Mathematik für Chemiker I und II.

(Programm ab WS 1999/2000)

1. Studienhalbjahr 4+ 2 SWS, 2. Studienhalbjahr 2+ 1 SWS: Kurs maximal 30+11=41 Doppelstunden.

1 Schreibweisen und Grundlagen.

Stichpunkte: Quantoren; Mengenschreibweisen, Zahlenarten; griechisches Alphabet; Fakultät, Binomialkoeffizienten; Summen– und Produktzeichen, endliche Summen und Produkte, Umindizierung; Mehrfachsummen;
spezielle Summen: Gauß–Summen, geometrische, harmonische und binomische Summe.

1.A Bezeichnungen, Schreibweisen, Symbole.
1.B Zahlenarten.
1.C Das griechische Alphabet.
1.D Fakultät.
1.E Binomialkoeffizienten.
1.F Summen– und Produktzeichen.
1.G Spezielle Summen und Produkte.

2 Betrag, Monotonie, Beschränktheit.

Stichpunkte: Intervalle, Betrag, Abstand, Monotonie, Beschränktheit, Minimum, Maximum, Infimum, Supremum.

2.A Intervalle und Betrag.
2.B Monotonie.
2.C Beschränktheit.
2.D Minimum und Maximum.
2.E Infimum und Supremum.

3 Grenzwerte von Folgen und Funktionen.

Stichpunkte: Eigentliche und uneigentliche Konvergenz von Folgen und Funktionen, wesentliche Divergenz, Teilfolgen, einseitige Grenzwerte, Zusammensetzungsregeln, unbestimmte Formen, beschränkte und monotone Folgen; einige spezielle Folgen, die Euler'sche Zahl e.

3.A Konvergenz von Zahlenfolgen.
3.B Einige elementare Folgen.
3.C Vier Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen.
3.D Grenzwerte von Funktionen.

4 Stetigkeit, Zahlenreihen.

Stichpunkte: Stetigkeit, Unstetigkeit, allgemeines Iterationsverfahren; Konvergenz und Divergenz von Zahlenreihen, Konvergenzkriterien für Zahlenreihen; geometrische und harmonische Reihe.

4.A Stetigkeit. Allgemeines Iterationsverfahren.
4.B Die möglichen Unstetigkeiten einer Funktion.
4.C Konvergenz von Zahlenreihen.
4.D Konvergenzkriterien für Zahlenreihen.

5 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen.

Stichpunkte: Exponentialreihe und Exponentialfunktion $e^x = \exp(x)$, Cauchyprodukt von zwei Reihen, Rechenregeln für e^x. Wachstumsprozesse. 1-1–Funktionen und ihre Umkehrfunktionen. $\ln x$, a^x, $\log_a x$, Rechenregeln; halblogarithmisches Koordinatenpapier.

5.A Das Cauchy–Produkt von zwei Zahlenreihen.
5.B Die Exponentialfunktion $e^x = \exp(x)$.
5.C Wachstums– und Zerfallsprozesse.
5.D Ein–eindeutige Funktionen und ihre Umkehrfunktionen.
5.E Logarithmus und allgemeine Exponentialfunkrion.
5.F Halblogarithmisches Koordinatensystem.

6 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen.

Stichpunkte: Trigonometrische Funktionen und arcus–Funktionen, Additionstheoreme, Pythagoras am Einheitskreis; hyperbolische Funktionen und area–Funktionen und entsprechende Formeln. Kreise, Ellipsen und Hyperbeln: geschlossene Darstellung und übliche Parameterdarstellung.

6.A Die trigonometrischen Funktionen.
6.B Die arcus–Funktionen.
6.C Die hyperbolischen Funktionen.
6.D Die area–Funktionen.
6.E Kreise.
6.F Ellipsen.
6.G Hyperbeln.

7 Polar– und Zylinderkoordinaten.

Stichpunkte: Ebene Polar– und Ellipsenkoordinaten, räumliche Polar– und Ellipsoidkoordinaten, Zylinderkoordinaten; Beschreibung rotationssymmetrischer Körper.

7.A Ebene Polar– und Ellipsenkoordinaten.
7.B Räumliche Polar– und Ellipsoidkoordinaten.
7.C Zylinderkoordinaten.
7.D Beschreibung rotationssymmetrischer Körper.

8 Differentiation.

Stichpunkte: Höhere und partielle Ableitungen, Schreibweisen (auch Operatorschreibweise), die wichtigsten Rechenregeln; gängige Ableitungen; Newton–Verfahren (*).

8.A Gewöhnliche Ableitung: anschauliche Deutung.

8.B Partielle Ableitung.

8.C Höhere Ableitungen: einige Schreibweisen.

8.D Ableitungsregeln.

8.E Wichtige Ableitungen.

8.F Newton–Verfahren. (*)

9 Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Stichpunkte: Mittelwertsatz für eine und mehrere Variable; Regel von L'Hospital, übliche Beispiele: u.a. Polynom · Exponentialfunktion, Logarithmus · Polynom, $\frac{\sin x}{x}$, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. "Optimistische" und "pessimistische" Fehlerabschätzung.

9.A Drei Fassungen des Mittelwertsatzes.

9.B Regel von de l'Hospital.

9.C Fehlerabschätzung (I).

10 Potenzreihen und Taylorentwicklung.

Stichpunkte: Potenzreihen für eine Variable, Konvergenzradius, Wurzel– und Quotientenkriterium; Taylorkoeffizienten, Taylorentwicklung, Taylorpolynome und Taylorrestglied; Gegenbeispiel: e^{-1/x^2} ; gängige Reihenentwicklungen; Taylorentwicklung bei mehreren Variablen.

10.A Allgemeine Potenzreihen.

10.B Taylorreihe und Taylorpolynom.

10.C Taylorrestglied. (*)

10.D Wichtige Potenzreihen–Entwicklungen.

10.E Taylor–Entwicklung bei mehreren Variablen.

11 Fehlerabschätzung (II), Extrema, Höhenlinien.

Stichpunkte: Fehlerabschätzung durch Potenzreihenentwicklung; Extrema ohne Nebenbedingung, lineare Regression, Hesse–Determinante bei 2 Variablen; Extrema mit Nebenbedingung, Lagrange'scher Multiplikator; Höhenlinien, Niveauflächen.

11.A Fehlerabschäzung (II).

11.B Extrema von Funktionen einer Variablen.

11.C Extrema ohne Nebenbedingung bei mehreren Variablen.

11.D Extrema mit Nebenbedingungen.

11.E Höhenlinien, Niveauflächen.

12 Bestimmtes und unbestimmtes Integral.

Stichpunkte: Bestimmtes Integral, einfache Regeln, Mittelwertsatz der Integralrechnung, uneigentliche Integrale, Ableitung von Parameterintegralen; Stammfunktion/unbestimmtes Intergal, wichtige Stammfunktionen, Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung.

12.A Bestimmte Integration als Summationsprozess.
12.B Elementare Regeln für bestimmte Integrale.
12.C Ableitung von Parameterintegralen.
12.D Uneigentliche Integrale.
12.E Stammfunktion/ Unbestimmtes Integral.
12.F Einige Grundregeln für unbestimmte Integrale.
12.G Wichtige Stammfunktionen.
12.H Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung.

13 Integrationsmethoden.

Stichpunkte: Partielle Integration, Rekursionsformeln, Umformung des Integranden, Substitution, Partialbruchzerlegung, Integration mit Potenzreihenentwicklung.

13.A Partielle Integration/Produktintegration.
13.B Integration mit Hilfe von Rekursionsformeln.
13.C Integration durch Umformen des Integranden.
13.D Integration mit Substitution.
13.E Integration mit Partialbruchzerlegung.
13.F Integration über Potenzreihenentwicklung.

14 Komplexe Zahlen.

Stichpunkte: Algebraische, exponentielle und trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen, Real– und Imaginärteil, Argument und Betrag, Konjugiert–Komplexe, Rechenregeln, komplexer Einheitskreis, Fundamentalsatz der Algebra, komplexe Wurzeln, komplexer natürlicher Logarithmus, komplexe Potenzen.

14.A Algebraische und exponentielle Darstellung.
14.B Einige Regeln.
14.C Komplexe Wurzeln.
14.D Komplexer Logarithmus und komplexe Potenzen. (*)

15 Schwingungen. Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Stichpunkte: Reelle und komplexe Darstellungen harmonischer Schwingungen. Trennung der Variablen für Dgln. 1. Ordnung; die allgemeine Lösung $\Big(D - a(x)\Big)^{-1}(0)$ einer homog. linearen Dgl. 1. Ordnung, die allgemeine Lösung inhomogener lin. Dgln. 1. Ordnung.

15.A Harmonische Schwingungen.
15.B Trennung der Variablen bei Dgln. 1. Ordnung.
15.C Homogene lineare Dgl. 1. Ordnung.
15.D Inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung.

16 Allgemeine lineare Differentialgleichungen.

Stichpunkte: Art und Anzahl der Lösungen. Homogene lin. Dgln. mit konstanten Koeffizienten: Exponentialansatz und charakteristisches Polynom, allgemeine und allgemeine reelle Lösung. Operatorschreibweise. Inhomogene lin. Dgln. mit konstanten Koeffizienten: Störgliedansatz/Resonanzfall.

16.A Bezeichnungen und Schreibweisen.
16.B Über die Existenz und Anzahl von Lösungen.
16.C Homogene lineare Dgln. mit konstanten Koeffizienten.
16.D Reelle Lösungen homogener lin. Dgln. mit konst. Koeff..
16.E Bemerkung über die Linearfaktorzerlegung von $p(D)$.
16.F Bemerkung über die Partialbruchzerlegung von $p(D)^{-1}$. (*)
16.G Störgliedansatz.

17 Variation *einer* Konstanten; Potenzreihenansatz.

Stichpunkte: Reduktion der Ordnung (= Variation *einer* Konstanten); Potenzreihenansatz;
Beispiel: Hermite'sche Dgl. und –Polynome.

17.A Reduktion der Ordnung.
17.B Potenzreihenansatz.
17.C Hermite'sche Differentialgleichung und Polynome.

18 Fourierreihen.

Stichpunkte: Approximation im quadratischen Mittel durch trigonometrische Polynome, Fourierreihen (als Extremwertaufgabe, reell und komplex); Fourierentwicklung gerader und ungerader Funktionen.

18.A Approximation durch trigonometrische Polynome.
18.B Fourierreihen–Entwicklung.
18.C Verwendung von Formelsammlungen.

19 Fouriertransformation.

Stichpunkte: Cauchy'scher Hauptwert; Fouriertransformierte, Fourierintegraldarstellung, Fourier-Sinus- und Fourier–Cosinus–Transformation, Approximation durch Überlagerungen harmonischer Schwingungen; Delta– und Heaviside–Funktion, Faltungssatz und Differentiationssatz.

20 Lineare Räume, lineare (Un-) Abhängigkeit.

Stichpunkte: Anschauungsraum; allgemeiner Vektorraum (= linearer Raum), Vektorraumaxiome; Durchschnitt und Summe von Untervektorräumen. Die Räume $\mathbb{K}^n$. Erzeugendensysteme und Erzeugnis, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit.

21 Basis und Dimension. Skalarprodukt und Norm.

Stichpunkte: Basis, Dimension, Darstellung und Koordinatenvektor bzgl. einer Basis. Skalarprodukt und Norm auf dem $\mathbb{K}^n$, anschauliche Deutung auf dem $\mathbb{R}^n$. Allgemeine Norm und allgemeines inneres Produkt.

22 Unitäre Räume. Konvergenz in normierten Räumen.

Stichpunkte: Euklidische Norm, Schwarz'sche Ungleichung und Dreiecksungleichung; Abstände bzgl. einer Norm, Konvergenz bzgl. einer Norm, gleichmäßige Konvergenz und Konvergenz im quadratischen Mittel; Vollständigkeit, Hilbert- und Banachräume.

22.A Euklidische Norm.
22.B Abstände.
22.C Konvergenz bzgl. einer Norm.
22.D Vollständige normierte Räume.

23 Orthogonale Projektion.

Stichpunkte: Orthogonal– und Orthonormalsysteme, Orthonormalbasen und vollständige Orthonormalsysteme; orthogonale Projektion, orthogonale Zerlegung bzgl. eines linearen Teilraumes oder bzgl. eines Vektors, Bestapproximation durch ein Element eines linearen Teilraumes; Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren; Fourier-Entwicklung als Projektionsaufgabe.

23.A Orthogonalsysteme.
23.B Orthonormalbasen und vollständige Orthonormalsysteme.
23.C Orthogonale Projektion und Bestapproximation.
23.D Gram–Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren.
23.E Zur klassischen Fourierreihen–Entwicklung. (*)

24 Vektorprodukt. Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$.

Stichpunkte: Links– und Rechtssysteme im $\mathbb{R}^3$, 2,2–Determinanten, Flächeninhalt eines Parallelogramms im $\mathbb{R}^2$; Vektorprodukt: Definition und anschauliche Deutung; Spatprodukt/3,3–Determinanten: Definition und anschauliche Deutung, Volumen eines Parallelflachs im $\mathbb{R}^3$. Koordinatendarstellung und vektorielle Darstellung von Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$.

24.A Links– und Rechtssysteme im $\mathbb{R}^3$.
24.B Definition des Vektorprodukts.
24.C Rechenregeln für das Vektorprodukt.
24.D Koordinatenabhängige Darstellung des Vektorproduktes.
24.E (2,2)–Determinanten.
24.F Mehrfach–Vektorprodukte.
24.G Die Abbildung $\vec{r} \mapsto \vec{n} \times \vec{r}$.
24.H (3,3)–Determinanten/Spatprodukt.
24.I Rechenregeln für (3,3)–Determinanten.
24.J Bemerkungen über Ebenen im $\mathbb{R}^3$. (*)
24.K Bemerkungen über Geraden im $\mathbb{R}^3$. (*)

25 Richtungsableitung. Wegintegrale.

Stichpunkte: Ableitung von Vektoren, Ableitungsregeln. Beschreibung von Kurvenbögen; skalares und vektorielles Bogenelement, die Länge eines Kurvenbogens; Tangential– und Normalenvektoren. Richtungsableitung von Kurvenbögen; Gradient und maximale Änderung, Höhenlinien und Niveauflächen. Integration nach der Bogenlänge (Wegintegrale erster Art) , allgemeine Wegintegrale (zweiter Art).

25.A Ableitungsregeln für Vektoren.
25.B Kurvenbögen.
25.C Tangential– und Normalenvektoren. (*)
25.D Richtungsableitung von Skalarfeldern.
25.E Geometrische Interpretation des Gradienten.
25.F Integration nach der Bogenlänge (Wegintegrale 1. Art) .
25.G Allgemeine Wegintegrale 2.Art.

26 Nabla-Operator. Konservative Felder.

Stichpunkte: grad, div, rot, $\vec{\nabla}$, Δ . Konservative und rotationsfreie Vektorfelder, Stammfunktion, Satz über die Wegunabheit von Wegintegralen.

26.A Nabla– und Deltaoperator.
26.B Zu den Bezeichnungen "Divergenz" und "Rotation". (*)
26.C Einige Produktregeln.
26.D Konservative Felder und Stammfunktionen.
26.E Konservativ = Rotationsfrei.
26.F Bestimmung von Stammfunktionen
26.G Wegunabhängigkeit bei Wegintegralen.

27 Exakte Dgln. und integrierender Faktor.

Stichpunkte: Exakte Differentialgleichung und zugehörige Stammfunktion, Lösung einer nichtexakten Dgl. mit Hilfe eines "exakt–machenden" integrierenden Faktors.

27.A Exakte Differentialgleichungen.
27.B Integrierender Faktor.

28 2- und 3-dimensionale Bereichsintegrale.

Stichpunkte: Ebene und räumliche Normalbereiche, 2- und 3-dimensionale Bereichs- und Mehrfachintegrale über einem Normalbereich; einige Rechenregeln und Beispiele.

28.A Normalbereiche.
28.B Beispiele ebener und räumlicher Normalbereiche.
28.C Ebene Bereichsintegrale über einem Normalbereich.
28.D Beispiele für ebene Bereichsintegrale.

28.E Rechenregeln und Eigenschaften ebener Bereichsintegrale.

28.F Räumliche Bereichsintegrale.

29 Substitutionsregel für Bereichsintegrale.

Stichpunkte: Substitutionsregel für ebene und räumliche Bereichsintegrale, Funktionaldeterminanten für die gängigen Koordinatentransformationen: ebene und räumliche Polarkoordinaten, Ellipsen- und Ellipsoidkoordinaten, Zylinderkoordinaten; einige Beispiele, Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment,
die Guldinschen Regeln; Gauß'scher Integralsatz der Ebene.

29.A Allgemeine Substitutionsregel.

29.B Gängige Koordinatentransformationen.

29.C Einige Beispiele.

29.D Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment.

29.E Guldin'sche Regeln. (*)

29.F Gauß'scher Integralsatz der Ebene. (*)

30 Elementare Matrizenrechnung.

Stichpunkte: Bezeichnungen, Klassifikation und Eigenschaften: Null-, Einheits-, Diagonal- und Dreiecksmatrizen. Algebraische Operationen: Summe und Vielfache von Matrizen, Matrixprodukte. Zeile mal Spalte, Matrix mal Spalte, Matrix mal Einheitsvektor, Matrix mal Matrix. Reguläre Matrix und Inverse; Transponierte und Adjungierte; hermitesche, schiefhermitesche, unitäre und normale Matrizen.

30.A Bezeichnungen.

30.B Algebraische Operationen.

30.C Rang und Regularität.

30.D Hermitesche, unitäre, normale Matrizen.

31 Allgemeine lineare Abbildungen.

Stichpunkte: Definition einer linearen Abbildung, Nullraum, Bildraum, Rang, Defekt, Rangformel; Lösbarkeit und Lösungsgesamtheit (Art der allgemeinen Lösung) einer linearen Gleichung.

31.A Linearität.

31.B Eineindeutigkeit und Surjektivität.

31.C Zusammensetzung linearer Abbildungen.

31.D Bildraum und Nullraum einer linearen Abbildung.

31.E Zur Lösbarkeit linearer Gleichungen.

32 Matrizen und lineare Abbildungen.

Stichpunkte: Matrizen als lineare Abbildungen; Matrixdarstellung allgemeiner lineare Abbildungen; Transformationsmatrix eines Basiswechsels, Matrixdarstellung bei Basiswechsel. Projektionsmatrizen, die Matrix $\Omega\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r}$, Drehmatrizen.

32.A Matrizen als lineare Abbildungen.

32.B Matrixdarstellung allgemeiner linearer Abbildungen.

32.C ♡ Ein wirklich nützlicher Satz! ♡

32.D Die Matrixdarstellung von Produkten und Inversen.

32.E Die Transformationsmatrix eines Basiswechsels.

32.F Matrixdarstellung einer lin. Abb. bei Basiswechsel.

32.G Projektionsmatrizen.

32.H Drehmatrizen.

33 Gauß'sches Eliminationsverfahren.

Stichpunkte: Elementare Zeilen– und Spaltenoperationen und die zugehörigen Transformationsmatrizen; Gauß'sches Eliminationsverfahren: zunächst nur für reguläre Matrizen, hiermit Matrix–Invertierung, dann auch für nicht–reguläre Matrizen, ohne und mit Spaltenvertauschung.

33.A Beispiel zur Motivierung.

33.B Elementare Zeilen– und Spaltenoperationen.

33.C Gauß'sches Eliminationsverfahren für reguläre Matrizen.

33.D Gauß–Elimination bei nicht–regulären Matrizen.

34 Determinanten.

Stichpunkte: Wiederholung von 2,2– und 3,3–Determinanten; allgemeine Definition; Berechnung mit Hilfe der Gauß–Elimination; wesentliche Eigenschaften, Laplace'scher und allgemeiner Entwicklungssatz; Cramer'sche Regel zur Lösung von linearen Gleichungssystemen und zur Matrix–Invertierung; Determinanten hermitescher und unitärer Matrizen.

34.A Wiederholung: 2,2– und 3,3–Determinanten.

34.B Allgemeine Definition.

34.C Berechnung mit Hilfe des Eliminationsverfahrens.

34.D Weitere nützliche Regeln.

34.E Entwicklungssätze.

34.F Cramer'sche Regel.

34.G Determinanten hermitescher und unitärer Matrizen.

35 Eigenwerte und Eigenelemente.

Stichpunkte: Allgemeine Definition von Eigenwerten, Eigenelementen, –vektoren und –funktionen. Eigenwerte und Eigenelemente der Matrixdarstellung einer lin. Abbildung, ähnlicher linearer Abbildungen bzw. Matrizen und der Inversen einer regulären linearen Abbildung bzw. Matrix. Der Eigenraum und die geometrische Vielfachheit (= Grad der Entartung) eines Eigenwertes. Charakteristisches Polynom einer Matrix, algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes, Bestimmung der Eigenvektoren einer Matrix mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Satz von Cayley-Hamilton.

35.A Allgemeine Definition.
35.B Eigenraum und geometrische Vielfachheit.
35.C Charakteristisches Polynom einer Matrix.

36 Diagonalisierbare und normale Matrizen.

Stichpunkte: Charakterisierung diagonalisierbarer Matrizen. Charakterisierung und Eigenschaften hermitescher, unitärer, normaler Matrizen; Projektionen und Spiegelungen. Spektraldarstellung normaler Matrizen.

36.A Diagonalisierbarkeit.
36.B Eigenwerte hermitescher und unitärer lin. Abbildungen.
36.C Eigenelemente normaler linearer Abbildungen.
36.D Spektraldarstellung normaler linearer Abbildungen.
36.E Zusammenfassende Übersicht.

37 Die Matrix e^{At}.

Stichpunkte: Definition mit Hilfe der Exponentialreihe, Bestimmung mit Hilfe der Spektraldarstellung oder eines Ansatzes. Rechenregeln und Inverse.

37.A Bestimmung mit Hilfe der Exponentialreihe.
37.B Bestimmung mit Hilfe eines Ansatzes.
37.C Bestimmung mit Hilfe der Spektraldarstellung.
37.D Einige Rechenregeln für die Matrizen e^{A}.

38 Homogene lineare Dgl.–Systeme mit konst. Koeffizienten.

Stichpunkte: Über die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Dgl.–Systems und Art der Lösungen eines homogenen linearen Dgl.–Systems. Lösung eines lin. Dgl.–Systems 1. Ordnung im Fall einer diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix, mit Hilfe der Matrix e^{At} oder mit Hilfe geeigneter Exponentialansätze. Bemerkung über entsprechende Exponentialansätze für homogene lin. Dgl.–Systeme 2.Ordnung und über die Umwandlung von Dgl.–Systemen hörerer Ordnung in Dgl.–Systeme 1.Ordnung.

38.A Vorbemerkung über allg. lin. Dgl.–Systeme 1.Ordnung.
38.B Art der Lösungen homogener lin. Dgl.–Systeme.
38.C Diagonalisierbare Koeffizientenmatrix.

1 Schreibweisen und Grundlagen.

Stichpunkte: Quantoren; Mengenschreibweisen, Zahlenarten; griechisches Alphabet; Fakultät, Binomialkoeffizienten; Summen– und Produktzeichen, endliche Summen und Produkte, Umindizierung; Mehrfachsummen;
spezielle Summen: Gauß–Summen, geometrische, harmonische und binomische Summe.

