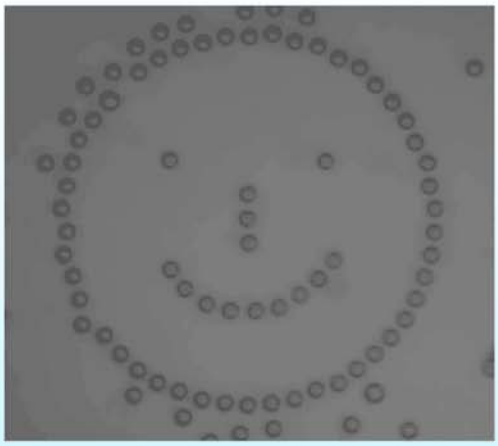
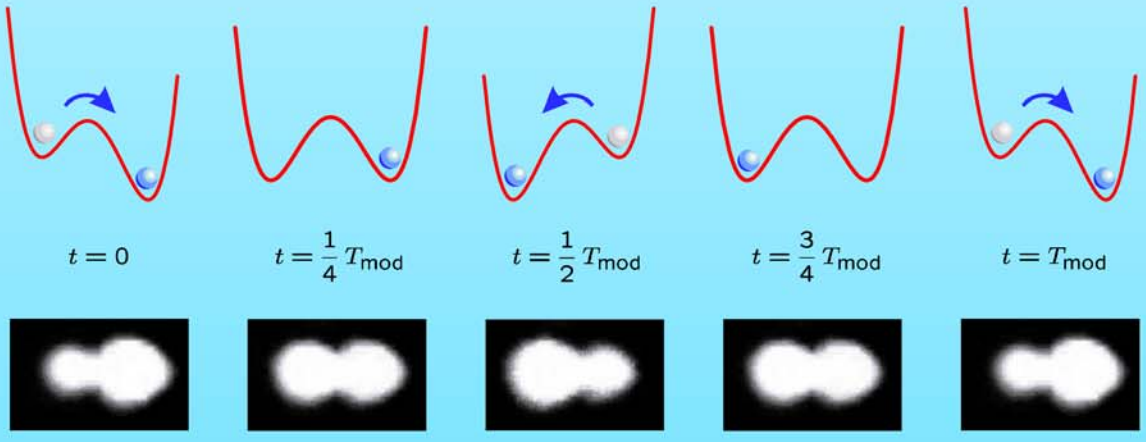


Stochastische Resonanz in kolloidalen Suspensionen



Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) an der Universität Konstanz, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Sektion, Fachbereich Physik – vorgelegt von **Carmen Schmitt** im November 2005

Dissertation der Universität Konstanz
Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 2005
1. Referent: Prof. Dr. Bechinger
2. Referent: Prof. Dr. Leiderer

Zusammenfassung

Der Begriff Stochastische Resonanz steht für einen kooperativen Effekt, der in nichtlinearen Systemen auftritt, wenn Rauschen und ein schwaches Signal zusammenspielen. Das Signal wird dann am besten übertragen, wenn die Signalfrequenz und die Rauschstärke optimal aufeinander abgestimmt sind. Das Standardbeispiel für ein System, in dem Stochastische Resonanz auftritt, ist ein überdämpftes Teilchen im modulierten Doppelmuldenpotential. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein solches Modellsystem experimentell realisiert, indem mit Hilfe optischer Pinzetten ein modulierbares Doppelmuldenpotential für ein kolloidales Teilchen geschaffen wurde. Im Gegensatz zu anderen Experimenten kann dieses System so gut charakterisiert werden, dass die experimentellen Ergebnisse quantitativ mit Simulationen einer einfachen Modelldynamik verglichen werden können. In einem einzelnen Doppelmuldensystem wurde die Trajektorie des Teilchens für verschiedene Modulationszeiten und verschiedene Modulationsamplituden beobachtet. Anhand dieser Messungen wurden drei Kriterien, die eine Charakterisierung der Stochastischen Resonanz in einem System mit konstantem Rauschen und variabler Modulationszeit erlauben, verglichen: Die Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung, die Fläche der Hysteresekurve und die mittlere Zeit, während der die Phase der Modulation und diejenige der Teilchenbewegung synchronisiert sind. Für hinreichend große Modulationsamplituden hat sich das letztgenannte als das empfindlichste Kriterium erwiesen.
Das Schlüsselexperiment dieser Arbeit sind Messungen an einem System von vier gekoppelten Teilchen, die jeweils in einem modulierten Doppelmuldenpotential fluktuieren. In diesem System konnte nachgewiesen werden, dass mit zunehmender Kopplungsstärke sowohl die Resonanz verstärkt als auch deren Position zu längeren Modulationszeiten hin verschoben werden kann. Das ist ein erster Schritt zur experimentellen Untersuchung komplexer Systeme auf einer mikroskopischen Ebene.
Den Abschluss der Arbeit bilden Experimente zur Resonanten Aktivierung. Während für die Stochastische Resonanz die Synchronisation zwischen Signal und Teilchenbewegung entscheidend ist, geht es bei der Resonanten Aktivierung darum, unter welchen Bedingungen das Teilchen einen metastabilen Zustand im Mittel am schnellsten verlässt. Wir haben beide Phänomene am gleichen System untersucht und können an diesem Beispiel zeigen, dass die „Resonanzfrequenz“ für die Resonante Aktivierung deutlich größer ist als diejenige für die Stochastische Resonanz.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Motivation: Stochastische Resonanz **3**

3 Theoretische Grundlagen **7**
3.1 Ratengleichungen im Zwei-Zustands-System 7
3.1.1 Unmodulierter Fall 9
3.1.2 Zeitabhängige Raten 10
3.1.3 Überdämpftes Teilchen im Doppelmuldenpotential 11
3.2 Wartezeitenverteilungen 13

4 Umsetzung des Modellsystems im Experiment **17**
4.1 Überdämpftes Brownsches Teilchen 17
4.2 Doppelmuldenpotential 18
4.3 Experimenteller Aufbau 22
4.3.1 Kolloidales System 22
4.3.2 Videomikroskopie 24
4.3.3 Optische Pinzette 25
4.4 Charakterisierung des Systems 30
4.4.1 Stabilität 30
4.4.2 Potentialmessungen 32

5 Stochastische Resonanz im einzelnen System **35**
5.1 Charakterisierung des Systems 35
5.2 Wartezeitenverteilung 38
5.2.1 Vergleich mit Langevin-Simulationen 41
5.3 Hysterese 43
5.4 Phasensynchronisation 47
5.5 Einfluss der Modulationsamplitude 52

5.6 Vergleich der Kriterien 57

6 Gekoppelte Systeme **59**
6.1 Experimentelle Situation 60
6.1.1 Kopplung 60
6.1.2 Konfiguration des gekoppelten Systems 61
6.1.3 Charakterisierung der Doppelmuldenpotentiale 62
6.2 Array Enhanced Stochastic Resonance 63
6.2.1 Verstärkung der Stochastischen Resonanz 64
6.2.2 Verschiebung der Resonanz 68

7 Resonante Aktivierung **71**
7.1 Resonante Aktivierung im Doppelmuldensystem 72
7.2 Vergleich mit Simulationen 77
7.2.1 Mittlere Wartezeit und *Mean First Passage Time* 80
7.3 Einfluss der Modulationsform 81
7.4 Ausblick: Ausgedehnte Systeme 82

8 Diskussion und Ausblick **85**

Einleitung

Das Jahr 2005 wurde von den Vereinten Nationen zum *Internationalen Jahr der Physik* erklärt. Die damit verbundenen Feierlichkeiten und Veranstaltungen haben zwei Blickrichtungen: zum einen zurück in Einsteins „Wunderjahr“ 1905 und zum anderen voraus auf die Physik des 21. Jahrhunderts. In dieser Hinsicht passt die vorliegende Dissertation sehr gut ins Jahr 2005. Sie baut auf eine der grundlegenden Arbeiten, die Einstein vor 100 Jahren veröffentlichte, auf und sie behandelt ein Phänomen, das erst vor knapp 25 Jahren entdeckt wurde und das durchaus das Potential hat, eine wichtige Rolle nicht nur in der Physik, sondern in der gesamten Naturwissenschaft unseres Jahrhunderts zu spielen. Bei ersterer handelt es sich um Einsteins Abhandlung zur Brownschen Bewegung [Ein05], bei letzterem um die Stochastische Resonanz. Dieser Begriff steht für ein Phänomen, das im ersten Moment paradox erscheint: In nichtlinearen stochastischen Systemen können Signale durch Rauschen verstärkt werden. Das Auftreten von Stochastischer Resonanz setzt das Vorhandensein einer Energiebarriere, eines schwachen Modulationssignals und einer Rauschquelle voraus. Diese Bedingungen sind so allgemein, dass wir erwarten, den Effekt in einer weiten Klasse von Systemen vorzufinden. Tatsächlich gibt es inzwischen Hinweise auf Stochastische Resonanz in so unterschiedlichen Gebieten wie der Biologie [Hän02], der Medizin [Pri02], der Chemie [Alc05], der Klimaforschung [Gan02] und natürlich der Physik [McN88]. Oft sind dabei komplexe Systeme wie zum Beispiel ein Löffelstör [Rus99], dem die richtige Dosis an Rauschen die Beutesuche erleichtert, Gegenstand der Untersuchung. Hier ist anzunehmen, dass sich die Stochastische Resonanz nicht nur auf der Ebene eines Gesamtsystems abspielt, sondern dass wir das Ergebnis dessen sehen, was in miteinander wechselwirkenden Untereinheiten geschieht.

Wie viel Beachtung die Stochastische Resonanz allein in den letzten 17 Jahren gefunden hat, lässt die Tatsache erahnen, dass der erste große Übersichtsartikel [Gam98], der 1998 zu diesem Thema veröffentlicht wurde, bereits mehr als 1000 mal zitiert wurde[1]. Der weitaus größte Teil der Arbeiten kommt dabei aus der Theorie bzw. der Numerik, während experimentelle Untersuchungen immer noch die Ausnahme bilden. Vor allem fehlt es bisher

[1] Quelle: Science Citation Index

weitgehend an grundlegenden Experimenten, die es ermöglichen, das Phänomen der Stochastischen Resonanz auf einem mikroskopischen Niveau zu untersuchen, und zwar nicht nur in einem Einzelsystem, sondern vor allem in komplexeren Anordnungen mehrerer gekoppelter Systeme. An diesem Punkt setzt die vorliegende Arbeit an.
Das in der Literatur am häufigsten verwendete Modellsystem für Stochastische Resonanz betrachtet ein überdämpftes Brownsches Teilchen in einem modulierten Doppelmuldenpotential. Simon und Libchaber [Sim92] haben schon Anfang der neunziger Jahre einen sehr eleganten Weg gefunden, dieses Modellsystem in einem Experiment zu realisieren. Sie haben mit Hilfe von optischen Pinzetten [Ash86] ein Doppelmuldenpotential für ein suspendiertes kolloidales Teilchen geschaffen. Durch eine Änderung der Lichtintensität in den einzelnen Mulden konnten sie das Potential modulieren. Wir bauen auf dieser Idee auf, wobei es uns der technische Fortschritt erlaubt, das Experiment deutlich besser zu kontrollieren. So können wir die Stochastische Resonanz in unserem System anhand verschiedener Kriterien charakterisieren und unsere experimentellen Ergebnisse quantitativ mit Langevin-Simulationen der Modelldynamik vergleichen. Die größte Stärke unseres Experiments besteht jedoch darin, dass wir das Verhalten gekoppelter Systeme untersuchen können. So ist es uns gelungen, erstmals in einem Experiment, das nicht rein auf einer elektronischen Schaltung basiert, nachzuweisen, dass die Stochastische Resonanz durch die Kopplung mehrerer Einzelsysteme verstärkt werden kann, und dass sich die Bedingungen, bei denen die Detektion eines Signals am besten funktioniert, mit der Kopplung ändern. Das bedeutet, dass die Kopplung eine entscheidende Rolle bei der optimalen Anpassung eines komplexen Systems an äußere Bedingungen spielen kann.
Nach einer kurzen Einführung in die Stochastische Resonanz (Kapitel 2) und in deren theoretische Grundlagen (Kapitel 3) werden wir uns in Kapitel 4 mit der Umsetzung des oben erwähnten Modellsystems in unserem Experiment beschäftigen. Die Vorstellung und Diskussion von Experimenten mit einem Teilchen in einem modulierten Doppelmuldenpotential folgt in Kapitel 5. Kapitel 6 ist schließlich den Messungen zur Stochastischen Resonanz an einem System von vier gekoppelten Teilchen gewidmet. In Kapitel 7 untersuchen wir ein weiteres rauschinduziertes Phänomen in unserem Modellsystem: Resonante Aktivierung. Dabei steht nicht wie bei der Stochastischen Resonanz die Synchronisation zwischen Modulationssignal und Teilchenbewegung im Vordergrund, sondern die Abhängigkeit der Sprungrate zwischen den Minima des Doppelmuldenpotentials von der Modulationsfrequenz. Den Abschluss der Arbeit bilden die zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse und ein Ausblick (Kapitel 8).

Motivation: Stochastische Resonanz

> Dieses Kapitel vermittelt einen kurzen Einblick in das weite Gebiet der Stochastischen Resonanz. Es wird beschrieben, in welchem Zusammenhang das Phänomen entdeckt wurde und wie sich anhand eines einfachen Modells erklären lässt, dass Rauschen bei der Detektion schwacher Signale nützlich sein kann.

Obwohl es starke Anzeichen dafür gibt, dass die Stochastische Resonanz ein sehr weit verbreitetes Phänomen darstellt, wurde sie erst Anfang der achtziger Jahre entdeckt. Damals hat ein Team um Roberto Benzi [Ben82] nach der Ursache für das periodische Auftreten von Eiszeiten gesucht. Beobachtungen lassen vermuten, dass die Temperaturen auf der Erde, abgesehen von dramatischen Änderungen auf großen Zeitskalen, um stabile Werte fluktuieren. Ob wir eine Eiszeit oder eine wärmere Periode haben, hängt im Wesentlichen davon ab, wie viel Strahlung von der Sonne auf die Erde einfällt und wie viel davon wieder reflektiert wird. Einfache Energiebilanz-Modelle weisen zwei stabile Gleichgewichtssituationen auf, die als Eiszeit bzw. Warmzeit interpretiert wurden. Anhand von Messungen der Verhältnisse von Sauerstoff-Isotopen in fossilem Plankton aus Tiefsee-Kernen aus dem Pazifik kann man Daten zur Variation des globalen Eisvolumens, also zur Verteilung von Eiszeiten und Warmzeiten in der Vergangenheit, gewinnen. Diese Daten zeigen über die letzten 700 000 Jahre eine auffällige Periodizität mit einer Periode von ca. 100 000 Jahren. Der einzige bekannte Effekt, der das Erdklima beeinflussen könnte und der gleichzeitig auf einer Zeitskala von etwa 100 000 Jahren variiert, ist die Variation der Exzentrizität der Erdbahn um die Sonne. Mit der Exzentrizität ändert sich die Sonneneinstrahlung auf die Erde. Allerdings zeigen Energiebilanz-Modelle, dass der Einfluss dieser Änderung allein nicht ausreicht, um einen Wechsel zwischen Eiszeiten und Warmzeiten herbeizuführen. An diesem Punkt kommt die Stochastische Resonanz ins Spiel: Wenn kurzzeitige Fluktuationen, die das Erdklima beeinflussen, wie z.B. jahreszeitliche Fluktuationen, Variationen der Meerestemperatur oder Vulkanausbrüche, mit den periodisch variierenden Auswirkungen der Änderung in der Exzentrizität zusammenwirken, dann könnte das periodische Auftreten der Eiszeiten erklärt werden. Am einfachsten lässt sich das anhand des folgenden

mechanischen Modells verstehen: Ausgangspunkt ist ein überdämpftes Teilchen in einem symmetrischen Doppelmuldenpotential (siehe Abbildung 2.1a), dessen Minima Eiszeiten und Warmzeiten entsprechen.

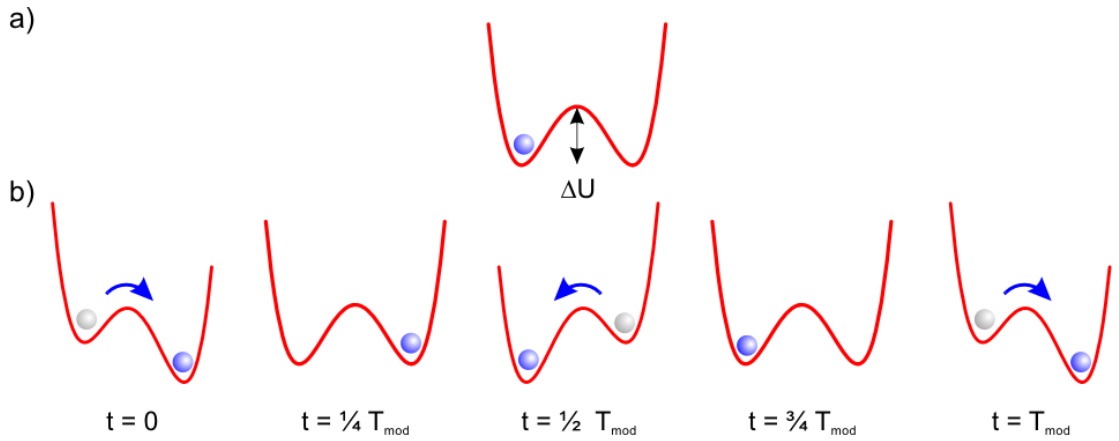


Abbildung 2.1: Schematische Skizze des mechanischen Modells für die Stochastische Resonanz. a) Symmetrisches Doppelmuldenpotential mit Energiebarriere ΔU. b) Modulation des Doppelmuldenpotentials mit der Modulationszeit T_{mod}. Die Sprünge des Teilchens sind für den Fall optimaler Synchronisation angedeutet.

Zufällige Fluktuationen, die wir ab jetzt als Rauschen bezeichnen werden, bewirken, dass das Teilchen in der Potentialmulde, in der es sich befindet, fluktuiert. Gelegentlich hat das Teilchen genug Energie, um die Potentialbarriere ΔU zu überwinden, und es springt auf die andere Seite. Wie oft dies im Mittel geschieht, hängt von der Stärke D des Rauschens ab. Die mittlere Zeit zwischen zwei Sprüngen ist durch die Kramerszeit T_{K} gegeben, wobei gilt [Kra40]:

$$T_{\mathrm{K}} \propto \exp\left[-\frac{\Delta U}{D}\right] \quad . \tag{2.1}$$

Damit haben wir ein Modell für das Verhalten des Erdklimas, wenn wir nur das Rauschen berücksichtigen. Es gibt immer wieder einen Wechsel zwischen Eiszeiten und Warmzeiten, aber die Abstände zwischen beispielsweise zwei Eiszeiten sind statistisch verteilt.
Wenn wir andererseits die Fluktuationen ignorieren und nur die Auswirkungen der periodischen Änderung in der Exzentrizität der Erdbahn betrachten, dann entspricht das einer Modulation des Doppelmuldenpotentials (vgl. Abbildung 2.1b). Diese Modulation ist jedoch zu schwach, um die Bistabilität des Potentials aufzuheben. Ohne Rauschen kann das Teilchen also die Potentialbarriere nicht überqueren. Ein Wechsel zwischen Eiszeiten und Warmzeiten würde in diesem Fall überhaupt nicht stattfinden.
Wenn jedoch beide Einflüsse, das Rauschen und die periodische Modulation, zusammenwirken, dann gibt es aufgrund des Rauschens Übergänge zwischen den beiden metastabilen Zuständen, und die periodische Modulation bewirkt, dass diese Übergänge eine zeitliche Struktur erhalten, weil eine Überquerung der Potentialbarriere sehr viel wahrscheinlicher wird, wenn die Barriere kleiner ist. Wie regelmäßig diese Struktur wird, hängt bei ge-

gebener Modulationsperiode von der Stärke des Rauschens ab. Wenn das Rauschen sehr schwach ist, dann besteht nur eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen die Potentialbarriere überwindet. In diesem Fall wird es zwar sehr wahrscheinlich zu einem Zeitpunkt springen, an dem die Potentialbarriere, die es überwinden muss, minimal ist. Es wird allerdings nicht jeden günstigen Zeitpunkt nutzen können, so dass zwischen zwei Sprüngen häufig auch mehrere Modulationsperioden verstreichen. Wenn umgekehrt das Rauschen sehr stark ist, dann werden die Sprünge des Teilchens sehr häufig und sie sind nicht mehr mit dem Modulationssignal korreliert. Dazwischen gibt es einen Bereich, in dem das Rauschen gerade so stark ist, dass das Teilchen mit hoher Wahrscheinlichkeit einmal pro Modulationsperiode hin und zurück springt. Hier wird das schwache Modulationssignal durch das Rauschen verstärkt. Diese „Resonanz“ ist als Übereinstimmung von zwei Zeitskalen zu verstehen: Die Verstärkung wird optimal, wenn die rauschabhängige Kramerszeit, die eine statistische Größe ist, ungefähr mit der halben Modulationszeit, einer deterministischen Größe, übereinstimmt.
Ob die Eiszeiten tatsächlich periodisch auftreten und ob diese Periodizität mit den Parametern der Erdbahn zusammenhängt, ist umstritten [Win92, Imb93]. Das Modell der Stochastischen Resonanz hat jedoch längst andere Anwendungen gefunden. So wurde die Stochastische Resonanz experimentell zuerst in einem Schmitt-Trigger [Fau83], dann in einem Ringlaser [McN88] und in zahlreichen anderen Systemen nachgewiesen. Neue Impulse hat das Gebiet in den neunziger Jahren vor allem durch die Arbeiten der Gruppe von Frank Moss erhalten, wo biologische Experimente durchgeführt wurden. Eines der bekanntesten dieser Experimente ist dasjenige an Haarzellen von Flusskrebsen, in dem gezeigt wurde, dass Rauschen die Detektion von schwachen, kohärenten Wasserbewegungen, wie sie zum Beispiel ein herannahender Raubfisch verursacht, verbessert [Dou93]. Und es könnte sein, dass auch wir Menschen unsere Sinne durch Rauschen schärfen können: In der Gruppe von John Collins wurde beispielsweise gezeigt, dass der Tastsinn von Menschen durch Rauschen verbessert werden kann [Col96], oder dass wir das Gleichgewicht besser halten können, wenn unsere Füße sehr schwache unregelmäßige Signale erhalten [Pri02]. Hier ist Raum für praktische Anwendungen. Zum Beispiel könnten „Rauschsocken“ vor allem älteren Menschen dabei helfen, sicherer zu stehen und zu gehen [Eis02].
In eine ganz andere Richtung geht eine aktuelle Arbeit: Badzey und Mohanty haben Stochastische Resonanz in bistabilen nanomechanischen Oszillatoren beobachtet [Bad05]. Dieses Experiment ist aus verschiedenen Gründen interessant [Bul05]. Zum einen besteht die Möglichkeit, dass ähnliche Systeme wie die jetzt untersuchten als nanomechanische Speicher Anwendung finden, womit die Stochastische Resonanz technologische Bedeutung erlangen könnte. Zum anderen hat die Gruppe um Mohanty auch schon Oszillatoren realisiert, deren Frequenzen in einem Bereich liegen, in dem Quanteneffekte eine Rolle spielen. In solchen Systemen könnte die Stochastische Resonanz vielleicht benutzt werden, um ein quantenmechanisches Signal zu verstärken und zu kontrollieren.

Dieses Kapitel kann nur einen Bruchteil der Aktivitäten auf dem Gebiet der Stochastischen Resonanz ansprechen. Mehr Informationen, auch zu theoretischen Arbeiten, finden sich zum Beispiel in den Übersichtsartikeln [Gam98, Ani98, Wie02, Wel04].

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir das einfachste Beispiel für die theoretische Behandlung der Stochastischen Resonanz vor: Wir betrachten ein Zwei-Zustands-System anhand von Ratengleichungen. Auf dieser Grundlage berechnen wir das Signal-Rausch-Verhältnis für das Standardbeispiel des überdämpften Teilchens im Doppelmuldenpotential. Außerdem führen wir mit der Wartezeitenverteilung eine Größe ein, die wir später zur Analyse unserer Messdaten nutzen werden.

Ein auch nur annähernd kompletter Überblick zur Theorie der Stochastischen Resonanz würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen. Deshalb behandeln wir in diesem Kapitel nur das System, dessen Beschreibung am übersichtlichsten ist. Dabei handelt es sich um ein Zwei-Zustands-System, das wir zuerst in allgemeiner Form anhand von Ratengleichungen betrachten.

3.1 Ratengleichungen im Zwei-Zustands-System

Bei einem Zwei-Zustands-System handelt es sich, wie der Name schon sagt, um ein System, das nur zwei Zustände, die wir im Folgenden mit $\pm c$ bezeichnen werden, einnehmen kann. Auch kontinuierliche Systeme, wie beispielsweise das des überdämpften Teilchens im Doppelmuldenpotential, lassen sich unter gewissen Bedingungen auf ein Zwei-Zustands-System reduzieren. Die Ergebnisse der nächsten Abschnitte sind somit für eine weite Klasse von Systemen gültig.
Zwei-Zustands-Systeme lassen sich sehr anschaulich anhand von Ratengleichungen beschreiben. Wir werden uns im Folgenden sehr nah an die Ausführungen in [Wie02] und [McN89] halten. Abbildung 3.1 veranschaulicht die Ausgangssituation am Beispiel eines symmetrischen Doppelmuldenpotentials. Ein Teilchen kann sich in einer der beiden Mulden aufhalten, sowie mit der Rate W_- von $-c$ nach c und mit der Rate W_+ von c nach $-c$ springen. Diese Sprungraten werden moduliert, wenn das Potential moduliert wird, wie in Abbildung 3.1 rechts angedeutet.

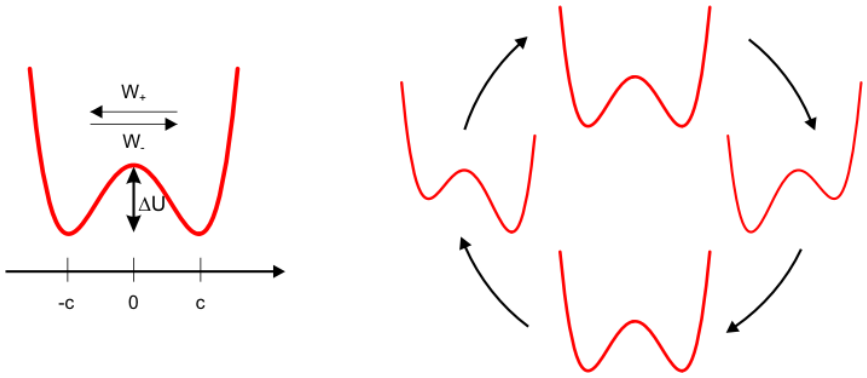


Abbildung 3.1: Modellsystem

Eine Größe, anhand derer die Stochastische Resonanz in sehr vielen Fällen charakterisiert wird, ist das Signal-Rausch-Verhältnis. Dessen Berechnung erfolgt in unserem Modell in 6 Schritten:

1. Ratengleichung aufstellen
2. Ratengleichung integrieren
3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten (z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort c befindet, wenn es zum Zeitpunkt t_0 am Ort $-c$ war) und Gleichgewichts-Wahrscheinlichkeiten bestimmen
4. Autokorrelationsfunktion mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten berechnen
5. Leistungsspektrum über das Wiener-Khintchin-Theorem aus der Autokorrelationsfunktion gewinnen
6. Signal-Rausch-Verhältnis aus dem Leistungsspektrum berechnen

Die Aufstellung der Ratengleichungen ist trivial. Wenn wir mit $n_\pm$ die Besetzungswahrscheinlichkeit der rechten bzw. linken Mulde bezeichnen, so lauten die Gleichungen:

$$\dot{n}_+ = W_- n_- - W_+ n_+, \tag{3.1}$$
$$\dot{n}_- = W_+ n_+ - W_- n_- \ . \tag{3.2}$$

Da sich das System in einem der beiden Zustände befinden muss, gilt $n_+ + n_- = 1$. Damit lassen sich die beiden Ratengleichungen zu einer zusammenfassen:

$$\dot{n}_+ = -(W_- + W_+) n_+ + W_- \ . \tag{3.3}$$

Bevor wir Gleichung (3.3) integrieren können, müssen wir Annahmen über die Raten $W_\pm$ treffen.

3.1.1 Unmodulierter Fall

Wir betrachten der Einfachheit halber zunächst den Fall zeitlich konstanter Raten, $W_- = W_+ = W_0$. Hier ist die Integration von Gleichung (3.3) leicht auszuführen und man erhält mit der Anfangsbedingung $n_+(t_0)$:

$$n_+(t) = \left[n_+(t_0) - \frac{1}{2}\right] \mathrm{e}^{-2W_0(t-t_0)} + \frac{1}{2} \; . \tag{3.4}$$

Aus dieser Lösung der Ratengleichung (3.3) können nun die Wahrscheinlichkeiten, die nachher in die Autokorrelationsfunktion eingehen, direkt berechnet werden. Mit $n_+(t_0) = 1$ und $t - t_0 = \tau$ erhalten wir

$$p_{\mathrm{bed.}}(c, t+\tau | c, t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2W_0\tau} + \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zum Zeitpunkt $t + \tau$ am Ort c ist, wenn es sich zum Zeitpunkt t ebenfalls am Ort c aufgehalten hat. Die anderen drei bedingten Wahrscheinlichkeiten, die wir weiter unten benötigen, werden analog berechnet (mit $n_+(t_0) = 0$, wenn das Teilchen anfangs auf der linken Seite war). Die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten erhält man mit der Wahl $t_0 \to -\infty$:

$$p_{\mathrm{GG}}(c) = n_+(t_0 \to -\infty) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad p_{\mathrm{GG}}(-c) = 1 - p_{\mathrm{GG}}(c) = \frac{1}{2} \; . \tag{3.6}$$

Die Autokorrelationsfunktion reduziert sich für das hier betrachtete Zwei-Zustands-Modell auf eine Summe von vier Termen:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \quad & c \cdot c \cdot p_{\mathrm{bed.}}(c, t+\tau|c,t) \cdot p_{\mathrm{GG}}(c,t) \\ + \; & c \cdot (-c) \cdot p_{\mathrm{bed.}}(c, t+\tau|-c,t) \cdot p_{\mathrm{GG}}(-c,t) \\ + \; & (-c) \cdot c \cdot p_{\mathrm{bed.}}(-c, t+\tau|c,t) \cdot p_{\mathrm{GG}}(c,t) \\ + \; & (-c) \cdot (-c) \cdot p_{\mathrm{bed.}}(-c, t+\tau|-c,t) \cdot p_{\mathrm{GG}}(-c,t) \; . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mit den oben berechneten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = c^2 \mathrm{e}^{-2W_0\,\tau} \; . \tag{3.8}$$

Mit dem Wiener-Khintchin-Theorem [Ris89] kann schließlich das Leistungsspektrum berechnet werden,

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= 4\int_0^\infty \langle x(t)x(t+\tau)\rangle \cos(\Omega\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= 4c^2 \frac{2W_0}{\Omega^2 + 4W_0^2} \quad , \end{aligned} \tag{3.9}$$

eine Lorentzkurve mit Halbwertsbreite $2W_0$.

3.1.2 Zeitabhängige Raten

Wir nehmen nun an, dass die Raten für das modulierte Potential die Form

$$W_\pm = W_0 \mp \epsilon \cos(\omega t) \tag{3.10}$$

annehmen. ϵ bezeichnet dabei die Amplitude, ω die Kreisfrequenz des Signals. Die Ratengleichung lautet dann

$$\dot{n}_+ = -2W_0 n_+ + W_0 + \epsilon \cos(\omega t) \ . \tag{3.11}$$

In der Lösung dieser Differentialgleichung spiegelt sich die Modulation in zwei zusätzlichen periodischen Termen wider:

$$n_+(t) = \left[n_+(t_0) - \frac{1}{2} - \frac{\epsilon \cos(\omega t_0 - \phi)}{\sqrt{4W_0^2 + \omega^2}} \right] \mathrm{e}^{-2W_0(t-t_0)} + \frac{1}{2} + \frac{\epsilon \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{4W_0^2 + \omega^2}} \ . \tag{3.12}$$

ϕ ist dabei eine Integrationskonstante. Analog zum statischen Fall kann nun die Autokorrelationsfunktion berechnet werden und man erhält

$$\begin{aligned} &\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \\ &c^2 \left(\mathrm{e}^{-2W_0\tau} - 4\mathrm{e}^{-2W_0\tau} \frac{\epsilon^2 \cos^2(\omega t - \phi)}{4W_0^2 + \omega^2} + \frac{4\epsilon^2}{4W_0^2 + \omega^2} \cos(\omega t + \phi)\cos(\omega t + \omega\tau + \phi) \right) \ . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Aufgrund der Modulation hängt die Autokorrelationsfunktion noch von t und τ ab. Eine Phasenmittelung

$$C(\tau) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \langle x(t)x(t+\tau)\rangle \mathrm{d}t \tag{3.14}$$

führt zu[1]

$$C(\tau) = \left[c^2 \left(1 - \frac{2\epsilon^2}{4W_0^2 + \omega^2} \right) \right] \mathrm{e}^{-2W_0\tau} + \left[\frac{2c^2\epsilon^2}{4W_0^2 + \omega^2} \right] \cos(\omega\tau) \ . \tag{3.15}$$

Das Leistungsspektrum ist dann durch

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= 4 \int_0^\infty C(\tau) \cos(\Omega\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \underbrace{4c^2 \left(1 - \frac{2\epsilon^2}{4W_0^2 + \omega^2} \right) \frac{2W_0}{4W_0^2 + \Omega^2}}_{\text{Hintergrund}} + \underbrace{\frac{4\pi c^2 \epsilon^2}{4W_0^2 + \omega^2} \delta(\Omega - \omega)}_{\text{Peak}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

gegeben. Dabei ist die Gesamtleistung unabhängig von der Modulationsamplitude ϵ konstant. Wenn mit wachsender Amplitude die Leistung bei der Signalfrequenz zunimmt, wird der Hintergrund entsprechend kleiner.

[1] Das Zeitmittel von $\cos^2(\omega t - \phi)$ ist $\frac{1}{2}$, das von $\cos(\omega t + \phi)\cos(\omega t + \omega\tau + \phi)$ ist $\frac{1}{2}\cos(\omega\tau)$.

Das Signal-Rausch-Verhältnis SNR lässt sich an Gleichung (3.16) direkt ablesen als das Verhältnis des Koeffizienten der Delta-Funktion und des Hintergrundwerts bei $\Omega = \omega$:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\pi\epsilon^2}{2W_0}\left(1 - \frac{2\epsilon^2}{4W_0^2 + \omega^2}\right)^{-1} \overset{\epsilon\ll 1}{\approx} \frac{\pi\epsilon^2}{2W_0} \ . \tag{3.17}$$

Bis hier gilt die Theorie allgemein für ein moduliertes Zwei-Zustands-System mit Übergangsraten $W_\pm = W_0 \mp \epsilon\cos(\omega t)$. Die wesentlichen Ergebnisse sind, dass

- das Leistungsspektrum einen lorentzförmigen Hintergrund mit der Halbwertsbreite W_0 besitzt,
- das Leistungsspektrum einen Delta-Peak bei der Signalfrequenz aufweist,
- der Effekt des Signals darin besteht, Leistung vom Hintergrund in den Delta-Peak zu transferieren und dass
- das Signal-Rausch-Verhältnis für kleine Modulationsamplituden durch $\mathrm{SNR} = \frac{\pi\epsilon^2}{2W_0}$ gegeben ist.

3.1.3 Überdämpftes Teilchen im Doppelmuldenpotential

Damit die Ergebnisse der allgemeinen Betrachtung des letzten Abschnitts auf ein spezielles System angewandt werden können, müssen die Raten $W_\pm$ durch Systemparameter ausgedrückt werden. Wir betrachten hier das Standardbeispiel für Stochastische Resonanz, ein überdämpftes Teilchen im Doppelmuldenpotential (vgl. Kapitel 2). In Anwesenheit eines modulierenden Signals hat das Doppelmuldenpotential die Form

$$U(x,t) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 - Ax\cos\omega t \ . \tag{3.18}$$

Dabei sind a und b Parameter des symmetrischen Doppelmuldenpotentials und A ist die Modulationsamplitude. Die Parameter a, b und A können wir auch durch die Höhe der Potentialbarriere im unmodulierten Fall, $\Delta U = a^2/(4b)$, die Position $\pm c = \pm\sqrt{a/b}$ der Minima des unmodulierten Potentials und die Amplitude der Modulation der Potentialbarriere, $A_{\Delta U} = A\,c$ ersetzen:

$$U(x,t) = \Delta U\left[-2\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{x}{c}\right)^4\right] - A_{\Delta U}\left(\frac{x}{c}\right)\cos\omega t \ . \tag{3.19}$$

Die Bewegungsgleichung für das überdämpfte Teilchen lautet

$$\dot{x} = -U'(x,t) + \xi(t) \ . \tag{3.20}$$

Der Punkt steht für die Differentiation nach der Zeit, der Strich für die Ableitung nach x. $\xi(t)$ steht für Gaußsches weißes Rauschen mit $\langle\xi(t)\rangle = 0$ und $\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = 2D\,\delta(\tau)$.

