < \infty$ ist der zum Randwertproblem (1.1)-(1.2) gehörige unbeschränkte Operator $A_{B,p}$ in $L_p(G)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_{B,p}) &:= \{u \in W_p^{2m}(G) : B_1 u = \ldots = B_m u = 0\} \subset L_p(G)\,, \\ A_{B,p} u &:= A(x, D) u(x)\,. \end{aligned}$$

Dabei ist für $s \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq s \leq 2m$, der *Sobolevraum* $W_p^s(G)$ definiert durch

$$W_p^s(G) := \{u \in L_p(G) : D^\alpha u \in L_p(G) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq s)\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{W_p^s(G)} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L_p(G)}^p \Big)^{1/p}.$$

Das Ziel der Überlegungen ist es, das Spektrum von $A_{B,p}$ und insbesondere von $A_{B,2}$ zu beschreiben. Dabei muß an das Randwertproblem (1.1)-(1.2) noch die Voraussetzung gemacht werden, daß dieses Problem elliptisch ist. Die Elliptizität wird dabei mit Hilfe der zu A und B_j gehörigen Symbole formuliert:

Die Funktion $a(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ heißt das *Symbol* von $A(x, D)$, der Hauptteil davon ist gegeben durch $a_0(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$. Analog $b_j(x, \xi)$ und $b_{j0}(x, \xi)$. Dabei ist $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$.

Im allgemeinen führt die Forderung der Elliptizität bei Randwertproblemen zur Fredholmeigenschaft der zugehörigen Operatoren. Wie sich herausstellen wird, bewirkt die *Parameter-Elliptizität*, eine verschärfte Version der üblichen Definition, daß die zugehörigen Operatoren nichtleere Resolventenmenge besitzen:

Definition 1.2. (Siehe [Ag], [AV].) Sei $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$ eine Halbgerade mit Anfang bei 0. Dann heißt (1.1)-(1.2) *parameter-elliptisch in* $\mathcal{L}$, wenn gilt:

a) Für $\lambda \in \mathcal{L}$, $x \in G$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\lambda| + |\xi| \neq 0$ gilt $a_0(x, \xi) - \lambda \neq 0$.

b) Es gilt die *Shapiro-Lopatinskij-Bedingung* für $a_0 - \lambda$, $b_{10}, \ldots, b_{m0}$: Sei $x^0 \in \Gamma$ und sei das Koordinatensystem so gewählt, daß die innere Normale an der Stelle x^0 mit der Koordinatenrichtung x_n übereinstimmt. Betrachte (bzgl. dieses Koordinatensystems) folgende gewöhnliche Differentialgleichung in $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} &a_0(x^0, \xi', \tfrac{\partial}{\partial x_n})\, v(x_n) - \lambda\, v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0), \\ &b_{j0}(x^0, \xi', \tfrac{\partial}{\partial x_n})\, v(x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \text{ an der Stelle } x_n = 0\,, \\ &v(x_n) \to 0 \quad (x_n \to +\infty)\,. \end{aligned}$$

Dann hat diese Differentialgleichung für jedes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\lambda \in \mathcal{L}$ mit $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$ genau eine Lösung $v(x_n)$ (nämlich $v(x_n) \equiv 0$).

In der Voraussetzung des folgenden Satzes geht noch das *formal adjungierte* Randwertproblem ein. Dies ist ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x,D)\,v(x) - \overline{\lambda}\,v(x) &= \tilde{f}(x) \quad \text{in } G\,, & (1.3)\\ C_j(x,D)\,v(x) &= \tilde{g}_j(x) \quad (j=1,\dots,m) \ \text{ auf } \Gamma\,, & (1.4) \end{aligned}$$

das folgende Bedingung erfüllt: Für alle Funktionen $u, v \in C^{2m}(G)$ mit $B_1 u = \ldots = B_m u = 0$ und $C_1 v = \ldots = C_m v = 0$ gilt

$$(Au, v)_{L_2(G)} = (u, \tilde{A}v)_{L_2(G)}\,.$$

Nun sind wir in der Lage, das Hauptergebnis (siehe [ADF]) formulieren zu können:

Satz 1.3. (Hauptsatz) *Es sei ein minimal glattes Randwertproblem* (1.1)-(1.2) *gegeben, das ein ebenfalls minimal glattes formal adjungiertes Randwertproblem* (1.3)-(1.4) *besitze. Weiter sei* (1.1)-(1.2) *parameter-elliptisch in einer Halbgeraden $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$. Dann ist das Spektrum von $A_{B,2}$ diskret und besteht nur aus Eigenwerten, $\sigma(A_{B,2}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ mit $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$. Außerdem gilt*

$$|\lambda_j| \asymp j^{2m/n} \quad (j \to \infty)\,,$$

d.h. es gibt zwei Konstanten C_1, C_2, so daß für große Werte von j gilt:

$$0 < C_1 \le \frac{|\lambda_j|}{j^{2m/n}} \le C_2 < \infty\,.$$

2. Die Lösbarkeit des Randwertproblems

Neben dem Operator $A_{B,2}$ ist auch noch der sog. “volle Operator” interessant, der gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) : W_p^{2m}(G) &\to L_p(G) \times \prod_{j=1}^{m} W_p^{2m-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)\,,\\ u &\mapsto \Big((A(x,D)-\lambda)u, B_1(x,D)u, \ldots, B_m(x,D)u\Big)\,. \end{aligned}$$

