

Universität Konstanz

Repertory Grid - Untersuchung eines Datenanalyseverfahrens

Diplomarbeit

eingereicht von:

Silke Werz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Betreuer: Prof. Dr. Ulrik Brandes

September 2006

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Ulrik Brandes für die Aufgabenstellung und hervorragende Unterstützung herzlich bedanken.

Ebenfalls danke ich Prof. Dr. Phil. Dipl.-Psych. Christoph Clases, der durch seine Arbeit an der ETH Zürich die Anregung für meine Diplomarbeit gegeben hat. Außerdem hat er mich fortwährend mit seinem psychologischen Wissen unterstützt und mir gerne die Daten für die Analyse zur Verfügung gestellt.

Ein weiterer Dank geht an meine Kommilitonen und Freunde, die mir mit Ratschlägen und anregenden Gesprächen hilfreich zur Seite standen.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie für die Geduld und das Verständnis während der Erstellung der Diplomarbeit und während meines Studiums bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Grundlagen	1
1.1 Allgemeines über Matrizen	1
1.2 Spezielle Matrizen und wichtige Eigenschaften	5
1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren	8
1.4 Die Singulärwertzerlegung	9
2 Die Repertory-Grid-Methode	10
2.1 Theorie der persönlichen Konstrukte	10
2.2 Datenerhebung	11
2.3 Eigenstrukturanalyse	16
2.4 Procrustes-Analyse	18
2.5 Distanzfunktion	27
2.6 Clusterverfahren	28
3 Anwendung der Methode in der Praxis	33
4 Probleme	38
4.1 Identifikation von verschiedenen Matrizen	38
4.2 Reduktion auf zwei Dimensionen führt zu Informationsverlust	47
5 Zusammenfassung	56
Anhang	57
A.1 Ausgangsmatrizen	57
A.2 Distanzmatrizen	65
A.3 Dendrogramme nach Verbesserung	67
A.4 Quellcode	72

Einleitung

Die Repertory-Grid-Methode ist ein Test, der in der Psychologie angewendet wird. Hierbei handelt es sich um ein Verfahren zur Erhebung und Analyse von Daten, besser bezeichnet als ein Befragungsverfahren von Personen, bei dem die subjektive Sichtweise des Einzelnen berücksichtigt wird. Ein großer Vorteil dieses Verfahrens liegt in der Flexibilität, die durch die Art der Datenerhebung entsteht. Dabei erhält man eine große Datenmenge, die in Matrizen zusammengefasst wird, so dass nach der Datenerhebung die Aussage jedes Teilnehmers durch eine Matrix repräsentiert wird. Ziel der Analyse ist es, diese Datenmatrizen so auszuwerten, dass möglichst viele neue Informationen gewonnen werden. Die Auswertung für Repertory-Grids ist nicht festgelegt, meist jedoch werden verschiedene Standardmethoden kombiniert. Die Auswahl und Reihenfolge der Methoden in dieser Arbeit stammen aus einem psychologischen Test, der von Prof. C. Clases an der Eidgenössisch Technischen Hochschule Zürich durchgeführt wurde. Die Auswertung wurde also speziell für diesen Test entwickelt. Die vorliegende Arbeit erklärt das Verfahren von der Datenerhebung über die verschiedenen Auswertungsschritte bis hin zu den Ergebnissen. Dann werden einige Schwächen in der Auswertung diskutiert und Hilfen angegeben, die diese Schwächen erkennen und beheben sollen.

Zum besseren Verständnis der Auswertungsschritte und der damit verbundenen Probleme, werden in Kapitel 1 die mathematischen Voraussetzungen angegeben. Dabei handelt es sich vor allem um einfache Matrizenrechnungen, die jedoch die Grundlage für die Eigenstrukturanalyse und die Procrustes-Analyse bilden. Diese beiden Methoden sind Teilmethoden in der Auswertung der Repertory-Grids, genau genommen stellen diese den Kern der Auswertung dar. Das gesamte Verfahren wird in Kapitel 2 beschrieben, wobei nicht nur die Auswertung detailliert erklärt wird, sondern auch die Datenerhebung. Obwohl sie für die Problembeschreibung nicht relevant ist, soll sie einen Einblick in die Methode vermitteln. Kapitel 4 erklärt ausführlich die Schwierigkeiten, die bei der Auswertung auftreten, und gibt Verbesserungen und Modifikationsmöglichkeiten hierfür an. Ein Datensatz aus der

Praxis, der mit dieser Methode bearbeitet wurde, soll die Unterschiede zwischen der ursprünglichen und der verbesserten Auswertung zeigen. Die Daten des ursprünglichen Versuchs werden mit allen Zwischenergebnissen zuvor in Kapitel 3 aufgeführt.

Kapitel 1

Grundlagen

Dieses Kapitel soll einen Überblick über die mathematischen Grundlagen verschaffen, die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit notwendig sind. Es handelt sich dabei um die herkömmliche Matrizenrechnung aus der Linearen Algebra, die einige Rechenregeln und Eigenschaften von Matrizen beinhaltet. Diese mathematischen Voraussetzungen werden in der Methodenauswertung verwendet.

1.1 Allgemeines über Matrizen

Bei der Matrizenrechnung geht es um lineare Beziehungen zwischen verschiedenen Größensystemen. Gegeben sind zum einen die Größen x_1, \dots, x_n und zum anderen die Größen y_1, \dots, y_m in der Form

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & y_m. \end{array} \quad (1.1)$$

Die Beziehung zwischen den Systemen ist durch die Koeffizienten a_{ij} definiert, für die in der gesamten Arbeit gilt: $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Die vereinfachte Darstellung dieses Schemas nur durch die Koeffizienten wird als Matrix bezeichnet.

Definition 1.1.1 *Eine Matrix A ist eine Familie von doppelt indizierten Elementen, die als rechteckige Tabelle dargestellt wird. Besteht eine Matrix aus m Zeilen und n Spalten, so spricht man von einer $(m \times n)$ -Matrix (oder (m, n) -Matrix).*

Dabei wird der Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte als Koeffizient a_{ij}

bezeichnet.

Weiter nennt man eine $(1 \times n)$ -Matrix Zeilenvektor und eine $(m \times 1)$ -Matrix Spaltenvektor. Eine (1×1) -Matrix ist ein Skalar a .

Die allgemeine Darstellungsform einer $(m \times n)$ -Matrix ist

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem aus (1.1) kann nun mit Hilfe der Matrixschreibweise vereinfacht dargestellt werden

$$Ax = y.$$

Dabei ist x ein Spaltenvektor der Größe n und y ein Spaltenvektor der Größe m .

Eine grundlegende Operation auf Matrizen ist das Transponieren.

Definition 1.1.2 Vertauscht man bei der Matrix A die Zeilen und Spalten, so erhält man die transponierte Matrix A^t .

Beispiel für das Transponieren einer Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

D.h. Die Zeilen werden zu Spalten und die Spalten werden zu Zeilen. Die Hauptdiagonale, die aus den Elementen a_{ii} für $i = 1, \dots, m$ besteht, bleibt dabei gleich.

Aus der Definition folgt gleich, dass $(A^t)^t = A$ gilt.

Definition 1.1.3

1. Eine $(m \times n)$ -Matrix A heißt quadratisch, falls $m = n$.
2. Eine quadratische Matrix B mit $B^t = B$ heißt symmetrisch.
3. Eine quadratische Matrix, deren Einträge ausserhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind, nennt man Diagonalmatrix D .

4. Eine $(n \times n)$ -Diagonalmatrix, die auf der Hauptdiagonalen nur Einsen hat, nennt man Einheitsmatrix $I = I_n$.

Beispiele für diese Matrizen:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrixverknüpfungen

Als nächstes werden verschiedene Rechenregeln vorgestellt, die für Verknüpfungen von Matrizen gelten.

Definition 1.1.4 Seien A und B zwei $(m \times n)$ -Matrizen und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Skalar, dann definiert

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

die Summe von zwei Matrizen und

$$\alpha \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

das Produkt mit einem Skalar.

Für diese Verknüpfungen sind folgende Rechenregeln wichtig:

Gegeben sind die $(m \times n)$ -Matrizen A , B und C , sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \\ (A + B)^t &= A^t + B^t \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B \\ (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \end{aligned}$$

Die Addition von Matrizen wird hier auf die Addition der Matrixeinträge reduziert. Deshalb gelten dieselben Gesetze wie bei der Addition von Skalaren. Die Subtraktion von Matrizen kann aus obigen Regeln leicht hergeleitet

werden, indem man mit dem Skalar -1 multipliziert. Neben Multiplikation mit Skalaren, Addition und Subtraktion, ist auch eine Multiplikation für Matrizen definiert.

Definition 1.1.5 Für eine $(m \times n)$ -Matrix A und eine $(n \times p)$ -Matrix B ist das Matrixprodukt AB definiert durch

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}.$$

Multipliziert man also eine $(m \times n)$ -Matrix mit einer $(n \times p)$ -Matrix, so erhält man eine $(m \times p)$ -Matrix.

Wichtig ist bei der Matrixmultiplikation, dass die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt. Sonst kann das Matrixprodukt nicht gebildet werden. Daraus folgt, dass BA nur für quadratische Matrizen berechnet werden kann und selbst dann gilt im Allgemeinen AB ist nicht gleich BA .

Für die Matrixmultiplikation kann man ebenfalls noch einige Rechenregeln angeben.

Gegeben seien zwei $(m \times n)$ -Matrizen A, A' , zwei $(n \times p)$ -Matrizen B, B' und eine $(p \times q)$ -Matrix C , sowie ein Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$A(B + B') = AB + AB' \quad (1.2)$$

$$(A + A')B = AB + A'B \quad (1.3)$$

$$A(\alpha B) = \alpha AB \quad (1.4)$$

$$(AB)C = A(BC) \quad (1.5)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (1.6)$$

Hier gelten das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz, jedoch nicht das Kommutativgesetz.

Die Gleichungen (1.2), (1.3) und (1.4) sind leicht nachzuvollziehen.

Zu (1.5): Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ und $C = (c_{kl})$. Dann gilt

$$AB = (\alpha_{ik}) \text{ mit } \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad (AB)C = (\gamma_{il}) \text{ mit } \gamma_{il} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl}$$

$$BC = (\beta_{jl}) \text{ mit } \beta_{jl} = \sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl}, \quad A(BC) = (\gamma_{il}') \text{ mit } \gamma_{il}' = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl} \right)$$

γ_{il} und γ_{il}' haben die gleichen Summanden, deshalb gilt: $\gamma_{il} = \gamma_{il}'$. Daraus ergibt sich $(AB)C = A(BC)$.

Zu (1.6): Sei $A = (a_{ij})$, $A^t = (a_{ji}')$ mit $a_{ji}' = a_{ij}$ und $B = (b_{jk})$, $B^t = (b_{kj}')$ mit $b_{kj}' = b_{jk}$. Dann gilt

$$AB = (c_{ik}) \text{ mit } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \text{ also } (AB)^t = (c_{ki}') \text{ mit } c_{ki}' = c_{ik}$$

$$B^tA^t = (d_{ki}) \text{ mit } d_{ki} = \sum_{j=1}^n b_{kj}'a_{ji}' = \sum_{j=1}^n b_{jk}a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = c_{ik}$$

Wegen $d_{ik} = c_{ik} = c_{ki}'$ folgt $(AB)^t = B^tA^t$.

1.2 Spezielle Matrizen und wichtige Eigenschaften

1.2.1 Die inverse Matrix

Nachdem die Matrixmultiplikation eingeführt wurde, stellt sich die Frage nach dem inversen Element der Multiplikation.

Definition 1.2.1 Eine $(n \times n)$ -Matrix A heißt invertierbar, wenn es eine $(n \times n)$ -Matrix A^{-1} gibt mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Die Matrix A^{-1} ist die inverse Matrix zu A .

Folgende Eigenschaften von inversen Matrizen sind wichtig:

1. Die inverse Matrix A^{-1} ist eindeutig bestimmt.
2. Sei A eine invertierbare $(n \times n)$ -Matrix, dann ist $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Sei A eine invertierbare $(n \times n)$ -Matrix, dann gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. Seien A und B invertierbare $(n \times n)$ -Matrizen, so gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

zu 1.: Angenommen, die inverse Matrix A^{-1} sei nicht eindeutig bestimmt, dann gäbe es eine Matrix B mit $AB = BA = I$. Daraus folgt, dass $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$.

zu 2.: $A = AI = AI^{-1} = A(A^{-1}A)^{-1} = AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = I(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

zu 3.: $(A^t)^{-1} = (A^t)^{-1}I = (A^t)^{-1}I^t = (A^t)^{-1}(A^{-1}A)^t = (A^t)^{-1}A^t(A^{-1})^t = I(A^{-1})^t = (A^{-1})^t$.

zu 4.: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$. Da $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ ist $B^{-1}A^{-1}$ das Inverse Element zu AB , also $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Diese Beweise findet man auch in [6].

1.2.2 Orthogonale Matrizen

Orthogonale Matrizen besitzen wichtige geometrische Eigenschaften, die in dieser Arbeit bei einem Auswertungsschritt ausgenutzt werden.

Definition 1.2.2 Eine $(n \times n)$ -Matrix A heißt orthogonal, falls

$$AA^t = A^tA = I.$$

Für orthogonale Matrizen gilt also $A^{-1} = A^t$, da A^t das Inverse zu A ist.

Außerdem sind die Spalten einer orthogonalen Matrix paarweise senkrecht zueinander. Ebenso verhält es sich für die Zeilen. Dies wird ausführlich in [6] auf Seite 304 erklärt.

Orthogonale Matrizen sind Abbildungen, die Abstände und Winkel erhalten, weshalb sie besonders interessant sind.

Eine spezielle orthogonale Matrix ist die Drehmatrix im \mathbb{R}^2

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Sei A ein Vektor im \mathbb{R}^2 , der den Punkt (a_{11}, a_{21}) beschreibt. Multipliziert man A mit T , so wird A um den Winkel φ gedreht. Die Drehung wird dabei im Gegenuhrzeigersinn ausgeführt.

1.2.3 Spur und Determinante einer Matrix

Mit Hilfe von Spur und Determinante lässt sich eine Matrix durch einfache Werte beschreiben.

Definition 1.2.3 Die Spur (engl.: trace) einer $(n \times n)$ -Matrix A ist durch

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

definiert.

Die Spur einer Matrix ist also die Summe der Hauptdiagonalelemente. Sind A und B ($n \times n$)-Matrizen, so ist $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$. Ist A eine ($m \times n$)-Matrix und B eine ($n \times p$)-Matrix, so ist $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Dies ist sofort ersichtlich, da hier nur die Kommutativität der Addition ausgenutzt wird.

Definition 1.2.4 Sei A eine ($n \times n$)-Matrix und A_{ij} die ($(n - 1) \times (n - 1)$)-Matrix, die man durch streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte erhält. Die Determinante von A ($\det(A)$ oder $|A|$) ist definiert durch

$$\det(A) := \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) & \text{für } n \geq 2, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Mit Hilfe von Determinanten kann man einer quadratischen Matrix eine reelle Zahl zuordnen, welche die Matrix charakterisiert. So können viele Eigenschaften einer Matrix schon mit Hilfe der Determinante erkannt werden. Ein Beispiel dafür ist die Invertierbarkeit, wie man in 3. sehen kann.

Auch bei der Eigenwertbestimmung spielen Determinanten eine große Rolle, weshalb hier noch einige wichtige Eigenschaften von Determinanten betrachtet werden.

1. Ist D eine ($n \times n$)-Diagonalmatrix, so ist die Determinante $\det(D) = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \dots \cdot d_{nn}$ das Produkt der Diagonalelemente.
2. Sind A und B ($n \times n$)-Matrizen, so gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

3. Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.

zu 1.: Induktiv lässt sich dies leicht zeigen: Es gilt auf jeden Fall $\det(D) = d_{11}$ für $n = 1$. Betrachtet man die Definition der Determinante nun für beliebige n , so erhält man $\det(D) = d_{11} \cdot \det(D_{11})$, da alle $d_{1j} = 0$ für $j = 1 \dots n$. D_{11} ist jetzt eine ($(n - 1) \times (n - 1)$)-Matrix, so dass hier die Voraussetzung $\det(D_{11}) = d_{22} \cdot \dots \cdot d_{nn}$ gilt. Daraus folgt die Behauptung.

Der Beweis zu 2. wird bei Lang [12] S.517f angegeben, den zu 3. kann man in [16] Seite 33 f nachlesen.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.3.1 Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix. Gilt für ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ die Gleichung $Av = \lambda v$, so heißt v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Null als Eigenwert erlaubt ist, ein Eigenvektor aber nicht der Nullvektor sein kann.

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren:

1. Ist λ ein Eigenwert von A und $k \in \mathbb{R}$ ein Skalar, so ist $k\lambda$ ein Eigenwert von kA .
2. Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind alle reell.
3. Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal.

4.

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

5.

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Die Beweise zu den Eigenschaften 2. - 4. findet man in [16] §13 und §15. Für 1. gilt: Multiplizieren von $Av = \lambda v$ mit k und ersetzen von kA durch A' und $k\lambda$ durch λ' ergibt $A'v = \lambda'v$.

Alle Gleichungen zu den verschiedenen Eigenwerten λ_i und den dazugehörigen Eigenvektoren v_i einer Matrix A ergeben ein System von Gleichungen

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

das folgendermaßen zusammengefasst werden kann

$$AV = V\Lambda. \tag{1.7}$$

Λ ist eine $(n \times n)$ -Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen und V die Matrix aus den Eigenvektoren. Da bei einer symmetrischen Matrix die Eigenvektoren alle orthogonal zueinander sind, ist die Matrix

V eine orthogonale Matrix. Deshalb kann Gleichung (1.7) von rechts mit $V^{-1} = V^t$ multipliziert werden, wodurch folgende Gleichung

$$A = V\Lambda V^t$$

entsteht. Es ist also möglich mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren eine symmetrische Matrix in drei einfache Matrizen zu zerlegen. Diese Zerlegung nennt man *Spektralzerlegung*.

1.4 Die Singulärwertzerlegung

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass eine symmetrische Matrix in das Produkt von drei Matrizen zerlegt werden kann. Eine ähnlich nützliche Zerlegung ist die *Singulärwertzerlegung* (engl.: **S**ingular **V**alues **D**ecomposition). Diese ist in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der Spektralzerlegung, da jetzt nicht nur symmetrische Matrizen zerlegt werden, sondern beliebige Matrizen.

Hat man also eine $(m \times n)$ -Matrix A , so ist die Singulärwertzerlegung

$$A = UDV^t.$$

Dabei ist die Matrix U eine orthogonale $(m \times m)$ -Matrix, V eine orthogonale $(n \times n)$ -Matrix und D eine $(m \times n)$ -Diagonalmatrix.

Der Vergleich mit der Spektralzerlegung einer symmetrischen Matrix ergibt sich aus

$$\begin{aligned} AA^t &= (UDV^t)(VDU^t) = U(DD)U^t \\ A^t A &= (VDU^t)(UDV^t) = V(DD)V^t. \end{aligned}$$

Die Spalten der Matrix U sind die Eigenvektoren von AA^t , die Spalten der Matrix V sind die Eigenvektoren von $A^t A$. Und die Diagonalelemente in D sind die positiven Quadratwurzeln aus den positiven Eigenwerten der Matrix AA^t bzw. $A^t A$.

Mit diesen mathematischen Grundkenntnissen sollte es als nächstes möglich sein, die Berechnungen dieser Arbeit zu verstehen. Deshalb wird im nächsten Kapitel die Methode mit den verschiedenen Auswertungsschritten erklärt.

Kapitel 2

Die Repertory-Grid-Methode

2.1 Theorie der persönlichen Konstrukte

Diese Methode gründet auf der Theorie der „persönlichen Konstrukte“, die Mitte der 1950er-Jahre von G. A. Kelly veröffentlicht wurde. Die deutsche Übersetzung findet man beim Junfermann-Verlag [11]. Dabei geht Kelly davon aus, dass es die 'objektive' Wirklichkeit nicht gibt. Das heißt, alles was wir wissen ist bereits von anderen Menschen oder auch von uns selbst bewertet oder interpretiert worden. Deshalb konstruiert der Mensch sich seine Wirklichkeit aufgrund eigener Erfahrungen. Also ist der Mensch aktiver Gestalter von Erklärungsansätzen und Hypothesen, um so Ereignissen in seinem Leben einen Sinn zu geben und sie zu verarbeiten. Diese Wirklichkeit ist subjektiv und wird in einem ständigen Konstruktionsprozess aufgrund neuer und alter Kenntnisse verändert. Kelly hat diese Theorie in seinem „Role Construct Repertory Test“ berücksichtigt. Er ging bei seinem Test auch auf die persönlichen Erfahrungen der Versuchsteilnehmer ein. Dabei stellt man fest, dass es sich weniger um einen Test handelt, sondern eher um ein strukturiertes Interview. Diese Methode wurde mehrfach weiterentwickelt, so dass daraus die Repertory-Grid-Technik entstanden ist: ein Befragungsverfahren, das auf die subjektive Sichtweise von Personen eingeht. Da die Konstrukte nicht vom Untersuchenden vorgegeben, sondern vom Versuchsteilnehmer selbst bestimmt werden, erhält diese Methode eine große Flexibilität. Dennoch ermöglicht dieses Verfahren eine strukturierte und somit leicht interpretierbare Auswertung.

Der zentrale Begriff der Repertory-Grid-Technik ist der des „Konstrukts“, der jetzt näher erläutert wird.

Konstrukt: Unter einem Konstrukt versteht man eine Unterscheidung, die eine Person vornehmen kann. Diese Unterscheidung fasst Dinge und Ereignis-

se nach Ähnlichkeit und Unähnlichkeit zusammen. So versucht eine Person, sich in der Welt zu orientieren. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass eine Person Dingen und Ereignissen eine Bedeutung verleiht, indem sie sie zu anderen Dingen und Ereignissen in Beziehung setzt.

Einige Beispiele für Konstrukte, bei denen Mitmenschen bewertet werden sollen, können wie folgt aussehen.

angenehm vs. unangenehm
rational vs. emotional
schüchtern vs. selbstbewusst.

Dabei muss jedoch der Versuchsleiter darauf achten, dass die Konstrukte nicht trivial sind (z.B. Mann vs. Frau), sondern etwas aussagen.

