Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Studienfach Mathematik Diplom mit
Nebenfach Philosophie

Diplomarbeit zum Thema:

Ein Lokal-Global-Prinzip für Involutionen und hermitesche Formen

Betreuer: Prof. Dr. A. Prestel

Beatrix Bernauer

8. April 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Diplomarbeit basiert auf dem Artikel „A local-global principle for algebras with involution and hermitian forms“ von Lewis und Unger [LU-03]. In diesem Artikel wird Pfisters Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen übertragen auf zentraleinfache Algebren mit Involution. Pfisters Lokal-Global-Prinzip besagt, dass eine reguläre quadratische Form genau dann schwach hyperbolisch ist, wenn ihre totale Signatur null ist (siehe [S-85, 2. §7, Thm. 7.3], [PD-01, 3, Thm. 3.3.11]). Für zentraleinfache Algebren mit Involution lässt sich das übertragene Lokal-Global-Prinzip wie folgt formulieren:

Eine zentraleinfache Algebra mit Involution ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn die Signatur der Involution null ist für alle Anordnungen des Grundkörpers der Algebra mit Involution.

In dem Artikel von Lewis und Unger werden nur Algebren über Körpern der Charakteristik ungleich zwei betrachtet. Da es keine Anordnungen auf Körpern der Charakteristik zwei gibt, ist die Bedingung an die Signatur der Involution hier leer. Das hieße, jede zentraleinfache Algebra mit Involution wäre schwach hyperbolisch. Es gibt über Körpern der Charakteristik zwei jedoch Algebren mit nicht schwach hyperbolischen Involutionen.[1] Somit ist es notwendig, eine Einschränkung vorzunehmen: Dass der Grundkörper der Algebra von Charakteristik ungleich zwei ist, ist eine hinreichende Bedingung. Ich werde im Anhang den Fall von Algebren mit Involution über Körpern der Charakteristik zwei kurz behandeln. Für den Hauptteil betrachte ich nur Algebren über Körpern der Charakteristik ungleich zwei, weil es zum einen der Konvention entspricht und zum anderen den Text besser lesbar macht.

Im Kern besteht diese Arbeit aus drei Teilen, die aufeinander aufbauen: Ich werde zuerst das Lokal-Global-Prinzip einer Involution, ohne den Begriff der Signatur formuliert, beweisen (Kapitel 5). In den Aussagen dieses Kapitels steckt der eigentliche Gehalt des Lokal-Global-Prinzips und in ihren Beweisen das Besondere dieser Arbeit. Anders als in dem Artikel von Lewis und Unger [LU-03] benötige ich in den Beweisen Pfisters Lokal-Global-Prinzip nicht. Dieses ergibt sich wiederum aus den erhaltenen Aussagen und kann somit – ohne dass ein Zirkelschluss vorliegt – gefolgert werden. In einem zweiten Teil wird die Signatur einer Involution eingeführt und oben angegebenes Ergebnis abgeleitet (Kapitel 6). Der dritte Schritt ist eine Formulierung des Lokal-Global-Prinzips für hermitesche Formen (Kapitel 7) und damit eine Verallgemeinerung von Pfisters Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen.

[1] Dabei wird der Begriff der *schwach hyperbolischen Involution* – wie für Charakteristik ungleich zwei – aus dem Begriff der *hyperbolischen Involution* und dem Begriff der *orthogonalen Summe von Algebren mit Involution*, zusammengesetzt (siehe Anhang A).

Im Detail gliedert sich diese Arbeit wie folgt:

- Im nächsten, dem zweiten Kapitel gebe ich die grundlegenden Definitionen und Aussagen an. Es werden insbesondere die Begriffe *zentraleinfache Algebra* und *Involution (erster sowie zweiter Art)* eingeführt und mit einigen Beispielen veranschaulicht.

- Im dritten Kapitel wird die Beziehung zwischen (schief-)hermiteschen Formen und Involutionen untersucht. Das Ergebnis von Abschnitt 3.3 ist eine alternative – einfachere – Beschreibung des Begriffs *zentraleinfache Algebra mit Involution*: Jede zentraleinfache Algebra mit Involution ist isomorph zu einer Endomorphismenalgebra mit adjungierter Involution.

  In Abschnitt 3.4 werden Typen von Involutionen erster Art definiert. Schließlich wird der Begriff der *orthogonalen Summe einer Involution* eingeführt, welcher analog zu dem Begriff der *orthogonalen Summe einer hermiteschen Form* ist.

- Das vierte Kapitel beginnt mit einigen Ergebnissen über Rechtsideale zentraleinfacher Algebren. Es werden die Begriffe *(schwach) isotrope-* und *(schwach) hyperbolische Involution* eingeführt. In den Abschnitten 4.4 und 4.5 werden zwei für den Beweis des Lokal-Global-Prinzips essentielle Ergebnisse bewiesen: Eine Aussage über Algebren mit Involution, die über einer quadratischen Körpererweiterung hyperbolisch werden, und die Übertragung einer schwachen Version des Satzes von Springer auf Involutionen.

- Im fünften Kapitel wird das Lokal-Global-Prinzip für Involutionen bewiesen, wobei die Formulierung auf den Begriff der Signatur verzichtet. Der hier vorgestellte Beweis ist in seiner Idee ähnlich wie der Beweis in dem Artikel von Lewis und Unger [LU-03], verwendet aber Pfisters Lokal-Global-Prinzip nicht. In diesem Kapitel wird weiter bewiesen, dass die Ordnung einer schwach hyperbolischen Involution immer eine Zweierpotenz ist. Diese Aussage folgt, wie in [LU-03] festgestellt, aus einem allgemeineren Ergebnis von Scharlau über die Wittgruppe von halbeinfachen Algebren (siehe [S-70, Thm. 5.1]). Ich verwende dieses Ergebnis nicht, sondern gebe einen anderen Beweis an, der sich an dem Beweis des Lokal-Global-Prinzips für Involutionen orientiert.

- Das sechste, ziemlich technische Kapitel widmet sich dem Begriff der *Signatur einer Involution.* Der erste Abschnitt des Kapitels behandelt die Signatur spezieller hermitescher Formen und ist für das siebte Kapitel wichtig. Abschnitt 6.6 gibt eine Übersicht über die Signatur einer Involution, aus der sich mit den Resultaten des vorhergehenden Kapitels sofort das Lokal-Global-Prinzip in obiger Formulierung ableiten lässt.

- Im siebten Kapitel wird aus dem Lokal-Global-Prinzip für Involutionen ein Lokal-Global-Prinzip für hermitesche Formen über zentraleinfachen Algebren mit Involution abgeleitet. Ich führe im ersten Abschnitt die *Wittgruppe einer zentraleinfachen Algebra mit Involution* ein und übertrage die im vierten Kapitel erhaltene schwache Version des Satzes von Springer. In Abschnitt 7.3 führe ich in knapper Form die *Signatur hermitescher Formen* ein. Mit diesem Begriff ergibt sich für hermitesche Formen aus dem Lokal-Global-Prinzip für Involutionen eine Verallgemeinerung von Pfisters Lokal-Global-Prinzip.

- Das letzte Kapitel enthält neben einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit auch einen Ausblick auf noch offene Probleme, die über diese Arbeit hinausgehen, wie z.B. ob sich ein stärkeres Analogon zum Satz von Springer zeigen lässt.

Ich möchte besonders Karim Johannes Becher und Thomas Unger für die hilfreiche Unterstützung in mathematischen Fragen danken: Danke.

2 Zentraleinfache Algebren

Im gesamten Text wird mit K immer ein Körper der Charakteristik ungleich zwei bezeichnet.

In diesem Kapitel werden die wichtigen Grundbegriffe eingeführt und einige bekannte Ergebnisse zu zentraleinfachen Algebren und Involutionen, auf denen die Arbeit aufbaut, angegeben. Die Aussagen über zentraleinfache Algebren sind im Wesentlichen diejenigen, die in dem Seminar „Algebren und Involutionen" an der Universität Konstanz (SS 2003) behandelt wurden. Kenntnisse über quadratische Formen werden vorausgesetzt.

2.1 Zentraleinfache Algebren

Wir betrachten zentraleinfache K-Algebren mit Involution. Eine K-Algebra A heißt **zentraleinfach**,[2] falls gilt:

- A ist ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.
- A ist **einfach**, d.h. die einzigen beidseitigen Ideale von A sind $\{0\}$ und A.
- A ist **zentral**, d.h. das Zentrum $Z(A) := \{x \in A|\ \forall y \in A:\ x\cdot y = y\cdot x\}$ ist K.

Beispiele

1. Quaternionenalgebren über K sind zentraleinfache K-Algebren. Eine **Quaternionenalgebra** $(a,b)_K$ über K, für $a,\ b \in K^\times$,[3] ist ein K-Vektorraum der Dimension vier mit Basis 1, i, j, k, auf dem eine Multiplikation durch

$$i \cdot j = k = -j \cdot i,\ i^2 = a,\ j^2 = b$$

definiert wird. Man kann zeigen (siehe [S-85, 8. §11]), dass jede zentraleinfache K-Algebra mit $\dim_K A = 4$ eine Quaternionenalgebra ist, d.h. es gibt eine K-Basis 1, i, j, k von A, die obige Relationen für gewisse $a,\ b \in K^\times$ erfüllt. Eine solche Basis nennen wir **Quaternionenbasis** von A.

Eine Quaternionenalgebra $(a,b)_K$ ist genau dann eine Divisionsalgebra, wenn die quadratische Form $\langle -a, -b, ab\rangle$ über K anisotrop ist (siehe [S-85, 2. §11]). Dies ist insbesondere für $a = b = -1$ und K reell der Fall. Wir schreiben $\mathbb{H}_K$ für diese Divisionsalgebra.

---

[2] Dieser Begriff wird manchmal erweitert – so zum Beispiel in [KMRT-98, I. §2.B.] – in dem man K-Algebren $B := A_1 \times A_2$ zulässt, wobei A_1 und A_2 im obigen Sinne zentraleinfache K-Algebren sind. Das Zentrum von B ist dann $K \times K$. Wir beschränken uns im Folgenden jedoch auf das obige Konzept.

[3] Für einen Ring R bezeichnet $R^\times$ die Menge der invertierbaren Elemente von R.

2. Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K, $M_n(K)$, versehen mit der üblichen Matrizenaddition und -multiplikation eine zentraleinfache K-Algebra.

3. Das zweite Beispiel lässt sich noch verallgemeinern: Für jede zentraleinfache K-Algebra E und jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist $M_n(E)$ eine zentraleinfache K-Algebra.

2.2 Der Satz von Wedderburn

Beschränken wir uns im dritten Beispiel auf Divisionsalgebren, so erhalten wir bis auf Isomorphie schon alle zentraleinfachen K-Algebren. Dies besagt das bekannte Resultat von Wedderburn (siehe [L-90, §29, 2.], [S-85, 8. §1, Thm. 1.11]), welches sich wie folgt formulieren lässt:

A ist genau dann eine zentraleinfache K-Algebra, wenn es eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra D und ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gibt mit $A \cong M_n(D)$. Dabei ist n eindeutig und D bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Für einen n-dimensionalen D-Vektorraum V ist in kanonischer Weise $M_n(D) \cong End_D V$, der Menge der D-Endomorphismen auf V, versehen mit der üblichen Addition und der Hintereinanderausführung als Multiplikation. Also kann man nach dem Satz von Wedderburn eine zentraleinfache K-Algebra immer als einen Endomorphismenring über einem Schiefkörper auffassen.

Zwei K-Algebren A, B heißen **Brauer-äquivalent**, falls es eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra D und $n,\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $A \cong M_n(D)$ und $B \cong M_m(D)$ gibt. Brauer-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichen mit $Br(K)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von zentraleinfachen K-Algebren. Diese Menge ist eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung

$$\otimes : Br(K) \times Br(K) \to Br(K),\ ([A],[B]) \mapsto [A \otimes_K B];$$

sie heißt **Brauergruppe** von K.

Die Brauergruppe eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $\tilde{K}$ ist trivial, d.h. $Br(\tilde{K}) = \{[\tilde{K}]\}$. Die Brauergruppe eines reell abgeschlossenen Körpers K ist $Br(K) = \{[K],\ [\mathbb{H}_K]\}$.[4]

Wir sagen, die zentraleinfache K-Algebra A **zerfällt**, falls es ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $A \cong M_n(K)$ gibt. Das bedeutet $[A] = [K]$ in $Br(K)$. Jede zentraleinfache Algebra über einem algebraisch abgeschlossenem Körper zerfällt somit.

[4]Zur Brauergruppe eines Körpers und zum Tensorprodukt von zentraleinfachen Algebren siehe [L-90, §29, 3.].

2.3 Zerfällungskörper

Sei A eine zentraleinfache K-Algebra. Sei L/K eine Körpererweiterung. Dann ist $A \otimes_K L$ in kanonischer Weise eine zentraleinfache L-Algebra mit $\dim_L(A \otimes_K L) = \dim_K A$ (siehe [L-90, §29, 3. F15]). Wir nennen L einen **Zerfällungskörper**[5] von A, falls $A \otimes_K L$ zerfällt, d.h. $A \otimes_K L \cong M_n(L)$ als L-Algebren für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. n heißt dann der **Grad** der zentraleinfachen K-Algebra A, $\deg A$. Es ist $\deg A = \sqrt{\dim_K A}$.

Ist $\tilde{K}$ der algebraische Abschluss von K, so ist $A \otimes_K \tilde{K}$ eine zentraleinfache $\tilde{K}$-Algebra und zerfällt, da $Br(\tilde{K})$ trivial ist. Somit hat jede zentraleinfache K-Algebra einen Zerfällungskörper. Es lässt sich sogar zeigen, dass jede zentraleinfache K-Algebra einen Zerfällungskörper L besitzt, so dass L/K galois ist (siehe [L-90, §29, 5. F22]).

2.4 Der Satz von Skolem-Noether

Sei A eine zentraleinfache K-Algebra. Für ein $u \in A^\times$ ist die Abbildung $Int(u) : A \to A$, $a \mapsto u \cdot a \cdot u^{-1}$ für $a \in A$ ein K-Algebrenautomorphismus. $Int(u)$ heißt **innerer Automorphismus**. Oft werden wir den Satz von Skolem-Noether (siehe [L-90, §29, 6.], [S-85, 8. §4, Thm. 4.2]) verwenden:

Sei B eine einfache, endlichdimensionale K-Algebra und A eine zentraleinfache K-Algebra. Seien σ, $\tau : B \to A$ K-Algebrenmorphismen. Dann gibt es ein $u \in A^\times$ mit $\tau = Int(u) \circ \sigma$, d.h. für alle $b \in B$ gilt $\tau(b) = u \cdot \sigma(b) \cdot u^{-1}$.

Wir können dieses Resultat insbesondere dann anwenden, wenn B eine einfache Teilalgebra der zentraleinfachen K-Algebra A ist. Mit dem Satz von Skolem-Noether erhalten wir, dass jeder Automorphismus einer zentraleinfachen K-Algebra A ein innerer Automorphismus ist.

2.5 Halbeinfache Algebren

Sei M ein Modul[6] über einem Ring R. Wir nennen M **halbeinfach**, wenn M direkte Summe von einfachen Teilmoduln von M ist. Ist M ein halbeinfacher Modul, so ist jeder Teilmodul N von M ein direkter Summand von M (siehe [L-90, §28, 2. F10]).

Definition 2.1. *Ein Algebra A heißt **halbeinfach**, wenn A als A-Linksmodul halbeinfach ist.*

---

[5] Ich weiche hier von der Bezeichnung in [LU-03] ab und halte mich an die in [S-85] und [L-90], um die Ergebnisse über Zerfällungskörper aus [S-85] und [L-90] direkt zitieren zu können.

[6] Ist im Folgenden von Moduln die Rede, so gelten die Aussagen sowohl für Rechts- als auch für Linksmoduln.

Ist D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra und V ein endlichdimensionaler D-Rechtsvektorraum, so ist die zentraleinfache K-Algebra $End_D V$ halbeinfach (siehe [L-90, §28, 2. F8]). Damit ist jede zentraleinfache K-Algebra A halbeinfach.[7] Das ist äquivalent dazu, dass jeder A-Modul halbeinfach ist (siehe [L-90, §28, 2. F13]). Betrachten wir einen endlich erzeugten A-Modul M, so ergibt sich damit, dass M frei von endlichem Rang ist.

2.6 Involutionen

Sei A eine zentraleinfache K-Algebra. Wir nennen eine Abbildung $\sigma : A \to A$ eine **Involution** auf A, falls für alle $x,\, y \in A$:

- $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,
- $\sigma(x \cdot y) = \sigma(y) \cdot \sigma(x)$,
- $\sigma^2(x) = x$.

Für eine Involution σ auf A gilt $\sigma(K) = K$. Ist $\sigma|_K = id_K$, so nennen wir σ eine **Involution erster Art**. Andernfalls heißt σ **Involution zweiter Art** und für $F := Fix(\sigma|_K)$ gilt: K/F ist eine quadratische Galoiserweiterung mit nichttrivialem Automorphismus $\iota := \sigma|_K$. Wir nennen im Weiteren $F := Fix\sigma|_K$ den **Grundkörper** der zentraleinfachen K-Algebra mit Involution (A, σ), bzw. den Grundkörper von σ. Ist σ eine Involution erster Art auf der zentraleinfachen K-Algebra A, so ist $Z(A) = K = F$. Ist σ eine Involution zweiter Art auf der zentraleinfachen K-Algebra A, so ist $Z(A) = K = F(\sqrt{\alpha})$ für ein $\alpha \in F^\times \backslash F^{\times 2}$.

Beispiele

1. Auf $M_n(K)$ ist die Transposition $t : M_n(K) \to M_n(K)$, $A \mapsto A^t$ eine Involution erster Art.

2. Sei $(a,b)_K$ eine Quaternionenalgebra mit Quaternionenbasis $1,\ i,\ j,\ k$. Sei $\gamma : (a,b)_K \to (a,b)_K$ definiert durch

$$\gamma(1) = 1,\ \gamma(i) = -i,\ \gamma(j) = -j,\ \gamma(k) = -k.$$

Dann ist γ eine Involution erster Art auf $(a,b)_K$. Sie heißt **kanonische Involution** auf $(a,b)_K$.

[7] Es ist $A \cong End_D V$ als K-Algebren für eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra D und einen endlichdimensionalen D-Rechtsvektorraum V. Damit lässt sich jeder $End_D V$-Linksmodul als A-Linksmodul auffassen. Ist $End_D V \cong \bigoplus_{i \in I} N_i$ als $End_D V$-Linksmoduln mit einfachen $End_D V$-Linksmoduln N_i, $i \in I$, so ist $A \cong \bigoplus_{i \in I} N_i$ als A-Linksmoduln, wobei die N_i – aufgefasst als A-Linksmoduln – einfach sind.

3. Sei nun E eine zentraleinfache K-Algebra und θ eine Involution auf E. Dann ist die Abbildung $\theta^t : M_n(E) \to M_n(E)$, wobei

$$\theta^t \left((a_{ij})_{i,j} \right) = (\theta(a_{ij}))_{i,j}^t \text{ für } (a_{ij})_{i,j} \in M_n(E),$$

eine Involution derselben Art wie θ auf $M_n(E)$. Ist K/F eine quadratische Körpererweiterung mit nichttrivialem Automorphismus ι, so ist $\iota^t : M_n(K) \to M_n(K)$ eine Involution zweiter Art.

Definition 2.2. *Zwei zentraleinfache K-Algebren mit Involution (A, σ), (B, τ) heißen* ***isomorph****, falls es einen K-Algebrenisomorphismus $\Phi : A \to B$ mit $\tau \circ \Phi = \Phi \circ \sigma$ gibt.*

Nach dem Satz von Wedderburn finden wir zu der zentraleinfachen K-Algebra A mit Involution σ eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra D und ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $A \cong M_n(D)$. Sei $\phi : A \to M_n(D)$ ein K-Algebrenisomorphismus. Dann induziert die Involution σ auf A eine Involution τ auf $M_n(D)$, wobei σ und τ von derselben Art sind:

$$\tau := \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}.$$

Wir erhalten somit $(A, \sigma) \cong (M_n(D), \tau)$.

2.7 Existenz von Involutionen

Es gilt eine Umkehrung des dritten Beispiels des letzten Abschnitts: Haben wir eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution (A, σ) gegeben und ist D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit $A \cong M_n(D)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so existiert eine Involution θ auf D mit $\theta|_K = \sigma|_K$ (siehe [KMRT-98, I. §3]). Dieses Ergebnis werden wir oft benutzen. Insbesondere werden wir es im Beweis von Satz 3.3. verwenden, wobei wir diesen Satz nur in Fällen anwenden werden, in denen der Beweis ohne diese Existenzaussage geführt werden kann – sie jedoch, um die Voraussetzungen des Satzes zu erfüllen, schon benutzt wurde.

Einfacher ist eine Aussage darüber zu treffen, wie man von einer gegebenen Involution zu weiteren Involutionen durch das Hintereinanderausführen eines inneren Automorphismus und dieser Involution gelangt.

Lemma 2.3. *Sei A eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution σ. Sei $v \in A^\times$. Dann gilt: $Int(v) \circ \sigma$ ist genau dann eine Involution (derselben Art wie σ) auf A, wenn $\sigma(v) = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K^\times$ mit $\sigma(\lambda) \cdot \lambda = 1$.*
Ist σ eine Involution erster Art, so ist also $Int(v) \circ \sigma$ genau dann eine Involution (erster Art) auf A, wenn $\sigma(v) = \pm v$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\sigma(v) = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K^\times$ mit $\sigma(\lambda) \cdot \lambda = 1$, falls $Int(v) \circ \sigma$ eine Involution ist, da man die Umkehrung sofort nachrechnet.

Sei dazu $a \in A$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(Int(v) \circ \sigma)^2 (a) &= Int(v) \left(\sigma(v \cdot \sigma(a) \cdot v^{-1})\right) \\ &= v \cdot \sigma(v^{-1}) \cdot a \cdot \sigma(v) \cdot v^{-1} \\ &= v \cdot \sigma(v^{-1}) \cdot a \cdot (v \cdot \sigma(v^{-1})^{-1} \\ &= Int(v \cdot \sigma(v^{-1}))(a).\end{aligned}$$

Da $Int(v) \circ \sigma$ eine Involution ist, ergibt sich $Int(v \cdot \sigma(v^{-1})) = id_A$. Damit ist $v \cdot \sigma(v^{-1}) \in K^\times$, d.h. $\sigma(v) = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K^\times$.

Also ist

$$v = \sigma(\sigma(v)) = \sigma(\lambda) \cdot \lambda \cdot v.$$

Da $v \in A^\times$, folgt $\sigma(\lambda) \cdot \lambda = 1$. □

2.8 Tensorprodukt von Algebren mit Involution

Für die Definition der orthogonalen Summe einer Involution benötigen wir das Tensorprodukt von Algebren mit Involution. Eine Rechnung zeigt:

Sind $(A_1, \sigma_1), \dots, (A_n, \sigma_n)$ zentraleinfache K-Algebren mit Involutionen, so dass $\sigma_i|_K = \sigma_1|_K$ für alle $i = 2, \dots, n$, dann ist

$$(A_1, \sigma_1) \otimes_K \cdots \otimes_K (A_n, \sigma_n) := (A_1 \otimes_K \cdots \otimes_K A_n, \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n)$$

eine zentraleinfache K-Algebra mit $(\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n)|_K = \sigma_1|_K$ (siehe [KMRT-98, I. §2, Prop. 2.23]).

2.9 Skalarerweiterungen

Ist A eine zentraleinfache K-Algebra und L/K eine Körpererweiterung, so ist $A \otimes_K L$ in kanonischer Weise eine zentraleinfache L-Algebra (siehe [L-90, §29, 3. F15]). Wir nehmen nun an, dass auf A eine Involution σ gegeben ist.

Zuerst betrachten wir den Fall, dass σ eine Involution erster Art ist. Für eine beliebige Körpererweiterung L/K ist $\sigma \otimes id_L$, definiert durch $(\sigma \otimes id_L)(a \otimes l) := \sigma(a) \otimes l$ für $a \in A$, $l \in L$ eine Involution erster Art auf $A \otimes_K L$. Ist L/K eine quadratische Körpererweiterung mit nichttrivialem Automorphismus ι, so ist $\sigma \otimes \iota$, definiert durch $(\sigma \otimes \iota)(a \otimes l) := \sigma(a) \otimes \iota(l)$ für $a \in A$, $l \in L$, eine Involution zweiter Art auf $A \otimes_K L$ mit Grundkörper K.

Im Fall, dass σ eine Involution zweiter Art ist, also $\sigma|_K \neq id_K$, ist nicht klar, wie wir eine Involution auf $A \otimes_K L$ definieren sollen. Wir betrachten daher Körpererweiterungen L des Grundkörpers F von σ und die L-Algebra $A \otimes_F L$. L heißt **linear disjunkt** zu K/F, falls jede endliche Menge von Elementen aus L, die über F linear unabhängig ist, auch über K linear unabhängig ist (siehe [L-72, X, §5]). Sei $\alpha \in F^\times \backslash F^{\times 2}$ mit $K = F(\sqrt{\alpha})$. Ist L nicht linear disjunkt zu K/F, also α ein Quadrat in L, so ist

$$Z(A \otimes_F L) = K \otimes_F L \cong L \times L.^8$$

$A \otimes_F L$ ist somit nicht einfach und das Zentrum von $A \otimes_F L$ ist kein Körper, darum behandeln wir diesen Fall nicht weiter. Ist α kein Quadrat in L, also L linear disjunkt zu K/F, so ist $A \otimes_F L$ eine zentraleinfache $L(\sqrt{\alpha})$-Algebra mit $\dim_{L(\sqrt{\alpha})}(A \otimes_F L) = \dim_K A$, da $A \otimes_F L \cong A \otimes_K L(\sqrt{\alpha})$. Dann definieren wir $\sigma \otimes id_L$ auf $A \otimes_F L$ durch $(\sigma \otimes id_L)(a \otimes l) = \sigma(a) \otimes l$ für $a \in A$ und $l \in L$. Es ist $\sigma \otimes id_L$ eine Involution zweiter Art auf $A \otimes_F L$ mit Grundkörper L.

Für jede Körpererweiterung L/F ungeraden Grades $[L : F]$ ist L linear disjunkt zu K/F und wir können $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ betrachten. Ist P eine Anordnung auf F, so bezeichnen wir mit F_P den **reellen Abschluss** von F bezüglich P. Es ist $\alpha \in F_P^{\times 2}$ genau dann, wenn $\alpha \in P$, d.h. $\alpha >_P 0$. Für unsere Zwecke sind bei Involutionen zweiter Art nur Anordnungen P des Grundkörpers F interessant, für die $\alpha \notin P$ ist. Für eine solche Anordnung zerfällt $A \otimes_F F_P$, da $F_P(\sqrt{\alpha})$ algebraisch abgeschlossen ist.

Definition 2.4. *Für eine zentraleinfache K-Algebra A mit Involution σ nennen wir diejenigen Körpererweiterungen L des Grundkörpers F* ***disjunkt*** *zu K/F, für die L linear disjunkt zu K/F ist, d.h. $A \otimes_F L$ zentraleinfach ist.*

Ist σ eine Involution erster Art, so ist jede Körpererweiterung L von $F = K$ disjunkt zu K/F.

---

[8] Dabei ist $L \times L$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation versehen. Sei $c := \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{\alpha}^{-1} \otimes \sqrt{\alpha}) \in K \otimes_F L$. Es ist c und damit $1 - c$ idempotent. Dann ist der L-Algebrenhomomorphismus $\phi : L \times L \to K \otimes_F L$, definiert durch $\phi(1,0) = c$ und $\phi(0,1) = 1 - c$ ein Isomorphismus.

3 Hermitesche Formen und Involutionen

In diesem Kapitel werden wir hermitesche Formen über zentraleinfachen Algebren mit Involution einführen. Hermitesche Formen können wesentlich allgemeiner behandelt werden.[9] Wir beschränken uns auf hermitesche Formen über zentraleinfachen Algebren mit Involution, was seinen Grund in der Korrespondenz von regulären hermiteschen Formen und Involutionen hat, welche wir in Satz 3.3. behandeln. Dazu wird die adjungierte Involution zu einer regulären (schief-)hermiteschen Form eingeführt. Wir werden einige Beispiele betrachten, die auch im Weiteren relevant sind. Wir werden in diesem Kapitel auch den Begriff der n-fachen orthogonalen Summe einer Involution einführen und eine Beziehung zur n-fachen orthogonalen Summe einer hermiteschen Form herleiten.

3.1 Hermitesche Formen

Sei E eine zentraleinfache K-Algebra. Sei θ eine Involution auf E. Eine **λ-hermitesche Form** (M, h), bzw. h, über (E, θ), $\lambda \in \{\pm 1\}$, ist eine biadditive Abbildung

$$h : M \times M \to E$$

mit

- $M \neq \{0\}$ endlich erzeugter E-Rechtsmodul.
- $h(x \cdot \alpha, y \cdot \beta) = \theta(\alpha) \cdot h(x, y) \cdot \beta$ für alle $x,\ y \in M$, $\alpha,\ \beta \in E$,
- $h(x, y) = \lambda \cdot \theta(h(y, x))$ für alle $x,\ y \in M$.