Dabei sind die Sobolevräume auf dem Rand Γ definiert als

$$W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma) := \{u|_\Gamma : u \in W_p^s(G)\}$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|v\|_{W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)} := \inf\{\|u\|_{W_p^s(G)} : u|_\Gamma = v\}\,.$$

Im parameter-abhängigen Kalkül elliptischer Randwertprobleme (siehe [Gr]) ist es günstig, die betrachteten Sobolevräume mit Normen zu versehen, die ebenfalls vom Parameter λ abhängen. Man setzt

$$\begin{aligned} |\!|\!| u |\!|\!|_{s,p,G} &:= \|u\|_{W_p^s(G)} + |\lambda|^{\frac{s}{2m}} \|u\|_{L_p(G)}\,, \\ |\!|\!| v |\!|\!|_{s-\frac{1}{p},p,\Gamma} &:= \|v\|_{W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)} + |\lambda|^{\frac{s-1/p}{2m}} \|u\|_{L_p(\Gamma)}\,. \end{aligned}$$

Satz 2.1. *Für alle $\lambda \in \mathcal{L}$ ist $\mathcal{A}(\lambda)$ stetig bzgl. der Normen $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$, d.h. es existiert eine Konstante C, unabhängig von u und λ, so daß gilt:*

$$|\!|\!| f |\!|\!|_{0,p,G} + \sum_{j=1}^{m} |\!|\!| g_j |\!|\!|_{2m-m_j-\frac{1}{p},p,\Gamma} \leq C |\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,G}\,. \tag{2.1}$$

Dabei ist $\mathcal{A}(\lambda)u =: (f, g_1, \ldots, g_m)$.

Der Beweis soll hier nur für $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, anstelle von G, $p = 2$ und $A(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ und analoge Operatoren $B_j(x,D)$ durchgeführt werden (*Modellproblem* in $\mathbb{R}^n_+$), nach [AV]. Der Vorteil von $p = 2$ ist, daß der Satz von Plancherel zur Verfügung steht. Im folgenden steht H^s für W_2^s.

Der Beweis gliedert sich in folgende Schritte:

(1) Es existiert ein Fortsetzungsoperator $E : H^s(\mathbb{R}^n_+) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}\,,$$

wobei die Konstante C nicht von s oder u abhängt. Dasselbe gilt für G anstelle von $\mathbb{R}^n_+$ (siehe [Ad], p. 84).

(2) Sei $q \geq 0$. Dann gilt für $k, s \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < s$ die *Interpolationsungleichung*

$$q^{s-k} \|u\|_{H^k} \leq C\Big(\|u\|_{H^s} + q^s \|u\|_{L_2} \Big)\,. \tag{2.2}$$

Dabei steht H^k für $H^k(\mathbb{R}^n)$, $H^k(\mathbb{R}^n_+)$ oder $H^k(G)$.

Beweis. Im folgenden sei C eine nicht näher bestimmte Konstante, die bei jedem Auftreten einen verschiedenen Wert haben kann. Offensichtlich gilt:

$$q^{2s-2k}(1 + |\xi|^{2k}) \leq (1 + |\xi| + q)^{2s} \leq C(1 + |\xi|^{2s} + q^{2s})\,.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $|(Fu)(\xi)|^2$ und integriert über $\mathbb{R}^n$, erhält man mit dem Satz von Plancherel:

$$q^{2s-2k} \|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C\Big(\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + q^{2s} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \Big)\,,$$

was zu (2.2) äquivalent ist. Der Beweis für $\mathbb{R}^n_+$ und für G verwendet den Fortsetzungsoperator aus (1).

(3) Sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ und $v := u|_{\mathbb{R}^{n-1}}$, wobei hier $\mathbb{R}^{n-1}$ den Rand von $\mathbb{R}^n_+$ bezeichne. Dann gilt für $q \geq 1$:

$$q^{1/2}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\Big(\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} + q\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}\Big)\,. \tag{2.3}$$

Beweis. Sei F' die Fourier-Transformation bzgl. der ersten $n-1$ Variablen $x_1, \dots, x_{n-1}$. Dann gilt wegen $(F'v)(\xi') = (F'u)(\xi', 0)$ und der Inversionsformel für die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} |(F'v)(\xi')|^2 &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (Fu)(\xi)\,d\xi_n\Big|^2 \leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |(Fu)(\xi)|\,d\xi_n\Big)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} (1+\xi_n^2+q^2)|(Fu)(\xi)|^2\,d\xi_n \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_n}{1+\xi_n^2+q^2}\,. \end{aligned}$$

Das letzte Integral hat den Wert $\frac{\pi}{\sqrt{1+q^2}} \leq Cq^{-1}$. Wegen $\xi_n^2 \leq |\xi|^2$ gilt somit

$$|(F'v)(\xi')|^2 \leq Cq^{-1}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2+q^2)|(Fu)(\xi)|^2\,d\xi_n\,,$$

Integriert man bzgl. $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, so erhält man

$$\|v\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq Cq^{-1}\Big(\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + q^2\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\Big)\,,$$

was zu (2.3) äquivalent ist.

