

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Diplomarbeit

zum Thema

Eine numerische Analyse des Ekman-Randschichtproblems

eingereicht von

Felix Kleber

Betreuer: Prof. Dr. Johannes Schropp
Erstgutachter: Prof. Dr. Johannes Schropp
Zweitgutachter: Prof. Dr. Robert Denk

Sommersemester 2010

Konstanz, 5. August 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Überblick	1
2	Motivation: Hydrodynamische Stabilität	6
2.1	Rohrströmung	6
2.2	Die Ekman-Spirale	7
3	Grundlagen des Ekman-Randschichtproblems	9
3.1	Grundbegriffe und Notationen	9
3.2	Das Konzept der linearen Stabilitätsanalyse	11
3.3	Koordinatentransformation	13
3.4	Herleitung des Ekman-Randschichtproblems	15
3.5	Die kritische Reynoldszahl	24
4	Ein Differenzenverfahren für das Ekman-Randschichtproblem	25
4.1	Differenzenformeln	25
4.2	Das Verfahren von D. K. Lilly	29
4.3	Ein Verfahren vierter Ordnung	31
5	Fortsetzungsmethoden	45
5.1	Grundlagen der Parameterfortsetzung	45
5.2	Fortsetzung von Lösungen	47
5.2.1	Einfache Parameterfortsetzung	47
5.2.2	Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung	50
5.3	Umkehrpunkte	55
5.3.1	Berechnung von Umkehrpunkten	55
5.3.2	Ortskurve von Umkehrpunkten	57
6	Anwendung der Fortsetzungsmethoden	59
6.1	Definition des Problems	59
6.2	Die Pseudo-Bogenlänge-Methode	61
6.2.1	Der Startwert x_0	62
6.2.2	Schrittweitensteuerung	63
6.2.3	Beispiel	64
6.3	Die Ortskurve der Umkehrpunkte	65
6.4	Ergebnisse	67
6.4.1	Periodizität in ε	68
6.4.2	Ortskurve der Umkehrpunkte und kritische Reynoldszahl	68
6.4.3	Weitere Schaubilder und Resultate	69
7	Schlussbemerkungen	73
A	Das Newton-Verfahren	74
B	Ableitungen	75
C	Matlab-Quellcode	78

C.1 Die Matrizen \mathbf{A}^h und \mathbf{B}^h des Differenzenverfahren (4.12)	78
C.2 Die Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung	81
C.3 Matrizen für die Ableitungen	82
Literaturverzeichnis	88
Erklärung	90

Abbildungsverzeichnis

2.1	Originalskizzen des Experiments von REYNOLDS (1883).	7
2.2	Schematische Darstellung der EKMAN-Spirale in einem Vektordiagramm.	8
5.1	Grafische Interpretation der Parameterfortsetzung.	48
5.2	Lösungen des GELFAND-BRATU-Problems.	50
5.3	Bifurkationsdiagramm für das GELFAND-BRATU-Problem.	51
5.4	Grafische Interpretation der Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung.	53
5.5	Grafische Interpretation der Normierungsbedingung.	54
6.1	Punktspektrum des Eigenwertproblems $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$	63
6.2	Neutralitätskurve für das EKMAN-Problem im R - ε -Diagramm mit $\alpha = 0.5$	64
6.3	Punktspektren von $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ für verschiedene Paare (R, ε)	65
6.4	Periodizität in ε	66
6.5	Ortskurve der Umkehrpunkte in der R - ε -Ebene.	67
6.6	Ortskurve der Umkehrpunkte im α - R - ε -Volumen.	68
6.7	Neutralitätskurve und weitere Kurven im R - ε -Diagramm für $\alpha = 0.5$	69
6.8	Neutralitätskurve und weitere Kurven im R - ε -Diagramm für $\alpha = 0.3189$	70
6.9	Punktspektrum für das Tupel $(\alpha_{\text{krit}}, R_{\text{krit}}, \varepsilon_{\text{krit}}) = (0.319, 53.552, -0.410)$	71
6.10	Eigenfunktionen φ und μ zum „instabilen“ Eigenwert $\lambda^h = -0.20 + i13.36$	72

Einleitung und Überblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Problemstellung, die bereits in den 1960er Jahren von D. K. LILLY behandelt wurde (vgl. [18]). Inhaltlich geht es hierbei um ein Problem aus dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen, welches unter gewissen Bedingungen in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem transformiert werden kann. Mit zusätzlichen Randbedingungen führt dies zur Definition des sogenannten EKMAN-Randschichtproblems, welches in dieser Arbeit aus Sicht der Numerik betrachtet wird. Dabei werden insbesondere Methoden verwendet, welche zum damaligen Zeitpunkt noch nicht zur Verfügung standen.

Ausgangspunkt für das EKMAN-Randschichtproblem sind die dreidimensionalen NAVIER-STOKES-Gleichungen: Diese stellen eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung dar und sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik bzw. Hydrodynamik. Konkret betrachten wir hier folgende Version der NAVIER-STOKES-Gleichungen:

$$\begin{cases} \partial_t V - \nu \Delta V + 2\Omega e_3 \times V + (V \cdot \nabla)V + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^3, \\ \operatorname{div} V = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^3, \\ V|_{t=0} = V_0 & \text{in } \mathbb{R}_+^3, \end{cases} \quad (1.1)$$

wobei zusätzlich noch gewisse Randbedingungen gegeben sind. Dabei ist V das Geschwindigkeitsfeld und p der Druck; die restlichen Größen sind zum Problem gehörende Parameter. Der Term $2\Omega e_3 \times V$ weist darauf hin, dass die sogenannte CORIOLISKRAFT mit in die Gleichung einfließt und dass das zugrundeliegende Gebiet \mathbb{R}_+^3 mit einer konstanten Geschwindigkeit um die vertikale z -Achse rotiert. Die Divergenzfreiheit besagt, dass es sich um ein inkompressibles Fluid handelt. Als Beispiel für ein solches Fluid kann man sich den Wind vorstellen, der in einer bestimmten, festen Richtung über die Erdoberfläche weht.

Mit einer gegebenen (stationären) Lösung \bar{V} – der sogenannten EKMAN-Spirale – des Systems (1.1) und dem Ansatz der linearen Stabilitätsanalyse gelingt es unter gewissen Annahmen, das Problem ausgehend von den NAVIER-STOKES-Gleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu transformieren. Dieses hat die Form eines verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\mathbf{A}v = \lambda \mathbf{B}v, \quad (1.2)$$

wobei λ ein komplexer Parameter ist und \mathbf{A} bzw. \mathbf{B} gewöhnliche Differentialoperatoren enthalten. Mit entsprechend transformierten Randbedingungen definiert Gleichung (1.2) das EKMAN-Randschichtproblem. In diesem Problem sind zusätzlich drei weitere Parameter gegeben, welche bei der Entwicklung der linearen Stabilitätsanalyse der EKMAN-Spirale auftreten. Damit ist durch (1.2) ein parameterabhängiges Problem definiert, welches für das weitere Vorgehen von Interesse sein wird.

Grundlegendes Thema in dieser Arbeit ist die Frage nach der linearen Stabilität bzw. Instabilität der EKMAN-Spirale. Aus physikalischer Sicht will man dazu wissen, ob die Strömungsform der EKMAN-Spirale beobachtbar ist. Mathematisch gesehen macht man folgenden Ansatz: Man betrachtet die Differenz W von einer beliebigen Lösung V von (1.1) und der EKMAN-Spirale; $W = V - \bar{V}$ bezeichnet dabei die Störung. Mit diesem Störungsargument und mithilfe weiteren Annahmen und Umformungen erhält man schließlich das Eigenwertproblem (1.2). Verantwortlich für die lineare Stabilität bzw. Instabilität der EKMAN-Spirale ist das Verhalten der Störung

W im Laufe der Zeit. Anschaulich bedeutet lineare Stabilität hier, dass „kleine Störungen“ zum Zeitpunkt $t = 0$ nach genügend langer Zeit wieder verschwinden. Falls aber demgegenüber eine Störung existiert, die mit der Zeit wächst, spricht man von linearer Instabilität. Um den letzten Punkt soll es hier genauer gehen: die Frage nach der Instabilität der EKMAN-Spirale. Dabei spielt das Problem (1.2) eine entscheidende Rolle: Es geht um die Untersuchung des spektralen Parameters λ . Insbesondere stellt sich hier die Frage, ob in Abhängigkeit der Parameter in Problem (1.2) ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit der Eigenschaft $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Dies würde nämlich auf Instabilität der EKMAN-Spirale hinweisen.

Eine analytische Lösung des Eigenwertproblems (1.2) scheint wegen dessen komplizierter Struktur bisher noch nicht gefunden worden zu sein. Einen Versuch, dieses Problem aus analytischer Seite zu betrachten, machten z. B. L. GREENBERG und M. MARLETTA (vgl. [10]). Sie entwickelten für das Problem (1.2) eine Operator-Theorie für L^2 -Lösungen und konnten das essentielle Spektrum berechnen. Für die Eigenwerte konnten sie eine a-priori-Information angeben, indem sie eine Abschätzung für den Realteil und den Imaginärteil der Eigenwerte entwickelten. Die Frage, ob es Eigenwerte mit negativem Realteil gibt, versuchten L. GREENBERG und M. MARLETTA schließlich auf numerischem Wege zu überprüfen. Auch in dieser Arbeit soll ein numerischer Ansatz für die Analyse des Spektrums von (1.2) gewählt werden. Entsprechende Funktionenräume wie in [10] spielen hier demnach keine Rolle. Der Ansatz basiert dabei auf der Arbeit von D. K. LILLY: Die in den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} auftauchenden Differentialoperatoren werden durch Differenzenformeln ersetzt. Im Detail wird dieses Vorgehen so weit durchgeführt, bis ein Differenzenverfahren vierter Ordnung entsteht. Wir bekommen damit eine diskrete Version des EKMAN-Randschichtproblem; dieses hat ebenfalls die Form eines verallgemeinerten Eigenwertproblems:

$$\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h, \quad (1.3)$$

wobei sich der Index h auf das zugrundeliegende numerische Gitter Ω_h bezieht. Das Problem (1.3) ist in dieser Form ein großes System algebraischer Gleichungen.

In Hinsicht auf die Stabilitätsfrage der EKMAN-Spirale \bar{V} gehen wir numerisch wie folgt vor: Wir betrachten das System (1.3) und untersuchen das zu \mathbf{A}^h und \mathbf{B}^h gehörige Spektrum. Analog zu oben interessieren uns im diskreten Fall die Eigenwerte von \mathbf{A}^h und \mathbf{B}^h , welche einen Realteil kleiner null aufweisen.

Wie bereits oben erwähnt, hängt das Problem (1.2) von drei Parametern ab. Konkret sind dies folgende:

- die Wellenzahl α ,
- die REYNOLDSzahl R ,
- der Winkel ε .

Nach der Diskretisierung von (1.2) gilt diese Abhängigkeit auch für das Problem $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$, d. h. für die Eigenwerte und -funktionen gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \lambda^h &= \lambda^h(\alpha, R, \varepsilon), \\ \mathbf{v}^h &= \mathbf{v}^h(\alpha, R, \varepsilon). \end{aligned}$$

Neben der Frage nach der Existenz von Eigenwerten λ^h mit der Eigenschaft $\operatorname{Re}\lambda^h < 0$ sind nach D. K. LILLY diejenigen λ^h von Interesse, für die die Bedingung

$$\operatorname{Re}\lambda^h = \operatorname{Re}\lambda^h(\alpha, R, \varepsilon) = 0 \quad (1.4)$$

bei minimalem Realteil $\operatorname{Re}\lambda^h$ gilt (vgl. [18]). Speziell soll diesbezüglich die REYNOLDSzahl gefunden werden, für die die Gleichheit (1.4) mit kleinstem R gilt, was uns zur Definition der

kritischen REYNOLDSzahl R_{krit} führt.

Die Gleichheit in (1.4) und die Tatsache, dass unser Problem von drei Parametern abhängt, motiviert nun die Behandlung des diskreten EKMAN-Problems (1.3) mithilfe der Methode der Parameterfortsetzung. Damit soll es gelingen, die kritische REYNOLDSzahl im α - R - ε -Volumen zu finden. Dazu wird die Gleichung (1.4) als konkreter Ansatz verwendet, um das Problem (1.3) in ein parameterabhängiges, nichtlineares System der Form

$$G(u, \mu) = 0, \quad G : \mathbb{R}^{M+1} \rightarrow \mathbb{R}^M \quad (1.5)$$

zu transformieren. Dabei ist $M \in \mathbb{N}$ vom gegebenen Gitter Ω_h abhängig und G eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Größe $u \in \mathbb{R}^M$ wird als Lösung obiger Gleichung bezeichnet und $\mu \in \mathbb{R}$ ist der zugehörige Parameter. Wie u bzw. μ im Einzelnen aussehen wird in der Anwendung ersichtlich, abhängig sind sie von den Unbekannten v^h und λ^h sowie von den Parametern R und ε (der Parameter α wird zunächst als feste Konstante betrachtet).

Ziel ist es nun, das System (1.5) zu lösen. Ein möglicher Ansatz dazu wäre, einen Lösungszweig $(u(\mu), \mu)$ für ein gewisses μ -Intervall zu finden. In der Praxis bedeutet dies, den Parameter μ schrittweise zu erhöhen und für festes μ das Gleichungssystem (1.5) mit dem NEWTON-Verfahren zu lösen. In jeder Iteration wird dabei die vorliegende Lösung u als Startwert für den nächsten Wert von μ verwendet. Diese „einfache“ Parameterfortsetzung scheint auf den ersten Blick natürlich und die beste Methode zu sein, um Lösungen für das Problem (1.5) zu erhalten. Aber diese Methode schlägt fehl an Punkten (u, μ) , an denen die JACOBI-Matrix G_u singularär ist. Deswegen wird eine Fortsetzungsmethode verwendet, die auf der Parametrisierung des Lösungszweiges nach der Bogenlänge bzw. nach der Pseudo-Bogenlänge basiert. Das bedeutet konkret, wir führen einen neuen Parameter s ein, so dass sowohl u als auch μ von s abhängen. Die Idee dazu stammt von H. B. KELLER und wurde Ende der 1970er Jahre entwickelt. Nach Einführen des Parameters s wird das ursprüngliche System (1.5) um eine Normierungsbedingung $N(x, s)$ erweitert, wobei $x = (u, \mu)$. Damit erhalten wir ein neues Gleichungssystem

$$F(x, s) = 0, \quad F : \mathbb{R}^{M+2} \rightarrow \mathbb{R}^{M+1}, \quad (1.6)$$

das nun mithilfe der Parameterfortsetzung bzgl. s gelöst werden kann. Der Vorteil dieser Methode – der sogenannten Pseudo-Bogenlänge-Methode – ist, dass damit das Problem der Singularität von G_u umgangen werden kann. Man kann zeigen, dass die JACOBI-Matrix F_x an sogenannten regulären Lösungspunkten von (1.5) auch dann invertierbar ist, wenn G_u singularär ist. Damit ist das NEWTON-Verfahren durchführbar und wir können mithilfe von (1.6) unser ursprüngliches Problem (1.5) lösen. Theoretischer Hintergrund für diese Methode ist der Satz über implizite Funktionen: Dieser garantiert unter gewissen Voraussetzungen die eindeutige, lokale Lösbarkeit des Systems (1.6), und damit auch des Problems (1.5).

Mit der Methode der Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung erhalten wir nun eine Lösung $x = x(s)$, für die die Gleichung (1.5) erfüllt ist, d. h. wir haben

$$G(x(s)) = 0.$$

Diese Lösung nennen wir in Anlehnung an (1.4) „Neutralitätskurve“ und erhalten damit insbesondere diejenigen Eigenwerte des Problems (1.3), für die im α - R - ε -Volumen der Realteil null ist.

Um schließlich die kritische REYNOLDSzahl zu finden, behandeln wir den bis jetzt festgehaltenen Parameter α auch als Unbekannte und führen mithilfe (1.5) ein neues Gleichungssystem der folgenden Form ein:

$$T(z) = 0, \quad T : \mathbb{R}^{2M+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2M+1}.$$

Durch erneutes Anwenden der Pseudo-Bogenlänge-Methode auf die letzte Gleichung gelingt es uns, die kritische REYNOLDSzahl im α - R - ε -Volumen zu bestimmen. Numerische Rechnungen

und zugehörige Schaubilder veranschaulichen das Vorgehen dazu.

Sämtliche Ergebnisse der in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren und Methoden sind mit der mathematischen Software MATLAB erzielt worden. Um einen Eindruck von dem zugrundeliegenden Quellcode der numerischen Verfahren zu bekommen, sind die wichtigsten Teile der Programmtexte mit in den Anhang integriert worden.

Zum Ende dieser Einführung soll schließlich noch eine Übersicht zu den einzelnen Kapiteln dieser Arbeit folgen:

Kapitel 2 führt kurz in das Gebiet der hydrodynamischen Stabilität ein. Hier soll eher „unmathematisch“ das zugrundeliegende Thema dieser Arbeit motiviert werden. Dazu wird ein historisches Beispiel aus dem Jahre 1883 aufgeführt, das relativ einfach klarmacht, was Stabilität in der Hydrodynamik bedeutet. Schließlich wird noch die EKMAN-Spirale aus physikalischer Sicht beleuchtet, um eine anschauliche Vorstellung zu dem eigentlichen Thema dieser Arbeit zu bekommen.

Kapitel 3 befasst sich mit den Grundlagen des Problems der vorliegenden Arbeit. Neben grundlegenden Notationen werden auch andere fundamentale Konzepte – z. B. das der linearen Stabilitätsanalyse – vorgestellt, die bei der Herleitung des EKMAN-Randschichtproblems von Bedeutung sind. Basis dieses Kapitels ist das Paper [18] von D. K. LILLY aus dem Jahr 1966, welches ausgehend von den NAVIER-STOKES-Gleichungen schließlich zum eigentlichen Problem der Arbeit führt – dem EKMAN-Randschichtproblem. Zum Schluss dieses Kapitels wird der Begriff der kritischen REYNOLDSzahl erläutert.

Kapitel 4 widmet sich auf Basis des EKMAN-Randschichtproblems der Herleitung eines numerischen Differenzenverfahrens vierter Ordnung. Während sich der erste Abschnitt zunächst im allgemeineren Sinn mit Differenzenformeln befasst, dienen die beiden folgenden der konkreten Herleitung des Differenzenverfahrens. Die Grundidee dazu stammt von D. K. LILLY selbst. Darauf aufbauend wird ein Differenzenverfahren vierter Ordnung der Form $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ hergeleitet. Dieses bildet die Grundlage für das weitere Vorgehen in Kapitel 6.

Kapitel 5 befasst sich mit der Theorie zur Lösung von parameterabhängigen Gleichungssystemen der Form $G(u, \lambda) = 0$. Grundlegendes Hilfsmittel dazu ist der Satz über implizite Funktionen. Darauf aufbauend werden zwei Methoden vorgestellt, wie man in der Praxis solch ein Problem handhabt. Nur die zweite Methode – die der Pseudo-Bogenlänge – wird für uns von Interesse sein. Diese gibt uns die Möglichkeit, mit dem NEWTON-Verfahren eine Lösung $(u(s), \lambda(s))$ zu berechnen, wobei s ein gewisses Intervall durchläuft. Abschließend beschäftigen wir uns mit der Berechnung von „Umkehrpunkten“ des Systems $G(u, \lambda) = 0$; das sind Lösungen des Gleichungssystems, bei denen die JACOBI-Matrix G_u singulär ist. Als Literaturangabe ist hier insbesondere [3] zu nennen.

Kapitel 6 dient der Anwendung der vorgestellten Verfahren und Methoden. Mithilfe des Ansatzes $\text{Re} \lambda^h = 0$ wird mit dem Differenzenverfahren $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ aus Kapitel 4 ein parameterabhängiges Problem der Form $G(u, \mu) = 0$ hergeleitet. Dieses führt uns zur Anwendung der Methoden aus Kapitel 5 und liefert numerische Resultate inklusive zugehörigen Schaubildern. Speziell geben uns die Mittel der Fortsetzungsmethoden die Möglichkeit, die kritische REYNOLDSzahl zu berechnen.

Kapitel 7 gibt einen groben Abriss der in dieser Arbeit behandelten Themen. Des Weiteren wird die numerische Vorgehensweise von D. K. LILLY skizziert, die ihm ermöglichte, auf seine Weise der kritischen REYNOLDSzahl einen Wert zuzuweisen. Außerdem wird diesbezüglich kurz auf weitere Arbeiten eingegangen, die sich ebenfalls mit dem EKMAN-Randschichtproblem beschäftigen.

Der Anhang rundet die Arbeit schließlich ab. Zunächst wird Abschnitt A eine kurze Einführung in das NEWTON-Verfahren geben inklusive einem bekannten Konvergenzresultat. Teil B

widmet sich detailliert der Berechnung der Ableitungen, welche für die Pseudo-Bogenlänge-Methode gebraucht werden. Der letzte Abschnitt C des Anhangs stellt den MATLAB-Quellcode vor, der in den numerischen Verfahren verwendet wurde. Dabei wird nicht der gesamte Programmtext mit angegeben, sondern lediglich die wichtigsten Fragmente des Quellcodes.

Motivation: Hydrodynamische Stabilität

Die Hydrodynamik beschäftigt sich mit der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen und darauf aufbauend mit dem Verhalten von laminaren (ohne Verwirbelungen) und turbulenten Strömungen. Insbesondere ist der Punkt von Interesse, an welchem eine Flüssigkeit (oder ein Gas) von einem laminaren in einen turbulenten Zustand übergeht. Solche strömungsmechanischen Instabilitäten finden sich in Natur und Technik fast überall, z. B. bei einer Rohrströmung, welche in Abschnitt 2.1 genauer erläutert wird.

Die Frage nach einer Strömung, die sich in einem bestimmten Raumgebiet und unter gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen einstellt, ist von zentraler Bedeutung in der Strömungsmechanik. Insbesondere interessiert man sich dafür, ob diese Strömung auch stabil ist, d. h. robust gegenüber gewissen Ungenauigkeiten bzw. Störungen und demzufolge in der Realität beobachtbar ist. Die mathematische, korrekte Formulierung dazu wird später vorgenommen.

Stabilität bezieht sich immer auf einen Referenzzustand, man nennt ihn die Grundströmung. Instabilitäten lassen sich am besten untersuchen, wenn die Grundströmung einfach ist und viele Symmetrien besitzt. Symmetrie bedeutet dabei, dass die zugrundeliegenden Gleichungen für die Strömung und die dazugehörigen Randbedingungen invariant sind unter bestimmten Symmetrie-Operationen.

Die hydrodynamische Stabilität beschäftigt sich im weitesten Sinne mit der Frage nach den Strömungsformen, die unter gegebenen Bedingungen realisiert werden. Ein wichtiger Aspekt ist dabei die Änderung der Symmetrieeigenschaften einer Strömung. In den meisten Fällen verringert sich die Symmetrie der Strömung, wenn z. B. die Stärke des Antriebs erhöht wird. Der Antrieb wird normalerweise durch einen Parameter quantifiziert, z. B. die REYNOLDSzahl. Der Wert des Parameters, bei dem Symmetrie gebrochen wird, bezeichnet man als kritischen Wert. Man spricht von einer symmetriebrechenden Instabilität.

2.1 Rohrströmung

Ein gutes Beispiel für die Untersuchung der Stabilität einer Flüssigkeit ist das Prinzip der Rohrströmung. Das zugrundeliegende physikalische Experiment geht dabei auf O. REYNOLDS aus dem Jahr 1883 zurück: Hierbei fließt Wasser unter einem gewissen Druck über eine lange gerade Rohrstrecke aus einem Reservoir. Nach dem konischen Einlauf und einer gewissen Einlauflänge im Rohr bildet sich eine laminare Grundströmung aus, welche von der REYNOLDSzahl R parametrisiert wird (vgl. [4], Kapitel 1); diese ist abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers im Rohr. Dabei wird das laminare Strömungsprofil lediglich für hinreichend geringe Wasserdurchflussraten realisiert. Bei einer Erhöhung der REYNOLDSzahl bzw. der Durchflussrate beobachtet man nach der laminaren (glatten) Strömung zunächst einen Bereich, in dem die laminare Strömung mit anscheinend chaotischen Strömungsgebieten abwechselt. Bei weiterer Erhöhung der REYNOLDSzahl wird die gesamte Strömung chaotisch (turbulent). O. REYNOLDS fand einen bestimmten Wert der REYNOLDSzahl für den Übergang zur Turbulenz, die sogenannte kritische REYNOLDSzahl. Dieser Wert ist zudem noch abhängig von den äußeren Umständen des Experiments, d. h. die Länge und Glattheit des Rohrs und die Form des Einlaufs spielen z. B. auch eine Rolle bei der Bestimmung der kritischen REYNOLDSzahl. Aus diesem Grund gibt

es je nach Beschaffenheit des Experiments verschiedene Werte für die kritische REYNOLDSzahl.

Abbildung 2.1 veranschaulicht das Experiment von O. REYNOLDS, bei dem das einfließende Wasser mit einem Tintenfaden gekennzeichnet ist. Ist die Einflussgeschwindigkeit des Wassers hinreichend klein, so entsteht eine laminare Strömung (Abbildung 2.1 (a)). Bei einer sukzessiven Erhöhung der Geschwindigkeit bzw. der REYNOLDSzahl wird irgendwann der Punkt erreicht, an dem der Übergang zur turbulenten Strömung zu erkennen ist. Abbildung 2.1 (b) zeigt die turbulente Strömung mittels der Tinte nach dem Übergang.

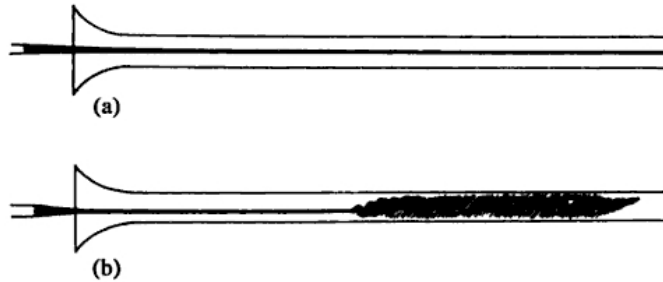


Abbildung 2.1: Originalskizzen des Experiments von REYNOLDS (1883).¹

Das oben beschriebene Experiment illustriert eines der Ziele beim Studium der hydrodynamischen Stabilität, nämlich die Frage nach der Stabilität bzw. Instabilität einer gegebenen laminaren Grundströmung. Insbesondere ist dabei der Umschwung von laminarer zur turbulenten Strömung von Interesse, d. h. der Punkt, an welchem die laminare Strömung instabil wird.

2.2 Die Ekman-Spirale

Die Frage nach der Stabilität bzw. Instabilität einer Strömung beschränkt sich natürlich nicht nur auf den Fall der Rohrströmung. Auch Luft- und Meeresströmungen treten bei der Untersuchung von hydrodynamischen Stabilitäten auf. In dieser Arbeit soll es dabei speziell um einen gerichteten Fluss in einem rotierenden Halbraum gehen. Die in diesem Fall zugrundeliegende Grundströmung ist die sogenannte EKMAN-Spirale, welche hier als Grundlage für die Untersuchung von Stabilität bzw. Instabilität dient.

In diesem Abschnitt soll die EKMAN-Spirale aus physikalischer Sicht kurz erläutert werden. Mathematische Formulierungen dazu werden erst im nächsten Kapitel vorgenommen. Die EKMAN-Spirale tritt überall dort auf, wo z. B. Wind kontinuierlich über eine Wasseroberfläche weht. Die experimentellen Beobachtungen dazu gab es bereits Ende des 19. Jahrhunderts von dem norwegischen Polarforscher F. NANSEN. Dieser stellte bei einer Reise durch das Polarmeer fest, dass dortige Eisschollen nicht in Richtung des Windes treiben, sondern eine rechtsseitige Abweichung von 20 bis 40 Grad in Bezug auf die Windrichtung erfahren. Dieses Phänomen lässt sich in der Theorie folgendermaßen erklären: Aufgrund von Reibungseffekten zieht der Wind das Wasser hinter sich her, so dass das Wasser sich ebenfalls einer Bewegung unterzieht. Durch die Drehung der Erde wirkt die CORIOLIS-Kraft auf diese Bewegung und lenkt das Wasser auf der Nordhalbkugel in einem Winkel von 45 Grad nach rechts (auf der Südhalbkugel nach links). Dieser Effekt setzt sich auf die unteren Wasserschichten fort, denn die Reibung an der Wasseroberfläche durch den Wind bewirkt eine Bewegung auf jede einzelne Wasserschicht; d. h. die jeweils darüberliegende Wasserschicht übernimmt den Reibungseffekt des Windes. Damit verursacht der CORIOLIS-Effekt mit zunehmender Tiefe eine immer weiter nach rechts wirkende Ablenkung. Tiefere Wasserschichten bewegen sich dabei langsamer und die Bewegungsrichtung

¹Quelle: [4], S. 3.

des Wassers weicht immer stärker von der Windrichtung ab, bis schließlich das Wasser in der sogenannten EKMAN-Tiefe entgegengesetzt zur Windrichtung fließt.

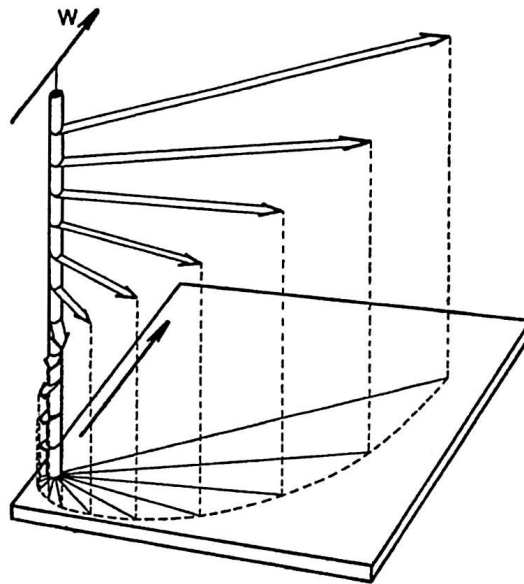


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der EKMAN-Spirale in einem Vektordiagramm.²

In Abbildung 2.2 ist die resultierende Strömungsrichtung inklusive Strömungsgeschwindigkeit für verschiedene Wassertiefen dargestellt (auf der Nordhalbkugel). Wenn man nun die Windvektoren der einzelnen Höhen auf die horizontale Ebene nach unten projiziert und die Endpunkte der Vektoren miteinander verbindet, so ergibt sich die Darstellung einer (logarithmischen) Spirale.

Bemerkt sei an dieser Stelle, dass auch – wie im Wasser – eine EKMAN-Spirale in der Luft über der Wasseroberfläche (oder auch über dem Erdboden) existieren kann. Ebenso gilt dies im Wasser über dem Meeresgrund, falls das Wasser dort eine gewisse Strömung aufweist.

In Bezug auf die mögliche Form und Auswirkung einer Instabilität der EKMAN-Spirale sei hier z. B. auf die Arbeit von A. J. FALLER verwiesen (vgl. [7]). Hier wurde in physikalischen Experimenten die Instabilität in Form von bandartigen Verwirbelungen nachgewiesen.

²Quelle: [23], S. 493.

Grundlagen des Ekman-Randschichtproblems

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Themen behandelt, die für die Arbeit im weiteren Vorgehen von Bedeutung sind. Nachdem kurz einige Grundbegriffe und Notationen vorgestellt werden, widmet sich der zweite Abschnitt dem Konzept der linearen Stabilitätsanalyse anhand des Beispiels der NAVIER-STOKES-Gleichungen. Anschließend wird kurz in das Thema der Koordinatentransformation bei partiellen Differentialgleichungen eingeführt: Am Beispiel der LAPLACE-Gleichung wird gezeigt, wie eine Transformation die Darstellung der Gleichung verändern kann. Nach diesen Vorbereitungen kommen wir schließlich zum Hauptthema dieser Arbeit – dem EKMAN-Randschichtproblem. Auf Basis des Papers [18] von D. K. LILLY wird ausgehend von den NAVIER-STOKES-Gleichungen mit Rotationsterm ausführlich das EKMAN-Randschichtproblem hergeleitet. Abschließend wird erklärt, was die kritische REYNOLDSZahl in diesem Zusammenhang ist.

3.1 Grundbegriffe und Notationen

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ stets eine natürliche Zahl.

3.1 Notation

- a) Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ verwenden wir die Schreibweise $x \cdot y := \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Dies verwenden wir ebenso, falls x oder y Differentialoperatoren enthält.
- b) Die partiellen Ableitungen einer Funktion u schreiben wir in der Kurzform

$$\partial_x u := \frac{\partial}{\partial x} u, \quad \partial_{x^2} u := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u, \quad \partial_{xy} u := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u \text{ etc.}$$

Für die totale Ableitung nach einer Variablen (z. B. der Zeit), verwenden wir auch den Punktoperator:

$$\dot{u} := \frac{d}{dt} u.$$

- c) Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist folgende Schreibweise gebräuchlich:

$$\partial^\alpha := \partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

3.2 Definition

- a) Für eine skalare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet $\nabla f := (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f)^t$ den Gradienten von f und $\Delta f := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j^2}^2 f$ den LAPLACE-Operator von f (für vektorwertige Funktionen betrachtet man beim LAPLACE-Operator die einzelnen Komponenten).
- b) Für eine vektorwertige Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{div} F := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j$ die Divergenz von F .

c) Das Kreuzprodukt zweier Vektoren a und b im \mathbb{R}^3 ist gegeben durch

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Bei der Behandlung der NAVIER-STOKES-Gleichungen taucht je nach Schreibweise der Konvektionsterm $(V \cdot \nabla)V$ auf, wobei hier $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld ist. Folgender Sachverhalt ist dabei zu beachten:

3.3 Lemma

Für $V = V(t, r(t))$ mit $r(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$ gilt

$$\frac{d}{dt}V = \partial_t V + (V \cdot \nabla)V.$$

Beweis. Mit $V = (v_1, v_2, v_3)^t$ ergibt sich nach der Kettenregel für $v_i, i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_i(t, r(t)) &= (\partial_t v_i \quad \partial_r v_i) \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_t r \end{pmatrix} = \partial_t v_i + \partial_r v_i \partial_t r = \partial_t v_i + (\partial_x v_i \quad \partial_y v_i \quad \partial_z v_i) \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \\ \partial_t z \end{pmatrix} \\ &= \partial_t v_i + \partial_x v_i v_1 + \partial_y v_i v_2 + \partial_z v_i v_3, \end{aligned}$$

denn es gilt nach dem Weg-Zeit-Gesetz $\partial_t x = v_1, \partial_t y = v_2, \partial_t z = v_3$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V &= \begin{pmatrix} \partial_t v_1 + \partial_x v_1 v_1 + \partial_y v_1 v_2 + \partial_z v_1 v_3 \\ \partial_t v_2 + \partial_x v_2 v_1 + \partial_y v_2 v_2 + \partial_z v_2 v_3 \\ \partial_t v_3 + \partial_x v_3 v_1 + \partial_y v_3 v_2 + \partial_z v_3 v_3 \end{pmatrix} = \partial_t V + (v_1 \partial_x + v_2 \partial_y + v_3 \partial_z) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \partial_t V + (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} V = \partial_t V + (V \cdot \nabla)V. \end{aligned}$$

□

3.4 Definition

Gegeben seien zwei komplexe Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ein verallgemeinertes Eigenwertproblem ist ein Problem der Form

$$Ax = \lambda Bx. \tag{3.1}$$

Dabei heißt ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ ($x \neq 0$) ein verallgemeinerter Eigenvektor, falls ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, so dass die Gleichung (3.1) erfüllt ist. λ heißt dann verallgemeinerter Eigenwert.

3.5 Bemerkung

- a) Im Fall, dass B die Einheitsmatrix ist, d. h. $B = I$, erhalten wir mit (3.1) das übliche Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$.
- b) Falls wir in (3.1) nicht ein Element x in \mathbb{C}^n suchen, sondern x aus einem Funktionenraum X ist und A und B (gewöhnliche) Differentialoperatoren enthalten, nennt man x auch die zu λ gehörige Eigenfunktion.

3.2 Das Konzept der linearen Stabilitätsanalyse

In diesem Abschnitt soll das Konzept der linearen Stabilitätsanalyse von Lösungen der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen formal dargestellt werden (vgl. [4], Kapitel 2.3). Dazu betrachten wir eine gegebene (meist stationäre) Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichungen, auch Grundströmung genannt. Die entsprechenden Gleichungen, die eine Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreiben, sind durch folgendes System gegeben:

$$\begin{cases} \partial_t V + (V \cdot \nabla)V = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta V, \\ \operatorname{div} V = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

wobei V das Geschwindigkeitsfeld, p der Druck und ρ und ν feste Parameter sind. Das zugrundeliegende Gebiet inklusive den Randbedingungen für V spielt zunächst keine Rolle, weswegen keine weiteren Bezeichnungen dafür vorgenommen werden. Wir gehen nun von einer gegebenen Grundströmung aus, die im Folgenden durch $\bar{V} = \bar{V}(t, x)$ und $\bar{p} = \bar{p}(t, x)$ gegeben sei und (3.2) erfülle. Die Variablen t und x stehen hierbei für die Zeit bzw. für die Ortskoordinaten.

3.6 Definition

Eine Grundströmung (\bar{V}, \bar{p}) , die die NAVIER-STOKES-Gleichungen (3.2) erfüllt, nennt man **Grundlösung**.

Geht man von einer beliebigen Anfangsbedingung $(V_{ges}(0, x), p_{ges}(0, x))$ aus, welche „nahe“ bei $(\bar{V}(0, x), \bar{p}(0, x))$ liegt und die gleichen Randbedingungen erfüllt wie die Grundlösung (\bar{V}, \bar{p}) , kann man davon ausgehen, dass für $t > 0$ eine entsprechende Gesamtströmung (V_{ges}, p_{ges}) existiert, die eine Lösung von (3.2) ist (vgl. [15], Kapitel 2.3).

Es ist nun interessant zu untersuchen, wie sich die Abweichung $W := V_{ges} - \bar{V}$ und $q := p_{ges} - \bar{p}$ von der Grundströmung in der Zeit t verhält. Verschwindet die Differenz im Laufe der Zeit, d. h. gilt $(W, q) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, dann wird für $t \rightarrow \infty$ die Grundströmung (\bar{V}, \bar{p}) realisiert. Die Grundströmung ist dann stabil. Bleibt jedoch für $t \rightarrow \infty$ die Abweichung $(W, q) \neq 0$, dann ist die Grundströmung instabil. Was hierbei stabil bzw. instabil bedeutet, wird gleich noch formal definiert.