Eine 1-hermitesche Form heißt auch **hermitesche Form**, und eine (-1)-hermitesche Form heißt auch **schiefhermitesche Form**. Eine hermitesche oder schiefhermitesche Form h auf dem E-Rechtsmodul M heißt **regulär**, falls für alle $x \in M$ gilt:

$$(\forall y \in M : h(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass für alle $y \in M$ gilt:

$$(\forall x \in M : h(x, y) = 0) \Rightarrow y = 0.$$

Seien M, N endlich erzeugte E-Rechtsmoduln. Sei $h_1 : M \times M \to E$, $h_2 : N \times N \to E$ (schief-)hermitesche Formen. Dann heißen h_1 und h_2 **isometrisch**, falls es einen E-Rechtsmodulisomorphismus $\phi : M \to N$ gibt mit

$$h_1(x, y) = h_2(\phi(x), \phi(y)) \text{ für alle } x,\ y \in M.$$

[9] Beispielsweise werden in [S-85, 7.] λ-hermitesche Formen über einem Ring R mit Involution * betrachtet, wobei $\lambda \in R$ nur die Bedingungen $\lambda \cdot \lambda^* = 1$ und $\lambda \in Z(R)$ erfüllen muss.

Sind zwei (schief-)hermitesche Formen $h_1 : M \times M \to E$, $h_2 : N \times N \to E$ isometrisch, so schreiben wir

$$(M, h_1) \simeq (N, h_2) \text{ oder auch } h_1 \simeq h_2.$$

Beispiele

1. Jede (schief-)symmetrische Bilinearform über K ist eine (schief-)hermitesche Form über (K, id_K).

2. Sei θ eine Involution auf einer zentraleinfachen K-Algebra E. Wir betrachten den E-Rechtsmodul E^n für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Für Elemente $x = (x_i)_{i=1\dots n}$ und $y = (y_i)_{i=1\dots n}$ aus E^n setzen wir

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i) \cdot y_i.$$

Die Abbildung $h : E^n \times E^n \to E$ ist dann eine reguläre hermitesche Form. Ist $E = K$ und $\theta = id_K$, so ist dies gerade die zur quadratischen Form $\langle 1, \dots, 1\rangle$ assoziierte Bilinearform.

3. Sei θ eine Involution auf einer zentraleinfachen K-Algebra E. Wir betrachten den E-Rechtsmodul E^{2n} für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Für Elemente $x = (x_i)_{i=1\dots 2n}$ und $y = (y_i)_{i=1\dots 2n}$ aus E^{2n} setzen wir

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \big(\theta(x_{2i-1}) \cdot y_{2i} - \theta(x_{2i}) \cdot y_{2i-1}\big).$$

Die Abbildung $h : E^{2n} \times E^{2n} \to E$ ist dann eine reguläre schiefhermitesche Form.

4. Sei K ein reell abgeschlossener Körper und γ die kanonische Involution auf $\mathbb{H}_K$. Dann sind zwei reguläre schiefhermitesche Formen (V, h) und (W, h') über $(\mathbb{H}_K, \gamma)$ genau dann isometrisch, wenn $\dim_{\mathbb{H}_K} V = \dim_{\mathbb{H}_K} W$ (siehe [S-85, 10. §3, Thm. 3.7]).

Die orthogonale Summe: Sei $\lambda \in \{\pm 1\}$. Wir betrachten zwei λ-hermitesche Formen $h_1 : M \times M \to E$ und $h_2 : N \times N \to E$. Analog zur orthogonalen Summe quadratischer Formen definieren wir die **orthogonale Summe** hermitescher Formen $h_1 \perp h_2 : M \oplus N \times M \oplus N \to E$, durch

$$(h_1 \perp h_2)((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = h_1(v_1, v_2) + h_2(w_1, w_2)$$

für $v_1,\ v_2 \in M$ und $w_1, w_2 \in N$. Wir schreiben $(M, h_1) \perp (N, h_2)$ für $(M \oplus N, h_1 \perp h_2)$.

Es ergibt sich sofort, dass $h_1 \perp h_2 \simeq h_2 \perp h_1$. Wir schreiben $n \times h$ für die n-fache orthogonale Summe $h \perp \dots \perp h$.

Wittkürzung: Für reguläre (schief-)hermitesche Formen über (E, θ) gilt eine Kürzungregel: Sind h, f, h' und f' reguläre (schief-)hermitesche Formen mit $h \perp h' \simeq f \perp f'$, so folgt aus $h' \simeq f'$, dass $h \simeq f$ (siehe [Sh-76] und [S-85, 7. §9]). Diese Wittkürzung gilt nicht in voller Allgemeinheit.[10] Die von uns geforderte Bedingung, dass die Charakteristik von K ungleich zwei ist, ist jedoch eine für die Gültigkeit der Kürzungsregel hinreichende Bedingung.

Der hyperbolische Raum: Eine λ-hermitesche Form h auf M, $\lambda \in \{\pm 1\}$, heißt **hyperbolisch**, falls (M, h) isometrisch ist zu einem λ-hermiteschen Raum $(H_\lambda(S), h_\lambda)$ mit S endlich erzeugter E-Rechtsmodul. Dabei ist $(H_\lambda(S), h_\lambda)$ wie folgt definiert: Zu S betrachten wir den Dualraum $S^* = Hom_E(S, E)$, versehen mit der von θ abhängigen Skalarmultiplikation, definiert durch

$$(\phi \cdot \alpha)(x) := \theta(\alpha) \cdot \phi(x) \text{ für } \alpha \in E,\ \phi \in S^* \text{ und } x \in S,$$

welche S^* zu einem E-Rechtsmodul macht.

Wir setzen

$$H_\lambda(S) := S^* \oplus S$$

und für (s_1^*, s_1), $(s_2^*, s_2) \in S^* \oplus S$ definieren wir

$$h_\lambda((s_1^*, s_1), (s_2^*, s_2)) := s_1^*(s_2) + \lambda \cdot \theta(s_2^*(s_1)).$$

h_λ ist dann eine reguläre λ-hermitesche Form, wie man sofort nachrechnet. Man sieht weiter sofort, dass $S \subseteq H_\lambda(S)$ ein total isotroper Unterraum ist.

Skalarerweiterung: Für Körpererweiterungen L des Grundkörpers F von (E, θ), die disjunkt zu K/F sind, und für reguläre λ-hermitesche Formen $h : M \times M \to E$ betrachtet man

$$h \otimes id_L : M \otimes_F L \times M \otimes_F L \to E \otimes_F L,$$

definiert durch $h \otimes_F L(v \otimes l, w \otimes k) := h(v, w) \otimes lk$ für $v,\ w \in M$ und $l,\ k \in L$.

$h \otimes id_L$ ist eine reguläre λ-hermitesche Form über $(E \otimes_F L, \theta \otimes id_L)$.

3.2 Die adjungierte Involution

Den Begriff der adjungierten Involution werden wir sehr allgemein einführen und in dieser Allgemeinheit auch in Kapitel 7 verwenden. Meistens werden wir jedoch adjungierte Involutionen zu (schief-)hermiteschen Formen über zentraleinfachen K-Divisionsalgebren mit Involution betrachten.

[10] In [S-85, 1. §6, Rem. 6.8] wird ein Beispiel angegeben, das zeigt, dass für reguläre symmetrische Bilinearformen über $\mathbb{Z}$ die Kürzungsregel im Allgemeinen nicht gilt.

Sei E eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution θ. Sei M ein endlich erzeugter E-Rechtsmodul. Wir betrachten die zentraleinfache K-Algebra $End_E M$.

Satz 3.1. *Für jede reguläre λ-hermitesche Form h (bezüglich θ) auf M, $\lambda \in \{\pm 1\}$, existiert eine eindeutige Involution ad_h auf $End_E M$, so dass $ad_h(\alpha) = \theta(\alpha)$ für alle $\alpha \in K$ und*

$$h(x, f(y)) = h(ad_h(f)(x), y)$$

für alle $x,\ y \in M$ und $f \in End_E M$. Man nennt ad_h die ***adjungierte Involution*** *zu h.*

Der Beweis des Satzes[11] vereinfacht sich durch die folgende Beobachtung:

Bemerkung 3.2. *Haben wir eine Abbildung $\sigma : End_E M \to End_E M$, für die*

$$h(x, f(y)) = h(\sigma(f)(x), y) \text{ für alle } x,\ y \in M \text{ und } f \in End_E M \tag{1}$$

erfüllt ist, so gilt

1. *σ ist eine Involution.*
2. *σ ist eindeutig bestimmt.*
3. *$\sigma(\alpha) = \theta(\alpha)$ für alle $\alpha \in K$.*

Da die Eigenschaft (1) die adjungierte Involution eindeutig bestimmt, nennen wir sie ***charakterisierende Eigenschaft*** *der adjungierten Involution.*

Beweis. Exemplarisch zeigen wir den aufwendigsten Punkt: $\sigma(\alpha) = \theta(\alpha)$ für alle $\alpha \in K$. Die anderen Punkte ergeben sich ähnlich. Sei $\alpha \in K \subseteq End_E M$, d.h. α ist identifiziert mit der Abbildung $r_\alpha : M \to M$, die jedem Element $x \in M$ das Produkt $\alpha(x) = r_\alpha(x) := x \cdot \alpha \in M$ zuordnet. Dann gilt für alle $x,\ y \in M$:

$$\begin{aligned} h(\sigma(\alpha)(x), y) &= h(x, \alpha(y)) \\ &= h(x, y \cdot \alpha) \\ &= h(x, y) \cdot \alpha \\ &= \alpha \cdot h(x, y)\ \text{, da } \alpha \in Z(E) = K \\ &= h(x \cdot \theta(\alpha), y) \\ &= h(\theta(\alpha)(x), y). \end{aligned}$$

Da h regulär ist, folgt $\forall x \in M :\ \sigma(\alpha)(x) = \theta(\alpha)(x)$, d.h. $\sigma(\alpha) = \theta(\alpha)$. □

[11] Teile des Beweises dieses Satzes stammen aus [KMRT-98, I. §4].

Beweis von Satz 3.1. Wir müssen die Existenz einer Abbildung

$$ad_h : End_E M \to End_E M$$

zeigen, für die die charakterisierende Eigenschaft der adjungierten Involution gilt, d.h.

$$h(x, f(y)) = h(ad_h(f)(x), y) \text{ für alle } x,\ y \in M, f \in End_E M.$$

Dazu betrachten wir zu M den Dualraum $M^* = Hom_E(M, E)$, versehen mit der von θ abhängigen Skalarmultiplikation, definiert durch

$$(\phi \cdot \alpha)(x) := \theta(\alpha) \cdot \phi(x) \text{ für } \alpha \in E,\ \phi \in M^*,\ x \in M,$$

welche M^* zu einem E-Rechtsmodul macht.

Wir betrachten den Rechtsmodulhomomorphismus $\hat{h} : M \to M^*$, definiert durch

$$(\hat{h}(x))(y) := h(x, y) \text{ für } x,\ y \in M.$$

Da h regulär ist, ist $\hat{h}$ ein Isomorphismus.[12] Wir betrachten weiter zu $f \in End_E M$ den Rechtsmodulhomomorphismus

$$f^* : M^* \to M^*,\ f^*(\phi) = \phi \circ f.$$

Sei nun für $f \in End_E M$

$$ad_h(f) := \hat{h}^{-1} \circ f^* \circ \hat{h}.$$

Dann ist $ad_h(f) \in End_E M$ und ad_h erfüllt die charakterisierende Eigenschaft der adjungierten Involution zu h, denn für alle $f \in End_E M$ und $x \in M$ ist $\hat{h}(ad_h(f)(x)) = (f^* \circ \hat{h})(x)$, d.h. für alle $f \in End_E M$ und $x,\ y \in M$ gilt

$$\begin{aligned} h(ad_h(f)(x), y) &= \hat{h}(ad_h(f)(x))(y) \\ &= ((f^* \circ \hat{h})(x))(y) \\ &= (\hat{h}(x))(f(y)) \\ &= h(x, f(y)). \end{aligned}$$

□

[12] $\hat{h}$ ist injektiv, da für $x,\ y \in M$ mit $\hat{h}(x) = \hat{h}(y)$ für alle $m \in M$ gilt, dass $h(x, z) = h(y, z)$. Da h regulär, ist $x = y$. Die Bijektivität folgt, da der Rang von M und M^* gleich ist.

Beispiele

1. Sei E eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution θ. Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ identifizieren wir $End_E E^n$ mit $M_n(E)$. Dann ist

$$\theta^t : M_n(E) \to M_n(E),\ \theta^t\left((a_{ij})_{i,j}\right) = (\theta(a_{ij}))_{i,j}^t \text{ für } (a_{ij})_{i,j} \in M_n(E),$$

die adjungierte Involution zu

$$h : E^n \times E^n \to E,\ h((x_i)_i, (y_i)_i) = \sum_i \theta(x_i) \cdot y_i.$$

2. Die adjungierte Involution zur hyperbolischen Ebene[13] $\langle 1, -1\rangle$ über K ist

$$ad_{\langle 1,-1\rangle} : M_2(K) \to M_2(K), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

3. Sei $d \in K^\times$. Die adjungierte Involution zu der quadratischen Form $n \times \langle d\rangle$ über K ist die Transposition

$$t : M_n(K) \to M_n(K),\ A \mapsto A^t.$$

Insbesondere ist $ad_{n\times\langle d\rangle} = ad_{n\times\langle -d\rangle}$.

4. Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution und Grundkörper F. Sei L eine Körpererweiterung von F, die disjunkt zu K/F ist. Ist $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$, so ist

$$(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L) \cong (End_{D\otimes_F L}(V \otimes_F L), ad_{h\otimes id_L}).$$

3.3 Korrespondenz von hermiteschen Formen und Involutionen

Das obige dritte Beispiel zeigt, dass für verschiedene reguläre (schief-)hermitesche Formen die adjungierte Involution dieselbe sein kann. Der folgende Satz klärt, wie die regulären (schief-)hermiteschen Formen, welche dieselbe adjungierte Involution haben, zusammenhängen und besagt darüber hinaus, dass jede Involution auf $End_E M$ eine adjungierte Involution ist (siehe [KMRT-98, I. §4, Thm. 4.2.]). Wir werden diesen Satz nur für $E = D$ eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra benötigen

Sei E eine zentraleinfache K-Algebra und θ eine Involution auf E. Sei M ein endlich erzeugter E-Rechtsmodul. Wir betrachten $End_E M$, die Involutionen auf $End_E M$ und ihre Beziehung zu regulären (schief-)hermiteschen Formen $h : M \times M \to E$ bezüglich θ.

[13] Ich werde oft von der adjungierten Involution ad_q einer quadratischen Form q über K sprechen. Ich meine damit natürlich immer die adjungierte Involution der zu q assoziierten symmetrischen Bilinearform.

Satz 3.3. *1. Sei θ eine Involution erster Art auf E, d.h. $\theta|_K = id_K$. Dann gilt:*

- *Für zwei reguläre hermitesche oder schiefhermitesche Formen h und h' auf M gilt $ad_h = ad_{h'}$ genau dann, wenn $h = \alpha \cdot h'$ für ein $\alpha \in K^\times$.*
- *Für jede Involution σ erster Art auf $End_E M$ gibt es eine reguläre hermitesche oder schiefhermitesche Form h auf M mit $ad_h = \sigma$.*

2. Sei θ eine Involution zweiter Art auf E. Dann gilt:

- *Für zwei reguläre hermitesche Formen h und h' auf M gilt $ad_h = ad_{h'}$ genau dann, wenn $h = \alpha \cdot h'$ für ein $\alpha \in K^\times$ mit $\theta(\alpha) = \alpha$, d.h. für ein $\alpha \in F^\times$ dem Grundkörper von θ.*
- *Für jede Involution σ zweiter Art auf $End_E M$ mit $\sigma(\alpha) = \theta(\alpha)$ für alle $\alpha \in K$ gibt es eine reguläre hermitesche Form h auf M mit $ad_h = \sigma$.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zuerst Lemma 3.4. Für eine reguläre (schief-)hermitesche Form $h : M \times M \to E$ betrachten wir den E-Rechtsmodulisomorphismus $\hat{h} : M \to M^*$ (siehe Beweis von Satz 3.1.), definiert durch

$$(\hat{h}(x))(y) := h(x,y) \text{ für } x,\ y \in M.$$

Lemma 3.4. *Seien h, h' reguläre hermitesche oder schiefhermitesche Formen auf M und sei $v := \hat{h}^{-1} \circ \hat{h}'$. Dann gilt $ad_h = Int(v) \circ ad_{h'}$.*

Beweis. Nach der Wahl von v haben wir für alle x, $y \in M$, dass

$$h'(x,y) = \big(\hat{h}'(x)\big)(y) = \big(\hat{h}(v(x))\big)(y) = h(v(x), y).$$

Wir müssen für alle $f \in End_E M$ zeigen, dass $ad_h(f) = v \circ ad_{h'}(f) \circ v^{-1}$, d.h. dass $ad_h(f) \circ v = v \circ ad_{h'}(f)$. Es gilt für alle $f \in End_E M$ und x, $y \in M$:

$$\begin{aligned} h((ad_h(f) \circ v)(x), y) &= h\big(ad_h(f)(v(x)), y\big) \\ &= h(v(x), f(y)) \\ &= h'(x, f(y)) \\ &= h'(ad_{h'}(f)(x), y) \\ &= h\big((v \circ ad_{h'}(f))(x), y\big). \end{aligned}$$

Da h regulär ist, folgt $(ad_h(f) \circ v)(x) = (v \circ ad_{h'}(f))(x)$ für alle $f \in End_E M$ und $x \in M$. Also folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 3.3. 1. Seien h und h' reguläre hermitesche oder schiefhermitesche Formen auf M und $\alpha \in K^\times$ mit $\theta(\alpha) = \alpha$ und $h' = \alpha \cdot h$. Dann gilt für alle $x, y \in M$:

$$\begin{aligned} h'(x,y) &= \alpha \cdot h(x,y) \\ &= h(x \cdot \theta(\alpha), y) \\ &= h(x \cdot \alpha, y) \\ &= h(\alpha(x), y). \end{aligned}$$

Also ist $\hat{h}' = \hat{h} \circ \alpha$, d.h. $\alpha = \hat{h}^{-1} \circ \hat{h}'$. Damit gilt nach Lemma 3.4:

$$ad_h = Int(\alpha) \circ ad_{h'}.$$

Somit gilt für alle $f \in End_D V$: $ad_h(f) = \alpha \circ ad_{h'}(f) \circ \alpha^{-1}$. Da $\alpha \in K = Z(End_E M)$, folgt

$$\forall f \in End_D V : ad_h(f) = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ ad_{h'}(f) = ad_{h'}(f).$$

Sei nun umgekehrt $ad_h = ad_{h'}$. Es gilt also nach Lemma 3.4. für $v := \hat{h}^{-1} \circ \hat{h}'$, dass $ad_{h'} = Int(v) \circ ad_{h'}$. Sei $f \in End_E M$. Wegen der Surjektivität von $ad_{h'}$ gibt es $g \in End_E M$ mit $ad_{h'}(g) = f$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \circ v = ad_{h'}(g) \circ v &= v \circ ad_{h'}(g) \circ v^{-1} \circ v \\ &= v \circ ad_{h'}(g) = v \circ f \end{aligned}$$

Damit ist $v \in Z(End_E M)^\times = K^\times$. Also gilt für alle $x, y \in M$:

$$h'(x,y) = h(v(x), y) = h(x \cdot v, y) = \theta(v) \cdot h(x,y).$$

Ist θ erster Art, so ergibt sich damit $h' = v \cdot h$ für ein $v \in K^\times$. Ist θ zweiter Art und sind h und h' hermitesch, so ergibt sich $\theta(v) = v$,[14] d.h. $h' = v \cdot h$ für ein $v \in K^\times$ mit $\theta(v) = v$.

Somit haben wir sowohl für θ erster Art als auch für θ zweiter Art jeweils den ersten Teil der Aussage gezeigt.

2. Für die zweiten Teile der Aussagen benötigen wir, dass wir mit θ auf E eine Involution τ auf der zentraleinfachen K-Algebra D mit $E \cong M_s(D)$ für ein $s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gegeben haben, für die $\theta|_K = \tau|_K$

[14] Da h regulär ist, ist $\hat{h} : M \to M^*$ bijektiv. Sei $f : M \to E$ ein surjektiver E-Modulhomomorphismus. Dann ist $f = \hat{h}(x)$ für ein $x \in M$ und es gibt ein $y \in M$ mit $1 = f(y) = h(x,y)$. Dann ist

$$v = v \cdot h(x,y) = \theta(\theta(v) \cdot h(y,x)) = \theta(h'(y,x)) = h'(x,y) = \theta(v) \cdot h(x,y) = \theta(v).$$

gilt (siehe[KMRT-98, I. §3]). Wir identifizieren E mit $M_s(D)$, M mit $(M_s(D))^r$, wobei $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ der Rang von M als E-Rechtsmodul ist,[15] und $End_E M$ mit $M_{s\cdot r}(D)$.

Wir betrachten $\tau^t : E \to E$ und $\tau^t : End_E M \to End_E M$, welches Involutionen mit $\tau^t|_K = \theta|_K$ sind. Sei σ eine Involution auf $End_E M$ mit $\sigma|_K = \theta|_K$. Wir modifizieren die reguläre bezüglich τ^t hermitesche Form

$$h : E^r \times E^r \to E,\ h(x,y) = \sum_i \tau^t(x_i) \cdot y_i \text{ für } x,\ y \in E^r$$

so, dass wir eine reguläre (schief-)hermitesche Form h' bezüglich θ erhalten, für die $\sigma = ad_{h'}$ gilt.

Da $\sigma|_K = \tau^t|_K$ ist $\tau^t \circ \sigma$ ein K-Algebrenautomorphismus auf $End_E M$. Nach dem Satz von Skolem-Noether existiert somit ein $g \in (End_E M)^\times$ mit $Int(g) = \tau^t \circ \sigma$. Ebenso existiert nach dem Satz von Skolem-Noether ein $u \in E^\times$ mit $Int(u) = \tau^t \circ \theta$.

Betrachten wir zuerst den Fall von Involutionen erster Art, d.h. $\theta|_K = \sigma|_K = \tau^t|_K = id_K$. Nach Lemma 2.3. ist dann $\tau^t(g) = \pm g$ und $\tau^t(u) = \pm u$. Wir betrachten

$$h' : E^r \times E^r \to E,\ h'(x,y) := u^{-1} \cdot h(g \cdot x, y).$$

h' ist eine reguläre (schief-)hermitesche Form bezüglich θ:

- h' ist biadditiv und für $\alpha,\ \beta \in E$ und $x,\ y \in E^r$ gilt

$$\begin{aligned} h'(x\cdot\alpha, y\cdot\beta) &= u^{-1}\cdot\tau^t(\alpha)\cdot h(g\cdot x, y)\cdot\beta \\ &= \theta(\alpha)\cdot u^{-1}\cdot h(g\cdot x,y)\cdot\beta \\ &= \theta(\alpha)\cdot h'(x,y)\cdot\beta. \end{aligned}$$

- Ist $x \in E^r$ mit $h'(x,y) = 0$ für alle $y \in E^r$, so ist $h(g\cdot x, y) = 0$ für alle $y \in E^r$, d.h. $g \cdot x = 0$, da h regulär. Da g invertierbar, folgt $x = 0$.
- Es ist $h(g\cdot x, y) = \lambda h(x, g\cdot y)$ für alle $x,\ y \in E^r$, wobei $\lambda = 1$, falls $\tau^t(g) = g$, und $\lambda = -1$, falls $\tau^t(g) = -g$. Dazu setzen wir $g = (g_{ij})_{i,j}$, bezeichnen mit I_r die Einheitsmatrix in $M_r(E)$ und

[15] Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, ist jeder endlich erzeugte Modul über einer zentraleinfachen Algebra frei von endlichem Rang.

betrachten zu $x,\ y \in E^r$

$$\begin{aligned} h(g\cdot x,y) &= \left(\theta(\sum_{k=1}^{r} g_{1k}x_k),\dots,\theta(\sum_{k=1}^{r} g_{rk}x_k)\right)\cdot I_r\cdot y \\ &= \left(\sum_{k=1}^{r}\theta(x_k)\theta(g_{1k}),\dots,\sum_{k=1}^{r}\theta(x_k)\theta(g_{rk})\right)\cdot I_r\cdot y \\ &= (\theta(x_1),\dots,\theta(x_r))\cdot\theta^t(g)\cdot I_r\cdot y \\ &= \pm(\theta(x_1),\dots,\theta(x_r))\cdot g\cdot y \\ &= \pm h(x,g\cdot y). \end{aligned}$$

Damit ist für $x,\ y \in E^r$

$$\begin{aligned} \theta(h'(x,y)) &= \theta(h(g\cdot x,y))\cdot\theta(u^{-1}) \\ &= \pm\theta(h(x,g\cdot y))\cdot\theta(u^{-1}) \\ &= \pm\theta(\tau^t(h(g\cdot y,x)))\cdot\theta(u^{-1}) \\ &= \pm\theta(u^{-1}\cdot\tau^t(h(g\cdot y,x))) \\ &= \pm\theta(\theta(h(g\cdot y,x))\cdot u^{-1}) \\ &= \pm\theta(u^{-1})\cdot h(g\cdot y,x) \\ &= \pm h'(y,x). \end{aligned}$$

Dabei ist h' hermitesch genau dann, wenn $\tau^t(g)\cdot g^{-1} = \tau^t(u)\cdot u^{-1}$.

σ ist die adjungierte Involution zu h', da für $f \in End_E M$ und $x,\ y \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} h'(\sigma(f)\cdot x,y) &= h'(\tau^t(g\cdot f\cdot g^{-1})\cdot x,y) \\ &= h'(g^{-1}\cdot\tau^t(f)\cdot g\cdot x,y) \\ &= u^{-1}\cdot h(\tau^t(f)\cdot(g\cdot x),y) \\ &= u^{-1}\cdot h(g\cdot x,f\cdot y) \\ &= h'(x,f(y)). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Fall von Involutionen zweiter Art. Es genügt, wenn wir die mit dem Satz von Skolem-Noether gefundenen Elemente $u \in E^\times$ und $g \in (End_E M)^\times$ so variieren können, dass wir $\tilde{u} \in E^\times$ und $\tilde{g} \in (End_E M)^\times$ erhalten mit $Int(\tilde{u}) = \tau^t \circ \theta$ und $\tau^t(\tilde{u}) = \tilde{u}$, sowie $Int(\tilde{g}) = \tau^t \circ \sigma$ und $\tau^t(\tilde{g}) = \tilde{g}$. Denn dann erhält man analog zum Fall von Involutionen erster Art, dass

$$h' : E^r \times E^r \to E,\ h'(x,y) = \tilde{u}^{-1}\cdot h(\tilde{g}\cdot x,y)$$

eine reguläre hermitesche Form bezüglich θ ist, für die $\sigma = ad_{h'}$ gilt.

Nach Lemma 2.3. ist $\tau^t(g) = \lambda \cdot g$ und $\tau^t(u) = \mu \cdot u$ mit $\lambda,\ \mu \in K^\times$ und $\tau^t(\lambda) \cdot \lambda = \tau^t(\mu) \cdot \mu = 1$. Sei $\iota := \tau^t|_K = \sigma|_K = \theta|_K$. Damit existieren nach Hilberts Theorem 90 [16] $\alpha_1,\ \alpha_2 \in K^\times$ mit $\lambda = \alpha_1 \cdot \iota(\alpha_1)^{-1}$ und $\mu = \alpha_2 \cdot \iota(\alpha_2)^{-1}$. Wir betrachten $\tilde{u} = \alpha_2 \cdot u$ und $\tilde{g} = \alpha_1 \cdot g$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tau^t(\tilde{u}) &= \tau^t(u) \cdot \tau^t(\alpha_2) \\ &= \mu \cdot \iota(\alpha_2) \cdot u \\ &= \alpha_2 \cdot u = \tilde{u} \end{aligned}$$

und $Int(\tilde{u}) = Int(u) = \tau^t \circ \theta$. Ebenso ergibt sich $\tau^t(\tilde{g}) = \tilde{g}$ und $Int(\tilde{g}) = \tau^t \circ \sigma$.

□

Aus diesem Satz ergibt sich für zwei reguläre λ-hermitesche Formen $h_1 : M \times M \to E$, $h_2 : N \times N \to E$ bezüglich θ, dass es genau dann ein $\alpha \in K^\times$ mit $\theta(\alpha) = \alpha$ und $h_1 \simeq \alpha h_2$ gibt, wenn $(End_E M, ad_{h_1}) \cong (End_E N, ad_{h_2})$. Zwei reguläre λ-hermitesche Formen h_1, h_2 mit $h_1 \simeq \alpha h_2$ für ein $\alpha \in K^\times$ mit $\theta(\alpha) = \alpha$ heißen **ähnlich**.