(4) Für $u \in H^s(\mathbb{R}^n_+)$ mit $s \geq 1$ und v wie in (3) gilt:

$$|\!|\!|v|\!|\!|_{s-\frac{1}{2},2,\mathbb{R}^{n-1}} \leq C|\!|\!|u|\!|\!|_{s,2,\mathbb{R}^n_+}\,. \tag{2.4}$$

Beweis. Für die entsprechenden parameter-unabhängigen Normen $\|\cdot\|$ gilt dies nach Definition. Multipliziert man (2.3) auf beiden Seiten mit q^{s-1} und setzt $q := |\lambda|^{1/2m}$, so erhält man

$$|\lambda|^{\frac{s-1/2}{2m}}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\Big(|\lambda|^{\frac{s-1}{2m}}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} + |\lambda|^{s/2m}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}\Big) \leq C|\!|\!|u|\!|\!|_{s,2,\mathbb{R}^n_+}\,.$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Interpolationsungleichung (2.2) verwendet. Nach Definition von $|\!|\!|v|\!|\!|_{s-\frac{1}{2},2,\mathbb{R}^{n-1}}$ beweist dies (2.4).

(5) Sei nun $u \in H^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$ und $f = A(x,D)u - \lambda u$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)} &= \Big\|\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha u - \lambda u\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)} \\ &\leq \max|a_\alpha|\sum_\alpha \|D^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)} + |\lambda|\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)} \\ &\leq C|\!|\!|u|\!|\!|_{2m,2,\mathbb{R}^n_+}\,. \end{aligned}$$

(6) Seien die Funktionen $h_j : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ definiert als $h_j := B_j(x,D)u$. Dann sieht man genauso wie in (5), daß $\|h_j\|_{2m-m_j,2,\mathbb{R}^n_+} \leq C|||u|||_{2m,2,\mathbb{R}^n_+}$. Außerdem gilt mit Hilfe von (2)

$$|\lambda|^{\frac{2m-m_j}{2m}} \|h_j\|_{L_2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C|\lambda|^{\frac{2m-m_j}{2m}} \|u\|_{H^{m_j}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C|||u|||_{2m,2,\mathbb{R}^n_+}.$$

Also erhält man insgesamt

$$|||h_j|||_{2m-m_j,2,\mathbb{R}^n_+} \leq C|||u|||_{2m,2,\mathbb{R}^n_+}.$$

(7) Sei nun $g_j = h_j|_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Mit (4) und (6) gilt

$$|||g_j|||_{2m-m_j-\frac{1}{2},2,\mathbb{R}^{n-1}} \leq C|||h_j|||_{2m-m_j,2,\mathbb{R}^n_+} \leq C|||u|||_{2m,2,\mathbb{R}^n_+},$$

was den Beweis von Satz 2.1 für den betrachteten Modellfall abschließt. □

Satz 2.2. (Eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems) *Sei* (1.1)-(1.2) *minimal glatt und parameter-elliptisch in $\mathcal{L}$. Dann ist für $\lambda \in \mathcal{L}$ mit hinreichend großem Betrag der Operator $\mathcal{A}(\lambda)$ invertierbar, und $\mathcal{A}(\lambda)^{-1}$ ist beschränkt bzgl. $|||\cdot|||$.*

Der Beweis soll hier wieder nur für ein Modellproblem geführt werden, diesmal in $L_p(\mathbb{R}^n)$. In L_p gilt der Satz von Plancherel nicht mehr, was alle Beweise wesentlich komplizierter macht. Es gibt aber einen "Ersatz", nämlich den Satz von Michlin (vgl. [Tr], Section 2.2.4).

Satz 2.3. (Satz von Michlin) *Sei die Funktion $w : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ differenzierbar bis zur Ordnung $[\frac{n}{2}]+1$. Außerdem gelte für alle $\xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ und alle Multi-Indizes β mit $|\beta| \leq [\frac{n}{2}]+1$ die Abschätzung*

$$|\xi|^{|\beta|}|D^\beta_\xi w(\xi)| \leq C_0 < \infty.$$

Dann ist der Operator $u \mapsto F^{-1}[w(\xi)(Fu)(\xi)]$ ein beschränkter Operator von $L_p(\mathbb{R}^n)$ nach $L_p(\mathbb{R}^n)$ mit Norm nicht größer als $c(p) \cdot C_0$, wobei $c(p)$ nur von p abhängt.

Beweis von Satz 2.2. Sei $q := |\lambda|^{1/2m} \geq 1$ und $a(\xi) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha$. Dann ist für $|\alpha| \leq 2m$ die Funktion $w(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{a(\xi)-\lambda}$ *homogen* bzgl. $(\xi, \lambda^{1/2m})$ vom Grad $|\alpha| - 2m$, d.h. es gilt für $t > 0$:

$$w(t\xi, t^{2m}\lambda) = t^{|\alpha|-2m} w(\xi, \lambda).$$

Daher gilt $|w(\xi)| \leq C(|\xi| + q)^{|\alpha|-2m}$. Man kann nachrechnen, daß auch die Ableitungen $D^\beta_\xi w(\xi)$ homogen sind, und zwar vom Grad $|\alpha| - |\beta| - 2m$. Es gilt also

$$|\xi|^{|\beta|}|D^\beta_\xi w(\xi)| \leq C(|\xi| + q)^{|\alpha|-2m} \leq Cq^{|\alpha|-2m}.$$

Sei nun $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Man definiert $u := F^{-1}[\frac{1}{a(\xi)-\lambda}(Ff)(\xi)]$. Dann ist nach dem Satz von Michlin die Funktion

$$D^\alpha u = F^{-1}\Big(\xi^\alpha \frac{1}{a(\xi)-\lambda}(Ff)(\xi)\Big)$$

wieder in $L_p(\mathbb{R}^n)$, und zwar mit Norm

$$\|D^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C q^{|\alpha|-2m} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Insbesondere ist $\|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ für $q \geq 1$ und $q^{2m}\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$. Insgesamt ist somit für $|\lambda| \geq 1$ der Operator

$$(A(x,D)-\lambda) : W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$$

surjektiv, und für jedes $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ gilt für die oben definierte Lösung u die sog. *a priori-Abschätzung*