Es ist daher sinnvoll, die zeitliche Entwicklung der Störungen (W, q) zu untersuchen. Wenn man die Gesamtströmung $V_{ges} = \bar{V} + W$ und $p_{ges} = \bar{p} + q$ in die NAVIER-STOKES-Gleichungen (3.2) einsetzt, erhält man eine exakte nichtlineare Gleichung für die Störungen:

$$\begin{cases} \partial_t W + (\bar{V} \cdot \nabla)W + (W \cdot \nabla)\bar{V} + (W \cdot \nabla)W = -\nabla \left(\frac{q}{\rho} \right) + \nu \Delta W, \\ \operatorname{div} W = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Kommen wir nun zur Stabilität. Hierbei gibt es folgende allgemeine Charakterisierung (vgl. [4], Kapitel 2.3):

3.7 Definition

Sei (\bar{V}, \bar{p}) eine Grundlösung der NAVIER-STOKES-Gleichungen (3.2).

a) (\bar{V}, \bar{p}) heißt LJAPUNOV-**stabil** genau dann, wenn für die Störung (W, q) gilt:

$$\forall t \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \begin{cases} \|W(0, x)\| < \delta \\ \|q(0, x)\| < \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|W(t, x)\| < \varepsilon \\ \|q(t, x)\| < \varepsilon \end{cases}.$$

Andernfalls ist (\bar{V}, \bar{p}) LJAPUNOV-**instabil**.

b) (\bar{V}, \bar{p}) heißt **asymptotisch stabil** genau dann, wenn (\bar{V}, \bar{p}) LJAPUNOV-stabil ist und zusätzlich gilt:

$$\exists \eta > 0 : \left\{ \begin{array}{l} \|W(0, x)\| < \eta \\ \|q(0, x)\| < \eta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t, x)\| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t, x)\| = 0 \end{array} \right\}.$$

Auf die Norm $\|\cdot\|$ in obiger Definition soll hier nicht genauer eingegangen werden. Auch etwaige Funktionenräume lassen wir hier außen vor, um nicht in andere Themengebiete abzuschweifen. Erwähnt sei aber, dass als Norm z. B. die Supremumsnorm bezüglich x gewählt werden kann.

3.8 Bemerkung

- a) Die Lösung $V_{ges} = \bar{V} + W$ und $p_{ges} = \bar{p} + q$ zerfällt mit diesem Ansatz in zwei Teile: in die Grundlösung (\bar{V}, \bar{p}) und in einen gestörten Teil (W, q) . Man kann deswegen (V_{ges}, p_{ges}) auch als gestörte Lösung von (3.2) bezeichnen.
- b) Anschaulich gesprochen erfordert die LJAPUNOV-Stabilität, dass sich die gestörte Lösung (V_{ges}, p_{ges}) im Laufe der Zeit nicht zu weit von der Grundlösung (\bar{V}, \bar{p}) entfernen darf. Bei einer stabilen Grundlösung bleiben alle Störungen, die anfangs kleiner als δ sind, für alle Zeiten immer kleiner als ε .
- c) Die LJAPUNOV-Stabilität erfordert nicht, dass Störungen für $t \rightarrow \infty$ verschwinden. Für LJAPUNOV-Stabilität würde es schon ausreichen, wenn die Norm der Störungen gleich bleibt.
- d) Die asymptotische Stabilität ist ein strengeres Kriterium. In diesem Fall schmiegt sich die Lösung (V_{ges}, p_{ges}) für $t \rightarrow \infty$ an die Grundlösung (\bar{V}, \bar{p}) an.

Im Folgenden soll es hier aber nicht um die LJAPUNOV-Stabilität gehen, sondern um die lineare Stabilität einer Grundlösung. In diesem Zusammenhang wird angenommen, dass es sich um die zeitliche Entwicklung kleiner Störungen handelt, weswegen der quadratische Term $(W \cdot \nabla)W$ in der exakten Störungsgleichung (3.3) vernachlässigt werden kann. Man erhält dadurch ein **lineares Stabilitätsproblem** in W und q der Form

$$\begin{cases} \partial_t W + (\bar{V} \cdot \nabla)W + (W \cdot \nabla)\bar{V} = -\nabla \left(\frac{q}{\rho} \right) + \nu \Delta W, \\ \operatorname{div} W = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Im Fall, dass die Grundströmung \bar{V} stationär – also zeitunabhängig – ist, d. h. $\bar{V}(t, x) = \bar{V}(x)$, kann man folgenden Separationsansatz für die Störungen W und q machen (vgl. [4], S. 30):

$$\begin{pmatrix} W(t, x) \\ q(t, x) \end{pmatrix} = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \hat{W}(x) \\ \hat{q}(x) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Dieser Ansatz wird Normalmodenansatz genannt, bei dem die zeitliche Entwicklung exponentiell ist mit der komplexen Wachstumsrate $\gamma = \operatorname{Re}\gamma + i\operatorname{Im}\gamma$ und die räumlichen Funktionen durch \hat{W} und \hat{q} gegeben sind.

Wenn man nun den Normalmodenansatz (3.5) in das lineare Stabilitätsproblem (3.4) einsetzt, erhält man Gleichungen für die komplexe Wachstumsrate γ und die räumlichen Funktionen \hat{W} und \hat{q} der Normalmode in der Form

$$\begin{cases} \gamma \hat{W} + (\bar{V} \cdot \nabla)\hat{W} + (\hat{W} \cdot \nabla)\bar{V} = -\nabla \left(\frac{\hat{q}}{\rho} \right) + \nu \Delta \hat{W}, \\ \operatorname{div} \hat{W} = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

mit entsprechenden Randbedingungen für \hat{W} . Die Gleichungen in (3.6) stellen ein Eigenwertproblem dar, bei dem man alle möglichen Eigenwerte γ und die zugehörigen Eigenfunktionen (\hat{W}, \hat{q}) sucht. In Bezug auf die Stabilitätsfrage ist hier der exponentielle Term $e^{\gamma t} = e^{\operatorname{Re}\gamma t} e^{i\operatorname{Im}\gamma t}$ entscheidend. Dazu folgende

3.9 Definition

Die Grundlösung (\bar{V}, \bar{p}) ist **linear instabil**, falls für mindestens ein Eigenwert γ gilt: $\operatorname{Re}\gamma > 0$.

Wie auch bei der Definition der LJAPUNOV-Stabilität gehen wir beim Betrachten des Eigenwertproblems (3.6) nicht auf zugrundeliegende Operatoren und Funktionenräume ein, da diese für das weitere Vorgehen nicht von Bedeutung sein werden. Auch wenn dies formal nicht ganz korrekt ist, so wird Definition 3.9 eine Verbindung zur numerischen Sichtweise geben können.

3.10 Bemerkung

In obiger Definition taucht die Charakterisierung der linearen Stabilität der Grundlösung (\bar{V}, \bar{p}) nicht auf. Grund dafür ist, dass für die Störungen W und q ein ganz konkreter Ansatz – nämlich (3.5) – gemacht wurde, der nicht ausschließt, dass es weitere Lösungen für das lineare Stabilitätsproblem geben könnte.

3.11 Bemerkung

- a) Löst man das Problem (3.6) numerisch durch Diskretisierung, so erhält man ein großes System algebraischer Gleichungen. Die jetzt diskreten Werte von $x := (\hat{W}, \hat{q})$ sind dabei auf einem numerischen Gitter gegeben. Das Gleichungssystem hat meist die Struktur eines verallgemeinerten Eigenwertproblems der Form

$$Ax = \gamma Bx,$$

wobei $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (n ist abhängig vom gewählten numerischen Gitter).

- b) Im diskreten Fall entscheiden die Realteile aller Wachstumsraten $\{\sigma_n = \operatorname{Re}\gamma_n\}$ aller möglichen Normalmoden über die lineare Instabilität der Grundlösung. Die Grundlösung ist hier also linear instabil, falls $\max_n \sigma_n > 0$.

3.3 Koordinatentransformation

Bei partiellen Differentialgleichungen kommt es in vielen Anwendungen vor, dass ein kartesisches Koordinatensystem als Bezugssystem ungeeignet ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, falls krummlinig berandete Definitionsbereiche auftreten. Für den Übergang von einem System in ein anderes benötigt man dabei die Kenntnis der Schreibweise für die Ableitungsgrößen der Differentialgleichung im neuen System. Für einen solchen Übergang gibt es folgende

3.12 Definition

Eine Koordinatentransformation des \mathbb{R}^n ist eine bijektive differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Umkehrabbildung ebenfalls differenzierbar ist. Φ ist also ein Diffeomorphismus.

Gegeben sei nun eine partielle Differentialgleichung der Form

$$F\left(X, (\partial^\alpha f(X))_{0 \leq |\alpha| \leq k}\right) = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, k \in \mathbb{N}_0), \quad (3.7)$$

wobei $F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist. Die Funktion f sei auf einer offenen, nichtleeren Teilmenge G des \mathbb{R}^n definiert, d. h. $f : G \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir wollen nun die Funktion f in den neuen Koordinaten darstellen, die durch eine Koordinatentransformation Φ gegeben sind. Wir betrachten also nicht mehr $f(X)$, sondern $f(\Phi(X))$. Mit der Definition $X' := \Phi(X)$ für die neuen Koordinaten ergibt sich die Schreibweise

$$f(X') = f(\Phi(X)).$$

Dadurch wird die Gleichung (3.7) in eine Differentialgleichung

$$\tilde{F} \left(X', (\partial'^\alpha f(X'))_{0 \leq |\alpha| \leq k} \right) = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, k \in \mathbb{N}_0),$$

überführt, wobei die partielle Ableitung ∂' jetzt auf die neuen Koordinaten X' wirkt.

3.13 Bemerkung

- a) *Im praktischen Gebrauch wird oft $f \circ \Phi$ mit f identifiziert, da z. B. eine physikalische Größe dieselbe bleibt, unabhängig von irgendeiner mathematischen Darstellung durch Koordinaten.*
- b) *Um jedoch Gleichheit für $f \circ \Phi$ und f bzgl. X zu erlangen, kann man eine Funktion $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einführen, so dass*

$$f = \Psi \circ f \circ \Phi$$

gilt, d. h. $f(X) = \Psi(f(\Phi(X)))$.

Da in unserer Anwendung für das EKMAN-Randschichtproblem lediglich ein dreidimensionales Koordinatensystem auftaucht, wollen wir hier nur den Fall $n = 3$ betrachten (der allgemeine Fall wird daraus aber ersichtlich). Das Ziel soll nun sein, am Beispiel der LAPLACE-Gleichung $\Delta f(X) = 0$ im \mathbb{R}^3 eine Koordinatentransformation durchzuführen. Für $X = (x, y, z)^t$ soll also

$$\Delta f(x, y, z) = 0$$

in ein X' -System transformiert werden, wobei $X' \in \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Phi(x, y, z).$$

Kurz: $\Delta f = 0 \rightsquigarrow \Delta(f \circ \Phi) = 0$.

3.14 Annahme

Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass Φ folgende Gestalt hat:

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x'(x, y) \\ y'(x, y) \\ z'(z) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Eine Verallgemeinerung von Φ für das weitere Vorgehen ist ohne weiteres möglich, würde die Sache hier jedoch nur unnötig komplizierter und technischer machen.

3.15 Beispiel

Ein Beispiel für eine Koordinatentransformation im \mathbb{R}^3 der Form (3.8) ist eine Rotation des Koordinatensystems in der x - y -Ebene. Diese ist gegeben durch

$$\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) & 0 \\ -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $A := \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) & 0 \\ -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die sogenannte Drehmatrix.

Für die LAPLACE-Gleichung braucht man die partiellen Ableitungen nach den Variablen x , y und z . Für die transformierte Funktion $f \circ \Phi$ mit $f(\Phi(X)) = f(\Phi(x, y, z)) = f(x'(x, y), y'(x, y), z'(z))$ haben wir für die ersten Ableitungen mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\partial_x f(\Phi(X)) &= \partial_x f(x'(x, y), y'(x, y), z'(z)) = \partial_{x'} f \partial_x x' + \partial_{y'} f \partial_x y', \\ \partial_y f(\Phi(X)) &= \partial_y f(x'(x, y), y'(x, y), z'(z)) = \partial_{x'} f \partial_y x' + \partial_{y'} f \partial_y y', \\ \partial_z f(\Phi(X)) &= \partial_z f(x'(x, y), y'(x, y), z'(z)) = \partial_{z'} f \partial_z z'.\end{aligned}$$

Analog erhält man für die zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^2 f(\Phi(X)) &= \partial_x (\partial_x f(\Phi(X))) = \partial_x (\partial_{x'} f \partial_x x' + \partial_{y'} f \partial_x y') = \partial_x (\partial_{x'} f) \partial_x x' + \partial_{x'} f \partial_{x^2}^2 x' \\ &\quad + \partial_x (\partial_{y'} f) \partial_x y' + \partial_{y'} f \partial_{x^2}^2 y', \\ \partial_{y^2}^2 f(\Phi(X)) &= \partial_y (\partial_y f(\Phi(X))) = \partial_y (\partial_{x'} f \partial_y x' + \partial_{y'} f \partial_y y') = \partial_y (\partial_{x'} f) \partial_y x' + \partial_{x'} f \partial_{y^2}^2 x' \\ &\quad + \partial_y (\partial_{y'} f) \partial_y y' + \partial_{y'} f \partial_{y^2}^2 y', \\ \partial_{z^2}^2 f(\Phi(X)) &= \partial_z (\partial_z f(\Phi(X))) = \partial_z (\partial_{z'} f \partial_z z') = \partial_z (\partial_{z'} f) \partial_z z' + \partial_{z'} f \partial_{z^2}^2 z'.\end{aligned}$$

Mit den weiteren Umformungen

$$\begin{aligned}\partial_x (\partial_{x'} f) &= \partial_{x'^2}^2 f \partial_x x' + \partial_{y'x'}^2 f \partial_x y', \\ \partial_x (\partial_{y'} f) &= \partial_{x'y'}^2 f \partial_x x' + \partial_{y'^2}^2 f \partial_x y', \\ \partial_y (\partial_{x'} f) &= \partial_{x'^2}^2 f \partial_y x' + \partial_{y'x'}^2 f \partial_y y', \\ \partial_y (\partial_{y'} f) &= \partial_{y'x'}^2 f \partial_y x' + \partial_{y'^2}^2 f \partial_y y', \\ \partial_z (\partial_{z'} f) &= \partial_{z'^2}^2 f \partial_z z'\end{aligned}$$

erhält man damit folgende Form für die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^2 f(\Phi(X)) &= \partial_{x'^2}^2 f (\partial_x x')^2 + 2\partial_{x'y'}^2 f (\partial_x x') (\partial_x y') + \partial_{y'^2}^2 f (\partial_x y')^2 + \partial_{x'} f \partial_{x^2}^2 x' + \partial_{y'} f \partial_{x^2}^2 y', \\ \partial_{y^2}^2 f(\Phi(X)) &= \partial_{x'^2}^2 f (\partial_y x')^2 + 2\partial_{x'y'}^2 f (\partial_y x') (\partial_y y') + \partial_{y'^2}^2 f (\partial_y y')^2 + \partial_{x'} f \partial_{y^2}^2 x' + \partial_{y'} f \partial_{y^2}^2 y', \\ \partial_{z^2}^2 f(\Phi(X)) &= \partial_{z'^2}^2 f (\partial_z z')^2 + \partial_{z'} f \partial_{z^2}^2 z'.\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 von $f \circ \Phi$ in den neuen Variablen x' , y' und z' dargestellt. Die dabei auftretenden Richtungsableitungen der neuen unabhängigen Veränderlichen (x', y', z') nach den ursprünglichen Variablen (x, y, z) kann man aus der Parameterdarstellung (3.8) bestimmen.

Die transformierte LAPLACE-Gleichung $\Delta(f \circ \Phi) = 0$ lautet im $x'-y'-z'$ -System demnach

$$\begin{aligned}\partial_{x'^2}^2 f \left[(\partial_x x')^2 + (\partial_y x')^2 \right] &+ 2\partial_{x'y'}^2 f \left[(\partial_x x') (\partial_x y') + (\partial_y x') (\partial_y y') \right] + \partial_{y'^2}^2 f \left[(\partial_x y')^2 + (\partial_y y')^2 \right] \\ &+ \partial_{z'^2}^2 f (\partial_z z')^2 + \partial_{x'} f \left[\partial_{x^2}^2 x' + \partial_{y^2}^2 x' \right] + \partial_{y'} f \left[\partial_{x^2}^2 y' + \partial_{y^2}^2 y' \right] + \partial_{z'} f \partial_{z^2}^2 z' = 0.\end{aligned}$$

3.4 Herleitung des Ekman-Randschichtproblems

In Anlehnung an das Konzept der linearen Stabilitätsanalyse aus Kapitel 3.2 soll in diesem Abschnitt mit dem analogen Vorgehen ein lineares Stabilitätsproblem hergeleitet werden, aus dem dann das EKMAN-Randschichtproblem resultiert. Grundlage dafür sind hier die dreidimensionalen NAVIER-STOKES-Gleichungen mit Rotationsterm aus der Strömungsdynamik (vgl. [18]):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V - \nu \Delta V + 2\Omega e_3 \times V + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0, \\ \operatorname{div} V = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

wobei wieder durch $V = (v_1, v_2, v_3)^t$ das Geschwindigkeitsfeld und durch p der Druck einer inkompressiblen Flüssigkeit gegeben sind. Die restlichen Größen sind folgendermaßen definiert:

- $\nu > 0$: kinematische Viskosität,
- $\Omega \in \mathbb{R}$: CORIOLISparameter,
- $e_3 = (0, 0, 1)^t$: Einheitsvektor in z -Richtung,
- $\rho > 0$: Dichte.

Unter Beachtung von Lemma 3.3 erhält man die zu (3.9) äquivalente, herkömmlichere Schreibweise der NAVIER-STOKES-Gleichungen:

$$\begin{cases} \partial_t V - \nu \Delta V + 2\Omega e_3 \times V + (V \cdot \nabla)V + \nabla \left(\frac{\bar{p}}{\rho} \right) = 0, \\ \operatorname{div} V = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Des Weiteren kommen zu obigem Problem noch Randbedingungen hinzu, die aus physikalischer Sichtweise motiviert werden können (vgl. [18]):

$$\begin{cases} V(t, x, y, 0) = 0, \\ e_3 \cdot V(t, x, y, \infty) = 0, \\ (e_3 \cdot \nabla)V(t, x, y, \infty) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Dass obiges Problem eine stationäre – also zeitunabhängige – Lösung besitzt, wurde von dem schwedischen Physiker und Ozeanograph V. W. EKMAN entdeckt. Diese Lösung, die sogenannte EKMAN-Spirale (vgl. [5]), kann man explizit angeben:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= v_g \begin{pmatrix} 1 - \exp(-z/D) \cos(z/D) \\ \exp(-z/D) \sin(z/D) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{p} &= -2\rho\Omega v_g y, \end{aligned}$$

wobei $v_g > 0$ eine Konstante ist (der sogenannte geostrophische Fluss) und D durch $D := (\nu/\Omega)^{1/2}$ definiert ist.

3.16 Lemma

Die EKMAN-Spirale (\bar{V}, \bar{p}) erfüllt die NAVIER-STOKES-Gleichungen (3.10) mit den Randbedingungen (3.11).

Beweis. Sei $\bar{V} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)^t$. Durch Einsetzen der EKMAN-Spirale erhält man komponentenweise folgende Gleichheiten:

erste Komponente:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{v}_1 - \nu \Delta \bar{v}_1 + 2\Omega(e_3 \times \bar{V})_1 + (\bar{v}_1 \partial_x + \bar{v}_2 \partial_y + \bar{v}_3 \partial_z) \bar{v}_1 + \partial_x \left(\frac{\bar{p}}{\rho} \right) \\ = -\nu v_g \left(-2 \frac{\exp(-z/D) \sin(z/D)}{D^2} \right) + 2\Omega (-v_g \exp(-z/D) \sin(z/D)) \\ = 2\nu v_g \frac{\exp(-z/D) \sin(z/D)}{\nu/\Omega} - 2\Omega v_g \exp(-z/D) \sin(z/D) = 0, \end{aligned}$$

zweite Komponente:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{v}_2 - \nu \Delta \bar{v}_2 + 2\Omega(e_3 \times \bar{V})_2 + (\bar{v}_1 \partial_x + \bar{v}_2 \partial_y + \bar{v}_3 \partial_z) \bar{v}_2 + \partial_y \left(\frac{\bar{p}}{\rho} \right) \\ = -\nu v_g \left(-2 \frac{\exp(-z/D) \cos(z/D)}{D^2} \right) + 2\Omega v_g (1 - \exp(-z/D) \cos(z/D)) - 2\Omega v_g \\ = 2\nu v_g \frac{\exp(-z/D) \cos(z/D)}{\nu/\Omega} - 2\Omega v_g \exp(-z/D) \cos(z/D) = 0, \end{aligned}$$

dritte Komponente ist klar, da $\bar{v}_3 = 0$ und \bar{p} unabhängig von z ist.

Ebenso klar ist, dass $\operatorname{div} \bar{V} = 0$ und die Randbedingungen (3.11) erfüllt sind. \square

3.17 Bemerkung

Nach Definition (3.6) ist die EKMAN-Spirale (\bar{V}, \bar{p}) eine stationäre Grundlösung.

In dieser Arbeit soll es um die Stabilitätsfrage der EKMAN-Spirale gehen, weswegen diese nun als ein Referenzzustand betrachtet wird. Für die Stabilitätsanalyse macht man wieder folgenden Störansatz (vgl. [11]): Man betrachtet eine beliebige Lösung (V, p) der NAVIER-STOKES-Gleichungen (3.10) inklusive der Randbedingungen (3.11) und setzt

- $W := V - \bar{V}$ und
- $q := p - \bar{p}$.

Nun betrachtet man $V = W + \bar{V}$ und $p = q + \bar{p}$ und setzt dies in (3.10) ein:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t W + \partial_t \bar{V} - \nu \Delta W - \nu \Delta \bar{V} + 2\Omega e_3 \times W + 2\Omega e_3 \times \bar{V} \\ + (W \cdot \nabla)W + (\bar{V} \cdot \nabla)W + (W \cdot \nabla)\bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V} \\ + \nabla \left(\frac{q}{\rho} \right) + \nabla \left(\frac{\bar{p}}{\rho} \right) = 0, \\ \operatorname{div} W + \operatorname{div} \bar{V} = 0, \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_t W - \nu \Delta W + 2\Omega e_3 \times W + (W \cdot \nabla)W + (\bar{V} \cdot \nabla)W \\ + (W \cdot \nabla)\bar{V} + \nabla \left(\frac{q}{\rho} \right) = 0, \\ \operatorname{div} W = 0. \end{array} \right.$$

Auch hier vernachlässigt man den nichtlinearen Term $(W \cdot \nabla)W$ und erhält somit für $W = (w_1, w_2, w_3)^t$ und q das lineare Stabilitätsproblem

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t W - \nu \Delta W + 2\Omega e_3 \times W + (\bar{V} \cdot \nabla)W + (W \cdot \nabla)\bar{V} + \nabla \left(\frac{q}{\rho} \right) = 0, \\ \operatorname{div} W = 0, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

mit den dazugehörigen Randbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} W = 0, \text{ für } z = 0, \\ w_3 = 0, \text{ für } z = \infty, \\ \partial_z W = 0, \text{ für } z = \infty. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

3.18 Bemerkung

- a) Aufgrund von experimentellen Beobachtungen in der Strömungsdynamik von A. J. FALLER zum EKMAN-Randschichtproblem ist die Vernachlässigung des nichtlinearen Terms $(W \cdot \nabla)W$ gerechtfertigt (vgl. [18]).
- b) Ziel ist es, obiges Stabilitätsproblem unter gewissen Bedingungen und weiteren Umformungen in eine gewöhnliche Differentialgleichung überzuführen.

Es werden nun neue Störgrößen (im Folgenden mit einem „'“ gekennzeichnet) für das Problem (3.12) mit den Randbedingungen (3.13) eingeführt:

- $x' := (x \cos(\varepsilon) + y \sin(\varepsilon))/D$,
- $y' := (-x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon))/D$,
- $z' := z/D$,

- $w'_1 := (w_1 \cos(\varepsilon) + w_2 \sin(\varepsilon))/v_g$,
- $w'_2 := (-w_1 \sin(\varepsilon) + w_2 \cos(\varepsilon))/v_g$,
- $w'_3 := w_3/v_g$,
- $q' := q/(\rho v_g^2)$,
- $t' := t v_g/D$.

Die neuen Funktionen w'_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) und q' sollen hierbei von den neuen Variablen t' , x' , y' und z' abhängig sein.

3.19 Annahme

Des Weiteren wird angenommen, dass die partiellen Ableitungen nach x' verschwinden, d. h. es gilt jeweils

$$\partial_{x'}(\cdot) = 0.$$

3.20 Bemerkung

- a) Die Einführung obiger Größen und Annahme 3.19 kann man wie folgt interpretieren: Da man nach den Experimenten von A. J. FALLER nach gleichgerichteten Störungen sucht, nimmt man an, dass die Ableitungen der Störgrößen in einer Richtung verschwinden, weswegen die horizontalen Koordinatenachsen entsprechend einem Winkel ε gedreht werden. Die Skalierungen der Größen mit D bzw. mit v_g dienen dazu, die Gleichungen dimensionslos zu machen (vgl. [18]).
- b) Die neu eingeführten Variablen (x', y', z') kann man als Koordinatentransformation mit einer Drehmatrix beschreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) & 0 \\ -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden wird Gleichung (3.12) mit den neu eingeführten Größen betrachtet. Umformen bzw. ableiten ergibt:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_g \cos(\varepsilon) w'_1 - v_g \sin(\varepsilon) w'_2, \\ w_2 &= v_g \sin(\varepsilon) w'_1 + v_g \cos(\varepsilon) w'_2, \\ w_3 &= v_g w'_3, \\ q &= \rho v_g^2 q', \\ \partial_x x' &= \cos(\varepsilon)/D, \\ \partial_y x' &= \sin(\varepsilon)/D, \\ \partial_x y' &= -\sin(\varepsilon)/D, \\ \partial_y y' &= \cos(\varepsilon)/D, \\ \partial_z z' &= 1/D, \\ \partial_t t' &= v_g/D. \end{aligned}$$

Für die weiteren Umformungen ist es hilfreich, die Störungsgleichung (3.12) in ihren einzelnen Komponenten zu betrachten.

Erste Komponente:

$$\begin{aligned} \partial_t w_1 + (\bar{v}_1 \partial_x w_1 + \bar{v}_2 \partial_y w_1 + \bar{v}_3 \partial_z w_1) + (w_1 \partial_x \bar{v}_1 + w_2 \partial_y \bar{v}_1 + w_3 \partial_z \bar{v}_1) \\ + \partial_x \left(\frac{q}{\rho} \right) - 2\Omega w_2 = \nu \Delta w_1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

zweite Komponente:

$$\begin{aligned} \partial_t w_2 + (\bar{v}_1 \partial_x w_2 + \bar{v}_2 \partial_y w_2 + \bar{v}_3 \partial_z w_2) + (w_1 \partial_x \bar{v}_2 + w_2 \partial_y \bar{v}_2 + w_3 \partial_z \bar{v}_2) \\ + \partial_y \left(\frac{q}{\rho} \right) + 2\Omega w_1 = \nu \Delta w_2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

dritte Komponente:

$$\begin{aligned} \partial_t w_3 + (\bar{v}_1 \partial_x w_3 + \bar{v}_2 \partial_y w_3 + \bar{v}_3 \partial_z w_3) + (w_1 \partial_x \bar{v}_3 + w_2 \partial_y \bar{v}_3 + w_3 \partial_z \bar{v}_3) \\ + \partial_z \left(\frac{q}{\rho} \right) = \nu \Delta w_3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit dem analogen Vorgehen aus dem Kapitel über Koordinatentransformation und unter Beachtung von $w_1 = w_1(w'_1, w'_2)$ mit $w'_i = w'_i(t', x', y', z') = w'_i(t(t), x(x, y), y(x, y), z'(z))$, $i \in \{1, 2\}$, (analog für w_2, w_3 und q) ist (3.14) damit äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \partial_{t'} w_1 \partial_{t'} + \bar{v}_1 (\partial_{x'} w_1 \partial_{x'} + \partial_{y'} w_1 \partial_{y'}) + \bar{v}_2 (\partial_{x'} w_1 \partial_{y'} + \partial_{y'} w_1 \partial_{y'}) + w_3 \partial_{z'} \bar{v}_1 \partial_{z'} \\ + \frac{1}{\rho} (\partial_{x'} q \partial_{x'} + \partial_{y'} q \partial_{y'}) - 2\Omega w_2 \\ = \nu \left[\partial_{x'^2}^2 w_1 ((\partial_{x'} x')^2 + (\partial_{y'} x')^2) + \partial_{y'^2}^2 w_1 ((\partial_{x'} y')^2 + (\partial_{y'} y')^2) \right. \\ \left. + 2\partial_{x' y'}^2 w_1 (\partial_{x'} x' \partial_{y'} y' + \partial_{y'} x' \partial_{x'} y') + \partial_{z'^2}^2 w_1 (\partial_{z'} z')^2 \right], \\ \iff \\ \frac{v_g^2 \cos(\varepsilon)}{D} \partial_{t'} w'_1 - \frac{v_g^2 \sin(\varepsilon)}{D} \partial_{t'} w'_2 + \bar{v}_1 \left(\frac{v_g \cos^2(\varepsilon)}{D} \partial_{x'} w'_1 - \frac{v_g \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon)}{D} \partial_{x'} w'_2 \right. \\ \left. - \frac{v_g \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon)}{D} \partial_{y'} w'_1 + \frac{v_g \sin^2(\varepsilon)}{D} \partial_{y'} w'_2 \right) + \bar{v}_2 \left(\frac{v_g \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon)}{D} \partial_{x'} w'_1 \right. \\ \left. - \frac{v_g \sin^2(\varepsilon)}{D} \partial_{x'} w'_2 + \frac{v_g \cos^2(\varepsilon)}{D} \partial_{y'} w'_1 - \frac{v_g \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon)}{D} \partial_{y'} w'_2 \right) + v_g w'_3 \left(\frac{1}{D} \partial_{z'} \bar{v}_1 \right) \\ + \frac{1}{\rho} \left(\rho v_g^2 \frac{\cos(\varepsilon)}{D} \partial_{x'} q' - \rho v_g^2 \frac{\sin(\varepsilon)}{D} \partial_{y'} q' \right) - 2\Omega (v_g \sin(\varepsilon) w'_1 + v_g \cos(\varepsilon) w'_2) \\ = \nu \left[\frac{1}{D^2} (v_g \cos(\varepsilon) \partial_{x'^2}^2 w'_1 - v_g \sin(\varepsilon) \partial_{x'^2}^2 w'_2) + \frac{1}{D^2} (v_g \cos(\varepsilon) \partial_{y'^2}^2 w'_1 \right. \\ \left. - v_g \sin(\varepsilon) \partial_{y'^2}^2 w'_2) + \frac{1}{D^2} (v_g \cos(\varepsilon) \partial_{z'^2}^2 w'_1 - v_g \sin(\varepsilon) \partial_{z'^2}^2 w'_2) \right], \\ \xleftrightarrow{\partial_{x'}(\cdot)=0} \\ \frac{D v_g}{\nu} \left[\cos(\varepsilon) \partial_{t'} w'_1 - \sin(\varepsilon) \partial_{t'} w'_2 + \frac{\bar{v}_1}{v_g} (-\cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon) \partial_{y'} w'_1 + \sin^2(\varepsilon) \partial_{y'} w'_2) \right. \\ \left. + \frac{\bar{v}_2}{v_g} (\cos^2(\varepsilon) \partial_{y'} w'_1 - \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) \partial_{y'} w'_2) + \frac{w'_3}{v_g} \partial_{z'} \bar{v}_1 - \sin(\varepsilon) \partial_{y'} q' \right] \\ - 2 (\sin(\varepsilon) w'_1 + \cos(\varepsilon) w'_2) \\ = \cos(\varepsilon) \partial_{y'^2}^2 w'_1 - \sin(\varepsilon) \partial_{y'^2}^2 w'_2 + \cos(\varepsilon) \partial_{z'^2}^2 w'_1 - \sin(\varepsilon) \partial_{z'^2}^2 w'_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.21 Definition

Der in obiger Rechnung auftauchende Größe $\frac{D v_g}{\nu}$ liegt folgende Definition zugrunde:

$$R := \frac{v_g D}{\nu}.$$

R ist die sogenannte **REYNOLDSZahl**.

Eine analoge Rechnung wie eben zeigt, dass die zweite Komponente (3.15) äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}
 R \left[\sin(\varepsilon) \partial_{t'} w'_1 + \cos(\varepsilon) \partial_{t'} w'_2 + \frac{\bar{v}_1}{v_g} (-\sin^2(\varepsilon) \partial_{y'} w'_1 - \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon) \partial_{y'} w'_2) \right. \\
 \left. + \frac{\bar{v}_2}{v_g} (\sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) \partial_{y'} w'_1 + \cos^2(\varepsilon) \partial_{y'} w'_2) + \frac{w'_3}{v_g} \partial_{z'} \bar{v}_2 + \cos(\varepsilon) \partial_{y'} q' \right] \\
 + 2 (\cos(\varepsilon) w'_1 - \sin(\varepsilon) w'_2) \\
 = \sin(\varepsilon) \partial_{y'^2}^2 w'_1 + \cos(\varepsilon) \partial_{y'^2}^2 w'_2 + \sin(\varepsilon) \partial_{z'^2}^2 w'_1 + \cos(\varepsilon) \partial_{z'^2}^2 w'_2.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Multipliziert man nun (3.17) mit $\cos(\varepsilon)$ und (3.18) mit $\sin(\varepsilon)$ und addiert das Ergebnis, erhält man folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned}
 R \left[\partial_{t'} w'_1 + \frac{\bar{v}_1}{v_g} (-\sin(\varepsilon) \partial_{y'} w'_1) + \frac{\bar{v}_2}{v_g} \cos(\varepsilon) \partial_{y'} w'_1 + \frac{w'_3}{v_g} (\cos(\varepsilon) \partial_{z'} \bar{v}_1 \right. \\
 \left. + \sin(\varepsilon) \partial_{z'} \bar{v}_2) \right] - 2w'_2 = \partial_{y'^2}^2 w'_1 + \partial_{z'^2}^2 w'_1.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.22 Definition

Für die EKMAN-Spirale $\bar{V} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)^t$ definiert man folgende dimensionslose Komponenten:

$$\begin{aligned}
 U_1 &:= \frac{\cos(\varepsilon) \bar{v}_1 + \sin(\varepsilon) \bar{v}_2}{v_g}, \\
 U_2 &:= \frac{-\sin(\varepsilon) \bar{v}_1 + \cos(\varepsilon) \bar{v}_2}{v_g}.
 \end{aligned}$$

3.23 Bemerkung

Mit den Komponenten

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_1 &= v_g (1 - \exp(-z') \cos(z')), \\
 \bar{v}_2 &= v_g \exp(-z') \sin(z')
 \end{aligned}$$

der EKMAN-Spirale bekommt man für U_1 und U_2

$$\begin{aligned}
 U_1(z') &= \cos(\varepsilon) - \exp(-z') \cos(z' + \varepsilon), \\
 U_2(z') &= -\sin(\varepsilon) + \exp(-z') \sin(z' + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Damit ist (3.19) äquivalent zu folgender Gleichheit:

$$R \left[\partial_{t'} w'_1 + U_2 \partial_{y'} w'_1 + w'_3 \frac{dU_1}{dz'} \right] - 2w'_2 = \partial_{y'^2}^2 w'_1 + \partial_{z'^2}^2 w'_1. \tag{3.20}$$

In gleicher Weise wie eben erhält man bei Multiplikation von (3.18) mit $\cos(\varepsilon)$ und (3.17) mit $\sin(\varepsilon)$ und anschließender Subtraktion

$$R \left[\partial_{t'} w'_2 + U_2 \partial_{y'} w'_2 + w'_3 \frac{dU_2}{dz'} + \partial_{y'} q' \right] + 2w'_1 = \partial_{y'^2}^2 w'_2 + \partial_{z'^2}^2 w'_2. \tag{3.21}$$

Für die dritte Komponente (3.16) erhält man direkt

$$R [\partial_{t'} w'_3 + U_2 \partial_{y'} w'_3 + \partial_{z'} q'] = \partial_{y'^2}^2 w'_3 + \partial_{z'^2}^2 w'_3. \tag{3.22}$$

Die Bedingung $\operatorname{div} W = 0$ aus (3.12) ergibt durch einfache Umformungen

$$\partial_{y'} w'_2 + \partial_{z'} w'_3 = 0. \tag{3.23}$$

Die Randbedingungen (3.13) bleiben mit den eingeführten Störgrößen praktisch unverändert:

$$\begin{cases} w'_1 = w'_2 = w'_3 = 0, & \text{für } z' = 0, \\ w'_3 = 0, & \text{für } z' = \infty, \\ \partial_{z'} w'_1 = \partial_{z'} w'_2 = \partial_{z'} w'_3 = 0, & \text{für } z' = \infty. \end{cases} \quad (3.24)$$

Nun soll die Druckfunktion q' aus obigen Gleichungen eliminiert werden. Dies geschieht mit „Überkreuzableiten“ von (3.21) und (3.22), d. h. man nimmt die partielle Ableitung nach y' von (3.22) und subtrahiert davon die partielle Ableitung nach z' von (3.21).

Linke Seite:

$$\begin{aligned} & \partial_{y'} \left\{ R \left[\partial_{t'} w'_3 + U_2 \partial_{y'} w'_3 + \partial_{z'} q' \right] \right\} - \partial_{z'} \left\{ R \left[\partial_{t'} w'_2 + U_2 \partial_{y'} w'_2 + w'_3 \frac{dU_2}{dz'} + \partial_{y'} q' \right] + 2w'_1 \right\} \\ &= R \left[\partial_{y't'}^2 w'_3 - \partial_{z't'}^2 w'_2 + \partial_{y'} (U_2 \partial_{y'} w'_3) - \partial_{z'} (U_2 \partial_{y'} w'_2) - \partial_{z'} \left(w'_3 \frac{dU_2}{dz'} \right) \right] - 2\partial_{z'} w'_1 \\ &= R \left[\partial_{y't'}^2 w'_3 - \partial_{t'z'}^2 w'_2 + U_2 \left(\partial_{y'^2}^2 w'_3 - \partial_{y'z'}^2 w'_2 \right) - w'_3 \frac{d^2 U_2}{dz'^2} - \frac{dU_2}{dz'} \underbrace{(\partial_{y'} w'_2 + \partial_{z'} w'_3)}_{=0 \text{ nach (3.23)}} \right] - 2\partial_{z'} w'_1. \end{aligned}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\xi := \partial_{y'} w'_3 - \partial_{z'} w'_2$$

erhält man

$$\begin{aligned} & \partial_{y'} \left\{ R \left[\partial_{t'} w'_3 + U_2 \partial_{y'} w'_3 + \partial_{z'} q' \right] \right\} - \partial_{z'} \left\{ R \left[\partial_{t'} w'_2 + U_2 \partial_{y'} w'_2 + w'_3 \frac{dU_2}{dz'} + \partial_{y'} q' \right] + 2w'_1 \right\} \\ &= R \left[\partial_{t'} \xi + U_2 \partial_{y'} \xi - w'_3 \frac{d^2 U_2}{dz'^2} \right] - 2\partial_{z'} w'_1. \end{aligned}$$

Zur rechten Seite:

$$\begin{aligned} & \partial_{y'} \left\{ \partial_{y'^2}^2 w'_3 + \partial_{z'^2}^2 w'_3 \right\} - \partial_{z'} \left\{ \partial_{y'^2}^2 w'_2 + \partial_{z'^2}^2 w'_2 \right\} = \partial_{y'^3}^3 w'_3 + \partial_{y'z'^2}^3 w'_3 - \partial_{z'y'^2}^3 w'_2 - \partial_{z'^3}^3 w'_2 \\ &= \partial_{y'^2}^2 \xi + \partial_{z'^2}^2 \xi. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so nach dem „Überkreuzableiten“ folgende Gleichung:

$$R \left[\partial_{t'} \xi + U_2 \partial_{y'} \xi - w'_3 \frac{d^2 U_2}{dz'^2} \right] - 2\partial_{z'} w'_1 = \partial_{y'^2}^2 \xi + \partial_{z'^2}^2 \xi. \quad (3.25)$$

3.24 Bemerkung

Die Gleichung (3.25) ist in der Meteorologie unter dem Namen **Vorticitygleichung** bekannt. Diese beschreibt die zeitliche Änderung der Vorticity (Wirbelstärke) einer zwei- oder dreidimensionalen Strömung, vgl. [6], S. 149 ff.