Für das unmodulierte Doppelmuldenpotential ist die Übergangsrate durch den Kehrwert der Kramerszeit [Kra40, Hän90]

$$T_{\mathrm{K}} = W_{\mathrm{K}}^{-1} = \frac{2\pi e^{\Delta U/D}}{[|U''(0)|\, U''(c)]^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{a} e^{\Delta U/D} \tag{3.21}$$

gegeben, falls die Barriere ΔU groß gegenüber dem Rauschen D ist. Entscheidend für die Kramerszeit ist also die Krümmung des Potentials in den Extrema und die Höhe der Barriere. Für kleine Modulationsamplituden können wir die Raten $W_{\pm}$ näherungsweise bestimmen, indem wir die modulierte Barrierenhöhe in Gleichung (3.21) einsetzen:

$$W_{\pm}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}\pi} \exp[-(\Delta U \pm A_{\Delta U} \cos \omega t)/D] \; . \tag{3.22}$$

Da die Kramerszeit unter der Annahme hergeleitet wird, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte innerhalb einer Mulde im Gleichgewicht ist, gilt Gleichung 3.22 nur, wenn die Modulation so langsam ist, dass diese Bedingung immer noch erfüllt ist.
Ausgerüstet mit einem Ausdruck für die Übergangsraten $W_{\pm}$ müssen wir diesen jetzt nur noch in die Gleichung (3.10) entsprechende Form bringen, um beispielsweise mit Hilfe von Gleichung (3.17) das Signal-Rausch-Verhältnis zu berechnen. Dazu setzen wir

$$W_0 = \frac{a}{\sqrt{2}\pi} \exp[-\Delta U/D] \quad \text{und} \tag{3.23}$$

$$\epsilon = \frac{a\, A_{\Delta U}}{\sqrt{2}\pi\, D} \exp[-\Delta U/D] \; . \tag{3.24}$$

Dabei haben wir die Exponentialfunktion in Gleichung (3.22) im zweiten Term im Exponenten für kleine Amplituden $A_{\Delta U}$ bis zur ersten Ordnung entwickelt. Für das Signal-Rausch-Verhältnis erhalten wir damit für schwache Modulation (Gleichung (3.17))

$$\mathrm{SNR} \approx \frac{\pi \epsilon^2}{2W_0} \approx \frac{a(A_{\Delta U})^2}{2\sqrt{2}\, D^2} \exp[-\Delta U/D] \; . \tag{3.25}$$

Der Verlauf des Signal-Rausch-Verhältnisses mit D ist in Abbildung 3.2 aufgetragen. Für sehr schwaches Rauschen geht die Funktion in (3.25) gegen null, für starkes Rauschen fällt sie mit $1/D^2$ ab. In diesem Limit gilt zwar die Kramersformel nicht mehr, aber qualitativ erwarten wir auf jeden Fall, dass das SNR für genügend starkes Rauschen abfallen muss. Dazwischen, für $D = \Delta U/2$, wird das Signal-Rausch-Verhältnis maximal, wie wir aus Gleichung (3.25) leicht bestimmen können. Hier sehen wir also die Signatur der Stochastischen Resonanz: Die Signalübertragung wird für eine endliche Rauschstärke optimal.
Was wir nur indirekt sehen, wenn wir das Signal-Rausch-Verhältnis betrachten, ist die Synchronisation zwischen dem Signal und der Teilchenbewegung. Wir werden im Folgenden ein weiteres Kriterium für die Stochastische Resonanz kennen lernen, in dem dieser Aspekt deutlicher zum Ausdruck kommt.

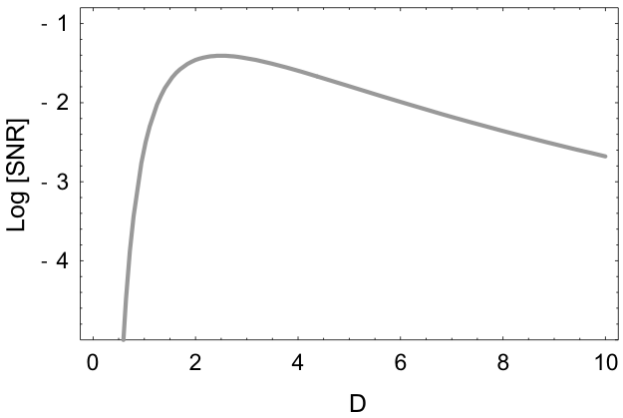


Abbildung 3.2: Beispiel für den Verlauf des Signal-Rausch-Verhältnisses SNR für schwache Modulation (für $a = 2$, $A_{\Delta U} = 4$, $\Delta U = 5$).

3.2 Wartezeitenverteilungen

Eine sehr anschauliche Art, die Synchronisation zwischen dem Eingangssignal und der Antwort des Systems zu betrachten, führt direkt über die Trajektorie des Teilchens. Abbildung 3.3a) zeigt Trajektorien für ein Teilchen in einem modulierten Doppelmuldenpotential. Die Modulation ist in allen drei Fällen gleich; sie ist im mittleren Bild eingezeichnet. Von unten nach oben nimmt die Rauschintensität D zu. Hier finden wir das Verhalten wieder, das wir schon im Zusammenhang mit dem Modell zur Erklärung der Periodizität der Eiszeiten diskutiert haben. Schwaches Rauschen (unteres Bild) reicht nicht aus, um das Teilchen dem Signal folgen zu lassen. Wird die Rauschintensität auf einen optimalen Wert erhöht, so folgt das Teilchen fast perfekt dem Signal (mittleres Bild). Für noch stärkeres Rauschen (oberes Bild) springt das Teilchen deutlich häufiger als das Signal günstige Bedingungen vorgibt.
Zur Quantifizierung der Synchronisation bietet es sich an, die Verteilung der Zeiten zu betrachten, die das Teilchen jeweils in einer Mulde verbringt. Mathematisch gesehen wird dazu der kontinuierliche stochastische Prozess auf einen stochastischen Punktprozess abgebildet. Dazu werden zwei Schwellen gesetzt, beispielsweise in den Minima der symmetrischen Doppelmulde (vergleiche Abbildung 3.4). Die Wartezeiten t_{res} (*residence times*) werden dann folgendermaßen bestimmt: Zum Zeitpunkt t_0 überquert das Teilchen die untere Schwelle nach unten. t_1 ist dann die Zeit, zu der das Teilchen als nächstes die obere Schwelle nach oben überquert, t_2 diejenige, zu der das Teilchen dann wieder die untere Schwelle nach unten überquert usw. Die Wartezeiten $t_{\mathrm{res}}(i)$ ergeben sich dann aus $t_{\mathrm{res}}(i) = t_i - t_{i-1}$.

Für das (unmodulierte) symmetrische bistabile System gehorchen die Wartezeiten der Poisson-Statistik mit einer exponentiellen Verteilung [Pap65]

$$N(t_{\mathrm{res}}) = \frac{1}{T_{\mathrm{K}}}\,\mathrm{e}^{-T/T_{\mathrm{K}}}\ . \tag{3.26}$$

T_{K} bezeichnet die Kramerszeit (siehe Gleichung (3.21)). Für das modulierte System ist

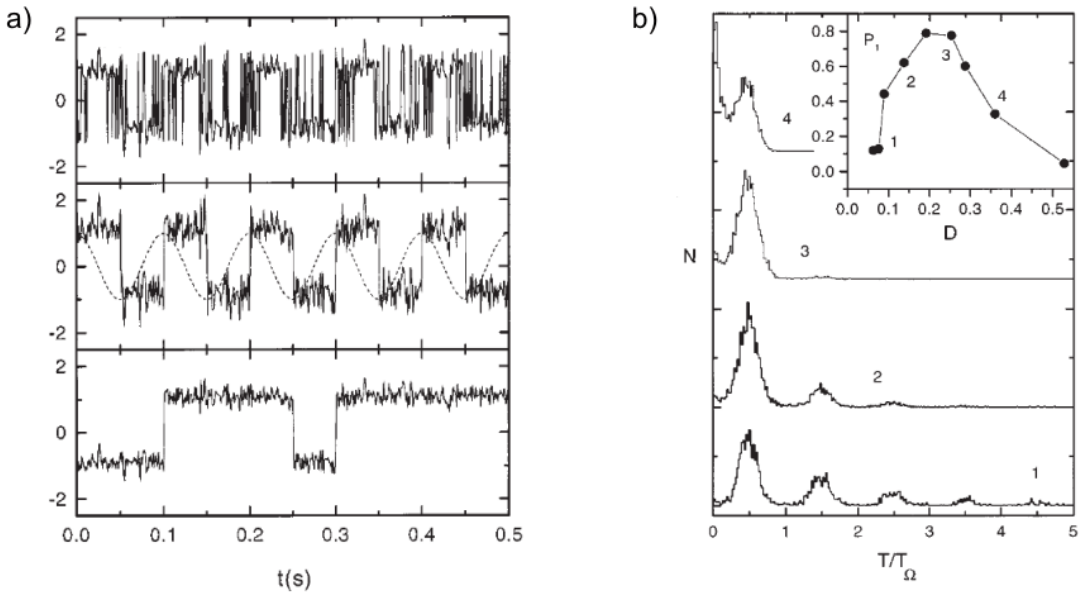


Abbildung 3.3: Simulierte Teilchentrajektorien (a) und Wartezeitenverteilungen (b) für ein Teilchen im Doppelmuldenpotential in Abhängigkeit von der Rauschstärke D. T entspricht in unserer Notation t_{res}, T_Ω entspricht T_{mod}. Aus [Gam98].

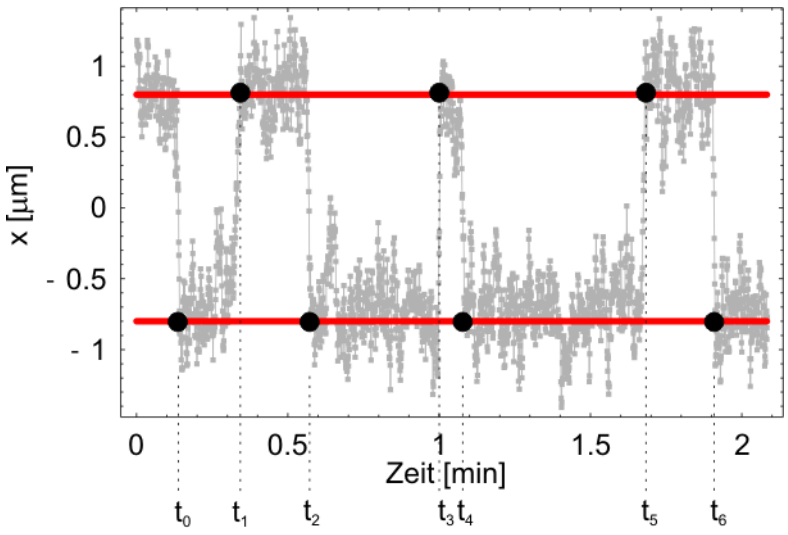


Abbildung 3.4: Bestimmung von Wartezeiten

das Problem der Berechnung der Wartezeitenverteilung noch nicht systematisch gelöst [Gam98]. Für Grenzfälle gibt es jedoch Näherungslösungen.
Abbildung 3.3b) zeigt simulierte Wartezeitenverteilungen für ein Teilchen im Doppelmuldenpotential. Deren Struktur lässt sich anschaulich verstehen: Für schwaches Rauschen kann das Teilchen nicht jede günstige Sprunggelegenheit nutzen. Wenn es zum Beispiel in der linken Mulde sitzt und nicht gesprungen ist, als diese Mulde flach war, dann muss das Teilchen eine ganze Modulationsperiode abwarten, bis es wieder die minimale Barrierenhöhe vorfindet. Wenn es jedoch bei minimaler Barriere auf die rechte Seite springt, dann entsteht bereits eine halbe Periode später wieder eine günstige Sprungsituation. So finden wir die Peaks bei der halben Modulationszeit und dann wieder jeweils eine Modulationsperiode später. Bei optimalem Rauschen, wenn das Teilchen im Wesentlichen der Modulation folgt, springt es normalerweise jeweils nach einer halben Periode in die andere Mulde. In diesem Fall finden wir fast alle Wartezeiten im ersten Peak der Verteilung (Kurve 3 in Abbildung 3.3b). Für starkes Rauschen, wenn das Teilchen praktisch unabhängig von der Modulation springt, nimmt zuerst die Anzahl der sehr kurzen Wartezeiten zu, bevor wir dann für sehr starkes Rauschen wieder eine exponentielle Verteilung der Wartezeiten beobachten.
Als Maß für die Stochastische Resonanz kann aus den Wartezeitenverteilungen die Fläche P_1 unter dem ersten Peak bestimmt werden. Diese Fläche spiegelt den Anteil der Sprünge, die nach einer Wartezeit von etwa einer halben Modulationsperiode stattgefunden haben, wieder. Berechnet wird sie über [Gam95]

$$P_1 = \int_{(\frac{1}{2}-\alpha)T_{\mathrm{mod}}}^{(\frac{1}{2}+\alpha)T_{\mathrm{mod}}} N(t_{\mathrm{res}})\mathrm{d}t_{\mathrm{res}} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{4} \,, \tag{3.27}$$

wobei der genaue Wert von α keinen Einfluss auf das Verhalten von P_1 hat. Der Inset in Abbildung 3.3b) zeigt den Verlauf von P_1 für das simulierte Teilchen im Doppelmuldenpotential in Abhängigkeit von der Rauschstärke. Die Kurve weist ein deutliches Maximum auf, das erreicht wird, wenn

$$T_{\mathrm{K}}(D) \approx \frac{1}{2}\, T_{\mathrm{mod}} \tag{3.28}$$

erfüllt ist. Offensichtlich kann man in Gleichung (3.28) auch bei konstanter Rauschstärke die Modulationszeit T_{mod} so anpassen, dass die Bedingung erfüllt ist. Abbildung 3.5 zeigt simulierte Trajektorien (a) und Wartezeitenverteilungen (b) für ein Teilchen im Doppelmuldenpotential, wobei in diesem Fall bei konstanter Rauschstärke die Modulationszeit variiert wurde. Die Wartezeitenverteilungen unterscheiden sich in ihrer Struktur nicht prinzipiell von denjenigen in Abbildung 3.3, wo umgekehrt die Rauschstärke bei konstanter Modulationszeit variiert wurde. Auch die Kurve für P_1 weist in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz ein deutliches Maximum auf. Im Gegensatz zum Signal-Rausch-Verhältnis, das in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz monoton verläuft, finden wir also in den Wartezeitenverteilungen die Signatur der Stochastischen Resonanz auch dann, wenn wir statt der Rauschstärke die Modulationszeit anpassen. Das macht die Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung zu einer interessanten Größe, die auch in Experimenten

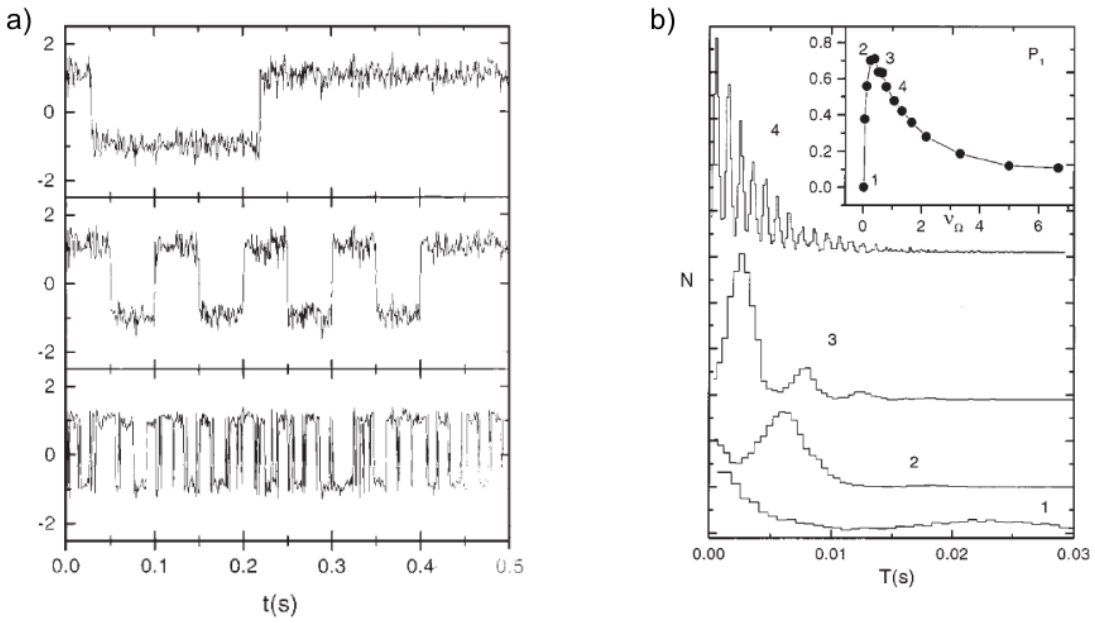


Abbildung 3.5: Simulierte Teilchentrajektorien (a) und Wartezeitenverteilungen (b) für ein Teilchen im Doppelmuldenpotential in Abhängigkeit von der Modulationszeit. T entspricht in unserer Notation t_{res}. Aus [Gam98].

gemessen werden kann, in denen eine Variation der Rauschstärke nicht praktikabel ist, wie das bei uns der Fall ist. Allerdings ist dabei zu beachten, dass P_1 auch dann ein Maximum in Abhängigkeit von der Modulationszeit aufweist, wenn die Modulation so schwach ist, dass die Wartezeitenverteilungen praktisch nur aus dem exponentiellen Hintergrund bestehen [Cho98]. Das Kriterium kann jedoch in allen Parameterbereichen sinnvoll angewandt werden, wenn gegebenenfalls vor der Bestimmung von P_1 der exponentielle Hintergrund von der Wartezeitenverteilung abgezogen wird [Mar00].

Umsetzung des Modellsystems im Experiment

Dieses Kapitel zeigt, wie das mechanische Modellsystem für die Stochastische Resonanz, das wir in den vorhergehenden Kapiteln diskutiert haben, in einem optischen Experiment umgesetzt werden kann. Das überdämpfte Brownsche Teilchen wird dabei durch ein kolloidales Teilchen in Wasser und das (modulierte) Doppelmuldenpotential durch optische Pinzetten realisiert. Wie das konkret in unserem Aufbau geschieht, wird von Abschnitt 4.3 an besprochen.

Das einfache Modellsystem aus Abschnitt 3.1.3 wird immer wieder benutzt, um das Phänomen der Stochastischen Resonanz zu erklären. Wenn es gelingt, dieses Modell möglichst genau in einem Experiment umzusetzen, dann ist der Weg frei für grundlegende Experimente auf der mikroskopischen Ebene – vor allem dann, wenn die Möglichkeit besteht, das betrachtete System zu erweitern und interagierende Teilchen zu beobachten (siehe Kapitel 6).
Das Modell beschreibt ein überdämpftes Brownsches Teilchen, das in einem symmetrischen Doppelmuldenpotential fluktuiert, wobei letzteres moduliert werden kann. Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird, bieten sich dafür kolloidale Suspensionen in Kombination mit optischen Pinzetten an. In diesem System ist das Rauschen bei gegebener Temperatur konstant und die Modulationszeit kann variiert werden.

4.1 Überdämpftes Brownsches Teilchen

Zur Beobachtung der Brownschen Bewegung haben sich kolloidale Suspensionen als nahezu ideal erwiesen. Schon Jean Perrin führte seine wegweisenden Experimente zur Molekularkinetik, für die er 1926 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde, an einem kolloidalen System

durch.[1] Kolloidale Suspensionen bestehen aus wohldefinierten, mesoskopischen Teilchen[2], die in einer Flüssigkeit dispergiert sind. Die Zeit- und Längenskalen dieser Systeme machen die Brownsche Bewegung der Beobachtung bequem zugänglich [Fre02]. So diffundiert ein Teilchen in der Zeit t in einer Dimension typischerweise um eine Strecke

$$\langle \Delta x \rangle = \sqrt{2Dt}, \tag{4.1}$$

wobei die Diffusionskonstante D für sphärische Teilchen mit Radius a durch die Stokes-Einstein Relation

$$D = \frac{k_\mathrm{B}T}{6\pi\eta a} \tag{4.2}$$

gegeben ist (η ist die Viskosität der Flüssigkeit). Damit braucht ein Teilchen im Mittel die Zeit

$$\tau = \frac{3\pi\eta a^3}{k_\mathrm{B}T} \tag{4.3}$$

um seinen eigenen Durchmesser zurückzulegen. Für mikrometergroße Teilchen in Wasser bei Raumtemperatur liegt τ in der Größenordnung von Sekunden.
Ein Blick auf die relevanten Zeitskalen zeigt uns, dass wir es mit einer überdämpften Bewegung zu tun haben [Dho96]. Die Relaxationszeiten für Flüssigkeiten liegen in der Größenordnung von $10^{-14}\,\mathrm{s}$. Für wesentlich längere Zeiten kann man mit Mittelwerten für die stochastische Kraft, die die Lösungsmittelmoleküle auf ein Brownsches Teilchen ausüben, arbeiten. Was die dispergierten Teilchen angeht, ist von Interesse, wann deren Impulskoordinate im Gleichgewicht mit dem Lösungsmittel ist. Man kann zeigen, dass das für Zeiten t mit

$$t \gg \frac{M}{\gamma}, \quad \gamma = 6\pi\eta a \tag{4.4}$$

der Fall ist (M ist die Teilchenmasse). In diesem Regime ändert sich die Teilchenkoordinate nicht mehr proportional zur Zeit wie bei ballistischer Bewegung, sondern die vielen Stöße des Teilchens mit den Lösungsmittelmolekülen bewirken, dass sich die Teilchenkoordinate proportional zur Wurzel aus der Zeit ändert (siehe Gleichung (4.1)). Für ein mikrometergroßes Teilchen in Wasser ist die Bedingung (4.4) für $t \gg 10^{-7}\,\mathrm{s}$ erfüllt; wir beobachten also überdämpfte Teilchen.

4.2 Doppelmuldenpotential

Nachdem mit kolloidalen Suspensionen ein System gefunden ist, in dem ein überdämpftes Brownsches Teilchen gut zu beobachten ist, besteht die nächste Aufgabe darin, für ein solches Teilchen ein symmetrisches, modulierbares Doppelmuldenpotential zu schaffen. Das gelingt mit optischen Pinzetten. 1970 nutzte Ashkin erstmals Laserstrahlen, um mikroskopische Teilchen zu fangen [Ash70]. Das Funktionsprinzip einer optischen Pinzette lässt sich anschaulich am besten mit geometrischer Optik erklären (vergleiche Abbildung 4.1). Dazu

[1] Ein interessanter Übersichtsartikel dazu ist zum Beispiel [Haw02].

[2] Während die Teilchen in kolloidalen Suspensionen prinzipiell beliebige Formen haben können, sind im Folgenden immer sphärische Teilchen gemeint.

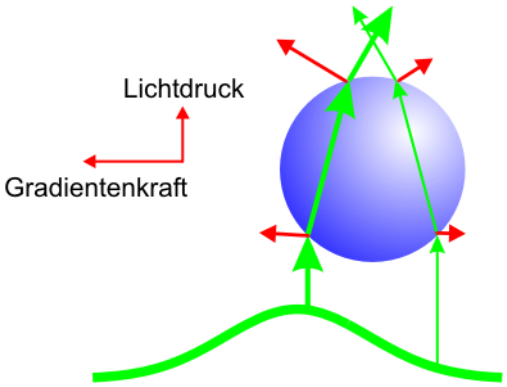


Abbildung 4.1: Skizze zur Funktionsweise einer optischen Pinzette (in der geometrisch-optischen Näherung): Ein Laserstrahl mit gaußförmigem Intensitätsprofil trifft auf ein kolloidales Teilchen, dessen Brechungsindex größer ist als der seiner Umgebung. Für zwei Teilstrahlen ist der Verlauf durch das Teilchen gezeigt. Die roten Pfeile deuten die durch die Impulsänderung der Photonen auf das Teilchen ausgeübten Kräfte an. Das Teilchen erfährt einen Strahlungsdruck in Richtung des einfallenden Laserstrahls und senkrecht dazu eine Gradientenkraft, die es ins Zentrum des Strahls zieht.

betrachten wir die folgende Situation: Ein Laserstrahl mit gaußförmigem Intensitätsprofil fällt auf eine Kugel, deren Brechungsindex höher ist als der ihrer Umgebung. Zwei Strahlen, die die Kugel symmetrisch zu ihrem Zentrum treffen, werden an ihr gebrochen[3] und üben Kräfte auf die Kugel aus, die proportional zur Impulsänderung der Photonen sind. Diese Kräfte sind in Abbildung 4.1 durch die roten Pfeile angedeutet. Wenn die beiden Strahlen unterschiedliche Intensität haben, gibt es eine resultierende Kraft, die in zwei Anteile zerlegt werden kann: Den Strahlungsdruck in Richtung des einfallenden Strahls und die Gradientenkraft senkrecht dazu. Letztere zeigt in Richtung der höheren Intensität und zieht die Kugel im Beispiel zur Achse des Gaußschen Strahls.
Die geometrisch-optische Näherung gilt für Teilchen, die groß gegenüber der Wellenlänge des Laserlichts sind. Im entgegengesetzten Grenzfall sehr kleiner Teilchendurchmesser kann ein Teilchen näherungsweise als Dipol betrachtet werden, der vom elektrischen Feld $\mathbf{E}$ des Laserstrahls induziert wird. Die potentielle Energie des Teilchens ist dann

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -\alpha E^2 \propto -\alpha I \ , \tag{4.5}$$

wobei $\mathbf{p}$ für das Dipolmoment, α für die Polarisierbarkeit des Teilchens und I für die Intensität des Laserstrahls steht. Auch hier ist die energetisch günstigste Position des Teilchens diejenige am Ort der höchsten Intensität.
Tlusty et al. [Tlu98] haben den Dipolansatz für beliebige Teilchengrößen erweitert, wobei ein Teilchen als Ansammlung von Dipolen betrachtet und die Intensität über das Volumen des Teilchens integriert wird. Es wird sich jedoch herausstellen, dass es für diese Arbeit ausreicht, den einfachen Zusammenhang $W \propto I$ zu betrachten (vergleiche Abschnitt 4.4.2).

[3] Reflexionen seien hier vernachlässigbar.

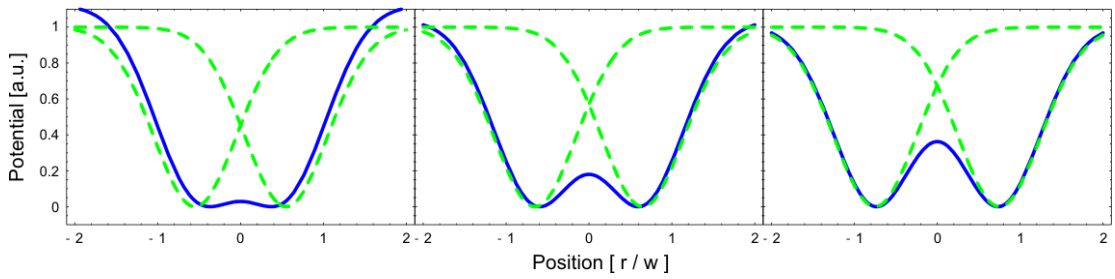


Abbildung 4.2: Überlagerung zweier gaußförmiger Potentiale (grün gestrichelt) zu einer Doppelmulde (blaue Kurve) für verschiedene Verhältnisse des Abstands der Einzelpotentiale zur Strahltaille w des Gaußschen Strahls. Von links nach rechts sind die Abstände $1.1\,w$, $1.3\,w$ und $1.5\,w$. Die Potentiale sind in y-Richtung jeweils so verschoben, dass ihre Minima bei 0 liegen.

Damit erzeugt also ein fokussierter Gaußscher Laserstrahl ein gaußförmiges Potential und zwei in geeignetem Abstand interferenzfrei überlagerte Strahlen ergeben eine Doppelmulde. Die Form des Doppelmuldenpotentials hängt dabei von der Stärke der Fokussierung und vom Abstand der Einzelfallen ab, während eine Intensitätsänderung lediglich eine Änderung der Absolutwerte bewirkt. Die blauen Kurven in Abbildung 4.2 zeigen eindimensionale Doppelmulden für verschiedene Abstände zwischen den Einzelfallen, aus denen sie zusammengesetzt sind, die grün gestrichelten Kurven zeigen die Einzelfallen selbst. Das Bild in der Mitte entspricht dabei ungefähr der Situation im Experiment. Die Positionskoordinate r ist normiert auf die Strahltaille w des Gaußschen Strahls. Die Potentiale sind in y-Richtung so verschoben, dass die Minima jeweils bei null liegen. Die Abstände zwischen den Einzelfallen sind von links nach rechts $1.1\,w, 1.3\,w$ und $1.5\,w$. Für den kleinsten Abstand links ist deutlich zu sehen, dass die Minima der Doppelmulde weiter innen liegen als diejenigen der Einzelfallen. Diese Verschiebung wird mit zunehmendem Abstand kleiner, während die Krümmung in den Minima und die Höhe der Barriere zunehmen.

Modulation

Die Modulation des bistabilen Potentials erfolgt über eine Änderung der Intensität in den Einzelfallen. Die blauen Kurven in Abbildung 4.3 zeigen die Doppelmulden aus Abbildung 4.2. Bei den grünen Kurven wurde jeweils die Intensität in der linken Mulde um 7.5% erhöht und in der rechten Mulde um 7.5% erniedrigt. Im linken Bild (für den kleinsten Abstand der Einzelspots) führt das schon dazu, dass das System nicht mehr bistabil ist. Die grauen Kurven zeigen eine Modulation von 15% in der Intensität. Hier ist eine interessante Beobachtung, dass die Position der Barriere deutlich zur flachen Mulde hin verschoben ist. Die Potentiale mit den Abständen $1.3\,w$ und $1.5\,w$ zwischen den Laserspots sind aber immer noch bistabil. Wie groß die Modulation sein darf, damit das System seine Bistabilität beibehält, hängt offensichtlich sehr stark vom Abstand der Einzelspots ab.

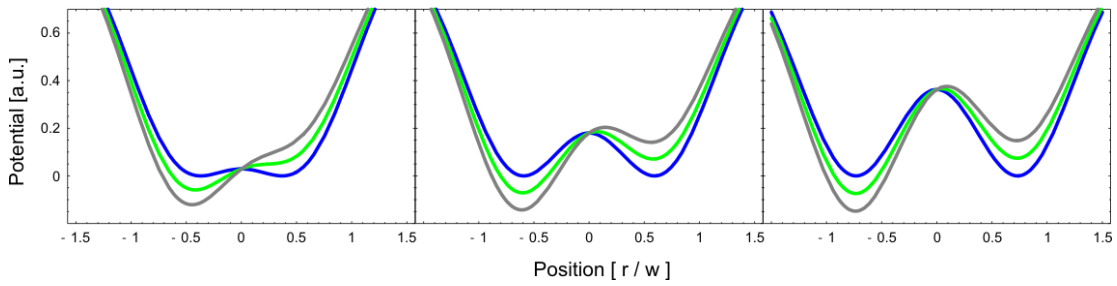


Abbildung 4.3: Doppelmuldenpotentiale für die gleichen Parameter wie in Abbildung 4.2 (blaue Kurven), und moduliert um ±7.5% (grün) sowie ±15% (grau) in der Intensität.

Vergleich mit x^4-Potentialen

In der Theorie werden die Doppelmuldenpotentiale üblicherweise durch Polynome vierten Grades beschrieben (siehe z. B. [Gam98]). Daher soll hier diskutiert werden, inwieweit die aus zwei Gaußkurven zusammengesetzten Doppelmulden durch solche Polynome angenähert werden können.
Ein gerades Polynom vierten Grades wird durch drei Parameter bestimmt. Sei $W(r)$ die Funktion, welche die Doppelmuldenpotentiale aus Abbildung 4.2 beschreibt und d der Abstand zwischen deren Minima. Dann kann man leicht nachrechnen, dass das Polynom

$$f(r) = W(0)\left[\left(\frac{r}{d/2}\right)^2 - 1\right]^2 \tag{4.6}$$

in den Punkten $r = \pm d/2$, wo die Minima von $W(r)$ mit $W(r) = 0$ liegen, und in $r = 0$, wo $W(r)$ maximal wird, sowohl im Funktionswert als auch in der Ableitung mit $W(r)$ übereinstimmt. Damit können wir die drei Parameter, die $f(r)$ bestimmen, mit Kenntnis von $W(0)$, also der Barrierenhöhe, und d, dem Abstand der Minima, so wählen, dass $W(r)$ und $f(r)$ sehr gut übereinstimmen. Abbildung 4.4 zeigt in der oberen Zeile die Doppelmuldenpotentiale aus Abbildung 4.2 (blaue Kurven) und die entsprechenden Polynome gemäß Gleichung 4.6 (grün gestrichelt). Die Übereinstimmung ist für alle drei Abstände im inneren Bereich exzellent, während an den Rändern das Polynom wesentlich steiler verläuft als die Gaußfunktion. Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, sind jedoch für die Dynamik des Systems lediglich die Barrierenhöhe und die Krümmungen in den Extrema entscheidend, welche sehr gut übereinstimmen.
Das mit der Amplitude A modulierte Potential ist in der polynomialen Darstellung durch

$$f_{\mathrm{mod}}(r) = f(r) + A\, r \sin(\omega t) \tag{4.7}$$

gegeben. Die der Auslenkung des aus zwei Gaußfunktionen zusammengesetzten Doppelmuldenpotentials entsprechende Amplitude A entspricht dem Verhältnis der Potentialdifferenz der Minima im maximal ausgelenkten Zustand zu ihrem Abstand d. Die untere Zeile in Abbildung 4.4 zeigt die um 15% in der Intensität modulierten Doppelmulden aus Abbildung 4.3 (blaue Kurven) und die entsprechend modulierten Polynome (grün gestrichelt).

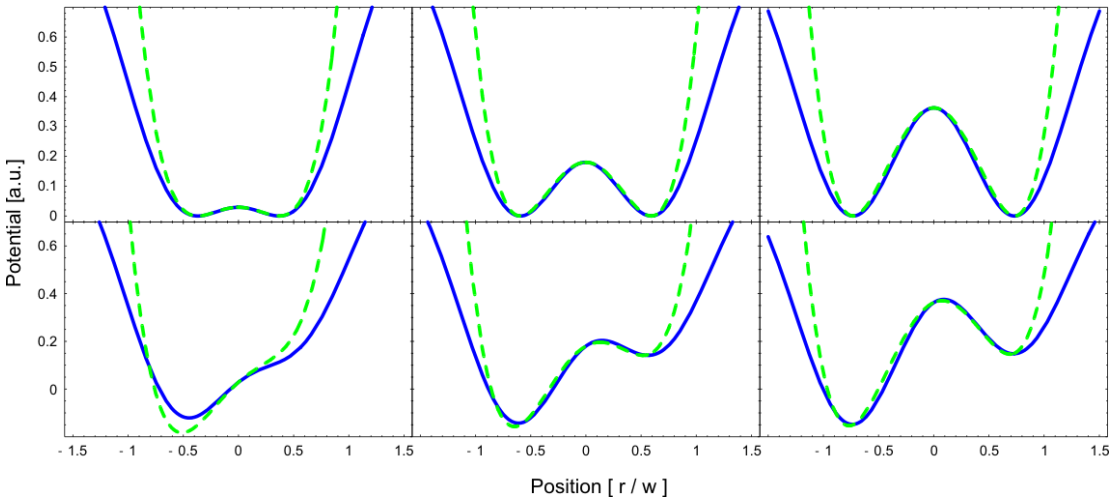


Abbildung 4.4: Vergleich der Doppelmuldenpotentiale mit Polynomen vierten Grades. Die blauen Kurven in der oberen Zeile entsprechen denen aus Abbildung 4.2, diejenigen in der unteren Zeile entsprechen den grauen Kurven in Abbildung 4.3. Die grün gestrichelten Kurven sind jeweils die nach den Gleichungen (4.6) und (4.7) angepassten Polynome vierten Grades.

Abgesehen vom linken Bild, wo keine Doppelmulde mehr vorhanden ist, ist die Übereinstimmung in der tieferen Mulde relativ gut, wobei zu beobachten ist, dass die Minima der beiden Kurven nicht mehr an der gleichen Position liegen. Dieser Effekt wird mit wachsendem Abstand der Minima kleiner. Auffallend ist, dass in der flachen Mulde zum einen die Minima gegeneinander verschoben sind, und zum anderen die Krümmung der Polynome deutlich größer ist als die der Gaußfunktionen. Darauf werden wir in Kapitel 7 beim Vergleich von experimentellen Daten mit Simulationen noch einmal zurückkommen.
Zusammenfassend kann man sagen, dass im experimentell interessanten Bereich in den meisten Fällen die aus Gaußkurven zusammengesetzten Doppelmuldenpotentiale sehr gut durch die angegebenen Polynome vierten Grades beschrieben werden können.

4.3 Experimenteller Aufbau

Nach den prinzipiellen Überlegungen der letzten beiden Abschnitte wird nun unser konkretes Experiment vorgestellt. Abbildung 4.5 zeigt den Aufbau schematisch. Das Experiment läßt sich in drei Kernstücke aufteilen, die im Folgenden näher beschrieben werden: das kolloidale System, das Videomikroskop und die optische Pinzette.