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{2.5}$$

wobei hier die Konstante C nicht von f oder λ abhängt. Andererseits sieht man sofort, daß die obigen Abschätzungen und damit auch (2.5) für jede Lösung u gilt, was die Injektivität von $A(x,D)-\lambda$ (d.h. die Eindeutigkeit der Lösung) zeigt. □

Korollar 2.4. *Die Resolventenmenge von $A_{B,2}$ ist nichtleer, das Spektrum von $A_{B,2}$ ist diskret (d.h. abzählbar ohne endliche Häufungspunkte).*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathcal{L}$ mit $|\lambda|$ groß. Dann ist (nach Satz 2.2) $A_{B,2} - \lambda : W_2^{2m}(G) \to L_2(G)$ bijektiv, und die Resolvente $R(\lambda) := (A_{B,2}-\lambda)^{-1}$ ist gegeben durch

$$R(\lambda)f = \mathcal{A}(\lambda)^{-1}(f,0,\ldots,0)\,.$$

Somit ist die Resolventenmenge nichtleer. Es gilt

$$R(\lambda) : L_2(G) \to W_2^{2m}(G) \hookrightarrow L_2(G)\,.$$

Die erste Abbildung ist stetig, die zweite sogar kompakt (Sobolevraumtheorie). Als Komposition eines stetigen Operators mit einem kompakten Operator ist $R(\lambda)$ also kompakt. (Die Menge aller kompakten Operatoren bilden ein Ideal in der Banachalgebra der beschränkten Operatoren.)

Kompakte Operatoren besitzen ein abzählbares Spektrum mit 0 als einzigem Häufungspunkt. Aber eine Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ ist genau dann Eigenwert von $R(\lambda)$, wenn $\lambda + \frac{1}{\mu}$ ein Eigenwert von $A_{B,2}$ ist. Dies zeigt, daß das Spektrum von $A_{B,2}$ die Form $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$ und $|\lambda_j| \to \infty$ hat. □

3. Zum Beweis des Hauptsatzes

3.1 Spuroperatoren

Definition 3.1. a) Sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein beschränkter Operator mit diskretem Spektrum. Dann heißen

$$s_j(T) := \lambda_j((T^*T)^{1/2}) \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

die *Singulärwerte* von T. (Beachte, daß T^*T ein selbstadjungierter Operator mit nichtnegativen Eigenwerten ist.)

b) T heißt *Spuroperator*, falls $\sum_j s_j(T) < \infty$. Die Menge aller Spuroperatoren wird mit $\mathcal{S}_1(H)$ bezeichnet. Für $T \in \mathcal{S}_1(H)$ heißt $\operatorname{tr} T := \sum_j \lambda_j(T)$ die *Spur* von T.

c) T heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls $(\sum_j s_j(T)^2)^{1/2} < \infty$. Die Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren wird mit $\mathcal{S}_2(H)$ bezeichnet.

Die Theorie von $\mathcal{S}_p(H)$ (wie die kompakten Operatoren ebenfalls Ideale in der Banachalgebra der beschränkten Operatoren) wird gut in [GK] beschrieben. Einige Ergebnisse, so auch den nächsten Satz, kann man auch im sehr einfach zu lesenden Buch [Go] finden.

Satz 3.2. a) *Sei T ein Operator in $L_2(G)$ von der Form*

$$Tu(x) = \int_G K(x, y)u(y)\, dy$$

(Integraloperator) mit dem Kern $K \in L_2(G \times G)$. Dann ist $T \in \mathcal{S}_2(L_2(G))$.

b) *Sei $T \in \mathcal{S}_1(L_2(G))$ ein Integraloperator mit stetigem Kern $K(x, y)$. Dann gilt*

$$\operatorname{tr} T = \int_G K(x, x)\, dx\,.$$

Der folgende Satz liefert ein Beispiel dafür, daß die Voraussetzungen von Teil b) des obigen Satzes erfüllt sind.

Satz 3.3. *Sei $T = T_1T_2^*$ mit beschränkten Operatoren $T_{1,2} : L_2(G) \to L_2(G)$, deren Wertebereich in $W_p^s(G)$ mit $p > 2,\ ps > n$ liegt. Dann ist T ein Spuroperator und ein Integraloperator mit stetigem Kern K.*

Für den Beweis werden noch die folgenden Inklusionen benötigt (siehe [Ma]):

Satz 3.4. (Sobolevsche Einbettungssätze) a) *Seien $s \in \mathbb{N}$ und $1 < p_1 < p_2 \le \infty$ mit $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} < \frac{s}{n}$. Dann gilt $W_{p_1}^s(G) \hookrightarrow L_{p_2}(G)$ (stetige Einbettung).*

b) *Im Falle $p_2 = \infty$ gilt sogar $W_{p_1}^s(G) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{G})$ mit einem $\gamma \in (0, 1)$. Genauer gibt es eine Konstante C, die nicht von $x, \tilde{x}$ und u abhängt, so daß für alle $u \in W_{p_1}^s(G)$ gilt:*

$$|u(x) - u(\tilde{x})| \le C\|u\|_{L_p(G)}\, |x - \tilde{x}|^\gamma \quad (x, \tilde{x} \in G)\,. \tag{3.1}$$