Die Konstrukte können von dem Teilnehmer selbst bestimmt werden. Das Thema des Tests wird allerdings vom Leiter vorgegeben. Bei der Auswahl werden aber keine Einschränkungen gemacht. Ursprünglich entwickelte Kelly den Test vor allem für die Individualberatung, doch er ist auch in anderen Bereichen anwendbar, wie zum Beispiel in der medizinischen Diagnostik, bei Personalentwicklungsmaßnahmen sowie in der Produktentwicklung und der Stadtentwicklungsplanung. Meist ist die Problemstellung schon von Anfang an gegeben. Der Versuchsleiter hat dann noch die Aufgabe, den Problembereich so zu unterteilen und zu definieren, dass einerseits die Teilnehmer ihre Konstrukte dazu leicht formulieren können und andererseits der Problembereich gut abgedeckt ist. Dabei entsteht der Begriff der „Elemente“.

Element: Unter Elementen versteht man die einzelnen Personen, Ereignisse, Gegenstände etc., die die Problemstellung beschreiben. Was als Element verwendet wird, gibt der Versuchsleiter vor. Wichtig ist zum einen, dass die Elemente den Problembereich gut repräsentieren und zum anderen, dass sie untereinander vergleichbar sind.

Weitere Literatur zu dieser Theorie findet man in [7], [8] und [15].

Wie die Elemente und Konstrukte gewonnen werden, wird im folgenden Abschnitt detailliert erklärt.

2.2 Datenerhebung

Die Datenerhebung erfolgt in drei Schritten.

- (1) Auswahl der Elemente
- (2) Gewinnung der Konstrukte

(3) Bewertung der Elemente anhand der Konstrukte

Die Datenerhebung wird anhand eines Beispiels erläutert, das dem „Role Construct Repertory Test“ ähnlich ist, der in [7] näher beschrieben wird. Dabei geht es um die sozialen Beziehungen des Versuchsteilnehmers zu seinen Mitmenschen.

Im **1. Schritt** wählt der Versuchsleiter die Elemente aus, welche den Problembereich möglichst exakt beschreiben sollen. Beim „Role Construct Repertory Test“ zum Beispiel gibt der Versuchsleiter eine Liste mit Rollenbeschreibungen vor, die der Teilnehmer dann mit Personen aus seinem Umfeld füllen soll. Die Rollenbeschreibungen können beispielsweise sein:

Ein Lehrer, den Sie mochten.
Ihr Vater.
Ihre Mutter.
Ein Nachbar, mit dem Sie gut zurechtkommen.
Ein Nachbar, der für Sie schwer zu verstehen ist.
Die intelligenteste Person, die Sie persönlich kennen.
...

Die Personen sollen mit ihren Namen notiert werden. Diese Namen sind dann die Elemente des Repertory-Grid-Testes. Zusätzlich können auch noch weitere Elemente aufgenommen werden, die der Leiter direkt vorgibt. Das kann zum Beispiel der Versuchsteilnehmer selbst als „Ich“ sein, sowie das „perfekte Ich“. Das „perfekte Ich“ soll hier dann den Versuchsteilnehmer darstellen, so wie er gerne sein möchte, das heißt mit allen positiven Eigenschaften. Wichtig ist, dass ein großer Teil des Problembereichs abgedeckt wird. Die Anzahl der Elemente wird grundsätzlich nicht vorgegeben, sollte jedoch zwischen 10 und 25 liegen.

Im **2. Schritt** werden zu den gegebenen Elementen die persönlichen Konstrukte gesucht. Hier wird das sogenannte triadische Erhebungsverfahren verwendet. Dabei werden zufällig drei Elemente ausgewählt. Der Versuchsteilnehmer soll nun zwei Elemente davon bestimmen, die sich ähnlich sind und somit von dem dritten unterscheiden. Dann muss der Teilnehmer beschreiben, worin diese Ähnlichkeit besteht. Außerdem soll er auch den Unterschied, der das dritte Element ausschließt, erläutern. Die Beschreibung der Ähnlichkeit, sowie der Unterschied zum dritten Element, werden als gegensätzliche Pole formuliert. So wird dieses Konstrukt durch zwei Pole bestimmt, zum einen durch den *Konstrukt*pol (Initialpol), der die beiden ähnlichen Elemente beschreibt, zum anderen durch den *Kontrast*pol (Gegenpol), der für das dritte

Element als Kontrast formuliert wird. Das bedeutet, die Konstrukte werden nicht vorgegeben, sondern vom Teilnehmer selbst formuliert. Beim vorigen Beispiel könnte der Versuchsteilnehmer zwei Personen als sympathisch und eine andere als unsympathisch beschreiben. Dies führt dann zu den Polen „sympathisch“ vs. „unsympathisch“, wodurch ein Konstrukt definiert ist. Um ein weiteres Konstrukt zu finden, werden erneut drei neue Elemente zufällig ausgewählt und dann vom Teilnehmer mit Konstrukten beschrieben. Dies wird solange wiederholt, bis genügend Konstrukte gefunden sind, um die Elemente zu beschreiben. Den Zeitpunkt dafür bestimmt der Versuchsleiter. Die Anzahl der Konstrukte sollte jedoch größer sein, als Elemente definiert wurden. Das bedeutet, nach diesem 2. Schritt hat man die Konstrukte aus verschiedenen, zufällig ausgewählten Element-Triaden bestimmt. Abbildung 2.1 zeigt, wie diese Konstrukterhebung rechnerunterstützt durchgeführt werden kann.

Grid Flow

Welche beiden der folgenden drei Elemente sind sich für Sie spontan ähnlich?
Bitte markieren Sie das abweichende Element.

Ihr Vater

Ein Nachbar, mit dem Sie gut zurechtkommen

Ein Lehrer, den Sie mochten

In welcher Hinsicht sind sich die beiden Elemente ähnlich?

In welcher Hinsicht unterscheidet sich *demgegenüber* das ausgewählte Element von den beiden anderen Elementen?

Bitte das Interview beenden!

Abbildung 2.1: Bildschirmaufnahme des rechnerunterstützten Verfahrens zur Erhebung der Konstrukte im Rahmen der Repertory-Grid-Studie.

Als Ausgangsdaten für den **3. Schritt** hat man die vorher bestimmten Elemente und Konstrukte. Es interessiert nicht mehr, welche Konstrukte durch welche Elemente bestimmt wurden, denn jedes Element wird nun bezüglich jedem Konstrukt bewertet. Dabei kann der Teilnehmer für jede Element-Konstrukt Kombination angeben, ob der Konstruktpol oder der Kontrast-

pol zutrifft. Zudem gibt es noch die Auswahlmöglichkeiten, Konstrukt- und Kontrastpol treffen beide zu beziehungsweise treffen beide nicht zu. Das kann dann der Fall sein, wenn das Konstrukt nur für diese eine Element-Triade, die zur Erhebung geführt hat, gegensätzlich ist, für andere Elemente jedoch nicht. Ein weiteres Problem bei der Bewertung der Element-Konstrukt Kombinationen tritt dann auf, wenn man beispielsweise das Konstrukt „rothaarig-schwarzhaarig“ auf eine blonde Person anwenden soll. Dann gibt es aber die Möglichkeit „nicht anwendbar“ auszuwählen. Wie diese Bewertung dann am Rechner durchgeführt wird, beschreibt Abbildung 2.2.

Grid Flow

<p>Bitte weisen Sie den übrigen Elementen denjenigen Begriff zu, der Sie <u>eher</u> kennzeichnet.</p>	<p>Wenn <u>eindeutig beide Konstruktpole</u> das Element kennzeichnen, vergeben Sie bitte die Kategorie "beides trifft zu".</p> <p>Wenn das Element eindeutig das Gegenteil beider Konstruktpole bedeutet, vergeben Sie bitte die Kategorie "weder noch".</p> <p>Wenn sich das Konstrukt <u>nicht sinnvoll auf ein Element anwenden lässt</u>, vergeben Sie bitte die Kategorie "nicht anwendbar".</p>
---	---

<input type="text" value="- keine Auswahl -"/>	Ich
<input type="text" value="- keine Auswahl -"/>	perfektes Ich
<input type="text" value="- keine Auswahl -"/>	Mutter
<input type="text" value="- keine Auswahl -"/> Eintrag des Kontrastpols "nicht anwendbar"	Vater
<input type="text" value="- keine Auswahl -"/> Eintrag des Konstruktspols "beides trifft zu"	Bruder
<input type="text" value="- keine Auswahl -"/> "weder - noch"	Freund
<input type="text" value="- keine Auswahl -"/>	Lehrer, den Sie mochten

Abbildung 2.2: Bildschirmaufnahme des rechnerunterstützten Verfahrens zur Bewertung der Elemente im Rahmen der Repertory-Grid-Studie.

Die Datenerhebung ist somit abgeschlossen. Um diese Datenmenge sinnvoll weiterverarbeiten zu können, ist die Form der Darstellung sehr wichtig. Die hier gewählte Darstellungsform, ist für den Namen des Verfahrens,

„Repertory-Grid-Technik“, verantwortlich. Die Daten werden in einer Matrix gespeichert, so dass die Spalten den Elementen und die Zeilen den Konstrukten entsprechen. Ein sehr großes Repertoire (Repertory) an Daten wird durch eine Matrix (Grid = Netz, Gitter) dargestellt. Eine Beispielmatrix ist in Tabelle 2.1 zu sehen.

Ich	perfektes Ich	Mutter	Vater	netter Lehrer	sympatischer Nachbar	seltsamer Nachbar	intelligente Person	Konstruktpol	Kontrastpol
-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	religiös	(glaubt nicht an Gott)
1	1	1	1	1	-1	-1	1	glaubt nicht an Gott	(religiös)
-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	sportlich	(unsportlich)
1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	unsportlich	(sportlich)
1	-1	-1	1	-1	0	1	1	keine Ausbildung	(höhere Ausbildung)
-1	1	1	-1	-1	0	-1	-1	höhere Ausbildung	(keine Ausbildung)
-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	verständnisvoll	(versteht mich nicht)
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	versteht mich nicht	(verständnisvoll)
-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	mag Musik	(versteht Musik nicht)
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	versteht Musik nicht	(mag Musik)
1	0	-1	1	-1	-1	1	1	immer freundlich	(oft schlecht gelaunt)
1	0	1	-1	1	1	-1	-1	oft schlecht gelaunt	(immer freundlich)

Tabelle 2.1: Element-Konstrukt-Matrix

Jedes Feld einer solchen Matrix entspricht einem Element-Konstrukt-Zusammenhang. Der Eintrag eines Feldes entsteht durch die Bewertung des jeweiligen Elements durch das entsprechende Konstrukt. Hierbei wird für das Zutreffen eines Konstruktspols auf ein Element eine „1“ eingetragen, für das Nichtzutreffen eine „-1“. Ist das Konstrukt auf ein Element nicht anwendbar, so wird für beide Pole eine „0“ eingetragen, das bedeutet der Kontrastpol ist in diesem Fall nicht das Gegenteil des Konstruktspols. Deswegen kann nicht nur ein Pol in die Matrix eingetragen werden, sondern beide Pole müssen aufgeführt sein. Auch für das Zutreffen und Nichtzutreffen können Initialpol und Kontrastpol gleich bewertet werden, was bedeutet, dass beide Pole eine 1 oder eine -1 erhalten. Für jedes Konstrukt werden also zwei Zeilen gebildet. Da meistens ein Zutreffen des Konstruktspols einem Nichtzutreffen

des Kontrastpols entspricht, unterscheiden sich die beiden Zeilen nur um den Faktor -1 . So erhält man nun eine Matrix mit den Einträgen -1 , 0 und 1 , in der die Spalten die einzelnen Elemente beschreiben und zwei Zeilen immer einem Konstrukt entsprechen.

Die Generierung der Matrizen stammt vorwiegend aus [4], doch einige grundlegende Techniken zur Gewinnung der Konstrukte sind auch in [7] und [15] beschrieben. Die weitere Analyse wird auf Basis dieser gewonnenen Matrizen aus den Einträgen $\{-1, 0, 1\}$ durchgeführt.

2.3 Eigenstrukturanalyse

Nachdem in der Datenerhebung die Aussagen der einzelnen Versuchsteilnehmer in den (*Element* \times *Konstrukt*)-Matrizen aufgenommen sind, versucht man nun diese Daten so zusammenzufassen und darzustellen, dass die Aussagen der Teilnehmer möglichst gut interpretiert werden können. In diesem Schritt soll für jeden Teilnehmer ein zweidimensionales Koordinatensystem erstellt werden, in dem die Elemente und Konstrukte eingetragen werden. Dabei wird jedes Element und jedes Konstrukt als Punkt dargestellt. Die ursprüngliche Matrix muss so aufbereitet werden, dass man die Elemente und Konstrukte auch in ein Koordinatensystem eintragen kann. Dabei hilft die Eigenstrukturanalyse. Diese hat den Vorteil, dass nach ihrer Anwendung Elemente und Konstrukte in dasselbe Koordinatensystem eingetragen werden können. Deshalb kann man so ihre Ähnlichkeit und Gegensätzlichkeit durch den Abstand und den Winkel zwischen zwei Punkten bestimmen. Je geringer der Abstand und je kleiner der Winkel zwischen zwei Punkten ist, desto ähnlicher sind sich die beiden.

A soll eine solche (*Element* \times *Konstrukt*)-Matrix sein, die mittels Singulärwertzerlegung (siehe Kapitel 1.4) in drei Matrizen zerlegt wird

$$A = UDV^t, \quad (2.1)$$

wobei U und V orthogonale Matrizen sind und D eine Diagonalmatrix ist. Die Koordinaten der Elemente werden durch die Matrix E repräsentiert, welche durch

$$E = DV^t \quad (2.2)$$

definiert ist. Tabelle 2.2 zeigt die Element-Koordinaten zu der Ausgangsmatrix in Tabelle 2.1.

Die Berechnung der Konstrukt-Koordinaten erfolgt ähnlich. Dabei entsteht die Matrix

$$K = UD. \quad (2.3)$$

Element							
1	2	3	4	5	6	7	8
2,882	-3,162	0,431	3,346	-2,684	-2,968	1,629	3,346
-1,094	-0,437	-3,150	-0,355	0,092	-0,461	2,691	-0,355
-0,850	-0,983	0,364	-0,459	-2,076	1,154	0,069	-0,459
-0,157	0,374	1,297	-0,379	0,036	-0,522	1,325	-0,379
1,188	-0,300	-0,018	-0,195	0,326	1,026	0,527	-0,195
-0,580	-0,341	0,263	0,445	0,521	0,478	0,198	0,445

Tabelle 2.2: Koordinaten der Elemente (Matrix E).

Die Konstrukt-Koordinaten zu der Matrix aus Tabelle 2.1 sind in Tabelle 2.3 dargestellt.

Konstrukt						
1	-2,228	1,568	-0,154	0,407	0,460	0,235
2	0,713	-1,726	-2,024	-0,005	-0,429	0,063
3	-1,458	1,779	-0,975	0,919	-0,722	-0,557
4	2,228	-1,568	0,154	-0,407	-0,460	-0,235
5	2,538	1,110	-0,057	-0,380	0,168	-0,343
6	-1,842	-1,153	1,535	0,344	-0,544	-0,520
7	-2,650	0,334	-0,203	-0,892	-0,148	-0,093
8	2,650	-0,334	0,203	0,892	0,148	0,093
9	-2,538	-1,110	0,057	0,380	-0,168	0,343
10	2,650	-0,334	0,203	0,892	0,148	0,093
11	2,538	1,110	-0,057	-0,380	0,168	-0,343
12	-1,791	-1,612	-0,549	0,226	1,201	-0,619

Tabelle 2.3: Koordinaten der Konstrukte (Matrix K).

Mit Hilfe der Elementmatrix E und der Konstruktmatrix K ergeben sich Aussagen über die subjektiven Sichtweisen der einzelnen Versuchsteilnehmer. Wie bereits erwähnt, wählt man hier eine graphische Darstellung, so dass die Koordinaten der Elemente und Konstrukte in einem zweidimensionalen Diagramm eingezeichnet werden. Dabei erhalten die Elemente ihre Koordinaten aus den ersten beiden Zeilen der Matrix E , und die Konstrukte erhalten ihre Koordinaten aus den ersten beiden Spalten der Matrix K . In Abbildung (Abb. 2.3) sieht man die Elemente und Konstrukte mit ihrer Abhängigkeit. Mit Hilfe dieses Diagramms können die Aussagen der einzelnen Teilnehmer besser interpretiert werden. Eine Interpretation des Beispiels aus Tabelle 2.1 könnte wie folgt aussehen: der Teilnehmer schätzt sich selbst ähnlich wie seinen Vater ein. Im Gegensatz dazu gruppiert er das perfekte Ich zu dem netten Lehrer und dem sympathischen Nachbarn. Auch wird der nette Lehrer zum Beispiel durch das Konstrukt „verständnisvoll“ charakterisiert, der

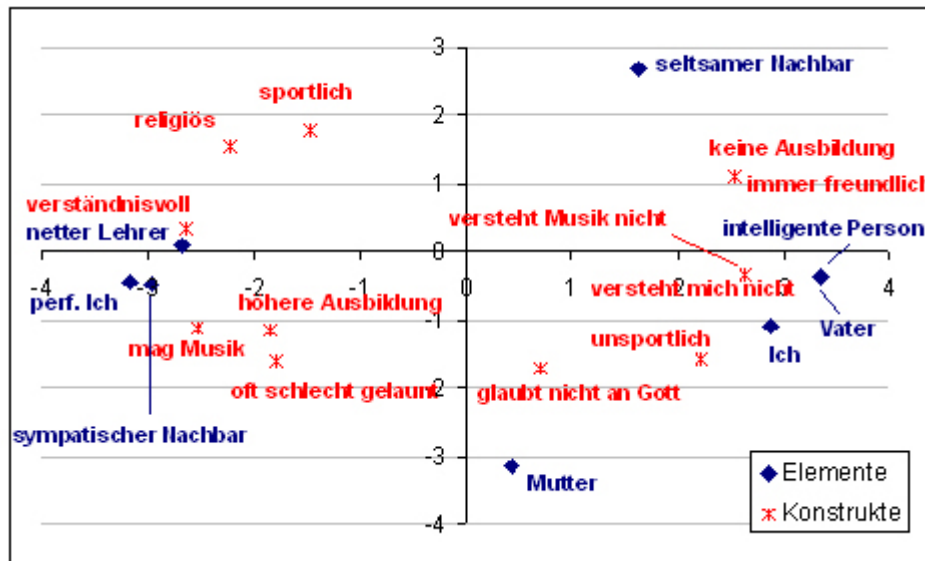


Abbildung 2.3: Elemente und Konstrukte im Koordinatensystem.

Vater hingegen als verständnislos beschrieben. Natürlich ist das nur ein kleiner Anfang für eine Interpretation. Doch das ist auch nicht das Ziel dieser Arbeit, denn es geht in erster Linie um die Methode, die dahintersteckt.

In diesem Abschnitt, der auf [14] basiert, wurde die Abhängigkeit der Elemente und Konstrukte untereinander dargestellt, wobei jeder Versuchsteilnehmer separat betrachtet wird. Im nächsten Teil wird eine Möglichkeit vorgestellt, alle Teilnehmer miteinander zu vergleichen.

2.4 Procrustes-Analyse

Bis jetzt hat man nur die Sichtweisen der einzelnen Versuchsteilnehmer betrachtet. Für den Vergleich aller Teilnehmer wird die Procrustes-Analyse verwendet. Diese wird ausführlich in [10] und [3] Seite 429-436 beschrieben.

Der Name „Procrustes“ kommt aus der griechischen Mythologie. Procrustes (oder auch Damastes) war ein Räuber, der Reisende auf der Straße nach Athen ausgenommen hat. Er hat seinen Opfern eine Nacht in einem magischen Bett versprochen, das für jeden Gast die richtige Größe hat. Dieses Bett ließ er sich teuer bezahlen. Doch so ein magisches Bett gibt es natürlich nicht. Um sein Wort trotzdem zu halten, hat er seine Opfer entweder gestreckt, oder er hat sie gekürzt, indem er ihnen die Beine abgeschlagen hat. Theseus, der auf dem Weg nach Athen ebenfalls bei Procrustes vorbeikam, hat ihn sofort entlarvt und es ihm mit gleicher Münze heimgezahlt. Doch er hat Procrustes nicht die Beine abgeschlagen, sondern er hat ihn geköpft.

Bei der Procrustes-Analyse geht es darum, Konfigurationen durch Strecken, Stauchen, Drehen und Verschieben passend zu machen. Unter einer Konfiguration versteht man ein Gebilde aus Punkten im Raum mit festen Abständen und Winkeln. Diese Gebilde darf so verändert werden, dass die relativen Abstände und Winkel der Punkte untereinander erhalten bleiben, also durch Strecken, Stauchen, Drehen und Verschieben.

Ziel der Procrustes-Analyse ist es, zwei Konfigurationen, die durch die Elemente zweier Teilnehmer beschrieben werden, zur Deckung zu bringen. Bei einfachen Beispielen ist es sogar möglich, eine vollständige Deckung zu erreichen; in der Regel wird man jedoch fordern, dass sich die beiden Konfigurationen nach der Procrustes-Analyse sehr ähnlich sind.

Als Datengrundlage für die Procrustes-Analyse nimmt man die transponierten Element-Matrizen aus der Eigenstrukturanalyse. Diese bilden Konfigurationen im zweidimensionalen Raum. Man hat vor der Procrustes-Analyse somit für jeden Teilnehmer eine $(m \times 2)$ -Matrix. Im Folgenden wird die Procrustes-Analyse jedoch im Allgemeinen erklärt, das heißt für beliebige $(m \times n)$ -Matrizen im \mathbb{R}^n .

2.4.1 Erläuterung der Analyse

Ausgangspunkt sind zwei $(m \times n)$ -Matrizen A und B . Bei diesen Matrizen stellen die Zeilen Punkte im \mathbb{R}^n dar. Diese Punkte beschreiben die jeweilige Konfiguration.

Um dies anschaulich darzustellen, wird ein einfaches Beispiel angegeben.

BEISPIEL 3.4.1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

In Abbildung 2.4 werden die beiden Konfigurationen dargestellt. Um die Längenverhältnisse und Winkel besser sichtbar zu machen, werden die Punkte durch Hilfslinien verbunden. Die Procrustes-Analyse versucht beide Konfigurationen möglichst ähnlich zu machen, das heißt, die jeweils gleichen Punkte sollen zur Deckung gebracht werden. Das geschieht in mehreren Schritten.