4.3.1 Kolloidales System

Für die später beschriebenen Experimente wurden Silica-Kugeln der Firma Duke Scientific mit einem mittleren Durchmesser von $(1.57 \pm 0.06)\,\mu$m benutzt (Batch 8150-006). Sie haben einen Brechungsindex von 1.46 bei 589 nm und eine Dichte von $2.18\,\mathrm{g/cm^3}$. Letzteres

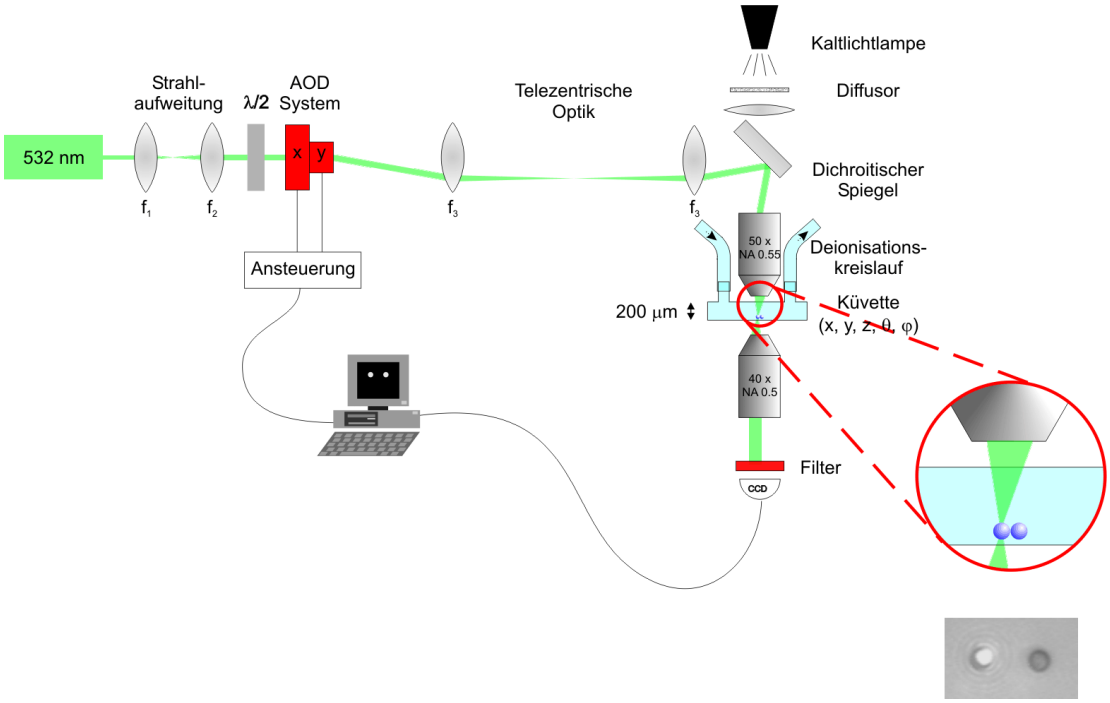


Abbildung 4.5: Skizze des experimentellen Aufbaus. Der Laserstrahl wird zuerst aufgeweitet und damit an die Apertur der akustooptischen Deflektoren (AODs) angepasst. Ebenso dient die $\lambda/2$-Platte dazu, die lineare Polarisation des Lasers anzupassen. Wenn der Laserstrahl das AOD-System passiert, wird er um einen durch die Ansteuerung vorgegebenen Winkel abgelenkt. Durch die telezentrische Optik wird der Austrittspunkt des Strahls aus dem AOD-System auf die Eintrittspupille des oberen Mikroskopobjektivs abgebildet. Der parallele Strahl wird durch das obere Mikroskopobjektiv je nach Eintrittswinkel an einer bestimmten Stelle in der Probenzelle fokussiert. Die Beleuchtung (Kaltlichtlampe, Diffusor, Linse), das untere Mikroskopobjektiv und die CCD-Kamera bilden das Videomikroskop. Der Filter vor der Kamera ist ein- und ausklappbar und dient dazu, gegebenenfalls das Laserlicht zu blockieren. Nicht gezeigt sind eine $\lambda/2$-Platte vor dem dichroitischen Spiegel und ein Polarisationsstrahlteilerwürfel nach dem unteren Mikroskopobjektiv. Dadurch wird ein variabler Anteil des Laserlichts vor der Kamera zur Seite abgelenkt.
Das kleine Bild rechts unten zeigt zwei Kolloide mit Durchmesser $3\,\mu$m, wobei der Laserstrahl das linke festhält.

bedeutet, dass die Teilchen in Wasser innerhalb einiger Sekunden sedimentieren.
In Wasser erhalten sowohl die Silica-Teilchen als auch die Glasoberflächen der Messzelle durch die Dissoziation von Silanol-Gruppen

$$\mathrm{SiOH} \rightleftharpoons \mathrm{SiO^-} + \mathrm{H^+} \tag{4.8}$$

eine negative Ladung [Ile79], so dass sich die Teilchen untereinander sowie Teilchen und Wand elektrostatisch abstoßen. Die Ladungen werden jedoch durch Ionen in der Suspension abgeschirmt. Deshalb ist die Messzelle an einen Deionisationskreislauf[4] angeschlossen, über den die meisten Ionen[5] aus dem Wasser entfernt werden können. Dazu wird das Wasser mithilfe einer peristaltischen Pumpe durch ein Gefäß mit Ionentauscher-Granulat gepumpt (vgl. Abbildung 4.6). Hinter dem Gefäß mit Ionentauscher befindet sich ein Filter, der Ionentauscher-Granulat, das evtl. aus dem Gefäß gelangt ist, sowie kolloidale Teilchen absorbiert. Die Ionenkonzentration wird über die Messung der Leitfähigkeit beobachtet. Wenn eine Leitfähigkeit von ca. $0.07\,\mu\mathrm{S/cm}$ erreicht ist, kann die Pumpe abgeschaltet werden und die Teilchen werden in die Messzelle eingefüllt.

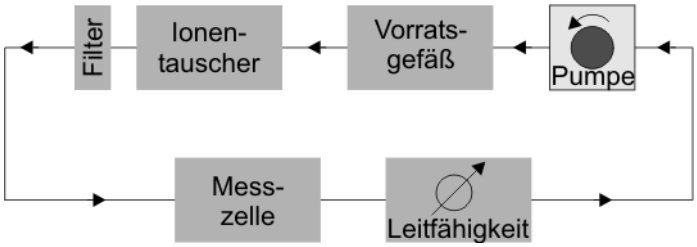


Abbildung 4.6: Blockdiagramm des Deionisationskreislaufs

4.3.2 Videomikroskopie

Die Teilchen werden mittels Videomikroskopie beobachtet. Dazu werden sie mit einer Kaltlichtlampe, vor der sich ein Diffusor sowie eine Linse befinden, beleuchtet (vergleiche Abbildung 4.5). Das obere Mikroskopobjektiv dient dabei als Kondensor. Zur Abbildung auf die CCD-Kamera (Teli CS8310BC, 768 x 576 Pixel) wird ein 40-fach-Objektiv von Zeiss (LD A-Plan, Numerische Apertur 0.5, Arbeitsabstand 2 mm) eingesetzt. Während der Messung wird das Laserlicht vor der Kamera durch einen Interferenzfilter blockiert. Das Signal der Kamera wird über einen Bildschirm, der die ständige Beobachtung der Teilchen ermöglicht, auf eine Framegrabber-Karte (IDS FALCON Rev. 3.0) übertragen. Üblicherweise wird dann mit dem frei verfügbaren Programm VirtualDub (Version 1.5.10) ein stark komprimiertes Video (DivX 5.2.1) aufgenommen.[6] Das kann für einen Bildausschnitt mit bis zu 20 Bildern pro Sekunde geschehen. Um die Teilchentrajektorien zu gewinnen wird das Video

[4] Siehe z. B. [Bru03] für eine ausführliche Besprechung.

[5] Aufgrund der Eigendissoziation des Wassers gibt es einen unteren Grenzwert für die erreichbare Ionenkonzentration.

[6] Es wurde untersucht, ob die Komprimierung einen Einfluss auf das Ergebnis der nachfolgenden Teilchenerkennung hat; die Tests haben jedoch keinen solchen Einfluss gezeigt.

anschließend wieder in Einzelbilder zerlegt (mit VideoMach 2.7.2) und mit Visiometrics IPS (Version 1.083) analysiert. Dabei werden zuerst über das Intensitätshistogramm in einem Bild Schwellwerte festgelegt, die definieren, welche Pixel zu Teilchen gehören. Dann wird der Schwerpunkt jedes Teilchens bestimmt, was mit einer Genauigkeit von unter einem Pixel möglich ist.[7] Die Koordinaten werden in einer Datei abgespeichert, so dass als Ausgangspunkt für die weitere Datenanalyse Teilchentrajektorien zur Verfügung stehen. Eine genaue Beschreibung der Funktionsweise von IPS findet sich in [Bub01].

4.3.3 Optische Pinzette

Die Variation der Position und der Intensität des Laserstrahls in der Messzelle erfolgt durch akustooptische Deflektoren (AODs). Der Laserstrahl wird dabei mit einer Rate im kHz-Bereich gerastert, so dass wir für die Teilchen ein quasistatisches Potential schaffen. Auf die akustooptischen Deflektoren gehen wir weiter unten genauer ein. Zuvor betrachten wir den Strahlengang der optischen Pinzette (vergleiche Abbildung 4.5). Der Laser (Coherent Verdi-V2) liefert einen TEM_{00}-Strahl bei 532 nm. Dessen Durchmesser wird über eine Keplersche Strahlaufweitung ($f_1 = 80\,\text{mm}$, $f_2 = 140\,\text{mm}$) von 2.25 mm auf 3.9 mm vergrößert, um die Apertur des AOD auszunutzen. Mit der $\lambda/2$-Platte kann die für die akustooptischen Deflektoren ideale lineare Polarisation des Lasers eingestellt werden. Wenn der Laserstrahl die AODs passiert, erfährt er eine durch die Ansteuerung vorgegebene Richtungs- und Intensitätsänderung.[8] Der Punkt, an dem der Strahl aus dem AOD-System austritt, muss nun auf die Eintrittspupille des zur Fokussierung benutzten Mikroskopobjektivs (Leica, PL FLUOTAR L, 50x, numerische Apertur 0.55, Arbeitsabstand 8 mm) abgebildet werden. Das geschieht mit Hilfe einer telezentrischen Optik ($f_3 = 300\,\text{mm}$).
Mit unserer optischen Pinzette halten wir die Teilchen in der Ebene senkrecht zum Laserstrahl durch Gradientenkräfte fest. In Richtung des Laserstrahls wirkt hauptsächlich der Strahlungsdruck, der die Teilchen auf die Unterseite der Messzelle drückt und ihre Bewegung in der z-Richtung stark einschränkt.

Funktionsweise eines AOD

Abbildung 4.7 zeigt schematisch, wie ein AOD funktioniert. Der Deflektor besteht aus einem Kristall, in unserem Fall TeO_2, in dem über ein Piezo-Element akustische Schwingungen erzeugt werden. Wie stark die daraus resultierenden Dichtevariationen im Kristall sind und mit welcher Periodizität sie auftreten, hängt dabei von der Leistung und der Frequenz der Radiowellen ab, mit denen das Piezo-Element angesteuert wird. Die Wechselwirkung eines Lichtstrahls mit der erzeugten Schallwelle kann man sich vereinfacht als Bragg-Streuung vorstellen: Ein unter dem Winkel Θ_B einfallender Laserstrahl geht in nullter Ordnung geradlinig durch den Kristall, während er in der ersten Ordnung um den

[7] Ein Pixel entspricht in der derzeitigen Konfiguration des Mikroskops etwa 225 nm.

[8] Genauer gesagt gibt es vier Strahlen der Ordnungen 0-0, 0-1, 1-0 und 1-1, von denen wir denjenigen der Ordnung 1-1 weiter verwenden und die anderen blockieren...

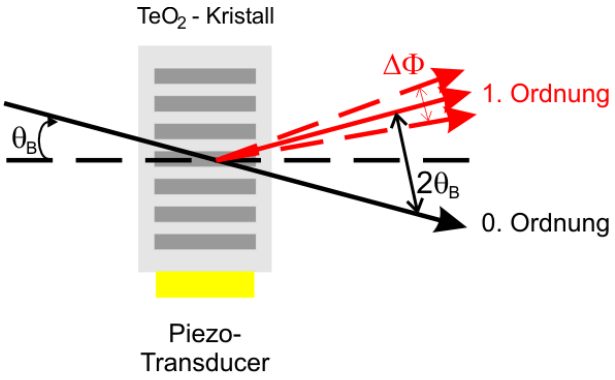


Abbildung 4.7: Skizze zur Funktionsweise eines akustooptischen Deflektors.

Winkel $2\Theta_B$ abgelenkt wird, sofern die Bragg-Bedingung

$$\sin \Theta_B = \frac{\lambda}{2\Lambda} \tag{4.9}$$

erfüllt ist. Dabei steht λ für die Wellenlänge des Lichts und Λ für die des Schalls. Mit leicht divergenten Schallwellen kann man zum Beispiel erreichen, dass die Bragg-Bedingung für einen gewissen Bereich von Einfallswinkeln erfüllt ist, so dass der Laserstrahl in der ersten Ordnung in einen Winkelbereich $\Delta\Phi$ abgelenkt werden kann.
Eine ausführliche Diskussion der Akustooptik und ihrer Anwendungen findet sich beispielsweise in [Sal91].

Wichtige Kenndaten

Unsere Deflektoren (A.A Opto-Electronique, AA.DTS.XY.250) weisen bezüglich der Strahlführung eine Besonderheit auf: Nicht der Strahl nullter Ordnung, sondern der Zentralstrahl der ersten Ordnung passiert das AOD-System geradlinig. Die Deflektoren können jeweils mit einer Radiofrequenz von (82±25) MHz angesteuert werden. Der Ablenkbereich umfasst dabei 2.6 Grad ($\Delta\Phi$ in Abbildung 4.7) in x und y. In der Fokusebene in der Messzelle entspricht das einem erreichbaren Bereich von mehr als 150 mal 150 Mikrometern. Ein weiterer wichtiger Parameter ist die Zugriffszeit, die sich aus dem Quotienten des Strahldurchmessers von 3.9 mm und der Schallgeschwindigkeit in TeO_2 von 650 m/s zu ca. 6 μs ergibt. Das bedeutet, dass der Laserstrahl höchstens mit 160 kHz gerastert werden kann. Wir arbeiten momentan mit einer Rate von 50 kHz. Dabei ist allerdings zu beachten, dass wir bei voller Ausnutzung dieser Rate Überlagerungen zweier aufeinanderfolgender Frequenzen bekommen, so dass in der Fokusebene unerwünschte Punkte entstehen. Sollen beispielsweise die Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) nacheinander angefahren werden, so erscheinen auch (schwächere) Laserspots bei (x_1, y_2) und (x_2, y_1). Dies läßt sich verhindern, indem Totzeiten eingeführt werden, in denen der Strahl nicht abgelenkt wird. Auch mit diesen Totzeiten wird der Strahl aber noch mit Frequenzen im kHz-Bereich gerastert, so dass die Teilchen durch die optische Pinzette ein quasistatisches Potential erfahren.

Für die Effizienz des AOD-Systems, das heißt, für den Anteil des Laserlichts, der von beiden Deflektoren in die erste Ordnung gebeugt wird, haben wir bei der Zentralfrequenz knapp 50 Prozent gemessen. Mit der von uns üblicherweise verwendeten Totzeit können wir jedoch im Mittel nur 20 Prozent des Laserlichts nutzen.
Abbildung 4.8 zeigt die Intensitätsverteilung über das gesamte Feld (links) und für einen Ausschnitt im Zentrum (rechts). Die Werte sind dabei relativ zur Laserintensität I_0 vor dem AOD-System angegeben, die Position in x und y in Mikrometern. Letzteres bezieht sich auf die Position des Laserstrahls in der Messzelle. Während die Verteilung im zentralen Bereich von 50 mal 50 Mikrometern ziemlich homogen ist, gibt es außerhalb davon aufgrund der Charakteristik der Deflektoren deutliche Intensitätsschwankungen.[9]
Die Beugungseffizienz der Deflektoren hängt von der Leistung ab, mit der das Piezo-Element angesteuert wird. In der Ansteuerung der Deflektoren gibt es dafür einen Parameter, der zwischen 0 und 1 variiert werden kann. Für die im Ausschnitt durch farbige Punkte markierten Positionen ist im unteren Teil der Abbildung aufgetragen, wie die in der ersten Ordnung gemessene Intensität von diesem Parameter abhängt. Die Kurven sind bis auf die unterschiedlichen Maximalintensitäten sehr ähnlich und weisen einen linearen Bereich auf, der etwa zwischen 0.3 und 0.7 liegt. Wenn die Intensität außerhalb dieses Bereichs moduliert werden soll, muss die Nichtlinearität berücksichtigt werden.

Ansteuerung der Deflektoren

Die Ansteuerung der AODs erfolgt über ein System, das an der Universität Ljubljana entwickelt wurde. Die Schnittstelle mit dem Benutzer bildet das Programm Tweez. Abbildung 4.9 zeigt die Benutzeroberfläche mit einigen typischen Beispielen für die Anwendung des Programms in unseren Messungen.
In der aktuellen Version der Ansteuerung ist es möglich, per Mausklick acht voneinander unabhängige Fallen beliebiger Intensität[10] und Position zu setzen. Die Positionen dieser Fallen sind in der Abbildung rot markiert. Zusätzlich können jeder dieser Einzelfallen über eine sogenannte *Sequenz* weitere Fallen zugeordnet werden. Die *Sequenz* enthält die Positionen in x und y relativ zur „übergeordneten“ Falle sowie die Intensitäten der zugeordneten Fallen. Insgesamt können derzeit maximal 30 *Sequenzen* gleichzeitig geladen werden. Auf diese Weise lassen sich beliebige (quasi)statische Muster von Laserfallen realisieren. Neben der Möglichkeit, jeweils eine der maximal 30 geladenen Sequenzen einer der 8 Einzelfallen zuzuordnen, gibt es noch sogenannte *Playlists*. In diesen *Playlists* sind Abfolgen von *Sequenzen* gespeichert, die nacheinander im Abstand von 50 ms „abgespielt“ werden. Auf diese Weise werden zum Beispiel unsere Doppelmuldenpotentiale moduliert. Ein Problem besteht allerdings darin, dass der Takt von 50 ms von einem Windows-internen Timer vorgegeben wird, wobei der Wert um bis zu 10% schwanken kann. Diese Unregelmäßigkeit

[9] Die genaue Intensitätsverteilung kann durch die Justage des AOD-Systems beeinflusst werden – hier wurde versucht, ein möglichst homogenes Feld zu erreichen.

[10] Mit „Intensität“ ist hier der Wert des Intensitätsparameters in der AOD-Ansteuerung gemeint. Wie viel Intensität am Ende effektiv in einer Falle ist, hängt davon ab, über wie viele Fallen der Laserstrahl gerastert wird.

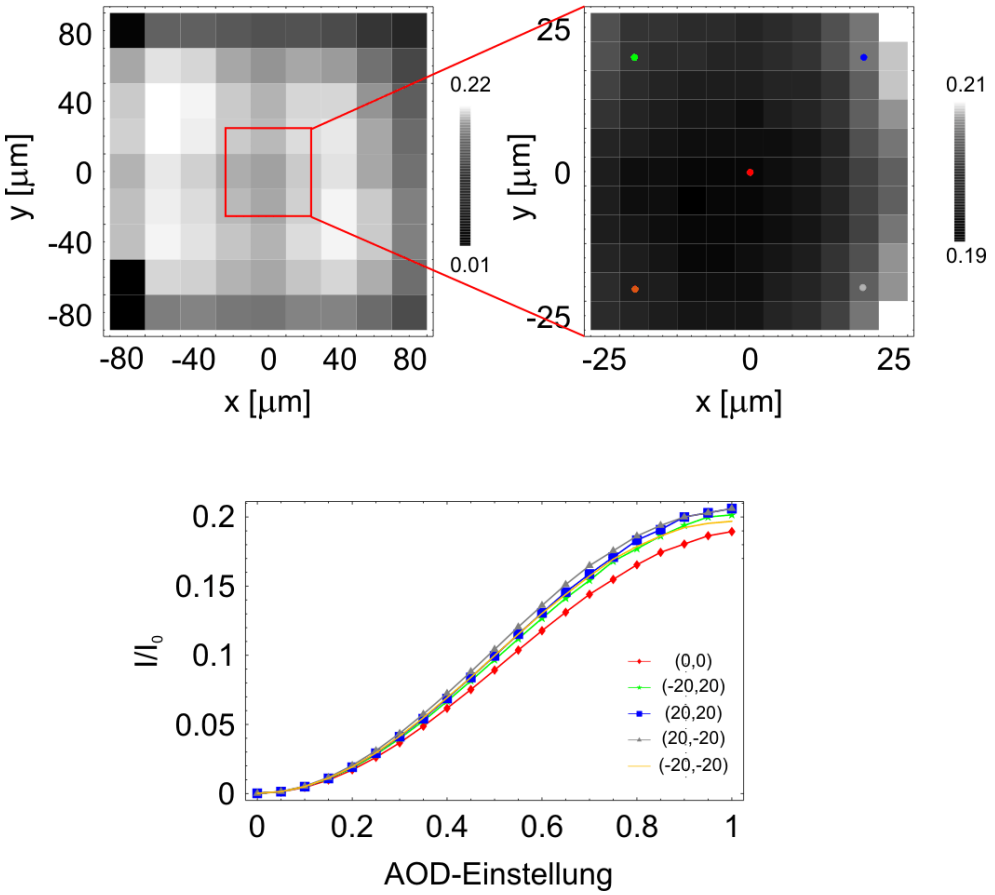


Abbildung 4.8: Oben: Intensitätsverteilung über das gesamte durch den Laserstrahl erreichbare Feld und für einen Ausschnitt im Zentrum. Die Intensitäten sind relativ zur Laserintensität vor dem AOD-System angegeben. Unten: Gemessene Intensität relativ zu der 'Intensität', die in der AOD-Ansteuerung eingestellt wurde, für die im Ausschnitt oben rechts durch farbige Punkte markierten Positionen.

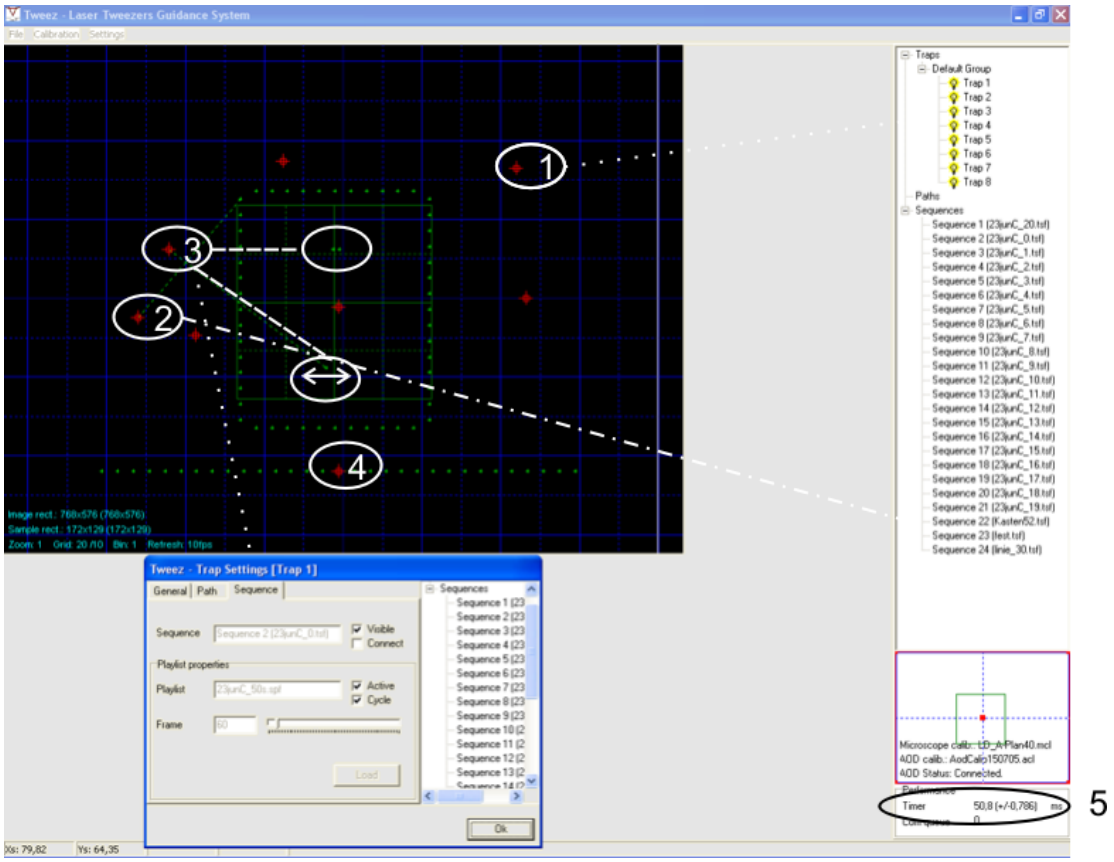


Abbildung 4.9: Benutzeroberfläche des Ansteuerungsprogramms Tweez. Die roten Symbole stehen für einzelne Fallen, die jeweils mit der Maus verschoben werden können. Wenn diesen Fallen *Sequenzen* zugeordnet sind, so werden diese mit der Falle verschoben. Die im Rahmen der Sequenzen angesteuerten Punkte sind grün markiert. 1) Einzelne Falle. 2) Einzelne Falle mit als *Sequenz* zugeordnetem Rechteck. 3) Einzelne Falle mit zugeordneter Doppelmulde, die über eine *Playlist* moduliert wird. Außerdem wird über die *Playlist* auch die Position einer weiteren Falle (unten) kontrolliert. Auf deren Bedeutung werden wir in Abschnitt 5.3 zu sprechen kommen. 4) Einzelne Falle mit zugeordneter *Sequenz* von 30 Punkten. Diese Konstruktion dient der Anpassung der Intensität pro Falle ohne dass die Intensität am Laser geändert werden muss. 5) Statistik zur Funktion des Timers, der den Ablauf der *Playlists* steuert.

überträgt sich offensichtlich auf die Modulationszeit. Darauf werden wir in Abschnitt 5.3 zurückkommen.

4.4 Charakterisierung des Systems

Zur Charakterisierung unseres Systems befassen wir uns mit seiner Stabilität bezüglich Driftbewegungen und diskutieren Messungen zur Form der durch optische Pinzetten erzeugten Doppelmuldenpotentiale.

4.4.1 Stabilität

Das Mikroskopobjektiv zur Fokussierung des Laserstrahls, die Messzelle und das Objektiv zur Beobachtung der Teilchen sind in unserem Aufbau vertikal angeordnet. Vor allem das untere (Beobachtungs-)Objektiv ist dabei in einem Halter befestigt, der ein mehrere Zentimeter langes Rohr beinhaltet. Das bedeutet, dass eine eventuell auftretende Driftbewegung der Kipp- und Verschiebetische deutlich verstärkt würde. Daher wurde untersucht, ob, und wenn ja, wo solche Driftbewegungen vorhanden sind.

Drift in xy

Im Mikroskopaufbau gibt es im Wesentlichen drei Elemente, die sich relativ zueinander verschieben können: Das Objektiv zur Fokussierung des Laserstrahls, die Messzelle und das Beobachtungsobjektiv. Zur Untersuchung der verschiedenen Einflüsse wurden drei Teilchen über mehrere Stunden beobachtet. Zwei davon waren in starken Laserfallen gefangen, in denen sie nur sehr schwach fluktuieren konnten, das dritte war am Boden der Messzelle festgeklebt. Abbildung 4.10 zeigt oben die Trajektorien in x- und y-Richtung für das feste Teilchen und dasjenige in Laserfalle 1. Für beide Teilchen weisen die Trajektorien eine ähnliche Struktur[11] auf, was darauf schließen lässt, dass das Beobachtungsobjektiv am stärksten driftet. Die Differenz der Trajektorien des Teilchens in Laserfalle 1 und des festen Teilchens (Abbildung 4.10 links unten) zeigt jedoch, dass dies nicht der einzige Einfluss ist. Eine bis auf Fluktuationen zeitlich konstante Trajektorie erhält man durch Subtraktion der Trajektorien der beiden Teilchen, die jeweils in einer Laserfalle gefangen sind. Aus diesem Grund wird in allen Experimenten ein Referenzteilchen, das in einer sehr starken Laserfalle sitzt, eingesetzt, so dass bei der Auswertung der Videos Drifteffekte eliminiert werden können.

Drift in z

Driftbewegungen in z-Richtung, also senkrecht zur Messzelle, sind schwieriger zu beobachten. Da sie aber nicht durch Hebel verstärkt werden, sollten sie allenfalls einen geringen

[11] Vor allem die Struktur in y ist typisch und taucht in fast allen Messungen in dieser Form auf.

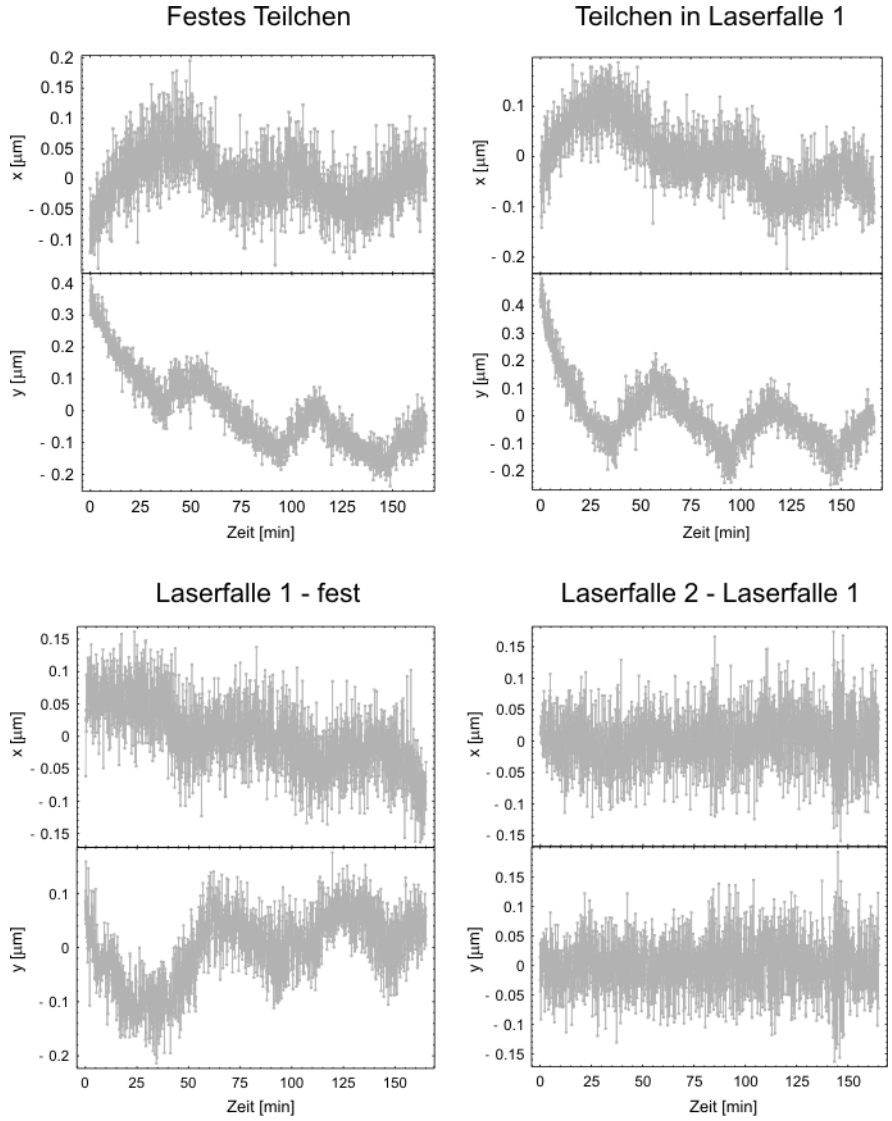


Abbildung 4.10: Messungen zur Drift in xy-Richtung

Einfluss haben. Für die Messungen relevant wäre nur eine Drift des fokussierenden Objektivs relativ zur Messzelle, was die Fokusposition und damit die Stärke der Fokussierung am Ort des Teilchens ändern würde. Als Abschätzung wurden mehrere Doppelmuldenpotentiale über ca. 6 Stunden gemessen. Eine Bestimmung der Kramerszeiten für verschiedene Teilmessungen hat keine messbaren Unterschiede ergeben, so dass wir davon ausgehen, dass die Fokusposition zeitlich hinreichend stabil ist.[12]

4.4.2 Potentialmessungen

Die Form des symmetrischen Doppelmuldenpotentials ergibt sich über die Boltzmannverteilung aus der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung eines Teilchens, das im Potential fluktuiert. Letztere wurde über ca. 85 Minuten mit 20 Bildern pro Sekunde gemessen. Abbildung 4.11a) zeigt die ermittelte Verteilung. Die beiden Mulden sind deutlich zu erkennen. Außerdem wird klar, dass das Teilchen die Barriere hauptsächlich in einem in y-Richtung sehr engen Bereich überquert. Das lässt vermuten, dass es im Allgemeinen ausreicht, die Dynamik in x-Richtung und damit ein eindimensionales System zu betrachten. Diese Vermutung wird später durch die gute Übereinstimmung unserer Messdaten mit eindimensionalen Simulationen bestätigt (siehe Abschnitt 5.2.1, 5.3, 7.2).

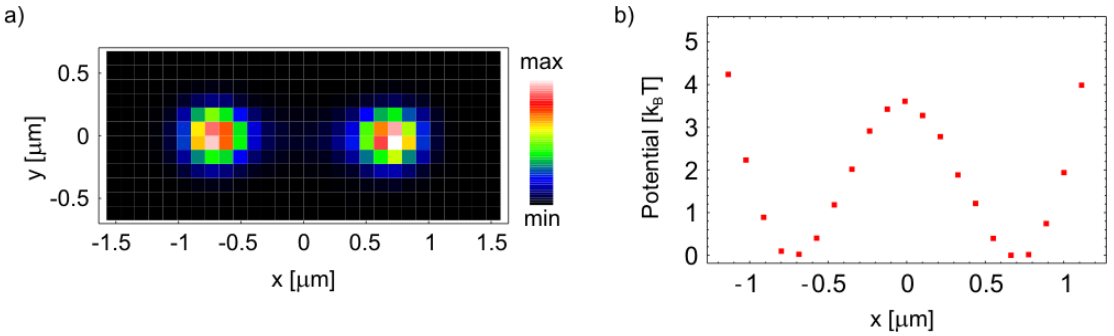


Abbildung 4.11: a) Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung eines Teilchens im symmetrischen Doppelmuldenpotential. b) Schnitt bei $y = 0\,\mu$m durch das aus den Daten in a) ermittelte Potential.

Abbildung 4.11b) zeigt einen Schnitt durch die Minima des aus der Verteilung in Abbildung 4.11a) gewonnenen Potentials. Der Schnitt zeigt, dass wir in der Tat eine symmetrische Doppelmulde erzeugt haben.
Wie wir in Abschnitt 4.2 gesehen haben, ist das Potential, das eine optische Pinzette für ein dielektrisches Teilchen erzeugt, im einfachsten Fall proportional zur Intensität des Laserlichts. Wenn wir davon ausgehen, dass wir in unserem Experiment in guter Näherung Gaußsche Strahlen haben, dann sollte das Doppelmuldenpotential durch die Überlagerung zweier Gaußfunktionen zu beschreiben sein. Leider können wir das nicht mit Hilfe eines

[12] Diese Messungen wurden kurz nach der Deionisation durchgeführt, wo wir eine starke Änderung der Abschirmlänge mit der Zeit erwarten. Diese Änderung scheint also auch keine Rolle zu spielen.

einfachen Fits verifizieren, weil das Potential, das wir messen, nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Eine Bestimmung der absoluten Tiefe des Potentials wäre höchstens dann möglich, wenn wir die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung eines Teilchens in einem deutlich größeren Bereich messen könnten. Dann hätten wir weit weg von der Doppelmulde einen Referenzpunkt für das Potential. Eine solche Messung würde jedoch eine sehr lange Messzeit erfordern, weshalb wir einen anderen Weg gehen, um die Summe zweier Gaußfunktionen an unser gemessenes Potential anzupassen.
Die eigentliche Messgröße im Experiment ist die zweidimensionale Häufigkeitsverteilung der Teilchenpositionen $\mathbf{r}$ im Doppelmuldenpotential. Daraus lässt sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ abschätzen, wenn wir annehmen, dass die Positionen $\mathbf{r}$, an denen das Teilchen während unserer Messung nicht war, einen vernachlässigbaren Beitrag zur Normierung leisten. $\rho(\mathbf{r})$ hängt über

$$\rho(\mathbf{r}) = Z^{-1} \exp\left[-\frac{U(\mathbf{r})}{k_\mathrm{B}T}\right] \tag{4.10}$$

mit dem Potential $U(\mathbf{r})$ zusammen. Das Konfigurationsintegral Z sichert die Normierung, k_B ist die Boltzmannkonstante und T die Temperatur. Z ist durch das Integral von $\exp\left[-\frac{U(\mathbf{r})}{k_\mathrm{B}T}\right]$ über die gesamte Ebene gegeben. Dieses Integral ist nicht analytisch lösbar, wenn $U(\mathbf{r})$ durch eine zweidimensionale Gaußfunktion beschrieben wird. Daher gehen wir schrittweise vor:

1. Wir nehmen Anfangswerte für die Parameter in U($\mathbf{r}$) (die Leistung $I_{1,2}$ in den beiden Laserspots, die Positionen der Spots in x und y und den Fokusdurchmesser) an und berechnen damit die Summe $z = \Sigma \exp\left[-\frac{U(\mathbf{r})}{k_\mathrm{B}T}\right]$, wobei wir alle Punkte $\mathbf{r}$ berücksichtigen, an denen wir Messwerte haben.

2. Wir benutzen z als Normierungskonstante und berechnen damit $\rho_{\mathrm{Näherung}}(\mathbf{r})$.

3. Wir passen mit einem χ^2-Fit $\rho_{\mathrm{Näherung}}(\mathbf{r})$ an $\rho_{\mathrm{gemessen}}(\mathbf{r})$ an, wobei in jedem Schritt z neu bestimmt wird.

Aus $\rho(\mathbf{r})$ können wir dann unter Verwendung von Gleichung (4.10) mit $Z = z$ auch das entsprechende Potential $U(\mathbf{r})$ bestimmen.
Abbildung 4.12a) zeigt die gemessenen Daten aus Abbildung 4.11b) als schwarze Symbole und die nach dem beschriebenen Verfahren angepasste Summe zweier Gaußfunktionen als graue Linie. Die Übereinstimmung ist sehr gut, so dass es für unsere Anwendung keinen Grund gibt, kompliziertere Beschreibungen für die Lichtkräfte zu verwenden. Diese Feststellung wird noch untermauert durch die Tatsache, dass wir auf diese Weise auch die Form eines Potentials, bei dem wir die Intensität in einem Laserspot um einen bestimmten Prozentsatz erniedrigt und im anderen um den gleichen Prozentsatz erhöht haben, vorhersagen können, indem wir lediglich die Parameter I_1 und I_2 entsprechend ändern. Abbildung 4.12b) zeigt einen Schnitt durch ein Potential, in dem die Intensität im linken Laserspot um 6% erniedrigt und diejenige im rechten Laserspot um 6% erhöht wurde.