Weiter ergibt sich mit Satz 3.3. eine Präzisierung der Objekte, die wir behandeln. Ist (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution, so existiert eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit Involution (D, θ), wobei $\theta|_K = \sigma|_K$, so dass $A \cong M_n(D) = End_D D^n$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dieser Algebrenisomorphismus induziert eine Involution τ auf $M_n(D)$, d.h. $(A, \sigma) \cong (M_n(D), \tau)$. Mit dem Satz ergibt sich nun, dass es eine reguläre (schief-)hermitesche Form $h : D^n \times D^n \to D$ gibt, für die $ad_h = \tau$ ist, d.h. $(A, \sigma) \cong (M_n(D), ad_h)$. Diese Aussage werden wir im Weiteren in vielen Beweisen verwenden, so z.B. in den Beweisen von Satz 4.16. und Satz 4.21.

3.4 Typen von Involutionen

Ist (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution erster Art, so unterscheiden wir, ob σ von orthogonalem oder symplektischem Typ ist. Wir betrachten einen Zerfällungskörper L von A und $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$. Nach Satz 3.3. ist $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L) \cong (End_K V, ad_b)$, wobei $b : V \times V \to K$ eine reguläre (schief-)symmetrische Bilinearform ist.

Definition 3.5. • *σ ist von **orthogonalem Typ**, bzw. **orthogonal**, falls in obiger Situation b eine reguläre symmetrische Bilinearform ist.*

[16] Hilberts Theorem 90: Sei K/F eine zyklische Körpererweiterung, d.h. K/F ist eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe G, vom Grad n. Sei ι ein Erzeugendes von G. Sei $\beta \in K$. Dann gilt

$$N_{K/F}(\beta) = \iota(\beta) \cdot \beta = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in K^\times \text{ mit } \beta = \alpha \cdot \iota(\alpha)^{-1}.$$

Beweis siehe [L-72, VIII §6].

- *σ ist von* ***symplektischem Typ****, bzw.* ***symplektisch****, falls in obiger Situation b eine reguläre schiefsymmetrische Bilinearform ist.*

Diese Begriffe sind wohldefiniert (siehe [KMRT-98, I. §2.A.]). Der Typ von σ lässt sich über die Dimensionen der Unterräume der (schief-)symmetrischen Elemente von A bezüglich σ bestimmen. Die **symmetrischen Elemente** von A bezüglich σ sind

$$Sym(A, \sigma) = \{a \in A \mid \sigma(a) = a\}.$$

Die **schiefsymmetrischen Elemente** von A bezüglich σ sind

$$Skew(A, \sigma) = \{a \in A \mid \sigma(a) = -a\}.$$

Sei $\deg A = n$. Ist σ orthogonal, so ist

$$\dim_K Sym(A, \sigma) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ und } \dim_K Skew(A, \sigma) = \frac{n(n-1)}{2};$$

ist σ symplektisch, so ist

$$\dim_K Sym(A, \sigma) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ und } \dim_K Skew(A, \sigma) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(siehe [KMRT-98, I. §2, Prop. 2.6]).

Beispiele

1. Die Transposition $t : M_n(K) \to M_n(K)$ ist eine orthogonale Involution, da sie die adjungierte Involution zu der quadratischen Form $n \times \langle 1 \rangle$ ist.

2. Die kanonische Involution γ auf einer Quaternionenalgebra ist symplektisch, da die Dimension des Unterraums der symmetrischen Elemente eins ist.

3. Sei $(a, b)_K$ eine Quaternionenalgebra mit einer Quaternionenbasis $1,\ i,\ j,\ k$. Wir definieren $\sigma : (a, b)_K \to (a, b)_K$ durch $\sigma(1) = 1$, $\sigma(i) = -i$, $\sigma(j) = j$ und $\sigma(k) = k$. σ ist eine Involution erster Art auf $(a, b)_K$. Da die Dimension des Unterraums der symmetrischen Elemente drei ist, ist σ orthogonal.

Wir haben in Lemma 2.3. gesehen, dass für eine Involution σ erster Art auf einer zentraleinfachen K-Algebra A und ein $v \in A^\times$ die Abbildung $Int(v) \circ \sigma$ genau dann eine Involution (erster Art) auf A ist, wenn $\sigma(v) = \pm v$ ist. Mittels des Dimensionskriteriums für die Typen von Involutionen können wir sagen, dass $Int(v) \circ \sigma$ genau dann vom selben Typ wie σ ist, wenn

$\sigma(v) = v$.[17] Wenn wir den Beweis des Satzes 3.3. betrachten, so ergibt sich damit für eine Involution erster Art θ auf E, dass θ und die Involution ad_h auf $End_E M$ genau dann vom selben Typ sind, wenn h hermitesch ist.

Quarternionenalgebren Wir können nun einige Aussagen über Involutionen erster Art auf einer Quaternionenalgebra $(a, b)_K$ mit kanonischer Involution γ treffen. Ist τ eine Involution auf $(a, b)_K$, so existiert nach dem Satz von Skolem-Noether ein $v \in (a, b)_K^\times$ mit $Int(v) = \tau \circ \gamma$. Ist τ eine symplektische Involution, so ist nach obigen Überlegungen $\gamma(v) = v$, d.h. $v \in K^\times$. Damit ist $\tau = Int(v) \circ \gamma = \gamma$, d.h. γ ist die einzige symplektische Involution auf $(a, b)_K$. Ist τ orthogonal, so ist $\gamma(v) = -v$, d.h. v ist ein **reines Quaternion**, und $\tau = Int(v) \circ \gamma$. In diesem Fall können wir folgende Aussage treffen:

Satz 3.6. *Ist τ eine orthogonale Involution auf der Quaternionenalgebra Q über K, so existiert eine Quaternionenbasis 1, u, v, w von Q mit $\tau(1) = 1$, $\tau(u) = -u$, $\tau(v) = v$ und $\tau(w) = w$. Eine solche Basis von Q nennen wir **τ-konform**.*

Ist K euklidisch, so gibt es zu jeder orthogonalen Involution τ auf $\mathbb{H}_K$ eine τ-konforme Basis 1, i, j, k mit $i^2 = -1$ und $j^2 = -1$.

Beweis. Sei τ eine orthogonale Involution auf Q. Dann existiert ein $u \in Q^\times$ mit $\tau = Int(u) \circ \gamma$ und $\gamma(u) = -u$. Damit ist $u \notin K$ und $u^2 \in K$. Wir betrachten $K[u]$. $K[u]$ ist ein kommutativer Teilring von Q. Da $u \in Q \backslash K$, existiert ein $y \in Q$ mit $uy \neq yu$. Insbesondere ist $v := uy - yu \neq 0$. Da $u^2 \in K = Z(Q)$, folgt $vu = -uv$. Also haben wir $u, v \in Q^\times$ mit $u \notin K$, $vu = -uv$, $\tau = Int(u) \circ \gamma$ und $u^2 \in K$. Damit ergibt sich:

1. $1, u, v, uv$ ist K-Basis von Q: u antikommutiert mit allen Elementen aus $K[u] \cdot v$ und kommutiert mit allen Elementen aus $K[u]$. Sei $x \in K[u] \cdot v \cap K[u]$. Dann ist $u \cdot x = -u \cdot x$, und somit $x = 0$, da $u \in Q^\times$. Also folgt aus Dimensionsgründen $K[u] \cdot v \oplus K[u] = Q$.

2. v^2 kommutiert mit allen Elementen aus Q und ist daher aus K. Damit ist 1, u, v, $w := uv$ sogar eine Quaternionenbasis von Q.

3.
   - $\tau(1) = u \cdot \gamma(1) \cdot u^{-1} = 1$,
   - $\tau(u) = u \cdot \gamma(u) \cdot u^{-1} = -u \cdot u \cdot u^{-1} = -u$,
   - $\tau(v) = u \cdot \gamma(v) \cdot u^{-1} = -u \cdot v \cdot u^{-1} = v$,
   - $\tau(w) = u \cdot \gamma(v) \cdot \gamma(u) \cdot u^{-1} = w$.

[17] Man sieht sofort, dass $Sym(A, Int(v) \circ \sigma) = v \cdot Sym(A, \sigma)$ und $Skew(A, Int(v) \circ \sigma) = v \cdot Skew(A, \sigma)$ für $\sigma(v) = v$ gilt, während $Sym(A, Int(v) \circ \sigma) = v \cdot Skew(A, \sigma)$ und $Skew(A, Int(v) \circ \sigma) = v \cdot Sym(A, \sigma)$ für $\sigma(v) = -v$ gilt (siehe [KMRT-98, I. §2, Prop. 2.7]).

Betrachten wir nun den Fall, dass K euklidisch ist. Nach Obigem existiert eine Quaternionenbasis $1,\ u,\ v,\ w$ von Q mit $\tau(1) = 1$, $\tau(u) = -u$, $\tau(v) = v$ und $\tau(w) = w$. Sei $a := u^2$ und $b := v^2$. Da K euklidisch ist, gilt $a = \lambda \cdot \alpha^2$ und $b = \lambda \cdot \beta^2$ für $\alpha,\ \beta \in K^\times$ und $\lambda = \pm 1$. Da $u,\ v \notin K$, folgt in beiden Gleichungen $\lambda = -1$. Sei nun $i := \frac{u}{\alpha}$ und $j := \frac{v}{\beta}$. Dann ist $1,\ i,\ j,\ k := ij$ eine Quaternionenbasis von Q mit $i^2 = -1$ und $j^2 = -1$. Weiter gilt $\tau(1) = 1$, $\tau(i) = -u \cdot \frac{1}{\alpha} = -i$, $\tau(j) = v \cdot \frac{1}{\beta} = j$ und $\tau(k) = uv \cdot \frac{1}{\alpha\beta} = k$. □

3.5 Die orthogonale Summe einer Involution

Definition 3.7. *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit einer Involution beliebiger Art. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Die n-fache* ***orthogonale Summe*** *$\boxplus^n(A, \sigma)$ von (A, σ) ist definiert als*

$$\boxplus^n(A, \sigma) := (M_n(K), *) \otimes_K (A, \sigma) = (M_n(K) \otimes_K A, * \otimes \sigma).$$

Dabei ist $* : M_n(K) \to M_n(K)$, $(x_{ij})^*_{i,j} := (\sigma(x_{ij}))^t_{i,j}$ für $(x_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$.[18]

Bemerkung 3.8. *$\boxplus^n(A, \sigma)$ ist eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution vom Grad $n \cdot \deg A$.*

Durch $* \otimes \sigma$ wird auf $M_n(A)$ in kanonischer Weise eine Involution σ^t definiert. Wir betrachten nun explizit den K-Algebrenisomorphismus, der diese Involution induziert. Dazu verwenden wir die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts von K-Algebren:

Sei $j_{M_n(K)} : M_n(K) \to M_n(A)$,

$$(x_{ij})_{i,j} \mapsto (x_{ij} \cdot 1_A)_{i,j} \text{ für } (x_{ij})_{i,j} \in M_n(K).$$

Wir bezeichnen mit I_n die Einheitsmatrix in $M_n(A)$. Sei $j_A : A \to M_n(A)$,

$$a \mapsto I_n \cdot a \text{ für } a \in A.$$

Dann sind $j_{M_n(K)}$ und j_A injektive K-Algebrenhomomorphismen und für alle $a \in A$ und $(x_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$ gilt

$$j_{M_n(K)}((x_{ij})_{i,j}) \cdot j_A(a) = j_A(a) \cdot j_{M_n(K)}((x_{ij})_{i,j}).$$

Also existiert genau ein K-Algebrenhomomorphismus

$$\gamma : M_n(K) \otimes_K A \to M_n(A)$$

mit $\gamma \circ i_A = j_A$ und $\gamma \circ i_{M_n(K)} = j_{M_n(K)}$. Dabei sind $i_{M_n(K)}$ und i_A die kanonischen Einbettungen von $M_n(K)$, bzw. A in $M_n(K) \otimes_K A$. Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus:

[18] Zu dieser Definition siehe [LU-03, Def. 2.1].

$M_n(K) \otimes_K A$ und $M_n(A)$ sind beide von der Dimension $n^2 \cdot \dim_K A$ über K. Damit genügt es, zu zeigen, dass γ injektiv ist. Dies folgt, da γ nicht die Nullabbildung ist und $M_n(K) \otimes_K A$ einfach ist.

Die von $\gamma : M_n(K) \otimes_K A \to M_n(A)$ auf $M_n(A)$ induzierte Involution ist $\sigma^t = \gamma \circ (* \otimes \sigma) \circ \gamma^{-1}$. Für $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$ ist

$$\sigma^t((a_{ij})_{i,j}) := (\sigma(a_{ij}))^t_{i,j}.$$

Damit erhalten wir für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$\boxplus^n(A, \sigma) \cong (M_n(A), \sigma^t).$$

Satz 3.9. *Sei $A = M_m(E)$ für ein $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und eine zentraleinfache K-Algebra E mit einer Involution θ. Sei σ eine Involution auf A, wobei $\theta|_K = \sigma|_K$. Sei $\sigma = ad_h$ für eine λ-hermitesche Form $h : E^m \times E^m \to E$. Sei $\sigma^t : M_n(A) \to M_n(A)$ wie oben. Dann ist $\sigma^t = ad_{n \times h}$.*

Beweis. Da $\sigma = ad_h$, gilt für alle $a \in A$ und für alle $v,\, w \in E^m$:

$$h(\sigma(a) \cdot v, w) = h(v, a \cdot w).$$

Sei $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$. Seien $(v_i)_{i=1,\dots,n}$, $(w_i)_{i=1,\dots,n} \in (E^m)^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(n \times h)(\sigma^t((a_{ij})_{i,j}) \cdot (v_i)_i, (w_i)_i) &= (n \times h)((\sigma(a_{ij}))^t_{i,j} \cdot (v_i)_i, (w_i)_i) \\
&= (n \times h)((\sum_{k=1}^n \sigma(a_{ki}) \cdot v_k)_i, (w_i)_i) \\
&= \sum_i h(\sum_{k=1}^n \sigma(a_{ki}) \cdot v_k, w_i) \\
&= \sum_i \sum_k h(\sigma(a_{ki}) \cdot v_k, w_i) \\
&= \sum_i \sum_k h(v_k, a_{ki} \cdot w_i) \\
&= \sum_k h(v_k, \sum_i a_{ki} \cdot w_i) \\
&= (n \times h)((v_k)_k, (\sum_i a_{ki} \cdot w_i)_k) \\
&= (n \times h)((v_k)_k, (a_{ki})_{k,i} \cdot (w_i)_i).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.10. *Für eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution (A, σ), die isomorph ist zu $(M_n(E), ad_h)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution (E, θ) und eine reguläre (schief-)hermitesche Form $h : E^n \times E^n \to E$ bezüglich θ, ergibt sich somit*

$$\boxplus^k(A, \sigma) \cong (M_{k \cdot n}(E), ad_{k \times h}) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

4 Hyperbolische Involutionen

In diesem Kapitel werden wir den Begriff einer (schwach) isotropen und einer (schwach) hyperbolischen Involution einführen. Wir werden eine Aussage über das Verhalten hyperbolischer Involutionen unter quadratischen Skalarerweiterungen treffen und ein „schwaches Analogon“ zum Satz von Springer über Hyperbolizität unter Skalarerweiterungen ungeraden Grades erhalten. Diese beiden Aussagen sind für den Beweis des Lokal-Global-Prinzips und der Aussage über die Ordnung schwach hyperbolischer Involutionen in Kapitel 5 wichtig.

Wir beginnen dieses Kapitel jedoch mit einigen Aussagen über Rechtsideale von $End_D V$, wobei D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra und V ein endlichdimensionaler D-Rechtsvektorraum ist. [19]

4.1 Rechtsideale

Definition 4.1. *Zu einer K-Algebra A definieren wir die zu A* ***inverse Algebra*** *A^{op}, indem wir die Multiplikation $\cdot$ in A durch*

$$\cdot^{op} : A \times A \to A, \ a \cdot^{op} b = b \cdot a \text{ für } a, \ b \in A$$

ersetzen.[20]

Bemerkung 4.2. *A^{op} ist eine K-Algebra, welche genau dann zentraleinfach ist, wenn A zentraleinfach ist. Die Rechtsideale von A entsprechen gerade den Teilmoduln von A^{op} aufgefasst als A^{op}-Linksmodul.*

Sei nun D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit einer Involution θ und V ein endlichdimensionaler D-Rechtsvektorraum. Wir betrachten $End_D V$ mit einer Involution τ, für die $\tau|_K = \theta|_K$ gilt.

Lemma 4.3. *Jedes Rechtsideal I von $End_D V$ ist von der Form $I = Hom_D(V, W)$, wobei $W \subseteq V$ ein Unterraum ist. Weiter ist I von der Form $I = e \cdot End_D V$ für ein idempotentes $e \in End_D V$.*

Für eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution (A, σ) ergibt sich somit, dass jedes Rechtsideal $I \subseteq A$ von der Form $I = e \cdot A$ für ein idempotentes $e \in A$ ist.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass I von der Form $I = e \cdot End_D V$ ist für ein idempotentes $e \in End_D V$. Denn für $f \in End_D V$ ist $f \cdot End_D V = Hom_D(V, imf)$ und damit ist $I = e \cdot End_D V = Hom_D(V, ime)$.

[19] In diesem Kapitel wird im Wesentlichen Artikel [BST-93] ausgearbeitet. Der Begriff einer schwach hyperbolischen, bzw. schwach isotropen Involution wird dort allerdings nicht behandelt.

[20] Die Bezeichnung ist gerechtfertigt, da $[A \otimes_K A^{op}] = [K]$ in der Brauergruppe $Br(K)$ gilt (siehe [L-90, §29, 3. F14]).

Die K-Algebra $(End_D V)^{op}$ ist halbeinfach, da sie zentraleinfach ist (siehe Abschnitt 2.5). Sei I ein beliebiges Rechtsideal von $End_D V$. Dann ist I ein Teilmodul von $(End_D V)^{op}$ aufgefasst als $(End_D V)^{op}$-Linksmodul und somit nach Abschnitt 2.5 ein direkter Summand von $(End_D V)^{op}$. Sei $I' \subseteq (End_D V)^{op}$ ein Teilmodul von $(End_D V)^{op}$ mit $(End_D V)^{op} = I \oplus I'$. I' ist ein Rechtsideal von $End_D V$. Seien nun $e \in I$, $e' \in I'$ mit $1 = e + e'$. Dann gilt für ein beliebiges $x \in I$: $1 \cdot x = e \cdot x + e' \cdot x$ und $e \cdot x \in I$, $e' \cdot x \in I'$. Da $(End_D V)^{op} = I \oplus I'$, folgt $e' \cdot x = 0$ und $e \cdot x = x$. Damit ist $e \cdot I = I$ und insbesondere $e^2 = e$. Weiter gilt $e \cdot End_D V \subseteq I = e \cdot I \subseteq e \cdot End_D V$, also $e \cdot End_D V = I$. □

Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Sei I ein Rechtsideal von A. Wir setzen

$$I^\perp := \{f \in A \mid \forall g \in I: \ \sigma(g) \cdot f = 0\}.$$

Betrachten wir nun wieder $(End_D V, \tau)$. Sei h eine reguläre λ-hermitesche Form bezüglich θ, $\lambda \in \{\pm 1\}$, auf V mit $ad_h = \tau$, d.h. für alle $f \in End_D V$ und für alle $x, y \in V$ gilt $h(\tau(f)(x), y) = h(x, f(y))$. Für einen Unterraum W von V ist

$$W^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W: \ h(w, v) = 0\} = \{v \in V \mid \forall w \in W: \ h(v, w) = 0\}.$$

Lemma 4.4. *Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt*

$$Hom_D(V, W)^\perp = Hom_D(V, W^\perp).$$

Beweis.

- Sei $g \in Hom_D(V, W^\perp)$ und $f \in Hom_D(V, W)$ beliebig. Da $\sigma = ad_h$, gilt für alle $x, y \in V$:

  $$h(\sigma(f)g(x), y) = h(g(x), f(y)) = 0.$$

  Damit folgt aus der Regularität von h, dass $\sigma(f) \cdot g = 0$ und somit $g \in Hom_D(V, W)^\perp$.

- Sei $g \in Hom_D(V, W)^\perp$. Sei $f \in Hom_D(V, W)$ surjektiv. Nach Voraussetzung ist $\sigma(f) \cdot g = 0$. Damit ist, da h linear in der ersten Komponente ist,

  $$0 = h(\sigma(f)g(y), x) = h(g(y), f(x)) \text{ für alle } x, \ y \in V.$$

  Da f surjektiv ist, folgt $g(y) \in W^\perp$ für alle $y \in V$ und damit $g \in Hom_D(V, W^\perp)$.

□

Folgerung 4.5. *Es ist $\dim_K I + \dim_K I^\perp = \dim_K End_D V$ für jedes Rechtsideal $I \subseteq End_D V$.*

Ist (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution, so gilt damit für jedes Rechtsideal I von A, dass $\dim_K I + \dim_K I^\perp = \dim_K A$.

Beweis. Sei I ein Rechtsideal von $End_D V$. Nach Lemma 4.3. ist $I = Hom_D(V, W)$ für einen Unterraum $W \subseteq V$ und nach Lemma 4.4. ist $I^\perp = Hom_D(V, W^\perp)$. Da h regulär ist, ist $\dim_D W + \dim_D W^\perp = \dim_D V$.[21] Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim_K I + \dim_K I^\perp &= \dim_K D \cdot \dim_D V \cdot (\dim_D W + \dim_D W^\perp) \\ &= \dim_K A. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.6. *Für $e \in End_D V$ gilt $\dim_D im(e) = \dim_D im(ad_h(e))$.*

Beweis. Da h regulär ist, gilt

$$\begin{aligned} (im(e))^\perp &= \{v \in V \mid \forall x \in im(e) : \ h(x, v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid \forall w \in V : \ h(e(w), v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid \forall w \in V : \ h(w, ad_h(e)(v)) = 0\} \\ &= ker(ad_h(e)). \end{aligned}$$

Mit $\dim_D V = \dim_D im(ad_h(e)) + \dim_D ker(ad_h(e))$ folgt also

$$\dim_D im(e) = \dim_D V - \dim_D (im(e))^\perp = \dim_D im(ad_h(e)).$$

□

4.2 Isotrope Involutionen

Sei A eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution σ. Wir werden σ isotrop nennen, falls für $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$ die reguläre (schief-)hermitesche Form $h : V \times V \to D$ isotrop ist. Für die Wohldefiniertheit dieses Begriffs benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 4.7. *Ist $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$, so sind äquivalent:*

1. *(V, h) ist isotrop, d.h. $\exists x \in V \backslash \{0\}$ mit $h(x, x) = 0$.*
2. *$\exists a \in A \backslash \{0\} : \sigma(a) \cdot a = 0$.*
3. *$\exists I \subseteq A$ Rechtsideal, $I \neq \{0\}$ mit $I \subseteq I^\perp$.*

Beweis. • $1 \Leftrightarrow 3$:

$$\begin{aligned} (V, h) \text{ ist isotrop} &\Leftrightarrow \text{Es gibt einen total isotropen Unterraum} \\ & W \neq \{0\} \text{ von } V, \text{ d.h. } W \subseteq W^\perp. \\ &\Leftrightarrow \text{Es gibt ein Rechtsideal } I = Hom_D(V, W) \neq \{0\} \\ & \text{von } End_D V \text{ mit } I \subseteq Hom_D(V, W^\perp) = I^\perp. \\ &\Leftrightarrow \text{Es gibt ein Rechtsideal } I \neq \{0\} \text{ von } A \text{ mit } I \subseteq I^\perp. \end{aligned}$$

[21] Der Beweis kann analog zu dem für reguläre symmetrische Bilinearformen (siehe [S-85, 1. §3, Lem. 3.11.]) geführt werden.

- $2 \Rightarrow 3$: Sei $a \in A\backslash\{0\}$ mit $\sigma(a) \cdot a = 0$. Dann ist $I := a \cdot A \neq \{0\}$ ein Rechtsideal von A. Für $a \cdot x,\ a \cdot y \in I$ ist

$$\sigma(a \cdot x) \cdot a \cdot y = \sigma(x) \cdot \sigma(a) \cdot a \cdot y = 0.$$

  Also ist $I \subseteq I^{\perp}$.

- $3 \Rightarrow 2$: Es gibt ein Rechtsideal $I \neq \{0\}$ von $End_D V$ mit $I \subseteq I^{\perp}$. Es ist $I = Hom_D(V, W)$ für einen Unterraum W von V. Sei $f : V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann ist $f \neq 0$ und $I = f \circ End_D V$. Da $I \subseteq I^{\perp}$, ist insbesondere $ad_h(f) \circ f = 0$. Also existiert ein $a \in A\backslash\{0\}$ mit $\sigma(a) \cdot a = 0$.

$\square$

Definition 4.8. *Sind die äquivalenten Bedingungen von Satz 4.7. erfüllt, so heißt (A, σ), bzw. σ* ***isotrop****, sonst heißt (A, σ), bzw. σ* ***anisotrop****.*

Satz 4.9. *Für eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution (A, σ) sind äquivalent:*

1. *σ ist anisotrop.*
2. *Jedes Rechtsideal I von A ist von der Form $I = f \cdot A$ für ein $f \in A$ idempotent und symmetrisch, d.h. $f^2 = f$ und $\sigma(f) = f$.*

Beweis.

- $1 \Rightarrow 2$: Sei $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$, wobei D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit Involution θ, so dass $\theta|_K = \sigma|_K$ und $h : V \times V \to D$ eine reguläre (schief-)hermitesche Form über (D, θ) ist. Es genügt zu zeigen, dass für jedes Ideal $I \neq \{0\}$ von $End_D V$ ein $e \in End_D V$ mit $I = e \cdot End_D V$, $e^2 = e$ und $ad_h(e) = e$ existiert.

  Nach Lemma 4.3. gibt es einen Unterraum W von V mit $I = Hom_D(V, W)$. Da (V, h) anisotrop, ist $(W, h|_{W \times W})$ regulär. Damit ist $V = W \oplus W^{\perp}$.[22] Sei $w_1, \ldots, w_r, w_1^{\perp}, \ldots, w_s^{\perp}$ eine D-Basis von V mit $w_1, \ldots, w_r \in W$ und $w_1^{\perp}, \ldots, w_s^{\perp} \in W^{\perp}$.

  Sei e definiert durch $e(w_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, r$ und $e(w_i^{\perp}) = 0$ für $i = 1, \ldots, s$. Dann ist $I = e \cdot End_D V$, $e^2 = e$ und $ad_h(e) = e$.[23]

- $2 \Rightarrow 1$: Wir zeigen, dass für alle Rechtsideale I von A mit $I \subseteq I^{\perp}$ gilt: $I = \{0\}$. Sei $f \in A$ mit $I = f \cdot A$, $f^2 = f$ und $\sigma(f) = f$. Sei $x = f \cdot a \in I$. Dann ist $x \in I^{\perp}$, also insbesondere $0 = \sigma(f) \cdot x = f^2 \cdot a = x$.

$\square$

[22] Der Beweis ist analog wie für symmetrische Bilinearformen (siehe [S-85, 1. §3, Lem. 3.4.]) führbar.

[23] Ist $h_1 = h|_{W \times W}$ und $h_2 = h|_{W^{\perp} \times W^{\perp}}$, so ist $ad_h(e) = (ad_{h_1}(e|_W), ad_{h_2}(e|_{W^{\perp}})) = (id_W, 0) = e$.

Satz 4.10. *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $x_1, \ldots, x_n \in A\backslash\{0\}$ mit*
$$\sigma(x_1) \cdot x_1 + \cdots + \sigma(x_n) \cdot x_n = 0.$$

2. *Es gibt ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $\boxplus^n(A, \sigma)$ isotrop.*

Beweis.

- $1 \Rightarrow 2$: Sei $\sigma(x_1) \cdot x_1 + \cdots + \sigma(x_n) \cdot x_n = 0$ mit $x_1, \ldots, x_n \in A\backslash\{0\}$. Wir betrachten $\boxplus^n(A, \sigma) \cong (M_n(A), \sigma^t)$.

  Dann ist $x := \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_n & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in M_n(A)$ und es gilt:
$$\begin{aligned} \sigma^t(x) \cdot x &= (\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k) \cdot x_k)_{i,j=1,\ldots,n} \\ &= 0 \in M_n(A). \end{aligned}$$
  Also ist $(M_n(A), \sigma^t)$ isotrop und damit auch $\boxplus^n(A, \sigma)$.

- $2 \Rightarrow 1$: Sei $\boxplus^n(A, \sigma) \cong (M_n(A), \sigma^t)$ isotrop. Sei $x \in M_n(A)\backslash\{0\}$ mit $\sigma^t(x) \cdot x = 0$. Sei $x = (x_{ij})_{i,j}$. Dann gilt
$$0 = \sigma^t(x) \cdot x = (\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_{ki}) \cdot x_{kj})_{i,j=1,\ldots,n}.$$
  Sei $x_{rs} \neq 0$ mit $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_{ks}) \cdot x_{ks}$ eine nichttriviale Darstellung der Null, $x_{ks} \in A$ für $k = 1, \ldots, n$.