1.A Bezeichnungen, Schreibweisen, Symbole.

1.1

$\forall$	:	für alle ("All–Quantor“)
$\exists$	:	es existiert ("Existenz–Quantor“)
$\exists!$	:	es existiert *eindeutig*
i.a.	:	im Allgemeinen
Œ	:	ohne Einschränkung der Allgemeinheit
f.f.a.	:	für fast alle (für alle — mit höchstens endlich vielen Ausnahmen)

1.2

$:=$	:	ist definitionsgemäß gleich
$\approx$	:	ist ungefähr gleich
$\ll$	:	ist betragsmäßig sehr klein relativ zu
$\Leftrightarrow$	:	ist äquivalent
$:\Leftrightarrow$	:	ist definitionsgemäß äquivalent
$\Rightarrow$	:	daraus folgt
$\not\Rightarrow$	:	daraus folgt *i.a. nicht*

einige **logische Relationen** und **Ordnungsrelationen**

1.3

$\emptyset$	:	leere Menge
$\in$	:	ist Element von
$\notin$	:	ist *nicht* Element von
$\subseteq$	:	ist Teilmenge von (oder ist gleich)
$\subset$	:	ist *echte* Teilmenge von
$\setminus$	:	mengentheoretische Differenz
$\cap\,,\ \bigcap$	:	mengentheoretischer Durchschnitt
$\cup\,,\ \bigcup$	:	mengentheoretische Vereinigung

einige **Mengenschreibweisen**

1.4

$\lfloor x \rfloor$	:	größte ganze Zahl, die $\leq x$ ist
$\delta_{i,j}$	:	Kronecker–Symbol $:= \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

1.B Zahlenarten.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$: **natürliche Zahlen**

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$: **natürliche Zahlen einschließlich Null**

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$: **ganze Zahlen**

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N} \right\}$: **rationale Zahlen**

$\mathbb{R} :=$ **Körper der reellen Zahlen**

$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+$: **positive** (> 0) bzw. **nicht–negative** (≥ 0) **reelle Zahlen**

$\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-$: **negative** (< 0) bzw. **nicht–positive** (≤ 0) **reelle Zahlen**

$\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 := -1$: **komplexe Zahlen**

$\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: **reelle oder** (alternativ!) **komplexe Zahlen**

$\mathbb{H} := \{z = \alpha + \beta\,\mathbf{i} + \gamma\,\mathbf{j} + \delta\,\mathbf{k} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$: **Quaternionen**

1.C Das griechische Alphabet.

alpha (a)	α	A	jota (i)	ι	I	rho (rh)	ϱ, ρ	P
beta (b)	β	B	kappa (k)	κ	K	sigma (ß)	σ, ς	Σ
gamma (g)	γ	Γ	lambda (l)	λ	Λ	tau (t)	τ	T
delta (d)	δ	Δ	my (m)	μ	M	ypsilon (y)	υ	Υ
epsilon (ĕ)	ε, ϵ	E	ny (n)	ν	N	phi (ph)	φ, ϕ	Φ
zeta (z)	ζ	Z	xi (x)	ξ	Ξ	chi (ch)	χ	X
eta (ē)	η	H	omikron (o)	o	O	psi (ps)	ψ	Ψ
theta (th)	ϑ, θ	Θ	pi (p)	π, ϖ	Π	omega (ō)	ω	Ω

1.D Fakultät.

1.5 $\boxed{0! = 1 \text{ und } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ für } n \in \mathbb{N}\,.}$ **n–Fakultät**

z.B.: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6\,,\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24\,,\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120\,, \dots : (n+1)! = n! \cdot (n+1)\,.$

1.6 Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ die **Anzahl der Permutationen von** n **Elementen**, also gleich der Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente **anzuordnen**.

1.E Binomialkoeffizienten.

1.7 Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$ ist $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ "n über k";

insbesondere: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,\ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

z.B.: $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$.

1.8 Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$ ist $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der verschiedenen **Kombinationen der Ordnung k von n Elementen**, d.h. gleich der **Anzahl aller k–elementigen Teilmengen einer n–elementigen Menge.**

z.B.: die 3–elementige Menge $\{1, 2, 3\}$ hat die $\binom{3}{2} = 3$ zwei–elementigen Teilmengen: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

1.9 Für kleinere k, n entnimmt man die Binomialkoeffizienten am bequemsten dem **Pascal'schen Dreieck:**

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & k= & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & n= & & & \swarrow & & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & \to & & \mathbf{1} & & \swarrow & & 2 & & & \\
 & & & & 1 & \to & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \swarrow & & 3 & & \\
 & & & 2 & \to & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & \swarrow & & 4 & \\
 & & 3 & \to & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \swarrow & & 5 \\
 & 4 & \to & & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & & \swarrow & \\
5 & \to & & \mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} & &
\end{array}$$

Jede Zahl ist gleich der Summe der beiden schräg über ihr liegenden Zahlen.

Hier kann man z.B. ablesen: $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$; es gibt somit 10 Möglichkeiten, aus einer 5–elementigen Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ drei Elemente auszuwählen: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\}$.

1.F Summen– und Produktzeichen.

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: a_1 , a_2 , a_3 , ... ist

$$\sum_{n=1}^{N} a_n := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{\heartsuit=1}^{N} a_\heartsuit = \ldots$$

der Summationsindex kann *beliebig* umgetauft werden!

$$= \sum_{n=2}^{N+1} a_{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} = \ldots = \sum_{n=1+m}^{N+m} a_{n-m} =$$

$$= \sum_{k\in I} a_k = \sum_{a\in M} a \quad \text{mit } I = \{1, 2, \ldots, N\} \text{ und } M = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\},$$

$$\sum_{n=k}^{N} = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_N = \sum_{n=0}^{N-k} a_{k+n} = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n ;$$

$$\prod_{n=1}^{N} a_n := a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_N =$$

$$= \prod_{j=1}^{N} a_j = \prod_{k=1}^{N} a_k = \prod_{\heartsuit=1}^{N} a_\heartsuit = \ldots$$

der Multiplikationsindexindex kann *beliebig* umgetauft werden!

$$= \prod_{n=2}^{N+1} a_{n-1} = \prod_{n=0}^{N-1} a_{n+1} = \ldots = \prod_{n=1+m}^{N+m} a_{n-m} =$$

$$= \prod_{k\in I} a_k = \prod_{a\in M} a \quad \text{mit } I = \{1, 2, \ldots, N\} \text{ und } M = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}.$$

Mehrfachsummen (z.B.):

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} a_{n,k} := \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{K} a_{n,k}\right) = \sum_{n=1}^{N} A_n \quad \text{mit } A_n = \sum_{k=1}^{K} a_{n,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} a_{1,k} + \sum_{k=1}^{K} a_{2,k} + \cdots \sum_{k=1}^{K} a_{N,k} =$$

$$= \Big(a_{1,1} + \cdots + a_{1,K}\Big) + \Big(a_{2,1} + \cdots + a_{2,K}\Big) + \cdots + \Big(a_{N,1} + \cdots + a_{N,K}\Big) .$$

1.G Spezielle Summen und Produkte.

1.10 $$\boxed{\sum_{n=0}^{N} A = \underbrace{A + \cdots + A}_{N+1 \text{ Summanden}} = (N+1)A}$$

z.B.: $\sum_{k=0}^{15} 2 = 16 \cdot 2 = 32$, $\sum_{k=4}^{15} 2 = 12 \cdot 2 = 24$.

1.11 $\boxed{\prod_{n=0}^{N} A = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{N+1\ \text{Faktoren}} = A^{N+1}}$ z.B.: $\prod_{k=0}^{15} 2 = 2^{16} = 65536\,,\ \prod_{k=4}^{15} 2 = 2^{12} = 4096\,.$

1.12 **Gauß–Summen:**

$\boxed{\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}}$ z.B.: $\sum_{n=1}^{100} n = 1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

$\boxed{\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}$ z.B.: $\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1 + 4 + \cdots + 100 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$

$\boxed{\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2}$ z.B.: $\sum_{n=1}^{5} n = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right)^2 = 225$

1.13 **Geometrische Summe:**

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{, falls } q \neq 1 \\ N+1 & \text{, falls } q = 1 \end{cases}}$$

z.B.:
$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{4} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \\ = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = 1.9375 \end{cases}$$

1.14 $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$ **binomische Summe / binomische Formel**

z.B.: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\,,$

$(x+2)^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 4 + 4x \cdot 8 + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\,.$

Bemerkung: für die **harmonische Summe** $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$ gibt es *keine* Formel!

1.15 $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$ n–**Fakultät**

1.16 $\boxed{\prod_{n=1}^{N} A^{a_n} = A^{a_1} \cdot A^{a_2} \cdots A^{a_N} = A^{a_1 + a_2 + \cdots a_N} = A^{\sum_{n=1}^{N} a_n}}$

2 Betrag, Monotonie, Beschränktheit.

Stichpunkte: Intervalle, Betrag, Abstand, Monotonie, Beschränktheit, Minimum, Maximum, Infimum, Supremum.

2.A Intervalle und Betrag.

2.1 Für zwei relle Zahlen a, b mit $a < b$ ist:

$[\,a,b\,] \; := \; \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ **abgeschlossenes Intervall**

$]\,a,b\,[\; := \; \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **offenes Intervall**

$]\,a,b\,] \; := \; \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ nach links **halboffenes Intervall**

$[\,a,b\,[\; := \; \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ nach rechts **halboffenes Intervall**

2.2 Der **Betrag** einer reellen Zahl x ist:

$$\boxed{|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0\,, \\ -x & \text{, falls } x \leq 0\,. \end{cases}}$$

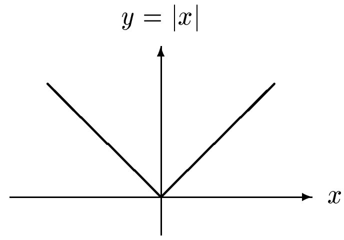


Abbildung 2.1: **Betrag.**

Es ist stets $|x| = |-x| \geq 0$:

2.3 $\boxed{|x-y| = |y-x| = \begin{cases} x-y & \text{, falls } x \geq y \\ y-x & \text{, falls } x \leq y \end{cases}}$ ist der **Abstand** zwischen x und y.

2.4 $\boxed{|x-x_0| \leq c \Leftrightarrow x_0 - c \leq x \leq x_0 + c \Leftrightarrow x \in [\,x_0 - c\,,\, x_0 + c\,]}$

z.B.: $|x+4| \leq 7 \Leftrightarrow -4-7 \leq x \leq -4+7$,
d.h. $x \in [\,-11, 3\,]$,
$|x-1| < 2 \Leftrightarrow 1-2 < x < 1+2$, d.h. $x \in\,]-1, 3\,[$.

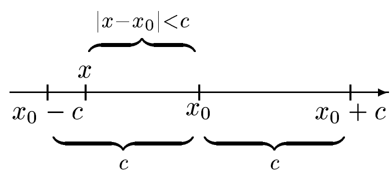


Abbildung 2.2: **Abstand.**

2.B Monotonie.

↓ wenn ↘	eine Zahlenfolge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ (mit $a_n \in \mathbb{R}$) ist:	eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ (mit $M \subseteq \mathbb{R}$) ist:
monoton wachsend,	$a_n \leq a_{n+1}$	$f(x) \leq f(\bar{x})$
streng monoton wachsend,	$a_n < a_{n+1}$	$f(x) < f(\bar{x})$
2.5 **monoton fallend**,	$a_n \geq a_{n+1}$	$f(x) \geq f(\bar{x})$
streng monoton fallend,	$a_n > a_{n+1}$	$f(x) > f(\bar{x})$
	$(\forall n \in \mathbb{N})$	$(\forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ mit $x < \bar{x})$
monoton,	wenn sie monoton wächst oder fällt,	
streng monoton,	wenn sie streng monoton wächst oder fällt.	

z.B.:

monotone Folgen:

$a_n = n^2$: wachsend,
$a_n = 2^{-n}$: fallend,
$a_n = 2$: sowohl wachsend als auch fallend,
$a_n = (-1)^n$: nicht monoton.

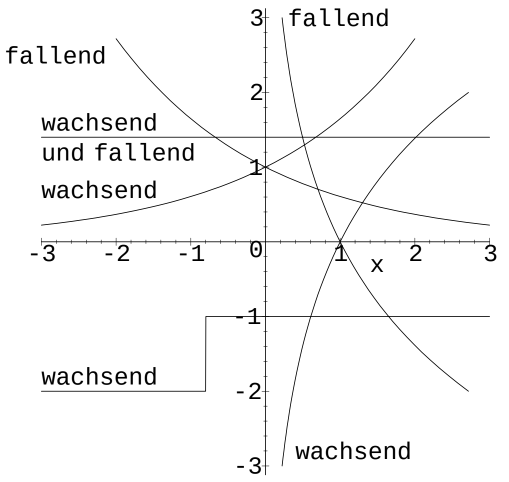


Abbildung 2.3: **monotone Funktionen.**

2.C Beschränktheit.

ist: ↙	eine nicht–leere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$	eine Zahlenfolge $(a_n)_{\mathbb{N}}$	eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ (mit $M \subseteq \mathbb{R}$)
nach unten beschränkt,	wenn sie eine **untere Schranke** $a \in \mathbb{R}$ besitzt:		
	$a \leq x \;\; \forall x \in M$	$a \leq a_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$	$a \leq f(x) \;\; \forall x \in M$
2.6 **nach oben beschränkt,**	wenn sie eine **obere Schranke** $b \in \mathbb{R}$ besitzt:		
	$x \leq b \;\; \forall x \in M$	$a_n \leq b \;\; \forall n \in \mathbb{N}$	$f(x) \leq b \;\; \forall x \in M$
beschränkt,	wenn sie nach unten und oben beschränkt ist:		
	$\Leftrightarrow \; \exists c > 0 :$ $\lvert x \rvert \leq c \;\; \forall x \in M$	$\Leftrightarrow \; \exists c > 0 :$ $\lvert a_n \rvert \leq c \;\; \forall n \in \mathbb{N}$	$\Leftrightarrow \; \exists c > 0 :$ $\lvert f(x) \rvert \leq c \;\; \forall x \in M$

z.B.:

(a) die Menge $M = \mathbb{Z}$ ist nach unten und nach oben **unbeschränkt** ;

(b) die Menge $M = \mathbb{N}$ ist **nach oben unbeschränkt** , aber **nach unten beschränkt:** *jede* Zahl $a \leq 1$ ist untere Schranke von $M = \mathbb{N}$: $a \leq n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$;

(c) die Menge $M = \{m = -n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist **nach unten unbeschränkt** , aber **nach oben beschränkt:** *jede* Zahl $b \geq -1$ ist obere Schranke von M : $-n \leq b \;\; \forall n \in \mathbb{N}$;

(d) die Menge $M = [-2, 1[$ ist **beschränkt:** *jede* Zahl $a \leq -2$ ist untere Schranke und *jede* Zahl $b \geq 1$ ist obere Schranke von M : $a \leq x \leq b \;\; \forall x \in M$; darüberhinaus ist $|x| \leq c \;\; \forall c \geq 2$;

(e) die Folge $a_n = (-1)^n\, n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$: $0\,, -1\,, 2\,, -3\,, 4\,, -5\,, 6\,, \ldots$ ist nach unten und oben **unbeschränkt** ;

(f) die Folge $a_n = 2^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$: $1\,, 2\,, 4\,, 8\,, \ldots$ ist **nach oben unbeschränkt** , aber **nach unten beschränkt** : *jede* Zahl $a \leq 1$ ist untere Schranke dieser Folge: $a \leq 2^n \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$;

(g) die Folge $a_n = 2^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$: $1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{4}\,, \frac{1}{8}\,, \ldots$ ist **beschränkt** : *jede* Zahl $a \leq 0$ ist untere Schranke und *jede* Zahl $b \geq 1$ ist obere Schranke dieser Folge: $a < 2^{-n} \leq b \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$;

(h) die Funktion $f(x) = \ln x \quad (x > 0)$ ist nach unten und oben **unbeschränkt** : $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$ und $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ (siehe die Abbildungen in Lektion 5) ;

(i) die Funktion $f(x) = e^x$ ist **nach oben unbeschränkt** : $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$, aber sie ist **nach unten beschränkt:** $e^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ (siehe die Abbildungen in Lektion 5) ;

(j) die Funktion $f(x) = \sin x$ ist **beschränkt:** $-1 \leq \sin x \leq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ (siehe Lektion 6) .

2.D Minimum und Maximum.

2.7 Eine reelle Zahl a ist das **Minimum** (der kleinste Wert)

[1] der **Menge** $M \subseteq \mathbb{R}$: $\boxed{a = \min M = \min\limits_{x \in M} x}$, wenn: $a \in M$ *und* $a \leq x \;\forall x \in M$,

[2] der **Folge** $(a_n)_{\mathbb{N}}$: $\boxed{a = \min\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n}$, wenn es einen Index $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a = a_k \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

[3] der **Funktion** $f \;:\; M \to \mathbb{R}$: $\boxed{a = \min f|_M = \min\limits_{x \in M} f(x)}$, wenn es ein Element $x_0 \in M$ gibt mit $a = f(x_0) \leq f(x) \;\forall x \in M$;

2.8 Eine Zahl b ist das **Maximum** (der größte Wert)

[1] der **Menge** $M \subseteq \mathbb{R}$: $\boxed{b = \max M = \max\limits_{x \in M} x}$, wenn: $b \in M$ *und* $x \leq b \; \forall x \in M$,

[2] der **Folge Folge** $(a_n)_\mathbb{N}$: $\boxed{b = \max\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n}$, wenn es einen Index $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \leq a_k = b$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

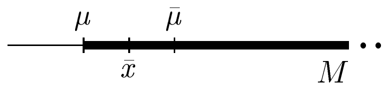
[3] der **Funktion** $f : M \to \mathbb{R}$: $\boxed{b = \max f|_M = \max\limits_{x \in M} f(x)}$, wenn es ein Element $x_0 \in M$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0) = b \; \forall x \in M$.

2.E Infimum und Supremum.

2.9 Eine Zahl μ ist das **Infimum** (die größte untere Schranke, **g.l.b.**)

[1] der **Menge** $M \subseteq \mathbb{R}$: $\boxed{\mu = \inf M = \inf\limits_{x \in M} x}$, wenn: $\mu \leq x \; \forall x \in M$

und zu jedem $\bar{\mu} > \mu \; \exists \, \bar{x} \in M : \bar{x} < \bar{\mu}$:



[2] der **Folge** $(a_n)_\mathbb{N}$: $\boxed{\mu = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n}$, wenn: $\mu \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

und zu jedem $\bar{\mu} > \mu \; \exists \, \bar{n} \in \mathbb{N} : a_{\bar{n}} < \bar{\mu}$;

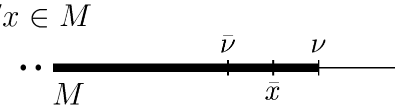
[3] der **Funktion** $f : M \to \mathbb{R}$: $\boxed{\mu = \inf f|_M = \inf\limits_{x \in M} f(x)}$, wenn: $\mu \leq f(x) \; \forall x \in M$

und zu jedem $\bar{\mu} > \mu \; \exists \, \bar{x} \in M : f(\bar{x}) < \bar{\mu}$.

2.10 Eine Zahl ν ist das **Supremum** (die kleinste obere Schranke, **l.u.b.**)

[1] der **Menge** $M \subseteq \mathbb{R}$: $\boxed{\nu = \sup M = \sup\limits_{x \in M} x}$, wenn: $x \leq \nu \; \forall x \in M$

und zu jedem $\bar{\nu} < \nu \;\; \exists \, \bar{x} \in M : \bar{\nu} < \bar{x}$:



[2] der **Folge** $(a_n)_\mathbb{N}$: $\boxed{\nu = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n}$, wenn: $a_n \leq \nu \; \forall n \in \mathbb{N}$

und zu jedem $\bar{\nu} < \nu \;\; \exists \, \bar{n} \in \mathbb{N} : \bar{\nu} < a_{\bar{n}}$;

[3] der **Funktion** $f : M \to \mathbb{R}$: $\boxed{\nu = \sup f|_M = \sup\limits_{x \in M} f(x)}$, wenn: $f(x) \leq \nu \; \forall x \in M$

und zu jedem $\bar{\nu} < \nu \;\; \exists \, \bar{x} \in M : \bar{\nu} < f(\bar{x})$.

z.B.:

(a) $M_1 = [0\,,\,1[\,:\ \inf M_1 = \min M_1 = 0\,,\ \sup M_1 = 1\,,\ \max M_1$ existiert nicht;

(b) $M_2 = \left\{ x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ \middle|\ m, n \in \mathbb{N} \right\}:\ \inf M_2 = 0\,,\ \min M_2$ existiert nicht,

$\sup M_2 = \max M_2 = 2$ (mit $m = n = 1$);

(c) $a_n = 1 - \frac{1}{n}\ \ (n \in \mathbb{N}):\ \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = \min\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$ (mit $n = 1$), $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$,

$\max\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ existiert nicht;

(d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ für $x > 0:\ \inf\limits_{x>0} f(x) = \min\limits_{x>0} f(x) = 2$ (mit $x = 1$),

$\sup\limits_{x>0} f(x)$ und $\max\limits_{x>0} f(x)$ existieren nicht.

2.11 Wenn es ein Minimum gibt, ist dieses auch das Infimum, und wenn es ein Maximum gibt, ist dieses auch das Supremum.
Umgekehrt ergibt sich aus der Existenz des Infimums *i.a. nicht* die Existenz eines Minimums (s.o. die Menge M_2), und aus der Existenz des Supremums ergibt sich *i.a. nicht* die Existenz eines Maximums (s.o. die Menge M_1)!

Aus diesem Grund ist auch die "offensichtlich wahre" Aussage, daß jede nach oben beschränkte Menge M ein Supremum *besitzt* (daß also die Menge aller oberen Schranken von M ein *Minimum* hat) und ebenso, daß jede nach unten beschränkte Menge M ein Infimum *besitzt* (daß also die Menge aller unteren Schranken von M ein *Maximum* hat) u n b e w e i s b a r (!) und muß p o s t u l i e r t werden:

2.12

Das Supremum–Axiom:

Jede nicht–leere, **nach oben beschränkte** Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ *besitzt* ein **Supremum**;
jede nicht–leere, **nach unten beschränkte** Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ *besitzt* ein **Infimum**.

(Die Tatsache, daß die Aussage dieses Axioms mit unserer Erfahrung übereinstimmt, *beweist* dieses Axiom nicht, sondern *rechtfertigt* es!)

3 Grenzwerte von Folgen und Funktionen.

Stichpunkte: Eigentliche und uneigentliche Konvergenz von Folgen und Funktionen, wesentliche Divergenz, Teilfolgen, einseitige Grenzwerte, Zusammensetzungsregeln, unbestimmte Formen, beschränkte und monotone Folgen; einige spezielle Folgen, die Euler'sche Zahl e.

3.A Konvergenz von Zahlenfolgen.