1. Schritt: Beide Konfigurationen werden mit ihrem Zentrum in den Nullpunkt verschoben,

$$A_{cent} = A - \bar{a} \tag{2.4}$$

$$B_{cent} = B - \bar{b} \tag{2.5}$$

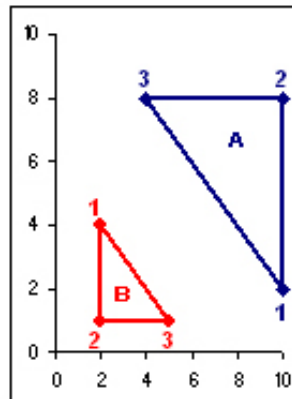


Abbildung 2.4: Ausgangskonfiguration von A und B

wobei \bar{a} das Zentrum von A und \bar{b} das Zentrum von B ist. Die Koordinaten des Zentrums einer Konfiguration werden durch Mittelwertbildung der Punktkoordinaten berechnet. Durch diese Verschiebung fallen beide Zentren im Nullpunkt zusammen.

BEISPIEL 3.4.1

$$\mathbf{A}_{\text{cent}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{\text{cent}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

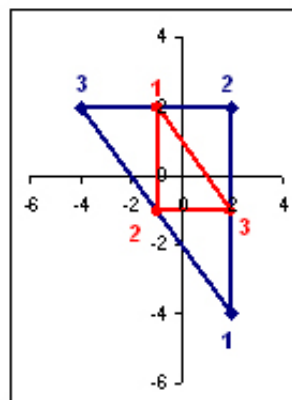


Abbildung 2.5: Verschieben von A und B in den Nullpunkt

Dadurch wurde also erreicht, dass beide Konfigurationen dieselbe Lage im \mathbb{R}^n haben.

Abbildung 2.5 zeigt deutlich, dass die Punkte, die miteinander verglichen werden, in entgegengesetzten Richtungen liegen. Also liegt Punkt 1 von A gegenüber von Punkt 1 von B . Damit die gleichen Punkte sich annähern, soll A im nächsten Schritt um 180° gedreht werden.

2. Schritt: Drehen der Matrix A .

Soll eine Konfiguration um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden, so muss man die entsprechende Matrix von rechts mit der *Rotationsmatrix*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

multiplizieren (siehe Kapitel 1.2.2). Eine Begründung hierfür findet man auch in [16]. Wie bereits festgestellt wurde, ist in BEISPIEL 3.4.1 der Drehwinkel 180° , also π . Damit ist $\sin \pi = 0$ und $\cos \pi = -1$.

Im Allgemeinen ist die Matrix T nicht sofort ersichtlich, deshalb gibt es eine Methode, mit der man sie berechnen kann. Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, die in Kapitel 1.4 näher erläutert wird, ist es möglich, die Drehmatrix T zu bestimmen, so dass A_{cent} mit Hilfe von T an B_{cent} angenähert wird. Folgende Zerlegung wird gebildet:

$$B_{cent}^t A_{cent} = UDV^t \quad (2.6)$$

T ergibt sich durch

$$T = VU^t. \quad (2.7)$$

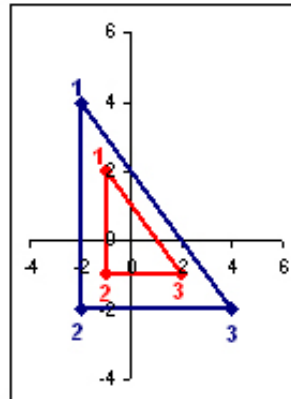
Damit berechnet man die rotierte Matrix

$$A_{rot} = A_{cent}T. \quad (2.8)$$

Auch dieser Schritt soll an dem BEISPIEL verdeutlicht werden:

BEISPIEL 3.4.1

$$\text{Mit } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ gilt } \mathbf{A}_{rot} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.6: Drehen von A um 180° .

Die Ähnlichkeit der beiden Konfigurationen ist deutlich in Abbildung 2.6 zu sehen. Der letzte Schritt ist somit die Stauchung von A .

3. Schritt: Streckung beziehungsweise Stauchung von A .

Ebenso wie die Rotationsmatrix T kann auch der Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor c mit Hilfe der Singulärwertzerlegung berechnet werden. Die Gleichung lautet wie folgt,

$$c = \frac{\text{tr}(D)}{\text{tr}(A_{cent} A_{cent}^t)} \quad (2.9)$$

wobei D die Diagonalmatrix der Singulärwertzerlegung aus Gleichung (2.6) ist.

Dann wird die Matrix A_{rot} mit dem Faktor c multipliziert und man erhält

$$A_{end} = cA_{rot}.$$

BEISPIEL 3.4.1

$$\text{Mit } c = 0,5 \text{ gilt } \mathbf{A}_{end} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

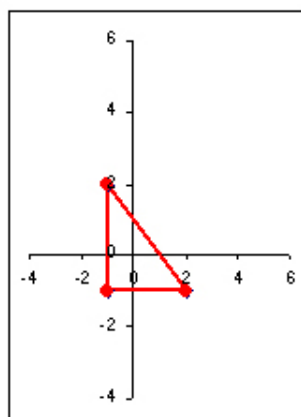


Abbildung 2.7: Beide Konfigurationen sind deckungsgleich.

Der folgende Absatz enthält den mathematischen Hintergrund zur Bestimmung von T und c . Dieser ist nicht notwendig, um die Methode zu verstehen, erklärt jedoch die Gleichungen (2.7) und (2.9).

Begründung für die Bestimmung von T und c

Es ist das Ziel der Procrustes-Analyse, zwei $(m \times n)$ -Matrizen A und B durch Stauchen bzw. Strecken sowie Drehen einander anzunähern. Das bedeutet $B \approx cAT$, wobei c den Skalierungsfaktor und T die Rotationsmatrix mit $TT^t = T^tT = I$ bezeichnet.

Um die beste Ähnlichkeit zu erhalten, sollen T und c so bestimmt werden, dass die Gleichung L , die die Quadratsumme der Distanzen zwischen den einzelnen Punkten berechnet, minimiert wird

$$L(c, T) = \text{tr}(B - cAT)^t(B - cAT). \quad (2.10)$$

Den optimalen Skalierungsfaktor erhält man, indem die partielle Ableitung von $L(c, T)$ gleich null gesetzt und nach c aufgelöst wird.

$$\frac{\partial L(c, T)}{\partial c} = 2c \text{tr}(A^t A) - 2 \text{tr}(B^t AT) = 0 \quad (2.11)$$

$$c = \frac{\text{tr}(B^t AT)}{\text{tr}(A^t A)} \quad (2.12)$$

Die Vereinfachung $\text{tr}(T^t A^t AT) = \text{tr}(A^t ATT^t) = \text{tr}(A^t A)$ ist möglich, weil die Spur invariant ist gegenüber dem Vertauschen von Matrizen bei der Multiplikation (siehe Kapitel 1.2.3) und weil $TT^t = I$.

Setzt man nun c in Gleichung (2.10) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} L(c, T) &= \operatorname{tr} \left(B - \frac{\operatorname{tr}(B^t A T)}{\operatorname{tr}(A^t A)} A T \right)^t \left(B - \frac{\operatorname{tr}(B^t A T)}{\operatorname{tr}(A^t A)} A T \right) \\ &= \operatorname{tr}(B^t B) - 2 \frac{\operatorname{tr}(B^t A T)^2}{\operatorname{tr}(A^t A)} + \frac{\operatorname{tr}(B^t A T)^2}{\operatorname{tr}(A^t A)} \\ &= \operatorname{tr}(B^t B) - \frac{\operatorname{tr}(B^t A T)^2}{\operatorname{tr}(A^t A)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Um Gleichung (2.13) bezüglich T zu minimieren, benutzt man das Prinzip der unteren Schranke von Ten Berge [2]. Dabei wird ein h gesucht, so dass $L(c, T) \geq h$. Kann man noch die Bedingungen für T festlegen, so dass $L(c, T) = h$, dann ist das Minimum für $L(c, T)$ gefunden.

Ausgehend von Gleichung (2.13) reicht es aus nur $-\operatorname{tr}(B^t A T)$ zu betrachten, da $\operatorname{tr}(B^t B)$ und $\operatorname{tr}(A^t A)$ von T unabhängig sind.

UDV^t sei nun die Singulärwertzerlegung (siehe Kapitel 1.4) von $B^t A$. Damit gilt

$$-\operatorname{tr}(B^t A T) = -\operatorname{tr}(UDV^t T) = -\operatorname{tr}(V^t T U D). \quad (2.14)$$

Definiert man $R := V^t T U$, dann ist R orthogonal, das heißt $RR^t = R^t R = I$. Für Gleichung (2.14) folgt dann

$$-\operatorname{tr}(RD) \geq -\operatorname{tr} D, \quad (2.15)$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $R = I$. Somit wird das Minimum für $L(c, T)$ dann erreicht, wenn $V^t T U = I$. Nach T aufgelöst, ergibt dies

$$T = V U^t. \quad (2.16)$$

Dies entspricht der Gleichung (2.7). Auch der Skalierungsfaktor c ist der gleiche wie in Gleichung (2.9), wenn man $B^t A$ durch UDV^t und T durch VU^t ersetzt.

$$c = \frac{\operatorname{tr}(B^t A T)}{\operatorname{tr}(A^t A)} = \frac{\operatorname{tr}(UDV^t V U^t)}{\operatorname{tr}(A^t A)} = \frac{\operatorname{tr}(U U^t V V^t D)}{\operatorname{tr}(A^t A)} = \frac{\operatorname{tr}(D)}{\operatorname{tr}(A^t A)} \quad (2.17)$$

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, wie man den Skalierungsfaktor c und die Rotationsmatrix T herleitet. Die entsprechende Literatur findet man unter [3] Seite 429-436. \square

In der Procrustes-Analyse können durch Verschieben, Drehen und Skalieren zwei Konfiguration A und B einander ähnlich gemacht werden. Da es sich oft um mehr als zwei verschiedene Konfigurationen handelt, werden diese einander paarweise angenähert. Gower hat in [9] die Procrustes-Analyse für mehr

als zwei Konfigurationen beschrieben. Dieser Algorithmus von Gower wird hier allerdings nicht verwendet, da die Implementation des ursprünglichen Tests als Grundlage dient, so wie er in der praktischen Vorlage (siehe Kapitel 3) angegeben wurde. Dadurch muss jedoch ein weiterer Schritt eingeführt werden, der die unterschiedliche Größe der verschiedenen Konfigurationspaare einander angleicht. Deshalb wird zuerst eine Standardisierung durchgeführt, um eine bessere Vergleichbarkeit zu erhalten.

2.4.2 Standardisierung

Die Standardisierung wird vor jeder Procrustes-Analyse eines Konfigurationspaares angewendet. Dabei wird nur eine Konfiguration des Paares standardisiert, und zwar diejenige, die bei der Procrustes-Analyse nicht mehr verändert wird. In BEISPIEL 3.4.1 ist es die Matrix B . Die zweite Konfiguration, also A , wird der ersten dann in der Procrustes-Analyse angenähert. Das heißt, A muss bei der Standardisierung nicht berücksichtigt werden, da im letzten Schritt der Procrustes-Analyse durch die Streckung beziehungsweise Stauchung A an die standardisierte Konfiguration B angepasst wird.

Zuerst wird bei der Standardisierung das Zentrum der Konfiguration in den Nullpunkt verschoben. Dies ist der gleiche Schritt wie bei der Procrustes-Analyse in Gleichung (2.4). Deshalb muss die Verschiebung später nur noch für die zweite Konfiguration durchgeführt werden:

$$B_{cent} = B - \bar{b}$$

Danach wird diese Konfiguration so verkleinert beziehungsweise vergrößert, dass sie genau im Einheitsquadrat liegt

$$B_{stand} = \frac{B_{cent}}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \text{tr}(B_{cent} B_{cent}^t)}}.$$

Dies ist auch schon der entscheidende Schritt bei der Standardisierung. Nun fährt man mit der Procrustes-Analyse fort, wobei dafür andere Ausgangsmatrizen die Grundlage sind. Matrix A bleibt nach wie vor eine Ausgangsmatrix, Matrix B wird jetzt jedoch durch die standardisierte Matrix B_{stand} ersetzt. Wie sich durch die Standardisierung die Ausgangssituation für die Procrustes-Analyse ändert wird an BEISPIEL 3.4.1 erklärt.

BEISPIEL 3.4.1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{stand} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ -0,5 & -0,5 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix}$$

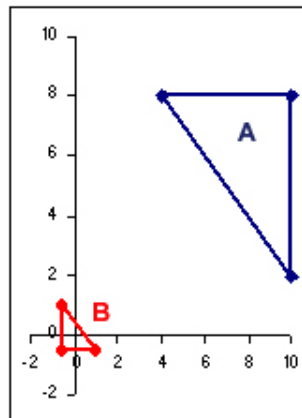


Abbildung 2.8: A und B nach der Standardisierung von B .

In Abbildung 2.8 werden die „neuen“ Ausgangskonfigurationen A und B_{stand} , mit denen die Procrustes-Analyse durchgeführt wird, graphisch dargestellt. Wie man sieht, ist B jetzt so verkleinert worden, dass es im Einheitsquadrat liegt.

Mit diesen beiden Konfigurationen ergibt sich nach der Procrustes-Analyse Abbildung 2.9.

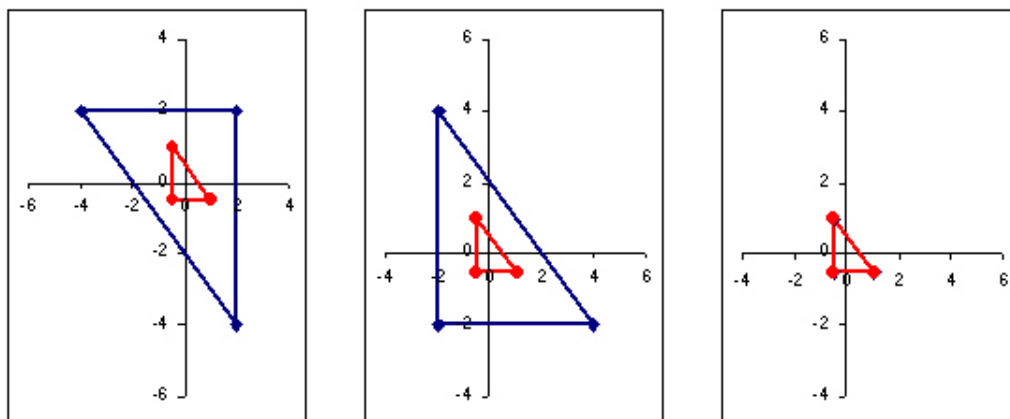


Abbildung 2.9: Annäherung von A an B mit Standardisierung.

Somit sind hier A und B deckungsgleich. Der Unterschied zur Procrustes-Analyse ohne vorherige Standardisierung liegt nur in der Größe der Endkonfigurationen. Diese wurden jetzt auf eine ähnliche Größe standardisiert. Dies ist hilfreich, da im nächsten Schritt die Ähnlichkeit beziehungsweise Unterschiedlichkeit dieser beiden Konfigurationen mittels einer Distanzfunktion

bestimmt werden. Die Standardisierung bewirkt, dass die Distanzen zwischen verschiedenen Konfigurationen miteinander verglichen werden können, da sie zu Beginn der Procrustes-Analyse im gleichen Größenbereich liegen.

2.5 Distanzfunktion

Die Distanzfunktion zeigt die Ähnlichkeit zweier Konfigurationen. Dabei wird der Abstand der jeweiligen Punkte zueinander gemessen, das heißt der Abstand von Punkt 1 der einen Konfiguration zu Punkt 1 der anderen Konfiguration wird mit dem Abstand der Punkte mit Nr. 2 addiert usw.

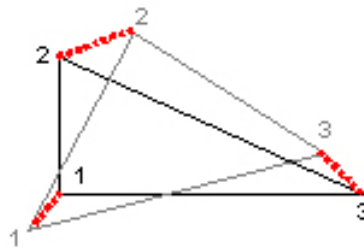


Abbildung 2.10: Die gestrichelten roten Linien stellen die Abstände dar.

Die entsprechende Formel zur Distanzberechnung lautet wie folgt:

$$dist = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{ij} - b_{ij})^2.$$

Die Distanz wird für jedes Konfigurationspaar berechnet und in einer Matrix, der *Distanzmatrix* gespeichert.

$$dist = \begin{pmatrix} dist_{11} & \dots & dist_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dist_{k1} & \dots & dist_{kk} \end{pmatrix}$$

Die Distanzmatrix ist eine symmetrische Matrix, die in der Hauptdiagonalen nur Nullen hat, da ja $dist_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq k$.

Aufgrund der Distanzen werden die verschiedenen Konfigurationen miteinander verglichen. Ähnliche Konfigurationen haben eine sehr geringe Distanz, völlig unterschiedliche Konfigurationen haben eine sehr große Distanz.

Nachdem die Distanzberechnung bekannt ist, sieht man, warum die Standardisierung vor der Procrustes-Analyse durchgeführt werden muss. Angenommen bei der Procrustes-Analyse ist Konfiguration B verhältnismäßig

klein. Dann wird A im letzten Schritt gestaucht, um es B anzupassen. Der Abstand wird deshalb zwischen einem kleinen A und B berechnet. Betrachtet man ein anderes Konfigurationspaar (A, B') , bei dem B' verhältnismäßig groß ist, so wird A gestreckt und der Abstand zwischen einem großen A und B' bestimmt. Die Abstände zwischen den beiden Konfigurationspaaren sind aber nur dann vergleichbar, wenn A gleiche Größe hat. Werden B und B' zuvor standardisiert, dann hat A nach der Procrustes-Analyse in beiden Fällen ähnliche Größe und die Abstände zwischen den Konfigurationspaaren sind vergleichbar.

Gibt es viele verschiedene Konfigurationen, so ist die Distanzmatrix sehr groß und man kann nur schlecht auf einen Blick erkennen, welche sich ähnlich sind. Das Clusterverfahren hilft, die Daten anschaulich und übersichtlich darzustellen.

2.6 Clusterverfahren

Clusterverfahren werden dann angewendet, wenn man eine sehr große Datenmenge hat, die nicht mehr zu überblicken ist. Mit Hilfe dieser Verfahren kann man die Daten in Gruppen einteilen. Wie diese Einteilung erfolgt wird in diesem Abschnitt beschrieben, der auf [10] basiert.

Gegeben ist eine Menge $O = \{O_1, \dots, O_n\}$ von Objekten O_i . Das Clusterverfahren bildet eine *Partition* dieser Objekte, also eine Zerlegung in Teilmengen C_1, \dots, C_k , so dass jedes Element aus O zu einer der Teilmengen C_i ($i = 1, \dots, k$) gehört.

BEISPIEL 3.6

Bei diesem Beispiel betrachtet man 5 Personen mit ihrem Alter

1	2	3	4	5
17	32	70	13	39

Das ergibt die Objektmenge $O = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Teilmengen $C_1 = \{1, 2, 4\}$ und $C_2 = \{3, 5\}$ bilden eine Partition von O .

Dabei sollen die Mitglieder einer Partition beziehungsweise Gruppe möglichst ähnlich sein. Im Gegensatz dazu soll zwischen den Gruppen ein größtmöglicher Unterschied bestehen.

2.6.1 Hierarchische Clusterverfahren

Bei den hierarchischen Clusterverfahren wird eine Folge von Partitionen P_1, \dots, P_n produziert. Bei der ersten Partition besteht jede Teilmenge aus einem Objekt. Somit gibt es gleich viele Teilmengen, wie Objekte in der Menge

sind. Für die nächste Partition werden diejenigen zwei Teilmengen mit dem geringsten Abstand vereinigt, so dass sich die Anzahl der Teilmengen um eins verringert. Der Abstand zwischen zwei Mengen kann auf verschiedene Arten definiert werden, die später noch detaillierter angegeben werden. Diese Vereinigungen von Teilmengen führt man weiter, bis nur noch eine Menge übrig bleibt. Da bei diesem Verfahren in jedem Schritt Teilmengen vereinigt werden, nennt man das Verfahren *agglomerativ*.

BEISPIEL 3.6.1

Sei $O = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dann bildet

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\} \\ P_2 &= \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}\} \\ P_3 &= \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3\}\} \\ P_4 &= \{\{1, 2, 4, 5\}, \{3\}\} \\ P_5 &= \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\} \end{aligned}$$

eine Folge von Partitionen.

Natürlich kann man auch umgekehrt verfahren, indem man mit einer Menge beginnt und diese dann in zwei Teilmengen aufteilt. Diese Art nennt man *divisiv*.

Hier soll das Clusterverfahren auf eine Distanzmatrix wie in Kapitel 2.5 angewendet werden. Die Objektmenge besteht aus den Versuchsteilnehmern, die durch ihre Konfigurationen beschrieben werden, und somit durch ihre Distanz zueinander verglichen werden können. Als Eingabe für das Clusterverfahren wird deshalb die Distanzmatrix verwendet.

Die Partitionsfolge, die aus der Distanzmatrix entsteht, soll mit Hilfe eines sogenannten *Dendrogramms* graphisch dargestellt werden. Dabei werden die einzelnen Objekte mit waagrechten Linien versehen, die Objekte, die bei einem Vereinigungsschritt in dieselbe Teilmenge kommen, werden durch eine senkrechte Linie miteinander verbunden und liegen dadurch in einer Teilmenge.

Einen Aufbau für ein solches Dendrogramm zeigt Abbildung 2.11.

Bei den hierarchischen Clusterverfahren gibt es noch weitere Unterschiede. Diese liegen in der Reihenfolge, in der die Vereinigung zweier Teilmengen erfolgt. Dabei ist es wichtig, wie der Abstand zwischen zwei Gruppen definiert wird.

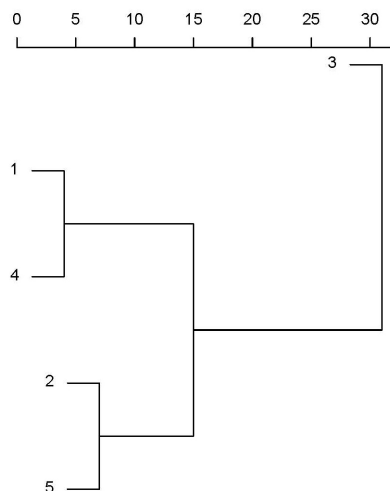


Abbildung 2.11: BEISPIEL 3.6.1 als Dendrogramm.