Beweis von Satz 3.3. a) Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist $T_1 : L_2(G) \to W_p^s(G)$ ein stetiger Operator. Damit ist für festes $x \in \overline{G}$ ist die Abbildung $u \mapsto T_1u(x)$ ein stetiges lineares Funktional auf $L_2(G)$. Denn

$$\begin{aligned} |T_1u(x) - T_1v(x)| &\leq \sup_{x\in\overline{G}} |T_1u(x) - T_1v(x)| \\ &= \|T_1(u-v)\|_{C(\overline{G})} \leq \|T_1\|_{L_2\to C(\overline{G})} \|u-v\|_{L_2} . \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Riesz gilt $H' \cong H$ und somit existiert ein $v_x \in L_2(G)$ mit

$$T_1u(x) = (u, v_x)_{L_2(G)} = \int_G u(y)\overline{v_x(y)}\, dy .$$

Man setzt $K_1(x,y) := \overline{v_x(y)}$ für $x, y \in G$. (Hiermit ist auch sofort $K_1(x,\cdot) \in L_2(G)$ für jedes $x \in G$ klar.) Genauso wird der Kern $K_2(x,y)$ von T_2 konstruiert.

b) Um die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto K_1(x,\cdot)$, $G \to L_2(G)$, zu zeigen, betrachtet man für $x, \tilde{x} \in G$ die Funktion $u(y) := \overline{K_1(x,y) - K_1(\tilde{x},y)}$. Dann gilt

$$T_1u(x) - T_1u(\tilde{x}) = \int_G |K_1(x,y) - K_1(\tilde{x},y)|^2\, dy = \|K_1(x,\cdot) - K_1(\tilde{x},\cdot)\|^2_{L_2(G)} . \tag{3.2}$$

Andererseits gilt nach (3.1) für die linke Seite obiger Gleichung

$$T_1u(x) - T_1u(\tilde{x}) \leq C\, \|u\|_{L_2(G)}\, |x-\tilde{x}|^\gamma = C\, \|K_1(x,\cdot) - K_1(\tilde{x},\cdot)\|_{L_2(G)}\, |x-\tilde{x}|^\gamma , \tag{3.3}$$

und damit

$$\|K_1(x,\cdot) - K_1(\tilde{x},\cdot)\|_{L_2(G)} \leq C|x-\tilde{x}|^\gamma . \tag{3.4}$$

c) Wegen (3.4) ist $x \mapsto K_1(x,\cdot) \in L_2(G; L_2(G))$ und damit $K_1 \in L_2(G\times G)$. Dasselbe gilt für K_2. Nun wird der adjungierte Operator T_2^* betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} (T_2u, v)_{L_2(G)} &= \int_G \int_G K_2(x,y)u(y)\, dy\, \overline{v(x)}\, dx \\ &= \int_G u(y) \overline{\int_G \overline{K_2(x,y)} v(x)\, dx}\;\, dy \\ &= (u, T_2^*v)_{L_2(G)} . \end{aligned}$$

Dabei ist $T_2^*v(y) = \int_G \overline{K_2(z,y)}v(z)\, dz$, also ist T_2^* wieder ein Integraloperator mit dem Kern $\overline{K_2(z,y)}$.

Für T erhält man damit

$$\begin{aligned} T_1T_2^*u(x) &= \int K_1(x,y)T_2^*v(y)\, dy \\ &= \int\int K_1(x,y)\overline{K_2(z,y)}v(z)\, dz\, dy \\ &= \int \Big(\int K_1(x,y)\overline{K_2(z,y)}\, dy\Big) v(z)\, dz , \end{aligned}$$

d.h. $T = T_1 T_2^*$ ist ein Integraloperator mit Kern $K(x,y) = \int_G K_1(x,z)\overline{K_2(y,z)}\,dz$.

d) Als Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren (Satz 3.2 a) ist T ein Spuroperator. Es gilt unter Verwendung der Cauchy-Schwartz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
|K(x,y) - K(\tilde{x},\tilde{y})| &\leq |K(x,y) - K(\tilde{x},y)| + |K(\tilde{x},y) - K(\tilde{x},\tilde{y})| \\
&= \left| \int [K_1(x,z) - K_1(\tilde{x},z)]\overline{K_2(y,z)}\,dz \right| + \left| \int K_1(\tilde{x},z)\overline{[K_2(y,z) - K_2(\tilde{y},z)]}\,dz \right| \\
&\leq \|K_1(x,\cdot) - K_1(\tilde{x},\cdot)\|_{L_2} \, \|K_2(y,\cdot)\|_{L_2} + \|K_1(\tilde{x},\cdot)\|_{L_2} \, \|K_2(y,\cdot) - K_2(\tilde{y},\cdot)\|_{L_2} ,
\end{aligned}$$

was die Stetigkeit der Funktion $K : \overline{G} \times \overline{G} \to \mathbb{C}$ zeigt. □

3.2 Beweis des Hauptsatzes

Im folgenden soll Satz 3.3 auf $T = R(\lambda)^q$ angewendet werden, wobei q eine gerade natürliche Zahl mit $2mq > n$ ist.