3.25 Definition

Gegeben sei ein zweidimensionales Strömungssfeld $U(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^t$. Dann heißt $\Psi(x, y) = (0, \psi(x, y))^t$ **Stromfunktion**, falls folgende Bedingungen gelten:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

3.26 Bemerkung

Aus dieser Definition sieht man, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\nabla \cdot U = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Die Inkompressibilitätsbedingung (3.23) motiviert daher die Einführung einer Stromfunktion $\Psi = (0, \psi)^t$ mit der Bedingung

$$w'_2 = -\partial_{z'}\psi \text{ und } w'_3 = \partial_{y'}\psi.$$

3.27 Annahme

Wie bereits in Bemerkung 3.18 b) erwähnt, ist unser Ziel das Stabilitätsproblem in eine gewöhnliche Differentialgleichung überzuführen. Dafür wird angenommen, dass die Stromfunktion ψ und die Komponente w'_1 folgenden Bedingungen genügen (vgl. [18]):

$$\begin{aligned}\psi(t', y', z') &= \varphi(z')e^{i\alpha(y'-ct')}, \\ w'_1(t', y', z') &= \mu(z')e^{i\alpha(y'-ct')},\end{aligned}$$

mit den einzelnen Größen

- φ und μ : Phasen- und Amplitudenfunktionen,
- $\alpha > 0$: Wellenzahl,
- $c = c_r + ic_i$: komplexe Phasengeschwindigkeit.

Dies bedeutet, dass ψ und w'_1 periodisch von t' und y' abhängen und die Phasen- und Amplitudenfunktionen φ und μ variabel in z' sind. Man spricht in diesem Fall von einem **Wellenansatz**.

Kommen wir nun zu den abschließenden Umformungen. Mit der Vorticitygleichung (3.25) und der Beziehung $\xi = \partial_{y'}w'_3 - \partial_{z'}w'_2 = \partial_{y'^2}\psi + \partial_{z'^2}\psi$ erhält man folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}R \left[\partial_{t'}\xi + U_2\partial_{y'}\xi - w'_3 \frac{d^2U_2}{dz'^2} \right] - 2\partial_{z'}w'_1 &= \partial_{y'^2}\xi + \partial_{z'^2}\xi, \\ \iff \\ R \left[\partial_{t'} \left(\partial_{y'^2}\psi + \partial_{z'^2}\psi \right) + U_2\partial_{y'} \left(\partial_{y'^2}\psi + \partial_{z'^2}\psi \right) - \partial_{y'}\psi \frac{d^2U_2}{dz'^2} \right] - 2\partial_{z'}w'_1 \\ &= \partial_{y'^2} \left\{ \partial_{y'^2}\psi + \partial_{z'^2}\psi \right\} + \partial_{z'^2} \left\{ \partial_{y'^2}\psi + \partial_{z'^2}\psi \right\}, \\ \iff \\ R \left[i\alpha^3 c\varphi e^{i\alpha(y'-ct')} - i\alpha c\ddot{\varphi} e^{i\alpha(y'-ct')} + U_2 \left(-i\alpha^3 \varphi e^{i\alpha(y'-ct')} + i\alpha\ddot{\varphi} e^{i\alpha(y'-ct')} \right) \right. \\ &\quad \left. - i\alpha\ddot{U}_2\varphi e^{i\alpha(y'-ct')} \right] - 2i\mu e^{i\alpha(y'-ct')} \\ &= \alpha^4 \varphi e^{i\alpha(y'-ct')} - 2\alpha^2 \ddot{\varphi} e^{i\alpha(y'-ct')} + \ddot{\varphi} e^{i\alpha(y'-ct')}, \\ \iff \\ i\alpha R \left[(U_2 - c) (\ddot{\varphi} - \alpha^2\varphi) - \ddot{U}_2\varphi \right] - 2i\mu &= \alpha^4\varphi - 2\alpha^2\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

3.28 Bemerkung

In der letzten Rechnung wurde für die Ableitung $\frac{d}{dz'}$ der Punkt-Operator eingeführt, d. h. es gilt z. B.

$$\frac{d}{dz'}\varphi = \dot{\varphi}, \quad \frac{d^2}{dz'^2}\varphi = \ddot{\varphi}, \quad \text{etc.}$$

Für die Gleichung (3.20) gelten folgende Umformungen:

$$\begin{aligned}
 R \left[\partial_{t'} w'_1 + U_2 \partial_{y'} w'_1 + w'_3 \frac{dU_1}{dz'} \right] - 2w'_2 &= \partial_{y'^2} w'_1 + \partial_{z'^2} w'_1, \\
 &\iff \\
 R \left[-i\alpha c \mu e^{i\alpha(y'-ct')} + i\alpha U_2 \mu e^{i\alpha(y'-ct')} + i\alpha \dot{U}_1 \varphi e^{i\alpha(y'-ct')} \right] + 2\dot{\varphi} e^{i\alpha(y'-ct')} \\
 &= -\alpha^2 \mu e^{i\alpha(y'-ct')} + \ddot{\mu} e^{i\alpha(y'-ct')}, \\
 &\iff \\
 i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu e^{i\alpha(y'-ct')} + \dot{U}_1 \varphi e^{i\alpha(y'-ct')} \right] + 2\dot{\varphi} e^{i\alpha(y'-ct')} &= -\alpha^2 \mu e^{i\alpha(y'-ct')} + \ddot{\mu} e^{i\alpha(y'-ct')}, \\
 &\iff \\
 i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu + \dot{U}_1 \varphi \right] + 2\dot{\varphi} &= -\alpha^2 \mu + \ddot{\mu}.
 \end{aligned}$$

Schließlich werden noch die Randbedingungen (3.24) in den Größen φ und μ dargestellt. Für $z' = 0$ gilt z. B. mit $w'_3 = \partial_{y'} \psi = i\alpha \varphi(z') e^{i\alpha(y'-ct')}$:

$$\varphi(0) = \frac{w'_3|_{z'=0}}{i\alpha e^{i\alpha(y'-ct')}} = 0.$$

Die restlichen Umformungen der Randbedingungen laufen analog.

Insgesamt haben wir somit das Stabilitätsproblem (3.12) und (3.13) mit den neu eingeführten Größen und den Annahmen 3.19 und 3.27 in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für φ und μ umgewandelt, das folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} - 2\alpha^2 \dot{\varphi} + \alpha^4 \varphi - i\alpha R \left[(U_2 - c) (\dot{\varphi} - \alpha^2 \varphi) - \ddot{U}_2 \varphi \right] + 2\dot{\mu} = 0, \\ \ddot{\mu} - \alpha^2 \mu - i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu + \dot{U}_1 \varphi \right] - 2\dot{\varphi} = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{cases} \varphi = \dot{\varphi} = \mu = 0, \text{ für } z' = 0, \\ \varphi = \dot{\varphi} = \dot{\mu} = 0, \text{ für } z' = \infty. \end{cases} \quad (3.27)$$

Setzt man nun $\lambda := i\alpha R c$, $\mathbf{v} := (\varphi, \mu)^t$ und führt für die Ableitung die Notation $D\varphi := \dot{\varphi}$, $D^2\varphi := \ddot{\varphi}$ etc. ein, dann lässt sich (3.26) als verallgemeinertes Eigenwertproblem der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{v}$$

auffassen, wobei \mathbf{A} und \mathbf{B} gewöhnliche Differentialoperatoren enthalten. Im Detail ist (3.26) somit äquivalent zu (vgl. [10]):

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cc} (-D^2 + \alpha^2)^2 + i\alpha R U_2 (-D^2 + \alpha^2) + i\alpha R \ddot{U}_2 & 2D \\ 2D + i\alpha R \dot{U}_1 & (-D^2 + \alpha^2) + i\alpha R U_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \mu \end{pmatrix} &= \\
 &= \lambda \begin{pmatrix} -D^2 + \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.29 Definition

Das Problem (3.28) zusammen mit den Randbedingungen (3.27) definiert das sogenannte EKMAN-Randschichtproblem (oder kurz: EKMAN-Problem) mit dem komplexen Parameter λ und den skalaren Funktionen φ und μ . Dabei bezeichnen φ und μ die zum Eigenwert λ gehörigen Eigenfunktionen.

Der Zusammenhang zwischen dem EKMAN-Problem und der Stabilitätsfrage der EKMAN-Spirale (\bar{V}, \bar{p}) ist nun folgender: In unseren Umformungen für das EKMAN-Problem (3.28) konnten wir mit den neu eingeführten Störgrößen die Druckfunktion q' aus dem System eliminieren und die Größen w'_2 und w'_3 durch die Stromfunktion ψ ausdrücken. Außerdem wurde die Annahme gemacht, dass ψ und w'_1 folgende Darstellung haben:

$$\begin{aligned}\psi(t', y', z') &= \varphi(z') e^{i\alpha(y'-ct')}, \\ w'_1(t', y', z') &= \mu(z') e^{i\alpha(y'-ct')}.\end{aligned}$$

Das bedeutet also, wir interessieren uns bei der zeitlichen Entwicklung für den exponentiellen Term $e^{i\alpha(y'-ct')}$. Dieser ist die Grundlage bei der linearen Stabilitätsanalyse der EKMAN-Spirale. Umformen dieses Terms ergibt mit $\lambda = i\alpha Rc$

$$e^{i\alpha(y'-ct')} = e^{i\alpha y'} e^{-i\alpha ct'} = e^{i\alpha y'} e^{-\frac{\lambda}{R} t'} = e^{i\alpha y'} e^{-\frac{\text{Im}\lambda}{R} t'} e^{-\frac{\text{Re}\lambda}{R} t'}.$$

Entscheidend für das Wachstum der Störung ist der letzte Term $e^{-\frac{\text{Re}\lambda}{R} t'}$. In Bezug auf Definition 3.9 haben wir somit folgende Charakterisierung der Instabilität:

Die EKMAN-Spirale (\bar{V}, \bar{p}) ist linear instabil, falls $\text{Re}\lambda < 0$ für mindestens ein Eigenwert λ .

3.30 Bemerkung

Da in dieser Arbeit das EKMAN-Problem numerisch betrachtet werden soll, werden (3.26) bzw. (3.28) und (3.27) – wie wir später sehen werden – auf einem diskreten Gitter betrachtet. Dadurch entsteht ein großes System algebraischer Gleichungen, welches man ebenso als ein verallgemeinertes Eigenwertproblem auffassen kann. Die Charakterisierung für lineare Instabilität ist dann im diskreten Fall analog zu oben.

3.5 Die kritische Reynoldszahl

Nach Definition ist das EKMAN-Problem (3.28) abhängig von den drei Parametern α , R und ε . Diese Abhängigkeit gilt damit auch für die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenfunktionen, d. h.

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda(\alpha, R, \varepsilon), \\ \varphi &= \varphi(\alpha, R, \varepsilon), \\ \mu &= \mu(\alpha, R, \varepsilon).\end{aligned}$$

Dabei wird nach D. K. LILLY erwartet, dass in einigen Bereichen des α - R - ε -Volumens Eigenwerte λ existieren mit $\text{Re}\lambda < 0$ (vgl. [18]). Das bedeutet, dass in diesem Fall lineare Instabilität der EKMAN-Spirale vorliegen würde.

Speziell ist man nun daran interessiert, eine Fläche im α - R - ε -Volumen zu finden, bei welcher $\text{Re}\lambda = 0$ gilt, wobei der Realteil $\text{Re}\lambda$ minimal gewählt ist. Der Punkt auf dieser Fläche, der den kleinsten Wert R besitzt, charakterisiert die sogenannte **kritische** REYNOLDSzahl und definiert das zugehörige „kritische Parametertupel“ $(\alpha_{\text{krit}}, R_{\text{krit}}, \varepsilon_{\text{krit}})$. Ziel in dieser Arbeit ist es unter anderem, dieses Tupel mit numerischen Mitteln zu bestimmen.

Ein Differenzenverfahren für das Ekman-Randschichtproblem

Dieses Kapitel befasst sich mit der Herleitung eines Differenzenverfahrens für das EKMAN-Randschichtproblem. Zunächst wird dazu das Konzept der Differenzenformeln kurz erläutert. Grundlegendes Prinzip hierfür ist der Satz von B. TAYLOR, welcher hinreichend gute Approximationen von Ableitungen ermöglicht. Anschließend wird ein Schema vorgestellt, mit welchem eine Formel entwickelt werden kann, Ableitungen beliebiger Genauigkeit zu approximieren. Die nächsten beiden Abschnitte widmen sich der Entwicklung des besagten Differenzenverfahrens. Die grundlegende Idee basiert dabei auf D. K. LILLY (vgl. [18], S. 491 f.): Mithilfe der Einführung eines numerischen Gitters werden die im EKMAN-Randschichtproblem auftauchenden Ableitungen durch entsprechende Differenzenformeln ersetzt. Dieser Vorgang wird schließlich so weit durchgeführt, bis ein Differenzenverfahren der Ordnung 4 entsteht.

4.1 Differenzenformeln

Für die Herleitung von Differenzenformeln für das EKMAN-Problem betrachten wir im Folgenden eine reellwertige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

4.1 Beispiel

Für eine Funktion f kann man deren erste Ableitung an einer Stelle x durch die sogenannte Vorwärts-Differenzenformel ersetzen:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

wobei $h > 0$. Ebenso kann man dies für die zweite Ableitung tun:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Die Formel auf der rechten Seite ist unter dem Namen zentraler Differenzenquotient für die zweite Ableitung bekannt.

Um der Frage nachzugehen, wie gut obige Approximationen sind bzw. was für ein Fehler dabei entsteht, verwendet man den folgenden auf B. TAYLOR basierenden, grundlegenden

4.2 Satz (TAYLORSche Formel)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und $a, x \in I$. Dann existiert ein ξ zwischen a und x , so dass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

das Restglied bezeichnet.

Beweis. Siehe [8], Kapitel 22. □

4.3 Bemerkung

a) Für $h := x - a$ ist folgende Formulierung äquivalent zur TAYLORSchen Formel:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

für ein θ mit $0 < |\theta| < 1$.

b) Aus der TAYLORSchen Formel sieht man, dass für die erste Ableitung folgender Zusammenhang gilt:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{1}{2} h f''(\xi), \text{ für ein } \xi \in (x, x+h).$$

Der Fehler, der bei dieser Approximation der ersten Ableitung entsteht, ist also

$$O(h) := \frac{1}{2} h f''(\xi) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Dieser Fehler wird als **Truncation Error** bezeichnet und ist in diesem Fall von erster Ordnung in h . Er spiegelt die Genauigkeit der Approximation wider.

c) Mittels TAYLOREntwicklung kann man Näherungen für Ableitungen verschiedener Grade beliebiger Ordnung bekommen. Das bedeutet, dass je nach Entwicklung für ein $p \in \mathbb{N}$ ein Fehler p -ter Ordnung in h möglich ist. Wir schreiben dafür dann $O(h^p)$.

Zunächst sollen nun kurz die bekannten zentralen Differenzenformeln zweiter Ordnung hergeleitet werden, die für das EKMAN-Problem benötigt werden. Vorausgesetzt sei dazu, dass die Funktion f jeweils hinreichend oft differenzierbar ist. Außerdem werden dabei unterschiedliche Hilfspunkte in den Entwicklungen benötigt. Im Folgenden wird deswegen die TAYLOR-Formel

$$f(x+\nu) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \nu^k + O(h^{n+1})$$

für unterschiedliche ν gebraucht. In unserer Anwendung haben wir

$$\nu = \pm h/2, \pm h, \pm 3/2h, \pm 2h \text{ etc.}$$

Formel für $f(x)$:

Nehme $f(x+h/2) + f(x-h/2)$ und erhalte

$$f(x) = \frac{f(x+h/2) + f(x-h/2)}{2} - \frac{1}{8} h^2 f''(x) + O(h^4).$$

Formel für $f'(x)$:

Nehme $f(x+h/2) - f(x-h/2)$ und erhalte

$$f'(x) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h} - \frac{1}{24} h^2 f'''(x) + O(h^4).$$

Formel für $f''(x)$:

Nehme $f(x+h) + f(x-h)$ und erhalte

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(x) + O(h^4).$$

Formel für $f^{(4)}(x)$:

Nehme $-4f(x+h) - 4f(x-h) + f(x+2h) + f(x-2h)$ und erhalte

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{h^4} [f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)] - \frac{1}{6}h^2 f^{(6)}(x) + O(h^4).$$

Für das weitere Vorgehen führen wir nun in Anlehnung an die eben hergeleiteten Differenzenformeln eine abkürzende Operatorschreibweise ein.

4.4 Definition

Für eine Funktion f und $h > 0$ definiere

$$\delta_x f := \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h},$$

$$\overline{f}^x := \frac{f(x+h/2) + f(x-h/2)}{2},$$

sowie $\delta_{xx} f := \delta_x(\delta_x f)$ und $\delta_x \overline{f}^x := \delta_x \overline{f}^x$.

4.5 Lemma

Für eine Funktion f gilt

$$\delta_{xx} f = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

$$\delta_{xxx} f = \frac{1}{h^3} [f(x+3/2h) - 3f(x+h/2) + 3f(x-h/2) - f(x-3/2h)],$$

$$\delta_{xxxx} f = \frac{1}{h^4} [f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)],$$

$$\delta_{xxxxx} f = \frac{1}{h^5} [f(x+3h) - 6f(x+2h) + 15f(x+h) - 20f(x) + 15f(x-h) - 6f(x-2h) + f(x-3h)],$$

$$\delta_x \overline{f}^x = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

$$\delta_{xx} \overline{f}^x = \frac{1}{2h^2} [f(x+3/2h) - f(x+h/2) - f(x-h/2) + f(x-3/2h)].$$

Beweis. Iteriertes Anwenden der Definition 4.4. □

Damit macht Definition 4.4 auch für die anderen, oben hergeleiteten Formeln Sinn. Diese Formeln werden wir später bei der numerischen Behandlung des EKMAN-Problems anwenden. Das bedeutet z. B., dass wir $f'(x)$ durch $\delta_x f$ ersetzen werden.

4.6 Bemerkung

Für die in Lemma 4.5 neu auftauchenden Differenzenformeln haben wir ebenso eine Approximation zweiter Ordnung, d. h. es gilt

$$\delta_{xxx} f = f'''(x) + O(h^2),$$

$$\delta_{xxxxx} f = f^{(5)}(x) + O(h^2),$$

$$\delta_x \overline{f}^x = f'(x) + O(h^2),$$

$$\delta_{xx} \overline{f}^x = f''(x) + O(h^2).$$

Zum Schluss dieses Abschnittes soll ein Prinzip vorgestellt werden, mit dem man für eine Ableitung gewünschten Grades eine Formel mit Genauigkeit beliebiger Ordnung berechnen kann. Grundlage dafür ist wieder die TAYLOR-Formel. Insbesondere soll es darum gehen, welche Hilfspunkte für eine Approximationsformel verwendet werden können. Dies ist vor allem dann von Interesse, wenn man Ableitungen durch nicht-symmetrische Formeln approximieren möchte.

Schema für die Berechnung von $f^{(n)}(x)$ mit Genauigkeit p -ter Ordnung:

- die Ableitung $f^{(n)}(x)$ tritt in der TAYLORSchen Formel mit dem Faktor h^n auf
- deswegen dürfen für Genauigkeit p -ter Ordnung nur Terme mit h^{n+p} und höher verbleiben
- kombiniere deshalb die Terme mit $h^0, h^1, \dots, h^{n+p-1}$ mithilfe der TAYLORSchen Formel so, dass nur der Term $f^{(n)}(x)h^n$ übrig bleibt
- man hat also $n + p$ Bedingungen und benötigt dafür $n + p$ Hilfspunkte
- man erhält dadurch ein lineares Gleichungssystem mit $n + p$ Unbekannten

4.7 Beispiel

Die dritte Ableitung $f'''(x)$ soll mit Genauigkeit zweiter Ordnung berechnet werden. Dazu wird angenommen, dass f fünfmal stetig differenzierbar ist. Für $h > 0$ nehmen wir die fünf Hilfspunkte $x, x + h, x + 2h, x + 3h$ und $x + 4h$ und brauchen deswegen folgende Entwicklungen um x :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x), \\ f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x) + O(h^5), \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x) + O(h^5), \\ f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \frac{9}{2}h^2f''(x) + \frac{9}{2}h^3f'''(x) + \frac{27}{8}h^4f^{(4)}(x) + O(h^5), \\ f(x+4h) &= f(x) + 4hf'(x) + 8h^2f''(x) + \frac{32}{3}h^3f'''(x) + \frac{32}{3}h^4f^{(4)}(x) + O(h^5). \end{aligned}$$

Gesucht ist nun eine Linearkombination, so dass folgende Gleichheit erfüllt ist:

$$Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h) + Df(x+3h) + Ef(x+4h) = h^3f'''(x) + O(h^5).$$

Mittels der TAYLOR-Entwicklungen führt dies auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B + C + D + E &= 0, \\ B + 2C + 3D + 4E &= 0, \\ \frac{1}{2}B + 2C + \frac{9}{2}D + 8E &= 0, \\ \frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C + \frac{9}{2}D + \frac{32}{3}E &= 1, \\ \frac{1}{24}B + \frac{2}{3}C + \frac{27}{8}D + \frac{32}{3}E &= 0. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich $A = -\frac{5}{2}$, $B = 9$, $C = -12$, $D = 7$, $E = -\frac{3}{2}$ und wir erhalten für die dritte Ableitung

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3} \left[-\frac{3}{2}f(x+4h) + 7f(x+3h) - 12f(x+2h) + 9f(x+h) - \frac{5}{2}f(x) \right] + O(h^2).$$

Im Folgenden werden für $h > 0$ sämtliche, nicht-symmetrische Differenzenformeln der Ordnung 2 aufgelistet, die später für das EKMAN-Problem verwendet werden. Diese können ebenso nach obigem Schema hergeleitet werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktion f jedes Mal hinreichend oft differenzierbar ist.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{h^2} [-f(x \pm 3h) + 4f(x \pm 2h) - 5f(x \pm h) + 2f(x)] + O(h^2), \\ f'''(x) &= \frac{1}{h^3} \left[\mp \frac{3}{2}f(x \pm 4h) \pm 7f(x \pm 3h) \mp 12f(x \pm 2h) \pm 9f(x \pm h) \mp \frac{5}{2}f(x) \right] + O(h^2), \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{h^4} [-2f(x \pm 5h) + 11f(x \pm 4h) - 24f(x \pm 3h) + 26f(x \pm 2h) - 14f(x \pm h) + 3f(x)] \\ &\quad + O(h^2). \end{aligned}$$

4.8 Notation

Auch für die nicht-symmetrischen Formeln führen wir eine Kurzschreibweise ein:

$$\begin{aligned}\delta_{xx}^R f &:= \frac{1}{h^2} [-f(x+3h) + 4f(x+2h) - 5f(x+h) + 2f(x)], \\ \delta_{xxx}^R f &:= \frac{1}{h^3} \left[-\frac{3}{2}f(x+4h) + 7f(x+3h) - 12f(x+2h) + 9f(x+h) - \frac{5}{2}f(x) \right], \\ \delta_{xxxx}^R f &:= \frac{1}{h^4} [-2f(x+5h) + 11f(x+4h) - 24f(x+3h) + 26f(x+2h) - 14f(x+h) + 3f(x)].\end{aligned}$$

Dabei gibt das „R“ den Hinweis darauf, dass die entsprechenden Formeln auf Hilfspunkte zurückgreifen, welche rechts von x liegen. Die nach „links greifenden“ Formeln $\delta_{xx}^L f$, $\delta_{xxx}^L f$ und $\delta_{xxxx}^L f$ sind analog definiert.

4.2 Das Verfahren von D. K. Lilly

In diesem Abschnitt soll ein numerisches Differenzenverfahren für das Problem (3.26) bzw. (3.28) und (3.27) hergeleitet werden, das auf der Idee von D. K. LILLY basiert (vgl. [18], S. 491 f.). Für die zu ersetzenden Ableitungen verwenden wir die Formeln aus dem Abschnitt zuvor. Dazu nehmen wir an, dass hinreichend oft differenzierbare Lösungen φ und μ des EKMAN-Randschichtproblems existieren.

4.9 Bemerkung

- a) Da man numerisch nicht mit einem unendlichen Intervall rechnen kann, betrachten wir hier das EKMAN-Problem (3.26) bzw. (3.28) und (3.27) auf einem endlichen Intervall. Das bedeutet, wir nehmen für $z' = \infty$ einen festen Wert $a > 0$. Für die Randbedingungen ergibt sich somit

$$\begin{cases} \varphi = \dot{\varphi} = \mu = 0, & \text{für } z' = 0, \\ \varphi = \ddot{\varphi} = \dot{\mu} = 0, & \text{für } z' = a. \end{cases}$$

In den Anwendungen wird a einen konkreten Wert bekommen, z. B. $a = 50$.

- b) Der Übersicht halber werden wir in Zukunft für z' einfach nur noch z schreiben, wohlweisend, dass weiterhin damit die Störungsvariable z' gemeint ist.

Kommen wir also zur numerischen Behandlung unseres Problems. Wir unterteilen das Intervall $[0, a]$ für ein $N \in \mathbb{N}$ in $2N$ Teilintervalle und definieren dazu das Gitter

$$\Omega_h := \left\{ jh \mid j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, N-1, N - \frac{1}{2}, N \right\}$$

mit der dazugehörigen Schrittweite $h := \frac{a}{N}$.

Die Funktionen φ und μ werden für das Gitter Ω_h folgendermaßen betrachtet:

- φ ist definiert auf $z = 0, h, \dots, Nh$,
- μ ist definiert auf $z = \frac{1}{2}h, \frac{3}{2}h, \dots, (N - \frac{1}{2})h$.

4.10 Bemerkung

Das nächste Ziel ist jetzt, aus dem analytischen Eigenwertproblem $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}$ ein Problem der Form

$$\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$$

herzuleiten, wobei der Index h andeutet, dass es sich hierbei um das diskrete Problem handelt.

Für die Umformulierung des EKMAN-Problems mittels Differenzenformeln betrachten wir zunächst die erste Gleichung aus (3.26). Dort ersetzen wir die auftretenden Ableitungen von φ und μ durch die Operatoren aus Definition 4.4 bzw. Lemma 4.5 mit den entsprechenden Resttermen. Man erhält dadurch folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\varphi} - 2\alpha^2 \ddot{\varphi} + \alpha^4 \varphi - i\alpha R \left[(U_2 - c) (\ddot{\varphi} - \alpha^2 \varphi) - \ddot{U}_2 \varphi \right] + 2\dot{\mu} = 0, \\
 & \iff \\
 & (\delta_{zzzz} - 2\alpha^2 \delta_{zz} + \alpha^4) \varphi - i\alpha R \left[(U_2 - c) (\delta_{zz} - \alpha^2) \varphi - \ddot{U}_2 \varphi \right] + 2\delta_z \mu \\
 & = h^2 \left(\frac{1}{6} \varphi^{(6)} - \frac{\alpha^2}{6} \ddot{\varphi} - \frac{i\alpha R (U_2 - c)}{12} \ddot{\varphi} + \frac{1}{12} \ddot{\mu} \right) + O(h^4). \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung aus (3.26) erhält man analog

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\mu} - \alpha^2 \ddot{\mu} - i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu + \dot{U}_1 \varphi \right] - 2\dot{\varphi} = 0, \\
 & \iff \\
 & (\delta_{zz} - \alpha^2) \mu - i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu + \dot{U}_1 \overline{\varphi}^z \right] - 2\delta_z \varphi \\
 & = h^2 \left(-\frac{1}{12} \ddot{\varphi} - \frac{i\alpha R \dot{U}_1}{8} \overline{\varphi}^z + \frac{1}{12} \ddot{\mu} \right) + O(h^4). \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Um schließlich die Gleichungen nach D. K. LILLY zu erhalten, werden auf der rechten Seite von (4.1) und (4.2) in den h^2 -Klammern noch die Ableitungen durch die entsprechenden Formeln ersetzt, welche mit dem Faktor αR versehen sind.

Zunächst wird dabei Gleichung (4.1) betrachtet:

$$\begin{aligned}
 & (\delta_{zzzz} - 2\alpha^2 \delta_{zz} + \alpha^4) \varphi - i\alpha R \left[(U_2 - c) (\delta_{zz} - \alpha^2) \varphi - \ddot{U}_2 \varphi \right] + 2\delta_z \mu \\
 & = h^2 \left(\frac{1}{6} \varphi^{(6)} - \frac{\alpha^2}{6} \ddot{\varphi} - \frac{i\alpha R (U_2 - c)}{12} (\delta_{zzzz} \varphi + O(h^2)) + \frac{1}{12} \ddot{\mu} \right) + O(h^4), \\
 & \iff \\
 & (\delta_{zzzz} - 2\alpha^2 \delta_{zz} + \alpha^4) \varphi - i\alpha R \left[(U_2 - c) \left(-\frac{h^2}{12} \delta_{zzzz} + \delta_{zz} - \alpha^2 \right) \varphi - \ddot{U}_2 \varphi \right] + 2\delta_z \mu \\
 & = h^2 \left(\frac{1}{6} \varphi^{(6)} - \frac{\alpha^2}{6} \ddot{\varphi} + \frac{1}{12} \ddot{\mu} \right) + O(h^4). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Nun zur Gleichung (4.2):

$$\begin{aligned}
 & (\delta_{zz} - \alpha^2) \mu - i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu + \dot{U}_1 \overline{\varphi}^z \right] - 2\delta_z \varphi \\
 & = h^2 \left(-\frac{1}{12} \ddot{\varphi} - \frac{i\alpha R \dot{U}_1}{8} (\delta_{zz} \overline{\varphi}^z + O(h^2)) + \frac{1}{12} \ddot{\mu} \right) + O(h^4), \\
 & \iff \\
 & (\delta_{zz} - \alpha^2) \mu - i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu + \dot{U}_1 \left(\overline{\varphi}^z - \frac{h^2}{8} \delta_{zz} \overline{\varphi}^z \right) \right] - 2\delta_z \varphi \\
 & = h^2 \left(-\frac{1}{12} \ddot{\varphi} + \frac{1}{12} \ddot{\mu} \right) + O(h^4). \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Zum Schluss sollen noch die Randbedingungen (3.27) mittels den Operatorformeln ausgedrückt werden. Dies läuft analog zu dem bisherigen Vorgehen.

$z = 0$:

- $\varphi = 0$,
- mit $\dot{\varphi}(0) = 0$ folgt $\delta_z \bar{\varphi}^z = \frac{1}{6} h^2 \ddot{\varphi} + O(h^4)$,
- mit $\mu(0) = 0$ folgt $\bar{\mu}^z = \frac{1}{8} h^2 \ddot{\mu} + O(h^4)$.

$z = a$:

- $\varphi = 0$,
- mit $\ddot{\varphi}(a) = 0$ folgt $\delta_{zz} \varphi = \frac{1}{12} h^2 \ddot{\varphi} + O(h^4)$,
- mit $\dot{\mu}(a) = 0$ folgt $\delta_z \mu = \frac{1}{24} h^2 \ddot{\mu} + O(h^4)$.

4.11 Bemerkung

- a) Auf den Differenzgleichungen (4.3) und (4.4) zusammen mit den Randbedingungen von oben basiert das numerische Vorgehen von D. K. LILLY. In diesem Fall werden einfach die rechten Seiten der Gleichungen vernachlässigt und man erhält mittels des Gitters Ω_h ein lineares Gleichungssystem in $2N - 1$ Unbekannten.
- b) Im nächsten Abschnitt soll jedoch ein „genauereres“ Verfahren hergeleitet werden. Das bedeutet, wir entwickeln die rechten Seiten der Gleichungen (4.3) und (4.4) und der Randbedingungen so weit, dass nur noch Terme der Ordnung $O(h^4)$ übrig bleiben.

4.3 Ein Verfahren vierter Ordnung

In diesem Abschnitt soll ausgehend von den Differenzgleichungen (4.3) und (4.4) mit den dazugehörigen Randbedingungen ein Verfahren vierter Ordnung hergeleitet werden, das im diskreten Fall eine Form wie die analytische Version des EKMAN-Problems (3.28) hat. Dazu müssen noch die h^2 -Terme auf der rechten Seite mit den darin auftauchenden Ableitungen ersetzt werden. Grundlage sind auch hier wieder die Formeln aus dem Abschnitt 4.1.

Gleichung (4.3) ist mit $\delta_{zzzzzz} \varphi = \varphi^{(6)}(z) + O(h^2)$, $\delta_{zzzz} \varphi = \ddot{\varphi}(z) + O(h^2)$ und $\delta_{zzz} \mu = \ddot{\mu}(z) + O(h^2)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 & (\delta_{zzzz} - 2\alpha^2 \delta_{zz} + \alpha^4) \varphi - i\alpha R \left[(U_2 - c) \left(-\frac{h^2}{12} \delta_{zzzz} + \delta_{zz} - \alpha^2 \right) \varphi - \ddot{U}_2 \varphi \right] + 2\delta_z \mu \\
 & = h^2 \left(\frac{1}{6} \delta_{zzzzzz} \varphi - \frac{\alpha^2}{6} \delta_{zzzz} \varphi + \frac{1}{12} \delta_{zzz} \mu + O(h^2) \right) + O(h^4), \\
 & \iff \\
 & \left(-\frac{h^2}{6} \delta_{zzzzzz} + \left(1 + \frac{h^2 \alpha^2}{6} \right) \delta_{zzzz} - 2\alpha^2 \delta_{zz} + \alpha^4 \right) \varphi - i\alpha R \left[(U_2 - c) \left(-\frac{h^2}{12} \delta_{zzzz} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \delta_{zz} - \alpha^2 \right) \varphi - \ddot{U}_2 \varphi \right] + \left(-\frac{h^2}{12} \delta_{zzz} + 2\delta_z \right) \mu = O(h^4). \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Analog erhält man mit $\delta_{zzz} \varphi = \ddot{\varphi}(z) + O(h^2)$ und $\delta_{zzzz} \mu = \ddot{\mu}(z) + O(h^2)$ die Äquivalenz von (4.4) zu

$$\begin{aligned}
 & (\delta_{zz} - \alpha^2) \mu - i\alpha R \left[(U_2 - c) \mu + \dot{U}_1 \left(\bar{\varphi}^z - \frac{h^2}{8} \delta_{zz} \bar{\varphi}^z \right) \right] - 2\delta_z \varphi \\
 & = h^2 \left(-\frac{1}{12} \delta_{zzz} \varphi + \frac{1}{12} \delta_{zzzz} \mu + O(h^2) \right) + O(h^4),
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} + \delta_{zz} - \alpha^2 \right) \mu - i\alpha R \left[(U_2 - c)\mu + \dot{U}_1 \left(\bar{\varphi}^z - \frac{h^2}{8}\delta_{zz}\bar{\varphi}^z \right) \right] \\ & + \left(\frac{h^2}{12}\delta_{zzz} - 2\delta_z \right) \varphi = O(h^4). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Für die Randbedingungen verwenden wir nicht-symmetrischen Formeln. Dabei werden für μ entsprechend noch die fehlenden Formeln für $z = \frac{1}{2}h, \frac{3}{2}h, \dots, (N - \frac{1}{2})h$ definiert. Grundlage für die folgende Notation sind die Differenzenformeln aus Abschnitt 4.1, die lediglich in eine Richtung „greifen“.

Für $z = 0$ definieren wir für μ

$$\begin{aligned} \delta_{zz}^R \bar{\mu}^z := \overline{\delta_{zz}^R \mu} &= \frac{1}{2h^2} [-\mu(z + 7/2h) + 3\mu(z + 5/2h) - \mu(z + 3/2h) - 3\mu(z + h/2) \\ &+ 2\mu(z - h/2)]. \end{aligned}$$

Für $z = a$ definieren wir analog

$$\begin{aligned} \delta_{zzz}^L \bar{\mu}^z := \overline{\delta_{zzz}^L \mu} &= \frac{1}{2h^3} \left[\frac{5}{2}\mu(z + h/2) - \frac{13}{2}\mu(z - h/2) + 3\mu(z - 3/2h) + 5\mu(z - 5/2h) \right. \\ &\left. - \frac{11}{2}\mu(z - 7/2h) + \frac{3}{2}\mu(z - 9/2h) \right]. \end{aligned}$$

4.12 Bemerkung

Für die beiden letzten Formeln gilt ebenso eine Approximation zweiter Ordnung, d. h.

$$\begin{aligned} \delta_{zz}^R \bar{\mu}^z &= \ddot{\mu}(z) + O(h^2), \\ \delta_{zzz}^L \bar{\mu}^z &= \ddot{\mu}'(z) + O(h^2). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich zusammen mit den weiteren „einseitigen“ Formeln aus Notation 4.8 für die Randbedingungen folgender Zusammenhang:

$z = 0$:

- $\varphi = 0$,
- $\delta_z \bar{\varphi}^z - \frac{1}{6}h^2 \delta_{zzz}^R \varphi = O(h^4)$,
- $\bar{\mu}^z - \frac{1}{8}h^2 \delta_{zz}^R \bar{\mu}^z = O(h^4)$.

$z = a$:

- $\varphi = 0$,
- $\delta_{zz} \varphi - \frac{1}{12}h^2 \delta_{zzzz}^L \varphi = O(h^4)$,
- $\delta_z \mu - \frac{1}{24}h^2 \delta_{zzz}^L \bar{\mu}^z = O(h^4)$.

Für das numerische Vorgehen werden nun die rechten Seiten von (4.5), (4.6) und den Randbedingungen vernachlässigt und damit ein Differenzenverfahren aufgestellt.

4.13 Bemerkung

Bei der Herleitung der Gleichungen (4.5) und (4.6) wurde bis jetzt nicht darauf geachtet, auf welche Hilfspunkte die auftretenden Differenzenformeln zurückgreifen. Das diskrete Verfahren ist definiert auf dem Gitter

$$\Omega_h := \left\{ jh \mid j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, N-1, N - \frac{1}{2}, N \right\} \text{ mit } h = \frac{a}{N},$$

wobei die Funktionen φ und μ auf $z = 0, h, \dots, Nh$ bzw. auf $z = \frac{1}{2}h, \frac{3}{2}h, \dots, (N - \frac{1}{2})h$ betrachtet werden. Mittels den Randbedingungen sind φ und μ auch über das Gitter Ω_h hinaus gegeben, d. h. wir können auch $\varphi(-h)$, $\varphi(a+h)$, $\mu(-h/2)$ und $\mu(a+h/2)$ auswerten. Damit machen die Gleichungen (4.5) und (4.6) Sinn für die inneren Punkte

$$z = \frac{3}{2}h, 2h, \dots, (N-2)h, \left(N - \frac{3}{2}\right)h.$$

Für die randnahen Punkte

$$z = \frac{1}{2}h, h, (N-1)h, \left(N - \frac{1}{2}\right)h$$

müssen wir noch die Formeln ersetzen, die zu weit über das Gitter „hinausreichen“. Dies betrifft $\delta_{zzzzzz}\varphi$ und $\delta_{zzzz}\mu$. Auch hier verwenden wir wieder die nicht-symmetrischen Formeln aus dem Abschnitt 4.1.