Die schwarzen Symbole stehen für die Messdaten, die graue Linie ist die Funktion, die an das symmetrische Potential in Abbildung 4.12a) angefittet wurde, jetzt jedoch mit $I_1 = 1.06\, I_{1,\mathrm{alt}}$ und $I_2 = 0.94\, I_{2,\mathrm{alt}}$. Die wiederum sehr gute Übereinstimmung zeigt, dass wir zumindest für kleine Intensitätsänderungen mit Kenntnis des symmetrischen Potentials das gekippte Potential vorhersagen können. Wir gehen davon aus, dass dies auch für größere Intensitätsänderungen der Fall ist und schätzen so unsere Modulationsamplitude ab. Dazu messen wir das symmetrische Potential, fitten die Summe zweier Gaußfunktionen an und berechnen dann, wie groß die maximal auftretende Potentialdifferenz zwischen den beiden Mulden ist, wenn wir die Intensität mit einem bestimmten Betrag modulieren. Diese Abschätzung ist nötig, weil eine Messung des gekippten Potentials mit zunehmendem Intensitätsunterschied zwischen den beiden Mulden immer länger dauert, weil die Sprungwahrscheinlichkeit von der tiefen in die flache Mulde sehr stark abnimmt.

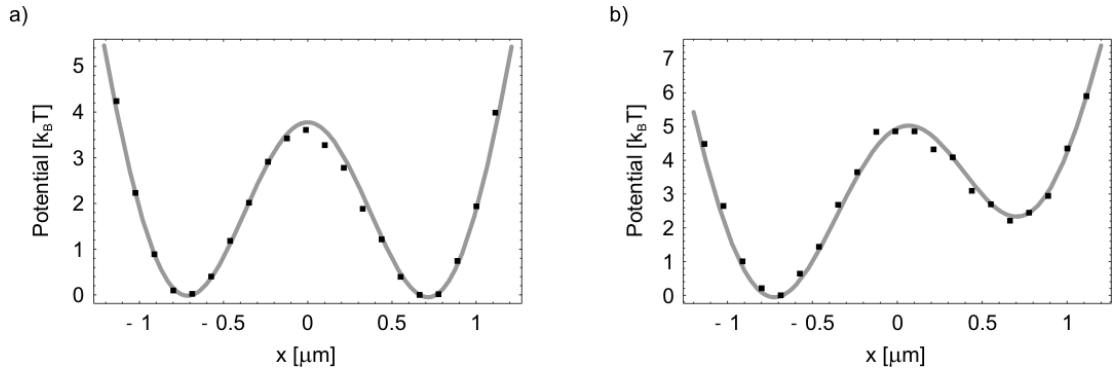


Abbildung 4.12: a) Messdaten für das symmetrische Potential (schwarze Symbole, gleiche Daten wie in Abbildung 4.11b) und angepasste Summe zweier Gaußfunktionen (graue Linie). b) Gemessene Daten für das gekippte Potential (schwarze Symbole) und die Fitfunktion aus a), in der lediglich die Parameter für die Intensitäten in den beiden Laserspots entsprechend der Intensitätsmodulation geändert wurden (graue Linie).

Stochastische Resonanz im einzelnen System

In diesem Kapitel präsentieren wir systematische Messungen zur Stochastischen Resonanz für ein Teilchen im modulierten Doppelmuldenpotential. Das Verhalten des Systems wird für mehrere Modulationsamplituden anhand dreier verschiedener Kriterien charakterisiert, die in Abhängigkeit von der Modulationszeit ein Maximum aufweisen. Einen wichtigen Punkt bildet dabei der Vergleich dieser Kriterien, der analytisch bisher nicht möglich ist.

Das klassische Modellsystem für Stochastische Resonanz ist ein überdämpftes Brownsches Teilchen im modulierten Doppelmuldenpotential. Im letzten Kapitel haben wir uns mit der experimentellen Realisierung dieses Systems befasst. Jetzt gilt es zum einen, zu testen, ob sich unser experimentelles System verhält wie das Modellsystem aus Abschnitt 3.1.3. Das werden wir durch den Vergleich unserer Messergebnisse mit Simulationen überprüfen. Darüber hinaus ist es natürlich unser Ziel, Fragestellungen zu bearbeiten, die analytisch bisher nicht behandelt wurden. Dazu gehört der Vergleich verschiedener Kriterien für *bona fide*[1] Stochastische Resonanz am Ende dieses Kapitels. Am Anfang steht jedoch eine Charakterisierung unseres Systems, ohne die zum Beispiel ein Vergleich unserer Ergebnisse mit Simulationen nicht möglich wäre.

5.1 Charakterisierung des Systems

Für die in den nächsten Abschnitten diskutierten Messungen wurde ein Doppelmuldenpotential erzeugt, indem zwei fokussierte Laserspots im Abstand von 1.6 μm voneinander

[1] Der Begriff *bona fide* Resonanz wird hier verwendet, wenn ein Maß für Stochastische Resonanz in Abhängigkeit von der Modulationszeit ein Maximum aufweist. Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, ist das z. B. für das Signal-Rausch-Verhältnis nicht der Fall.

positioniert wurden. Dabei war in jedem der Spots grob geschätzt ein Milliwatt an Laserintensität. Diese Intensität wurde sinusförmig um ±16% moduliert, wobei die Sinusfunktion in 40 Stufen abgetastet wurde. Im Folgenden geht es um die Bestimmung der Parameter des statischen Potentials, der Kramerszeit und der Modulationsamplitude. Diese Größen können experimentell ermittelt oder abgeschätzt werden, wie zum Teil bereits in Abschnitt 4.4 gezeigt wurde.

Potential

Wie wir bereits in Abschnitt 4.4 besprochen haben, erhalten wir die Form des symmetrischen Doppelmuldenpotentials über die Boltzmannverteilung aus der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung eines Teilchens, das im Potential fluktuiert. Abbildung 5.1a) zeigt die gemessene Verteilung für das Potential, das den Messungen in diesem Kapitel zugrunde liegt, Abbildung 5.1b) einen Schnitt durch die Minima des aus der Verteilung in a) gewonnen Potentials[2] (blaue Symbole).

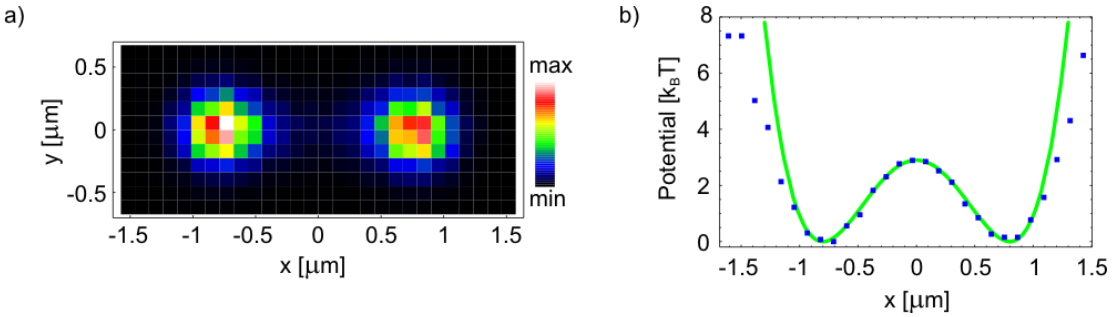


Abbildung 5.1: a) Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung eines fluktuierenden Teilchens im symmetrischen Doppelmuldenpotential. b) Schnitt entlang der Extrema des Potentials, das sich aus der Verteilung in a) ergibt (blaue Symbole) und das Potential $U(x) = 2.9\,k_\mathrm{B}T\,[(x/0.8\,\mu\mathrm{m})^2 - 1]^2$ (grüne Linie).

Der Schnitt zeigt, dass wir in der Tat eine symmetrische Doppelmulde erzeugt haben. Die Barrierenhöhe läßt sich zu $\Delta U = 2.9\,k_\mathrm{B}T$ ablesen.
Zum Vergleich mit dem in der Theorie standardmäßig verwendeten quartischen Potential ist die Funktion $U(x) = 2.9\,k_\mathrm{B}T\,[(x/0.8\,\mu\mathrm{m})^2 - 1]^2$ als grüne Kurve eingezeichnet. Wie wir in Abschnitt 4.2 schon für theoretische Kurven diskutiert haben, weichen beide Potentiale nur in den Außenbereichen voneinander ab, stimmen aber im für die Dynamik des Teilchens relevanten inneren Bereich sehr gut überein.

[2]Das Potential kann nur bis auf eine Konstante bestimmt werden. Diese Konstante wurde hier so gewählt, dass das Potential in den Minima null ist.

Kramerszeit

Aus der Messung des statischen Potentials lässt sich auch die Kramerszeit T_K bestimmen. Nach Gleichung (3.26) fällt die Wartezeitenverteilung[3] für ein Teilchen im symmetrischen Doppelmuldenpotential exponentiell ab mit

$$N(t_{res}) \propto \exp\left[-\frac{t_{res}}{T_K}\right] \quad . \tag{5.1}$$

Damit können wir T_K einmal bestimmen, indem wir eine Exponentialfunktion an die Wartezeitenverteilung anfitten. Außerdem entspricht auch die mittlere Wartezeit, also der Erwartungswert der Wartezeitenverteilung, der Kramerszeit.
Abbildung 5.2 zeigt links die aus der Trajektorie in x-Richtung (mit den Schwellen in den Potentialminima) bestimmte Wartezeitenverteilung. Insgesamt wurden 235 Sprünge beobachtet. Die Verteilung fällt, wie erwartet, exponentiell ab. Im rechten Bild entsprechen die Symbole der gemessenen Wartezeitenverteilung und die blaue Linie zeigt die angefittete Exponentialfunktion $N(t_{res}) = 104 \cdot \exp[-t_{res}/23\,\mathrm{s}]$. Im Inset ist die Abweichung der Messwerte von der Fitkurve aufgetragen. Es ist keine systematische Abweichung zu erkennen, was den exponentiellen Verlauf bestätigt.

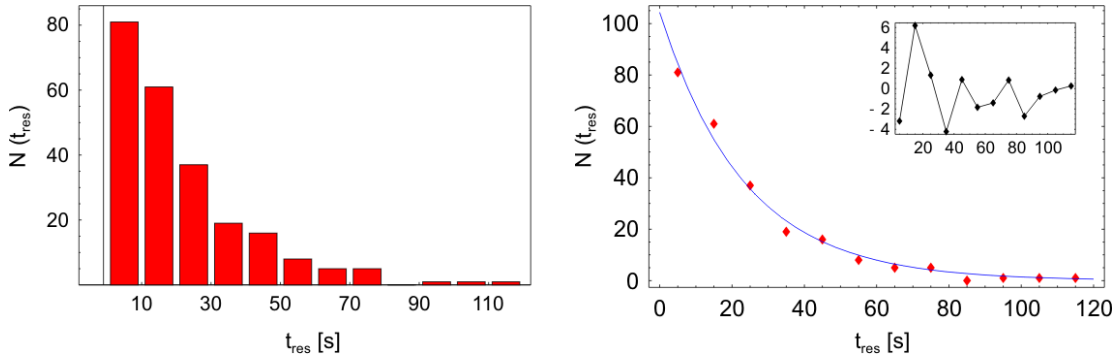


Abbildung 5.2: Bestimmung der Kramerszeit. Links: Wartezeitenverteilung für ein Teilchen im statischen Doppelmuldenpotential. Rechts: Wartezeitenverteilung (rote Symbole) und angepasste Exponentialfunktion $N(t_{res}) = 104 \cdot \exp[-t_{res}/23\,\mathrm{s}]$ (blaue Linie), sowie klein die Abweichung der Messwerte von der Exponentialfunktion.

Die Bestimmung der Kramerszeit aus dem Exponentialfit ergibt $T_K = 23(-2/+3)\,\mathrm{s}$, wobei der Fitfehler angegeben ist. Die mittlere Wartezeit beträgt 22 s, beide Verfahren liefern also konsistente Ergebnisse.

Modulation

Bisher wurden die Parameter des statischen Potentials diskutiert. Jetzt fehlen noch Angaben zur Modulation. In den folgenden Messungen wird die Modulationszeit variiert, aber die

[3] siehe Abschnitt 3.2; wir bestimmen allerdings für unsere experimentellen Daten nicht direkt die Wahrscheinlichkeitsdichte, sondern die Anzahl der beobachteten Wartezeiten in einem vorgegebenen Intervall um t_{res}.

Modulationsamplitude bleibt bei allen Messungen gleich. Oben wurde schon erwähnt, dass die Intensität in den beiden Laserspots um maximal ±16% variiert wurde. Um die daraus resultierende maximale Potentialdifferenz zwischen den beiden Mulden abzuschätzen, wird zunächst die Summe zweier Gaußfunktionen an das gemessene zweidimensionale Potential angefittet (siehe Abschnitt 4.4.2). Abbildung 5.3 zeigt links die Messwerte aus Abbildung 5.1 als schwarze Symbole und die angefittete Funktion als graue Linie. Mit einer um 16%

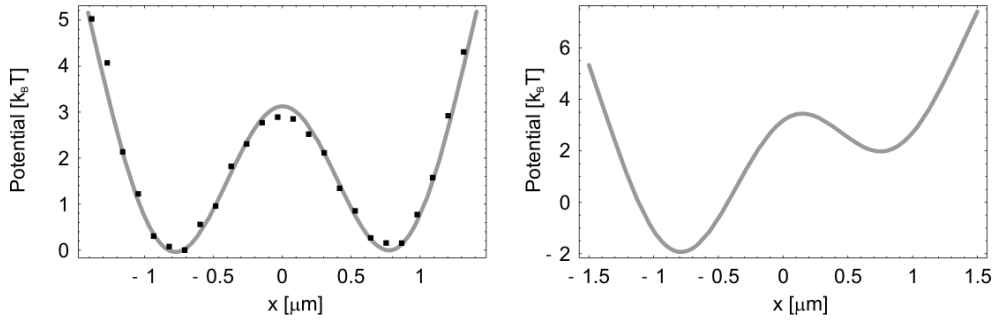


Abbildung 5.3: Bestimmung der Modulationsamplitude. Links: Potentialschnitt aus Abbildung 5.1 (schwarze Symbole) und angefittete Summe aus zwei Gaußfunktionen (graue Linie). Rechts: Die Fitfunktion aus dem linken Bild mit um 16% erhöhter Intensität im linken und um 16% erniedrigter Intensität im rechten Laserspot.

erhöhten Intensität im linken und einer um 16% erniedrigten Intensität im rechten Laserspot ergibt sich damit für das maximal nach links ausgelenkte Potential das Bild in Abbildung 5.3 rechts. Die Potentialdifferenz zwischen den Minima liegt bei ca. $3.8\,k_\mathrm{B}T$.

5.2 Wartezeitenverteilung

Zum Nachweis der Stochastischen Resonanz in unserem soeben charakterisierten System wurde für fünf unterschiedliche Modulationszeiten ein Teilchen im modulierten Doppelmuldenpotential beobachtet. Nach der einfachen Zeitskalenbedingung $2T_\mathrm{K} = T_\mathrm{mod}$ (siehe Gleichung (3.28)) erwarten wir bei einer Kramerszeit von ca. 22 s die Resonanz in der Nähe einer Modulationszeit von 44 s. Diese Erwartung wird durch das Experiment bestätigt. Abbildung 5.4 zeigt links Ausschnitte aus den Trajektorien in x-Richtung für die fünf Messungen bei $T_\mathrm{mod} = 10\,\mathrm{s}, 20\,\mathrm{s}, 50\,\mathrm{s}, 100\,\mathrm{s}, 200\,\mathrm{s}$, in denen die Schwellen für die Bestimmung der Wartezeiten bei $x = \pm 0.8\,\mu$m eingezeichnet sind (rote Linien). Außerdem ist in blau das Modulationssignal angedeutet. Rechts sind die aus der gesamten x-Trajektorie bestimmten Wartezeitenverteilungen aufgetragen. Die Anzahl der beobachteten Wartezeiten in jedem Balken des Histogramms wurde zur Normierung durch die Gesamtzahl der Sprünge geteilt. Die Messungen dauerten jeweils ca. 85 Minuten.[4]
Betrachten wir zuerst die Trajektorie für die Modulationszeit, die am nächsten an der erwarteten Resonanz liegt: $\boldsymbol{T_\mathrm{mod}=50\,\mathrm{s}}$. Hier sehen wir, dass das Teilchen während der ge-

[4]Aus technischen Gründen waren nur Messungen von ca. 42 Minuten Dauer möglich. Deshalb wurden jeweils zwei Messungen mit denselben Parametern durchgeführt und die Ergebnisse später kombiniert.

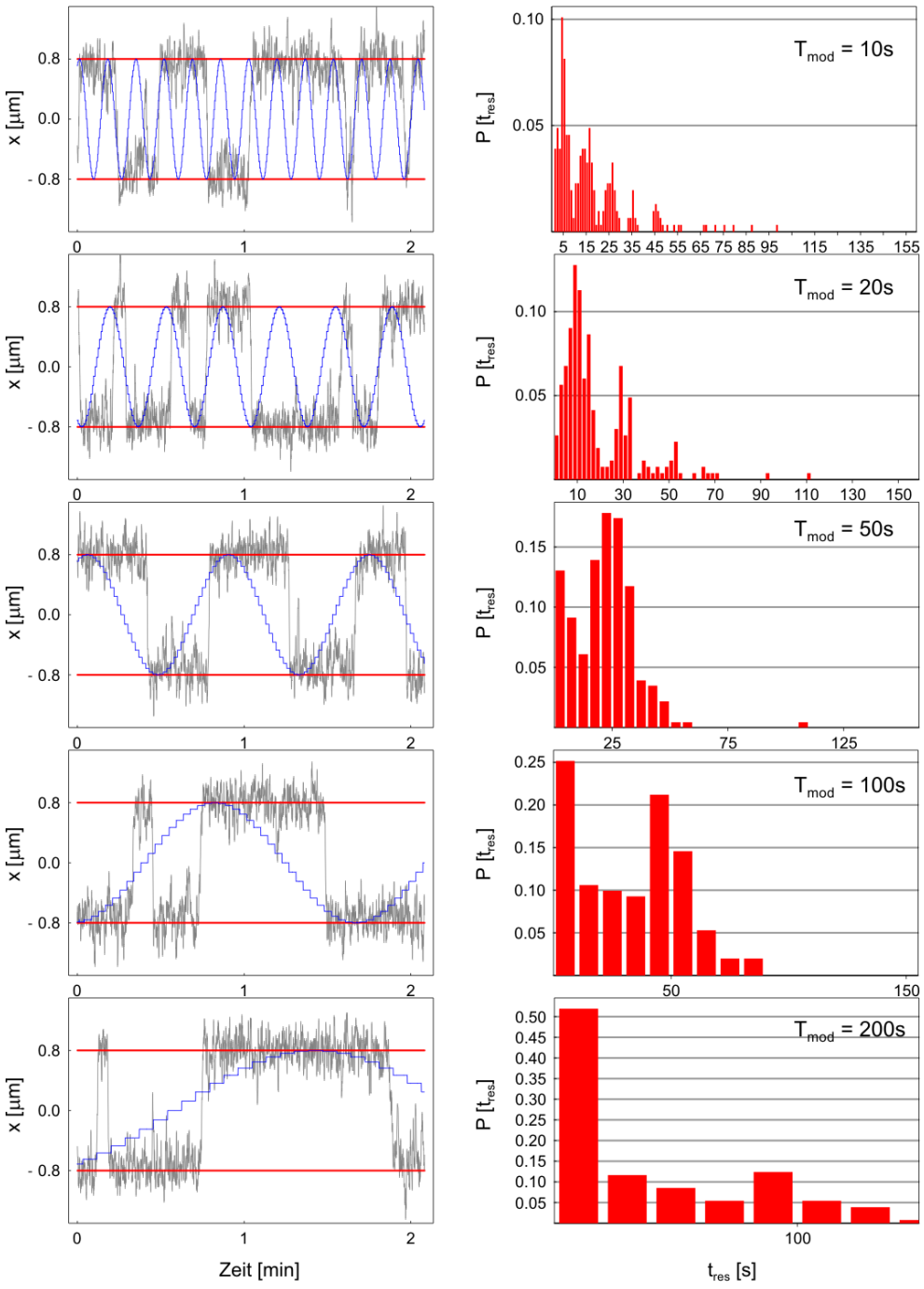


Abbildung 5.4: Messungen für die fünf Modulationszeiten $T_{\mathrm{mod}} = 10\,\mathrm{s}, 20\,\mathrm{s}, 50\,\mathrm{s}, 100\,\mathrm{s}, 200\,\mathrm{s}$. Links: Ausschnitte aus den Trajektorien in x-Richtung mit Schwellen bei $x = \pm 0.8\,\mu\mathrm{m}$ (rot). In blau ist die Modulation angedeutet (in beliebigen Einheiten auf der Ordinate). Rechts: Wartezeitenverteilungen jeweils für die gesamte Messdauer von ca. 85 Minuten. Die Balkenbreite in den Histogrammen beträgt jeweils ein Zehntel der Modulationszeit.

zeigten drei Minuten tatsächlich immer ungefähr dann springt, wenn das Potential maximal ausgelenkt und die Barriere, die das Teilchen überwinden muss, minimal ist. Die Wartezeitenverteilung rechts zeigt, dass das Teilchen auch während der gesamten Messzeit meistens nach einer halben Modulationsperiode springt. Seine Bewegung ist im Mittel sehr gut mit dem Modulationssignal synchronisiert – die meisten Ereignisse finden sich im ersten Peak um t_{res}=25 s. Es gibt aber offensichtlich auch einige Fälle, in denen das Teilchen keine halbe Periode abgewartet hat und nach sehr kurzer Wartezeit gesprungen ist. Das liegt zum einen daran, dass unsere Modulationszeit von 50 s etwas größer ist als die doppelte Kramerszeit. Dadurch hat das Teilchen gelegentlich genug Zeit, um auch dann zu springen, wenn die Potentialbarriere nicht minimal ist. Dieser Effekt ist aber nur zu beobachten, wenn die Modulationsamplitude, wie in unserem Fall, hinreichend klein ist. Andernfalls nimmt die Sprungwahrscheinlichkeit sehr stark ab, wenn das Teilchen nicht ungefähr dann springt, wenn die Potentialbarriere minimal ist.
Für $T_{\mathbf{mod}}$**=100 s** nimmt die Anzahl der Sprünge nach sehr kurzen Wartezeiten schon deutlich zu. Ein typisches Beispiel findet sich auch im gezeigten Trajektorienausschnitt: Das Teilchen springt bei ungefähr symmetrischem Potential einmal von links nach rechts und wieder zurück. Bei $T_{\mathbf{mod}}$**=200 s** dominieren schließlich die Sprünge, die nicht mit dem Modulationssignal korreliert sind. Bei der halben Modulationszeit ist in der Wartezeitenverteilung nur noch andeutungsweise ein Peak zu sehen.
Für Modulationszeiten, die kürzer sind als die halbe Kramerszeit, erwarten wir, dass das Teilchen der Modulation nicht immer folgen kann. Diesen Effekt finden wir zum Beispiel in der Trajektorie für $T_{\mathbf{mod}}$**=20 s** : Die ersten sieben Sprünge erfolgen ungefähr in Phase mit dem Modulationssignal, aber dann „verpasst“ das Teilchen eine günstige Situation und muss für eine weitere Modulationsperiode warten, bis die Barriere auf seiner Seite wieder minimal ist. In der Wartezeitenverteilung führen solche „Warteschleifen“, die auch mehrmals hintereinander auftreten können, zu weiteren Peaks bei ungeradzahligen Vielfachen der halben Modulationszeit. Dieser Effekt verstärkt sich für kürzere Modulationszeiten, was gut an der Verteilung für $T_{\mathbf{mod}}$**=10 s** zu sehen ist.
Die Wartezeitenverteilung verhält sich also für die verschiedenen Modulationszeiten so, wie wir es intuitiv erwarten. Außerdem läst sich bereits absehen, dass die Fläche unter dem ersten Peak bei T_{mod}=50 s ein deutliches Maximum aufweisen wird. Wir definieren die Fläche unter dem ersten Peak nach Gleichung (3.27) mit $\alpha = 0.2$ als

$$P_1 = \int_{0.3\,T_{\mathrm{mod}}}^{0.7\,T_{\mathrm{mod}}} N(t_{\mathrm{res}})\,\mathrm{d}t_{\mathrm{res}} \ . \tag{5.2}$$

Nach [Gam98] dürfen wir maximal von $0.25\,T_{\mathrm{mod}}$ bis $0.75\,T_{\mathrm{mod}}$ integrieren. Wir haben die Integrationsgrenzen sehr nahe an diesen Werten gewählt, um statistische Fehler zu minimieren. Für unsere experimentellen Daten bestimmen wir P_1, indem wir die Anzahl der gemessenen Wartezeiten im Intervall $[0.3\,T_{\mathrm{mod}}, 0.7\,T_{\mathrm{mod}}]$ durch die Gesamtzahl der beobachteten Sprünge teilen.
Abbildung 5.5 zeigt die Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung in Abhängigkeit von der Modulationszeit. Die Kurve weist wie erwartet ein deutliches Maximum

bei T_{mod}=50 s auf. Damit haben wir nachgewiesen, dass wir in unserem System Stochastische Resonanz beobachten.

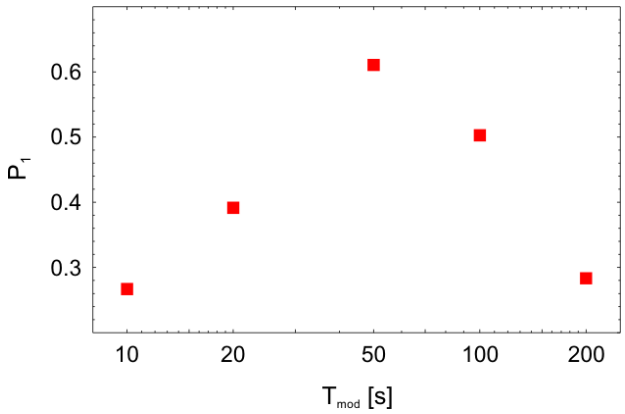


Abbildung 5.5: Fläche P_1 unter dem ersten Peak für die in Abbildung 5.4 gezeigten Wartezeitenverteilungen.

5.2.1 Vergleich mit Langevin-Simulationen

Dass sich unser experimentelles System tatsächlich auch quantitativ in guter Näherung so verhält wie das in Abschnitt 3.1.3 vorgestellte eindimensionale Modellsystem, zeigt ein Vergleich mit Langevin-Simulationen, die in der Gruppe von Prof. Reimann in Bielefeld durchgeführt wurden [Evs05]. Bevor wir zu den Ergebnissen dieser Rechnungen kommen, stellen wir kurz das Modell vor, das ihnen zugrunde liegt.

Modell

Für die Simulation wurde folgendes Modell für die Dynamik des überdämpften Brownschen Teilchens entlang der x-Achse verwendet:

$$\gamma \dot{x}(t) = -U'(x(t)) + f(t) + \xi(t) \tag{5.3}$$

mit den experimentellen Werten für das Potential und die modulierende Kraft, die wir in Abschnitt 5.1 bestimmt haben,

$$U(x) = 2.9\, k_{\mathrm{B}}T \left[(x/0.8\,\mu\mathrm{m})^2 - 1\right]^2 \quad \text{und} \tag{5.4}$$

$$f(t) = 1.9\, k_{\mathrm{B}}T/0.8\,\mu\mathrm{m} \times \cos(\Omega t) \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{mod}}}\,, \tag{5.5}$$

sowie delta-korreliertem weißem Rauschen:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0\,, \tag{5.6}$$

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 2\gamma k_{\mathrm{B}}T\ \delta(t-s)\,. \tag{5.7}$$

Der Reibungskoeffizient γ ist nach dem Stokesschen Gesetz durch

$$\gamma = 6\pi\eta a \tag{5.8}$$

mit der Viskosität η des Wassers und dem Teilchenradius a verknüpft. Allerdings befindet sich unser Teilchen in der Nähe des Bodens der Messzelle, wo es langsamer diffundiert als weit weg von jeder Wand [Bre61, Fei91]. Dem wird dadurch Rechnung getragen, dass die effektive Diffusionskonstante $D = k_\mathrm{B}T/\gamma$ (vgl. Gleichung (4.2)) als freier Parameter behandelt und in der Simulation angepasst wird. Diese Anpassung hat eine effektive Diffusionskonstante von

$$D \approx 0.24\,\mu\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1} \tag{5.9}$$

ergeben, während nach Gleichung (4.2) bei Raumtemperatur (292 K) für ein Teilchen mit Radius $a = 0.79\,\mu$m in Wasser ($\eta = 0.0010\,\mathrm{N\,s\,m^{-2}}$) ein Diffusionskoeffizient von $D \approx 0.27\,\mu\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$ zu erwarten wäre. Demnach ist die effektive Diffusionskonstante in unserem Experiment etwa zehn Prozent niedriger als diejenige für ein Teilchen, das sich weit weg von jeder Wand befindet.

Ergebnis

Abbildung 5.6 zeigt das Ergebnis der Simulation für die Fläche P_1 unter dem ersten Peak für die gleichen Modulationszeiten wie im Experiment. Zum Vergleich sind die entsprechenden experimentellen Daten mit Fehlerbalken eingezeichnet. Die Größe der Fehlerbalken ist dabei gegeben durch die Differenz der Werte für P_1, die aus den beiden Teilmessungen, aus denen die gezeigten Messungen zusammengesetzt sind, bestimmt wurden.[5] Für T_mod=10 s ist das Symbol größer als der Fehlerbalken. Zu beachten ist, dass zur Bestimmung der Wartezeiten aus den Simulationsdaten Schwellwerte von $\pm 0.6\,\mu$m verwendet wurden, weshalb wir hier die Schwellen für die experimentellen Daten entsprechend gesetzt haben. Zuvor hatten wir die Schwellen in die Potentialminima bei $\pm 0.8\,\mu$m gelegt. Ein Vergleich mit Abbildung 5.5 zeigt jedoch, dass sich die Kurven in beiden Fällen nur geringfügig unterscheiden.
Die Simulationskurve zeigt qualitativ den gleichen Verlauf wie die experimentellen Daten. Die Abweichungen zwischen Simulation und Experiment liegen im Bereich von 20 Prozent. Angesichts der Tatsache, dass für die Simulation ein sehr einfaches eindimensionales Modell mit nur einem in engen Grenzen variablen Parameter verwendet wurde, können wir von einer guten Übereinstimmung sprechen. Dabei ist auch zu beachten, dass wir mit unserer einfachen Fehlerabschätzung vermutlich den statistischen Fehler in einigen experimentellen Datenpunkten unterschätzen. So ist auch nicht klar, ob es sich bei der Tatsache, dass die experimentellen Datenpunkte für die Modulationszeiten bis zur Resonanz unter denen der Simulation liegen und für längere Zeiten darüber, um einen systematischen Effekt handelt. Insgesamt ist die Übereinstimmung gut genug, um einige bisher gemachte Annahmen zu rechtfertigen:

[5] Diese Methode der Fehlerabschätzung ist natürlich sehr grob. Da wir aber keinen analytischen Ausdruck für die Wartezeitenverteilung zur Verfügung haben, bietet sich keine der Standardmethoden zur Fehlerbestimmung an. Die eingezeichneten Fehlerbalken sollen lediglich einen Eindruck davon vermitteln, wie stark die Messwerte variieren.

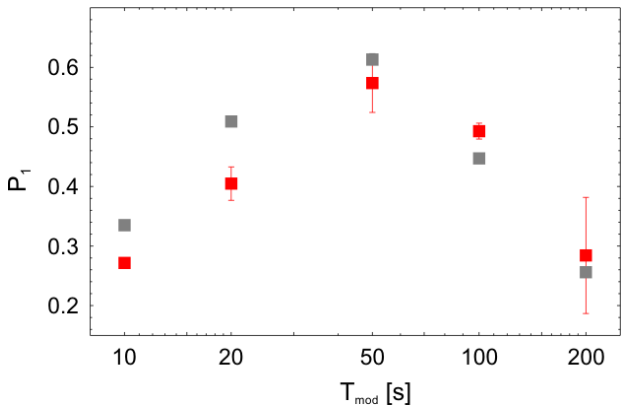


Abbildung 5.6: Vergleich der Ergebnisse der Langevin-Simulation (grau) mit den entsprechenden experimentellen Daten (rot) für die Fläche P_1 unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung. Für T_{mod}=10 s ist das Symbol größer als der Fehlerbalken. (Simulationsdaten von Mykhaylo Evstigneev, Universität Bielefeld)

- Das System kann in guter Näherung als eindimensional betrachtet werden.
- Die Unterschiede zwischen dem Lichtpotential, das einer Summe von zwei Gaußfunktionen entspricht, und einem quartischen Potential spielen zumindest im betrachteten Parameterbereich keine große Rolle.
- Die stufenförmige Modulation hat keinen nennenswerten Einfluss.

5.3 Hysterese

Anhand der Wartezeitenverteilungen haben wir im letzten Abschnitt analysiert, in welchen Zeitabständen das Teilchen von einer Mulde zur anderen springt. Dabei haben wir nicht berücksichtigt, in welcher Phase sich das Modulationssignal jeweils zum Zeitpunkt eines Sprungs befand. Wenn wir diese Information mit einbeziehen, können wir das Hystereseverhalten unseres Systems untersuchen [Mah94, Mah97]. Anschaulich würden wir erwarten, dass das Teilchen bei einer Modulationszeit in der Nähe der Resonanz ungefähr dann springt, wenn das Potential in einer Richtung maximal ausgelenkt ist, danach etwa eine halbe Periode wartet und wieder zurückspringt, wenn das Potential in die andere Richtung maximal ausgelenkt ist. Wo wir das Teilchen also beispielsweise finden, wenn das Potential symmetrisch ist, hängt davon ab, in welche Richtung es zuvor gekippt war.
Wir werden im Folgenden das Hystereseverhalten unseres Systems untersuchen. Die Grundlage dafür bildet das Verhalten der über alle beobachteten Modulationsperioden gemittelten x-Koordinate,

$$\langle x(t)\rangle := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(t+nT_{\mathrm{mod}}) \ , \quad 0 \le t < T_{\mathrm{mod}} \ , \tag{5.10}$$

in Abhängigkeit von der Phase der Modulation zum Zeitpunkt t. Die direkte Phasenabhängigkeit bedeutet, dass zu jeder gemessenen Position $x(t)$ die entsprechende Phase der Modulation bekannt sein muss. Das ist in unserem Experiment momentan nicht ohne weiteres gegeben (siehe Abschnitt 4.3.3), weshalb hier zuerst eine Diskussion der Phasenbestimmung folgt.

Bestimmung der Modulationsphase im Experiment

Hinter der im Folgenden vorgestellten Vorgehensweise steht die Idee, dass es am einfachsten (und am sichersten) ist, wenn die Information über die aktuelle Modulationsphase direkt im Kamerabild kodiert ist. So kann aus jedem Bild die Teilchenkoordinate und die Modulationsphase bestimmt werden. Dazu wird die Modulationsphase abgebildet auf die Bewegung einer optischen Falle, in der ein Teilchen festgehalten wird. Die sinusförmige Modulationsfunktion wird aus technischen Gründen[6] in 40 Schritten konstanter Länge $\Delta t = T_{\mathrm{mod}}/40$ abgetastet, wie in Abbildung 5.7 angedeutet. Zur Beobachtung der Modulationsphase wird jeweils gleichzeitig mit der Modulationsamplitude die x-Position einer sehr starken optischen Falle geändert. Aus Platzgründen geschieht dies wie in Abbildung 5.7 rechts skizziert so, dass jeder Punkt zweimal durchlaufen wird. Aus der Position und der Bewegungsrichtung des in der Falle gehaltenen Teilchens kann man für jedes Bild auf die Phase der Modulation schließen.[7]

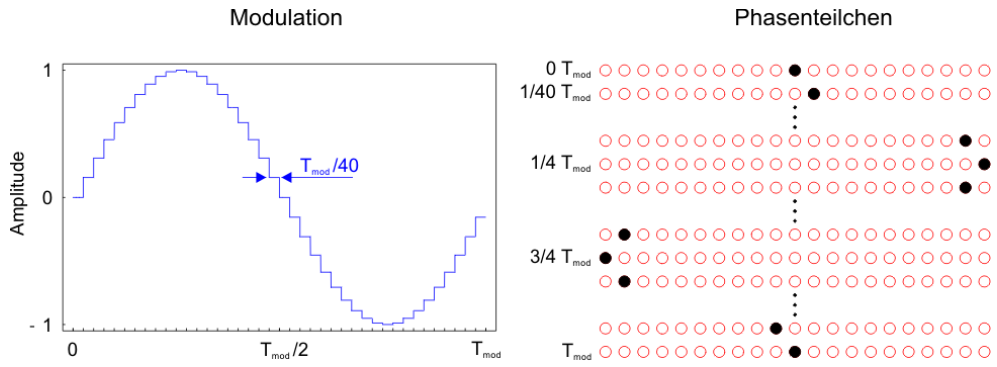


Abbildung 5.7: Bestimmung der Modulationsphase. Links: Verlauf der Modulation. Die Modulationsfunktion wird in 40 Schritten konstanter Länge $\Delta t = T_{\mathrm{mod}}/40$ abgetastet. Rechts: Bewegung des Teilchens, in dessen Position und Bewegungsrichtung die Modulationsphase kodiert ist. Die offenen Kreise markieren jeweils die 21 Positionen, die das Teilchen während einer Modulationsperiode einnehmen kann. Das Teilchen läuft zuerst nach rechts, dann nach links und zurück zur Mitte. Als Beispiel ist die Teilchenposition für einige Zeiten innerhalb einer Modulationsperiode angegeben.

[6] siehe Abschnitt 4.3.3

[7] Es gibt natürlich auch Bilder, auf denen sich das Teilchen zwischen zwei vorgesehenen Positionen befindet. Der dadurch entstehende Fehler ist jedoch vernachlässigbar.

Hystereseschleifen

Abbildung 5.8 zeigt links die nach Gleichung (5.10) über alle beobachteten Perioden gemittelte x-Koordinate in Abhängigkeit von der Modulation $\cos(\Omega t)$ für die Messungen, für die wir im vorigen Abschnitt die Wartezeitenverteilung betrachtet haben. Die Messzeit von ca. 85 Minuten pro Modulationszeit bedeutet, dass für $T_{\mathrm{mod}} = 10\,\mathrm{s}$ etwa $N = 500$ Perioden beobachtet wurden, für $T_{\mathrm{mod}} = 200\,\mathrm{s}$ dagegen nur $N \approx 25$. Das erklärt die verrauschte Kurve für die längste Modulationszeit. Für alle Modulationszeiten beschreibt $\langle x(t)\rangle$ Hystereseschleifen, die mit (Ωt) im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.
Um die Form der Hystereseschleifen für die verschiedenen Modulationszeiten T_{mod} zu verstehen, diskutieren wir zuerst drei Extremfälle:

1. $\mathbf{T}_{\mathrm{mod}} \ll \mathbf{T}_{\mathrm{K}}$: In diesem Fall spürt das Teilchen ein symmetrisches gemitteltes Potential und $\langle x(t)\rangle$ ist null für alle Werte von $\cos(\Omega t)$.