□

Definition 4.11. *Eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution (A, σ), bzw. die Involution σ, heißt* ***schwach isotrop****, falls sie die beiden äquivalenten Bedingungen aus Satz 4.10. erfüllt. Ansonsten nennen wir (A, σ), bzw. σ,* ***stark anisotrop****.*

4.3 Hyperbolische Involutionen

Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Sei (D, θ) eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit Involution, so dass $\theta|_K = \sigma|_K$. Sei weiter V ein endlichdimensionaler D-Rechtsvektorraum. Sei $h : V \times V \to D$ eine reguläre λ-hermitesche Form, $\lambda \in \{\pm 1\}$. Falls h hyperbolisch ist und $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$, so werden wir σ hyperbolisch nennen. Für die Wohldefiniertheit beweisen wir den nachfolgenden Satz. Bedingung 5 besagt, dass dieser Begriff auch in der Allgemeinheit, in der wir die adjungierte Involution und hyperbolische hermitesche Formen eingeführt haben, mit unserer Intuition übereinstimmt (siehe [KMRT-98, II. §6, Prop. 6.7.]).

Satz 4.12. *Ist $(A,\sigma) \cong (End_D V, ad_h)$, so sind äquivalent:*

1. *(V,h) ist hyperbolisch.*
2. *Es gibt einen total isotropen Unterraum $S \subseteq V$ mit $\dim_D S = \frac{1}{2}\dim_D V$.*
3. *Es gibt ein Rechtsideal $I \subseteq A$ mit $I^\perp = I$.*
4. *Es gibt ein idempotentes Element $e \in A$ mit $\sigma(e) = 1 - e$.*
5. *Ist $(A,\sigma) \cong (End_E M, ad_h)$, wobei E eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution θ, M ein endlich erzeugter E-Rechtsmodul und $h : M \times M \to E$ eine reguläre (schief-)hermitesche Form ist, so ist h hyperbolisch.*

Beweis.
- $1 \Rightarrow 2$: ist nach der Definition eines hyperbolischen (schief-)hermiteschen Raumes klar.
- $2 \Rightarrow 3$: Setze $I := Hom_D(V,S) \neq \{0\}$. Dann gilt, da $S \subseteq S^\perp$, dass $I \subseteq Hom_D(V,S^\perp) = I^\perp$. Weiter sind die Dimensionen von I und $I^\perp$ über K gleich, da aus der Regularität von h $\dim_K S = \dim_K S^\perp$ folgt.

  Damit gibt es ein isotropes Rechtsideal $I \subset A$.
- $3 \Rightarrow 4$: Da $I = I^\perp$ ist, folgt mit Folgerung 4.5, dass
$$\dim_K I = \dim_K I^\perp = \frac{1}{2}\dim_K A.$$
  Nach Lemma 4.3. existiert $f \in A$ mit $f^2 = f$ und $I = f \cdot A$. Dann ist $\dim_K f \cdot A = \frac{1}{2}\dim_K A$ und wegen $I = I^\perp$ gilt $\sigma(f) \cdot f = 0$.

  Wir betrachten nun das Element $e := f - \frac{1}{2}f\sigma(f) \in I$. Dann gilt

  1. $$\begin{aligned} e^2 &= (f - \frac{1}{2}f\sigma(f))^2 \\ &= f^2 - \frac{1}{2}f^2\sigma(f) - \frac{1}{2}f\sigma(f)f + \frac{1}{4}f\sigma(f)f\sigma(f) \\ &= f - \frac{1}{2}f\sigma(f), \text{ da } f^2 = f \text{ und } \sigma(f)f = 0 \\ &= e \end{aligned}$$
  2. $\sigma(e) \cdot e = e \cdot \sigma(e) = 0$, wie man ebenfalls leicht nachrechnet.
  3. $e \cdot f = f \cdot f - \frac{1}{2} \cdot f \cdot \sigma(f) \cdot f = f$ und somit ist $f \in e \cdot A$. Also folgt $e \cdot A = f \cdot A$.

4. $e + \sigma(e)$ ist idempotent wegen 2.
5. Ebenfalls wegen 1. und 2. ist $(e + \sigma(e)) \cdot A = e \cdot A \oplus \sigma(e) \cdot A$. Ist nämlich $(e \cdot a + \sigma(e) \cdot b) \in e \cdot A \oplus \sigma(e) \cdot A$, so ist

   $$e \cdot a + \sigma(e) \cdot b = (e+\sigma(e)) \cdot e \cdot a + (e+\sigma(e)) \cdot \sigma(e) \cdot b \in (e+\sigma(e)) \cdot A.$$

   Die Summe ist direkt, da aus $e \cdot a = \sigma(e) \cdot b$ folgt, dass $0 = \sigma(e) \cdot e \cdot a = \sigma(e) \cdot b$.
6. Sei $\psi : A \to End_D V$ ein K-Algebrenisomorphismus mit $ad_h \circ \psi = \psi \circ \sigma$. Da $\dim_D im\psi(e) = \dim_D imad_h(\psi(e))$ nach Bemerkung 4.6, folgt

   $$\begin{aligned} \dim_K \sigma(e) \cdot A &= \dim_K Hom_D(V, im\, ad(\psi(e))) \\ &= \dim_K Hom_D(V, im\psi(e)) \\ &= \dim_K e \cdot A \\ &= \dim_K f \cdot A \\ &= \frac{1}{2} \dim_K A. \end{aligned}$$

   Und somit ergibt sich $\dim_K((e + \sigma(e))A) = \dim_K A$.

Damit ist $(e+\sigma(e)) \cdot A = A$, also insbesondere ist $e+\sigma(e)$ invertierbar. Da $e + \sigma(e)$ idempotent ist, folgt $e + \sigma(e) = 1$.

- $4 \Rightarrow 5$: Sei $(A, \sigma) \cong (End_E M, ad_h)$, wobei E eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution θ, M ein endlich erzeugter E-Rechtsmodul und $h : M \times M \to E$ eine reguläre (schief-)hermitesche Form ist. Da (A, σ) hyperbolisch, existiert ein $e \in End_E M$ mit $e^2 = e$ und $ad_h(e) = 1 - e$. Sei $U := im(e)$, $W := ker(e)$. Es ist $M = U \oplus W$, da e idempotent ist.[24] Ebenso ist $M = U^\perp \oplus W^\perp$, da e idempotent und ad_h die adjungierte Involution zu h ist.[25] Damit ergibt sich, dass $e : M \to U$ die Projektion auf U parallel zu W ist und weiter $1 - e : M \to W$ die Projektion auf W parallel zu U, sowie $ad_h(e) : M \to W^\perp$ die Projektion auf $W^\perp$ parallel zu $U^\perp$ ist. Nach Voraussetzung ist $ad_h(e) = 1 - e$, also folgt $W = W^\perp$ und damit auch $U = U^\perp$, d.h. U und W sind total isotrop.

  Sei $\tilde{h} : W \to U^* = Hom_E(U, E)$, definiert durch $\tilde{h}(w)(u) = h(w, u)$ für

[24] $m \in M$ lässt sich als $m = e(m) + m - e(m)$ mit $e(m) \in U$ und $m - e(m) \in W$ schreiben; und für $e(m) \in W$, ist $e(m) = e^2(m) = 0$.

[25] $m \in M$ lässt sich als $m = m - ad_h(e)(m) + ad_h(e)(m)$ mit $m - ad_h(e)(m) \in U^\perp$ und $ad_h(e)(m) \in W^\perp$ schreiben; und für $m \in U^\perp \cap W^\perp$ gilt für alle $v \in M$, $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$, dass $h(m, v) = h(m, u) + h(m, w) = 0$. Also folgt aus der Regularität von h, dass $m = 0$.

$u \in U$ und $w \in W$. Dann ist $\tilde{h}$ ein E-Rechtsmodulisomorphismus.[26] Dann ist

$$\tilde{h} \oplus id_U : W \oplus U \to U^* \oplus U = H_\lambda(U)$$

ein E-Rechtsmodulisomorphismus, der sogar eine Isometrie zwischen (M, h) und $(H_\lambda(U), h_\lambda)$ ist. Denn für $(s_1 + t_1)$, $(s_2 + t_2) \in W \oplus U$ gilt:

$$\begin{aligned}
h(s_1 + t_1, s_2 + t_2) &= h(s_1, s_2) + h(s_1, t_2) + h(t_1, s_2) + h(t_1, t_2) \\
&= h(s_1, t_2) + h(t_1, s_2) \text{ (da } S \text{ und } T \text{ total isotrop)} \\
&= h(s_1, t_2) + \lambda \cdot \theta(\lambda) \cdot h(t_1, s_2) \text{ (denn } \lambda \cdot \theta(\lambda) = 1) \\
&= h(s_1, t_2) + \lambda \cdot \theta(\lambda \cdot \theta(h(t_1, s_2))) \\
&= h(s_1, t_2) + \lambda \cdot \theta(h(s_2, t_1)) \\
&= \tilde{h}(s_1)(t_2) + \lambda \cdot \theta(\tilde{h}(s_2)(t_1)) \\
&= h_\lambda(\tilde{h}(s_1) + t_1, \tilde{h}(s_2) + t_2) \\
&= h_\lambda\big(\tilde{h} \oplus id_T(s_1 + t_1), \tilde{h} \oplus id_T(s_2 + t_2)\big).
\end{aligned}$$

- $5 \Rightarrow 1$: Trivial.

□

Definition 4.13. *Wir nennen die Involution σ auf A* ***hyperbolisch****, falls die äquivalenten Bedingungen von Satz 4.12. erfüllt sind.*

Eine hyperbolische Involution σ auf A ist isotrop.

Beispiele

1. Die Abbildung $\sigma : M_2(K) \to M_2(K)$,

$$\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K),$$

ist eine hyperbolische Involution, denn sie ist die adjungierte Abbildung zur hyperbolischen Ebene $\langle 1, -1 \rangle$ über K. Das Element $e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist idempotent und erfüllt die Bedingung $\sigma(e) = 1 - e$.

---

[26] $\tilde{h}$ ist injektiv, da für $x,\ y \in W$ mit $\tilde{h}(x) = \tilde{h}(y)$ für alle $m \in M$, $m = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$, gilt, dass $h(x, u + w) = h(x, u) = h(y, u) = h(y, u + w)$. Also ist, da h regulär ist, $x = y$.
Ist $f \in Hom_E(U, E)$, so definiere $f' : M \to E$ durch $f'|_U = f$ und $f'|_W = 0$. Dann ist, da h regulär ist, $f' = \hat{h}(m)$ für ein $m \in M$, $m = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ (siehe Beweis von Satz 3.1.). Damit ist $f = \tilde{h}(w)$.

2. Das erste Beispiel lässt sich verallgemeinern (siehe [BST-93, 2]): Sei ι eine Involution auf K. Sei $\lambda \in \{\pm 1\}$. Sei $h : K^2 \times K^2 \to K$,

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \iota(x_1)y_2 + \lambda \cdot \iota(x_2)y_1 \text{ für } (x_1, x_2),\ (y_1, y_2) \in K^2.$$

Dann ist h eine reguläre λ-hermitesche Form, welche hyperbolisch ist. Damit ist die adjungierte Involution ad_h zu h hyperbolisch. Wir bezeichnen ad_h mit θ_λ. Es ist $\theta_\lambda : M_2(K) \to M_2(K)$,

$$\theta_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota(d) & \lambda \cdot \iota(b) \\ \lambda \cdot \iota(c) & \iota(a) \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K).$$

Ist ι und damit θ_λ eine Involution erster Art, so ist θ_λ orthogonal, falls $\lambda = 1$, und symplektisch, falls $\lambda = -1$.

Bemerkung 4.14.
- *Seien (A, σ) und $(B, \tilde{\sigma})$ zentraleinfache K-Algebren mit Involution, wobei $\sigma_{|K} = \tilde{\sigma}_{|K}$. Ist (A, σ) hyperbolisch, so ist $(A \otimes_K B, \sigma \otimes \tilde{\sigma})$ hyperbolisch.*
- *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra. Sei L eine Körpererweiterung von F, die disjunkt zu K/F ist. Ist (A, σ) hyperbolisch, so ist $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch.*

Beweis. Sei $a \in A$ mit $a^2 = a$ und $\sigma(a) = 1 - a$. Für $a \otimes 1 \in A \otimes_K B$ gilt

$$\begin{aligned} (\sigma \otimes \tilde{\sigma})(a \otimes 1) &= \sigma(a) \otimes \tilde{\sigma}(1) \\ &= (1 - a) \otimes 1 \\ &= 1 \otimes 1 - a \otimes 1 \end{aligned}$$

und $(a \otimes 1)^2 = a^2 \otimes 1^2 = a \otimes 1$. Also ist $(A \otimes_K B, \sigma \otimes \tilde{\sigma})$ hyperbolisch. Analog ergibt sich $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch. □

Bemerkung 4.15. *Ist A eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit Involution σ, so ist (A, σ) nicht hyperbolisch.*

Beweis. Jedes idempotente Element $e \in A$ ist invertierbar und somit ist $e = 1$. Daher ist $\sigma(e) = 1 \neq 0$ und (A, σ) ist nicht hyperbolisch. □

4.4 Hyperbolische Involutionen über quadratischen Körpererweiterungen

In diesem Abschnitt zeigen wir den folgenden Satz, für den sich die Aussage und ihr Beweis für Involutionen erster Art in [BST-93] und für Involutionen zweiter Art in [LU-03] findet.

Satz 4.16. • *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution erster Art. Sei $L = K(\sqrt{d})$ eine quadratische Körpererweiterung von K. Falls es ein $r \in A$ mit $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$ gibt, ist $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch. Die Umkehrung gilt mit Ausnahme des Falles, in dem A zerfällt und σ die adjungierte Involution zu einer regulären symmetrischen Bilinearform mit ungeradem Wittindex ist.*

- *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution zweiter Art. Sei F der Grundkörper von (A, σ). Sei $L = F(\sqrt{d})$ eine quadratische Körpererweiterung von F, die disjunkt zu K/F ist. Dann ist $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ genau dann hyperbolisch, wenn es ein $r \in A$ mit $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$ gibt.*

Für den Beweis betrachten wir zuerst zwei Spezialfälle – erstens, dass σ anisotrop ist, und zweitens, dass σ hyperbolisch ist. Ist σ eine Involution erster Art, so ist der Grundkörper von (A, σ) gerade $F = K$.

Lemma 4.17. *Sei σ eine anisotrope Involution auf A. Sei $L = F(\sqrt{d})$ eine quadratische Körpererweiterung von F, die disjunkt zu K/F ist. Sei $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch. Dann existiert ein $r \in A$ mit $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$.*[27]

Beweis. Sei $e \in A \otimes_F L$ mit $e^2 = e$ und $(\sigma \otimes id_L)(e) = 1 - e$. Seien $e_1, e_2 \in A$ mit $e = e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes \sqrt{d}$. Dann ergibt sich:

- $e_1 = e_1^2 + e_2^2 d$,
- $e_1 e_2 + e_2 e_1 = e_2$, d.h. $e_1 = 1 - e_2 e_1 e_2^{-1}$,
- $\sigma(e_1) = 1 - e_1$,
- $\sigma(e_2) = -e_2$.

Wir zeigen, dass e_2 invertierbar ist, denn dann wählen wir $r = e_1 e_2^{-1}$ und erhalten $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$, womit das Lemma bewiesen ist.

Wir betrachten das Rechtsideal $I := \{x \in A |\ e_2 \cdot x = 0\}$. Da σ anisotrop ist, ist nach Satz 4.9. $I = f \cdot A$ für ein $f \in A$ mit $f^2 = f$ und $\sigma(f) = f$. Damit erhalten wir $e_1 f = e_1^2 f + d e_2^2 f = e_1^2 f$. Also ergibt sich $\sigma(e_1 f) \cdot e_1 f = f \cdot (1 - e_1) e_1 f = 0$ und ebenso $f e_1 \cdot \sigma(f e_1) = 0$. Somit ist, da σ anisotrop ist, $e_1 f = f e_1 = 0$. Damit ist $0 = \sigma(f e_1) = (1 - e_1) f = f$, und es folgt

$$\{x \in A |\ e_2 \cdot x = 0\} = f \cdot A = \{0\}.$$

Also ist der K-Vektorraumhomomorphismus $A \to A$, $x \mapsto e_2 \cdot x$ injektiv, somit bijektiv. Es existiert demnach ein $x \in A$ mit $e_2 \cdot x = 1$, damit ist e_2 invertierbar. □

[27] Der Beweis findet sich für Involutionen erster Art in [BST-93, Lemma 3.2.]. Für Involutionen zweiter Art kann er, wie in [LU-03] festgestellt, direkt übernommen werden.

Für den Fall, dass σ hyperbolisch ist, benutzen wir eine Aussage über die Existenz gewisser Unteralgebren von (A, σ) (siehe [BST-93, Thm. 2.2.]).[28]

Satz 4.18. *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Falls σ eine Involution zweiter Art ist, sei $\epsilon = 1$. Ist σ eine Involution erster Art, so sei $\epsilon = 1$, falls σ orthogonal ist, bzw. $\epsilon = -1$, falls σ symplektisch ist. Dann gilt:*

- *Die Involution σ ist genau dann hyperbolisch, wenn es eine σ-invariante Unteralgebra $M \subseteq A$ gibt mit $(M, \sigma) \cong (M_2(K), \theta_\epsilon)$, wobei*
$$\theta_\epsilon(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} \sigma(d) & \epsilon\sigma(b) \\ \epsilon\sigma(c) & \sigma(a) \end{pmatrix}.^{29}$$

- *Ist $degA$ durch vier teilbar und σ erster Art, so ist σ genau dann hyperbolisch, wenn es eine σ-invariante Unteralgebra $M \subseteq A$ gibt mit $(M, \sigma) \cong (M_2(K), \theta_{-\epsilon})$.*

Beweis. Gibt es solch eine σ-invariante Unteralgebra M von A, so erfüllt das Bild e von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ in M die Bedingungen $e^2 = e$ und $\sigma(e) = 1 - e$.

Sei nun umgekehrt (A, σ) hyperbolisch. Nach Satz 4.12. können wir $(A, \sigma) \cong (End_D H_\lambda(S), ad_{h_\lambda})$ für eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra D mit Involution τ und einen endlichdimensionalen D-Rechtsvektorraum S annehmen. Es genügt, die Existenz der verlangten Unteralgebren für $(End_D H_\lambda(S), ad_{h_\lambda})$ zu zeigen. Sei $h : S \times S \to D$ eine reguläre hermitesche Form über (D, τ). Wir betrachten wieder den D-Rechtsmodulisomorphismus $\hat{h} : S \to S^*$ (siehe Beweis von Satz 3.1.), definiert durch

$$\hat{h}(s)(t) = h(s, t) \text{ für } s,\ t \in S.$$

Wir betrachten die Elemente $e_{11},\ e_{12},\ e_{21},\ e_{22} \in End_D H_\lambda(S)$, definiert durch $e_{11}(s^*, s) = (s^*, 0)$, $e_{12}(s^*, s) = (\hat{h}(s), 0)$, $e_{21}(s^*, s) = (0, \hat{h}^{-1}(s^*))$, $e_{22}(s^*, s) = (0, s)$ für $s^* \in S^*$ und $s \in S$. Für die von $e_{11},\ e_{12},\ e_{21},\ e_{22}$ erzeugte K-Unteralgebra von $End_D H_\lambda(S)$ gilt:

- $\phi : M \to M_2(K)$, definiert durch
$$\phi(ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
für $a,\ b,\ c,\ d \in K$, ist ein K-Algebrenisomorphismus.

- Es ist $ad_{h_\lambda}(ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22}) = ad_{h_\lambda}(a)e_{22} + \lambda \cdot ad_{h_\lambda}(b)e_{12} + \lambda \cdot ad_{h_\lambda}(c)e_{21} + ad_{h_\lambda}(d)e_{11}$ für $a,\ b,\ c,\ d \in K$.

[28] Auch zu dem Beweis des folgenden Satzes siehe [BST-93, Thm. 2.2.].

[29] Zu dieser Involution siehe Beispiel 2 in Abschnitt 4.3.

Somit ergibt sich $(M, ad_{h_\lambda}|_M) \cong (M_2(K), \theta_\lambda)$. Ist σ eine Involution zweiter Art, so können wir $\lambda = 1$ wählen und haben die gewünschte Unteralgebra gefunden. Ist σ eine Involution erster Art, so unterscheiden wir, ob $\deg A$ durch vier teilbar ist oder nicht:

- Ist $\deg A$ durch vier teilbar, so ist $\dim_D S$ oder $\deg D$ gerade. Damit gibt es eine reguläre schiefhermitesche Form $h' : S \times S \to D$. Wir erhalten analog zu oben, dass $(M, ad_{h_\lambda}|_M) \cong (M_2(K), \theta_{-\lambda})$. Damit sind wir auch in diesem Fall fertig.

- Ist $\deg A$ nicht durch vier teilbar, so sind ad_{h_λ} und $ad_{h_\lambda}|_M$ vom selben Typ (siehe [KMRT-98, I. §4, Thm. 4.14(1)]). Da $(M, ad_{h_\lambda}|_M) \cong (M_2(K), \theta_\lambda)$, sind somit θ_λ und ad_{h_λ} vom selben Typ. Nun ist θ_λ genau dann orthogonal, wenn $\lambda = 1$ ist (siehe Beispiel 2 in Abschnitt 4.3). Damit folgt $\epsilon = \lambda$ und die Behauptung ist gezeigt.

□

Mit Satz 4.18. erhalten wir:

Lemma 4.19. *Sei σ eine hyperbolische Involution auf A, wobei für σ orthogonal $\deg A$ durch vier teilbar sei. Sei $L = F(\sqrt{d})$ eine quadratische Körpererweiterung von F, die disjunkt zu K/F ist. Dann existiert ein $r \in A$ mit $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$.*[30]

Beweis. Wir unterscheiden je nach Art der Involution.

Ist σ eine Involution erster Art, so existiert unter den gegebenen Voraussetzungen nach Satz 4.18. eine σ-invariante Unteralgebra M von A mit $(M, \sigma) \cong (M_2(K), \theta_{-1})$. Sei $\phi : M_2(K) \to M$ ein K-Algebrenisomorphismus mit $\sigma \circ \phi = \phi \circ \theta_{-1}$. Wir betrachten

$$r := \phi(\begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}).$$

Dann gilt $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$.

Ist σ eine Involution zweiter Art, so existiert nach obigem Resultat eine σ-invariante Unteralgebra M von A mit $(M, \sigma) \cong (M_2(K), \theta_1)$. Sei wieder $\phi : M_2(K) \to M$ ein K-Algebrenisomorphismus mit $\sigma \circ \phi = \phi \circ \theta_1$. Wir betrachten das Element

$$r := \phi(\begin{pmatrix} 0 & d \cdot \sqrt{\alpha} \\ (\sqrt{\alpha})^{-1} & 0 \end{pmatrix}), \text{ wobei } \alpha \in F^\times \backslash F^{\times 2} \text{ mit } K = F(\sqrt{\alpha}).$$

Dann ergibt sich wieder, dass $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$. □

[30] Der erste Teil des Beweises richtet sich nach [BST-93, Thm. 3.3.], der zweite Teil nach [LU-03, Thm. 3.6.].

Mit den beiden Spezialfällen Lemma 4.17. und Lemma 4.19. können wir nun den Beweis des zu Beginn dieses Abschnitts angegebenen Satzes führen.

Beweis von Satz 4.16. Sei $r \in A$ mit $r^2 = d$ und $\sigma(r) = -r$. Sei $t := d^{-1} \cdot r \otimes \sqrt{d} \in A \otimes_F L$. Dann ist $t^2 = d^{-1} \otimes d = 1 \in A \otimes_F L$ und $(\sigma \otimes id_L)(t) = -t$. Sei nun $e := \frac{1}{2}(1+t) \in A \otimes_F L$. Dann ist

- $e^2 = \frac{1}{4}(1 + 2t + t^2) = e$ und
- $1 - e = \frac{1}{2}(1-t) = (\sigma \otimes id_L)(e)$.

Damit ist $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch.

Sei nun umgekehrt $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch. Sei (D, θ) eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit Involution, so dass $\theta|_K = \sigma|_K$, V ein endlichdimensionaler D-Rechtsvektorraum und h eine reguläre (schief-)hermitesche Form mit $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$. Es genügt, die Existenz eines $\tilde{r} \in End_D V$ mit $\tilde{r}^2 = d$ und $ad_h(\tilde{r}) = -\tilde{r}$ zu zeigen. Dazu betrachten wir die Wittzerlegung von (V, h):[31]

$$(V, h) \simeq (H_\lambda(S), h_\lambda) \perp (V_0, h_0),$$

wobei S ein endlichdimensionaler Unterraum von V und (V_0, h_0) anisotrop ist. Wir bezeichnen mit ad_λ die adjungierte Involution zu h_λ, $ad_\lambda : End_D H_\lambda(S) \to End_D H_\lambda(S)$, und mit ad_0 die zu h_0 adjungierte Involution, $ad_0 : End_D V_0 \to End_D V_0$. Für $f_1 \in End_D H_\lambda(S)$ und $f_2 \in End_D V_0$ betrachten wir $f := (f_1, f_2) : H_\lambda(S) \oplus V_0 \to H_\lambda(S) \oplus V_0,\ x + y \mapsto f_1(x) + f_2(y)$. Es gilt $ad_h(f_1, f_2) = (ad_\lambda(f_1), ad_0(f_2))$. Wir haben für die Spezialfälle ad_0 und ad_λ gezeigt, dass $r_0 \in End_D V_0$ und $r_\lambda \in End_D H_\lambda(S)$ existieren mit $r_0^2 = d = r_\lambda^2$ und $ad_0(r_0) = -r_0$, sowie $ad_\lambda(r_\lambda) = -r_\lambda$.[32] Damit gilt für $\tilde{r} := (r_\lambda, r_0)$:

- $ad_h(r_\lambda, r_0) = (ad_\lambda(r_\lambda), ad_0(r_0)) = -(r_\lambda, r_0)$.
- Für $x \in H_\lambda(S)$ und $y \in V_0$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{r}^2(x+y) &= r_\lambda^2(x) + r_0^2(y) \\ &= x \cdot d + y \cdot d \\ &= (id_{End_D V}(x+y)) \cdot d, \end{aligned}$$

somit $\tilde{r}^2 = d$.

□

[31] Zur Wittzerlegung siehe [S-85, 7. §9].

[32] Ist σ orthogonal, so wird $\deg H_\lambda(S)$ genau dann nicht von vier geteilt, wenn der Ausnahmefall eintritt.

Wir zeigen nun, dass in Satz 4.16. der Ausschluss des einen Falls notwendig ist (siehe [BST-93, 3]): Ausgeschlossen wurde der Fall, dass $(A, \sigma) \cong (M_n(K), ad_q)$, wobei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und q eine reguläre quadratische Form über K mit ungeradem Wittindex, d.h.

$$q \simeq m \times \langle -1, 1\rangle \perp q_0$$

mit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ungerade und q_0 anisotrop. Sei $L = K(\sqrt{d})$ eine quadratische Körpererweiterung von K und $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch. In diesem Fall kann es kein Element $\tilde{r} \in A$ mit $\tilde{r}^2 = d$ und $\sigma(\tilde{r}) = -\tilde{r}$ geben. Dies machen wir uns mit Überlegungen zu quadratischen Formen klar. Denn nehmen wir an, wir hätten ein $r \in M_n(K)$ mit $r^2 = d$ und $ad_q(r) = -r$, so gibt es eine quadratische Form q' über K mit $q \simeq \langle 1, -d\rangle \otimes q'$ (siehe [BST-93, Prop. 3.1.]). Weiter folgt daraus, dass q über L hyperbolisch ist, dass auch q_0 über L hyperbolisch ist und es somit eine quadratische Form q_0' über K gibt mit $q_0 \simeq \langle 1, -d\rangle \otimes q_0'$ (siehe [S-85, 2. §5], [PD-01, 3, Lem. 3.3.1]). Damit folgt

$$\langle 1, -d\rangle \otimes q' \simeq \langle 1, -d\rangle \otimes q_0' \perp m \times \langle 1, -1\rangle.$$

Also ist $\dim q' = \dim q_0' + m$, d.h. $\dim q'$ und $\dim q_0'$ sind von unterschiedlicher Parität. Berechnet man nun die Diskriminante, so ergibt sich $d \in K^{\times 2}$ – im Widerspruch dazu, dass $K(\sqrt{d})$ eine quadratische Körpererweiterung von K ist.

Wir werden Satz 4.16. nur in solchen Fällen anwenden, in denen es erlaubt ist, anstatt (A, σ) die zweifache orthogonale Summe $\boxplus^2(A, \sigma)$ zu verwenden. Ist $(A, \sigma) \cong (M_n(K), ad_q)$, wobei q eine reguläre quadratische Form mit ungeradem Wittindex ist, so ist $\boxplus^2(A, \sigma) \cong (M_{2n}(K), ad_{2\times q})$ und $2 \times q$ hat geraden Wittindex, wie folgendes elementare Resultat über quadratische Formen besagt. Insbesondere befinden wir uns, falls $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gerade ist, für $\boxplus^n(A, \sigma)$ nicht im Ausnahmefall.