Nicht-symmetrische Formeln für φ ⁽⁶⁾:

$$\begin{aligned} \delta_{zzzzzz}^{\tilde{R}}\varphi &:= \delta_{zz}^R(\delta_{zzzz}\varphi) = \frac{1}{h^6} [-\varphi(z+5h) + 8\varphi(z+4h) - 27\varphi(z+3h) + 50\varphi(z+2h) \\ &\quad - 55\varphi(z+h) + 36\varphi(z) - 13\varphi(z-h) + 2\varphi(z-2h)], \\ \delta_{zzzzzz}^{\tilde{L}}\varphi &:= \delta_{zz}^L(\delta_{zzzz}\varphi) = \frac{1}{h^6} [2\varphi(z+2h) - 13\varphi(z+h) + 36\varphi(z) - 55\varphi(z-h) \\ &\quad + 50\varphi(z-2h) - 27\varphi(z-3h) + 8\varphi(z-4h) - \varphi(z-5h)]. \end{aligned}$$

Nicht-symmetrische Formeln für $\ddot{\mu}$:

$$\begin{aligned} \delta_{zzzz}^{\tilde{R}}\mu &:= \delta_{zz}^R(\delta_{zz}\mu) = \frac{1}{h^4} [-\mu(z+4h) + 6\mu(z+3h) - 14\mu(z+2h) + 16\mu(z+h) \\ &\quad - 9\mu(z) + 2\mu(z-h)], \\ \delta_{zzzz}^{\tilde{L}}\mu &:= \delta_{zz}^L(\delta_{zz}\mu) = \frac{1}{h^4} [2\mu(z+h) - 9\mu(z) + 16\mu(z-h) - 14\mu(z-2h) \\ &\quad + 6\mu(z-3h) - \mu(z-4h)]. \end{aligned}$$

4.14 Bemerkung

- Das „ \tilde{R} “ bzw. „ \tilde{L} “ in obigen Formeln soll darauf hinweisen, dass nicht nur Hilfspunkte verwendet werden, die ausschließlich nach rechts bzw. links greifen. Damit soll eine Verwechslung zu den nicht-symmetrischen, „einseitigen“ Formeln aus Abschnitt 4.1 vermieden werden.
- Auch die Formeln $\delta_{zzzzzz}^{\tilde{R}}\varphi$ und $\delta_{zzzzzz}^{\tilde{L}}\varphi$ bzw. $\delta_{zzzz}^{\tilde{R}}\mu$ und $\delta_{zzzz}^{\tilde{L}}\mu$ approximieren die sechste bzw. vierte Ableitung mit Genauigkeit zweiter Ordnung.

Führen wir wieder den Eigenwertparameter $\lambda = i\alpha R c$ ein, so erhalten wir schließlich aus (4.5), (4.6) und den Randbedingungen bei Vernachlässigung der rechten Seite $O(h^4)$ ein Differenzenverfahren vierter Ordnung.

Gleichungen für die inneren Punkte $z = \frac{3}{2}h, 2h, \dots, (N-2)h, (N - \frac{3}{2})h$:

$$\begin{cases} \left(-\frac{h^2}{6}\delta_{zzzzzz} + \left(1 + \frac{h^2\alpha^2}{6}\right)\delta_{zzzz} - 2\alpha^2\delta_{zz} + \alpha^4 \right) \varphi - i\alpha R \left[U_2 \left(-\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} + \delta_{zz} \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha^2 \right) \varphi - \ddot{U}_2 \varphi \right] + \left(-\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} + 2\delta_{zz} \right) \mu = \lambda \left(\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} - \delta_{zz} + \alpha^2 \right) \varphi, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} + \delta_{zz} - \alpha^2 \right) \mu - i\alpha R \left[U_2\mu + \dot{U}_1 \left(\bar{\varphi}^z - \frac{h^2}{8}\delta_{zz}\bar{\varphi}^z \right) \right] \\ + \left(\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} - 2\delta_z \right) \varphi = -\lambda\mu. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Gleichungen für die randnahen Punkte $z = \frac{1}{2}h, h, (N-1)h, (N-\frac{1}{2})h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{h^2}{6}\delta_{zzzzz}^{\tilde{R}/\tilde{L}} + \left(1 + \frac{h^2\alpha^2}{6} \right) \delta_{zzzz} - 2\alpha^2\delta_{zz} + \alpha^4 \right) \varphi - i\alpha R \left[U_2 \left(-\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} + \delta_{zz} \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha^2 \right) \varphi - \ddot{U}_2\varphi \right] + \left(-\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} + 2\delta_z \right) \mu = \lambda \left(\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} - \delta_{zz} + \alpha^2 \right) \varphi, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz}^{\tilde{R}/\tilde{L}} + \delta_{zz} - \alpha^2 \right) \mu - i\alpha R \left[U_2\mu + \dot{U}_1 \left(\bar{\varphi}^z - \frac{h^2}{8}\delta_{zz}\bar{\varphi}^z \right) \right] \\ + \left(\frac{h^2}{12}\delta_{zzzz} - 2\delta_z \right) \varphi = -\lambda\mu. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Dabei werden die Formeln mit „ \tilde{R} “ für den linken Rand von Ω_h verwendet, die mit „ \tilde{L} “ für den rechten Rand von Ω_h .

Randbedingungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \text{ für } z = 0, \\ \delta_z\bar{\varphi}^z - \frac{1}{6}h^2\delta_{zzz}^R\varphi = 0 \text{ für } z = 0, \\ \bar{\mu}^z - \frac{1}{8}h^2\delta_{zz}^R\bar{\mu}^z = 0 \text{ für } z = 0, \\ \varphi = 0 \text{ für } z = a, \\ \delta_{zz}\varphi - \frac{1}{12}h^2\delta_{zzzz}^L\varphi = 0 \text{ für } z = a, \\ \delta_z\mu - \frac{1}{24}h^2\delta_{zzz}^L\bar{\mu}^z = 0 \text{ für } z = a. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Der Übersicht halber werden an dieser Stelle einmal alle Differenzenformeln des Verfahrens aufgelistet, da diese für das weitere Vorgehen noch gebraucht werden. Dabei ist $f = \varphi$ oder $f = \mu$:

$$\begin{aligned} \bar{f}^z &= \frac{f(z+h/2) + f(z-h/2)}{2}, \\ \delta_z f &= \frac{f(z+h/2) - f(z-h/2)}{h}, \\ \delta_z \bar{f}^z &= \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h}, \\ \delta_{zz} f &= \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2}, \\ \delta_{zz} \bar{f}^z &= \frac{1}{2h^2} [f(z+3/2h) - f(z+h/2) - f(z-h/2) + f(z-3/2h)], \\ \delta_{zz}^R \bar{f}^z &= \frac{1}{2h^2} [-f(z+7/2h) + 3f(z+5/2h) - f(z+3/2h) - 3f(z+h/2) + 2f(z-h/2)], \\ \delta_{zzz} f &= \frac{1}{h^3} [f(z+3/2h) - 3f(z+h/2) + 3f(z-h/2) - f(z-3/2h)], \\ \delta_{zzz}^R f &= \frac{1}{h^3} \left[-\frac{3}{2}f(z+4h) + 7f(z+3h) - 12f(z+2h) + 9f(z+h) - \frac{5}{2}f(z) \right], \\ \delta_{zzz}^L \bar{f}^z &= \frac{1}{2h^3} \left[\frac{5}{2}f(z+h/2) - \frac{13}{2}f(z-h/2) + 3f(z-3/2h) + 5f(z-5/2h) - \frac{11}{2}f(z-7/2h) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \frac{3}{2}f(z - 9/2h) \right], \\
 \delta_{zzzz}f &= \frac{1}{h^4} [f(z + 2h) - 4f(z + h) + 6f(z) - 4f(z - h) + f(z - 2h)], \\
 \delta_{zzzz}^L f &= \frac{1}{h^4} [3f(z) - 14f(z - h) + 26f(z - 2h) - 24f(z - 3h) + 11f(z - 4h) - 2f(z - 5h)], \\
 \delta_{zzzz}^{\bar{R}} f &= \frac{1}{h^4} [-f(z + 4h) + 6f(z + 3h) - 14f(z + 2h) + 16f(z + h) - 9f(z) + 2f(z - h)], \\
 \delta_{zzzz}^{\bar{L}} f &= \frac{1}{h^4} [2f(z + h) - 9f(z) + 16f(z - h) - 14f(z - 2h) + 6f(z - 3h) - f(z - 4h)], \\
 \delta_{zzzzzz}f &= \frac{1}{h^6} [f(z + 3h) - 6f(z + 2h) + 15f(z + h) - 20f(z) + 15f(z - h) - 6f(z - 2h) \\
 & \quad + f(z - 3h)], \\
 \delta_{zzzzzz}^{\bar{R}} f &= \frac{1}{h^6} [-f(z + 5h) + 8f(z + 4h) - 27f(z + 3h) + 50f(z + 2h) - 55f(z + h) + 36f(z) \\
 & \quad - 13f(z - h) + 2f(z - 2h)], \\
 \delta_{zzzzzz}^{\bar{L}} f &= \frac{1}{h^6} [2f(z + 2h) - 13f(z + h) + 36f(z) - 55f(z - h) + 50f(z - 2h) - 27f(z - 3h) \\
 & \quad + 8f(z - 4h) - f(z - 5h)].
 \end{aligned}$$

Das nächste Ziel ist mit dem Differenzenverfahren und obigen Formeln ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h \quad (4.12)$$

herzuleiten, wobei $\mathbf{A}^h \in \mathbb{C}^{2N-1 \times 2N-1}$ eine komplexe Matrix, $\mathbf{B}^h \in \mathbb{R}^{2N-1 \times 2N-1}$ eine reelle Matrix und λ^h ein komplexer Parameter sind. Als unbekannte Größe haben wir hier

$$\mathbf{v}^h = \begin{pmatrix} \mu(h/2) \\ \varphi(h) \\ \mu(3/2h) \\ \varphi(2h) \\ \vdots \\ \varphi(a-h) \\ \mu(a-h/2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N-1}.$$

Problem (4.12) stellt als verallgemeinertes Eigenwertproblem die diskrete Version des EKMAN-Problems dar.

4.15 Bemerkung

Die im Differenzenverfahren auftauchenden Größen $\varphi(-h), \mu(-h/2), \varphi(0)$ (linker Rand) und $\varphi(a), \mu(a+h/2), \varphi(a+h)$ (rechter Rand) können mithilfe der Randbedingungen (4.11) ausgewertet werden. Dazu verwendet man einfach die oben aufgelisteten Differenzenformeln.

Linker Rand von Ω_h :

$$\begin{aligned}
 \varphi(-h) &= -2\varphi(h) + 4\varphi(2h) - \frac{7}{3}\varphi(3h) + \frac{1}{2}\varphi(4h), \\
 \mu(-h/2) &= -\frac{11}{6}\mu(h/2) - \frac{1}{6}\mu(3/2h) + \frac{1}{2}\mu(5/2h) - \frac{1}{6}\mu(7/2h), \\
 \varphi(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Rechter Rand von Ω_h :

$$\varphi(a) = 0,$$

$$\begin{aligned}\mu(a + h/2) &= \frac{3}{91}\mu(a - 9/2h) - \frac{11}{91}\mu(a - 7/2h) + \frac{10}{91}\mu(a - 5/2h) + \frac{6}{91}\mu(a - 3/2h) \\ &\quad + \frac{83}{91}\mu(a - h/2), \\ \varphi(a + h) &= -\frac{1}{6}\varphi(a - 5h) + \frac{11}{12}\varphi(a - 4h) - 2\varphi(a - 3h) + \frac{13}{6}\varphi(a - 2h) - \frac{13}{6}\varphi(a - h).\end{aligned}$$

Um nun das Problem (4.12) herzuleiten, werden die entsprechenden Differenzenformeln in die Gleichungen (4.7)/(4.8) und (4.9)/(4.10) eingesetzt.

Gleichung (4.7) für die inneren Punkte:

$$\begin{aligned}-\frac{h^2}{6} \frac{1}{h^6} [\varphi(z + 3h) - 6\varphi(z + 2h) + 15\varphi(z + h) - 20\varphi(z) + 15\varphi(z - h) - 6\varphi(z - 2h) + \varphi(z - 3h)] \\ + \left(1 + \frac{h^2\alpha^2}{6}\right) \frac{1}{h^4} [\varphi(z + 2h) - 4\varphi(z + h) + 6\varphi(z) - 4\varphi(z - h) + \varphi(z - 2h)] \\ - 2\alpha^2 \frac{1}{h^2} [\varphi(z + h) - 2\varphi(z) + \varphi(z - h)] + \alpha^4\varphi(z) - i\alpha R \left[U_2(z) \left(-\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [\varphi(z + 2h) \right. \right. \\ \left. \left. - 4\varphi(z + h) + 6\varphi(z) - 4\varphi(z - h) + \varphi(z - 2h)] + \frac{1}{h^2} [\varphi(z + h) - 2\varphi(z) + \varphi(z - h)] \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha^2\varphi(z) \right) - \ddot{U}_2(z)\varphi(z) \right] - \frac{h^2}{12} \frac{1}{h^3} [\mu(z + 3/2h) - 3\mu(z + h/2) + 3\mu(z - h/2) \\ - \mu(z - 3/2h)] + 2\frac{1}{h} [\mu(z + h/2) - \mu(z - h/2)] \\ = \lambda \left(\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [\varphi(z + 2h) - 4\varphi(z + h) + 6\varphi(z) - 4\varphi(z - h) + \varphi(z - 2h)] - \frac{1}{h^2} [\varphi(z + h) \right. \\ \left. - 2\varphi(z) + \varphi(z - h)] + \alpha^2\varphi(z) \right),\end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6h^4}\varphi(z - 3h) + A(z)\varphi(z - 2h) + B(z)\varphi(z - h) + C(z)\varphi(z) + B(z)\varphi(z + h) + A(z)\varphi(z + 2h) \\ - \frac{1}{6h^4}\varphi(z + 3h) + \frac{1}{12h}\mu(z - 3/2h) - \frac{9}{4h}\mu(z - h/2) + \frac{9}{4h}\mu(z + h/2) - \frac{1}{12h}\mu(z + 3/2h) \\ = \lambda \left(\frac{1}{12h^2}\varphi(z - 2h) - \frac{4}{3h^2}\varphi(z - h) + D\varphi(z) - \frac{4}{3h^2}\varphi(z + h) + \frac{1}{12h^2}\varphi(z + 2h) \right),\end{aligned}$$

wobei folgende Abkürzungen verwendet wurden:

$$\begin{aligned}A(z) &:= \frac{2}{h^4} + \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{12}i\alpha R U_2(z) \right), \\ B(z) &:= -\frac{13}{2h^4} + \frac{1}{h^2} \left(-\frac{8}{3}\alpha^2 - \frac{4}{3}i\alpha R U_2(z) \right), \\ C(z) &:= \frac{28}{3h^4} + \frac{1}{h^2} \left(5\alpha^2 + \frac{5}{2}i\alpha R U_2(z) \right) - i\alpha R \left(-\alpha^2 U_2(z) - \ddot{U}_2(z) \right) + \alpha^4, \\ D &:= \frac{5}{2h^2} + \alpha^2.\end{aligned}$$

Gleichung (4.8) für die inneren Punkte:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [\mu(z+2h) - 4\mu(z+h) + 6\mu(z) - 4\mu(z-h) + \mu(z-2h)] + \frac{1}{h^2} [\mu(z+h) - 2\mu(z) \\
 & + \mu(z-h)] - \alpha^2 \mu(z) - i\alpha R \left[U_2(z)\mu(z) + \dot{U}_1(z) \left(\frac{1}{2} [\varphi(z+h/2) + \varphi(z-h/2)] \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{h^2}{8} \frac{1}{2h^2} [\varphi(z+3/2h) - \varphi(z+h/2) - \varphi(z-h/2) + \varphi(z-3/2h)] \right) \right] \\
 & + \frac{h^2}{12} \frac{1}{h^3} [\varphi(z+3/2h) - 3\varphi(z+h/2) + 3\varphi(z-h/2) - \varphi(z-3/2h)] - 2\frac{1}{h} [\varphi(z+h/2) \\
 & - \varphi(z-h/2)] = -\lambda\mu(z),
 \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}
 & E(z)\varphi(z-3/2h) + F(z)\varphi(z-h/2) + G(z)\varphi(z+h/2) + H(z)\varphi(z+3/2h) - \frac{1}{12h^2}\mu(z-2h) \\
 & + \frac{4}{3h^2}\mu(z-h) + I(z)\mu(z) + \frac{4}{3h^2}\mu(z+h) - \frac{1}{12h^2}\mu(z+2h) = -\lambda\mu(z),
 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 E(z) & := -\frac{1}{12h} + \frac{1}{16}i\alpha R\dot{U}_1(z), \\
 F(z) & := \frac{9}{4h} - \frac{9}{16}i\alpha R\dot{U}_1(z), \\
 G(z) & := -\frac{9}{4h} - \frac{9}{16}i\alpha R\dot{U}_1(z), \\
 H(z) & := \frac{1}{12h} + \frac{1}{16}i\alpha R\dot{U}_1(z), \\
 I(z) & := -\frac{5}{2h^2} - \alpha^2 - i\alpha R U_2(z).
 \end{aligned}$$

Gleichung (4.9) für die randnahen Punkte:

Linker Rand von Ω_h ($z=h$):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h^2}{6} \frac{1}{h^6} [-\varphi(z+5h) + 8\varphi(z+4h) - 27\varphi(z+3h) + 50\varphi(z+2h) - 55\varphi(z+h) + 36\varphi(z) \\
 & - 13\varphi(z-h) + 2\varphi(z-2h)] + \left(1 + \frac{h^2\alpha^2}{6} \right) \frac{1}{h^4} [\varphi(z+2h) - 4\varphi(z+h) + 6\varphi(z) \\
 & - 4\varphi(z-h) + \varphi(z-2h)] - 2\alpha^2 \frac{1}{h^2} [\varphi(z+h) - 2\varphi(z) + \varphi(z-h)] + \alpha^4 \varphi(z) \\
 & - i\alpha R \left[U_2(z) \left(-\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [\varphi(z+2h) - 4\varphi(z+h) + 6\varphi(z) - 4\varphi(z-h) + \varphi(z-2h)] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{h^2} [\varphi(z+h) - 2\varphi(z) + \varphi(z-h)] - \alpha^2 \varphi(z) \right) - \ddot{U}_2(z)\varphi(z) \right] - \frac{h^2}{12} \frac{1}{h^3} [\mu(z+3/2h) \\
 & - 3\mu(z+h/2) + 3\mu(z-h/2) - \mu(z-3/2h)] + 2\frac{1}{h} [\mu(z+h/2) - \mu(z-h/2)] \\
 & = \lambda \left(\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [\varphi(z+2h) - 4\varphi(z+h) + 6\varphi(z) - 4\varphi(z-h) + \varphi(z-2h)] - \frac{1}{h^2} [\varphi(z+h) \right. \\
 & \left. - 2\varphi(z) + \varphi(z-h)] + \alpha^2 \varphi(z) \right),
 \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}
 & \left(A(z) - \frac{4}{3h^4} \right) \varphi(z-2h) + \left(B(z) + \frac{14}{3h^4} \right) \varphi(z-h) + \left(C(z) - \frac{28}{3h^4} \right) \varphi(z) + \left(B(z) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{35}{3h^4} \right) \varphi(z+h) + \left(A(z) - \frac{28}{3h^4} \right) \varphi(z+2h) + \frac{9}{2h^4} \varphi(z+3h) - \frac{4}{3h^4} \varphi(z+4h) \\
 & \quad + \frac{1}{6h^4} \varphi(z+5h) + \frac{1}{12h} \mu(z-3/2h) - \frac{9}{4h} \mu(z-h/2) + \frac{9}{4h} \mu(z+h/2) - \frac{1}{12h} \mu(z+3/2h) \\
 & = \lambda \left(\frac{1}{12h^2} \varphi(z-2h) - \frac{4}{3h^2} \varphi(z-h) + D\varphi(z) - \frac{4}{3h^2} \varphi(z+h) + \frac{1}{12h^2} \varphi(z+2h) \right).
 \end{aligned}$$

Rechter Rand von Ω_h ($z = (N-1)h$):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h^2}{6} \frac{1}{h^6} [2\varphi(z+2h) - 13\varphi(z+h) + 36\varphi(z) - 55\varphi(z-h) + 50\varphi(z-2h) - 27\varphi(z-3h) \\
 & \quad + 8\varphi(z-4h) - \varphi(z-5h)] + \left(1 + \frac{h^2\alpha^2}{6} \right) \frac{1}{h^4} [\varphi(z+2h) - 4\varphi(z+h) + 6\varphi(z) \\
 & \quad - 4\varphi(z-h) + \varphi(z-2h)] - 2\alpha^2 \frac{1}{h^2} [\varphi(z+h) - 2\varphi(z) + \varphi(z-h)] + \alpha^4 \varphi(z) \\
 & \quad - i\alpha R \left[U_2(z) \left(-\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [\varphi(z+2h) - 4\varphi(z+h) + 6\varphi(z) - 4\varphi(z-h) + \varphi(z-2h)] \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{h^2} [\varphi(z+h) - 2\varphi(z) + \varphi(z-h)] - \alpha^2 \varphi(z) \right] - \ddot{U}_2(z) \varphi(z) - \frac{h^2}{12} \frac{1}{h^3} [\mu(z+3/2h) \\
 & \quad - 3\mu(z+h/2) + 3\mu(z-h/2) - \mu(z-3/2h)] + 2\frac{1}{h} [\mu(z+h/2) - \mu(z-h/2)] \\
 & = \lambda \left(\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [\varphi(z+2h) - 4\varphi(z+h) + 6\varphi(z) - 4\varphi(z-h) + \varphi(z-2h)] - \frac{1}{h^2} [\varphi(z+h) \right. \\
 & \quad \left. - 2\varphi(z) + \varphi(z-h)] + \alpha^2 \varphi(z) \right),
 \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6h^4} \varphi(z-5h) - \frac{4}{3h^4} \varphi(z-4h) + \frac{9}{2h^4} \varphi(z-3h) + \left(A(z) - \frac{28}{3h^4} \right) \varphi(z-2h) + \left(B(z) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{35}{3h^4} \right) \varphi(z-h) + \left(C(z) - \frac{28}{3h^4} \right) \varphi(z) + \left(B(z) + \frac{14}{3h^4} \right) \varphi(z+h) + \left(A(z) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{4}{3h^4} \right) \varphi(z+2h) + \frac{1}{12h} \mu(z-3/2h) - \frac{9}{4h} \mu(z-h/2) + \frac{9}{4h} \mu(z+h/2) - \frac{1}{12h} \mu(z+3/2h) \\
 & = \lambda \left(\frac{1}{12h^2} \varphi(z-2h) - \frac{4}{3h^2} \varphi(z-h) + D\varphi(z) - \frac{4}{3h^2} \varphi(z+h) + \frac{1}{12h^2} \varphi(z+2h) \right).
 \end{aligned}$$

Gleichung (4.10) für die randnahen Punkte:

Linker Rand von Ω_h ($z = h/2$):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [-\mu(z+4h) + 6\mu(z+3h) - 14\mu(z+2h) + 16\mu(z+h) - 9\mu(z) + 2\mu(z-h)] \\
 & \quad + \frac{1}{h^2} [\mu(z+h) - 2\mu(z) + \mu(z-h)] - \alpha^2 \mu(z) - i\alpha R \left[U_2(z) \mu(z) + \dot{U}_1(z) \left(\frac{1}{2} [\varphi(z+h/2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \varphi(z-h/2)] - \frac{h^2}{8} \frac{1}{2h^2} [\varphi(z+3/2h) - \varphi(z+h/2) - \varphi(z-h/2) + \varphi(z-3/2h)] \right) \right] \\
 & \quad + \frac{h^2}{12} \frac{1}{h^3} [\varphi(z+3/2h) - 3\varphi(z+h/2) + 3\varphi(z-h/2) - \varphi(z-3/2h)] - 2\frac{1}{h} [\varphi(z+h/2) \\
 & \quad - \varphi(z-h/2)] = -\lambda \mu(z),
 \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}
 & E(z)\varphi(z - 3/2h) + F(z)\varphi(z - h/2) + G(z)\varphi(z + h/2) + H(z)\varphi(z + 3/2h) + \frac{5}{6h^2}\mu(z - h) \\
 & + \left(I(z) + \frac{5}{4h^4} \right) \mu(z) - \frac{1}{3h^2}\mu(z + h) + \frac{7}{6h^2}\mu(z + 2h) - \frac{1}{2h^2}\mu(z + 3h) + \frac{1}{12h^2}\mu(z + 4h) \\
 & = -\lambda\mu(z).
 \end{aligned}$$

Rechter Rand von Ω_h ($z = (N - 1/2)h$):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h^2}{12} \frac{1}{h^4} [2\mu(z + h) - 9\mu(z) + 16\mu(z - h) - 14\mu(z - 2h) + 6\mu(z - 3h) - \mu(z - 4h)] \\
 & + \frac{1}{h^2} [\mu(z + h) - 2\mu(z) + \mu(z - h)] - \alpha^2\mu(z) - i\alpha R \left[U_2(z)\mu(z) + \dot{U}_1(z) \left(\frac{1}{2} [\varphi(z + h/2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \varphi(z - h/2)] - \frac{h^2}{8} \frac{1}{2h^2} [\varphi(z + 3/2h) - \varphi(z + h/2) - \varphi(z - h/2) + \varphi(z - 3/2h)] \right) \right] \\
 & + \frac{h^2}{12} \frac{1}{h^3} [\varphi(z + 3/2h) - 3\varphi(z + h/2) + 3\varphi(z - h/2) - \varphi(z - 3/2h)] - 2\frac{1}{h} [\varphi(z + h/2) \\
 & - \varphi(z - h/2)] = -\lambda\mu(z),
 \end{aligned}$$

\iff

$$\begin{aligned}
 & E(z)\varphi(z - 3/2h) + F(z)\varphi(z - h/2) + G(z)\varphi(z + h/2) + H(z)\varphi(z + 3/2h) + \frac{1}{12h^2}\mu(z - 4h) \\
 & - \frac{1}{2h^2}\mu(z - 3h) + \frac{7}{6h^2}\mu(z - 2h) - \frac{1}{3h^2}\mu(z - h) + \left(I(z) + \frac{5}{4h^2} \right) \mu(z) + \frac{5}{6h^2}\mu(z + h) \\
 & = -\lambda\mu(z).
 \end{aligned}$$

Damit sind nun alle Gleichungen gegeben und wir können das Problem

$$\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$$

im Detail angeben. Dabei steht λ^h für den komplexen Parameter λ , der sich auf die diskreten Gleichungen bezieht.

4.16 Bemerkung

Die in obigen Gleichungen auftauchenden Komponenten der EKMAN-Spirale kann man explizit angeben. Dabei hatten wir für U_1 und U_2 (vgl. Bemerkung 3.23)

$$\begin{aligned}
 U_1(z) &= \cos(\varepsilon) - \exp(-z) \cos(z + \varepsilon), \\
 U_2(z) &= -\sin(\varepsilon) + \exp(-z) \sin(z + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Für die Ableitungen ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_1(z) &= \exp(-z) (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)), \\
 \dot{U}_2(z) &= \exp(-z) (-\sin(z + \varepsilon) + \cos(z + \varepsilon)), \\
 \ddot{U}_2(z) &= -2 \exp(-z) \cos(z + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Um die Struktur des Gleichungssystems $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ zu erkennen, geben wir die einzelnen Gleichungen für die diskreten Werte $\frac{1}{2}h, h, \dots, (N - 1)h, (N - \frac{1}{2})h$ im Detail an. Dabei ist Bemerkung 4.15 zu beachten.

Gleichung für $h/2$:

$$\begin{aligned}
 & \left[I(h/2) - \frac{5}{18h^2} \right] \mu(h/2) + [-2E(h/2) + G(h/2)] \varphi(h) - \frac{17}{36h^2} \mu(3/2h) + [4E(h/2) \\
 & + H(h/2)] \varphi(2h) + \frac{19}{12h^2} \mu(5/2h) - \frac{7}{3} E(h/2) \varphi(3h) - \frac{23}{36h^2} \mu(7/2h) + \frac{1}{2} E(h/2) \varphi(4h)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{12h^2}\mu(9/2h) = -\lambda\mu(h/2),$$

Gleichung für h :

$$\begin{aligned} & -\frac{173}{72h}\mu(h/2) + \left[-2A(h) + C(h) - \frac{20}{3h^4}\right]\varphi(h) + \frac{161}{72h}\mu(3/2h) + \left[4A(h) + B(h) + \frac{19}{3h^4}\right]\varphi(2h) \\ & - \frac{1}{24h}\mu(5/2h) + \left[-\frac{4}{3}A(h) - \frac{56}{9h^4}\right]\varphi(3h) - \frac{1}{72h}\mu(7/2h) + \left[\frac{1}{2}A(h) + \frac{23}{6h^4}\right]\varphi(4h) \\ & - \frac{4}{3h^4}\varphi(5h) + \frac{1}{6h^4}\varphi(6h) = \lambda \left(\left[D - \frac{1}{6h^2}\right]\varphi(h) - \frac{1}{h^2}\varphi(2h) - \frac{1}{9h^2}\varphi(3h) + \frac{1}{24h^2}\varphi(4h) \right), \end{aligned}$$

Gleichung für $3/2h$:

$$\begin{aligned} & \frac{107}{72h^2}\mu(h/2) + F(3/2h)\varphi(h) + \left[I(3/2h) + \frac{1}{72h^2}\right]\mu(3/2h) + G(3/2h)\varphi(2h) + \frac{31}{24h^2}\mu(5/2h) \\ & + H(3/2h)\varphi(3h) - \frac{5}{72h^2}\mu(7/2h) = -\lambda\mu(3/2h), \end{aligned}$$

Gleichung für $2h$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12h}\mu(h/2) + \left[B(2h) + \frac{1}{3h^4}\right]\varphi(h) - \frac{9}{4h}\mu(3/2h) + \left[C(2h) - \frac{2}{3h^4}\right]\varphi(2h) + \frac{9}{4h}\mu(5/2h) \\ & + \left[B(2h) + \frac{7}{18h^4}\right]\varphi(3h) - \frac{1}{12h}\mu(7/2h) + \left[A(2h) - \frac{1}{12h^4}\right]\varphi(4h) - \frac{1}{6h^4}\varphi(5h) \\ & = \lambda \left(-\frac{4}{3h^2}\varphi(h) + D\varphi(2h) - \frac{4}{3h^2}\varphi(3h) + \frac{1}{12h^2}\varphi(4h) \right), \end{aligned}$$

Gleichung für $5/2h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12h^2}\mu(h/2) + E(5/2h)\varphi(h) + \frac{4}{3h^2}\mu(3/2h) + F(5/2h)\varphi(2h) + I(5/2)\mu(5/2h) \\ & + G(5/2h)\varphi(3h) + \frac{4}{3h^2}\mu(7/2h) + H(5/2h)\varphi(4h) - \frac{1}{12h^2}\mu(9/2h) = -\lambda\mu(5/2h), \end{aligned}$$

Gleichung für $3h$:

$$\begin{aligned} & A(3h)\varphi(h) + \frac{1}{12h}\mu(3/2h) + B(3h)\varphi(2h) - \frac{9}{4h}\mu(5/2h) + C(3h)\varphi(3h) + \frac{9}{4h}\mu(7/2h) \\ & + B(3h)\varphi(4h) - \frac{1}{12h}\mu(9/2h) + A(3h)\varphi(5h) - \frac{1}{6h^4}\varphi(6h) \\ & = \lambda \left(\frac{1}{12h^2}\varphi(h) - \frac{4}{3h^2}\varphi(2h) + D\varphi(3h) - \frac{4}{3h^2}\varphi(4h) + \frac{1}{12h^2}\varphi(5h) \right), \end{aligned}$$

Gleichung für $7/2h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12h^2}\mu(3/2h) + E(7/2h)\varphi(2h) + \frac{4}{3h^2}\mu(5/2h) + F(7/2h)\varphi(3h) + I(7/2)\mu(7/2h) \\ & + G(7/2h)\varphi(4h) + \frac{4}{3h^2}\mu(9/2h) + H(7/2h)\varphi(5h) - \frac{1}{12h^2}\mu(11/2h) = -\lambda\mu(7/2h), \end{aligned}$$

Gleichung für $4h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6h^4}\varphi(h) + A(4h)\varphi(2h) + \frac{1}{12h}\mu(5/2h) + B(4h)\varphi(3h) - \frac{9}{4h}\mu(7/2h) + C(4h)\varphi(4h) + \frac{9}{4h}\mu(9/2h) \\ & + B(4h)\varphi(5h) - \frac{1}{12h}\mu(11/2h) + A(4h)\varphi(6h) - \frac{1}{6h^4}\varphi(7h) \\ & = \lambda \left(\frac{1}{12h^2}\varphi(2h) - \frac{4}{3h^2}\varphi(3h) + D\varphi(4h) - \frac{4}{3h^2}\varphi(5h) + \frac{1}{12h^2}\varphi(6h) \right), \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Gleichung für $(N - 4)h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6h^4}\varphi((N - 7)h) + A((N - 4)h)\varphi((N - 6)h) + \frac{1}{12h}\mu((N - 11/2)h) + B((N - 4)h)\varphi((N \\ & \quad - 5)h) - \frac{9}{4h}\mu((N - 9/2)h) + C((N - 4)h)\varphi((N - 4)h) + \frac{9}{4h}\mu((N - 7/2)h) + B((N \\ & \quad - 4)h)\varphi((N - 3)h) - \frac{1}{12h}\mu((N - 5/2)h) + A((N - 4)h)\varphi((N - 2)h) - \frac{1}{6h^4}\varphi((N - 1)h) \\ & = \lambda \left(\frac{1}{12h^2}\varphi((N - 6)h) - \frac{4}{3h^2}\varphi((N - 5)h) + D\varphi((N - 4)h) - \frac{4}{3h^2}\varphi((N - 3)h) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12h^2}\varphi((N - 2)h) \right), \end{aligned}$$

Gleichung für $(N - 7/2)h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12h^2}\mu((N - 11/2)h) + E((N - 7/2)h)\varphi((N - 5)h) + \frac{4}{3h^2}\mu((N - 9/2)h) + F((N - 7/2)h) \cdot \\ & \quad \varphi((N - 4)h) + I((N - 7/2)h)\mu((N - 7/2)h) + G((N - 7/2)h)\varphi((N - 3)h) + \frac{4}{3h^2}\mu((N \\ & \quad - 5/2)h) + H((N - 7/2)h)\varphi((N - 2)h) - \frac{1}{12h^2}\mu((N - 3/2)h) = -\lambda\mu((N - 7/2)h), \end{aligned}$$

Gleichung für $(N - 3)h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6h^4}\varphi((N - 6)h) + A((N - 3)h)\varphi((N - 5)h) + \frac{1}{12h}\mu((N - 9/2)h) + B((N - 3)h)\varphi((N \\ & \quad - 4)h) - \frac{9}{4h}\mu((N - 7/2)h) + C((N - 3)h)\varphi((N - 3)h) + \frac{9}{4h}\mu((N - 5/2)h) + B((N \\ & \quad - 3)h)\varphi((N - 2)h) - \frac{1}{12h}\mu((N - 3/2)h) + A((N - 3)h)\varphi((N - 1)h) \\ & = \lambda \left(\frac{1}{12h^2}\varphi((N - 5)h) - \frac{4}{3h^2}\varphi((N - 4)h) + D\varphi((N - 3)h) - \frac{4}{3h^2}\varphi((N - 2)h) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12h^2}\varphi((N - 1)h) \right), \end{aligned}$$

Gleichung für $(N - 5/2)h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12h^2}\mu((N - 9/2)h) + E((N - 5/2)h)\varphi((N - 4)h) + \frac{4}{3h^2}\mu((N - 7/2)h) + F((N - 5/2)h) \cdot \\ & \quad \varphi((N - 3)h) + I((N - 5/2)h)\mu((N - 5/2)h) + G((N - 5/2)h)\varphi((N - 2)h) + \frac{4}{3h^2}\mu((N \\ & \quad - 3/2)h) + H((N - 5/2)h)\varphi((N - 1)h) - \frac{1}{12h^2}\mu((N - 1/2)h) = -\lambda\mu((N - 5/2)h), \end{aligned}$$

Gleichung für $(N - 2)h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{36h^4}\varphi((N - 5)h) + \left[A((N - 2)h) - \frac{11}{72h^4} \right] \varphi((N - 4)h) + \frac{1}{12h}\mu((N - 7/2)h) + \left[B((N - 2)h) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3h^4} \right] \varphi((N - 3)h) - \frac{9}{4h}\mu((N - 5/2)h) + \left[C((N - 2)h) - \frac{13}{36h^4} \right] \varphi((N - 2)h) \\ & \quad + \frac{9}{4h}\mu((N - 3/2)h) + \left[B((N - 2)h) + \frac{13}{36h^4} \right] \varphi((N - 1)h) - \frac{1}{12h}\mu((N - 1/2)h) \\ & = \lambda \left(\frac{1}{12h^2}\varphi((N - 4)h) - \frac{4}{3h^2}\varphi((N - 3)h) + D\varphi((N - 2)h) - \frac{4}{3h^2}\varphi((N - 1)h) \right), \end{aligned}$$

Gleichung für $(N - 3/2)h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{364h^2}\mu((N - 9/2)h) - \frac{20}{273h^2}\mu((N - 7/2)h) + E((N - 3/2)h)\varphi((N - 3)h) + \frac{241}{182h^2}\mu((N \\ & \quad - 5/2)h) + F((N - 3/2)h)\varphi((N - 2)h) + \left[I((N - 3/2)h) - \frac{1}{182h^2} \right] \mu((N - 3/2)h) \\ & \quad + G((N - 3/2)h)\varphi((N - 1)h) + \frac{1373}{1092h^2}\mu((N - 1/2)h) = -\lambda\mu((N - 3/2)h), \end{aligned}$$

Gleichung für $(N - 1)h$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6h^4}\varphi((N - 6)h) + \left[-\frac{1}{6}A((N - 1)h) - \frac{10}{9h^4} \right] \varphi((N - 5)h) - \frac{1}{364h}\mu((N - 9/2)h) + \left[\frac{11}{12}A((N \\ & \quad - 1)h) + \frac{59}{18h^4} \right] \varphi((N - 4)h) + \frac{11}{1092h}\mu((N - 7/2)h) + \left[-A((N - 1)h) - \frac{20}{3h^4} \right] \varphi((N - 3)h) \\ & \quad + \frac{27}{364h}\mu((N - 5/2)h) + \left[\frac{13}{6}A((N - 1)h) + B((N - 1)h) + \frac{79}{9h^4} \right] \varphi((N - 2)h) - \frac{821}{364h}\mu((N \\ & \quad - 3/2)h) + \left[-\frac{13}{6}A((N - 1)h) + C((N - 1)h) - \frac{58}{9h^4} \right] \varphi((N - 1)h) + \frac{1187}{546h}\mu((N - 1/2)h) \\ & = \lambda \left(-\frac{1}{72h^2}\varphi((N - 5)h) + \frac{11}{144h^2}\varphi((N - 4)h) - \frac{1}{12h^2}\varphi((N - 3)h) - \frac{83}{72h^2}\varphi((N - 2)h) \right. \\ & \quad \left. + \left[D - \frac{13}{72h^2} \right] \varphi((N - 1)h) \right), \end{aligned}$$

Gleichung für $(N - 1/2)h$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}H((N - 1/2)h)\varphi((N - 5)h) + \frac{121}{1092h^2}\mu((N - 9/2)h) + \frac{11}{12}H((N - 1/2)h)\varphi((N - 4)h) \\ & \quad - \frac{164}{273h^2}\mu((N - 7/2)h) - 2H((N - 1/2)h)\varphi((N - 3)h) + \frac{229}{182h^2}\mu((N - 5/2)h) + \left[E((N \\ & \quad - 1/2)h) + \frac{13}{6}H((N - 1/2)h) \right] \varphi((N - 2)h) - \frac{76}{273h^2}\mu((N - 3/2)h) + \left[F((N - 1/2)h) \right. \\ & \quad \left. - \frac{13}{6}H((N - 1/2)h) \right] \varphi((N - 1)h) + \left[I((N - 1/2)h) + \frac{2195}{1092h^2} \right] \mu((N - 1/2)h) \\ & = -\lambda\mu((N - 1/2)h). \end{aligned}$$

4.17 Bemerkung

Damit das Gleichungssystem $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ mit obigen Gleichungen überhaupt Sinn macht, muss $N \geq 7$ gelten.

