

Diplomarbeit

\mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen

Stephan Kolassa
Lerchenweg 12
78465 Konstanz
Tel.: 0 75 33/29 17
email: Stephan.Kolassa@uni-konstanz.de

Konstanz, den 7. Februar 2002

Mál er at þyfia
þular stóli á,
Urðar brunni at;
sá ek ok þagðak,
sá ek ok hugðak,
hlýdda ek á manna mál;
of rúnar heyrða ek dæma,
né um ráðom þogðo.

Hávamál

Zeit ist's zu reden
vom Rednerstuhl.
An dem Brunnen Urdas
saß ich und schwieg,
saß ich und dachte
und merkte der Männer Reden.
Von Runen hört ich reden
und vernahm auch nütze Lehren.

Sprüche des Hohen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Vorbereitungen	3
1.1 Gruppen und Gruppenwirkungen	3
1.2 Die Gruppe \mathbb{C}^*	7
1.3 Darstellungen von S^1 und \mathbb{C}^*	10
1.4 Holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkungen auf komplexen Kurven	14
1.5 Fixpunkte auf Flächen	17
2 Elliptische Faserungen	20
2.1 Motivation der Untersuchung elliptischer Faserungen	20
2.2 Mögliche singuläre Fasern	22
2.3 Der reguläre Ort: die Isotropiefunktion	25
3 Singuläre Fasern vom Typ mI_0	30
3.1 Ein lokales Modell einer Faser vom Typ mI_0	30
3.2 Isomorphie zum lokalen Modell	35
3.3 Ein modifiziertes Modell	40
4 Torische Flächen	43
4.1 Konvexe und polyedrische Kegel	43
4.2 Gitterkegel	46
4.3 Die einem Kegel zugeordnete Halbgruppe	48
4.4 Affine torische Varietäten	51
4.5 Fächer und torische Varietäten	58
5 Singuläre Fasern vom Typ mI_b	61
5.1 Ein lokales Modell einer Faser vom Typ ${}_1I_b$	61
5.2 Isomorphie zum lokalen Modell im Falle $m = 1$	67
5.3 Ein lokales Modell einer Faser vom Typ mI_b	71

6 Faserungen ohne mehrfache Fasern: globale Beschreibung	79
7 Ausblick und offene Fragen	84
Literaturverzeichnis	86
Symbolverzeichnis	89
Stichwortverzeichnis	91

Einleitung

Komplexe Flächen sind ein wichtiges Gebiet der mathematischen Forschung im Bereich der mehrdimensionalen Funktionentheorie und der Algebraischen Geometrie. KODAIRAS Untersuchungen in [Kod60], [Kod63a] und [Kod63b] sowie [Kod64], [Kod66], [Kod68a] und [Kod68b] machen die ganze mögliche Vielfalt dieses Gebiets deutlich. Komplexe Flächen finden aber auch Anwendung in der Theorie vierdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Hier bietet etwa die Einleitung zu [FM94] einen Überblick.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit dem Spezialfall einer *elliptischen Faserung*, also einer Abbildung von einer glatten komplexen Fläche X auf eine glatte Kurve Y , deren reguläre Fasern elliptische Kurven sind. Solche Faserungen treten auf natürliche Weise als Holomorphiehülle komplexer Flächen auf. Da elliptische Kurven nichtäquivalente komplexe Strukturen tragen können, ist die Klasse der elliptischen Faserungen schon reichhaltiger als etwa die der Regelflächen. Dies wird anhand KODAIRAS Klassifikation der möglichen singulären Fasern der Faserung in [Kod63a] noch deutlicher.

Wir nehmen nun weiter an, daß auf der Fläche X eine holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung existiert, bezüglich derer die Faserung invariant ist. Diese zusätzliche Voraussetzung ermöglicht uns einen elementaren Zugang zu elliptischen Faserungen, so daß wir KODAIRAS Ergebnisse nicht allzu oft zu Rate ziehen müssen. Außerdem sind in diesem Falle die Möglichkeiten für die Struktur von singulären Fasern stark eingeschränkt.

In [GH98] werden \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen ohne mehrfache Fasern bis auf äquivariante Isomorphie klassifiziert. Wir stellen dieses Ergebnis in Kapitel 6 dar. Gegenstand dieser Arbeit ist der bislang noch nicht untersuchte Fall mehrfacher kritischer Fasern.

In Kapitel 1 stellen wir zunächst einige Hilfsmittel bereit. Wir erinnern an Begriffe aus der Theorie von Gruppenwirkungen und betrachten die LIEGRUPPE \mathbb{C}^* . Weiter klassifizieren wir die nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkungen auf RIEMANNSCHEN Flächen und untersuchen schließlich die lokale Situation nahe Fixpunkten einer holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung auf einer glatten komplexen Fläche.

In Kapitel 2 definieren wir den Begriff der \mathbb{C}^* -invarianten *elliptischen Faserung* und stellen erste Eigenschaften zusammen. Insbesondere ist die Struktur der singulären Fasern wichtig: die einzigen möglichen kritischen Fasern sind vom Typ mI_0 für $m > 1$ oder mI_b für $b \geq 1$ und $m \geq 1$, also elliptische Kurven mit Vielfachheit oder Zykel von rationalen Kurven mit oder ohne Vielfachheit. Weiter zeigen wir die Existenz der *Isotropiefunktion*, die die Struktur der regulären Fasern und der darauf induzierten \mathbb{C}^* -Wirkung beschreibt. Sie ist in gewissem Sinne das multiplikative Analogon zu KODAIRAS J -Invariante.

In Kapitel 3 behandeln wir das offene Problem kritischer Fasern vom Typ mI_0 . Zunächst konstruieren wir ein lokales Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung zu einer

vorgegebenen Isotropiefunktion mit einer kritischen Faser vom Typ mI_0 . Weiter zeigen wir, daß jede \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung nahe einer Faser vom Typ mI_0 unter einer geeigneten Bedingung an die Isotropie der kritischen Faser isomorph zu diesem lokalen Modell ist.

In Kapitel 4 stellen wir Grundbegriffe der Theorie torischer Varietäten dar. Aufgrund des Wechselspiels zwischen der elementaren Konvexgeometrie von Kegeln und Fächern im \mathbb{R}^n und der Geometrie der zugehörigen komplexen Varietäten eignen sich torische Varietäten gut für die Konstruktion von komplexen Räumen mit vorgegebenen geometrischen Eigenschaften, die sich in den entsprechenden Kegeln und Fächern widerspiegeln. Die Toruswirkung liefert überdies vermittels Ein-Parameter-Untergruppen – die in dieser Arbeit nur implizit auftauchen – auf natürliche Weise holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkungen mit gut kontrollierbarem Bahnenverhalten. Wir verbinden in dieser Arbeit die eher algebraisch-geometrischen Gesichtspunkte torischer Varietäten mit dem komplex-analytischen Aspekt diskreter Automorphismengruppen.

In Kapitel 5 verwenden wir zunächst die in Kapitel 4 dargestellten Techniken aus der Theorie torischer Varietäten, um gemäß [GH98] ein lokales Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung zu einer gegebenen Isotropiefunktion mit einer kritischen Faser vom Typ $1I_b$ mit $b \geq 1$ zu konstruieren.

Danach gehen wir auf die noch offene Frage einer kritischen Faser vom Typ mI_b mit $b \geq 1$ und $m \geq 1$ ein: ausgehend vom Modell vom Typ $1I_{mb}$ konstruieren wir zu einer vorgegebenen Isotropiefunktion sowie Parametern $b \geq 1$ und $m \geq 1$ wieder auf „torische“ Weise ein lokales Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung mit einer Faser vom Typ mI_b .

In Kapitel 6 führen wir die Klassifikation von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen ohne mehrfache Fasern gemäß [GH98] aus: eine solche Faserung $X \rightarrow Y$ ist ein elliptisches Prinzipalbündel, falls Y kompakt ist, und sonst äquivariant isomorph zu einem geeigneten globalen Modell.

In Kapitel 7 gehen wir schließlich auf noch offene Fragen zu \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen ein und geben einen Ausblick über mögliche Erweiterungen der verwendeten Begriffe.

Danken möchte ich an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. LUDGER KAUP für seine Förderung und Unterstützung weit über den Rahmen dieser Diplomarbeit hinaus, meinem Betreuer Herrn PD Dr. JÜRGEN HAUSEN für die Anregung zu diesem interessanten Thema sowie viele nützliche Hinweise, ferner MARTIN OBERHOFER für das Korrekturlesen und schließlich IRIS-TATJANA OFENLOCH für ihr geduldiges Ertragen meiner Phasen mathematisch bedingter Unzurechnungsfähigkeit.

1 Vorbereitungen

In diesem Kapitel stellen wir einige zumeist wohlbekanntete Techniken vor, mit deren Hilfe wir im folgenden \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen untersuchen werden. Konzeptionell wichtig sind die Abschnitte 1.2 über die Struktur der komplexen LIEgruppe \mathbb{C}^* sowie 1.4 über holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkungen auf RIEMANNschen Flächen. Die übrigen Abschnitte sind eher technischer Natur.

1.1 Gruppen und Gruppenwirkungen

Gruppen

Definition 1.1.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G , die eine Topologie trägt, so daß die Gruppenoperationen

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \longmapsto gh \quad \text{und} \quad G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto g^{-1} \quad (1.1)$$

stetig sind. Ist G zusätzlich eine differenzierbare (komplexe) Mannigfaltigkeit und sind die Gruppenoperationen (1.1) differenzierbar (holomorph), so nennen wir G eine *reelle (komplexe) LIEgruppe*. \square

Beispiel 1.1.2. Mit der Matrixmultiplikation ist $GL(n, \mathbb{C})$ eine komplexe LIEgruppe. \square

Weiter benötigen wir *analytische Untergruppen* von komplexen LIEgruppen:

Definition 1.1.3. Wir nennen eine Untergruppe einer komplexen LIEgruppe, die gleichzeitig eine analytische Menge ist, eine *analytische Untergruppe*. \square

Wichtige Beispiele für analytische Untergruppen von komplexen LIEgruppen sind *linear algebraische Gruppen*:

Definition 1.1.4. Durch Polynome definierte abgeschlossene Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ heißen *linear algebraische Gruppen*. \square

Beispiel 1.1.5. Die für uns wichtigsten Beispiele von linear algebraischen Gruppen sind die *n-dimensionalen algebraischen Tori*

$$\mathbb{T}^n := (\mathbb{C}^*)^n \cong \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M \text{ Diagonalmatrix}\} = V(GL(n, \mathbb{C}); (T_{ij} \mid i \neq j))$$

sowie die Einheitswurzelgruppen

$$E_n := \{e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k} \mid 0 \leq k < n\} = V(\mathbb{C}^*; T^n - 1)$$

als analytische Untergruppen des eindimensionalen algebraischen Torus. \square

Gruppenwirkungen

Wir erinnern in diesem Abschnitt an einige Begriffe im Zusammenhang mit *Gruppenwirkungen*:

Definition 1.1.6. Seien G eine Gruppe und X eine Menge. Eine G -Wirkung ist eine Abbildung

$$\gamma: G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x := \gamma(g, x),$$

so daß für alle $x \in X$ und $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$1_G \cdot x = x \quad \text{und} \quad (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

Ist X eine Menge und γ eine G -Wirkung auf X , so nennen wir das Paar (X, γ) einen G -Raum. \square

Im folgenden bezeichne (X, γ) immer einen G -Raum.

Definition 1.1.7. Der *Ineffektivitätskern* der G -Wirkung γ ist definiert als

$$\{g \in G \mid \forall x \in X: g \cdot x = x\}. \quad \square$$

Definition 1.1.8. Ist der Ineffektivitätskern trivial, so heißt die G -Wirkung *effektiv*. \square

Definition 1.1.9. Die *Bahn* von $x \in X$ ist

$$B(x) := G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}. \quad \square$$

Definition 1.1.10. Die *Isotropiegruppe* von $x \in X$ ist definiert als

$$G_x := \gamma_x^{-1}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\},$$

wobei wir mit

$$\gamma_x: G \longrightarrow X, \quad g \longmapsto g \cdot x$$

die *Bahnabbildung* von x bezeichnen. \square

Bemerkung 1.1.11. Isotropiegruppen sind Untergruppen von G .

Der Ineffektivitätskern ist der Durchschnitt der Isotropiegruppen aller Punkte und somit ebenfalls eine Untergruppe von G . \square

Definition 1.1.12. Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *G -invariant*, wenn $G \cdot W = W$.

Für $W \subset X$ bezeichnen wir die *Fixpunktmenge* von W mit

$$W^G := \{x \in W \mid \forall g \in G: g \cdot x = x\}. \quad \square$$

Definition 1.1.13. Eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow X'$ zwischen G -Räumen (X, γ) und (X', γ') heißt *(G -)äquivariant*, falls $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$ gilt. Ist φ äquivariant bezüglich der trivialen G -Wirkung auf X' , gilt also $\varphi(g \cdot x) = \varphi(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$, so nennen wir φ eine *(G -)invariante Abbildung*. \square

Stetige, komplexe und holomorphe Gruppenwirkungen

Definition 1.1.14. Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine *stetige G -Wirkung* auf X ist eine G -Wirkung $\gamma: G \times X \rightarrow X$, die bezüglich der Produkttopologie auf $G \times X$ stetig ist.

Ist X ein topologischer Raum und γ eine stetige Wirkung auf X , so heißt das Paar (X, γ) ein *topologischer G -Raum*. \square

Definition 1.1.15. Ist X ein komplexer Raum, so nennen wir einen G -Raum (X, γ) einen *komplexen G -Raum*, falls die Abbildung

$$\gamma(g, \cdot): X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto g \cdot x$$

für alle $g \in G$ holomorph ist. Wir nennen die G -Wirkung in diesem Falle *komplex*.

Sei weiter G eine komplexe LIE-Gruppe. Ein *holomorpher G -Raum* ist ein G -Raum (X, γ) , so daß $\gamma: G \times X \rightarrow X$ holomorph ist. Wir nennen γ eine *holomorphe Wirkung*.

Wir definieren *komplexe (holomorphe) G -Mannigfaltigkeiten* und *komplexe (holomorphe) G -Flächen* auf analoge Weise. \square

Bemerkung 1.1.16. Ist (X, γ) ein komplexer G -Raum, so ist $\gamma(g, \cdot)$ für alle $g \in G$ biholomorph mit der inversen Abbildung $\gamma(g^{-1}, \cdot)$.

Ein holomorpher G -Raum ist für jede Untergruppe $H \subset G$ ein komplexer H -Raum. \square

Beispiel 1.1.17. Ist G eine komplexe LIE-Gruppe und (X, γ) ein holomorpher G -Raum, so sind Isotropiegruppen von Punkten und der Ineffektivitätskern von γ analytische Untergruppen von G .

Beweis. Sei $x \in X$. Dann ist die Isotropiegruppe $G_x = \gamma_x^{-1}(x)$ als Faser der holomorphen Bahnabbildung $\gamma_x: G \rightarrow X$ eine analytische Menge.

Der Ineffektivitätskern von γ ist als Durchschnitt der (analytischen) Isotropiegruppen ebenfalls analytisch. \blacksquare

Schließlich benötigen wir noch zwei Eigenschaften von „gutartigen“ Gruppenwirkungen:

Definition 1.1.18. Sei (X, γ) ein komplexer G -Raum.

- Die Wirkung γ heißt *frei*, falls jeder Punkt $x \in X$ triviale Isotropie besitzt: $G_x = \{1_G\}$ für alle $x \in X$.
- Die Wirkung γ heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn für jedes Kompaktum $K \subset X$ nur endlich viele $g \in G$ existieren, so daß $K \cap g \cdot K \neq \emptyset$. \square

Die Motivation für die Betrachtung dieser Eigenschaften ist der folgende Satz:

Satz 1.1.19. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf die eine Gruppe H frei und eigentlich diskontinuierlich komplex wirkt.

Dann ist der Quotientenraum X/H glatt, und die Quotientenabbildung $\pi: X \rightarrow X/H$ ist eine Submersion.

Weiter ist die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: für jede holomorphe H -invariante Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ in eine komplexe Mannigfaltigkeit Y gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\psi: X/H \rightarrow Y$, mit der das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \psi & \\ X/H & & \end{array}$$

Beweis. Nach Corollary 32 B.8 in [KK83] ist X/H glatt und π eine Submersion.

Ist nun $\varphi: X \rightarrow Y$ invariant, so ist ψ zunächst mengentheoretisch wohldefiniert und eindeutig bestimmt. Da π eine Submersion ist, ist ψ nach Lemma 1.1.21 holomorph. ■

Korollar 1.1.20. Sei (X, γ) eine holomorphe G -Mannigfaltigkeit. Weiter existiere eine freie und eigentlich diskontinuierliche komplexe H -Wirkung auf X , so daß gilt:

$$g \cdot (h \cdot x) = h \cdot (g \cdot x) \text{ für alle } g \in G, h \in H \text{ und } x \in X. \quad (1.2)$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte G -Wirkung $\bar{\gamma}$ auf X/H , bezüglich derer die Quotientenabbildung $\pi: X \rightarrow X/H$ äquivariant ist. Die G -Wirkung $\bar{\gamma}$ ist holomorph.

Beweis. Aufgrund (1.2) liefert die Zuordnung

$$\bar{\gamma}(g, [x]) := [\gamma(g, x)] = \pi \circ \gamma(g, x) \quad (1.3)$$

zunächst eine wohldefinierte G -Wirkung $\bar{\gamma}$ auf X/H , bezüglich derer π äquivariant ist. Durch (1.3) ist $\bar{\gamma}$ eindeutig bestimmt.

Zu zeigen bleibt die Holomorphie von $\bar{\gamma}$. Hierzu definieren wir eine komplexe H -Wirkung auf $G \times X$ wie folgt: sei

$$h \star (g, x) := (g, h \cdot x).$$

Diese H -Wirkung ist wieder frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei $\pi_{G \times X}: G \times X \rightarrow (G \times X)/H$ die Quotientenabbildung.

Wir setzen

$$\chi: G \times (X/H) \longrightarrow (G \times X)/H, \quad (g, [x]) \longmapsto [(g, x)] = \pi_{G \times X}(g, x).$$

Dann ist χ wohldefiniert. Weiter ist mit π auch $\text{id}_G \times \pi$ eine Submersion. Da $\pi_{G \times X}$ holomorph ist, ist χ nach Lemma 1.1.21 holomorph.

$$\begin{array}{ccc}
 G \times X & \xrightarrow{\pi_{G \times X}} & (G \times X)/H \\
 \searrow \text{id}_G \times \pi & & \nearrow \chi \\
 & G \times (X/H) &
 \end{array}$$

Weiter existiert nach Satz 1.1.19 eine holomorphe Abbildung ψ , mit der auch der rechte Teil des folgenden Diagramms kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G \times X & & \\
 & \swarrow \text{id}_G \times \pi & \downarrow \pi_{G \times X} & \searrow \pi \circ \gamma & \\
 & G \times (X/H) & \xrightarrow{\chi} & (G \times X)/H & \xrightarrow{\psi} & X/H
 \end{array}$$

Aufgrund von

$$\bar{\gamma}(g, [x]) = \pi \circ \gamma(g, x) = \psi \circ \chi \circ (\text{id}_G \times \pi)(g, x) = \psi \circ \chi(g, [x])$$

ist also auch $\bar{\gamma} = \psi \circ \chi$ holomorph. ■

Die folgende Eigenschaft von Submersionen haben wir oben verwendet (wir zitieren hier Corollary 32 A.3 ii) b) in [KK83]):

Lemma 1.1.21. *Sei $\pi: X \rightarrow Y$ eine Submersion zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann ist eine Abbildung $\varphi: \pi(X) \rightarrow Z$ in eine weitere Mannigfaltigkeit Z genau dann holomorph, wenn $\varphi \circ \pi$ holomorph ist.* □

1.2 Die Gruppe \mathbb{C}^*

Als Vorbereitung für unsere Untersuchung von \mathbb{C}^* -Wirkungen betrachten wir in diesem Abschnitt die Struktur der komplexen LIEgruppe \mathbb{C}^* . Dabei übernehmen wir weitgehend die Ausführungen in [Hau96].

In Anbetracht von Beispiel 1.1.17 befassen wir uns zunächst mit den analytischen Untergruppen von \mathbb{C}^* . Zunächst halten wir fest:

Lemma 1.2.1. *Die echten analytischen Untergruppen von \mathbb{C}^* sind genau die diskreten Untergruppen von \mathbb{C}^* .* □

Wir bestimmen die analytischen Untergruppen von \mathbb{C}^* wie folgt:

Satz 1.2.2. *Für jede echte analytische Untergruppe G von \mathbb{C}^* gilt:*

1. Ist G endlich, so wird G von einer Einheitswurzel erzeugt.
2. Ist G unendlich, so wird G von einer Zahl $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $|\alpha| < 1$ und einer Einheitswurzel erzeugt.

Für den Beweis des obigen Satzes erinnern wir an einige bekannte Eigenschaften von *Gittern*:

Definition 1.2.3. Eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gitter*, falls es \mathbb{R} -linear unabhängige Vektoren $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $\Gamma = \mathbb{Z}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}u_r$.

Wir nennen r den *Rang* des Gitters Γ und schreiben $r =: \text{rg } \Gamma$.

Gitter vom Rang n im \mathbb{R}^n heißen *vollständig*. □

Die folgende Charakterisierung der Untergruppen der additiven Gruppe von \mathbb{C} findet sich als Satz 4.5 in Kapitel 5 von [Art93]:

Satz 1.2.4. Die Gitter im $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ sind genau die diskreten additiven Untergruppen. □

Beweis von Satz 1.2.2. Nach Lemma 1.2.1 genügt es zu zeigen, daß für jede diskrete Untergruppe G von \mathbb{C}^* eine der beiden Aussagen erfüllt ist.

Wir betrachten hierzu den Homomorphismus $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ und setzen $\Gamma := \exp^{-1}(G)$. Da \exp ein lokaler Homöomorphismus ist, ist Γ eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe von \mathbb{C} , also nach Satz 1.2.4 ein Gitter. Mit $\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z} \subset \Gamma$ spannt Γ einen reell mindestens eindimensionalen Untervektorraum von \mathbb{C} auf. Somit ist $1 \leq \text{rg } \Gamma \leq 2$. Wir unterscheiden nach dem Rang von Γ zwei Fälle:

$\text{rg } \Gamma = 1$: Sei etwa $\Gamma = \mathbb{Z}u$. Dann ist nach den Homomorphiesätzen

$$G \cong \Gamma / \ker(\exp) = \mathbb{Z}u / 2\pi i\mathbb{Z}$$

endlich (da diskret), und G wird von der Einheitswurzel $\exp u$ erzeugt.

$\text{rg } \Gamma = 2$: Nach Lemma 1.2.5 ist $\Lambda := \ker(\exp)$ in einem primitiven Untermodul Λ' von Γ enthalten. Sei Λ'' ein Komplement von Λ in Γ . Dann gilt

$$G \cong \Gamma / \Lambda \cong \Lambda'' \oplus (\Lambda' / \Lambda) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

für $m := \text{ord } \Lambda' / \Lambda$. Sind $\Lambda' = \langle u' \rangle$ und $\Lambda'' = \langle u'' \rangle$, so wird G von $\zeta = \exp u'$ und $\alpha = \exp u''$ erzeugt. Es gilt $\text{ord } \zeta = m$ und $|\alpha| \neq 1$ aufgrund der Diskretheit von G . Somit erfüllt G Aussage 2. ■

Im Beweis haben wir das folgende Lemma verwendet:

Lemma 1.2.5. Sei Γ ein freier \mathbb{Z} -Modul vom Rang 2. Dann ist jeder Untermodul $\Lambda \subset \Gamma$ vom Rang 1 in einem direkten Summanden Λ' in Γ vom Rang 1 enthalten.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\Gamma = \mathbb{Z}^2$. Sei Λ erzeugt von (m, n) . Wir setzen

$$m' := m / \text{ggT}(m, n) \quad \text{sowie} \quad n' := n / \text{ggT}(m, n)$$

und zeigen, daß der von (m', n') erzeugte Untermodul $\Lambda' \supset \Lambda$ direkter Summand in \mathbb{Z}^2 ist: die ganzen Zahlen m' und n' sind teilerfremd, und ist $rm' + sn' = 1$ für $r, s \in \mathbb{Z}$, so bilden (m', n') und $(-s, r)$ eine Basis für \mathbb{Z}^2 . ■

Wir betrachten nun einen komplexen G -Raum (X, γ) . Sei $x \in X$ mit Isotropiegruppe G_x . Ist die Bahn $B(x)$ durch x lokalkompakt, so ist $B(x)$ eine lokal analytische Teilmenge von X , und die Bahnabbildung γ_x induziert eine Biholomorphie zwischen G/G_x und $B(x)$ (Satz 6 in [Hol63]).

Um diesen allgemeineren Sachverhalt im Falle einer holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung untersuchen zu können, betrachten wir die Quotienten \mathbb{C}^*/G nach echten analytischen (also diskreten) Untergruppen G von \mathbb{C}^* genauer.

Zunächst gehen wir auf den Fall einer endlichen Untergruppe ein:

Satz 1.2.6. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind \mathbb{C}^* und \mathbb{C}^*/E_n isomorphe komplexe Liegruppen.*

Beweis. Der surjektive Homomorphismus $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ faktorisiert zu einem Isomorphismus komplexer Liegruppen $\mathbb{C}^*/E_n \cong \mathbb{C}^*$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{z \mapsto z^n} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow & \nearrow \cong & \\ \mathbb{C}^*/E_n & & \end{array}$$

■

Da wir die Abbildung der n -ten Potenz noch häufiger benutzen werden, geben wir ihr einen Namen:

Notation 1.2.7. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$\beta_n: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^n. \quad \square$$

Im unendlichen Fall erhalten wir:

Satz 1.2.8. *Sei G eine unendliche diskrete Untergruppe von \mathbb{C}^* . Dann ist die Faktorgruppe \mathbb{C}^*/G ein eindimensionaler komplexer Torus.*

Beweis. Nach dem Beweis zu Satz 1.2.2 ist $\Gamma := \exp^{-1}(G)$ ein vollständiges Gitter in \mathbb{C} . Wir bezeichnen die Restklassenabbildungen mit $\pi_\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ und $\pi_G: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*/G$. Nach dem Homomorphiesatz faktorisiert die Abbildung $\pi_G \circ \exp$, und wir erhalten einen Isomorphismus $\mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{C}^*/G$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{C}^* \\ \pi_\Gamma \downarrow & & \downarrow \pi_G \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}^*/G \end{array}$$

■

Bemerkung 1.2.9. Die eindimensionalen komplexen Tori sind genau die elliptischen Kurven über \mathbb{C} (Corollary 1.11 in [Rob73]). Um Verwechslungen mit algebraischen Tori zu vermeiden, werden wir im allgemeinen den Begriff *elliptische Kurve* verwenden. \square

Satz 1.2.10. Seien (X, γ) ein holomorpher \mathbb{C}^* -Raum und $x \in X$. Die Isotropiegruppe \mathbb{C}_x^* von x sei unendlich und diskret. Dann ist die Bahn $B(x)$ eine glatte kompakte Kurve, und die Bahnabbildung γ_x induziert eine Biholomorphie $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_x^* \cong B(x)$.

Beweis. Sei $\pi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*/\mathbb{C}_x^*$ die Restklassenabbildung. Dann faktorisiert die Bahnabbildung γ_x über π zu einer injektiven holomorphen Abbildung $\varphi: \mathbb{C}^*/\mathbb{C}_x^* \rightarrow X$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\gamma_x} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \mathbb{C}^*/\mathbb{C}_x^* & & \end{array}$$

Da $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_x^*$ als elliptische Kurve kompakt ist, ist φ eigentlich. Mit dem REMMERTSchen Abbildungssatz (Theorem 45.17 in [KK83]) folgt, daß $B(x) = \varphi(\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_x^*)$ eine analytische Menge in X ist. Da weiter $B(x)$ glatt ist, ist φ eine bijektive holomorphe Abbildung zwischen RIEMANNSchen Flächen und somit nach Satz 1.2.12 biholomorph. ■

An dieser Stelle möchten wir auf die folgende Notation in dieser Arbeit hinweisen:

Definition 1.2.11. Eine zusammenhängende eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit heißt RIEMANNSche Fläche.

Den Begriff der *glatten komplexen Kurve* verwenden wir für nicht notwendigerweise zusammenhängende eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten. □

Im Beweis des letzten Satzes haben wir den folgenden bekannten Sachverhalt verwendet, der sich etwa als Corollar [sic] 2.5 in [For77] findet:

Satz 1.2.12. Sind X und Y RIEMANNSche Flächen und $\varphi: X \rightarrow Y$ injektiv und holomorph, so ist φ biholomorph auf sein Bild. □

Dies ist ein Spezialfall einer allgemeineren Folgerung aus Proposition 46 A.1 in [KK83]:

Satz 1.2.13. Jede injektive holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension ist biholomorph auf ihr Bild. □

1.3 Darstellungen von S^1 und \mathbb{C}^*

In diesem Abschnitt stellen wir einige Techniken vor, mit denen wir in den Abschnitten 1.4 und 1.5 holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkungen auf komplexen Kurven und Flächen untersuchen werden. Wir folgen [Hau96].

Darstellungen

Definition 1.3.1. Seien G eine topologische Gruppe und V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Eine (stetige) Darstellung von G auf V ist eine (stetige) G -Wirkung α auf V , so daß für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\alpha(g, \cdot): V \longrightarrow V, \quad v \longmapsto g \cdot v = \alpha(g, v)$$

linear ist.

Ist G eine komplexe LIE-Gruppe und (V, α) ein holomorpher G -Raum, so nennen wir α eine *holomorphe Darstellung von G auf V* . \square

Wir interessieren uns insbesondere für holomorphe Darstellungen von \mathbb{C}^* . Da diese aufgrund des Identitätssatzes schon durch die induzierten stetigen Darstellungen von S^1 bestimmt sind, werden wir uns auch den letzteren widmen.

Sei $\dim V = n$. Wir wählen eine Basis in V und notieren zunächst:

Lemma 1.3.2. *Die stetigen (holomorphen) Darstellungen von G auf V entsprechen genau den stetigen (holomorphen) Gruppenhomomorphismen von G in die Gruppe der linearen Automorphismen $GL(V) = GL(n, \mathbb{C})$.* \square

Lemma 1.3.3. *Seien α und α' zwei stetige (holomorphe) Darstellungen von G auf V . Dann sind die G -Räume (V, α) und (V, α') genau dann äquivalent isomorph, wenn die zugehörigen Gruppenhomomorphismen μ und μ' von G nach $GL(n, \mathbb{C})$ konjugiert zueinander sind, also wenn es eine Matrix $M \in GL(n, \mathbb{C})$ gibt, so daß $M\mu(g)M^{-1} = \mu'(g)$ für alle $g \in G$.* \square

Lemma 1.3.4. *Sei $\mu: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung einer ABELSchen Gruppe G auf V . Dann sind für jedes $g \in G$ die Eigenräume von $\mu(g)$ invariant unter der durch μ induzierten G -Wirkung auf V*

$$G \times V \longrightarrow V, \quad (h, v) \longmapsto h \cdot v := \mu(h)v.$$

Beweis. Wir bezeichnen im Folgenden mit I_n die Einheitsmatrix in $GL(n, \mathbb{C})$. Sei $W := \ker(\mu(g) - \lambda I_n)$ der Eigenraum von $\mu(g)$ zum Eigenwert λ . Ist dann $v \in W$ und $h \in G$, so gilt:

$$\begin{aligned} (\mu(g) - \lambda I_n)(h \cdot v) &= \underbrace{\mu(g)\mu(h)}_{=\mu(gh) = \mu(hg)} v - \lambda \mu(h)v = \mu(h) \underbrace{(\mu(g)v - \lambda v)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Somit ist auch $h \cdot v \in W$. ■

Stetige Darstellungen von S^1

Wir untersuchen zunächst stetige Darstellungen der Gruppe $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Im eindimensionalen Fall erhalten wir:

Satz 1.3.5. *Sei $\mu: S^1 \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ ein stetiger Homomorphismus. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß $\mu(t) = t^k$ für alle $t \in S^1$ gilt.*

Für den Beweis brauchen wir den Begriff der *unbegrenzten, unverzweigten Überlagerung*:

Definition 1.3.6. Sind S und T topologische Räume, so heißt eine Abbildung $\varphi: S \rightarrow T$ eine *unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung*, wenn jedes $t \in T$ eine offene Umgebung $U \subset T$ besitzt, so daß das Urbild $\varphi^{-1}(U)$ eine Darstellung

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

besitzt, wobei die $V_j \subset S$ paarweise disjunkte offene Teilmengen und die eingeschränkten Abbildungen $\varphi|_{V_j}: V_j \rightarrow U$ Homöomorphismen sind. \square

Beweis von Satz 1.3.5. Die Exponentialabbildung $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung. Somit erhalten wir mit Satz 4.17 in [For77] eine stetige Abbildung $\widehat{\mu}: i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\widehat{\mu}(0) = 0$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} i\mathbb{R} & \xrightarrow{\widehat{\mu}} & \mathbb{C} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ S^1 & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

Wir zeigen, daß $\widehat{\mu}$ additiv ist – zu $y \in i\mathbb{R}$ definieren wir wie folgt eine stetige komplexwertige Hilfsfunktion φ_y auf $i\mathbb{R}$:

$$\varphi_y: i\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \widehat{\mu}(x) + \widehat{\mu}(y) - \widehat{\mu}(x + y).$$

Für $x \in i\mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \exp \circ \varphi_y(x) &= \frac{\exp \circ \widehat{\mu}(x) \cdot \exp \circ \widehat{\mu}(y)}{\exp \circ \widehat{\mu}(x + y)} \\ &= \frac{\mu \circ \exp(x) \cdot \mu \circ \exp(y)}{\mu \circ \exp(x + y)} \\ &= \frac{\mu \circ \exp(x) \cdot \mu \circ \exp(y)}{\mu \circ \exp(x) \cdot \mu \circ \exp(y)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Insbesondere nimmt φ_y also nur Werte in $2\pi i\mathbb{Z}$ an. Da nun φ_y stetig und $\varphi_y(0) = 0$ ist, ist $\varphi_y = 0$ und $\widehat{\mu}$ somit additiv.

Aus der Additivität folgt nun unmittelbar, daß $\widehat{\mu}$ linear bezüglich der rationalen Zahlen ist. Auf $2\pi i\mathbb{Q}$ ist $\widehat{\mu}$ also von der Form $\widehat{\mu}(x) = kx$ für eine Konstante k , die wir näher betrachten: es gilt etwa $k = \widehat{\mu}(2\pi i)/2\pi i$. Nach dem obigen Diagramm ist $\widehat{\mu}(2\pi i) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Somit ist $k \in \mathbb{Z}$.