2. $\mathbf{T}_{\mathrm{mod}} \approx \mathbf{2T}_{\mathrm{K}}$: In diesem Fall folgt das Teilchen der Modulation sehr gut und wechselt zweimal pro Modulationsperiode von einer Mulde zur anderen. Meistens springt das Teilchen in der Viertelperiode, in der das Potential vom symmetrischen Zustand in den maximal gekippten übergeht und bleibt dann in der tieferen Mulde, bis das Potential auf die andere Seite gekippt wird. Dieses Verhalten ist auch schön in der entsprechenden Trajektorie in Abbildung 5.4 zu beobachten. So erhalten wir eine Hystereseschleife maximaler Fläche mit einer positiven Steigung.

3. $\mathbf{T}_{\mathrm{mod}} \gg \mathbf{T}_{\mathrm{K}}$ (adiabatischer Grenzfall): Für unendlich lange Modulationszeiten tastet das Teilchen das Potential für jede Stufe in der Modulation ab und es gibt einen eindeutigen Wert $\langle x(t)\rangle$ zu jedem Wert von $\cos(\Omega t)$. In diesem Fall reduziert sich die Hystereseschleife auf eine einzige Kurve.

Dieses Verhalten finden wir auch in unseren experimentellen Daten. Für $T_{\mathrm{mod}} = 10\,\mathrm{s}$ bleibt $\langle x(t)\rangle$ über den gesamten Bereich von $\cos(\Omega t)$ nahe bei null. Allerdings ist die Hystereseschleife leicht nach unten verschoben, was darauf zurückzuführen ist, dass in dieser speziellen Messung das Teilchen mehr Zeit in der linken Mulde verbracht hat als in der rechten. Für $T_{\mathrm{mod}} = 50\,\mathrm{s}$ hat die Hystereseschleife ihre maximale Fläche und eine deutliche, positive Steigung. Für $T_{\mathrm{mod}} = 200\,\mathrm{s}$ tendiert die Hystereseschleife schließlich zu einer einzelnen Kurve.

Vergleich mit numerischen Daten

Die Gruppe von Prof. Reimann in Bielefeld hat die zur in Abschnitt 5.2.1 besprochenen Langevin-Gleichung äquivalente Fokker-Planck Gleichung numerisch gelöst und für unsere experimentellen Parameter die in Abbildung 5.8 rechts gezeigten Hystereseschleifen erhalten. Die Ähnlichkeit der numerischen und der experimentellen Daten ist offensichtlich. Auffällig ist lediglich, dass die Hystereseschleife für $T_{\mathrm{mod}} = 50\,\mathrm{s}$ im Experiment stärker abgeflacht ist als aufgrund der numerischen Daten erwartet. Allgemein ist aber auch hier wieder zu bemerken, dass sich das Experiment offenbar sehr gut durch das eindimensionale Modellsystem aus Abschnitt 5.2.1 beschreiben lässt.

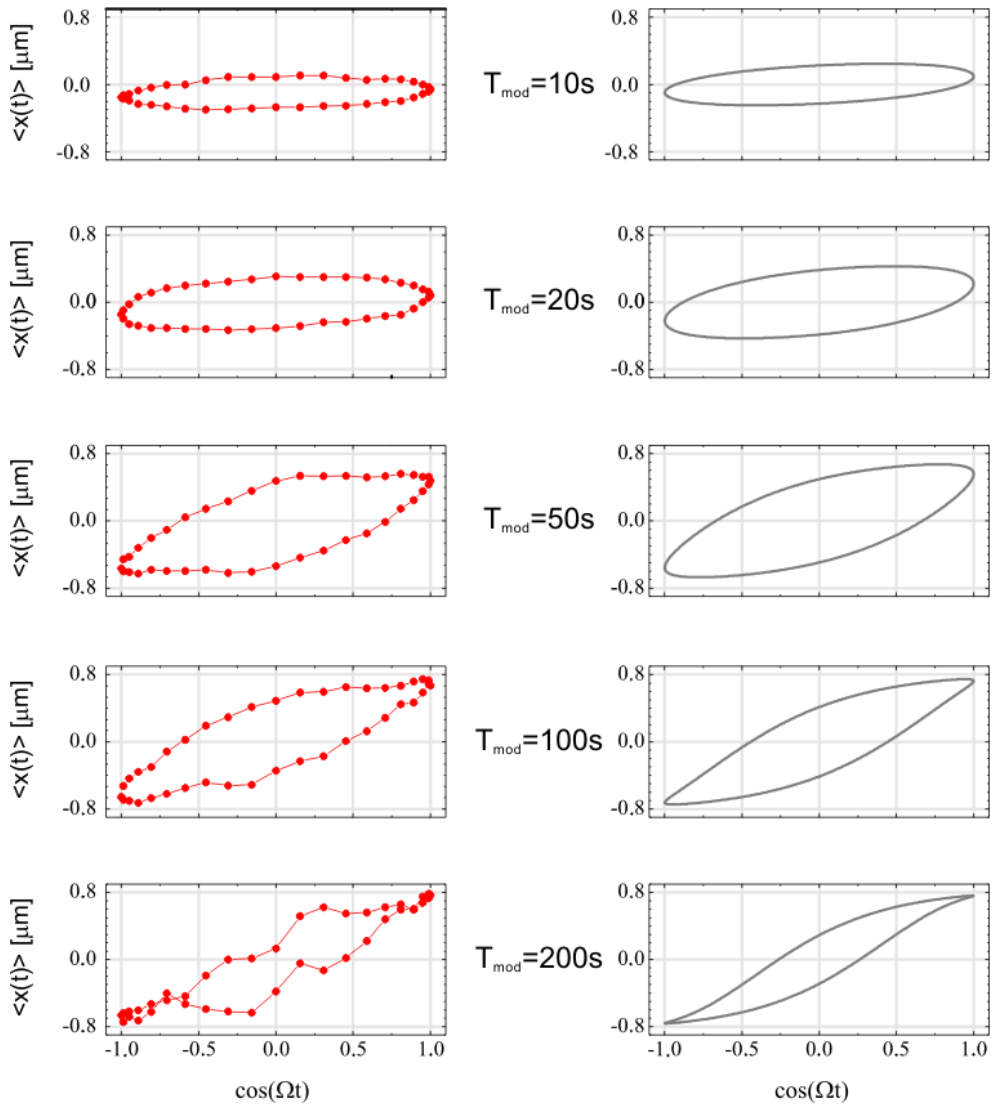


Abbildung 5.8: Verhalten der periodisch gemittelten Koordinate $\langle x(t) \rangle$ in Abhängigkeit von der Modulation $\cos(\Omega t)$. Links: Experimentelle Daten aus den Messungen, die auch Abbildung 5.4 zugrunde liegen. Rechts: Daten aus der numerischen Lösung der zur Langevin-Gleichung aus Abschnitt 5.2.1 äquivalenten Fokker-Planck Gleichung. (Numerische Daten von Mykhaylo Evstigneev, Universität Bielefeld)

Fläche der Hystereseschleifen

Als Maß für die Stochastische Resonanz wird die Fläche HLA (*hysteresis loop area*) der Hystereseschleifen betrachtet. Abbildung 5.9 zeigt die aus den experimentellen und den numerischen Daten ermittelten Flächen (rote bzw. graue Symbole). Die experimentellen Daten wurden zur Bestimmung der Fläche vor der Integration linear interpoliert.

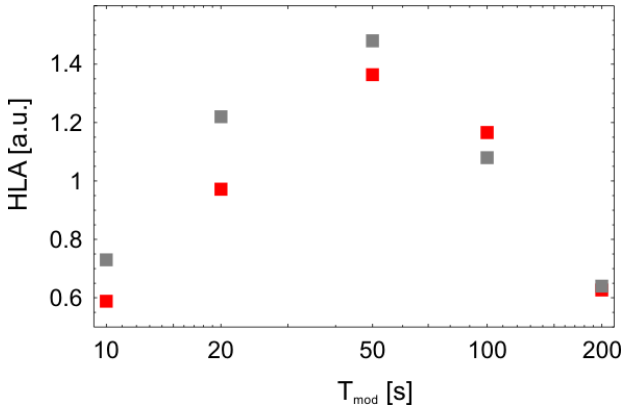


Abbildung 5.9: Fläche der Hystereseschleifen HLA für die experimentellen (rot) und die numerischen Daten (grau) aus Abbildung 5.8. (Numerische Daten von Mykhaylo Evstigneev, Universität Bielefeld)

Wie bereits für die Fläche P_1 unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung zeigen beide Kurven ein Maximum bei T_{mod}=50 s. Die Abweichungen zwischen dem Experiment und den numerischen Daten liegen auch hier im Bereich von 20 Prozent. Außerdem finden wir wieder, dass für Modulationszeiten bis zur Resonanz die numerischen Daten über den experimentellen liegen, während das für längere Modulationszeiten umgekehrt ist. Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen verschiedenen Kriterien für Stochastische Resonanz werden wir in Abschnitt 5.6 näher beleuchten.

5.4 Phasensynchronisation

Im letzten Abschnitt haben wir mit den Hystereseschleifen schon eine Größe betrachtet, in die die Phase der Modulation eingeht. Allerdings wurde dabei über viele Modulationszyklen gemittelt. Sieht man Stochastische Resonanz als Synchronisationsphänomen, so ist das empfindlichste Kriterium die Phasensynchronisation zwischen dem Modulationssignal und der Antwort des Systems. Dabei benutzt man als Maß für die Synchronisation entweder die mittlere Anzahl der Modulationsperioden, während derer die Phasendifferenz zwischen Signal und Antwort des Systems nicht stärker als um einen bestimmten Wert variiert, oder eine Péclet-Zahl, definiert als das Verhältnis zwischen Phasengeschwindigkeit und Phasendiffusionskoeffizient [Par05, Fre03b, Par04, Fre00, Pra05]. Während bisher analytisch, numerisch und experimentell [Bar03, Fre03a] hauptsächlich untersucht wurde, wie die Phasendifferenz auf eine Änderung der Rauschamplitude reagiert, haben Prager und

Schimansky-Geier kürzlich angemerkt, dass die Péclet-Zahl für ein periodisch getriebenes Zwei-Zustands-System auch in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz ein Maximum aufweist [Pra05].

Phasendefinition

Zur Untersuchung der Phasensynchronisation in unserem System müssen wir zuerst eine sinnvolle Phasendefinition für das springende Teilchen finden. In der Literatur gibt es dazu verschiedene Ansätze, die beispielsweise in [Fre03b] besprochen werden. Für ein Zwei-Zustands-System wird am häufigsten eine diskrete Phase verwendet, die bei jedem Sprung um π anwächst. Da wir unser Modellsystem durch Setzen von Schwellwerten auf ein Zwei-Zustands-System reduzieren können, werden wir diese Definition übernehmen. Die Phase der Modulation ist in unserem Fall einfach zu definieren. Abbildung 5.10 illustriert die Situation für unsere experimentellen Daten: Oben ist ein Ausschnitt einer Trajektorie gezeigt, zusammen mit den Schwellwerten und dem Verlauf der Modulation (a). Die Analyse wird beim ersten negativen Nulldurchgang des Modulationssignals gestartet, wenn also das Potential ausgeglichen ist. Jetzt ist sowohl die Modulationsphase $\Phi_{\text{Modulation}}$ (b) als auch die Teilchenphase Φ_{Teilchen} (c) null, ebenso offensichtlich die Phasendifferenz $\Delta\Phi = \Phi_{\text{Modulation}} - \Phi_{\text{Teilchen}}$ (d).

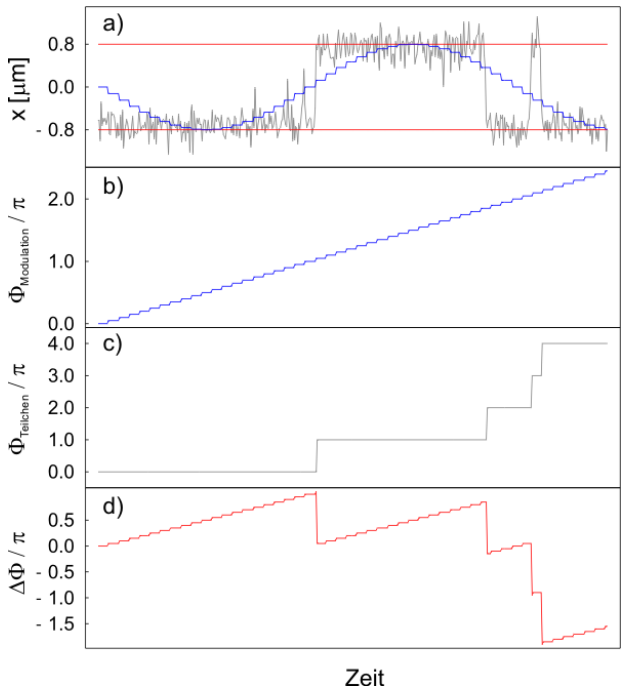


Abbildung 5.10: Beispiel zur Definition der Phasen. a) Ausschnitt aus einer Teilchentrajektorie mit rot eingezeichneten Schwellen und in blau angedeuteter Modulation. b) Phase der Modulation. c) Phase des Teilchens. d) Phasendifferenz zwischen Modulation und Teilchen.

Die Modulationsphase nimmt dann mit jedem Modulationsschritt um $2\pi/40$ zu, die Teil-

chenphase bei jedem Sprung um π. Solange das Teilchen einmal pro halber Modulationsperiode springt, bleibt die Phasendifferenz im Bereich zwischen $-\pi$ und π. Wenn es jedoch z. B. öfter springt, wie im Beispiel, dann eilt die Teilchenphase der Modulationsphase voraus und die Phasendifferenz nimmt ab.

Verlauf der Phasendifferenz

Mit diesen Definitionen können wir uns jetzt den zeitlichen Verlauf der Phasendifferenz $\Delta\Phi$ für verschiedene Modulationszeiten anschauen. Abbildung 5.11 zeigt links noch einmal die Trajektorienausschnitte[8] aus Abbildung 5.4 für die Modulationszeiten 10 s, 20 s, 50 s, 100 s und 200 s, und rechts den Verlauf der Phasendifferenz für die ersten 25 Perioden der jeweiligen Messung (bzw. für die ersten 12 Perioden im Fall von $T_{\mathrm{mod}} = 200\,\mathrm{s}$, weil in diesem Fall eine Teilmessung nur 12 Perioden umfasst).
Wenn man die unterschiedlichen Skalen beachtet, wird sofort klar, dass für T_{mod}=10 s und T_{mod}=20 s das Teilchen der Modulation nicht folgen kann: Die Phasendifferenz nimmt im Zeitverlauf stark zu. Anders bei T_{mod}=50 s : Die Phasendifferenz nimmt mit der Zeit ab, allerdings mit deutlich geringerer Geschwindigkeit. Modulation und Teilchen sind immer wieder über längere Zeit synchronisiert. Das deutet darauf hin, dass wir uns mit T_{mod}=50 s in der Nähe der Resonanz befinden, aber ein wenig zu langsam modulieren. Das passt auch mit der Bestimmung der Kramerszeit zu $T_{\mathrm{K}} \approx 22\,\mathrm{s}$ und der Zeitskalenbedingung $T_{\mathrm{mod}} = 2T_{\mathrm{K}}$ zusammen. Wenn die Zeitskalenbedingung exakt erfüllt ist, erwarten wir eine im Mittel konstante Phasendifferenz.
Für T_{mod}=100 s und T_{mod}=200 s nimmt die Phasendifferenz mit der Zeit deutlich ab, das Teilchen springt häufiger als zweimal pro Modulationsperiode.

Phasensynchronisation

Eine im Mittel konstante Phasendifferenz ist nicht hinreichend als Kriterium für Phasensynchronisation oder für Stochastische Resonanz. Am einfachsten ist das einzusehen, wenn wir bedenken, dass wir auch bei einer Modulation mit einer Periode von $2T_{\mathrm{K}}$ und einer Amplitude von null erwarten würden, dass die Phasendifferenz im Mittel konstant bleibt. In diesem Fall wäre jedoch gar kein Signal vorhanden, mit dem die Teilchenbewegung synchronisiert sein könnte. Wir brauchen also ein zusätzliches Kriterium. Dazu bietet es sich an, direkt die Zeiten T_{sync} zu messen, innerhalb derer Modulation und Teilchenbewegung synchronisiert sind. Allgemein spricht man von Phasensynchronisation, wenn die Phasendifferenz $\Delta\Phi$ für alle Zeiten kleiner bleibt als 2π [Par05, Ros96]. Dieses Kriterium wird ein System, das Stochastische Resonanz zeigt, nie erfüllen. Wir können jedoch die endliche Zeit T_{sync} definieren als die Zeit, während der die Phasendifferenz $\Delta\Phi$ sich höchstens um 2π ändert [Par05]. T_{sync} ist also jeweils die längste Zeit, für die gilt:

$$\Delta(\Delta\Phi)_{T_{\mathrm{sync}}} := \mathrm{Max}[\Delta\Phi]_{T_{\mathrm{sync}}} - \mathrm{Min}[\Delta\Phi]_{T_{\mathrm{sync}}} \leq 2\pi \ . \tag{5.11}$$

[8] Diese Trajektorienausschnitte sind so gewählt, dass sie das typische Verhalten des Teilchens bei der jeweiligen Modulationszeit zeigen. Nicht alle fangen beim Beginn der Messung an.

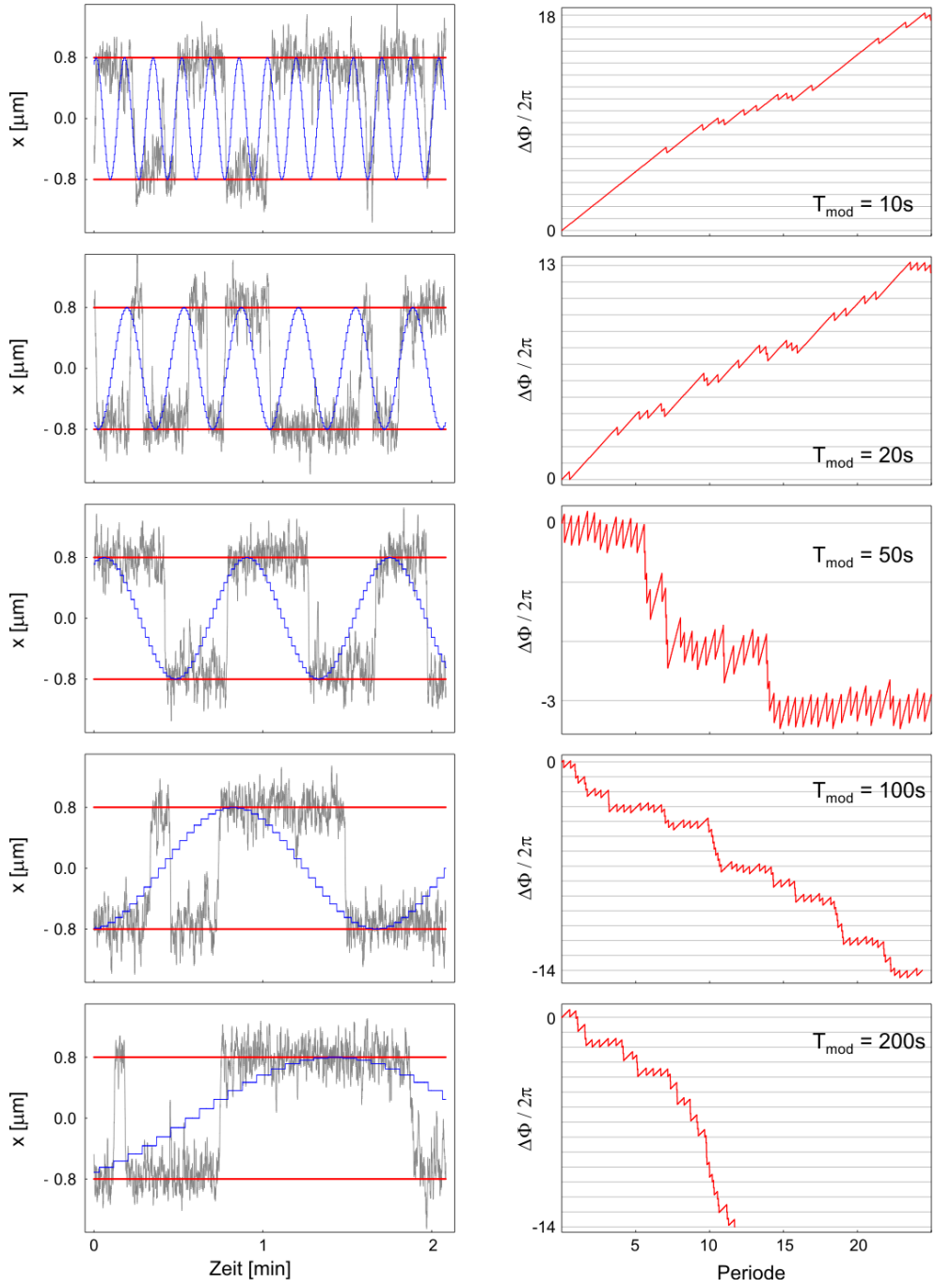


Abbildung 5.11: Links: Trajektorienausschnitte für die Modulationszeiten 10 s, 20 s, 50 s, 100 s und 200 s. Die Schwellen sind in rot eingezeichnet, die Modulation ist in blau angedeutet. Rechts: Phasendifferenzen für die ersten 25 Perioden (bzw. die ersten 12 Perioden für T_{mod}=200 s) der Messungen zu den jeweiligen Modulationszeiten. Die Phasendifferenzen sind in Einheiten von 2π angegeben.

Abbildung 5.12 zeigt an drei Beispielen, dass diese Definition im Allgemeinen sehr gut mit dem übereinstimmt, was wir auch intuitiv als synchronisierte Bereiche erkannt hätten. Die Ausnahmen sind dabei die Fälle, in denen die Phasendifferenz nur sehr kurz die Synchronisationsbedingung nicht erfüllt, dann aber wieder in den gleichen Bereich zurückkehrt.

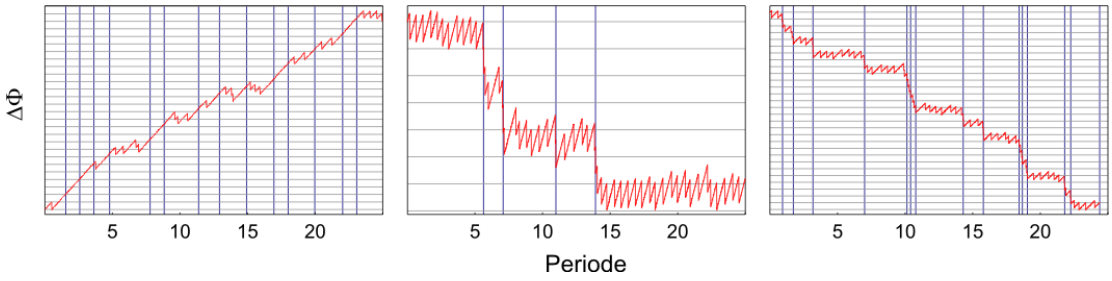


Abbildung 5.12: Beispiele zur Bestimmung von T_{sync}. Die blauen Linien markieren jeweils die Zeitpunkte, zu denen $\Delta(\Delta\Phi)_{T_{\mathrm{sync}}}$ (siehe Gleichung (5.11)) den Wert 2π erreicht.

In Abbildung 5.13 sehen wir $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ in Abhängigkeit von der Modulationszeit. Die Mittelung erfolgt über die gesamte Messzeit. Das hat zur Folge, dass $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ systematisch unterschätzt wird, weil Anfang und Ende der Messung im Allgemeinen nicht mit dem Anfang bzw. dem Ende einer Synchronisationsperiode T_{sync} übereinstimmen. Wollte man diesen Effekt eliminieren, dürfte man die Zeit vor dem ersten und nach dem letzten Sprung in der Phasendifferenz während einer Teilmessung nicht berücksichtigen. Vor allem in der Nähe der Resonanz hätte das aber eine deutlich schlechtere Statistik zufolge, so dass wir lieber die Unterschätzung in Kauf nehmen.[9]

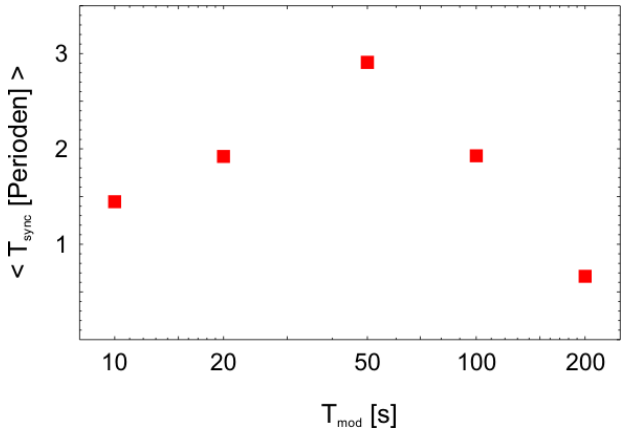


Abbildung 5.13: Mittlere Zeit $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$, in der die Phasendifferenz in einem Bereich von 2π bleibt, in Abhängigkeit von der Modulationszeit T_{mod}.

Wie bereits die Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung und die Fläche der Hysteresekurven zeigt auch $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ ein Maximum bei T_{mod}=50 s. Mit nur ca. 3 Perioden ist

[9] Inzwischen ist dieses Problem nicht mehr so groß, weil wir mit einem neuen Messrechner auch längere Messungen am Stück durchführen können. So gibt es pro Modulationszeit nur noch zwei „Endstücke“.

die mittlere Synchronisationszeit im Resonanzfall nicht besonders lang. Das reicht nicht, um von Phasensynchronisation zu sprechen. Neiman et al. [Nei98] gehen zum Beispiel davon aus, dass dazu eine Synchronisation über im Mittel mindestens 100 Perioden nötig ist. Phasensynchronisation wird erst ab einer bestimmten Modulationsamplitude erreicht und ist damit ein stärkeres Kriterium als Stochastische Resonanz [Fre03b, Fre00, Nei98]. Trotzdem können wir auch in unserem Fall $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ als sinnvolles Maß für die Stochastische Resonanz nutzen.

5.5 Einfluss der Modulationsamplitude

Bisher haben wir eine Messreihe mit einem konstanten Parametersatz und insbesondere für eine bestimmte Modulationsamplitude untersucht. Offensichtlich wird sich das System bei einer deutlich schwächeren oder deutlich stärkeren Modulation anders verhalten. Die Grenzfälle sind dabei leicht vorherzusagen:

1. Bei verschwindend kleiner Modulationsamplitude wird kaum eine Abweichung vom Verhalten eines Teilchens im statischen Potential festzustellen sein.

2. Bei sehr starker Modulation wird das Teilchen über einen weiten Bereich von Modulationszeiten dem Signal folgen.

Im Folgenden werden wir uns im Vergleich zu der Messreihe, die wir bisher diskutiert haben, noch zwei weitere anschauen. Die statischen Potentiale sind dabei für alle drei Messreihen vergleichbar, während sich die Modulationsamplituden deutlich unterscheiden:

$$
\begin{aligned}
\text{Abstand der Potentialminima} &: 2x_0 = 1.6\,\mu\text{m (für alle Messungen)} \\
\text{Barrierenhöhe} &: \Delta U = 3.3\,k_{\mathrm{B}}T \mid 2.9\,k_{\mathrm{B}}T \mid 3.3\,k_{\mathrm{B}}T \\
\text{Kramerszeit} &: T_{\mathrm{K}} = 26\,\mathrm{s} \mid 22\,\mathrm{s} \mid 25\,\mathrm{s} \ \text{(mittlere Wartezeit)} \\
&\quad\ T_{\mathrm{K}} = 23(-3/+2)\,\mathrm{s} \mid 23(-2/+3)\,\mathrm{s} \mid 26(-3/+4)\,\mathrm{s} \\
&\quad\ \text{(Exponentialfit)} \\
\text{Modulationsamplitude} &: A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0 \mid 1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0 \mid 3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0\ .
\end{aligned}
$$

Die Modulationsamplitude von $A = 3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ liegt knapp unter dem kritischen Wert, ab dem das Potential im maximal ausgelenkten Zustand monostabil wird.

Wartezeitenverteilungen

Abbildung 5.14 zeigt die Wartezeitenverteilungen für die drei Messreihen, jeweils zu den Modulationszeiten T_{mod}=10 s, 20 s, 50 s, 100 s und 200 s (Zeilen) und den Modulationsamplituden $A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0,\ 1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0,$ sowie $3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Spalten). Die mittlere Spalte ist diejenige, die wir bereits kennen. Für die kleinste Modulationsamplitude (linke Spalte) ist in der Wartezeitenverteilung nur sehr schwach eine Struktur zu erkennen. Für die stärkste Modulation (rechte Spalte) ist die Struktur dagegen sehr viel ausgeprägter und

die Peaks sind schmaler. Außerdem fällt auf, dass für die langen Modulationszeiten von 100 s und 200 s die Teilchenbewegung noch sehr stark mit der Modulation korreliert ist. Das wird klar, wenn man bedenkt, dass bei starker Modulation ein Sprung in einer „ungünstigen“ Modulationsphase unwahrscheinlicher ist als bei schwächerer Modulation, weil die zu überwindende Barriere höher ist. So sehen wir auch in den Kurven der Fläche P_1 unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung in Abbildung 5.15, dass die Kurve für die stärkste Modulation (Quadrate) zu den längeren Modulationszeiten hin gegenüber den anderen Kurven abgeflacht ist. Der gemessene Wert für P_1 ist für T_{mod}=100 s sogar etwas höher als für T_{mod}=50 s . Dieser Effekt deutet allerdings nicht auf eine Resonanzverschiebung hin, sondern dürfte rein statistisch bedingt sein. Die Kurve für die schwächste Modulation (Dreiecke) wird bei kurzen Modulationszeiten vergleichsweise flach. Das hängt hauptsächlich damit zusammen, dass der Hintergrund der exponentiellen Verteilung bei kurzen Wartezeiten größer ist. Insgesamt liegen die Kurven, wie man das auch erwarten würde, mit wachsender Modulationsamplitude höher.

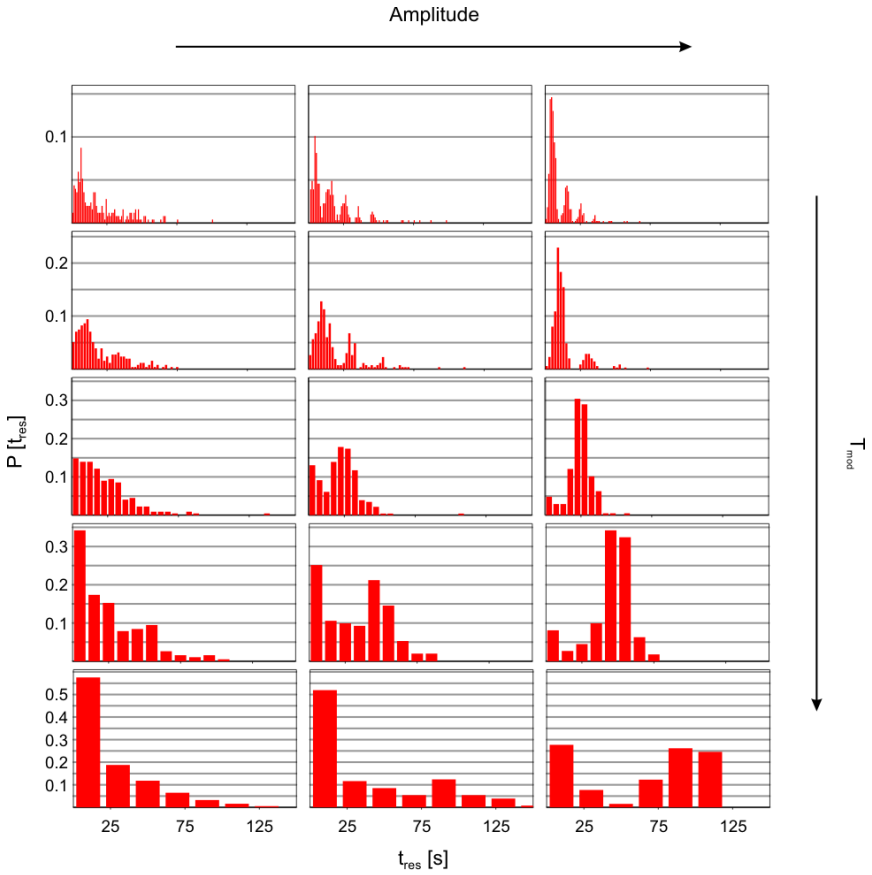


Abbildung 5.14: Wartezeitenverteilungen für die Modulationszeiten T_{mod}=10 s, 20 s, 50 s, 100 s und 200 s (von oben nach unten) und die Modulationsamplituden $A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$, $1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$, sowie $3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (von links nach rechts).

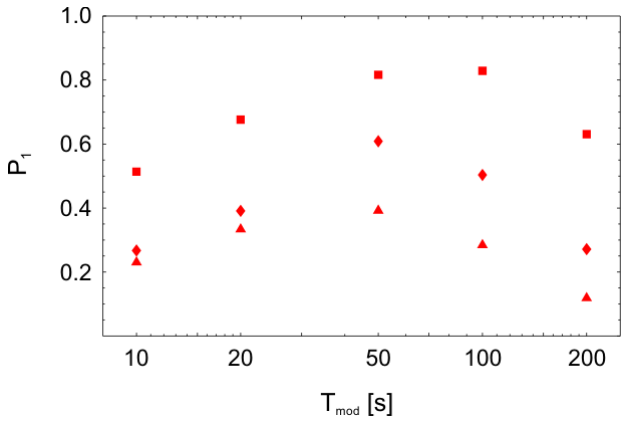


Abbildung 5.15: Fläche P_1 unter dem ersten Peak für die Abbildung 5.14 gezeigten Wartezeitenverteilungen. Die verschiedenen Symbole stehen für die Modulationsamplituden $A = 1\,k_\mathrm{B}T/x_0$ (Dreieck), $A = 1.9\,k_\mathrm{B}T/x_0$ (Diamant) und $A = 3.1\,k_\mathrm{B}T/x_0$ (Quadrat).

Hysteresekurven

Auch für die Hysteresekurven in Abbildung 5.16 ist der Effekt anwachsender Modulationsamplitude gut zu beobachten. Die Aufteilung von Zeilen und Spalten ist wieder gleich wie für die Wartezeitenverteilungen. Hier ist auch für die schwächste Modulation der typische Verlauf der Hystereseschleifen, wie er in Abschnitt 5.3 diskutiert wurde, noch gut zu erkennen. Das zeigt sich auch in der Fläche HLA der Hysteresekurven in Abbildung 5.17. Die beiden Kurven für schwache (Dreiecke) und mittlere (Diamanten) Modulation weisen jeweils einen deutlichen Peak bei T_mod=50 s auf. Für die stärkste Modulation (Quadrate) verläuft die Kurve hingegen für kurze Modulationszeiten sehr flach, während sie für lange Modulationszeiten stärker abfällt als die Kurven für kleinere Amplituden.

Phasensynchronisation

Abbildung 5.18 zeigt die Phasendifferenz $\Delta\Phi$ zwischen Modulationssignal und Teilchenbewegung. Für alle drei Modulationsperioden ist auf den ersten Blick klar, dass T_mod=50 s in der Nähe der Resonanz liegt: Die Phasendifferenz ist nahezu konstant und es sind längere Synchronisationsperioden zu beobachten. Dass $\langle T_\mathrm{sync}\rangle$ von links nach rechts deutlich zunimmt, ist schon an den gezeigten Ausschnitten zu erkennen. Wie groß dieser Effekt jedoch gerade für die stärkste Modulation ist, wird in Abbildung 5.19 klar. Während die Kurven für die beiden kleineren Amplituden vergleichsweise flach verlaufen, weist diejenige für die größte Amplitude einen sehr ausgeprägten Peak auf. Darauf werden wir im nächsten Abschnitt zurückkommen.

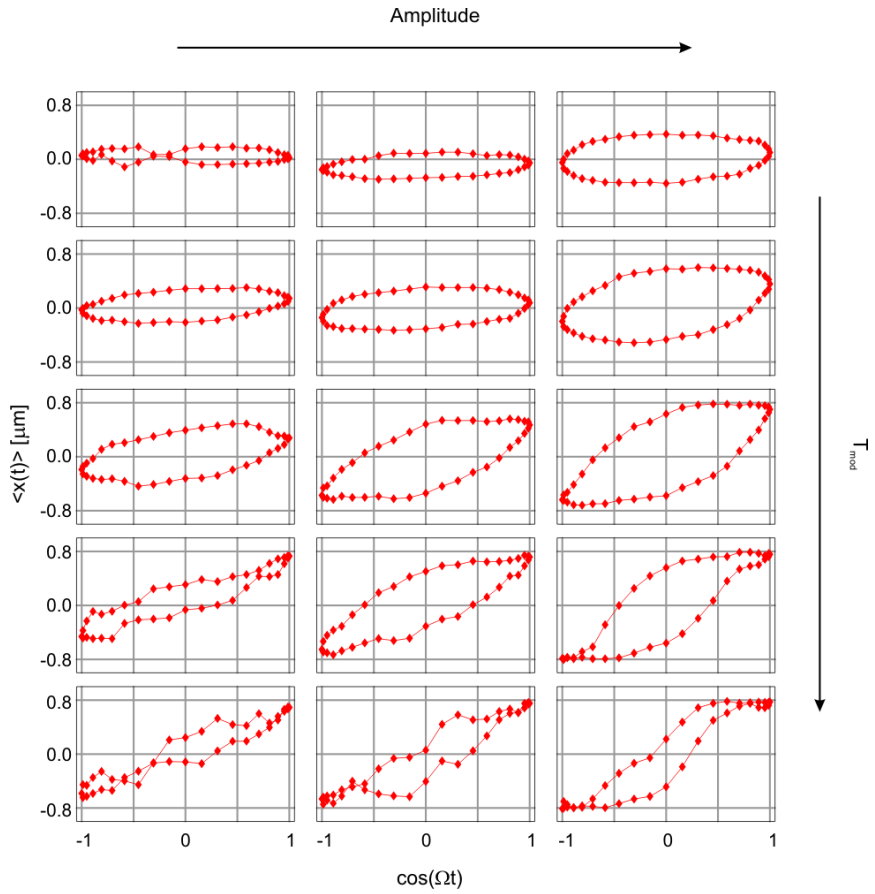


Abbildung 5.16: Hysteresekurven für die Modulationszeiten T_{mod}=10 s, 20 s, 50 s, 100 s und 200 s (von oben nach unten) und die Modulationsamplituden $A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$, $1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$, sowie $3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (von links nach rechts).