Lemma 4.20. *Ist $-1 \notin K^{\times 2}$, so ist für jede reguläre quadratische Form q über K der Wittindex von $q \perp q$ gerade.*[33]

Beweis. Wir führen den Beweis über vollständige Induktion nach $\dim q$. Ist $\dim q = 1$, so ist $q \perp q$ anisotrop, da $-1 \notin K^{\times 2}$.

Sei nun $\dim q \geq 2$. Ist $q \perp q$ anisotrop, so hat $q \perp q$ Wittindex 0. Sei also $q \perp q$ isotrop angenommen. Sei $D(q)$ die Menge der Elemente von $K^\times$, die von q dargestellt werden. Dann existiert $x,\ y \in D(q) \subseteq K^\times$ mit $x + y = 0$, d.h. $y = -x$. Also lässt sich $q \simeq \langle x\rangle \perp q_1$ mit einer regulären quadratischen Form q_1 über K und $-x \in D(q)$ schreiben. Somit existiert $t \in K$ mit

$$-x = xt^2 + b \text{ für ein } b \in D(q_1) \cup \{0\}. \tag{2}$$

[33] Der Beweis ist ähnlich zum Beweis der β-Zerlegung quadratischer Formen (siehe [EL-73, 2.]).

Da $-1 \notin K^{\times 2}$, folgt sogar $b \in D(q_1) \subseteq K^\times$. Damit ist $q_1 \simeq \langle b \rangle \perp q_2$ für eine reguläre quadratische Form q_2 über K.[34] Wir erhalten $q \simeq \langle x, b\rangle \perp q_2$ mit $2 \times \langle x, b\rangle$ hyperbolisch: Es ist $\langle x, b\rangle \simeq -\langle x, b\rangle$, da $\langle x, b\rangle = \langle x, -x\rangle$, falls in (2) $t = 0$ gilt, und $\langle x, b\rangle \simeq \langle xt^2, b\rangle \simeq \langle xt^2 + b, (xt^2 + b)xb\rangle \simeq \langle -x, -x^2 b\rangle$, falls in (2) $t \neq 0$ gilt.

Ist $\dim q = 2$, so ergibt sich, dass $q \perp q$ den Wittindex zwei hat. Ist $\dim q > 2$, so ist der Wittindex von $q \perp q$ gleich dem Wittindex von $q_2 \perp q_2$ plus zwei – also nach Induktionsvoraussetzung gerade. □

4.5 Hyperbolische Involutionen über Körpererweiterungen ungeraden Grades

In diesem Abschnitt werden wir ein Analogon zu einer schwachen Version des Satzes von Springer zeigen: Für eine zentraleinfache K-Algebra A mit Involution σ und eine Körpererweiterung L ungeraden Grades des Grundkörpers F gilt, dass σ hyperbolisch ist, wenn die Involution $\sigma \otimes id_L$ auf $A \otimes_F L$ hyperbolisch ist. Für quadratische Formen q über K und eine Körpererweiterung L/K ungeraden Grades impliziert dies also, dass, falls q über L hyperbolisch ist, q auch schon über K hyperbolisch ist.[35]

In einem speziellen Fall ist eine Übertragung des Satzes von Springer bekannt: Sei Q eine Quaternionenalgebra über K. Sei $A = M_n(Q)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und σ eine Involution erster Art auf A. Gibt es eine Körpererweiterung L von K ungeraden Grades mit $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ isotrop, so ist (A, σ) isotrop (siehe [PSS-01, Cor. 3.7]). Weiter ist bekannt, dass diese Aussage für eine beliebige zentraleinfache K-Algebra A mit Involution σ nicht richtig ist (siehe [PSS-01, 4.]). Gilt jedoch Folgendes (siehe [PSS-01, Rem. 4.6]): Sei D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit Involution θ und Grundkörper F. Sei $(A, \sigma) = (M_n(D), ad_h)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und eine reguläre hermitesche Form $h : D^n \times D^n \to D$. Sei L eine Körpererweiterung von F, deren Grad teilerfremd zu $2 \cdot \deg D$ ist. Ist $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ isotrop, so folgt (A, σ) isotrop?

Um obiges Ergebnis über hyperbolische Involutionen zu beweisen, werden wir zuerst einige Überlegungen zu regulären (schief-)hermiteschen Formen über Divisionsalgebren anführen. Ich führe den Beweis nicht wie in [KMRT-98], da dort ein Ergebnis über die Ordnung schwach hyperbolischer (schief-)hermitescher Formen eingeht (siehe [KMRT-98, Thm. 6.15], [S-70, Thm. 5.1]), für das ich in dieser Arbeit einen anderen Beweis angebe, der dieses Analogon zu Springer verwendet. Stattdessen findet sich die Idee dieses Beweises in [K-91, Prop 10.3.1] und [BL-90, Prop. 1.2].[36]

[34] Ist $\dim q = 2$, so ist $\dim q_2 = 0$, d.h. $q_1 \simeq \langle b \rangle$.

[35] Für einen Beweis das Satzes von Springer, der diese schwache Version impliziert, auf der Ebene quadratischer Formen siehe [S-85, 2. §5, Thm. 5.3].

[36] In beiden Fällen wird das Resultat allgemeiner für reguläre (schief-)hermitesche Formen über einer K-Algebra mit Involution J, so dass $J|_K = id_K$, bewiesen. Deswegen sind

Sei $h : V \times V \to D$ eine reguläre (schief-)hermitesche Form über der zentraleinfachen K-Divisionsalgebra D mit Involution θ. Sei $F = Fix(\theta|_K)$ der Grundkörper von θ. Sei L/F eine Körpererweiterung, die disjunkt zu K/F und einfach, d.h. $L = F(\delta)$ für ein $\delta \in L^\times$, ist. Ist r der Grad der Körpererweiterung, so ist $L = \bigoplus_{i=0}^{r-1} F\delta^i$. Wir definieren einen F-Vektorraummorphismus $s_\delta : L \to F$ durch $s_\delta(1) = 1,\ s_\delta(\delta^i) = 0$ für $i = 1, \dots,\ r-1$, und seine D-lineare Erweiterung

$$s_{\delta,D} : D \otimes_F L \to D$$

durch $s_{\delta,D}(d \otimes l) = d \cdot s_\delta(l)$ für $d \in D$ und $l \in L$. Wir betrachten nun

$$h' := s_{\delta,D} \circ (h \otimes id_L) : V \otimes_F L \times V \otimes_F L \to D.$$

h' ist eine reguläre, bezüglich θ (schief-)hermitesche Form.[37] Aus der Definition von h' ergibt sich sofort

- $h'|_{V\otimes_F F \times V \otimes_F F} \simeq h$.
- Sei $L' := \bigoplus_{i=1}^{m} F\delta^i$ mit $m = \frac{r-1}{2}$, falls r ungerade, und $m = \frac{r-2}{2}$, falls r gerade. Dann ist $h'|_{V\otimes_F L' \times V\otimes_F L'} = 0$.

Es ist $V \otimes_F L \cong (V \otimes_F F) \oplus (V \otimes_F L'')$ mit $L'' := \bigoplus_{i=1}^{r-1} F\delta^i$ und $V \otimes_F L''$ ist genau das orthogonale Komplement von $V \otimes_F F$, d.h. $(V \otimes_F F)^\perp = V \otimes_F L''$.[38] Damit erhalten wir, dass $h'|_{V\otimes_F L'' \times V \otimes_F L''}$ regulär ist und für r ungerade ergibt sich nach Satz 4.12. sogar, dass $h'|_{V\otimes_F L''\times V\otimes_F L''}$ hyperbolisch ist.[39]

Satz 4.21. *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution beliebiger Art und Grundkörper F. Sei L/F eine Körpererweiterung ungeraden Grades. Dann gilt:*

Ist $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch, so ist (A, σ) hyperbolisch.

Beweis. Sei $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$ mit $h : V \times V \to D$ reguläre (schief-)hermitesche Form über (D, θ). Dann ist

$$(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L) \cong (End_{D\otimes_F L}(V \otimes_F L), ad_{h\otimes id_L})$$

und es genügt zu zeigen, dass h hyperbolisch ist, falls $h \otimes id_L$ hyperbolisch ist. Weiter genügt es offensichtlich eine einfache Körpererweiterung $L = F(\delta)$ mit $\delta \in L^\times$ zu betrachten. Mit den vorherigen Überlegungen haben wir

$$(V \otimes_F L, h') \simeq (V, h) \perp (H_\lambda(U), h_\lambda)$$

diese Beweise weniger direkt als der hier angeführte.

[37]Dies ergibt sich aus den Eigenschaften von $s_{\delta,D}$, da $h \otimes id_L$ eine reguläre (schief-)hermitesche Form über $(D \otimes_F L, \theta \otimes id_L)$ ist (siehe [K-91, 7.2] und [KMRT-98, I. §4.B.]).

[38]Nach Definition von h' ergibt sich $V \otimes_F L'' \subseteq (V \otimes_F F)^\perp$. Die Gleichheit folgt nun aus Dimensionsgründen.

[39]Denn $V \otimes_F L'$ ist ein total isotroper Unterraum von $V \otimes_F L''$ mit $\dim_D(V \otimes_F L') = \frac{1}{2}\dim_D(V \otimes_F L'')$.

für einen endlichdimensionalen D-Rechtsvektorraum U und wie oben $h' = s_{\delta,D} \circ (h \otimes id_L)$. Da $h \otimes id_L$ hyperbolisch ist, gilt $(V \otimes_F L, h \otimes id_L) \cong (H_\lambda(M), h_\lambda)$ für einen endlich erzeugten $D \otimes_F L$-Rechtsmodul M. M ist in kanonischer Weise ein D-Rechtsmodul. Wir schreiben M_D, falls wir M als D-Rechtsmodul auffassen. Wir betrachten die Abbildung

$$s_M : Hom_{D\otimes_F L}(M, D \otimes_F L) \to Hom_D(M_D, D),$$

definiert durch $s_M(f) = s_{\delta,D} \circ f$ für $f \in Hom_{D\otimes_F L}(M, D \otimes_F L)$. Es ist $(V \otimes_F L, h') \cong (H_\lambda(M), s_{\delta,D} \circ h_\lambda)$. Weiter ist

$$s_M \oplus id_M : H_\lambda(M) \to M_D^* \oplus M_D$$

eine Isometrie zwischen $(H_\lambda(M), s_{\delta,D} \circ h_\lambda)$ und dem λ-hermiteschen hyperbolischen Raum zu M_D (siehe [K-91, 7.2]). Somit ist mit $h \otimes id_L$ auch h' hyperbolisch.[40] Damit ergibt sich über die Wittkürzung regulärer (schief-)hermitescher Formen, dass h hyperbolisch ist. □

4.6 Schwach hyperbolische Involutionen

Definition 4.22. *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. (A, σ), bzw. σ, heißt* ***schwach hyperbolisch****, falls es ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gibt, so dass $\boxplus^n(A, \sigma)$ hyperbolisch ist. Ist (A, σ) schwach hyperbolisch, so nennen wir das kleinste $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, für das $\boxplus^n(A, \sigma)$ hyperbolisch ist, die* ***Ordnung*** *von (A, σ), bzw. von σ.*

Bemerkung 4.23. *(A, σ) ist genau dann schwach hyperbolisch, falls $(M_n(A), \sigma^t)$ hyperbolisch ist für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ist (A, σ) schwach hyperbolisch, so ist (A, σ) schwach isotrop.*

Beispiele

1. Ist q eine quadratische Form der Dimension n über K, für die $[q]$ ein Torsionselement in $W(K)$ ist, so ist $(M_n(K), ad_q)$ schwach hyperbolisch. Ist K so, dass $W(K)$ torsionsfrei ist, z.B. K euklidisch oder allgemeiner K pythagoreisch mit $-1 \notin K^{\times 2}$, erhalten wir mittels quadratischer Formen über K nur Beispiele schwach hyperbolischer Involutionen, welche schon hyperbolisch sind.

2. Ist K euklidisch und σ eine orthogonale Involution auf $\mathbb{H}_K$, so haben wir in Satz 3.6. gesehen, dass es eine σ-konforme Quaternionenbasis $1,\ i,\ j,\ k$ von $\mathbb{H}_K$ mit $i^2 = -1 = j^2$ gibt. Betrachtet man

$$e := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_K),$$

[40] Eine andere Möglichkeit, dies einzusehen, ist über die adjungierten Involutionen von $h \otimes id_L$ und h' (siehe [KMRT-98, II. §6, Prop 6.9.]).

so ist $e^2 = e$ und $\sigma^t(e) = 1 - e$, d.h. $(M_2(\mathbb{H}_K), \sigma^t)$ ist hyperbolisch. Also ist $(\mathbb{H}_K, \sigma)$ schwach hyperbolisch. Da $\mathbb{H}_K$ eine Divisionsalgebra ist, ist σ nicht hyperbolisch (siehe Bemerkung 4.15.) und somit ist $(\mathbb{H}_K, \sigma)$ von der Ordnung zwei.

3. Ist K reell, so ist die kanonische Involution γ auf $\mathbb{H}_K$ stark anisotrop, also nicht schwach hyperbolisch. Haben wir nämlich eine Darstellung

$$\gamma(x_1) \cdot x_1 + \cdots + \gamma(x_n) \cdot x_n = 0$$

für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{H}_K\backslash\{0\}$, so ergibt sich sofort, dass $-1 \in \sum K^{\times 2}$.[41]

Bemerkung 4.24. *Ist $\boxplus^n(A, \sigma)$ hyperbolisch, so wird n von der Ordnung von (A, σ) geteilt.*

Beweis. Ist $(A, \sigma) \cong (M_m(D), ad_h)$, wobei $h : D^m \times D^m \to D$ eine reguläre λ-hermitesche Form, $\lambda \in \{\pm 1\}$, bezüglich der Involution θ auf D ist, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (siehe Bemerkung 3.10.):

$$\boxplus^k(A, \sigma) \cong (M_{k \cdot m}(D), ad_{k \times h}).$$

Weiter ist $\boxplus^k(A, \sigma)$ genau dann hyperbolisch, wenn $k \times h$ hyperbolisch ist. Sei $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ die Ordnung von (A, σ). Da $l \times h$ und $n \times h$ hyperbolisch sind, ergibt sich mit der Kürzungsregel für reguläre λ-hermitesche Formen, dass für den größten gemeinsamen Teiler $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ von l und n auch schon $r \times h$ hyperbolisch ist.[42] Da l die Ordnung von (A, σ) ist, folgt $l = r$ und somit wird n von der Ordnung von (A, σ) geteilt. □

Bemerkung 4.25. *Sei A eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution σ. Ist der Grundkörper $F = Fix(\sigma|_K)$ von σ nicht reell, dann ist (A, σ) schwach hyperbolisch und die Ordnung von (A, σ) ist eine Zweierpotenz.*

Beweis. Ist F nicht reell, so existiert ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $n \times \langle 1 \rangle$ isotrop. Sei $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $n \leq 2^m$. Dann ist $2^m \times \langle 1 \rangle = \langle\langle 1, \ldots 1 \rangle\rangle$ isotrop, also hyperbolisch.[43] Also ist $(M_{2^m}(F), t = ad_{2^m \times \langle 1 \rangle})$ hyperbolisch und somit auch $(M_{2^m}(K), (\sigma|_K)^t)$. Damit ist

$$\boxplus^{2^m}(A, \sigma) = (M_{2^m}(K) \otimes_K A, (\sigma|_K)^t \otimes \sigma)$$

hyperbolisch. (A, σ) ist somit schwach hyperbolisch und die Ordnung von (A, σ) teilt 2^m – und ist demnach eine Zweierpotenz. □

---

[41] Ist $a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_K$, so ist $\gamma(a + bi + cj + dk) \cdot (a + bi + cj + dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

[42] Man verwendet, dass es $s, t \in \mathbb{Z}$, ohne Einschränkung $s > 0$, mit $r + tn = sl$ oder $r + tl = sn$ gibt.

[43] Jede isotrope multiplikative Form ist hyperbolisch; siehe dazu bespielsweise [S-85, 2. §10].

5 Lokal-Global-Prinzip für Involutionen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass eine Involution genau dann schwach hyperbolisch ist, wenn sie über allen (relevanten) reellen Abschlüssen des Grundkörpers F schwach hyperbolisch ist.[44] Dies impliziert für quadratische Formen Pfisters Lokal-Global-Prinzip: Eine reguläre quadratische Form q über K ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn sie über allen reellen Abschlüssen von K (schwach) hyperbolisch ist, d.h. wenn für alle Anordnungen P von K die Signatur $sign_P q = 0$ ist.[45] Die Charakterisierung schwach hyperbolischer Involutionen über die Signatur der Involutionen bezüglich der Anordnungen von F erhält man direkt aus den Theoremen dieses Kapitels und der Definition der Signatur einer Involution. Dieser Aufgabe widmen wir uns in dem nächsten Kapitel. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass die Ordnung einer schwach hyperbolischen Involution immer eine Zweierpotenz ist. Dies impliziert wiederum für die Wittgruppe des Körpers K, dass die Ordnung jedes Elements aus der Torsionsuntergruppe eine Zweierpotenz ist.[46]

Um die Beweise übersichtlich zu halten, führen wir sie je nach Art der Involution getrennt aus. Für Involutionen erster Art müssen wir bei der Verwendung von Satz 4.16. einen Trick anwenden, um den Ausnahmefall zu umgehen. Bei Involutionen zweiter Art führen nicht alle Anordnungen von F zu zentraleinfachen Algebren, so dass man in dieser Hinsicht vorsichtig sein muss.

Wir werden in den folgenden Abschnitten mehrmals das Lemma von Zorn anwenden (siehe [FP-85, Kap. 9]). Deswegen nun kurz dazu: Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Sei $F = Fix(\sigma|_K)$ der Grundkörper von σ. Wir werden algebraische Körpererweiterungen L/F, die disjunkt zu K/F sind,[47] betrachten und bezüglich der Eigenschaft „$(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ ist nicht (schwach) hyperbolisch“ maximieren. Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \;:= \{L \mid\; & L/F \text{ algebraische Körpererweiterung, die disjunkt zu } K/F \text{ ist,} \\ & \text{und } (A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L) \text{ nicht (schwach) hyperbolisch}\}\end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ ist durch Inklusion partiell geordnet. Ist $(L_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}$ eine Kette bezüglich der Inklusion, so ist $L := \bigcup_{i \in I} L_i$ eine obere Schranke von $(L_i)_{i \in I}$. L ist offensichtlich eine algebraische Körpererweiterung von F, die disjunkt

---

[44] Für Involutionen zweiter Art, $K = F(\sqrt{\alpha})$, beachte man, dass für diejenigen Anordnungen P von F mit $\alpha >_P 0$, keine zentraleinfache Algebra über F_P entsteht. Diese Fälle müssen wir nicht betrachten, um eine Aussage über die schwache Hyperbolizität der Involution treffen zu können.

[45] Für einen Beweis dieses Lokal-Global-Prinzips auf der Ebene quadratischer Formen siehe [S-85, 2. §7. Thm. 7.3.].

[46] Der Beweis dieses Resultats auf der Ebene quadratischer Formen findet sich beispielsweise in [S-85, 2. §6. Thm. 6.4.].

[47] Letzteres ist für Involutionen erster Art eine leere Bedingung.

zu K/F ist. Weiter ist $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ nicht (schwach) hyperbolisch: Denn nehmen wir an, $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ ist hyperbolisch, bzw. schwach hyperbolisch. Dann existiert ein $e \in A \otimes_F L$, bzw. ein $e \in M_n(A \otimes_F L)$ für ein $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ mit $e^2 = e$ und $(\sigma \otimes id_L)(e) = 1 - e$, bzw. $(\sigma \otimes id_L)^t(e) = I_n - e$. Da bei ist e, bzw. jeder Eintrag von e eine endliche Summe von Elementartensoren $a \otimes l$ mit $a \in A$ und $l \in L$. Damit ist $e \in A \otimes_F L_i$, bzw. $e \in M_n(A \otimes_F L_i)$ für ein $i \in I$. Und für e ergibt sich $(\sigma \otimes id_{L_i})(e) = 1 - e$, bzw. $(\sigma \otimes id_{L_i})^t(e) = I_n - e$. Also wäre $(A \otimes_F L_i, \sigma \otimes id_{L_i})$ (schwach) hyperbolisch – im Widerspruch zu $L_i \in \mathcal{M}$. Damit ist $L \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $(L_i)_{i \in I}$ und die Voraussetzungen für das Lemma von Zorn sind erfüllt.

5.1 Involutionen erster Art

Sei im Folgenden (A, σ) immer eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution erster Art, d.h. $\sigma|_K = id_K$. Wir werden folgendes Lemma beweisen:

Lemma 5.1. *Sei (A, σ) nicht schwach hyperbolisch. Sei für jede echte algebraische Erweiterung L/K die zentraleinfache L-Algebra mit Involution erster Art $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ schwach hyperbolisch. Dann ist K reell abgeschlossen.*

Bevor wir den Beweis führen, folgern wir aus diesem Lemma das Hauptergebnis für Involutionen erster Art und überlegen uns einige Verfeinerungen desselben.

Satz 5.2. *Eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution erster Art (A, σ) ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn für alle Anordnungen P von K die zentraleinfache K_P-Algebra mit Involution erster Art $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ schwach hyperbolisch ist.*

Beweis. Ist (A, σ) schwach hyperbolisch, so gibt es ein $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ mit $\boxplus^m(A, \sigma)$ hyperbolisch. Damit ist für jede Anordnung P von K die Algebra

$$(\boxplus^m(A, \sigma)) \otimes_K (K_P, id_{K_P}) \cong \boxplus^m(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$$

hyperbolisch.

Sei nun (A, σ) als nicht schwach hyperbolisch angenommen. Wähle mit Hilfe des Lemmas von Zorn einen Körper L mit L/K algebraisch und L maximal bezüglich der Eigenschaft „$(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ ist nicht schwach hyperbolisch". Dann ist nach Lemma 5.1. L reell abgeschlossen. Wir betrachten die Anordnung $P := L^2 \cap K$. Da L/K algebraisch ist, ist $L = K_P$. Somit existiert eine Anordnung P von K mit $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ nicht schwach hyperbolisch. □

Zur Präzisierung des Satzes betrachten wir das Verhalten von $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ für eine Anordnung P von K. Es ergeben sich vier Möglichkeiten:

1. $A \otimes_K K_P$ zerfällt und $\sigma \otimes id_{K_P}$ ist symplektisch. Dann ist

$$(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P}) \cong (M_n(K_P), ad_b),$$

wobei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und b eine reguläre schiefsymmetrische Bilinearform über K_P ist. Da jede reguläre schiefsymmetrische Bilinearform hyperbolisch ist,[48] ist $(M_n(K_P), ad_b)$ und damit auch $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ hyperbolisch.

2. $A \otimes_K K_P \cong M_n(\mathbb{H}_{K_P})$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\sigma \otimes id_{K_P}$ ist orthogonal. Dann ist

$$(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P}) \cong (M_n(\mathbb{H}_{K_P}), ad_h),$$

wobei h eine reguläre Form über $\mathbb{H}_{K_P}$ ist, welche bezüglich der kanonischen Involution γ auf $\mathbb{H}_{K_P}$ schiefhermitesch ist. Dann ist

$$(M_n(\mathbb{H}_{K_P}), ad_h) \cong (M_n(\mathbb{H}_{K_P}), \tau^t),$$

wobei $\tau : \mathbb{H}_{K_P} \to \mathbb{H}_{K_P}$, definiert durch $\tau(1) = 1,\ \tau(i) = -i,\ \tau(j) = j,$ $\tau(k) = k$ für eine Quaternionenbasis $1,\ i,\ j,\ k$ von $\mathbb{H}_K$.[49] Da τ schwach hyperbolisch von Ordnung zwei ist, erhält man, dass $(M_n(\mathbb{H}_{K_P}), \tau^t)$ und damit $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ schwach hyperbolisch und von Ordnung eins oder zwei ist.[50]

3. $A \otimes_K K_P$ zerfällt und $\sigma \otimes id_{K_P}$ ist orthogonal. Dann ist

$$(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P}) \cong (M_n(K_P), ad_q),$$

wobei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und q eine reguläre quadratische Form über K_P ist. Da der Wittring von K_P torsionsfrei ist, ist somit $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ genau dann schwach hyperbolisch, wenn sie hyperbolisch ist.

4. $A \otimes_K K_P \cong M_n(\mathbb{H}_{K_P})$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\sigma \otimes id_{K_P}$ ist symplektisch. Dann ist

$$(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P}) \cong (M_n(\mathbb{H}_{K_P}), ad_h),$$

wobei $h : \mathbb{H}_{K_P}^n \times \mathbb{H}_{K_P}^n \to \mathbb{H}_{K_P}$ eine reguläre Form über $\mathbb{H}_{K_P}$ ist, welche bezüglich der kanonischen Involution auf $\mathbb{H}_{K_P}$ hermitesch ist.

[48] Jeder von null verschiedenen Vektor x ist isotrop und es gibt einen Vektor y, so dass (x, y) eine hyperbolische Ebene aufspannen. Durch Iteration (orthogonale Zerlegung) erhält man, dass b hyperbolisch ist. Siehe auch [S-85, 7. §8].

[49] Es ist $\tau^t = ad_{h'}$ für eine reguläre schiefhermitesche Form h' über $(\mathbb{H}_{K_P}, \gamma)$. Ist K ein reell abgeschlossener Körper, so sind zwei reguläre schiefhermitesche Formen über $(\mathbb{H}_K, \gamma)$ genau dann isometrisch, wenn ihre Dimension gleich ist (siehe [S-85, 10. §3, Thm. 3.7]). Damit sind h und h' isometrisch und es ergibt sich $(M_n(\mathbb{H}_{K_P}), ad_h) \cong (M_n(\mathbb{H}_{K_P}), ad_{h'})$.

[50] Da τ von der Ordnung zwei ist, ist $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ genau dann hyperbolisch, wenn n gerade ist.

Nach einem Ergebnis von Jacobson (siehe [J-40]) ist h genau dann (schwach) hyperbolisch, wenn die reguläre symmetrische Bilinearform

$$h_{K_P} : \mathbb{H}^n_{K_P} \times \mathbb{H}^n_{K_P} \to K_P,\ h_{K_P}(x,y) := \frac{1}{2}(h(x,y) + h(y,x))$$

(schwach) hyperbolisch ist.[51] Also ergibt sich auch in diesem Fall, dass $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ genau dann schwach hyperbolisch ist, wenn sie hyperbolisch ist.

Anordnungen, die uns einen der ersten Fälle liefern, sind also irrelevant. Es genügt, diejenigen Anordnungen zu betrachten, die einen der beiden letzten Fälle liefern. Da die Involution σ auf A genau dann orthogonal ist, wenn es die Involution $\sigma \otimes id_{K_P}$ auf $A \otimes_K K_P$ ist, ergibt sich je nach Typ der Involution eine Aussage darüber, welche Anordnungen von K zu testen sind.

Folgerung 5.3. *Eine zentraleinfache K-Algebra mit orthogonaler (bzw. symplektischer) Involution (A, σ) ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn für all jene Anordnungen P von K, für die $A \otimes_K K_P$ zerfällt (bzw. nicht zerfällt), die zentraleinfache K_P-Algebra mit orthogonaler (bzw. symplektischer) Involution $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$* hyperbolisch *ist.*

Beweis von 5.1. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe beispielsweise [PD-01, 1, Thm. 1.2.10.]) genügt es zu zeigen, dass

1. K reell ist.

2. K nur zwei Quadratklassen hat.

3. K keine echten algebraischen Erweiterungen von ungeradem Grad besitzt.

1. K ist reell, da nach Bemerkung 4.25. jede zentraleinfache Algebra mit Involution erster Art über einem nicht reellen Körper schwach hyperbolisch ist.

2. Wir nehmen an, dass ein $\beta \in K^\times \setminus \pm K^{\times 2}$ existiert (also $\pm\beta$ kein Quadrat in K). Dann sind $L_1 := K(\sqrt{\beta})$ und $L_2 := K(\sqrt{-\beta})$ quadratische Körpererweiterungen von K. Also sind nach Voraussetzung $(A \otimes_K L_1, \sigma \otimes id_{L_1})$ und $(A \otimes_K L_2, \sigma \otimes id_{L_2})$ schwach hyperbolisch. Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, ohne Einschränkung n gerade, mit $\boxplus^n(A \otimes_K L_1, \sigma \otimes id_{L_1})$ und $\boxplus^n(A \otimes_K L_2, \sigma \otimes id_{L_2})$ hyperbolisch. Wir betrachten $(B, \tau) := \boxplus^n(A, \sigma)$. Da n gerade ist, ist es nicht möglich, dass $(B, \tau) \cong (M_l(K), ad_q)$ mit einer regulären quadratischen Form q von ungeradem Wittindex (siehe Lemma 4.20.). Somit können wir Satz 4.16. auf (B, τ) und L_1/K sowie L_2/K anwenden und erhalten

[51] Dazu siehe auch [S-85, 10. §1].