Da aber schließlich $2\pi i\mathbb{Q}$ dicht in $i\mathbb{R}$ liegt und $\widehat{\mu}$ stetig ist, gilt $\widehat{\mu}(x) = kx$ für alle $x \in i\mathbb{R}$. Dies liefert sofort die Aussage des Satzes. \blacksquare

Der höherdimensionale Fall folgt hiermit leicht:

Satz 1.3.7. Sei $\mu: S^1 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es ein $M \in GL(n, \mathbb{C})$ sowie $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, so daß für jedes $t \in S^1$ gilt:

$$M\mu(t)M^{-1} = \begin{pmatrix} t^{k_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{k_n} \end{pmatrix} =: \mu_{k_1, \dots, k_n}(t).$$

Beweis. Mit Satz 1.3.5 genügt es zu zeigen, daß $\mu(S^1)$ diagonalisierbar ist, daß es also ein $M \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ gibt, so daß $M\mu(t)M^{-1}$ für jedes $t \in S^1$ eine Diagonalmatrix ist.

Hierzu betrachten wir die Untergruppe $G \subset S^1$ der Elemente endlicher Ordnung. Da G dicht in S^1 liegt und sowohl μ als auch die Matrixmultiplikation stetig sind, genügt es sogar zu zeigen, daß $\mu(G)$ diagonalisierbar ist.

Wir zeigen dies durch Induktion über n :

$n = 1$: Der Induktionsanfang folgt aus Satz 1.3.5.

$n > 1$: Wir wählen ein beliebiges $t \in G$ und betrachten die JORDANSche Normalform (Hauptsatz 7.9 in Kapitel 12 von [Art93]) von $\mu(t)$. Dann folgt aus der endlichen Ordnung von $\mu(t)$ in $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, daß die JORDANform von $\mu(t)$ schon in Diagonalgestalt ist.

Sei $W \subset \mathbb{C}^n$ ein Eigenraum von $\mu(t)$ mit $1 \leq \dim W \leq n - 1$. Nach Lemma 1.3.4 liefert μ durch Einschränkung stetige Darstellungen

$$\mu_W: G \longrightarrow \text{GL}(W) \quad \text{und} \quad \mu_{\mathbb{C}^n/W}: G \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^n/W).$$

Nun ist $\dim \mathbb{C}^n/W < n$, und nach Induktionsvoraussetzung sind sowohl $\mu_W(G)$ als auch $\mu_{\mathbb{C}^n/W}(G)$ diagonalisierbar, also auch $\mu(G)$. ■

Holomorphe Darstellungen von \mathbb{C}^*

Wir erhalten weiter unmittelbar die folgende Klassifizierung endlichdimensionaler holomorpher Darstellungen der Gruppe \mathbb{C}^* :

Satz 1.3.8. Sei $\mu: \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ein holomorpher Homomorphismus. Dann gibt es ein $M \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ sowie $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, so daß für jedes $t \in \mathbb{C}^*$ gilt:

$$M\mu(t)M^{-1} = \begin{pmatrix} t^{k_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{k_n} \end{pmatrix} = \mu_{k_1, \dots, k_n}(t). \quad (1.4)$$

Beweis. Nach dem Identitätssatz ist μ schon durch sein Verhalten auf $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ eindeutig festgelegt. Somit folgt die obige Aussage direkt aus der analogen Aussage über stetige Darstellungen von S^1 in Satz 1.3.7. ■

1.4 Holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkungen auf komplexen Kurven

In diesem Abschnitt klassifizieren wir die nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkungen auf glatten komplexen Kurven wie folgt:

Satz 1.4.1. *Bis auf äquivariante Isomorphie gibt es genau die folgenden nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkungen auf RIEMANNSchen Flächen:*

RIEMANNSche Fläche	\mathbb{C}^* -Wirkung
\mathbb{C}^*	$t \cdot z = t^n z$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$
\mathbb{C}	$t \cdot z = t^k z$ für ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
\mathbb{P}_1	$t \cdot [z_0, z_1] = [t^{k_0} z_0, t^{k_1} z_1]$ für $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $k_0 \neq k_1$
\mathbb{C}^*/G für eine unendliche diskrete Untergruppe $G \subset \mathbb{C}^*$	$t \cdot [z] = [tz]$

Beweis. Sei im folgenden C eine RIEMANNSche Fläche mit einer nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung. Wir unterscheiden danach, ob C kompakt ist. Dann folgt der obige Satz aus den Sätzen 1.4.4 und 1.4.5. \blacksquare

Vor dem Beweis des obigen Satzes übernehmen wir aus [Hau96] noch einige Begriffe, die wir auch später noch verwenden werden:

Definition 1.4.2. Sei (X, γ) ein holomorpher \mathbb{C}^* -Raum und $x \in X$. Wir definieren

$$B_0(x) := \{y \in X \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}: \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot x = y\}$$

$$B_\infty(x) := \{y \in X \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}: \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot x = y\}.$$

Ist $B_0(x) = \{x_0\}$, so sagen wir, daß *der Grenzwert* $x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x$ *existiert*. Analog sagen wir, daß *der Grenzwert* $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x$ *existiert*, falls $B_\infty(x) = \{x_\infty\}$. Existiert einer der Grenzwerte, so ist er ein Fixpunkt.

Für eine Teilmenge $M \subset X^{\mathbb{C}^*}$ der Fixpunktmenge von (X, γ) setzen wir weiter

$$M^+ := \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x \text{ existiert und } \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x \in M\} = \{x \in X \mid x_0 \in M\}$$

$$M^- := \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x \text{ existiert und } \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x \in M\} = \{x \in M \mid x_\infty \in M\}. \quad \square$$

Mit dieser Notation bereiten wir die Betrachtung nichtkompakter \mathbb{C}^* -Kurven wie folgt vor:

Lemma 1.4.3. *Sei C eine offene RIEMANNSche Fläche mit einer nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung. Dann liegt genau einer der beiden folgenden Fälle vor:*

1. Die Kurve C ist eine nichttriviale \mathbb{C}^* -Bahn.

2. Die Kurve C enthält genau einen Fixpunkt x , und es gilt genau eine der folgenden beiden Aussagen:

- a) Es gilt $C = \{x\}^+$.
- b) Es gilt $C = \{x\}^-$.

Beweis. Wir wählen ein $c \in C$ mit nichttrivialer Bahn $B(c)$. Als offene RIEMANNsche Fläche ist C nach Corollar [sic] 26.8 in [For77] STEINSch. Somit können nach Satz 1.5.8 in [Hau96] genau drei Fälle auftreten:

- 1. Die Bahn $B(c)$ ist abgeschlossen in C .
- 2. a) Der Grenzwert c_0 existiert, und $B_\infty(c) = \emptyset$.
- b) Der Grenzwert c_∞ existiert, und $B_0(c) = \emptyset$.

In allen drei Fällen ist $\overline{B(c)} = B_0(c) \cup B(c) \cup B_\infty(c)$ (Satz 1.5.1 in [Hau96]) analytisch in C . Da aber C glatt und $B(c)$ nichtdiskret ist, ist $\overline{B(c)} = C$. ■

Satz 1.4.4. *Ist C eine offene RIEMANNsche Fläche mit einer nichttrivialen \mathbb{C}^* -Wirkung, so ist C äquivariant isomorph zu \mathbb{C}^* mit der \mathbb{C}^* -Wirkung $t \cdot z = t^n z$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ oder zu \mathbb{C} mit der \mathbb{C}^* -Wirkung $t \cdot z = t^k z$ für ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Beweis. Wir unterscheiden die nach Lemma 1.4.3 möglichen Fälle und zeigen, daß C in Fall 1 äquivariant isomorph zu \mathbb{C}^* und in Fall 2 zu \mathbb{C} ist:

Fall 1. Ist $B(c)$ abgeschlossen in C , so ist $B(c) = C$. Die Bahnabbildung

$$\gamma_c: \mathbb{C}^* \longrightarrow C, \quad t \longmapsto t \cdot c$$

ist holomorph und surjektiv. Sie faktorisiert über dem Quotientenraum nach der Isotropiegruppe \mathbb{C}_c^* wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\gamma_c} & C \\ \pi \downarrow & \nearrow \overline{\gamma}_c & \\ \mathbb{C}^*/\mathbb{C}_c^* & & \end{array}$$

Als analytische Untergruppe wirkt \mathbb{C}_c^* durch Multiplikation frei und eigentlich diskontinuierlich komplex auf \mathbb{C}^* . Da π nach Satz 1.1.19 eine Submersion ist, ist nach Lemma 1.1.21 auch $\overline{\gamma}_c$ holomorph. Weiter ist \mathbb{C}_c^* endlich, da sonst nach Satz 1.2.8 der Quotient $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_c^*$ kompakt wäre. Somit ist $\mathbb{C}_c^* = E_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist $\overline{\gamma}_c$ injektiv. Also ist $\overline{\gamma}_c$ nach Satz 1.2.12 biholomorph, und C ist äquivariant isomorph zu \mathbb{C}^* mit der \mathbb{C}^* -Wirkung $t \cdot z = t^n z$.

Fall 2. a) Ist $C = \{x\}^+$ für einen Fixpunkt x , so ist wie oben $C \setminus \{x\} \cong \mathbb{C}^*$, und C ist äquivariant isomorph zu \mathbb{C} mit der \mathbb{C}^* -Wirkung $t \cdot z = t^k z$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

b) Ist $C = \{x\}^-$, so ist analog $C \cong \mathbb{C}$ mit $t \cdot z = t^k z$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{<0}$. ■

Satz 1.4.5. *Ist C eine kompakte RIEMANNSche Fläche mit einer nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung, so ist C äquivariant isomorph zur projektiven Geraden \mathbb{P}_1 mit der \mathbb{C}^* -Wirkung $t \cdot [z_0, z_1] = [t^{k_0} z_0, t^{k_1} z_1]$ für $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $k_0 \neq k_1$ oder zu einer elliptischen Kurve \mathbb{C}^*/G für eine unendliche diskrete Untergruppe G von \mathbb{C}^* mit der \mathbb{C}^* -Wirkung $t \cdot [z] = [tz]$.*

Beweis. Wir unterscheiden nach dem Geschlecht g von C :

$g = 0$: In diesem Falle ist $C \cong \mathbb{P}_1$ als RIEMANNSche Fläche (Proposition VII.1.7 mit Theorem VI.1.9 und Lemma II.3.7 in [Mir95]). Die Aussage des Satzes ergibt sich aus Satz 1.4.6.

$g = 1$: Nach Proposition VII.1.9 in [Mir95] sind die glatten kompakten Kurven vom Geschlecht 1 genau die elliptischen Kurven über \mathbb{C} . In diesem Falle schließen wir mit Satz 1.4.7.

$g > 1$: Nach Theorem VII.4.18 in [Mir95] ist in diesem Fall die Gruppe $\text{Aut } C$ der Automorphismen von C endlich. Die \mathbb{C}^* -Wirkung induziert einen stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut } C$, der also konstant gleich id_C ist. Somit ist die \mathbb{C}^* -Wirkung trivial, und dieser Fall kann nicht eintreten. ■

Satz 1.4.6. *Jede nichttriviale holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung auf \mathbb{P}_1 ist bis auf äquivariante Isomorphie von der Form $t \cdot [z_0, z_1] = [t^{k_0} z_0, t^{k_1} z_1]$ für $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $k_0 \neq k_1$.*

Beweis. Nach Exercise E. 53 A h in [KK83] liefert die Zuordnung

$$\varphi: \text{GL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut } \mathbb{P}_1, \quad M \longmapsto ([z] \mapsto [Mz]) \text{ für } z = (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}$$

einen Epimorphismus auf die Automorphismengruppe von \mathbb{P}_1 . Es gilt $\ker \varphi = \mathbb{C}^* \cdot I_2$. Somit haben wir

$$\text{Aut } \mathbb{P}_1 \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C}) := \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \cdot I_2.$$

Die \mathbb{C}^* -Wirkung liefert nun einen holomorphen Gruppenhomomorphismus

$$\mu: \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C}), \quad t \longmapsto ([z_0, z_1] \mapsto t \cdot [z_0, z_1]).$$

Nach Satz 1.3.8 ist aber $\mu(\mathbb{C}^*)$ diagonalisierbar – es gibt $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$, so daß bis auf Konjugation mit einer von t unabhängigen Matrix $M \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ jedes $\mu(t)$ von der folgenden Form ist:

$$\mu(t) \sim \left[\begin{pmatrix} t^{k_0} & 0 \\ 0 & t^{k_1} \end{pmatrix} \right] \in \{D \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mid D \text{ Diagonalmatrix}\} / \mathbb{C}^* \cdot I_2.$$

Wir erhalten, daß bis auf Konjugation gilt

$$\mu(t) \cdot [z_0, z_1] = [t^{k_0} z_0, t^{k_1} z_1],$$

wobei eine triviale Wirkung genau im Falle $k_0 = k_1$ vorliegt. ■

Satz 1.4.7. Sei γ eine nichttriviale \mathbb{C}^* -Wirkung auf einer elliptischen Kurve C . Sei $c \in C$. Dann ist die Isotropiegruppe \mathbb{C}_c^* unendlich und diskret, und die Bahnabbildung γ_c induziert einen Isomorphismus der holomorphen \mathbb{C}^* -Räume (C, γ) und $(\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_c^*, \mu)$. Hierbei bezeichnen wir mit μ die durch die Multiplikation in \mathbb{C}^* induzierte \mathbb{C}^* -Wirkung auf $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_c^*$:

$$\mu(t, [z]) := [tz].$$

Beweis. Sei etwa $C = \mathbb{C}/\Gamma$ für ein Gitter Γ und $\pi: \mathbb{C} \rightarrow C$ die Quotientenabbildung. Wir zeigen zunächst, daß die Bahnabbildung γ_c surjektiv ist. Die Abbildung π ist wieder eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung, und nach Satz 4.17 in [For77] existiert eine stetige Abbildung $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, mit der das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\gamma_c} & C = \mathbb{C}/\Gamma \end{array}$$

Da nun π unverzweigt ist, ist φ holomorph.

Nach dem kleinen Satz von PICARD (Satz 27.13 in [For77]) besteht $\mathbb{C} \setminus \text{im } \varphi$ aus höchstens einem Punkt; somit ist $\pi \circ \varphi$ surjektiv, also auch γ_c . Dies liefert wie im Beweis zu Satz 1.4.4, daß γ_c eine biholomorphe Abbildung $\overline{\gamma}_c: \mathbb{C}^*/\mathbb{C}_c^* \rightarrow C$ induziert. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\gamma_c} & C \\ \downarrow & \cong \nearrow & \\ \mathbb{C}^*/\mathbb{C}_c^* & & \end{array}$$

Nach Definition der Wirkung μ ist $\overline{\gamma}_c$ äquivariant. Nach Satz 1.2.6 ist \mathbb{C}_c^* schließlich eine unendliche diskrete Untergruppe von \mathbb{C}^* . ■

Wir notieren zwei Korollare, auf die wir später zurückgreifen werden:

Korollar 1.4.8. Auf einer elliptische Kurve mit einer nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung besitzen alle Punkte die gleiche Isotropiegruppe. □

Korollar 1.4.9. Auf einer kompakten RIEMANNschen Fläche besitzt eine nichttriviale holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung genau dann Fixpunkte, wenn die Kurve isomorph zu \mathbb{P}_1 ist. □

1.5 Fixpunkte auf Flächen

In diesem Abschnitt untersuchen wir Fixpunkte einer holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung mit Hilfe ihrer Tangentialdarstellung. Wir folgen hier wieder [Hau96].

Da eine holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung aufgrund des Identitätssatzes schon durch die induzierte komplexe S^1 -Wirkung bestimmt ist, führen wir unsere Begriffe in ausreichender Allgemeinheit ein, um auch S^1 -Wirkungen betrachten zu können:

Definition 1.5.1. Seien G eine LIEgruppe, (X, γ) ein komplexer G -Raum und α eine Darstellung von G auf einem endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum V . Existieren offene G -invariante Teilmengen $U \subset X$ und $D \subset V$ sowie eine äquivariante biholomorphe Abbildung $\varphi: U \rightarrow A$ auf eine G -invariante analytische Teilmenge $A \hookrightarrow D$, so nennen wir $U \xrightarrow{\varphi} A \hookrightarrow D \subset V$ eine *lokale Linearisierung* der G -Wirkung γ . \square

Sei im folgenden $x \in X$ ein Fixpunkt von γ . Wir untersuchen die lokale Linearisierbarkeit von γ nahe x . Als Vektorraum bedienen wir uns hierzu des Tangentialraums $T_x X$ in x an X . Die zugehörige Darstellung von G auf $T_x X$ definieren wir folgendermaßen:

Definition 1.5.2. Für $g \in G$ bezeichne $T_x g: T_x X \rightarrow T_x X$ das Differential der Abbildung $x \mapsto g \cdot x$ im Punkte x . Wir definieren die *Tangentialdarstellung von G im Punkte x* als Darstellung von G auf $T_x X$ wie folgt:

$$\alpha_x: G \times T_x X \longrightarrow T_x X, \quad (g, v) \longmapsto g \cdot v := T_x g(v). \quad \square$$

Der aufmerksame Leser wird die Tangentialdarstellung α_x nicht mit einer Bahnabbildung im Punkte x verwechseln.

Im Falle $G = S^1$ können wir die Wirkung γ nahe dem Fixpunkt x folgendermaßen linearisieren:

Satz 1.5.3. Sei (X, γ) ein komplexer S^1 -Raum mit einem Fixpunkt $x \in X$. Dann gibt es eine lokale Linearisierung $U \xrightarrow{\varphi} A \hookrightarrow D \subset T_x X$ mit $x \in U$ und $\varphi(x) = 0$. \square

Ein elementarer Beweis für diesen Satz findet sich beispielsweise bei Satz 1.4.1 in [Hau96]. Er läßt sich unter Verwendung eines invarianten Integrals (Paragraph I.5 in [BD85]) für Wirkungen beliebiger kompakter LIEgruppen zeigen (Satz 4.4 in [Kau67]). Diesen allgemeineren Sachverhalt werden wir in Lemma 3.2.3 benötigen.

Aus Satz 1.5.3 erhält man nach einigen technischen Vorarbeiten, auf die wir hier nicht näher eingehen, die folgende Konsequenz:

Satz 1.5.4. Sei (X, γ) ein holomorpher \mathbb{C}^* -Raum mit einem Fixpunkt $x \in X$. Dann gibt es eine bezüglich der Tangentialdarstellung \mathbb{C}^* -invariante offene Teilmenge $V \subset T_x X$, eine \mathbb{C}^* -invariante analytische Menge $A \hookrightarrow V$ und eine äquivariante lokal biholomorphe Abbildung $\psi: A \rightarrow X$ mit $\psi(0) = x$. \square

Dieser Satz findet sich mit einer Herleitung als Folgerung 1.4.4 in [Hau96].

Sei nun (X, γ) eine glatte \mathbb{C}^* -Fläche mit einem Fixpunkt $x \in X$. Sei weiter α_x die Tangentialdarstellung der Wirkung γ in x . Nach Satz 1.3.8 existieren lokale Koordinaten (z_1, z_2) nahe x sowie *Gewichte* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, so daß α_x von der folgenden Gestalt ist:

$$\alpha_x: \mathbb{C}^* \times T_x X \longrightarrow T_x X, \quad (t, (z_1, z_2)) \longmapsto (t^{k_1} z_1, t^{k_2} z_2).$$

Wir klassifizieren nun die Fixpunkte unserer glatten \mathbb{C}^* -Fläche nach den Eigenschaften ihrer Tangentialdarstellungen:

Definition 1.5.5. Sei x ein Fixpunkt der \mathbb{C}^* -Wirkung, und seien k_1 und k_2 die Gewichte seiner Tangentialdarstellung wie oben definiert. Wir nennen x

- einen *elliptischen Fixpunkt*, falls $k_1 k_2 > 0$,
- einen *parabolischen Fixpunkt*, falls $k_1 k_2 = 0$,
- einen *hyperbolischen Fixpunkt*, falls $k_1 k_2 < 0$. □

Mit Satz 1.5.3 folgt:

Lemma 1.5.6. *Elliptische und hyperbolische Fixpunkte sind isoliert in der Fixpunktmenge.*

Ist x ein parabolischer Fixpunkt, so liegt x in einer glatten Kurve F von Fixpunkten, und eine der Mengen F^+ und F^- ist offen. □

Wir erhalten weiter die folgenden äquivalenten Charakterisierungen von Fixpunkten:

Lemma 1.5.7. *Es gilt:*

- Ein Fixpunkt x ist genau dann elliptisch, wenn eine der beiden Mengen $\{x\}^+$ und $\{x\}^-$ offen ist.
- Ein Fixpunkt x ist genau dann hyperbolisch, wenn $\{x\} \subsetneq \{x\}^+$ und $\{x\} \subsetneq \{x\}^-$ gilt.
- Ein Fixpunkt x ist genau dann parabolisch, wenn $\{x\}$ in der Fixpunktmenge $X^{\mathbb{C}^*}$ nicht isoliert ist. □

Schließlich benötigen wir die folgende Aussage über hyperbolische Fixpunkte:

Satz 1.5.8. *Seien (X, γ) eine glatte holomorphe \mathbb{C}^* -Fläche und $x \in X$ ein hyperbolischer Fixpunkt. Dann enthält sowohl $\{x\}^+$ als auch $\{x\}^-$ genau eine nichttriviale \mathbb{C}^* -Bahn.*

Beweis. Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $k_1 k_2 < 0$ die Gewichte der Tangentialdarstellung von γ in x . Nach Satz 1.5.4 existieren eine offene Menge $V \subset T_x X \cong \mathbb{C}^2$ und eine äquivariante lokal biholomorphe Abbildung $\psi: V \rightarrow X$ mit $\psi(0) = x$.

Mit der Abbildung ψ folgt die Existenz der Bahnen daraus, daß $\{0\}^+$ und $\{0\}^- \subset V$ nichttriviale Bahnen enthalten.

Die Eindeutigkeit ergibt sich wie folgt: gibt es $n \geq 2$ verschiedene nichttriviale Bahnen etwa in $\{x\}^+$, so erhalten wir mit Lemma 1.6.3 in [Hau96] ebenfalls n verschiedene nichttriviale Bahnen in $\{0\}^+ \subset V$, im Widerspruch zu Satz 1.3.8. ■

2 Elliptische Faserungen

In diesem Kapitel führen wir den Hauptgegenstand unserer Untersuchungen ein: \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen. Zunächst motivieren wir in Abschnitt 2.1 kurz unsere Untersuchungen. Weiter klassifizieren wir in Abschnitt 2.2 die möglichen singulären Fasern, bevor wir in Abschnitt 2.3 die Isotropiefunktion einführen, die im folgenden ein Leitmotiv unserer Betrachtungen sein wird.

Wir folgen in diesem Kapitel [GH98].

2.1 Motivation der Untersuchung elliptischer Faserungen

In diesem Abschnitt stellen wir zur Motivation beispielhaft eine Situation dar, in der auf natürliche Weise eine elliptische Faserung auftritt.

Wir benutzen die Begriffe der *holomorphen Fortsetzung* und der *Holomorphiehülle*:

Definition 2.1.1. Sind X und Y komplexe Räume, deren Zusammenhangskomponenten abzählbare Topologie besitzen, so heißt eine holomorphe Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ eine *holomorphe Fortsetzung*, wenn $\varphi^0: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ ein Isomorphismus von topologischen Algebren ist.

Wir nennen eine holomorphe Fortsetzung $\varphi: X \rightarrow Y$ eine *Holomorphiehülle*, wenn φ im folgenden Sinne maximal ist: für jede holomorphe Fortsetzung $\psi: X \rightarrow Z$ existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\chi: Z \rightarrow Y$ mit $\varphi = \chi \circ \psi$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \psi & \uparrow \chi \\ & & Z \end{array}$$

□

Sei im folgenden (X, γ) eine zusammenhängende glatte holomorph konvexe holomorphe \mathbb{C}^* -Fläche.

Satz 2.1.2. *Es gibt eine Holomorphiehülle $p: X \rightarrow Y$ von X . Der Raum Y ist ein normaler STEINScher Raum. Falls $\dim Y = 1$, so ist Y glatt.*

Beweis. Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation auf X :

$$x \sim x' : \iff \forall f \in \mathcal{O}(X): f(x) = f(x').$$

Nach Theorem 57.11 in [KK83] ist der Quotientenraum $Y := X/\sim$ STEINSch, und die Quotientenabbildung $p: X \rightarrow Y$ induziert einen Isomorphismus von topologischen Algebren $p^0: \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$. Somit ist $p: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Fortsetzung von X . Nach Proposition 57.6 ist $p: X \rightarrow Y$ die Holomorphiehülle. Da X als Mannigfaltigkeit normal ist, ist Y nach Corollary 72.7 in [KK83] normal.

Ist $\dim Y = 1$, so ist Y als eindimensionaler normaler Raum nach Corollary 74.4 in [KK83] glatt. ■

Die Abbildung p ist weiter nach Theorem 57.11 in [KK83] eine eigentliche holomorphe Surjektion mit zusammenhängenden Fasern. Ist Y nulldimensional, so ist X kompakt. Ist $\dim Y = 2$, so ist X nach Kontraktion der exzeptionellen \mathbb{C}^* -invarianten Kurven eine normale STEINSche Fläche. Beide Fälle werden in [Hau96] behandelt.

Wir betrachten im folgenden den Fall $\dim Y = 1$. Dann ist Y nach Satz 2.1.2 eine STEINSche RIEMANNSche Fläche, also nichtkompakt. Nach Satz 10 in [RV63] existiert eine holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung auf Y , bezüglich derer p äquivariant ist.

Wir betrachten hier den Fall einer trivialen induzierten Wirkung. Die Holomorphiehülle sei also invariant bezüglich der \mathbb{C}^* -Wirkung γ .

Lemma 2.1.3. *Ist $x \in X_y := p^{-1}(y)$ ein Fixpunkt, so ist*

$$\{x\}^+ \cup \{x\}^- \subset X_y.$$

Beweis. Sei etwa $z \in \{x\}^+$. Dann ist $p(t \cdot z) = p(z)$ für alle $t \in \mathbb{C}^*$ aufgrund der \mathbb{C}^* -Invarianz von p und somit

$$p(z) = \lim_{t \rightarrow 0} p(t \cdot z) = p\left(\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot z\right) = p(x) = y. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.1.4. *Sei F eine glatte Fixpunktkurve in X . Dann schneidet F jede Faser von p .*

Beweis. Wir können annehmen, daß F zusammenhängend ist. Die Einschränkung $p|_F$ von p auf F ist eine holomorphe Abbildung zwischen RIEMANNSchen Flächen. Nun sind nichtkonstante holomorphe Funktionen auf \mathbb{C} offen. Da aber F glatt und Offenheit eine lokale Eigenschaft ist, ist $p|_F$ entweder konstant oder offen.

Weiter ist $p|_F$ als Einschränkung einer eigentlichen Abbildung auf einen Teilraum abgeschlossen. Da Y zusammenhängend ist, ist somit $p|_F$ entweder konstant oder surjektiv.

Im ersten Fall, $p = y \in Y$, wäre aufgrund Lemma 2.1.3 aber $F^+ \cup F^- \subset X_y$ mit Widerspruch zu $\dim X_y = 1$, da eine der Mengen F^+ und F^- nach Lemma 1.5.6 offen in X ist. ■

Als unmittelbare Konsequenz erhalten wir:

Korollar 2.1.5. *Die durch Einschränkung auf eine reguläre Faser von p induzierte \mathbb{C}^* -Wirkung ist nichttrivial.*

Beweis. Zunächst sind reguläre Fasern nach dem Rangsatz (Theorem 8.7 in [KK83]) glatt.

Nun wäre aber eine Faser mit einer trivialen induzierten \mathbb{C}^* -Wirkung eine glatte Fixpunktcurve, die keine andere Faser schneidet, im Widerspruch zu Lemma 2.1.4. ■

Satz 2.1.6. *Es können genau zwei Fälle auftreten:*

1. *Jede reguläre Faser von p ist isomorph zu \mathbb{P}_1 .*
2. *Jede reguläre Faser von p ist eine elliptische Kurve.*

Beweis. Wir zeigen, daß Fall 1 eintritt, wenn $X^{\mathbb{C}^*}$ parabolische Fixpunkte enthält, und Fall 2, wenn $X^{\mathbb{C}^*}$ nur aus hyperbolischen und elliptischen Fixpunkten besteht. Sei $X_y = p^{-1}(y)$ eine reguläre Faser von p . Da p eigentlich ist, ist X_y kompakt.

Gibt es in X parabolische Fixpunkte, so liegen sie nach Lemma 1.5.6 in einer glatten Fixpunktcurve $F \subset X^{\mathbb{C}^*}$. Nach Lemma 2.1.4 schneidet diese Fixpunktcurve jede Faser von p , und \mathbb{C}^* wirkt gemäß Korollar 2.1.5 nichttrivial mit Fixpunkten auf X_y . Mit Korollar 1.4.9 und der Kompaktheit und Glattheit der zusammenhängenden Kurve X_y impliziert dies $X_y \cong \mathbb{P}_1$.

Seien nun alle Fixpunkte von X hyperbolisch oder elliptisch. Nach Lemma 1.5.6 ist dann $X^{\mathbb{C}^*}$ diskret. Nach Korollar 1.4.9 ist zu zeigen, daß X_y als reguläre Faser keinen Fixpunkt enthält.

Sei sonst etwa $x \in X_y \cap X^{\mathbb{C}^*}$ ein Fixpunkt. Nach Lemma 2.1.3 ist $\{x\}^+ \cup \{x\}^- \subset X_y$; nach Lemma 1.5.7 kann also x nicht elliptisch sein. Somit muß x hyperbolisch sein, $\{x\} \subsetneq \{x\}^+$ und $\{x\} \subsetneq \{x\}^-$ wiederum nach Lemma 1.5.7. Nach Satz 1.5.8 enthält aber sowohl $\{x\}^+$ als auch $\{x\}^-$ eine nichttriviale \mathbb{C}^* -Bahn. Insbesondere ist X_y lokal nahe x reduzibel, mit Widerspruch zur Regularität von X_y . ■

Wir betrachten im folgenden Fall 2 in Satz 2.1.6 – eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung:

Definition 2.1.7. Eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung $(X; \gamma; p; Y)$ besteht aus einer glatten komplexen Fläche X mit einer holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung γ , einer RIEMANNschen Fläche Y und einer eigentlichen \mathbb{C}^* -invarianten holomorphen Surjektion $p: X \rightarrow Y$ mit zusammenhängenden Fasern, so daß alle regulären Fasern von p elliptische Kurven sind. □

2.2 Mögliche singuläre Fasern

Wir nehmen im folgenden wie in der Theorie elliptischer Faserungen üblich an, daß X *relativ minimal* ist, also daß keine Faser von p eine (-1) -Kurve enthält. Wir können nämlich etwaige (-1) -Kurven in Fasern niederblasen, bis wir eine glatte Fläche erhalten, über die p faktorisiert. Hierzu siehe Theorem 6.1 und Seite 564 in [Kod63a], Proposition 8.4 in [BPV84] sowie die Ausführungen auf Seite 23 mit Theorem 1.11 in [FM94].

Lemma 2.2.1. *Die singulären Werte einer elliptischen Faserung sind diskret in Y .*

Beweis. Auf genügend kleinen offenen Teilmengen $U \subset X$ können wir lokale Koordinaten (z_1, z_2) einführen. Die kritischen Werte von p sind dann genau das Bild der analytischen Mengen

$$\left\{ x \in U \mid \frac{\partial p}{\partial z_1}(x) = \frac{\partial p}{\partial z_2}(x) = 0 \right\}.$$

Nach dem REMMERTSchen Abbildungssatz 45.17 in [KK83] bilden die kritischen Werte von p eine analytische Menge in Y . Somit ist der kritische Ort entweder diskret oder schon ganz Y . Nach dem Satz von SARD (Seite 40 in [GP74]) sind aber die kritischen Werte dünn in Y . ■

Bevor wir in Satz 2.2.5 die möglichen singulären Fasern einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung bestimmen, stellen wir noch fest:

Lemma 2.2.2. *Sei (C, γ) eine nicht notwendigerweise glatte komplexe \mathbb{C}^* -Kurve. Dann sind alle Singularitäten von C Fixpunkte der \mathbb{C}^* -Wirkung.*

Insbesondere ist eine fixpunktfreie komplexe \mathbb{C}^ -Kurve glatt.*

Beweis. Für alle $t \in \mathbb{C}^*$ ist die Abbildung

$$C \longrightarrow C, \quad c \longmapsto t \cdot c$$

ein Automorphismus von C . Somit werden Singularitäten auf Singularitäten abgebildet. Nun sind die Singularitäten von C als analytische Menge in einer Kurve diskret, im Gegensatz zur Bahn eines Nichtfixpunktes unter \mathbb{C}^* . ■

Wir definieren nun *mehrfache* Fasern:

Definition 2.2.3. Sei $(X; \gamma; p; Y)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung. Sei $y \in Y$ und $x \in X_y = p^{-1}(y)$. Dann nennen wir die Faser X_y *nahe x von der Vielfachheit $m \in \mathbb{N}$* , wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gibt eine Umgebung $U \subset X$ von x , eine biholomorphe Abbildung $\varphi: D \times D \rightarrow U$ mit $\varphi(0) = x$ und eine Einbettung $\delta: D \rightarrow Y$ mit $\delta(0) = y$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} D \times D & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & U \subset X \\ \begin{array}{c} (z,w) \mapsto z^m \\ \downarrow \beta_m \circ \text{pr}_1 \end{array} & & \downarrow p|_U \\ D & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \delta(D) \subset Y \end{array}$$

2. Es gibt eine Untermannigfaltigkeit S von X , die X_y in x transversal schneidet, weiter eine biholomorphe Abbildung $\psi: D \rightarrow S$ mit $\psi(0) = x$ sowie eine Einbettung $\delta: D \rightarrow Y$ mit $\delta(0) = y$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow[\cong]{\psi} & S \pitchfork X_y \\ \begin{array}{c} w \mapsto w^m \\ \downarrow \beta_m \end{array} & & \downarrow p|_S \\ D & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \delta(D) \subset Y \end{array}$$

□

Bemerkung 2.2.4. Die obige Definition ist äquivalent zu den „üblichen“ Definitionen für mehrfache Fasern, wie sie etwa in [GH94] oder [FM94] verwendet werden. \square

Satz 2.2.5. Die möglichen singulären Fasern einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung $(X; \gamma; p; Y)$, also Urbilder von singulären Werten von p , sind:

1. elliptische Kurven mit Vielfachheit $m > 1$: Fasern vom Typ mI_0
2. Zyklen von $b \geq 1$ rationalen Kurven mit Vielfachheit $m \geq 1$: Fasern vom Typ mI_b .