Satz 3.5. (Fast der Hauptsatz) *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes ist für q gerade, $2mq > n$, der Operator $R(\lambda)^q$ ein Spuroperator in $L_2(G)$ mit stetigem Kern, und es gilt die asymptotische Entwicklung*

$$\operatorname{tr} R(\lambda)^q = c_q\,(-\lambda)^{\frac{n}{2m}-q} + o(|\lambda|^{\frac{n}{2m}-q}) \quad (\lambda \in \mathcal{L},\ |\lambda| \to \infty) \tag{3.5}$$

mit

$$c_q = \int_G c_q(x)\,dx \quad \text{and} \quad c_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{[a_0(x,\xi)+1]^q} .$$

An dieser Stelle soll nur gezeigt werden, daß Satz 3.3 anwenbar ist. Sei dazu $q = 2k$. Die folgende Kette stetiger Operatoren zeigt, daß $T_1 := R(\lambda)^k$ ein stetiger Operator von $L_2(G)$ nach $C(\overline{G})$ ist.

$$\begin{aligned}
R(\lambda)^k : L_2(G) \xrightarrow{R(\lambda)} W_{2m,2}(G) \hookrightarrow L_{p_2}(G) \xrightarrow{R(\lambda)} W_{2m,p_2}(G) \hookrightarrow L_{p_3}(G) \ldots \\
\ldots \xrightarrow{R(\lambda)} W_{2m,p_k}(G) \hookrightarrow L_\infty(G) \cap C(\overline{G}) .
\end{aligned}$$

Dabei werden $p_1 := 2$ und $p_2, \ldots, p_k$ so gewählt, daß die Voraussetzungen des Sobolevschen Einbettungssatzes erfüllt sind, und der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz 2.2) nacheinander für $p = p_1, p_2, \ldots, p_m$ verwendet. Da nach Voraussetzung das formal adjungierte Problem existiert und ebenfalls minimal glatt ist, läßt sich dieselbe Überlegung für $T_2 := (R(\lambda)^*)^k$ durchführen. Nach Satz 3.3 ist damit $R(\lambda)^q = R(\lambda)^k[(R(\lambda)^*)^k]^*$ ein Spuroperator mit stetigem Kern $K(x,y,\lambda)$.

Mit Hilfe des Kalküls von Pseudodifferential-Operatoren (siehe [Ku] oder für den parameterabhängigen Fall [Gr]) und technischen Abschätzungen läßt sich eine punktweise Asymptotik von $K(x,x,\lambda)$ für $\lambda \in \mathcal{L}$, $|\lambda| \to \infty$, angeben. Diese Abschätzung integriert man über G und verwendet Satz 3.2 b), um zu einer Asymptotik für die Spur von $R(\lambda)^q$ zu kommen.

Zum Beweis des Hauptsatzes verwendet man die Funktion

$$N(t) := |\{j : |\lambda_j| \leq t\}| \,.$$

Man sieht leicht, daß die Aussage $|\lambda_j| \asymp j^{2m/n}$ $(j \to \infty)$ äquivalent zur Aussage $N(t) \asymp t^{n/2m}$ $(t \to \infty)$ ist.

Hier wird der Einfachheit halber nur der Fall betrachtet, daß die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von $A_{B,2}$ alle reell und positiv sind.

Die in Satz 3.5 betrachtete Spur läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\operatorname{tr} R(\lambda)^q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda)^q} = \int_0^\infty \frac{1}{(t-\lambda)^q}\, dN(t) =: (S_q N)(-\lambda)\,.$$

Dabei ist das Integral ein Riemann-Stieltjes-Integral. Die Funktion $(S_q N)(\lambda)$ heißt die *Stieltjes-Transformierte* der Funktion $N(t)$.

Der Beweis des Hauptsatzes wird nun beendet, indem folgende Version eines *Taubersatzes* angewendet wird (vgl. [AM]):

Satz 3.6. *Für eine nichtfallende Funktion $N(t)$ gelte $(S_q N)(\lambda) \asymp \lambda^{\frac{n}{2m}-q}$ $(\lambda \to \infty)$. Dann gilt $N(t) \asymp t^{n/2m}$ für $t \to \infty$.*

4. Wo gehen die Glattheitsbedingungen ein?

Der Beweis des Hauptsatzes läuft im wesentlichen über eine wiederholte Anwendung von Satz 2.2 (eindeutige Lösbarkeit) für verschiedene Werte von p. An dieser Stelle und auch schon bei Satz 2.1 (d.h. bei der Wohldefiniertheit des "vollen" Operators $\mathcal{A}(\lambda)$) werden die Bedingungen der minimalen Glattheit verwendet. Hier soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wo die entsprechenden Bedingungen in den Beweis eingehen.

4.1 Wohldefiniertheit des Operators $\mathcal{A}(\lambda)$

Für $u \in W_p^{2m}(G)$ und $|\alpha| \leq 2m$ ist $D^\alpha u \in L_p(G)$ und wegen $a_\alpha \in L_\infty(G)$ auch $a_\alpha D^\alpha u \in L_p(G)$. Somit ist die Stetigkeit von $A(x,D) : W_p^{2m}(G) \to L_p(G)$ klar. Für die Randoperatoren benötigt man folgenden Satz:

Satz 4.1. *Sei $b \in C^{s-1,1}(\Gamma)$ mit $1 \leq s \leq 2m$. Dann ist der Multiplikationsoperator $M_b : v \mapsto b \cdot v$ stetiger Operator in $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$.*