$r \in B$ mit $r^2 = \beta$ und $\tau(r) = -r$ sowie $s \in B$ mit $s^2 = -\beta$ und $\tau(s) = -s$. Es ist $(M_2(B), \tau^t) \cong \boxplus^2(B, \tau)$. Wir betrachten das Element $e := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & rs^{-1} \\ sr^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ aus $(M_2(B), \tau^t)$. Dann gilt:

$$e^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2rs^{-1} \\ 2sr^{-1} & 2 \end{pmatrix} = e.$$

Und weiter gilt:[52]

$$\begin{aligned} 1 - e &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -rs^{-1} \\ -sr^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & r^{-1}s \\ s^{-1}r & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \tau(r^{-1})\tau(s) \\ \tau(s^{-1})\tau(r) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(rs^{-1}) \\ \tau(sr^{-1}) & \tau(1) \end{pmatrix}^t \\ &= \tau^t(e). \end{aligned}$$

Also ist $\boxplus^2(B, \tau)$ und damit $\boxplus^{2n}(A, \sigma)$ hyperbolisch – im Widerspruch zu (A, σ) nicht schwach hyperbolisch.

3. Dies folgt direkt aus dem Analogon zum Satz von Springer, siehe Satz 4.21. Nehmen wir nämlich an, wir hätten eine echte algebraische Körpererweiterung L/K von ungeradem Grad, so ist nach Voraussetzung $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ schwach hyperbolisch. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $\boxplus^n(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch. Da

$$(\boxplus^n(A, \sigma)) \otimes_K (L, id_L) \cong \boxplus^n(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L),$$

folgt aus Satz 4.21, dass $\boxplus^n(A, \sigma)$ hyperbolisch ist.

□

Auch die Aussage über die Ordnung einer schwach hyperbolischen Involution zeigen wir zuerst für Involutionen erster Art.

Satz 5.4. *Ist die zentraleinfache K-Algebra mit Involution erster Art (A, σ) schwach hyperbolisch, so ist die Ordnung von (A, σ) eine Zweierpotenz.*

Beweis. Wir nehmen die Existenz eines Gegenbeispiels (A, σ) an, d.h. (A, σ) ist nicht hyperbolisch, jedoch schwach hyperbolisch von ohne Einschränkung ungerader Ordnung.[53]

[52] $r(-r) = -\beta = s^2$, also $-rs^{-1} = r^{-1}s$; analog für $-sr^{-1} = s^{-1}r$.

[53] Ist (A, σ) von der Ordnung $2^l \cdot m$ mit m ungerade, so betrachte $\boxplus^{2^l}(A, \sigma)$, welche von ungerader Ordnung m ist.

Sei L/K eine Körpererweiterung. Dann ist $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ schwach hyperbolisch mit ungerader Ordnung. Mit dem Lemma von Zorn wähle L/K algebraische Körpererweiterung, welche maximal ist bezüglich der Eigenschaft „$(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ ist nicht hyperbolisch". Wir zeigen, dass dann L reell abgeschlossen ist. Sei $(\tilde{A}, \tilde{\sigma}) := (A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$.

1. Ist L nicht reell, so ist nach Bemerkung 4.25. die Ordnung von $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ eine Zweierpotenz – im Widerspruch zu $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ von ungerader Ordnung größer eins.

2. Wir nehmen an, dass L mehr als zwei Quadratklassen hat, d.h. $\exists \beta \in L^\times \setminus \pm L^{\times 2}$. Dann sind $L_1 := L(\sqrt{\beta})$ und $L_2 := L(\sqrt{-\beta})$ quadratische Körpererweiterungen von L. Also sind $(\tilde{A} \otimes_L L_1, \tilde{\sigma} \otimes id_{L_1})$ und $(\tilde{A} \otimes_L L_2, \tilde{\sigma} \otimes id_{L_2})$ wegen der Maximalität von L hyperbolisch. Wir betrachten $(B, \tau) := \boxplus^2(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$. Auf (B, τ) ist Satz 4.16. für L_1/L und L_2/L anwendbar. Somit erhalten wir analog zu oben, dass $\boxplus^2(B, \tau)$ hyperbolisch ist. Also ist $\boxplus^4(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ hyperbolisch – im Widerspruch dazu, dass $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ ungerade Ordnung größer eins hat.

3. Dass L keine echten Erweiterungen ungeraden Grades besitzt, folgt sofort aus dem Analogon zum Satz von Springer (siehe Satz 4.21.).

Über einem reell abgeschlossenen Körper L haben wir die Möglichkeiten einer zentraleinfachen L-Algebra mit Involution erster Art (B, τ) schon diskutiert. Es ergaben sich vier Fälle.

1. Zerfällt B und ist τ symplektisch, so ist τ hyperbolisch.

2. Zerfällt B und ist τ orthogonal, so ist τ genau dann schwach hyperbolisch, wenn τ hyperbolisch ist.

3. Zerfällt B nicht und ist τ orthogonal, so ist τ schwach hyperbolisch von Ordnung eins oder zwei.

4. Zerfällt B nicht und ist τ symplektisch, so ist τ genau dann schwach hyperbolisch, wenn τ hyperbolisch ist.

Somit ist jede schwach hyperbolische zentraleinfache L-Algebra von ungerader Ordnung schon hyperbolisch. Also ist $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L)$ hyperbolisch – Widerspruch. □

5.2 Involutionen zweiter Art

Die Beweise der analogen Aussagen für Involutionen zweiter Art sind sehr ähnlich. Da nicht alle Körpererweiterungen L/K eine zentraleinfache Algebra liefern, muss man einige Sonderfälle betrachten.

Sei im Folgenden immer (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution zweiter Art. Sei $F := Fix(\sigma|_K)$ der Grundkörper von A. Sei $\alpha \in F^\times$ mit $K = F(\sqrt{\alpha})$.[54] Wir werden ein Analogon zu Lemma 5.1. zeigen:

Lemma 5.5. *Sei (A, σ) nicht schwach hyperbolisch. Sei für jede echte algebraische Körpererweiterung L/F, für die α kein Quadrat in L ist, die zentraleinfache $L(\sqrt{\alpha})$-Algebra mit Involution zweiter Art $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ schwach hyperbolisch. Dann ist F reell abgeschlossen.*

Wir zeigen wieder zuerst eine Folgerung. Diesmal können wir uns sofort auf spezielle Anordnungen des Grundkörpers, nämlich solche, für die α kleiner null ist, beschränken.

Satz 5.6. *Eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution zweiter Art (A, σ) ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn für alle Anordnungen P von F, für die $\alpha <_P 0$, $(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P})$* hyperbolisch *ist.*

Beweis. Ist (A, σ) schwach hyperbolisch, so ist für alle Anordnungen P von F, für die $\alpha <_P 0$ ist, $(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P})$ offensichtlich schwach hyperbolisch. Diese Algebra zerfällt jedoch, d.h.

$$(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P}) \cong (M_n(F_P(\sqrt{\alpha})), ad_h),$$

wobei $h : F_P(\sqrt{\alpha})^n \times F_P(\sqrt{\alpha})^n \to F_P(\sqrt{\alpha})$ eine reguläre hermitesche Form über $F_P(\sqrt{\alpha})$ bezüglich des nichttrivialen Automorphismus von $F_P(\sqrt{\alpha})/F_P$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist. Nach dem Resultat von Jacobson (siehe [J-40]) ist h genau dann (schwach) hyperbolisch, wenn

$$h_{F_P} : F_P(\sqrt{\alpha})^n \times F_P(\sqrt{\alpha})^n \to F_P,\ h_{F_P}(x, y) := \frac{1}{2}(h(x, y) + h(y, x))$$

(schwach) hyperbolisch ist.[55] Somit ist $(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P})$ sogar hyperbolisch.

Ist (A, σ) nicht schwach hyperbolisch, so wählen wir wieder mittels Lemma von Zorn einen Körper L mit L/F algebraisch und L maximal bezüglich der Eigenschaft „α ist kein Quadrat in L und $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ ist nicht schwach hyperbolisch“. Dann ist nach Lemma 5.5. L reell abgeschlossen. Wir betrachten die Anordnung $P := L^2 \cap F$ von F. Da L/F algebraisch ist, ist $L = F_P$. Somit haben wir eine Anordnung P von F gefunden, so dass $\alpha <_P 0$ und $(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P})$ nicht schwach hyperbolisch und damit insbesondere nicht hyperbolisch ist. □

Beweis von Lemma 5.5. Wir gehen analog zu dem Beweis von Lemma 5.1. vor.

[54] $\sigma|_K$ ist der nichttriviale Automorphismus von K/F.
[55] Hierzu siehe auch [S-85, 10. §1].

1. Wäre F nicht reell, so wäre nach Bemerkung 4.25. (A,σ) schwach hyperbolisch.

2. Wir nehmen an, dass F mehr als zwei Quadratklassen hat. Sei $\beta \in F^\times \backslash \pm F^{\times 2}$. Dann sind $L_1 := F(\sqrt{\beta})$ und $L_2 := F(\sqrt{-\beta})$ quadratische Körpererweiterungen von F. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass α kein Quadrat in L_1 ist, d.h. $\sqrt{\alpha} \notin L_1$.[56] Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: Ist $\sqrt{\alpha} \notin L_2$, so sind nach Voraussetzung $(A \otimes_F L_1, \sigma \otimes id_{L_1})$ und $(A \otimes_F L_2, \sigma \otimes id_{L_2})$ schwach hyperbolisch und der Widerspruch ergibt sich genauso wie im Beweis von Lemma 5.1.

2. Fall: Sei $\sqrt{\alpha} \in L_2$. Nach Voraussetzung ist $(A \otimes_F L_1, \sigma \otimes id_{L_1})$ schwach hyperbolisch. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $\boxplus^n(A \otimes_F L_1, \sigma \otimes id_{L_1})$ hyperbolisch. Wir betrachten $(B,\tau) := \boxplus^n(A,\sigma)$. Mit Satz 4.16. erhalten wir ein $r \in B$ mit $r^2 = \beta$ und $\tau(r) = -r$. Sei

$$\phi : (M_n(A), \sigma^t) \to (B, \tau)$$

ein K-Algebrenisomorphismus. Wir betrachten

$$s := \phi(\sqrt{-\beta}) = \phi(\begin{pmatrix} \sqrt{-\beta} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{-\beta} \end{pmatrix}) \in B.$$

Dann ist $s^2 = -\beta$ und $\tau(s) = -s$.[57] Damit ergibt sich wiederum, dass $\boxplus^2(B,\tau)$ hyperbolisch ist – im Widerspruch zu (A,σ) nicht schwach hyperbolisch.

3. Dass F keinen echten algebraischen Körpererweiterungen besitzt, ergibt sich wieder direkt aus dem Analogon zum Satz von Springer (siehe Satz 4.21.).

□

Nun fehlt uns nur noch die Aussage über die Ordnungen schwach hyperbolischer Involutionen zweiter Art.

Satz 5.7. *Ist die zentraleinfache K-Algebra mit Involution zweiter Art (A,σ) schwach hyperbolisch, so ist die Ordnung von (A,σ) eine Zweierpotenz.*

[56] Da $-1 \notin F^{\times 2}$, ist α in mindestens einer der beiden Körpererweiterungen L_1 und L_2 kein Quadrat.

[57] $\sqrt{-\beta} = x \cdot \sqrt{\alpha}$ für ein $x \in F^\times$. Damit ist $\tau(s) = (\phi \circ \sigma^t \circ \phi^{-1})(s) = \phi(\sigma^t(x \cdot \sqrt{\alpha})) = -s$.

Beweis. Wir nehmen wie im Beweis von Satz 5.4. die Existenz eines Gegenbeispiels (A, σ) an, d.h. (A, σ) ist schwach hyperbolisch und ohne Einschränkung von ungerader Ordnung größer eins.

Mit dem Lemma von Zorn wählen wir eine algebraische Körpererweiterung L von F, welche maximal ist bezüglich der Eigenschaft „α ist kein Quadrat in L und $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ ist nicht hyperbolisch". $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ ist dann schwach hyperbolisch von ungerader Ordnung größer eins. Sei $(\tilde{A}, \tilde{\sigma}) := (A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$.

Wir zeigen wieder, dass L reell abgeschlossen ist. Dazu genügt es, zu zeigen, dass L nur zwei Quadratklassen besitzt, da sich mit Bemerkung 4.25. und Satz 4.21. wie gewohnt ergibt, dass L reell ist und keine echten Körpererweiterungen ungeraden Grades hat.

Nehmen wir nun an, dass L mehr als zwei Quadratklassen hat. Sei $\beta \in L^\times \setminus \pm L^{\times 2}$. Dann sind $L_1 := L(\sqrt{\beta})$ und $L_2 := L(\sqrt{-\beta})$ quadratische Körpererweiterungen von L, für die ohne Einschränkung α kein Quadrat in L_1 ist. Ist $\sqrt{\alpha} \notin L_2$, so ist $(\tilde{A} \otimes_L L_i, \tilde{\sigma} \otimes id_{L_i})$, $i = 1, 2$, hyperbolisch und Anwenden von Satz 4.16. für L_1/L und L_2/L ergibt $r, s \in \tilde{A}$ mit $r^2 = \beta$, $s^2 = -\beta$ und $\tilde{\sigma}(r) = -r$, $\tilde{\sigma}(s) = -s$. Somit ist $e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & rs^{-1} \\ sr^{-1} & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\tilde{A})$ mit $e^2 = e$ und $\tilde{\sigma}^t(e) = 1 - e$, also $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ von der Ordnung eins oder zwei – Widerspruch.

Ist $\sqrt{\alpha} \in L_2$, so ist $\sqrt{-\beta} = x \cdot \sqrt{\alpha}$ für ein $x \in L^\times$. Für $s := \sqrt{-\beta}$ ist damit $s^2 = -\beta$ und $\tilde{\sigma}(s) = -s$. Also ergibt sich analog, dass $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ von Ordnung eins oder zwei ist – im Widerspruch zu $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ von ungerader Ordnung größer eins.

Da L reell abgeschlossen ist, folgt

$$(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L) \cong (M_n(L(\sqrt{\alpha})), ad_h)$$

für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und eine reguläre hermitesche Form h über $L(\sqrt{\alpha})$ bezüglich des nichttrivialen Automorphismus von $L(\sqrt{\alpha})/L$. Wir haben uns schon im Beweis von Satz 5.5. überlegt, dass h genau dann schwach hyperbolisch ist, wenn h hyperbolisch ist. Da $(A \otimes_F L, \sigma \otimes id_L)$ schwach hyperbolisch ist, ist sie also hyperbolisch und wir haben einen Widerspruch erreicht. $\square$

6 Signatur einer Involution

Wir definieren die Signatur einer Involution σ auf der zentraleinfachen K-Algebra A über die Signatur der Spurform von σ. Die Spurform von σ wird sich als reguläre hermitesche Form über $(K, \sigma|_K)$ herausstellen. Darum beginnen wir dieses Kapitel mit dem Begriff der Signatur spezieller hermitescher Formen. Danach führen wir die Spurform ein. Um schließlich die Signatur einer Involution σ als die Wurzel der Signatur der Spurform von σ definieren zu können, benötigen wir eine technische Vorbereitung – die „Standardidentifikation" von $V \otimes_K V$ mit $End_K V$ für einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

6.1 Signatur spezieller hermitescher Formen

Sei $h : V \times V \to K$ eine reguläre hermitesche Form bezüglich der Involution ι auf K. Sei der Grundkörper F von ι reell.

- Ist $\iota = id_K$, so ist h eine reguläre symmetrische Bilinearform und der Begriff der Signatur von h bezüglich einer Anordnung P von K ist wohlbekannt (siehe [S-85, 2. §4, Def. 4.5]). Die **Signatur** $sign_P h$ von h bezüglich P ist die Differenz $n_+ - n_-$, wobei n_+, bzw. n_- die Anzahl der positiven, bzw. negativen Einträge einer beliebigen Diagonalisierung von h sind. Die Wohldefiniertheit der Signatur ergibt sich aus dem Theorem von Jacobi und Sylvester (siehe [S-85, 2. §4, Thm. 4.4]).

- Ist ι eine Involution zweiter Art, so bezeichnen wir mit F den Grundkörper von ι. Sei $\alpha \in F^\times \backslash F^{\times 2}$ mit $K = F(\sqrt{\alpha})$.

  Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine bezüglich der hermiteschen Form h auf V orthogonale K-Basis von V, d.h.

  $$h(e_i, e_j) = \begin{cases} \delta_i \in K^\times, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

  Dann ist V ein F-Vektorraum und $(e_1, e_1 \cdot \sqrt{\alpha}, \ldots, e_n, e_n \cdot \sqrt{\alpha})$ ist eine F-Basis von V. Da h hermitesch ist, ist $h(v, v) \in F$ für jedes $v \in V$. Wir betrachten zu h die reguläre symmetrische Bilinearform $h_F : V \times V \to F$,

  $$h_F(x, y) \quad := \quad \frac{1}{2}(h(x, y) + h(y, x)) \text{ für } x,\ y \in V.$$

  Dann ist die F-Basis $(e_1, e_1 \cdot \sqrt{\alpha}, \ldots, e_n, e_n \cdot \sqrt{\alpha})$ von V eine orthogonale Basis bezüglich h_F, und es gilt $h_F(e_i \cdot \sqrt{\alpha}, e_i \cdot \sqrt{\alpha}) = -\alpha \cdot \delta_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit ergibt sich

  $$h_0 \simeq \langle \delta_1, -\alpha \cdot \delta_1, \ldots, \delta_n, -\alpha \cdot \delta_n \rangle \simeq \langle 1, -\alpha \rangle \otimes \langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle.$$

Die **Signatur** von h bezüglich einer Anordnung P von F ist definiert als

$$sign_P h = \frac{1}{2} \cdot sign_P h_F$$

(siehe [S-85, 10. §1, Ex. 1.6]). Ist $\alpha \in P$, so ist $sign_P h = 0$.

Sei nun $h : V \times V \to \mathbb{H}_K$ eine reguläre hermitesche Form bezüglich der kanonischen Involution γ auf $\mathbb{H}_K$ und sei K reell. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine orthogonale Basis von V bezüglich h und sei

$$h(e_i, e_i) = q_i \in \mathbb{H}_K^\times,\ i = 1, \ldots, n.$$

Für $x \in V$ ist dann $\gamma(h(x,x)) = h(x,x)$ und damit folgt $h(x,x) \in K$. Nun betrachten wir zu h die reguläre symmetrische Bilinearform $h_K : V \times V \to K$,

$$h_K(x,y) := \frac{1}{2}(h(x,y) + h(y,x)) \text{ für } x,\ y \in V.$$

Sei $1,\quad i,\quad j,\quad k$ eine Quaternionenbasis von $\mathbb{H}_K$. Die K-Basis $(e_r, e_r \cdot i, e_r \cdot j, e_r \cdot k)_{r=1,\ldots,n}$ von V ist eine orthogonale Basis bezüglich h_K. Man sieht somit:

$$h_K \simeq 4 \times \langle q_1, \ldots, q_n \rangle.$$

Die **Signatur** von h bezüglich einer Anordnung P von K ist definiert als

$$sign_P h = \frac{1}{4} \cdot sign_P h_K$$

(siehe [S-85, 10. §1, Ex. 1.8]).

6.2 Das reduzierte charakteristische Polynom, die Spurform

Wir betrachten wieder eine zentraleinfache K-Algebra A mit einer Involution σ. Sei L ein Zerfällungskörper von A. Sei $i : A \otimes_K L \to M_n(L)$ ein L-Algebrenisomorphismus. Für ein $a \in A$ nennen wir das charakteristische Polynom[58] von $i(a \otimes 1_L)$ das **reduzierte charakteristische Polynom** von a.[59]

Bemerkung 6.1. *Diese Definition ist unabhängig von dem gewählten L-Algebrenisomorphismus i und dem gewählten Zerfällungskörper L.*

Beweis.
- Sei j ein weiterer L-Algebrenisomorphismus. Dann gibt es nach Skolem-Noether ein Element $u \in M_n(L)^\times$ mit $i = Int(u) \circ j$. Damit gilt für alle $a \in A$:

$$i(a \otimes 1_L) = u \cdot j(a \otimes 1_L) \cdot u^{-1}$$

und somit ergibt sich über j dasselbe reduzierte charakteristische Polynom von a wie über i.

[58] Das charakteristische Polynom einer Matrix $C \in M_n(L)$ ist $det(C - E_n \cdot X) \in L[X]$.
[59] Zu diesem Abschnitt siehe [S-85, 8. §5] und [L-90, §29, 7.].

- Seien L_1, L_2 Zerfällungskörper von A. Dann gibt es einen Oberkörper L von L_1 und L_2.[60] Seien $i : A \otimes_K L_1 \to M_n(L_1)$ ein L_1-Algebrenisomorphismus und $\tilde{\imath} : A \otimes_K L \to M_n(L)$, definiert durch $\tilde{\imath}(a \otimes l) := l \cdot i(a \otimes 1)$ für $a \in A$, $l \in L$. Sei $a \in A$. Dann ist $i(a \otimes 1) = \tilde{\imath}(a \otimes 1)$. Damit hat a über L und L_1 dasselbe reduzierte charakteristische Polynom. Analog ergibt sich, dass a über L und L_2 dasselbe charakteristische Polynom hat; und somit folgt aus der im ersten Beweisteil gezeigten Unabhängigkeit vom L-Algebrenisomorphismus, dass a über L_1 und L_2 dasselbe reduzierte charakteristische Polynom hat.

$\square$

Bemerkung 6.2. *Das reduzierte charakteristische Polynom eines Elements von A hat Koeffizienten in K.*

Beweis. Es gibt es einen Zerfällungskörper L von A, so dass L/K galoisch ist (siehe [L-90, §29, 5. F22]). Wir zeigen, dass die Koeffizienten des reduzierten charakteristischen Polynoms eines beliebigen Elements $a \in A$ von allen Körperautomorphismen $\gamma \in Gal(L, K)$ festgehalten werden. Dazu sei $\gamma \in Gal(L, K)$. Wir erweitern γ zu der Abbildung $\Gamma : M_n(L) \to M_n(L)$, $\Gamma((l_{ij})_{i,j}) = (\gamma(l_{ij}))_{i,j}$ und der Abbildung $\tilde{\Gamma} = id_A \otimes \gamma : A \otimes_K L \to A \otimes_K L$. Sei wieder i ein Isomorphismus zwischen $A \otimes_K L$ und $M_n(L)$. Wir betrachten die Abbildung $j = \Gamma \circ i \circ \tilde{\Gamma}^{-1} : A \otimes_K L \to M_n(L)$. j ist ein L-Algebrenisomorphismus.

Sei nun $a \in A$. Dann ist

$$j(a \otimes 1_L) = (\Gamma \circ i \circ \tilde{\Gamma}^{-1})(a \otimes 1_L) = \Gamma(i(a \otimes 1_L).$$

Da das reduzierte charakteristische Polynom unabhängig vom Algebrenisomorphismus ist, haben $i(a \otimes 1_L) = (l_{ij})_{i,j}$ und $j(a \otimes 1_L) = \Gamma(i(a \otimes 1_L)) = (\gamma(l_{ij}))_{i,j}$ dasselbe charakteristische Polynom. Da γ ein Körperhomomorphismus ist, folgt somit, dass die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von γ festgehalten werden. $\square$

Das reduzierte charakteristische Polynom eines Elements $a \in A$ bezeichnen wir mit

$$Prd_{(A,a)}(X) = X^n - s_1(a)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n(a).$$

Die **reduzierte Spur** des Elements $a \in A$ setzen wir als $Trd_A(a) = s_1(a) \in K$.

---

[60] Sei μ das Maximum der Transzendenzgrade von L_1, bzw. L_2 über K. Betrachte den Körper L, der aus K durch Adjunktion von μ Variablen entsteht. Sei $\tilde{L}$ der algebraische Abschluss von L. Dann sind L_1 und L_2 in $\tilde{L}$ enthalten.

Beispiele

1. Ist Q eine Quaternionenalgebra über K mit Quaternionenbasis $1,\ i,\ j,\ k$, so ist für ein $x \in Q$ mit $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ für $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in K$ die reduzierte Spur

$$Trd_Q(x) = 2x_0.$$

2. Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Für $x \in A$ ist

$$Trd_A(\sigma(x)) = \sigma(Trd_A(x))$$

(siehe [KMRT-98, I §2, Kor. 2.2 und Kor 2.16]). Ist σ eine Involution erster Art, ist somit $Trd_A(\sigma(x)) = Trd_A(x)$.

Satz 6.3. *Sei A eine zentraleinfache K-Algebra. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Sei $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$. Dann gilt*

$$Trd_{M_n(A)}(a_{ij})_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} Trd_A(a_{ii}).$$

Beweis. Sei L ein Zerfällungskörper von A. Sei $f : A \otimes_K L \to M_m(L)$ mit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ein L-Algebrenisomorphismus. Für ein $d \in A$ ist $Trd_A(d)$ gerade die Spur der Matrix $f(d \otimes 1_L)$. Sei $F : M_n(A) \otimes_K L \to M_n(M_m(L))$,

$$(a_{ij})_{i,j} \otimes l \mapsto (f(a_{ij}) \otimes l)_{i,j}.$$

F ist ein L-Algebrenisomorphismus. $Trd_{M_n(A)}(a_{ij})_{i,j}$ ist gerade die Spur von $F((a_{ij})_{i,j} \otimes 1_L)$, welche wiederum die Summe der Spuren der $f(a_{ii} \otimes 1_L)$, $i = 1, \ldots, n$, ist. Also ergibt sich die Behauptung. □

Als **Spurform** bezeichnen wir die Abbildung

$$T_A : A \times A \to K,\ T_A(x, y) = Trd_A(x \cdot y) \text{ für } x,\ y \in A.$$

Satz 6.4. *Die Spurform T_A ist eine reguläre Bilinearform.*

Beweis. 1.Schritt: Sei $A = M_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Für alle $x,\ y \in A$ ist dann $T_A(x, y)$ die übliche Spur der Matrix $x \cdot y$. Daraus ergibt sich sofort die Bilinearität von T_A. Sei nun $X = (x_{ij})_{i,j} \in A$ und $T_A(X, Y) = 0$ für alle $Y \in A$. Also ist insbesondere $T_A(X, E_{ij}) = 0$ für alle $i,\ j = 1, \ldots, n$ mit den Matrizen E_{ij}, welche in der i-ten Zeile und j-ten Spalte einen Eintrag gleich eins haben und ansonsten nur Einträge gleich null haben. Man rechnet nach, dass $T_A(X, E_{ij}) = x_{ji}$. Damit ergibt sich $x_{ji} = 0$ für alle $i,\ j = 1, \ldots,\ n$ und die Regularität von T_A ist gezeigt.

2.Schritt: Sei nun A beliebig. Sei L ein Zerfällungskörper von A. Sei $i : A \otimes_K L \to M_n(L)$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ein L-Algebrenisomorphismus. Dann ist

$T_A(x,y) = T_{M_n(L)}(i(x\otimes 1_L), i(y\otimes 1_L))$. Da i ein L-Algebrenhomomorphismus ist, ergibt sich die K-Bilinearität von T_A aus dem ersten Schritt. Zur Überprüfung der Regularität von T_A betrachten wir ein Element $x \in A$, für das $T_A(x,y) = 0$ ist für alle $y \in A$. Dann ist für beliebiges $y_j \in A$, $\alpha_j \in L$:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_j \alpha_j \cdot T_A(x, y_j) &= \sum_j \alpha_j \cdot T_{M_n(L)}(i(x \otimes 1_L), i(y_j \otimes 1_L)) \\ &= T_{M_n(L)}\left(i(x \otimes 1_L), \sum_j i(y_j \otimes \alpha_j)\right). \end{aligned}$$

Also ist für beliebiges $C \in M_n(L)$:

$$T_{M_n(L)}(i(x \otimes 1_L), C) = 0.$$

Nach dem 1. Schritt ist $T_{M_n(L)}$ regulär und somit folgt $i(x \otimes 1) = 0$. Damit ist $x = 0$ gezeigt und die Regularität von T_A bewiesen.

□

6.3 Standardidentifikation

Bevor wir zu der Definition der Signatur einer Involution kommen, benötigen wir weitere technische Überlegungen.[61] Sei D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra. Sei $\theta : D \to D$ eine Involution und $V_D = (V, +, \cdot)$ ein endlichdimensionaler D-Rechtsvektorraum, $\dim_D V_D = n$. Wir versehen nun die abelsche Gruppe $(V, +)$ mit der Skalarmultiplikation

$$\cdot^\theta : D \times V \to V,\ (d, v) \mapsto v \cdot \theta(d).$$

Dann ist ${}_DV = (V, +, \cdot^\theta)$ ein D-Linksvektorraum. Wir betrachten das **Tensorprodukt** $((V_D) \otimes_D ({}_DV), \otimes)$ (siehe [J-89, 3.7]). Zur Vereinfachung bezeichnen wir dieses Tensorprodukt mit $V \otimes_D V$. $V \otimes_D V$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition und

$$\otimes : V \otimes_D V \times V \otimes_D V \to V \otimes_D V$$

ist ein **ausgeglichenes Produkt**, d.h. $\otimes$ ist biadditiv und für v_1, $v_2 \in V$ und $d \in D$ gilt $(v_1 \cdot d) \otimes v_2 = v_1 \otimes (d \cdot^\theta v_2)$. Wir versehen $V \otimes_D V$ mit einer K-Vektorraumstruktur, indem wir

$$(\sum_i x_i \otimes y_i)\alpha := \sum_i x_i \otimes \alpha \cdot^\theta y_i = \sum_i x_i \cdot \alpha \otimes y_i$$

für $\alpha \in K$ und $\sum_i x_i \otimes y_i \in V \otimes_D V$ setzen.