In beiden Fällen ist die Vielfachheit konstant auf den regulären Punkten jeder singulären Faser.

Beweis. Sei $X_y := p^{-1}(y)$ eine singuläre Faser von p . Da p eigentlich ist, ist X_y kompakt. Besitzt die \mathbb{C}^* -Wirkung auf X_y keine Fixpunkte, so ist X_y nach Lemma 2.2.2 glatt. Somit ist X_y nach Satz 1.4.5 und Korollar 1.4.9 eine elliptische Kurve, die eine einzige \mathbb{C}^* -Bahn ist. Nach Theorem 6.2 in [Kod63a] muß X_y mehrfach sein: es liegt eine Faser vom Typ mI_0 mit $m > 1$ vor.

Sei also $X_y^{\mathbb{C}^*} \neq \emptyset$. Aufgrund der Voraussetzung einer elliptischen Faserung existieren nach dem Beweis zu Satz 2.1.6 keine parabolischen Fixpunkte. Da weiter p invariant ist, kann es nach Lemma 1.5.7 keine elliptischen Fixpunkte geben. Somit sind alle Fixpunkte hyperbolisch, und für jeden Fixpunkt $x \in X_y^{\mathbb{C}^*}$ enthalten nach Satz 1.5.8 sowohl $\{x\}^+$ als auch $\{x\}^-$ eine nichttriviale \mathbb{C}^* -Bahn, die nach Lemma 2.2.2 glatt ist. Da aber jede irreduzible Komponente von X_y kompakt ist, ist der Abschluß einer solchen Bahn nach Satz 1.4.4 eine Kompaktifizierung von \mathbb{C}^* . Somit existieren für jedes $x \in X_y$ die Grenzwerte

$$x_0 := \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x \quad \text{und} \quad x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x.$$

Wir erhalten somit eine Kette

$$(x_0^1, x^1, x_\infty^1), \dots, (x_0^i, x^i, x_\infty^i), \dots$$

in X_y , wobei jeweils $x^i \in X_y \setminus X_y^{\mathbb{C}^*}$ mit $x_\infty^i = x_0^{i+1}$. Da nun X_y als Kompaktum nur endlich viele irreduzible Komponenten besitzt, wird diese Kette schließlich periodisch: es gibt ein r mit $x_\infty^r = x_0^1$. Wir wählen r minimal mit dieser Eigenschaft und setzen

$$C_i := \overline{\mathbb{C}^* \cdot x^i} = \{x_0^i\} \cup \mathbb{C}^* \cdot x^i \cup \{x_\infty^i\}.$$

Dann sind die rationalen Kurven C_i die irreduziblen Komponenten eines Zyklus C in X_y . Wir zeigen, daß $C = X_y$: anderenfalls gäbe es eine irreduzible Komponente $C' \not\subset C$ von X_y , die C in einer Singularität x treffen würde. Nach Lemma 2.2.2 wäre x ein Fixpunkt. Da nun C' nicht aus Fixpunkten besteht, wäre $\{x\}^+ \cap C'$ oder $\{x\}^- \cap C'$ nichtleer, mit Widerspruch dazu, daß x ein hyperbolischer Fixpunkt ist.

Nach Theorem 6.2 in [Kod63a] ist in beiden Fällen die Vielfachheit in jedem regulären Punkt von X_y konstant. \blacksquare

Bemerkung 2.2.6. Die Terminologie in Satz 2.2.5 entspricht KODAIRAS Klassifikation der möglichen singulären Fasern in allgemeinen elliptischen Faserungen – ohne die hier betrachtete \mathbb{C}^* -Wirkung – gemäß Theorem 6.2 in [Kod63a]. \square

2.3 Der reguläre Ort: die Isotropiefunktion

Sei E_n die maximale endliche Untergruppe des Ineffektivitätskerns, also dessen Schnitt mit S^1 . Indem wir zur holomorphen (!) Wirkung $t \star x := \sqrt[n]{t} \cdot x$ übergehen, nehmen wir im folgenden an, daß $n = 1$. Der Ineffektivitätskern besitze also keine nichttrivialen endlichen Untergruppen.

Zunächst erinnern wir daran, daß nach Korollar 1.4.8 alle Punkte einer regulären Faser X_y die gleiche Isotropiegruppe G_y besitzen.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts wird im folgenden eines unserer wichtigsten Hilfsmittel sein:

Satz 2.3.1. *Es gibt eine holomorphe Funktion $f: Y \rightarrow D$, so daß für jeden regulären Wert y der Faserung p die Isotropiegruppe G_y der Faser X_y die von $f(y)$ erzeugte Untergruppe von \mathbb{C}^* ist.*

Definition 2.3.2. Wir nennen die Funktion $f: Y \rightarrow D$ gemäß Satz 2.3.1 die *Isotropiefunktion* der Faserung $p: X \rightarrow Y$. □

Aus Satz 1.2.10 folgt, daß f im folgenden Sinne die Struktur der regulären Fasern beschreibt:

Korollar 2.3.3. *Sei $f: Y \rightarrow D$ die Isotropiefunktion der \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung $(X; \gamma; p; Y)$. Für jeden regulären Wert $y \in Y$ gilt dann $X_y \cong \mathbb{C}^* / \langle f(y) \rangle$. □*

Bevor wir den obigen Satz beweisen, notieren wir noch ein Hilfsresultat, das wir später brauchen werden. Sei $X^\sharp := X \setminus X^{\mathbb{C}^*}$ die Menge der Nichtfixpunkte in X .

Lemma 2.3.4. *Ist $\vartheta: Y \rightarrow X^\sharp$ ein holomorpher Schnitt für p , so ist die Abbildung*

$$\Phi: Y \times \mathbb{C}^* \longrightarrow X^\sharp, \quad (y, t) \longmapsto t \cdot \vartheta(y)$$

regulär, und ihr Bild $X^\sharp := \Phi(Y \times \mathbb{C}^) = \mathbb{C}^* \cdot \vartheta(Y)$ ist offen in X . Weiter ist Φ äquivariant bezüglich der \mathbb{C}^* -Wirkung $s \cdot (y, t) := (y, st)$.*

Beweis. Die Äquivarianz von Φ ist klar. Somit genügt es, die Regularität von Φ in den Punkten $(y, 1)$ nachzuweisen. Wir zeigen zunächst, daß $\vartheta(Y)$ eine Untermannigfaltigkeit von X ist: mit $p \circ \vartheta = \text{id}_Y$ ist $\text{rg } \vartheta = 1$ nach Proposition and Definition 32 A.4_{geo} in [KK83]. Sei nun $y \in Y$. Nach dem Rangsatz (Theorem 8.7 in [KK83]) gibt es Umgebungen U von y in Y und V von $\vartheta(y)$ in X sowie geeignete biholomorphe Abbildungen, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} Y \supset U & \xrightarrow{\vartheta|_U} & V \subset X \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ D_1(0) & \xrightarrow{z \mapsto (z, 0)} & D_1(0) \times D_1(0) \end{array}$$

Insbesondere ist $\vartheta(Y)$ nach Proposition 8.10 in [KK83] eine Untermannigfaltigkeit von X .

In $x := \Phi(y, 1) = \vartheta(y)$ trifft nun die Untermannigfaltigkeit $\vartheta(Y)$ die Faser X_y^\sharp transversal, somit haben wir eine Zerlegung $T_x X^\sharp \cong T_x \vartheta(Y) \oplus T_x X_y^\sharp$. Somit ist $T_{(y,1)} \Phi$ regulär ([GP74], Chapter 2, §3). ■

Beweis von Satz 2.3.1. Wir betrachten die Situation zunächst lokal: Sei $y_0 \in Y$ ein regulärer Wert von p . Wiederum nach dem Rangsatz (Theorem 8.7 in [KK83]) existiert eine zusammenhängende offene Umgebung $U \subset Y$ von y_0 , die nur reguläre Werte von p enthält und auf der ein Schnitt $\vartheta: U \rightarrow X$ für p existiert. Nach dem Beweis zu Satz 2.1.6 existieren keine Fixpunkte in den regulären Fasern von p ; somit ist sogar $\vartheta: U \rightarrow X^\sharp$.

Wir betrachten die reguläre Abbildung $\Phi: U \times \mathbb{C}^* \rightarrow p^{-1}(U)$ gemäß Lemma 2.3.4 und setzen $A := \Phi^{-1}(\vartheta(U))$. Dann ist A eine eindimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit von $U \times \mathbb{C}^*$. Weiter ist $U \times \{1\} \subset A$, und für $y \in U$ ist

$$\begin{aligned} G_y &= \{t \in \mathbb{C}^* \mid \forall x \in X_y: t \cdot x = x\} \\ &= \{t \in \mathbb{C}^* \mid t \cdot \vartheta(y) = \vartheta(y)\} \text{ nach Korollar 1.4.8} \\ &= \{t \in \mathbb{C}^* \mid \Phi(y, t) = t \cdot \vartheta(y) \in \vartheta(U)\} \text{ aufgrund der } \mathbb{C}^* \text{-Invarianz der Faserung} \\ &= \{t \in \mathbb{C}^* \mid (y, t) \in A = \Phi^{-1}(\vartheta(U))\} \\ &= \text{pr}_2 \left((\{y\} \times \mathbb{C}^*) \cap A \right). \end{aligned}$$

Nun ist G_{y_0} als Isotropiegruppe wie in Beispiel 1.1.17 eine analytische Untergruppe von \mathbb{C}^* . Nach Satz 1.2.2 besitzt G_{y_0} als Erzeugende ein α_0 mit $0 < |\alpha_0| < 1$ sowie eine Einheitswurzel ζ_0 . Seien A_1 und A_2 die Zusammenhangskomponenten von A , die (y_0, α_0) beziehungsweise (y_0, ζ_0) enthalten. Da nun Φ nach Lemma 2.3.4 lokal biholomorph ist, können wir U so weit verkleinern, daß $\text{pr}_1|_{A_1}$ und $\text{pr}_1|_{A_2}$ holomorphe inverse Abbildungen

$$\iota_i: U \longrightarrow A_i, \quad i = 1, 2$$

besitzen: siehe Abbildung 2.1.

Nun ist $\text{pr}_2 \circ \iota_2$ konstant: wir betrachten

$$\lambda: U \longrightarrow A, \quad y \longmapsto \left(y, (\text{pr}_2 \circ \iota_2(y))^{\text{ord } \zeta_0} \right).$$

Dann ist

$$\lambda(y_0) = \left(y_0, (\text{pr}_2 \circ \iota_2(y_0))^{\text{ord } \zeta_0} \right) = (y_0, \zeta_0^{\text{ord } \zeta_0}) = (y_0, 1).$$

Somit liegt $\lambda(U)$ in der Zusammenhangskomponente $U \times \{1\}$ von A . Aufgrund der Stetigkeit der Funktion $\beta_{\text{ord } \zeta_0} \circ \text{pr}_2 \circ \iota_2$ ist also $\text{pr}_2 \circ \iota_2(y) = \zeta_0$ für alle $y \in U$. Somit wirkt ζ_0 trivial auf $p^{-1}(U)$, nach dem Identitätssatz also auf ganz X . Da wir vorausgesetzt haben, daß der Ineffektivitätskern der \mathbb{C}^* -Wirkung keine nichttrivialen endlichen Untergruppen besitzt, ist $\zeta_0 = 1$. Somit ist $G_{y_0} = \langle \alpha_0 \rangle$.

Wir setzen $f := \text{pr}_2 \circ \iota_1$. Es gilt $\alpha_0 \in f(U)$ und $|\alpha_0| < 1$; somit können wir U so weit verkleinern, daß $|f(y)| < 1$ für alle $y \in U$. Wir zeigen, daß f wie gewünscht ist. Hierzu ist für $y \in U$ zu zeigen, daß

$$G_y \stackrel{!}{=} G'_y := \langle f(y) \rangle,$$

also daß G_y gleich der von $f(y)$ erzeugten Untergruppe von \mathbb{C}^* ist. Zunächst ist $G'_y \subset G_y$ aufgrund der Definition von f . Wir betrachten nun die durch

$$\ell \star (y, z) := (y, f(y)^\ell z) \tag{2.1}$$

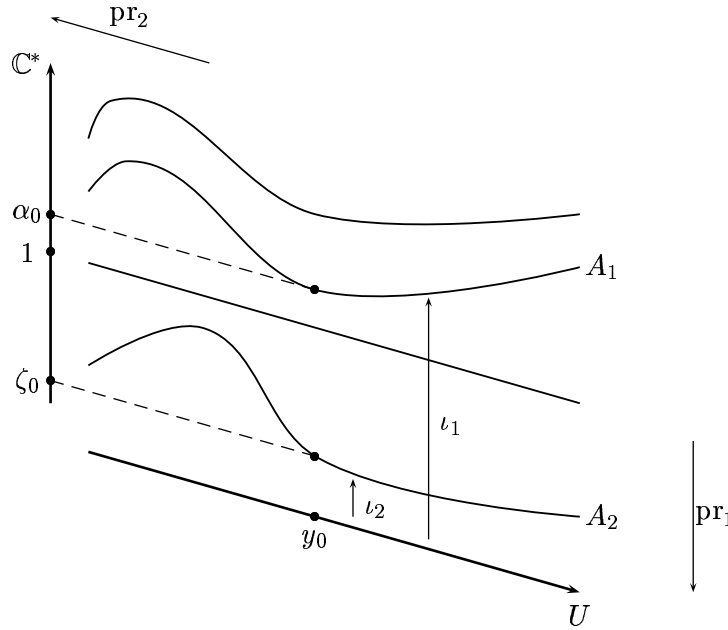
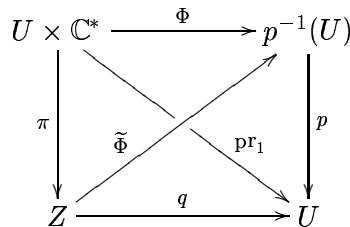


Abbildung 2.1: Zum Beweis von Satz 2.3.1

gegebene komplexe \mathbb{Z} -Wirkung auf $U \times \mathbb{C}^*$. Sei $Z := (U \times \mathbb{C}^*)/\mathbb{Z}$ der nach Lemma 2.3.5 glatte Bahnenraum und $\pi: U \times \mathbb{C}^* \rightarrow Z$ die Quotientenabbildung. Die durch $t \cdot (y, z) := (y, tz)$ gegebene \mathbb{C}^* -Wirkung auf $U \times \mathbb{C}^*$ induziert nach Korollar 1.1.20 eine holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung auf Z . Wir erhalten eine \mathbb{C}^* -invariante Abbildung $q: Z \rightarrow U$ mit $q \circ \pi = \text{pr}_1$. Für alle $y \in U$ besteht die Faser $q^{-1}(y) = \pi(\{y\} \times \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}^*/\langle f(y) \rangle$ aus einer einzigen \mathbb{C}^* -Bahn mit Isotropiegruppe G'_y . Somit ist jede Faser von q kompakt. Da aber sowohl π als auch pr_1 abgeschlossene Abbildungen sind, ist auch q abgeschlossen. Nach Proposition and Definition 33 B.1 iii) in [KK83] ist q also eigentlich. Da weiter $G'_y \subset G_y$ für alle $y \in U$, ist Φ invariant unter der \mathbb{Z} -Wirkung (2.1):

$$\Phi(\ell \star (y, z)) = \Phi(y, \underbrace{f(y)^\ell z}_{\in G'_y} \cdot \underbrace{\vartheta(y)}_{\in X_y}) = z \cdot \vartheta(y) = \Phi(y, z).$$

Wir erhalten folglich nach der universellen Eigenschaft des Quotienten gemäß Satz 1.1.19 eine \mathbb{C}^* -äquivariante holomorphe Abbildung $\tilde{\Phi}: Z \rightarrow p^{-1}(U)$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:



Die Äquivarianz von $\tilde{\Phi}$ folgt hierbei aus der Äquivarianz von Φ gemäß Lemma 2.3.4. Nach Lemma 2.3.4 ist Φ weiter regulär. Somit hat auch $\tilde{\Phi}$ maximalen Rang. Weiter

ist $\tilde{\Phi}$ eigentlich, da q eigentlich und p stetig ist. Somit ist $\tilde{\Phi}$ eine unverzweigte Überlagerung (Exercise E.33 Ba in [KK83]). Für $x \in p^{-1}(y_0)$ besteht die Faser $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$ nach Konstruktion von Z aus genau einem Element. Somit ist $\tilde{\Phi}$ ein Biholomorphismus. Insbesondere ist $G_y = G'_y$ für alle $y \in U$, da $q^{-1}(y)$ die Isotropiegruppe G'_y besitzt.

Für den Übergang vom Lokalen zum Globalen sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung der Menge Y_r der regulären Werte von p , so daß holomorphe Funktionen $f_i: U_i \rightarrow D$ wie oben existieren. Für $y \in U_i \cap U_j$ mit $i \neq j$ wird die unendliche zyklische Gruppe G_y sowohl von $f_i(y)$ als auch von $f_j(y)$ erzeugt, die nach Konstruktion beide in D liegen. Somit ist $f_i(y) = f_j(y)$, und die f_i liefern eine holomorphe Funktion $f: Y_r \rightarrow D$. Da f beschränkt ist, kann f nach dem RIEMANNschen Hebbarkeitssatz holomorph auf ganz Y fortgesetzt werden. ■

Lemma 2.3.5. *Sei $f: U \rightarrow D^*$ holomorph. Wir definieren eine komplexe \mathbb{Z} -Wirkung auf $U \times \mathbb{C}^*$ durch $\ell \star (y, z) := (y, f(y)^\ell z)$. Dann ist der Bahnenraum dieser \mathbb{Z} -Wirkung glatt.*

Beweis. Da $|f(y)| < 1$ für alle $y \in U$, besitzt kein $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ einen Fixpunkt. Somit ist die \mathbb{Z} -Wirkung frei.

Weiter ist die \mathbb{Z} -Wirkung eigentlich diskontinuierlich: ist $K \subset U \times \mathbb{C}^*$ kompakt, so gibt es Radien $R > r > 0$ mit

$$K \subset U \times \{z \in \mathbb{C}^* \mid r < |z| < R\},$$

und es gilt

$$0 < C := \max_{y \in \text{pr}_1(K)} |f(y)| < 1.$$

Ist nun $\ell > \log_C \frac{r}{R} > 0$, so gilt für $(y, z) \in K$:

$$|\text{pr}_2(\ell \star (y, z))| = |f(y)^\ell z| < C^\ell R < r.$$

Ist umgekehrt $\ell < \log_C \frac{R}{r} < 0$, so gilt $-\ell > \log_{\frac{1}{C}} \frac{R}{r} > 0$ und

$$|\text{pr}_2(\ell \star (y, z))| = |f(y)^\ell z| = \left| \frac{1}{f(y)} \right|^{-\ell} |z| > \left(\frac{1}{C} \right)^{-\ell} r > R.$$

In beiden Fällen ist $\ell \star (y, z) \notin K$. Somit ist $K \cap \ell \star K \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\ell \in \mathbb{Z}$. Die \mathbb{Z} -Wirkung ist also eigentlich diskontinuierlich.

Der Bahnenraum ist nun nach Satz 1.1.19 glatt. ■

Wir erhalten als unmittelbare Konsequenz:

Korollar 2.3.6. *Ist die Isotropiefunktion f nichtkonstant, so ist Y nichtkompakt.*

Ist überdies Y einfach zusammenhängend, so ist Y biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe D .

Beweis. Die erste Aussage ist klar.

Ist nun Y einfach zusammenhängend, so ist Y nach dem RIEMANNschen Abbildungssatz (Satz 27.9 in [For77]) biholomorph äquivalent zu \mathbb{P}_1 , \mathbb{C} oder D . Da aber $f \in \mathcal{O}(Y)$ nicht-konstant und beschränkt ist, folgt aus dem Satz von LIOUVILLE (Satz 2.10 in [For77]), daß $Y \cong D$. ■

3 Singuläre Fasern vom Typ mI_0

Wir untersuchen nun kritische Fasern vom Typ mI_0 , also elliptische Kurven mit Vielfachheit. Zunächst konstruieren wir in Abschnitt 3.1 ein lokales Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung mit einer singulären Faser vom Typ mI_0 . Weiter zeigen wir in Abschnitt 3.2, daß unter einer geeigneten Bedingung an die Isotropie der singulären Faser jede \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung nahe einer Faser vom Typ mI_0 isomorph zu diesem lokalen Modell ist. Schließlich betrachten wir in Abschnitt 3.3 diese Bedingung genauer und stellen ein leicht modifiziertes lokales Modell vor.

3.1 Ein lokales Modell einer Faser vom Typ mI_0

In diesem Abschnitt konstruieren wir ein lokales Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung mit einer singulären Faser vom Typ mI_0 zu einer vorgegebenen Isotropiefunktion.

Konstruktion 3.1.1. Seien $m \geq 1$ und $f: D \rightarrow D^*$ holomorph. Sei weiter $k \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu m .

Wir betrachten die folgende Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z} \times E_m$ auf $D \times \mathbb{C}^*$:

$$(\ell, \varrho) \star (z, w) := (\varrho^k z, \varrho f(z^m)^\ell w). \quad (3.1)$$

Seien

$${}_{m,0}X_f := (D \times \mathbb{C}^*) / (\mathbb{Z} \times E_m) \quad \text{sowie} \quad {}_{m,0}p_f: {}_{m,0}X_f \rightarrow D, \quad [z, w] \mapsto z^m.$$

Mit der Quotientenabbildung $\pi: D \times \mathbb{C}^* \rightarrow {}_{m,0}X_f$ erhalten wir also das folgende kommutative Diagramm zunächst auf der mengentheoretischen Ebene:

$$\begin{array}{ccc} D \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\pi} & {}_{m,0}X_f \\ & \searrow \beta_{m \circ \text{pr}_1} & \swarrow {}_{m,0}p_f \\ & (z, w) \mapsto z^m & D \end{array}$$

Weiter definieren wir durch $t \cdot \pi(z, w) := \pi(z, tw)$ eine \mathbb{C}^* -Wirkung ${}_{m,0}\gamma_f$ auf ${}_{m,0}X_f$. \square

Dann gilt:

Satz 3.1.2. *Das oben konstruierte Tupel $({}_{m,0}X_f; {}_{m,0}\gamma_f; {}_{m,0}p_f; D)$ ist eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Die Isotropiefunktion von $(m,0X_f; m,0\gamma_f; m,0p_f; D)$ ist f .
2. Die Abbildung $m,0p_f$ besitzt genau in 0 einen kritischen Wert.
3. Die Faser $m,0p_f^{-1}(0)$ ist vom Typ mI_0 .
4. Die Isotropiegruppe der Faser $m,0p_f^{-1}(0)$ ist $G_0 = \langle f(0), \varrho_0 \rangle$ für eine primitive m -te Einheitswurzel ϱ_0 .

Definition 3.1.3. Wir bezeichnen $(m,0X_f; m,0\gamma_f; m,0p_f; D)$ als das lokale Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung vom Typ mI_0 zur Isotropiefunktion f und zum Parameter k . \square

Beweis von Satz 3.1.2. Die $(\mathbb{Z} \times E_m)$ -Wirkung (3.1) sowie die Abbildung $m,0p_f$ sind zunächst mengentheoretisch wohldefiniert.

Die Aussagen des Satzes folgen nun aus den Lemmata 3.1.4 bis 3.1.8. \blacksquare

Lemma 3.1.4. Der Quotient $m,0X_f$ ist eine glatte komplexe Fläche und π eine Submersion. Weiter ist $m,0p_f$ holomorph.

Beweis. Wegen $0 < |f(z^m)| < 1$ für $z^m \in D$ gilt

$$(\ell, \varrho) \star (z, w) = (\varrho^k z, \varrho f(z^m)^\ell w) \stackrel{!}{=} (z, w) \iff \ell = 0 \text{ und } \varrho = 1.$$

Somit ist die $(\mathbb{Z} \times E_m)$ -Wirkung (3.1) frei.

Wie im Beweis zu Lemma 2.3.5 folgt weiter, daß die Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist: ist $K \subset D \times \mathbb{C}^*$ ein Kompaktum, so existieren Radien $R > r > 0$, so daß

$$K \subset D \times \{w \in \mathbb{C}^* \mid r < |w| < R\}.$$

Weiter ist

$$0 < C := \max_{z \in \text{pr}_1(K)} |f(z^m)| < 1.$$

Somit existieren nur von r , R und C abhängige ganze Zahlen $\ell_1 > 0$ und $\ell_2 < 0$, so daß für $(z, w) \in K$ gilt

$$\left| \text{pr}_2((\ell, \varrho) \star (z, w)) \right| = |f(z^m)|^\ell |w| < C^\ell R < r \text{ für } \ell > \ell_1$$

sowie

$$\left| \text{pr}_2((\ell, \varrho) \star (z, w)) \right| = \left(\frac{1}{|f(z^m)|} \right)^{-\ell} |w| > \left(\frac{1}{C} \right)^{-\ell} r < R \text{ für } \ell < \ell_2.$$

Also gilt $(\ell, \varrho) \star K \cap K \neq \emptyset$ höchstens für $\ell_2 \leq \ell \leq \ell_1$, also für nur endlich viele (ℓ, ϱ) . Die $(\mathbb{Z} \times E_m)$ -Wirkung ist somit eigentlich diskontinuierlich.

Nun folgt aus Satz 1.1.19, daß $m,0X_f$ glatt und π eine Submersion ist. Weiter liefert Lemma 1.1.21, daß $m,0p_f$ holomorph ist. \blacksquare

Lemma 3.1.5. *Die durch die \mathbb{C}^* -Wirkung auf $D \times \mathbb{C}^*$*

$$t \cdot (z, w) := (z, tw) \quad (3.2)$$

induzierte \mathbb{C}^ -Wirkung $m,0\gamma_f$ auf $m,0X_f$ ist holomorph. Die Quotientenabbildung π ist äquivariant und $m,0p_f$ invariant.*

Beweis. Nach der Definition der $(\mathbb{Z} \times E_m)$ -Wirkung gilt

$$(\ell, \varrho) \star (t \cdot (z, w)) = t \cdot ((\ell, \varrho) \star (z, w)).$$

Weiter haben wir im Beweis von Lemma 3.1.4 nachgewiesen, daß $\mathbb{Z} \times E_m$ frei und eigentlich diskontinuierlich wirkt. Somit folgt die Holomorphie der \mathbb{C}^* -Wirkung $m,0\gamma_f$ und die \mathbb{C}^* -Äquivarianz von π aus Korollar 1.1.20.

Somit sind π äquivariant und die Abbildung $(z, w) \mapsto z^m$ invariant bezüglich $m,0p_f$ und der \mathbb{C}^* -Wirkung (3.2). Wir lesen nun am kommutativen Diagramm in Konstruktion 3.1.1 unmittelbar ab, daß $m,0p_f$ invariant bezüglich $m,0\gamma_f$ ist. ■

Lemma 3.1.6. *Die Abbildung $m,0p_f$ besitzt genau in 0 einen kritischen Wert.*

Beweis. Sei

$$\varphi := m,0p_f \circ \pi = \beta_m \circ \text{pr}_1 : D \times \mathbb{C}^* \longrightarrow D, \quad (z, w) \longmapsto z^m.$$

Nach der Kettenregel gilt dann für das Differential von φ :

$$T_{(z,w)}\varphi = T_{\pi(z,w)}(m,0p_f) \circ T_{(z,w)}\pi.$$

Nun ist aber π nach Lemma 3.1.4 eine Submersion, das Differential $T_{(z,w)}\pi$ also nach Proposition 32 A.2_{geo} in [KK83] surjektiv. Da $D \times \mathbb{C}^*$ und $m,0X_f$ die gleiche Dimension haben, ist $T_{(z,w)}\pi$ auch injektiv, also ein linearer Isomorphismus.

Somit sind die singulären Werte von $m,0p_f$ genau diejenigen von φ , und $m,0p_f$ besitzt genau in 0 einen kritischen Wert. ■

Lemma 3.1.7. *Für $z^m \in D^*$ ist $m,0p_f^{-1}(z^m)$ eine elliptische Kurve mit der Isotropiegruppe $G_{z^m} = \langle f(z^m) \rangle$. Insbesondere ist das Tupel $(m,0X_f; m,0\gamma_f; m,0p_f; D)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion f .*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß für $z^m \in D^*$ die Faser $m,0p_f^{-1}(z^m)$ eine RIEMANNSCHE Fläche ist. Die Glattheit folgt daraus, daß z^m nach Lemma 3.1.6 ein regulärer Wert ist. Um nachzuweisen, daß $m,0p_f^{-1}(z^m)$ zusammenhängend ist, genügt es aufgrund der Teilerfremdheit von k und m zu zeigen, daß für $z \in D^*$ und $\varrho \in E_m$ gilt

$$\pi(\{z\} \times \mathbb{C}^*) \cap \pi(\{\varrho^k z\} \times \mathbb{C}^*) \neq \emptyset.$$

Dies folgt aber aus der folgenden Beobachtung: es gilt

$$\pi(z, 1) = \pi((0, \varrho) \star (z, 1)) = \pi(\varrho^k z, \varrho).$$

Des weiteren untersuchen wir die Isotropie der auf ${}_{m,0}p_f^{-1}(z^m)$ eingeschränkten \mathbb{C}^* -Wirkung ${}_{m,0}\gamma_f$: sei $x \in {}_{m,0}p_f^{-1}(z^m)$ für $z \in D^*$, etwa $x = \pi(z, w)$. Dann gilt für $t \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} t \cdot x &= x \\ \iff t \cdot \pi(z, w) &= \pi(z, w) \\ \iff (z, tw) &\sim (z, w) \\ \iff \exists (\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m: (z, tw) &= (\ell, \varrho) \star (z, w) = (\varrho^k z, \varrho f(z^m)^\ell w) \\ \iff t \in \langle f(z^m) \rangle &\text{ (und } \varrho = 1). \end{aligned}$$

Da ${}_{m,0}p_f^{-1}(z^m) = \pi(\{z\} \times \mathbb{C}^*)$ aufgrund des Zusammenhangs und der Regularität eine einzige \mathbb{C}^* -Bahn ist, ist die Faser ${}_{m,0}p_f^{-1}(z^m)$ nach den Sätzen 1.2.8 und 1.2.10 eine elliptische Kurve mit der Isotropiegruppe $G_{z^m} = \langle f(z^m) \rangle$. Da genau die z^m für $z \in D^*$ nach Lemma 3.1.6 die regulären Werte sind, folgt die Aussage des Lemmas. ■

Lemma 3.1.8. *Die Faser ${}_{m,0}p_f^{-1}(0)$ ist vom Typ mI_0 . Ihre Isotropiegruppe ist $G_0 = \langle f(0), \varrho_0 \rangle$ für eine primitive m -te Einheitswurzel ϱ_0 .*

Beweis. Zunächst zeigen wir wieder, daß auch ${}_{m,0}p_f^{-1}(0)$ eine RIEMANNSche Fläche ist. Der Zusammenhang ergibt sich mit der Stetigkeit von π aus der Beziehung ${}_{m,0}p_f^{-1}(0) = \pi(\{0\} \times \mathbb{C}^*)$. Zum Nachweis der Glattheit betrachten wir die $(\mathbb{Z} \times E_m)$ -Wirkung (3.1) eingeschränkt auf $\{0\} \times \mathbb{C}^*$: hier gilt

$$(\ell, \varrho) \star (0, w) = (0, \varrho f(0)^\ell w).$$

Wie in Lemma 3.1.4 folgt wieder, daß auch diese eingeschränkte Wirkung frei und eigentlich diskontinuierlich und

$${}_{m,0}p_f^{-1}(0) = \pi(\{0\} \times \mathbb{C}^*) = (\{0\} \times \mathbb{C}^*) / (\mathbb{Z} \times E_m)$$

somit ebenfalls glatt ist.

Nun untersuchen wir die Isotropie der \mathbb{C}^* -Wirkung auf der Faser ${}_{m,0}p_f^{-1}(0)$. Für einen Punkt $\pi(0, w) \in {}_{m,0}p_f^{-1}(0)$ und $t \in \mathbb{C}^*$ gilt:

$$\begin{aligned} t \cdot \pi(0, w) &= \pi(0, w) \\ \iff \exists (\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m: (0, tw) &= (\ell, \varrho) \star (0, w) = (0, \varrho f(0)^\ell w) \\ \iff t \in \langle f(0), \varrho_0 \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist ${}_{m,0}p_f^{-1}(0)$ wiederum nach den Sätzen 1.2.8 und 1.2.10 eine elliptische Kurve mit der Isotropiegruppe $G_0 = \langle f(0), \varrho_0 \rangle$.

Weiter zeigen wir, daß ${}_{m,0}p_f^{-1}(0)$ von der Vielfachheit m ist: sei $\pi(0, w) \in {}_{m,0}p_f^{-1}(0)$ für ein $w \in \mathbb{C}^*$. Nach Lemma 3.1.4 ist π eine Submersion. Nach Proposition 32 A.2_{geo} in [KK83] gibt es also Umgebungen U von $(0, w)$ und V von $\pi(0, w)$ und darauf einen

lokalen Schnitt $V \rightarrow U$ für π . Da aber $D \times \mathbb{C}^*$ und ${}_{m,0}X_f$ Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension sind, ist π also lokal biholomorph.

Indem wir $\varepsilon > 0$ genügend klein wählen, erreichen wir, daß $D_\varepsilon(0) \times D_\varepsilon(w) \subset U$. Wir setzen $V' := \pi(D_\varepsilon(0) \times D_\varepsilon(w))$; dann ist $V' \subset {}_{m,0}X_f$ eine offene Umgebung von $\pi(0, w)$. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} D \times \mathbb{C}^* \supset U \supset D_\varepsilon(0) \times D_\varepsilon(w) & \xrightarrow[\cong]{\pi} & V' \subset {}_{m,0}X_f \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow {}_{m,0}p_f|_{V'} \\ D_\varepsilon(0) & \xrightarrow[\beta_m]{z \mapsto z^m} & D_\varepsilon(0) \end{array}$$

Somit ist ${}_{m,0}p_f^{-1}$ von der Vielfachheit m , als elliptische Kurve also vom Typ ${}_m\text{I}_0$. \blacksquare

Bemerkung 3.1.9. In Konstruktion 3.1.1 können wir auch $m = 1$ wählen. In diesem Falle ist die Wirkung von $\mathbb{Z} \times E_1 = \mathbb{Z}$ gemäß (3.1) genau von der Form (2.1). Wir erhalten also die im Beweis von Satz 2.3.1 betrachtete Struktur. Insbesondere ist dann die Faserung ${}_{1,0}p_f$ global regulär, und die Isotropiegruppe G_z der Faser ${}_{1,0}p_f^{-1}(z)$ ist beschrieben durch $G_z = \langle f(z) \rangle$ für alle $z \in D$. \square

Bemerkung 3.1.10. Wir können auf die Voraussetzung der Teilerfremdheit von k und m in Konstruktion 3.1.1 verzichten. Dann gelten die Lemmata 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 und 3.1.8 mit unveränderten Beweisen, und analog zu Lemma 3.1.7 folgt, daß jede reguläre Faser eine RIEMANNsche Fläche mit unendlicher diskreter Isotropiegruppe ist. Somit ist auch das zu diesem Parameter k konstruierte Modell $({}_{m,0}\tilde{X}_f; {}_{m,0}\tilde{\gamma}_f; {}_{m,0}\tilde{p}_f; D)$ eine über D^* reguläre \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit einer singulären Faser vom Typ ${}_m\text{I}_0$ über 0.