Beweis. Mit Hilfe lokaler $C^{2m-1,1}$-Koordinaten und einer entsprechenden Partition der Eins kann das Problem auf den Fall $b \in C^{s-1,1}(\mathbb{R}^{n-1})$ mit kompaktem Träger zurückgeführt werden. Seien also die Ableitungen von b der Ordnung $s-1$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten L. Nach [Tr], Theorem 2.5.1, ist die Norm in $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ äquivalent zur Norm

$$\|v\|^{(1)}_{s-\frac{1}{p},p,\mathbb{R}^{n-1}} = \|v\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} \Big[\int_0^\delta t^{-p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big|\Delta_{t,j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^{s-1} v(y')\Big|^p \, dy'\, dt\Big]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.1}$$

wobei $\delta > 0$ beliebig ist und

$$\Delta_{t,j} v(y') := v(y_1, \ldots, y_j + t, \ldots, y_{n-1}) - v(y') \,.$$

Wir müssen $\|bv\|^{(1)}_{s-\frac{1}{p},p,\mathbb{R}^{n-1}}$ abschätzen. Setze

$$S := \sup\{|D^{\alpha'} b(x')| : |\alpha'| \le s-1,\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} \,. \tag{4.2}$$

Dann gilt

$$\|bv\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} \le S\, \|v\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} \,. \tag{4.3}$$

Um die Summe in (4.1) (mit bv anstelle von v) abzuschätzen, verwendet man die Leibniz-Formel. Jeder Summand in dieser Summe läßt sich durch eine Linearkombination von Ausdrücken der Form

$$\Big[\int_0^\delta t^{-p} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^k b(y_1, \ldots, y_j + t, \ldots, y_{n-1})\, \Delta_{t,j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^{s-1-k} v(y')\Big|^p \, dy'\, dt\Big]^{\frac{1}{p}} \tag{4.4}$$

und

$$\Big[\int_0^\delta t^{-p} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \Delta_{t,j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^k b(y') \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^{s-1-k} v(y')\Big|^p \, dy'\, dt\Big]^{\frac{1}{p}} \tag{4.5}$$

abschätzen, wobei k eine ganze Zahl zwischen 0 und $s-1$ ist. Der Ausdruck in (4.4) ist nicht größer als

$$S\Big[\int_0^\delta t^{-p} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \Delta_{t,j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^{s-1-k} v(y')\Big|^p \, dy'\, dt\Big]^{\frac{1}{p}} \le S\, \|v\|^{(1)}_{s-\frac{1}{p},p,\mathbb{R}^{n-1}} \,. \tag{4.6}$$

Für $0 \le k < s-1$ verwendet man die Restglieddarstellung der Taylorreihe (getrennt für den Realteil und den Imaginärteil) von $(\frac{\partial}{\partial y_j})^k b$ und erhält

$$\Big| \Delta_{t,j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^k b(y')\Big| \le 2t\, S \,. \tag{4.7}$$

Damit ist der Ausdruck in (4.5) nicht größer als

$$C\,S\|v\|_{W_p^{s-1}(\mathbb{R}^{n-1})}\,. \tag{4.8}$$

Für $k = s-1$ verwenden wir die Lipschitz-Stetigkeit von $(\frac{\partial}{\partial y_j})^{s-1}b$. Damit gilt

$$\Big|\Delta_{t,j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^{s-1}b(y')\Big| \le Lt\,, \tag{4.9}$$

und somit ist der Ausdruck in (4.5) nicht größer als ein konstantes Vielfaches von $L\,\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}$. Die obigen Abschätzungen zeigen die Stetigkeit des Operators M_b. □

Man sieht leicht anhand des obigen Beweises, daß man die Norm des Multiplikationsoperators M_b abschätzen kann. Der folgende Satz ist von Bedeutung, wenn man nichtglatte Koeffizienten durch C^∞-Koeffizienten approximiert. Die Funktion b steht in diesem Fall für die Differenz der Koeffizienten.

Satz 4.2. *Falls für die Funktion $b \in C^{s-1,1}(\Gamma)$ der Ausdruck S von (4.2) in lokalen Koordinaten gegen Null geht, geht die Norm von M_b ebenfalls gegen Null.*

Beweis. Statt (4.9) verwendet man

$$\Big|\Delta_{t,j}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^{s-1}b(y')\Big| \le (Lt)^{1-\mu}\,(2S)^{\mu}\,, \tag{4.10}$$

mit $0 < \mu < \frac{1}{p}$. Damit ist (für $k = s-1$) der Ausdruck in (4.5) nicht größer als

$$(2S)^{\mu}L^{1-\mu}\Big(\int_0^\delta t^{-\mu p}\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\,. \tag{4.11}$$

Insgesamt kann somit die Norm des Multiplikationsoperators M_b durch $C(S + L^{1-\mu}S^{\mu})$ abgeschätzt werden, wobei die Konstante C nicht von b abhängt. □

4.2 Invertierbarkeit von $\mathcal{A}(\lambda)$ unter minimaler Glattheit

Der Beweis von Satz 2.2 unter minimaler Glattheit verwendet folgende Schritte:

(1) Zunächst wird die analoge Aussage für die Modellprobleme in $L_p(\mathbb{R}^n)$ und $L_p(\mathbb{R}^n_+)$ bewiesen (siehe das Beispiel in Abschnitt 2).