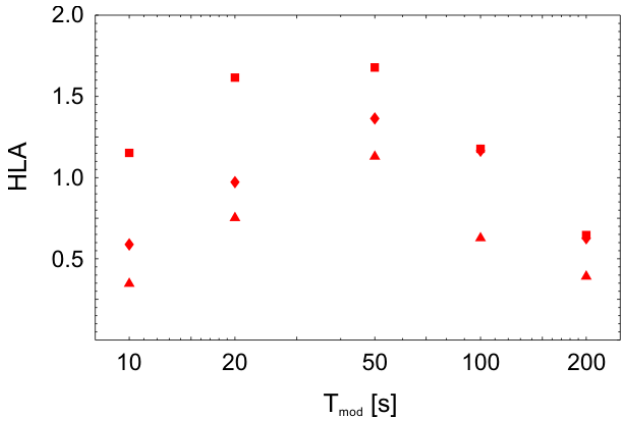


Abbildung 5.17: Fläche HLA der in Abbildung 5.16 gezeigten Hysteresekurven. Die verschiedenen Symbole stehen für die Modulationsamplituden $A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Dreieck), $A = 1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Diamant) und $A = 3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Quadrat). Für T_{mod}=100 s und T_{mod}=200 s liegen die Diamanten und die Quadrate aufeinander.

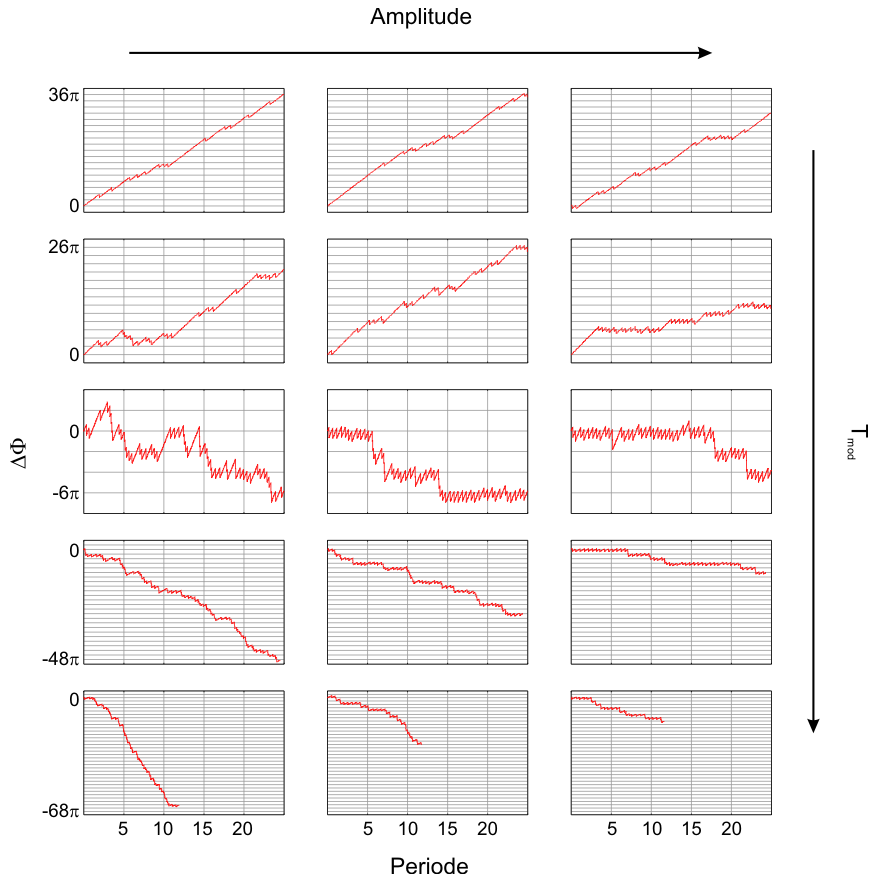


Abbildung 5.18: Phasendifferenzen $\Delta\Phi$ zwischen Modulationssignal und Teilchenbewegung für die Modulationszeiten T_{mod}=10 s, 20 s, 50 s, 100 s und 200 s (von oben nach unten) und die Modulationsamplituden $A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$, $1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$, sowie $3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (von links nach rechts). Die horizontalen Gitterlinien liegen im Abstand von 2π.

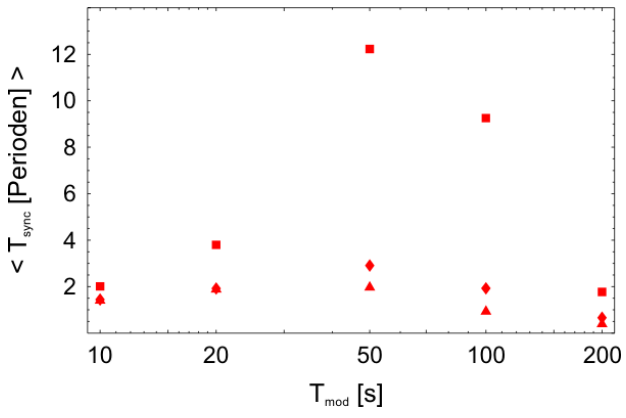


Abbildung 5.19: $\langle T_{\mathrm{sync}}\rangle$ für die Messungen zu den in Abbildung 5.18 gezeigten Phasendifferenzen. Die verschiedenen Symbole stehen für die Modulationsamplituden $A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Dreieck), $A = 1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Diamant) und $A = 3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Quadrat). Für T_{mod}=10 s und T_{mod}=20 s liegen Dreieck und Diamant aufeinander.

5.6 Vergleich der Kriterien

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass die drei diskutierten Kriterien P_1, HLA und $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ unterschiedlich auf starke Änderungen der Modulationsamplitude reagieren. Die verschiedenen Größen beleuchten jeweils andere Aspekte desselben Phänomens, nämlich der Synchronisation zwischen der Bewegung des Teilchens im Doppelmuldenpotential und dem Modulationssignal. Daher würden wir einerseits erwarten, dass alle Größen eine ähnliche Abhängigkeit von der Modulationszeit an den Tag legen, andererseits könnten sich im Detail durchaus Unterschiede ergeben. Theoretische Betrachtungen gibt es dazu bisher nicht.
In Abbildung 5.20 sind jeweils alle drei Größen P_1, HLA und $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ für die verschiedenen Modulationsamplituden (zunehmend von oben nach unten) aufgetragen. Um einen Vergleich zu ermöglichen, sind P_1 (offene Symbole), HLA (grau) und $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ (schwarz) so skaliert, dass sie im Maximum gleich eins sind.

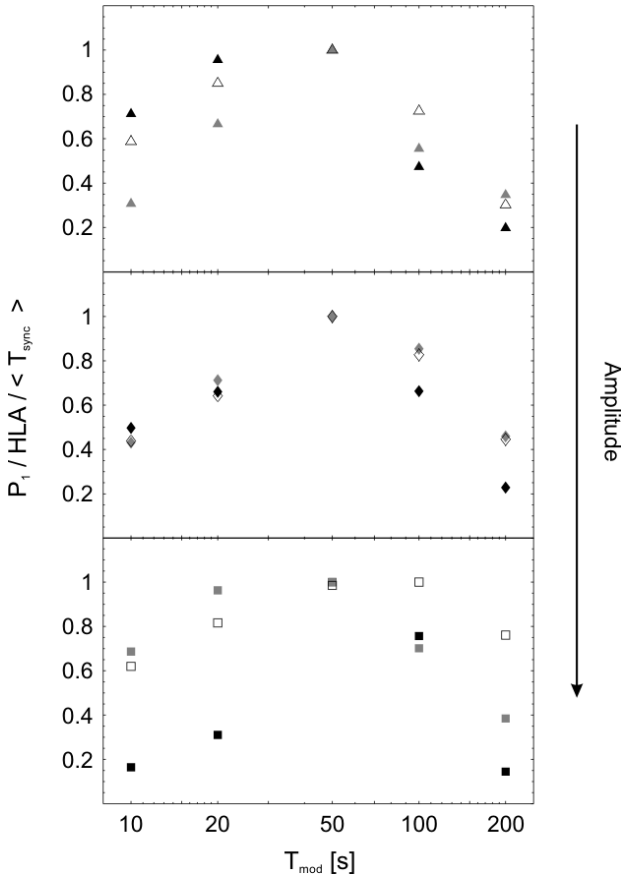


Abbildung 5.20: Vergleich der Kriterien P_1 (offene Symbole), HLA (graue Symbole) und $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ (schwarze Symbole) für $A = 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (oben), $A = 1.9\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (Mitte) und $A = 3.1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ (unten). Die Größen sind jeweils so skaliert, dass sie im Maximum gleich eins sind.

Am einheitlichsten verhalten sich die drei Kriterien für die mittlere Modulationsamplitude

von $1.9\,k_\mathrm{B}T/x_0$. Hier liegen alle Punkte sehr nahe beieinander. Die Kurve für $\langle T_\mathrm{sync}\rangle$ fällt allerdings für die langen Modulationszeiten T_mod=100 s und 200 s etwas schneller ab als diejenigen für P_1 und HLA. Das wird noch deutlicher für die stärkste Modulationsamplitude, $A = 3.1\,k_\mathrm{B}T/x_0$. Hier zeigt $\langle T_\mathrm{sync}\rangle$ mit Abstand das schärfste Maximum. Diese Beobachtung stellt eine interessante Parallele zu den Berechnungen von Park und Lai [Par05] für Systeme, in denen das Rauschen optimiert wird, dar. Park und Lai haben festgestellt, dass $\langle T_\mathrm{sync}\rangle$ im Bereich der Resonanz im Gegensatz zu den anderen Maßen, die typischerweise zur Charakterisierung der Stochastischen Resonanz verwendet werden, sehr stark von der Rauschamplitude abhängt. Besondere Bedeutung erlangt diese Tatsache, wenn es zum Beispiel darum geht, Stochastische Resonanz zur Optimierung technischer Geräte einzusetzen. Für diese Aufgabe wünscht man sich eine sensible Größe, die optimiert werden kann. Im Fall einer *bona fide* Resonanz eines Systems, in dem die Modulationszeit variiert wird, liegt die Stärke eines in der Nähe der Resonanzfrequenz sehr empfindlichen Kriteriums zum Beispiel darin, dass mit seiner Hilfe Resonanzverschiebungen leichter detektiert werden können.

Für die schwache Modulation im oberen Bild verhalten sich die drei betrachteten Größen ähnlich, wobei wir für die Fläche der Hystereseschleifen die schärfste Resonanz beobachten. Die Kurve für P_1 verläuft insgesamt etwas flacher, während das für $\langle T_\mathrm{sync}\rangle$ nur für kurze Modulationszeiten zutrifft. Der Grund für den flachen Verlauf von $\langle T_\mathrm{sync}\rangle$ für $T_\mathrm{mod} < 2T_\mathrm{K}$ liegt darin, dass in diesem Bereich die Phase der Modulation schneller zunimmt als die des Teilchens. Da die Modulationsphase pro Periode nur um 2π ansteigen kann, gibt es in diesem Fall eine untere Grenze für T_sync von einer Periode. Im umgekehrten Fall langer Modulationszeiten, wo die Teilchenphase durch häufige Sprünge schneller ansteigt als die Modulationsphase, gibt es diese Beschränkung nicht und die Kurve fällt weiter ab.

Insgesamt können wir also feststellen, dass im Fall schwacher Modulation die Fläche HLA der Hystereseschleifen das empfindlichste Kriterium zu sein scheint, während es für starke Modulation eindeutig die mittlere Zeit $\langle T_\mathrm{sync}\rangle$ ist, in der die Phasen von Teilchen und Modulation synchronisiert sind. Dazwischen gibt es einen Übergangsbereich, in dem alle drei betrachteten Kriterien ungefähr die gleichen Ergebnisse liefern.

Gekoppelte Systeme

> In diesem Kapitel untersuchen wir ein System von vier gekoppelten Teilchen, die quadratisch angeordnet sind. Jedes Teilchen sitzt dabei in einem modulierten Doppelmuldenpotential. Mit diesem System können wir bestätigen, dass die Stochastische Resonanz in einem gekoppelten System gegenüber einem isolierten Einzelsystem verstärkt wird. Außerdem zeigen wir, dass die Kopplungsstärke nicht nur für die Verstärkung, sondern auch für die Lage der Resonanz eine entscheidende Rolle spielt.

Wenn es unser Ziel ist, Stochastische Resonanz in komplexen Systemen (wie zum Beispiel in der Biologie) zu verstehen, dann führt kein Weg daran vorbei, den Einfluss einer Wechselwirkung zwischen Einzelsystemen zu untersuchen. Trotz der Fülle an Literatur zur Stochastischen Resonanz finden sich aber immer noch sehr wenige Arbeiten zu gekoppelten Systemen. Die ersten Untersuchungen dazu, wie gekoppelte Systeme abhängig von der Kopplungsstärke und gegebenenfalls der Zahl der Einzelelemente auf eine Erhöhung der Rauschamplitude reagieren, stammen aus den neunziger Jahren. Jung et al. beschreiben 1992 ein Netzwerk global gekoppelter bistabiler Systeme über Mastergleichungen [Jun92]. Lage und Höhe des Resonanzpeaks der spektralen Leistungsverstärkung (*spectral power amplification*) bei der Signalfrequenz hängen in ihrem System stark von der Kopplungsstärke ab. Damit ist die Kopplung ein Parameter, der die Optimierung des Systems erlaubt. Die erste Arbeit zur Verstärkung der Stochastischen Resonanz eines Einzelsystems, das in eine Kette von identischen Systemen eingefügt wird, wo jedes Element linear mit seinen nächsten Nachbarn gekoppelt ist, stammt von Lindner et al. [Lin95, Lin96]. Hier wird der Begriff *Array Enhanced Stochastic Resonance* geprägt. Anhand von numerischen Simulationen zeigen die Autoren, dass auch in diesem System die Kopplung neben dem Rauschen einen zweiten Designparameter darstellt. Außerdem hängt die Antwort des Systems von der Zahl der gekoppelten Einzelsysteme ab. Beides wird kurz darauf in Experimenten mit einer Kette von Diodenresonatoren, die jeweils mit ihren nächsten Nachbarn gekoppelt sind, bestätigt [Löc96]. Weitere Experimente mit elektronischen Schaltkreisen arbeiten mit unidirektional gekoppelten Schmitt-Triggern [Row01, Car03, Ste04]. Im einzigen uns be-

kannten nicht rein elektronischen Experiment zur Stochastischen Resonanz in gekoppelten Systemen [Sha03] wurde experimentell weder die Kopplung variiert noch ein Einzelsystem mit dem gekoppelten System verglichen.

Wir werden im Folgenden Messungen an einem System mit vier im Quadrat angeordneten gekoppelten Teilchen vorstellen. Jedes Teilchen sitzt in einem modulierten Doppelmuldenpotential, wobei wie zuvor die Modulationszeit variiert wird. In dieser Erweiterung unseres Modellsystems beobachten wir erstmals *Array Enhanced Stochastic Resonance* in einem Experiment, das nicht allein aus elektronischen Schaltkreisen besteht.

6.1 Experimentelle Situation

Bevor wir zur Beschreibung der Messungen kommen, befassen wir uns mit den Eigenschaften unseres erweiterten Modellsystems. Ein entscheidender Punkt ist dabei die Kopplung zwischen den Teilchen.

6.1.1 Kopplung

Wie wir schon in Kapitel 4 gesehen haben, sind unsere Silica-Teilchen in Wasser negativ geladen. Das führt zu einer Abstoßung, die allerdings durch die sogenannte elektrostatische Doppelschicht abgeschirmt wird. Für die elektrostatische Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Kugeln gilt in guter Näherung das DLVO-Potential[1] [Isr92]

$$U(r) = \frac{Z^2 e^2}{\epsilon} \left[\frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a} \right]^2 \frac{\exp(-\kappa r)}{r} \; . \tag{6.1}$$

Außer dem Abstand r der Teilchen und einigen Konstanten wie der Ladungszahl Z, der Elementarladung e und der Dielektrizitätskonstante ϵ des Lösungsmittels geht in dieses Potential die inverse Abschirmlänge κ ein. Diese hängt wiederum über

$$\kappa^2 = \frac{4\pi}{\epsilon k_\mathrm{B} T} \sum n_\alpha q_\alpha^2 \tag{6.2}$$

von der Ionenkonzentration ab (im Fall monovalenter Ionen, n_α ist die Anzahldichte der Ionen der Sorte α, $q_\alpha = \pm e$ deren Ladung). Mit zunehmender Ionenkonzentration nimmt κ also zu und die Abschirmlänge nimmt entsprechend ab.
Unsere Messzelle lässt sich nicht hermetisch gegen Ionen von außen abriegeln. Wenn wir der Einfachheit halber von einem linearen Anstieg der Ionenkonzentration in unserem System ausgehen (z. B. durch Diffusion von Ionen aus der Luft in die Messzelle), dann erwarten wir, dass sich die Kopplung zwischen den Teilchen anfangs sehr stark und mit zunehmender Zeit schwächer ändert. Das bedeutet für die Durchführung von Messungen an gekoppelten Systemen, dass wir nicht wie für die isolierten Systeme nacheinander Messungen für

[1] benannt nach Derjaguin, Landau, Verwey und Overbeck

unterschiedliche Modulationszeiten durchführen können. Diese Messungen wären aufgrund der variablen Kopplung nur sehr bedingt miteinander vergleichbar. Wir gehen daher einen anderen Weg: Wir präparieren gleichzeitig mehrere vergleichbare Systeme und modulieren diese jeweils mit anderen Modulationszeiten. Dann beobachten wir die Änderung des Verhaltens dieser Systeme mit der Zeit, also mit schwächer werdender Kopplung. So können wir sicher sein, dass wir nur einen Parameter, nämlich die Kopplungsstärke, ändern.

6.1.2 Konfiguration des gekoppelten Systems

Die einfachste Anordnung zur Untersuchung gekoppelter Systeme besteht aus zwei Doppelmulden, in denen jeweils ein Teilchen sitzt. Experimentell bringt diese Anordnung jedoch Schwierigkeiten mit sich: Liegen die Doppelmulden nebeneinander, wie in Abbildung 6.1a) skizziert, so ist bei ausreichend starker Kopplung die energetisch günstigste Situation diejenige, in der beide Teilchen in der äußeren Mulde sitzen. Dann dominieren Randeffekte das Systemverhalten. Liegen die Doppelmulden übereinander wie in Abbildung 6.1b), dann sind zwar die beiden Situationen, wo die Teilchen auf einer Diagonalen sitzen, energetisch gleichberechtigt. Allerdings wird der Abstand der Teilchen, wenn sie aus einer solchen Konfiguration jeweils auf die andere Seite springen, vorübergehend sehr klein. Die Teilchen müssen also eine hohe effektive Energiebarriere überwinden. Um diesen Effekt zu mildern, weichen sie beim Sprung nach oben bzw. nach unten aus. Dadurch ist die effektive Eindimensionalität einer Doppelmulde nur noch sehr bedingt gegeben.
Um sowohl Randeffekte als auch Ausweichbewegungen zu vermeiden, sind wir zu der in Abbildung 6.1c) skizzierten quadratischen Anordnung übergegangen. Die Phase der Modulation wird dabei in den einzelnen Systemen so gewählt, dass alle Teilchen gleichzeitig in die gleiche Richtung springen, wenn sie der Modulation folgen.

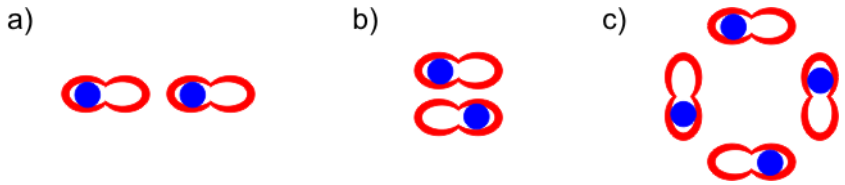


Abbildung 6.1: Skizzen zu verschiedenen Anordnungen von Doppelmuldenpotentialen. Die Teilchen sind jeweils in der Mulde eingezeichnet, die während der ersten Hälfte der Modulationsperiode tiefer ist. Die Skizzen sind nicht maßstabsgetreu.

Die Messungen, die wir im Folgenden diskutieren werden, wurden in einer Quadratanordnung mit der Kantenlänge 5.2 μm und einem Abstand zwischen den beiden Minima eines Doppelmuldenpotentials von 1.4 μm durchgeführt. Während der Abstand zwischen den Minima die Kramerszeit des Einzelsystems beeinflusst, geht der Abstand zwischen den Einzelsystemen (also indirekt die Kantenlänge des Quadrats) in die Kopplungsstärke ein.

6.1.3 Charakterisierung der Doppelmuldenpotentiale

Oben wurde bereits erwähnt, dass wir versuchen, mehrere vergleichbare gekoppelte Systeme zu präparieren, um parallel mit verschiedenen Modulationszeiten messen zu können. Dies ist der kritische Schritt in einer Messreihe zu gekoppelten Systemen. Zwei Doppelmuldenpotentiale sind auch dann, wenn die beiden Parameter, die wir wählen können – der Abstand zwischen den einzelnen Mulden und die Intensität in den Laserspots – identisch sind, nicht automatisch gleich. Vor allem sind die Doppelmuldenpotentiale im Allgemeinen nicht symmetrisch. Das hat im Wesentlichen zwei Gründe: 1) Der Laserstrahl fällt an unterschiedlichen Positionen in der Zelle jeweils unter einem anderen Winkel ein und er hat aufgrund der Charakteristik der akustooptischen Deflektoren (siehe Abschnitt 4.3.3) eine von der Ablenkung abhängige Intensität. 2) Die Bedingungen auf der Oberfläche der Messzelle variieren z. B. durch Ladungen oder kleine Verunreinigungen von Ort zu Ort. Die sicherste Strategie zur Wahl vergleichbarer Potentiale wäre offensichtlich, die Potentiale zu messen und die Parameter (z. B. den Ort in der Zelle und die Laserintensität in den einzelnen Spots) so lange anzupassen, bis eine hinreichende Übereinstimmung erreicht ist. Dafür fehlt allerdings die Zeit. Da die Salzkonzentration in der Zelle stetig zunimmt, sollte die Wahl der Doppelmuldenpotentiale höchstens wenige Stunden in Anspruch nehmen, so dass der erste Teil der Messreihe bei starker Kopplung erfolgen kann. Aus diesem Grund haben wir die folgende Strategie entwickelt:

- Alle Doppelmuldenpotentiale werden möglichst im Zentrum des mit dem Laserstrahl erreichbaren Bereichs angeordnet, um die Intensitätsvariationen und den Einfluss des Einfallswinkels in Grenzen zu halten.

- Die Symmetrie der einzelnen Potentiale wird mithilfe der folgenden Prozedur abgeschätzt: Die Intensität in den einzelnen Laserspots wird verzehnfacht. Dadurch ändert sich die Potentialform nicht, aber die absoluten Barrieren werden höher. Dann wird das Potential mit der Maximalamplitude ausgelenkt, die später in der Messreihe verwendet werden soll. Das Teilchen wird in die flache Mulde gesetzt und es wird beobachtet, wie lange es braucht, um in die tiefe Mulde zu springen. Das wird in beiden Richtungen mehrmals wiederholt und die Sprungzeiten werden verglichen. Auf diese Weise fällt ein stark asymmetrisches Potential sehr schnell auf. In diesem Fall wird die entsprechende Quadratanordnung in der Zelle verschoben und der Symmetrietest wird wiederholt.

- Um große Unterschiede in den Kramerszeiten der ausgesuchten Potentiale aufzudecken, werden anschließend die Kramerszeiten in kurzen Messungen abgeschätzt.

Für die Messungen, die im Folgenden diskutiert werden, wurden am Ende der Messreihe die einzelnen Potentiale gemessen. Die Ergebnisse[2] sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Δ ist der Potentialunterschied in den Minima, ΔU die Potentialbarriere (bei asymmetrischen Potentialen die höhere Barriere) und T_{K} die aus der mittleren Wartezeit bestimmte

[2]Die Bestimmung der Parameter wurde in Abschnitt 5.1 beschrieben.

Kramerszeit. Der Abstand zwischen den Potentialminima liegt immer bei $2x_0 \approx 1.4\,\mu$m. Die meisten Potentiale sind symmetrisch und haben Kramerszeiten zwischen 15 s und 22 s.

		$\Delta\,[k_\mathrm{B}T]$	$\Delta U\,[k_\mathrm{B}T]$	$T_\mathrm{K}\,[s]$
Quadrat 1	Teilchen 1	0	3.2	22
	Teilchen 2	0.5	3.8	22
	Teilchen 3	0	3.6	26
	Teilchen 4	0.2	3.1	18
Quadrat 2	Teilchen 5	0.6	3.4	27
	Teilchen 6	0	2.6	16
	Teilchen 7	1	3.6	22
	Teilchen 8	0	2.9	18
Quadrat 3	Teilchen 9	0.4	3.1	20
	Teilchen 10	0	2.6	14
	Teilchen 11	0	2.7	15
	Teilchen 12	0	2.7	17

Tabelle 6.1: Systemparameter für die 12 Doppelmuldenpotentiale, die für die Messreihe an gekoppelten Systemen verwendet wurden.

Es hat sich in der Messreihe gezeigt, dass sich die Asymmetrie einzelner Doppelmulden hauptsächlich auf das Verhalten des Teilchens im jeweiligen Potential auswirkt. Für die anderen Teilchen entsprechen beispielsweise die Wartezeitenverteilungen der Sprünge von links nach rechts jenen der Sprünge in die andere Richtung.

6.2 Array Enhanced Stochastic Resonance

Für die in diesem Kapitel diskutierten Messungen wurden die Doppelmulden in Quadrat 1 mit T_mod=10 s, in Quadrat 2 mit T_mod=40 s und in Quadrat 3 mit T_mod=100 s sinusförmig moduliert. Die Resonanz der Einzelsysteme erwarten wir etwa bei T_mod=40 s. Die anderen beiden Modulationszeiten sind so gewählt, dass sie deutlich unter bzw. deutlich über dieser Resonanz liegen. Um den Einfluss der Modulationsamplitude zu testen, wurde während der Messreihe teils mit $A_1 \approx 1.0\,k_\mathrm{B}T/x_0$ und teils mit $A_2 \approx 2.7\,k_\mathrm{B}T/x_0$ moduliert.
Das Verhalten der gekoppelten Systeme werden wir im Folgenden anhand der Beispiele der Teilchen 4 (T_mod=10 s), 8 (T_mod=40 s) und 12 (T_mod=100 s) beschreiben. Abbildung 6.2 (Modulationsamplitude A_2) und Abbildung 6.3 (Amplitude A_1) zeigen Wartezeitenverteilungen (a), Hysteresekurven (b) und den Verlauf der Phasendifferenz[3] $\Delta\Phi$ (c) für

[3]Der Verlauf der Phasendifferenz ist jeweils für die ersten 50 Perioden einer Messung dargestellt. Eine Ausnahme bildet jedoch die Messung bei T_mod=40 s am Einzelsystem in Abbildung 6.3. Hier ist der Verlauf für die Perioden 50 bis 100 aufgetragen, weil er das Verhalten des Systems besser wiederspiegelt.

diese Teilchen zu verschiedenen Zeiten während der Messreihe für gekoppelte Systeme und zum Vergleich für die Einzelsysteme. Der Start der ersten Messung für gekoppelte Systeme bestimmt dabei den Zeitpunkt $t = 0$, die anderen Zeiten sind relativ dazu angegeben. Wie wir oben besprochen haben, nimmt die Kopplungsstärke mit der Zeit ab. Die Messungen für die größere Amplitude A_2 decken einen weiteren Kopplungsbereich ab als diejenigen für A_1. Die Wartezeitenverteilungen, Hysteresekurven und Phasendifferenzen wurden wie in Kapitel 5 bestimmt. Als Schwellwerte wurden die Positionen der Minima der statischen Doppelmuldenpotentiale der Einzelsysteme gewählt.

Einzelsysteme Zur Untersuchung der Einzelsysteme wurden pro Modulationsamplitude zwei Messungen durchgeführt, bei denen jeweils nur zwei gegenüberliegende Doppelmulden pro Quadrat mit Teilchen besetzt waren. Im Abstand der Kantenlänge des Quadrats von $5.2\,\mu$m ist die Kopplung vernachlässigbar. Im Gegensatz zu den Messungen, die wir im vorhergehenden Kapitel diskutiert haben, wird jetzt nicht ein Doppelmuldensystem nacheinander mit unterschiedlichen Modulationszeiten moduliert, sondern das Verhalten eines Teilchens bei einer bestimmten Modulationszeit wird mit dem eines anderen Teilchens bei einer anderen Modulationszeit verglichen. Solange die einzelnen Doppelmuldenpotentiale einander ähnlich genug sind, sollten wir mit dieser Methode qualitativ die gleichen Ergebnisse erhalten, wie wenn die Messungen nacheinander an einem einzigen Doppelmuldensystem durchgeführt werden. Tatsächlich finden wir in den Messungen für die Einzelsysteme in den Abbildungen 6.2 und 6.3 das Verhalten für $T_{\mathrm{mod}} \ll 2\,T_{\mathrm{K}}$, $T_{\mathrm{mod}} \approx 2\,T_{\mathrm{K}}$ und $T_{\mathrm{mod}} \gg 2\,T_{\mathrm{K}}$, das wir aus dem letzten Kapitel kennen, wieder.

Gekoppelte Systeme Auch wenn alle vier Doppelmuldenpotentiale in einem Quadrat mit Teilchen besetzt sind, finden wir in den Wartezeitenverteilungen, Hysteresekurven und Phasendifferenzen die gleichen Strukturen wie für die Einzelsysteme. Zwei Unterschiede sind jedoch bei näherer Betrachtung offensichtlich: Erstens wird im Vergleich zum Einzelsystem die Stochastische Resonanz im gekoppelten System abhängig von der Kopplung verstärkt. Zweitens verschiebt sich die Resonanz mit der Kopplung. Diese beiden Effekte werden wir im Folgenden genauer diskutieren.

6.2.1 Verstärkung der Stochastischen Resonanz

Die Verstärkung der Stochastischen Resonanz im gekoppelten System wird am deutlichsten, wenn wir die linke Spalte in Abbildung 6.2 betrachten. Die starke Kopplung, bei der die entsprechende Messreihe durchgeführt wurde, bewirkt, dass das Modulationssignal und die Teilchenbewegung bei T_{mod}=40 s und T_{mod}=100 s fast perfekt synchronisiert sind. Das zeigt sich sowohl darin, dass die Wartezeitenverteilungen nur einen schmalen Peak zeigen, als auch in der großen Fläche der Hysteresekurven und in den langen Zeiten, in denen die Phasendifferenz $\Delta\Phi$ fast konstant bleibt. In Abbildung 6.4 sind die drei Größen P_1 (Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung), HLA (Fläche der Hysteresekurven) und $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$ (mittlere Zeit, in der die Phasen von Signal und Teilchen synchronisiert sind),

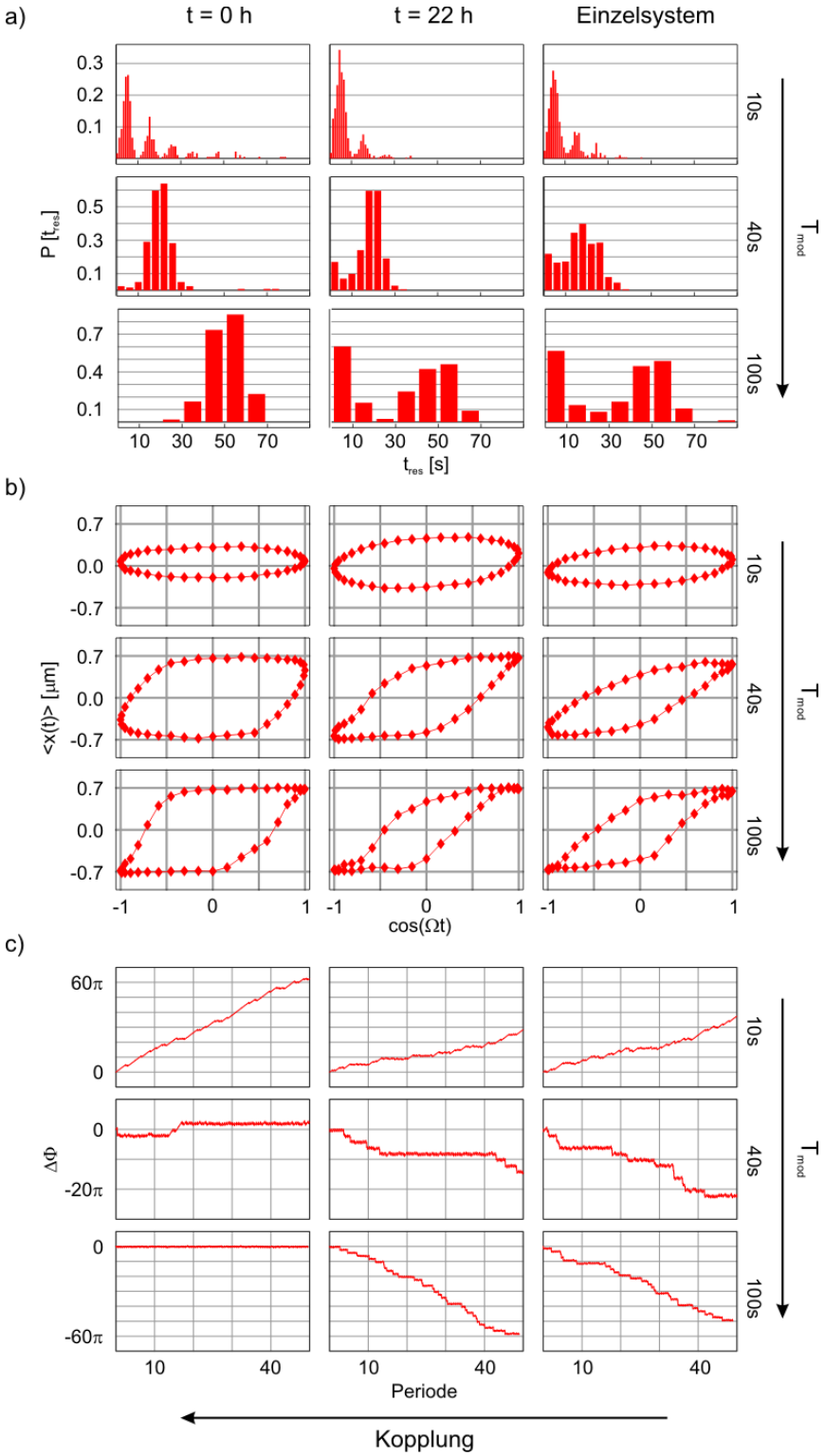


Abbildung 6.2: Wartezeitenverteilungen (a), Hysteresekurven (b) und Verlauf der Phasendifferenz (c) in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke für die Teilchen 4 (T_{mod}=10 s), 8 (T_{mod}=40 s) und 12 (T_{mod}=100 s) bei Modulation mit $A_2 \approx 2.7\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$. Die Kopplung nimmt mit zunehmender Zeit ab. Die Messungen, die der rechten Spalte zugrunde liegen, wurden jeweils am Einzelsystem durchgeführt.