In diesem Falle besitzt allerdings der Ineffektivitätskern von ${}_{m,0}\tilde{\gamma}_f$ nichttriviale endliche Untergruppen: ist etwa $\text{ggT}(k, m) =: k' > 1$, so gilt für eine primitive m -te Einheitswurzel ϱ_0 mit der Quotientenabbildung $\tilde{\pi}: D \times \mathbb{C}^* \rightarrow {}_{m,0}\tilde{X}_f$:

$$\begin{aligned} \varrho_0^{m-\frac{m}{k'}} \cdot \tilde{\pi}(z, w) &= \tilde{\pi}(z, \varrho_0^{m-\frac{m}{k'}} w) \\ &= \tilde{\pi}\left(\left(0, \varrho_0^{\frac{m}{k'}}\right) \star \left(z, \varrho_0^{m-\frac{m}{k'}} w\right)\right) \\ &= \tilde{\pi}\left(\left(\varrho_0^{\frac{m}{k'}}\right)^k z, \varrho_0^{\frac{m}{k'}} \varrho_0^{m-\frac{m}{k'}} w\right) \\ &= \tilde{\pi}\left(\varrho_0^{\frac{k}{k'} \cdot m} z, \varrho_0^m w\right) \\ &= \tilde{\pi}(z, w), \end{aligned}$$

und $\varrho_0^{m-\frac{m}{k'}} \neq 1$ wirkt trivial auf ${}_{m,0}\tilde{X}_f$, erzeugt also eine nichttriviale endliche Untergruppe des Ineffektivitätskerns von ${}_{m,0}\tilde{\gamma}_f$. \square

3.2 Isomorphie zum lokalen Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir das lokale Verhalten einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung nahe einer singulären Faser vom Typ mI_0 .

Satz 3.2.1. *Sei $(X; \gamma; p; Y)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion f . Sei die Faser X_{y_0} für $y_0 \in Y_0$ vom Typ mI_0 .*

Wirkt E_m trivial auf X_{y_0} , so existiert eine zu m teilerfremde Zahl $k \in \mathbb{Z}$ sowie eine Einbettung $\delta: D \rightarrow Y$, so daß für das lokale Modell $({}_{m,0}X_{f \circ \delta}; {}_{m,0}\gamma_{f \circ \delta}; {}_{m,0}p_{f \circ \delta}; D)$ vom Typ mI_0 zur Isotropiefunktion $f \circ \delta$ und zum Parameter $k \in \mathbb{Z}$ gilt: es gibt eine äquivariante Biholomorphie

$$\kappa: {}_{m,0}X_{f \circ \delta} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(\delta(D)),$$

so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} {}_{m,0}p_{f \circ \delta}^{-1}(D) = {}_{m,0}X_{f \circ \delta} & \xrightarrow[\cong]{\kappa} & p^{-1}(\delta(D)) \subset X \\ {}_{m,0}p_{f \circ \delta} \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \delta(D) \end{array}$$

Bezeichnen wir den endlichen Anteil der Isotropiegruppe vom X_{y_0} mit $G := S^1 \cap G_{y_0}$, so fordern wir in Satz 3.2.1 gerade, daß $E_m \subset G$. Aus den Sätzen 3.1.2 und 3.2.1 folgern wir nun, daß in diesem Fall sogar Gleichheit gilt:

Korollar 3.2.2. *Sei $(X; \gamma; p; Y)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung. Sei weiter X_{y_0} für $y_0 \in Y$ eine singuläre Faser vom Typ mI_0 . Gilt dann $E_m \subset S^1 \cap G_{y_0}$, so folgt $E_m = S^1 \cap G_{y_0}$. \square*

Beweis von Satz 3.2.1. Nach Lemma 3.2.3 gibt es eine Einbettung $\delta: D \rightarrow Y$, eine zu m teilerfremde ganze Zahl k und eine biholomorphe Abbildung $\psi: \delta(D) \rightarrow T$ auf eine Untermannigfaltigkeit $T \pitchfork X_{y_0}$, so daß gilt:

$$\psi \circ \delta(\varrho^k z) = \varrho^{-1} \cdot \psi \circ \delta(z) \text{ für } \varrho \in E_m \text{ und } z \in D$$

und

$$p \circ \psi \circ \delta(z) = \delta(z^m) \text{ für } z \in D.$$

Seien umgekehrt

$$\varphi: D \longrightarrow {}_{m,0}X_{f \circ \delta}, \quad z \longmapsto \pi(z, 1) \tag{3.3}$$

sowie $S := \varphi(D)$. Nach Lemma 3.2.6 ist S eine Untermannigfaltigkeit von ${}_{m,0}X_{f \circ \delta}$ und $\varphi: D \rightarrow S$ eine Biholomorphie.

Nach den Lemmata 3.2.7 und 3.2.8 gilt für $z, z' \in D^*$

$$t \cdot \varphi(z) = t' \cdot \varphi(z') \iff t \cdot \psi \circ \delta(z) = t' \cdot \psi \circ \delta(z'). \tag{3.4}$$

Weiter zeigen wir in Satz 3.2.4, daß $f(y_0) \neq 0$. Nach Lemma 3.2.5 wirkt $f(y_0) \in \mathbb{C}^*$ trivial auf X_{y_0} , ebenso wie (nach Voraussetzung) E_m . Somit gilt nach Lemma 3.2.7 auch

$$t \cdot \varphi(0) = t' \cdot \varphi(0) \implies t \cdot \psi \circ \delta(0) = t \cdot \psi(y_0) = t' \cdot \psi(y_0) = t' \cdot \psi \circ \delta(0).$$

Somit ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\kappa: \underbrace{m,0X_{f \circ \delta}}_{m,0p_{f \circ \delta}^{-1}(D)} \longrightarrow p^{-1}(\delta(D)), \quad t \cdot \varphi(z) \longmapsto t \cdot \psi \circ \delta(z). \quad (3.5)$$

In Lemma 3.2.9 beweisen wir, daß κ eine äquivariante Biholomorphie ist.

Schließlich ist aufgrund von

$$\delta \circ m,0p_f \circ \varphi(z) = \delta \circ m,0p_f \circ \pi(z, 1) = \delta(z^m) = p \circ \psi \circ \delta(z)$$

das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & S & & T & \xleftarrow[\cong]{\psi \circ \delta} & D \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ m,0p_{f \circ \delta}^{-1}(D) = m,0X_{f \circ \delta} & \xrightarrow[\cong]{\kappa} & p^{-1}(\delta(D)) \subset X & & & & \\ & & \downarrow p & & & & \\ & & D & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \delta(D) & & \end{array}$$

■

Lemma 3.2.3. *In der Situation gemäß Satz 3.2.1 gibt es eine Einbettung $\delta: D \rightarrow Y$ mit $\delta(0) = y_0$, ferner eine zu m teilerfremde ganze Zahl k sowie eine biholomorphe Abbildung $\psi: \delta(D) \rightarrow T$ auf eine Untermannigfaltigkeit $T \pitchfork X_{y_0}$, so daß gilt:*

$$\psi \circ \delta(\varrho^k z) = \varrho^{-1} \cdot \psi \circ \delta(z) \text{ für } \varrho \in E_m \text{ und } z \in D$$

und

$$p \circ \psi \circ \delta(z) = \delta(z^m) \text{ für } z \in D.$$

Beweis. Wir schränken die \mathbb{C}^* -Wirkung γ auf die Untergruppe E_m ein:

$$\varrho \star x := \varrho \cdot x = \gamma(\varrho, x).$$

Nach Voraussetzung ist X_{y_0} eine Fixpunktcurve für diese E_m -Wirkung. Nahe einem $x_0 \in X_{y_0}$ können wir die E_m -Wirkung also folgendermaßen linearisieren (Satz 4.4 in [Kau67]): es gibt Umgebungen $U \subset X$ von x_0 und $V \subset T_{x_0}X \cong \mathbb{C}^2$ von 0 sowie eine Biholomorphie

$$\chi: U \xrightarrow{\sim} V, \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \end{pmatrix},$$

so daß Gewichte $k, k' \in \mathbb{Z}$ existieren, für die gilt

$$\chi(\varrho \star x) = \chi(\varrho \cdot x) = \begin{pmatrix} \varrho^{-k} \chi_1(x) \\ \varrho^{k'} \chi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Die Fixpunktcurve X_{y_0} in U entspricht einer Fixpunktcurve in V . Wir können also etwa $k' = 0$ wählen. Da der Ineffektivitätskern von γ nach Voraussetzung keine nicht-trivialen endlichen Untergruppen besitzt, ist k teilerfremd zu m .

Nach Voraussetzung ist $X_{y_0} \cap U = N(U; \chi_1)$ von der Vielfachheit m , also auch

$$\chi(X_{y_0} \cap U) = N(V; \text{pr}_1).$$

Somit existieren Biholomorphien $\lambda: D \times D \rightarrow V$ und $\delta: D \rightarrow \delta(D) \subset Y$, wobei $\lambda(\{0\} \times D) = N(V; \text{pr}_1)$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} D \times D & \xrightarrow[\cong]{\lambda} & V \subset T_{x_0}X \cong \mathbb{C}^2 \\ \downarrow (z,w) \mapsto z^m & & \downarrow p \circ \chi^{-1} \\ D & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \delta(D) \end{array}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $\lambda = \text{id}$, daß also $p \circ \chi^{-1}$ von der folgenden Form ist:

$$p \circ \chi^{-1}(z, w) = \delta(z^m). \quad (3.7)$$

Wir setzen

$$T := N(U; \chi_2) = \{x \in U \mid \chi_2(x) = 0\}$$

und

$$\psi: \delta(D) \longrightarrow T, \quad \delta(z) \longmapsto \chi^{-1}(z, 0). \quad (3.8)$$

Dann ist T eine Untermannigfaltigkeit von X und $\psi: \delta(D) \rightarrow T$ als bijektive holomorphe Abbildung zwischen RIEMANNschen Flächen nach Satz 1.2.12 eine Biholomorphie. Es gilt

$$\psi \circ \delta(\varrho^k z) = \chi^{-1}(\varrho^k z, 0) = \varrho^{-1} \star \chi^{-1}(z, 0) = \varrho^{-1} \cdot \psi \circ \delta(z). \quad (3.9)$$

■

Satz 3.2.4. Sei $(X; \gamma; p; D)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion g . Sei $0 \in D$ der einzige kritische Wert für p und die Faser X_0 vom Typ mI_0 . Dann ist $g(0) \neq 0$.

Beweis. In Anlehnung an Abschnitt III.9 in [BPV84] konstruieren wir eine äquivariante Wurzelfaserung: wir betrachten das Faserprodukt von D mit X bezüglich β_m und p :

$$X' := D \times_D X := \{(z, x) \in D \times X \mid \beta_m(z) = z^m = p(x)\}.$$

Auf X' betrachten wir die beiden Projektionen:

$$\begin{aligned} \text{pr}_1: X' &\longrightarrow D, & (z, x) &\longmapsto z \\ \text{pr}_2: X' &\longrightarrow X, & (z, x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir eine \mathbb{C}^* -Wirkung γ' auf X' : sei

$$\gamma': \mathbb{C}^* \times X' \longrightarrow X', \quad (t, (z, x)) \longmapsto \gamma'(t, (z, x)) := t \cdot (z, x) := (z, t \cdot x).$$

Dann ist γ' aufgrund der \mathbb{C}^* -Invarianz von p wohldefiniert und als Einschränkung der analog definierten holomorphen Wirkung auf $D \times X$ holomorph. Nach Konstruktion ist pr_1 invariant und pr_2 äquivariant.

Das Faserprodukt X' ist im Falle $m > 1$ nicht glatt, als analytische Menge in $D \times X$ aber reduziert. Sei $\nu: X'' \rightarrow X'$ die Normalisierung von X' . Setzen wir $p'' := \text{pr}_1 \circ \nu$, so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{\nu} & X' & \xrightarrow{\text{pr}_2} & X \\ & \searrow p'' & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow p \\ & & D & \xrightarrow[\beta_m]{z \mapsto z^m} & D \end{array}$$

Nach Proposition III.9.1 in [BPV84] ist nun X'' glatt und die Verkettung $\text{pr}_2 \circ \nu$ eine unverzweigte Überlagerung. Weiter besitzt p'' über 0 eine einfache Faser.

Nach Proposition 71.15 in [KK83] existiert weiter eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\gamma'': \mathbb{C}^* \times X'' \rightarrow X''$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times X'' & \xrightarrow{\gamma''} & X'' \\ \text{id}_{\mathbb{C}^*} \times \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{C}^* \times X' & \xrightarrow{\gamma'} & X' \end{array}$$

Da aber $X' \setminus X'_0$ normal und somit biholomorph äquivalent zu $X'' \setminus X''_0$ ist, ist γ'' eine holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung, bezüglich derer ν äquivariant ist.

Weiter gilt für $z \in D^*$:

$$\begin{aligned} (p'')^{-1}(z) &\cong \text{pr}_1^{-1}(z), \text{ da } X'' \setminus X''_0 \cong X' \setminus X'_0 \\ &= \{(z, x) \in D \times X \mid \beta_m(z) = z^m = p(x)\} \\ &= \{z\} \times p^{-1}(z^m). \end{aligned}$$

Somit ist $(p'')^{-1}(z)$ eine elliptische Kurve mit einer nichttrivialen holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung. Wir bestimmen ihre Isotropie: für $(z, x) \in \text{pr}_1^{-1}(z)$ gilt

$$\begin{aligned} t \cdot (z, x) &= (z, t \cdot x) \stackrel{!}{=} (z, x) \\ \iff t \cdot x &= x \\ \iff t \in \langle g \circ p(x) \rangle &= \langle g \circ p \circ \text{pr}_2(z, x) \rangle = \langle g \circ \beta_m \circ \text{pr}_1(z, x) \rangle = \langle g(z^m) \rangle \end{aligned}$$

Da weiter $\text{pr}_2 \circ \nu$ eine unverzweigte Überlagerung und $p^{-1}(0)$ eine elliptische Kurve ist, ist auch $(p'')^{-1}(0)$ eine elliptische Kurve.

Insbesondere ist $p'': X'' \rightarrow D$ eine elliptische Faserung ohne mehrfache Fasern. Nach Satz 2.2.5 besitzt p'' also keine kritischen Stellen. Somit wird die Isotropiegruppe der Faser $(p'')^{-1}(z)$ von $g(z^m)$ erzeugt, die Isotropiegruppe von $(p'')^{-1}(0)$ also von $g(0)$, und es gilt $g(0) \neq 0$. ■

Lemma 3.2.5. *In der Situation gemäß Satz 3.2.1 wirkt die komplexe Zahl $f(y_0) \in \mathbb{C}^*$ trivial auf X_{y_0} .*

Beweis. Sei $x_0 \in X_{y_0}$. Wir wählen eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus X_{y_0})^{\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert. Dann gilt

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f \circ p(x_n) \cdot x_n = f \circ p(x_0) \cdot x_0 = f(y_0) \cdot x_0. \quad \blacksquare$$

Lemma 3.2.6. *Die Abbildung φ gemäß (3.3) ist eine Biholomorphie auf die Untermannigfaltigkeit S von $m,0X_{f \circ \delta}$.*

Beweis. Wir zeigen, daß φ injektiv ist: für $z, z' \in D$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \pi(z, 1) = \pi(z', 1) = \varphi(z') \\ \iff \exists(\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m: (z', 1) = (\ell, \varrho) \star (z, 1) = (\varrho^k z, \varrho f \circ \delta(z^m)^\ell) \\ \iff z = z' \text{ (und } \ell = 0, \varrho = 1). \end{aligned}$$

Als Submersion zwischen gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten ist aber π eine lokale Biholomorphie (Proposition 32 A.2_{geo} in [KK83]). Somit ist S eine Untermannigfaltigkeit, also eine RIEMANNSche Fläche. Insbesondere ist φ nach Satz 1.2.12 biholomorph. ■

Lemma 3.2.7. *Für $z, z' \in D$ und $t, t' \in \mathbb{C}^*$ gilt*

$$t \cdot \varphi(z) = t' \cdot \varphi(z') \iff \exists(\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m: (z', t') = (\varrho^k z, \varrho f \circ \delta(z^m)^\ell t).$$

Beweis. Aus der Definition der $(\mathbb{Z} \times E_m)$ -Wirkung folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} t \cdot \varphi(z) = t' \cdot \varphi(z') \\ \iff \pi(z, t) = \pi(z', t') \\ \iff \exists(\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m: (z', t') = (\varrho^k z, \varrho f \circ \delta(z^m)^\ell t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 3.2.8. *Für $z, z' \in D^*$ und $t, t' \in \mathbb{C}^*$ gilt:*

$$t \cdot \psi \circ \delta(z) = t' \cdot \psi \circ \delta(z') \iff \exists(\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m: (z', t') = (\varrho^k z, \varrho f \circ \delta(z^m)^\ell t).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
& t \cdot \psi \circ \delta(z) = t' \cdot \psi \circ \delta(z') \\
\iff & \begin{cases} p \circ \psi \circ \delta(z) = p \circ \psi \circ \delta(z') \text{ aufgrund der } \mathbb{C}^*\text{-Invarianz von } p \\ t \cdot \psi \circ \delta(z) = t' \cdot \psi \circ \delta(z') \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \delta(z^m) = \delta((z')^m) \text{ nach Lemma 3.2.3} \\ t \cdot \psi \circ \delta(z) = t' \cdot \psi \circ \delta(z') \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \exists \varrho \in E_m: z' = \varrho^k z, \text{ da } \delta \text{ Einbettung und } k \text{ und } m \text{ teilerfremd} \\ t \cdot \psi \circ \delta(z) = t' \cdot \psi \circ \delta(\varrho^k z) = t' \varrho^{-1} \cdot \psi \circ \delta(z) \text{ nach Lemma 3.2.3} \end{cases} \\
\iff & \exists (\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m: (z', t') = (\varrho^k z, \varrho^\ell \psi \circ \delta(z^m)),
\end{aligned}$$

da nach Voraussetzung f die Isotropiefunktion von $(X; \gamma; p; Y)$ ist. ■

Lemma 3.2.9. *Die Abbildung κ gemäß (3.5) ist eine äquivariante Biholomorphie.*

Beweis. Setzen wir

$$\tilde{\kappa}: D \times \mathbb{C}^* \longrightarrow p^{-1}(\delta(D)), \quad (z, t) \longmapsto t \cdot \psi \circ \delta(z),$$

so gilt

$$\tilde{\kappa}(z, t) = t \cdot \psi \circ \delta(z) = \kappa(t \cdot \varphi(z)) = \kappa(t \cdot \pi(z, 1)) = \kappa \circ \pi(z, t).$$

Nun ist $\tilde{\kappa}$ holomorph und π eine Submersion. Somit ist κ nach Corollary 32 A.3 ii) b) in [KK83] holomorph.

Nach Konstruktion ist κ äquivariant. Nach (3.4) ist κ auf ${}_{m,0}p_{f \circ \delta}^{-1}(D^*)$ bijektiv. Nach Satz 1.2.13 ist κ dort also biholomorph.

Die Abbildung κ ist nun nach Proposition and Definition 33 B.1 ii) in [KK83] eigentlich. Weiter ist κ diskret: das Urbild $\kappa^{-1}(x)$ für $x \in p^{-1}(y_0)$ ist als analytische Menge in der elliptischen Kurve ${}_{m,0}p_{f \circ \delta}^{-1}(0)$ diskret, und die Faser von κ über $x \in X \setminus X_{y_0}$ ist nur einelementig. Nach Seite 133 in [KK83] ist κ somit endlich. Schließlich ist κ als diskrete Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten nach Proposition 49.16 in [KK83] offen. Nach Proposition 33.7 in [KK83] ist κ somit eine (eventuell über X_{y_0} verzweigte) Überlagerung.

Da aber κ auf ${}_{m,0}p_{f \circ \delta}^{-1}(D^*)$ bijektiv ist, ist auch das Urbild eines jeden $x \in X_{y_0}$ unter κ nach Exercise 33 B c) in [KK83] einelementig. Somit ist κ bijektiv und wiederum nach Satz 1.2.13 biholomorph. Die Äquivarianz von κ folgt direkt aus der Definition. ■

3.3 Ein modifiziertes Modell

In Satz 3.2.1 setzen wir für die äquivariante Klassifikation von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen nahe einer singulären Faser vom Typ ${}_m I_0$ voraus, daß die Einheitswurzelgruppe E_m trivial auf die singuläre Faser wirkt. Man könnte nun in Anbetracht der

Vielfachheit m der singulären Faser versucht sein anzunehmen, daß diese Bedingung grundsätzlich erfüllt ist.

Dem ist nicht so: in diesem Abschnitt modifizieren wir Konstruktion 3.1.1 und erhalten ein lokales Modell mit einer singulären Faser vom Typ mI_0 , auf die E_m nicht trivial wirkt.

Konstruktion 3.3.1. Seien $m \geq 1$ und $f: D \rightarrow D^*$ holomorph. Seien weiter $k \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu m und $n \in \mathbb{Z}$.

Wir betrachten die folgende Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z} \times E_m$ auf $D \times \mathbb{C}^*$:

$$(\ell, \varrho) \star (z, w) := (\varrho^k z, \varrho^n f(z^m)^\ell w). \quad (3.1a)$$

Seien

$$\tilde{X} := (D \times \mathbb{C}^*) / (\mathbb{Z} \times E_m) \quad \text{sowie} \quad \tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow D, \quad [z, w] \mapsto z^m.$$

Mit der Quotientenabbildung $\tilde{\pi}: D \times \mathbb{C}^* \rightarrow \tilde{X}$ erhalten wir also das folgende kommutative Diagramm zunächst auf der mengentheoretischen Ebene:

$$\begin{array}{ccc} D \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{X} \\ & \searrow \beta_m \circ \text{pr}_1 & \swarrow \tilde{p} \\ & D & \end{array}$$

$(z, w) \mapsto z^m$

Weiter definieren wir durch $t \cdot \tilde{\pi}(z, w) := \tilde{\pi}(z, tw)$ eine \mathbb{C}^* -Wirkung $\tilde{\gamma}$ auf \tilde{X} . □

Bemerkung 3.3.2. Der Unterschied zwischen den Konstruktionen 3.1.1 und 3.3.1 liegt genau im Exponenten n , der in die Wirkung (3.1a) einfließt. Mit anderen Worten: die Wirkung (3.1) entspricht genau der Wirkung (3.1a) im Falle $n = 1$. □

Satz 3.3.3. Das Tupel $(\tilde{X}; \tilde{\gamma}; \tilde{p}; D)$ ist eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Isotropiefunktion von $(\tilde{X}; \tilde{\gamma}; \tilde{p}; D)$ ist f .
2. Die Abbildung \tilde{p} besitzt genau in 0 einen kritischen Wert.
3. Die Faser $\tilde{p}^{-1}(0)$ ist vom Typ mI_0 .
4. Die Isotropiegruppe der Faser $\tilde{p}^{-1}(0)$ ist $G_0 = \langle f(0), \varrho_0^n \rangle$ für eine primitive m -te Einheitswurzel ϱ_0 .

Bemerkung 3.3.4. Insbesondere ist die größte endliche Gruppe, die trivial auf \tilde{X}_0 wirkt, genau $S^1 \cap G_0 = E_{m'}$ für $n' := \text{ggT}(n, m)$ und $m' := \frac{m}{n'}$. Falls m und n nicht teilerfremd sind, ist die Gruppe $E_{m'}$ eine echte Untergruppe von E_m . □

Beweis von Satz 3.3.3. Die Lemmata 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 und 3.1.7 gelten auch für die modifizierte Konstruktion 3.3.1, mit nahezu unveränderten Beweisen.

Analog zum Beweis von Lemma 3.1.8 folgt, daß $\tilde{p}^{-1}(0)$ eine Faser vom Typ mI_0 ist. Für ihre Isotropie gilt hingegen:

$$t \cdot \tilde{\pi}(0, w) = \tilde{\pi}(0, tw) = \tilde{\pi}(0, w)$$

$$\begin{aligned} \iff \exists (\ell, \varrho) \in \mathbb{Z} \times E_m : (0, tw) &= (\ell, \varrho) \star (0, w) = (0, \varrho^n f(0)^\ell w) \\ \iff t \in \langle f(0), \varrho_0^n \rangle & \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Bemerkung 3.3.5. Wir bemerken, daß es in Konstruktion 3.3.1 beispielsweise nicht genügt zu fordern, daß k teilerfremd zu $\frac{m}{\text{ggT}(m,n)}$ ist. Wählen wir etwa $m = 6$, $k = 4$ und $n = 2$, so ist k teilerfremd zu $\frac{m}{\text{ggT}(m,n)} = \frac{6}{2} = 3$, aber für $\varrho = -1$ gilt

$$(0, \varrho) \star (z, w) = (\varrho^k z, \varrho^n w) = ((-1)^4 z, (-1)^2 w) = (z, w),$$

und die $(\mathbb{Z} \times E_m)$ -Wirkung (3.1a) ist nicht frei. In diesem Falle ist der Quotient $(D \times \mathbb{C}^*)/(\mathbb{Z} \times E_m)$ nicht notwendigerweise glatt. \square

Nun stellt sich die Frage, ob Satz 3.2.1 im folgenden Sinne verallgemeinert werden kann:

Frage 3.3.6. Sei $(X; \gamma; p; Y)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion f . Sei $y_0 \in Y$ ein kritischer Wert und die Faser X_{y_0} vom Typ ${}_m I_0$. Weiter gebe es ein $n' \in \mathbb{N}$, so daß für den endlichen Anteil der Isotropiegruppe der Faser X_{y_0} gilt, daß $S^1 \cap G_{y_0} = E_{\frac{m}{n'}}$.

Gibt es dann $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $n' = \text{ggT}(m, n)$, so daß $(X; \gamma; p; Y)$ nahe y_0 äquivariant isomorph zu $(\tilde{X}; \tilde{\gamma}; \tilde{p}; D)$ gemäß Konstruktion 3.3.1 ist? \square

Bemerkung 3.3.7. Wir wollen kurz skizzieren, warum wir den Beweis von Satz 3.2.1 nicht direkt auf die Situation in Frage 3.3.6 übertragen können: die Wirkung von $E_{\frac{m}{n'}}$ als Untergruppe von \mathbb{C}^* ist nach Voraussetzung trivial auf X_{y_0} , kann also in der Nähe eines $x_0 \in X_{y_0}$ wieder analog zu (3.6) linearisiert werden. Allerdings erhalten wir dann für das Gewicht k lediglich, daß k teilerfremd zu $\frac{m}{n'}$ ist – und nach Bemerkung 3.3.5 liefert das mit diesen Werten für ein $n \in n'\mathbb{Z}$ und k konstruierte Modell ohne weitere Bedingungen eine a priori singuläre Fläche \tilde{X} . \square

4 Torische Flächen

In diesem Abschnitt stellen wir die für die Betrachtung von singulären Fasern vom Typ mI_b notwendigen Grundbegriffe der Theorie der torischen Varietäten zusammen. Im Hinblick auf unsere Anwendungen beschränken wir uns dabei auf den zweidimensionalen Fall, also auf Gitter im \mathbb{R}^2 und torische Flächen. Die eindimensionale Theorie ist überschaubar und ergibt sich analog zu unserer Darstellung.

Wir übernehmen in diesem Kapitel weitgehend die Darstellung in [Kau00].

4.1 Konvexe und polyedrische Kegel

Kegel

Definition 4.1.1. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn für alle $a, b \in A$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt, daß $ta + (1-t)b \in A$.

Weiter nennen wir A *kegelförmig*, wenn $A = \mathbb{R}_{\geq 0} A$.

Schließlich heißt $A \neq \emptyset$ ein *Kegel*, wenn A konvex und kegelförmig ist. \square

Definition 4.1.2. Für $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

die *MINKOWSKIsumme* von A und B . Wir setzen $A - B := A + (-B)$.

Weiter bezeichnen wir mit $\dim A$ die Dimension des von A erzeugten Untervektorraums von \mathbb{R}^2 und mit

$$\text{keg } A := \left\{ \sum_{j \in J} r_j a_j \mid J \text{ endlich, } r_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a_j \in A \right\}$$

den *von A erzeugten Kegel*. \square

Für einen Kegel C ist $C = \text{keg } C$. Weiter enthalten unsere Kegel stets den *Nullkegel* $\sigma := \text{keg } \emptyset := \{0\}$.

Definition 4.1.3. Für $A \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$A^\vee := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \forall a \in A: \langle v, a \rangle \geq 0\},$$

wobei wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^2 bezeichnen, der *zu A duale Kegel*. Speziell für $u \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir den abgeschlossenen Halbraum

$$u^\vee := \{u\}^\vee = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, u \rangle \geq 0\}. \quad \square$$

Bemerkung 4.1.4. Es gilt

$$A^\vee = \bigcap_{a \in A} a^\vee, \quad (4.1)$$

und A^\vee ist somit abgeschlossen. \square

Definition 4.1.5. Für $A \subset \mathbb{R}^2$ sei weiter

$$A^\perp := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \forall a \in A: \langle v, a \rangle = 0\} = A^\vee \cap (-A)^\vee$$

der zu A orthogonale Vektorraum sowie

$$A^\circ := \{a \in A \mid \forall v \in A^\vee \setminus A^\perp: \langle v, a \rangle > 0\}$$

das relative Innere von A . \square

Der folgende Satz ist ein Spezialfall des Satzes von HAHN-BANACH:

Satz 4.1.6. Seien C ein abgeschlossener Kegel im \mathbb{R}^2 und $u \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Dann gibt es ein $v \in C^\vee$ mit $\langle v, u \rangle < 0$. \square

Der Beweis ist elementar und findet sich beispielsweise bei Satz 1.5 in [Kau00].

Korollar 4.1.7. Ist C ein abgeschlossener Kegel in \mathbb{R}^2 , so gilt $C = C^{\vee\vee}$.

Beweis. Die Inklusion $C \subset C^{\vee\vee}$ ist nach Definition klar. Ist umgekehrt $u \notin C$, so existiert nach Satz 4.1.6 ein $v \in C^\vee$ mit $\langle v, u \rangle < 0$, also ist $u \notin C^{\vee\vee}$. \blacksquare

Weiter verifiziert man auf elementare Weise:

Korollar 4.1.8. Für Kegel C und D im \mathbb{R}^2 gilt:

$$\overline{C + D}^\vee = C^\vee \cap D^\vee \text{ und } (C \cap D)^\vee = \overline{C^\vee + D^\vee}. \quad \square$$

Korollar 4.1.9. Jeder Kegel C ist Durchschnitt abgeschlossener Halbräume:

$$C = \bigcap_{v \in C^\vee} v^\vee. \quad (4.2)$$

Beweis. Wir wenden die Darstellung (4.1) an und beachten Korollar 4.1.7. \blacksquare

Polyedrische Kegel

Wir benötigen lediglich endlich erzeugte Kegel:

Definition 4.1.10. Für $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$\text{keg}(u_1, \dots, u_m) = \mathbb{R}_{\geq 0}u_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}u_m = \text{keg } u_1 + \dots + \text{keg } u_m$$

ein *polyedrischer Kegel*. □

Für die hier auftretenden MINKOWSKISUMMEN gilt:

Lemma 4.1.11. Die MINKOWSKISUMME konvexer (kompakter) Teilmengen des \mathbb{R}^2 ist wieder konvex (kompakt).

Beweis. Sind erstens $A, B \subset \mathbb{R}^2$ konvex, $a, a' \in A$ sowie $b, b' \in B$ und $0 \leq t \leq 1$, so gilt:

$$t(a + b) + (1 - t)(a' + b') = \underbrace{ta + (1 - t)a'}_{\in A} + \underbrace{tb + (1 - t)b'}_{\in B} \in A + B.$$

Da zweitens die Addition $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig ist, ist $A + B$ als Bild des Kompaktums $A \times B$ kompakt. ■

Im vorliegenden zweidimensionalen Fall ist anschaulich klar:

Bemerkung 4.1.12. Jeder polyedrische Kegel C ist Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen im \mathbb{R}^2 und somit insbesondere abgeschlossen. □

Lemma 4.1.13. Ein Kegel C in \mathbb{R}^2 ist genau dann von der Form $C = v_1^\vee \cap \dots \cap v_m^\vee$ für $v_i \in \mathbb{R}^2$, wenn $C^\vee = \text{keg}(v_1, \dots, v_m)$. Insbesondere ist das Dual polyedrischer Kegel wieder polyedrisch.

Beweis. \Leftarrow : Es gilt

$$\begin{aligned} C &= C^{\vee\vee} \text{ nach Korollar 4.1.7} \\ &= (\text{keg } v_1 + \dots + \text{keg } v_m)^\vee \text{ nach Voraussetzung und Definition 4.1.10} \\ &= (\text{keg } v_1)^\vee \cap \dots \cap (\text{keg } v_m)^\vee \text{ nach Korollar 4.1.8} \\ &= v_1^\vee \cap \dots \cap v_m^\vee. \end{aligned}$$

\Rightarrow : Jedes $v \in D := \text{keg}(v_1, \dots, v_m)$ liefert als positive Linearkombination der v_i im Skalarprodukt mit diesen positive Werte; mit $C = v_1^\vee \cap \dots \cap v_m^\vee$ folgt $D \subset C^\vee$. Um $C^\vee \subset D$ zu zeigen, betrachten wir ein $v \notin D$. Dann existiert nach Satz 4.1.6 ein $w \in D^\vee$ (somit gilt $\langle w, v_i \rangle \geq 0$ für alle i) mit $\langle w, v \rangle < 0$. Somit ist $v \notin C^\vee$.