Wir können also nun konkret die diskrete Version des EKMAN-Problems in der Form eines verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$$

angeben. Der Übersicht halber werden wir hier nicht ein beliebiges N wählen. Anhand des folgenden Beispiels wird aber die allgemeine Struktur der Matrizen \mathbf{A}^h und \mathbf{B}^h ersichtlich.

4.18 Beispiel

Wir wählen den Fall $N = 8$ und geben dazu die entsprechenden Matrizen \mathbf{A}^h und \mathbf{B}^h an. Als

gesuchten Eigenvektor haben wir hier

$$\mathbf{v}^h = \begin{pmatrix} \mu(h/2) \\ \varphi(h) \\ \mu(3/2h) \\ \varphi(2h) \\ \vdots \\ \varphi(7h) \\ \mu(15/2h) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{15}.$$

Die Matrix $\mathbf{A}^h \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ hat folgende Gestalt:

$$\mathbf{A}^h = \begin{pmatrix} I^1 \dots & -2E^1 \dots & \frac{-17}{36h^2} & 4E^1 \dots & \frac{19}{12h^2} & \frac{-7}{3}E^1 & \frac{-23}{36h^2} & \frac{1}{2}E^1 & \frac{1}{12h^2} & 0 & 0 \\ \frac{-173}{72h} & -2A^1 \dots & \frac{161}{72h} & 4A^1 \dots & \frac{-1}{24h} & \frac{-4}{3}A^1 \dots & \frac{-1}{72h} & \frac{1}{2}A^1 \dots & 0 & \frac{-4}{3h^4} & 0 \\ \frac{107}{72h^2} & F^2 & I^2 \dots & G^2 & \frac{31}{24h^2} & H^2 & \frac{-5}{72h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12h}{12h^2} & B^2 \dots & \frac{-9}{4h} & C^2 \dots & \frac{9}{4h} & B^2 \dots & \frac{-1}{12h} & A^2 \dots & 0 & \frac{-1}{6h^4} & 0 \\ \frac{-1}{12h^2} & E^3 & \frac{3h^2}{4} & F^3 & I^3 & G^3 & \frac{4}{3h^2} & H^3 & \frac{-1}{12h^2} & 0 & 0 \\ 0 & A^3 & \frac{1}{12h} & B^3 & \frac{-9}{4h} & C^3 & \frac{9}{4h} & B^3 & \frac{-1}{12h} & A^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12h}{12h^2} & E^4 & \frac{1}{3h^2} & F^4 & I^4 & G^4 & \frac{4}{3h^2} & H^4 & \frac{-1}{12h^2} \\ 0 & \frac{-1}{6h^4} & 0 & A^4 & \frac{1}{12h} & B^4 & \frac{-9}{4h} & C^4 & \frac{9}{4h} & B^4 & \frac{-1}{12h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{12h^2} & E^5 & \frac{1}{3h^2} & F^5 & I^5 & G^5 & \frac{9}{3h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6h^4} & 0 & A^5 & \frac{12h}{4} & B^5 & \frac{-9}{4h} & C^5 & \frac{9}{4h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{12h^2} & E^6 & \frac{3h^2}{4} & F^6 & I^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^6 \dots & \frac{1}{12h} & B^6 \dots & \frac{-9}{4h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{36h^4} & 0 & \frac{12h}{20} & E^7 & \frac{241}{182h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{364h^2}{-1} & 0 & \frac{273h^2}{11} & -A^7 \dots & \frac{27}{182h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6h^4} & 0 & \frac{-1}{6}A^7 \dots & \frac{364h}{121} & \frac{11}{12}A^7 \dots & \frac{1092h}{-164} & -A^7 \dots & \frac{364h}{229} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6}H^8 & \frac{1092h^2}{12} & \frac{11}{12}H^8 & \frac{-164}{273h^2} & -2H^8 & \frac{182h^2}{182h^2} \end{pmatrix}.$$

Dabei wurden für A , B und C folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} A^1 &:= A(h), A^2 := A(2h), \dots, \\ B^1 &:= B(h), B^2 := B(2h), \dots, \\ C^1 &:= C(h), C^2 := C(2h), \dots \end{aligned}$$

Für E , F , G , H und I definieren wir analog

$$\begin{aligned} E^1 &:= E(h/2), E^2 := E(3/2h), \dots, \\ F^1 &:= F(h/2), F^2 := F(3/2h), \dots, \\ G^1 &:= G(h/2), G^2 := G(3/2h), \dots, \\ H^1 &:= H(h/2), H^2 := H(3/2h), \dots, \end{aligned}$$

$$I^1 := I(h/2), I^2 := I(3/2h), \dots$$

Für die Matrix $\mathbf{B}^h \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ erhält man

$$\mathbf{B}^h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D\dots & 0 & \frac{-1}{h^2} & 0 & \frac{-1}{9h^2} & 0 & \frac{1}{24h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & D & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & D & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & D & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & D & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12h^2} & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 & D & 0 & \frac{-4}{3h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{72h^2} & 0 & \frac{11}{144h^2} & 0 & \frac{-1}{12h^2} & 0 & \frac{-83}{72h^2} & 0 & D\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zu bemerken ist hier, dass die Matrix \mathbf{B}^h des Differenzenverfahrens – im Gegensatz zu \mathbf{A}^h – reell ist. Des Weiteren weisen die „...“ in obigen Matrizen darauf hin, dass an den entsprechenden Stellen der Matrizen nicht der vollständige Eintrag zu sehen ist. Der fehlende Rest ist oben den einzelnen Gleichungen zu entnehmen.

4.19 Bemerkung

- a) Bei der Entwicklung des Differenzenverfahrens der Ordnung 4 sind wir von der Existenz hinreichend oft differenzierbarer Funktionen φ und μ ausgegangen. Konkret benötigten wir für die TAYLOREntwicklungen $\varphi \in C^8$ und $\mu \in C^6$.
- b) Wir haben bis jetzt immer nur vom Verfahren „vierter Ordnung“ gesprochen. Streng genommen betrachten wir dabei die Konsistenzordnung des Verfahrens. Für das hergeleitete Differenzenverfahren gilt demnach: Wir haben C^8 -Konsistenz der Ordnung 4 bzgl. φ , während bzgl. μ C^6 -Konsistenz vorliegt – ebenfalls der Ordnung 4. Die Stabilität des Differenzenverfahrens ist hier unbekannt, wir werden jedoch in den Anwendungen sehen, dass für hinreichend kleines h ausreichend gute Ergebnisse erzielt werden können.

Fortsetzungsmethoden

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich allgemein mit dem Problem eines parameterabhängigen Gleichungssystems und der Frage nach der Fortsetzung von dessen Lösung bzgl. eines Parameters. Grundlegendes Hilfsmittel dafür ist der Satz über implizite Funktionen, welcher im ersten Abschnitt mit angegeben ist. Des Weiteren folgen ein paar grundlegende Begriffe und Definitionen. Der nächste Abschnitt befasst sich mit der Frage nach der praktischen Berechnung von Lösungen eines parameterabhängigen Gleichungssystems. Dazu werden zwei Methoden vorgestellt, wobei nur letztere von Interesse sein wird: die sogenannte Pseudo-Bogenlänge-Methode. Unter gewissen Voraussetzungen kann man mithilfe des Satzes über implizite Funktionen zeigen, dass diese Methode aus praktischer Sicht Sinn macht. Veranschaulicht wird das Vorgehen anhand des Beispiels des GELFAND-BRATU-Problems unter Verwendung des NEWTON-Verfahrens. Im letzten Abschnitt geht es um die praktische Berechnung von sogenannten „Umkehrpunkten“ eines parameterabhängigen Gleichungssystems. Anschaulich sind das Punkte auf der Lösungskurve, an denen ein Extremum der Kurve zu finden ist. Auch hier wird wieder das Prinzip der Pseudo-Bogenlänge-Methode verwendet.

5.1 Grundlagen der Parameterfortsetzung

5.1 Definition

- a) Ein BANACH-Raum \mathcal{B} ist ein vollständig, normierter Vektorraum. Die zugehörige Norm wird dabei mit $\|\cdot\|$ bezeichnet.
- b) Für $x_0 \in \mathcal{B}$ sei $\mathcal{K}_\varepsilon(x_0)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius ε um x_0 , d. h.

$$\mathcal{K}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathcal{B} \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}.$$

5.2 Satz (über implizite Funktionen)

Sei \mathcal{B} ein BANACH-Raum und $G : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{B}$ eine Abbildung, die folgenden Eigenschaften genüge:

- $G(u_0, \lambda_0) = 0$ für $u_0 \in \mathcal{B}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$;
- $G_u(u_0, \lambda_0)$ ist nicht-singulär mit beschränkter Inversen, d. h.

$$\exists M > 0 : \|G_u(u_0, \lambda_0)^{-1}\| \leq M;$$

- G und G_u sind für ein $\varepsilon > 0$ LIPSCHITZ-stetig derart, dass gilt:

$$\exists L > 0 \forall u, v \in \mathcal{K}_\varepsilon(u_0) \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}_\varepsilon(\lambda_0) : \begin{aligned} \|G(u, \lambda) - G(v, \mu)\| &\leq L (\|u - v\| + \|\lambda - \mu\|), \\ \|G_u(u, \lambda) - G_u(v, \mu)\| &\leq L (\|u - v\| + \|\lambda - \mu\|). \end{aligned}$$

Dann existiert ein δ mit $0 < \delta \leq \varepsilon$ und eine eindeutige Funktion $u = u(\lambda)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $G(u(\lambda), \lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathcal{K}_\delta(\lambda_0)$;
- (ii) $u(\lambda_0) = u_0$;

(iii) $u \in C(\mathcal{K}_\delta(\lambda_0), \mathcal{B})$.

Beweis. Siehe [3], Kapitel 1.1. □

5.3 Bemerkung

- a) Für die Bezeichnung der Norm in \mathcal{B} und in \mathbb{R}^m wurde im letzten Satz keine Unterscheidung vorgenommen.
- b) Gilt in Satz 5.2 zusätzlich $G_\lambda \in C(\mathcal{K}_\varepsilon(u_0) \times \mathcal{K}_\varepsilon(\lambda_0))$, dann ist die Funktion $u = u(\lambda)$ stetig differenzierbar in λ .
- c) In unserer Anwendung haben wir für $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ und für $m = 1$. Wir verwenden in diesem Fall folgende Version des Satzes über implizite Funktionen: Die Abbildung $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ genüge den Bedingungen
- $G(u_0, \lambda_0) = 0$ für $u_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$;
 - $G_u(u_0, \lambda_0)$ ist invertierbar;
 - G ist stetig differenzierbar in einer Umgebung von (u_0, λ_0) .

Dann existiert eine eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $u = u(\lambda)$ mit $G(u(\lambda), \lambda) = 0$ in einer Umgebung von λ_0 und $u(\lambda_0) = u_0$.

- d) Für die Ableitungen wurden hier die Abkürzungen

$$G_u := \frac{dG}{du} \quad \text{und} \quad G_\lambda := \frac{dG}{d\lambda}$$

verwendet.

5.4 Definition

Die lokal eindeutige Lösung $u = u(\lambda)$ aus dem Satz über implizite Funktionen mit $u(\lambda_0) = u_0$ nennt man **Lösungszweig**. Dabei wird u_0 als **isolierte Lösung** von $G(u, \lambda_0) = 0$ bezeichnet.

Im Folgenden betrachten wir nun Probleme der Form

$$G(u, \lambda) = 0, \tag{5.1}$$

wobei $u, G(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, d. h. $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Man bezeichnet (5.1) als parameterabhängiges Gleichungssystem mit dem skalaren Parameter λ . Definiert man $x := (u, \lambda)$, so lässt sich obiges Problem schreiben als

$$G(x) = 0, \quad G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Des Weiteren nehmen wir an, dass G in der jeweiligen Situation hinreichend glatt ist, um den Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen zu genügen.

5.5 Definition

Eine Lösung x_0 von $G(x) = 0$ heißt **regulär**, falls die JACOBI-Matrix

$$G_x(x_0) := J_G(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n+1}$$

vollen Rang hat, d. h. $\text{rank}(G_x(x_0)) = n$.

5.6 Lemma

In der Parameterformulierung $G(u, \lambda) = 0$ ergibt sich für eine reguläre Lösung $x_0 = (u_0, \lambda_0)$ folgende Charakterisierung:

$$\text{rank}(G_x(x_0)) = \text{rank}(G_u(x_0), G_\lambda(x_0)) = n \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \ G_u(x_0) \text{ ist invertierbar,} \\ \text{oder} \\ (ii) \ \dim \mathcal{N}(G_u(x_0)) = 1 \wedge G_\lambda(x_0) \notin \mathcal{R}(G_u(x_0)). \end{cases}$$

Dabei bezeichnen $\mathcal{N}(G_u(x_0))$ den Kern und $\mathcal{R}(G_u(x_0))$ den Wertebereich von $G_u(x_0)$.

Beweis. \Rightarrow : Es gelte $\text{rank}(G_x(x_0)) = n$. Dann gilt entweder (i) oder nicht. Falls (i) zutrifft, sind wir fertig. Andernfalls folgt $\dim \mathcal{N}(G_u(x_0)) = 1$, denn sonst ist die Voraussetzung $\text{rank}(G_x(x_0)) = n$ nicht erfüllbar. Aber dann muss auch $G_\lambda(x_0) \notin \mathcal{R}(G_u(x_0))$ gelten.

\Leftarrow : Falls (i) erfüllt ist, folgt sofort $\text{rank}(G_x(x_0)) = n$. Gilt andererseits (ii), so ist $G_\lambda(x_0)$ keine Linearkombination der Spalten von $G_u(x_0)$. Und da $\mathcal{N}(G_u(x_0))$ die Dimension 1 hat, sind $n - 1$ Spalten von $G_u(x_0)$ linear unabhängig und deswegen sind insgesamt n Spalten von $(G_u(x_0), G_\lambda(x_0))$ linear unabhängig, also folgt $\text{rank}(G_x(x_0)) = n$. □

5.7 Satz

Sei $x_0 = (u_0, \lambda_0)$ eine reguläre Lösung von $G(x) = 0$. Dann existiert in einer Umgebung von x_0 eine eindeutige, eindimensionale Lösungskurve $x = x(s)$ von $G(x) = 0$ mit $x(0) = x_0$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $x_0 = (u_0, \lambda_0)$ eine reguläre Lösung, also gilt $\text{rank}(G_x(x_0)) = \text{rank}(G_u(x_0), G_\lambda(x_0)) = n$.

- (i) Falls $G_u(x_0)$ invertierbar ist, so folgt die eindeutige Existenz einer Lösungskurve $u = u(\lambda)$ in einer Umgebung von λ_0 aus dem Satz über implizite Funktionen. Dabei gilt $G(u(\lambda), \lambda) = 0$ und $u(\lambda_0) = u_0$. Setzt man $s := \lambda_0 - \lambda$ und $x(s) := (u(\lambda_0 - s), \lambda_0 - s)$, so erhält man die gewünschte Lösungskurve von $G(x) = 0$ mit $x(0) = x_0$.
- (ii) Im Fall, dass $G_u(x_0)$ singularär ist, vertauscht man die Spalten der JACOBI-Matrix $G_x(x_0)$ entsprechend, um wie in (i) eine eindeutige Lösung zu erhalten, die diesmal lokal von einer Komponente von u parametrisiert wird.

Insgesamt erhält man eine eindeutige Lösungskurve $x = x(s)$ von $G(x) = 0$ mit der Eigenschaft $x(0) = x_0$. □

5.8 Bemerkung

Im Fall (ii) in obigem Beweis, d. h.

$$\dim \mathcal{N}(G_u(x_0)) = 1 \wedge G_\lambda(x_0) \notin \mathcal{R}(G_u(x_0)),$$

bezeichnet man x_0 als **einfachen Umkehrpunkt**. Dieser Fall wird später noch genauer diskutiert.

5.2 Fortsetzung von Lösungen

5.2.1 Einfache Parameterfortsetzung

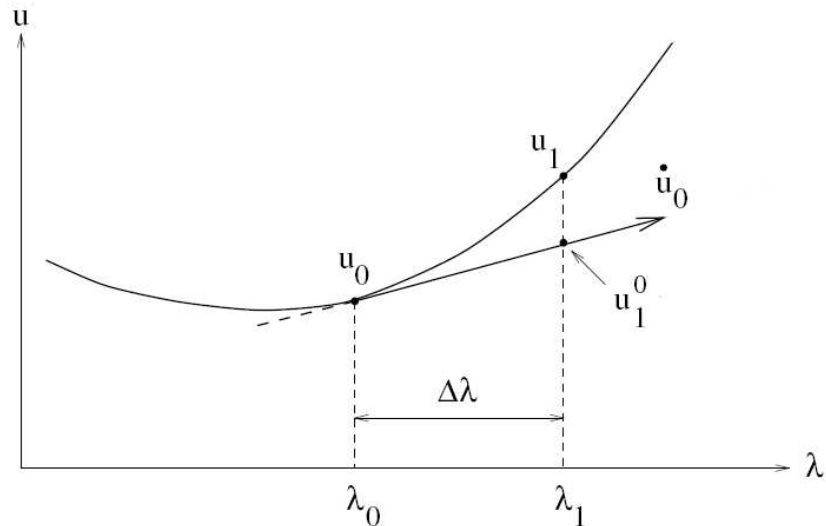
In diesem Abschnitt soll es darum gehen, wie man Lösungen in Abhängigkeit eines Parameters λ numerisch berechnen kann. Grundlage ist hier wieder das Problem

$$G(u, \lambda) = 0, \tag{5.2}$$

wobei $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass wir eine Lösung (u_0, λ_0) von (5.2) haben und dass G die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Demnach existiert lokal eine eindeutige Lösung $u = u(\lambda)$ von (5.2). Des Weiteren sei auch der zugehörige Richtungsvektor $\dot{u}_0 := \dot{u}(\lambda_0)$ gegeben, wobei die Bezeichnung $\dot{u} := \frac{du}{d\lambda}$ verwendet wurde. Ziel ist es nun, eine weitere Lösung u_1 zu berechnen an einer Stelle $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ mit einer gegebenen Schrittweite $\Delta\lambda$. Abbildung 5.1 veranschaulicht die Methode dieser Parameterfortsetzung.

Um die Gleichung

$$G(u_1, \lambda_1) = 0$$


 Abbildung 5.1: Grafische Interpretation der Parameterfortsetzung.¹

mit festem λ_1 für u_1 numerisch zu berechnen, verwenden wir das NEWTON-Verfahren

$$\begin{cases} G_u(u_1^i, \lambda_1) \Delta u_1^i = -G(u_1^i, \lambda_1), \\ u_1^{i+1} = u_1^i + \Delta u_1^i, \end{cases} \quad (5.3)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$ Als Startwert wählen wir hierbei $u_1^0 := u_0 + \Delta\lambda \dot{u}_0$.

5.9 Bemerkung

- Falls $G_u(u_1, \lambda_1)$ invertierbar ist und $\Delta\lambda$ hinreichend klein ist, so garantiert der lokale Konvergenzsatz des NEWTON-Verfahrens, dass obige Iteration lokal quadratisch konvergent ist (vgl. Satz A.2).
- Nach der Konvergenz für u_1 erhält man den nächsten Richtungsvektor \dot{u}_1 , in dem man folgende Gleichung löst:

$$G_u(u_1, \lambda_1) \dot{u}_1 = -G_\lambda(u_1, \lambda_1).$$

Dies sieht man, wenn man $G(u(\lambda), \lambda) = 0$ bzgl. λ differenziert, d. h. berechne

$$\frac{d}{d\lambda} G(u(\lambda), \lambda)|_{\lambda=\lambda_1} = 0.$$

Das praktische Vorgehen der „einfachen“ Parameterfortsetzung bzgl. λ soll nun anhand des folgenden Algorithmus dargestellt werden.

5.10 Algorithmus (Einfache Parameterfortsetzung)

- Gegeben seien (u_0, λ_0) als Lösung von $G(u, \lambda) = 0$ und \dot{u}_0 sowie $\Delta\lambda > 0$. Setze $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$.
- Löse die Gleichung $G(u, \lambda_1) = 0$ (λ_1 fest) mit dem NEWTON-Verfahren mit dem Startwert $u_0 + \Delta\lambda \dot{u}_0$, um u_1 zu erhalten.
- Berechne \dot{u}_1 .

¹Quelle: [3], S. 19.

(3) Setze $u_0 = u_1$, $\dot{u}_0 = \dot{u}_1$, $\lambda_1 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ und gehe zu (1).

5.11 Beispiel

Wir betrachten folgendes Randwertproblem, das sogenannte GELFAND-BRATU-Problem:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0, & x \in [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

mit einem reellen Parameter λ . Falls $\lambda = 0$, so ist $u \equiv 0$ eine Lösung des Problems. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass für $|\lambda|$ klein ein eindeutiger Lösungszweig $u = u(\lambda)$ existiert, der das GELFAND-BRATU-Problem löst (vgl. [3]). Demnach ist $u \equiv 0$ eine isolierte Lösung.

Für die Diskretisierung führt man für ein $N \in \mathbb{N}$ das Gitter

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \\ x_j - x_{j-1} &= h, \quad 1 \leq j \leq N, \quad h := 1/N \end{aligned}$$

ein und erhält mit der gewöhnlichen Approximation der zweiten Ableitung die diskreten Gleichungen

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \lambda e^{u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

wobei $u_0 = u_N = 0$ gilt. Setzt man

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix},$$

so kann man das diskrete Problem in der Form

$$G(U, \lambda) = 0, \quad G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n := N-1)$$

schreiben. Im Detail hat das Gleichungssystem die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} (u_2 - 2u_1 + u_0) + \lambda e^{u_1} \\ \frac{1}{h^2} (u_3 - 2u_2 + u_1) + \lambda e^{u_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{h^2} (u_N - 2u_{N-1} + u_{N-2}) + \lambda e^{u_{N-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Parameterfortsetzung nimmt man an, man hat eine Lösung (U_0, λ_0) mit dem entsprechenden Richtungsvektor \dot{U}_0 gegeben. Wir wollen nun U_1 berechnen an der Stelle $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$. Dazu verwenden wir das NEWTON-Verfahren (5.3) mit dem Startvektor $U_1^0 = U_0 + \Delta\lambda \dot{U}_0$. Mit Hilfe der Konvergenz des NEWTON-Verfahrens bekommt man U_1 und \dot{U}_1 (vgl. Bemerkung 5.9). Wiederholt man diese Prozedur, erhält man eine Folge von Lösungen U_2, U_3, U_4 usw.

Die JACOBI-Matrix G_U hat in diesem Fall folgende Gestalt:

$$G_U(U, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{h^2} + \lambda e^{u_1} & \frac{1}{h^2} & & & & & & \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} + \lambda e^{u_2} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \frac{1}{h^2} & \\ & & & & & & & -\frac{2}{h^2} + \lambda e^{u_{N-1}} \end{pmatrix}.$$

Abbildung 5.2 veranschaulicht einige Lösungen unseres Problems für verschiedene Werte von λ .

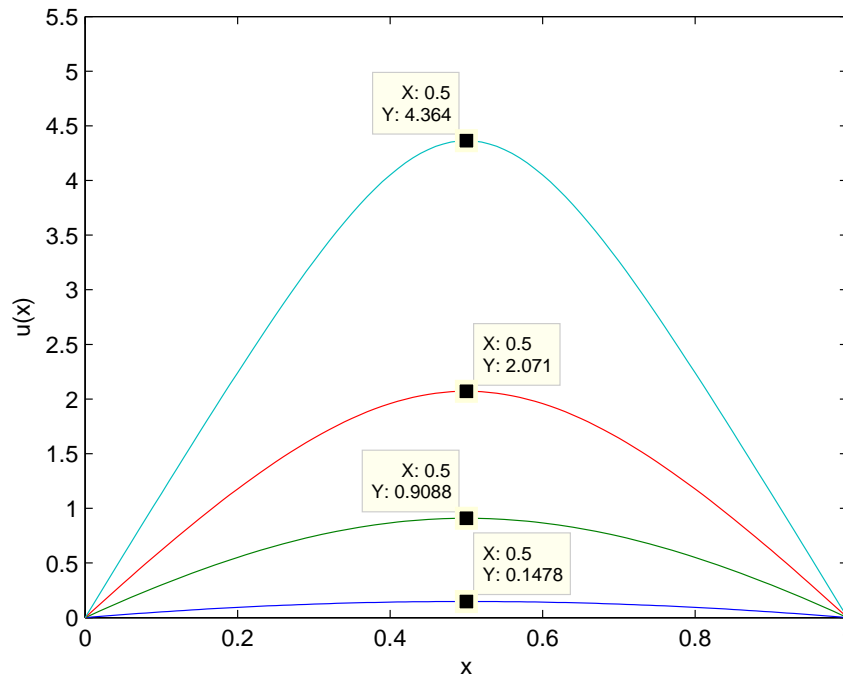


Abbildung 5.2: Lösungen des GELFAND-BRATU-Problems für $\lambda = 1.045, 3.4, 2.899, 0.8397$.

5.12 Bemerkung

Die oben beschriebene Methode der Parameterfortsetzung bzgl. λ ist aber im Allgemeinen nicht ohne weiteres durchführbar. Denn an regulären Lösungspunkten $x^* = (u^*, \lambda^*)$ von $G(x) = 0$, an welchen die Matrix G_u singulär ist, macht das NEWTON-Verfahren so keinen Sinn. In diesem Fall liegt ein einfacher Umkehrpunkt vor, das bedeutet, es gilt

$$\dim \mathcal{N}(G_u(x^*)) = 1 \wedge G_\lambda(x^*) \notin \mathcal{R}(G_u(x^*)) \quad (\text{vgl. Lemma 5.6}).$$

So ein Fall ist in Abbildung 5.3 für das GELFAND-BRATU-Problem dargestellt. Der „kritische“ Wert für λ^* liegt hier bei etwa 3.5. Diese „einfache“ Parameterfortsetzung bzgl. λ ist also nur bis zu einem gewissen Punkt möglich, so dass eine sukzessive Verkleinerung der Schrittweite $\Delta\lambda$ zu einem „Steckenbleiben“ des Verfahrens führt.

Man sieht an diesem Beispiel übrigens, dass für einen Wert λ zwei verschiedene Lösungen des Problems existieren können.

5.2.2 Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung

Um das Problem an den Umkehrpunkten mit G_u singulär zu beheben und den Lösungspfad weiter zu verfolgen, führt man die sogenannte **Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung** von H. B. KELLER ein (vgl. [3], [13]), welche im Folgenden erläutert wird. Das Scheitern der Parameterfortsetzung bzgl. λ an den Umkehrpunkten kann verhindert werden, in dem man einen zusätzlichen Parameter s einführt, so dass sowohl u als auch λ von s abhängen, d. h. $(u, \lambda) = (u(s), \lambda(s))$ soll eine Lösung sein von

$$G(u, \lambda) = 0.$$

Für eine kurze Herleitung dieser Methode, nehmen wir an, dass $x = (u, \lambda)$ stetig differenzierbar von dem neuen Parameter s abhängt. Dann folgt durch ableiten der Gleichung $G(u, \lambda) = 0$ nach

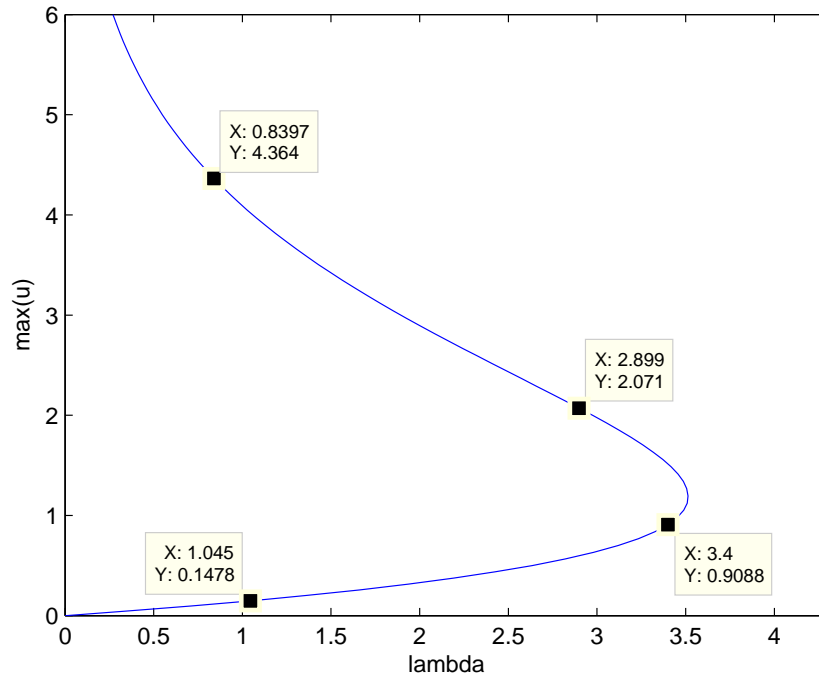


Abbildung 5.3: Bifurkationsdiagramm für das GELFAND-BRATU-Problem.

s folgende Gleichheit:

$$\frac{dG(u(s), \lambda(s))}{ds} = G_u \dot{u} + G_\lambda \dot{\lambda} = 0,$$

oder äquivalent dazu in der kompakten Schreibweise: Differenziere $G(x) = 0$ nach s und erhalte

$$\frac{dG(x(s))}{ds} = G_x \dot{x} = 0.$$

Unsere gesuchte Lösungskurve $x = x(s)$ parametrisieren wir nun nach der Bogenlänge, das bedeutet, wir erhalten mit der EUKLIDISCHEN Norm $\|\cdot\|$ die Gleichung

$$\|\dot{x}\|^2 = \|\dot{u}\|^2 + |\dot{\lambda}|^2 = 1. \quad (5.4)$$

5.13 Bemerkung

Da wir für $G(x) = G(u, \lambda) = 0$ einen zusätzlichen Parameter s eingeführt haben, brauchen wir eine zusätzliche Gleichung, um wieder ein Gleichungssystem der Form $G(x) = 0$, $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu erhalten. Dazu verwendet man die Normierungsbedingung (5.4) und führt das erweiterte System

$$\tilde{G}(x(s), s) := \begin{pmatrix} G(x(s)) \\ \|\dot{x}(s)\|^2 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

ein, wobei $\tilde{G} : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Für das numerische Vorgehen verwenden wir bei dem erweiterten System nicht die Parametrisierung nach der Bogenlänge, sondern die nach der Pseudo-Bogenlänge. D. h. wir verwenden eine Approximation von Gleichung (5.4) und nutzen dafür die äquivalente Formulierung

$$\dot{x}^t(s) \dot{x}(s) = 1 \quad (5.5)$$

aus. Für kleines $\Delta s > 0$ ersetzen wir in (5.5) den linken Faktor durch den entsprechenden Differenzenquotienten und erhalten dadurch eine quadratfreie Formulierung der Normierungsbedingung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(s + \Delta s) - x(s)}{\Delta s} \right)^t \dot{x}(s) &= 1, \Leftrightarrow \\ (x(s + \Delta s) - x(s))^t \dot{x}(s) &= \Delta s. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Mit Gleichung (5.6) erweitern wir nun $G(x) = G(u, \lambda) = 0$ auf das System

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G(x(s + \Delta s)) \\ (x(s + \Delta s) - x(s))^t \dot{x}(s) - \Delta s \end{pmatrix} &= 0, \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} G(x(s_1)) \\ (x(s_1) - x(s_0))^t \dot{x}(s_0) - (s_1 - s_0) \end{pmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

wobei $s_0 := s$ und $s_1 := s_0 + \Delta s$ gesetzt wurde.

Letztes Gleichungssystem wird die Grundlage für die Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung sein. Führt man nun einen neuen Parameter s für die Ausgangsgleichung $G(x) = G(u, \lambda) = 0$ ein, so erweitern wir diese Gleichung zu dem System (vgl. Bemerkung 5.13)

$$F(x, s) := \begin{pmatrix} G(x) \\ N(x, s) \end{pmatrix} = 0,$$

mit der Normierung

$$N(x, s) := (x - x_0)^t \dot{x}_0 - (s - s_0)$$

für gegebene Werte x_0 , \dot{x}_0 und s_0 . Für die praktische Umsetzung der Kurvenverfolgung sei eine Lösung $x_0 = (u_0, \lambda_0)$ von $G(x) = G(u, \lambda) = 0$ inklusive dem zugehörigen Richtungsvektor $\dot{x}_0 = (\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ gegeben. Die Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung löst dann folgendes Gleichungssystem für $x_1 = (u_1, \lambda_1)$ mit einem festen $\Delta s > 0$:

$$\begin{cases} G(u_1, \lambda_1) = 0, \\ (u_1 - u_0)^t \dot{u}_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \dot{\lambda}_0 - \Delta s = 0, \end{cases}$$

bzw. äquivalent dazu in der kompakten Form mit $\|\dot{x}_0\| = 1$:

$$\begin{cases} G(x_1) = 0, \\ (x_1 - x_0)^t \dot{x}_0 - \Delta s = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Wendet man nun auf das Gleichungssystem (5.7) das NEWTON-Verfahren an, so erhält man folgende Iteration:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G_x(x_1^i) \\ \dot{x}_0^t \end{pmatrix} \Delta x_1^i = - \begin{pmatrix} G(x_1^i) \\ (x_1^i - x_0)^t \dot{x}_0 - \Delta s \end{pmatrix}, \\ x_1^{i+1} = x_1^i + \Delta x_1^i, \end{cases}$$

$i = 0, 1, 2, \dots$, mit dem Startwert $x_1^0 := x_0$.

5.14 Satz

Sei x_0 eine reguläre Lösung von $G(x) = 0$ mit $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, d. h. es gilt

- $G(x_0) = 0$,
- $\text{rank}(G_x(x_0)) = n$.

Dann ist die JACOBI-Matrix

$$\begin{pmatrix} G_x(x_0) \\ \dot{x}_0^t \end{pmatrix}$$

des Pseudo-Bogenlänge-Systems (5.7) invertierbar in x_0 .

Beweis. Nach Satz 5.7 existiert lokal eine eindeutige, eindimensionale Lösungskurve $x = x(\tilde{s})$ von $G(x) = 0$ mit $x(0) = x_0$. Differenziert man $G(x(\tilde{s})) = 0$ nach \tilde{s} , so erhält man speziell für x_0 die Gleichung $G_x(x_0)\dot{x}_0 = 0$. Da $\dim(\mathcal{N}(G_x(x_0))) = 1$, folgt $\mathcal{N}(G_x(x_0)) = \text{span}(\dot{x}_0)$. Angenommen, die JACOBI-Matrix

$$\begin{pmatrix} G_x(x_0) \\ \dot{x}_0^t \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

ist singulär, d. h. die Spalten von (5.8) sind nicht linear unabhängig. Dann existiert ein Vektor $z \neq 0$, für den gilt:

$$G_x(x_0)z = 0 \text{ und } \dot{x}_0^t z = 0.$$

Daraus folgt $z \in \mathcal{N}(G_x(x_0)) = \text{span}(\dot{x}_0)$, also gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, für die $z = c\dot{x}_0$ gilt. Damit folgt dann aber

$$0 = \dot{x}_0^t z = c\dot{x}_0^t \dot{x}_0 = c\|\dot{x}_0\|^2 = c,$$

so dass $z = 0$ gelten muss, was einen Widerspruch darstellt. □

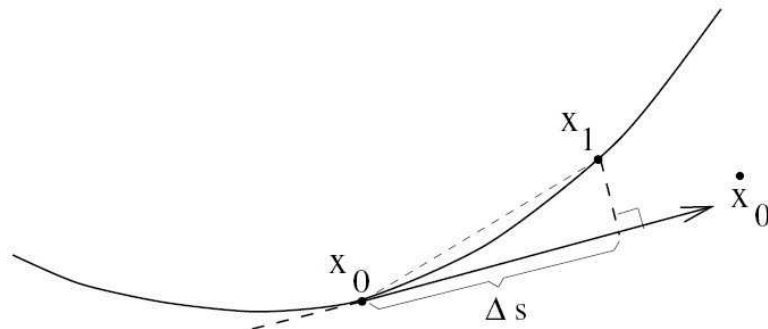


Abbildung 5.4: Grafische Interpretation der Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung.²

Schreibt man (5.7) für ein gegebenes s_0 in der Form

$$F(x, s) = \begin{pmatrix} G(x) \\ (x - x_0)^t \dot{x}_0 - (s - s_0) \end{pmatrix} = 0, \quad F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

so erhält man folgendes

5.15 Korollar

Sei (x_0, s_0) eine Lösung von $F(x, s) = 0$ und x_0 eine reguläre Lösung von $G(x) = 0$. Dann existiert lokal eine eindeutige, eindimensionale Lösungskurve $x = x(s)$ mit $F(x(s), s) = 0$ und $x(s_0) = x_0$, also auch mit $G(x(s)) = 0$.

Beweis. Nach Satz 5.14 ist $F_x(x_0, s_0)$ invertierbar. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz über implizite Funktionen. □

²Quelle: [3], S. 21.

5.16 Bemerkung

- a) Nach Konvergenz für x_1 mittels des NEWTON-Verfahrens erhält man den nächsten Richtungsvektor \dot{x}_1 durch Differentiation von

$$F(x(s), s) = \begin{pmatrix} G(x(s)) \\ (x(s) - x(s_0))^t \dot{x}(s_0) - (s - s_0) \end{pmatrix} = 0$$

nach s , um folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} G_x(x_1) \\ \dot{x}_0^t \end{pmatrix} \dot{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anschließend muss \dot{x}_1 normiert werden, um wieder $\|\dot{x}_1\| = 1$ zu erhalten.

- b) Abbildung 5.4 veranschaulicht in einfacher Weise die Methode der Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung für festes $\Delta s > 0$.
- c) Die Normierungsbedingung

$$(x_1 - x_0)^t \dot{x}_0 - (s_1 - s_0) = (x_1 - x_0)^t \dot{x}_0 - \Delta s = 0$$

kann man wie folgt interpretieren: Der neue Punkt x_1 liegt in der Ebene, welche senkrecht zu dem durch x_0 verlaufenden Tangentenvektor \dot{x}_0 steht. Der Abstand Δs ergibt sich aus dem Schnitt von dieser Ebene und dem Tangentenvektor (vgl. Abbildung 5.5).