3.1 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist:

[1] eine **Nullfolge**: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$ oder $\boxed{a_n \to 0\ (n\to\infty)}$,

wenn sich die Beträge $|a_n|$ mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ immer mehr dem Wert 0 nähern.
(m.a.W.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon\ \ \forall n \geq n_\varepsilon$).

[2] **konvergent gegen** $+0$ **bzw. gegen** -0 :

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +0}$ oder $\boxed{a_n \to +0\ (n\to\infty)}$, bzw.

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -0}$ oder $\boxed{a_n \to -0\ (n\to\infty)}$,

wenn sie eine **Nullfolge** ist mit $a_n > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ bzw. $a_n < 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

[3] **konvergent gegen einen endlichen Grenzwert** a:

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$ oder $\boxed{a_n \to a\ (n\to\infty)}$,

wenn $\boxed{|a_n - a| \to 0\ (n\to\infty)}$, d.h. wenn sich die **Abstände** $|a_n - a|$ zwischen a_n und a mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ immer mehr dem Wert 0 nähern.

[4] **(uneigentlich) konvergent gegen** ∞:

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty}$ oder $\boxed{a_n \to \infty\ (n\to\infty)}$,

wenn es zu jeder (*beliebig großen*) Zahl $N \in \mathbb{N}$ *höchstens endlich viele* Folgenglieder $a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$ gibt, die kleiner als N sind.

z.B.: $a_n = \dfrac{1}{n} \to +0\ \ (n\to\infty)$, $\quad a_n = -2^{-n} \to -0\ \ (n\to\infty)$,

$a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \to 1\ \ (n\to\infty)$, $\quad a_n = 1 + n^2 \to \infty\ \ (n\to\infty)$.

Für die Konvergenz bzw. Nicht–Konvergenz einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es verschiedene — sich z.T. widersprechende — **Schreib– und Sprechweisen:**

3.2

Konvergenz	**Divergenz**	
Konvergenz gegen einen *endlichen* Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert	*keine* Konvergenz gegen einen *endlichen* Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht	
$\lim\limits_{n\to\infty} = a \quad (a$ endlich$)$ $a_n \to a \quad (n\to\infty)$ $\lvert a_n - a\rvert \to 0 \quad (n\to\infty)$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert *uneigentlich* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ $a_n \to \pm\infty \quad (n\to\infty)$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert *wesentlich nicht*
eigentliche Konvergenz	uneigentliche Konvergenz = bedingte Divergenz	wesentliche Divergenz
z.B.: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^{-n}) = 1$	z.B.: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$	z.B.: $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ existiert wesentlich nicht

3.3

Zusammensetzungsregeln für Grenzwerte:

Für $n\to\infty$ sei $a_n \to a\,,\ b_n \to b$ (eigentlich oder uneigentlich); dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a_n \pm b_n & \to & a \pm b \\ a_n \cdot b_n & \to & a\cdot b \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \to & \dfrac{a}{b} \\ a_n^{b_n} & \to & a^b \end{array}}$$

ausgenommen alle **unbestimmten Formen:**

$$\infty - \infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,,\ 0^0\,,\ 1^\infty\,,\ \infty^0\,.$$

Insbesondere: $\boxed{a_n \to +0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to +\infty \ \text{ und } \ a_n \to -0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to -\infty}\,.$

3.4

Jede **Teilfolge** einer (eigentlich oder uneigentlich) konvergenten Folge ist (eigentlich bzw. uneigentlich) konvergent gegen denselben Grenzwert.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \cdots & a_n & \cdots & \cdots & \xrightarrow{n\to\infty} & a \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\ & & a_{n_1} & & a_{n_2} & & & a_{n_3} & \cdots & \cdots & a_{n_k} & \cdots & \xrightarrow{k\to\infty} & a \end{array}$$

3.B Einige elementare Folgen.

3.5 $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{, für } a > 1 \ \ (a \in \mathbb{R}) \\ 1 & \text{, für } a = 1 \\ 0 & \text{, für } |a| < 1 \ \ (a \in \mathbb{C}) \\ \multicolumn{2}{l}{\text{existiert (wesentl.) nicht für alle anderen } a \in \mathbb{C}} \end{cases}$$

z.B.:
$$\begin{array}{llll} a_n = 2^n & : \ 2, 4, 8, 16, 32, \ldots & \to \infty \ (n \to \infty) \\ a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n & : \ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots & \to 0 \ (n \to \infty) \\ a_n = (-1)^n & : \ -1, +1, -1, +1, -1, \ldots & : \text{wesentl. divergent} \\ a_n = (-2)^n & : \ -2, +4, -8, +16, -32, \ldots & : \text{wesentl. divergent} \end{array}$$

3.6 $$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{, für } a > 0 \ \ (a \in \mathbb{R}) \\ 1 & \text{, für } a = 0 \\ 0 & \text{, für } a < 0 \ \ (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

z.B..:
$$\begin{array}{lll} a_n = n^{0.1} & : \ a_1 = 1, a_{1000} = 1.995, a_{10000} = 2.512, \ldots & \to \infty \ (n \to \infty) \\ a_n = n^{-0.1} & : \ a_1 = 1, a_{1000} = 0.501, a_{10000} = 0.398, \ldots & \to 0 \ (n \to \infty) \end{array}$$

3.7 $$\lim_{n\to\infty} n^k \cdot a^n \to \begin{cases} +\infty & \text{für } a \in \mathbb{R}, a \geq 1 \ \ (k \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{für } a \in \mathbb{C}, |a| < 1 \ \ (k \in \mathbb{N}) \\ \multicolumn{2}{l}{\text{existiert (wesentl.) nicht für alle anderen } a \in \mathbb{C} \ \ (k \in \mathbb{N})} \end{cases}$$

z.B.:
$$\begin{array}{lll} a_n = n^2 \cdot 2^n & : \ 1, 16, 72, 256, 800, \ldots & \to \infty \ (n \to \infty) \\ a_n = n^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n & : \ -\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8}, 1, -\frac{25}{32}, \frac{36}{64}, -\frac{49}{128}, \ldots & \to 0 \ (n \to \infty) \\ a_n = n^2 \cdot (-1)^n & : \ -1, +4, -9, +16, -25, \ldots & : \text{wesentl.diverg.} \end{array}$$

3.8 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

z.B.: $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$: $a_1 = 3, a_2 = 4.5, a_3 = 4.5, a_4 = 3.375,$
$a_5 = 2.025, \ldots, a_{11} = 0.0044379, \ldots \quad \to 0 \ (n \to \infty)$

3.9 $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e = 2.71828\ldots$$ **(Euler'sche Zahl e)**

Beachte, daß diese Folge **nicht gegen 1** konvergiert, obwohl $1 + \frac{1}{n} \to 1$ für $n \to \infty$!

Mit diesem Grenzwert erhält man noch:

3.10 $$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$ und $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

3.11 $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ für alle } a > 0}$ (s.u.) und sogar: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

3.C Vier Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen.

Das nützlichste Konvergenzkriterium ist das **Majoranten**– oder **Vergleichskriterium:**

3.12

Ist $|a_n - a| \leq b_n \to 0 \ (n \to \infty)$, so ist $a_n \to a \ (n \to \infty)$,

ist $|a_n| > b_n \to \infty \ (n \to \infty)$, so ist $(a_n)_n$ *nicht* (eigentlich) konvergent!

z.B.: Mit irgendeiner Folge c_n, $n \in \mathbb{N}$, sei $\boxed{a_n = \dfrac{n - \sin c_n}{n}}$. Dann ist

$|a_n - 1| = \left|\left(1 - \dfrac{\sin c_n}{n}\right) - 1\right| = \dfrac{|\sin c_n|}{n} \leq \dfrac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$,

also: $a_n = \dfrac{n - \sin c_n}{n} \to 1 \ (n \to \infty)$: die Folge $|a_n - 1|$ wird hier von der Nullfolge $b_n = 1/n$ majorisiert, ist also selbst eine Nullfolge.

3.13

Cauchy–Kriterium:

Eine (Zahlen–) Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ ist genau dann **eigentlich konvergent**, wenn sie **in sich konvergent** ist, d.h. wenn: $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$.

(Man nennt solche Folgen auch **Cauchy– Folgen.**)

3.14

Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (eigentlich!) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (eigentlich!) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

z.B.: Sei $a > 1$ und $a_n = \sqrt[n]{a}$ für $n \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, daß diese Folge einen Grenzwert *besitzt*, genügt es nachzuweisen, daß sie monoton fällt und nach unten beschränkt ist: wegen $a > 1$ ist zunächst $a_n = \sqrt[n]{a} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge ist nach unten beschränkt.

Die Monotonie ergibt sich durch "geschicktes" Umformen der zu beweisenden Ungleichung:

$a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow a^{1/n} \geq a^{1/(n+1)} \Leftrightarrow \left(a^{1/n}\right)^{n\,(n+1)} \geq \left(a^{1/(n+1)}\right)^{n\,(n+1)} \Leftrightarrow a^{n+1} \geq a^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot a^n \geq a^n \iff a \geq 1$: das stimmt!

(**Beachte**, daß eine Schlussweise der Art:
{zu beweisende Aussage} $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ {richtige Aussage} *nicht* genügt!)

Ist $0 < a < 1$, so ist $b := 1/a > 1$ und die Folge $(b_n)_{\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt[n]{b} = 1/\sqrt[n]{a}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt, besitzt also einen Grenzwert μ. Damit besitzt auch die Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{a} = 1/b_n$ einen Grenzwert: $a_n \to 1/\mu$.

Für *beliebige* $a > 0$ besitzt demnach die Folge $(a_n)_{\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{a}$ einen Grenzwert $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.

Da dann auch die Teilfolge $a_{2n} = \sqrt[2n]{a}$ den (selben!) Grenzwert μ hat, folgt (für $n \to \infty$):

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & = & \sqrt[n]{a} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{a} = & a_{2n} & \cdot & a_{2n} \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ \mu & = & & \mu & \cdot & \mu \end{array}$$

Wir erhalten: $\mu = \mu^2$, wegen $\mu \neq 0$ also: $\mu = 1$, d.h. es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für alle $a > 0$.

3.15

Wenn für eine Zahl $0 \leq q < 1$ gilt:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q$ oder $\sqrt[n]{|a_n|} \to q$ für $n \to \infty$,

dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Nullfolge**.

Zum Beispiel:

(a) $\boxed{a_n = n^k a^n \text{ mit } |a| < 1 \text{ und } k \in \mathbb{N}}$:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left|n^k a^n\right|^{\frac{1}{n}} = |a| \left(\sqrt[n]{n}\right)^k \to |a| \cdot 1 =: q < 1 \quad (n \to \infty)$:

die Folge $a_n = n^k a^n$ ist somit (im Fall $|a| < 1$) eine **Nullfolge**.

(b) $\boxed{a_n = \frac{a^n}{n!} \text{ für beliebige } a \in \mathbb{C}}$:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a|^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, |a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \to 0 =: q < 1 \quad (n \to \infty)$:

die Folge $a_n = \frac{a^n}{n!}$ ist also für alle $a \in \mathbb{C}$ eine **Nullfolge**.

3.D Grenzwerte von Funktionen.

Grenzwerte von Funktionen kann man mit Hilfe von Zahlenfolgen definieren:

3.16

Seien $x_0\,,\ a \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Eine Funktion konvergiert (eigentlich bzw. uneigentlich) für $x \to x_0$ gegen a:

$\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a}$ oder $\boxed{f(x) \to a \ \ (\to x_0\,)}$, wenn

$f(x_n) \to a \ \ (n \to \infty\,)$ *für jede* Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ mit $x_0 \neq x_n \to x_0 \ \ (n \to \infty\,)$.

Zum Beispiel:

[1] $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{x^n} = a_n}$, denn

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{x^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \to a_n + 0 + \cdots + 0 \text{ für } x \to \infty\,.$$

[2] $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} = n}$, denn mit Polynomdivision ergibt sich:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + \cdots + x + 1 \to 1 + \cdots + 1 = n \text{ für } x \to 1\,.$$

[3] Die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist (zunächst) an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert $\left(\frac{0}{0}\right)$,

da aber $\sin x \approx x$ für $x \approx 0$, ist $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$:

Dieser Grenzwert ergibt sich bequem mit Hilfe der L'Hospital'schen Regel (Lektion 9). Dass $\sin x \approx x$ für $x \approx 0$ ist, kann man jedoch auch an den Graphen der beiden Funktionen $y = \sin x$ (mit dem Winkel x im *Bogenmaß*!) und $y = x$ erkennen:

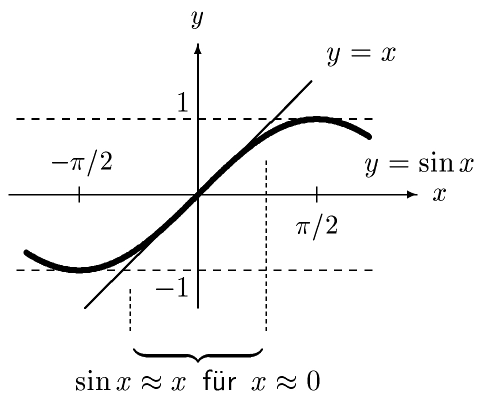


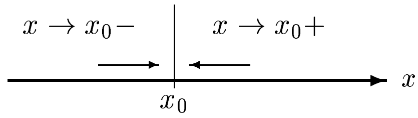
Abbildung 3.1: **Sinus nahe 0.**

Für einen endlichen Wert x_0 schreibt man:

$\boxed{x \to x_0- \quad \text{oder} \quad x \to x_0 - 0}$,

wenn sich x nur *von links* dem Wert x_0 nähert:

$\boxed{x_0 > x \to x_0}$,



und: $\boxed{x \to x_0+ \quad \text{oder} \quad x \to x_0 + 0}$,

wenn sich x nur *von rechts* dem Wert x_0 nähert:

$\boxed{x_0 < x \to x_0}$.

Hiermit bekommt man — sofern sie eigentlich oder uneigentlich existieren — die beiden

3.17

einseitigen Grenzwerte:

$\boxed{f(x_0 - 0) := \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)}$ **linksseitiger Grenzwert**

$\boxed{f(x_0 + 0) := \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)}$ **rechtsseitiger Grenzwert**

z.B.: Sei $f(x) = e^{1/x}$:

für $x \to 0+$ ist $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, somit:

$f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0+} e^{1/x} = e^{\infty} = \infty$;

für $x \to 0-$ ist $\dfrac{1}{x} \to -\infty$, somit:

$f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$.

Außerdem ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$,

da $\dfrac{1}{x} \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

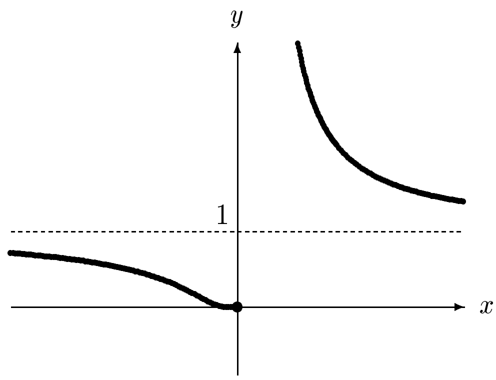


Abbildung 3.2: $f(x) = e^{1/x}$

3.18

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **existiert wesentlich nicht** , wenn die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ *verschieden* sind oder mindestens einer von ihnen nicht existiert.

Beachte auch, dass *i.a. nicht* gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ **(!!)** : das gilt (definitionsgemäß) nur für *stetige* Funktionen.

4 Stetigkeit. Zahlenreihen.

Stichpunkte: Stetigkeit, Unstetigkeit, allgemeines Iterationsverfahren; Konvergenz und Divergenz von Zahlenreihen, Konvergenzkriterien für Zahlenreihen; geometrische und harmonische Reihe.

4.A Stetigkeit. Allgemeines Iterationsverfahren.

4.1

Eine Funktion $f = f(x)$ ist **an einer Stelle** x_0 ihres Definitionsbereiches $\mathcal{D}(f)$ **stetig**, wenn $\lim\limits_{x_0 \neq x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h. wenn $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$ für für *jede* Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ mit $x_0 \neq x_n \in \mathcal{D}(f)$ und $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Die Funktion f ist **stetig**, wenn sie *an jeder* Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches stetig ist.

z.B.: Die e–Funktion $f(x) = e^x$ ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{C}$ stetig (s. Lektion 5). Hiervon wird z.B. Gebrauch gemacht, wenn Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x \to x_0} e^{g(x)}$ zu bestimmen sind: ist $g(x) \to c$ für $x \to x_0$, so ist $e^{g(x)} \to e^c$ für $x \to x_0$, d.h. es gilt:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} e^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}}\,.$$

Ein nützliches Anwendungsbeispiel für stetige Funktionen ist das **allgemeine Iterationsverfahren:**

4.2

Ist die Funktion $f(x)$ **stetig** und ist die Gleichung $\boxed{f(x) = x}$ zu lösen, so kann man wiefolgt vorgehen:

> wenn mit irgendeiner Anfangsnäherung x_0 die rekursiv durch:
>
> $\boxed{x_n := f(x_{n-1})}$ für $n \in \mathbb{N}$
>
> definierte Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert: $x_n \to \bar{x}$ $(n \to \infty)$,
> dann ist $\bar{x}$ eine Lösung: $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Ist diese Folge divergent, formt man die Ausgangsgleichung $f(x) = x$ um in $x = g(x)$ mit $g(x) := f^{-1}(x)$ und definiert die Iterationsfolge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ mit Hilfe von $g(x)$: $\boxed{x_n := g(x_{n-1})}$.

z.B.:

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $\boxed{e^x - 4x = 0}$:

Eine grobe Skizze zeigt, daß die beiden Kurven $y = e^x$ und $y = 4x$ *zwei* Schnittpunkte haben: eine in der Nähe von $x = 0.5$ und eine in der Nähe von $x = 2$.

Die Gleichung: $x = \frac{1}{4}\,e^x$ liefert die **Iterationsfolge:**

$\boxed{x_n = \frac{1}{4}\,e^{x_{n-1}}}$; mit dem Startwert $x_0 = 0.5$ ergibt sich nach 18 Schritten die erste Lösung:

$\boxed{x = 0.357402956}$.

Da der Startwert $x_0 = 2$ *dieselbe* Lösung liefert, muß man die Ausgangsgleichung umformen in $x = \ln 4x$ und erhält damit die **Iterationsfolge:** $\boxed{x_n = \ln 4x_{n-1}}$; diese ergibt mit dem Startwert $x_0 = 2$ nach 14 Schritten die zweite Lösung:

$\boxed{x = 2.153292364}$.

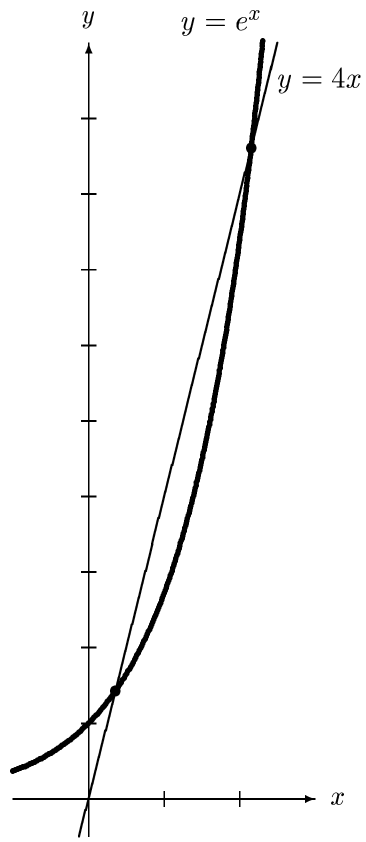


Abbildung 4.1: $e^x = 4x$.

Bemerkung: es gibt eine Reihe von Iterationsverfahren (z.B. das Newton–Verfahren, das die Ableitung von $f(x)$ verwendet), die *wesentlich* schneller konvergieren, aber es gibt kein Verfahren, das so einfach und 'idiotensicher' zu handhaben ist wie dieses allgemeine Iterationsverfahren!

4.3

> Eine Funktion $f = f(x, y, \ldots)$ von *mehreren* Veränderlichen
> ist **stetig an der Stelle** $(x_0, y_0, \ldots) \in \mathcal{D}(f)$, wenn
> für *jede* Folge $((x_n, y_n, \ldots))_{\mathbb{N}}$ mit $(x_0, y_0, \ldots) \neq (x_n, y_n, \ldots) \in \mathcal{D}(f) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
> und $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, ... für $n \to \infty$ gilt:
> $f(x_n, y_n, \ldots) \to f(x_0, y_0, \ldots)$ für $n \to \infty$.

4.B Die möglichen Unstetigkeiten einer Funktion.

Die **Stetigkeit** einer Funktion ist anschaulich besser zu erfassen, wenn man sich klar macht, von welcher Art eine Funktion $f(x)$ **unstetig** sein kann:

Nimmt man zu $\mathcal{D}(f)$ alle diejenigen Punkte $\bar{x}$ hinzu, zu denen es mindestens eine Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(f)$ gibt (d.h. $x_n \in \mathcal{D}(f)$) mit $x_n \to \bar{x} \quad (n \to \infty)$, so erhält man die **abgeschlossene Hülle** $\overline{\mathcal{D}(f)}$ von $\mathcal{D}(f)$.

z.B.: für $f(x) = 1/x$ ist $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\overline{\mathcal{D}(f)} = \mathbb{R}$;
für $f(x) = \ln x$ ist $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und $\overline{\mathcal{D}(f)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;
für $f(x) = e^x$ ist $\mathcal{D}(f) = \overline{\mathcal{D}(f)} = \mathbb{R}$.

Für eine Funktion $f = f(x)$ gibt es **5 Arten von Unstetigkeiten** an einer Stelle $x_0 \in \overline{\mathcal{D}(f)}$:

$\boxed{\text{A}}$ $f(x)$ ist an der Stelle x_0 **hebbar unstetig**, wenn $y_0 := \lim\limits_{x_0 \neq x \to x_0} f(x)$ eigentlich existiert, aber entweder $x_0 \notin \mathcal{D}(f)$ oder $f(x_0) \neq y_0$. In diesem Fall lässt sich

die Unstetigkeit *beheben* durch die Neu– bzw. Umdefinition: $f(x_0) := y_0$.