Nach Bemerkung 4.1.12 läßt sich schließlich jeder polyedrische Kegel als endlicher Durchschnitt von Halbräumen der Form v_i^\perp schreiben. ■

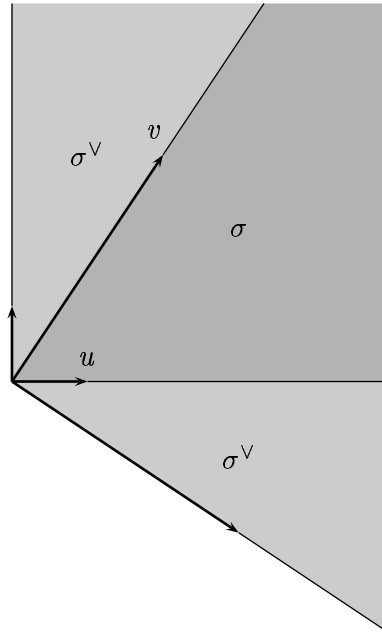


Abbildung 4.1: Dualkegel eines zweidimensionalen Kegels im \mathbb{R}^2 – man beachte $\sigma \subset \sigma^\vee$

Unter Verwendung von Lemma 4.1.13 können wir Dualkegel direkt zeichnerisch angeben, wie etwa in den Abbildungen 4.1 und 4.2.

Definition 4.1.14. Eine Teilmenge F eines polyedrischen Kegels C heißt *Seite von C* , wenn es ein $v \in C^\vee$ gibt, so daß $F = C \cap v^\perp$. Wir schreiben $F \prec C$. Eine eindimensionale Seite nennen wir eine *Kante von C* . \square

Definition und Bemerkung 4.1.15. Wir nennen einen polyedrischen Kegel C im \mathbb{R}^2 *spitz*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Der Kegel C enthält keine Gerade.
2. Es gibt ein $v \in C^\vee$ mit $v^\perp \cap C = \mathfrak{o}$.
3. Es gilt $\dim C^\vee = 2$. \square

4.2 Gitterkegel

Tatsächlich sind für uns nur diejenigen Kegel wichtig, die von Elementen eines Gitters im \mathbb{R}^2 erzeugt werden.

Definition 4.2.1. Im folgenden sei N immer ein vollständiges Gitter im \mathbb{R}^2 .

Für dieses vollständige Gitter N im \mathbb{R}^2 bezeichnen wir im folgenden das zu N *duale Gitter* mit $M := \text{Hom}_{\text{Gr}}(N, \mathbb{Z})$. \square

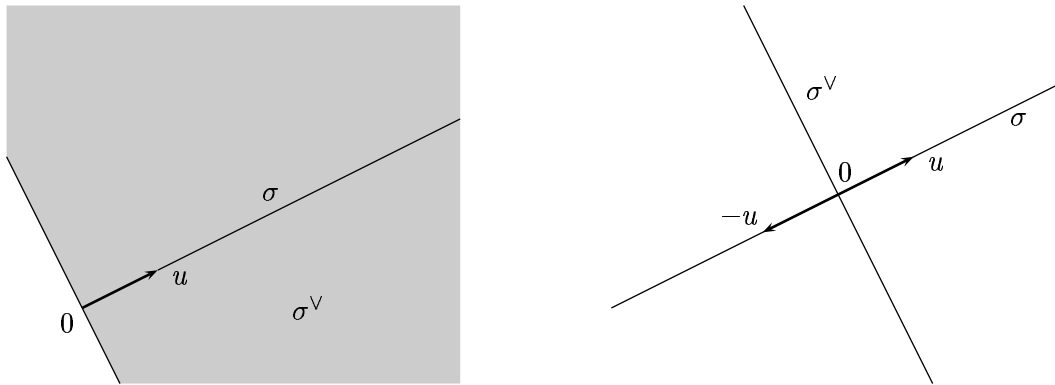


Abbildung 4.2: Dualkegel zweier eindimensionaler Kegel im \mathbb{R}^2

Wir werden fast ausschließlich mit dem Gitter \mathbb{Z}^2 arbeiten.

Definition 4.2.2. Sei N ein Gitter im \mathbb{R}^2 . Ein Kegel σ im \mathbb{R}^2 heißt ein N -rationaler Kegel oder ein *rationaler polyedrischer Kegel*, wenn es Elemente $u_1, \dots, u_r \in N$ gibt, so daß $\sigma = \text{keg}(u_1, \dots, u_r)$. \square

Wir bezeichnen im folgenden rationale polyedrische Kegel mit kleinen griechischen Buchstaben σ und τ .

Gegebenenfalls können wir annehmen, daß σ durch *primitive* Gittervektoren gegeben ist, daß also kein u_i ganzzahliges Vielfaches eines anderen Gittervektors ist.

Definition 4.2.3. Spitze N -rationale Kegel bezeichnen wir abkürzend als N -Kegel. \square

Bemerkung 4.2.4. Jeder zweidimensionale N -Kegel σ ist *simplizial*: es gibt $u_1, u_2 \in N$, so daß $\sigma = \text{keg}(u_1, u_2)$. \square

Definition 4.2.5. Ein N -Kegel $\sigma = \text{keg}(u_1, \dots, u_r)$ mit $r = 1, 2$ heißt *regulär*, wenn seine Erzeugenden zu einer Gitterbasis von N ergänzt werden können. \square

Bemerkung 4.2.6. In Definition 4.2.5 lassen wir auch zu, daß (u_1, \dots, u_r) bereits eine Gitterbasis für N ist.

Wir erinnern daran, daß eine Gitterbasis für N gegeben ist durch zwei Gittervektoren $u_1, u_2 \in N$ mit $\det_N(u_1, u_2) = \pm 1$. \square

Beispiel 4.2.7. Der Kegel $\text{keg}(e_1, e_2)$ ist regulär. Wegen $\det(e_1 - e_2, e_1 + e_2) = 2$ ist der Kegel $\text{keg}(e_1 - e_2, e_1 + e_2)$ nicht regulär. \square

Die N -Rationalität ist mit der Dualbildung verträglich:

Satz 4.2.8. Ein Kegel σ ist genau dann N -rational, wenn σ^\vee ein M -rationaler Kegel ist.

Beweis. Aufgrund von Korollar 4.1.7 genügt es, eine Richtung zu zeigen. Wir unterscheiden nach der Dimension von σ :

$\dim \sigma = 1$ (vgl. Abbildung 4.2): Für $\sigma = \text{keg } u$ mit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ gilt nach Lemma 4.1.13

$$\sigma^\vee = \text{keg} \left(\begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right).$$

Für $\sigma = \text{keg}(u, -u)$ ist weiter

$$\sigma^\vee = \text{keg} \left(\begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \right).$$

$\dim \sigma = 2$ (vgl. Abbildung 4.1): Sei $\sigma = \text{keg}(u, v)$ mit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Ohne Einschränkung sei das System (u, v) positiv orientiert. Nach Lemma 4.1.13 gilt dann

$$\sigma^\vee = \text{keg} \left(\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \right). \quad \blacksquare$$

4.3 Die einem Kegel zugeordnete Halbgruppe

Definition 4.3.1. Jedem N -rationalen Kegel σ entspricht eine kommutative Halbgruppe mit 0

$$S_\sigma := M \cap \sigma^\vee. \quad \square$$

Grundlegend für unsere weiteren Betrachtungen ist die folgende zweidimensionale Version des allgemeineren Lemmas von GORDAN:

Satz 4.3.2 (Lemma von GORDAN). Sei σ ein N -Kegel. Dann ist die Halbgruppe S_σ endlich erzeugt.

Beweis. Nach Satz 4.2.8 ist σ^\vee von der Form $\sigma^\vee = \text{keg}(v_1, \dots, v_r)$ für $2 \leq r \leq 3$ mit primitiven $v_j \in S_\sigma$. Wir definieren einen kompakten „Fundamentalebenebereich“ durch

$$F_\sigma := \left\{ \sum_{i=1}^r t_i v_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \right\}.$$

Dann ist $E_\sigma := F_\sigma \cap M$ endlich und erzeugt S_σ : für $v \in S_\sigma$ gibt es Koeffizienten $a_i \in \mathbb{N}$ und $t_i \in [0, 1[$, so daß

$$v = \sum_{i=1}^r (a_i + t_i) v_i = \sum_{i=1}^r a_i v_i + \sum_{i=1}^r t_i v_i.$$

Da nun $v_i \in E_\sigma$, genügt es zu zeigen, daß $w := \sum t_i v_i \in E_\sigma$. Zunächst ist $w \in \text{keg}(v_1, \dots, v_r) = \sigma^\vee$. Da weiter M eine Gruppe ist, gilt $w = v - \sum a_i v_i \in M$. \blacksquare

Definition 4.3.3. Ein Erzeugendensystem minimaler Länge einer Unterhalbgruppe S von M nennen wir eine **HILBERTbasis** von S .

Eine Unterhalbgruppe S von M heißt *saturiert*, wenn aus $m \in M$, $p \in \mathbb{N}$ und $pm \in S$ schon folgt, daß $m \in S$.

Eine Unterhalbgruppe S von M heißt *erzeugend*, wenn $S - S = M$, wenn S also M als Gruppe erzeugt. \square

Lemma 4.3.4. Eine endlich erzeugte Unterhalbgruppe S von M ist genau dann saturiert und erzeugend, wenn ein N -Kegel σ mit $S = S_\sigma$ existiert.

Beweis. \Leftarrow : Sei σ ein N -Kegel. Zum Nachweis der Saturiertheit von S_σ seien $m \in M$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $pm \in S_\sigma$. Dann gilt für alle $u \in \sigma$, daß

$$\langle pm, u \rangle = p \langle m, u \rangle \geq 0,$$

somit $\langle m, u \rangle \geq 0$ und $m \in \sigma^\vee$, also $m \in S_\sigma$.

Weiter zeigen wir, daß S_σ erzeugend ist: da σ spitz ist, gilt $\dim \sigma^\vee = 2$. Seien also $v_1, v_2 \in \sigma^\vee$ zwei \mathbb{R} -linear unabhängige Vektoren. Dann können wir jedes $m \in M \subset \mathbb{R}^2$ als \mathbb{R} -Linearkombination $m = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ darstellen. Bezeichnen wir andererseits mit $\tau := \text{keg}(v_1, v_2)$ den von v_1 und v_2 in σ^\vee erzeugten Unterkegel, so existieren λ'_1 und λ'_2 mit $m' := \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 \in \tau \cap M$ und $m + m' \in \tau$. Mit $m' \in S_\sigma$ und $m + m' \in S_\sigma$ ist $m = (m + m') - m' \in S_\sigma - S_\sigma$. Also ist $S_\sigma - S_\sigma = M$ und S_σ erzeugend.

\Rightarrow : Sei nun S eine erzeugende und saturierte Unterhalbgruppe von M , etwa erzeugt durch m_1, \dots, m_r . Wir bezeichnen den zu $\sigma^\vee := \text{keg}(m_1, \dots, m_r)$ dualen Kegel mit σ und zeigen, daß erstens σ spitz ist und zweitens $S = S_\sigma$ gilt:

σ ist spitz: Aufgrund der Vollständigkeit des Gitters

$$M = S - S \subset \sigma^\vee - \sigma^\vee \subset \mathbb{R}^2$$

ist $\dim \sigma^\vee = 2$ und somit σ nach Definition und Bemerkung 4.1.15 spitz.

$S \subset S_\sigma$: Natürlich gilt $m_1, \dots, m_r \in S_\sigma$ und somit $S \subset S_\sigma$.

$S \supset S_\sigma$: Jedes $m \in S_\sigma$ besitzt nach Seite 19 in [Kau00] eine Darstellung $m = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_r m_r$ mit $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Indem wir mit einem Hauptnenner q für die λ_i durchmultiplizieren, erhalten wir

$$qm = \sum_{i=1}^r \underbrace{(q\lambda_i)}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}} m_i \in S,$$

also ist aufgrund der Saturiertheit von S schon $m \in S$. \blacksquare

Weiter benötigen wir strukturtreue Abbildungen zwischen unseren Kegeln:

Definition 4.3.5. Seien σ ein N -Kegel und σ' ein N' -Kegel sowie $\varphi: N \rightarrow N'$ ein Gittermorphismus mit $\varphi(\sigma) \subset \sigma'$. Dann nennen wir φ einen *Kegelmorphismus* und schreiben $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$. \square

Bemerkung 4.3.6. Ein Kegelmorphismus ist also auf σ ein Gruppenhomomorphismus. Weiter ist φ genau dann ein Kegelisomorphismus, wenn φ einen Gitterisomorphismus induziert und $\varphi(\sigma) = \sigma'$ gilt.

Schließlich erinnern wir daran, daß Gitterisomorphismen bezüglich Gitterbasen genau durch Matrizen aus $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ gegeben sind, also Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante ± 1 . \square

Beispiel und Definition 4.3.7. Ist beispielsweise $\tau \prec \sigma$ für N -Kegel τ und σ , so liefert die Inklusion $j: \tau \rightarrow \sigma$ einen Kegelmorphismus

$$(\text{id}_N, j): (N, \tau) \longrightarrow (N, \sigma),$$

den wir der Einfachheit halber wieder mit $j = (\text{id}_N, j)$ notieren und als *Seitenmorphismus* bezeichnen. \square

Wir bemerken:

Lemma 4.3.8. Ein Kegelmorphismus $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ induziert auf funktorielle Weise Morphismen

$$\varphi^*: (M', (\sigma')^\vee) \longrightarrow (M, \sigma^\vee), \quad m' \longmapsto m' \circ \varphi$$

sowie

$$S(\varphi) := \varphi^*|_{S_{\sigma'}}: S_{\sigma'} \longrightarrow S_\sigma, \quad m' \longmapsto m' \circ \varphi. \quad \square$$

Wir erhalten den folgenden Äquivalenzsatz:

Satz 4.3.9 (Äquivalenzsatz). Der Funktor

$$\begin{aligned} (N, \sigma) &\longmapsto (M, S_\sigma) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^* \end{aligned}$$

von der Kategorie der spitzen Gitterkegel in die Kategorie der endlich erzeugten saturierten erzeugenden Gitterhalbgruppen ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Nach dem Lemma von GORDAN (Satz 4.3.2) ist S_σ endlich erzeugt. Somit sind nach Lemma 4.3.4 die endlich erzeugten saturierten erzeugenden Gitterhalbgruppen genau die Bilder unter der Zuordnung.

Die obige Zuordnung ist funktoriell. Ein Umkehrfunktor ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (M, S) &\longmapsto (N, \text{keg}(S)^\vee) \\ \psi &\longmapsto \psi^*. \end{aligned}$$

Wegen der Saturiertheit von S gilt nämlich zunächst

$$(\text{keg}(S))^{\vee\vee} \cap M^{**} = \text{keg}(S) \cap M = S.$$

Ist nun $\psi: (M, S) \rightarrow (M', S')$ ein Morphismus, so bestimmen wir gemäß Lemma 4.3.4 spitze Gitterkegel σ und σ' mit $S = S_\sigma$ und $S' = S_{\sigma'}$. Sind m_1, \dots, m_r Erzeugende für S , so ist

$$\sigma^\vee = \text{keg}(m_1, \dots, m_r)$$

sowie

$$\psi(\text{keg}(m_1, \dots, m_r)) = \text{keg}(\psi(m_1), \dots, \psi(m_r)) \subset \sigma'^\vee$$

und somit $\psi^{**} = \psi$. ■

4.4 Affine torische Varietäten

In diesem Abschnitt ordnen wir jedem N -Kegel σ im \mathbb{R}^2 eine zweidimensionale affin algebraische komplexe Varietät zu, also eine durch geeignete Polynome im \mathbb{C}^n definierte Varietät (Definition 32.10 in [KK83]).

Zu einer Halbgruppe S mit 0 definieren wir zunächst den \mathbb{C} -Vektorraum

$$\mathbb{C}[S] := \bigoplus_{v \in S} \mathbb{C}\chi_v$$

mit formalen Erzeugenden χ_v für $v \in S$. Vermittels der Multiplikation $\chi_u \cdot \chi_v := \chi_{u+v}$ wird $\mathbb{C}[S]$ zu einer \mathbb{C} -Algebra, der *Halbgruppenalgebra von S* . Das Erzeugende χ_0 wirkt als neutrales Element der Multiplikation, und $\mathbb{C}[S]$ ist genau dann kommutativ, wenn schon die Halbgruppe S es ist.

Wenden wir dies auf die Halbgruppe S_σ an, die wir in Abschnitt 4.3 einem Kegel σ zugeordnet haben: nach dem Lemma von GORDAN (Satz 4.3.2) ist S_σ als Halbgruppe endlich erzeugt, etwa

$$S_\sigma = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{\geq 0} v_i.$$

Dann besitzt $\mathbb{C}[S_\sigma]$ das Erzeugendensystem $\{\chi_{v_1}, \dots, \chi_{v_r}\}$.

Beispiel 4.4.1. Ist $N = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, so wird das duale Gitter M als Gruppe von $f_1 := e_1^*$ und $f_2 := e_2^*$ erzeugt, als Halbgruppe hingegen von $f_1, -f_1, f_2$ und $-f_2$. Wir setzen

$$T_i := \chi_{f_i}, \quad T_i^{-1} := \chi_{-f_i}, \quad T^v := T_1^{v_1} T_2^{v_2} \text{ für } v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$$

und nennen

$$\mathbb{C}[M] = \bigoplus_{v \in M} \mathbb{C} \cdot \chi_v = \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}]$$

die LAURENTalgebra über M . Sie ist nullteilerfrei und damit insbesondere reduziert. Ihre Elemente heißen LAURENTpolynome. □

Wir erhalten, wieder für eine allgemeine endlich erzeugte Halbgruppe S , die folgende Bijektion:

Lemma 4.4.2. *Es existiert eine Bijektion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[S], \mathbb{C}), \quad x \mapsto (\chi_v \mapsto x(v)). \quad \square$$

Für eine weitere äquivalente Beschreibung von $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S, \mathbb{C})$ führen wir den Begriff des *Maximalspektrums* ein:

Definition 4.4.3. Sei A eine Algebra. Dann heißt

$$\mathrm{Specmax} A := \{\mathfrak{m} \subset A \mid \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal von } A\}$$

das *Maximalspektrum* von A . □

Lemma 4.4.4. *Es existiert eine Bijektion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[S], \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Specmax} \mathbb{C}[S], \quad \varphi \mapsto \ker \varphi.$$

Beweis. Wir zeigen, daß die Abbildung wohldefiniert ist: nach Definition eines Algebrahomomorphismus ist $\varphi(\chi_0) = 1$. Somit ist φ surjektiv, und nach den Homomorphiesätzen ist $\mathbb{C}[S]/\ker \varphi \cong \mathbb{C}$. Also ist $\mathbb{C}[S]/\ker \varphi$ ein Körper und $\ker \varphi$ somit maximal.

Ist nun $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specmax} \mathbb{C}[S]$, so ist $\mathbb{C}[S]/\mathfrak{m}$ ein Körper. Da $\mathbb{C}[S]$ endlich erzeugt ist, ist $\mathbb{C}[S]/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von \mathbb{C} , insbesondere also algebraisch. Weil schließlich \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, gilt $\mathbb{C}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$, und die Quotientenabbildung $\mathbb{C}[S] \rightarrow \mathbb{C}[S]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ ist ein Urbild für \mathfrak{m} .

Zum Nachweis der Injektivität betrachten wir $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[S], \mathbb{C})$ mit $\varphi \neq \psi$. Sei etwa $s \in \mathbb{C}[S]$ mit $\varphi(s) =: a \neq b := \psi(s)$. Dann gilt

$$\varphi(s - a\chi_0) = \varphi(s) - a \underbrace{\varphi(\chi_0)}_{=1} = a - a = 0 \quad \text{und} \quad \psi(s - a\chi_0) = b - a \neq 0$$

und $s - a\chi_0 \in \ker \varphi$ sowie $s - a\chi_0 \notin \ker \psi$. ■

Lemma 4.4.5. *Ist die Halbgruppenalgebra $\mathbb{C}[S]$ erzeugt von s_1, \dots, s_n , so existiert eine Surjektion*

$$\varphi: \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S], \quad T_i \mapsto s_i$$

sowie umgekehrt eine Injektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Specmax} \mathbb{C}[S] \longrightarrow \mathrm{Specmax} \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n], \quad \mathfrak{m} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{m}).$$

Beweis. Zur Wohldefiniertheit der zweiten Abbildung: ist $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specmax} \mathbb{C}[S]$, so erhalten wir einen Homomorphismus $\overline{\varphi}$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[S] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathbb{C}[S]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}
 \end{array}$$

Dabei ist $\bar{\varphi}$ surjektiv und injektiv, somit

$$\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \cong \mathbb{C}[S]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C},$$

und $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ist maximal.

Da weiter φ surjektiv ist, ist die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Specmax} \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$$

injektiv. ■

Weiter ist $\mathrm{Specmax} \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n] \cong \mathbb{C}^n$, da jedes maximale Ideal in $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$ von der Form $\mathfrak{m} = (T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n)$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ist (Seite 4 in [Har77]).

Wir erhalten, daß $\mathrm{Specmax} \mathbb{C}[S]$ eine affin algebraische Varietät ist, also das Nullstellengebilde einer Menge von Polynomen in einem \mathbb{C}^n .

Eine Unterhalbgruppe $S \subset M$ liefert eine Inklusion $\mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[M]$; insbesondere sind die Elemente der Halbgruppenalgebra $\mathbb{C}[S]$ als LAURENTpolynome darstellbar. Somit ist $\mathbb{C}[S]$ für endlich erzeugtes S eine nullteilerfreie affine Algebra.

Die folgende Bemerkung findet sich mit einem Beweis als Bemerkung 3.2 in [Kau00].

Bemerkung 4.4.6. Sei S eine endlich erzeugte saturierte erzeugende Unterhalbgruppe von M . Dann ist $\mathbb{C}[S]$ ein normaler Ring. □

Definition 4.4.7. Für einen N -Kegel σ nennen wir $\mathbb{C}[S_\sigma]$ die zu σ assoziierte Algebra und $X_\sigma := \mathrm{Specmax} \mathbb{C}[S_\sigma]$ die zugehörige „torische“ Varietät mit der durch $X_\sigma \mathcal{O}_x = \mathbb{C}[S_\sigma]$ für $x \in X_\sigma$ gegebenen Strukturgarbe. □

Bemerkung 4.4.8. Die affine torische Varietät X_σ ist normal und damit insbesondere irreduzibel.

Beweis. Nach Bemerkung 4.4.6 ist jeder Halm der Strukturgarbe $X_\sigma \mathcal{O}_x = \mathbb{C}[S_\sigma]$ ein normaler Ring; somit ist nach [KK83], Proposition 71.2 jeder Keim $(X_\sigma)_x$ normal. Da X_σ affin ist, ist dies äquivalent zur Aussage (Satz 11.2 in [Kau98]). ■

Für ein Erzeugendensystem (v_1, \dots, v_r) von S_σ erhalten wir einen surjektiven Algebrahomomorphismus

$$\varphi: \mathbb{C}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[S_\sigma], \quad T_i \longmapsto \chi_{u_i}; \tag{4.3}$$

somit sind die durch die T_i gegebenen Funktionen die Koordinaten von $\mathbb{C}[S_\sigma]$ in \mathbb{C}^r .

Beispiel 4.4.9. Für den Nullkegel \mathfrak{o} im Gitter N erhalten wir $S_{\mathfrak{o}} = M$, somit $\mathbb{C}[S_{\mathfrak{o}}] = \mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}]$, und

$$\mathbb{T}_N := X_{\mathfrak{o}} = \text{Specmax } \mathbb{C}[M] = (\mathbb{C}^*)^2$$

ist ein zweidimensionaler algebraischer Torus. \square

Satz 4.4.10. *Ist σ ein regulärer Kegel, so ist die Varietät X_{σ} singularitätenfrei.*

Beweis. Ist etwa $\sigma = \text{keg}(u, v)$ mit $\det(u, v) = 1$, so gilt nach Lemma 4.1.13 für den dualen Kegel, daß $\sigma^{\vee} = u^{\vee} \cap v^{\vee}$. Sind $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, so ist $\sigma^{\vee} = \text{keg}(v', u')$ für $v' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ und $u' = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$; insbesondere ist $\det(v', u') = 1$ und somit

$$S_{\sigma} = \mathbb{Z}^2 \cap \sigma^{\vee} \cong \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

als Halbgruppe. Dann ist

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}] \cong \mathbb{C}[T_1, T_2]$$

die (reguläre!) Polynomialgebra in zwei Veränderlichen über \mathbb{C} . \blacksquare

Lemma 4.4.11. *Für zwei Halbgruppen S und S' erhalten wir eine Abbildung*

$$\text{Hom}_{\text{Hgr}}(S, S') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(\mathbb{C}[S], \mathbb{C}[S']), \quad \varphi \longmapsto (\chi_v \mapsto \chi_{\varphi(v)}). \quad (4.4)$$

Der Morphismus $\chi_v \mapsto \chi_{\varphi(v)}$ ist hierbei monomial. \square

Mit Lemma 4.3.8 und Gleichung (4.4) erhalten wir:

Lemma 4.4.12. *Ein Kegelmorphismus $\varphi: (N, \sigma) \mapsto (N', \sigma')$ induziert einen monomialen Morphismus*

$$\mathbb{C}[\varphi^*]: \mathbb{C}[S_{\sigma'}] \longrightarrow \mathbb{C}[S_{\sigma}], \quad \chi_{v'} \longmapsto \chi_{\varphi^*v'} = \chi_{v' \circ \varphi}$$

und somit auf funktorielle Weise einen Morphismus von Varietäten

$$\begin{aligned} \varphi_* := \text{Specmax } \varphi: X_{\sigma} \cong \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma}, \mathbb{C}) &\longrightarrow X_{\sigma'} \cong \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma'}, \mathbb{C}), \\ x &\longmapsto (x \circ \varphi^*: v \mapsto x(\varphi \circ v)) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Beispiel und Definition 4.4.13. Ist etwa wieder $\tau \prec \sigma$ für N -Kegel τ und σ , so liefert die Inklusion $j: \tau \rightarrow \sigma$ wie in Beispiel 4.3.7 einen Seitenmorphismus $j: (N, \tau) \rightarrow (N, \sigma)$. Der zugehörige Morphismus von torischen Varietäten ist gegeben durch

$$j: X_{\tau} = \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\tau}, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Hgr}}(S_{\sigma}, \mathbb{C}), \quad \varphi \longmapsto \varphi|_{S_{\tau}}.$$

Wir nennen auch diesen Morphismus wieder einen *Seitenmorphismus*. \square

Wir wollen die Situation des letzten Beispiels genauer betrachten. Hierzu erinnern wir zunächst an einen Begriff aus der Algebraischen Geometrie:

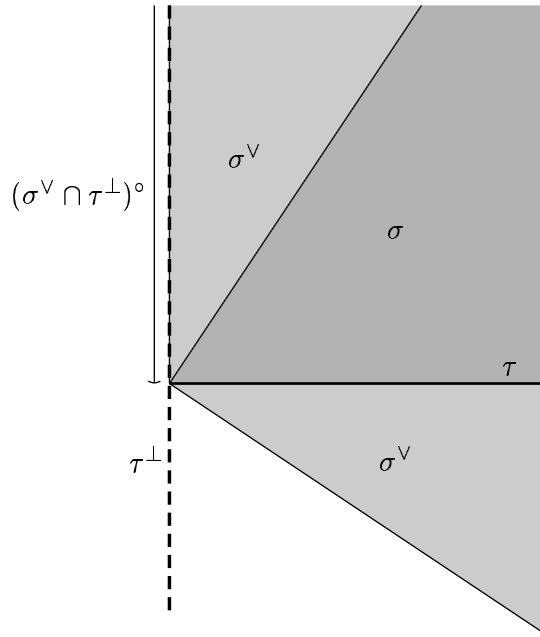


Abbildung 4.3: Zum Beweis von Lemma 4.4.15

Definition 4.4.14. Ist X eine affin algebraische Varietät und f eine reguläre Funktion auf X , so nennen wir $X \setminus N(X; f)$ die (offene) *Hauptmenge von f in X* . \square

Lemma 4.4.15. Ist $\tau \prec \sigma$ für N -Kegel τ und σ , so ist X_τ vermöge des zugehörigen Seitenmorphismus eine Hauptmenge in X_σ .

Beweis. Es gilt stets $(\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ \neq \emptyset$ wie in Abbildung 4.3. Wählen wir ein $v \in (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\circ$, so gilt $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{N} \cdot (-v)$. Wir können also ein Erzeugendensystem (v_1, \dots, v_r) für S_σ mit $v_r = v$ wählen. Setzen wir dann $v_{r+1} := -v$, so ist $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1})$ ein Erzeugendensystem von S_τ .

Wir betrachten weiter die Relationen in S_σ und S_τ . Einerseits gilt $v_r + v_{r+1} = 0$ in S_τ . Gäbe es andererseits eine weitere Relation

$$\sum_{i=1}^{r+1} n_i v_i = \sum_{i=1}^{r+1} m_i v_i$$

mit $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ in S_τ , so sei ohne Einschränkung $n_{r+1} \geq m_{r+1}$. Durch Subtraktion von $m_{r+1} v_{r+1}$ auf beiden Seiten sei sogar ohne Einschränkung $m_{r+1} = 0$. Durch Addition von $n_{r+1} v_r$ erhalten wir schließlich aufgrund von $v_r + v_{r+1} = 0$ eine äquivalente Relation nur in v_1, \dots, v_r . Somit kommt in der Algebra $\mathbb{C}[S_\tau]$ mit der Bezeichnung $y_i = T^{v_i}$ zu den Relationen in $\mathbb{C}[S_\sigma]$ als einzige die Relation $y_r y_{r+1} = 1$ hinzu. Daher bildet die Projektion

$$\text{pr}: \mathbb{C}^{r+1} \longrightarrow \mathbb{C}^r, \quad (y_1, \dots, y_{r+1}) \longmapsto (y_1, \dots, y_r)$$

die affine Varietät X_τ isomorph auf die Hauptmenge $\{y \in X_\sigma \mid y_r \neq 0\}$ ab. Daß die Abbildung die gewünschte Form hat, ergibt sich etwa aus dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S_\tau, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{C}[S_\tau], \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{inj}} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_{r+1}], \mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}^{r+1} \\
\downarrow F & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{inj}} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_r], \mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}^r
\end{array}$$

wobei $F: \varphi \mapsto \varphi|_{S_\sigma}$. ■

Korollar 4.4.16. *Der Torus $\mathbb{T}_N = X_\mathfrak{o}$ liegt als ZARISKI-offene dichte Teilmenge in der affinen torischen Varietät X_σ . Insbesondere ist $\dim X_\sigma = 2$.*

Beweis. Wir wenden die Überlegungen des letzten Beweises auf den Nullkegel \mathfrak{o} als Seite von σ an, $\mathfrak{o} \prec \sigma$: sei hierzu (v_1, \dots, v_r) ein Erzeugendensystem von S_σ mit $v_r \in (\sigma^\vee \cap \mathfrak{o}^\perp)^\circ = (\sigma^\vee)^\circ$. Dann hat die zugehörige Abbildung nach Gleichung (4.3) die Form

$$\mathbb{T}_N = X_\mathfrak{o} \longrightarrow X_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^r, \quad t = (t_1, t_2) \longmapsto (t^{v_1}, \dots, t^{v_r})$$

und induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{T}_N \longrightarrow X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^r, \quad t \longmapsto (t^{v_1}, \dots, t^{v_r}).$$

Da nun weiter X_σ irreduzibel ist, liegt die offene Teilmenge $X_\mathfrak{o}$ dicht in X_σ , und es gilt

$$\dim X_\sigma = \dim X_\mathfrak{o} = \dim \mathbb{T}_N = 2. \quad \blacksquare$$

Bemerkung 4.4.17. Der von einem Kegelmorphismus $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ induzierte Morphismus $\varphi_*: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$ ist nach Konstruktion *torisch*, d. h. nach Konstruktion liefert er für die Inklusionen $X_\sigma, X_{\sigma'} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
X_\sigma & \hookrightarrow & \mathbb{C}^2 \\
\varphi_* \downarrow & & \downarrow \Phi \\
X_{\sigma'} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^2
\end{array}$$

wobei $\Phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ durch Monome gegeben ist. □

Die folgende Toruswirkung ist grundlegend für die weitere Theorie:

Lemma 4.4.18. *Ist σ ein N -Kegel, so definiert der Algebramorphismus*

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \longrightarrow \mathbb{C}[M] \otimes \mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[M \times S_\sigma], \quad \chi_v \longmapsto \chi_v \otimes \chi_v$$

eine \mathbb{T}_N -Wirkung

$$\mathbb{T}_N \times X_\sigma \longrightarrow X_\sigma, \quad (t, x) \longmapsto t \cdot x$$

mit

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(M, \mathbb{C})}_{\cong \mathbb{T}_N} \times \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C})}_{\cong X_\sigma} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hgr}}(S_\sigma, \mathbb{C}), \\
(t, x) & \longmapsto & (t \cdot x: v \mapsto t(v)x(v)).
\end{array}$$

Beide Abbildungen sind verträglich mit Seiteninklusionen. Insbesondere setzt die Toruswirkung die komponentenweise Multiplikation von $\mathbb{T}_N = X_{\mathfrak{o}} \subset X_{\sigma}$ auf X_{σ} fort.

Ist (v_1, \dots, v_r) ein Erzeugendensystem von S_{σ} , so hat die Toruswirkung die Form

$$\mathbb{T}_N \times X_{\sigma} \longrightarrow X_{\sigma}, \quad (t, x) \longmapsto (t^{v_1} x_1, \dots, t^{v_r} x_r).$$

Beweis. Zu Elementen $\chi_v \otimes \chi_v \in \mathbb{C}[M] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[M \times S_{\sigma}]$ gehört auf $\mathbb{T}_N \times X_{\sigma}$ die Funktion $(t, x) \mapsto t(v)x(v)$. Somit ist nur die Verträglichkeit mit Seiteninklusionen $\tau \prec \sigma$ zu überprüfen:

Für $\sigma = \mathfrak{o}$ ist die Wirkung gerade die Multiplikation in \mathbb{T}_N . Weiter können wir die Wirkung von $\mathbb{T}_N \times X_{\sigma} \rightarrow X_{\sigma}$ auf $\mathbb{T}_N \times X_{\mathfrak{o}} \rightarrow X_{\mathfrak{o}}$ einschränken, und die (stetige!) \mathbb{T}_N -Wirkung auf X_{σ} ist als Fortsetzung dieser Einschränkung auf eine offene dichte Teilmenge eindeutig bestimmt. Insbesondere ist die Wirkung auf der Hauptmenge X_{τ} von X_{σ} nach Lemma 4.4.15 durch Einschränkung gegeben. ■

Bemerkung 4.4.19. 1. Ist $\sigma \prec \tau$ für N -Kegel σ und τ , so ist der Seitenmorphismus $j: X_{\sigma} \rightarrow X_{\tau}$ bezüglich der obigen \mathbb{T}_N -Wirkung äquivariant.