Single-Linkage-Verfahren

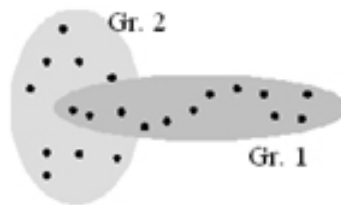
Beim Single-Linkage-Verfahren werden immer die beiden Teilmengen verschmolzen, von denen zwei Punkte die kleinste Distanz aufweisen.

1. Zu Beginn definiert man jedes Objekt als eigene Gruppe.
2. Man bestimmt die minimale Distanz zwischen zwei Objekten. Das entspricht dem minimalen Wert in der Distanzmatrix. Sollte dieser nicht eindeutig sein, so wählt man aus allen in Frage kommenden Werten einen beliebigen aus. Die beiden Objekte mit minimaler Distanz werden zu einer Gruppe vereinigt.
3. Als nächstes muss der Abstand der neu gebildeten Gruppe zu allen anderen Gruppen bestimmt werden. Dieser Abstand wird dadurch bestimmt, dass man die Distanz von jedem Punkt der einen Gruppe zu jedem Punkt einer anderen Gruppe betrachtet und davon die minimale auswählt. Dieser minimale Abstand definiert somit den Abstand der beiden Gruppen.
4. Die beiden Gruppen mit der kleinsten Distanz werden vereinigt.
5. Dann wiederholt man Schritt 3 und 4 solange, bis nur noch eine Gruppe übrigbleibt.

Beim Single-Linkage-Verfahren bestimmt immer die kleinste Distanz zwischen zwei einzelnen Punkten den Abstand für die beiden Gruppen. Des-

halb kann man sagen, dass der Nachbar, der am nächsten liegt, die Distanz definiert. Man nennt das Verfahren deshalb auch „Nearest Neighbour-Verfahren“.

Ein großer Nachteil dieses Verfahrens liegt genau darin, dass immer nur der Abstand zum nächsten Nachbarn betrachtet wird. Denn dadurch kann es sein, dass zwei Objekte in derselben Gruppe liegen, obwohl sie sich überhaupt nicht ähnlich sind.



Mit dem Single-Linkage-Verfahren wird hier Gruppe 1 vor Gruppe 2 erkannt. Da alle Punkte in einer Gruppe als ähnlich interpretiert werden, gilt dies auch für die beiden äußeren Punkte. Diese haben aber einen sehr großen Abstand. Das ist ein großer Nachteil des Single-Linkage-Verfahrens, weshalb es für das Auswerteverfahren in dieser Arbeit besser ist, eine andere Variante der Abstandsbestimmung zu verwenden. Diese wird im folgenden Average-Linkage-Verfahren erklärt.

Average-Linkage-Verfahren

Das Average-Linkage-Verfahren unterscheidet sich vom Single-Linkage-Verfahren nur in Schritt 3. Als Distanz zweier Gruppen wird der Mittelwert aller Abstände zwischen Punkten der einen Gruppe und Punkten der anderen Gruppe gewählt. Die anderen Schritte bleiben gleich wie beim Single-Linkage-Verfahren. Den Namen Average-Linkage hat das Verfahren also von der Mittelwertbildung.

Weitere Clusterverfahren findet man in [1], [5] und [10].

Alles in Allem liefert das gesamte Analyseverfahren, von der Datenerhebung bis zur Clusterbildung, Ergebnisse auf verschiedene Fragestellungen. Zum einen wird die subjektive Sichtweise jedes einzelnen Teilnehmers in der graphischen Darstellung der Elemente und Konstrukte aufgezeigt, was mit Hilfe der Eigenstrukturanalyse möglich ist. Zum anderen werden mittels der Procrustes- und Cluster-Analyse auch Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den Teilnehmern betrachtet, wodurch sich Gruppen bilden lassen, die Teilnehmer mit ähnlichen Ansichten repräsentieren sollen.

Die Anwendung dieser verschiedenen Auswertemethoden auf einen Datensatz aus der Praxis, wird im nächsten Kapitel beschrieben.

Kapitel 3

Anwendung der Methode in der Praxis

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse präsentiert, die aus dem psychologischen Versuch von Prof. C. Clases stammen, welcher den Anstoß für diese Arbeit gegeben hat. Da für die Repertory-Grids kein festes Auswerteverfahren vorgegeben ist, wird die Auswahl und Reihenfolge der Analysemethoden so gewählt, dass die Fragestellungen des Versuchsleiters möglichst gut beantwortet werden können. Der psychologische Test, der hierfür die Grundlage bildet, soll Fragen beantworten, die zum einen die Sichtweise des einzelnen Teilnehmers darstellt und zum anderen alle Teilnehmer im Vergleich betrachtet. Das obige Auswerteverfahren (siehe Kapitel 2) ist speziell dafür entwickelt worden. Es wurde in der Sprache R (siehe [13]) programmiert. R ist eine Software, die viele statistische Verfahren in bereits implementierten Funktionen zur Verfügung stellt. Ein großer Vorteil von R liegt darin, dass man es kostenlos unter <http://cran.r-project.org> herunterladen kann. Zur Reproduktion der Daten aus dem psychologischen Test und zur Generierung der neuen Daten wurde ebenfalls R verwendet.

In diesem Kapitel sollen speziell die Daten des psychologischen Tests präsentiert und beschrieben werden. Zuerst wird anhand eines Teilnehmers gezeigt, wie das Ergebnis nach der Eigenstrukturanalyse für die einzelnen Personen aussieht. Weiter soll noch das Ergebnis aus dem Vergleich aller Teilnehmer mit Hilfe der Procrustes-Analyse dargestellt werden.

Bei diesem Versuch haben 16 Personen teilgenommen. Nach der Datenerhebung stehen also 16 Matrizen zur Verfügung, die aus jeweils 11 Elementen und aus 5 bis 14 Konstrukten bestehen. Damit variiert die Größe der Matrizen zwischen (11×10) und (11×28) .

Ein Beispiel für eine Matrix nach der Datenerhebung ist die Ausgangsmatrix von Teilnehmer 1 (siehe Tabelle 3.1). Die anderen 15 Matrizen bestehen

aus den gleichen Elementen, haben aber andere Konstrukte. Diese Matrizen sind im Anhang A.1 angegeben.

	Element										
Konstrukt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1
2	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
3	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	-1
	-1	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	1
4	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	1	0	-1	-1	1	1	-1
5	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
8	1	-1	0	1	1	1	1	-1	1	1	-1
	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
9	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1
	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
10	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
11	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1

Tabelle 3.1: Matrix 1 aus dem gegebenen Datensatz.

Für alle 16 Matrizen wird die Eigenstrukturanalyse durchgeführt. Die Werte für das Koordinatensystem werden aus den Element- und Konstruktmatrizen entnommen, die bei der Eigenstrukturanalyse entstehen. In den Tabellen 3.2 und 3.3 sind die Werte für die Elemente und Konstrukte von Matrix 1 aufgelistet, in Abbildung 3.1 sind diese Elemente und Konstrukte selbst graphisch dargestellt.

Element										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4,206	-3,409	1,574	4,301	3,735	0,022	-2,791	-3,842	2,259	4,495	-3,015
-1,215	-1,638	-3,555	-0,070	-1,884	0,705	-2,244	-1,480	-1,048	-0,624	-1,880

Tabelle 3.2: Elemente nach der Eigenstrukturanalyse von Matrix 1.

Konstrukt		
1	-2,094	0,613
	0,972	-1,717
2	-2,646	-0,286
	2,646	0,286
3	2,769	1,035
	-2,769	-1,035
4	-3,055	0,201
	3,055	-0,201
5	-3,053	0,323
	3,053	-0,323
6	2,092	1,813
	-2,092	-1,813
7	2,356	1,277
	-1,592	-1,699
8	2,407	-0,240
	-2,407	0,240
9	1,228	-2,187
	-1,066	1,593
10	-1,300	2,271
	3,053	-0,323
11	-1,890	1,301
	1,890	-1,301

Tabelle 3.3: Konstrukte nach der Eigenstrukturanalyse von Matrix 1.

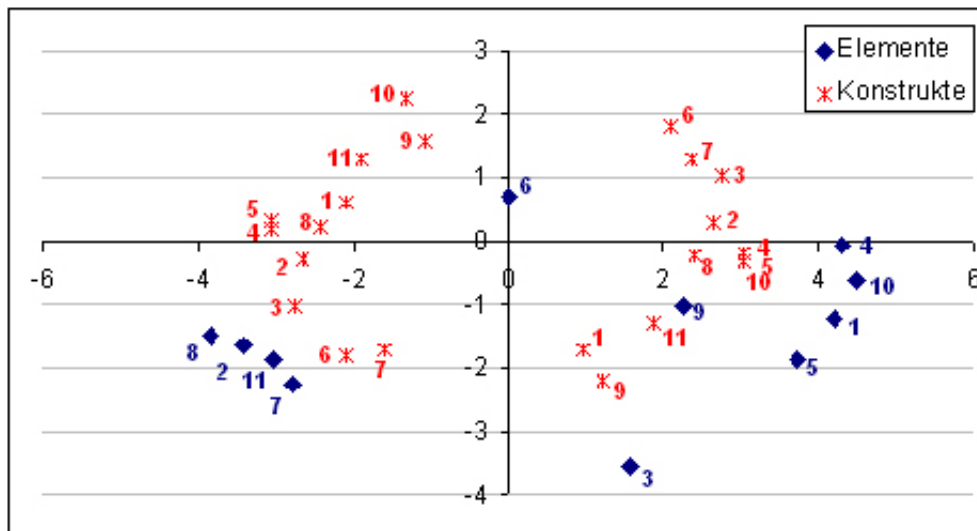


Abbildung 3.1: Elemente und Konstrukte im \mathbb{R}^2 .

Im Weiteren werden die Matrizen 1 bis 16 jeweils paarweise in der Procrustes-Analyse einander angenähert. Das heißt, der Unterschied zwischen den Paaren wird so gering wie möglich gehalten. Von diesen optimierten Matrizenpaaren wird die Distanz berechnet, so dass die Distanzmatrix wie in Tabelle 3.4 entsteht.

Matrix	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	2,154	2,806	2,108	2,968	2,531	3,117	1,810	2,926	2,361	2,953	2,535	2,239	2,584	2,498	2,737
2	2,154	0	2,865	2,140	3,234	3,025	3,195	2,344	3,004	2,930	3,083	2,692	3,035	2,793	3,079	3,017
3	2,806	2,865	0	2,545	1,916	2,268	2,291	2,628	1,852	2,028	2,887	1,681	2,432	2,585	2,888	2,702
4	2,108	2,140	2,545	0	2,966	2,615	2,840	2,446	2,530	2,647	2,960	2,595	2,653	2,532	3,000	2,886
5	2,968	3,234	1,916	2,966	0	2,324	2,215	2,614	2,089	1,777	2,433	2,544	2,317	2,626	2,515	2,624
6	2,531	3,025	2,268	2,615	2,324	0	2,324	1,998	2,800	2,268	2,059	2,137	2,258	2,675	2,903	2,773
7	3,117	3,195	2,291	2,840	2,215	2,324	0	2,802	2,176	2,509	2,542	2,763	2,712	2,802	2,721	2,161
8	1,810	2,344	2,628	2,446	2,614	1,998	2,802	0	2,749	2,314	2,590	2,377	2,429	2,686	2,511	2,324
9	2,926	3,004	1,852	2,530	2,089	2,800	2,176	2,749	0	2,619	3,082	2,527	2,785	2,913	2,739	2,449
10	2,361	2,930	2,028	2,647	1,777	2,268	2,509	2,314	2,619	0	2,545	2,066	1,888	1,810	2,218	2,823
11	2,953	3,083	2,887	2,960	2,433	2,059	2,542	2,590	3,082	2,545	0	2,836	2,570	2,907	3,169	3,027
12	2,535	2,692	1,681	2,595	2,544	2,137	2,763	2,377	2,527	2,066	2,836	0	2,477	2,287	2,967	3,049
13	2,239	3,035	2,432	2,653	2,317	2,258	2,712	2,429	2,785	1,888	2,570	2,477	0	2,509	2,625	2,603
14	2,584	2,793	2,585	2,532	2,626	2,075	2,802	2,686	2,913	1,810	2,907	2,287	2,509	0	2,383	3,057
15	2,498	3,079	2,888	3,000	2,515	2,903	2,721	2,511	2,739	2,218	3,169	2,967	2,625	2,383	0	2,645
16	2,737	3,017	2,702	2,886	2,624	2,773	2,161	2,324	2,449	2,823	3,027	3,049	2,603	3,057	2,645	0

Tabelle 3.4: Distanzmatrix nach der Procrustes-Analyse.

Aus dieser Distanzmatrix werden mit dem Single-Linkage- und dem Average-Linkage-Verfahren Dendrogramme erstellt, in denen die Cluster (Gruppen) der Teilnehmer zu erkennen sind (siehe Abbildung 3.2).

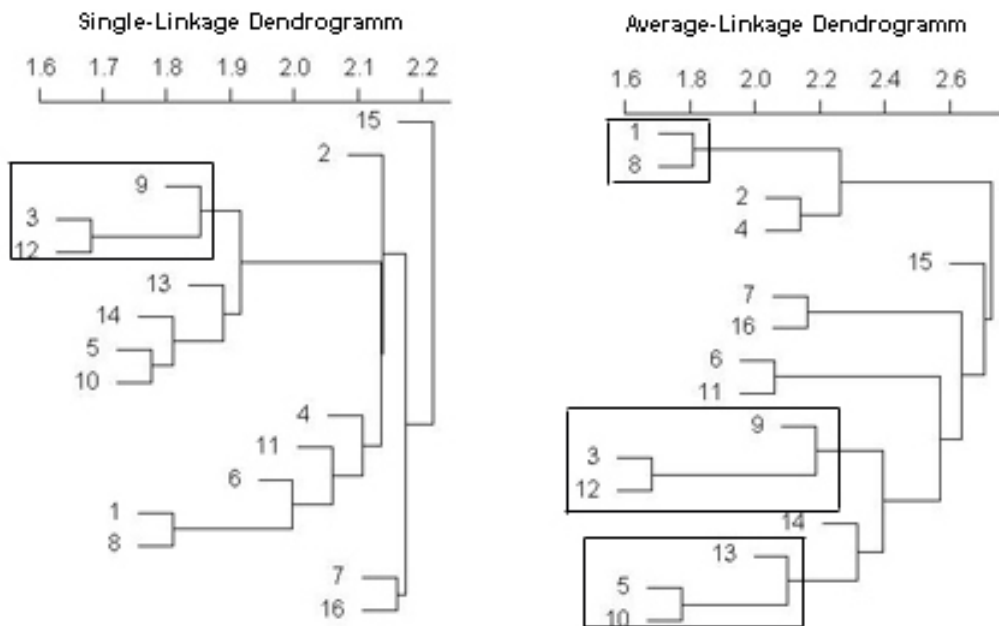


Abbildung 3.2: Dendrogramme der Distanzen nach der Procrustes-Analyse.

Aufgrund von diesen Dendrogrammen hat der Versuchsleiter folgende Gruppen gebildet.

Gruppe 1: Teilnehmer 3, 9 und 12 (Single- und Average-Linkage)

Gruppe 2: Teilnehmer 5, 10 und 13 (Average-Linkage)

Gruppe 3: Teilnehmer 1 und 8 (Average-Linkage).

Das heißt, Gruppe 1 ist in beiden Dendrogrammen signifikant, die Gruppen 2 und 3 nur in dem Average-Linkage Dendrogramm.

Das war ein kurzer Einblick in die Daten der eigentlichen Anwendung dieser Methode. Interessant ist vor allem die Distanzmatrix und die daraus entstehenden Cluster, denn die Schwierigkeiten, die bei dieser Methode auftauchen, beziehen sich vor allem auf diese Ergebnisse. Die Ergebnisse der einzelnen Teilnehmer basieren auf der Eigenstrukturanalyse, die als standardisiertes Verfahren für solche Fragestellungen bekannt ist. Im nächsten Kapitel werden einige Schwierigkeiten der Auswertung aufgeführt und Modifikationen zur Verbesserung diskutiert.

Kapitel 4

Probleme

Bei der Auswertung der Repertory-Grids, so wie sie hier erläutert wird, haben sich Schwächen gezeigt, die in diesem Kapitel anhand von Beispielen erläutert und diskutiert werden. Dabei kann es einerseits zu ungenauen Ergebnissen, andererseits zu Fehlinterpretationen kommen. Im folgenden Abschnitt werden Gründe angegeben, die diese Fehler auslösen, sowie Möglichkeiten, Probleme zu erkennen und zu vermeiden.

4.1 Identifikation von verschiedenen Matrizen

Das erste Problem, das hier auftritt, führt zu Fehlinterpretationen der Ergebnisse. Der Grund hierfür liegt darin, dass zwei verschiedene Ausgangsmatrizen durch die Auswertung am Ende das gleiche Ergebnis liefern. Dieses Problem taucht vor allem dann auf, wenn zwei genau gegensätzliche Aussagen vorliegen. Bei der Interpretation der Ergebnisse werden die beiden Teilnehmer, die eigentlich gegensätzliche Meinungen vertreten, als ähnlich erkannt. Nimmt man zum Beispiel drei Personen, von denen zwei total gegensätzliche Meinungen vertreten, die dritte Person sich jedoch eher neutral verhält, so kann es vorkommen, dass die ersten beiden als ähnlich erkannt werden, im Gegensatz zur dritten Person. Wenn dann am Ende Gruppen gebildet werden, sind die ersten beiden Personen in einer Gruppe, obwohl sie in verschiedenen Gruppen sein sollten.

Dieses Problem tritt in mehreren Teilmethoden auf. Zum einen in der Eigenstrukturanalyse (siehe Kapitel 2.3) und zum anderen in der Procrustes-Analyse (siehe Kapitel 2.4). Ein einfaches Beispiel soll zeigen, dass Unterschiede in den Ausgangsmatrizen am Ende nicht mehr erkannt werden.

BEISPIEL 4.1

Mit diesem Beispiel soll deutlich werden, dass verschiedene Matrizen nach der Eigenstrukturanalyse und der Procrustes-Analyse dasselbe Ergebnis liefern.

Zur besseren Darstellung, werden kleine Beispielmatrizen verwendet. Die gewählten Matrizen sind entsprechend der Datenerhebung in Kapitel 2.2 aufgebaut, wobei jeweils drei Elemente den Problembereich beschreiben. Dazu werden drei Konstrukte erhoben, die jeweils aus Konstruktpol und Initialpol bestehen. Dies ergibt eine (6×3) -Matrix. Die Einträge der Matrix sind aus der Menge $\{-1, 0, 1\}$, was den Bewertungen „trifft nicht zu“, „weder noch“ beziehungsweise „nicht anwendbar“ und „trifft zu“ entspricht. Dies führt zu Matrix 1, die in Tabelle 4.1 angegeben ist.

	Element		
Konstrukt	1	2	3
1	1	-1	1
	-1	1	-1
2	1	-1	0
	-1	1	0
3	1	1	-1
	-1	-1	1

Tabelle 4.1: Matrix 1

Zum Vergleich werden noch acht weitere Matrizen definiert. Diese sind ebenfalls (6×3) -Matrizen, also aus drei Elementen und drei Konstrukten gebildet. Dabei hat jede der acht Matrizen dieselben drei Konstrukte. Diese unterscheiden sich jedoch in den Einträgen, und zwar werden zwei Konstruktzellen einerseits so betrachtet, wie sie in der Datenerhebung zustande gekommen sind, andererseits werden sie genau gegenteilig bewertet. Aus einem gegebenen Konstrukt

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}$$

wird durch Multiplikation mit -1 also das gegensätzliche Konstrukt

$$\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Somit erhält man Matrizen, die in einem, zwei oder allen drei Konstrukten gegensätzlich sind. Das bedeutet, die acht Teilnehmer vertreten in den verschiedenen Konstrukten zum Teil gegensätzliche Ansichten. Wie sich dies bei der Analyse auswirkt, sieht man im Folgenden.

Doch zuerst wird noch in Tabelle 4.2 angegeben, wie diese Ausgangsmatrizen zu Beginn aussehen.

Matrix 2	Matrix 3	Matrix 4	Matrix 5
1 -1 -1	-1 1 1	1 -1 -1	1 -1 -1
-1 1 1	1 -1 -1	-1 1 1	-1 1 1
-1 -1 1	-1 -1 1	1 1 -1	-1 -1 1
1 1 -1	1 1 -1	-1 -1 1	1 1 -1
0 1 -1	0 1 -1	0 1 -1	0 -1 1
0 -1 1	0 -1 1	0 -1 1	0 1 -1

Matrix 6	Matrix 7	Matrix 8	Matrix 9
-1 1 1	-1 1 1	1 -1 -1	-1 1 1
1 -1 -1	1 -1 -1	-1 1 1	1 -1 -1
1 1 -1	-1 -1 1	1 1 -1	1 1 -1
-1 -1 1	1 1 -1	-1 -1 1	-1 -1 1
0 1 -1	0 -1 1	0 -1 1	0 -1 1
0 -1 1	0 1 -1	0 1 -1	0 1 -1

Tabelle 4.2: Matrizen zwei bis neun.

Hier sind also neun Matrizen gegeben, von denen Matrix 1 eine gesonderte Rolle hat. Sie soll als Vergleichsmatrix gelten. Als nächstes wendet man auf diese neun Matrizen die Auswertung an, wie in Kapitel 2 beschrieben. Also wird zuerst die Eigenstrukturanalyse durchgeführt. Dabei ist nur die Elementmatrix interessant, denn das Problem, das hier erklärt wird, betrifft nur den Vergleich zwischen den verschiedenen Teilnehmern; die Darstellung der Elemente und Konstrukte im Zweidimensionalen ist dabei nicht wichtig. Die Elementkoordinaten der einzelnen Matrizen nach der Eigenstrukturanalyse werden für die Procrustes-Analyse weiterverwendet und sind deshalb von Bedeutung.

In Tabelle 4.3 sind diese neun Matrizen nach der Eigenstrukturanalyse aufgeführt.