- d) Das Diagramm in Abbildung 5.3 für das GELFAND-BRATU-Problem wurde mithilfe der Pseudo-Bogenlänge-Methode erstellt.

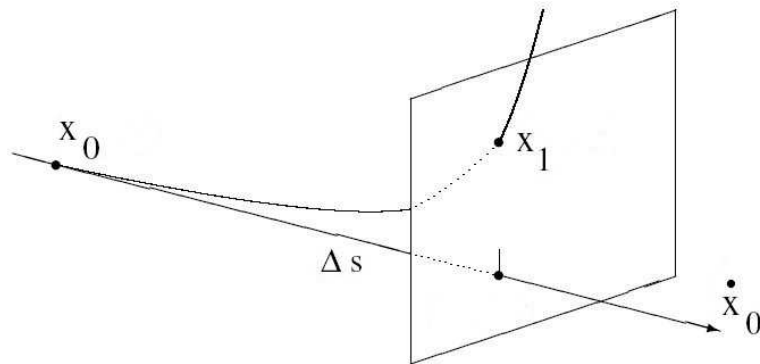


Abbildung 5.5: Grafische Interpretation der Normierungsbedingung.³

5.17 Algorithmus (Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung)

- (0) Gegeben seien (x_0, s_0) als Lösung von $F(x, s) = 0$ und \dot{x}_0 sowie $\Delta s > 0$. Setze $s_1 = s_0 + \Delta s$.
- (1) Löse die Gleichung $F(x, s_1) = 0$ (s_1 fest) mit dem NEWTON-Verfahren mit dem Startwert x_0 , um x_1 zu erhalten.
- (2) Berechne \dot{x}_1 .
- (3) Setze $x_0 = x_1$, $\dot{x}_0 = \dot{x}_1$, $s_1 = s_1 + \Delta s$ und gehe zu (1).

³Quelle: [1], S. 94.

5.3 Umkehrpunkte

In diesem Abschnitt soll es um die Charakterisierung und Berechnung von Umkehrpunkten in einem parameterabhängigen System gehen. Zunächst steht die praktische Berechnung eines Umkehrpunktes im Vordergrund. Durch Einführen eines zusätzlichen Parameters soll anschließend eine Ortskurve für die Umkehrpunkte, eine sogenannte „kritische Stabilitätskurve“ berechnet werden.

5.3.1 Berechnung von Umkehrpunkten

Gegeben sei wieder das Problem

$$G(x) = 0, \quad G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $x = (u, \lambda)$. Des Weiteren sei $x_0 = (u_0, \lambda_0)$ eine reguläre Lösung von $G(x) = 0$ mit der Eigenschaft

$$\dim \mathcal{N}(G_u(x_0)) = 1 \wedge G_\lambda(x_0) \notin \mathcal{R}(G_u(x_0)),$$

d. h. x_0 ist ein einfacher Umkehrpunkt.

5.18 Lemma

Seien G und $x = (u, \lambda)$ zweimal stetig differenzierbar, wobei $x = x(s)$ eine gegebene Lösungskurve von $G(x) = 0$ sei. Dann gilt für den einfachen Umkehrpunkt $x_0 = (u_0, \lambda_0)$:

a) $\dot{\lambda}_0 = 0,$

b) Für $\Phi \in \mathcal{N}(G_u(x_0))$ und $\Psi \in \mathcal{N}((G_u(x_0))^t)$ gilt

$$\ddot{\lambda}_0 = \frac{-\Psi^t G_{uu}(x_0) \Phi \Phi}{\Psi^t G_\lambda(x_0)}.$$

Beweis. a) Differenziert man $G(u(s), \lambda(s)) = 0$ nach s , so erhält man

$$G_u(u(s), \lambda(s)) \dot{u}(s) + G_\lambda(u(s), \lambda(s)) \dot{\lambda}(s) = 0. \quad (5.9)$$

Für x_0 hat man also insbesondere

$$G_u(x_0) \dot{u}_0 = -\dot{\lambda}_0 G_\lambda(x_0).$$

Da x_0 ein einfacher Umkehrpunkt ist, gilt $G_\lambda(x_0) \notin \mathcal{R}(G_u(x_0))$. Also muss $\dot{\lambda}_0 = 0$ gelten.

b) Differenziert man (5.9) nach s , so erhalten wir für x_0

$$G_u(x_0) \ddot{u}_0 + G_\lambda(x_0) \ddot{\lambda}_0 + G_{uu}(x_0) \dot{u}_0 \dot{u}_0 + 2G_{u\lambda}(x_0) \dot{u}_0 \dot{\lambda}_0 + G_{\lambda\lambda}(x_0) \dot{\lambda}_0 \dot{\lambda}_0 = 0. \quad (5.10)$$

Aus Teil a) in diesem Beweis sieht man, dass $G_u(x_0) \dot{u}_0 = 0$ gilt. Und da $\dim \mathcal{N}(G_u(x_0)) = 1$, hat man für $\Phi := \dot{u}_0$ folgende Charakterisierung für den Kern:

$$\mathcal{N}(G_u(x_0)) = \text{span}(\Phi).$$

Für $(G_u(x_0))^t$ sei

$$\mathcal{N}((G_u(x_0))^t) = \text{span}(\Psi),$$

für ein $\Psi \in \mathbb{R}^n$. Multipliziert man (5.10) mit Ψ^t und verwendet die Eigenschaften $\dot{\lambda}_0 = 0$ (aus Teil a)) und $\Psi^t G_u(x_0) = 0$, so erhält man

$$\Psi^t G_\lambda(x_0) \ddot{\lambda}_0 + \Psi^t G_{uu}(x_0) \Phi \Phi = 0.$$

Aus $G_\lambda(x_0) \notin \mathcal{R}(G_u(x_0))$ folgt außerdem $\Psi^t G_\lambda(x_0) \neq 0$ und so erhält man schließlich

$$\ddot{\lambda}_0 = \frac{-\Psi^t G_{uu}(x_0) \Phi \Phi}{\Psi^t G_\lambda(x_0)}.$$

□

5.19 Definition

Falls $\ddot{\lambda}_0 \neq 0$, so heißt obiges x_0 **einfacher quadratischer Umkehrpunkt**.

Um in der Praxis einen einfachen quadratischen Umkehrpunkt zu berechnen, betrachtet man folgendes erweitertes System:

$$\begin{cases} G(u, \lambda) = 0, \\ G_u(u, \lambda)\Phi = 0, \\ \Psi^t\Phi - 1 = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

mit einem fest gewählten Vektor $\Psi \in \mathbb{R}^n$. Die Funktion G sei hier und im Folgenden zweimal stetig differenzierbar. Definiert man für $y := (u, \lambda, \Phi)$ die Abbildung

$$T(y) := \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ G_u(u, \lambda)\Phi \\ \Psi^t\Phi - 1 \end{pmatrix},$$

so hat das System (5.11) die Form

$$T(y) = 0, \quad T : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}.$$

5.20 Satz

Sei $y_0 = (u_0, \lambda_0, \Phi_0)$ eine Lösung von $T(y) = 0$ und $x_0 = (u_0, \lambda_0)$ ein einfacher quadratischer Umkehrpunkt von dem Problem $G(x) = 0$. Dann ist die JACOBI-Matrix

$$T_y(y_0) = \begin{pmatrix} G_u(x_0) & G_\lambda(x_0) & 0 \\ G_{uu}(x_0)\Phi_0 & G_{u\lambda}(x_0)\Phi_0 & G_u(x_0) \\ 0 & 0 & \Psi^t \end{pmatrix}$$

invertierbar.

Beweis. Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ betrachte

$$G_u(x_0)v + G_\lambda(x_0)c = 0, \quad (5.12)$$

$$G_{uu}(x_0)\Phi_0 v + G_{u\lambda}(x_0)\Phi_0 c + G_u(x_0)w = 0, \quad (5.13)$$

$$\Psi^t w = 0. \quad (5.14)$$

Wegen $G_\lambda(x_0) \notin \mathcal{R}(G_u(x_0))$ folgt aus (5.12) $c = 0$ und somit existiert ein $r_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$v = r_1\Phi_0.$$

Multipliziert man für $\Psi_0 \in \mathcal{N}((G_u(x_0))^t)$ Gleichung (5.13) von links mit Ψ_0^t , so erhält man

$$r_1\Psi_0^t G_{uu}(x_0)\Phi_0\Phi_0 = 0.$$

Da nach Voraussetzung $\Psi_0^t G_{uu}(x_0)\Phi_0\Phi_0 \neq 0$ (vgl. Lemma 5.18 b)), muss $r_1 = 0$ gelten, also haben wir $v = 0$. Mit (5.13) folgert man

$$G_u(x_0)w = 0,$$

d. h. es existiert ein $r_2 \in \mathbb{R}$ mit $w = r_2\Phi_0$.

Aus der letzten Gleichung (5.14) erhält man noch $r_2 = 0$ und somit gilt insgesamt

$$v = w = 0 \text{ und } c = 0.$$

Damit sind die Spalten von $T_y(y_0)$ linear unabhängig und $T_y(y_0)$ ist invertierbar. □

5.21 Bemerkung

- a) Der letzte Satz motiviert die Anwendung des NEWTON-Verfahrens für die Berechnung eines einfachen quadratischen Umkehrpunktes. Nach dem lokalen Konvergenzsatz (vgl. Satz A.2) existiert eine Umgebung U von (u_0, λ_0, Φ_0) mit
- (i) (u_0, λ_0, Φ_0) ist einzige Lösung von $T(u, \lambda, \Phi) = 0$ in U ;
 - (ii) das an beliebiger Stelle $(u^0, \lambda^0, \Phi^0) \in U$ gestartete NEWTON-Verfahren konvergiert lokal quadratisch gegen (u_0, λ_0, Φ_0) .
- b) Der in Abbildung 5.3 mit dem NEWTON-Verfahren berechnete Wert für λ^* des Umkehrpunktes beim GELFAND-BRATU-Problem ist 3.5136.

5.22 Bemerkung (Wahl des Startpunktes)

Für die Wahl des Startpunktes $y^0 = (u^0, \lambda^0, \Phi^0)$ des NEWTON-Verfahrens bei dem Problem $T(y) = T(u, \lambda, \Phi) = 0$ gehen wir wie folgt vor: Gilt für drei aufeinanderfolgende Lösungspunkte (u_1, λ_1) , (u_2, λ_2) und (u_3, λ_3) von $G(u, \lambda) = 0$ die Bedingung

$$(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1) < 0,$$

dann setzen wir für den Startwert

$$u^0 := u_2, \quad \lambda^0 := \lambda_2, \quad \Phi^0 := \frac{u_3 - u_2}{\|u_3 - u_2\|}.$$

Für Ψ können wir nun ebenso eine Wahl treffen: $\Psi := \Phi^0$. Damit haben wir in dem Gleichungssystem (5.11) lediglich noch einen Defekt in der zweiten Zeile und können das NEWTON-Verfahren zur Berechnung des Umkehrpunktes $y_0 = (u_0, \lambda_0, \Phi_0)$ starten.

5.3.2 Ortskurve von Umkehrpunkten

Für die Berechnung einer Ortskurve von Umkehrpunkten verwenden wir die Pseudo-Bogenlänge-Methode. Dazu wird angenommen, dass unser ursprüngliches Problem $G(u, \lambda) = 0$ von einem weiteren Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ abhängt. Führen wir diesen ein, so hat das Problem die Gestalt

$$G(u, \lambda, \mu) = 0.$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, auch μ als unbekannte Größe aufzufassen und für $z := (u, \lambda, \Phi, \mu)$ einen Lösungsweig

$$z(s) = (u(s), \lambda(s), \Phi(s), \mu(s))$$

für das Problem

$$T(z) = T(y, \mu) = \begin{pmatrix} G(u, \lambda, \mu) \\ G_u(u, \lambda, \mu)\Phi \\ \Psi^t\Phi - 1 \end{pmatrix} = 0, \quad T : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

zu berechnen. Dazu verwenden wir wieder das Pseudo-Bogenlänge-System. Das bedeutet, wir erweitern erneut unsere Ausgangsgleichung – diesmal $T(z) = 0$ – um die Normierungsbedingung

$$(z - z_0)^t \dot{z}_0 - \Delta s = (u - u_0)^t \dot{u}_0 + (\lambda - \lambda_0)^t \dot{\lambda}_0 + (\Phi - \Phi_0)^t \dot{\Phi}_0 + (\mu - \mu_0)^t \dot{\mu}_0 - \Delta s = 0.$$

Wie zuvor ist dabei $z_0 = (u_0, \lambda_0, \Phi_0, \mu_0)$ eine gegebene Lösung von $T(z) = 0$ mit dem zugehörigen Richtungsvektor $\dot{z}_0 = (\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0, \dot{\Phi}_0, \dot{\mu}_0)$. Kompakt geschrieben erhalten wir für $\Delta s = s - s_0$ (s_0 gegeben) mit

$$H(z, s) := \begin{pmatrix} T(z) \\ (z - z_0)^t \dot{z}_0 - (s - s_0) \end{pmatrix}$$

ein Problem der Form

$$H(z, s) = 0, \quad H : \mathbb{R}^{2n+3} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}.$$

In der Praxis lösen wir für z_1 mit einem festen $\Delta s > 0$ das Gleichungssystem

$$\begin{cases} T(z_1) = 0, \\ (z_1 - z_0)^t \dot{z}_0 - \Delta s = 0 \quad (\|\dot{z}_0\| = 1) \end{cases} \quad (5.15)$$

wieder mit dem NEWTON-Verfahren, d. h. wir erhalten folgende Iteration:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} T_z(z_1^i) \\ \dot{z}_0^t \end{pmatrix} \Delta z_1^i = - \begin{pmatrix} T(z_1^i) \\ (z_1^i - z_0)^t \dot{z}_0 - \Delta s \end{pmatrix}, \\ z_1^{i+1} = z_1^i + \Delta z_1^i, \end{cases}$$

$i = 0, 1, 2, \dots$, mit dem Startwert $z_1^0 := z_0$.

5.23 Bemerkung

a) Die JACOBI-Matrix von T bzgl. $z = (u, \lambda, \Phi, \mu)$ hat an der Stelle z_0 die Gestalt

$$T_z(z_0) = \begin{pmatrix} G_u(x_0, \mu_0) & G_\lambda(x_0, \mu_0) & 0 & G_\mu(x_0, \mu_0) \\ G_{uu}(x_0, \mu_0)\Phi_0 & G_{u\lambda}(x_0, \mu_0)\Phi_0 & G_u(x_0, \mu_0) & G_{u\mu}(x_0, \mu_0)\Phi_0 \\ 0 & 0 & \Psi^t & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Für die Pseudo-Bogenlänge-Methode muss $T_z(z_0)$ vollen Rang haben. Für einen einfachen quadratischen Umkehrpunkt bzgl. λ folgt dies aus Satz 5.20.
- c) Zur Durchführung des NEWTON-Verfahrens werden die zweiten Ableitungen G_{uu} , $G_{u\lambda}$ und $G_{u\mu}$ benötigt. In der Praxis werden wir diese auf folgende Weise approximieren (vgl. [19]):

$$G_{uu}(u, \lambda)u_1u_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (G_u(u + \varepsilon u_1, \lambda)u_2 - G_u(u, \lambda)u_2),$$

$$G_{u\lambda}(u, \lambda)\lambda_1u_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (G_u(u, \lambda + \varepsilon \lambda_1)u_1 - G_u(u, \lambda)u_1).$$

Der zusätzliche Parameter μ für obige Gleichungen wurde hierbei vernachlässigt. Für die konkrete Anwendung wählt man $\varepsilon = 10^{-7}$.

Anwendung der Fortsetzungsmethoden

Dieses Kapitel dient der Anwendung der bisher vorgestellten Verfahren und Methoden. Hier wird das in Kapitel 4 hergeleitete Differenzenverfahren mit den Methoden aus Kapitel 5 kombiniert: Ein durch die Definition der kritischen REYNOLDSzahl motivierter Ansatz führt zu einem parameterabhängigen Gleichungssystem, dessen Herleitung im ersten Abschnitt vorgestellt wird. Der zweite und dritte Abschnitt befassen sich genauer mit den Methoden aus Kapitel 5, die in unserem Problem Anwendung finden. Insbesondere geht es um die Berechnung eines Startwertes für die Verwendung der Pseudo-Bogenlänge-Methode. Zusätzlich wird noch eine Schrittweisenstrategie vorgestellt, die in unserem Fall auf das NEWTON-Verfahren angewendet werden kann. Abschließend widmet sich das Kapitel den Ergebnissen dieser Arbeit; dazu werden vor allem Schaubilder und numerische Resultate mit angegeben. Insbesondere geben uns die Mittel der Fortsetzungsmethoden die Möglichkeit, die kritische REYNOLDSzahl zu berechnen.

Bevor wir zur Herleitung des angesprochenen parameterabhängigen Gleichungssystems kommen, soll hier ein kurzer Rückblick auf das EKMAN-Randschichtproblem (3.28) mit den zugehörigen Randbedingungen (3.27) folgen. Wie bei dessen Herleitung zu sehen war, hängt das Problem von drei Parametern ab; dies waren

- die Wellenzahl $\alpha > 0$,
- die REYNOLDSzahl R ,
- der durch die Störgrößen auftauchende Winkel ε .

Damit hängen auch der Eigenwert λ und die zugehörigen Eigenfunktionen φ und μ von diesen Parametern ab, d. h.

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda(\alpha, R, \varepsilon), \\ \varphi &= \varphi(\alpha, R, \varepsilon), \\ \mu &= \mu(\alpha, R, \varepsilon).\end{aligned}$$

Um diese Parameterabhängigkeit soll es im Folgenden gehen.

6.1 Definition des Problems

Wie bereits am Ende von Kapitel 3 erwähnt, ist der Realteil von dem Eigenwert λ entscheidend für die Stabilität der EKMAN-Spirale (\bar{V}, \bar{p}) . Für das weitere Vorgehen interessieren uns nun die Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$, mit dem Ziel, durch diesen Ansatz eine „Neutralitätskurve“ berechnen zu können. Was das genau bedeutet, wird später noch erläutert.

Da das EKMAN-Problem in dieser Arbeit numerisch analysiert wird, betrachten wir das Differenzenverfahren vierter Ordnung, welches in Kapitel 4.3 hergeleitet wurde, d. h. wir verwenden das Problem

$$\left(\mathbf{A}^h - \lambda^h \mathbf{B}^h \right) \mathbf{v}^h = 0. \quad (6.1)$$

Dabei bezeichnet λ^h einen verallgemeinerten Eigenwert mit zugehöriger Eigenfunktion \mathbf{v}^h der diskreten Version des EKMAN-Problems.

Auch beim diskreten Problem interessieren uns die Eigenwerte mit Realteil null. Deswegen machen wir mit $\omega^h := \text{Im}\lambda^h$ folgenden Ansatz:

$$\lambda^h = 0 + i\omega^h. \quad (6.2)$$

Mit diesem Ansatz zerlegen wir das komplexe Eigenwertproblem (6.1) in Real- und Imaginärteil. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^h &= \mathbf{v}_r^h + i\mathbf{v}_i^h, \\ \mathbf{A}^h &= \mathbf{A}_r^h + i\mathbf{A}_i^h. \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{B}^h ist nach Konstruktion des Differenzenverfahrens reell (vgl. Kapitel 4.3). Mit dem eingeführten Gitter Ω_h haben wir im Detail folgende reelle Größen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r^h, \mathbf{v}_i^h &\in \mathbb{R}^{2N-1}, \\ \mathbf{A}_r^h, \mathbf{A}_i^h, \mathbf{B}^h &\in \mathbb{R}^{2N-1 \times 2N-1}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich (6.1) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{A}_r^h + i\mathbf{A}_i^h - i\omega^h \mathbf{B}^h \right) \left(\mathbf{v}_r^h + i\mathbf{v}_i^h \right) = 0, \quad \Longleftrightarrow \\ &\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h + i\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_i^h + i\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h - i\omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h = 0, \quad \Longleftrightarrow \\ &\begin{cases} \mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h = 0, \\ \mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_i^h + \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h - \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

In Anlehnung an das Kapitel über Fortsetzungsmethoden wollen wir mit obigem Ansatz ein Problem der Form

$$G(u, \mu) = 0, \quad G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

herleiten. Dabei tauchen auch die Eigenfunktionen \mathbf{v}_r^h und \mathbf{v}_i^h als unbekannte Größen auf. Um zu verhindern, dass die Eigenfunktionen null werden, normieren wir diese:

$$\begin{aligned} c^t \mathbf{v}_r^h - 1 &= 0, \\ d^t \mathbf{v}_i^h &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dabei sind c und d fest gewählte Vektoren im \mathbb{R}^{2N-1} , z. B. $c := d := \frac{(1, \dots, 1)^t}{\|(1, \dots, 1)^t\|_2}$.

Mithilfe von (6.3) und der Normierungsbedingung (6.4) lässt sich nun ein „Fortsetzungsproblem“ definieren. Dazu setzen wir

$$u := \left(\omega^h, \mathbf{v}_r^h, \mathbf{v}_i^h, \varepsilon \right) \quad \text{und} \quad \mu := R,$$

um schließlich mit

$$G(u, \mu) = G \left(\omega^h, \mathbf{v}_r^h, \mathbf{v}_i^h, \varepsilon, R \right) := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h \\ \mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_i^h + \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h - \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h \\ c^t \mathbf{v}_r^h - 1 \\ d^t \mathbf{v}_i^h \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

das Problem

$$G(u, \mu) = 0, \quad G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N-1} \times \mathbb{R}^{2N-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N-1} \times \mathbb{R}^{2N-1} \times \mathbb{R}$$

zu erhalten. Für $M := 4N$ und $x := (u, \mu)$ erhalten wir die kompakt geschriebene Version unserer Nullstellengleichung:

$$G(x) = 0, \quad G : \mathbb{R}^{M+1} \rightarrow \mathbb{R}^M.$$

Ziel ist es nun, mit der Pseudo-Bogenlänge-Methode einen Lösungszweig

$$x(s) = \left(\omega^h(s), \mathbf{v}_r^h(s), \mathbf{v}_i^h(s), \varepsilon(s), R(s) \right) \quad (6.6)$$

zu berechnen, für den gilt:

$$G \left(\omega^h(s), \mathbf{v}_r^h(s), \mathbf{v}_i^h(s), \varepsilon(s), R(s) \right) = 0,$$

wobei s ein gewisses Intervall durchläuft. In Anlehnung an den Ansatz mit $\operatorname{Re}\lambda^h = 0$ führen wir dazu folgende Definition ein:

6.1 Definition

Den gesuchten Lösungszweig (6.6) nennen wir **Neutralitätskurve**.

6.2 Bemerkung

Nach Konstruktion ist die Abbildung $G : \mathbb{R}^{M+1} \rightarrow \mathbb{R}^M$ sehr „gutartig“; dies bedeutet, sie ist in den auftauchenden Variablen ω^h , \mathbf{v}_r^h , \mathbf{v}_i^h , ε und R hinreichend oft differenzierbar, so dass speziell der Satz über implizite Funktionen anwendbar ist und damit die Pseudo-Bogenlänge-Methode Sinn macht. Die Voraussetzung einer regulären Lösung von $G(x) = 0$ rechnen wir hier nicht nach. In den folgenden Anwendungen sehen wir aber, dass das NEWTON-Verfahren in der Praxis jeweils durchführbar ist und uns lokal quadratische Konvergenz sichert.

6.3 Bemerkung

Bis jetzt wurde der noch verbleibende Parameter α nicht berücksichtigt. Motivation, die Fortsetzungsmethoden für das EKMAN-Problem anzuwenden, war das Paper [10] von L. GREENBERG und M. MARLETTA (S. 760 f.). Dort wurde der Parameter α festgehalten und eine Neutralitätskurve im R - ε -Diagramm geplottet. Erst später – bei der Berechnung der Ortskurve für die Umkehrpunkte – werden wir den Parameter α für unser Gleichungssystem berücksichtigen.

6.2 Die Pseudo-Bogenlänge-Methode

Für $x = (\omega^h, \mathbf{v}_r^h, \mathbf{v}_i^h, \varepsilon, R)$ sei nun x_0 und \dot{x}_0 mit $\|\dot{x}_0\| = 1$ gegeben. Um einen neuen Punkt x_1 auf der Lösungskurve zu berechnen, lösen wir für ein $\Delta s > 0$ die Gleichung

$$\begin{cases} G(x_1) = 0, \\ (x_1 - x_0)^t \dot{x}_0 - \Delta s = 0 \end{cases}$$

mit dem NEWTON-Verfahren, d. h. wir erhalten folgende Iteration:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G_x(x_1^i) \\ \dot{x}_0^t \end{pmatrix} \Delta x_1^i = - \begin{pmatrix} G(x_1^i) \\ (x_1^i - x_0)^t \dot{x}_0 - \Delta s \end{pmatrix}, \\ x_1^{i+1} = x_1^i + \Delta x_1^i, \end{cases}$$

$i = 0, 1, 2, \dots$, mit dem Startwert $x_1^0 := x_0$.

Für obige Iteration brauchen wir die JACOBI-Matrix $G_x(x)$. Diese ist durch Definition des Problems (6.5) folgendermaßen gegeben:

$$G_x(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h & \mathbf{A}_r^h & -\mathbf{A}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h) & \frac{\partial}{\partial R} (-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h) \\ -\mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h & \mathbf{A}_i^h - \omega^h \mathbf{B}^h & \mathbf{A}_r^h & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h) & \frac{\partial}{\partial R} (\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h) \\ 0 & c^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4N \times 4N+1}.$$

6.4 Bemerkung

Da nach Konstruktion des Differenzenverfahrens lediglich die Matrix \mathbf{A}_i^h von R und ε abhängt, gilt z. B.

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h \right).$$

Dies erklärt die „einfache“ Darstellung von $G_x(x)$. Genauer dazu wird im Anhang erläutert. Des Weiteren sei für die detaillierte Ausführung von $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h)$ etc. ebenfalls auf den Anhang verwiesen.

6.2.1 Der Startwert x_0

Um die bereits in Bemerkung 6.3 angesprochene Neutralitätskurve im R - ε -Diagramm mit dem NEWTON-Verfahren zu berechnen, brauchen wir einen geeigneten Startwert für unsere Lösungskurve. Die Frage ist also, wie man einen solchen Startwert bekommt. Naheliegender ist, die Werte dafür zu verwenden, welche in [10] berechnet wurden. Konkret heißt das, wir nehmen ein Paar (ε^*, R^*) aus der Tabelle in [10], S. 761, und setzen dieses in das Ausgangsproblem

$$\left(\mathbf{A}^h - \lambda^h \mathbf{B}^h \right) \mathbf{v}^h = 0$$

ein. Dem fixen Parameter α weisen wir ebenso einen Wert zu. Mithilfe des MATLAB-Befehls „eig“ bekommen wir die zugehörigen Eigenwerte und Eigenfunktionen. Den Eigenwert, welcher in der komplexen Zahlenebene am weitesten links liegt, verwenden wir nun und bezeichnen ihn entsprechend mit λ^* . Für diesen gilt

$$\operatorname{Re} \lambda^* \approx 0,$$

so dass wir $\omega^* := \operatorname{Im} \lambda^*$ setzen. Dass diese Approximation sehr gut ist, ist in unserem Fall aber nicht zu erwarten, da wir hier ein anderes numerisches Verfahren verwenden als in [10]. Die zu λ^* gehörige Eigenfunktion bezeichnen wir entsprechend mit \mathbf{v}_r^* und \mathbf{v}_i^* . Insgesamt erhalten wir einen Vektor

$$x^* := (\omega^*, \mathbf{v}_r^*, \mathbf{v}_i^*, \varepsilon^*, R^*).$$

Für den Vektor x^* können wir $G(x^*) \approx 0$ erwarten, wobei auch hier die Approximation nicht sehr gut sein sollte. Um für das Fortsetzungsproblem einen geeigneten Startwert x_0 zu bekommen, halten wir in x^* einen Parameter fest – wir nehmen ε^* – und lösen folgende Gleichung mit dem NEWTON-Verfahren:

$$G(\tilde{u}) = G(\tilde{u}, \varepsilon^*) = 0,$$

wobei $\tilde{u} := (\omega^h, \mathbf{v}_r^h, \mathbf{v}_i^h, R)$. Als Startwert für diese NEWTON-Iteration wählen wir naheliegenderweise $\tilde{u}^0 := (\omega^*, \mathbf{v}_r^*, \mathbf{v}_i^*, R^*)$. Nach Konvergenz des Verfahrens erhalten wir eine Lösung $\tilde{u}^{**} = (\omega^{**}, \mathbf{v}_r^{**}, \mathbf{v}_i^{**}, R^{**})$, für die

$$G(\tilde{u}^{**}) = G(\tilde{u}^{**}, \varepsilon^*) = 0$$

gilt. Damit können wir den Startwert x_0 für die Pseudo-Bogenlänge-Methode definieren:

$$x_0 := (\omega^{**}, \mathbf{v}_r^{**}, \mathbf{v}_i^{**}, \varepsilon^*, R^{**}) \text{ mit } G(x_0) = 0.$$

6.5 Bemerkung

Den Tangentenvektor \dot{x}_0 bekommt man mithilfe des MATLAB-Befehls „null“, indem man die Gleichung

$$G_x(x_0) \dot{x}_0 = 0$$

nicht-trivial löst. Anschließend wird dieser auf eins normiert.

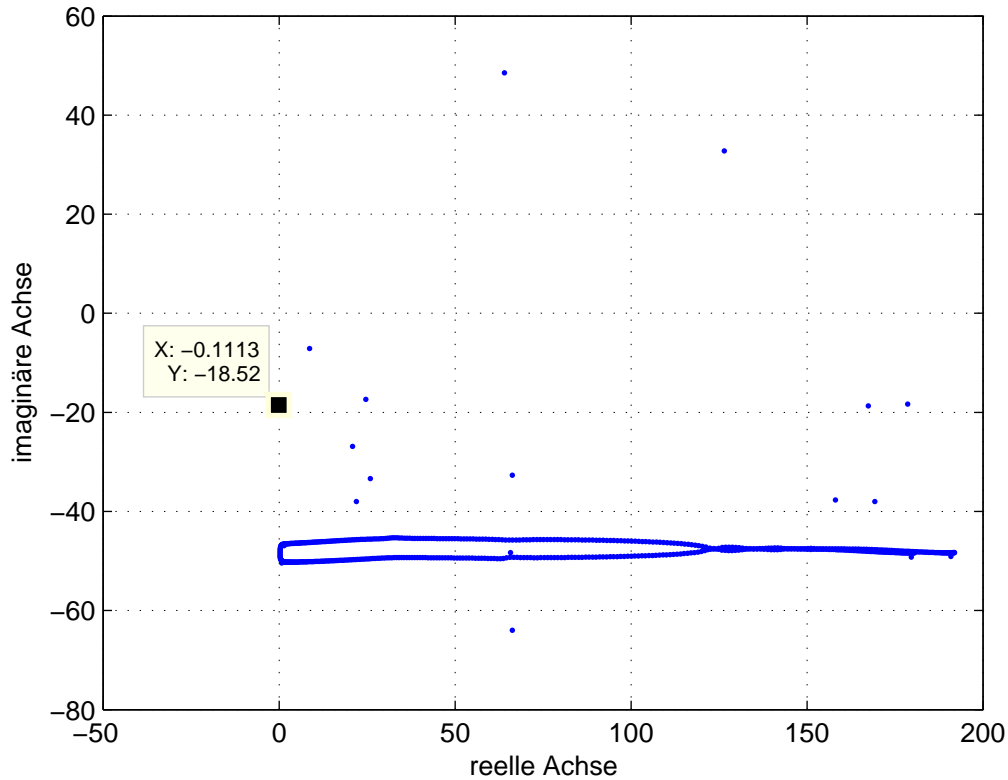


Abbildung 6.1: Punktspektrum des Eigenwertproblems $A^h v^h = \lambda^h B^h v^h$ für $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.61$ und $R = 168.7$.

6.2.2 Schrittweitensteuerung

Bisher war die Schrittweite $\Delta s > 0$ für die Pseudo-Bogenlänge-Methode fest gewählt. Ist diese dabei klein genug, brauchen wir in der NEWTON-Iteration lediglich wenige Durchläufe. Der Nachteil auf der anderen Seite ist aber in diesem Fall, dass wir uns auf dem Lösungspfad sehr langsam fortbewegen. Ist $\Delta s > 0$ jedoch relativ groß, so benötigt das NEWTON-Verfahren sehr viele Iterationen, so dass die Pfadfortsetzung sehr rechenaufwändig wird. Die Frage ist also, wie man die Schrittweite $\Delta s > 0$ am geschicktesten wählt.

Nach R. SEYDEL ([22], Kapitel 4.7) ist ein Kompromiss eine gute Lösung für die Wahl der Schrittweite. Dabei geht man von einer optimalen Anzahl M_{opt} von Iterationen aus. Ist dann M die Anzahl der Iterationen im letzten NEWTON-Schritt und gilt $M > M_{\text{opt}}$, so ist eine kleinere Schrittweite zu wählen. Gilt umgekehrt $M < M_{\text{opt}}$, vergrößert man diese.

Um zu bestimmen, wie man die Schrittweite vergrößert bzw. verkleinert, führt man folgende Größe ein:

$$\xi := \frac{M_{\text{opt}}}{M}.$$

Wenn wir Δs mit ξ nach jeder Iteration multiplizieren, wird die Schrittweite größer, falls das NEWTON-Verfahren mit weniger als M_{opt} Iterationen durchlaufen wird, andernfalls kleiner. Um zu verhindern, dass sich die Schrittweite zu schnell ändert, wird eine Beschränkung an den Faktor ξ eingeführt. Konkret wählen wir

$$\bar{\xi} := \begin{cases} 0.5, & \text{falls } \xi < 0.5, \\ \xi, & \text{falls } 0.5 \leq \xi \leq 2, \\ 2, & \text{falls } 2 < \xi \end{cases}$$

und nehmen als neue Schrittweite $\bar{\xi}\Delta s$. Für die optimale Iterationsanzahl wählen wir in der Anwendung $M_{\text{opt}} = 4$.

6.2.3 Beispiel

In diesem Abschnitt soll das Beispiel von L. GREENBERG und M. MARLETTA ([10], S. 761) mit der Pseudo-Bogenlänge-Methode nachgerechnet werden (vgl. Bemerkung 6.3). Dabei verwenden wir nun konkrete Werte für die in den Rechnungen auftauchenden Größen:

- $a = 50$, d. h. wir betrachten das EKMAN-Problem auf dem Intervall $[0, a]$;
- $N = 300$, d. h. die Anzahl der Unbekannten für das Differenzenverfahren $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$.

Um den Startwert x_0 mit der oben beschriebenen Methode für das Pseudo-Bogenlänge-Verfahren zu bestimmen, nehmen wir die ersten Werte in der Tabelle auf Seite 761 in [10]:

$$(\varepsilon^*, R^*) = (0.61, 168.7).$$

Der Parameter α hat dabei den festen Wert 0.5. Abbildung 6.1 zeigt das Punktspektrum von $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ für diese Werte in der komplexen Zahlenebene. Der am weitesten links gelegene Eigenwert $\lambda^* = -0.1113 - i18.52$ (mit einem Quadrat markiert) liegt in etwa auf der imaginären Achse (λ^* wurde mit der MATLAB-Funktion „eig“ berechnet).

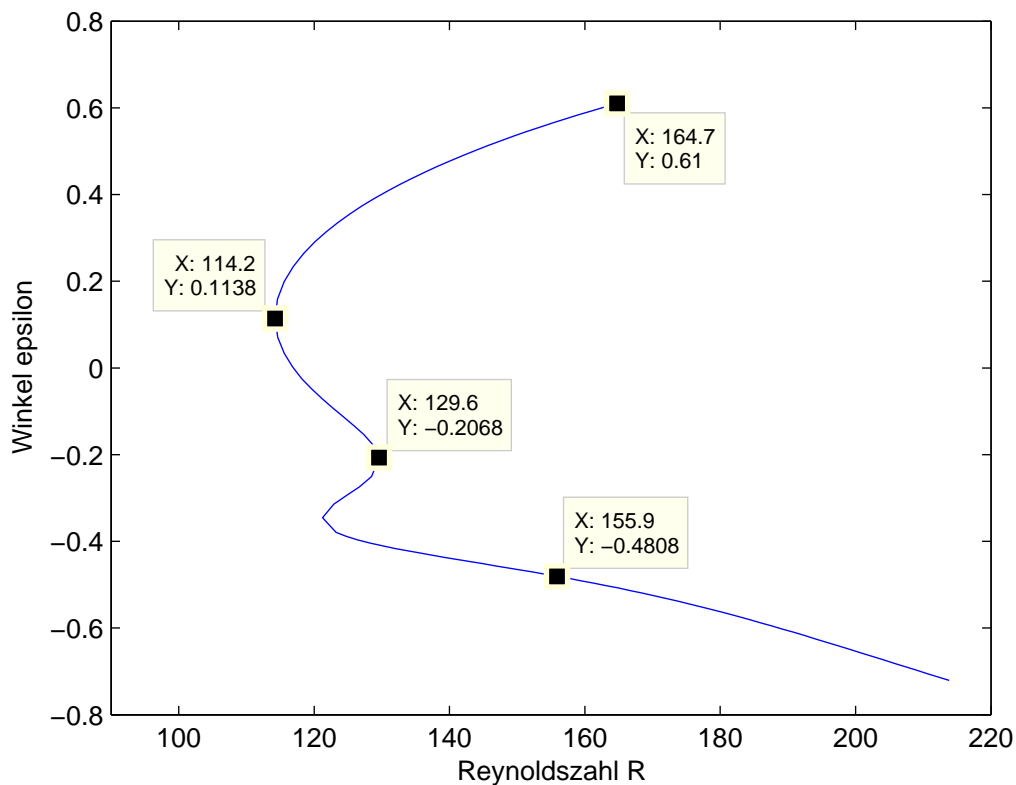


Abbildung 6.2: Neutralitätskurve für das EKMAN-Problem im R - ε -Diagramm mit $\alpha = 0.5$.

In Abbildung 6.2 wurden die letzten beiden Komponenten der mit der Pseudo-Bogenlänge-Methode berechneten Neutralitätskurve

$$x(s) = (\omega^h(s), \mathbf{v}_r^h(s), \mathbf{v}_i^h(s), \varepsilon(s), R(s))$$

im R - ε -Diagramm geplottet, wobei s ein gewisses Intervall durchlaufen ist. Diese Kurve charakterisiert also den Eigenwert des Problems $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ mit $\operatorname{Re} \lambda^h = 0$ in Abhängigkeit der Parameter R und ε bei festem α .