2. Ist $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ ein Kegelmorphismus, so ist der induzierte Morphismus $\varphi_*: X_{\sigma} \rightarrow X_{\sigma'}$ im folgenden Sinne äquivariant: es gibt einen *begleitenden Homomorphismus* $\varphi_0: \mathbb{T}_N \rightarrow \mathbb{T}_{N'}$, so daß für $t \in \mathbb{T}_N$ und $x \in X_{\sigma}$ gilt:

$$\varphi_*(t \cdot x) = \varphi_0(t) \cdot \varphi_*(x).$$

Beweis. 2. Wegen $\varphi(0) = 0 \in N'$ induziert φ eine Abbildung $\varphi_0: X_{\mathfrak{o}} \rightarrow X_{\mathfrak{o}'}$, die unter der Identifizierung $\mathbb{T}_N = X_{\mathfrak{o}}$ und $\mathbb{T}_{N'} = X_{\mathfrak{o}'}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Nun ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_N \times X_{\mathfrak{o}} & \longrightarrow & X_{\mathfrak{o}} \\ \varphi_0 \times \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{T}_{N'} \times X_{\mathfrak{o}'} & \longrightarrow & X_{\mathfrak{o}'} \end{array}$$

Da aber $X_{\mathfrak{o}}$ dicht in X_{σ} und $X_{\mathfrak{o}'}$ dicht in $X_{\sigma'}$ liegen, folgt auch die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_N \times X_{\sigma} & \longrightarrow & X_{\sigma} \\ \varphi_0 \times \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ \mathbb{T}_{N'} \times X_{\sigma'} & \longrightarrow & X_{\sigma'} \end{array}$$

■

Wir erhalten den folgenden Antiäquivalenzsatz:

Satz 4.4.20 (Antiäquivalenzsatz). Die Kategorie der LAURENT-Teilalgebren und die Kategorie der affinen torischen Varietäten sind vermöge

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[S_{\sigma}] & \longmapsto & X_{\sigma} \\ \psi & \longmapsto & \text{Specmax } \psi \end{array}$$

antiäquivalent.

Beweis. Nach dem Antiäquivalenzsatz 3.9 in [Kau98] liefert die obige Zuordnung eine Antiäquivalenz zwischen den größeren Kategorien der affinen Algebren einerseits und der affinen Varietäten andererseits. Somit bleibt noch nachzuweisen, daß sich in den jeweiligen (nicht vollen!) Unterkategorien die Morphismen entsprechen.

Einerseits liefert nach Bemerkung 4.4.17 jeder monomiale Algebrenhomomorphismus einen torischen Morphismus.

Ist umgekehrt $\varphi: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'}$ ein torischer Morphismus, so erhalten wir einen monomialen Algebrenhomomorphismus

$$\mathbb{C}(\varphi) = \varphi^*: \mathbb{C}[S_{\sigma'}] \longrightarrow \mathbb{C}[S_\sigma]$$

wie folgt: nach Voraussetzung existiert ein Morphismus

$$\Phi: \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^{r'}, \quad x \longmapsto (a_1 x^{\mu_1}, \dots, a_{r'} x^{\mu_{r'}})$$

mit $a_j \in \mathbb{C}$ und $\mu_j \in \mathbb{Z}^r$, der das folgende kommutative Diagramm induziert:

$$\begin{array}{ccccc} X_\sigma & \xrightarrow{\cong} & V(\mathbb{C}^r; \mathfrak{b}) & \hookrightarrow & \mathbb{C}^r \\ \varphi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Phi \\ X_{\sigma'} & \xrightarrow{\cong} & V(\mathbb{C}^{r'}; \mathfrak{b}') & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{r'} \end{array}$$

Der durch Φ induzierte Homomorphismus von Polynomialgebren

$$\Phi^*: \mathbb{C}[y_1, \dots, y_{r'}] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r], \quad f \longmapsto f \circ \Phi$$

ist gegeben durch $\Phi^*(y_j) = a_j x^{\mu_j}$ und ist somit monomial. Aus $\Phi(V(\mathbb{C}^r; \mathfrak{b})) \subset V(\mathbb{C}^{r'}; \mathfrak{b}')$ folgt weiter $\Phi^*(\mathfrak{b}') \subset \mathfrak{b}$; somit gilt für den induzierten Homomorphismus

$$\varphi^*: \mathbb{C}[S_{\sigma'}] = \mathbb{C}[y]/\mathfrak{b}' \longrightarrow \mathbb{C}[x]/\mathfrak{b} = \mathbb{C}[S_\sigma]. \quad \blacksquare$$

4.5 Fächer und torische Varietäten

Definition 4.5.1. Ein *Fächer* Δ im \mathbb{R}^2 ist eine nichtleere endliche Menge von spitzen Kegeln, so daß gilt:

1. Ist $\tau \prec \sigma$ eine Seite eines Kegels $\sigma \in \Delta$, so ist $\tau \in \Delta$.
2. Der Durchschnitt $\sigma \cap \sigma'$ zweier Kegel $\sigma, \sigma' \in \Delta$ ist gemeinsame Seite beider Kegel: $\sigma \cap \sigma' \prec \sigma$ und $\sigma \cap \sigma' \prec \sigma'$.

Sind alle Kegel eines Fächers N -Kegel, so heißt er ein *N -Fächer*. □

Wir ordnen jedem N -Fächer Δ auf kanonische Weise eine algebraische Prävarietät X_Δ zu: für $\sigma \in \Delta$ sei X_σ die oben konstruierte zugehörige affine torische Varietät. Für Kegel $\sigma, \sigma' \in \Delta$ erhalten wir mit Lemma 4.4.15 offene Einbettungen $X_{\sigma \cap \sigma'} \subset X_\sigma$ und $X_{\sigma \cap \sigma'} \subset X_{\sigma'}$. Aufgrund der Funktorialität der Zuordnung $\sigma \mapsto X_\sigma$ nach Bemerkung 4.4.17 können wir die X_σ für $\sigma \in \Delta$ zu einer Prävarietät X_Δ verkleben. Hierzu verwenden wir das folgende technische Lemma (Lemma 4.3 in [Kau00], Aufgabe 11.3 in [Kau98], Exercise II.2.12 in [Har77]):

Lemma 4.5.2 (Verheftungslemma). *Wir betrachten eine endliche Familie von Prävarietäten $(X_i)_{i \in I}$. Es gebe für alle $i, j \in I$ offene Untervarietäten $U_{ij} \subset X_i$ sowie Isomorphismen $\varphi_{ji}: U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$, so daß für alle $i, j, k \in I$ gilt:*

$$\begin{aligned} U_{ii} &= X_i & \text{und} & & \varphi_{ii} &= \text{id}_{X_i} \\ \varphi_{ji}(U_{ij} \cap U_{ik}) &= U_{ji} \cap U_{jk} \\ \varphi_{ji} &= \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki}. \end{aligned}$$

Dann existieren eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Prävarietät X sowie offene Einbettungen $\varphi_i: X_i \rightarrow X$ mit

$$X = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(X_i)$$

$$\varphi_i(X_i) \cap \varphi_j(X_j) = \varphi_i(U_{ij}) = \varphi_j(U_{ji}) \text{ für alle } i, j \in I.$$

Weiter gilt die folgende universelle Eigenschaft: ist $(\psi_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen von Prävarietäten mit $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ji}$ auf U_{ij} für alle $i, j \in I$, so existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\psi: X \rightarrow Y$ mit $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$ für alle $i \in I$. \square

Die Prävarietät X_Δ ist nun sogar eine Varietät:

Satz 4.5.3. *Die Prävarietät X_Δ ist eine zusammenhängende normale zweidimensionale algebraische Varietät, die den Torus \mathbb{T}_N als offene dichte Teilmenge enthält.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß X_Δ HAUSDORFFSCH ist. Dies folgt aus Lemma 4.7 in [Kau00].

Weiter liegt der Torus \mathbb{T}_N nach Korollar 4.4.16 offen und dicht in jeder affinen Karte X_σ , also auch in X_Δ . Somit ist mit X_σ auch X_Δ zusammenhängend und zweidimensional. Die Normalität ist also nur noch lokal zu verifizieren und folgt aus Bemerkung 4.4.8. \blacksquare

Definition 4.5.4. Wir nennen X_Δ die *torische Varietät zum Fächer Δ* . \square

Mit Satz 4.5.3 ergibt sich unmittelbar:

Lemma 4.5.5. *Auf X_Δ existiert eine natürliche algebraische \mathbb{T}_N -Wirkung, die einerseits die Multiplikation auf $\mathbb{T}_N \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset X_\Delta$ und andererseits die \mathbb{T}_N -Wirkung auf den affinen Karten X_σ gemäß Lemma 4.4.18 fortsetzt.* \square

Aus Kegelmorphismen konstruieren wir nun *Fächermorphismen*:

Definition 4.5.6. Seien Δ ein N -Fächer und Δ' ein N' -Fächer und $\varphi: N \rightarrow N'$ ein Gittermorphismus, so daß es für jeden Kegel $\sigma \in \Delta$ einen Kegel $\sigma' \in \Delta'$ gibt, für den φ einen Kegelmorphismus $\varphi: (N, \sigma) \rightarrow (N', \sigma')$ induziert. Dann schreiben wir $\varphi: (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ und nennen φ einen *Fächermorphismus*. \square

Satz 4.5.7. Jeder Fächermorphismus $\varphi: (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ induziert eindeutig einen Morphismus von torischen Varietäten

$$X(\varphi): X_\Delta \longrightarrow X_{\Delta'}.$$

Beweis. Sei zunächst $\Delta = \{\sigma\}$ ein Fächer mit nur einem Kegel. Wir zeigen, daß zu einem Kegel $\sigma' \in \Delta'$ mit $\varphi(\sigma) \subset \sigma'$ ein Morphismus

$$\varphi_*: X_\Delta = X_\sigma \longrightarrow X_{\sigma'} \subset X_{\Delta'}$$

gehört, der von der Wahl von σ' unabhängig ist: dann ist $\varphi_*: X_\sigma \rightarrow X_{\Delta'}$ wohldefiniert. Gilt nämlich auch $\varphi(\sigma) \subset \tau' \in \Delta'$, so ist nach Definition eines Fächers $\sigma' \cap \tau' \in \Delta'$; sei also ohne Einschränkung $\tau' \prec \sigma'$ mit der Inklusionsabbildung j . Wegen der Funktorialität des induzierten Kegelmorphismus φ_* (Äquivalenzsatz 4.3.9 und Antiäquivalenzsatz 4.4.20) können wir den Morphismus $\varphi_*: X_\sigma \rightarrow X_{\sigma'} \subset X_{\Delta'}$ eindeutig wie folgt faktorisieren:

$$X_\sigma \xrightarrow{\varphi_*} X_{\tau'} \xrightarrow{j_*} X_{\sigma'} \subset X_{\Delta'}.$$

Sind nun weiter $\sigma, \tau \in \Delta$ mit $\varphi(\sigma) \cup \varphi(\tau) \subset \sigma' \in \Delta'$, so ist für das Verheftungslemma 4.5.2 die Verträglichkeit der beiden möglichen Definitionen von φ_* auf dem Schnitt $X_\sigma \cap X_\tau = X_{\sigma \cap \tau}$ zu zeigen. Hierzu sei wie oben ohne Einschränkung $\tau \prec \sigma$, also X_τ Hauptmenge in X_σ . Die Übereinstimmung folgt nun wieder aus der Funktorialität für Kegel gemäß Satz 4.4.20. Schließlich garantiert die universelle Eigenschaft der Verklebung nach dem Verheftungslemma 4.5.2 die (eindeutige) Existenz des globalen Morphismus $X(\varphi)$. \blacksquare

Bemerkung 4.5.8. Ist $\varphi: (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ ein Fächermorphismus, so existiert wie in Bemerkung 4.4.19 wieder ein begleitender Homomorphismus $\varphi_0: \mathbb{T}_N \rightarrow \mathbb{T}_{N'}$, bezüglich dessen $X(\varphi)$ äquivariant ist. \square

Definition 4.5.9. Ein Fächer Δ heißt *regulär*, wenn jeder Kegel $\sigma \in \Delta$ regulär ist. \square

Satz 4.5.10. Ist Δ ein regulärer Fächer, so ist X_Δ glatt.

Beweis. Nach Satz 4.4.10 sind alle affinen Karten X_σ für $\sigma \in \Delta$ glatt, und wir verkleben die X_σ über (offene) Hauptmengen. \blacksquare

5 Singuläre Fasern vom Typ mI_b

Wir verwenden nun die in Kapitel 4 eingeführten Techniken, um \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen nahe einer kritischen Faser vom Typ mI_b für $b \geq 1$ zu untersuchen.

Zunächst konstruieren wir in Abschnitt 5.1 ein lokales Modell für eine Faser vom Typ $1I_b$. In Abschnitt 5.2 klassifizieren wir mit diesem Modell \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen mit globalen Schnitten bis auf äquivalente Isomorphie. Insbesondere erhalten wir, daß jede \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung nahe einer Faser vom Typ $1I_b$ tatsächlich äquivalent isomorph zum lokalen Modell gemäß Abschnitt 5.1 ist. In Abschnitt 5.3 konstruieren wir schließlich ein lokales Modell mit einer Faser vom Typ mI_b für $m \geq 1$.

Zunächst halten wir fest:

Satz 5.0.1. *Sei $(X; \gamma; p; Y)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung. Dann treten kritische Fasern vom Typ mI_b mit $b \geq 1$ genau über den Nullstellen der Isotropiefunktion auf.*

Beweis. Sei g die Isotropiefunktion von $(X; \gamma; p; Y)$. Sei weiter X_{y_0} eine kritische Faser. Ist $g(y_0) = 0$, so ist X_{y_0} nach Satz 3.2.4 nicht vom Typ mI_0 . Also ist X_{y_0} nach Satz 2.2.5 vom Typ mI_b mit $b \geq 1$.

Sei umgekehrt X_{y_0} vom Typ mI_b mit $b \geq 1$. Wir nehmen an, daß $g(y_0) \neq 0$. Dann wirkt $g(y_0) \in D^*$ nach Lemma 3.2.5 trivial auf X_{y_0} . Somit ist X_{y_0} nach den Sätzen 1.2.8, 1.2.10 und 2.2.5 vom Typ mI_0 , ein Widerspruch. ■

5.1 Ein lokales Modell einer Faser vom Typ $1I_b$

Zunächst konstruieren wir ein lokales Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung mit einer singulären Faser vom Typ $1I_b$ (oder kurz I_b) mit $b \geq 1$, also einem einfachen Zykel von b rationalen Kurven. Hierbei folgen wir der Darstellung in [GH98].

Konstruktion 5.1.1. Sei $f: D \rightarrow D$ holomorph mit $f(z) = z^b \tilde{f}(z)$ für ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}^*(D)$.

Bezeichne $u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Seien weiter Δ_n für $n \in \mathbb{N}$ der von $u_{-n}, u_{-n+1}, \dots, u_n$ erzeugte maximale Fächer und Z_n die torische Varietät zu Δ_n . Auf Z_n definieren wir wie folgt eine \mathbb{C}^* -Wirkung γ_n : sei

$$\gamma_n(t, x) := (1, t) \cdot x,$$

wobei wir $(1, t)$ als Element des Wirkungstorus $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2} = (\mathbb{C}^*)^2$ auffassen. Die Projektion $\text{pr}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf die erste Komponente bestimmt \mathbb{C}^* -invariante torische Morphismen

Satz 5.1.3. Das Tupel $({}_{1,b}X_f; {}_{1,b}\gamma_f; {}_{1,b}p_f; D)$ ist eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Isotropiefunktion von $({}_{1,b}X_f; {}_{1,b}\gamma_f; {}_{1,b}p_f; D)$ ist f .
2. Die Abbildung ${}_{1,b}p_f$ besitzt genau in 0 einen kritischen Wert.
3. Die Faser ${}_{1,b}p_f^{-1}(0)$ ist vom Typ ${}_{1I_b}$.

Überdies existiert ein Schnitt ${}_{1,b}\vartheta_f: D \rightarrow {}_{1,b}X_f \setminus {}_{1,b}X_f^{\mathbb{C}^*}$ für ${}_{1,b}p_f$. Auf D^* gilt

$${}_{1,b}\vartheta_f(z) = \pi_{\mathbb{Z}}(z, 1) \in \pi_{\mathbb{Z}}(Z' \cap \mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}).$$

Definition 5.1.4. Wir nennen das Tupel $({}_{1,b}X_f; {}_{1,b}\gamma_f; {}_{1,b}p_f; D)$ das lokale Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung vom Typ ${}_{1I_b}$ zur Isotropiefunktion f . \square

Beweis von Satz 5.1.3. Wie wir in Lemma 5.1.8 zeigen, ist die Quotientenabbildung $\pi_{\mathbb{Z}}$ eine Submersion und ${}_{1,b}X_f$ glatt.

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{Z}}} & {}_{1,b}X_f \\ & \searrow p & \downarrow {}_{1,b}p_f \\ & & D \end{array}$$

Nach Lemma 1.1.21 ist somit ${}_{1,b}p_f$ holomorph.

Wiederum nach Lemma 5.1.8 ist die \mathbb{C}^* -Wirkung ${}_{1,b}\gamma_f$ holomorph. Weiter sind $\pi_{\mathbb{Z}}$ äquivariant und ${}_{1,b}p_f$ invariant.

Nach Lemma 5.1.9 gilt für die Isotropiegruppe G_z der Faser ${}_{1,b}p_f^{-1}(z)$ für $z \in D^*$:

$$G_z = \langle f(z) \rangle.$$

Da nach Lemma 5.1.10 die Abbildung ${}_{1,b}p_f$ genau in 0 einen kritischen Wert besitzt, ist $({}_{1,b}X_f; {}_{1,b}\gamma_f; {}_{1,b}p_f; D)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion f .

Nach Lemma 5.1.11 existiert ein holomorpher Schnitt ${}_{1,b}\vartheta_f: D \rightarrow {}_{1,b}X_f^{\sharp} = {}_{1,b}X_f \setminus {}_{1,b}X_f^{\mathbb{C}^*}$ für ${}_{1,b}p_f$ mit ${}_{1,b}\vartheta_f(z) = \pi_{\mathbb{Z}}(z, 1)$ auf D^* . Das Bild ${}_{1,b}\vartheta_f(D)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von ${}_{1,b}X_f$, die ${}_{1,b}p_f^{-1}(0)$ transversal schneidet. Somit ist ${}_{1,b}\vartheta_f$ nach Satz 1.2.12 ein Biholomorphismus zwischen D und ${}_{1,b}\vartheta_f(D)$. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow[\cong]{ {}_{1,b}\vartheta_f } & {}_{1,b}\vartheta_f(D) \\ \parallel & & \downarrow {}_{1,b}p_f \\ D & \xlongequal{\quad} & D \end{array}$$

Somit ist ${}_{1,b}p_f^{-1}(0)$ eine einfache Faser.

Nach Lemma 5.1.7 gilt $\ell \star C_i = C_{i+\ell b}$ für $p^{-1}(0) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} C_i$. Somit ist schließlich ${}_{1,b}p_f^{-1}(0)$ ein Zykel von b rationalen Kurven. Also ist ${}_{1,b}p_f^{-1}(0)$ vom Typ ${}_{1I_b}$. \blacksquare

Im Beweis des obigen Satzes greifen wir auf einige technische Lemmata zurück, die wir im folgenden beweisen. Zunächst untersuchen wir die Struktur der Flächen Z_n .

Lemma 5.1.5. *Die Fläche Z_n ist regulär.*

Beweis. Es gilt

$$\det(u_i, u_{i+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & i+1 \end{pmatrix} = 1.$$

Somit ist Δ_n ein regulärer Fächer, und die Regularität von Z_n folgt aus Satz 4.5.10. ■

Lemma 5.1.6. *Es gilt $p_n^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$. Auf der dichten offenen Bahn $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2} = (\mathbb{C}^*)^2 \subset Z_n$ ist p_n von der Form $p_n(z, w) = z$.*

Weiter ist $p_n^{-1}(0)$ eine Kette von $2n-1$ rationalen Kurven C_i . Die C_i sind Abschlüsse von \mathbb{C}^ -Bahnen. Dabei besteht $C_i \cap C_{i+1}$ aus einem Fixpunkt der $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ -Wirkung, und für $k \geq 2$ ist $C_i \cap C_{i+k} = \emptyset$.*

Beweis. Die Projektion pr_1 bildet den Nullkegel $\mathfrak{o}_2 \subset \mathbb{Z}^2$ auf den Nullkegel $\mathfrak{o}_1 \subset \mathbb{Z}$ ab. Somit bildet der torische Morphismus p_n genau die offene Bahn $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ auf die offene Bahn $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{C}^*$ ab.

Weiter ist die Projektion $\text{pr}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf die erste Komponente beschrieben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Nun folgt aus den Bemerkungen 5.3.5 und 5.3.1 in [Hau99], daß p_n auf $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ von der Form $p_n(z, w) = z^1 w^0 = z$ ist.

Die zweidimensionalen Kegel $\sigma_i := \text{keg}(u_{i-1}, u_i)$ in Δ_n entsprechen nach Korollar 7.6 in [Kau00] nulldimensionalen $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ -Bahnen \mathbb{B}_{σ_i} in Z_n , also Fixpunkten der $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ -Wirkung. Die Strahlen $\mathbb{R}_{\geq 0} u_i$ entsprechen ebenso eindimensionalen $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ -Bahnen $\mathbb{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0} u_i}$. Aufgrund unserer Wahl der \mathbb{C}^* -Wirkungen γ_n sind die $\mathbb{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0} u_i}$ sogar \mathbb{C}^* -Bahnen. Nach Satz 7.7 in [Kau00] gilt für die Abschlüsse der \mathbb{C}^* -Bahnen $\mathbb{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0} u_i}$:

$$C_i := \overline{\mathbb{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0} u_i}} = \bigcup_{\tau \succ \text{keg}(u_i)} \mathbb{B}_{\tau} = \mathbb{B}_{\sigma_i} \cup \mathbb{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0} u_i} \cup \mathbb{B}_{\sigma_{i+1}}.$$

Nach Beispiel 7.15 in [Kau00] folgt aber aus der Existenz zweier $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ -Fixpunkte \mathbb{B}_{σ_i} und $\mathbb{B}_{\sigma_{i+1}}$ in C_i , daß $C_i \cong \mathbb{P}^1$. Es gilt

$$C_i \cap C_{i+1} = \mathbb{B}_{\sigma_{i+1}} \quad \text{und} \quad C_i \cap C_{i+k} = \emptyset \quad \text{für } k \geq 2. \quad \blacksquare$$

Lemma 5.1.7. *Die Faser $p^{-1}(0)$ ist eine Kette von rationalen Kurven: $p^{-1}(0) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} C_i$. Dabei besteht $C_i \cap C_{i+1}$ aus einem Fixpunkt von γ , und es gilt $C_i \cap C_{i+k} = \emptyset$ für $k \geq 2$. Es gilt $\ell \star C_i = C_{i+\ell b}$.*

Beweis. Die Struktur der Faser $p^{-1}(0)$ folgt durch Übergang zum direkten Limes aus Lemma 5.1.6.

Die Kurve C_i gehört zum Strahl $\mathbb{R}_{\geq 0}u_i$. Aufgrund von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^\ell u_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = u_{i+\ell b}$$

ist $h_b^\ell(C_i) = C_{i+\ell b}$. Da aber jede Kurve C_i der Abschluß einer \mathbb{C}^* -Bahn ist, gilt $\ell \star C_i = C_{i+\ell b}$. ■

Nach diesen Vorarbeiten kommen wir zu den Lemmata, in die wir den eigentlichen Beweis von Satz 5.1.3 gegliedert haben:

Lemma 5.1.8. *Der Quotient ${}_{1,b}X_f$ ist glatt, und die Quotientenabbildung $\pi_{\mathbb{Z}}: Z' \rightarrow {}_{1,b}X_f$ ist eine Submersion.*

Die \mathbb{C}^ -Wirkung ${}_{1,b}\gamma_f$ ist holomorph. Bezüglich γ und ${}_{1,b}\gamma_f$ ist $\pi_{\mathbb{Z}}$ äquivariant und ${}_{1,b}p_f$ invariant.*

Beweis. Nach Lemma 5.1.5 sind zunächst die Flächen Z_n glatt, somit also auch der induktive Limes $Z = \varinjlim Z_n$ und dessen offene Teilmenge Z' .

Wir zeigen, daß die \mathbb{Z} -Wirkung (5.1) frei und eigentlich diskontinuierlich ist.

Auf $p^{-1}(0) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} C_i$ gilt $\ell \star C_i = C_{i+\ell b}$ nach Lemma 5.1.7. Also ist $\ell \star x \neq x$ für $\ell \neq 0$ und $x \in p^{-1}(0)$. Somit ist die \mathbb{Z} -Wirkung auf $p^{-1}(0)$ frei.

Auf $p^{-1}(D^*) = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2} \cap Z' = D^* \times \mathbb{C}^*$ ist die \mathbb{Z} -Wirkung nach den Bemerkungen 5.3.5 und 5.3.1 in [Hau99] von der Form

$$\begin{aligned} \ell \star (z, w) &= (\tilde{f} \circ p(z, w))^\ell \cdot h_b^\ell(z, w) \\ &= (1, \tilde{f}(z)^\ell) \cdot (z, z^{\ell b} w) \\ &= (z, \tilde{f}(z)^\ell z^{\ell b} w) \\ &= (z, f(z)^\ell w). \end{aligned}$$

Da $0 < |f(z)| < 1$, gilt

$$|f(z)^\ell w| \begin{cases} < |w|, & \ell > 0 \\ > |w|, & \ell < 0. \end{cases}$$

Somit ist $\ell \star (z, w) \neq (z, w)$ für $\ell \neq 0$. Also ist die \mathbb{Z} -Wirkung auch auf $p^{-1}(D^*)$ frei.

Nun zeigen wir, daß die \mathbb{Z} -Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist. Sei zunächst $K_0 \subset p^{-1}(0)$ ein Kompaktum. Dann existiert ein $\ell_0 > 0$, so daß

$$K_0 \subset \bigcup_{|i| < \ell_0} C_i.$$

Nach Lemma 5.1.7 gilt $\ell \star K_0 \cap K_0 = \emptyset$ für $|\ell| > 2\ell_0$.

Weiter ist jedes Kompaktum $K \subset Z'$ von der Form $K = K_0 \cup K_{D^*}$, wobei K_0 ein Kompaktum in $p^{-1}(0)$ ist und es ein Kompaktum $L \subset D \times \mathbb{C}^* \subset Z'$ gibt, so daß gilt:

$$K_{D^*} = L \cap (D^* \times \mathbb{C}^*).$$

Wir fahren nun auf eine ähnliche Art und Weise wie in Lemma 2.3.5 fort. Ohne Einschränkung sei $\{0\} \subsetneq \text{pr}_1(L)$. Da $f: D \rightarrow D$ stetig und L kompakt ist, gilt

$$0 < C := \max_{z \in \text{pr}_1(L)} |f(z)| < 1.$$

Weiter existieren Radien $R > r > 0$ mit

$$\text{pr}_2(L) \subset \{w \in \mathbb{C}^* \mid r < |w| < R\}.$$

Für $(z, w) \in K_{D^*}$ gilt nun

$$|\text{pr}_2(\ell \star (z, w))| = |\text{pr}_2(z, f(z)^\ell w)| = |f(z)|^\ell |w|.$$

Nun existieren nur von C , R und r abhängige ganze Zahlen $\ell_1 > 0$ und $\ell_2 < 0$ mit

$$|\text{pr}_2(\ell \star (z, w))| = |f(z)|^\ell |w| < C^\ell R < r \text{ für } \ell > \ell_1$$

und

$$|\text{pr}_2(\ell \star (z, w))| = \left| \frac{1}{f(z)} \right|^{-\ell} |w| > \left(\frac{1}{C} \right)^{-\ell} r > R \text{ für } \ell < \ell_2.$$

Wir fassen zusammen: für ein Kompaktum $K \subset Z'$ gilt $\ell \star K \cap K \neq \emptyset$ höchstens für $\min(-2\ell_0, \ell_2) \leq \ell \leq \max(2\ell_0, \ell_1)$, also für höchstens endlich viele ℓ . Somit ist die \mathbb{Z} -Wirkung eigentlich diskontinuierlich.

Der Quotient ${}_{1,b}X_f = Z'/\mathbb{Z}$ ist nach Satz 1.1.19 glatt. Nach Korollar 1.1.20 induziert γ eine holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung auf ${}_{1,b}X_f$, die aufgrund der Eindeutigkeit mit ${}_{1,b}\gamma_f$ übereinstimmt. Die Quotientenabbildung $\pi_{\mathbb{Z}}$ ist äquivariant. Da aber p invariant ist, ist auch ${}_{1,b}p_f$ invariant. ■

Lemma 5.1.9. Für $z \in D^*$ ist ${}_{1,b}p_f^{-1}(z)$ eine elliptische Kurve mit der Isotropiegruppe $G_z = \langle f(z) \rangle$.

Beweis. Für $z \in D^*$ ist

$${}_{1,b}p_f^{-1}(z) = \pi_{\mathbb{Z}}(p^{-1}(z)) = \pi_{\mathbb{Z}}(\{z\} \times \mathbb{C}^*)$$

zusammenhängend und als Faser eines regulären Wertes von ${}_{1,b}p_f$ eine glatte komplexe Kurve. Auf $p^{-1}(z)$ wirkt \mathbb{Z} nach den Ausführungen in Lemma 5.1.8 wie folgt:

$$\ell \star (z, w) = (z, f(z)^\ell w).$$

Da weiter $\pi_{\mathbb{Z}}$ äquivariant ist, wirkt \mathbb{C}^* auf ${}_{1,b}p_f^{-1}(z)$ folgendermaßen:

$$t \cdot \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) = \pi_{\mathbb{Z}}(\gamma(t, (z, w))) = \pi_{\mathbb{Z}}((1, t) \cdot (z, w)) = \pi_{\mathbb{Z}}(z, tw).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} t \cdot \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) &= \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) \\ \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}: (z, tw) &= \ell \star (z, w) = (z, f(z)^\ell w) \\ \iff t &\in \langle f(z) \rangle. \end{aligned}$$

Also ist die Faser ${}_{1,b}p_f^{-1}(z)$ nach den Sätzen 1.2.8 und 1.2.10 eine elliptische Kurve, deren Isotropiegruppe von $f(z)$ erzeugt wird. ■

Lemma 5.1.10. *Die Menge der kritischen Werte von ${}_{1,b}p_f$ ist genau $\{0\} \subset D$.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.1.6 folgt aus der Submersivität von $\pi_{\mathbb{Z}}$, daß die kritischen Stellen von ${}_{1,b}p_f$ genau diejenigen von p sind.

Auf $p^{-1}(D^*) \cong Z' \cap \mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}$ ist aber p von der Form $p(z, w) = z$, also regulär.

Wäre nun $0 \in D$ regulär, so wäre die Faser $p^{-1}(0)$ insbesondere glatt. Nach Lemma 5.1.7 ist $p^{-1}(0)$ aber singulär. ■

Lemma 5.1.11. *Es gibt einen holomorphen Schnitt*

$${}_{1,b}\vartheta_f: D \rightarrow {}_{1,b}X_f^\sharp = {}_{1,b}X_f \setminus {}_{1,b}X_f^{\mathbb{C}^*}$$

für ${}_{1,b}p_f$. Auf D^* gilt ${}_{1,b}\vartheta_f(z) = \pi_{\mathbb{Z}}(z, 1)$.

Beweis. Wir betrachten den Fächer, der durch den einzigen Vektor u_0 erzeugt wird. Die Einbettung in die erste Komponente $\iota_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Sie liefert Fächermorphismen $\{\mathbb{R}_{\geq 0} u_0\} \rightarrow \Delta_n$, also torische Schnitte $\mathbb{C} \rightarrow Z_n$ für p_n . Schließlich erhalten wir einen holomorphen Schnitt $\vartheta_{Z'}: D \rightarrow Z$ für $p|_{Z'}$.

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{Z}}} & {}_{1,b}X_f \\ & \searrow p & \swarrow {}_{1,b}p_f \\ & & D \end{array}$$

$\vartheta_{Z'}$ (dotted arrow from Z' to D)

Wir setzen ${}_{1,b}\vartheta_f := \pi_{\mathbb{Z}} \circ \vartheta_{Z'}$.

Es gilt

$${}_{1,b}\vartheta_f(D) \cap {}_{1,b}X_f^{\mathbb{C}^*} = \emptyset,$$

und auf D^* ist $\vartheta_{Z'}$ aufgrund der obigen Matrixdarstellung nach den Bemerkungen 5.3.5 und 5.3.1 in [Hau99] von der Form $\vartheta_{Z'} = (z^1, z^0) = (z, 1)$. ■

5.2 Isomorphie zum lokalen Modell im Falle $m = 1$

Nach dem folgenden Resultat aus [GH98] werden \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen mit einem globalen Schnitt im wesentlichen durch ihre Isotropiefunktion bestimmt:

Satz 5.2.1. Sei Y eine RIEMANNsche Fläche und $f: Y \rightarrow D$ holomorph. Dann existiert eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung $(X_f; \gamma_f; p_f; Y)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. die Isotropiefunktion von $(X_f; \gamma_f; p_f; Y)$ ist f ;
2. es gibt einen globalen Schnitt $\vartheta_f: Y \rightarrow X_f^\sharp = X_f \setminus X_f^{\mathbb{C}^*}$ für p_f .

Die \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung $(X_f; \gamma_f; p_f; Y)$ ist durch diese Eigenschaften bis auf äquivariante Isomorphie über Y eindeutig bestimmt. Weiter ist jede kritische Faser von p_f vom Typ ${}_1I_b$, wobei $0 < b = \text{ord}_y f$ die Nullstellenordnung von f in $y \in Y$ bezeichnet.

Nahe einer einfachen kritischen Faser, die dann nach Satz 2.2.5 vom Typ ${}_1I_b$ ist, existiert ein lokaler Schnitt (Seite 580 und Theorem 9.1 in [Kod63a]). Wir erhalten mit der Eindeutigkeitsaussage in Satz 5.2.1 die folgende lokale Beschreibung von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen nahe einer Faser vom Typ ${}_1I_b$:

Korollar 5.2.2. Sei das Tupel $(X; \gamma; p; Y)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion f . Sei die Faser X_{y_0} für $y_0 \in Y$ vom Typ ${}_1I_b$.