Nach der Eigenstrukturanalyse sind nur noch drei verschiedene Gruppen zu erkennen. Die erste Gruppe wird von Matrix 1 gebildet, Gruppe zwei von den Matrizen 2, 4, 5 und 8 und Gruppe drei von den Matrizen 3, 6, 7 und 9. Dabei haben die Matrizen in den einzelnen Gruppen nicht nur ähnliche, sondern sogar identische Werte. Matrix 1, die von den anderen unabhängig gewählt wurde, unterscheidet sich nach der Eigenstrukturanalyse wesentlich von den Matrizen zwei bis neun.

Für die Procrustes-Analyse stehen also nur noch drei verschiedene Kon-

<u>Gruppe 1</u>	<u>Gruppe 2</u>	<u>Gruppe 3</u>
Matrix 1 -1,244 2,367 -1,630 2,103 0,408 -1,012	Matrix 2 -1,630 -1,244 2,367 1,012 -2,103 -0,408	Matrix 3 1,630 1,244 -2,367 -1,012 2,103 0,408
	Matrix 4 -1,630 -1,244 2,367 1,012 -2,103 -0,408	Matrix 6 1,630 1,244 -2,367 -1,012 2,103 0,408
	Matrix 5 -1,630 -1,244 2,367 1,012 -2,103 -0,408	Matrix 7 1,630 1,244 -2,367 -1,012 2,103 0,408
	Matrix 8 -1,630 -1,244 2,367 1,012 -2,103 -0,408	Matrix 9 1,630 1,244 -2,367 -1,012 2,103 0,408

Tabelle 4.3: Elementkoordinaten nach der Eigenstrukturanalyse.

figurationen zur Verfügung. Im zweidimensionalen Raum ergeben diese Abbildung 4.1.

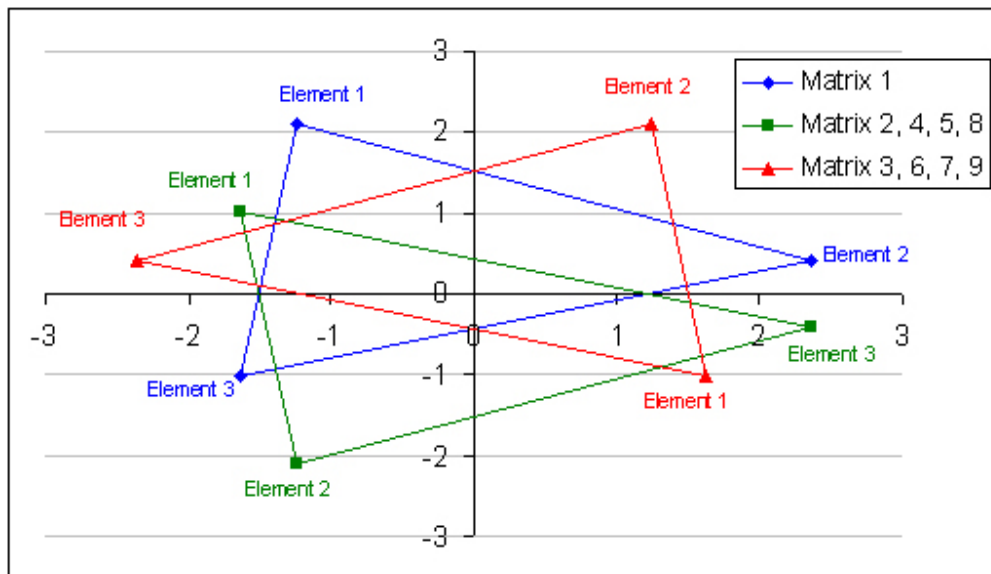


Abbildung 4.1: Elemente nach Eigenstrukturanalyse im zweidimensionalen Raum.

Die grüne Konfiguration entspricht den Matrizen 2, 4, 5 und 8, die rote den Matrizen 3, 6, 7 und 9. Durch Drehen einer dieser Konfigurationen um 180°

und Verschieben des Mittelpunktes in den Nullpunkt sind beide Konfigurationen nach der Procrustes-Analyse deckungsgleich. Wie man in Kapitel 2.4 gesehen hat, sind Drehen und Verschieben zwei Operationen, die in der Procrustes-Analyse erlaubt sind. Die Konfiguration zu Matrix 1 hat zwar dieselbe äußere Form, doch bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass die Punkte in anderer Umlaufrichtung durchnummeriert sind. Dadurch ist es nicht möglich, die rote und grüne Konfiguration mit der blauen in Deckung zu bringen, so dass die Punkte mit gleichen Elementen aufeinander liegen.

Wie die Konfigurationen nach der Procrustes-Analyse aussehen, zeigt Abbildung 4.2.

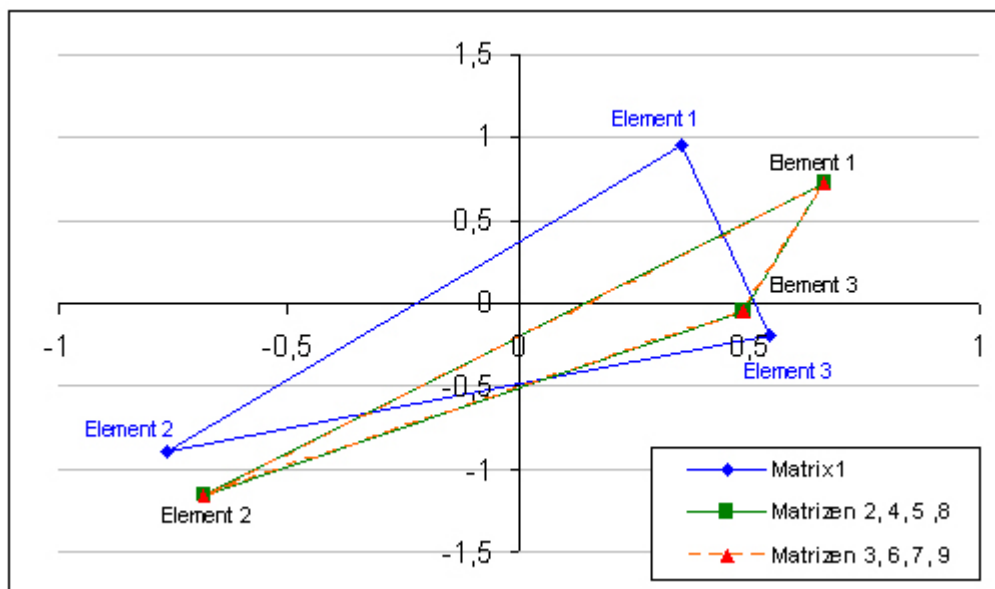


Abbildung 4.2: Elemente nach Procrustes-Rotation im zweidimensionalen Raum.

Die grüne und die rote Konfiguration sind, wie erwähnt, nach der Procrustes-Analyse identisch. Außerdem sind sie so gedreht, verschoben und skaliert worden, dass sie der Konfiguration zu Matrix 1 möglichst ähnlich sind. Von diesen neuen, angenäherten Matrizen ausgehend werden die Distanzen zwischen den einzelnen Konfigurationen berechnet und in die Distanzmatrix eingetragen. Tabelle 4.4 zeigt diese Distanzmatrix.

Tabelle 4.4 zeigt, dass die Matrizen 2 bis 9 keinen Unterschied mehr darstellen, was auch in Abbildung 4.2 schon zu sehen war. Die Distanz zwischen

	Mat 1	Mat 2	Mat 3	Mat 4	Mat 5	Mat 6	Mat 7	Mat 8	Mat 9
Mat 1	0	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502	0,502
Mat 2	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0
Mat 3	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0
Mat 4	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0
Mat 5	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0
Mat 6	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0
Mat 7	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0
Mat 8	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0
Mat 9	0,502	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 4.4: Distanzmatrix nach der Procrustes-Analyse.

diesen Matrizen ist also gleich null. Nur zu Matrix 1 gibt es noch einen Unterschied.

Auswirkungen auf das Ergebnis

Um die Auswirkungen des Problems auf das Ergebnis zu verstehen, wird nochmals kurz auf das Ziel dieses Tests eingegangen. Die Versuchsteilnehmer beurteilen durch ihre Beschreibung die verschiedenen Elemente. Dafür werden die Spalten der Matrix, die den Elementen entsprechen, zum Vergleich verwendet. Je nach Ähnlichkeit der Spalteneinträge, folgt die Ähnlichkeit der Teilnehmer. Diese Spalteneinträge entstehen durch die Bewertung der Elemente mit Hilfe der Konstrukte, die aus je zwei Zeilen bestehen, so dass immer ein Zahlenpaar einen Element-/Konstrukt-Zusammenhang erklärt.

Das Ergebnis wird in dem Dendrogramm dargestellt, das aus den Werten der Distanzmatrix entsteht. Teilnehmer, die in diesem Dendrogramm nah beieinander liegen, werden zu einer Gruppe zusammengefasst. Diese Gruppen interpretiert man so, dass die Teilnehmer in einer Gruppe sich sehr ähnlich sind, wohingegen Personen aus weit auseinanderliegenden Gruppen als verschieden betrachtet werden. Einige Argumente, die auf den folgenden Seiten erklärt werden, zeigen, dass diese Interpretation ohne weitere Überprüfungen zu falschen Einteilungen führen kann.

Wie Beispiel 4.1 zeigt, werden die Matrizen 2 bis 9 als identisch betrachtet, obwohl sie verschiedene Ausgangseinträge hatten. Das Ergebnis der Untersuchung wird dementsprechend nicht richtig interpretiert. Für dieses Phänomen aus Beispiel 4.1 gibt es mehrere Gründe, die bereits in den Ausgangsmatrizen zu finden sind.

Multipliziert man ein Konstrukt mit -1 , so wird die gegenteilige Aussage gebildet, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Das kann man sogar mit beliebig vielen Konstrukten machen. Ein Grund dafür liegt schon in der Er-

hebung der Konstrukte. Beim Formulieren der Konstrukte wird nicht darauf geachtet, ob es sich um eine positive oder eine negative Aussage handelt, so dass der Konstruktpol sowohl positiv als auch negativ sein kann. Angenommen, Teilnehmer 1 formuliert das Konstrukt positiv, so ist der Konstruktpol beispielsweise „verständnisvoll“ und der Kontrastpol „versteh mich nicht“. Teilnehmer 2 hingegen hat als Konstruktpol „versteh mich nicht“ und als Kontrastpol „verständnisvoll“ gewählt, was einer negativen Sichtweise entspricht. Dieses Konstrukt, das einmal positiv und einmal negativ formuliert ist, wird dann von beiden Teilnehmern auf das Element „Vater“ angewendet. Bezeichnet Teilnehmer 1 seinen Vater als verständnisvoll im Gegensatz zu Teilnehmer 2, der von seinem Vater nicht verstanden wird, so erhält man für beide Teilnehmer die Einträge 1 für den Konstruktpol und -1 für den Kontrastpol. Damit haben zwei Teilnehmer mit gegensätzlichen Meinungen die gleiche Matrix erzeugt. Umgekehrt können auch Teilnehmer mit gleichen Einstellungen verschiedene Matrizen erzeugen. Dieses Problem in der Datenerhebung spiegelt sich dann in der Auswertung wider, indem man solche Matrizen nicht mehr voneinander unterscheiden kann (wie Beispiel 4.1 zeigt). Deswegen ergibt die Multiplikation von einem oder mehreren Konstrukten mit -1 kein neues Ergebnis.

Dieses Problem lässt sich sogar noch allgemeiner darstellen. Dabei können zwei Personen, die über völlig verschiedene Konstrukte reden, ähnliche oder sogar gleiche Matrizen erzeugen. Der Grund liegt darin, dass die Bedeutung der Konstrukte bei der Auswertung ignoriert wird. Zuerst werden in einem aufwendigen Verfahren die Konstrukte ermittelt, um sie nachher nicht mehr zu berücksichtigen. Denn nur die Zahlenwerte, die diese Konstrukte beschreiben, werden weiterverarbeitet. Dass dies zu falschen Interpretationen führen kann, sieht man an folgendem kleinen Beispiel. Zwei Teilnehmer beschreiben die gleichen Elemente (Personen aus dem Freundes- und Bekanntenkreis) mit Konstrukten, die aus verschiedenen Bereichen stammen. Der erste Teilnehmer nimmt nur sachliche Konstrukte wie „im gleichen Verein“, „hält guten Unterricht“ oder „kenne ich nicht so gut“. Diese beschreiben die Beziehungen, die der Teilnehmer zu den Personen hat. Der andere Teilnehmer beurteilt die Elemente eher gefühlsbetont, wie zum Beispiel „arrogant“, „impulsiv“ oder „unsympatisch“, so dass hier Charaktereigenschaften der Personen aus Sicht des Teilnehmers genannt werden. Die beiden Teilnehmer haben aber annähernd die gleichen Matrixeinträge und sind deswegen nach der Analyse in derselben Gruppe, was bei der Interpretation dazu führt, dass sie als ähnlich beurteilt werden. Betrachtet man hingegen die Bedeutung der Konstrukte, so würde man die Teilnehmer nicht als ähnlich beurteilen. Das Weglassen der Konstrukte führt dazu, dass die beiden Teilnehmer, die eigentlich von zwei unterschiedlichen Dingen sprechen, am Schluß als ähnlich gruppiert

werden.

Ein weiterer Kritikpunkt betrifft die Gewichtung der einzelnen Konstrukte. Bei der Erhebung der Konstrukte wird kein Unterschied zwischen diesen gemacht, so dass alle Konstrukte gleichbedeutend sind. Doch manche sind wichtiger für die Elemente als andere. Soll man zum Beispiel die Qualität der Mensa an einer Universität beurteilen, so sind Konstrukte wie „gutes Essen“ oder „geringer Preis“ ausschlaggebender, wie die „schöne Aussicht“. Beschreibt ein Teilnehmer die Elemente mit vielen unwichtigen und nur wenigen aussagekräftigen Konstrukten, so spiegelt das Ergebnis nicht seine wirkliche Meinung wider.

Modifikationsmöglichkeiten

Der vorige Abschnitt zählt verschiedene Möglichkeiten auf, die dazu führen, dass die Ergebnisse der Untersuchung falsch interpretiert werden, wobei es sich vor allem um die Identifikation gegensätzlicher Aussagen handelt. Im Folgenden werden verschiedene Ideen angegeben, die das Problem vielleicht reduzieren oder sogar ganz aufheben. Die meisten dieser Möglichkeiten beziehen sich jedoch auf die Datenerhebung, also auf die Bestimmung der Matrizen. Da eine Änderung in der Datenerhebung zum einen mit großem Aufwand verbunden ist und zum anderen eine Zusammenarbeit mit den Versuchsteilnehmern mit sich bringt, werden hier diese Modifikationen nur als Anregung angegeben.

Eine Möglichkeit ist es, für die Konstrukte eine Orientierung festzulegen. Das bedeutet, die positiven Konstrukte sollen auch positiv beschrieben werden und die negativen Konstrukte negativ. Dadurch wird zwar nicht die Bedeutung der Konstrukte erhalten, sie geht aber nicht mehr ganz verloren. Außerdem kann eine Orientierung der Konstrukte bewirken, dass man nicht mehr zwei Zeilen benötigt, um ein Konstrukt ausreichend zu beschreiben, sondern dass eine Zeile genügt. Dadurch kann das Problem, das in Beispiel 4.1 geschildert wird, nicht mehr auftreten. Gegenteilige Aussagen würden nun ganz andere Matrizen erzeugen und somit auch zu verschiedenen Ergebnissen führen. Wie die Orientierung festgelegt werden soll, und wie die Bewertung der Konstrukte im Detail aussieht wurde hier nicht untersucht.

Falls es jeoch möglich ist, ein Konstrukt auf einen Pol zu reduzieren, so halbiert sich die Zeilenanzahl der Ausgangsmatrizen. Dadurch ist es wichtig, genügend Konstrukte für die Beschreibung der Elemente zu bestimmen. Die Konstruktanzahl sollte mindestens der Anzahl der Elemente entsprechen. Besser jedoch wäre es, wenn die Anzahl der Konstrukte die der Elemente ein wenig übersteigt. Hat man zu wenig Konstrukte, so können die Elemente nicht ausreichend beschrieben werden. Dies führt dann dazu, dass der

Unterschied zwischen den verschiedenen Teilnehmern nicht herausgearbeitet werden kann.

Bis jetzt wird in der Auswertung die Bedeutung der Konstrukte vollkommen vernachlässigt. Das kann dazu führen, dass zwei Teilnehmer verschiedene Konstruktbereiche wählen, um die Elemente zu bestimmen und somit „Äpfel mit Birnen vergleichen“. Eine Möglichkeit, dies in der Datenerhebung zu berücksichtigen, wäre, die Konstrukterhebung in verschiedene Bereiche zu unterteilen. Für jeden dieser Konstruktbereiche wird das Thema vorgegeben, so dass alle Teilnehmer ähnliche Konstrukte verwenden. Der Nachteil hierbei liegt natürlich in der Einschränkung der Methode. Den Teilnehmern werden die Konstrukte in gewisser Weise grob vorgegeben, wodurch die Subjektivität und Flexibilität der Methode verloren geht. Ein guter Mittelweg, der zum einen die Freiheit in der Datenerhebung erhält und zum anderen sicherstellt, dass hier nicht „Äpfel mit Birnen verglichen werden“, trägt bestimmt zur Verbesserung der Methode bei.

Eine weitere Schwäche der Methode liegt in der gleichen Bewertung von wichtigen und unwichtigen Konstrukten. Um dies zu verbessern sollen die Konstrukte deshalb gewichtet werden. Wie diese Gewichtung genau umgesetzt wird, ist noch nicht festgelegt. Es soll jedoch so sein, dass wichtigere Konstrukte einen größeren Einfluß haben, als unwichtige Konstrukte. Weiter gibt es noch die Möglichkeiten einerseits ein Konstrukt für alle Elemente als wichtig zu bezeichnen und andererseits ein Konstrukt für ein Element als wichtig einzustufen und für ein anderes Element als unwichtig.

Bewertung der Ergebnisgüte

Für die oben erwähnten Probleme wurde bis jetzt noch keine Lösung gefunden. Damit jedoch vorher schon abgeschätzt werden kann, wie sicher und zuverlässig die Auswertung ist, wird ein Maß gesucht, das die Güte des Ergebnisses voraussagt.

Somit stellt sich die Frage, bei welchen Matrizen der Einfluß der Probleme größer ist. Kann man diese Matrizen vorher schon erkennen?

Hat man zu Beginn ähnliche Matrizen, das heißt mit vielen gleichen Einträgen, so werden bei der Auswertung die einzigen Unterschiede, die zwischen diesen Matrizen bestehen, identifiziert. Vor allem bei kleinen Matrizen, die aus wenigen Elementen und Konstrukten bestehen, ist der Unterschied zwischen den Matrizen nicht so groß. Mit zunehmender Element- und Konstruktanzahl nimmt die Ähnlichkeit der Matrizen jedoch ab. Da bei größeren Matrizen mehr Einträge existieren ist die Wahrscheinlichkeit hier größer, dass die Matrizen sich unterscheiden. Deshalb kann die Größe der Matrizen als einfaches Maß für die Güte des Ergebnisses stehen.

Ein weiterer Punkt, mit dem auch die Qualität der Ergebnisse vorausgesagt werden kann, ist die Homogenität der Konstrukanzahl. Unterscheiden sich die Matrizen bereits in ihrer Konstrukanzahl sehr stark, so könnte dies auch Auswirkungen auf die inhaltlichen Unterschiede bewirken. Auf jeden Fall sollte ausgeschlossen werden, dass solche äußerlichen Unterschiede Einfluß nehmen auf die inhaltlichen Vergleiche. Matrizen, die diese Unterschiede aufweisen, sollten deshalb genau betrachtet werden.

4.2 Reduktion auf zwei Dimensionen führt zu Informationsverlust

Dieser Abschnitt beschreibt ein weiteres Problem. Im Gegensatz zum vorigen liegt dieses nicht innerhalb einer Teilmethode, sondern wird durch die Verknüpfung zweier Teilmethoden ausgelöst. Nach der Eigenstrukturanalyse werden für die graphische Darstellung der Elemente und Konstrukte die Matrizen auf zwei Dimensionen projiziert. Mit diesen reduzierten Matrizen wird im nächsten Teilschritt, der Procrustes-Analyse, weitergearbeitet. Dadurch erhält man einen enormen Informationsverlust, denn für die Procrustes-Analyse ist es nicht notwendig, die Matrizen auf zwei Dimensionen zu reduzieren. Es sind beliebige $(m \times n)$ -Matrizen erlaubt.

Ein weiteres Beispiel zeigt die Probleme, die durch die Reduktion auf zwei Dimensionen entstehen. Denn es werden Ähnlichkeiten nicht erkannt, und somit oft Distanzen berechnet, für die die Annäherung der Matrizen nicht optimal ist.

BEISPIEL 5.2

Gegeben sind drei (3×4) -Matrizen. Diese sollen die Elementmatrizen von drei Teilnehmern nach der Eigenstrukturanalyse darstellen. Zum einen werden diese Matrizen auf zwei Dimensionen, also auf zwei Zeilen reduziert, so wie es bisher in der Methode gemacht wurde. Dann wird mit diesen (2×4) -Matrizen die Procrustes-Analyse durchgeführt. Zum anderen werden die Elementmatrizen nicht reduziert und somit als (3×4) -Matrizen in der Procrustes-Analyse weiterbearbeitet. In Tabelle 4.5 sind diese Matrizen aufgeführt.

Matrix 1				Matrix 2				Matrix 3			
-1,0	-2,0	1,0	-2,0	3,0	-3,0	1,0	-2,0	3,0	3,0	-2,0	2,0
2,0	1,0	2,0	-0,5	-1,0	1,0	2,5	-1,0	-1,0	1,0	2,0	2,0
1,5	-1,5	-1,0	0,0	0,5	-0,5	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	-1,0

Tabelle 4.5: Die drei gegebenen Matrizen.

Nun wendet man die Procrustes-Analyse auf die zweidimensionalen Matrizen an, das heißt auf die ersten beiden Zeilen der gegebenen Matrizen. Von den angenäherten Matrizen, die daraus entstehen, werden die Distanzen bestimmt und in der Distanzmatrix eingetragen (siehe Tabelle 4.6).

	Matrix1	Matrix 2	Matrix 3
Matrix 1	0	1,395	1,226
Matrix 2	1,395	0	1,478
Matrix 3	1,226	1,478	0

Tabelle 4.6: Distanzmatrix der 2D-Ausgangsmatrizen.

Die Distanzmatrix zu den nicht-reduzierten Matrizen unterscheidet sich von der Distanzmatrix zu den dreidimensionalen Ausgangsmatrizen (siehe Tabelle 4.7).