6.6 Bemerkung

- a) Wir starteten die Berechnung der Neutralitätskurve x an dem Punkt, bei dem der Realteil $\operatorname{Re} \lambda^h = 0$ am weitesten links in der komplexen Zahlenebene liegt. Dass dies beim „Durchwandern“ der R - ε -Ebene auch so bleibt, ist a priori nicht klar. Wir gehen aber davon aus, dass sämtliche Punkte auf der Kurve in Abbildung 6.2 denjenigen Eigenwert λ^h in Abhängigkeit von R und ε charakterisieren, bei dem $\operatorname{Re} \lambda^h = 0$ minimal ist (vgl. [10]).
- b) Abbildung 6.3 zeigt für verschiedene Paare (R, ε) das zu $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ gehörige Spektrum (vgl. dazu Abbildung 6.2). Dabei liegt der Eigenwert mit dem kleinsten Realteil jeweils auf der imaginären Achse, ist also derjenige, welcher auf der Neutralitätskurve liegt. Für die weiteren Eigenwerte gilt jeweils $\operatorname{Re} \lambda^h > 0.1$. Dies untermauert die in a) gemachte Aussage.

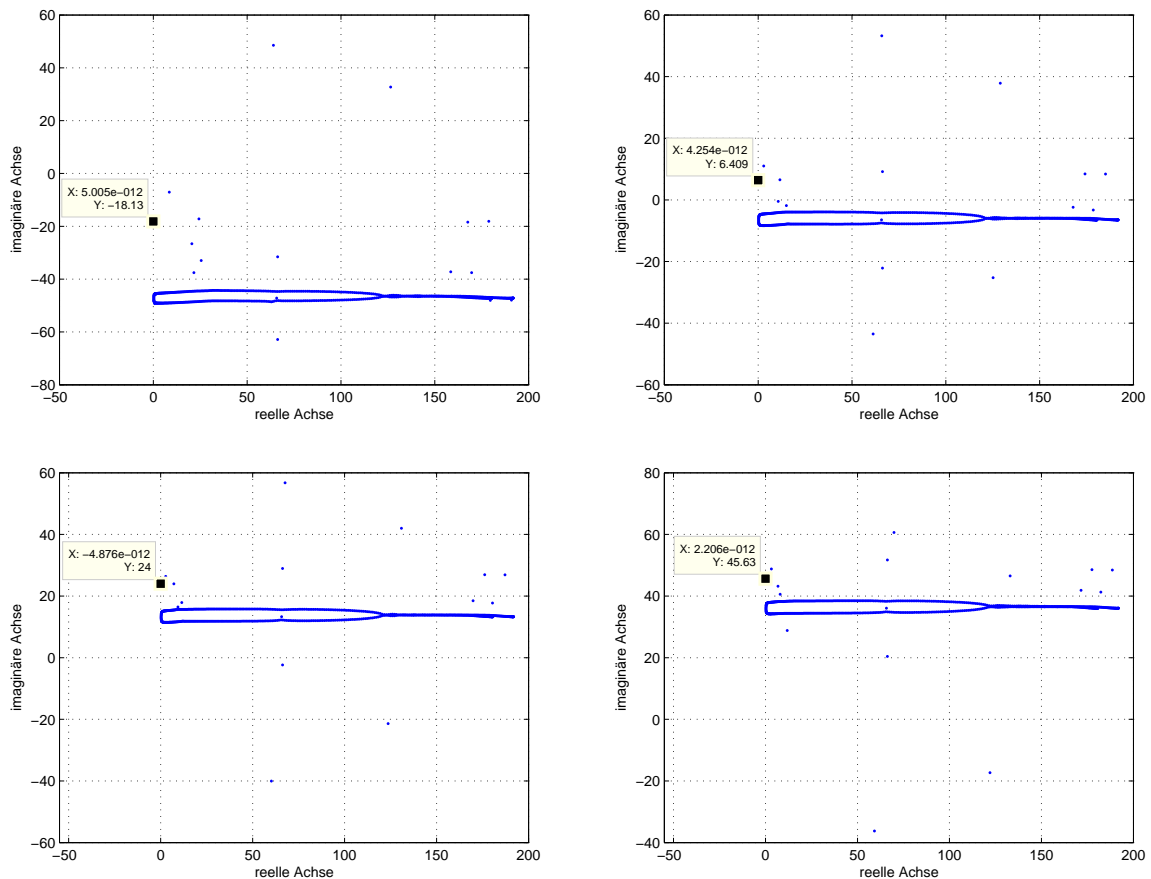


Abbildung 6.3: Punktspektren von $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ für $(R, \varepsilon) = (164.7, 0.61)$ (oben links), $(R, \varepsilon) = (114.2, 0.1138)$ (oben rechts), $(R, \varepsilon) = (129.6, -0.2068)$ (unten links) und $(R, \varepsilon) = (155.9, -0.4808)$ (unten rechts) mit jeweils $\alpha = 0.5$.

6.3 Die Ortskurve der Umkehrpunkte

In Abbildung 6.2 sind drei Umkehrpunkte bzgl. des Parameters R zu erkennen. Ziel ist es in diesem Abschnitt, eine Ortskurve zu berechnen, die durch diese drei Punkte verläuft. Dazu

werden wir nun den bisher fixierten Parameter α als unbekannte Größe hinzunehmen, um dadurch die kritische REYNOLDSzahl im α - R - ε -Volumen berechnen zu können. Dies wird diejenige REYNOLDSzahl sein, die sich auf der Ortskurve am weitesten links befindet (vgl. Kapitel 3.5).

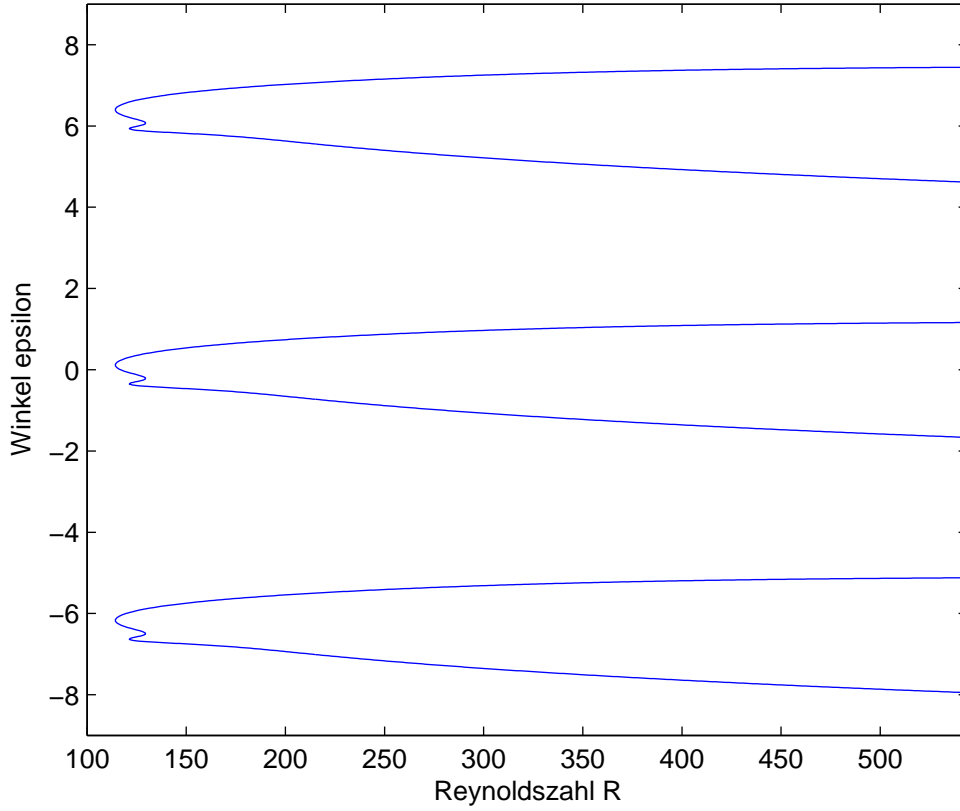


Abbildung 6.4: Periodizität in ε .

Für die Berechnung dieser Ortskurve gehen wir wie in Kapitel 5.3 vor, betrachten demnach für $z = (u, R, \Phi, \alpha)$ das erweiterte System

$$T(z) = \begin{pmatrix} G(u, R, \alpha) \\ G_u(u, R, \alpha)\Phi \\ \Psi^t \Phi - 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (6.7)$$

wobei $u = (\omega^h, \mathbf{v}_r^h, \mathbf{v}_i^h, \varepsilon)$ und $\Psi \in \mathbb{R}^{4N}$ ein fest gewählter Vektor ist. Für das Problem (6.7) verwenden wir auch hier die Methode der Pseudo-Bogenlänge und brauchen bei der Anwendung des NEWTON-Verfahrens die JACOBI-Matrix $T_z(z)$. Im Detail benötigen wir damit folgende Matrizen:

$$G_u(u, R, \alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h & \mathbf{A}_r^h & -\mathbf{A}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h) \\ -\mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h & \mathbf{A}_i^h - \omega^h \mathbf{B}^h & \mathbf{A}_r^h & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h) \\ 0 & c^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^t & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4N \times 4N},$$

$$G_R(u, R, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R} (-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h) \\ \frac{\partial}{\partial R} (\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4N},$$

$$G_\alpha(u, R, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_i^h + \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h - \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4N}.$$

Die in $T_z(z)$ auftretenden zweiten Ableitungen werden wir in der Art approximieren, wie sie in Bemerkung 5.23 c) beschrieben ist. Für die detaillierte Berechnung der Ableitungen wird hier ebenso auf den Anhang verwiesen.

6.4 Ergebnisse

Für sämtliche numerischen Rechnungen werden in diesem Abschnitt die Werte aus Beispiel 6.2.3 verwendet, d. h. wir setzen

$$a = 50 \text{ und } N = 300.$$

Des Weiteren sei hier darauf hingewiesen, dass, je nach Anwendung der Pseudo-Bogenlänge-Methode, die resultierende Lösungskurve ein entsprechendes Intervall durchläuft. Dabei kann das Intervall in unterschiedlichen Fällen verschieden groß sein. Dies spiegelt sich in der Länge der abgebildeten Kurven wider.

6.7 Bemerkung

Wie in Abschnitt 6.2.3 erwarten wir auch hier, dass wir beim Berechnen einer Neutralitäts- oder Ortskurve stets den „kritischen“ Eigenwert verfolgen, d. h. denjenigen, der in der komplexen Zahlenebene am weitesten links liegt, also mit minimalem Realteil (vgl. Bemerkung 6.6).

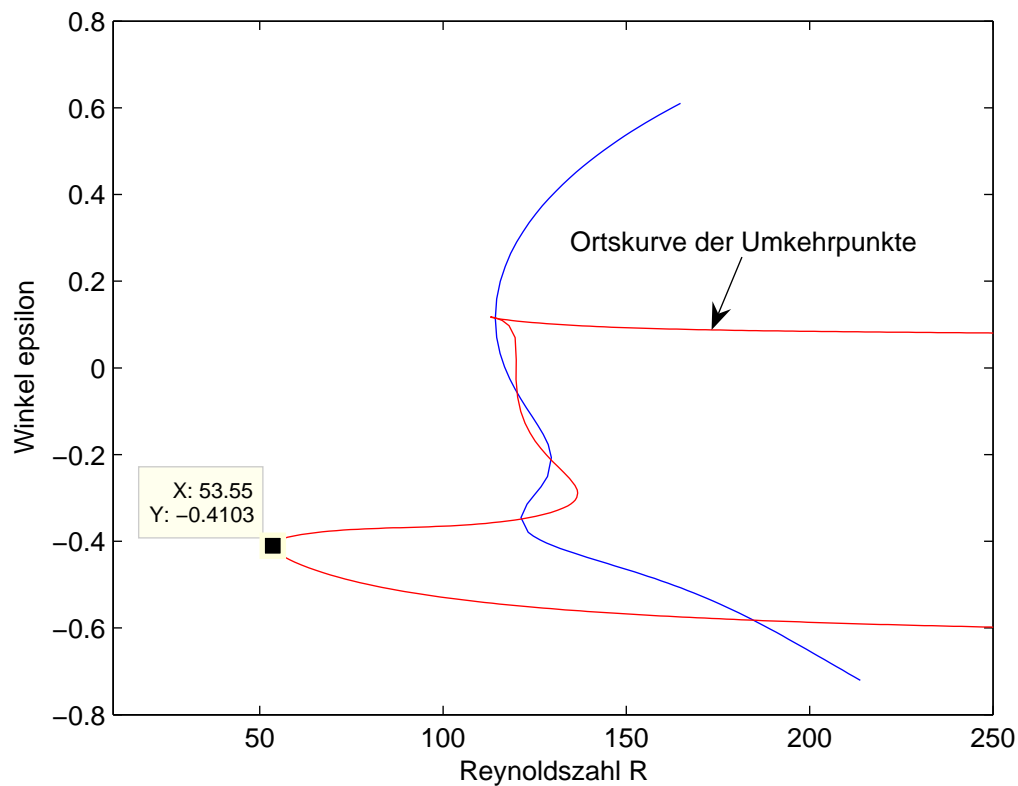


Abbildung 6.5: Ortskurve der Umkehrpunkte in der R - ϵ -Ebene (rot).

6.4.1 Periodizität in ε

Der Parameter ε taucht im EKMAN-Problem lediglich als Winkel in sin- und cos-Termen auf, weswegen für Abbildung 6.2 in senkrechter Richtung eine 2π -Periode erwartet wird. Abbildung 6.4 zeigt, dass dies auch tatsächlich der Fall ist. Wie oben wurde hier $\alpha = 0.5$ gesetzt.

6.4.2 Ortskurve der Umkehrpunkte und kritische Reynoldszahl

In Abbildung 6.4 wurden die Kurven auch für große REYNOLDSzahlen ($R > 500$) geplottet. Der Verlauf dieser Kurven lässt darauf schließen, dass für jede Periode in ε -Richtung drei Umkehrpunkte existieren (vgl. dazu auch Abbildung 6.2).

Abbildung 6.5 zeigt die mit der Pseudo-Bogenlänge-Methode berechnete Ortskurve der Umkehrpunkte (für eine Periode in ε). Als Startwert wurde dabei einer der drei Umkehrpunkte aus Abbildung 6.2 genommen. Man beachte, dass nur eine Ortskurve existiert, welche durch alle drei Umkehrpunkte in Abbildung 6.2 verläuft. Weiterhin ist in Abbildung 6.5 zu bemerken, dass es sich hier um ein Schaubild in der R - ε -Ebene handelt. Lediglich die drei Umkehrpunkte aus Abbildung 6.2 weisen in jedem Fall einen Wert von $\alpha = 0.5$ auf. Bei den übrigen Punkten auf der Ortskurve können die Werte von α variieren; das war auch der Hintergrund bei dieser Methode: Der Parameter α wurde hierbei als unbekannte Variable hinzugenommen.

Am Verlauf der Ortskurve in Abbildung 6.5 können wir die kritische REYNOLDSzahl ablesen. Diese liegt auf der Kurve ganz links und hat bzgl. R dort ein Minimum. Um einen möglichst genauen Wert zu bekommen, wurde in dem entsprechenden Bereich der Ortskurve (bei $R \approx 54$) die Schrittweite Δs bei der Pseudo-Bogenlänge-Methode stark verkleinert. In der Anwendung wurde ein fester Wert von $\Delta s = 0.01$ genommen, so dass für die kritische REYNOLDSzahl $R_{\text{krit}} = 53.5518$ berechnet werden konnte.

Wie oben bereits erwähnt, variiert auch der Wert α auf der Ortskurve. Um dies in einem Schaubild zu verdeutlichen, braucht man ein dreidimensionales Diagramm. Abbildung 6.6 zeigt, wie die Ortskurve (rot) im α - R - ε -Volumen verläuft.

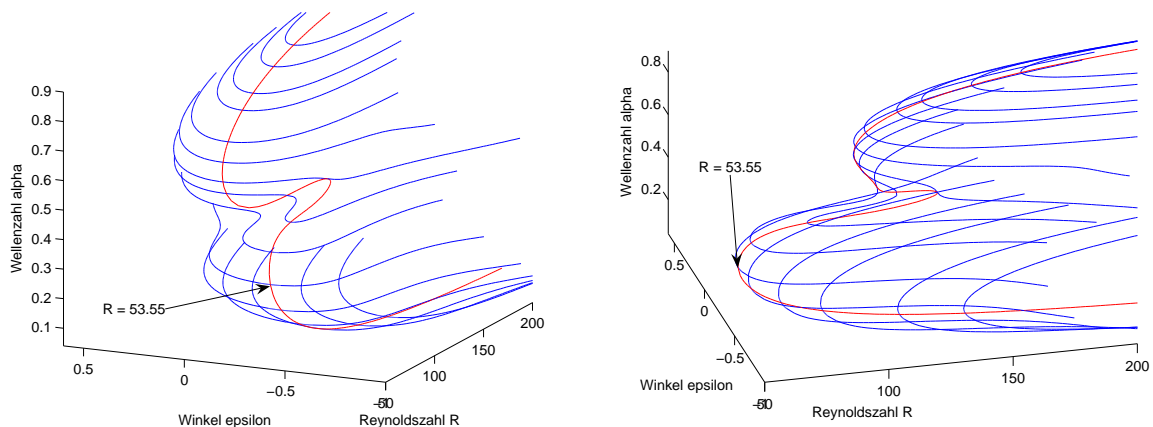


Abbildung 6.6: Ortskurve der Umkehrpunkte (rot) im α - R - ε -Volumen.

Die blau verlaufenden Kurven entsprechen der Neutralitätskurve aus Abbildung 6.2 für verschiedene Werte von α . Miteinander verbunden, lassen diese Kurven die in Kapitel 3.5 angesprochene „kritische“ Fläche im α - R - ε -Volumen erkennen, bei welcher der Realteil des „kritischen“ Eigenwerts jeweils null ist. Diese Fläche trennt den α - R - ε -Raum in Bereiche, in welchen jeweils $\min \operatorname{Re} \lambda^h > 0$ bzw. $\min \operatorname{Re} \lambda^h < 0$ gilt.

In Bezug auf die Stabilitätsanalyse der EKMAN-Spirale bedeutet dieses Ergebnis nun Folgendes: Für $R > R_{\text{krit}}$ existiert (mindestens) ein Eigenwert λ^h mit zugehöriger Eigenfunktion \mathbf{v}^h des

Problems $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ mit der Eigenschaft $\operatorname{Re} \lambda^h < 0$. Die EKMAN-Spirale ist daher linear instabil, falls $R > R_{\text{krit}}$ gilt und es existiert dann eine Lösung, die Instabilität verursacht.

6.4.3 Weitere Schaubilder und Resultate

Kommen wir noch einmal auf die Neutralitätskurve in Abbildung 6.2 zurück. Die dort gezeichnete Kurve im R - ε -Diagramm repräsentiert für jeden Punkt den „kritischen“ Eigenwert, dessen Realteil null ist. Links von dieser Kurve erwarten wir, dass jeweils $\min \operatorname{Re} \lambda^h > 0$ gilt bzw. rechts davon jeweils $\min \operatorname{Re} \lambda^h < 0$.

Um dies plausibel zu machen, plotten wir für $\alpha = 0.5$ analoge Kurven, bei denen $\min \operatorname{Re} \lambda^h = \beta$ gilt, wobei β verschiedene Werte nahe der Null annimmt; dies ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Dabei wurde analog zu Abschnitt 6.1 für ein festes β folgender Ansatz gemacht (vgl. (6.2)):

$$\lambda^h = \beta + i\omega^h.$$

Die Herleitung zu entsprechendem Nullstellenproblem und darauf aufbauend die Anwendung der Pseudo-Bogenlänge-Methode erfolgt genau wie in Abschnitt 6.1.

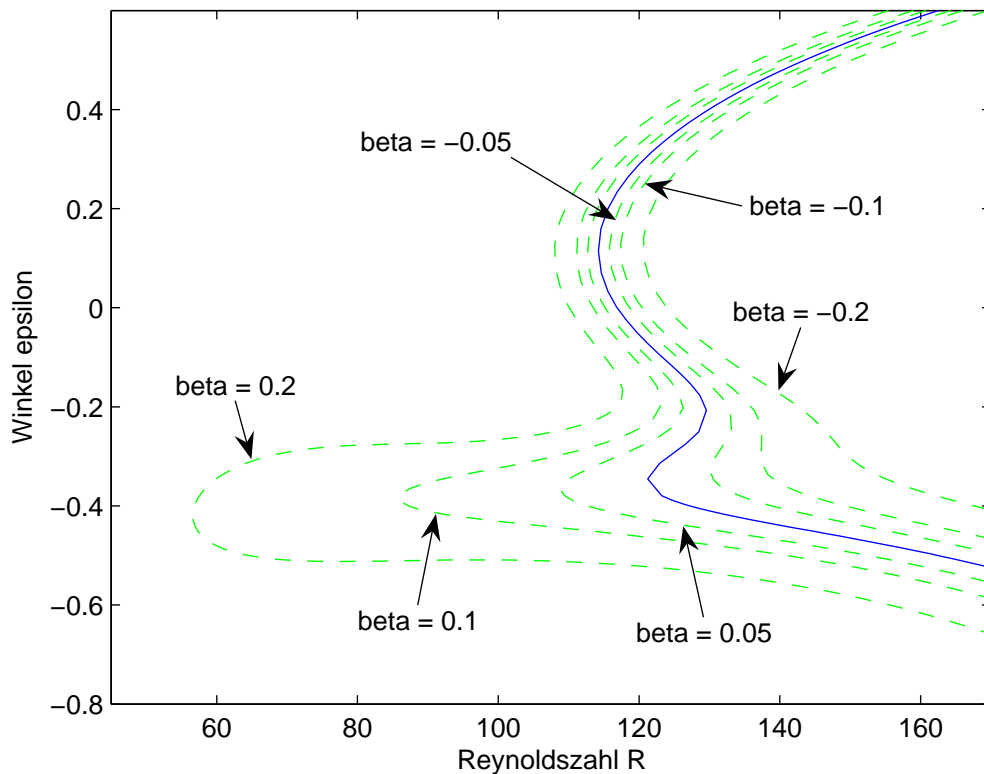


Abbildung 6.7: Neutralitätskurve (blau) im R - ε -Diagramm für $\alpha = 0.5$; zusätzlich sind Kurven (grün) geplottet, bei denen $\min \operatorname{Re} \lambda^h = \beta$ gilt, $\beta \in \{\pm 0.05, \pm 0.1, \pm 0.2\}$.

In Abbildung 6.8 ist das Analogon zu Abbildung 6.7 für $\alpha = 0.3189$ dargestellt. Dabei durchläuft die blaue Neutralitätskurve die R - ε -Ebene, in welcher die kritische REYNOLDSZahl liegt (vgl. Abbildung 6.6). Der Punkt auf der blauen Kurve, der mit einem roten Stern gekennzeichnet ist, repräsentiert diese Zahl.

An dieser Stelle soll noch einmal die Tatsache untermauert werden, dass wir bei der Kurvenberechnung stets den „kritischen“ Eigenwert verfolgen, also denjenigen, der in der komplexen Zahlenebene am weitesten links liegt. Dazu berechnen wir mit dem MATLAB-Befehl „eig“ für

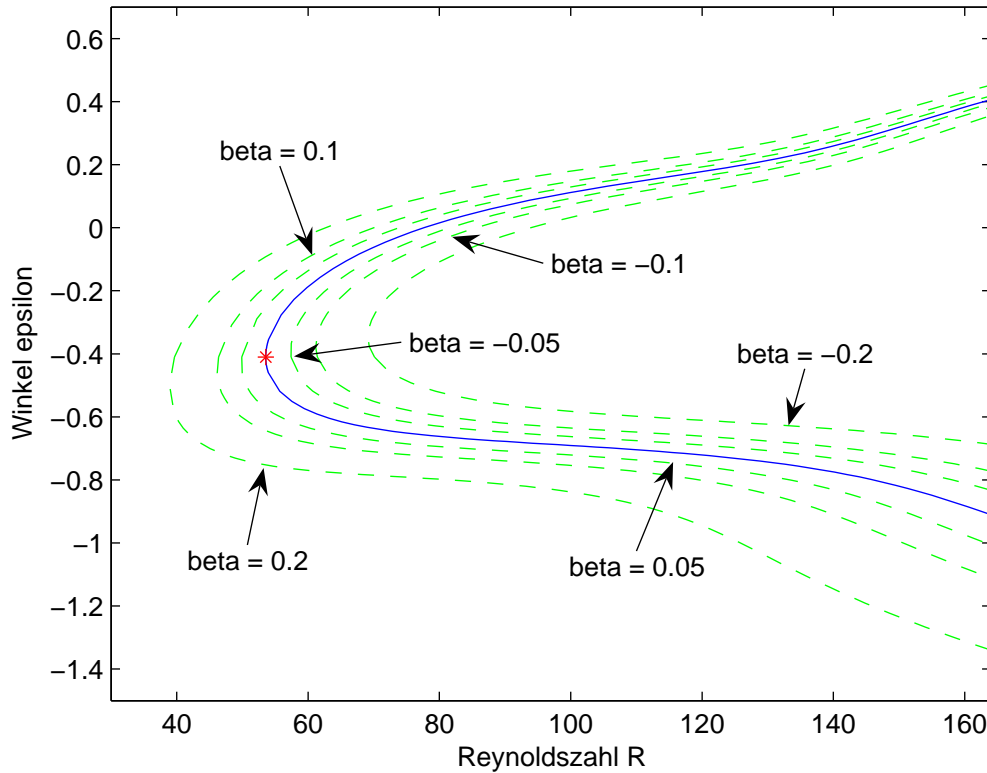


Abbildung 6.8: Neutralitätskurve (blau) im R - ε -Diagramm für $\alpha = 0.3189$; zusätzlich sind Kurven (grün) geplotet, bei denen $\min \operatorname{Re} \lambda^h = \beta$ gilt, $\beta \in \{\pm 0.05, \pm 0.1, \pm 0.2\}$.

verschiedene (R, ε) -Parameterkombinationen der blauen Neutralitätskurve aus Abbildung 6.8 explizit das jeweilige Spektrum des Eigenwertproblems

$$\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h.$$

In Tabelle 6.1 ist für diese Parameter jeweils der Realteil des „kritischen“ Eigenwerts aufgelistet, insbesondere auch der mit der kritischen REYNOLDSZahl (rot markiert). All diese Realteile weisen einen Wert von praktisch null auf. Dies weist darauf hin, dass der entsprechende Eigenwert mit zugehöriger Eigenfunktion auf der Neutralitätskurve für $\alpha = 0.3189$ liegt.

(R, ε)	$\min \operatorname{Re} \lambda^h$
(161.069, 0.389)	$6.869 \cdot 10^{-12}$
(139.569, 0.257)	$7.319 \cdot 10^{-12}$
(101.731, 0.118)	$4.488 \cdot 10^{-12}$
(67.791, -0.084)	$2.96 \cdot 10^{-11}$
(53.552, -0.410)	$5.706 \cdot 10^{-12}$
(74.798, -0.651)	$4.285 \cdot 10^{-12}$
(107.682, -0.701)	$1.169 \cdot 10^{-11}$
(145.789, -0.799)	$8.637 \cdot 10^{-12}$

Tabelle 6.1: Realteil des „kritischen“ Eigenwerts für verschiedene (R, ε) -Paare bei festem $\alpha = 0.3189$.

Für das Parametertripl $(\alpha_{\text{krit}}, R_{\text{krit}}, \varepsilon_{\text{krit}})$, welches die kritische REYNOLDSZahl enthält, ist in

Abbildung 6.9 schließlich noch das komplette Punktspektrum geplottet. Lediglich der „kritische“ Eigenwert weist einen Realteil von null auf; für die übrigen Eigenwerte gilt $\operatorname{Re}\lambda^h > 0.1$.

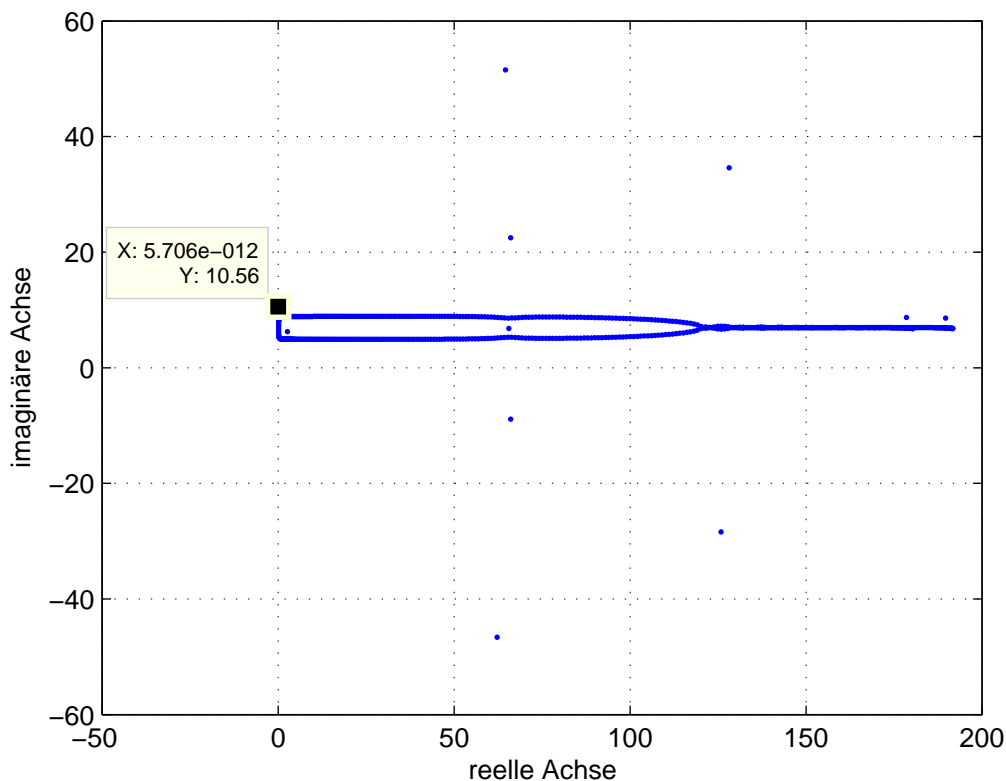


Abbildung 6.9: Punktspektrum für das Tupel $(\alpha_{\text{krit}}, R_{\text{krit}}, \varepsilon_{\text{krit}}) = (0.319, 53.552, -0.410)$.

Zum Schluss wird eine „instabile“ Lösung des EKMAN-Problems angegeben, eine, die Instabilität der EKMAN-Spirale verursacht. Eine entsprechende Parameterkombination ist z. B.

$$(\alpha, R, \varepsilon) = (0.319, 70, -0.410).$$

In diesem Fall gilt $\min \operatorname{Re}\lambda^h = -0.20 < 0$. Die zu diesem Eigenwert zugehörige Eigenfunktion \mathbf{v}^h soll in einem Schaubild dargestellt werden. Dazu sei daran erinnert, dass nach Konstruktion des Differenzenverfahrens $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ der Vektor \mathbf{v}^h aus den beiden Komponenten φ und μ besteht. Dabei sind φ und μ für $h = \frac{50}{300}$ auf dem numerischen Gitter

$$\Omega_h = \{0, 0.5h, h, \dots, 299h, 299.5h, 300h\}$$

gegeben, genauer gesagt: φ auf $\{0, h, 2h, \dots, 300\}$ und μ auf $\{0.5h, 1.5h, 2.5h, \dots, 299.5h\}$. In Abbildung 6.10 sind φ und μ als komplexwertige Größen mit dem Absolutbetrag jeweils für $z' \leq 20$ geplottet. Für $z' \rightarrow 50$ schmiegen sich die Kurven an die z' -Achse an.

6.8 Bemerkung

- a) Für die in diesem Kapitel gezeigten Schaubilder des Spektrums und der Eigenfunktionen φ und μ des verallgemeinerten Eigenwertproblems $\mathbf{A}^h \mathbf{v}^h = \lambda^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}^h$ wurde jeweils der MATLAB-Befehl „*eig*“ verwendet. Konkret heißt das: Für ein festes Parametertupel (α, R, ε) liefert „*eig*($\mathbf{A}^h, \mathbf{B}^h$)“ eine Diagonalmatrix mit verallgemeinerten Eigenwerten und eine Matrix, dessen Spalten aus den zugehörigen Eigenvektoren besteht.

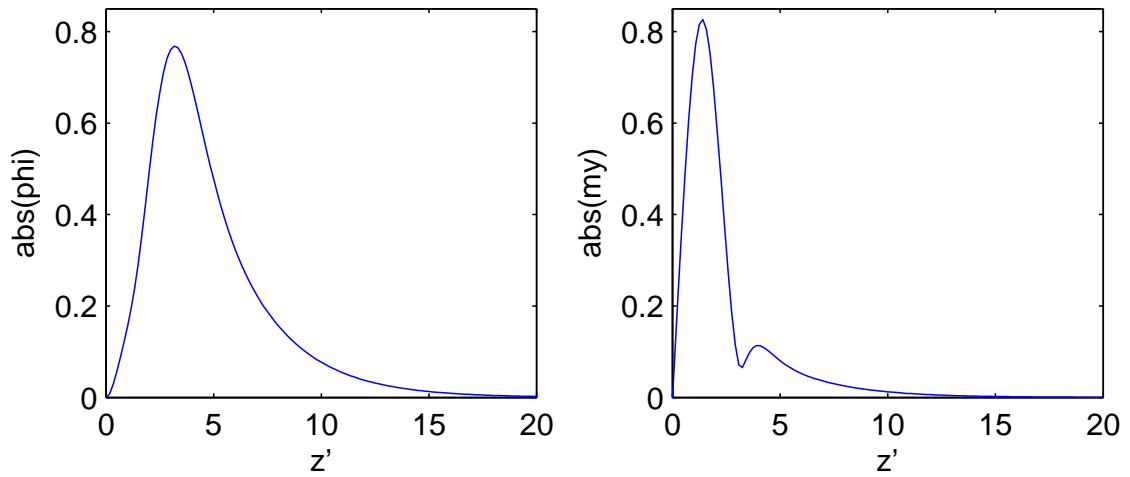


Abbildung 6.10: Eigenfunktionen φ (links) und μ (rechts) zum „instabilen“ Eigenwert $\lambda^h = -0.20 + i13.36$.

- b) Die Verwendung der Pseudo-Bogenlänge-Methode liefert nach Konstruktion des Verfahrens nicht nur Lösungen für die Parameter α , R und ε , sondern auch für den Imaginärteil ω^h und die zugehörigen Eigenfunktionen \mathbf{v}_r^h und \mathbf{v}_i^h . Diese wurden hier aber im Text nicht explizit mit angegeben.

Schlussbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde das sogenannte EKMAN-Randschichtproblem

$$Av = \lambda Bv$$

(inklusive Randbedingungen) aus der Strömungsdynamik mit numerischen Methoden behandelt. Ziel war es unter anderem, die daraus resultierenden Ergebnisse mit denen von D. K. LILLY sowie L. GREENBERG und M. MARLETTA zu vergleichen. Grundlage dafür war das in der Arbeit entwickelte diskrete EKMAN-Problem

$$A^h v^h = \lambda^h B^h v^h.$$

Die darin enthaltenen Parameter α , R und ε motivierten die Anwendung der Parameterfortsetzung von Lösungen einer Gleichung der Form

$$G(x) = 0, \quad G : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Speziell konnte dazu die Methode der Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung von H. B. KELLER angewendet werden. Während in [18] die Ergebnisse „von Hand“ nachgerechnet wurden, ermöglichte der Ansatz hier eine elegante Methode zur Berechnung der kritischen REYNOLDSZahl.

An dieser Stelle sei das Vorgehen von D. K. LILLY kurz beschrieben: Sein Ansatz basierte darauf, das EKMAN-Problem für mehrere hundert Kombinationen des Parametertupel (α, R, ε) zu betrachten. Dabei hielt er jedes dieser Tupel fest und löste das zugehörige Problem mittels der Methode der finiten Differenzen (vgl. Kapitel 4.2). Während wir bei der Diskretisierung das Intervall $[0, 50]$ verwendeten, basierten die Rechnungen von D. K. LILLY auf dem Intervall $[0, 35]$. Auch er erhielt nach der Diskretisierung ein lineares Gleichungssystem in der Form eines Eigenwertproblems. Dieses löste er nicht-trivial durch Nullsetzen der zugehörigen Determinante. Schließlich konnte er mit seinen Methoden der kritischen REYNOLDSZahl einen Wert von etwa 55 zuweisen. Im Vergleich dazu konnte mit den numerischen Verfahren hier ein Wert von 53.5518 erzielt werden.

L. GREENBERG und M. MARLETTA verwendeten bei ihren numerischen Berechnungen ein sogenanntes Matrix-Verfahren der Ordnung 6 (vgl. [10], Kapitel 9). Sie nahmen ebenfalls das „abgeschnittene“ Intervall $[0, 50]$. Die Ergebnisse dort ([10], S. 761) stimmen mit denen aus dieser Arbeit relativ gut überein (vgl. dazu Abbildung 6.2).

Auch andere Arbeiten beschäftigten sich mit der Berechnung der kritischen REYNOLDSZahl. Während in vorliegender Arbeit für das kritische Parametertupel $(\alpha_{\text{krit}}, R_{\text{krit}}, \varepsilon_{\text{krit}})$ ein Wert von $(0.319, 53.552, -0.410)$ berechnet werden konnte, kamen G. IOOSS, H. B. NIELSEN und H. TRUE mit einem GALERKIN-Verfahren auf ein Ergebnis von $(0.316, 54.2, -0.407)$ (vgl. [12]).

Weitere Resultate diesbezüglich erzielten P. R. TATRO und E. L. MOLLO-CHRISTENSEN sowie P. D. WEIDMAN. Sie konnten im Vergleich zu diesen numerischen Resultaten auf experimentellem Wege die kritische REYNOLDSZahl angeben. Ihre Messdaten ergaben einen Wert von 56.3 ± 2.0 bzw. 60 (vgl. [12], S. 253).

Das Newton-Verfahren

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem \mathbb{R}^n .

A.1 Definition

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge und sei $x^* \in \mathbb{R}^n$. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert quadratisch gegen x^* , falls $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ und es eine Konstante $K > 0$ gibt, für die gilt:

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq K \|x_k - x^*\|^2.$$

Wir betrachten nun eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es soll die Konvergenz des NEWTON-Verfahrens zur Lösung des Gleichungssystems $T(x) = 0$ im mehrdimensionalen Fall $n \geq 1$ untersucht werden. Dabei ist das NEWTON-Verfahren wie folgt definiert: Man wählt ein x^0 und löst für $i = 0, 1, 2, \dots$ das lineare Gleichungssystem

$$DT(x^i)d^i = -T(x^i) \tag{A.1}$$

und setzt anschließend

$$x^{i+1} := x^i + d^i. \tag{A.2}$$

Der nachfolgende Satz liefert unter gewissen Voraussetzungen quadratische Konvergenz für das NEWTON-Verfahren sowie eine Menge von zulässigen Startvektoren x^0 ; die Existenz einer Nullstelle x^* wird dabei vorausgesetzt.

A.2 Satz (Lokaler Konvergenzsatz des NEWTON-Verfahrens)

Eine gegebene Funktion $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei auf einer offenen, konvexen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und $x^* \in M$ sei eine Nullstelle von T , also $T(x^*) = 0$. Weiter seien gewisse Zahlen $r, \beta, L > 0$ gegeben, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $\mathcal{B}_r(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| < r\} \subset M$,
- $DT(x^*)$ ist invertierbar mit $\|(DT(x^*))^{-1}\| \leq \beta$,
- $\forall x, y \in M : \|DT(x) - DT(y)\| \leq L\|x - y\|$.