[61] Zu diesem Abschnitt siehe [KMRT-98, §5.A.].

Sei nun $h : V \times V \to D$ eine reguläre λ-hermitesche Form, $\lambda \in \{\pm 1\}$. Dann ist die Abbildung $\phi : V_D \times {}_D V \to End_D V_D =: End_D V$, definiert durch $\phi(v,w)(x) := v \cdot h(w,x)$ für v, w, $x \in V$ ausgeglichen, da $v \cdot d \cdot h(w,x) = v \cdot h(w \cdot \theta(d), x)$ für alle $d \in D$ und v, w, $x \in V$. Damit existiert nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts genau ein Homomorphismus von abelschen Gruppen $\phi_h : V \otimes_D V \to End_D V$ mit

$$\phi_h(v \otimes w) = \phi(v,w) \text{ für } v, w \in V.$$

ϕ_h ist, wie man sofort nachrechnet, verträglich mit der K-Vektorraumstruktur auf $V \otimes_D V$ und $End_D V$.

Satz 6.5. *Sei $h : V \times V \to D$ eine reguläre λ-hermitesche Form über (D,θ), $\lambda \in \{\pm 1\}$. Dann gilt:*

- *Die Abbildung $\phi_h : V \otimes_D V \to End_D V$ ist bijektiv.*
- *Für die adjungierte Involution ad_h auf $End_D V$, ist*

$$ad_h(\phi_h(v \otimes w)) = \lambda \cdot \phi_h(w \otimes v) \text{ für alle } v,\ w \in V.$$

- *Seien v_1, w_1, v_2, $w_2 \in V$. Dann ist*

$$\phi_h(v_1 \otimes w_1) \circ \phi_h(v_2 \otimes w_2) = \phi_h(v_1 \cdot h(w_1, v_2) \otimes w_2).$$

Bemerkung 6.6. *Mit den Aussagen des obigen Theorems lässt sich auf $V \otimes_D V$ eine Multiplikation definieren. Sei $\sum_i v_i \otimes w_i$, $\sum_j \tilde{v_j} \otimes \tilde{w_j} \in V \otimes_D V$. Dann setzen wir*

$$(\sum_i v_i \otimes w_i) \cdot (\sum_j \tilde{v_j} \otimes \tilde{w_j}) := \sum_{i,j} (v_i \cdot h(w_i, \tilde{v_j})) \otimes \tilde{w_j}.$$

Mit dieser Multiplikation ist $V \otimes_D V$ eine K-Algebra, welche als K-Algebra isomorph zu $End_D V$ ist.

Beweis von Satz 6.5. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine D-Basis von V. Da h regulär ist, gibt es eine D-Basis $(\tilde{e_1}, \ldots, \tilde{e_n})$ von V mit[62]

$$h(\tilde{e_i}, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

[62] Wir betrachten die Abbildung $\hat{h} : V \to V^*$ mit $\hat{h}(x) : V \to D$, $v \mapsto h(x,v)$. Seien $f_i \in V^*$, $i = 1, \ldots, n$, definiert durch $f_i(e_j) := \begin{cases} 1 & \text{für } j = i, \\ 0 & \text{für } j \neq i. \end{cases}$

Da h regulär ist, ist $\hat{h}$ bijektiv, und es existieren somit $\tilde{e_1}, \ldots, \tilde{e_n}$ mit $\hat{h}(\tilde{e_i}) = f_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} h(\tilde{e_i}, e_j) &= \hat{h}(\tilde{e_i})(e_j) \\ &= f_i(e_j) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } j = i, \\ 0 & \text{für } j \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Für jedes $x \in V \otimes_D V$ existiert demnach eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot a_{ij} \otimes \tilde{e_j}$ mit $a_{ij} \in D$. Für solch ein $x = \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot a_{ij} \otimes \tilde{e_j}$ korrespondiert die Abbildung $\phi_h(x)$ bezüglich der Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ zu der Matrix $(a_{ij})_{i,j}$: Sei dazu e_k mit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi_h(x)(e_k) &= \sum_{i,j=1}^n \phi_h(e_i a_{ij} \otimes \tilde{e_j})(e_k) \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot a_{ij} \cdot h(\tilde{e_j}, e_k) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot a_{ik} \cdot h(\tilde{e_k}, e_k) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot a_{ik} \\ &= (a_{ij})_{i,j} \cdot e_k \end{aligned}$$

Da jeder Endomorphismus aus $End_D V$ zu einer Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ korrespondiert, ist ϕ_h surjektiv. Ist $(a_{ij})_{i,j} = 0$, so ist auch $x = \sum_{i,j=1}^n e_i a_{ij} \otimes \tilde{e_j} = 0$; und somit ist ϕ_h injektiv.

Dass $ad_h(\phi_h(v \otimes w)) = \lambda \cdot \phi_h(w \otimes v)$ für alle v, $w \in V$ gilt, überprüfen wir mit der charakterisierenden Eigenschaft der zu h adjungierten Involution ad_h:

$$\forall f \in End_D V \; \forall x,\; y \in V: \; h(ad_h(f)(x), y) = h(x, f(y)).$$

Da ϕ_h surjektiv ist, existieren für alle $f \in End_D V$ gewisse v_i, $w_i \in V$, $i = 1, \ldots, k$, mit

$$f = \phi_h(\sum_{i=1}^k v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^k \phi_h(v_i \otimes w_i).$$

Für beliebige v, w, x, $y \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} h(\lambda \cdot \phi_h(w \otimes v)(x), y) &= \theta(\lambda) \cdot h(w \cdot h(v, x), y) \\ &= \theta(\lambda) \cdot \theta(h(v, x)) \cdot h(w, y) \\ &= \theta(\lambda) \cdot \lambda \cdot h(x, v) \cdot h(w, y) \\ &= h(x, v) \cdot h(w, y) \\ &= h(x, v \cdot h(w, y)) \\ &= h(x, \phi_h(v \otimes w)(y)) \end{aligned}$$

$(\tilde{e_1}, \ldots, \tilde{e_n})$ ist eine D-Basis von V, da aus $\sum_i \tilde{e_i}\alpha_i = 0$ für $\alpha_i \in D$, $i = 1, \ldots, n$, für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ folgt:

$$0 = h(\sum_i \tilde{e_i}\alpha_i, e_j) = \sum_i \theta(\alpha_i) h(\tilde{e_i}, e_j) = \theta(\alpha_j).$$

Damit folgt mit der Biadditivität von h, dass für beliebige $x,\ y \in V$:

$$h(\sum_{i=1}^{k} \lambda \cdot \phi_h(w_i \otimes v_i)(x), y) = h(x, \sum_{i=1}^{k} \phi_h(v_i \otimes w_i)(y)) = h(x, f(y)).$$

Also ergibt sich über die Regularität von h, dass

$$ad_h(\sum_{i=1}^{k} \phi_h(v_i \otimes w_i)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda \cdot \phi_h(w_i \otimes v_i).$$

Den letzten Punkt der Proposition rechnet man einfach nach:

Seien $v,\ w,\ \tilde{v},\ \tilde{w},\ x \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \phi_h(v \otimes w) \circ \phi_h(\tilde{v} \otimes \tilde{w})(x) &= \phi_h(v \otimes w)(\tilde{v} \cdot h(\tilde{w}, x)) \\ &= v \cdot h(w, \tilde{v} \cdot h(\tilde{w}, x)) \\ &= v \cdot h(w, \tilde{v}) \cdot h(\tilde{w}, x) \\ &= \phi_h(v \cdot h(w, \tilde{v}) \otimes \tilde{w})(x) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\phi_h(v \otimes w) \circ \phi_h(\tilde{v} \otimes \tilde{w}) = \phi_h(v \cdot h(w, \tilde{v}) \otimes \tilde{w}).$$

□

Bemerkung 6.7. *Sei K ein Körper mit einer Involution ι. Sei V ein n-dimensionaler K-Rechtsvektorraum. Sei h eine reguläre (schief-)hermitesche Form bezüglich ι auf V. Dann gilt für die Standardidentifikation $\phi_h : V \otimes_K V \to End_K V$:*

$$Trd_{End_K V}(\phi_h(v \otimes w)) = h(w, v) \text{ für alle } v, w \in V.$$

Beweis. Wie im vorherigen Beweis wählen wir K-Basen $(e_1, \ldots, e_n)$ und $(\tilde{e_1}, \ldots, \tilde{e_n})$ von V mit $h(\tilde{e_j}, e_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq i \\ 1 & \text{falls } j = i \end{cases}$. Seien

$$v = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot a_i,\ w = \sum_{j=1}^{n} \tilde{e_j} \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \iota(b_j) \cdot^{\iota} \tilde{e_j}$$

mit $a_i,\ b_j \in K$. Dann ist

$$v \otimes w = \sum_{i,j=1}^{n} (e_i \cdot a_i \cdot \iota(b_j)) \otimes \tilde{e_j}.$$

Damit korrespondiert $\phi_h(v \otimes w)$ bezüglich der Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ zu der Matrix $(a_i \cdot \iota(b_j))_{i,j}$ in $M_n(K)$.

Also gilt:

$$\begin{aligned} Trd_{End_K V}(\phi_h(v \otimes w)) &= Trd_{M_n(K)}(a_i \cdot \iota(b_j))_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \iota(b_i) \cdot a_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \iota(b_j) \cdot h(\tilde{e_j}, e_i) \cdot a_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h(\tilde{e_j} \cdot b_j, e_i \cdot a_i) \\ &= h(w, v) \end{aligned}$$

□

Die Produktform $\mathbf{h \otimes h}$: Sei h eine λ-hermitesche Form auf dem K-Vektorraum V, $\lambda \in \{\pm 1\}$. Sei ι eine Involution auf K. Zu h definieren wir $h \otimes h : V \otimes_K V \times V \otimes_K V \longrightarrow K$,

$$(h \otimes h)(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) := h(v_1, v_2) \cdot \iota(h(w_1, w_2)).$$

$h \otimes h$ ist eine reguläre hermitesche Form. Die Signatur von $h \otimes h$ bezüglich einer Anordnung P des Grundkörpers F von ι ist

$$sign_P(h \otimes h) = (sign_P h)^2.$$ [63]

Wir betrachten nun $T_\sigma : A \times A \to K$, $T_\sigma(x, y) := Trd_A(\sigma(x) \cdot y)$ für x, $y \in A$. Das folgende Ergebnis benötigen wir für die Definition der Signatur einer Involution.

Satz 6.8. *Sei $h : V \times V \to K$ eine reguläre λ-hermitesche Form bezüglich ι, $\lambda \in \{\pm 1\}$. Sei $\phi_h : V \otimes_K V \to End_K V$ die Standardidentifikation. Dann gilt für alle v_1, w_1, v_2, $w_2 \in V$:*

$$\lambda \cdot T_\sigma(\phi_h(v_1 \otimes w_1), \phi_h(v_2 \otimes w_2)) = (h \otimes h)(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2).$$

Beweis. Sei v_1, w_1, v_2, $w_2 \in V$. Dann gilt nach Proposition 6.5. und Be-

[63] Denn für symmetrische Bilinearformen gilt diese Regel und falls ι eine Involution zweiter Art ist, ergibt sich die Multiplikativität mit $(h \otimes h)_F = h_F \otimes h_F$ aus dem Fall für symmetrische Bilinearformen.

merkung 6.7:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot T_\sigma(\phi_h(v_1 \otimes w_1), \phi_h(v_2 \otimes w_2)) &= Trd_{End_K V}\big(\lambda \cdot (ad_h(\phi_h(v_1 \otimes w_1)) \circ \phi_h(v_2 \otimes w_2))\big) \\
&= Trd_{End_K V}\big(\lambda^2(\phi_h(w_1 \otimes v_1) \circ \phi_h(v_2 \otimes w_2))\big) \\
&= Trd_{End_K V}\big(\phi_h(w_1 \cdot h(v_1, v_2) \otimes w_2)\big) \\
&= h\big(w_2, w_1 \cdot h(v_1, v_2)\big) \\
&= h(w_2, w_1) \cdot h(v_1, v_2) \\
&= \iota(h(w_1, w_2)) \cdot h(v_1, v_2) \\
&= (h \otimes h)(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2)
\end{aligned}$$

□

6.4 Signatur einer Involution erster Art

Sei A eine zentraleinfache K-Algebra mit einer Involution erster Art σ. Wir betrachten die Abbildung

$$T_\sigma : A \times A \to K,\ T_\sigma(x, y) := Trd_A(\sigma(x) \cdot y) \text{ für } x,\ y \in A.$$

Da T_A eine reguläre symmetrische Bilinearform ist und $Trd_A(\sigma(x)) = Trd_A(x)$ für $x \in A$ (siehe Abschnitt 6.2), ist T_σ eine reguläre symmetrische Bilinearform. Man nennt T_σ **Spurform der Involution** σ.

Zu (A, σ) betrachten wir die zentraleinfache K-Algebra $(M_n(A), \sigma^t)$, wobei

$$\sigma^t((a_{ij})_{i,j}) = (\sigma(a_{ij}))^t_{i,j} \text{ für } (a_{ij})_{i,j} \in M_n(A).$$

Satz 6.9. *Es ist $T_{\sigma^t} \simeq n^2 T_\sigma$. Ist P eine Anordnung auf K, so ist insbesondere $sign_P T_{\sigma^t} = n^2 \cdot sign_P T_\sigma$. Ist (B, τ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution, welche zu (A, σ) isomorph ist, so ist $(A, T_\sigma) \simeq (B, T_\tau)$.*

Beweis. Es gilt für $(a_{ij})_{i,j},\ (b_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$:

$$T_{\sigma^t}((a_{ij})_{i,j}, (b_{ij})_{i,j}) = \sum_{i,k=1}^{n} T_\sigma(a_{ki}, b_{ki}).$$

Denn:

$$\begin{aligned} T_{\sigma^t}((a_{ij})_{i,j},(b_{ij})_{i,j}) &= Trd_{M_n(A)}(\sigma^t((a_{ij})_{i,j})\cdot(b_{ij})_{i,j}) \\ &= Trd_{M_n(A)}((\sum_{k=1}^{n}\sigma(a_{ki})\cdot b_{kj})_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Trd_A(\sum_{k=1}^{n}\sigma(a_{ki})\cdot b_{ki}) \text{ (nach Satz 6.3.)} \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} Trd_A(\sigma(a_{ki})\cdot b_{ki}) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} T_\sigma(a_{ki},b_{ki}). \end{aligned}$$

Sei $\phi : A \to B$ ein K-Algebrenisomorphismus mit $\phi\circ\sigma = \tau\circ\phi$. Seien $x,\ y\in A$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_\tau(\phi(x),\phi(y)) &= Trd_B(\tau(\phi(x))\cdot\phi(y)) \\ &= Trd_B(\phi(\sigma(x))\cdot\phi(y)) \\ &= Trd_A(\sigma(x)\cdot y) \\ &= T_\sigma(x,y). \end{aligned}$$

□

Bevor wir eine Aussage über die Signatur der Spurform T_σ von σ treffen können, müssen wir den Fall einer nicht zerfallenden Algebra A über einem reell abgeschlossenen Körper K mit einer Involution erster Art σ betrachten. Da in diesem Fall $(A,\sigma)\cong(M_n(\mathbb{H}_K),\tau)$ für ein $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, können wir uns auf $(M_n(\mathbb{H}_K),\tau)$ beschränken.

Orthogonale Involutionen auf $M_n(\mathbb{H}_K)$: Sei σ eine orthogonale Involution auf $\mathbb{H}_K$ und $1,\ i,\ j,\ k$ eine σ-konforme Basis (siehe Satz 3.6.). Dann ist σ^t eine orthogonale Involution auf $M_n(\mathbb{H}_K)$, welche die adjungierte Abbildung zu einer bezüglich der kanonischen Involution γ auf $\mathbb{H}_K$ schiefhermiteschen, regulären Form h über $\mathbb{H}_K$ ist.

Bemerkung 6.10. *Ist τ eine orthogonale Involution auf $M_n(\mathbb{H}_K)$, so gilt $sign_{K^2}T_\tau = 0$.*

Beweis. Es gilt

$$(M_n(\mathbb{H}_K),\tau)\cong(M_n(\mathbb{H}_K),\sigma^t).^{64}$$

[64] Es ist $\tau = ad_{h'}$ für eine reguläre schiefhermitesche Form h' über $(\mathbb{H}_K,\gamma)$. Ist K ein reell abgeschlossener Körper, so sind zwei reguläre schiefhermitesche Formen über $(\mathbb{H}_K,\gamma)$ genau dann isometrisch, wenn ihre Dimension gleich ist (siehe [S-85, 10. §3, Thm. 3.7]). Damit sind h und h' isometrisch und es ergibt sich $(M_n(\mathbb{H}_{K_P}),\sigma^t = ad_h)\cong(M_n(\mathbb{H}_{K_P}),\tau = ad_{h'})$.

Damit genügt es nach Satz 6.9. die Behauptung für $(M_n(\mathbb{H}_K), \sigma^t)$ zu überprüfen. Wiederum nach Satz 6.9. gilt

$$sign_{K^2}T_{\sigma^t} = n^2 \cdot sign_{K^2}T_\sigma.$$

Weiter ergibt sich $sign_{K^2}T_\sigma = 0$, da man für $x = (x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)$, $y = (y_0 1 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) \in Q$ die reduzierte Spur von $\sigma(x) \cdot y$ als

$$Trd_Q(\sigma(x) \cdot y) = 2(x_0 y_0 + x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3)$$

berechnet. Also ist $T_\sigma \simeq \langle 2, 2, -2, -2 \rangle$. □

Symplektische Involutionen auf $M_n(\mathbb{H}_K)$: Die Diskussion symplektischer Involutionen ist nicht so einfach wie die orthogonaler Involutionen. Insbesondere ist dieser Punkt in [LU-03, Lemma 3.4.] nicht richtig behandelt und wurde auf meinen Hinweis in einem späteren Erratum berichtigt.

Sei nun τ eine symplektische Involution auf $M_n(\mathbb{H}_K)$. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{H}_K$-Rechtsvektorraum. Dann ist τ die adjungierte Involution einer regulären Form $h : V \times V \to \mathbb{H}_K$, welche bezüglich der kanonischen Involution γ auf $\mathbb{H}_K$ hermitesch ist.

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine orthogonale Basis von V bezüglich h und sei

$$h(e_i, e_i) = q_i \in \mathbb{H}_K^\times, \; i = 1, \ldots, n.$$

Dann ist $\gamma(h(x,x)) = h(x,x)$ für $x \in V$ und damit folgt $h(x,x) \in K$, insbesondere folgt $q_i = h(e_i, e_i) \in K^\times$ für $i = 1, \ldots, n$. Für ein Element $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{H}_K)$ zeigen wir

$$\tau((a_{ij})_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^{n} E_{ji} \cdot q_j^{-1} \cdot \gamma(a_{ij}) \cdot q_i.$$

Da τ die adjungierte Involution zu h ist, überprüfen wir dies mit der charakterisierenden Eigenschaft der adjungierten Involution. Und da τ linear und h bilinear ist, genügt es

$$h(x, E_{ij} \cdot q \cdot y) = h(E_{ji} \cdot q_j^{-1} \cdot \gamma(q) \cdot q_i \cdot x, y)$$

für alle x, $y \in V$ und $q \in \mathbb{H}_K$ zu zeigen. Dies kann man nun einfach nachrechnen.

Damit ergibt sich $T_\tau(E_{ij} \cdot q, E_{kl} \cdot q') = 0$ für $i \neq k$ oder $j \neq l$ und beliebige q, $q' \in \mathbb{H}_K$. Und für q, $q' \in \mathbb{H}_K$ folgt weiter:

$$\begin{aligned}
T_\tau(E_{ij} \cdot q, E_{ij} \cdot q') &= Trd_{M_n(\mathbb{H}_K)}(E_{ji} \cdot q_j^{-1} \cdot \gamma(q) \cdot q_i \cdot E_{ij} \cdot q') \\
&= Trd_{\mathbb{H}_K}(q_j^{-1} \cdot \gamma(q) \cdot q_i \cdot q') \\
&= Trd_{\mathbb{H}_K}(\gamma(q) \cdot q') \cdot q_j^{-1} \cdot q_i \text{ (da } q_j,\ q_i \in K) \\
&= T_\gamma(q, q') \cdot q_j^{-1} \cdot q_i.
\end{aligned}$$

Es ist $T_\gamma \simeq \langle 2,2,2,2\rangle$ und somit folgt

$$T_\tau \simeq \langle 2,2,2,2\rangle \otimes \langle q_1,\dots,q_n\rangle \otimes \langle q_1,\dots,q_n\rangle.$$

Insbesondere erhalten wir

$$sign_{K^2}T_\tau = 4\cdot(sign_{K^2}\langle q_1,\dots,q_n\rangle)^2 = 4\cdot(sign_{K^2}h)^2. \tag{3}$$

Satz 6.11. [65] *Für jede Involution σ erster Art auf der zentraleinfachen K-Algebra A ist die Signatur von T_σ bezüglich P ein Quadrat in $\mathbb{Z}$. Zerfällt die Algebra A, d.h. ist $A = End_K V$ für einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V und $\sigma = ad_b$ für eine reguläre (schief-)symmetrische Bilinearform auf V, so gilt*

$$sign_P T_\sigma = \begin{cases} (sign_P b)^2, & \textit{für } \sigma \textit{ orthogonal, d.h. } b \textit{ symmetrisch,}\\ 0, & \textit{für } \sigma \textit{ symplektisch, d.h. } b \textit{ schiefsymmetrisch.}\end{cases}$$

Beweis. Falls A zerfällt und $\sigma = ad_b$ für eine reguläre, symmetrische Bilinearform, so existiert nach Satz 6.8. eine Isometrie zwischen (A, T_σ) und $(V\otimes_K V, b\otimes b)$. Damit ergibt sich $sign_P T_\sigma = (sign_P b)^2$.

Für b schiefsymmetrisch ergibt sich nach Satz 6.8. eine Isometrie zwischen $(A, -T_\sigma)$ und $(V\otimes_K V, b\otimes b)$. b und somit auch $b\otimes b$ ist hyperbolisch (siehe [S-85, 7. §8]). Damit ergibt sich

$$sign_P T_\sigma = -sign_P(b\otimes b) = 0.$$

Sei nun (A,σ) beliebig. Da sich die Signatur einer regulären symmetrischen Bilinearform bei Skalarerweiterung nicht ändert, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass K reell abgeschlossen ist. Da wir den Zerfällungsfall schon behandelt haben, nehmen wir an, dass

$$(A,\sigma) \cong (M_n(\mathbb{H}_K), \tau).$$

Dann gilt nach Bemerkung 6.10. und Gleichung (3):

$$sign_{K^2}T_\sigma = sign_{K^2}T_\tau = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \sigma \text{ orthogonal,}\\ 4a_\tau^2 & \text{mit } a_\tau\in\mathbb{Z}, \text{ falls } \sigma \text{ symplektisch.}\end{cases}$$

□

Definition 6.12. *Sei A eine zentraleinfache K-Algebra mit einer Involution σ erster Art. Sei P eine Anordnung auf K. Die* ***Signatur*** *von σ bezüglich P ist definiert als $sign_p\sigma := \sqrt{sign_P T_\sigma}$.*

[65] Zur Signatur einer Involution erster Art und dem Beweis dieses Satzes siehe auch [KMRT-98, II. §11.A.] und [LT-93].

6.5 Signatur einer Involution zweiter Art

Sei A eine zentraleinfache K-Algebra mit einer Involution σ zweiter Art. Sei $F := Fix(\sigma|_K)$. Dann ist $K = F(\sqrt{\alpha})$ mit einem $\alpha \in F^\times \backslash F^{\times 2}$. Sei P eine Anordnung auf F. Wir betrachten die Abbildung

$$T_\sigma : A \times A \to K,\ T_\sigma(x,y) := Trd_A(\sigma(x) \cdot y) \text{ für } x,\ y \in A.$$

Da T_A eine reguläre symmetrische Bilinearform ist und $Trd_A(\sigma(x)) = \sigma(Trd_A(x))$ für $x \in A$ (siehe Abschnitt 6.2), ist T_σ eine reguläre hermitesche Form über $(K, \sigma|_K)$. Man nennt T_σ **Spurform der Involution** σ.

Satz 6.13. [66] *Für jede Involution σ zweiter Art auf der zentraleinfachen K-Algebra A ist die Signatur von $T_\sigma : A \times A \to K$ bezüglich P ein Quadrat in $\mathbb{Z}$. Ist $A = End_K V$ und $\sigma = ad_h$ für eine hermitesche Form h auf V, so ist*

$$sign_P T_\sigma = (sign_P h)^2.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Zerfällungsfall $A = End_K V$ und $\sigma = ad_h$ für eine hermitesche Form h auf V. Nach Satz 6.8. haben wir eine Isometrie zwischen (A, T_σ) und $(V \otimes_K V, h \otimes h)$. Damit gilt

$$sign_P T_\sigma = sign_P(h \otimes h) = (sign_P h)^2.$$

Im allgemeinen Fall unterscheiden wir

1. $\alpha >_P 0$: Dann ist $sign_P T_\sigma = 0$.

2. $\alpha <_P 0$: Dann gehen wir zu einem reellen Abschluss F_P von F über. Dies ist möglich, da sich die Signatur unter Skalarerweiterungen nicht verändert. Da $\alpha <_P 0$, ist $K_P = K \otimes_F F_P$ algebraisch abgeschlossen und somit zerfällt A über K_P. Damit ergibt sich die Behauptung aus dem Zerfällungsfall.

□

Definition 6.14. *Sei A eine zentraleinfache K-Algebra mit einer Involution σ zweiter Art. Sei P eine Anordnung auf $F = Fix(\sigma|_K)$. Die **Signatur** von σ bezüglich P ist definiert als $sign_P \sigma := \sqrt{sign_P T_\sigma} \in \mathbb{Z}$.*

[66] Zur Signatur einer Involution zweiter Art und dem Beweis dieses Satzes siehe auch [KMRT-98, II. §11.B.] und [Q-95].

6.6 Lokal-Global-Prinzip mit Signatur

Wir fassen die Ergebnisse noch einmal kurz zusammen.

Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Ist P eine Anordnung des Grundkörpers $F = Fix(\sigma|_K)$ von σ, so haben wir

1. für σ erster Art und $A \otimes_K K_P$ zerfällt:
   - $sign_P \sigma = 0$ und $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P})$ ist hyperbolisch, falls σ symplektisch.
   - Ist σ orthogonal und $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P}) \cong (M_n(K_P), ad_b)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und eine reguläre symmetrische Bilinearform b, so ist $sign_P \sigma = |sign_{K_P^2} b|$ und $\sigma \otimes id_{K_P}$ ist genau dann (schwach) hyperbolisch, wenn b hyperbolisch ist, d.h. $sign_{K_P^2} b = 0$.
2. für σ erster Art und $A \otimes_K K_P$ zerfällt nicht:
   - $sign_P \sigma = 0$ und $\sigma \otimes id_{K_P}$ ist schwach hyperbolisch von Ordnung eins oder zwei, falls σ orthogonal.
   - Ist σ symplektisch und $(A \otimes_K K_P, \sigma \otimes id_{K_P}) \cong (M_n(\mathbb{H}_{K_P}), ad_h)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und eine reguläre hermitesche Form h bezüglich der kanonischen Involution γ auf $\mathbb{H}_{K_P}$, so ist $sign_P \sigma = 2 \cdot |sign_{K_P^2} h| = \frac{1}{2} \cdot |sign_{K_P^2} h_{K_P}|$ und $\sigma \otimes id_{K_P}$ ist genau dann (schwach) hyperbolisch, wenn h, bzw. h_{K_P} hyperbolisch ist, d.h. $sign_{K_P^2} h_{K_P} = 0$.
3. für σ zweiter Art, $K = F(\sqrt{\alpha})$ mit $\alpha \in F^\times \backslash F^{\times 2}$:
   - Ist $\alpha >_P 0$, so ist $sign_P \sigma = 0$.
   - Ist $\alpha <_P 0$ und $(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P}) \cong (M_n(F_P(\sqrt{\alpha})), ad_h)$ für ein $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und eine reguläre hermitesche Form h bezüglich des nichttrivialen Automorphismus von $F_P(\sqrt{\alpha})/F_P$, so ist $sign_P \sigma = |sign_{F_P^2} h| = \frac{1}{2} \cdot |sign_{F_P^2} h_{F_P}|$ und $\sigma \otimes id_{F_P}$ ist genau dann (schwach) hyperbolisch, wenn h, bzw. h_{F_P} hyperbolisch ist, d.h. $sign_{F_P^2} h_{F_P} = 0$.