	Matrix 1	Matrix 2	Matrix 3
Matrix 1	0	0,572	1,061
Matrix 2	0,572	0	1,382
Matrix 3	1,061	1,382	0

Tabelle 4.7: Distanzmatrix der 3D-Ausgangsmatrizen.

Vergleicht man die beiden Distanzmatrizen miteinander, so sieht man gleich, dass sich vor allem die Distanz zwischen Matrix 1 und 2 sehr stark verändert hat, und zwar von 1,395 im Zweidimensionalen auf 0,572 im Dreidimensionalen. Damit ändern sich auch die Cluster zu den Distanzmatrizen.

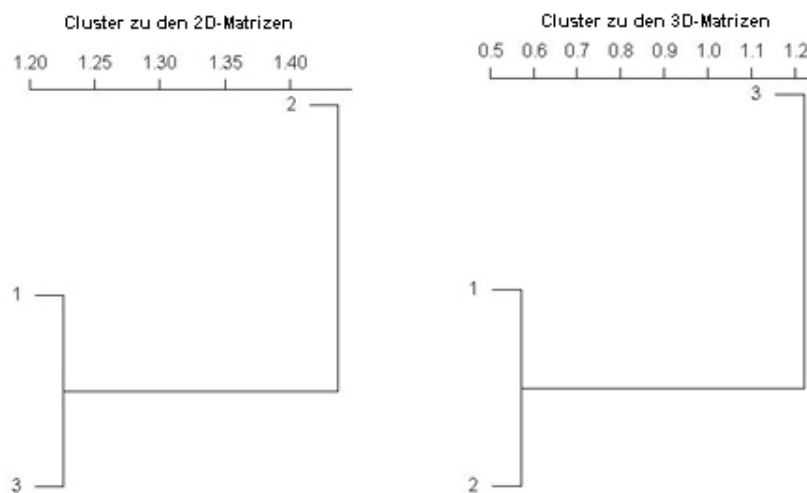


Abbildung 4.3: Cluster zu den Werten in 2D und 3D.

Abbildung 4.3 zeigt, dass im Zweidimensionalen Matrix 1 und 3 eine Gruppe bilden, im Dreidimensionalen hingegen Matrix 1 und 2. Nun stellt sich die Frage, welche Clusterbildung die richtige ist. Diese Frage wird durch die graphischen Darstellungen in den verschiedenen Dimensionen beantwortet (siehe Abbildung 4.4 und 4.5).

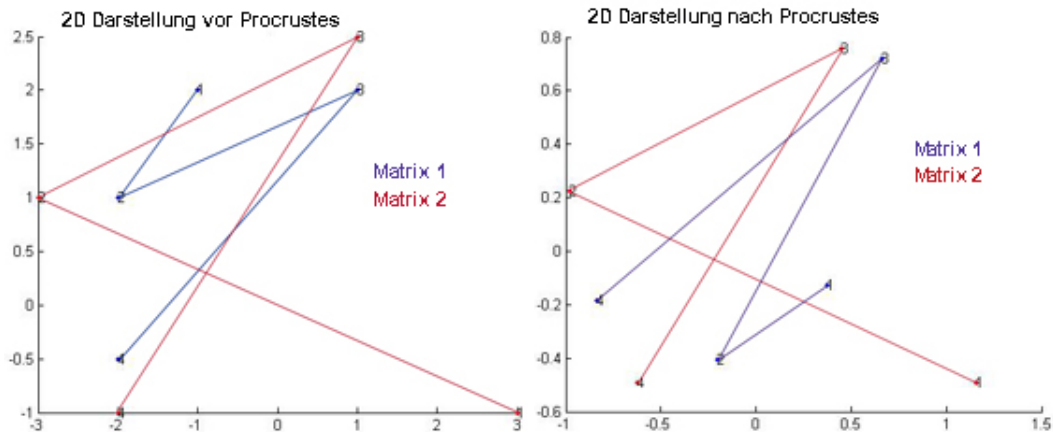


Abbildung 4.4: 2D Darstellung vor und nach der Procrustes-Analyse.

Die Konfiguration einer Matrix wird durch ihre Punkte beschrieben, wobei vor allem die Abstände und Winkel zwischen diesen Punkten wichtig sind. Das Verhältnis der Abstände und die Winkel dürfen deshalb bei der Procrustes-Analyse nicht verändert werden. Die Linien zwischen den Punkten sind Hilfslinien, die nur der Verdeutlichung dienen und somit den Unterschied zwischen der zweidimensionalen und dreidimensionalen Procrustes-Analyse besser erkennen lassen. Doch zuerst der Vergleich der dreidimensionalen Matrizen.

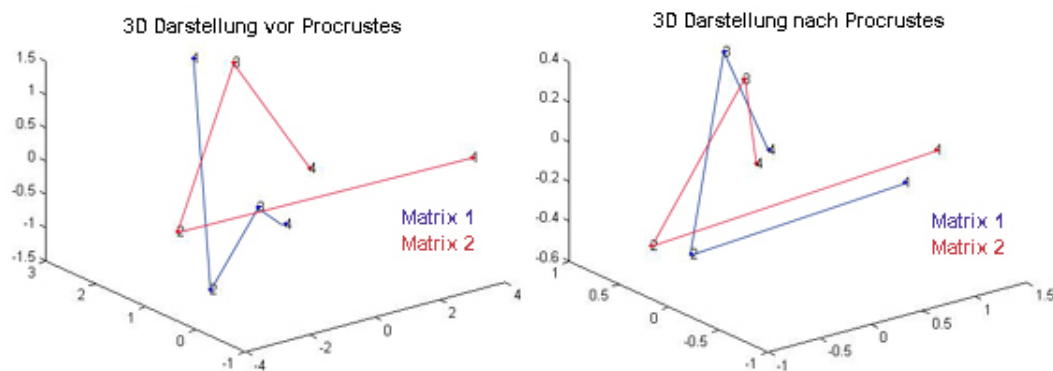


Abbildung 4.5: 3D Darstellung vor und nach der Procrustes-Analyse.

Bei der Gegenüberstellung der beiden Abbildungen sieht man, dass durch die dritte Dimension eine neue Rotationsrichtung entsteht. Die Konfigurationen können somit in eine weitere Richtungen gedreht werden, ohne die Winkel und Längenverhältnisse zu ändern. Das ermöglicht eine bessere Annäherung der verschiedenen Konfigurationen, so dass der Abstand der Punkte kleiner wird. Nach der Procrustes-Analyse im Dreidimensionalen sind die Punkte der Konfigurationen 1 und 2 einander sehr ähnlich. Dies war im Zweidimensionalen nicht möglich, da ohne Veränderung der Winkel die Punkte nicht in diese Anordnung gelangen konnten. Deshalb erkennt man die Ähnlichkeit der beiden Konfigurationen im Zweidimensionalen nicht. Also ist es sinnvoll, für die Procrustes-Analyse statt den reduzierten Matrizen die nicht-reduzierten zu verwenden.

Auswirkung auf das Ergebnis

Führt man die Analyse mit Dimensionsreduzierung durch, so werden die ursprünglichen Daten nicht mehr vollständig, sondern nur näherungsweise, dargestellt. Dieser Informationsverlust wird hier anschaulich erklärt.

Bei der Singulärwertzerlegung wird eine Matrix A in drei Matrizen zerlegt, so dass

$$A = UDV^t.$$

Die Matrizen $E = DV^t$ und $K = UD$ werden dann auf zwei Dimensionen reduziert. Anhand einer kleinen Abbildung wird erklärt, welche Daten dadurch verloren gehen.

Abbildung 4.6: Datenverlust durch reduzierte Matrizen.

Die reduzierten Matrizen E und K , die in Abbildung 4.6 gelb gekennzeichnet sind, zeigen, dass nur noch die ersten beiden Singulärwerte der Diagonalmatrix verwendet werden. Je größer die ersten beiden Singulärwerte sind, desto besser ist die Approximation an X . Doch es geht trotzdem ein großer Teil an Informationen verloren. Dies führt wiederum dazu, dass Matrizen als ähnlich gelten, die es gar nicht sind und umgekehrt. Für die Teilnehmer des Versuchs gilt somit, dass einige ähnlich erscheinen, obwohl sie es gar nicht sind. Die Informationen für den Unterschied stecken in den Daten, die durch die Reduzierung nicht berücksichtigt wurden. Umgekehrt kann natürlich auch ein großer Unterschied entstehen, obwohl sie sich sehr ähnlich sind.

Verbesserungen

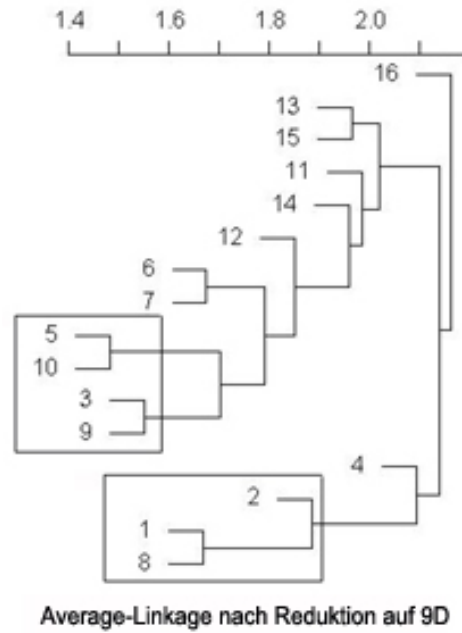
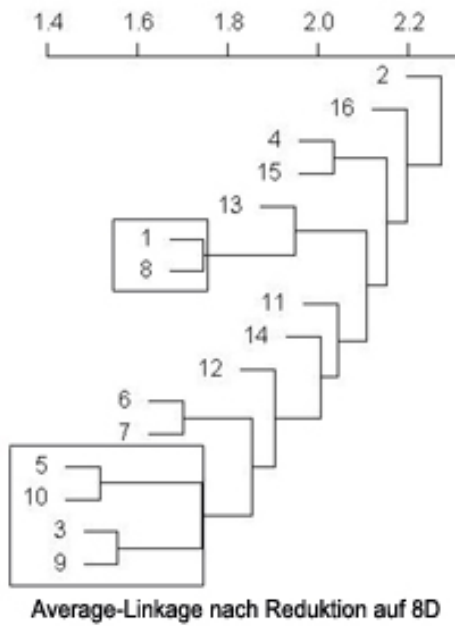
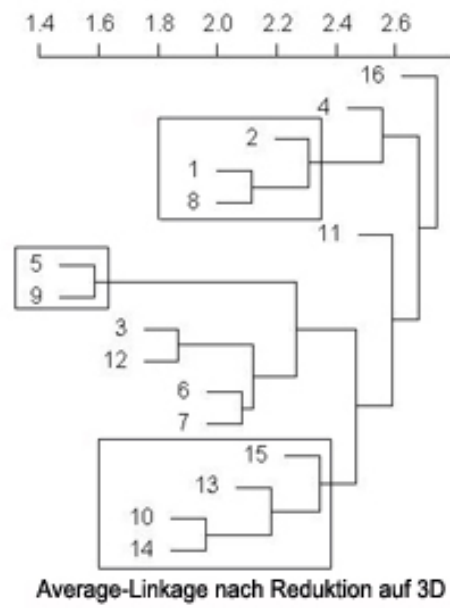
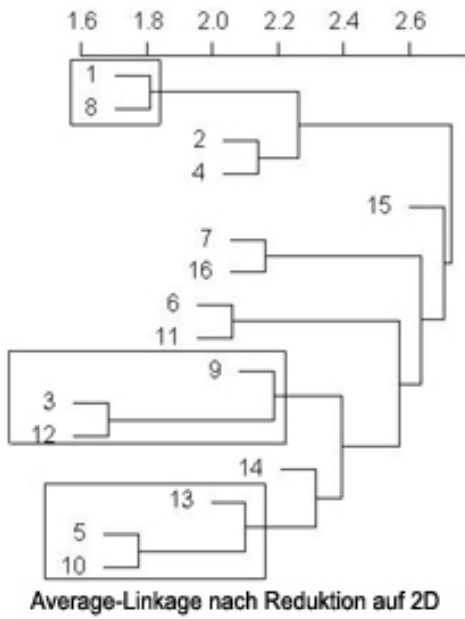
Wie gezeigt, sollten die Matrizen nach der Eigenstrukturanalyse nicht auf zwei Dimensionen reduziert werden, weshalb hier eine Lösung angegeben wird, die es ermöglicht, die nicht-reduzierten Matrizen für die Procrustes-Analyse zu verwenden. Dabei ändert sich an der eigentlichen Methode nichts, nur die Reduktion auf zwei Dimensionen entfällt. Bei der neuen Methode kann die Procrustes-Analyse mit jeder beliebigen Dimension durchgeführt werden, solange die maximale Dimension der Matrizen nicht überstiegen wird. Den Quellcode zur Procrustes-Analyse findet man im Anhang [A.4](#).

Mit diesen neuen Erkenntnissen wurden die Daten aus Kapitel [3](#) nochmals ausgewertet. Dabei ergeben sich neue Distanzmatrizen (siehe Anhang [A.2](#)) und folglich auch neue Cluster.

Die Procrustes-Analyse und somit die folgende Distanzberechnung und Clusterbestimmung wird mehrmals durchgeführt, und zwar mit verschiedenen Reduktionen. Für jede Dimension, also von 2 bis 11, werden die Cluster bestimmt. Bei der 11. Dimension wird keine Reduktion mehr gemacht.

Alle Dendrogramme zu den verschiedenen Dimensionen sind im Anhang [A.3](#) angegeben. Hier werden nur diejenigen aufgeführt, die zu neuen Erkenntnissen beitragen. Die Cluster-Bildung in den Single-Linkage Dendrogrammen ist nicht sonderlich interessant, da sich keine verschiedenen Gruppen bilden. Außerdem ist für das Ziel dieser Auswertung das Average-Linkage-Verfahren besser geeignet; die Gründe dafür sind schon in Kapitel [2.6](#) aufgeführt. Bei den Average-Linkage Dendrogrammen sind zum einen die stark reduzierten Matrizen in den Dimensionen 2 und 3, sowie die kaum reduzierten bzw. nicht-reduzierten Matrizen in den Dimensionen 8, 9, 10 und 11 interessant.

In Abbildung [4.7](#) sind die Dendrogramme zum Vergleich angegeben.



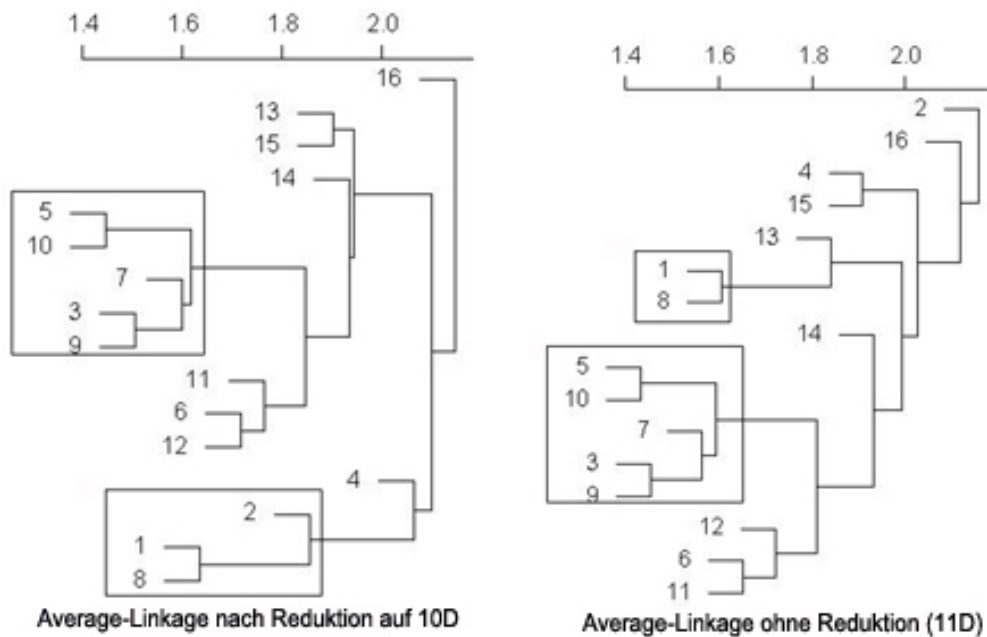


Abbildung 4.7: Dendrogramme zu den verschiedenen Dimensionen.

Das Average-Linkage Dendrogramm im Zweidimensionalen stellt nochmals das ursprüngliche Ergebnis dar. Die Gruppen, die als Resultat gebildet wurden, sind durch Kästchen hervorgehoben. In den anderen Dendrogrammen werden ebenfalls Gruppen gebildet, welche sich in den verschiedenen Dimensionen teilweise ändern. Den größten Unterschied findet man zwischen den 2D und 3D Dendrogrammen, denn im Dreidimensionalen gibt es keine Gruppe, die im Zweidimensionalen auch schon vorhanden war. Gut erkennbar ist, dass sich die Cluster in den höheren Dimensionen nicht mehr wesentlich ändern. Die Teilnehmer 3, 5, 9 und 10 sind schon ab der achten Dimension in einer Gruppe, die dann noch in Dimension 10 und 11 durch Teilnehmer 7 erweitert wird. Davon ausgehend sind folgende Gruppen möglich.

Gruppe 1: Teilnehmer 3, 5, 7, 9 und 10

Gruppe 2: Teilnehmer 1 und 8

Wie gezeigt, liefern verschiedene Dimensionen auch verschiedene Ergebnisse. Dabei muss nicht unbedingt das Ergebnis der höheren Dimension besser sein, da vielleicht gerade dort wichtige Zusammenhänge nicht erkannt werden. Doch ist sicher, dass bei höheren Dimensionen mehr Informationen verwendet werden, weswegen die Ergebnisse mit steigender Dimension größere Zuverlässigkeit versprechen. Da, wie erwähnt, einzelne Zusammenhänge nicht immer deutlich werden, ist es sinnvoll mehrere Dimensionen zu betrachten

und die Gruppierungen zu vergleichen. Die Teilnehmerkombinationen, die öfter auftreten, haben somit mehr Ähnlichkeiten.

Bei der Bestimmung der Cluster in den höheren Dimensionen ist noch ein Punkt zu beachten. Einige wenige Matrizen haben nicht genügend Konstrukte, so dass 11 Dimensionen nicht mehr vorhanden sind. Ein Beispiel dafür ist Matrix 16, die nach der Eigenstrukturanalyse in der Elementmatrix nur 9 Zeilen besitzt. Doch da sich für diese Matrix die Reihenfolge in dem Dendrogramm ab der neunten Dimension nicht wesentlich ändert, entsteht hierdurch kein Problem. Trotzdem sollte beachtet werden, wie groß die Anzahl der Zeilen nach der Eigenstrukturanalyse ist.

Bewertung der Ergebnisgüte

Da eine Reduzierung der Dimensionen bewirkt, dass die Ausgangsmatrix A nicht mehr vollständig, sondern näherungsweise, beschrieben wird, muss das Bewertungskriterium angeben, wie gut diese Näherung ist. Dafür wird ein Maß verwendet, das die Singulärwerte beurteilt. In der Auswertung des psychologischen Tests aus Kapitel 3 wurde dieses Maß ebenfalls schon als Bewertungskriterium für die Güte der Näherung verwendet.

Es werden die Eigenwerte der quadrierten Ausgangsmatrizen AA^t , betrachtet, was den quadrierten Singulärwerten von A entspricht. Dieser Zusammenhang ist auch in Kapitel 1.4 beschrieben. Die Eigenwerte zu Matrix 1 stehen in Tabelle 4.8.

121,19	33,10	26,19	21,14	12,36	7,93	5,74	3,57	2,36	1,56	0,87
--------	-------	-------	-------	-------	------	------	------	------	------	------

Tabelle 4.8: Eigenwerte zur quadrierten Matrix 1.

Je größer die ersten Eigenwerte sind, desto besser ist die Approximation in den unteren Dimensionen. Ein Maß dafür, ist der prozentuale Anteil der verschiedenen Eigenwerte an der Summe aller Eigenwerte.

0,51	0,65	0,77	0,85	0,91	0,94	0,97	0,98	0,99	1,00	1,00
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Tabelle 4.9: Kummulierte Anteile der Eigenwerte.

In Tabelle 4.9 sind die prozentualen Anteile der Eigenwerte kummuliert. Somit gibt die Annäherung mit der ersten Dimension 51% der Ausgangsmatrix wieder. Verwendet man zur Annäherung die ersten beiden Dimensionen, so wird die Ausgangsmatrix zu 65% beschrieben. Mit den ersten fünf Dimensionen erreicht man schon 91% der Ausgangsmatrix.

Es ist ebenfalls ein weiteres Indiz dafür, dass zwei Dimensionen nicht ausreichen, um die Matrix gut zu beschreiben. Außerdem erklärt es auch,

warum sich in den höheren Dimensionen die Gruppen nicht mehr so stark ändern, wie in den niedrigen Dimensionen. Diese Tabelle ist somit ein gutes Maß für die Qualität der Approximation.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Die Repertory-Grid-Methode und vor allem die spezielle Auswertung dieser Methode wurde hier detailliert mit Hilfe von einfachen Beispielen erklärt. Dabei sind sowohl die Vorteile, wie auch die Nachteile dieser Methode erläutert worden.

Die Vorteile liegen auf jeden Fall in der Flexibilität des Anwendungsbereiches sowie in der dennoch strukturierten Auswertung. Durch diese Art der Auswertung kann individuell für jeden Teilnehmer die persönliche Einstellung aufgezeigt werden und zusätzlich noch die Abhängigkeit der Teilnehmer untereinander. Um diese Vielfältigkeit in der Auswertung zu erhalten, werden mehrere Methoden miteinander kombiniert. Durch die Kombination dieser verschiedenen Methoden können jedoch Schwierigkeiten auftreten.

Diese Schwierigkeiten sind in Kapitel 4 herausgearbeitet. Für das Problem der Dimensionsreduzierung nach der Eigenstrukturanalyse wurde auch eine einfache Lösung gefunden, die sogar zu neuen Erkenntnissen bei dem gegebenen Datensatz aus der Praxis geführt hat. Für die Schwierigkeiten, die durch die Identifizierung von verschiedenen Matrizen entstehen, wurden Verbesserungsmöglichkeiten angegeben, jedoch keine konkreten Lösungen. Die Vorschläge beziehen sich größtenteils auf die Ausgangsdaten, so dass die Umsetzung einen enormen Aufwand bedeutet hätte, beziehungsweise der Kontakt zu den Versuchsteilnehmern nötig gewesen wäre. Deshalb konnten die Ideen zu dem Problem im Rahmen dieser Arbeit nicht umgesetzt werden.