(Der Praktiker wird diese Neu– bzw. Umdefinition stets sofort stillschweigend vornehmen und $f(x)$ an dieser Stelle erst gar nicht als unstetig ansehen!)

z.B.: $\boxed{f(x) = \dfrac{\sin x}{x}}$: es ist $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\overline{\mathcal{D}(f)} = \mathbb{R}$:

an der Stelle $x_0 = 0$ ist $f(x)$ nicht definiert $\left(\frac{0}{0}\right)$, wegen: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
kann $f(x)$ jedoch durch die *Definition* $f(0) := 1$ **stetig ergänzt** werden:

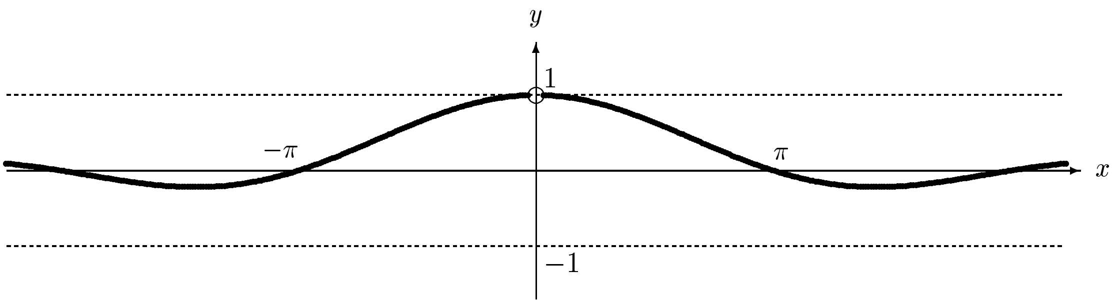


Abbildung 4.2: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

oder: $\boxed{g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}}$: es ist $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\overline{\mathcal{D}(g)} = \mathbb{R}$: an der Stelle $x_0 = 1$ ist

$g(x)$ zwar nicht definiert, jedoch wird der Praktiker diese Unstetigkeit einfach 'wegkürzen' und erhält mit $g(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$ eine *stetige* Funktion.

Für den Praktiker sind also beide Funktionen auf *ganz* $\mathbb{R}$ definiert und stetig!

B $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine **endliche Sprungstelle**, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ eigentlich existieren, aber *verschieden* sind.

z.B.: an der Stelle $x_0 = 0$ die Funktion

$$\boxed{f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}} :$$

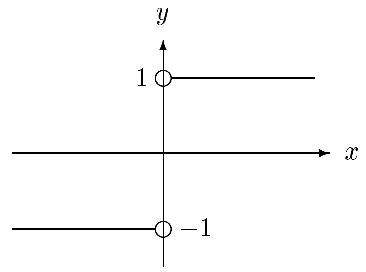


Abbildung 4.3: $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

C $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine **unendliche Sprungstelle**, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ eigentlich oder uneigentlich existieren — mindestens einer uneigentlich! — und verschieden sind.

z.B.: $\boxed{f(x) = e^{1/x} \to \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to +0 \\ 0 & \text{für } x \to -0 \end{cases}}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

(siehe die Abbildung 3.2!)

D $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen **Pol** oder eine **Unendlichkeitsstelle**, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

z.B.: $\boxed{f(x) = \frac{1}{|x|} \to \infty \text{ für } x \to \pm 0}$: an der Stelle $x_0 = 0$:

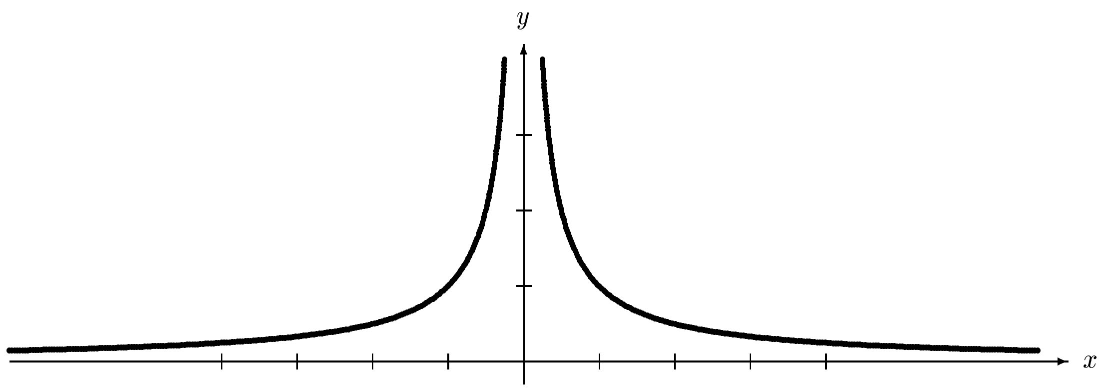


Abbildung 4.4: $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

E $f(x)$ ist an der Stelle x_0 **wesentlich unstetig**, wenn mindestens einer der beiden einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ wesentlich nicht existiert.

z.B.: $\boxed{f(x) = \sin 1/x}$ an der Stelle $x_0 = 0$:

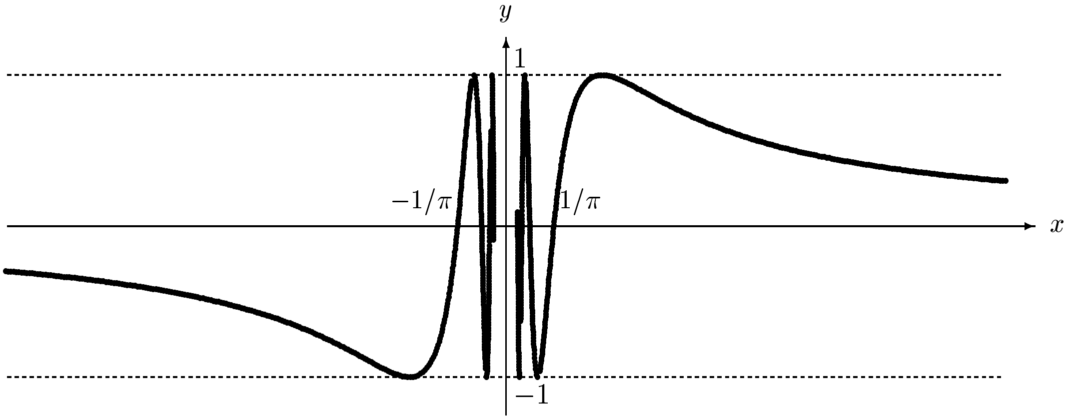


Abbildung 4.5: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Dass diese Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ wesentlich unstetig ist, kann man *rechnerisch* nachweisen durch das Auffinden von zwei verschiedenen Folgen $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $(\bar{x}_n)_{\mathbb{N}}$ mit

$x_n \to 0+$, $\bar{x}_n \to 0+$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\bar{x}_n)$, wie z.B.: $x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ mit $f(x_n) = \sin\left(n\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\bar{x}_n = \dfrac{2}{(4n+3)\pi}$ mit $f(\bar{x}_n) = \sin\left(n\cdot 2\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$.

4.C Konvergenz von Zahlenreihen.

4.4

Eine **Zahlenreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n := \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ ist (eigentlich oder uneigentlich) **konvergent**, wenn die Folge ihrer N–ten Partialsummen $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ (eigentlich bzw. uneigentlich) konvergiert; die eigentliche Konvergenz wird durch die Schreibweise: $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right| < \infty$ zum Ausdruck gebracht.

Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ **konvergiert absolut**, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ihrer Absolutbeträge eigentlich konvergiert; in diesem Fall ist $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Das Symbol $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen: zum einen steht es für die Summationsaufgabe: *addiere alle a_n für $n \in \mathbb{N}_0$*, zum anderen steht es für das Ergebnis dieser Summationsaufgabe, falls es ein Ergebnis gibt. Wenn diese Summationsaufgabe kein (eigentliches oder uneigentliches) Ergebnis liefert, dann sagt man, diese Reihe ist **(wesentlich) divergent.**

z.B.: Die N–ten Partialsummen der **geometrischen Reihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ sind die N–ten geometrischen Summen (s. Nr. 1.13):

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}, & \text{für } q \neq 1 \, , \\ (N+1) \, , & \text{für } q = 1 \, , \end{array} \right\} \quad \underset{(N \to \infty)}{\longrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{1-q} \, , \text{ falls } |q| < 1 \, , \\ +\infty \, , \text{ falls } q \in \mathbb{R} \, , \; q \geq 1 \, , \\ \text{wesentlich divergent sonst.} \end{array} \right.$$

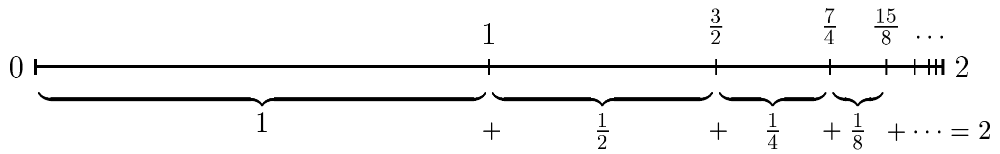
Damit erhält man:

4.5

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{1-q} \, , \text{ falls } |q| < 1 \, , \\ +\infty \, , \text{ falls } q \in \mathbb{R} \, , \; q \geq 1 \, , \\ \text{wesentlich divergent für alle anderen } q \in \mathbb{C} \, . \end{array} \right.}$$

geometrische Reihe

z.B.: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$:



4.6

Für jede *eigentlich* konvergente Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist $\boxed{a_n \to 0 \;\; (n \to \infty)}$, aber i.a. *nicht umgekehrt (!)*:
wenn $a_n \to 0 \;\; (n \to \infty)$, dann ist *nicht notwendig* die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

z.B.: da die Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ für alle $a \in \mathbb{C}$ eigentlich konvergiert (gegen e^a, s. Lektion 5), ist $\boxed{\dfrac{a^n}{n!} \to 0 \;\; (n \to \infty) \quad \forall a \in \mathbb{C}}$; andererseits ist die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergent ($= +\infty$, s.u.), obwohl $\dfrac{1}{n} \to 0 \;\; (n \to \infty)$.

4.D Konvergenzkriterien für Zahlenreihen.

4.7

Majorantenkriterium für Zahlenreihen:

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ und $|a_n| \leq b_n \ \forall n \geq n_0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (eigentlich und absolut) und es ist: $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \left|\sum_{n<n_0} a_n\right| + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Wenn dagegen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ und $a_n \geq b_n \ \forall n \geq n_0$, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

z.B.:

(a) Für $a_n = (2^{-n} \cdot \cos n\omega)$ ist $|a_n| \leq 2^{-n}$, somit:
$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n} \cdot \cos n\omega)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{\text{s.o.}}{=} 2$, d.h.: $-2 \leq \sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n} \cdot \cos n\omega) \leq 2$. Man kann den Wert S dieser Reihe mit Hilfe der Euler'schen Formel (s. Lektion 14) genau ausrechnen:
$S = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n} \cdot \cos n\omega) = \frac{4 - 2\cos\omega}{5 - 4\cos\omega}$; damit bekommt man: $\frac{1}{2} \leq S \leq \frac{2}{3}$.

(b) Die Partialsummen S_N der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sind die harmonischen Summen;

für diese hat man: $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2}$,

$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{3}{2}$,

usw.: $S_{2^N} > 1 + \frac{N}{2} \to +\infty \ (N \to \infty)$; damit ist der Wert dieser Reihe nicht endlich:

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty}$ **(harmonische Reihe)**

4.8

Das Quotienten– und Wurzelkriterium für Zahlenreihen:

Wenn es eine Zahl $q < 1$ und einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ bzw. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \ \forall n \geq n_0$, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent (sogar absolut); wenn dagegen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ bzw. $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \ \forall n \geq n_0$, dann divergiert diese Reihe (im Fall $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ gegen $+\infty$) .

z.B.: Sei $a_n = \left\{ \begin{array}{ll} 2^{-n} & \text{für gerade } n\,, \\ 3^{-n} & \text{für ungerade } n \end{array} \right\}$, dann ist:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{2}{3} < 1 & \text{für gerade } n\,, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^n > 1 & \text{für ungerade } n \end{array} \right\} :$$

das Quotientenkriterium gibt keine Auskunft über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} & \text{für gerade } n\,, \\ \frac{1}{3} & \text{für ungerade } n \end{array} \right\} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

aus dem Wurzelkriterium folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die **spezielle Form des Quotienten– und Wurzelkriteriums** ist in vielen Fällen ausreichend und ist wesentlich bequemer zu handhaben:

4.9

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eigentlich konvergent (sogar absolut);

wenn dagegen $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ bzw $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dann divergiert diese Reihe.

(Dieses Kriterium gibt keine Auskunft über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe, wenn die Grenzwerte $= 1$ sind oder wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \cdots$ wesentlich nicht existieren!)

z.B.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$: mit $a_n = \frac{n!2^n}{n^n}$ hat man:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!2^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!2^n} = 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1 :$$

damit ist diese Reihe (eigentlich) konvergent.

Dagegen ergibt sich für die harmonische Reihe mit $a_n = \frac{1}{n}$ (s.o.) :

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ für $n \to \infty$, so dass weder das Quotienten– noch das Wurzelkriterium Auskunft darüber gibt, ob sie konvergiert oder nicht.

4.10

Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen:

Ist $(a_n)_{\mathbb{N}}$ eine *positive* und *monoton fallende* Nullfolge, so konvergiert die **alternierende Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (eigentlich, aber i.a. *nicht absolut*!).

z.B.: Wegen $0 < \frac{1}{n} \searrow 0 \;\; (n \to \infty)$, ist die **alternierende harmonische Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (eigentlich) konvergent:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2}$$ (s. die Logarithmus–Reihe in Lektion 10).

Diese Reihe konvergiert *nicht absolut*, denn die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

4.11 **Cauchy–Kriterium:**

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann (eigentlich) konvergent,
wenn die Folge $(S_n)_{\mathbb{N}}$ ihrer n–ten Partialsummen **in sich konvergent** (also eine **Cauchyfolge**) ist, d.h. wenn $\lim\limits_{N\to\infty} \left| \sum\limits_{n=N}^{N+k} a_n \right| = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(**Bemerkung:** Dieses **Cauchy–Kriterium** für Zahlenreihen ist nur eine Neuformulierung des bereits in Nr. 3.13 formulierten **Cauchy–Kriteriums** für Zahlenfolgen. In diesem Kriterium kommt eine wesentliche Eigenschaft (die **Vollständigkeit**) des Körpers $\mathbb{R}$ der **reellen** Zahlen und ebenso des Körpers $\mathbb{C}$ der **komplexen** Zahlen zum Ausdruck:

> Jede in sich konvergente Folge oder Reihe reeller bzw. komplexer Zahlen ist eigentlich konvergent mit reellem bzw. komplexem Grenzwert:

In $\mathbb{Q}$ ist das nicht richtig: z.B. ist die Folge $(S_N)_{\mathbb{N}}$ der endlichen Partialsummen $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ *rational* und *in sich konvergent*, aber der Grenzwert $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ist *nicht rational*: innerhalb $\mathbb{Q}$ ist die Folge $(S_N)_{\mathbb{N}}$ also *nicht* konvergent, obwohl sie eine Cauchy–Folge ist! Das Cauchy–Kriterium gilt in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind **vollständig**), aber nicht in $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ ist *nicht* vollständig).)

5 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen.

Stichpunkte: Exponentialreihe und Exponentialfunktion $e^x = \exp(x)$, Cauchyprodukt von zwei Reihen, Rechenregeln für e^x. Wachstumsprozesse. 1-1–Funktionen und ihre Umkehrfunktionen. $\ln x$, a^x, $\log_a x$, Rechenregeln; halblogarithmisches Koordinatenpapier.

5.A Das Cauchy–Produkt von zwei Zahlenreihen.

5.1 Wenn die beiden Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ **konvergieren** und mindestens eine von beiden **absolut**, dann ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \textbf{(Cauchy–Produkt).}$$

Wenn *beide* Reihen absolut konvergieren, dann konvergiert auch das Cauchy–Produkt absolut.

z.B.: Die **Exponentialreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist aufgrund des Quotientenkriteriums Nr. 4.9 für *beliebige* $x \in \mathbb{C}$ eigentlich und absolut konvergent, denn für alle $x \in \mathbb{C}$ und mit $a_n := \frac{x^n}{n!}$ hat man:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \quad (n \to \infty)\,.$$

5.2 Die somit für alle $x \in \mathbb{C}$ definierte Grenzfunktion dieser Reihe bezeichnet man als **Exponentialfunktion** $\exp(x)$:

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{für alle } x \in \mathbb{C})}$$

Exponentialreihe / Exponentialfunktion

Mit Hilfe des Cauchyproduktes und der binomischen Formel Nr. 1.14 erhalten wir die **Regel:**

$$\begin{aligned}\exp(x)\cdot\exp(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)\,.\end{aligned}$$

(Weitere Regeln folgen im nächsten Abschnitt!)

Das **Cauchy–Produkt** von zwei Reihen ist nicht etwa ein besonderes Produkt, das anderen als den üblichen Regeln genügt, sondern der Name "Cauchy–Produkt" steht lediglich für eine spezielle (in der Regel bequeme) **Anordnung** der Summanden des Produkts (die möglich ist, wenn mindestens eine der beiden Reihen **absolut** konvergiert! (s.u. das Gegenbeispiel)):

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_b\right) = & & a_0b_0 & + & a_0b_1 & + & a_0b_2 & + & a_0b_3 & + & a_0b_4 & + & \cdots \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 & + & a_1b_0 & + & a_1b_1 & + & a_1b_2 & + & a_1b_3 & + & \cdots & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & + & a_2b_0 & + & a_2b_1 & + & a_2b_2 & + & \cdots & & & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\
 & + & a_3b_0 & + & a_3b_1 & + & \cdots & & & & & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & & & & & & \\
 & + & a_4b_0 & + & \cdots & & & & & & & & \\
 & & & \swarrow & & & & & & & & & \\
 & + & \cdots & & & & & & & & & & \\
= & & a_0b_0 & + & & & & & & & & & \\
 & + & a_0b_1 & + & a_1b_0 & + & & & & & & & \\
 & + & a_0b_2 & + & a_1b_1 & + & a_2b_0 & + & & & & & \\
 & + & a_0b_3 & + & a_1b_2 & + & a_2b_1 & + & a_3b_0 & + & & & \\
 & + & a_0b_4 & + & a_1b_3 & + & a_2b_2 & + & a_3b_1 & + & a_4b_0 & + & \\
 & + & \cdots & & & & & & & & & & \\
= & & \multicolumn{11}{l}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ .}
\end{array}
$$

Die **absolute Konvergenz** mindestens einer der beiden Reihen ist unverzichtbar! Wenn *beide* Reihen zwar eigentlich, aber nicht absolut konvergieren, kann es sein, dass ihr Produkt nicht mit der durch das Cauchy–Produkt vorgegebenen Reihenfolge der Summanden darstellbar ist!

z.B.: Sei $a_0 = 0$ und $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ für $n \geq 1$.

Da die Folge $(1/\sqrt{n})_{\mathbb{N}}$ eine positive und monoton fallende Nullfolge ist, besitzt die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ nach dem Leibniz–Kriterium einen eigentlichen Grenzwert S . Damit ist natürlich auch das Produkt $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right) = S^2$ endlich.

Das Cauchy–Produkt dieser Reihe mit sich selbst ist dagegen *nicht* konvergent
(ist sogar wesentlich divergent) ! :

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, dann ist $c_0 = c_1 = 0$ und für $n \geq 2$ ist:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k-1}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \qquad \text{somit:}$$

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1\cdot(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot(n-2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot 1}} \geq \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} = \sqrt{n-1} \overset{(n\to\infty)}{\to} \infty \, .
\end{aligned}
$$

5.B Die Exponentialfunktion $e^x = \exp(x)$.

5.3 Man kann die **Euler' sche Zahl** e mit Hilfe der Exponentialreihe bekommen:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \exp(1) =$$

$$= 2.71828\,18284\,59045\,23536\,0287\ldots ,$$

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = \exp(-1) .$$

Offenbar ist $\exp(0) = 1 = e^0$. Zusammen mit der oben erhaltenen Regel:
$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$ ergibt sich:
$\exp(n) = e^n$ und $\exp(-n) = e^{-n} = \dfrac{1}{e^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ und damit sogar:

5.4 $\boxed{\exp(r) = e^r \text{ für jede rationale Zahl } r}$.

5.5 Aus diesem Grund werden *beliebige* Potenzen e^x $(x \in \mathbb{C})$ der Euler'schen Zahl e durch $e^x = \exp(x)$ *definiert*:

$$\boxed{e^x := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{C})}$$

Exponentialfunktion (zur Basis e) oder kurz: **e–Funktion** .

Für diese Potenzen gelten die üblichen **Potenzregeln** :

$e^0 = 1,\ e^1 = e,\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y,\ e^{x\cdot y} = \left(e^x\right)^y,\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ und $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Viele wichtige Funktionen lassen sich mit Hilfe dieser e–Funktion definieren und beschreiben, wie z.B.:
die **allgemeine Exponentialfunktion** a^x (s.u.) , **Logarithmen** (s.u.) , die **hyperbolichen Funktionen** $\sinh x$, $\cosh x$, ... und ihre Umkehrfunktionen $\operatorname{Arsinh} x$, $\operatorname{Arcosh} x$, ... (Lektion 6)
— sogar die **trigonometrischen Funktionen** $\sin x$, $\cos x$, ... , wenn man die **Euler'sche Formel** zu Hilfe nimmt (Lektion 14).

Die meisten der gängigen **Ableitungen** lassen sich auf die Ableitung von e^x zurückführen und die **Grenzwerte** vieler Funktionen können bequem mit Hilfe entsprechender Grenzwerte von e^x bestimmt werden.

5.C Wachstums– und Zerfallsprozesse.

Die Euler'sche Zahl e ist nicht nur mathematisch von besonderem Interesse:

Jeder **Wachstums– oder Zerfallsprozess** lässt sich — erfahrungsgemäß! — mit einer Funktion $f(t)$ beschreiben, deren **relative Änderung** $\frac{\Delta f}{f}$ **zur Änderung** Δt **von** t **ungefähr proportional** ist:

$$\boxed{\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{f(t)} \approx \lambda \cdot \Delta t}$$ mit einer Proportionalitätskonstanten λ

(umso genauer, je kleiner — dem Betrage nach — die Zeitdifferenz Δt ist).

Unterteilt man für $t \neq 0$ das Intervall zwischen 0 und t in n gleiche Teilintervalle der Größe $\Delta t = \frac{t}{n}$ (n möglichst groß), so ergibt sich der Reihe nach:

$f(\Delta t) - f(0) \approx \lambda \cdot f(0) \cdot \Delta t$, also: $f(\Delta t) \approx f(0) \cdot \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)$,

$f(2\,\Delta t) - f(\Delta t) \approx \lambda \cdot f(\Delta t) \cdot \Delta t$, also $f(2\,\Delta t) \approx f(\Delta t)\left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right) \approx f(0) \cdot \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^2$,

usw., bis: $f(t) = f(n \cdot \Delta t) \approx f(0) \cdot \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n$:

das gilt umso genauer, je kleiner $|\Delta t|$, d.h. je größer n ist.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{\lambda t}$ (siehe Nr. 3.10) erhält man im Grenzfall $n \to \infty$:

$$\boxed{f(t) = f(0) \cdot e^{\lambda t}}\ .$$

Die Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$ sind also ganz "natürliche" Funktionen; insbesondere ist die Euler'sche Zahl e eine wahre Naturkonstante.

Aus der Beziehung: $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \approx \lambda \cdot f(t)$ folgt (mit $\Delta t \to 0$) noch:

$f'(t) = \lambda \cdot f(t) = \lambda \cdot f(0) \cdot e^{\lambda t}$, somit: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right) = \lambda \cdot e^{\lambda t}}$.

$e^z \neq 0 \; \forall \, z \in \mathbb{C}$,
$e^x > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$;
$e^x \to \infty$ für $x \to \infty$,
$e^x \to 0+$ für $x \to -\infty$.