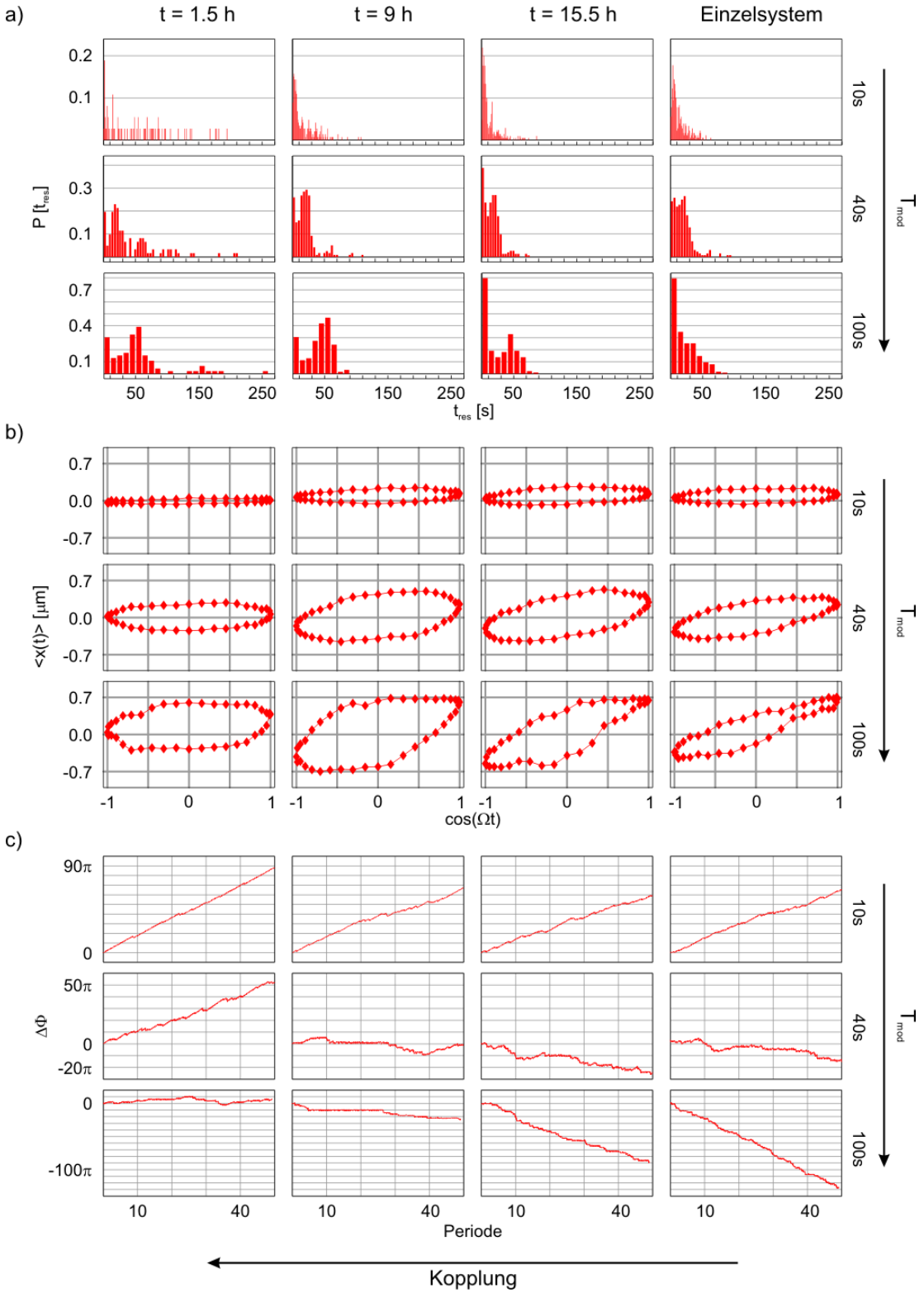


Abbildung 6.3: Wartezeitenverteilungen (a), Hysteresekurven (b) und Verlauf der Phasendifferenz (c) in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke für die Teilchen 4 (T_{mod}=10 s), 8 (T_{mod}=40 s) und 12 (T_{mod}=100 s) bei Modulation mit $A_1 \approx 1\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$. Die Kopplung nimmt mit zunehmender Zeit ab. Die Messungen, die der rechten Spalte zugrunde liegen, wurden jeweils am Einzelsystem durchgeführt.

anhand derer wir im letzten Kapitel die Stochastische Resonanz charakterisiert haben, aufgetragen. Die roten Symbole stehen für die Messung bei starker Kopplung, die schwarzen für die entsprechende Messung im Einzelsystem (rechte Spalte in Abbildung 6.2). In allen

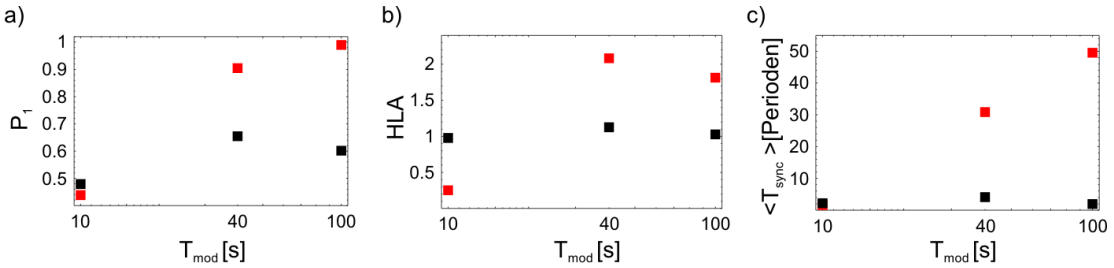


Abbildung 6.4: Fläche P_1 unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung (a), Fläche HLA der Hysteresekurven (b) und mittlere Zeit $\langle T_{\text{sync}} \rangle$, während der die Phasen von Modulation und Teilchen synchronisiert sind, (c), für die Messung bei $t = 0\,\text{h}$ am gekoppelten System (rote Symbole) und für die Messung am Einzelsystem (schwarze Symbole) aus Abbildung 6.2 (Modulation mit der größeren Amplitude A_2).

drei Kriterien ist zu beobachten, dass der Wert für T_{mod}=10 s im gekoppelten System niedriger liegt als derjenige für das Einzelsystem, dass aber die anderen beiden Werte jeweils deutlich höher liegen. P_1 hat für T_{mod}=100 s mit 0.99 fast den maximal möglichen Wert von 1, $\langle T_{\text{sync}} \rangle$ ist für die gleiche Modulationszeit nur durch die Messdauer begrenzt. Interessant ist, dass HLA im Gegensatz zu P_1 und $\langle T_{\text{sync}} \rangle$ bei T_{mod}=40 s größer ist als bei T_{mod}=100 s . Diese Tatsache ist darin begründet, dass HLA die einzige der drei Größen ist, die direkt aus der Trajektorie bestimmt wird, ohne dass dem Teilchen über Schwellwerte eine Position in einem der Minima des Doppelmuldenpotentials zugeordnet wird. So geht eine kurze Exkursion eines Teilchens über die Barriere, bei der es das Potentialminimum auf der anderen Seite nicht erreicht, in HLA ein, nicht jedoch in P_1 und $\langle T_{\text{sync}} \rangle$. In gekoppelten Systemen sind solche Ereignisse durch den Einfluss der anderen Teilchen häufiger als in Einzelsystemen[4], weshalb dieser Aspekt hier an Bedeutung gewinnt.
Die Verstärkung der Stochastischen Resonanz im gekoppelten System beobachten wir auch für die kleinere Modulationsamplitude A_1. Hier betrachten wir die Messung bei $t = 9$ Stunden (zweite Spalte in Abbildung 6.3) im Vergleich mit der entsprechenden Messung für das Einzelsystem (rechte Spalte). Abbildung 6.5 zeigt wieder die Größen P_1 (a), HLA (b) und $\langle T_{\text{sync}} \rangle$ (c) für die Messung am gekoppelten System (rote Symbole) und diejenige am Einzelsystem (schwarze Symbole). Hier bleiben aufgrund der geringeren Modulationsamplitude alle Größen deutlich unter den maximal möglichen Werten, aber die Verstärkung ist auch in diesem Fall offensichtlich. Das gilt vor allem für T_{mod}=100 s : Alle drei Kriterien werden bei dieser Modulationszeit maximal, während ihr Maximum für das Einzelsystem eindeutig bei T_{mod}=40 s liegt. Das führt uns zum zweiten Merkmal der *Array Enhanced Stochastic*

[4]Eine Situation, in der ein Teilchen die Barriere überquert, das andere Potentialminimum aber nicht erreicht, entsteht zum Beispiel oft, wenn das entsprechende Nachbarteilchen in der näherliegenden Mulde bleibt. Dann wird die Abstoßung zwischen beiden Teilchen groß und die Potentialbarriere für den Sprung zurück nimmt effektiv ab.

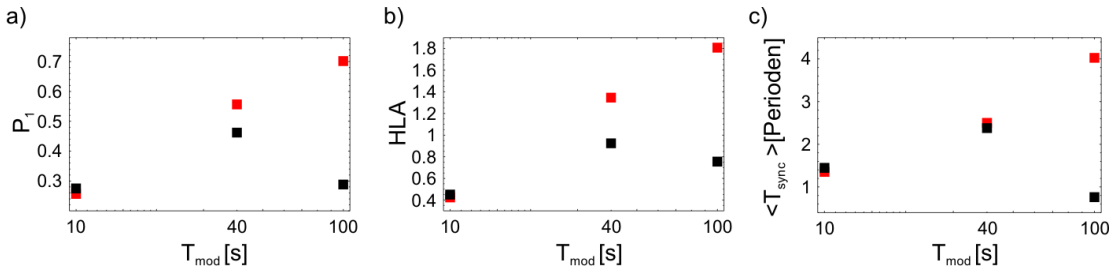


Abbildung 6.5: Fläche P_1 unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung (a), Fläche HLA der Hysteresekurven (b) und mittlere Zeit $\langle T_{\mathrm{sync}} \rangle$, während der die Phasen von Modulation und Teilchen synchronisiert sind, (c), für die Messung bei $t = 9\,\mathrm{h}$ am gekoppelten System (rote Symbole) und für die Messung am Einzelsystem (schwarze Symbole) aus Abbildung 6.3 (Modulation mit der kleineren Amplitude A_1).

Resonance, der Verschiebung der Resonanz mit der Kopplungsstärke.

6.2.2 Verschiebung der Resonanz

Anhand von Messungen zu lediglich drei Modulationszeiten lässt sich die Verschiebung der Resonanzkurve mit der Kopplung nur eingeschränkt betrachten. Allerdings haben wir die Möglichkeit, zu verfolgen, wie ein Teilchen, das mit konstanter Modulationszeit moduliert wird, mit abnehmender Kopplungsstärke auf das Modulationssignal reagiert. Dazu betrachten wir das mit T_{mod}=40 s modulierte Teilchen in Abbildung 6.3 (jeweils die mittlere Zeile). Bei starker Kopplung zum Zeitpunkt $t = 1.5\,\mathrm{h}$ finden wir in der Wartezeitenverteilung, der Hysteresekurve und der Phasendifferenz die typische Struktur für ein Teilchen, das der Modulation nicht folgen kann: Die Wartezeitenverteilung zeigt mehrere Peaks bei ungeradzahligen Vielfachen der halben Modulationszeit, die Hysteresekurve ist symmetrisch zur Nulllinie und die Phasendifferenz wächst mit der Zeit deutlich an. Siebeneinhalb Stunden später bei schwächerer Kopplung sind die meisten Ereignisse in der Wartezeitenverteilung im ersten Peak zu finden, die Fläche der Hysteresekurve hat zugenommen und es ist eine positive Steigung zu erkennen, und die Phasendifferenz schwankt um einen Mittelwert von null. Jetzt folgt das Teilchen im Mittel der Modulation. Wiederum sechseinhalb Stunden später hat sich das geändert: Alle Größen zeigen Anzeichen einer zu langsamen Modulation. Die Zahl der Sprünge nach sehr kurzen Wartezeiten hat deutlich zugenommen, die Fläche der Hysteresekurve ist kleiner geworden und die Phasendifferenz hat eine negative Steigung. Aus der Tatsache, dass die konstante Modulationszeit von T_{mod}=40 s bei starker Kopplung zu schnell, dann bei schwächerer Kopplung „richtig“ und schließlich bei schwacher Kopplung zu langsam war, kann man schließen, dass sich die Resonanz mit abnehmender Kopplung zu kürzeren Modulationszeiten verschoben hat. Umgekehrt heißt das offensichtlich, dass sich die Resonanz mit zunehmender Kopplung, also insbesondere vom Einzelsystem zum gekoppelten System, zu höheren Modulationszeiten hin verschiebt. Diesen Effekt haben wir beispielsweise in Abbildung 6.5 beobachtet.

Wir haben also in unserem Modellsystem gezeigt, dass die Kopplung zwischen einzelnen Systemen, die Stochastische Resonanz zeigen, einen entscheidenden Einfluss auf deren Reaktion auf ein Modulationssignal haben kann. Davon ist sowohl das Ausmaß der Synchronisation zwischen Signal und Teilchenbewegung als auch die Position der Resonanz betroffen.

Resonante Aktivierung

In diesem Kapitel kehren wir zurück zu einem einzelnen Teilchen in einer modulierten Doppelmulde und untersuchen mit der Resonanten Aktivierung ein weiteres Phänomen, das in nichtlinearen Systemen auftritt, wenn Rauschen und ein äußeres Signal zusammenspielen. Hier zeigt sich wieder, wie vielseitig unser Modellsystem ist: Wir können die beiden verwandten Phänomene Stochastische Resonanz und Resonante Aktivierung in derselben Messreihe untersuchen und vergleichen.

Bisher haben wir mit der Stochastischen Resonanz den zurzeit am meisten beachteten Aspekt des Zusammenspiels zwischen Rauschen und einem äußeren Signal in einem nichtlinearen System betrachtet. Damit haben wir uns auf die Synchronisation des Ausgangssignals (in unserem Fall der Bewegung des Teilchens zwischen den beiden Potentialmulden) mit der Modulation konzentriert. Allerdings ist diese Synchronisation nicht immer entscheidend. Wenn es zum Beispiel darum geht, dass eine fluktuierende Potentialbarriere im Mittel möglichst schnell überwunden werden kann, dann muss nicht unbedingt die Modulationszeit optimal sein, bei der ein Teilchen der Modulation am besten folgen kann. Diese Fragestellung der Überwindung einer fluktuierenden Potentialbarriere durch ein thermisch aktiviertes Teilchen wird unter dem Begriff Resonante Aktivierung untersucht.

Resonante Aktivierung

Geprägt wurde der Begriff durch Doering und Gadoua, die analytisch und mit Monte Carlo Simulationen untersucht haben, wie schnell ein thermisch aktiviertes Teilchen im Mittel eine zeitlich fluktuierende, dreiecksförmige Potentialbarriere überquert [Doe92]. Die Höhe der Barriere fluktuiert in ihrem Modell mit einer Rate γ zufällig zwischen zwei Werten. Für sehr langsame Variationen der Barrierenhöhe ist die mittlere Zeit zur Überquerung der Barriere der Mittelwert der Zeiten für die Überquerung der hohen und der niedrigen Barriere, für sehr schnelle Variationen ist es diejenige, die zur Überquerung der gemittelten Barriere benötigt wird. Interessant sind Raten, die zwischen diesen beiden Grenzfällen liegen. Dann ist die Überquerung der Barriere korreliert mit den Potentialfluktuationen

und es gibt eine resonante Fluktuationsrate, bei der die Fluchtrate (*escape rate*) maximal wird.
In der Folge gab es eine Reihe theoretischer und einige experimentelle Arbeiten zur Resonanten Aktivierung. Unter anderem wurde der Effekt auch für den Fall einer periodischen Modulation der Barriere untersucht [Pan00a, Pan00b, Dyk05]. Zolotaryuk et al. [Zol04] haben in numerischen Simulationen das Modellsystem eines überdämpften Teilchens im periodisch modulierten Doppelmuldenpotential behandelt, welches wir in unserem Experiment realisieren. Experimentell wurde die Resonante Aktivierung mit Hilfe einer Tunneldiode nachgewiesen, die in einem stark asymmetrischen bistabilen Zustand vorgespannt und mit zwei elektronischen Rauschquellen verbunden war [Man00]. Dabei wurde die Fluktuation der Barriere durch dichotomes Rauschen kontrolliert und anstelle eines thermischen Hintergrunds wurde farbiges Gaußsches Rauschen eingesetzt. In einem weiteren Experiment wurde gezeigt, dass es bei geeigneter Modulation der Potentialbarriere möglich ist, ein Teilchen in einer Mulde eines im zeitlichen Mittel symmetrischen Doppelmuldenpotentials zu lokalisieren[1] [Dyk01]. In die gleiche Richtung gehen auch mehrere theoretische Arbeiten, z. B. [Sto98, Bor05].

7.1 Resonante Aktivierung im Doppelmuldensystem

Was wir in der Literatur bisher noch nicht gefunden haben, ist eine experimentelle Untersuchung der Resonanten Aktivierung in einem Modellsystem mit thermischem Rauschen. Ein solches Experiment wäre vor allem dann interessant, wenn gleichzeitig auch Stochastische Resonanz beobachtet werden könnte, was bei unserem System möglich ist. Wir können beide Aspekte, die Synchronisation der Teilchenbewegung mit dem Modulationssignal und die Effizienz des Teilchentransports zwischen den Potentialmulden, in einer Messreihe betrachten. Mit den Trajektorien und Wartezeitenverteilungen haben wir dann ein sehr anschauliches Mittel, um die beiden Phänomene Stochastische Resonanz und Resonante Aktivierung zu vergleichen und einzuordnen. Die Stochastische Resonanz wird dabei über die Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung charakterisiert, die Resonante Aktivierung über die mittlere Wartezeit.
Im Prinzip wurde zu diesem Zweck das gleiche Experiment durchgeführt wie das in Kapitel 5 diskutierte zur Charakterisierung der Stochastischen Resonanz in einem isolierten System. Die veränderte Zielsetzung erforderte jedoch einige Änderungen bei der Durchführung der Messungen:

- Um das Minimum der mittleren Wartezeit in Abhängigkeit von der Modulationszeit deutlich sehen zu können, musste der Bereich der untersuchten Modulationszeiten zu kurzen Zeiten hin beträchtlich erweitert werden.
- Bei Modulationszeiten $T_{\mathrm{mod}} \leq 1\,\mathrm{s}$ ist es mit unserer Ansteuerung für die akustooptischen Deflektoren nicht mehr möglich, die Modulationsfunktion in 40 Stufen abzutasten, weshalb das einheitlich für alle T_{mod} mit 20 Stufen geschah.

[1] Das Potential wurde dabei durch optische Fallen realisiert.

- Um sowohl den für die Stochastische Resonanz als auch den für die Resonante Aktivierung interessanten Bereich von Modulationszeiten abdecken zu können, wurden mehr Datenpunkte benötigt. Deshalb musste die Messdauer pro Modulationszeit auf zweimal ca. 32 min verkürzt werden.[2]

Die relevanten Potentialparameter, die aus der Fluktuation eines Teilchens im statischen symmetrischen Doppelmuldenpotential gewonnen wurden, waren:

$$\begin{aligned} \text{Abstand der Potentialminima} &: 2x_0 = 1.8\,\mu\text{m} \\ \text{Barrierenhöhe} &: \Delta U = 3\,k_\text{B}T \\ \text{Kramerszeit} &: T_\text{K} = 27\,\text{s} \quad \text{(mittlere Wartezeit)} \\ &\quad\; T_\text{K} = 25(-4/+6)\,\text{s} \quad \text{(Exponentialfit)} \\ \text{Modulationsamplitude} &: A = 4\,k_\text{B}T/x_0\ . \end{aligned}$$

Für diese Messreihe haben wir eine sehr hohe Modulationsamplitude gewählt, um die Resonante Aktivierung möglichst deutlich beobachten zu können. Im maximal ausgelenkten Zustand des Potentials muss das Teilchen gerade noch eine Schwelle von einigen Zehntel $k_\text{B}T$ überwinden, um von der flachen in die tiefe Mulde zu gelangen.
Abbildung 7.1 zeigt oben die mittleren Wartezeiten $\langle t_\text{res}\rangle$ für ein Teilchen in einem Doppelmuldenpotential, das mit Modulationszeiten von 0.5 s bis 500 s moduliert wurde. Die Wartezeiten wurden wie in Abschnitt 3.2 beschrieben bestimmt, wobei die Schwellen in die Potentialminima bei $\pm 0.9\,\mu$m gelegt wurden. Die Mittelung wurde dann über alle zu einer Modulationszeit gemessenen Wartezeiten ausgeführt. Im unteren Teil von Abbildung 7.1 ist die nach Gleichung 5.2 bestimmte Fläche P_1 unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung aufgetragen.
Es ist offensichtlich, dass die mittlere Wartezeit ein Minimum und die Fläche unter dem ersten Peak ein Maximum aufweist. Außerdem fällt sofort auf, dass die beiden Extrema bei unterschiedlichen Modulationszeiten auftreten. Der Einfachheit halber werden wir den Kurvenverlauf anhand von vier Spezialfällen diskutieren, zu denen in Abbildung 7.2 (a)-(d) Trajektorienausschnitte und Wartezeitenverteilungen gezeigt sind.

(a) $\mathbf{T}_\text{mod} \ll \mathbf{T}_\text{K}$: Im Grenzfall sehr kleiner Modulationszeiten, also sehr hoher Modulationsfrequenzen, spürt das Teilchen ein gemitteltes Potential, das aufgrund der Symmetrie der Modulation gleich dem symmetrischen Ausgangspotential ist. Die mittlere Wartezeit sollte in diesem Fall also der Kramerszeit entsprechen.

Abbildung 7.2 (a) zeigt einen Trajektorienausschnitt und die Wartezeitenverteilung für T_mod=0.5 s. In der Trajektorie erkennen wir schon, dass das Teilchen offensichtlich der schnellen Modulation nicht folgen kann. In der Wartezeitenverteilung wurde für die Balkenbreite ausnahmsweise statt einem Zehntel der Modulationszeit ein Wert von 10 s gewählt, weil sonst auf jeden Balken höchstens ein bis zwei Ereignisse entfallen würden. So sehen wir, dass die Wartezeitenverteilung nährungsweise exponentiell

[2] Damit lag die reine Messzeit für die gesamte Messreihe bei ca. 11 Stunden.

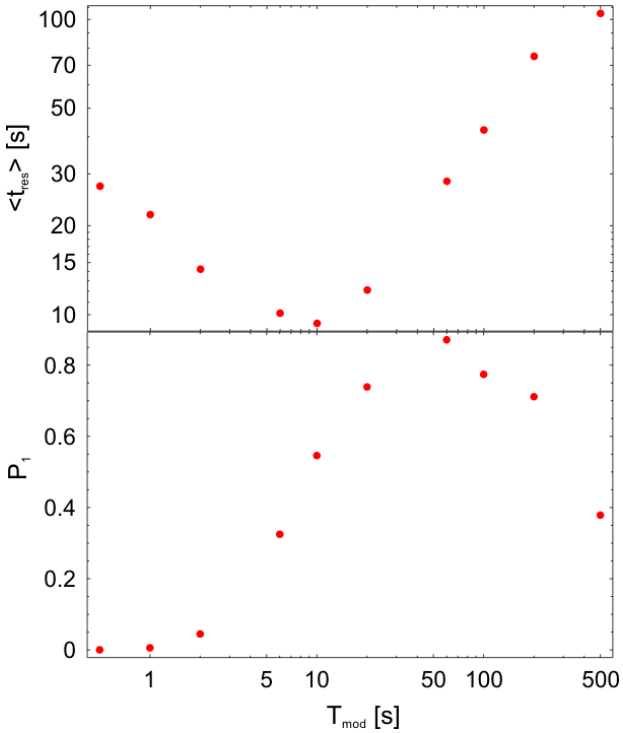


Abbildung 7.1: Mittlere Wartezeiten $\langle t_{\mathrm{res}} \rangle$ (oben) und Fläche P_1 unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung (unten) in Abhängigkeit von der Modulationszeit für ein Teilchen im sinusförmig modulierten Doppelmuldenpotential.

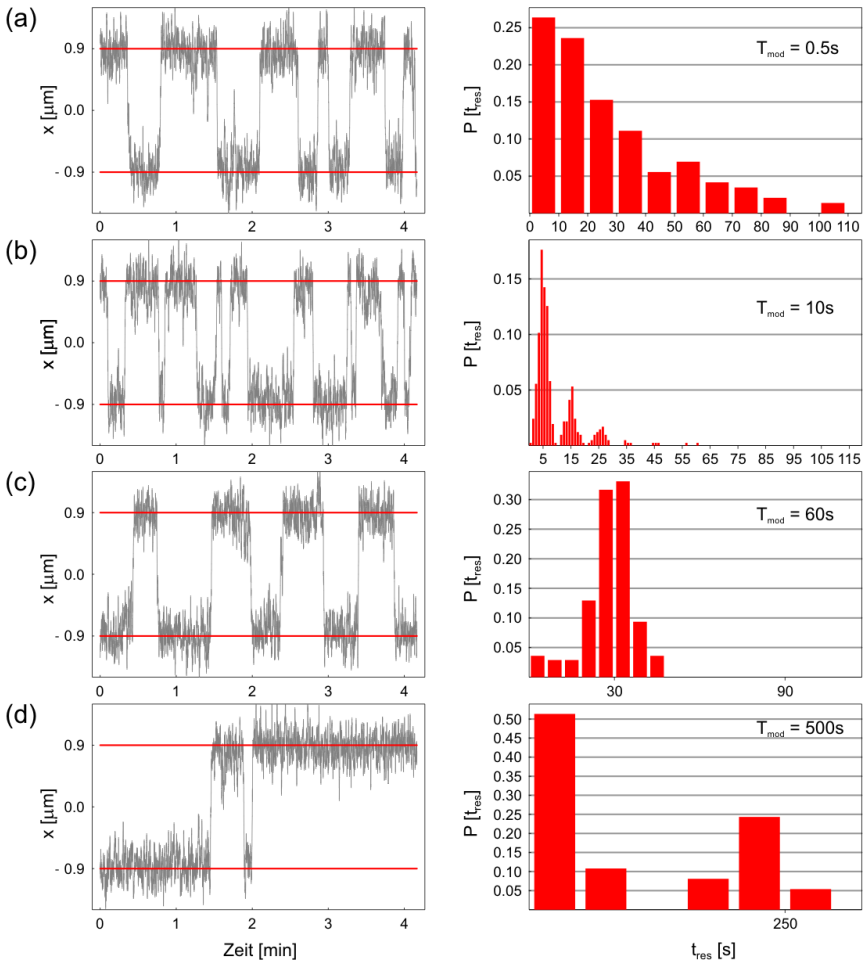


Abbildung 7.2: Trajektorienausschnitte und Wartezeitenverteilungen für T_{mod}=0.5 s (a), T_{mod}=10 s (b), T_{mod}=60 s (c) und T_{mod}=500 s (d). Die Position der Minima des Doppelmuldenpotentials ist in den Trajektorien in rot eingezeichnet. Bei den Wartezeitenverteilungen ist zu beachten, dass die Balkenbreite in (a) 10 s beträgt (anstatt wie in den anderen Fällen ein Zehntel der Modulationszeit) und dass die Zeitachse in (a)-(c) bis 120 s reicht, in (d) jedoch bis 350 s.

abfällt, wie wir das für ein gemitteltes Potential erwarten würden. Die mittlere Wartezeit für T_{mod}=0.5 s entspricht mit ca. 27 s derjenigen, die wir auch für das statische Potential gemessen haben.

(b) $\mathbf{T_{mod} < 2T_K}$: Wird die Modulationszeit so weit erhöht, dass das Teilchen auf die Potentialänderung reagiert, so resultiert das in einer Umverteilung der Wartezeiten gegenüber dem statischen oder sehr schnell modulierten Fall. Das Teilchen springt jetzt bevorzugt dann, wenn es eine minimale Potentialbarriere vorfindet. Solange es jedoch der Modulation noch nicht folgen kann, muss es nach jeder verpassten guten Sprunggelegenheit eine volle Periode warten, bis die relevante Potentialbarriere wieder minimal wird. Was die Minimierung der mittleren Wartezeit angeht, so stehen bei der Erhöhung der Modulationszeit in diesem Bereich zwei Effekte im Wettbewerb: Einerseits kann das Teilchen einer langsameren Modulation besser folgen, es liegen also in der Wartezeitenverteilung mehr Ereignisse im ersten Peak bei der halben Modulationszeit und das Gewicht der Peaks höherer Ordnung nimmt ab, andererseits nimmt natürlich der absolute Wert der Wartezeiten, bei denen wir die Peaks finden, zu.

In unserem System wird die mittlere Wartezeit im Bereich von T_{mod}=10 s minimal. Der entsprechende Trajektorienausschnitt in Abbildung 7.2 (b) zeigt mehr Sprünge als der für T_{mod}=0.5 s, aber es ist klar, dass das Teilchen der Modulation nicht folgen kann. Die Wartezeitenverteilung weist mehrere Peaks bei ungeradzahligen Vielfachen der halben Modulationszeit auf. Anders als bei der Stochastischen Resonanz ist bei der Resonanten Aktivierung weder an der Trajektorie noch in der Wartezeitenverteilung unmittelbar erkennbar, wann die Resonanzbedingung erreicht ist.

(c) $\mathbf{T_{mod} \approx 2T_K}$: Eine weitere Erhöhung der Modulationszeit über den Wert, für den die mittlere Wartezeit minimal wird, hinaus bewirkt, dass das Teilchen der Modulation immer besser folgen kann. Wenn die Zeitskalenbedingung $T_{\mathrm{mod}} \approx 2T_{\mathrm{K}}$ erfüllt ist, wird die beste Synchronisation zwischen Teilchenbewegung und Modulationssignal erreicht. In unserem Fall geschieht das bei T_{mod}=60 s. Die Trajektorie in Abbildung 7.2 (c) zeigt regelmäßige Sprünge und in der Wartezeitenverteilung finden wir fast alle Ereignisse im ersten Peak. Offensichtlich ist die Modulationszeit, bei der wir die Stochastische Resonanz finden, im Verlauf der mittleren Wartezeit nicht ausgezeichnet. Das Teilchen folgt zwar der Modulation, aber diese ist so langsam, dass die in (b) beschriebene Situation kürzere mittlere Wartezeiten erlaubt.

(d) $\mathbf{T_{mod} \gg T_K}$: Wird die Modulationszeit schließlich weiter erhöht, so springt das Teilchen immer öfter auch dann, wenn die relevante Potentialbarriere nicht minimal ist. Für sehr lange Modulationszeiten erreichen wir den adiabatischen Grenzfall. Wenn das Potential langsam genug moduliert wird, dann springt das Teilchen in jeder Modulationsphase so oft zwischen den Potentialmulden hin und her, dass es die der jeweils aktuellen Potentialform entsprechende mittlere Wartezeit erreicht. Damit sollte also für genügend lange Modulationszeiten die mittlere Wartezeit nicht mehr von der Modulationszeit abhängig sein.

Im Experiment erreichen wir diesen Fall nicht. Abbildung 7.2 (d) zeigt einen Trajektorienausschnitt und die Wartezeitenverteilung für T_{mod}=500 s. Hier sind zwar schon sehr viele Sprünge nach deutlich kürzeren Wartezeiten als der halben Modulationszeit zu beobachten, aber die Häufung der Ereignisse um $t_{\mathrm{res}} = 250\,\mathrm{s}$ zeigt uns, dass die Modulationszeit noch eine starke Rolle spielt. In Abbildung 7.1 oben ist allerdings schon eine leichte Abflachung der Kurve zu beobachten.

7.2 Vergleich mit Simulationen

Die Anregung, Resonante Aktivierung in unserem System zu untersuchen, kam von Bartlomiej Dybiec (Jagiellonen-Universität Krakau), von dem auch die folgenden Computersimulationen zu unseren Experimenten stammen.
Die Simulationen wurden, wie bereits diejenigen für die in Kapitel 5 diskutierten Messungen, auf der Grundlage der Langevin-Gleichung

$$\gamma\dot{x}(t) = -U'(x(t)) + f(t) + \xi(t) \tag{7.1}$$

durchgeführt. γ steht dabei wie zuvor für den Reibungskoeffizienten, U für das statische Doppelmuldenpotential

$$U(x) = \Delta U \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1\right]^2 , \tag{7.2}$$

$f(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$ für die modulierende Kraft und $\xi(t)$ für delta-korreliertes weißes Rauschen. Die Potentialparameter und die Modulationsamplitude wurden experimentell zu $\Delta U = 3\,k_{\mathrm{B}}T$, $x_0 = 0.9\,\mu$m und $A = 4\,k_{\mathrm{B}}T/x_0$ bestimmt (siehe oben). ϕ ist die Phasenverschiebung des Modulationssignals, die zu Beginn der Simulation zufällig gewählt wird. Da der Reibungskoeffizient γ aus dem Experiment nicht genau bekannt ist, wird er angepasst. Die beste Übereinstimmung hat sich in diesem Fall für $\gamma = 1.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg/s}$ ergeben, was ziemlich genau dem Wert entspricht, der auch für die in Kapitel 5 vorgestellten Simulationen verwendet wurde. Auch hier finden wir also erwartungsgemäß wieder, dass unser Teilchen in der Nähe einer Wand langsamer diffundiert als ein Teilchen weit weg von jeder Begrenzung.
Abbildung 7.3 zeigt die experimentellen Daten aus Abbildung 7.1 (rot) zusammen mit den Simulationsdaten (grau). Zum einfacheren Vergleich mit anderen Veröffentlichungen sind $\langle t_{\mathrm{res}}\rangle$ und P_1 jetzt über der Modulationsfrequenz $\Omega = 2\pi/T_{\mathrm{mod}}$ aufgetragen. Die Fehler in den experimentellen Daten wurden wie schon in Kapitel 5 folgendermaßen grob abgeschätzt: Für jede Modulationszeit wurden zwei gleich lange Messungen durchgeführt und die Größe des Fehlerbalkens entspricht jeweils der Differenz zwischen $\langle t_{\mathrm{res}}\rangle$ und P_1 aus den beiden Einzelmessungen.
Die exzellente Übereinstimmung von Experiment und Simulation ist offensichtlich. Umso mehr fällt auf, dass es gerade in den beiden experimentellen Datenpunkten im Minimum der mittleren Wartezeit größere Abweichungen gibt. Diese betragen zwar nur etwa 1.4 bzw. 2.6 s, was weniger als 10% der Kramerszeit entspricht, aber doch ein Vielfaches der

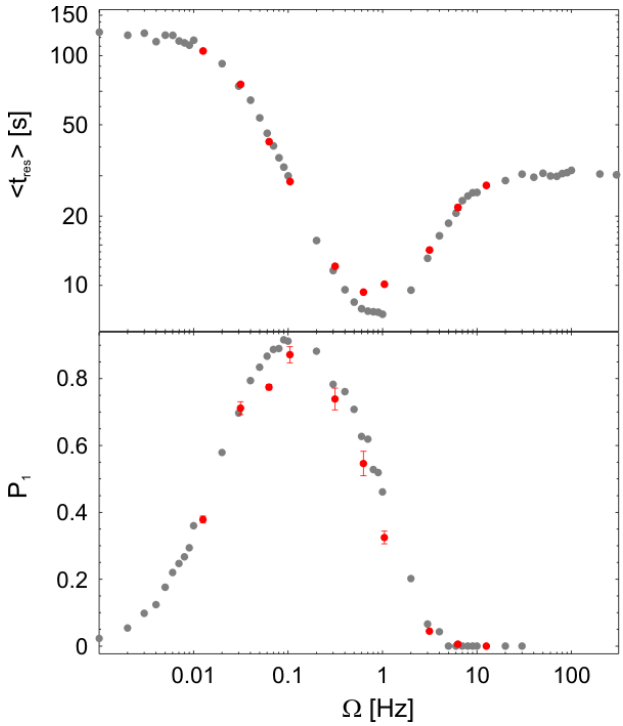


Abbildung 7.3: Mittlere Wartezeit und Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz $\Omega = 2\pi/T_{\mathrm{mod}}$. Vergleich von experimentellen (rot) mit Simulationsdaten (grau). Die Fehler für die experimentell ermittelten mittleren Wartezeiten $\langle t_{\mathrm{res}} \rangle$ sind kleiner als die Symbole. (Simulationsdaten von Bartlomiej Dybiec, Jagiellonen-Universität Krakau)

Abweichungen der anderen Punkte ist. Die Erklärung für diese Differenzen könnte darin liegen, dass gerade in diesem Bereich der Modulationszeiten die unterschiedlichen Potentialformen in Simulation und Experiment zum Tragen kommen. Während die Simulation mit einem eindimensionalen quartischen Potential arbeitet, dessen Krümmung in den Minima sich durch die Modulation nicht ändert, haben wir im Experiment ein zweidimensionales Potential, das sich durch die Summe zweier Gaußfunktionen beschreiben lässt, und bei dem sich die Krümmung in den Minima durch die Modulation ändert. Abbildung 7.4 zeigt das quartische Potential (grün gestrichelt) und einen Schnitt durch das experimentelle Potential (blau), das auf der Grundlage des Fits an das gemessene statische Potential abgeschätzt wurde, jeweils im maximal ausgelenkten Zustand. Die Krümmung des quartischen Potentials in der flachen Mulde ist deutlich größer als die des experimentellen Potentials.

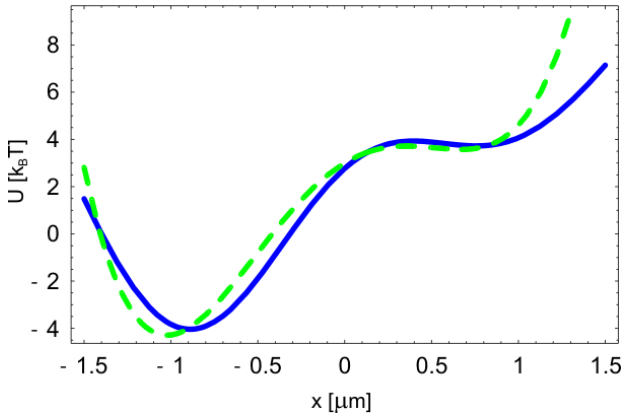


Abbildung 7.4: Vergleich der Potentiale im maximal ausgelenkten Zustand: Auffallend ist, dass das Minimum der tiefen Mulde des quartischen Potentials (grün gestrichelt) durch die Modulation nach außen gewandert ist. Der entscheidende Effekt ist aber vermutlich, dass die Krümmung des quartischen Potentials in der flachen Mulde deutlich größer ist als diejenige in der flachen Mulde des Schnitts durch das experimentelle Potential (blau).

Das hat – genau wie auch der Umstand, dass das experimentelle Potential sich in zwei Dimensionen ausdehnt – zur Folge, dass das Teilchen im Experiment effektiv mehr Zeit benötigt, um die Potentialmulde zu verlassen, als in der Simulation. Dieser Effekt wird vor allem dann wichtig, wenn die Modulation so schnell ist, dass nur in der Nähe des maximal ausgelenkten Zustands eine nennenswerte Wahrscheinlichkeit besteht, dass das Teilchen springt, und wenn außerdem diese Situation nur sehr kurz anhält.
Ein Vorteil der Simulation besteht darin, dass ein größerer Bereich von Modulationszeiten untersucht werden kann. Das ermöglicht eine Betrachtung des asymptotischen Verhaltens der mittleren Wartezeiten bei sehr kurzen und sehr langen Modulationszeiten. Wie erwartet hängt in beiden Grenzfällen die mittlere Wartezeit nicht mehr von der Modulationszeit ab. Der asymptotische Wert von ca. 30 s für sehr hohe Modulationsfrequenzen liegt zwar etwas höher als die experimentell bestimmte Kramerszeit von ca. 27 s, lässt sich aber immer noch gut mit diesem Wert vereinbaren, wenn man die Fehler in Betracht zieht.