Damit ergibt sich mit den Aussagen aus Kapitel 5 direkt:

Satz 6.15. *Sei (A, σ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution beliebiger Art. Sei F der Grundkörper von (A, σ). (A, σ) ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn für alle Anordnungen P von F gilt, dass $sign_P \sigma = 0$.*

7 Lokal-Global-Prinzip für hermitesche Formen

In diesem Kapitel werden wir das Lokal-Global-Prinzip auf reguläre hermitesche Formen h über einer zentraleinfachen K-Algebra E mit Involution θ übertragen. Wir werden die zu Pfisters Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen analoge Aussage erhalten, dass $[h]$ genau dann ein Torsionselement in der Wittgruppe $W(E,\theta)$ ist, wenn für alle Anordnungen P des Grundkörpers F von (E,θ) die Signatur $sign_P h = 0$ ist. Weiter ergibt sich, dass die Ordnung jedes Elements der Torsionsuntergruppe eine Zweierpotenz ist. Wir beginnen das Kapitel mit der Einführung der Wittgruppe $W^\lambda(E,\theta)$, $\lambda \in \{\pm 1\}$, geben dann das Lokal-Global-Prinzip ohne den Begriff der Signatur für $W^\lambda(E,\theta)$ an und werden uns darauf mit der Signatur regulärer hermitescher Formen beschäftigen, um die obige Aussage formulieren und aus dem Lokal-Global-Prinzip für Involutionen ableiten zu können.

7.1 Die Wittgruppe

Sei (E,θ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Wir betrachten reguläre λ-hermitesche Formen über (E,θ), $\lambda \in \{\pm 1\}$. Die Konstruktion der Wittgruppe $W^\lambda(E,\theta)$ verläuft analog zur Konstruktion der Wittgruppe $W(K)$ quadratischer Formen über K.[67]

Sei $\lambda \in \{\pm 1\}$. Mit (M,h) bezeichnen wir die reguläre λ-hermitesche Form (bezüglich θ) $h : M \times M \to E$. Wir betrachten die Menge der Isometrieklassen von regulären λ-hermiteschen Formen. Die orthogonale Summe hermitescher Formen definiert auf dieser Menge eine Addition, welche assoziativ und kommutativ ist und für die ein Nullelement ($M = \{0\}$ und $h = 0$) existiert. D.h. die Menge der Isometrieklassen von regulären λ-hermiteschen Formen ist bezüglich dieser Addition ein Monoid. Mittels der **Grothendieck-Konstruktion**[68] erhalten wir eine abelsche Gruppe $\hat{W}^\lambda(E,\theta)$, die **Witt-Grothendieck Gruppe** von (E,θ). Die Elemente von $\hat{W}^\lambda(E,\theta)$ sind formale Differenzen von Isometrieklassen regulärer λ-hermitescher Formen.

Sei $\mathcal{H}$ die Untergruppe von $\hat{W}^\lambda(E,\theta)$, die von den Isometrieklassen hyperbolischer Formen erzeugt wird. Die **Wittgruppe** von (E,θ) für $\lambda \in \{\pm 1\}$ ist der Quotient

$$W^\lambda(E,\theta) := \hat{W}^\lambda(E,\theta)/\mathcal{H}.$$

Für $\lambda = 1$ bezeichnen wir $W^\lambda(E,\theta)$ auch mit $W(E,\theta)$. Mit $[M,h]$ bezeichnen wir die Klasse von (M,h) in $W^\lambda(E,\theta)$. Ist (M,h) hyperbolisch, so ist $[M,h] = 0$ in $W^\lambda(E,\theta)$. Die Umkehrung gilt in allgemeineren Ansätzen nicht

[67] Ich richte mich nach [K-91, I. §10], wo allgemeiner Wittgruppen von Ringen mit Involution definiert werden. Die Aussagen über metabolische Formen finden sich in [K-91, I. §3].

[68] Siehe [S-85, 2. §1]; sie verläuft vollkommen analog zur Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen.

immer, da für (M,h) metabolisch auch $[M,h] = 0$ in $W^\lambda(E,\theta)$ ist. In unserem Fall ergibt sich jedoch, dass metabolische Formen schon hyperbolisch sind:

(M,h) heißt **metabolisch**, falls M einen direkten Summanden N enthält, so dass

$$N = N^\perp := \{x \in M | \, \forall y \in N : \ h(x,y) = 0\}.$$

Es gilt für (M,h) metabolisch (siehe [K-91, I. §3]):

$$(M,h) \perp (M,-h) \simeq (H_\lambda(N), h_\lambda) \perp (M,-h).$$

Damit ergibt sich $[M,h] = 0$ in $W^\lambda(E,\theta)$. Es ist für jede reguläre λ-hermitesche Form $h : M \times M \to E$ die Summe $(M,h) \perp (M,-h)$ metabolisch (siehe [K-91, I §3]), also ist $-[M,h] = [M,-h]$ in $W^\lambda(E,\theta)$. Da wir vorausgesetzt haben, dass die Charakteristik von K ungleich zwei ist, gilt für reguläre λ-hermitesche Formen eine Wittkürzung (siehe Abschnitt 3.1), d.h. aus $(M,h) \perp (M,-h) \simeq (H_\lambda(N), h_\lambda) \perp (M,-h)$ folgt $(M,h) \simeq (H_\lambda(N), h_\lambda)$. Somit ist jede metabolische Form hyperbolisch.

Wir erhalten also: $[M_1,h_1] = [M_2,h_2]$ in $W^\lambda(E,\theta)$ genau dann, wenn $(M_1,h_1) \perp (H_\lambda(N_1), h_\lambda) \simeq (M_2,h_2) \perp (H_\lambda(N_2), h_\lambda)$ für gewisse endlich erzeugte E-Rechtsmoduln N_1, N_2.

Für Körpererweiterungen L des Grundkörpers F von (E,θ), welche zu K/F disjunkt sind, und für eine reguläre λ-hermitesche Form $h : M \times M \to E$ betrachtet man

$$h \otimes id_L : M \otimes_F L \times M \otimes_F L \to E \otimes_F L$$

definiert durch $(h \otimes id_L)(v \otimes l, w \otimes k) := h(v,w) \otimes lk$ für $v, \ w \in M$ und $l, \ k \in L$. So erhält man einen kanonischen Homomorphismus

$$r^* : W^\lambda(E,\theta) \to W^\lambda(E \otimes_F L, \theta \otimes id_L).$$

Satz 4.21. liefert uns das folgende Ergebnis.

Satz 7.1. [69] *Sei E eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution θ. Sei F der Grundkörper von (E,θ). Sei L/F eine Körpererweiterung ungeraden Grades. Dann ist für $\lambda \in \{\pm 1\}$*

$$r^* : W^\lambda(E,\theta) \to W^\lambda(E \otimes_F L, \theta \otimes id_L)$$

injektiv.

[69] Dieses Resultat gilt allgemeiner für K-Algebren mit Involution J, so dass $J|_K = id_K$ (siehe beispielsweise [BL-90, Prop. 1.2] und [K-91, I. §10, Prop. 10.3.1]).

Im folgenden Beweis geht man von der regulären λ-hermiteschen Form $h : M \times M \to E$ zu der Involution ad_h auf $End_E M$ über und kann nun direkt das Ergebnis über Involutionen anwenden. Ich gebe diesen Beweis exemplarisch an und werde dafür im nächsten Abschnitt auf die analogen Beweise verzichten.

Beweis. Sei $h : M \times M \to E$ eine reguläre λ-hermitesche Form, für die $h \otimes id_L : M \otimes_F L \times M \otimes_F L \to E \otimes_F L$ hyperbolisch ist, d.h. $(End_{E\otimes_F L}(M \otimes_F L), ad_{h\otimes_F L})$ ist hyperbolisch. Es ist

$$(End_{E\otimes_F L}(M \otimes_F L), ad_{h\otimes id_L}) \cong ((End_E M) \otimes_F L, ad_h \otimes id_L)$$

und damit ist nach Satz 4.21. $(End_E M, ad_h)$ hyperbolisch, d.h. h ist hyperbolisch. □

7.2 Lokal-Global-Prinzip

Wir übertragen in diesem Abschnitt die Aussagen aus Kapitel 5. Sei (E, θ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Sei $\lambda \in \{\pm 1\}$. Mit $W_t^\lambda(E, \theta)$ bezeichnen wir die Torsionsuntergruppe von $W^\lambda(E, \theta)$. Indem man von der regulären λ-hermiteschen Form $h : M \times M \to E$ zu der Involution ad_h auf $End_E M$ übergeht, folgt aus Satz 5.2. und Satz 5.6. sofort das nachstehende Ergebnis.

Satz 7.2. *Sei $[h] \in W^\lambda(E, \theta)$. Dann gilt:*

- *Ist θ eine Involution erster Art, so ist genau dann $[h] \in W_t^\lambda(E, \theta)$, wenn für alle Anordnungen P von K gilt:*

$$[h \otimes id_{K_P}] \in W_t^\lambda(E \otimes_K K_P, \theta \otimes id_{K_P}).$$

- *Ist θ eine Involution zweiter Art, so ist genau dann $[h] \in W_t^\lambda(E, \theta)$, wenn für alle Anordnungen P des Grundkörpers F von θ, für die F_P/F disjunkt zu K/F ist, gilt:*

$$[h \otimes id_{F_P}] \in W_t^\lambda(E \otimes_F F_P, \theta \otimes id_{F_P}).$$

Eine Aussage über die Ordnung der Elemente aus $W_t^\lambda(E, \theta)$ erhält man direkt aus Satz 5.4. und Satz 5.7:

Satz 7.3. *Sei $[h] \in W_t^\lambda(E, \theta)$. Die Ordnung von $[h]$ ist eine Zweierpotenz.*

7.3 Signatur hermitescher Formen

Sei (E, θ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution. Die Signatur einer regulären hermiteschen Form $h : M \times M \to E$ wird in zwei Schritten definiert (siehe [BP-98, 3.3. und 3.4.]). Wir beginnen mit dem Sonderfall, dass der Grundkörper F der Involution θ reell abgeschlossen ist. Wir benötigen hierfür ein Ergebnis aus der **Moritatheorie** für hermitesche Formen (siehe [K-91, I. §9]).

Das Produkt von hermiteschen Formen: Sei $b : V \times V \to E$ eine reguläre λ_0-hermitesche Form, $\lambda_0 \in \{\pm 1\}$. Wir betrachten $(End_E V, ad_b)$. Sei $h : M \times M \to End_E V$ eine reguläre λ-hermitesche Form, $\lambda \in \{\pm 1\}$. V kann vermöge $av := a(v)$ für $a \in End_E V$ und $v \in V$ als $End_E V$-Linksmodul aufgefasst werden. Da $a(v) \cdot e = a(v \cdot e)$ für $a \in End_E V$, $v \in V$ und $e \in E$, ist V ein $End_E V$-E-Bimodul und $M \otimes_{End_E V} V$ ist ein E-Rechtsmodul.

Wir definieren die **Produktform** bh auf $M \otimes_{End_E V} V$ durch

$$bh(m \otimes v, n \otimes w) = b(v, h(m,n) \cdot w)$$

für $m,\ n \in M,\ v,\ w \in V$. Diese ist eine reguläre $(\lambda \cdot \lambda_0)$-hermitesche Form (siehe [K-91, I. §8]).

Moritatheorie: Sei $Hm^\lambda(E, \theta)$ die Kategorie der regulären λ-hermiteschen Formen über (E, θ).[70] Fixieren wir eine λ_0-hermitesche Form $b : V \times V \to E$, so ist der Funktor

$$\mathcal{F}_b : Hm^\lambda(End_E V, ad_b) \to Hm^{(\lambda \cdot \lambda_0)}(E, \theta),$$

definiert durch $\mathcal{F}_b(M, h) = (M \otimes_{End_E V} V, bh)$, eine Äquivalenz von Kategorien, welche mit der orthogonalen Summe von hermiteschen Formen verträglich ist und hyperbolische Formen in hyperbolische Formen überführt (siehe [K-91, I. §9, Thm. 9.3.5]). Diese Äquivalenz von Kategorien heißt **Morita-Äquivalenz**.

Sonderfall: reell abgeschlossener Grundkörper: Sei (E, θ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution, deren Grundkörper F reell abgeschlossen ist. Es ist $(E, \theta) \cong (End_D V, ad_b)$, wobei $D \in \{K,\ \mathbb{H}_K\}$ und $b : V \times V \to D$ eine reguläre (schief-)hermitesche Form über (D, τ) ist. Wir wählen dabei, falls $D = \mathbb{H}_K$, für τ die kanonische Involution γ auf $\mathbb{H}_K$. In den anderen Fällen ist die Involution vorgegeben. Wir identifizieren (E, θ) mit $(End_D V, ad_b)$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Ist $b : V \times V \to D$ eine reguläre hermitesche Form über (D, τ), so haben wir eine Morita-Äquivalenz

  $$\mathcal{F}_b : Hm^1(End_D V, ad_b) \to Hm^1(D, \tau),$$

  wobei $\mathcal{F}_b(M, h) = (M \otimes_{End_D V} V, bh)$. Wir haben in Abschnitt 6.1 die Signatur einer hermiteschen Form über (D, τ) definiert. Die Signatur

[70] Die Objekte dieser Kategorie sind von der Form (M, h), wobei M ein endlich erzeugter E-Rechtsmodul ist und $h : M \times M \to E$ eine reguläre λ-hermitesche Form ist. Die Morphismen zwischen zwei Objekten der Kategorie sind die Isometrien zwischen diesen Objekten.

einer regulären hermiteschen Form h über $(End_D V, ad_b)$ setzen wir nun als

$$sign_{F^2} h := sign_{F^2} bh.$$

Eine Rechnung liefert uns für $(M, h) \in Hm^1(End_D V, ad_b)$:

$$(End_{End_D V} M, ad_h) \cong (End_D(M \otimes_A V), ad_{bh}) \tag{4}$$

(siehe [BP-95, 1.4.]). Damit ergibt sich aus den Ergebnissen über die Signatur einer Involution (siehe Abschnitt 6.6):

$$|sign_{F^2} h| = \begin{cases} \frac{1}{2} sign_{F^2} ad_h & \text{für } D = \mathbb{H}_K, \\ sign_{F^2} ad_h & \text{für } D = K. \end{cases}$$

- In den Fällen, in denen b eine schiefhermitesche Form ist, haben wir folgende Morita-Äquivalenz:

  $$\mathcal{F}_b : Hm^1(End_D V, ad_b) \to Hm^{-1}(D, \tau).$$

  Jedes $(M, h) \in Hm^{-1}(K, id_K)$ ist hyperbolisch und jedes $(M, h) \in Hm^{-1}(\mathbb{H}_K, \gamma)$ ist schwach hyperbolisch.[71] Das bedeutet, dass jedes $(M, h) \in Hm^1(End_D V, ad_b)$ schwach hyperbolisch ist. Wir setzen in diesen Fällen die Signatur von $(M, h) \in Hm^1(End_D V, ad_b)$ als $sign_{F^2} h = 0$.

Allgemeiner Fall: Sei (E, θ) eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution und Grundkörper F. Sei P eine Anordnung von F. Ist F_P/F nicht disjunkt zu K/F, so setzen wir für eine reguläre hermitesche Form $h : M \times M \to E$ die Signatur $sign_P h := 0$. Ansonsten betrachten wir zu $h : M \times M \to E$ die reguläre hermitesche Form

$$h \otimes id_{F_P} : M \otimes_F F_P \times M \otimes_F F_P \to E \otimes_F F_P$$

und setzen

$$sign_P h := sign_{F_P^2}(h \otimes id_{F_P}).$$

Damit ergibt sich für $h : M \times M \to E$ und $ad_h : End_E M \to End_E M$:

$$sign_P h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad sign_P ad_h = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt zusammen mit Satz 6.15. direkt das Lokal-Global-Prinzip für reguläre hermitesche Formen:

Satz 7.4. *Sei $[h] \in W(E, \theta)$. Dann ist $[h]$ genau dann ein Torsionselement, wenn $sign_P h = 0$ für alle Anordnungen P von F.*

Dies ist die Verallgemeinerung von Pfisters Lokal-Global-Prinzip, welche in der Einleitung angekündigt wurde, und somit das Ende dieser Arbeit.

[71] Je zwei reguläre schiefhermitesche Formen derselben Dimension über $(\mathbb{H}_K, \gamma)$ sind isometrisch (siehe [S-85, 10. §3, Thm. 3.7]). Damit ist $2 \times h$ hyperbolisch für jede reguläre schiefhermitesche Form über $(\mathbb{H}_K, \gamma)$.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war ein Lokal-Global-Prinzip für schwache Hyperbolizität von Involutionen, bzw. hermiteschen Formen. Wir haben verschiedene Versionen gezeigt. Für hermitesche Formen über einer zentraleinfachen K-Algebra E mit Involution θ lässt es sich wie folgt formulieren:

$[h] \in W(E,\theta)$ ist genau dann aus der Torsionsuntergruppe der Wittgruppe $W(E,\theta)$, wenn $sign_P h = 0$ für alle Anordnungen P des Grundkörpers F von θ. Die Torsionsuntergruppe von $W(E,\theta)$ enthält nur Elemente, deren Ordnung eine Zweierpotenz ist.

Da für $E = K$ und $\theta = id_K$ hermitesche Formen symmetrische Bilinearformen sind, handelt es sich hierbei um eine Verallgemeinerung von Pfisters Lokal-Global-Prinzip für quadratische Formen:

$q \in W(K)$ ist genau dann ein Torsionselement im Wittring $W(K)$, wenn $sign_P q = 0$ für alle Anordnungen P von K. Die Ordnung jedes Torsionselements von $W(K)$ ist eine Zweierpotenz (siehe [S-85, 2. §7, Thm. 7.3], [PD-01, 3, Thm. 3.3.11]).

Für das gezeigte Lokal-Global-Prinzip wurde ein Beweis angeführt, den es in dieser Form noch nicht gab: Lewis und Unger, auf deren Artikel [LU-03] diese Arbeit beruht, benutzen für den Beweis Pfisters Lokal-Global-Prinzip; in den Beweisen dieser Arbeit wird es nicht benötigt und kann deshalb, wie oben beschrieben, zurückgewonnen werden. Der zweiten Teil des Ergebnisses – die Aussage über die Ordnung schwach hyperbolischer Involutionen – wurde in dieser Arbeit ebenfalls auf eine neue Art bewiesen.

Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, haben wir einen Weg über Involutionen gewählt. Dabei haben wir – getrennt für Involutionen erster und zweiter Art – gesehen:

Eine zentraleinfache K-Algebra A mit Involution σ ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn für alle Anordnungen P des Grundkörpers F, für die F_P/F disjunkt zu K/F ist, $(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P})$ schwach hyperbolisch ist.

Dafür war eine Einschränkung nötig, wobei die Forderung $char K \neq 2$, welche wir im Hauptteil gewählt haben, eine hinreichende Einschränkung ist. Wir haben zusätzlich gezeigt, dass die Ordnung einer schwach hyperbolischen Involution immer eine Zweierpotenz ist.

Um die Ähnlichkeit mit Pfisters Lokal-Global-Prinzip zu betonen, haben wir dann aus diesem Ergebnis und dem Begriff der Signatur einer Involution abgeleitet, dass eine zentraleinfache K-Algebra mit Involution σ genau dann schwach hyperbolisch ist, wenn für alle Anordnungen P von F die Signatur von σ bezüglich P gleich null ist.

Nachdem wir den Begriff der Signatur einer regulären hermiteschen Form über einer zentraleinfachen Algebra E mit Involution θ eingeführt hatten, konnten wir Pfisters Lokal-Global-Prinzip in der zu Beginn angegebenen verallgemeinerten Form beweisen.

Bei der Übertragung von Ergebnissen über quadratische Formen auf zentraleinfache Algebren mit Involution, bzw. bei ihrer Verallgemeinerung auf hermitesche Formen sind noch einige Fragen offen. So wird vermutet, dass sich der Satz von Springer in der folgenden Formulierung verallgemeinern lässt (siehe [PSS-01, Rem. 4.6]):

Sei D eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra mit Involution θ und Grundkörper F. Sei $n = \deg D$. Ist eine hermitesche Form über (D, θ) isotrop, falls sie über einer Körpererweiterung L/F, deren Grad teilerfremd zu $2n$ ist, isotrop ist?

Lieber Thomas! Habe ich das richtig formuliert?

Ein Analogon zum Hasse-Prinzip für schwache Isotropie, nämlich, dass jede total indefinite zentraleinfache K-Algebra mit Involution erster Art genau dann schwach isotrop ist, wenn K ein ED-Körper[72] ist, wurde in [LSU-01] gezeigt. Für Involutionen zweiter Art ist eine ähnliche Aussage noch offen.

Auch bei weiteren Aussagen, die für quadratische Formen bekannt sind, kann man sich die Frage, ob eine Übertragung für Involutionen gilt, stellen. Lässt sich beispielweise das Lokal-Global-Prinzip von Witt für Isotropie quadratischer Formen übertragen (siehe [PD-01, 3, Thm. 3.4.11]), d.h. gilt Folgendes:

Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Sei L/R eine reelle, endlich erzeugte Körpererweiterung vom Transzendenzgrad eins. Sei (A, σ) eine zentraleinfache L-Algebra mit Involution, wobei der Grad von A größer als zwei sei. Ist (A, σ) isotrop, falls für alle Anordnungen P von F, für die F_P/F disjunkt zu K/F ist, die zentraleinfache F_P-Algebra mit Involution $(A \otimes_F F_P, \sigma \otimes id_{F_P})$ isotrop ist?

[72] Zur Definition des Begriffs *ED-Körper* siehe beispielsweise [LSU-01, Def. 3.3].

A Involutionen über Körpern der Charakteristik zwei

In diesem Anhang wird kurz auf den Fall von zentraleinfachen Algebren über Körpern der Charakteristik zwei eingegangen. Lewis und Unger verzichten in dem Artikel [LU-03] auf eine Diskussion dieser Situation.

Sei K ein Körper der Charakteristik zwei. Wir betrachten eine zentraleinfache K-Algebra A mit Involution σ.[73] Es ist $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$ für eine zentraleinfache K-Divisionsalgebra D mit Involution θ, einen endlichdimensionalen D-Vektorraum V, $\dim_D V = m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, und eine reguläre hermitesche Form $h : V \times V \to D$ (siehe [KMRT-98, I. §3, Thm. 3.1 und I. §4, Thm. 4.2]). Hermitesche Formen und schiefhermitesche Formen fallen für Charakteristik zwei zusammen.

Ist σ eine Involution erster Art, d.h. $\sigma|_K = id_K$, so nennen wir σ **symplektisch**, falls für einen Zerfällungskörper L und $(A \otimes_K L, \sigma \otimes id_L) \cong (End_K V, ad_b)$ die Bilinearform b **alternierend** ist, d.h.

$$\forall x \in V : \ b(x, x) = 0.$$

Sonst heißt die Involution erster Art **orthogonal** (siehe [KMRT-98, I. §2, Def. 2.5]). Die Involution ad_h auf $End_D V$ ist genau dann symplektisch, wenn die Form $h : V \times V \to D$ alternierend ist, d.h. $\forall x \in V : \ h(x, x) = 0$ (siehe [KMRT-98, I. §4, Thm. 4.2]).

Die Definition der n-fachen **orthogonalen Summe** $\boxplus^n (A, \sigma)$ behalten wir bei und erhalten auch in diesem Fall, dass $\boxplus^n (A, \sigma) \cong (M_{n \cdot m}(D), \sigma_{n \times h})$.[74] **Hyperbolische Involutionen** σ auf A lassen sich wieder über die Existenz eines idempotenten Elements $e \in A$ mit $\sigma(e) = 1 - e$ definieren (siehe [KMRT-98, II. §6, Thm. 6.7]). Dafür, dass σ hyperbolisch ist, ist eine notwendige Bedingung, dass σ entweder symplektisch oder von zweiter Art ist (siehe [KMRT-98, II. §6, Thm. 6.7]).

Wir nennen σ **schwach hyperbolisch**, falls es ein $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ mit $\boxplus^n (A, \sigma)$ hyperbolisch gibt.

Beispiel

- Sei $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Die Transposition $t : M_m(K) \to M_m(K)$ ist die adjungierte Involution zu der symmetrischen, nicht alternierenden Bilinearform $b : K^m \times K^m \to K$, $((x_i)_{i=1,\dots,m}, (y_i)_{i=1,\dots,m}) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i$.

[73] Anders als in den meisten Artikeln, wie z.B. [BST-93], [LU-03], wird in [KMRT-98] der Fall von Algebren über Körpern der Charakteristik zwei behandelt. Für die Betrachtungen in diesem Anhang sind wie im Hauptteil Kapitel I. §1 - §4 und Kapitel II. §6 aus [KMRT-98] relevant.

[74] Siehe Kapitel 3.5; die Beweise in diesem Kapitel benutzen die Aussage über die Charakteristik nicht.

Für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist dann $n \times b$ nicht alternierend und damit $\boxplus^n(M_m(K), t) \cong (M_{n \cdot m}(K), ad_{n \times h})$ nicht hyperbolisch. Somit ist t nicht schwach hyperbolisch.

Man beachte, dass für nicht reelle Körper der Charakteristik ungleich zwei diese Involution das kanonische Beispiel für eine schwach hyperbolische Involution ist und wir darüber, dass $t : M_1(K) \to M_1(K)$ schwach hyperbolisch ist, das Lokal-Global-Prinzip für diese Körper bewiesen haben (siehe Bemerkung 4.25.).

Die Aussage, dass (A, σ) schwach hyperbolisch ist, genau dann, wenn die Signatur $sign_P \sigma = 0$ ist für alle Anordnungen P des Grundkörpers F von σ, gilt somit hier nicht:

Bemerkung A.1. *Da es keine Anordnungen auf Körpern der Charakteristik zwei gibt, ist die Bedingung an die Signatur der Involution hier leer. Damit müsste – wenn wir annehmen, dass das Lokal-Global-Prinzip gilt – jede Involution schwach hyperbolisch sein. In obigem Beispiel wurde jedoch eine nicht schwach hyperbolische Involution angegeben. Es gilt allgemeiner, dass jede orthogonale Involution auf einer zentraleinfachen K-Algebra nicht schwach hyperbolisch ist.*[75]

Somit ist es für die Gültigkeit des Lokal-Global-Prinzips notwendig, eine Einschränkung vorzunehmen. Eine hinreichende Bedingung ist – wie wir in dieser Arbeit gesehen haben, dass die Charakteristik des Grundkörpers der Algebra mit Involution ungleich zwei ist.

[75] Ist $(A, \sigma) \cong (End_D V, ad_h)$, so ist h und damit für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ auch $n \times h$ nicht alternierend.

Literatur

[BL-90] E. Bayer-Fluckiger, H. W. Lenstra: *Forms in odd degree extensions and self-dual normal bases*, Amer. J. Math. 112 (1990), 359-373.

[BP-95] E. Bayer-Fluckiger, R. Parimala: *Galois cohomologie of the classical groups over fields of cohomological dimension $\leq$ 2*, Invent. Math. 122 (1995), 195-229.

[BP-98] E. Bayer-Fluckiger, R. Parimala: *Classical groups and the Hasse principle*, Ann. Math. 147 (1998), 651-693.

[BST-93] E. Bayer-Fluckiger, D. B. Shapiro, J.-P. Tignol: *Hyperbolic involutions*, Math. Z. 214 (1993), 461-476.

[EL-73] R. Elman, T.-Y. Lam: *Quadratic forms and the u-invariant.I*, Math. Z. 131 (1973), 283-304.

[FP-85] U. Friedrichsdorf, A. Prestel: *Mengenlehre für den Mathematiker*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig (1985).

[L-72] S. Lang: *Algebra*, Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusetts (1972).

[J-40] N. Jacobson: *A note on hermitian forms*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 264-268.

[J-89] N. Jacobson: *Basic algebra II*, W. H. Freeman and Company, New York (1989).

[K-91] M.-A. Knus: *Quadratic and hermitian forms over rings*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[KMRT-98] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol: *The book of involutions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1998).

[LT-93] D. W. Lewis, J.-P. Tignol: *On the signature of an involution* , Arch. Math. 60 (1993), 128-135.

[LSU-01] D. W. Lewis, C. Scheiderer, T. Unger: *A weak Hasse principle for central simple algebras with an involution*, Doc. Math. Extra Volume, Proc. Conf. Quadratic Forms and Related Topics, Baton Rouge, La., 2001 (2001), 241-251.

[LU-03] D. W. Lewis, T. Unger: *A local-global principle for algebras with involution and hermitian forms*, Math. Z. 244 (2003), 469-477.

[L-90] F. Lorenz: *Einführung in die Algebra, Teil II*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1990).

[PSS-01] R. Parimala, R. Sridharan, V. Suresh: *Hermitian analogue of a theorem of Springer*, J. Algebra 243 (2001), 780-789.

[PD-01] A. Prestel, C. N. Delzell: *Positive polynomials: from Hilbert's 17th problem to real algebra*, Springer-Verlag, Berlin(2001).

[Q-95] A. Quéguiner: *Signature des involutions de deuxième espèce*, Arch. Math. 65 (1995), 408-412.

[S-70] W. Scharlau: *Induction theorems and the structure of the Witt group*, Invent. Math. 11 (1970), 37-44.

[S-85] W. Scharlau: *Quadratic and hermitian forms*, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[Sh-76] D. B. Shapiro: *Cancellation of semisimple hermitian pairings*, J. Algebra 41 (1976), 212-223.

Index