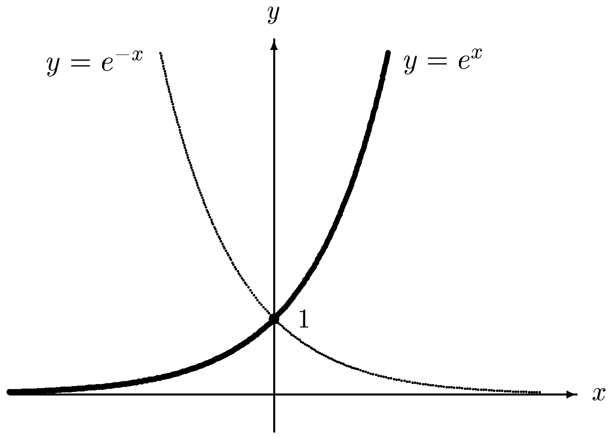


Abbildung 5.1: **Die e–Funktion.**

5.D Ein–eindeutige Funktionen und ihre Umkehrfunktionen.

5.6 Eine Funktion $f(x)$ ist **ein–eindeutig** oder **umkehrbar–eindeutig** oder kurz: **1–1** ,
wenn $\boxed{f(x) \neq f(\bar{x}) \text{ für alle } x\,,\ \bar{x} \text{ mit } x \neq \bar{x}}$.

z.B.: Die beiden Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{-x}$ sind 1–1 ; dagegen ist die Funktion $h(x) = \sin x$ *nicht* 1–1 ; sie ist jedoch **1–1 auf jedem der Intervalle**
$\ldots\,, \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \,, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \,, \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \,, \ldots$

5.7 **Jede streng monotone (wachsende oder fallende) Funktion ist 1–1 .**
Die Umkehrung hiervon gilt i.a. nur, wenn f stetig ist:
Jede stetige, 1–1 Funktion f ist streng monoton.

5.8 Zu jeder ein–eindeutigen Funktion f gibt es eine eindeutig definierte **Umkehrfunktion** (oder **Inverse**) f^{-1} ; diese ist definiert durch:

$\mathcal{D}(f^{-1}) := \mathcal{R}(f)\,,\ \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)\,,\ \boxed{f^{-1}(x) = y \;:\Leftrightarrow x = f(y)}$.

5.9 Man erhält die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ zu $y = f(x)$

[1] **rechnerisch**, wenn man die Gleichung $x = f(y)$ nach y **auflöst**,

[2] **graphisch**, wenn man die Kurve $y = f(x)$ an der Winkelhalbierenden $y = x$ **spiegelt**.

z.B.: Sei $\boxed{f(x) = \frac{2x-1}{4x+1}}$. Um die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ zu erhalten, muss man die Gleichung $x = f(y)$ nach y auflösen:

$x(4y+1) = 2y - 1 \Leftrightarrow 4xy + x - 2y = -1 \Leftrightarrow y(4x-2) = -(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{x+1}{4x-2}$, d.h.:

$\boxed{f^{-1}(x) = -\frac{x+1}{4x-2}}$. Als **Probe** kann überprüft werden, ob $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ ist:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{2f^{-1}(x)-1}{4f^{-1}(x)+1} = \frac{-2\,\frac{x+1}{4x-2} - 1}{-4\,\frac{x+1}{4x-2} + 1} = \frac{-2(x+1)-(4x-2)}{-4(x+1)+4x-2} = \frac{-6x}{-6} = x :$$

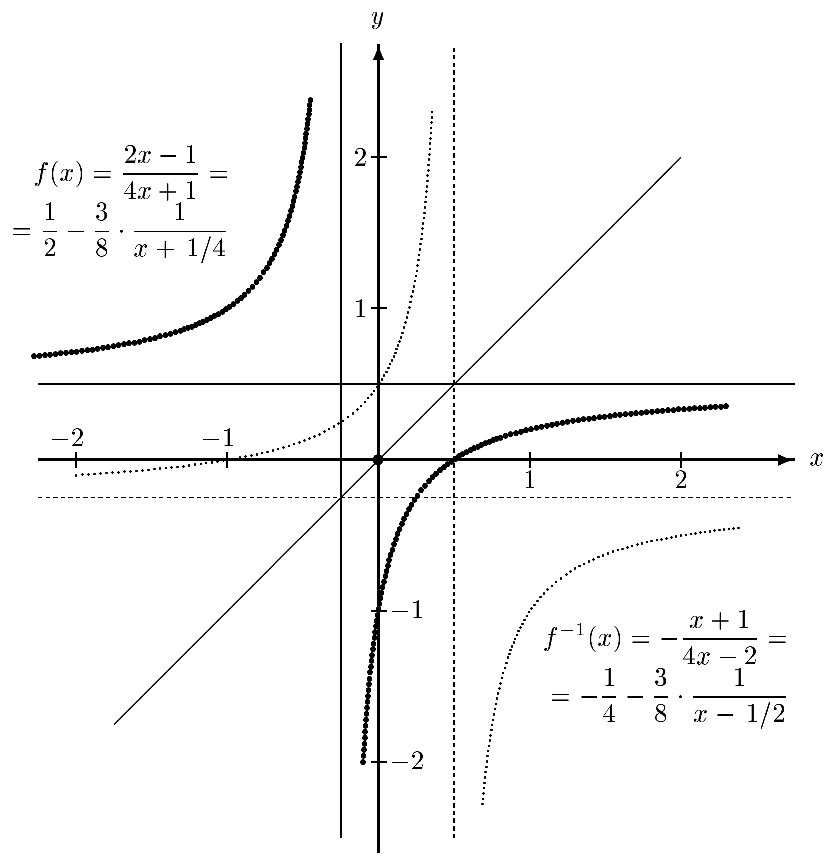


Abbildung 5.2: **Spiegelung an der Winkelhalbierenden.**

Die **Inverse** $f^{-1}(x)$ darf keinesfalls

mit der **Reziproken** $\dfrac{1}{f(x)}$ verwechselt werden!

z.B.: (s.o.) die Reziproke zu $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x+1}$ ist $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{4x+1}{2x-1}$.

5.E Logarithmus und allgemeine Exponentialfunktion.

5.10 $\boxed{y = \ln x \;:\Leftrightarrow,\; e^y = x \quad (x > 0)}$ **natürlicher Logarithmus** (Umkehrfunktion zu $y = e^x$)

Die **Umkehrfunktion der e–Funktion** $y = f(x) = e^x$ ist der **natürliche Logarithmus** $y = f^{-1}(x) = \ln x$:

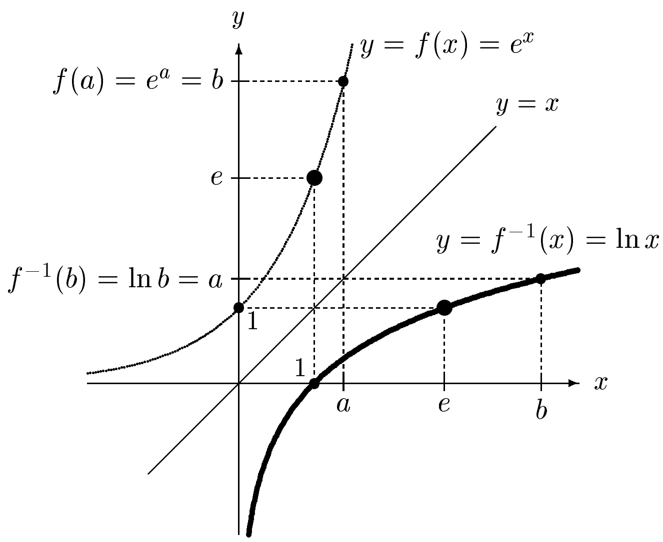


Abbildung 5.3: **Der natürliche Logarithmus.**

5.11

$y = \ln x$ **ist nur für** $x > 0$ **definiert!**

$\ln e^x = x = e^{\ln x}$, insbesondere: $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$

$\ln(a \cdot b) = \ln|a| + \ln|b|$ (für $a \cdot b > 0$), $\ln \dfrac{a}{b} = \ln|a| - \ln|b|$ $\left(\text{für } \dfrac{a}{b} > 0\right)$

$\ln a^b = b \cdot \ln a \quad (a > 0)$ z.B.: $\ln a^2 = 2 \cdot \ln|a|$ (!)

$\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$, $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$

5.12 $\boxed{a^x := e^{x \cdot \ln a} \quad (a > 0)}$ **allgemeine Exponentialfunktion** (zur Basis a)

5.13 Hiermit lassen sich beliebige Potenzen mit variablen Exponenten auf die e–Funktion zurückführen:

$$\boxed{\big(f(x)\big)^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln f(x)} \quad \text{falls } f(x) > 0 \text{ ist}} \; !$$

Diese Regel ist besonders dann nützlich, wenn Ableitungen oder Grenzwerte von Funktionen der Form $h(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)}$ zu bestimmen sind!

5.14 $\boxed{y = \log_a x \;:\Leftrightarrow\; a^y = x \quad (a, x > 0\,,\; a \neq 1)}$ **Logarithmus zur Basis a** (Umkehrfunktion zu $y = a^x$)

5.15

$$!!\ \boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a, x > 0\,,\; a \neq 1)}\ !!$$

$\log_a a^x = x$, insbesondere: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = \left\{ \begin{array}{l} -\infty \text{ für } a > 1\,, \\ +\infty \text{ für } a < 1 \end{array} \right\}, \quad \lim_{x \to \infty} \log_a x = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ für } a > 1\,, \\ -\infty \text{ für } a < 1 \end{array} \right\}$$

Der Logarithmus zur Basis 10 (der "10–er–Logarithmus", auch Brigg'scher oder dekadischer Logarithmus genannt) ist der in der Schule verwendete Logarithmus:

5.16 $\boxed{\lg x := \log_{10} x \quad (x > 0)}$ **dekadischer** oder **Brigg'scher Logarithmus**

z.B.: hat man mit (dem Betrage nach) sehr großen oder sehr kleinen Zahlen zu tun, bei denen der Taschenrechner streikt, kann man vorteilhaft den dekadischen Logarithmus verwenden:

$$\frac{12^{2000}}{7^{5000}} = \frac{10^{2000 \cdot \lg 12}}{10^{5000 \cdot \lg 7}} = 10^{2000 \cdot \lg 12 - 5000 \cdot \lg 7} = 10^{-2067.127708\ldots} = 10^{-2068} \cdot 10^{0.872292\ldots} =$$

$$= 7.45233\ldots \cdot 10^{-2068} = 0.\underbrace{00000\ldots00}_{2067 \text{ Nullen}}745233\ldots\ .$$

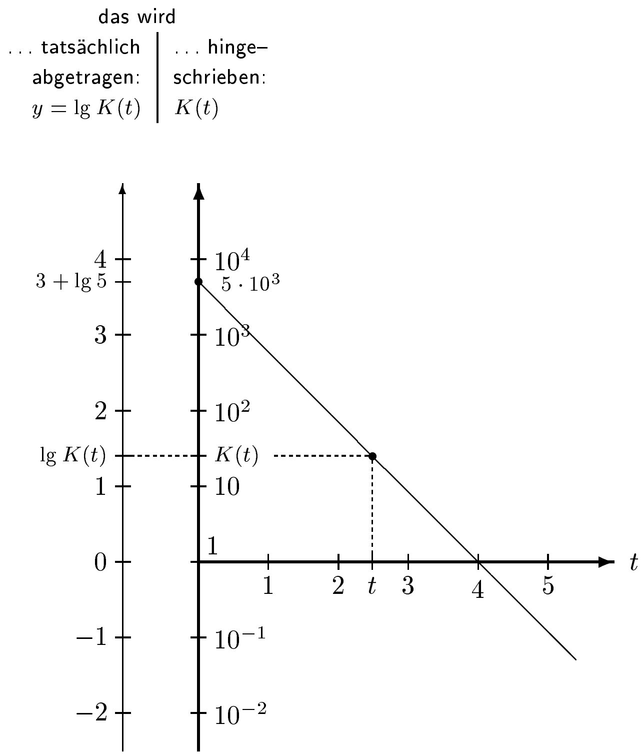
5.F Halblogarithmisches Koordinatensystem.

Soll eine (z.B. zeitabhängige,) *positive* Funktion $K = K(t)$ skizziert werden, deren Werte einerseits so nahe bei Null liegen, dass sie "mit bloßem Auge" nicht mehr aufgezeichnet werden können, andererseits wieder so groß , dass sie nicht mehr auf das Blatt passen, so verwendet man sinnvollerweise **halblogarithmisches Koordinatenpapier:**

hier ist die Abszisse (t) normal und die Ordinate (K) dekadisch–logarithmisch unterteilt,

d.h. auf der Ordinate wird zwar der Originalwert $K(t)$ hingeschrieben, aber nur der Logarithmus $y = \lg K(t)$ abgetragen:

man schreibt also z.B. 10^{-2} oder 10^2 oder 10^3 , ... hin, trägt aber nur $\lg 10^{-2} = -2$ bzw. $\lg 10^2 = 2$ bzw. $\lg 10^3 = 3$, ... ab.



Neben dem genannten Vorteil, sehr kleine und sehr große Funktionswerte "sichtbar" darstellen zu können, hat ein halblogarithmisches Koordinatenpapier für Naturwissenschaftler, die mit Exponentialfunktionen zu tun haben, noch eine weitere praktische Bedeutung:

5.17

> Jede **Exponentialfunktion** wird in einem halblogarithmischen Koordinatensystem durch eine **Gerade** dargestellt.
>
> Umgekehrt ist jede Funktion, die in einem halblogarithmischen Koordinatensystem durch eine **Gerade** dargestellt wird, eine **Exponentialfunktion** .

z.B.: die oben in der Skizze als Gerade dargestellte Funktion $K(t)$ hat mit $b = 3 + \lg 5$ im t, y–Koordinatensystem die Gleichung: $y = b - \dfrac{b}{4}\, t$. Wegen $y = \lg K(t)$ ergibt sich:

$K(t) = 10^{b-0.25\,bt} = 10^b \cdot 10^{-0.25\,bt} = 5 \cdot 10^3 \cdot e^{-0.25\,bt \cdot \ln 10} = a \cdot e^{-\lambda\, t}$,

wobei $a = 5 \cdot 10^3$ und $\lambda = 0.25\,(3 + \lg 5\,)\,\ln 10 \approx 2.1293$.

6 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen.

Stichpunkte: Trigonometrische Funktionen und arcus–Funktionen, Additionstheoreme, Pythagoras am Einheitskreis; hyperbolische Funktionen und area–Funktionen und entsprechende Formeln. Kreise, Ellipsen und Hyperbeln: geschlossene Darstellung und übliche Parameterdarstellung.

In diesem Kurs — wie auch überwiegend in der Praxis — werden

Winkel im Bogenmaß (rad)

angegeben! Hierbei entspricht dem vollen Winkel ($360°$) der Umfang 2π eines Kreises vom Radius 1. Entgegen dem Uhrzeigersinn gemessene Winkel sind positiv, Winkel im Uhrzeigersinn sind negativ. z.B.: der Winkel $\pi/2$ ist der rechte Winkel ($90°$), und die zweite Winkelhalbierende schließt mit der positiven x–Achse den Winkel $-\pi/4$ ($-45°$) ein.

6.A Die trigonometrischen Funktionen.

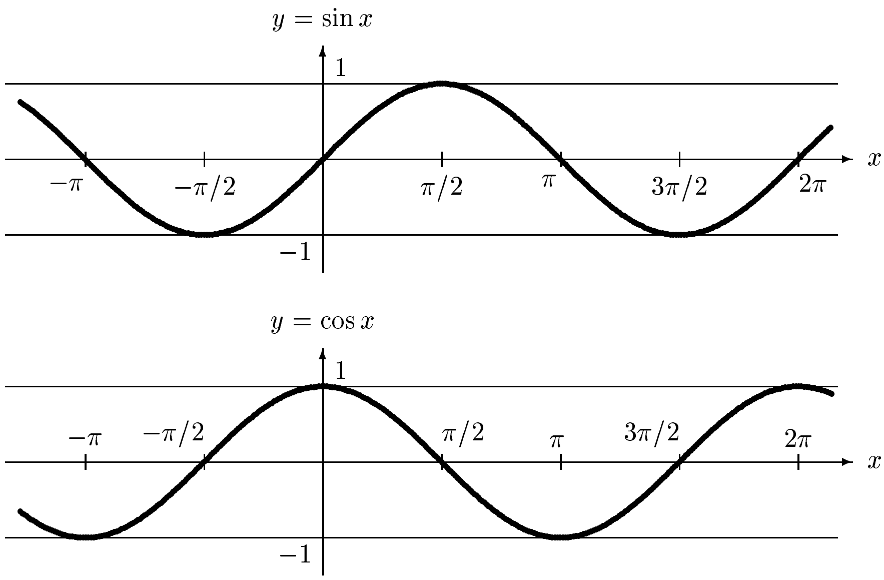


Abbildung 6.1: **Sinus und Cosinus.**

6.1 **Gängige Werte** (Merk–Schema)

$\sin 0$	$=$	$\sqrt{0}/2$	$=$	$\cos \pi/2$
$\sin \pi/6$	$=$	$\sqrt{1}/2$	$=$	$\cos \pi/3$
$\sin \pi/4$	$=$	$\sqrt{2}/2$	$=$	$\cos \pi/4$
$\sin \pi/3$	$=$	$\sqrt{3}/2$	$=$	$\cos \pi/6$
$\sin \pi/2$	$=$	$\sqrt{4}/2$	$=$	$\cos 0$

Die entsprechenden Werte für den Tangens und den Cotangens erhält man aus den Beziehungen:

6.2 $\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$ und $\boxed{\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$:

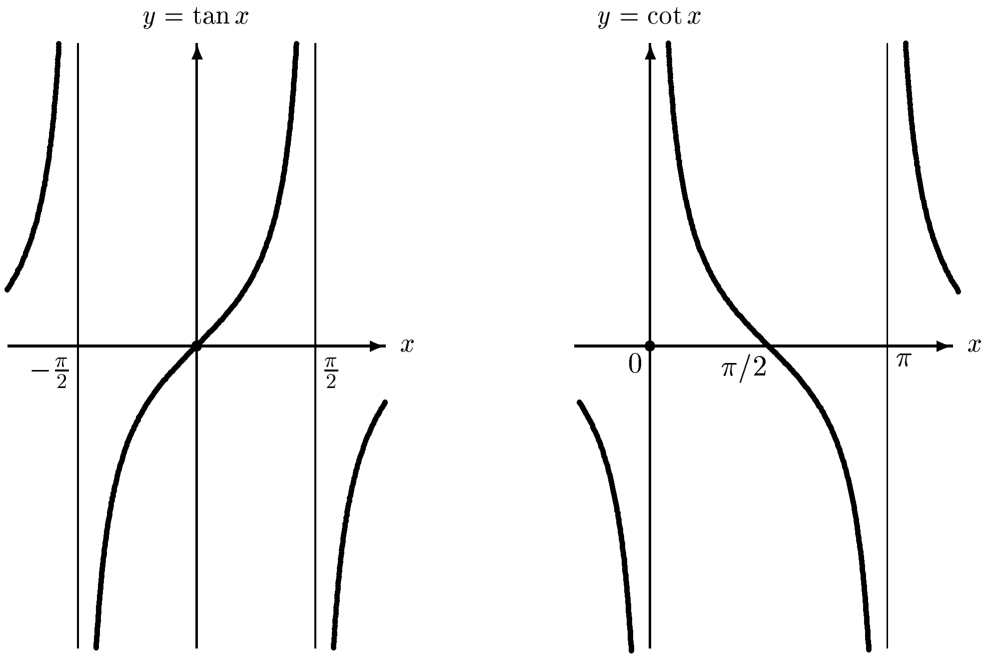


Abbildung 6.2: **Tangens und Cotangens.**

Die folgende Formel ist immer wieder von großem Nutzen:

6.3 $\boxed{\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x}}$ **Satz des Pythagoras am Einheitskreis**

z.B.:

für $x \in [0, \pi]$ ist $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$,

für $x \in [\pi, 2\pi]$ ist $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$;

für $x \neq (2k+1) \cdot \pi/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \, .$$

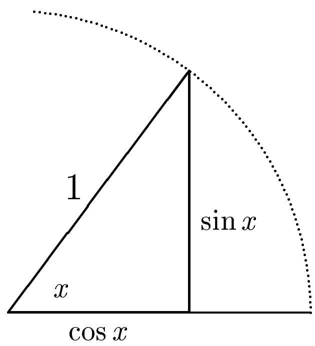


Abbildung 6.3: **Pythagoras am Einheitskreis.**

6.4 $\cos x$ ist **gerade**, d.h.: $\boxed{\cos(-x) = \cos x \;\; \forall\, x}$,

$\sin x$ ist **ungerade**, d.h.: $\boxed{\sin(-x) = -\sin x \;\; \forall\, x}$.

6.5 **Additionstheoreme:**

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}}$$

z.B.:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm \pi/2) &= \sin x \cdot \cos \pi/2 \pm \cos x \cdot \sin \pi/2 = \\ &= \pm \cos x\,, \\ \cos(x \pm \pi/2) &= \cos x \cdot \cos \pi/2 \mp \sin x \cdot \sin \pi/2 = \\ &= \mp \sin x\,; \end{aligned}$$

mit $\psi = \varphi - \pi/2$ ist

$\sin(\omega t - \psi) = \sin((\omega t - \varphi) + \pi/2) = \cos(\omega t - \varphi)$.

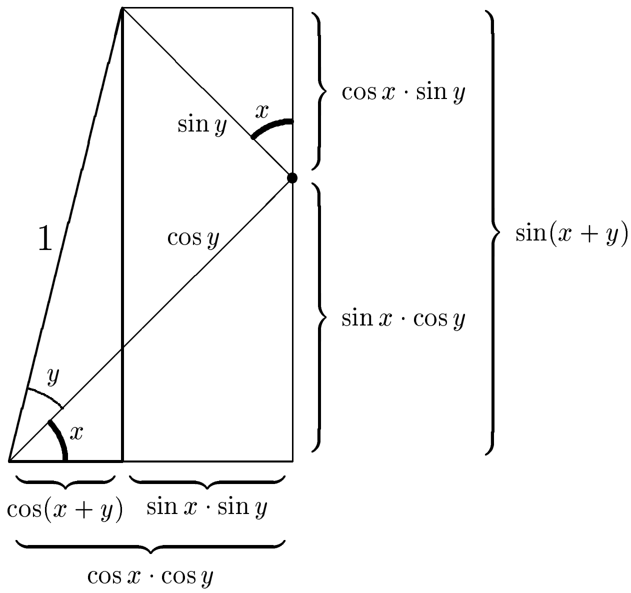


Abbildung 6.4: **Additionstheoreme für sin und cos.**

6.B Die arcus–Funktionen.

Die **arcus–Funktionen** sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen **(alle Winkel im Bogenmaß !):**

6.6

arcus–Sinus:	$y = \arcsin x = \sin^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \sin y$
	Hauptwert für $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
arcus–Cosinus:	$y = \arccos x = \cos^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \cos y$
	Hauptwert für $0 \le y \le \pi$
arcus–Tangens:	$y = \arctan x = \tan^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \tan y$
	Hauptwert für $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
arcus–Cotangens:	$y = \operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \cot y$
	Hauptwert für $0 < y < \pi$

Beachte:

[1] **keinesfalls** die *inversen* Funktionen $\sin^{-1} x = \arcsin x$, $\cos^{-1} x = \arccos x$, ... mit den *reziproken* Funktionen $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$, $(\cos x)^{-1} = \dfrac{1}{\cos x}$, ... verwechseln!