Dann ist für jeden Startwert $x^0 \in \mathcal{B}_\delta(x^*)$ mit $\delta := \min\left\{r, \frac{1}{2\beta L}\right\}$ das NEWTON-Verfahren (A.1) und (A.2) wohldefiniert und die NEWTON-Folge $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x^* . Weiter gilt für alle $i \geq 0$:

$$\|x^{i+1} - x^*\| \leq \beta L \|x^i - x^*\|^2,$$

d. h. es liegt lokal quadratische Konvergenz vor.

Beweis. Siehe [20], S. 105 f. □

A.3 Bemerkung

- a) Die LIPSCHITZ-Bedingung an $DT(\cdot)$ in obigem Satz ist insbesondere dann erfüllt, falls die Abbildung T zweimal stetig differenzierbar ist.
- b) Typisches Abbruchkriterium an einer Iterierten x^{i_0} ist z. B. für $\varepsilon = 10^{-8}$ folgende Bedingung:

$$\|T(x^{i_0})\| \leq \varepsilon.$$

Ableitungen

Für die Anwendung der Pseudo-Bogenlänge-Methode brauchen wir nach Konstruktion des Verfahrens folgende partielle Ableitungen (vgl. Kapitel 6.2 und 6.3):

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h \right), \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_i^h + \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h - \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h \right), \quad (\text{B.2})$$

für $\nu \in \{\varepsilon, R, \alpha\}$. Diese sollen hier berechnet werden.

Um die Ableitungen angeben zu können, zerlegen wir die Matrix \mathbf{A}^h des Differenzenverfahrens detailliert in Real- und Imaginärteil. Dazu verwenden wir die in Kapitel 4.3 eingeführten Abkürzungen

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I \quad (\text{B.3})$$

für die Komponenten der Matrizen \mathbf{A}^h und \mathbf{B}^h . Zunächst zerlegen wir (B.3) für die Matrix $\mathbf{A}^h = \mathbf{A}_r^h + i\mathbf{A}_i^h$:

$$\begin{aligned} A &= A_r + iA_i = \frac{2}{h^4} + \frac{1}{6h^2}\alpha^2 + i\left(\frac{1}{12h^2}\alpha R U_2\right), \\ B &= B_r + iB_i = -\frac{13}{2h^4} - \frac{8}{3h^2}\alpha^2 + i\left(-\frac{4}{3h^2}\alpha R U_2\right), \\ C &= C_r + iC_i = \frac{28}{3h^4} + \frac{5}{h^2}\alpha^2 + \alpha^4 + i\left(\frac{5}{2h^2}\alpha R U_2 - \alpha R\left(-\alpha^2 U_2 - \ddot{U}_2\right)\right), \\ E &= E_r + iE_i = -\frac{1}{12h} + i\left(\frac{1}{16}\alpha R \dot{U}_1\right), \\ F &= F_r + iF_i = \frac{9}{4h} + i\left(-\frac{9}{16}\alpha R \dot{U}_1\right), \\ G &= G_r + iG_i = -\frac{9}{4h} + i\left(-\frac{9}{16}\alpha R \dot{U}_1\right), \\ H &= H_r + iH_i = \frac{1}{12h} + i\left(\frac{1}{16}\alpha R \dot{U}_1\right), \\ I &= I_r + iI_i = -\frac{5}{2h^2} - \alpha^2 + i(-\alpha R U_2). \end{aligned}$$

An dieser Darstellung der einzelnen Komponenten der Matrix \mathbf{A}^h des Differenzenverfahrens sieht man, dass die Parameter ε und R lediglich in \mathbf{A}_i^h auftauchen; dabei taucht der Winkel ε in der EKMAN-Spirale U_1 und U_2 sowie deren Ableitungen auf (vgl. Bemerkung 4.16). Die Komponente $D = \frac{5}{2h^2} + \alpha^2$ der Matrix \mathbf{B}^h ist nach Konstruktion unabhängig von ε und R . Also folgt für die partiellen Ableitungen (B.1) und (B.2) nach ε und R

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h \right) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h \right), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_i^h + \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h - \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h \right) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial R} \left(\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_r^h - \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h + \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_i^h \right) &= \frac{\partial}{\partial R} \left(-\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_i^h \right), \\ \frac{\partial}{\partial R} \left(\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}_i^h + \mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h - \omega^h \mathbf{B}^h \mathbf{v}_r^h \right) &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}_r^h \right).\end{aligned}$$

Wollen wir diese Ableitungen konkret angeben, so müssen wir die einzelnen Komponenten der Matrix \mathbf{A}_i^h differenzieren:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} A_i &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{12h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right) = \frac{1}{12h^2} \alpha R (-\cos(\varepsilon) + e^{-z} \cos(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial R} A_i &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{12h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right) = \frac{1}{12h^2} \alpha (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} B_i &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(-\frac{4}{3h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right) = -\frac{4}{3h^2} \alpha R (-\cos(\varepsilon) + e^{-z} \cos(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial R} B_i &= \frac{\partial}{\partial R} \left(-\frac{4}{3h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right) = -\frac{4}{3h^2} \alpha (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} C_i &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{5}{2h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) - \alpha R (-\alpha^2 (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right. \\ &\quad \left. - (-2e^{-z} \cos(z + \varepsilon))) \right) = \frac{5}{2h^2} \alpha R (-\cos(\varepsilon) + e^{-z} \cos(z + \varepsilon)) - \alpha R (-\alpha^2 (-\cos(\varepsilon) \\ &\quad + e^{-z} \cos(z + \varepsilon)) - 2e^{-z} \sin(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial R} C_i &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{5}{2h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) - \alpha R (-\alpha^2 (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right. \\ &\quad \left. - (-2e^{-z} \cos(z + \varepsilon))) \right) = \frac{5}{2h^2} \alpha (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) - \alpha (-\alpha^2 (-\sin(\varepsilon) \\ &\quad + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) - (-2e^{-z} \cos(z + \varepsilon))), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} E_i &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} H_i = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{16} \alpha R e^{-z} (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)) \right) = \frac{1}{16} \alpha R e^{-z} (-\sin(z + \varepsilon) + \cos(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial R} E_i &= \frac{\partial}{\partial R} H_i = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{16} \alpha R e^{-z} (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)) \right) = \frac{1}{16} \alpha e^{-z} (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_i &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} G_i = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-9E_i) = -\frac{9}{16} \alpha R e^{-z} (-\sin(z + \varepsilon) + \cos(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial R} F_i &= \frac{\partial}{\partial R} G_i = \frac{\partial}{\partial R} (-9E_i) = -\frac{9}{16} \alpha e^{-z} (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I_i &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon))) = -\alpha R (-\cos(\varepsilon) + e^{-z} \cos(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial R} I_i &= \frac{\partial}{\partial R} (-\alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon))) = -\alpha (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)).\end{aligned}$$

Da die Matrizen \mathbf{A}_r^h , \mathbf{A}_i^h und \mathbf{B}^h des Differenzenverfahrens alle von α abhängen, muss jede davon beim Differenzieren nach α berücksichtigt werden. Auch hier betrachten wir wieder die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} A_r &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{2}{h^4} + \frac{1}{6h^2} \alpha^2 \right) = \frac{1}{3h^2} \alpha, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} A_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{12h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right) = \frac{1}{12h^2} R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)), \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} B_r &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{13}{2h^4} - \frac{8}{3h^2} \alpha^2 \right) = -\frac{16}{3h^2} \alpha, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} B_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{4}{3h^2} \alpha R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right) = -\frac{4}{3h^2} R (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} C_r &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{28}{3h^4} + \frac{5}{h^2} \alpha^2 + \alpha^4 \right) = \frac{10}{h^2} \alpha + 4\alpha^3, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} C_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{5}{2h^2} \alpha R(-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) - \alpha R(-\alpha^2 (-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) \right. \\
&\quad \left. - (-2e^{-z} \cos(z + \varepsilon))) \right) = \frac{5}{2h^2} R(-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) + 3\alpha^2 R(-\sin(\varepsilon) \\
&\quad + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)) + R(-2e^{-z} \cos(z + \varepsilon)), \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} D &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{5}{2h^2} + \alpha^2 \right) = 2\alpha, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} E_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha} H_i = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{16} \alpha R e^{-z} (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)) \right) = \frac{1}{16} R e^{-z} (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)), \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} F_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha} G_i = \frac{\partial}{\partial \alpha} (-9E_i) = -\frac{9}{16} R e^{-z} (\cos(z + \varepsilon) + \sin(z + \varepsilon)), \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} I_r &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{5}{2h^2} - \alpha^2 \right) = -2\alpha, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} I_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (-\alpha R(-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon))) = -R(-\sin(\varepsilon) + e^{-z} \sin(z + \varepsilon)).
\end{aligned}$$

Die Komponenten E_r , F_r , G_r und H_r sind unabhängig von α , tauchen in obiger Rechnung also nicht auf.

Damit sind sämtliche Komponenten-Ableitungen gegeben und wir können die partiellen Ableitungen (B.1) und (B.2) angeben. Die entsprechenden Matrizen für

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}), \frac{\partial}{\partial R} (\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}), \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{A}_r^h \mathbf{v}), \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{A}_i^h \mathbf{v}) \text{ und } \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{B}^h \mathbf{v})$$

für ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N-1}$ sind dem MATLAB-Quellcode in Anhang C.3 zu entnehmen.

Matlab-Quellcode

Dieses Kapitel widmet sich den MATLAB-Quelltexten für die in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren. Dabei kommt es vor, dass Bezeichnungen im Quellcode mit denen aus den entsprechenden Kapiteln differieren. Des Weiteren wird darauf hingewiesen, dass nicht die vollständigen Programme mit angegeben sind, sondern nur die wichtigen Abschnitte bzw. einzelne MATLAB-Files der Programme.

C.1 Die Matrizen A^h und B^h des Differenzenverfahren (4.12)

```
% Matrizen A und B des Differenzenverfahrens

function [A,B]=AB(N,h,x,alpha,R,epsilon);

% Inputs
% =====
% N: natürliche Zahl, die das numerische Gitter definiert
% h: Schrittweite des Differenzenverfahrens
% x: numerisches Gitter
% alpha, R, epsilon: Parameter des Ekman-Problems

% Ekman-Lösung (U', V und V'')
% =====
% Werte für h, 2h,... (für phi-Gleichung):
x1=x(2:2:end-1);
V1=-sin(epsilon)+exp(-x1).*sin(x1+epsilon);
d2V=-2*exp(-x1).*cos(x1+epsilon);
% Werte für h/2, 3/2h,... (für my-Gleichung):
x2=x(1:2:end);
dU=exp(-x2).(cos(x2+epsilon)+sin(x2+epsilon));
V2=-sin(epsilon)+exp(-x2).*sin(x2+epsilon);

% Hilfsgrößen für die Matrizen
% =====
a=2/h^4+(alpha^2/6+i*alpha*R*V1/12)/h^2;
b=-13/(2*h^4)+(-(8/3)*alpha^2-(4/3)*i*alpha*R*V1)/h^2;
c=28/(3*h^4)+(5*alpha^2+(5/2)*i*alpha*R*V1)/h^2-i*alpha*R*(-alpha^2*V1-d2V)+alpha^4;
d=5/(2*h^2)+alpha^2; % = const
e=i*alpha*R*dU/16-1/(12*h);
f=-i*alpha*R*dU*9/16+9/(4*h);
g=-i*alpha*R*dU*9/16-9/(4*h);
j=i*alpha*R*dU/16+1/(12*h);
k=-5/(2*h^2)-alpha^2-i*alpha*R*V2;

% Matrix A (entsprechend dem Beispiel)
% =====
% Hauptdiagonale:
D=sparse(2*N-1,1);
D(1:2:end)=k;
D(2:2:end-1)=c;
D(1)=k(1)-5/(18*h^2);
```

```

D(2)=-2*a(1)+c(1)-20/(3*h^4);
D(3)=k(2)+1/(72*h^2);
D(4)=c(2)-2/(3*h^4);
D(end-3)=c(end-1)-13/(36*h^4);
D(end-2)=k(end-1)-1/(182*h^2);
D(end-1)=-(13/6)*a(end)+c(end)-58/(9*h^4);
D(end)=k(end)+2195/(1092*h^2);
% Erste obere Nebendiagonale:
OD1=sparse(2*N-1,1);
OD1(2:2:end-1)=g(1:end-1);
OD1(3:2:end)=9/(4*h);
OD1(2)=-2*e(1)+g(1);
OD1(3)=161/(72*h);
OD1(end)=1187/(546*h);
% Zweite obere Nebendiagonale:
OD2=sparse(2*N-1,1);
OD2(3:2:end)=4/(3*h^2);
OD2(4:2:end-1)=b(1:end-1);
OD2(3)=-17/(36*h^2);
OD2(4)=4*a(1)+b(1)+19/(3*h^4);
OD2(5)=31/(24*h^2);
OD2(6)=b(2)+7/(18*h^4);
OD2(end-1)=b(end-1)+13/(36*h^4);
OD2(end)=1373/(1092*h^2);
% Dritte obere Nebendiagonale:
OD3=sparse(2*N-1,1);
OD3(4:2:end-1)=j(1:end-2);
OD3(5:2:end)=-1/(12*h);
OD3(4)=4*e(1)+j(1);
OD3(5)=-1/(24*h);
% Vierte obere Nebendiagonale:
OD4=sparse(2*N-1,1);
OD4(5:2:end)=-1/(12*h^2);
OD4(6:2:end-1)=a(1:end-2);
OD4(5)=19/(12*h^2);
OD4(6)=-(4/3)*a(1)-56/(9*h^4);
OD4(7)=-5/(72*h^2);
OD4(8)=a(2)-1/(12*h^4);
% Sechste obere Nebendiagonale:
OD6=sparse(2*N-1,1);
OD6(8:2:end-1)=-1/(6*h^4);
OD6(7)=-23/(36*h^2);
OD6(8)=(1/2)*a(1)+23/(6*h^4);
% Erste untere Nebendiagonale:
UD1=sparse(2*N-1,1);
UD1(1:2:end-2)=-9/(4*h);
UD1(2:2:end-1)=f(2:end);
UD1(1)=-173/(72*h);
UD1(end-2)=-821/(364*h);
UD1(end-1)=f(end)-(13/6)*j(end);
% Zweite untere Nebendiagonale:
UD2=sparse(2*N-1,1);
UD2(1:2:end-2)=4/(3*h^2);
UD2(2:2:end-3)=b(2:end);
UD2(1)=107/(72*h^2);
UD2(2)=b(2)+1/(3*h^4);
UD2(end-5)=b(end-1)+1/(3*h^4);
UD2(end-4)=241/(182*h^2);
UD2(end-3)=(13/6)*a(end)+b(end)+79/(9*h^4);

```

```

UD2(end-2)=-76/(273*h^2);
% Dritte untere Nebendiagonale:
UD3=sparse(2*N-1,1);
UD3(1:2:end-4)=1/(12*h);
UD3(2:2:end-3)=e(3:end);
UD3(end-4)=27/(364*h);
UD3(end-3)=e(end)+(13/6)*j(end);
% Vierte untere Nebendiagonale:
UD4=sparse(2*N-1,1);
UD4(1:2:end-4)=-1/(12*h^2);
UD4(2:2:end-5)=a(3:end);
UD4(end-7)=a(end-1)-11/(72*h^4);
UD4(end-6)=-20/(273*h^2);
UD4(end-5)=-a(end)-20/(3*h^4);
UD4(end-4)=229/(182*h^2);
% Sechste untere Nebendiagonale:
UD6=sparse(2*N-1,1);
UD6(2:2:end-7)=-1/(6*h^4);
UD6(end-9)=-5/(36*h^4);
UD6(end-8)=-1/(364*h^2);
UD6(end-7)=(11/12)*a(end)+59/(18*h^4);
UD6(end-6)=-164/(273*h^2);
% Nun zur Matrix A:
H=[UD6 UD4 UD3 UD2 UD1 D OD1 OD2 OD3 OD4 OD6];
A=spdiags(H,[-6 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 6],2*N-1,2*N-1);
% Noch fehlende Einträge:
A(1,6)=-(7/3)*e(1); A(1,8)=(1/2)*e(1); A(1,9)=1/(12*h^2); A(2,7)=-1/(72*h);
A(2,10)=-4/(3*h^4); A(2,12)=1/(6*h^4); A(end-1,end-11)=1/(6*h^4);
A(end-1,end-9)=-1/6*a(end)-10/(9*h^4); A(end-1,end-8)=-1/(364*h);
A(end-1,end-6)=11/(1092*h); A(end,end-9)=-1/6*j(end); A(end,end-8)=121/(1092*h^2);
A(end,end-7)=(11/12)*j(end); A(end,end-5)=-2*j(end);

% Matrix B (entsprechend dem Beispiel)
% =====
% Hauptdiagonale:
DB=sparse(2*N-1,1);
DB(1:2:end)=-1;
DB(2:2:end-1)=d;
DB(2)=d-1/(6*h^2);
DB(end-1)=d-13/(72*h^2);
% Zweite obere Nebendiagonale:
OD2B=sparse(2*N-1,1);
OD2B(4:2:end-1)=-4/(3*h^2);
OD2B(4)=-1/h^2;
% Vierte obere Nebendiagonale:
OD4B=sparse(2*N-1,1);
OD4B(6:2:end-1)=1/(12*h^2);
OD4B(6)=-1/(9*h^2);
% Zweite untere Nebendiagonale:
UD2B=sparse(2*N-1,1);
UD2B(2:2:end-3)=-4/(3*h^2);
UD2B(end-3)=-83/(72*h^2);
% Vierte untere Nebendiagonale:
UD4B=sparse(2*N-1,1);
UD4B(2:2:end-5)=1/(12*h^2);
UD4B(end-5)=-1/(12*h^2);
% Nun zur Matrix B:
HB=[UD4B UD2B DB OD2B OD4B];
B=spdiags(HB,[-4 -2 0 2 4],2*N-1,2*N-1);

```

```

% Noch fehlende Einträge:
B(2,8)=1/(24*h^2);
B(end-1,end-9)=-1/(72*h^2); B(end-1,end-7)=11/(144*h^2);

```

C.2 Die Pseudo-Bogenlänge-Fortsetzung

Hier wird der Quelltext für den Algorithmus 5.17 vorgestellt inklusive der Methode der Schrittweitensteuerung aus Abschnitt 6.2.2.

```

.
.
.
% Für die Schrittweitensteuerung:
ds=2; % Schrittweitenparameter für die Pseudo-Bogenlänge-Methode, Startwert
global n_opt;
n_opt=4; % optimale Anzahl der Newton-Iterationen

% Schleife für die Parameterfortsetzung:
j=1;
while j<100
    % Lösen mit dem Newton-Verfahren:
    ERG=fun_Newton(@fun_F,@fun_JF,X0,dX0,ds);
    X=ERG(1:end-1); % gesuchter Lösungsvektor
    n=ERG(end); % speichert die Anzahl der Iterationen von einem Newton-Schritt

    if n>2*n_opt
        ds=0.5*ds;
        Fehler(j)=n; % speichert die Anzahl der Iterationen, die "nicht konvergieren"
    else % Lösung wird übernommen
        % Schrittweitensteuerung:
        xi=n_opt/n;
        % Bedingung an xi, damit sich ds nicht zu schnell ändert:
        if xi<0.5
            xi=0.5;
        elseif xi>2
            xi=2;
        end
        ds=xi*ds;
        % obere Schranke für die Schrittweite:
        if ds>2
            ds=2;
        end

        % Nächster Richtungsvektor:
        Y=fun_JF(X,dX0)\[zeros(length(X)-1,1);1];

        % Zurücksetzen:
        X0=X;
        dX0=Y;
        dX0=dX0/norm(dX0); % auf 1 normiert

        % Lösungen abspeichern:
        L(:,j+1)=X;
        Iter(j)=n;
        DS(j)=ds;
        j=j+1;
    end
end
end

```

.
.
.

Zusätzlich wird der Quelltext für das zugehörige NEWTON-Verfahren mit angegeben:

```
function erg=fun_Newton(F,F_abl,X0,dX0,ds)

% Inputs
% =====
% F: Nullstellenfunktion (function handle)
% F_abl: Jacobi-Matrix vom F (function handle)
% X0: gegebene Lösung von F(X)=0
% dX0: zu X0 gehöriger Richtungsvektor
% ds: Schrittweite der Pseudo-Bogenlänge-Methode

global n_opt;

D=zeros(length(X0),1);
X=X0;

% Newton-Iteration:
i=0;
while max(abs(F(X,X0,dX0,ds)))>1e-8
    D=F_abl(X,dX0)\-F(X,X0,dX0,ds);
    X=X+D;
    i=i+1;
    if i>2*n_opt
        break; % verlässt die Schleife, falls zu viele Iterationen
    end
end

if i>2*n_opt
    erg=[X0;i];
else
    erg=[X;i];
end
```

C.3 Matrizen für die Ableitungen

Dieser Teil gibt den Quelltext für die partiellen Ableitungen (B.1) und (B.2) an. Z.B. werden für $\frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{A}_r^h \mathbf{v})$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N-1}$) die in Anhang B berechneten Komponenten in einer entsprechenden Matrix zusammengefasst, welche anschließend als Funktion übergeben wird. Damit kann $\frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{A}_r^h \mathbf{v})$ als Matrix-Vektor-Multiplikation berechnet werden. Die Berechnung der anderen partiellen Ableitungen erfolgt analog.

```
% Matrix für die partielle Ableitung von A1*v nach alpha
% Im Programm dann als Matrix-Vektor-Multiplikation: dalpha_A1*v

function dalpha_A1=Matrix_dalpha_A1(R,epsilon,alpha);

global N h;

% Hilfsgrößen für die Matrix (jetzt nach alpha abgeleitet)
% =====
dalpha_ar=(1/(3*h^2))*alpha;
dalpha_br=-(16/(3*h^2))*alpha;
dalpha_cr=(10/(h^2))*alpha+4*alpha^3;
```

```

dalpha_kr=-2*alpha;

% Matrix dalpha_A1
% =====
% Hauptdiagonale:
D=sparse(2*N-1,1);
D(1:2:end)=dalpha_kr;
D(2:2:end-1)=dalpha_cr;
D(2)=-2*dalpha_ar+dalpha_cr;
D(end-1)=-(13/6)*dalpha_ar+dalpha_cr;
% Zweite obere Nebendiagonale:
OD2=sparse(2*N-1,1);
OD2(4:2:end-1)=dalpha_br;
OD2(4)=4*dalpha_ar+dalpha_br;
% Vierte obere Nebendiagonale:
OD4=sparse(2*N-1,1);
OD4(6:2:end-1)=dalpha_ar;
OD4(6)=-(4/3)*dalpha_ar;
% Sechste obere Nebendiagonale:
OD6=sparse(2*N-1,1);
OD6(8)=(1/2)*dalpha_ar;
% Zweite untere Nebendiagonale:
UD2=sparse(2*N-1,1);
UD2(2:2:end-3)=dalpha_br;
UD2(end-3)=(13/6)*dalpha_ar+dalpha_br;
% Vierte untere Nebendiagonale:
UD4=sparse(2*N-1,1);
UD4(2:2:end-5)=dalpha_ar;
UD4(end-5)=-dalpha_ar;
% Sechste untere Nebendiagonale:
UD6=sparse(2*N-1,1);
UD6(end-7)=(11/12)*dalpha_ar;
% Nun zur Matrix dalpha_A1:
H=[UD6 UD4 UD2 D OD2 OD4 OD6];
dalpha_A1=spdiags(H,[-6 -4 -2 0 2 4 6],2*N-1,2*N-1);
% Noch fehlende Einträge:
dalpha_A1(end-1,end-9)=-(1/6)*dalpha_ar;

```

```

% Matrix für die partielle Ableitung von A2*v nach alpha
% Im Programm dann als Matrix-Vektor-Multiplikation: dalpha_A2*v

function dalpha_A2=Matrix_dalphi_A2(R,epsilon,alpha);

global N h x;

% Ekman-Lösung (U', V und V'')
% =====
% Werte für h, 2h,... (für phi-Gleichung):
x1=x(2:2:end-1);
V1=-sin(epsilon)+exp(-x1).*sin(x1+epsilon);
d2V=-2*exp(-x1).*cos(x1+epsilon);
% Werte für h/2, 3/2h,... (für my-Gleichung):
x2=x(1:2:end);
dU=exp(-x2).(cos(x2+epsilon)+sin(x2+epsilon));
V2=-sin(epsilon)+exp(-x2).*sin(x2+epsilon);

% Hilfsgrößen für die Matrix (jetzt nach alpha abgeleitet)
% =====
dalphi_ai=(1/(12*h^2))*R*V1;

```

```

dalpha_bi=-(4/(3*h^2))*R*V1;
dalpha_ci=(5/(2*h^2))*R*V1+3*alpha^2*R*V1+R*d2V;
dalpha_E=(1/16)*R*dU;
dalpha_F=-R*V2;

% Matrix dalpha_A2
% =====
% Hauptdiagonale:
D=sparse(2*N-1,1);
D(1:2:end)=dalpha_F;
D(2:2:end-1)=dalpha_ci;
D(2)=-2*dalphi_ai(1)+dalphi_ci(1);
D(end-1)=-(13/6)*dalphi_ai(end)+dalphi_ci(end);
% Erste obere Nebendiagonale:
OD1=sparse(2*N-1,1);
OD1(2:2:end-1)=-9*dalphi_E(1:end-1);
OD1(2)=-11*dalphi_E(1);
% Zweite obere Nebendiagonale:
OD2=sparse(2*N-1,1);
OD2(4:2:end-1)=dalphi_bi(1:end-1);
OD2(4)=4*dalphi_ai(1)+dalphi_bi(1);
% Dritte obere Nebendiagonale:
OD3=sparse(2*N-1,1);
OD3(4:2:end-1)=dalphi_E(1:end-2);
OD3(4)=5*dalphi_E(1);
% Vierte obere Nebendiagonale:
OD4=sparse(2*N-1,1);
OD4(6:2:end-1)=dalphi_ai(1:end-2);
OD4(6)=-(4/3)*dalphi_ai(1);
% Erste untere Nebendiagonale:
UD1=sparse(2*N-1,1);
UD1(2:2:end-1)=-9*dalphi_E(2:end);
UD1(end-1)=(-67/6)*dalphi_E(end);
% Zweite untere Nebendiagonale:
UD2=sparse(2*N-1,1);
UD2(2:2:end-3)=dalphi_bi(2:end);
UD2(end-3)=(13/6)*dalphi_ai(end)+dalphi_bi(end);
% Dritte untere Nebendiagonale:
UD3=sparse(2*N-1,1);
UD3(2:2:end-3)=dalphi_E(3:end);
UD3(end-3)=(19/6)*dalphi_E(end);
% Vierte untere Nebendiagonale:
UD4=sparse(2*N-1,1);
UD4(2:2:end-5)=dalphi_ai(3:end);
UD4(end-5)=-dalphi_ai(end);
% Nun zur Matrix dalphi_A2:
H=[UD4 UD3 UD2 UD1 D OD1 OD2 OD3 OD4];
dalphi_A2=spdiags(H,[-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4],2*N-1,2*N-1);
% Noch fehlende Einträge:
dalphi_A2(1,6)=-(7/3)*dalphi_E(1); dalphi_A2(1,8)=(1/2)*dalphi_E(1);
dalphi_A2(2,8)=(1/2)*dalphi_ai(1); dalphi_A2(end-1,end-9)=-(1/6)*dalphi_ai(end);
dalphi_A2(end-1,end-7)=(11/12)*dalphi_ai(end);
dalphi_A2(end,end-9)=-(1/6)*dalphi_E(end);
dalphi_A2(end,end-7)=(11/12)*dalphi_E(end); dalphi_A2(end,end-5)=-2*dalphi_E(end);

% Matrix für die partielle Ableitung von B*v nach alpha
% Im Programm dann als Matrix-Vektor-Multiplikation: dalphi_B*v

function dalphi_B=Matrix_dalphi_B(R,epsilon,alpha);

```



```

global N;

% Hilfsgröße für die Matrix (jetzt nach alpha abgeleitet)
% =====
dalpha_d=2*alpha;

% Matrix dalpha_B
% =====
% Hauptdiagonale:
DB=sparse(2*N-1,1);
DB(2:2:end-1)=dalpha_d;
% Nun zur Matrix dalpha_B:
dalpha_B=spdiags(DB,[0],2*N-1,2*N-1);

% Matrix für die partielle Ableitung von A2*v nach epsilon
% Im Programm dann als Matrix-Vektor-Multiplikation: depsilon_A2*v

function depsilon_A2=Matrix_depsilon_A2(R,epsilon,alpha);

global N h x;

% Hilfsgrößen für die Matrix (jetzt nach epsilon abgeleitet)
% =====
x1=x(2:2:end-1); % Werte für h, 2h,... (für phi-Gleichung):
x2=x(1:2:end); % Werte für h/2, 3/2h,... (für my-Gleichung):
depsilon_ai=(1/(12*h^2))*alpha*R*(-cos(epsilon)+exp(-x1).*cos(x1+epsilon));
depsilon_bi=-(4/(3*h^2))*alpha*R*(-cos(epsilon)+exp(-x1).*cos(x1+epsilon));
depsilon_ci=(5/(2*h^2))*alpha*R*(-cos(epsilon)+exp(-x1).*cos(x1+epsilon))...
    -alpha*R*(-alpha^2*(-cos(epsilon)+exp(-x1).*cos(x1+epsilon))...
    -2*exp(-x1).*sin(x1+epsilon));
depsilon_E=(1/16)*alpha*R*exp(-x2).*(-sin(x2+epsilon)+cos(x2+epsilon));
depsilon_F=-alpha*R*(-cos(epsilon)+exp(-x2).*cos(x2+epsilon));

% Matrix depsilon_A2
% =====
% Hauptdiagonale:
D=sparse(2*N-1,1);
D(1:2:end)=depsilon_F;
D(2:2:end-1)=depsilon_ci;
D(2)=-2*depsilon_ai(1)+depsilon_ci(1);
D(end-1)=-(13/6)*depsilon_ai(end)+depsilon_ci(end);
% Erste obere Nebendiagonale:
OD1=sparse(2*N-1,1);
OD1(2:2:end-1)=-9*depsilon_E(1:end-1);
OD1(2)=-11*depsilon_E(1);
% Zweite obere Nebendiagonale:
OD2=sparse(2*N-1,1);
OD2(4:2:end-1)=depsilon_bi(1:end-1);
OD2(4)=4*depsilon_ai(1)+depsilon_bi(1);
% Dritte obere Nebendiagonale:
OD3=sparse(2*N-1,1);
OD3(4:2:end-1)=depsilon_E(1:end-2);
OD3(4)=5*depsilon_E(1);
% Vierte obere Nebendiagonale:
OD4=sparse(2*N-1,1);
OD4(6:2:end-1)=depsilon_ai(1:end-2);
OD4(6)=-4/3*depsilon_ai(1);
% Erste untere Nebendiagonale:

```

```

UD1=sparse(2*N-1,1);
UD1(2:2:end-1)=-9*depsilon_E(2:end);
UD1(end-1)=(-67/6)*depsilon_E(end);
% Zweite untere Nebendiagonale:
UD2=sparse(2*N-1,1);
UD2(2:2:end-3)=depsilon_bi(2:end);
UD2(end-3)=(13/6)*depsilon_ai(end)+depsilon_bi(end);
% Dritte untere Nebendiagonale:
UD3=sparse(2*N-1,1);
UD3(2:2:end-3)=depsilon_E(3:end);
UD3(end-3)=(19/6)*depsilon_E(end);
% Vierte untere Nebendiagonale:
UD4=sparse(2*N-1,1);
UD4(2:2:end-5)=depsilon_ai(3:end);
UD4(end-5)=-depsilon_ai(end);
% Nun zur Matrix depsilon_A2:
H=[UD4 UD3 UD2 UD1 D OD1 OD2 OD3 OD4];
depsilon_A2=spdiags(H,[-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4],2*N-1,2*N-1);
% Noch fehlende Einträge:
depsilon_A2(1,6)=-(7/3)*depsilon_E(1); depsilon_A2(1,8)=(1/2)*depsilon_E(1);
depsilon_A2(2,8)=(1/2)*depsilon_ai(1);
depsilon_A2(end-1,end-9)=-(1/6)*depsilon_ai(end);
depsilon_A2(end-1,end-7)=(11/12)*depsilon_ai(end);
depsilon_A2(end,end-9)=-(1/6)*depsilon_E(end);
depsilon_A2(end,end-7)=(11/12)*depsilon_E(end);
depsilon_A2(end,end-5)=-2*depsilon_E(end);

```

```

% Matrix für die partielle Ableitung von A2*v nach R
% Im Programm dann als Matrix-Vektor-Multiplikation: dR_A2*v

```

```

function dR_A2=Matrix_dR_A2(R,epsilon,alpha);

global N h x;

% Ekman-Lösung (U', V und V'')
% =====
% Werte für h, 2h,... (für phi-Gleichung):
x1=x(2:2:end-1);
V1=-sin(epsilon)+exp(-x1).*sin(x1+epsilon);
d2V=-2*exp(-x1).*cos(x1+epsilon);
% Werte für h/2, 3/2h,... (für my-Gleichung):
x2=x(1:2:end);
dU=exp(-x2).(cos(x2+epsilon)+sin(x2+epsilon));
V2=-sin(epsilon)+exp(-x2).*sin(x2+epsilon);

% Hilfsgrößen für die Matrix (jetzt nach R abgeleitet)
% =====
dR_ai=(1/(12*h^2))*alpha*V1;
dR_bi=-(4/(3*h^2))*alpha*V1;
dR_ci=(5/(2*h^2))*alpha*V1-alpha*(-alpha^2*V1-d2V);
dR_E=(1/16)*alpha*dU;
dR_F=-alpha*V2;

% Matrix dR_A2
% =====
% Hauptdiagonale:
D=sparse(2*N-1,1);
D(1:2:end)=dR_F;
D(2:2:end-1)=dR_ci;

```

```

D(2)=-2*dR_ai(1)+dR_ci(1);
D(end-1)=- (13/6)*dR_ai(end)+dR_ci(end);
% Erste obere Nebendiagonale:
OD1=sparse(2*N-1,1);
OD1(2:2:end-1)=-9*dR_E(1:end-1);
OD1(2)=-11*dR_E(1);
% Zweite obere Nebendiagonale:
OD2=sparse(2*N-1,1);
OD2(4:2:end-1)=dR_bi(1:end-1);
OD2(4)=4*dR_ai(1)+dR_bi(1);
% Dritte obere Nebendiagonale:
OD3=sparse(2*N-1,1);
OD3(4:2:end-1)=dR_E(1:end-2);
OD3(4)=5*dR_E(1);
% Vierte obere Nebendiagonale:
OD4=sparse(2*N-1,1);
OD4(6:2:end-1)=dR_ai(1:end-2);
OD4(6)=- (4/3)*dR_ai(1);
% Erste untere Nebendiagonale:
UD1=sparse(2*N-1,1);
UD1(2:2:end-1)=-9*dR_E(2:end);
UD1(end-1)=- (67/6)*dR_E(end);
% Zweite untere Nebendiagonale:
UD2=sparse(2*N-1,1);
UD2(2:2:end-3)=dR_bi(2:end);
UD2(end-3)=(13/6)*dR_ai(end)+dR_bi(end);
% Dritte untere Nebendiagonale:
UD3=sparse(2*N-1,1);
UD3(2:2:end-3)=dR_E(3:end);
UD3(end-3)=(19/6)*dR_E(end);
% Vierte untere Nebendiagonale:
UD4=sparse(2*N-1,1);
UD4(2:2:end-5)=dR_ai(3:end);
UD4(end-5)=-dR_ai(end);
% Nun zur Matrix dR_A2:
H=[UD4 UD3 UD2 UD1 D OD1 OD2 OD3 OD4];
dR_A2=spdiags(H,[-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4],2*N-1,2*N-1);
% Noch fehlende Einträge:
dR_A2(1,6)=- (7/3)*dR_E(1); dR_A2(1,8)=(1/2)*dR_E(1);
dR_A2(2,8)=(1/2)*dR_ai(1);
dR_A2(end-1,end-9)=- (1/6)*dR_ai(end); dR_A2(end-1,end-7)=(11/12)*dR_ai(end);
dR_A2(end,end-9)=- (1/6)*dR_E(end); dR_A2(end,end-7)=(11/12)*dR_E(end);
dR_A2(end,end-5)=-2*dR_E(end);

```

Literaturverzeichnis

- [1] CLIFFE, K. A., A. SPENCE und S. J. TAVENER: The numerical analysis of bifurcation problems with application to fluid mechanics. Acta Numerica, 9:39–131, 2000.
- [2] DICKSON, K. I., C. T. KELLEY, I. C. F. IPSEN und I. G. KEVREKIDIS: Condition Estimates for Pseudo-Arclength Continuation. SIAM J. Numer. Anal., S. 263–276, 2006.
- [3] DOEDEL, E. J.: Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equations. Concordia University, 2007.
- [4] DRAZIN, P. G.: Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] EKMAN, V. W.: On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents. Arkiv Matem. Astr. Fysik, 11, 1905.
- [6] ETLING, D.: Theoretische Meteorologie: Eine Einführung. Springer, 2008.
- [7] FALLER, A. J.: An experimental study of the instability of the laminar Ekman boundary layer. Journal of Fluid Mechanics, 15(04):560–576, 1963.
- [8] FORSTER, O.: Analysis 1. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008.
- [9] GODRÈCHE, C. und P. MANNEVILLE: Hydrodynamics and nonlinear instabilities. Cambridge University Press, 1998.
- [10] GREENBERG, L. und M. MARLETTA: The Ekman flow and related problems: spectral theory and numerical analysis. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 136(03):719–764, 2002.
- [11] HESS, M., M. HIEBER, A. MAHALOV und J. SAAL: Nonlinear Stability of Ekman boundary layers. Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik, 2007.
- [12] IOOSS, G., H. B. NIELSEN und H. TRUE: Bifurcation of the stationary Ekman flow into a stable periodic flow. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 68:227–256, 1978.
- [13] KELLER, H. B.: Lectures on Numerical Methods in Bifurcation Problems. Springer-Verlag, 1987.
- [14] KÜPPER, T.: Verzweigungstheorie. Vorlesungsskript, Uni Köln, 2009.
- [15] KUHLMANN, H. C.: Hydrodynamische Stabilität – Eine Einführung. Vorlesungsskript, TU Wien, 2009.
- [16] KUNDU, P. K.: Fluid mechanics. Academic Press, San Diego, 1990.
- [17] LAUB, A. J.: Matrix Analysis For Scientists And Engineers. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2004.
- [18] LILLY, D. K.: On the Instability of Ekman Boundary Flow. Journal of Atmospheric Sciences, 23:481–494, Sep. 1966.

- [19] MOORE, G. und A. SPENCE: The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 17(4):567–576, 1980.
- [20] PLATO, R.: Numerische Mathematik kompakt. Vieweg, 2006.
- [21] RUNG, T., L. XUE, J. YAN, M. SCHATZ und F. THIELE: Numerische Methoden der Thermo- und Fluidodynamik. Vorlesungsskript, TU Berlin, 2002.
- [22] SEYDEL, R.: Practical Bifurcation and Stability Analysis. Springer, 2010.
- [23] SVERDRUP, H. U., M. W. JOHNSON und R. H. FLEMING: The Oceans, Their Physics, Chemistry, and General Biology. New York: Prentice-Hall, 1942.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit eigenständig verfasst wurde und dass keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Literaturquellen benutzt wurden.

Konstanz, den 5. August 2010, (Felix Kleber)