Deshalb sollen die Bewertungskriterien für die Güte der Ergebnisse helfen, die Probleme zumindest zu erkennen und dadurch Fehler bei der Interpretation zu vermeiden.

Anhang

A.1 Ausgangsmatrizen

Die folgenden Matrizen sind die Ausgangsmatrizen zu dem psychologischen Test, der in Kapitel 3 beschrieben wird. Dabei handelt es sich um 16 Matrizen.

Matrix 1

-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	1	0	-1	-1	1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	0	1	1	1	1	-1	1	1	-1
-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1

Matrix 2

-1	1	-1	0	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	0	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	0	1
-1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1
1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1
-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

Matrix 3

-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	0	-1
-1	1	1	-1	1	0	1	-1	-1	0	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	0	-1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	0	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0	-1
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	0	1

Matrix 4

1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	0	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	-1
0	-1	1	1	1	0	-1	0	1	1	1	-1
0	1	1	1	1	0	-1	0	1	-1	1	1
1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Matrix 5

-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	0	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	1	1
1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1

Matrix 6

1	-1	0	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	0	-1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1
-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1
-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1

Matrix 7

-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1

Matrix 8

-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	0	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	0	1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	0	-1	-1	0	1	1	1	-1	1
1	-1	0	1	1	0	-1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	0	0	0	-1
0	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
0	1	0	-1	1	1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1	0	1	0	1	1	-1
1	1	1	1	1	0	-1	0	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	0	1	1	1	1	1
-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1

Matrix 9

-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1

Matrix 10

1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	0	-1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1

Matrix 11

1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1
-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1

Matrix 12

-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	0	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1

Matrix 13

-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	0	-1	1	0	-1
-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1	0	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1

Matrix 14

1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1

Matrix 15

1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1

Matrix 16

1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1
-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1

A.2 Distanzmatrizen

Hier stehen die Distanzmatrizen nach der Verbesserung.

Distanzmatrix 3D															
0,000	2,317	2,847	2,444	2,858	2,657	3,006	2,114	2,864	2,507	2,789	2,616	2,395	2,593	2,512	2,706
2,317	0,000	2,496	2,496	2,796	2,638	2,918	2,303	2,889	2,749	2,945	2,211	2,744	2,585	2,822	2,996
2,847	2,496	0,000	2,682	1,957	2,180	1,929	2,686	2,128	2,169	2,560	1,869	2,345	2,540	2,830	2,713
2,444	2,496	2,682	0,000	2,914	2,767	2,932	2,725	2,691	2,904	2,953	2,788	2,750	2,597	2,699	2,898
2,858	2,796	1,957	2,914	0,000	2,295	2,170	2,645	1,587	1,837	2,581	2,285	2,371	2,351	2,388	2,756
2,657	2,638	2,180	2,767	2,295	0,000	2,081	2,391	2,527	2,405	2,202	2,070	2,216	2,627	2,666	2,771
3,006	2,918	1,929	2,932	2,170	2,081	0,000	2,695	2,235	2,112	2,417	2,294	2,490	2,570	2,545	2,246
2,114	2,303	2,686	2,725	2,645	2,391	2,695	0,000	2,759	2,227	2,618	2,492	2,462	2,337	2,403	2,448
2,864	2,889	2,128	2,691	1,587	2,527	2,235	2,759	0,000	2,570	2,986	2,532	2,626	2,804	2,764	2,688
2,507	2,749	2,169	2,904	1,837	2,405	2,112	2,227	2,570	0,000	2,364	2,090	2,004	1,960	2,323	2,794
2,789	2,945	2,560	2,953	2,581	2,202	2,417	2,618	2,986	2,364	0,000	2,531	2,526	2,685	3,048	2,882
2,616	2,211	1,869	2,788	2,285	2,070	2,294	2,492	2,532	2,090	2,531	0,000	2,569	2,441	2,864	3,008
2,395	2,744	2,345	2,750	2,371	2,216	2,490	2,462	2,626	2,004	2,526	2,569	0,000	2,359	2,305	2,694
2,593	2,585	2,540	2,597	2,351	2,627	2,570	2,337	2,804	1,960	2,685	2,441	2,359	0,000	2,406	2,901
2,512	2,822	2,830	2,699	2,388	2,666	2,545	2,403	2,764	2,323	3,048	2,864	2,305	2,406	0,000	2,575
2,706	2,996	2,713	2,898	2,756	2,771	2,246	2,448	2,688	2,794	2,882	3,008	2,694	2,901	2,575	0,000

Distanzmatrix 4D															
0,000	2,254	2,814	2,526	2,666	2,594	2,959	1,949	2,803	2,527	2,657	2,523	2,367	2,547	2,362	2,540
2,254	0,000	2,468	2,360	2,640	2,596	2,885	2,296	2,681	2,636	2,793	2,323	2,717	2,456	2,811	2,845
2,814	2,468	0,000	2,676	2,015	2,251	2,058	2,400	2,146	2,150	2,444	2,082	2,265	2,564	2,666	2,510
2,526	2,360	2,676	0,000	2,802	2,634	2,831	2,678	2,637	2,689	2,755	2,568	2,627	2,587	2,709	2,666
2,666	2,640	2,015	2,802	0,000	2,075	2,268	2,354	1,712	1,888	2,409	2,440	2,124	2,125	2,181	2,552
2,594	2,596	2,251	2,634	2,075	0,000	2,147	2,194	2,379	2,221	2,168	2,192	2,326	2,496	2,472	2,705
2,959	2,885	2,058	2,831	2,268	2,147	0,000	2,627	2,184	2,164	2,285	2,314	2,574	2,645	2,471	1,972
1,949	2,296	2,400	2,678	2,354	2,194	2,627	0,000	2,597	2,128	2,548	2,207	2,243	2,323	2,471	2,239
2,803	2,681	2,146	2,678	1,712	2,379	2,184	2,597	0,000	2,284	2,701	2,409	2,525	2,688	2,427	2,537
2,527	2,636	2,150	2,637	1,888	2,221	2,164	2,128	2,284	0,000	2,275	2,064	2,210	1,870	2,159	2,366
2,657	2,793	2,444	2,689	2,409	2,168	2,285	2,548	2,701	2,275	0,000	2,265	2,694	2,586	2,936	2,710
2,523	2,323	2,082	2,755	2,440	2,192	2,314	2,207	2,409	2,064	2,265	0,000	2,605	2,362	2,703	2,799
2,367	2,717	2,265	2,568	2,124	2,326	2,574	2,243	2,525	2,210	2,694	2,605	0,000	2,448	2,290	2,451
2,547	2,456	2,564	2,627	2,125	2,496	2,645	2,323	2,688	1,870	2,586	2,362	2,448	0,000	2,563	2,734
2,362	2,811	2,666	2,587	2,181	2,472	2,471	2,471	2,427	2,159	2,936	2,703	2,290	2,563	0,000	2,456
2,540	2,845	2,510	2,709	2,552	2,705	1,972	2,239	2,537	2,366	2,710	2,799	2,451	2,734	2,456	0,000

Distanzmatrix 5D															
0,000	2,188	2,572	2,251	2,462	2,404	2,770	1,837	2,574	2,285	2,635	2,425	2,232	2,427	2,298	2,442
2,188	0,000	2,488	2,369	2,518	2,424	2,754	2,107	2,662	2,470	2,657	2,221	2,676	2,335	2,639	2,763
2,572	2,488	0,000	2,594	1,892	2,168	1,810	2,278	1,991	1,976	2,497	2,124	2,296	2,291	2,477	2,411
2,251	2,369	2,594	0,000	2,552	2,419	2,542	2,439	2,628	2,391	2,646	2,605	2,344	2,367	2,282	2,496
2,462	2,518	1,892	2,552	0,000	2,023	2,014	2,182	1,853	1,551	2,365	2,288	2,201	2,028	2,222	2,462
2,404	2,424	2,168	2,419	2,023	0,000	1,979	1,961	2,399	2,058	2,149	2,217	2,268	2,286	2,522	2,516
2,770	2,754	1,810	2,542	2,014	1,979	0,000	2,454	2,091	1,961	2,156	2,309	2,386	2,380	2,370	2,120
1,837	2,107	2,278	2,439	2,182	1,961	2,454	0,000	2,412	1,806	2,351	2,253	2,234	2,255	2,358	2,293
2,574	2,662	1,991	2,628	1,853	2,399	2,091	2,412	0,000	2,103	2,597	2,471	2,406	2,597	2,348	2,282
2,285	2,470	1,976	2,391	1,551	2,058	1,961	1,806	2,103	0,000	2,372	2,125	2,133	1,858	2,177	2,295
2,635	2,657	2,497	2,646	2,365	2,149	2,156	2,351	2,597	2,372	0,000	2,271	2,625	2,454	2,777	2,716
2,425	2,221	2,124	2,605	2,288	2,217	2,309	2,253	2,471	2,125	2,271	0,000	2,608	2,303	2,637	2,729
2,232	2,676	2,296	2,344	2,201	2,268	2,386	2,234	2,406	2,133	2,625	2,608	0,000	2,327	2,282	2,385
2,427	2,335	2,291	2,367	2,028	2,286	2,380	2,255	2,597	1,858	2,454	2,303	2,327	0,000	2,339	2,681
2,298	2,639	2,477	2,282	2,222	2,522	2,370	2,358	2,348	2,177	2,777	2,637	2,282	2,339	0,000	2,552
2,442	2,763	2,411	2,496	2,462	2,516	2,120	2,293	2,282	2,295	2,716	2,729	2,385	2,681	2,552	0,000

Distanzmatrix 6D															
0,000	2,098	2,436	2,214	2,500	2,276	2,654	1,822	2,526	2,285	2,559	2,269	2,200	2,483	2,252	2,410
2,098	0,000	2,396	2,311	2,481	2,390	2,734	2,077	2,573	2,433	2,474	2,173	2,596	2,289	2,628	2,614
2,436	2,396	0,000	2,521	1,816	2,089	1,782	2,310	1,959	1,809	2,399	1,949	2,242	2,250	2,340	2,377
2,214	2,311	2,521	0,000	2,512	2,308	2,541	2,329	2,578	2,307	2,453	2,509	2,369	2,427	2,246	2,414
2,500	2,481	1,816	2,512	0,000	1,900	2,064	2,189	1,795	1,634	2,306	2,174	2,068	1,940	2,107	2,424
2,276	2,390	2,089	2,308	1,900	0,000	1,966	1,891	2,392	1,886	2,084	1,906	2,157	2,220	2,331	2,489
2,654	2,734	1,782	2,541	2,064	1,966	0,000	2,364	2,039	1,868	2,172	2,134	2,370	2,221	2,269	2,065
1,822	2,077	2,310	2,329	2,189	1,891	2,364	0,000	2,323	1,838	2,256	2,071	2,156	2,327	2,241	2,179
2,526	2,573	1,959	2,578	1,795	2,392	2,039	2,323	0,000	2,062	2,430	2,446	2,296	2,504	2,300	2,173
2,285	2,433	1,809	2,307	1,634	1,886	1,868	1,838	2,062	0,000	2,199	1,979	2,048	1,814	1,979	2,174
2,559	2,474	2,399	2,453	2,306	2,084	2,172	2,256	2,430	2,199	0,000	2,208	2,493	2,409	2,656	2,540
2,269	2,173	1,949	2,509	2,174	1,906	2,134	2,071	2,446	1,979	2,208	0,000	2,479	2,127	2,532	2,669
2,200	2,596	2,242	2,369	2,068	2,157	2,370	2,156	2,296	2,048	2,493	2,479	0,000	2,308	2,255	2,348
2,483	2,289	2,250	2,427	1,940	2,220	2,221	2,327	2,504	1,814	2,409	2,127	2,308	0,000	2,327	2,648
2,252	2,628	2,340	2,246	2,107	2,331	2,269	2,241	2,300	1,979	2,656	2,532	2,255	2,327	0,000	2,399
2,410	2,614	2,377	2,414	2,424	2,489	2,065	2,179	2,173	2,174	2,540	2,669	2,348	2,648	2,399	0,000

Distanzmatrix 7D															
0,000	2,008	2,374	2,160	2,382	2,138	2,545	1,818	2,398	2,211	2,433	2,169	2,058	2,273	2,180	2,401
2,008	0,000	2,386	2,311	2,423	2,313	2,625	2,086	2,476	2,377	2,437	2,037	2,589	2,227	2,535	2,577
2,374	2,386	0,000	2,442	1,728	2,104	1,778	2,216	1,799	1,761	2,273	1,793	2,159	2,149	2,181	2,296
2,160	2,311	2,442	0,000	2,429	2,173	2,377	2,316	2,486	2,235	2,379	2,372	2,288	2,224	2,153	2,376
2,382	2,423	1,728	2,429	0,000	1,887	1,841	2,155	1,695	1,522	2,162	2,041	1,979	1,921	1,988	2,310
2,138	2,313	2,104	2,173	1,887	0,000	1,729	1,753	2,279	1,840	1,958	1,943	2,055	2,122	2,243	2,338
2,545	2,625	1,778	2,377	1,841	1,729	0,000	2,236	2,019	1,794	2,020	2,073	2,337	2,121	2,111	1,985
1,818	2,086	2,216	2,316	2,155	1,753	2,236	0,000	2,216	1,710	2,141	2,092	2,059	2,188	2,204	2,134
2,398	2,476	1,799	2,486	1,695	2,279	2,019	2,216	0,000	2,007	2,281	2,196	2,143	2,350	2,143	2,110
2,211	2,377	1,761	2,235	1,522	1,840	1,794	1,710	2,007	0,000	2,189	1,906	1,911	1,813	1,966	2,081
2,433	2,437	2,273	2,379	2,162	1,958	2,020	2,141	2,281	2,189	0,000	2,086	2,349	2,304	2,530	2,354
2,169	2,037	1,793	2,372	2,041	1,943	2,073	2,092	2,196	1,906	2,086	0,000	2,372	2,013	2,441	2,565
2,058	2,589	2,159	2,288	1,979	2,055	2,337	2,059	2,143	1,911	2,349	2,372	0,000	2,264	2,114	2,302
2,273	2,227	2,149	2,224	1,921	2,122	2,121	2,188	2,350	1,813	2,304	2,013	2,264	0,000	2,112	2,599
2,180	2,535	2,181	2,153	1,988	2,243	2,111	2,204	2,143	1,966	2,530	2,441	2,114	2,112	0,000	2,321
2,401	2,577	2,296	2,376	2,310	2,338	1,985	2,134	2,110	2,081	2,354	2,565	2,302	2,599	2,321	0,000

Distanzmatrix 8D															
0,000	1,935	2,354	2,056	2,310	2,052	2,372	1,747	2,300	2,174	2,356	2,086	1,929	2,098	2,082	2,294
1,935	0,000	2,296	2,209	2,360	2,211	2,563	2,034	2,414	2,300	2,334	1,974	2,418	2,133	2,444	2,482
2,354	2,296	0,000	2,349	1,661	2,008	1,697	2,104	1,556	1,740	2,126	1,788	2,010	2,099	2,188	2,174
2,056	2,209	2,349	0,000	2,333	2,121	2,300	2,266	2,271	2,162	2,211	2,306	2,205	2,136	2,034	2,232
2,310	2,360	1,661	2,333	0,000	1,807	1,784	2,097	1,635	1,515	1,987	1,884	1,913	1,809	1,847	2,248
2,052	2,211	2,008	2,121	1,807	0,000	1,700	1,738	2,109	1,828	1,840	1,842	1,923	2,035	2,132	2,239
2,372	2,563	1,697	2,300	1,784	1,700	0,000	2,236	1,841	1,749	1,961	1,939	2,178	2,118	2,084	1,906
1,747	2,034	2,104	2,266	2,097	1,738	2,236	0,000	2,191	1,694	2,116	2,043	1,967	2,137	2,101	2,047
2,300	2,414	1,556	2,271	1,635	2,109	1,841	2,191	0,000	1,937	2,184	2,114	2,054	2,247	1,972	1,950
2,174	2,300	1,740	2,162	1,515	1,828	1,749	1,694	1,937	0,000	2,113	1,865	1,860	1,778	1,850	1,973
2,356	2,334	2,126	2,211	1,987	1,840	1,961	2,116	2,184	2,113	0,000	2,012	2,262	2,127	2,373	2,301
2,086	1,974	1,788	2,306	1,884	1,842	1,939	2,043	2,114	1,865	2,012	0,000	2,243	1,953	2,308	2,470
1,929	2,418	2,010	2,205	1,913	1,923	2,178	1,967	2,054	1,860	2,262	2,243	0,000	2,024	2,004	2,198
2,098	2,133	2,099	2,136	1,809	2,035	2,118	2,137	2,247	1,778	2,127	1,953	2,024	0,000	2,031	2,498
2,082	2,444	2,188	2,034	1,847	2,132	2,084	2,101	1,972	1,850	2,373	2,308	2,004	2,031	0,000	2,219
2,294	2,482	2,174	2,232	2,248	2,239	1,906	2,047	1,950	1,973	2,301	2,470	2,198	2,498	2,219	0,000

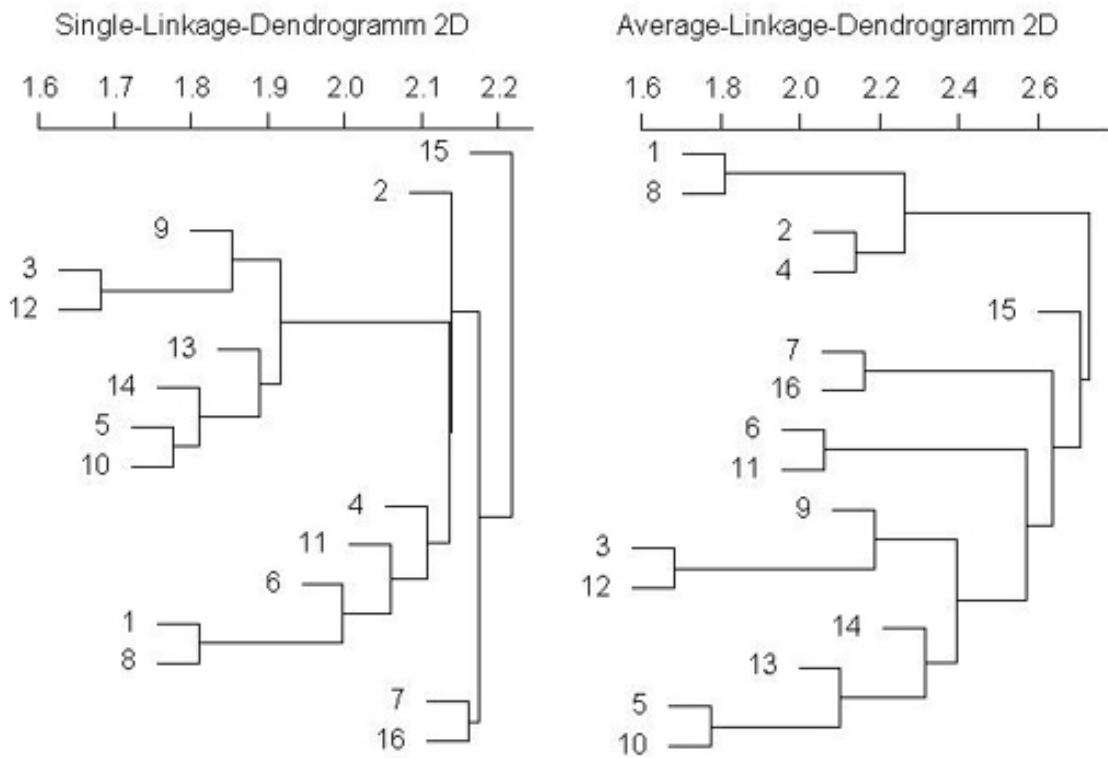
Distanzmatrix 9D															
0,000	1,812	2,301	1,997	2,236	1,996	2,355	1,669	2,278	2,099	2,325	1,985	1,857	2,079	2,064	2,239
1,812	0,000	2,256	2,110	2,280	2,196	2,498	1,958	2,361	2,222	2,275	1,926	2,355	2,063	2,368	2,459
2,301	2,256	0,000	2,267	1,649	1,940	1,658	2,079	1,552	1,735	2,098	1,746	1,971	2,069	2,134	2,146
1,997	2,110	2,267	0,000	2,263	2,071	2,228	2,175	2,172	2,098	2,203	2,250	2,138	2,066	1,974	2,178
2,236	2,280	1,649	2,263	0,000	1,725	1,726	2,050	1,580	1,481	1,926	1,829	1,850	1,738	1,822	2,148
1,996	2,196	1,940	2,071	1,725	0,000	1,675	1,739	2,062	1,780	1,825	1,772	1,827	2,016	2,096	2,206
2,355	2,498	1,658	2,228	1,726	1,675	0,000	2,199	1,766	1,673	1,920	1,899	2,140	2,066	2,004	1,828
1,669	1,958	2,079	2,175	2,050	1,739	2,199	0,000	2,156	1,656	2,094	1,957	1,934	2,096	2,082	2,006
2,278	2,361	1,552	2,172	1,580	2,062	1,766	2,156	0,000	1,849	2,103	2,048	2,036	2,198	1,916	1,863
2,099	2,222	1,735	2,098	1,481	1,780	1,673	1,656	1,849	0,000	2,038	1,808	1,791	1,736	1,829	1,914
2,325	2,275	2,098	2,203	1,926	1,825	1,920	2,094	2,103	2,038	0,000	1,893	2,201	2,077	2,320	2,269
1,985	1,926	1,746	2,250	1,829	1,772	1,899	1,957	2,048	1,808	1,893	0,000	2,181	1,891	2,236	2,422
1,857	2,355	1,971	2,138	1,850	1,827	2,140	1,934	2,036	1,791	2,201	2,181	0,000	1,994	1,966	2,139
2,079	2,063	2,069	2,066	1,738	2,016	2,066	2,096	2,198	1,736	2,077	1,891	1,994	0,000	2,022	2,468
2,064	2,368	2,134	1,974	1,822	2,096	2,004	2,082	1,916	1,829	2,320	2,236	1,966	2,022	0,000	2,168
2,239	2,459	2,146	2,178	2,148	2,206	1,828	2,006	1,863	1,914	2,269	2,422	2,139	2,468	2,168	0,000