[2] Sämtliche arcus–Funktionen sind **unendlich–vieldeutig!** Daher werden in Formelsammlungen und Lehrbüchern — wie auch in unserem Kurs — *in der Regel* stillschweigend nur deren **Hauptwerte** benutzt: wenn also von einer arcus–Funktion die Rede ist, so ist tatsächlich nur ihr *Hauptwert* gemeint (sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird)!

[3] **Taschenrechner** liefern stets nur die **Hauptwerte** der arcus–Funktionen
(mit [INV][sin], [INV][cos], ...)!

[4] Da stets $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$, sind die beiden Funktionen $\arcsin x$ und $\arccos x$ nur für $|x| \leq 1$ definiert!

[5] Mit dem Taschenrechner bekommt man den Hauptwert von **arc cot x** über die Beziehung:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \begin{cases} \arctan 1/x & \text{für } x > 0\,, \\ \pi/2 & \text{für } x = 0\,, \\ \pi + \arctan 1/x & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

6.7 **Grenzwerte** der Hauptwerte von $\arctan x$ und $\operatorname{arccot} x$:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0\,, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi} \;:$$

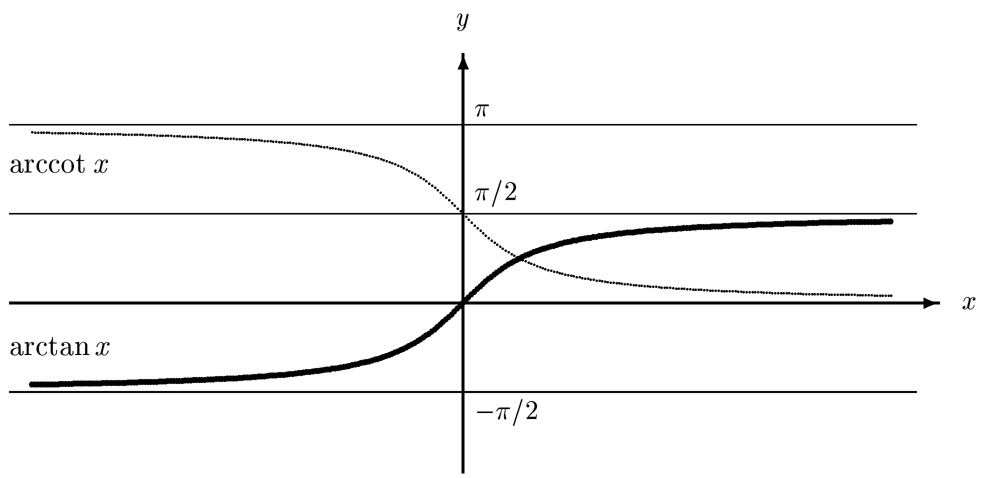


Abbildung 6.5: **Hauptwerte von arctan x und arccot x.**

z.B.: $f(x) = \sin x$ mit $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x$ mit dem Hauptwert des Arcussinus,
$g(x) = \tan x$ mit $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{3}$ $\Rightarrow g^{-1}(x) = \pi + \arctan x$ mit dem Hauptwert des Arcustangens.
(Man erhält die Graphen von $f^{-1}(x)$ und $g^{-1}(x)$ durch Spiegelung der entsprechenden Zweige von $\sin x$ bzw. $\tan x$ an der Winkelhalbierenden.)

6.C Die hyperbolischen Funktionen.

6.8

Definition der hyperbolischen Funktionen:

Sinus–hyperbolicus:	$\sinh x := \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})$
Cosinus–hyperbolicus:	$\cosh x := \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$
Tangens–hyperbolicus:	$\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
Cotangens–hyperbolicus:	$\coth x := \dfrac{1}{\tanh x}$

$y = \sinh x$ ist 1–1 auf $\mathcal{D}(\sinh) = \mathbb{R}$ und ist
ungerade: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$,
$\sinh 0 = 0$,
$\sinh x \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$;

$y = \cosh x$ ist jeweils 1–1 auf $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$ und
ist **gerade**: $\cosh(-x) = \cosh x$,
$\mathcal{D}(\cosh) = \mathbb{R}$, $\cosh 0 = 1$,
$\cosh x \to \infty$ für $x \to \pm\infty$;

Die Kurve $y = \cosh x$ wird auch **"Kettenlinie"** genannt, da jede an zwei Enden frei aufgehängte Kette einen Kurvenbogen beschreibt, der mit Hilfe des cosh ausgedückt werden kann.

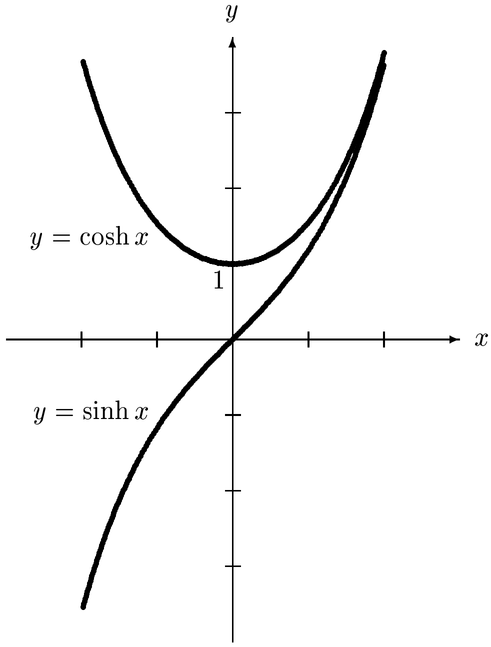


Abbildung 6.6: **sinh und cosh.**

$y = \tanh x$ ist 1–1 auf $\mathcal{D}(\tanh) = \mathbb{R}$, $|\tanh x| < 1\ \forall x \in \mathbb{R}$,
$\tanh 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x = 1 - 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = -1 + 0$,

$y = \coth x$ ist 1–1 auf $\mathcal{D}(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$\coth x > 1$ für $x > 0$,
$\coth x \to \infty$ für $x \to 0+$, $\coth x \to 1 + 0$ für $x \to \infty$,
$\coth x < -1$ für $x < 0$,
$\coth x \to -\infty$ für $x \to 0-$, $\coth x \to -1 - 0$ für $x \to -\infty$;

beide Funktionen sind **ungerade**: $y(-x) = -y(x)$.

6.9 **Additionstheoreme**:

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y\\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y\end{aligned}}$$

$$\boxed{(\cosh x + \sinh x)^n = e^{nx} = \cosh nx + \sinh nx}$$

6.10 !! $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x}$!! (vgl. mit Nr. 6.3 !)

Rechenbeispiele:

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\,,$$

$$\sinh 2x = \sinh(x+x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x\,,$$

$$\cosh 2x = \cosh(x+x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x\,,$$

$$\coth x + \tanh x = \frac{\cosh x}{\sinh x} + \frac{\sinh x}{\cosh x} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\sinh x \cdot \cosh x} = \frac{\cosh 2x}{\frac{1}{2}\sinh 2x} = 2 \coth 2x\,.$$

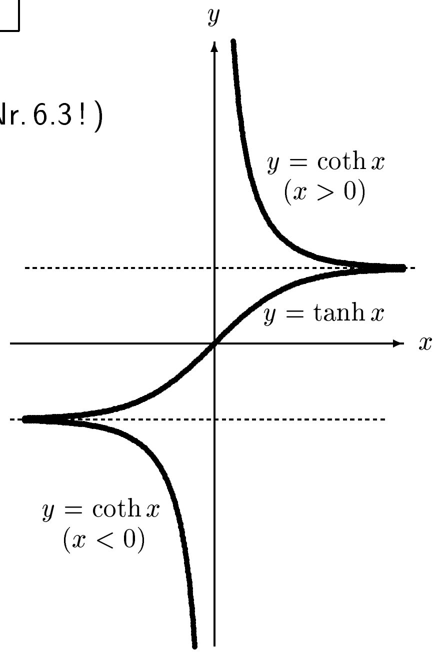


Abbildung 6.7: **tanh und coth.**

6.D Die area–Funktionen.

Die **area–Funktionen** sind die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen:

6.11

area–Sinus–hyperbolicus:	$y = \operatorname{Arsinh} x = \sinh^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \sinh y,$
area–Cosinus–hyperbolicus:	$y = \operatorname{Arcosh} x = \cosh^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \cosh y,$
area–Tangens–hyperbolicus:	$y = \operatorname{Artanh} x = \tanh^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \tanh y,$
area–Cotangens–hyperbolicus:	$y = \operatorname{Arcoth} x = \coth^{-1} x \;:\Leftrightarrow\; x = \coth y.$

6.12 Die area–Funktionen lassen sich mit Hilfe des **natürlichen Logarithmus'** ausdrücken:

$\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	für $x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{Arcosh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$	für $x \geq 1$ (s.u.)
$\operatorname{Artanh} x = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	für $\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arcoth} x = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	für $\lvert x\rvert > 1$

Beachte:

[1] Die Funktion $y = \operatorname{Arcosh} x$ ist **zweideutig** — im Gegensatz zu den anderen area–Funktionen, die alle *eindeutig* definiert sind:

$y = \operatorname{Arcosh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \geq 1$,

beschreibt mit '+' die Umkehrfunktion des rechten $(x \geq 0)$

und mit '–' die des linken Zweiges $(x \leq 0)$ von $y = \cosh x$:

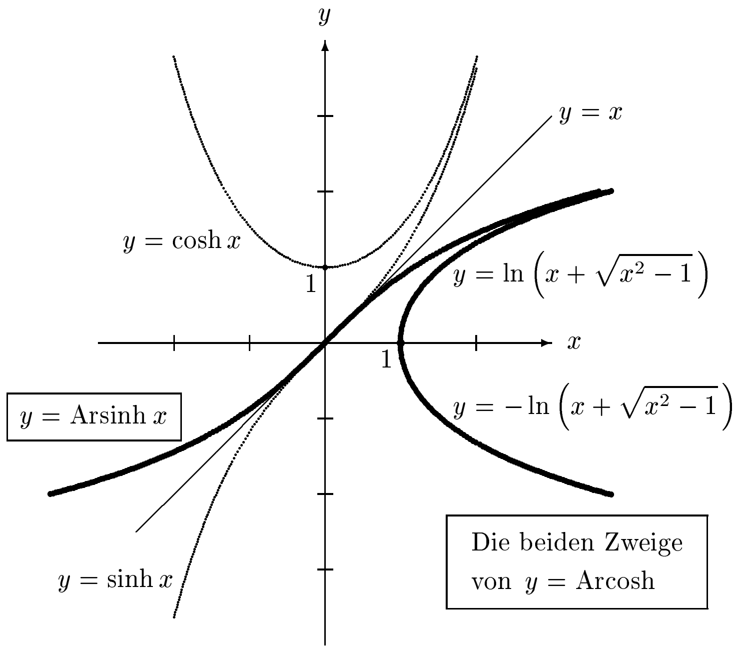


Abbildung 6.8: **Arsinh und Arcosh.**

(Es ist $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$!)

[2] Mit dem Taschenrechner bekommt man den **area–Cotangens–hyperbolicus** über:

$\boxed{\operatorname{Arcoth} x = \operatorname{Artanh} 1/x \quad (\text{für } |x| > 1)}$.

[3] Meistens werden die area–Funktionen **klein geschrieben:** ar sinh x , ar cosh x , . . . ; das sollte aber **niemals (!)** dazu verleiten, arc sinh x , arc cosh x . . . zu schreiben!

[4] **Keinesfalls** die *inversen* Funktionen $\sinh^{-1} x = \operatorname{Arsinh} x$, $\cosh^{-1} x = \operatorname{Arcosh} x$, . . . mit den *reziproken* Funktionen $(\sinh x)^{-1} = 1/\sinh x$, $(\cosh x)^{-1} = 1/\cosh x$, . . . verwechseln!

6.E Kreise.

Kreis mit Mittelpunkt $M(x_0|y_0)$ und Radius $r > 0$:

Mittelpunktsgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$;

explizite Darstellungen: $\left\{\begin{array}{l} y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \\[2ex] x = x_0 \pm \sqrt{r^2 - (y - y_0)^2} \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l}\text{oberer}\\ \text{unterer}\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l}\text{rechter}\\ \text{linker}\end{array}\right. \end{array}\right\}$ Halbkreis;

übl.Parameterdarstellung: $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + r\cos\varphi \\ y & = & y_0 + r\sin\varphi \end{array}\right\}$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$.

z.B.: für den zweiten Quadranten des Kreisbogens um $M(-2|4)$ vom Radius $r = 3$ haben wir die vier Darstellungen:

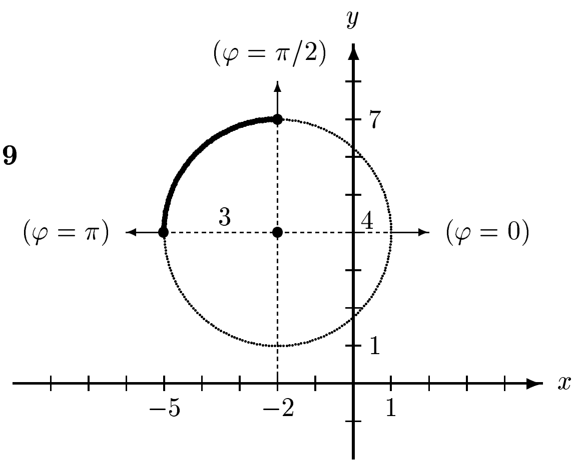
$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$ mit $-5 \le x \le -2,\ 4 \le y \le 7$;

$y = 4 + \sqrt{9 - (x+2)^2}$ mit $-5 \le x \le -2$;

$x = -2 - \sqrt{9 - (y-4)^2}$ mit $4 \le y \le 7$;

$\left\{\begin{array}{l} x = -2 + 3\cos\varphi \\ y = 4 + 3\sin\varphi \end{array}\right\}$ mit $\pi/2 \le \varphi \le \pi$.

Abbildung 6.9



6.F Ellipsen.

Ellipse mit Mittelpunkt $M(x_0|y_0)$ und den x–, y–Halbachsen $a > 0$ bzw. $b > 0$:

Mittelpunktsgleichung: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,;$$

explizite Darstellungen: $$\left\{\begin{array}{l} y = y_0 \pm \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_0)^2} \\[2ex] x = x_0 \pm \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-y_0)^2} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}\text{obere}\\ \text{untere}\\ \text{rechte}\\ \text{linke}\end{array}\right\} \text{Halbellipse;}$$

übl. Parameterdarstellung: $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_0 + a\cos\varphi \\ y &=& y_0 + b\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \text{mit } 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

z.B.: für den zweiten Quadranten des Ellipsenbogens um $M(-2|4)$ mit den x–, y–Halbachsen $a = 5$, $b = 3$ haben wir die vier Darstellungen:

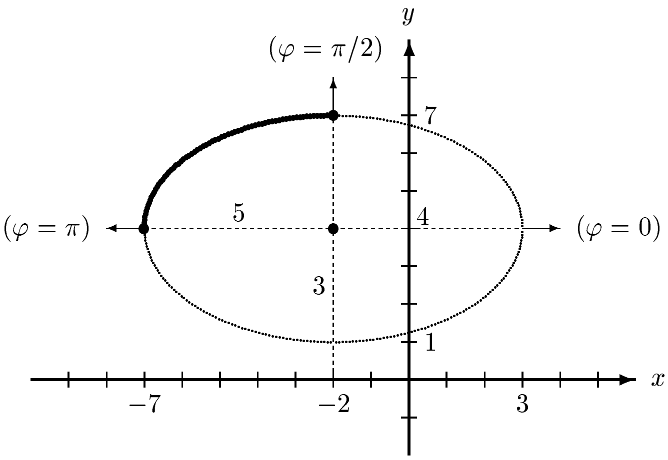
$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \quad \text{mit} \quad -7 \le x \le -2\,,\ 4 \le y \le 7\,;$$

$$y = 4 + \frac{5}{3}\sqrt{25-(x+2)^2} \quad \text{mit} \quad -7 \le x \le -2\,;$$

$$x = -2 - \frac{3}{5}\sqrt{9-(y-4)^2} \quad \text{mit} \quad 4 \le y \le 7\,;$$

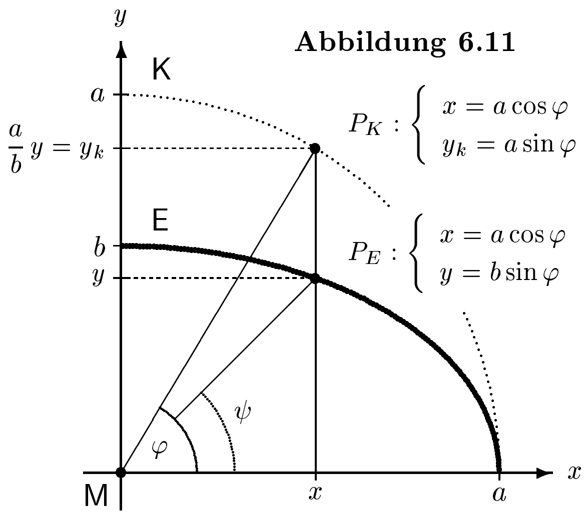
$$\left\{\begin{array}{l} x = -2 + 5\cos\varphi \\ y = 4 + 3\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \text{mit} \quad \pi/2 \le \varphi \le \pi\,.$$

Abbildung 6.10



Achtung: Sei E die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ und K der Kreis $x^2+y^2=a^2$ um $M(0|0)$. Ist $P_E: x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi$ der zum Winkel φ gehörende Ellipsenpunkt und $P_K: x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi$ der zum *selben* Winkel φ gehörende Kreispunkt, so ist φ der Winkel, den die Strecke MP_K mit der positiven x–Achse einschließt — und ist i.a. *nicht* gleich dem Winkel ψ, den die Strecke MP_E mit der positiven x–Achse einschließt! (s.u. Abb. 7.3)

Abbildung 6.11



6.G Hyperbeln.

Hyperbel mit Mittelpunkt $M(x_0|y_0)$ und x–, y–Halbachsen $a>0$ bzw. $b>0$:

wenn die Hyperbelachse zur x–Achse parallel ist:

Mittelpunktsgleichung: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,;$$

übl.Parameterdarstellung: $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_0 \pm a\cosh t \\ y &=& y_0 + b\sinh t \end{array}\right\} \text{ mit } -\infty < t < \infty\,;$$

('+/–' = rechter/linker Hyperbelzweig)

wenn die Hyperbelachse zur y–Achse parallel ist:

Mittelpunktsgleichung: $$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,;$$

übl.Parameterdarstellung: $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_0 + a\sinh t \\ y &=& y_0 \pm b\cosh t \end{array}\right\} \text{ mit } -\infty < t < \infty\,.$$

('+/–' = oberer/unterer Hyperbelzweig)

Gleichungen der Asymptoten (in beiden Fällen): $y=y_0\pm\frac{b}{a}\cdot(x-x_0)$.

z.B.:

für die untere Hälfte H_1 des rechten Zweiges der Hyperbel mit $M(-2|4)$ und $a = 5$, $b = 3$, deren Achse zur x–Achse parallel ist, haben wir die Darstellungen:

$$\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \qquad \text{mit} \qquad x \geq 3\,,\, y \leq 4\,;$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2 + 5\cosh t \\ y & = & 4 + 3\sinh t \end{array} \right\} \qquad \text{mit} \qquad -\infty < t \leq 0\,;$$

für die rechte Hälfte H_2 des unteren Zweiges der Hyperbel mit $M(-2|4)$ und $a = 5$, $b = 3$, deren Achse zur y–Achse parallel ist, haben wir die Darstellungen:

$$-\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \qquad \text{mit} \qquad x \geq -2\,,\, y \leq 1\,;$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2 + 5\sinh t \\ y & = & 4 - 3\cosh t \end{array} \right\} \qquad \text{mit} \qquad 0 \leq t < \infty,.$$

In beiden Fällen haben die Asymptoten die Gleichungen: $y = 4 \pm \frac{3}{5}(x+2)$.

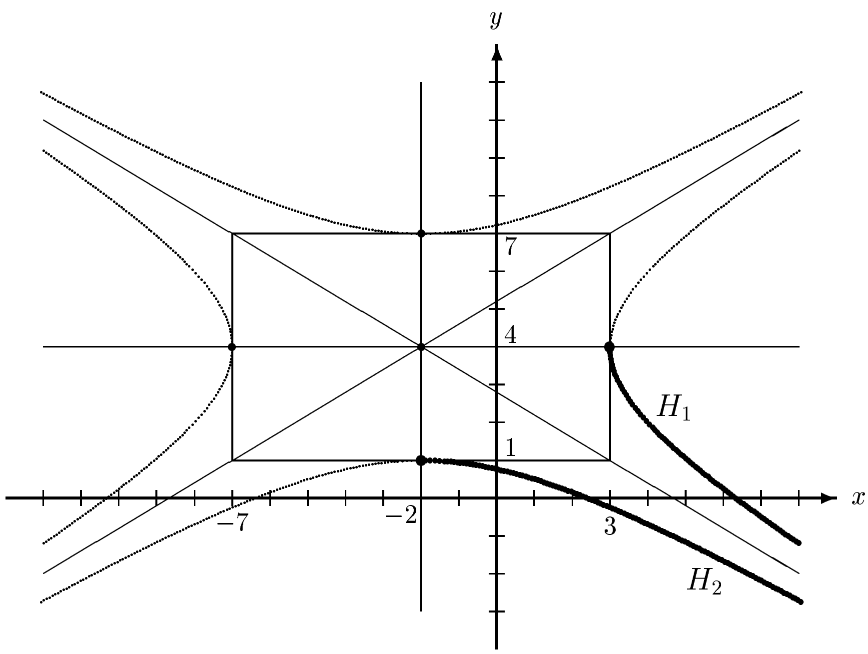


Abbildung 6.12

7 Polar– und Zylinderkoordinaten.

Stichpunkte: Ebene Polar– und Ellipsenkoordinaten, räumliche Polar– und Ellipsoidkoordinaten, Zylinderkoordinaten; Beschreibung rotationssymmetrischer Körper.

7.A Ebene Polar– und Ellipsenkoordinaten.

Fasst man jeden cartesischen Punkt (x, y) auf als Punkt auf einem **Kreis** um $\mathcal{O}(0|0)$ vom Radius $r \geq 0$, so ergibt sich mit der üblichen Parameterdarstellung eines Kreises:

7.1

Ebene Polarkoordinaten $(r\,,\,\varphi)$**:**
(Koordinaten des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ **)**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& r \cdot \cos\varphi \\ y &=& r \cdot \sin\varphi \end{array}} \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \geq 0 \ \text{ und} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ \text{ bzw.} \\ -\pi \leq \varphi \leq \pi\,,\ \ldots \end{array} \right.$$

Es ist $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$.