Dann existiert eine Einbettung $\delta: D \rightarrow Y$, mit der folgenden Eigenschaft für das lokale Modell $({}_{1,b}X_{f \circ \delta}; {}_{1,b}\gamma_{f \circ \delta}; {}_{1,b}p_{f \circ \delta}; D)$ vom Typ ${}_1I_b$ zur Isotropiefunktion $f \circ \delta$: es gibt eine äquivariante Biholomorphie

$$\kappa: {}_{1,b}X_{f \circ \delta} \longrightarrow p^{-1}(\delta(D)),$$

so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} {}_{1,b}X_{f \circ \delta} & \xrightarrow[\cong]{\kappa} & p^{-1}(\delta(D)) \subset X \\ {}_{1,b}p_{f \circ \delta} \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \delta(D) \subset Y \end{array}$$

□

Für den Beweis von Satz 5.2.1 verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 5.2.3. Die \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung $(X; \gamma; p; Y)$ besitze einen Schnitt $\vartheta: Y \rightarrow X^\sharp = X \setminus X^{\mathbb{C}^*}$ für p . Weiter sei $\Phi: Y \times \mathbb{C}^* \rightarrow X^\sharp$ wie in Lemma 2.3.4 definiert:

$$\Phi: Y \times \mathbb{C}^* \longrightarrow X^\sharp, \quad (y, t) \longmapsto t \cdot \vartheta(y).$$

Dann besitzt die Untermannigfaltigkeit $A := \Phi^{-1}(\vartheta(Y))$ von $Y \times \mathbb{C}^*$ die Zusammenhangskomponenten $A_0 := Y \times \{1\}$ und $A_\ell := \{(y, f(y)^\ell) \mid y \in Y_{\text{reg}}\}$ für $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Beweis. Aufgrund der Regularität von Φ gemäß Lemma 2.3.4 ist A eine Untermannigfaltigkeit. Die A_ℓ für $\ell \in \mathbb{Z}$ sind zusammenhängend sowie offen und abgeschlossen in A , also Zusammenhangskomponenten von A .

Nehmen wir nun an, es gebe ein Element

$$(y, z) \in A \setminus \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} A_\ell.$$

Sei A' die Zusammenhangskomponente von A , die (y, z) enthält. Würde $\text{pr}_1(A')$ die Menge Y_{reg} treffen, etwa in y' , so wäre nach Satz 2.3.1 die Isotropiegruppe der zugehörigen Faser $G_{y'} = \langle f(y') \rangle$, und A' würde „über y' “ ein A_ℓ schneiden. Somit ist $\text{pr}_1(A')$ in der (diskreten) Nullstellenmenge von f enthalten und $A' = \{y\} \times \mathbb{C}^*$, im Widerspruch zur lokalen Biholomorphie von Φ . ■

Wir setzen $Y_{\text{reg}} := Y \setminus N(f)$. Existiert ein Schnitt für p , so sind alle Fasern von p einfach. Nach Satz 5.0.1 besteht also Y_{reg} in diesem Falle genau aus den regulären Werten von p .

Beweis von Satz 5.2.1. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: seien $(X_i; \gamma_i; p_i; Y)$ für $i = 1, 2$ zwei \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen über Y mit der gleichen Isotropiefunktion f und Schnitten $\vartheta_i: Y \rightarrow X_i^\sharp$ für p_i . Wir betrachten die Abbildungen

$$\Phi_i: Y \times \mathbb{C}^* \longrightarrow X_i^\sharp, \quad (y, z) \longmapsto z \cdot \vartheta_i(y)$$

und zeigen, daß Φ_1 und Φ_2 die gleiche Äquivalenzrelation auf $Y \times \mathbb{C}^*$ erzeugen. Hierzu betrachten wir die Untermannigfaltigkeiten $A^i := \Phi_i^{-1}(\vartheta_i(Y))$ von $Y \times \mathbb{C}^*$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \Phi_i(y, z) = \Phi_i(y, z') \\ \iff & z \cdot \vartheta_i(y) = z' \cdot \vartheta_i(y) \\ \iff & (z')^{-1} z \cdot \vartheta_i(y) = \vartheta_i(y) \\ \iff & (y, (z')^{-1} z) \in A^i \cap (\{y\} \times \mathbb{C}^*). \end{aligned}$$

Nach der Charakterisierung von A^i in Lemma 5.2.3 ist aber $A^1 = A^2$. Somit gilt

$$\Phi_1(y, z) = \Phi_1(y, z') \iff \Phi_2(y, z) = \Phi_2(y, z').$$

Wir erhalten also einen fasererhaltenden äquivarianten Isomorphismus

$$\kappa: \Phi_1(Y \times \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} \Phi_2(Y \times \mathbb{C}^*), \quad \Phi_1(y, z) \longmapsto \Phi_2(y, z), \quad (5.2)$$

der $\vartheta_1(Y) = \Phi_1(Y \times \{1\})$ auf $\vartheta_2(Y) = \Phi_2(Y \times \{1\})$ abbildet. Nach Proposition III.8.5 in [BPV84] läßt sich κ zu einem Isomorphismus von X_1 nach X_2 fortsetzen. Dieser ist nach dem Identitätssatz äquivariant.

Wir zeigen nun die Existenz von $(X_f; \gamma_f; p_f; Y)$. Die Gruppe \mathbb{Z} wirkt frei und eigentlich diskontinuierlich auf $Y_{\text{reg}} \times \mathbb{C}^*$ wie folgt:

$$\ell \star (y, z) := (y, f(y)^\ell z).$$

Wir betrachten nun den nach Lemma 2.3.5 glatten Quotientenraum $X_{\text{reg}} := (Y_{\text{reg}} \times \mathbb{C}^*)/\mathbb{Z}$ zusammen mit der nach Korollar 1.1.20 durch $t \cdot (y, z) := (y, tz)$ induzierten holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung γ_{reg} , den durch $y \mapsto \pi_{\text{reg}}(y, 1)$ für die Quotientenabbildung

$$\pi_{\text{reg}}: Y_{\text{reg}} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow (Y_{\text{reg}} \times \mathbb{C}^*)/\mathbb{Z}$$

definierten Schnitt ϑ_{reg} und die von $(y, z) \mapsto y$ vererbten Projektion p_{reg} . Hat f keine Nullstellen, so leistet das Tupel $(X_{\text{reg}}; \gamma_{\text{reg}}; p_{\text{reg}}; Y_{\text{reg}})$ bereits das Gewünschte.

Somit verbleibt noch, die richtigen Fasern über den Nullstellen von f einzuziehen. Die Nullstellen sind diskret; somit können wir sie einzeln behandeln: sei $y_0 \in Y$ eine Nullstelle von f und $\text{ord}_{y_0} f = b$. Wir wählen eine Einbettung $\delta: D \rightarrow Y$ mit $\delta(0) = y_0$, so daß

$$f \circ \delta(z) = z^b \tilde{f}(z)$$

für eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}^*(D)$.

Nun betrachten wir das in Abschnitt 5.1 eingeführte Modell $({}_{1,b}X_{f \circ \delta}; {}_{1,b}\gamma_{f \circ \delta}; {}_{1,b}p_{f \circ \delta}; D)$ vom Typ ${}_1I_b$ zur Isotropiefunktion $f \circ \delta$. Dann existiert nach Satz 5.1.3 ein Schnitt

$${}_{1,b}\vartheta_{f \circ \delta}: D \longrightarrow {}_{1,b}X_{f \circ \delta}.$$

Das Tupel

$$({}_{1,b}X_{f \circ \delta}; {}_{1,b}\gamma_{f \circ \delta}; \delta \circ {}_{1,b}p_{f \circ \delta}; \delta(D))$$

ist eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung über $\delta(D)$ mit der Isotropiefunktion f und dem Schnitt

$${}_{1,b}\vartheta_{f \circ \delta} \circ \delta^{-1}: \delta(D) \longrightarrow {}_{1,b}X_{f \circ \delta}$$

entsprechend dem folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 {}_{1,b}X_{f \circ \delta} & & X \\
 \uparrow \scriptstyle {}_{1,b}p_{f \circ \delta} & \swarrow \scriptstyle {}_{1,b}\vartheta_{f \circ \delta} \circ \delta^{-1} & \uparrow \scriptstyle p \\
 D & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \delta(D) \\
 \downarrow \scriptstyle {}_{1,b}\vartheta_{f \circ \delta} & \searrow \scriptstyle \delta \circ {}_{1,b}p_{f \circ \delta} & \downarrow \scriptstyle \vartheta
 \end{array}$$

Auf $\delta(D^*)$ gilt

$${}_{1,b}\vartheta_{f \circ \delta}(\delta(z)) = \pi_{\mathbb{Z}}(z, 1) = \vartheta_{\text{reg}}(z).$$

Wie oben in (5.2) erhalten wir einen fasererhaltenden Isomorphismus

$${}_{1,b}X_{f \circ \delta} \setminus {}_{1,b}p_{f \circ \delta}^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} p_{\text{reg}}^{-1}(\underbrace{\delta(D) \cap Y_{\text{reg}}}_{=\delta(D) \setminus \{y\}})$$

von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen über $\delta(D) \setminus \{y_0\}$, mittels dessen wir die beiden Faserungen $({}_{1,b}X_{f \circ \delta}; {}_{1,b}\gamma_{f \circ \delta}; \delta \circ {}_{1,b}p_{f \circ \delta}; \delta(D))$ und $(X_{\text{reg}}; \gamma_{\text{reg}}; p_{\text{reg}}; Y_{\text{reg}})$ verkleben und die gewünschte Faser über y_0 erhalten. \blacksquare

5.3 Ein lokales Modell einer Faser vom Typ mI_b

In diesem Abschnitt konstruieren wir eine elliptische Faserung über der Einheitskreisscheibe D , die über D^* regulär ist und über 0 eine Faser vom Typ mI_b mit $m \geq 1$ und $b \geq 1$ besitzt. Dabei gehen wir wie folgt vor: wir betrachten ein lokales Modell vom Typ ${}_1I_{mb}$ gemäß Konstruktion 5.1.1 und dividieren wie in Konstruktion 3.1.1 eine geeignete E_m -Wirkung aus.

Wir erinnern daran, daß wir die Abbildung β_m in Notation 1.2.7 wie folgt eingeführt haben:

$$\beta_m: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^m.$$

Konstruktion 5.3.1. Seien $m \geq 1$ und $f: D \rightarrow D$ holomorph mit $f(z) = z^b \tilde{f}(z)$ für ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}^*(D)$. Wir wählen einen Zweig der m -ten Wurzel aus \tilde{f} und bezeichnen ihn mit $\tilde{f}^{\frac{1}{m}}$. Es gilt

$$f \circ \beta_m(z) = f(z^m) = z^{mb} \tilde{f}(z^m) = z^{mb} \tilde{f} \circ \beta_m(z).$$

Wir konstruieren zunächst entsprechend Konstruktion 5.1.1 ein lokales Modell

$$({}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m}; {}_{1,mb}\gamma_{f \circ \beta_m}; {}_{1,mb}P_{f \circ \beta_m}; D)$$

vom Typ ${}_1I_{mb}$ zur Isotropiefunktion $f \circ \beta_m$.

Aus Konstruktion 5.1.1 übernehmen wir also

- die Fächer Δ_n für $n \in \mathbb{N}$,
- die zugehörigen torischen Varietäten Z_n ,
- den direkten Limes $Z := \varinjlim Z_n$,
- die holomorphe \mathbb{C}^* -Wirkung γ auf Z ,
- die holomorphe Abbildung $p: Z \rightarrow \mathbb{C}$
- und die folgende \mathbb{Z} -Wirkung auf $Z' = p^{-1}(D)$:

$$\begin{aligned} \ell \star x &:= (1, \tilde{f} \circ \beta_m \circ p(x))^\ell \cdot h_{mb}^\ell(x) \\ &= \tilde{f}(p(x)^m)^\ell \cdot h_{mb}^\ell(x) \\ &= \gamma\left(\tilde{f}(p(x)^m)^\ell, h_{mb}^\ell(x)\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Entsprechend Konstruktion 5.1.1 ist ${}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} = Z'/\mathbb{Z}$.

Wir setzen

$$\zeta_0 := e^{\frac{2\pi i}{m}} \quad \text{sowie} \quad \eta_0 := e^{-\frac{\pi i(m-1)b}{m}}.$$

Die Urbilder $p_n^{-1}(D)$ sind invariant unter der Wirkung der Untergruppe $E_m \times \mathbb{C}^*$ des Wirkungstorus. Somit erhalten wir eine holomorphe $(E_m \times \mathbb{C}^*)$ -Wirkung auf $Z' = p^{-1}(D)$, und die folgende Abbildung ist wohldefiniert:

$$g: Z' \longrightarrow Z', \quad x \longmapsto \left(\zeta_0, \tilde{f}_m^{-1}(p(x)^m) \eta_0 \right) \cdot h_b(x).$$

Weiter liefert g eine Abbildung

$$\bar{g}: {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} \longrightarrow {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m}$$

mit $\bar{g}^m = \text{id}$. Wir definieren eine E_m -Wirkung auf ${}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m}$ wie folgt: für $\zeta_0 = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ sei

$$\zeta_0 \star x := \bar{g}(x). \quad (5.4)$$

Sei ${}_{m,b}X_f := {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} / E_m$. Weiter setzen wir

$${}_{m,b}p_f: {}_{m,b}X_f \longrightarrow D, \quad \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(x) \longmapsto \beta_m \circ {}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(x) = \beta_m \circ p(x).$$

Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm zunächst auf der mengentheoretischen Ebene:

$$\begin{array}{ccccc} Z \supset p^{-1}(D) = Z' & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{Z}}} & {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} & \xrightarrow{\pi_{E_m}} & {}_{m,b}X_f \\ & \searrow p & \downarrow {}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m} & & \downarrow {}_{m,b}p_f \\ & & D & \xrightarrow[\substack{\beta_m \\ z \mapsto z^m}]{} & D \end{array}$$

Schließlich definieren wir die folgende \mathbb{C}^* -Wirkung ${}_{m,b}\gamma_f$ auf ${}_{m,b}X_f$:

$$\begin{aligned} {}_{m,b}\gamma_f: \quad \mathbb{C}^* \times {}_{m,b}X_f &\longrightarrow {}_{m,b}X_f, \\ (t, \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(x)) &\longmapsto \pi_{E_m} \circ {}_{1,mb}\gamma_{f \circ \beta_m}(t, \pi_{\mathbb{Z}}(x)) \\ &= \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}} \circ \gamma(t, x). \end{aligned}$$

□

Satz 5.3.2. *Konstruktion 5.3.1 ist wohldefiniert.*

Beweis. Die Existenz einer m -ten Wurzel aus \tilde{f} zeigen wir in Lemma 5.3.3.

Weiter beschreibt die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ rb & 1 \end{pmatrix}$ für $r \in \mathbb{Z}$ Fächermorphismen $\Delta_n \rightarrow \Delta_{n+rb}$, also torische Morphismen $Z_n \rightarrow Z_{n+rb}$ und schließlich eine holomorphe Abbildung $h_{rb}: Z \rightarrow Z$.

Aufgrund von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ rb & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ sb & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (r+s)b & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $h_{rb+sb} = h_{rb} \circ h_{sb}$.

Nach Lemma 5.3.4 definiert g eine Abbildung $\bar{g}: {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} \rightarrow {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m}$. Aufgrund von Lemma 5.3.6 gilt $\bar{g}^m = \text{id}$. Wegen $g^k \circ g^l = g^{k+l}$ und $g^0 = \text{id}$ ist die komplexe E_m -Wirkung (5.4) somit wohldefiniert. ■

Lemma 5.3.3. *Ist $\tilde{f}: D \rightarrow D^*$ holomorph, so existiert eine holomorphe m -te Wurzel aus \tilde{f} .*

Beweis. Da D einfach zusammenhängend und \tilde{f} nullstellenfrei ist, folgt die Existenz einer holomorphen m -ten Wurzel aus dem Existenzsatz für holomorphe Wurzeln (Seite 219 in [Rem95]). ■

Lemma 5.3.4. *Es gilt $g \circ h_{mb} = h_{mb} \circ g$.*

Beweis. Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned} g \circ h_{mb}(x) &= \left(\zeta_0, \tilde{f}^{\frac{1}{m}} \left(\underbrace{p \circ h_{mb}(x)}_{=p(x)^m} \right) \eta_0 \right) \cdot h_b \circ h_{mb}(x) \\ &= \left(\zeta_0, \tilde{f}^{\frac{1}{m}} (p(x)^m) \eta_0 \right) \cdot h_{(m+1)b}(x) \\ &= h_{mb} \left(\left(\zeta_0, \tilde{f}^{\frac{1}{m}} (p(x)^m) \eta_0 \right) \cdot h_b(x) \right) \\ &= h_{mb} \circ g(x) \end{aligned}$$

■

Lemma 5.3.5. *Es gilt*

$$\eta_0^m = e^{-\pi i(m-1)b} = \zeta_0^{-\frac{m(m-1)b}{2}}.$$

□

Lemma 5.3.6. *Es gilt $g^m(x) = 1 \star x$.*

Beweis. Auf der in Z' dichten Teilmenge $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2} \cap Z'$ gilt

$$g(z, w) = \left(\zeta_0 z, \tilde{f}^{\frac{1}{m}}(z^m) \eta_0 z^b w \right)$$

und

$$1 \star (z, w) = (z, \tilde{f}(z^m) z^{mb} w) = (z, f(z^m) w).$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} g^m(z, w) &= \left(\zeta_0^m z, \left(\tilde{f}^{\frac{1}{m}}(z^m) \right)^m \eta_0^m \zeta_0^{b(1+\dots+m-1)} z^{mb} w \right) \text{ mit Induktion nach } m \\ &= (z, \tilde{f}(z^m) \zeta_0^{-\frac{m(m-1)b}{2}} \zeta_0^{\frac{m(m-1)b}{2}} z^{mb} w) \text{ nach Lemma 5.3.5} \\ &= (z, \tilde{f}(z^m) z^{mb} w) \\ &= (z, f(z^m) w) \\ &= 1 \star (z, w) \end{aligned}$$

■

Satz 5.3.7. Das Tupel $({}_{m,b}X_f; {}_{m,b}\gamma_f; {}_{m,b}p_f; D)$ ist eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Isotropiefunktion von $({}_{m,b}X_f; {}_{m,b}\gamma_f; {}_{m,b}p_f; D)$ ist f .
2. Die Abbildung ${}_{m,b}p_f$ besitzt genau in 0 einen kritischen Wert.
3. Die Faser ${}_{m,b}p_f^{-1}(0)$ ist vom Typ mI_b .

Definition 5.3.8. Wir nennen das Tupel $({}_{m,b}X_f; {}_{m,b}\gamma_f; {}_{m,b}p_f; D)$ das lokale Modell einer \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserung vom Typ mI_b zur Isotropiefunktion f . \square

Beweis von Satz 5.3.7. Wir bezeichnen die Quotientenabbildung mit

$$\pi_{E_m} : {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} \longrightarrow {}_{m,b}X_f.$$

Nach Lemma 5.3.11 ist ${}_{m,b}X_f$ glatt und die Quotientenabbildung π_{E_m} eine Submersion. Somit ist nach Lemma 1.1.21 auch ${}_{m,b}p_f$ holomorph. Wieder nach Lemma 5.3.11 ist die \mathbb{C}^* -Wirkung ${}_{m,b}\gamma_f$ auf ${}_{m,b}X_f$ holomorph. Weiter ist π_{E_m} äquivariant und ${}_{m,b}p_f$ invariant.

Wir bestimmen die singulären Werte von ${}_{m,b}p_f$: da π_{E_m} nach Lemma 5.3.11 eine Submersion ist, sind analog zu Lemma 3.1.6 die kritischen Werte von ${}_{m,b}p_f$ genau die von $\beta_m \circ {}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m}$. Die Abbildung β_m ist genau in 0 singulär, und nach Lemma 5.1.10 sind die kritischen Werte von ${}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m}$ genau $\{0\} \subset D$. Somit ist ${}_{m,b}p_f$ genau in ${}_{m,b}p_f^{-1}(0)$ kritisch, und genau $0 \in D$ ist singulärer Wert.

Die Struktur der regulären Fasern von ${}_{m,b}p_f$ folgt aus Lemma 5.3.12: für $z^m \in D^*$ ist die Faser ${}_{m,b}p_f^{-1}(z^m)$ eine elliptische Kurve mit Isotropiegruppe $G_{z^m} = \mathbb{C}^* / \langle f(z^m) \rangle$. Insbesondere ist $({}_{m,b}X_f; {}_{m,b}\gamma_f; {}_{m,b}p_f; D)$ eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion f .

Die Struktur von ${}_{m,b}p_f^{-1}(0)$ folgt schließlich aus Lemma 5.3.13. \blacksquare

Lemma 5.3.9. Für $p^{-1}(0) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} C_i$ gemäß Lemma 5.1.7 gilt $g(C_i) = C_{i+b}$.

Beweis. Diese Aussage folgt auf die gleiche Weise wie Lemma 5.1.7. \blacksquare

Lemma 5.3.10. Es gilt $\bar{g}^k(x) \neq x$ für $x \in {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m}$ und $1 \leq k < m$.

Beweis. Wir betrachten zunächst ${}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m}^{-1}(0)$: nach Lemma 5.3.9 gilt für die Faser $p^{-1}(0) = \bigcup C_i$, daß $g^k(C_i) = C_{i+kb}$. Andererseits folgt analog zu Lemma 5.1.7, daß $\ell \star C_i = C_{i+\ell mb}$. Somit gilt:

$$\pi_{\mathbb{Z}}(C_i) \cap \bar{g}^k(\pi_{\mathbb{Z}}(C_i)) = \emptyset \text{ für } 1 \leq k < m.$$

Auf $p^{-1}(D^*) = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2} \cap Z'$ erhalten wir hingegen induktiv

$$\begin{aligned} g^k(z, w) &= (\zeta_0^k z, \tilde{f}^{\frac{1}{m}}(z^m)^k \eta_0^k \zeta_0^{b(1+\dots+k-1)} z^{kb} w) \\ &\neq \ell \star (z, w) \text{ für } 1 \leq k < m \text{ und } \ell \neq 0, \end{aligned}$$

und wiederum ist

$$\bar{g}^k(\pi_{\mathbb{Z}}(z, w)) \neq \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) \text{ für } 1 \leq k < m. \quad \blacksquare$$

Lemma 5.3.11. *Der Quotient ${}_{m,b}X_f = {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} / E_m$ ist eine glatte Fläche. Weiter ist die Quotientenabbildung π_{E_m} eine Submersion.*

Die \mathbb{C}^ -Wirkung ${}_{m,b}\gamma_f$ auf ${}_{m,b}X_f$ ist holomorph, und bezüglich ${}_{1,mb}\gamma_{f \circ \beta_m}$ und ${}_{m,b}\gamma_f$ sind π_{E_m} äquivariant und ${}_{m,b}p_f$ invariant.*

Beweis. Nach Lemma 5.3.10 ist die E_m -Wirkung (5.4) frei.

Weiter ist die Wirkung eigentlich diskontinuierlich, da E_m endlich ist.

Nach Satz 1.1.19 ist ${}_{m,b}X_f$ glatt und π_{E_m} eine Submersion, und nach Korollar 1.1.20 existiert eine eindeutig bestimmte \mathbb{C}^* -Wirkung auf ${}_{m,b}X_f$. Diese stimmt aufgrund der Eindeutigkeit mit ${}_{m,b}\gamma_f$ überein und ist holomorph. Ebenfalls nach Korollar 1.1.20 ist die Quotientenabbildung π_{E_m} äquivariant. Die \mathbb{C}^* -Invarianz von ${}_{m,b}p_f$ folgt direkt aus der Äquivarianz von π_{E_m} und der \mathbb{C}^* -Invarianz von ${}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m}$ gemäß Lemma 5.1.8. \blacksquare

Lemma 5.3.12. *Für $z^m \in D^*$ ist ${}_{m,b}p_f^{-1}(z^m)$ eine elliptische Kurve mit der Isotropiegruppe $G_{z^m} = \langle f(z^m) \rangle$.*

Beweis. Zunächst ist ${}_{m,b}p_f^{-1}(z^m)$ als Urbild eines regulären Wertes eine glatte Kurve.

Weiter zeigen wir, daß ${}_{m,b}p_f^{-1}(z^m)$ zusammenhängend ist. Hierzu genügt es zu zeigen, daß für $z \in D^*$ gilt:

$$\begin{aligned} & \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(p^{-1}(z)) \cap \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(p^{-1}(\zeta_0 z)) \\ &= \pi_{E_m}({}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m}^{-1}(z)) \cap \pi_{E_m}({}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m}^{-1}(\zeta_0 z)) \\ &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Dies folgt aber aus der folgenden Tatsache: es gilt

$$\begin{aligned} g(0 \star (z, 1)) &= g(z, 1) \\ &= (\zeta_0 z, \tilde{f}^{\frac{1}{m}}(z^m) \eta_0 z^b) \\ &= 0 \star (\zeta_0 z, \tilde{f}^{\frac{1}{m}}(z^m) \eta_0 z^b), \end{aligned}$$

somit ist nämlich

$$\pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}} \underbrace{(z, 1)}_{\in p^{-1}(z)} = \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}} \underbrace{(\zeta_0 z, \tilde{f}^{\frac{1}{m}}(z^m) \eta_0 z^b)}_{\in p^{-1}(\zeta_0 z)}.$$

Also ist ${}_{m,b}p_f^{-1}(z^m)$ eine glatte zusammenhängende Kurve.

Wir bestimmen nun die Isotropie eines Punktes $\pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) \in {}_{m,b}p_f^{-1}(z^m)$. Für $t \in \mathbb{C}^*$ gilt aufgrund der \mathbb{C}^* -Äquivarianz von $\pi_{\mathbb{Z}}$ und π_{E_m} nach den Lemmata 5.1.8 und 5.3.11

$$t \cdot \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) = \pi_{E_m}(t \cdot \pi_{\mathbb{Z}}(z, w)) = \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(z, tw).$$

Somit ergibt sich die Isotropie von $\pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(z, w)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} t \cdot \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) &= \pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(z, w) \\ \iff \exists k \in \{0, \dots, m-1\}: \exists \ell \in \mathbb{Z}: \\ (z, tw) &= g^k(\ell \star (z, w)) \\ &= g^k(\tilde{f}(p(z, w))^m)^\ell \cdot h_{mb}^\ell(z, w) \\ &= g^k(z, \tilde{f}(z^m)^\ell z^{\ell mb} w) \\ &= g^k(z, f(z^m)^\ell w) \\ &= \left(\zeta_0^k z, \tilde{f}^{\frac{1}{m}}(z^m)^k \eta_0^k \zeta_0^{b(1+\dots+k-1)} z^{kb} f(z^m)^\ell w \right) \\ \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}: t &= f(z^m)^\ell \text{ (und } k = 0) \\ \iff t \in \langle f(z^m) \rangle & \end{aligned}$$

Somit wird die Isotropiegruppe des Punktes $\pi_{E_m} \circ \pi_{\mathbb{Z}}(z, w)$ von $f(z^m) \in D^*$ erzeugt, ist also unendlich und diskret. Nach den Sätzen 1.2.8 und 1.2.10 ist also ${}_{m,b}p_f^{-1}(z^m)$ eine elliptische Kurve mit der Isotropiegruppe $G_{z^m} = \langle f(z^m) \rangle$. ■

Lemma 5.3.13. Die Faser ${}_{m,b}p_f^{-1}(0)$ ist vom Typ ${}_m I_b$.

Beweis. Nach Lemma 5.3.9 gilt für $p^{-1}(0) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} C_i$, daß $g^k(C_i) = C_{i+kb}$. Die Faser ${}_{m,b}p_f^{-1}(0)$ besteht somit aus b rationalen Kurven. Zu zeigen bleibt also, daß ${}_{m,b}p_f^{-1}(0)$ von der Vielfachheit m ist.

Wir betrachten wiederum das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} Z' & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{Z}}} & {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m} & \xrightarrow{\pi_{E_m}} & {}_{m,b}X_f \\ & \searrow p & \downarrow {}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m} & & \downarrow {}_{m,b}p_f \\ & & D & \xrightarrow[\beta_m]{z \mapsto z^m} & D \end{array}$$

Wie in Abschnitt 5.1 folgt, daß die Faser ${}_{1,mb}p_{f \circ \beta_m}^{-1}(0)$ vom Typ ${}_1 I_{mb}$ ist. Wie in Satz 5.1.3 existiert ein Schnitt

$${}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m} := \pi_{\mathbb{Z}} \circ \vartheta_{Z'} : D \longrightarrow {}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m}$$

für ${}_{1,mb}\mathcal{P}_{f \circ \beta_m}$. Dann ist ${}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D)$ eine Untermannigfaltigkeit von ${}_{1,mb}X_{f \circ \beta_m}$, die die Faser ${}_{1,mb}\mathcal{P}_{f \circ \beta_m}^{-1}(0)$ transversal schneidet.

Wir zeigen, daß π_{E_m} auf ${}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D)$ injektiv ist: wie in Satz 5.1.3 ist $\vartheta_{Z'}$ auf D^* von der Form $\vartheta_{Z'}(z) = (z, 1)$. Weiter gilt hier

$$g^k(z, 1) = (\zeta_0^k z, \tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}(z^m)^k \eta_0^k \zeta_0^{b(1+\dots+k-1)} z^{kb}),$$

und wegen $|\tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}| \leq 1$ nach Lemma 5.3.14 gilt auf D^*

$$0 < |z^b \tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}(z^m)| < 1.$$

Die Injektivität der Quotientenabbildung π_{E_m} auf ${}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D^*)$ ergibt sich nun aus der folgenden Überlegung für $z \in D^*$:

$$\begin{aligned} & \bar{g}^k({}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(z)) \in {}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D) \\ \iff & \exists \ell \in \mathbb{Z}: \exists z' \in D: g^k(z, 1) = g^k(\vartheta_{Z'}(z)) = \ell \star \vartheta_{Z'}(z') = \ell \star (z', 1) \\ \iff & \exists \ell \in \mathbb{Z}: \exists z' \in D: (\zeta_0^k z, \tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}(z^m)^k \eta_0^k \zeta_0^{b(1+\dots+k-1)} z^{kb}) = (z', f((z')^m)^\ell) \\ \iff & \exists \ell \in \mathbb{Z}: \tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}(z^m)^k \eta_0^k \zeta_0^{b(1+\dots+k-1)} z^{kb} = f(z^m)^\ell = z^{m\ell} \tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}(z^m)^{m\ell} \\ & \quad (\text{und } z' = \zeta_0^k z) \\ \iff & \exists \ell \in \mathbb{Z}: \underbrace{\eta_0^k \zeta_0^{b(1+\dots+k-1)}}_{|\cdot|=1} = z^{b(m\ell-k)} \tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}(z^m)^{m\ell-k} = \underbrace{(z^b \tilde{f}_m^{\frac{1}{m}}(z^m))}_{|\cdot|<1}^{m\ell-k} \\ \iff & \exists \ell \in \mathbb{Z}: m\ell - k = 0 \\ \iff & k = \ell = 0, \text{ da } 0 \leq k < m. \end{aligned}$$

Also ist $\bar{g}^k \circ {}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(z) \notin {}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D)$ für $1 \leq k < m$, und π_{E_m} ist auf ${}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D^*)$ injektiv. Über $0 \in D$ folgt die Injektivität mit Lemma 5.3.9. Da π_{E_m} die Fasern von $\beta_m \circ {}_{1,mb}\mathcal{P}_{f \circ \beta_m}$ in sich abbildet, ergibt sich die Injektivität von π_{E_m} auf ${}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D)$.

Da weiter π_{E_m} nach Lemma 5.3.11 eine Submersion ist, ist auch $\pi_{E_m}({}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D))$ eine Untermannigfaltigkeit von ${}_{m,b}X_f$, die die Faser ${}_{m,b}\mathcal{P}_f^{-1}(0)$ transversal schneidet.

Somit ist $\pi_{E_m}|_{{}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D)}$ eine injektive holomorphe Abbildung zwischen RIEMANNschen Flächen, nach Satz 1.2.12 also biholomorph.

Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} {}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D) & \xrightarrow[\cong]{\pi_{E_m}} & \pi_{E_m}({}_{1,mb}\vartheta_{f \circ \beta_m}(D)) \\ \downarrow \cong \scriptstyle {}_{1,mb}\mathcal{P}_{f \circ \beta_m} & & \downarrow \scriptstyle {}_{m,b}\mathcal{P}_f \\ D & \xrightarrow[\scriptstyle z \mapsto z^m]{\beta_m} & D \end{array}$$

Somit ist ${}_{m,b}\mathcal{P}_f^{-1}(0)$ nach Definition 2.2.3 von der Vielfachheit m . ■

Wir haben im Beweis die folgende Beobachtung verwendet:

Lemma 5.3.14. Sei $f: D \rightarrow D$ holomorph mit $f(z) = z^b \tilde{f}(z)$ für ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}^*(D)$.

Dann gilt $\tilde{f}^{\frac{1}{m}}(D) \subset D$, oder $\tilde{f}^{\frac{1}{m}}$ ist konstant vom Betrage 1.

Beweis. Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt auf $(1 - \varepsilon)S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 - \varepsilon\}$

$$|\tilde{f}(z)| = \frac{|f(z)|}{|z^b|} = \frac{|f(z)|}{(1 - \varepsilon)^b} < \frac{1}{(1 - \varepsilon)^b}.$$

Nach dem Maximumsprinzip gilt diese Ungleichung also auch auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 - \varepsilon\}$. Da dies für alle ε gilt, erhalten wir $\tilde{f}(D) \subset \overline{D}$.

Wiederum nach dem Maximumsprinzip kann \tilde{f} aber in D nur dann ein Betragsmaximum mit dem Betrag 1 annehmen, wenn \tilde{f} schon konstant ist. Somit ist $\tilde{f}(D) \subset D$, oder \tilde{f} ist konstant vom Betrage 1.

Also folgt die Aussage für jede m -te Wurzel $\tilde{f}^{\frac{1}{m}}$ aus \tilde{f} . ■

6 Faserungen ohne mehrfache Fasern: globale Beschreibung

In diesem Kapitel geben wir eine globale Beschreibung von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen ohne mehrfache Fasern bis auf äquivariante Isomorphie an. Dabei folgen wir [GH98].