(2) Der allgemeine Fall wird auf das Modellproblem zurückgeführt, wobei man Abschätzungen für die Fehlerterme braucht. Sei zunächst $x^0 \in G$ fest. Dann betrachtet man den Operator

$$A_0(x^0, D) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x^0)D^\alpha\,,$$

d.h. man friert die Koeffizienten an der Stelle x^0 ein und nimmmt nur den Hauptteil. Nach (1) ist dieser Operator invertierbar, und man benötigt noch (lokale) Abschätzungen folgender Form:

$$\begin{aligned} \|[A_0(x^0, D) - A_0(x, D)]u\|_{L_p(G)} &\leq \varepsilon \|\!|u|\!\|_{2m,p,G}\,, &(4.12)\\ \|[A_0(x, D) - A(x, D)]u\|_{L_p(G)} &\leq \varepsilon \|\!|u|\!\|_{2m,p,G}\,. &(4.13)\end{aligned}$$

Dabei soll ε hinreichend klein werden, zumindest für große Werte von $|\lambda|$. Im wesentlichen wird (4.12) mit Hilfe der Stetigkeit von $a_\alpha(x)$ für $|\alpha| = 2m$ bewiesen, während der Differentialoperator in (4.13) von Ordnung $\leq 2m - 1$ ist. Damit gilt nach Satz 2.1, angewendet auf $A_0 - A$:

$$\|[A_0(x, D) - A(x, D)]u\|_{L_p(G)} \leq C \|\!|u|\!\|_{2m-1,p,G}\,.$$

Aber mit Hilfe der Interpolationsungleichung (2.2) erhält man

$$\begin{aligned} \|\!|u|\!\|_{2m-1,p,G} &= \|u\|_{W_p^{2m-1}(G)} + |\lambda|^{\frac{2m-1}{2m}} \|u\|_{L_p(G)} \\ &= |\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \Big(|\lambda|^{\frac{1}{2m}} \|u\|_{W_p^{2m-1}(G)} + |\lambda|\, \|u\|_{L_p(G)} \Big) \\ &\leq C |\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \|\!|u|\!\|_{2m,p,G}\,, \end{aligned}$$

was für hinreichend große $|\lambda|$ die Ungleichung (4.13) beweist.

(3) Für $x^0 \in \Gamma$ betrachtet man analog das Modellproblem $B_{j0}(x^0, D)$ (in lokalen Koordinaten). Hier geht ebenfalls die Interpolationsungleichung ein, um die Terme niedrigerer Ordnung zu behandeln. Für die Abschätzung

$$\|\!|[B_{j0}(x^0, D) - B_{j0}(x, D)]u|\!\|_{2m-m_j-\frac{1}{p},p,\Gamma} \leq \varepsilon \|\!|u|\!\|_{2m,p,G}$$

geht man analog zum Beweis von Satz 4.1 vor, d.h. man verwendet die Norm (4.1) mit $s = 2m - m_j$ und

$$v = \sum_{|\beta|=m_j} [b_{j\beta}(x^0) - b_{j\beta}(x)]\, (D^\beta u)\big|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,.$$

4.3 Abschwächung der Voraussetzungen

Man kann die Bedingungen der minimalen Glattheit noch geringfügig abschwächen. Wenn man voraussetzt, daß die Koeffizienten von $B_j(x, D)$ zur Klasse $C^{2m-m_j-1,\gamma}(\Gamma)$ mit $0 < \gamma < 1$ gehören, gilt Satz 2.2 noch für $1 < p < \frac{1}{1-\gamma}$. Allgemeiner ist die Frage nach einer Charakterisierung der *Multiplikatoren* im Sobolevraum $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$, d.h. aller Funktionen b, für die der Multiplikationsoperator $M_b : v \mapsto b \cdot v$ stetig in diesem Sobolevraum ist. Äquivalente (aber komplizierte) Charakterisierungen der Multiplikatoren findet man im Buch [MS].

Literaturverzeichnis

[Ad] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.

[Ag] Agmon, S.: On kernels, eigenvalues, and eigenfunctions of general elliptic boundary problems. Comm. Pure Appl. Math. **15** (1965), 119-147.

[ADF] Agranovich, M.; Denk, R.; Faierman, M.: Weakly smooth nonselfadjoint spectral elliptic boundary problems. In M. Demuth et al. (eds.): Spectral theory, microlocal analysis, singular manifolds. Math. Top. **14** (1997), 138-199.

[AM] Agranovich, M.; Markus, A. S.: On spectral properties of elliptic pseudo-differential operators far from self-adjoint ones. *Z. Anal. Anwend.* **8** (1989), 237-260.

[AV] Agranovich, M.; Vishik, M.: Elliptic problems with parameter and parabolic problems of general form. Russian Math. Surveys **19** (1964), 53-157.

[Go] Gohberg, I. C.: Basic operator theory. Birkhäuser, Boston etc., 1980.

[GK] Gohberg, I. C.; Krein, M. G.: Introduction to the theory of nonselfadjoint operators. Amer. Math. Soc., Providence, 1969.

[Gr] Grubb, G.: Functional calculus of pseudo-differential boundary problems. Birkhäuser, Boston etc., 1986.

[Ku] Kumano-go, H.: Pseudo-differential operators. MIT Press, Cambridge, 1981.

[Ma] Mazja, V. G.: Sobolev spaces. Springer, Berlin etc., 1985.

[MS] Mazja, V. G.; Shaposhnikova, T. O.: Theory of multipliers in spaces of differentiable functions. Pitman, Boston etc., 1985.

[Tr] Triebel, H.: Interpolation, function spaces, differential operators. North-Holland, Amsterdam etc. 1978.