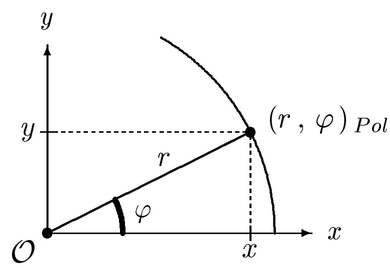


Abbildung 7.1
ebene Polarkoordinaten

z.B.:

$(1,\,0)_{cart} = (1,\,0)_{Pol}\,,\ (-1,\,0)_{cart} = (1,\,\pi)_{Pol}\,,\ (0,\,1)_{cart} = (1,\,\pi/2)_{Pol}\,,$
$(0,\,-1)_{cart} = (1,\,3\pi/2)_{Pol} = (1,\,-\pi/2)_{Pol}\,,\ (1,\,1)_{cart} = (\sqrt{2},\,\pi/4)_{Pol}\,.$

Die **Polargleichung**

$$\boxed{C\,:\, r = r\,(\varphi)\,,\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2}$$

eines ebenen Kurvenbogens C beschreibt C mit ebenen Polarkoordinaten:
$C\,:\, x = r\,(\varphi) \cdot \cos\varphi\,,\ y = r\,(\varphi) \cdot \sin\varphi\,,$
$(\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2)\,.$

z.B.: die **Herzkurve** hat die Polargleichung

$$\boxed{C\,:\, r = |\varphi|\,,\ -\pi \leq \varphi \leq \pi}\ :$$

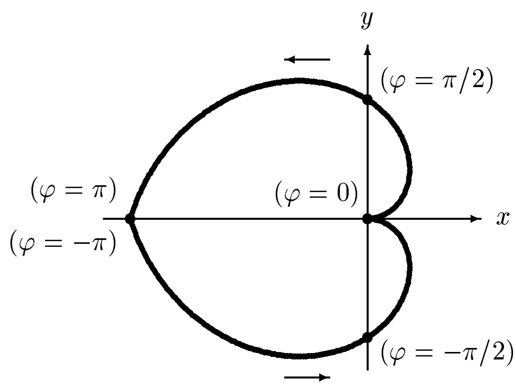


Abbildung 7.2 Herzkurve (Cardioide)

Man kann jeden cartesischen Punkt (x, y) auch als Punkt auf einer **Ellipse** um $\mathcal{O}(0|0)$ mit den Halbachsen at und bt, $t \geq 0$ ($a, b > 0$ fest), auffassen: da dann $\left(\frac{x}{a}\,,\,\frac{y}{b}\right)$ auf einem Kreis um $\mathcal{O}(0\,|\,0)$ vom Radius t liegt, ergibt eine einfache **Modifikation ebener Polarkoordinaten:**

7.2

Ebene Ellipsen–Koordinaten $(t\,,\,\varphi)$**:** (modifizierte ebene Polarkoordinaten: **Koordinaten der Ellipse** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=t^2$)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x &=& at\cdot\cos\varphi \\ y &=& bt\cdot\sin\varphi \end{array}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} t\ge 0 \ \text{ und} \\ 0\le\varphi\le 2\pi \ \text{ bzw. } \ -\pi\le\varphi\le\pi\,,\ \dots \end{cases}$$

Hiermit ist $\boxed{x^2+y^2=t^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}$.

z.B.:

$(a,0)_{\text{cart}}=(1,0)_{\text{ell}}$, $(-a,0)_{\text{cart}}=(1,\pi)_{\text{ell}}$, $(0,b)_{\text{cart}}=(1,\,\pi/2)_{\text{ell}}$,
$(0,-b)_{\text{cart}}=(1,\,3\pi/2)_{\text{ell}}=(1,-\pi/2)_{\text{ell}}$, $(a,b)_{\text{cart}}=(\sqrt{2},\,\pi/4)_{\text{ell}}$.

7.3

Zusammenhang zwischen ebenen Ellipsen– und Polarkoordinaten:

Bei festen $a,b>0$ hat ein Punkt mit den **Ellipsen Koordinaten** (t,φ) bzgl. der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=t^2$ die **ebenen Polarkoordinaten** (r,ψ) mit

$$\boxed{r=t\cdot\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi} \quad \text{und} \quad \tan\psi=\frac{b}{a}\cdot\tan\varphi\,.}$$

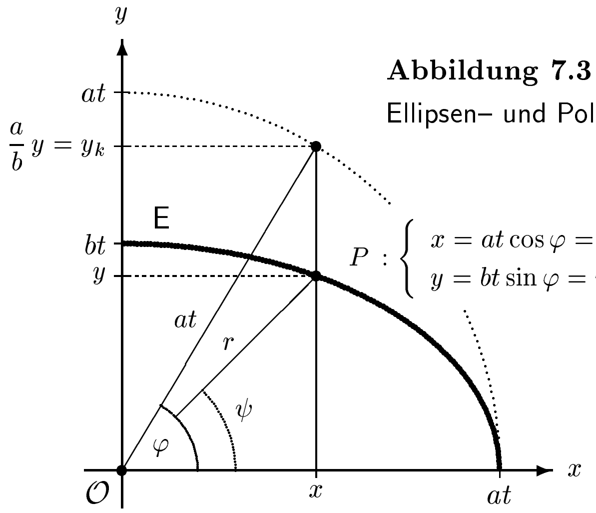


Abbildung 7.3
Ellipsen– und Polarkoordinaten

z.B.: (vgl. mit der Skizze)

Sei P der Schnittpunkt der Elipse $E:\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ mit der Winkelhalbierenden $y=x$.

Zunächst ist $\boxed{\psi=\pi/4}$ und für die $x-$ $(=y-)$ Komponente von P ergibt sich:

$1 = \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{34}{225}\,x^2$, somit (da $x = y > 0$ ist): $\boxed{x = y = 15/\sqrt{34} \approx 2.5725}$.

Wegen: $r^2 = x^2 + y^2 = 2 \cdot \dfrac{225}{34}$ ist $\boxed{r = 15/\sqrt{17} \approx 3.638}$.

P liegt auf der Ellipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = t^2$ mit $\boxed{t = 1}$. Den zugehörigen Winkel φ bekommt man z.B. aus den *beiden* Beziehungen: $\dfrac{x}{5} = t \cdot \cos\varphi$ und $\dfrac{y}{3} = t \cdot \sin\varphi$, d.h. aus:

$\cos\varphi = 3/\sqrt{34}$, $\sin\varphi = 5/\sqrt{34}$; hieraus ergibt sich: $\boxed{\varphi \approx 0.328\,\pi}$.

Für P haben wir also die Koordinaten:

cartesische Koordinaten:	$(x,\, y\,) = (15/\sqrt{34}\,,\, 15/\sqrt{34}\,) \approx (2.57\,,\, 2.57\,)$
ebene Polarkoordinaten:	$(r,\, \psi\,) = (15/\sqrt{17}\,,\, \pi/4\,) \approx (3.64\,,\, \pi/4\,)$
Ellipsen–Koordinaten:	$(t,\, \varphi\,) = (1\,,\, 0.328\,\pi\,)$
$\left(\text{bzgl. } E : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right)$	

7.B Räumliche Polar– und Ellipsoidkoordinaten.

Fasst man jeden cartesischen Punkt (x, y, z) auf als Punkt auf einer **Kugel** um $\mathcal{O}(0|0|0)$ vom Radius $r \geq 0$, so ergibt sich mit der üblichen Parameterdarstellung einer Kugel:

7.4

Räumliche Polarkoordinaten $(r\,,\,\vartheta\,,\,\varphi)$**:**
(Koordinaten der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ **)**

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ y &= r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ z &= r \cdot \cos\vartheta \end{aligned}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{oder } -\pi \leq \varphi \leq \pi\,,\,\dots\,) \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

Es ist $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$.

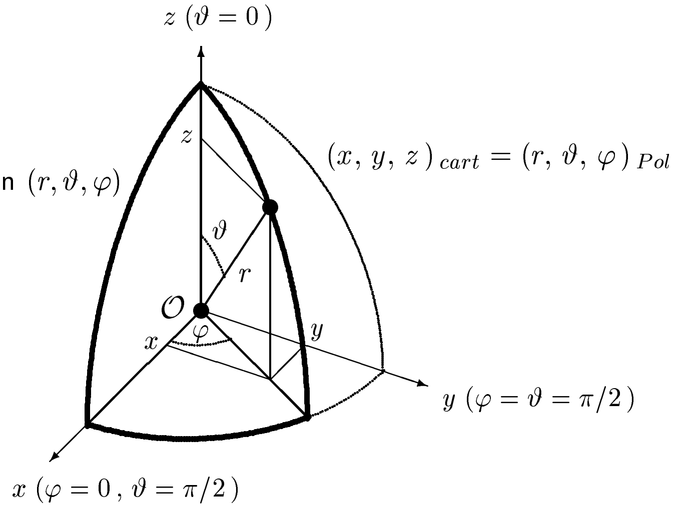
Zugrundeliegende **Konventionen:**

ϑ bestimmt die **"Breitenkreise"** und wird von der positiven z–Achse aus gemessen:
$\vartheta = 0$ für den "Nordpol" auf der positiven z–Achse, $\vartheta = \pi/2$ für den "Äquator" in der x, y–Ebene und $\vartheta = \pi$ für den "Südpol" auf der negativen z–Achse.

φ bestimmt die **"Längenhalbkreise"** (vom Nord– zum Südpol) und wird von der positiven x–Achse aus gemessen:

$\varphi = 0$ für den Längenhalbkreis durch die positive x–Achse, $\varphi = \pi/2$ für den Längenhalbkreis durch die positive y–Achse, $\varphi = \pi$ für den Längenhalbkreis durch die negative x–Achse und $\varphi = 3\pi/2$ für den Längenhalbkreis durch die negative y–Achse.

Abbildung 7.4
räumliche Polarkoordinaten (r, ϑ, φ)



z.B.:

$(1,0,0)_{\mathsf{cart}} = (1,\ \pi/2\,, 0)_{\mathsf{Pol}}$, $(0,1,0)_{\mathsf{cart}} = (1,\ \pi/2,\ \pi/2)_{\mathsf{Pol}}$,
$(0,0,1)_{\mathsf{cart}} = (1,0,\varphi)_{\mathsf{Pol}}$ mit beliebigem φ (="Nordpol") ,
$(1,1,0)_{\mathsf{cart}} = (\sqrt{2}\,,\ \pi/2,\ \pi/4\,)_{\mathsf{Pol}}$, $(0,1,-1)_{\mathsf{cart}} = (\sqrt{2}\,,\ 3\pi/4,\ \pi/2\,)_{\mathsf{Pol}}$,
$(0,0,-1)_{\mathsf{cart}} = (1,\pi,\varphi)_{\mathsf{Pol}}$ mit beliebigem φ (="Südpol") .

Die Polarkoordinaten $(r\,,\ \vartheta\,,\ \varphi)$ des Punktes P mit den cartesischen Koordinaten $(x,y,z) = (-2\,,\ 1\,,\ 2)$ bekommt man wiefolgt:
Mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$ ist $\cos\vartheta = z/r = 2/3$; hieraus folgt (da $0 \le \vartheta \le \pi$):
$\sin\vartheta = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = \sqrt{5}\,/3$ und $\vartheta = 0.2677\,\pi$. Damit ist $\cos\varphi = \dfrac{x}{r\sin\vartheta} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ *und*
$\sin\varphi = \dfrac{y}{r\sin\vartheta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, folglich: $\varphi = 0.8524\,\pi$.

P hat also die **Polarkoordinaten:** $\boxed{(r\,,\ \vartheta\,,\ \varphi) = (3\,,\ 0.2677\,\pi\,,\ 0.8524\,\pi\,)}$.

Fasst man jeden cartesischen Punkt (x,y,z) auf als Punkt auf einem **Ellipsoid** um $\mathcal{O}(0|0|0)$ mit den Halbachsen at , bt , ct ($t \ge 0$, $a,b,c > 0$ fest) — so dass also der Punkt $(x/a\,,\ y/b\,,\ z/c\,)$ auf einer Kugel um $\mathcal{O}$ vom Radius t liegt —, so ergeben sich die modifizierten Polarkoordinaten:

7.5

Ellipsoid–Koordinaten $(t\,,\,\vartheta\,,\,\varphi)$: (modifizierte räumliche Polarkoordinaten: **Koordinaten des Ellipsoids** $\dfrac{x^2}{(at)^2}+\dfrac{y^2}{(bt)^2}+\dfrac{z^2}{(ct)^2}=1$)

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x &=& at\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta \\ y &=& bt\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta \\ z &=& ct\cdot\cos\vartheta \end{array}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} t\geq 0 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \quad (\text{oder } -\pi\leq\varphi\leq\pi\,,\,\ldots\,) \\ 0\leq\vartheta\leq\pi \end{cases}$$

Es ist: $x^2/a^2\,+\,y^2/b^2\,+\,z^2/c^2\,=t^2$.

z.B.: (s.o. das letzte Beispiel)

Um die Ellipsoid–Koordinaten $(t\,,\,\vartheta\,,\,\varphi)$ des Punktes P mit den cartesischen Koordinaten $(x,y,z)=(-2,1,2)$ bzgl. des Ellipsoids: $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ (mit den Halbachsen $a=c=2$, $b=1$) zu erhalten, bestimmt man zunächst t:

$t=\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2}=\sqrt{3}$; hiermit ist: $\cos\vartheta=z/ct=1/\sqrt{3}$,
folglich (da $0\leq\vartheta\leq\pi$): $\sin\vartheta=\sqrt{1-\cos^2\vartheta}=\sqrt{2}/\sqrt{3}$ und $\vartheta=0.3041\,\pi$.
Damit ergibt sich: $\cos\varphi=\dfrac{x}{at\,\sin\vartheta}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{bt\,\sin\vartheta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, somit: $\varphi=0.75\,\pi$.

P hat also bzgl. des angegebenen Ellipsoids die Koordinaten

$\boxed{(t\,,\,\vartheta\,,\,\varphi)=\left(\sqrt{3}\,,\;0.3041\,\pi\,,0.75\,\pi\right)}$.

7.C Zylinderkoordinaten.

Fasst man jeden cartesischen Punkt (x,y,z) auf als Punkt auf einem geraden Kreiszylinder mit einer der drei Koordinatenachsen als Zylinderachse, so ergibt sich mit den üblichen Parameterdarstellungen dieser Zylinder:

7.6

Zylinderkoordinaten (r,φ,z): (**Koordinaten des Zylinders** $x^2+y^2=r^2$, $z\in\mathbb{R}$, Zylinderachse = z–Achse)

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x &=& r\cdot\cos\varphi \\ y &=& r\cdot\sin\varphi \\ z &=& z \end{array}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} r\geq 0 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \quad (\text{oder } -\pi\leq\varphi\leq\pi\,,\,\ldots\,) \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

7.7

Zylinderkoordinaten (r, φ, x) : (**Koordinaten des Zylinders** $y^2 + z^2 = r^2$, $x \in \mathbb{R}$, Zylinderachse $=$ x–Achse)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y &=& r \cdot \cos\varphi \\ z &=& r \cdot \sin\varphi \\ x &=& x \end{array}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{oder } -\pi \leq \varphi \leq \pi, \ldots) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

7.8

Zylinderkoordinaten (r, φ, y) : (**Koordinaten des Zylinders** $z^2 + x^2 = r^2$, $y \in \mathbb{R}$, Zylinderachse $=$ y–Achse)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z &=& r \cdot \cos\varphi \\ x &=& r \cdot \sin\varphi \\ y &=& y \end{array}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{oder } -\pi \leq \varphi \leq \pi, \ldots) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

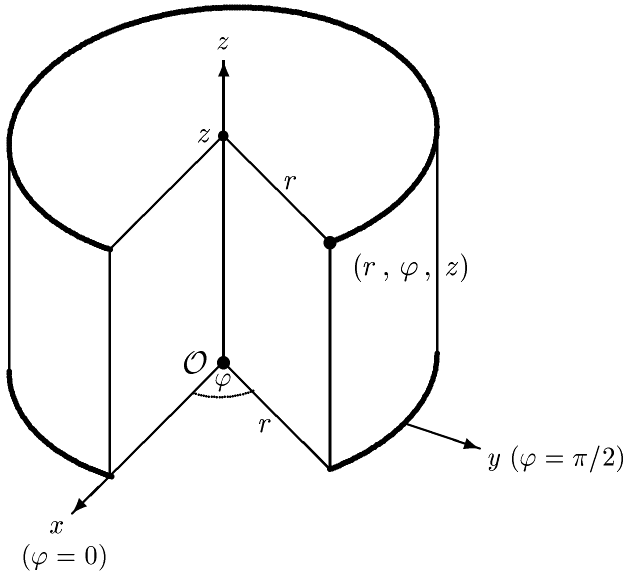


Abbildung 7.5
Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

z.B.: (s.o. das letzte Beispiel) Wir bestimmen für den Punkt $P(-2, 1, 2)$:

- Zylinderkoordinaten (r, φ, z) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}\,, \text{ somit: } \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = x/r = -2/\sqrt{5} \\ \sin\varphi = y/r = 1/\sqrt{5} \end{array} \right\}, \text{ also: } \varphi = 0.8524\,\pi\,;$$

- Zylinderkoordinaten (r, φ, y) :

$$r = \sqrt{z^2 + x^2} = 2\sqrt{2}\,, \text{ somit: } \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = z/r = 1/\sqrt{2} \\ \sin\varphi = x/r = -1/\sqrt{2} \end{array} \right\}, \text{ also: } \varphi = -\pi/4\,;$$

- Zylinderkoordinaten (r, φ, x) :

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{5}\,, \text{ somit: } \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = y/r = 1/\sqrt{5} \\ \sin\varphi = z/r = 2/\sqrt{5} \end{array} \right\}, \text{ also: } \varphi = 0.3524\,\pi\,.$$

Zusammenfassend haben wir für P die Koordinaten:

cartesische Koordinaten:	$(x\,,\,y\,,\,z\,) = (-2\,,\,1\,,\,2\,)$
Polarkoordinaten:	$(r\,,\,\vartheta\,,\,\varphi\,) = (3\,,\,0.2677\,\pi\,,\,0.8524\,\pi\,)$
Ellipsoidkoordinaten: $\left(\text{bzgl. } E : \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1\right)$	$(t\,,\,\vartheta\,,\,\varphi\,) = \left(\sqrt{3}\,,\,0.3041\,\pi\,,\,0.75\,\pi\,\right)$
Zylinderkoordinaten:	$(r\,,\,\varphi\,,\,z\,) = \left(\sqrt{5}\,,\,0.8524\,\pi\,,\,2\right)$
	$(r\,,\,\varphi\,,\,y\,) = \left(2\sqrt{2}\,,\,-\pi/4\,,\,1\right)$
	$(r\,,\,\varphi\,,\,x\,) = \left(\sqrt{5}\,,\,0.3524\,\pi\,,\,-2\right)$

7.D Beschreibung rotationssymmetrischer Körper.

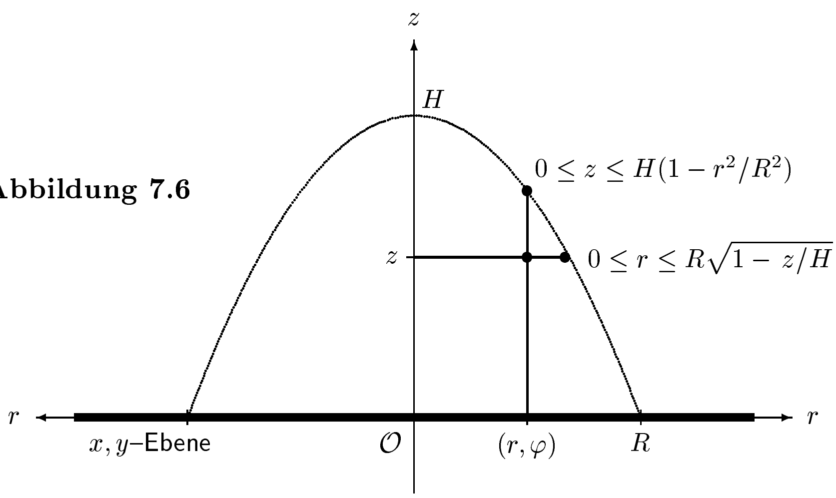
Zylinderkoordinaten eignen sich vorzüglich zur Beschreibung rotationssymmetrischer Körper! z.B.:

(a) Der **"Zuckerhut"**, der von der x,y–Ebene und der **Rotationsparaboloidfläche** $z = \dfrac{H}{R^2}\left(R^2 - (x^2 + y^2)\right)$ begrenzt wird, hat die Darstellung:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & r\cdot\cos\varphi \\ y & = & r\cdot\sin\varphi \\ z & = & z \end{array}\right\} \quad \text{mit:} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \le & \varphi & \le & 2\pi \\ 0 & \le & r & \le & R \\ 0 & \le & z & \le & H(1 - r^2/R^2) \end{array}\right\}$$

$$\text{oder — gleichwertig — mit:} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \le & \varphi & \le & 2\pi \\ 0 & \le & z & \le & H \\ 0 & \le & r & \le & R\cdot\sqrt{1 - z/H} \end{array}\right\}.$$

Abbildung 7.6



(b) Der Rotationskörper, der durch Rotation des Kurvenbogens $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq a$, um die x–Achse entsteht, hat die Darstellung:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = r \cdot \cos\varphi \\ z = r \cdot \sin\varphi \\ x = x \end{array} \right\} \text{ mit } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq r \leq e^{-x} \end{array} \right\}$$

oder — gleichwertig — mit

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq x \leq a \, , \text{ falls } \; r \leq e^{-a} \, , \\ 0 \leq x \leq -\ln r \quad \text{für } \; e^{-a} \leq r \leq 1 \, . \end{array} \right\}$$

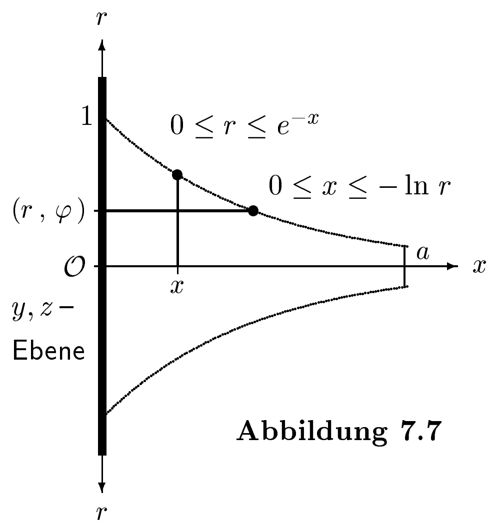


Abbildung 7.7

8 Differentiation.

Stichpunkte: Höhere und partielle Ableitung; Schreibweisen (auch Operatorenschreibweise); die wichtigsten Rechenregeln; gängige Ableitungen.

8.A Gewöhnliche Ableitung: anschauliche Deutung.