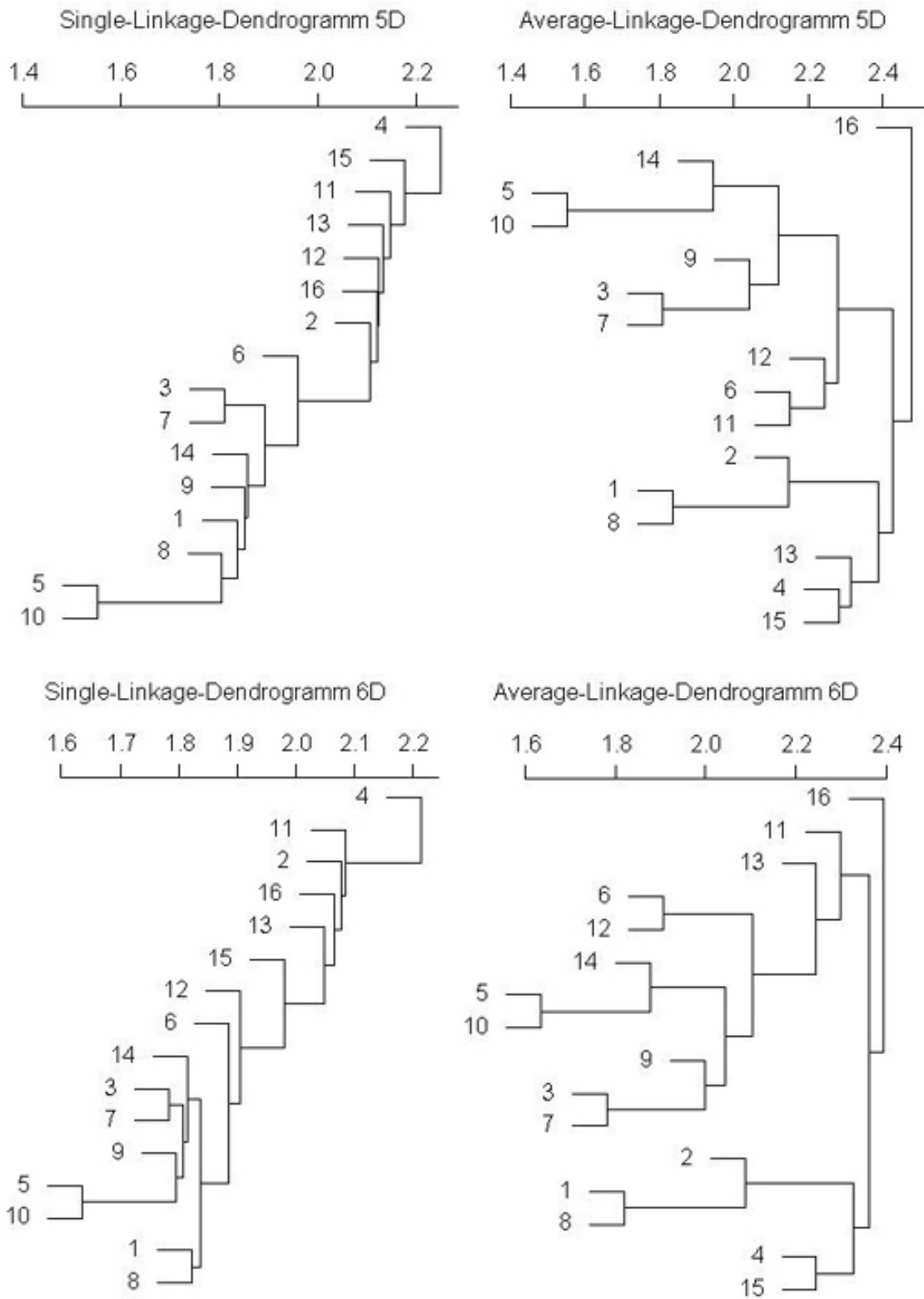
Distanzmatrix 10D															
0,000	1,779	2,263	1,967	2,211	1,944	2,330	1,635	2,246	2,044	2,279	1,973	1,825	2,066	2,014	2,216
1,779	0,000	2,198	2,077	2,254	2,165	2,454	1,933	2,313	2,186	2,203	1,870	2,311	2,036	2,297	2,432
2,263	2,198	0,000	2,205	1,545	1,894	1,578	2,057	1,507	1,639	2,075	1,665	1,885	2,012	2,041	2,149
1,967	2,077	2,205	0,000	2,237	2,036	2,201	2,151	2,138	2,061	2,132	2,191	2,088	2,058	1,921	2,172
2,211	2,254	1,545	2,237	0,000	1,672	1,655	2,035	1,462	1,446	1,848	1,810	1,783	1,732	1,765	2,130
1,944	2,165	1,894	2,036	1,672	0,000	1,604	1,726	1,966	1,766	1,732	1,719	1,762	1,986	2,009	2,177
2,330	2,454	1,578	2,201	1,655	1,604	0,000	2,143	1,624	1,608	1,829	1,849	2,016	2,035	1,904	1,792
1,635	1,933	2,057	2,151	2,035	1,726	2,143	0,000	2,125	1,616	2,063	1,923	1,907	2,087	2,055	2,003
2,246	2,313	1,507	2,138	1,462	1,966	1,624	2,125	0,000	1,793	2,069	1,987	1,953	2,181	1,846	1,860
2,044	2,186	1,639	2,061	1,446	1,766	1,608	1,616	1,793	0,000	1,933	1,742	1,730	1,707	1,764	1,914
2,279	2,203	2,075	2,132	1,848	1,732	1,829	2,063	2,069	1,933	0,000	1,800	2,109	1,985	2,211	2,269
1,973	1,870	1,665	2,191	1,810	1,719	1,849	1,923	1,987	1,742	1,800	0,000	2,125	1,856	2,173	2,412
1,825	2,311	1,885	2,088	1,783	1,762	2,016	1,907	1,953	1,730	2,109	2,125	0,000	1,983	1,903	2,106
2,066	2,036	2,012	2,058	1,732	1,986	2,035	2,087	2,181	1,707	1,985	1,856	1,983	0,000	1,961	2,468
2,014	2,297	2,041	1,921	1,765	2,009	1,904	2,055	1,846	1,764	2,211	2,173	1,903	1,961	0,000	2,124
2,216	2,432	2,149	2,172	2,130	2,177	1,792	2,003	1,860	1,914	2,269	2,412	2,106	2,468	2,124	0,000

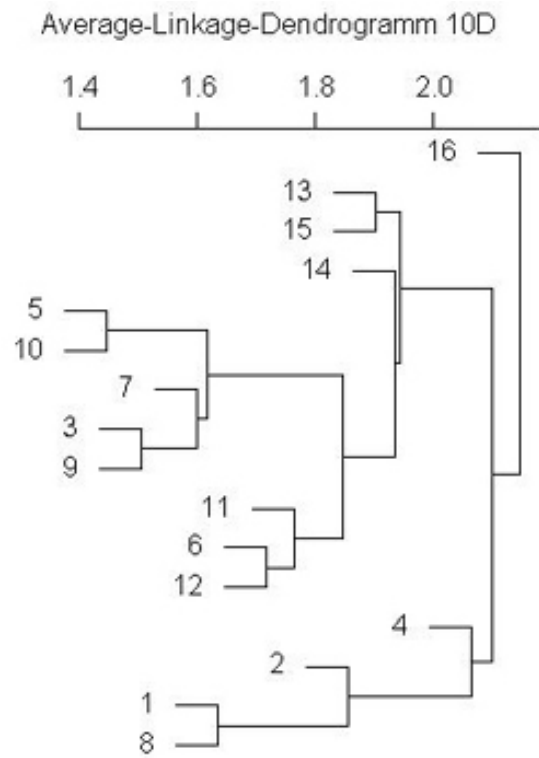
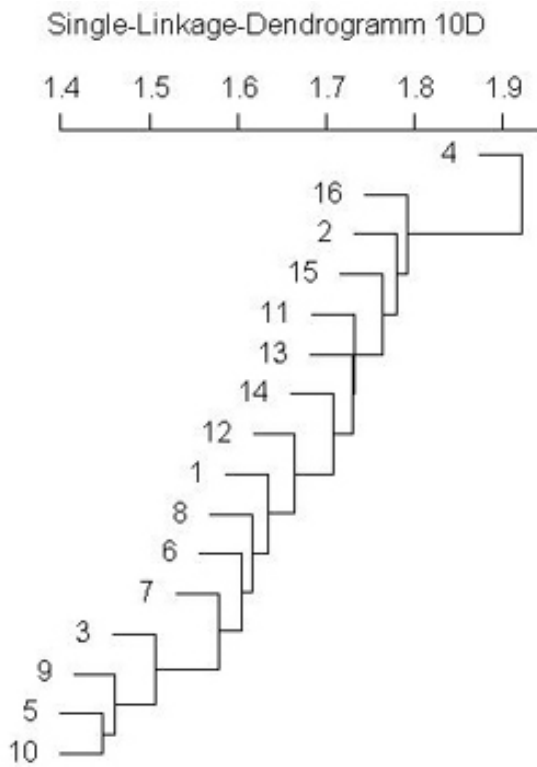
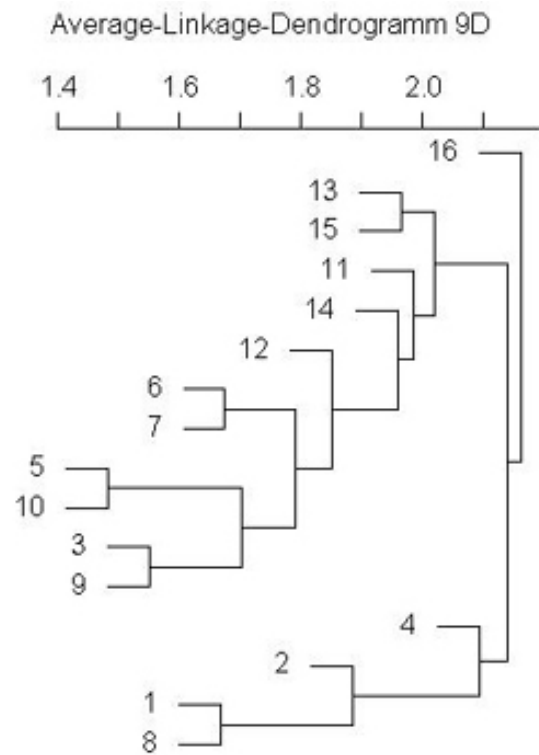
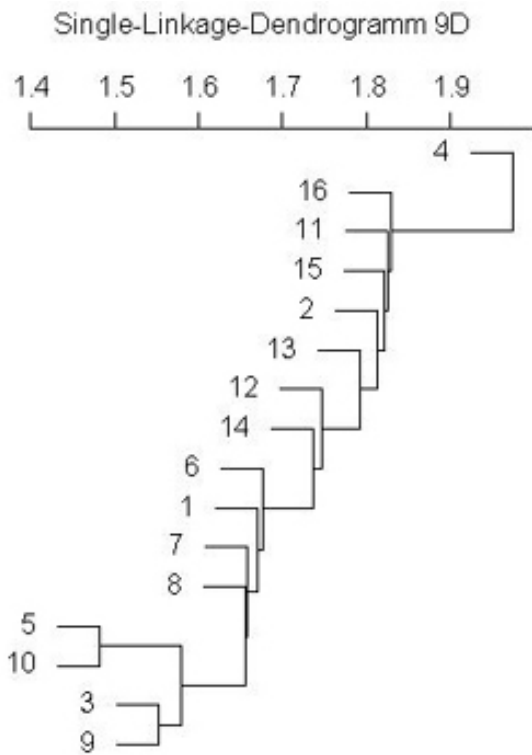
Distanzmatrix 11D															
0,000	1,757	2,218	1,923	2,186	1,929	2,297	1,606	2,213	2,005	2,205	1,941	1,789	2,036	1,960	2,207
1,757	0,000	2,154	2,068	2,247	2,147	2,449	1,933	2,311	2,186	2,188	1,859	2,302	2,036	2,294	2,432
2,218	2,154	0,000	2,178	1,497	1,803	1,511	2,038	1,454	1,603	1,976	1,609	1,847	2,008	2,012	2,098
1,923	2,068	2,178	0,000	2,223	2,016	2,180	2,149	2,125	2,057	2,085	2,164	2,053	2,053	1,909	2,171
2,186	2,247	1,497	2,223	0,000	1,640	1,632	2,030	1,436	1,431	1,827	1,795	1,752	1,733	1,752	2,111
1,929	2,147	1,803	2,016	1,640	0,000	1,571	1,714	1,935	1,744	1,653	1,672	1,736	1,973	1,977	2,170
2,297	2,449	1,511	2,180	1,632	1,571	0,000	2,141	1,615	1,606	1,782	1,830	1,984	2,029	1,893	1,791
1,606	1,933	2,038	2,149	2,030	1,714	2,141	0,000	2,123	1,616	2,034	1,920	1,893	2,087	2,050	2,003
2,213	2,311	1,454													

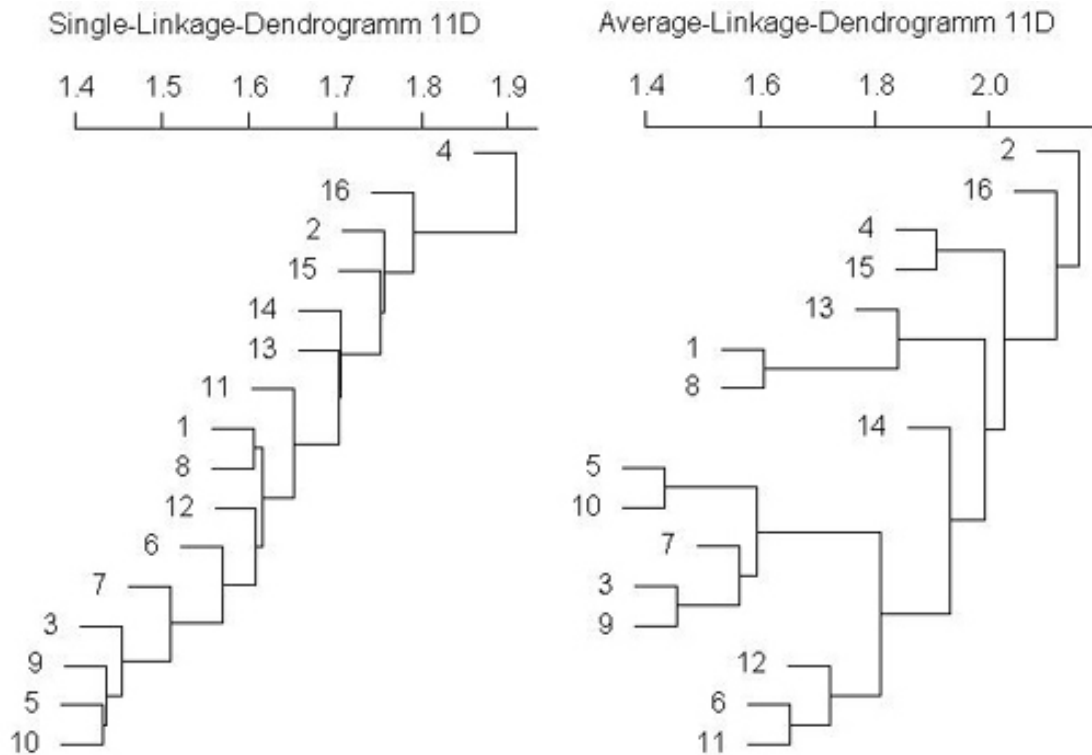
A.3 Dendrogramme nach Verbesserung

Dieses Kapitel im Anhang enthält die Single-Linkage- und Average-Linkage-Dendrogramme zu den Dimensionen 2 bis 11. Diese sind durch die Verbesserung entstanden, die in Kapitel 4.2 beschrieben wird.









A.4 Quellcode

In diesem Teil des Anhangs wird die Procrustes-Funktion angegeben, so wie sie in der verbesserten Auswertung verwendet wird. Der Quellcode bezieht sich auf die Sprache R (siehe [13]), in der diese Analyse auch durchgeführt wurde. Bei einem Aufruf der Procrustes-Funktion werden zwei Konfigurationen, die durch Matrizen beschrieben werden, einander angenähert. Als Ergebnis erhält man die Distanz zwischen diesen Matrizen. Außerdem folgen noch zwei einfache Funktionen, die in der Procrustes-Analyse verwendet werden.

```

## ===== Funktion Procrustes =====
# Die Funktion „procrustes“ bestimmt die optimale Annäherung zweier
# Konfigurationen, die als Matrizen A und B eingegeben werden.
# Vor der eigentlichen Procrustes-Analyse wird eine Standardisierung
# durchgeführt; nach der Procrustes-Analyse wird von den angenäherten
# Matrizen die Distanz bestimmt.
# Dazu werden zwei Funktionen verwendet: Die Funktion „spur“ berechnet
# Spur einer Matrix, die Funktion „center“ verschiebt die Konfiguration
# in den Nullpunkt.
# Eingabe: zwei Matrizen A und B
## Ausgabe: Distanz dist zwischen diesen Matrizen

procrustes <- function(A, B)
{
  # Beide Matrizen müssen gleiche Größe haben
  if(dim(A) != dim(B))
    stop("Matrizen müssen gleiche Größe haben.")

  # Anzahl Zeilen und Spalten
  m <- dim(A)[1]
  n <- dim(A)[2]

  # ===== Standardisierung =====

  # Verschiebung von B in den Nullpunkt
  B_cent <- center(B)
  B_stand <- B_cent*(1/sqrt(1/n*spur(B_cent %**% t(B_cent))))

  # ===== Procrustes =====

  # Verschiebung von A in den Nullpunkt
  A_cent <- center(A)

  # Singulärwertzerlegung von BAt
  udv <- svd(B_stand %**% t(A_cent))

  # Berechnung der Rotationsmatrix T
  T <- udv$v %**% t(udv$u)

  # Berechnung des Skalierungsfaktors c
  c <- spur(diag(udv$d))/spur(A_cent %**% t(A_cent))

  # Drehen und Skalieren von A
  A_end <- c * t(A_cent) %**% T

  # ===== Distanzen =====
  d <- 0
  for (i in 1:n){
    for (l in 1:m){
      # Abstand der einzelnen Punkte wird aufsummiert
      d <- d + (A_end[i,l]-B_stand[l,i])^2
    }
  }
  dist <- sqrt(d)
}

```

```
# ===== Funktionen Spur und Center =====
```

```
## ----- Berechnen der Spur einer Matrix -----
```

```
# Berechnet die Spur einer Matrix
```

```
# Eingabe: Eine Matrix matrix
```

```
## Ausgabe: die Spur a der Matrix
```

```
spur <- function(matrix)
{
  m <- dim(matrix)[1]
  n <- dim(matrix)[2]
  if(m <= n) j <- m
  else j <- n

  a <- 0
  for (i in 1:j){
    a <- a + matrix[i,i]
  }
  a
}
```

```
## ----- Zentrieren einer Matrix im Nullpunkt -----
```

```
# Verschiebt die Matrix in den Nullpunkt
```

```
# Eingabe: Eine Matrix matrix
```

```
## Ausgabe: Die verschobene Matrix meanmatrix
```

```
center <- function(matrix)
{
  m <- dim(matrix)[1]
  n <- dim(matrix)[2]
  mw <- matrix(0,m,n)
  for (i in 1:m){
    mw[i,] <- rep(mean(matrix[i,]),n)
  }
  meanmatrix <- matrix - mw
}
```

Literaturverzeichnis

- [1] Backhaus, K.; Erichson, B.; Plinke, W.; Weiber, R. *Multivariate Analysemethoden*. 11. Auflage. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [2] Berge, T.; J. M. F. *Least squares optimization in multivariate analysis*. Leiden, The Netherlands: DSWO, 1993.
- [3] Borg, I.; Groenen, P. J. F. *Modern Multidimensional Scaling. Theory and Applications*. Second Edition. Springer Verlag, 2005.
- [4] Clases, C. Das organisationale Gedächtnis als sozialer Prozess der Koordination wissensorientierter Zusammenarbeit. Freie Universität Berlin: unpublished phd thesis, 2002.
- [5] Fahrmeir, L.; Hamerle, A.; Tutz, G. (Hrsg.). *Multivariate statistische Verfahren*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996.
- [6] Fischer, G. *Lineare Algebra*. 12. Auflage. Vieweg, Wiesbaden, 2000.
- [7] Fromm, M. *Repertory Grid Methodik*. Ein Lehrbuch. Deutscher Studien Verlag, Weinheim, 1995.
- [8] Fromm, M. *Beiträge zur Psychologie der persönlichen Konstrukte*. Waxmann Verlag, Münster, 1999.
- [9] Gower, J. C. Generalized procrustes analysis. *Psychometrika*, 40:33–51, 1975.
- [10] Handl, A. Multivariate Verfahren - Theorie und Praxis multivariater Verfahren unter besonderer Berücksichtigung von S-PLUS. *Springer Verlag*, 2002.
- [11] Kelly, G. A. *Die Psychologie der persönlichen Konstrukte*. Junfermann-Verlag, Paderborn, 1986.
- [12] Lang, S. *Algebra*. Revised Third Edition. Springer Verlag, 2002.

- [13] R Development Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2005. ISBN 3-900051-07-0.
- [14] Raeithel, A. Kooperative Modellproduktion von Professionellen und Klienten. Erläutert am Beispiel des Repertory Grid. In *Selbstorganisation, Kooperation, Zeichenprozess. Arbeiten zu einer kulturwissenschaftlichen anwendungsbezogenen Psychologie*, Ch. Dahme (Hrsg.), pages 209–242. Westdeutscher Verlag, Opladen, Wiesbaden, 1998.
- [15] Scheer, J. W.; Catina, A. (Hrsg.). *Einführung in die Repertory Grid-Technik*. Band 1: Grundlagen und Methoden. Verlag Hans Huber, Bern, 1993.
- [16] Zurmühl, R.; Falk, S. *Matrizen und ihre Anwendungen*. Teil 1: Grundlagen. 5. Auflage. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Thema

Repertory Grid - Untersuchung eines Datenanalyseverfahrens

selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Die Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Falle durch Angaben der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung gekennzeichnet.

Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Konstanz, den 29. September 2006

Silke Werz