Wir bezeichnen mit (X_f, γ_f, p_f, Y) weiter die in Satz 5.2.1 konstruierte \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung zur holomorphen Funktion $f: Y \rightarrow D$ ohne mehrfache Fasern. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts lautet wie folgt:

Satz 6.0.1. *Sei (X, γ, p, Y) eine \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung mit der Isotropiefunktion f . Hat p nur einfache Fasern, so gilt:*

1. *Ist Y kompakt, so ist $p: X \rightarrow Y$ ein elliptisches Prinzipalbündel.*
2. *Ist Y nichtkompakt, so ist (X, γ, p, Y) äquivariant isomorph zu (X_f, γ_f, p_f, Y) .*

Hier beziehen wir uns auf den folgenden Begriff eines *elliptischen Prinzipalbündels*:

Definition 6.0.2. Sei $p: X \rightarrow Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung von einer glatten komplexen Fläche X auf eine glatte komplexe Kurve Y . Wir nennen $p: X \rightarrow Y$ ein *elliptisches Prinzipalbündel über Y* , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: es gibt eine elliptische Kurve C , eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)$ für Y , Abbildungen

$$g_{ij} \in {}_Y\mathcal{C}(U_{ij}) = {}_Y\mathcal{C}(U_i \cap U_j),$$

wobei ${}_Y\mathcal{C}$ die Garbe der lokal holomorphen Abbildungen von Y nach C bezeichnet, sowie Biholomorphismen

$$h_i: p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times C,$$

die für $y \in U_i$ die Faser $p^{-1}(y)$ biholomorph auf $\{y\} \times C$ abbilden, so daß

$$(h_i \circ h_j^{-1})(y, c) = (y, g_{ij}(y)c)$$

für $y \in U_{ij}$ und $c \in C$. □

Für den Beweis des obigen Satzes führen wir zunächst den Begriff einer *Gruppenfaserung* ein:

Definition 6.0.3. Seien Y eine glatte zusammenhängende komplexe Kurve und Z eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei weiter $p: Z \rightarrow Y$ eine reguläre holomorphe Surjektion. Trägt jede Faser $Z_y := p^{-1}(y)$ die Struktur einer komplexen LIEgruppe und ist die Abbildung

$$\begin{aligned} Z \times_Y Z &:= \{(z, z') \in Z \times Z \mid p(z) = p(z')\} \longrightarrow Z, \\ (z, z') &\longmapsto z^{-1} \diamond z' \text{ in } Z_{p(z)} = Z_{p(z')} \end{aligned}$$

holomorph, so nennen wir $p: Z \rightarrow Y$ eine *Gruppenfaserung über Y* . \square

Beispiel 6.0.4. Die Abbildung $\text{pr}_1: Y \times \mathbb{C}^* \rightarrow Y$ mit der üblichen Gruppenstruktur auf $\text{pr}_1^{-1}(y) = \{y\} \times \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}^*$ ist eine Gruppenfaserung über Y . \square

Ist nun $\vartheta_f: Y \rightarrow X_f^\sharp$ der Schnitt für p_f gemäß Satz 5.2.1, so haben wir wie in Lemma 2.3.4 die Abbildung

$$\Phi: Y \times \mathbb{C}^* \longrightarrow X_f^{\sharp\sharp} = \mathbb{C}^* \cdot \vartheta_f(Y), \quad (y, t) \longmapsto t \cdot \vartheta_f(y).$$

Wir können nun $p_f|_{X_f^{\sharp\sharp}}: X_f^{\sharp\sharp} \rightarrow Y$ auf genau eine Art und Weise mit der Struktur einer Gruppenfaserung über Y versehen, so daß für jedes $y \in Y$ die Abbildung Φ einen Epimorphismus von komplexen LIEgruppen

$$\{y\} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow (X_f^{\sharp\sharp})_y = (p_f|_{X_f^{\sharp\sharp}})^{-1}(y)$$

induziert: jedes $x \in (X_f^{\sharp\sharp})_y$ ist von der Form $x = t \cdot \vartheta_f(y)$, wobei $t \in \mathbb{C}^*$ – über $Q := Y \setminus N(f)$ modulo G_y – eindeutig bestimmt ist. Für x und $x' = t' \cdot \vartheta_f(y)$ setzen wir

$$x \diamond x' := tt' \cdot \vartheta_f(y) \quad \text{und} \quad -x := t^{-1} \cdot \vartheta_f(y);$$

dies ist wohldefiniert. Dann haben wir den oben geforderten Epimorphismus

$$\{y\} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow (X_f^{\sharp\sharp})_y, \quad (y, t) \longmapsto t \cdot \vartheta_f(y).$$

Insbesondere ist die Gruppenfaserung verträglich mit der \mathbb{C}^* -Wirkung: für $t \in \mathbb{C}^*$ und $x, x' \in (X_f^{\sharp\sharp})_y$ gilt

$$(t \cdot x) \diamond x' = x \diamond (t \cdot x') = t \cdot (x \diamond x').$$

Weiter betrachten wir die folgendermaßen definierte Garbe \mathcal{J}_f :

Definition 6.0.5. Für eine offene Teilmenge $U \subset Y$ sei

$$\mathcal{J}_f(U) := \{\vartheta \in \text{Hol}(U, X_f^{\sharp\sharp}) \mid p_f \circ \vartheta = \text{id}_U\}.$$

Wir bezeichnen mit \mathbb{Z}_Q die lokal konstante Garbe mit Werten in \mathbb{Z} auf Q sowie mit \mathcal{A} ihre triviale Fortsetzung auf ganz Y (Seite 144 in [KK83]). \square

Bemerkung 6.0.6. Mit der oben eingeführten Struktur einer Gruppenfaserung auf der Einschränkung $p_f|_{X_f^{\sharp\sharp}}: X_f^{\sharp\sharp} \rightarrow Y$ ist \mathcal{J}_f in natürlicher Weise eine Garbe von ABELSchen Gruppen. \square

Lemma 6.0.7. *Auf Y existiert eine kurze exakte Garbensequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{J}_f \longrightarrow 0.$$

Beweis. Wir definieren folgendermaßen eine Abbildung $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}^*$: für eine zusammenhängende offene Teilmenge $U \subset Y$ interpretieren wir einen Schnitt $k \in \mathcal{A}(U)$ als ganze Zahl und setzen $\varphi(k) := f^k \in \mathcal{O}(U)$.

Ist $U \subset Q$, so besitzt f keine Nullstellen auf U . Ist andererseits $U \not\subset Q$, so ist $k = 0$ nach Definition der trivialen Fortsetzung von Garben und somit $f^k = f^0 = 1$. In beiden Fällen ist $\varphi(k) = f^k \in \mathcal{O}^*(U)$. Die Abbildung φ respektiert die Gruppenstruktur, und wegen $0 < |f| < 1$ auf Q und $\mathcal{A}_y = \{0\}$ für $y \notin Q$ ist φ ein Monomorphismus.

Weiter ist die Abbildung $\Phi: Y \times \mathbb{C}^* \rightarrow X_f^{\sharp\sharp}$ gemäß Lemma 2.3.4 lokal biholomorph und liefert eine Abbildung $\psi: \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{J}_f$ wie folgt: für eine offene Teilmenge $U \subset Y$ und einen Schnitt $h \in \mathcal{O}^*(U)$ setzen wir

$$\psi(h): U \longrightarrow X_f^{\sharp\sharp}, \quad y \longmapsto \Phi(y, h(y)) = h(y) \cdot \vartheta_f(y).$$

Dann ist die Abbildung ψ verträglich mit den Gruppenstrukturen und ein Garbenepimorphismus: sei $\vartheta \in \mathcal{J}_f(U)$. Wegen der Struktur einer Gruppenfaserung auf $X_f^{\sharp\sharp} \rightarrow U$ existiert für genügend kleines U ein $h: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit

$$\psi(h)(y) = h(y) \cdot \vartheta_f(y) = \vartheta(y)$$

Mit der gleichen Argumentation wie oben für die Definition von φ folgt aus der Definition von f , daß $\psi \circ \varphi(k) = \vartheta_f$ – das neutrale Element in $\mathcal{J}_f(U)$ für U offen in Y – und alle $k \in \mathcal{A}(U)$ ist.

Umgekehrt liefert Lemma 5.2.3, daß ein Keim $h_y \in \mathcal{O}_y^*$, der unter ψ auf das neutrale Element $(\vartheta_f)_y$ von $(\mathcal{J}_f)_y$ abgebildet wird, schon von der Form $h_y = f_y^k$ sein muß. ■

Lemma 6.0.8. *Ist Y nichtkompakt, so ist \mathcal{O}^* azyklisch.*

Beweis. Wir betrachten die (kurze exakte) Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0.$$

Als offene RIEMANNsche Fläche ist Y nach Corollar [sic] 26.8 in [For77] STEINsch und \mathcal{O} somit azyklisch. Weiter gilt $H^2(Y, \mathbb{Z}) = 0$ (Beispiel 13.6.6 in [SZ88]).

Die lange exakte Kohomologiesequenz zur Exponentialsequenz liefert nun:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \underbrace{H^1(Y, \mathcal{O})}_{=0} & \longrightarrow & H^1(Y, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \underbrace{H^2(Y, \mathbb{Z})}_{=0} & \longrightarrow & \underbrace{H^2(Y, \mathcal{O})}_{=0} & \longrightarrow & H^2(Y, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \underbrace{H^3(Y, \mathbb{Z})}_{=0} & & & & & \end{array}$$

Somit ist $H^1(Y, \mathcal{O}^*) = H^2(Y, \mathcal{O}^*) = 0$. ■

Lemma 6.0.9. *Ist Y nichtkompakt, so ist $H^1(Y, \mathcal{J}_f) = 0$.*

Beweis. Nach Lemma 6.0.8 ist \mathcal{O}^* azyklisch.

Wir betrachten die lange exakte Kohomologiesequenz der in Lemma 6.0.7 angegebenen kurzen exakten Sequenz:

$$\underbrace{H^1(Y, \mathcal{O}^*)}_{=0} \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{J}_f) \longrightarrow H^2(Y, \mathcal{A}) \longrightarrow \underbrace{H^2(Y, \mathcal{O}^*)}_{=0},$$

somit ist $H^1(Y, \mathcal{J}_f) \cong H^2(Y, \mathcal{A})$.

Um $H^2(Y, \mathcal{A})$ zu bestimmen, verwenden wir die folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\mathcal{A} \longrightarrow 0.$$

Der Träger von \mathbb{Z}/\mathcal{A} ist genau die Nullstellenmenge von f ; somit ist er diskret und die Garbe \mathbb{Z}/\mathcal{A} wekl. Nach Lemma 50.7 in [KK83] ist \mathbb{Z}/\mathcal{A} also azyklisch. In der langen exakten Kohomologiesequenz folgt

$$\underbrace{H^1(Y, \mathbb{Z}/\mathcal{A})}_{=0} \longrightarrow H^2(Y, \mathcal{A}) \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H^2(Y, \mathbb{Z}/\mathcal{A})}_{=0}$$

und

$$H^1(Y, \mathcal{J}_f) \cong H^2(Y, \mathcal{A}) \cong H^2(Y, \mathbb{Z}) = 0. \quad \blacksquare$$

Wir verwenden nun die Garbe \mathcal{J}_f , um die Automorphismengruppe von (X_f, γ_f, p_f, Y) zu beschreiben.

Sei $\vartheta \in \mathcal{J}_f(Y)$ ein globaler Schnitt in \mathcal{J}_f . Mit der Struktur einer Gruppenfaserung auf $X_f^{\#\#}$ erhalten wir eine Abbildung

$$\mu(\vartheta): X_f^{\#\#} \rightarrow X_f^{\#\#}, \quad x \longmapsto x \diamond \vartheta(p(x)) \text{ in } (X_f^{\#\#})_{p(x)}.$$

Dann ist $\mu(\vartheta)$ ein äquivarianter fasererhaltender Automorphismus von $X_f^{\#\#}$. Wiederum können wir Proposition III.8.5 in [BPV84] anwenden, um $\mu(\vartheta)$ auf ganz X_f fortzusetzen. Der Identitätssatz liefert, daß die Fortsetzung äquivariant und ein Automorphismus von (X_f, γ_f, p_f, Y) ist.

Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 6.0.10. *Die Zuordnung μ definiert einen Monomorphismus der Gruppen $\mathcal{J}_f(Y)$ und $\text{Aut}(X_f, \gamma_f, p_f, Y)$.*

Hat p_f nur reguläre Werte, so ist μ sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Zu zeigen bleibt die Surjektivität im regulären Fall.

Zunächst halten wir fest, daß aufgrund der Regularität der Faserung für jedes $x \in X_f$ ein wohlbestimmtes $[t_x] \in \mathbb{C}^*/G_{p(x)} = \mathbb{C}^*/\langle f \circ p(x) \rangle$ existiert, so daß $x = t_x \cdot \vartheta_f(p(x))$.

Ist nun $\chi \in \text{Aut}(X_f, \gamma_f, p_f, Y)$, so definieren wir wieder bezüglich der Struktur der Gruppenfaserung:

$$\vartheta: Y \longrightarrow X_f^\sharp = X_f, \quad y \longmapsto (\vartheta_f(y))^{-1} \diamond \chi(\vartheta_f(y)) \text{ in } (X_f)_{p(x)}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu(\vartheta)(x) &= x \diamond \vartheta(p(x)) \\ &= x \diamond \left((\vartheta_f(p(x)))^{-1} \diamond \chi(\vartheta_f(p(x))) \right) \\ &= (t_x \cdot \vartheta_f(p(x))) \diamond (\vartheta_f(p(x)))^{-1} \diamond \chi(\vartheta_f(p(x))) \\ &= t_x \cdot \chi(\vartheta_f(p(x))) \\ &= \chi(t_x \cdot \vartheta_f(p(x))) \\ &= \chi(x). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Wir können nun den Beweis unseres Hauptergebnisses führen:

Beweis von Satz 6.0.1. Wir wählen eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)$ für Y mit den folgenden Eigenschaften:

1. jedes U_i enthält höchstens einen kritischen Wert von p
2. jeder Durchschnitt $U_{ij} := U_i \cap U_j$ enthält nur reguläre Werte von p
3. auf jedem U_i existiert ein Schnitt $\vartheta_i: U_i \rightarrow X^\sharp$.

Die letzte Eigenschaft kann erfüllt werden, da nach Satz 2.2.5 die kritischen Fasern von p vom Typ ${}_1I_b$ sind (Seite 580 und Theorem 9.1 in [Kod63a]).

Mit Satz 5.2.1 erhalten wir nun \mathbb{C}^* -invariante fasererhaltende Isomorphismen

$$\varphi_i: p^{-1}(U_i) \longrightarrow p_f^{-1}(U_i),$$

und somit gilt

$$\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \text{Aut}(p_f^{-1}(U_{ij}), \gamma_f, p_f, U_{ij}).$$

Da p auf den Durchschnitten U_{ij} nach Voraussetzung nur reguläre Werte besitzt, definiert die Familie der φ_{ij} nach Satz 6.0.10 einen Kozykel $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{J}_f)$.

Ist nun Y kompakt, so ist die Isotropiefunktion konstant, $f = c$, und p_f global trivial. Somit erhalten wir X als Produkt von Y mit der elliptischen Kurve $\mathbb{C}^*/\langle c \rangle$ durch Verdrehen mit einem Kozykel mit Werten in der Garbe der lokalen holomorphen Abbildungen von Y nach $\mathbb{C}^*/\langle c \rangle$.

Ist Y nichtkompakt, so ist ξ nach Lemma 6.0.9 nullkohomolog. Dies liefert den gesuchten Isomorphismus. ■

7 Ausblick und offene Fragen

Am Ende dieser Arbeit möchten wir noch auf einige offene Fragen und weiterführende Ansätze eingehen.

In Satz 3.2.1 haben wir \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen nahe einer singulären Faser vom Typ ${}_mI_0$ unter der Bedingung klassifiziert, daß die Einheitswurzelgruppe E_m auf der singulären Faser trivial wirkt. Wie wir in Abschnitt 3.3 feststellten, ist diese Bedingung aber keineswegs immer erfüllt. Offen bleibt die folgende Frage 3.3.6:

Frage. *Ist jede \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung nahe einer Faser vom Typ ${}_mI_0$ äquivariant isomorph zum lokalen Modell gemäß Konstruktion 3.3.1?* \square

Des weiteren haben wir in Abschnitt 5.3 ein lokales Modell für eine Faser vom Typ ${}_mI_b$ konstruiert. Hier stellt sich die folgende Frage:

Frage. *Ist jede \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserung nahe einer Faser vom Typ ${}_mI_b$ äquivariant isomorph zum lokalen Modell gemäß Konstruktion 5.3.1?* \square

Schließlich haben wir [GH98] mit Satz 6.0.1 eine globale Beschreibung von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen ohne mehrfache Fasern entnommen. Eine Verallgemeinerung auf Faserungen mit mehrfachen Fasern steht noch aus:

Frage. *Existiert eine globale Beschreibung für \mathbb{C}^* -invariante elliptische Faserungen?* \square

Im Falle mehrfacher Fasern existiert kein Schnitt für die Faserung, wie er uns im Beweis zu Satz 6.0.1 gute Dienste geleistet hat. Insofern bietet sich keine bestimmte Vorgehensweise unmittelbar an. Mehrfache Fasern mit verschiedenen Vielfachheiten lassen auch nur eine eher unhandliche Klassifikation erwarten.

Schließlich wollen wir noch einige mögliche Erweiterungen des Begriffs der \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen erwähnen.

Zunächst erscheint uns die folgende Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen mit unseren Mitteln mit überschaubarem Aufwand handhabbar: Seien X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n beziehungsweise $n - 1$. Sei weiter $p: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Surjektion mit zusammenhängenden Fasern, die bezüglich einer holomorphen \mathbb{C}^* -Wirkung auf X invariant ist. Dabei sei jede reguläre Faser von p eine elliptische Kurve.

Frage. *Existiert in diesem Falle ein Analogon der Isotropiefunktion? Wie sehen geeignete lokale Modelle aus? Kann diese Situation lokal oder global bis auf äquivariante Isomorphie klassifiziert werden?* \square

Schließlich könnte man den Zusammenhang zwischen in einem geeigneten Sinne parametrisierten Familien von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen und deren Isotropiefunktionen betrachten.

Frage. *Welche Parameterräume T parametrisieren „gut handhabbare“ Familien von \mathbb{C}^* -invarianten elliptischen Faserungen $(X_t, \gamma_t, p_t, Y_t)_{t \in T}$? Wie hängen die Familien der zugehörigen Isotropiefunktionen $(f_t)_{t \in T}$ von T ab? Wie können geeignete lokale Modelle konstruiert und parametrisiert werden? Existiert eine äquivariante lokale oder globale Klassifikation?* \square

Literaturverzeichnis

- [Art93] ARTIN, MICHAEL. *Algebra*. Birkhäuser: Boston, Basel, 1993.
- [BD85] BRÖCKER, THEODOR UND TAMMO TOM DIECK. *Representations of Compact Lie Groups*. Springer: Berlin, New York, 1985.
- [BPV84] BARTH, WOLF, CHRISTIAAN PETERS UND ANTHONIUS VAN DE VEN. *Compact Complex Surfaces*. Band 4 der *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*. Springer: Berlin, New York, 1984.
- [Dan78] DANILOV, V. I. "The Geometry of Toric Varieties." *Russ. Math. Surveys* 33 (2): 97–154, 1978.
- [FM94] FRIEDMAN, ROBERT UND JOHN W. MORGAN. *Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces*. Band 27 der *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*. Springer: Berlin, New York, 1994.
- [For77] FORSTER, OTTO. *Riemannsche Flächen*. Springer: Berlin, New York, 1977.
- [Ful93] FULTON, WILLIAM. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 1993.
- [GH94] GRIFFITHS, PHILLIP UND JOSEPH HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons: New York, 1994.
- [GH98] GLAS, WOLFGANG UND JÜRGEN HAUSEN. "C*-Surfaces with One-Dimensional Holomorphic Hull." *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 68: 255–271, 1998.
- [GP74] GUILLEMIN, VICTOR UND ALAN POLLACK. *Differential Topology*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1974.
- [Har77] HARTSHORNE, ROBIN. *Algebraic Geometry*. Band 52 der *Graduate Texts in Mathematics*. Springer: Berlin, New York, 1977.
- [Hau96] HAUSEN, JÜRGEN. *Holomorphe C*-Operationen auf komplexen Flächen*. Nr. 11 der *Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik*. Universität Konstanz: Konstanz, 1996.
- [Hau99] —. *Geometrische Invariantentheorie*. Nr. 101 der *Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik*. Universität Konstanz: Konstanz, 1999.

- [Hol63] HOLMANN, HARALD. “Komplexe Räume mit komplexen Transformationsgruppen.” *Math. Ann.* 150: 327–360, 1963.
- [Kau67] KAUP, WILHELM. “Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen.” *Invent. Math.* 3: 43–70, 1967.
- [Kau98] KAUP, LUDGER. *Vorlesung über Algebraische Geometrie. Ein einführendes Konzept.* Nr. 74 der *Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik.* Universität Konstanz: Konstanz, 1998.
- [Kau00] —. *Vorlesungen über Torische Varietäten.* Nr. 130 der *Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik.* Universität Konstanz: Konstanz, 2000.
- [KK83] KAUP, LUDGER UND BURCHARD KAUP. *Holomorphic Functions of Several Variables.* Nr. 3 der *Studies in Mathematics.* De Gruyter: Berlin, New York, 1983.
- [Kod60] KODAIRA, KUNIHIKO. “On Compact Complex Analytic Surfaces, I.” *Ann. of Math.* 71 (1): 111–152, 1960.
- [Kod63a] —. “On Compact Analytic Surfaces: II.” *Ann. of Math.* 77 (3): 563–626, 1963.
- [Kod63b] —. “On Compact Analytic Surfaces, III.” *Ann. of Math.* 78 (1): 1–40, 1963.
- [Kod64] —. “On the Structure of Compact Complex Analytic Surfaces, I.” *Amer. J. of Math.* 86: 751–798, 1964.
- [Kod66] —. “On the Structure of Compact Complex Analytic Surfaces, II.” *Amer. J. of Math.* 88: 682–721, 1966.
- [Kod68a] —. “On the Structure of Compact Complex Analytic Surfaces, III.” *Amer. J. of Math.* 90: 55–83, 1968.
- [Kod68b] —. “On the Structure of Complex Analytic Surfaces, IV.” *Amer. J. of Math.* 90: 1048–1066, 1968.
- [Kra85] KRAFT, HANSPETER. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie.* Band D1 der *Aspects of Mathematics/Aspekte der Mathematik.* Vieweg: Braunschweig, 1985.
- [Mir95] MIRANDA, RICK. *Algebraic Curves and RIEMANN Surfaces.* Band 5 der *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society: Providence, R. I., 1995.
- [Oda87] ODA, TADAO. *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties.* Band 15 der *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge.* Springer: Berlin, New York, 1987.
- [Rem95] REMMERT, REINHOLD. *Funktionentheorie 1.* Springer: Berlin, New York, 4. Auflage, 1995.

- [Rob73] ROBERT, ALAIN. *Elliptic Curves*. Nr. 326 der *Lecture Notes in Mathematics*. Springer: Berlin, New York, 1973.
- [RV63] REMMERT, REINHOLD UND ANTHONIUS VAN DE VEN. "Zur Funktionentheorie homogener komplexer Mannigfaltigkeiten." *Topology* 2: 137–157, 1963.
- [Spr81] SPRINGER, TONNY A. *Linear Algebraic Groups*. Band 9 von *Progress in Mathematics*. Birkhäuser: Boston, Basel, 1981.
- [SZ88] STÖCKER, RALPH UND HEINER ZIESCHANG. *Algebraische Topologie*. B. G. Teubner: Stuttgart, 1988.

Symbolverzeichnis

Mengen und Gruppen

D	Einheitskreisscheibe in \mathbb{C}	$D := \{z \in \mathbb{C} \mid z < 1\}$
D^*	punktierte Einheitskreisscheibe in \mathbb{C}	$D^* := \{z \in \mathbb{C}^* \mid z < 1\}$
$D_\varepsilon(z_0)$	Scheibe um z_0 mit Radius ε in \mathbb{C}	$D_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid z - z_0 < \varepsilon\}$
G	topologische Gruppe	
$\langle g_1, \dots, g_n \rangle$	von g_1, \dots, g_n erzeugte Untergruppe von G	$\langle g_1, \dots, g_n \rangle := \{g_1^{k_1} \dots g_n^{k_n} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$
G_y	Isotropiegruppe der Faser über y	
E_n	Gruppe der n -ten Einheitswurzeln	$E_n := \{e^{\frac{2\pi i \ell}{n}} \mid 0 \leq \ell < n\}$

Garben

\mathcal{O}	Garbe der holomorphen Funktionen	
\mathcal{O}^*	Garbe der nichtverschwindenden holomorphen Funktionen	
\mathcal{J}_f	Garbe von geeigneten lokalen Schnitten für p	$\mathcal{J}_f(U) := \{\vartheta \in \text{Hol}(Y, X_f^{\#\#}) \mid p \circ \vartheta = \text{id}_U\}$

Komplexe Räume

X	glatte komplexe Fläche	
X^G	Fixpunktmenge von X	$X^G := \{x \in X \mid \forall g \in G: g \cdot x = x\}$
$X^\#$	Menge der Nichtfixpunkte in X	$X^\# := X \setminus X^{\text{C}^*}$
M^+	für $M \subset X^{\text{C}^*}$: $M^+ := \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x \text{ existiert und } \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x \in M\}$	
M^-	für $M \subset X^{\text{C}^*}$: $M^- := \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x \text{ existiert und } \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x \in M\}$	
Y	glatte komplexe Kurve	
Y_{reg}	regulärer Ort von p in Y	$Y_{\text{reg}} := Y \setminus N(f)$
C	nicht notwendig glatte komplexe Kurve	
\mathbb{P}_1	projektive Gerade	

Funktionen und Abbildungen

γ	Gruppenwirkung	
α	Darstellung einer Gruppe	
β_m	m -te Potenz	$\beta_m: D \rightarrow D, \quad z \mapsto z^m$
p	elliptische Faserung	
ϑ	Schnitt für p	$\vartheta: Y \rightarrow X, \quad p \circ \vartheta = \text{id}_Y$
f	Isotropiefunktion	$G_y = \langle f(y) \rangle$ für y regulär
Φ	Abbildung gemäß Lemma 2.3.4	$\Phi(y, t) = t \cdot \vartheta(y)$
φ, ψ, χ	allgemeine Abbildungen	
h_{rb}	auf Z induziert durch die von der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ rb & 1 \end{pmatrix}$ definierten torischen Morphismen $Z_n \rightarrow Z_{n+rb}$	

Zahlen

ε	reell und größer 0	$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$
ζ, η	Einheitswurzeln	$\zeta, \eta \in E_n$
ϱ_0	primitive m -te Einheitswurzel	$\langle \varrho_0 \rangle = E_m$
k, ℓ	ganze Zahlen	$k, \ell \in \mathbb{Z}$
m, n	natürliche Zahlen	$m, n \in \mathbb{N}$

Kegel und torische Varietäten

N	vollständiges Gitter im \mathbb{R}^2	
M	zu N duales Gitter	$M := \text{Hom}_{\text{Gr}}(N, \mathbb{Z})$
σ, τ	N -Kegel	
σ^\vee	Dualkegel	$\sigma^\vee := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall v \in \sigma: \langle v, u \rangle \geq 0\}$
σ^\perp	orthogonaler Vektorraum	$\sigma^\perp := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall v \in \sigma: \langle v, u \rangle = 0\}$
σ°	relatives Inneres	$\sigma^\circ := \{v \in \sigma \mid \forall u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp: \langle v, u \rangle > 0\}$
\mathfrak{o}	Nullkegel	$\mathfrak{o} := \text{keg } \emptyset = \{0\}$
Specmax	Maximalspektrum	
\mathbb{T}_N	zweidimensionaler algebraischer Torus	
X_σ	affine torische Varietät zum Kegel σ	
Δ	Fächer	
X_Δ	torische Varietät zum Fächer Δ	

Stichwortverzeichnis

- ${}_1I_b$
 - Fasern vom Typ 61–70
 - lokales Modell vom Typ 63, 68, 70f.
- I_b *siehe* ${}_1I_b$
- mI_0
 - Fasern vom Typ 24, 30–42
 - lokales Modell vom Typ 31, 35, 69
 - modifiziertes 40–42, 84
- mI_b
 - Fasern vom Typ 24, 61–70
 - lokales Modell vom Typ 74, 84

- Äquivalenzsatz 50
- äquivariante Abbildung 4, 6
- analytische Untergruppe 3, 5
 - von \mathbb{C}^* 7, 9f.
- Antiäquivalenzsatz 57

- Bahn 4, 9f., 19
- Bahnabbildung 4
- begleitender Homomorphismus 57, 60

- \mathbb{C}^* -Wirkungen
 - auf elliptischen Kurven 16
 - auf kompakten RIEMANNSchen Flächen 16f.
 - auf offenen RIEMANNSchen Flächen 15
 - auf \mathbb{P}_1 16
- $\mathbb{C}[S]$ 51

- Darstellung 18
 - holomorphe 11
 - von \mathbb{C}^* 13
 - stetige 10f.
 - von S^1 11–13
- Diagonalisierung
 - einer Darstellung von \mathbb{C}^* 13
 - einer Darstellung von S^1 12

- Einheitswurzelgruppe 3, 9
- elliptische Faserung 1, 22–24
 - relativ minimale 22
- elliptische Kurve 1, 9f., 16, 22, 24
 - mit \mathbb{C}^* -Wirkung 14, 16f.
- elliptischer Fixpunkt *siehe* Fixpunkt, elliptischer
- elliptisches Prinzipalbündel 79
- erzeugend *siehe* Unterhalbgruppe, erzeugende

- Fächer 58
 - N - 58
 - regulärer 60
- Fächermorphismus 59f., 62
- Faser
 - reguläre 22
 - singuläre 24
- Faserprodukt 37, 80
- Faserung
 - elliptische *siehe* elliptische Faserung
 - Gruppen- *siehe* Gruppenfaserung
 - Wurzel- *siehe* Wurzelfaserung
- Fixpunkt 18
 - elliptischer 19, 22
 - hyperbolischer 19, 22, 24
 - Linearisierung nahe einem 18
 - parabolischer 19
- Fixpunktkurve 21
- Fixpunktmenge 4, 14

- G -Fläche
 - holomorphe 5
 - komplexe 5
- G -Mannigfaltigkeit
 - holomorphe 5
 - komplexe 5
- G -Raum 4
 - holomorpher 5

- komplexer 5, 9
- topologischer 5
- Gewicht 18
- Gitter 8
 - duales 46
 - vollständiges 8, 46
- Gitterisomorphismus 50
- Gittermorphismus 60
- GORDAN
 - Lemma von 48, 51
- Grenzwerte einer \mathbb{C}^* -Wirkung 14f., 24
- Gruppe
 - LIE- *siehe* LIEgruppe
 - linear algebraische 3
 - topologische 3, 10
- Gruppenfaserung 80
- Gruppenwirkung *siehe* Wirkung
- HAHN-BANACH
 - Satz von 44
- Halbgruppenalgebra 51
- Hauptmenge 55, 60
- HILBERTbasis 49
- holomorphe Fortsetzung 20
- Holomorphiehülle 1, 20
- hyperbolischer Fixpunkt *siehe*
 - Fixpunkt, hyperbolischer
- Ineffektivitätskern 4f.
 - endliche Untergruppen 25, 34, 37
- invariante Abbildung 4
- invariante Teilmenge 4
- Isotropiefunktion 1, 25–31, 35, 63, 67, 69, 71, 74
- Isotropiegruppe 4f., 10, 17
- \mathcal{J}_f 80
- Kegel 43f.
 - assoziierte Algebra 53
 - dualer 43
 - N - 47f.
 - N -rationaler 47
 - polyedrischer 45f.
 - rationaler polyedrischer 47
 - regulärer 47, 60
 - simplizialer 47
 - spitzer 46f., 49f.
 - von einer Menge erzeugter 43
- kegelförmig 43
- Kegelisomorphismus 50
- Kegelmorphismus 50, 56, 60
- KODAIRA 1, 24
- konvex 43
- Kurve
 - glatte komplexe 10
 - rationale 24
- LAURENTalgebra 51, 57
- LAURENTpolynome 51
- Leser
 - aufmerksamer 18
- LIEgruppe 18
 - komplexe 3, 7–9, 80
 - reelle 3
- Linearisierung 18
- lokales Modell
 - vom Typ $1I_b$ 63, 68, 70f.
 - vom Typ mI_0 30–35, 69
 - modifiziertes 40–42, 84
 - vom Typ mI_b 74, 84
- Maximalspektrum 52
- MINKOWSKISumme 43, 45
- Modell *siehe* lokales Modell
- Morphismus
 - torischer 56, 60
 - von Fächern *siehe*
 - Fächermorphismus
 - von Gittern *siehe*
 - Gittermorphismus
- N -Fächer *siehe* Fächer, N -
- N -Kegel *siehe* Kegel, N -
- Nullkegel 43, 56
- orthogonaler Vektorraum 44
- \mathbb{P}_1 16, 22
 - mit \mathbb{C}^* -Wirkung 14, 16f.
- parabolischer Fixpunkt *siehe*
 - Fixpunkt, parabolischer
- primitiver Gittervektor 47

- Prinzipalbündel *siehe* elliptisches
 Prinzipalbündel
 elliptisches 83
- Quotient 6, 9
 induzierte Wirkung 6
- Rang
 eines Gitters 8
- Rang eines Gitters 8
- relativ minimal *siehe* elliptische
 Faserung, relativ minimale
- relatives Inneres 44
- RIEMANNsche Fläche 10
 mit \mathbb{C}^* -Wirkung 14–17
- Ring
 normaler 53
- S_σ 48, 51
 endlich erzeugt 48
- saturiert *siehe* Unterhalbgruppe,
 saturierte
- Seite eines Kegels 46
- Seitenmorphismus 50, 54f., 57
- singulärer Wert 22, 24
- spitz *siehe* Kegel, spitzer
- Submersion 6f., 31f.
- submersiv *siehe* Submersion
- Tangentialdarstellung 17–19
- torische Varietät
 zu einem Fächer 59
 zu einem Kegel 53
- Torus
 algebraischer 3, 9, 54
 eindimensionaler komplexer *siehe*
 elliptische Kurve
- Toruswirkung 56, 59
- Überlagerung 28
 unbegrenzte, unverzweigte 11f.
- Untergruppe
 analytische *siehe* analytische
 Untergruppe
 von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 8
- Unterhalbgruppe
 erzeugende 49f.
- saturierte 49f.
- Varietät
 irreduzible 53
 normale 53, 59
 torische 53, 57
- Verheftungslemma 59
- Vielfachheit 24
- Wirkung 4
 effektive 4
 eigentlich diskontinuierliche 5
 freie 5
 holomorphe 5
 komplexe 5
 stetige 5
- Wirkungstorus *siehe* Toruswirkung
- Wurzelfaserung 37