7.2.1 Mittlere Wartezeit und *Mean First Passage Time*

Normalerweise wird in der Literatur zur Resonanten Aktivierung nicht der Verlauf der mittleren Wartezeit mit der Modulationsfrequenz betrachtet, sondern derjenige der *Mean First Passage Time*. Diese wird im Allgemeinen bestimmt, indem für den Zeitpunkt $t = 0$ der Ort des Teilchens in einer Potentialmulde und die Phase der Modulation über statistische Verfahren festgelegt werden. Die *Mean First Passage Time* ist dann die Zeit, die das Teilchen im Mittel braucht, bis es eine bestimmte Schwelle jenseits der Barriere überquert. Der wesentliche Unterschied zwischen der mittleren Wartezeit, die aus einer langen Trajektorie bestimmt wird, und der *Mean First Passage Time* ist also, dass für die mittlere Wartezeit die Modulationsphase, zu der die „Zeitrechnung“ startet, davon abhängt, bei welcher Phase das Teilchen in die jetzige Mulde gesprungen ist, während sie für die *Mean First Passage Time* zufällig verteilt ist. Für sehr hohe Modulationsfrequenzen, wo das Teilchen effektiv ein gemitteltes Potential spürt, sollten beide Größen gleich sein. Wenn die Modulation jedoch so langsam wird, dass das Teilchen bevorzugt dann springt, wenn die Potentialbarriere minimal ist, dann sollte die mittlere Wartezeit größer werden als die *Mean First Passage Time*, weil das Teilchen fast immer in einer ungünstigen Situation in einer Mulde ankommen wird. In diesem Fall muss es mindestens etwa eine halbe Periode warten, bis die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung wieder hoch wird. Sobald die Modulation so langsam wird, dass das Teilchen im Mittel mehr als zweimal pro Modulationsperiode springt, sollte sich die Situation wieder umkehren. Im adiabatischen Grenzfall sehr langsamer Modulation können wir neben der mittleren Wartezeit an sich noch eine instantane mittlere Wartezeit jeweils für die aktuelle Potentialform definieren. Diese instantane mittlere Wartezeit ergibt sich aus dem Mittelwert aus der *Mean First Passage Time* für die größere und derjenigen für die kleinere Barriere. Wenn das Teilchen bei jeder instantanen Potentialform gleich oft springen würde, so stimmten die mittlere Wartezeit und die *Mean First Passage Time* im adiabatischen Grenzfall überein. Da jedoch in der Berechnung der mittleren Wartezeit die kürzeren instantanen mittleren Wartezeiten stärker gewichtet werden, weil das Teilchen dann öfter springt, ist die mittlere Wartezeit deutlich kleiner als die *Mean First Passage Time*.[3]

Abbildung 7.5 zeigt Simulationsdaten zum Verlauf der mittleren Wartezeit $\langle t_{\mathrm{res}} \rangle$ (grau) und der *Mean First Passage Time* (schwarz). Tatsächlich finden wir das erwartete Verhalten: Für sehr langsame Modulation ist die *Mean First Passage Time* größer als die mittlere Wartezeit. In dem Bereich, in dem das Teilchen wenigstens teilweise der Modulation folgt, ist die mittlere Wartezeit größer. Für sehr schnelle Modulation liegen beide Kurven fast aufeinander. Dass die mittlere Wartezeit etwas größer ist, könnte daran liegen, dass wir die Schwellen in die Potentialminima gelegt haben. So ist das Teilchen zu Beginn der „Zeitrechnung“ für die Wartezeiten immer im äußeren Teil der Potentialmulde, während die Startpositionen im Fall der *Mean First Passage Time* symmetrisch zum Potentialminimum verteilt sind.

Trotz der Unterschiede im Verlauf beider Größen zeigen sie qualitativ das gleiche Verhalten. Beide weisen ein Minimum im gleichen Frequenzbereich auf. Das Minimum ist für

[3] Das gilt für hinreichend große Modulationsamplituden.

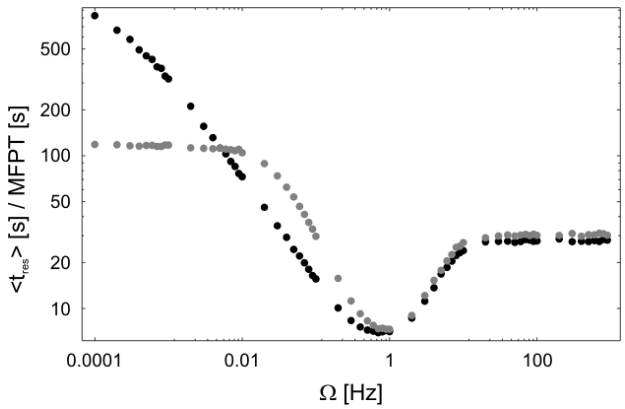


Abbildung 7.5: Vergleich von mittleren Wartezeiten (graue Symbole), die aus einer Trajektorie von 5000 Sprüngen Länge bestimmt wurden, und *Mean First Passage Times* (schwarze Symbole), die ebenfalls einem Mittelwert über 5000 Realisierungen entsprechen, für verschiedene Modulationsfrequenzen. (Daten von Bartlomiej Dybiec, Jagiellonen-Universität Krakau)

beide Größen fast gleich tief, für die *Mean First Passage Time* jedoch etwas breiter als für die mittlere Wartezeit. Auch für dieses breitere Minimum ist aber klar, dass es gegenüber der Position des Maximums der Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung, welches die Stochastische Resonanz charakterisiert, verschoben ist. So haben unsere wesentlichen Aussagen auch dann Bestand, wenn wir statt der mittleren Wartezeit die *Mean First Passage Time* betrachten.

7.3 Einfluss der Modulationsform

Ein Punkt, den bereits Zolotaryuk et al. [Zol04] angesprochen haben, ist die Abhängigkeit der mittleren Wartezeit von der Form des Modulationssignals. Sie konnten zeigen, dass beispielsweise mit einer fast stufenförmigen Modulation (Rechtecksignal) eine deutlich höhere mittlere Sprungrate (also ein tieferes Minimum in der mittleren Wartezeit) zu erreichen ist als mit einem sinusförmigen Modulationssignal. Das können wir experimentell bestätigen. Abbildung 7.6 zeigt experimentelle (rot) und Simulationsdaten (grau bzw. schwarz) für die mittleren Wartezeiten in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz im Fall von sinusförmiger (Kreise) bzw. Rechteckmodulation (Quadrate) gleicher Amplitude. Rechteckmodulation bedeutet hier, dass das Potential in einer Mulde jeweils für eine halbe Modulationsperiode minimal bzw. maximal ist. Die Potentialparameter waren in diesem Fall $x_0 = 0.8\,\mu\mathrm{m}$, $\Delta U = 3.8\,k_\mathrm{B}T$, $T_\mathrm{K} = 29\,\mathrm{s}$ (mittlere Wartezeit) bzw. $T_\mathrm{K} = 25(-5/+7)\,\mathrm{s}$ (Exponentialfit) und $A = 3.75\,k_\mathrm{B}T/x_0$. Für die Simulation wurde wieder $\gamma = 1.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg/s}$ verwendet.
Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation ist auch hier wieder sehr gut, wobei man in diesem Fall angesichts von nur vier Punkten pro Kurve keine Aussage darüber treffen kann, ob es in einem bestimmten Frequenzbereich größere Abweichungen gibt als

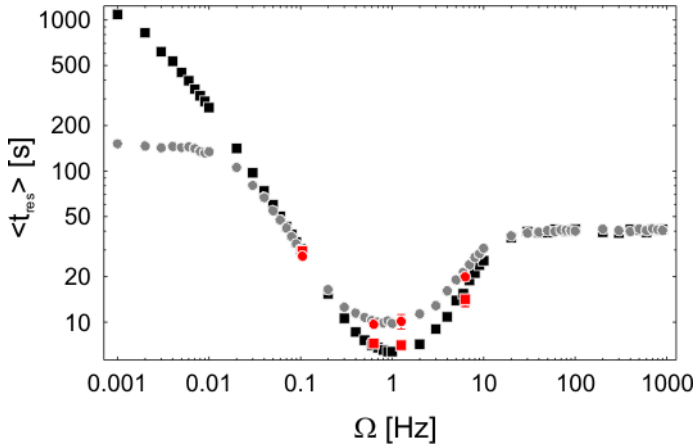


Abbildung 7.6: Mittlere Wartezeiten in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz für sinusförmige (Kreise) und Rechteckmodulation (Quadrate) gleicher Amplitude. Graue und schwarze Symbole stehen für die Ergebnisse der Langevin-Simulationen, rote Symbole für experimentell bestimmte mittlere Wartezeiten. (Simulationsdaten von Bartlomiej Dybiec, Jagiellonen-Universität Krakau)

in anderen.
Die Messungen zeigen, dass im Minimum der Kurve die mittlere Wartezeit des Teilchens bei Rechteckmodulation nur ca. 70% des Wertes bei Sinusmodulation beträgt. Dass das Teilchen in diesem Frequenzbereich bei Rechteckmodulation im Mittel schneller springt, wird anschaulich klar, wenn man bedenkt, dass das Teilchen der Modulation nicht folgen kann und dass es praktisch nur dann springen kann, wenn die relevante Potentialbarriere ungefähr minimal ist. Letzteres ist bei Rechteckmodulation pro Periode deutlich länger gegeben als bei Sinusmodulation. Dass die Rechteckmodulation nicht immer günstiger ist, zeigen die Simulationsdaten: Für niedrige Modulationsfrequenzen springt das Teilchen bei Rechteckmodulation im Mittel seltener. Das liegt daran, dass bei langsamer sinusförmiger Modulation mehr als zwei Sprünge pro Periode möglich sind, weil das Teilchen auch bei ungefähr ausgeglichenem Potential springen kann, während es bei der entsprechenden Rechteckmodulation nach jedem Sprung eine maximal hohe Barriere vorfindet. Wenn die Modulationsfrequenz gegen null geht, sollte allerdings die mittlere Wartezeit auch bei der Rechteckmodulation nicht mehr von der Modulationszeit abhängen.

7.4 Ausblick: Ausgedehnte Systeme

Sowohl bei technischen Anwendungen als auch in der Natur wird man es selten mit einem isolierten System in einem eng begrenzten Potential zu tun haben. Was die Resonante Aktivierung angeht, gibt es in der Literatur in dieser Hinsicht hauptsächlich Überlegungen, die Diffusion in räumlich periodischen Potentialen zu beschleunigen oder deren Richtung zu kontrollieren, was auch schon experimentell mit kalten Atomen in einem optischen Gitter gezeigt wurde [Gan96, Gom05].

Gekoppelte Systeme

Ein Ansatz, der unseres Wissens nach in der Literatur noch nicht behandelt wurde, ist die Untersuchung der Resonanten Aktivierung in gekoppelten Systemen. Für unser System von vier gekoppelten Teilchen, das in Kapitel 6 diskutiert wurde, erwarten wir zum Beispiel, dass die (absolute) Tiefe des Minimums in der Kurve der mittleren Wartezeiten von der Kopplungsstärke abhängt. Für sehr starke Kopplung sollte das Teilchen bei den Modulationszeiten, bei denen die mittlere Wartezeit minimal wird, im Mittel seltener springen als ohne Kopplung, weil ein Teilchen praktisch nur dann springen kann, wenn sein Nachbarteilchen auch springt. Ansonsten ist die effektive Potentialbarriere aufgrund der Nähe des Nachbarteilchens zu hoch. Bei der optimalen Kopplungsstärke sollte dieser hinderliche Effekt deutlich schwächer sein und durch einen anderen Effekt überkompensiert werden: Betrachten wir z. B. das obere Teilchen im Quadrat und nehmen an, dass es in der linken Mulde sitzt und dass sich sein linkes Nachbarteilchen in der oberen Mulde befindet. Dann ist die effektive Potentialbarriere für den Sprung nach rechts kleiner als ohne Nachbarteilchen. Das sollte dazu führen, dass es unwahrscheinlicher wird, dass ein Teilchen mehrere gute Sprunggelegenheiten verpasst, weil sehr wahrscheinlich das relevante Nachbarteilchen nicht gleichzeitig sehr lange in einer Mulde sitzen wird. Die minimalen mittleren Wartezeiten sollten also hier kleiner sein als bei isolierten Teilchen. Bei immer schwächerer Kopplung müssen sich die mittleren Wartezeiten dann wieder denen der ungekoppelten Teilchen annähern. Diese Überlegungen beschreiben nur sehr grob, was im gekoppelten System geschieht, aber die im vorhergehenden Kapitel vorgestellten Messungen bestätigen für $T_{\mathrm{mod}} = 10\,\mathrm{s}$, dass die mittleren Wartezeiten für die Teilchen im gekoppelten System abhängig von der Kopplungsstärke größer oder kleiner werden können als für die isolierten Teilchen. Während für die vier Teilchen im Quadrat einzeln (ohne Kopplung) mittlere Wartezeiten zwischen 8.6 s und 13.0 s gemessen wurden, waren es bei starker Kopplung zwischen 13.4 s und 14.0 s und bei mittlerer Kopplung zwischen 6.9 s und 8.0 s. Für systematische Untersuchungen wäre es wahrscheinlich sinnvoll, Systeme mit längeren Kramerszeiten und auch größere Modulationsamplituden zu wählen, um die absoluten Unterschiede in den minimalen mittleren Wartezeiten für das isolierte und das optimal gekoppelte System zu vergrößern.

Diskussion und Ausblick

Thema dieser Arbeit ist die experimentelle Untersuchung der Stochastischen Resonanz in einem einfachen Modellsystem, das sehr gut charakterisiert werden kann. Das System besteht aus einem kolloidalen Teilchen in einem modulierten Doppelmuldenpotential. Erste Experimente in einer solchen Anordnung wurden schon Anfang der neunziger Jahre von Simon und Libchaber durchgeführt [Sim92]. In der Zwischenzeit wurden beträchtliche Fortschritte sowohl in der Technik, die das Experiment bestimmt, als auch in der Theorie der Stochastischen Resonanz erzielt. So können wir heute das Experiment unter deutlich besser kontrollierten Umständen durchführen. Vor allem haben wir dank moderner Kamera- und Bildverarbeitungstechnik die komplette Trajektorie eines Teilchens zur Verfügung, so dass wir beispielsweise Potentiale direkt ausmessen können. Außerdem gibt es inzwischen Kriterien, anhand derer wir die Stochastische Resonanz in unserem System charakterisieren können. Während in den meisten Experimenten die Rauschintensität variiert wird, beobachten wir eine *bona fide* Resonanz, das heißt, eine Resonanz in Abhängigkeit von der Signalfrequenz. Uns sind drei Maße für die Stochastische Resonanz bekannt, die in Abhängigkeit von der Signalfrequenz ein Maximum aufweisen: Die Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung, die Fläche der Hysteresekurven und die mittlere Zeit, in der die Phasen von Signal und Teilchenbewegung synchronisiert sind. Diese Maße wurden in Kapitel 5 eingeführt und für unsere Messdaten diskutiert. Einen analytischen Zusammenhang zwischen den drei genannten Maßen gibt es bisher nicht, was einen Vergleich anhand von experimentellen Daten interessant macht. Dabei haben wir festgestellt, dass für hinreichend große Modulationsamplituden die Phasensynchronisation mit Abstand am empfindlichsten auf eine Änderung der Modulationszeit in der Nähe der Resonanz reagiert. Diese Beobachtung stellt eine interessante Parallele zu der Arbeit von Park und Lai [Par05] dar. Die beiden Autoren haben festgestellt, dass die Phasensynchronisation auf eine Änderung der Rauschintensität deutlicher stärker reagiert als andere Kriterien, die üblicherweise zur Charakterisierung der Stochastischen Resonanz verwendet werden.
Zu einigen unserer Experimente wurden in der Gruppe von Prof. Reimann in Bielefeld Langevin-Simulationen auf der Grundlage eines eindimensionalen Modells durchgeführt. Die Modellparameter wurden mit Ausnahme des effektiven Diffusionskoeffizienten experi-

mentell bestimmt; der Diffusionskoeffizient wurde in der Simulation angepasst. Der Vergleich der Messdaten mit den Ergebnissen der Simulation hat gezeigt, dass sich unser System quantitativ gut durch das eindimensionale Modell beschreiben lässt.
Die Erfahrungen, die mit einzelnen Systemen gesammelt wurden, bildeten die Grundlage für Experimente mit einem komplexeren System von vier quadratisch angeordneten gekoppelten Teilchen, die jeweils in einem modulierten Doppelmuldenpotential fluktuieren. Auf dem Weg zu einem besseren Verständnis der Rolle, die die Stochastische Resonanz z. B. in der Natur spielen könnte, sind Experimente in Systemen wechselwirkender Untereinheiten unabdingbar. Bisher gibt es in diesem Bereich nur ein Experiment mit vier Diodenresonatoren [Löc96], die jeweils mit ihren nächsten Nachbarn gekoppelt sind, und einige Experimente mit unidirektional gekoppelten Schmitt-Triggern [Row01, Car03, Ste04]. *Bona fide* Stochastische Resonanz wurde unseres Wissens in gekoppelten Systemen noch nicht untersucht. Unsere kolloidalen Teilchen sind negativ geladen und wechselwirken elektrostatisch. Die Ladungen werden dabei durch Gegenionen abgeschirmt, was dazu führt, dass die Kopplungsstärke von der Ionenkonzentration der Suspension abhängt. Die Ionenkonzentration nimmt mit der Zeit zu, so dass wir das Verhalten eines Systems bei abnehmender Kopplungsstärke beobachten können, ohne etwas am System selbst zu ändern. Anhand unserer Messungen an einem System von vier gekoppelten Teilchen konnten wir für den Fall der *bona fide* Stochastischen Resonanz zeigen, was für Systeme, in denen die Rauschintensität variiert wird, unter dem Begriff *Array Enhanced Stochastic Resonance* 1995 von Linder et al. [Lin95] berechnet und ein Jahr später in dem Experiment mit gekoppelten Diodenresonatoren von Löcher et al. [Löc96] experimentell bestätigt wurde: Stärke und Position der Resonanz können entscheidend von der Kopplungsstärke abhängen. Mit zunehmender Kopplungsstärke wird die Resonanz zu längeren Modulationszeiten hin verschoben. Außerdem haben wir eine deutliche Verstärkung der Resonanz beobachtet. Die Kopplungsstärke ist also in komplexen Systemen neben der Rauschintensität und der Signalfrequenz ein wichtiger Parameter für die Optimierung der Signalübertragung.
Den Abschluss der Arbeit bilden Messungen zur Resonanten Aktivierung. Hier nutzen wir die Vielseitigkeit unseres Modellsystems, das die gleichzeitige Untersuchung der beiden rauschinduzierten Phänomene Stochastische Resonanz und Resonante Aktivierung erlaubt. Während beide Phänomene bisher getrennt voneinander behandelt wurden, können wir die unterschiedlichen Aspekte des Zusammenspiels zwischen Rauschen und Signal sehr anschaulich anhand von Wartezeitenverteilungen vergleichen. Wir sehen das Minimum in der mittleren Wartezeit, das die Resonante Aktivierung charakterisiert, bei deutlich kürzeren Modulationszeiten als das Maximum der Fläche unter dem ersten Peak der Wartezeitenverteilung, das für die Stochastische Resonanz steht.
Während für die Stochastische Resonanz bekannt ist, dass sie durch Kopplung mehrerer Systeme verstärkt werden kann, gibt es solche Überlegungen unseres Wissens nach für die Resonante Aktivierung nicht. Unsere Experimente geben jedoch erste Hinweise darauf, dass auch das Minimum der mittleren Wartezeit bei einer geeigneten Kopplungsstärke tiefer wird. Hier ist ein Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen.
Allgemein werden sich zukünftige Experimente mit dem Verhalten gekoppelter Systeme beschäftigen. Das Ziel ist dabei, ein besseres Verständnis dafür zu entwickeln, wie z. B. kom-

plexe Systeme in der Natur Stochastische Resonanz oder andere rauschinduzierte Phänomene nutzen könnten. Wichtige Fragen in diesem Zusammenhang sind:

(a) Welchen Einfluss haben verschiedene Parameter auf die Übertragung eines Signals?

(b) Wie robust sind Effekte wie die Stochastische Resonanz?

In Verbindung mit der erstgenannten Frage untersucht Tobias Sawetzki im Rahmen seiner Diplomarbeit den Einfluss einer Phasenverschiebung zwischen einzelnen Modulationssignalen. Er arbeitet mit dem in Kapitel 6 vorgestellten System von vier quadratisch angeordneten Teilchen, moduliert aber die Doppelmuldenpotentiale, in denen diese Teilchen fluktuieren, mit einem jeweils um $\pi/2$ verschobenen Signal. Das führt unter anderem dazu, dass die vier Teilchen nicht mehr äquivalent sind und unterschiedlich auf die Modulation reagieren.
Eine weitere Möglichkeit wäre, zu untersuchen, welchen Effekt eine zeitabhängige, im einfachsten Fall periodisch modulierte, Kopplung hat. Ein solches Experiment ist zwar mit unserem aktuellen System nicht möglich, weil die Kopplung zwischen den geladenen Teilchen nicht reversibel verändert werden kann. Superparamagnetische Teilchen würden eine solche Variation jedoch zulassen. Ihr repulsives Wechselwirkungspotential $\Phi(r)$ wird durch das induzierte magnetische Moment M und den Teilchenabstand r bestimmt, wobei gilt:

$$\Phi(r) \propto \frac{M^2}{r^3} \ .$$

Das magnetische Moment der Teilchen kann über die Stärke eines von außen angelegten Magnetfelds innerhalb bestimmter Grenzen beliebig eingestellt werden, so dass das Wechselwirkungspotential auf diese Weise variiert werden kann. Außerdem wäre es interessant, zu sehen, ob sich das Verhalten gekoppelter magnetischer Teilchen aufgrund der anderen Abstandsabhängigkeit der Kopplung qualitativ vom Verhalten gekoppelter geladener Teilchen unterscheidet.
Experimente, die auf die Beantwortung der zweiten Frage zielen, könnten in größeren Systemen mit mehr als vier Teilchen durchgeführt werden. Ein interessanter Ansatz wäre beispielsweise, nur wenige Doppelmuldenpotentiale zu modulieren und zu beobachten, wie viele der übrigen Einzelsysteme unter verschiedenen Bedingungen noch auf dieses Signal reagieren.

Die Stochastische Resonanz ist ein sehr aktives Forschungsgebiet, in dem vor allem im Bereich gekoppelter Systeme noch Raum für neue Entdeckungen ist. Wir haben ein einfaches Modellsystem, das wir Schritt für Schritt zu immer komplexeren Systemen erweitern können. Das zeichnet unser Experiment gegenüber den meisten anderen Experimenten in diesem Gebiet aus. Damit sind wir in der Lage, mit unseren Untersuchungen wesentlich zum Verständnis der Stochastischen Resonanz in komplexen Systemen beizutragen.

Literaturverzeichnis

[Alc05] D. Alcor, J.-F. Allemand, E. Cogné-Laage, V. Croquette, F. Ferrage, L. Jullien, A. Kononov, A. Lemarchand. *Stochastic Resonance to Control Diffusive Motion in Chemistry*. Journal of Physical Chemistry B **109**, 1318–1328 (2005)

[Ani98] V. S. Anishchenko, A. B. Neiman, F. Moss, L. Schimansky-Geier. *Stochastic resonance: noise-enhanced order*. Physics-Uspekhi **42**, 7–36 (1998)

[Ash70] A. Ashkin. *Acceleration and trapping of particles by radiation pressure*. Physical Review Letters **24**, 156–159 (1970)

[Ash86] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, S. Chu. *Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles*. Optics Letters **11**, 288–290 (1986)

[Bad05] R. L. Badzey, P. Mohanty. *Coherent signal amplification in bistable nanomechanical oscillators by stochastic resonance*. Nature **437**, 995–998 (2005)

[Bar03] S. Barbay, G. Giacomelli, S. Lepri, A. Zavatta. *An experimental study of stochastic phase synchronization in vertical cavity lasers*. Fluctuation and Noise Letters **3**, L121–L125 (2003)

[Ben82] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani. *Stochastic resonance in climatic change*. Tellus **34**, 10–16 (1982)

[Bor05] M. Borromeo, F. Marchesoni. *Asymmetric probability densities in symmetrically modulated bistable devices*. Physical Review E **71**, 031105 (2005)

[Bre61] H. Brenner. *The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface*. Chemical Engineering Science **16**, 242–251 (1961)

[Bru03] M. Brunner. *Effective Interactions and Phase Behavior of Colloidal Monolayers in the Presence of Light-Induced Substrate Potentials*. Dissertation, Universität Konstanz (2003)

[Bub01] R. Bubeck. *Zweidimensionale kolloidale Systeme in äußeren Potentialen*. Dissertation, Universität Konstanz (2001)

[Bul05] A. R. Bulsara. *No-nuisance noise*. Nature **437**, 962–963 (2005)

[Car03] M. F. Carusela, J. Codnia, L. Romanelli. *Stochastic resonance: numerical and experimental devices*. Physica A **330**, 415–420 (2003)

[Cho98] M. H. Choi, R. F. Fox, P. Jung. *Quantifying stochastic resonance in bistable systems: Response vs residence-time distribution functions*. Physical Review E **57**, 6335–6344 (1998)

[Col96] J. J. Collins, T. T. Imhoff, P. Grigg. *Noise-enhanced tactile sensation*. Nature **383**, 770 (1996)

[Dho96] J. K. G. Dhont. *An introduction to dynamics of colloids* (Elsevier Science, 1996)

[Doe92] C. R. Doering, J. C. Gadoua. *Resonant Activation over a Fluctuating Barrier*. Physical Review Letters **69**, 2318–2321 (1992)

[Dou93] J. K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, F. Moss. *Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance*. Nature **365**, 337 (1993)

[Dyk01] M. I. Dykman, B. Golding, L. I. McCann, V. N. Smelyanskiy, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock. *Activated escape of periodically driven systems*. Chaos **11**, 587–594 (2001)

[Dyk05] M. I. Dykman, D. Ryvkine. *Activated Escape of Periodically Modulated Systems*. Physical Review Letters **94**, 070602 (2005)

[Ein05] A. Einstein. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. Annalen der Physik 549–560 (1905)

[Eis02] A. Eisenberg. *The Kind of Noise That Keeps a Body on Balance*. The New York Times (2002)

[Evs05] M. Evstigneev, P. Reimann, C. Schmitt, C. Bechinger. *Quantifying stochastic resonance: theory versus experiment*. Journal of Physics: Condensed Matter **17**, S3795–S3809 (2005)

[Fau83] S. Fauve, F. Heslot. *Stochastic resonance in a bistable system*. Physics Letters **97A**, 5–7 (1983)

[Fei91] M. I. M. Feitosa, O. N. Mesquita. *Wall-drag effect on diffusion of colloidal particles near surfaces: A photon correlation study*. Physical Review A **44**, 6677–6685 (1991)

[Fre00] J. A. Freund, A. B. Neiman, L. Schimansky-Geier. *Analytic description of noise-induced phase synchronization*. Europhysics Letters **50**, 8–14 (2000)

[Fre02] D. Frenkel. *Soft condensed matter*. Physica A **313**, 1–31 (2002)

[Fre03a] J. A. Freund, S. Barbay, S. Lepri, A. Zavatta, G. Giacomelli. *Noise-induced phase synchronization: theoretical and experimental results*. Fluctuation and Noise Letters **3**, L195–L204 (2003)

[Fre03b] J. A. Freund, L. Schimansky-Geier, P. Hänggi. *Frequency and phase synchronization in stochastic systems*. Chaos **13**, 225–238 (2003)

[Gam95] L. Gammaitoni, F. Marchesoni, S. Santucci. *Stochastic Resonance as a* Bona Fide *Resonance*. Physical Review Letters **74**, 1052–1054 (1995)

[Gam98] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni. *Stochastic Resonance*. Reviews of Modern Physics **70**, 223–287 (1998)

[Gan96] H. Gang, A. Daffertshofer, H. Haken. *Diffusion of Periodically Forced Brownian Particles Moving in Space-Periodic Potentials*. Physical Review Letters **76**, 4874–4877 (1996)

[Gan02] A. Ganopolski, S. Rahmstorf. *Abrupt Glacial Climate Changes due to Stochastic Resonance*. Physical Review Letters **88**, 038501 (2002)

[Gom05] R. Gommers, P. Douglas, S. Bergamini, M. Goonasekera, P. H. Jones, F. Renzoni. *Resonant Activation in a Nonadiabatically Driven Optical Lattice*. Physical Review Letters **94**, 143001 (2005)

[Hän90] P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec. *Reaction-rate theory: fifty years after Kramers*. Reviews of Modern Physics **62**, 251–342 (1990)

[Hän02] P. Hänggi. *Stochastic Resonance in Biology*. CHEMPHYSCHEM **3**, 285–290 (2002)

[Haw02] M. D. Haw. *Colloidal suspensions, Brownian motion, molecular reality: a short history*. Journal of Physics: Condensed Matter **14**, 7769–7779 (2002)

[Ile79] R. K. Iler. *The chemistry of silica* (Wiley, 1979)

[Imb93] J. Imbrie, A. C. Mix, D. G. Martinson. *Milankovitch theory viewed from Devils Hole*. Nature **363**, 531–533 (1993)

[Isr92] J. Israelachvili. *Intermolecular & Surface Forces* (Academic Press, 1992), 2. Auflage

[Jun92] P. Jung, U. Behn, E. Pantazelou, F. Moss. *Collective response in globally coupled bistable systems*. Physical Review A **46**, R1709–R1712 (1992)

[Kra40] H. A. Kramers. *Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions*. Physica (Utrecht) **7**, 284 (1940)

[Lin95] J. F. Lindner, B. K. Meadows, W. L. Ditto, M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara. *Array Enhanced Stochastic Resonance and Spatiotemporal Synchronization*. Physical Review Letters **75**, 3–6 (1995)

[Lin96] J. F. Lindner, B. K. Meadows, W. L. Ditto, M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara. *Scaling laws for spatiotemporal synchronization and array enhanced stochastic resonance*. Physical Review E **53**, 2081–2089 (1996)

[Löc96] M. Löcher, G. A. Johnson, E. R. Hunt. *Spatiotemporal Stochastic Resonance in a System of Coupled Diode Resonators*. Physical Review Letters **77**, 4698–4701 (1996)

[Mah94] M. C. Mahato, S. R. Shenoy. *Hysteresis loss and stochastic resonance: A numerical study of a double-well potential*. Physical Review E **50**, 2503–2512 (1994)

[Mah97] M. C. Mahato, A. M. Jayannavar. *Relation between stochastic resonance and synchronization of passages in a double-well system*. Physical Review E **55**, 6266–6269 (1997)

[Man00] R. N. Mantegna, B. Spagnolo. *Experimental Investigation of Resonant Activation*. Physical Review Letters **84**, 3025–3028 (2000)

[Mar00] F. Marchesoni, L. Gammaitoni, F. Apostolico, S. Santucci. *Numerical verification of bona fide stochastic resonance*. Physical Review E **62**, 146–149 (2000)

[McN88] B. McNamara, K. Wiesenfeld, R. Roy. *Observation of Stochastic Resonance in a Ring Laser*. Physical Review Letters **60**, 2626–2629 (1988)

[McN89] B. McNamara, K. Wiesenfeld. *Theory of stochastic resonance*. Physical Review A **39**, 4854–4869 (1989)

[Nei98] A. Neiman, A. Silchenko, V. Anishchenko, L. Schimansky-Geier. *Stochastic resonance: Noise-enhanced phase coherence*. Physical Review E **58**, 7118–7125 (1998)

[Pan00a] A. L. Pankratov, M. Salerno. *Adiabatic approximation and parametric stochastic resonance in a bistable system with periodically driven barrier*. Physical Review E **61**, 1206–1210 (2000)

[Pan00b] A. L. Pankratov, M. Salerno. *Resonant activation in overdamped systems with noise subjected to strong periodic driving*. Physics Letters A **273**, 162–166 (2000)

[Pap65] A. Papoulis. *Probability, random variables and stochastic processes* (McGraw-Hill, 1965)

[Par04] K. Park, Y.-C. Lai, Z. Liu, A. Nachman. *Aperiodic stochastic resonance and phase synchronisation*. Physics Letters A **326**, 391–396 (2004)

[Par05] K. Park, Y.-C. Lai. *Characterization of stochastic resonance*. Europhysics Letters **70**, 432–438 (2005)

[Pra05] T. Prager, L. Schimansky-Geier. *Phase velocity and phase diffusion in periodically driven discrete-state systems*. Physical Review E **71**, 031112 (2005)

[Pri02] A. Priplata, J. Niemi, M. Salen, J. Harry, L. A. Lipsitz, J. J. Collins. *Noise-Enhanced Human Balance Control*. Physical Review Letters **89**, 238101 (2002)

[Ris89] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation* (Springer, 1989), 2. Auflage

[Ros96] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths. *Phase Synchronization of Chaotic Oscillators*. Physical Review Letters **76**, 1804–1807 (1996)

[Row01] A. C. H. Rowe, P. Etchegoin. *Experimental observation of stochastic resonance in a linear electronic array*. Physical Review E **64**, 031106 (2001)

[Rus99] D. F. Russell, L. A. Wilkens, F. Moss. *Use of behavioural stochastic resonance by paddle fish for feeding*. Nature **402**, 291–294 (1999)

[Sal91] B. E. A. Saleh, M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics (Wiley, 1991)

[Sha03] J. P. Sharpe, N. Sungar, M. Swaney, K. Carrigan, S. Wheeler. *Stochastic resonance on two-dimensional arrays of bistable oscillators in a nonlinear optical system*. Physical Review E **67**, 056222 (2003)

[Sim92] A. Simon, A. Libchaber. *Escape and Synchronization of a Brownian Particle*. Physical Review Letters **68**, 3375–3378 (1992)

[Ste04] T. Stemler, M. Scheuermann, H. Benner. *Spatiotemporal stochastic resonance in an array of Schmitt triggers*. SPIE P **5471**, 244–250 (2004)

[Sto98] N. G. Stocks, R. Mannella. *Field-Induced Stabilization of Activation Processes*. Physical Review Letters **80**, 4835–4839 (1998)

[Tlu98] T. Tlusty, A. Meller, R. Bar-Ziv. *Optical Gradient Forces of Strongly Localized Fields*. Physical Review Letters **81**, 1738–1741 (1998)

[Wel04] T. Wellens, V. Shatokhin, A. Buchleitner. *Stochastic resonance*. Rep. Prog. Phys. **67**, 45–105 (2004)

[Wie02] K. Wiesenfeld, T. Wellens, A. Buchleitner. *Stochastic Resonance*. In A. Buchleitner, K. Hornberger (Herausgeber), *Coherent Evolution in Noisy Environments*, Band 611 von *Lecture Notes in Physics*, 107–138 (Springer Verlag, Berlin, 2002)

[Win92] I. J. Winograd, T. B. Coplen, J. M. Landwehr, A. C. Riggs, K. R. Ludwig, B. J. Szabo, P. T. Kolesar, K. M. Revesz. *Continuous 500,000-Year Climate Record from Vein Calcite in Devils Hole, Nevada*. Science **258**, 255–260 (1992)

[Zol04] Y. Zolotaryuk, V. N. Ermakov, P. L. Christiansen. *Resonant enhancement of the jump rate in a double-well potential*. Journal of Physics A: Mathematics and General **37**, 6043–6051 (2004)

Danksagung

Hier kommen sie also, die Seiten, die vermutlich die größte Leserschaft finden werden... An dieser Stelle möchte ich mich bei all den Menschen bedanken, die mich und meine Arbeit in den letzten dreieinhalb Jahren begleitet haben. Dazu gehören vor allem

- Prof. Clemens Bechinger, ohne den es diese Doktorarbeit nicht gegeben hätte. Mit ihm konnte ich meine Daten diskutieren, wenn ich wollte, er hat mir aber auch Freiraum gelassen, um Ideen oder Interpretationen zuerst einmal „auszubrüten“. Außerdem sind ihm auch Dinge wie die Ausstattung einer Kaffee-Ecke wichtig, die viel zu einer guten Arbeitsatmosphäre beitragen.

- Prof. Leiderer, der nicht nur das Zweitgutachten übernommen hat, sondern an dessen Lehrstuhl wir auch im ersten Jahr meiner Doktorarbeit „zuhause“ waren.

- Prof. Peter Reimann und seine Gruppe in Bielefeld, die die Simulationen in Kapitel 5 durchgeführt haben, und die auch weiterhin unsere Experimente mit Simulationen begleiten.

- Bartlomiej Dybiec, der die Idee hatte, Resonante Aktivierung in unserem System zu messen, und der die umfangreichen Simulationen in Kapitel 7 gemacht hat.

- Prof. Schimansky-Geier und Prof. Hänggi, die auch Doktoranden wie Bartlomiej Dybiec und mich zu einem sehr interessanten Workshop eingeladen haben, und die immer wieder das Gespräch mit Experimentatoren suchen.

- meine Korrekturleser Christian, Valentin und Tobias, dank deren Anregungen diese Arbeit deutlich gewonnen hat.

- Dušan und Igor, die die komfortable AOD–Ansteuerung entwickelt haben, und Ralf, der IPS so angepasst hat, dass ich meine Daten deutlich schneller auswerten konnte als mit der Standardversion.

- alle jetzigen und ehemaligen Mitglieder der Kolloidgruppe, die direkt und indirekt viel zu dieser Arbeit beigetragen haben. Vor etwas mehr als drei Jahren hatte ich so gut wie keine Ahnung von der Kolloidphysik, und vieles, was ich jetzt weiß, habe ich von Euch gelernt.

- die „Kaffee-Ecken-Besatzung“ sowohl auf P9 als auch im 2. Physikalischen Institut. Auch unsere vielgepriesene Kaffeemaschine in Stuttgart konnte mich ja nicht zum Kaffeetrinken animieren, aber die Gesprächsrunden um 10 und um 4 habe ich trotzdem zu schätzen gelernt. Wichtig waren sie vor allem in der Anfangszeit in Stuttgart, als wir von den „Alteingesessenen“ nützliche Tipps bekommen haben.

- alle, die dafür gesorgt haben, dass ich mich weder um Vertragsverlängerungen, noch um die Sauberkeit des Büros, den Betrieb des Servers oder die Herstellung mechanischer Teile für unser Experiment selbst kümmern musste.

- meine Freunde, Bekannten und Verwandten, die sich für meine Arbeit interessiert haben. Danke für viele Gespräche, mein erstes Perl-Programm, Mails zu später Stunde, die mir gezeigt haben, dass ich nicht als einzige noch an der Uni sitze, Besuche im Labor, die Glückszahl 1183, Mittagessen freitags um halb eins und vieles mehr.

- Christian, der alles mit mir diskutiert hat, meine Mathematica-Hotline war und mich vor allem in den letzten Wochen rundum versorgt hat, so dass ich mich voll aufs Schreiben konzentrieren konnte.