Zur Definition der *gewöhnlichen* **1. Ableitung** (= 1. Ableitung einer Funktion *einer* Veränderlichen) :

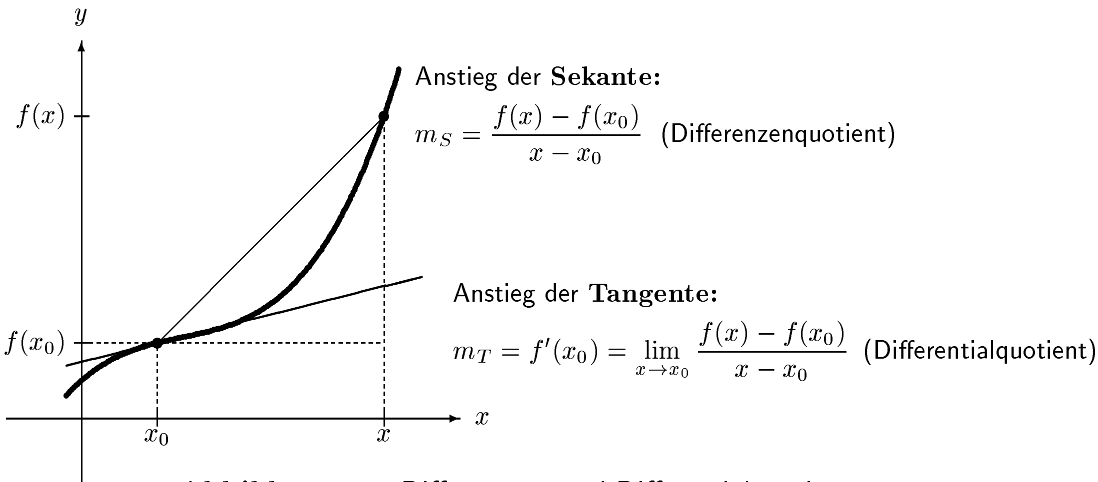


Abbildung 8.1 Differenzen– und Differentialquotient

Die **1. Ableitung** ist der **Differentialquotient**:

8.1
$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =: \frac{df(x_0)}{dx}}$$

und beschreibt die **Änderung** von $f(x)$ an der Stelle x_0 pro x–Einheit.

In diesem Sinne kann man somit das **totale Differential** von $f(x)$ an der Stelle x_0 :
$\boxed{df(x_0) := f'(x_0)\, dx}$ als **Änderung** von $f(x)$ im Intervall $[x_0\, ,\, x_0 + dx]$ deuten:

bei richtiger Verwendung ist es also zulässig, den zunächst nur *symbolisch* als Bruch geschriebenen, *gewöhnlichen* **Differentialquotienten** $f'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx}$ wie einen *echten* Bruch zu behandeln (das ist allerdings *nur bei gewöhnlichen* Differentialquotienten möglich!) .

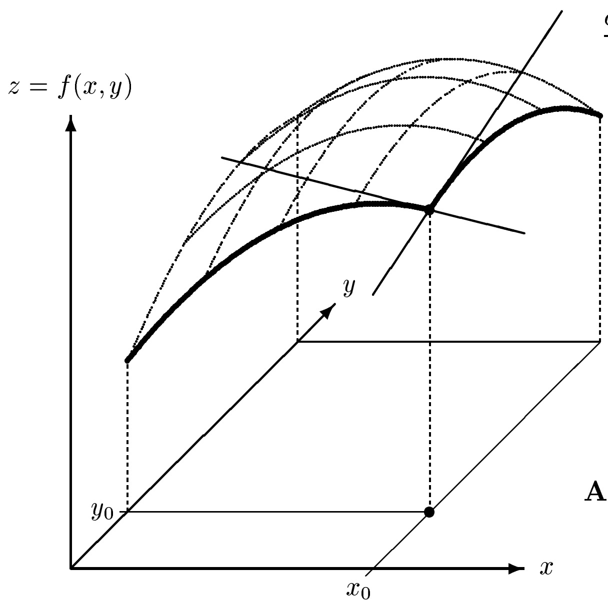
8.B Partielle Ableitung.

Für eine Funktion $f = f(\vec{r}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist die **1. partielle Ableitung** an einer Stelle $\vec{r}_0 = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ nach der j–ten Variablen x_j:

8.2
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{r}_0) &= \frac{\partial f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{r}_0 + h\,\vec{e}_j) - f(\vec{r}_0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_j + h, \ldots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_j, \ldots, \bar{x}_n)}{h} = \\ &= \lim_{x_j\to \bar{x}_j} \frac{f(\bar{x}_1, \ldots, x_j, \ldots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_j, \ldots, \bar{x}_n)}{x_j - \bar{x}_j}\,.\end{aligned}}$$

die **Änderung** pro x_j–Einheit von f an dieser Stelle in x_j–Richtung. Die *partiellen* Ableitungen bekommt man also wie die *gewöhnlichen* Ableitungen: bei der partiellen Ableitung nach der Variablen x_j wird diese als *einzige* Variable angesehen, während die übrigen Variablen wie Konstanten behandelt werden.

Im Fall einer Funktion $f = f(x,y)$ von *zwei* Variablen lässt sich $z = f(x,y)$ als **Fläche** deuten; die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ an einer Stelle (x_0, y_0) sind dann die Anstiege der Tangenten an dieser Stelle in x– bzw. y–Richtung:



Anstieg der Tangente in y–Richtung:
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Anstieg der Tangente in x–Richtung:
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Abbildung 8.2 partielle Ableitungen

Die **totale Ableitung** einer Funktion $f = f\,(x_1\,, \ldots\,, x_n)$ ist der **Gradient** von f

8.3 $\boxed{\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\,, \ldots\,, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)}$. (s. die Lektionen 25 und 26)

z.B.: für $f = f(\vec{r}) = |\vec{r}|$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$ ist

$f_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{|\vec{r}|}$, analog: $f_y = \dfrac{y}{|\vec{r}|}$, $f_z = \dfrac{z}{|\vec{r}|}$,

somit: $\operatorname{grad} f = (\,f_x\,,\ f_y\,,\ f_z\,) = \left(\dfrac{x}{|\vec{r}|}\,, \dfrac{y}{|\vec{r}|}\,, \dfrac{z}{|\vec{r}|} \right) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

8.C Höhere Ableitungen: einige Schreibweisen.

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = Df(x) \\ f''(x) &= \frac{d^2f(x)}{dx^2} = D^2f(x) \\ f^{(n)}(x) &= \frac{d^nf(x)}{dx^n} = D^nf(x) \end{aligned}\right\}$$ mit dem **Differentialoperator** $D := \dfrac{d}{dx}$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = D_xf\,(x,y) \quad \text{mit} \quad D_x := \frac{\partial}{\partial x} \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = D_x^2f\,(x,y) \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = D_yf\,(x,y) \quad \text{mit} \quad D_y := \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = D_yD_xf\,(x,y) \\ f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = D_xD_yf\,(x,y) \end{aligned}\right\}$$

s.u. den **Satz von Schwarz:** beide Ableitungen stimmen überein, wenn $f(x,y)$ hinreichend 'anständig' ist.

Für eine Funktion $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ und einen Multi–Index $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ mit $k_j \in \mathbb{N}_0$ und mit $|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_n$ ist

$$D^{\mathbf{k}}f := \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} = D_{x_1}^{k_1} \cdots D_{x_n}^{k_n}\, f\ .$$

Verbotene Schreibweisen sind **z.B.:**

$$\ldots\,, \ \frac{f}{dx}\,, \ \frac{f(x,y)}{\partial x}\,, \ f'(x,y)\,, \ \frac{df(x,y)}{dx}\,, \ \frac{\partial f(x)}{\partial x}\,, \ \ldots$$

8.D Ableitungsregeln.

8.4
$$\boxed{\begin{array}{lcll} c' & = & 0 & \text{(c konstant)} \\ (c\cdot f)' & = & c\cdot f' & \text{(c konstant)} \\ (f\pm g)' & = & f'\pm g' & \end{array}}$$

8.5
$$\boxed{\begin{array}{lcll} (f\cdot g)' & = & f'\cdot g + f\cdot g' & \textbf{Produktregel} \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)' & = & \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} & \textbf{Quotientenregel} \end{array}}$$

z.B.: $(x\cdot \ln x)' = \ln x + x\cdot \dfrac{1}{x} = 1+\ln x$, $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{(1/x)\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

8.6 $\boxed{(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$ **Leibniz'sche Produktregel**

8.7 $\boxed{\text{Für } y=f(x) \text{ ist } \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}}$ **Ableitung der Umkehrfunktion**

z.B.: mit $y=\tan x$ ist:

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

8.8 $\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$ **Kettenregel für eine Variable**

z.B.: $\left(\sin^2\sqrt{x}\right)' = 2\,\sin\sqrt{x}\cdot\cos\,\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sin\left(2\sqrt{x}\,\right)}{2\sqrt{x}}$

Kettenregel für mehrere Variable:

8.9
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Für } f=f(\vec{r}) \text{ mit } \vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),\dots,z(t)) \text{ ist:} \\ \dfrac{d}{dt}f\left(\vec{r}(t)\right) = \text{grad}\, f\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt} + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dt}\,. \end{array}}$$

Das **totale Differential** von $f=f(x,y,\dots,z)$ ist:

8.10 $\boxed{df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz = \text{grad}\, f\cdot d\vec{r}}$.

8.11	Wenn eine der beiden partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existiert und stetig ist, dann existiert auch die jeweils andere und beide sind gleich: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.	**Satz von Schwarz**

z.B.:
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{1}{x^2 y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{-1}{y^2}\right) = \dfrac{-2}{x^3} \cdot \dfrac{-1}{y^2} = \dfrac{2}{x^3 y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\dfrac{1}{x^2 y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-2}{x^3} \cdot \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{-2}{x^3} \cdot \dfrac{-1}{y^2} = \dfrac{2}{x^3 y^2} \end{array} \right\}$$
beide Ableitungen stimmen überein!

8.E Wichtige Ableitungen.

8.12

$$\begin{array}{lll} (x^a)' = a \cdot x^{a-1} & & \text{(a konstant)} \\ \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & & x \neq 0 \\ \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} & & x \neq 0 \end{array}$$

z.B.: $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{4/3}\right)' = \dfrac{4}{3}\,x^{1/3} = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

8.13

$$\begin{array}{ll} (a^x)' = a^x \ln a & (a > 0 \text{ konstant}) \\ (e^x)' = e^x & \end{array}$$

z.B.: $(10^x)' = 10^x \ln 10 \approx 2.3026 \cdot 10^x$

8.14

$$\begin{array}{ll} \left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} & (a > 0\,,\ \neq 1) \\ \left(\ln |x|\right)' = \dfrac{1}{x} & \end{array}$$

z.B.: $\left(\lg x\right)' = \dfrac{1}{x \ln 10} \approx \dfrac{0.4343}{x}$

8.15

$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sinh x\right)' = \cosh x$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cosh x\right)' = \sinh x$ (!)
$\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\left(\tanh x\right)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\left(\coth x\right)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

8.16

$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x\rvert \le 1)$	$\left(\operatorname{Arsinh} x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x\rvert \le 1)$	$\left(\operatorname{Arcosh} x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$
$\left(\arctan x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\operatorname{Artanh} x\right)' = \dfrac{1}{1-x^2} \quad (\lvert x\rvert < 1)$
$\left(\operatorname{arccot} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\operatorname{Arcoth} x\right)' = -\dfrac{1}{x^2-1} \quad (\lvert x\rvert > 1)$

Die wichtigste Ableitung ist die der e–Funktion: $\boxed{(e^x)' = e^x}$:

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\,\frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}-1\right) = e^x\cdot\frac{1}{h}\left(1+\frac{h}{1}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots-1\right) =$$

$$= e^x\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\right) \to e^x \quad (h\to 0)\ ;$$

damit ist $(e^x)' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x$. (siehe auch Seite 5-4)

Mit ihrer Hilfe lassen sich alle anderen der hier aufgelisteten Ableitungen bestimmen, z.B.:

(i) mit $y = e^x$ ist $(\ln y)' = \dfrac{1}{(e^x)'} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$, also: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ für $x > 0$;

für $x < 0$ ist $\lvert x\rvert = -x$, somit: $\left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \left(\ln(-x)\right)' = \dfrac{1}{-x}\,(-1) = \dfrac{1}{x}$,

insgesamt also: $\left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \dfrac{1}{x}$ für alle $x \ne 0$;

(ii) $(x^a)' = \left(e^{a\cdot\ln x}\right)' = e^{a\cdot\ln x}\cdot a\,\dfrac{1}{x} = a\cdot x^a\,\dfrac{1}{x} = a\cdot x^{a-1}$;

(iii) $(a^x)' = \left(e^{x\cdot\ln a}\right)' = e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a = a^x\,\ln a$;

(iv) $(\sinh x)' = \dfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x})' = \dfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) = \cosh x$;

(v) mit Hilfe der Euler'schen Formel: $\sin x = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

(siehe z.B. Seite 14-2) bekommt man:

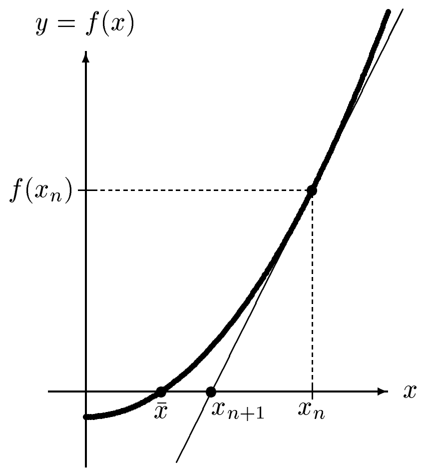
$(\sin x)' = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)' = \dfrac{1}{2i}\left(i\,e^{ix} + i\,e^{-ix}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos x$; usw. .

8.F Newton–Verfahren. (*)

Eines der bekanntesten Verfahren zur näherungsweisen Auflösung von Gleichungen der Form $\boxed{f(x) = 0}$ ist das **Newton–Verfahren**, dessen Grundidee unmittelbar einleuchtet:

Wenn die Funktion f in der Nähe der gesuchten Lösung $\bar{x}$ differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$ und wenn x_n bereits eine Näherungslösung ist, dann ist die Nullstelle x_{n+1} der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $\big(x_n\,,\, f(x_n)\big)$ in vielen Fällen eine **verbesserte Näherungs–Lösung**:

Abbildung 8.3 zum Newton–Verfahren



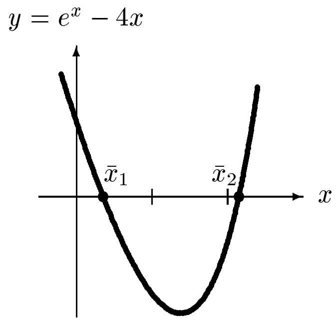
aus der Tangentengleichung:

$y = f(x_n) + f'(x_n)\,\big(x - x_n\big)$

ergibt sich die **verbesserte Näherung:**

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}\,.$$

z.B.: (siehe das Beispiel zum allgemeinen Iterationsverfahren auf Seite 4-2)



Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $\boxed{e^x - 4x = 0}$:

Mit $f(x) = e^x - 4x$, $f'(x) = e^x - 4$ ergeben sich die beiden Lösungen (mit TR–Genauigkeit):

$x_0 = 0.5$ (Schätzung) $\Rightarrow\ x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.3506$

$\Rightarrow\ x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.357390\ \Rightarrow\ x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \boxed{0.357402956 = \bar{x}_1}$,

$x_0 = 2$ (Schätzung) $\Rightarrow\ x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.18027\ \Rightarrow\ x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.15395$

$\Rightarrow\ x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.153292768\ \Rightarrow\ x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \boxed{2.153292364 = \bar{x}_2}$.

9 Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Stichpunkte: Mittelwertsatz für eine und mehrere Variable; Regel von L'Hospital, übliche Beispiele: u.a. Polynom · Exponentialfunktion, Logarithmus · Polynom, $\frac{\sin x}{x}$, $(1+\frac{x}{n})^n$.
"Optimistische" und "pessimistische" Fehlerabschätzung.

9.A Drei Fassungen des Mittelwertsatzes.

Sei $f(x)$ differenzierbar auf dem Intervall $[a,b]$, $a<b$. Dann gilt:

A **(Satz von Rolle)**

Zu jedem $x \in]a,b]$ mit $f(x)=f(a)$ gibt es ein $\xi_x \in]a,x[$ so, dass $\boxed{f'(\xi_x)=0}$.

(Da $f(x)$ als differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist, gibt es sicher eine Stelle $\xi_x \in]a,b[$, an der $f(x)$ ein Extremum hat: an dieser Stelle ist $f'(\xi_x)=0$.)

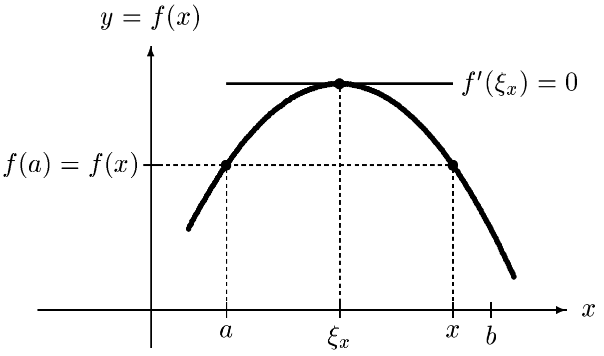


Abbildung 9.1 Satz von Rolle

B Zu jedem $x \in]a,b]$ gibt es ein ξ_x mit $a<\xi_x<x$ so, dass

$$\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{f(x)=f(a)+f'(\xi_x)\cdot(x-a)},$$

m.a.W.: es gibt eine Stelle $\xi_x \in]a,x[$ so, dass die Tangente an dieser Stelle denselben Anstieg hat wie die Sekante durch die Punkte $A\big(a|f(a)\big)$, $B\big(x|f(x)\big)$:

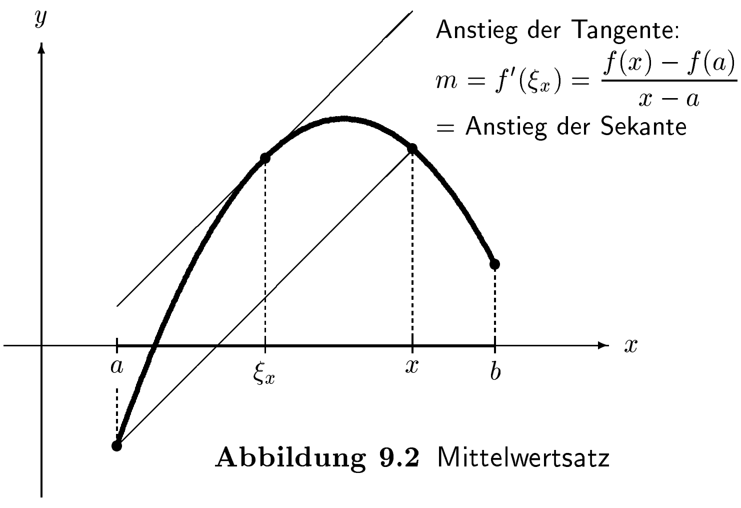


Abbildung 9.2 Mittelwertsatz

$\boxed{\text{C}}$ Ist $g(x)$ eine weitere, auf $[a,b]$ differenzierbare Funktion, so gibt es zu $x, x_0 \in [a\,,b]$ $(x \neq x_0)$ stets ein $\xi_x \in]\,a,b\,[$ mit $|\xi_x - x_0\,| < |x - x_0\,|$ so, dass

$$\boxed{\Big(f(x) - f(x_0)\Big) \cdot g'(\xi_x) = \Big(g(x) - g(x_0)\Big) \cdot f'(\xi_x)}\,.$$

Auch wenn diese drei Versionen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf den ersten Blick sehr verschieden gewichtig aussehen, sind sie doch **äquivalent**!

$\Big($ $\boxed{\text{B}}$ ergibt sich aus $\boxed{\text{C}}$ mit $g(x) = x$ $\;(\Rightarrow g'(\xi_x) = 1)$ und $x_0 = a$, $\boxed{\text{A}}$ folgt aus $\boxed{\text{B}}$ mit $f(a) = f(x)$.
Wenn man umgekehrt $\boxed{\text{A}}$ auf die Funktion $h(t) := \Big(f(x) - f(a)\Big)\,g(t) - \Big(g(x) - g(a)\Big)\,f(t)$ anwendet, ergibt sich (recht problemlos) die Version $\boxed{\text{C}}$. $\Big)$

Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** läßt sich auch auf Funktionen mit *mehreren* Variablen übertragen:

Ist die Funktion $f(\vec{r}\,) = f(x_1, \ldots, x_n)$ auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$,
welche die Punkte $\vec{r}_0 = (\bar{x}_1\,, \ldots, \bar{x}_n\,)$ und $\vec{r}_0 + \Delta\vec{r} = (\bar{x}_1 + \Delta x_1\,, \ldots, \bar{x}_n + \Delta x_n\,)$
und die gesamte Verbindungsstrecke $[\,\vec{r}_0\,, \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}\,] = \{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\Delta\vec{r} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ enthält,
nach allen Variablen differenzierbar, so gilt:

$\boxed{\text{D}}$ es gibt eine Zahl $\vartheta \in]0,1[$ so, dass

$$\boxed{f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}\,) - f(\vec{r}_0\,) = \text{grad } f(\vec{r}_0 + \vartheta\,\Delta\vec{r}\,) \cdot \Delta\vec{r}}\,.$$

$\Big($ Um das einzusehen, braucht man "nur" $\boxed{\text{B}}$ auf die die Funktion
$h(t) := f\Big(\vec{r}\,(t)\Big)$ mit $\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + t\Delta\vec{r} = \Big(\bar{x}_1 + t\Delta x_1\,, \ldots, \bar{x}_n + t\Delta x_n\Big)$ anzuwenden. $\Big)$

9.B Regel von de l'Hospital.

Die **de l'Hospital'sche Regel** ist eine unmittelbare Anwendung der Variante $\boxed{\text{C}}$ des **Mittelwertsatzes:**

9.1

Wenn: $f(x) \to 0$ *und* $g(x) \to 0$ für $x \to x_0$
oder: $f(x) \to \pm\infty$ *und* $g(x) \to \pm\infty$ für $x \to x_0$

und wenn $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eigentlich oder uneigentlich **existiert**,

dann ist $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}\,.$

z.B.: Typische **Beispiele:**

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1\,,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}\;:$

[Typ $\frac{0}{0}$] [Typ $\frac{0}{0}$] [Typ $\frac{0}{0}$]

9.2

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= 1\\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{1}{2}\end{aligned}}$$

für $|x| \ll 1$ ist $\boxed{\sin x \approx x}$ und $\boxed{\cos x \approx 1 - x^2/2}$.

(b) Für $\alpha > 0$ ist: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha e^{\alpha x}}{1} = \infty$ und damit für beliebige $\beta > 0$:

[Typ $\frac{\infty}{\infty}$]

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{\alpha/\beta\, x}}{x}\right)^{\beta} = \infty\;,\quad \lim_{x\to\infty} x^\beta\, e^{-\alpha\, x} = 0}\;:$$

jede noch so kleine, positive Potenz von e^x geht für $x \to \infty$ schneller gegen ∞ als jede noch so große Potenz von x.

Hieraus folgt für $\alpha > 0$ und jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$:

9.3

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\alpha x}}{p(x)} = \infty \quad \text{falls } a_n > 0\\ &\lim_{x\to\infty} p(x)\, e^{-\alpha x} = 0\end{aligned}}$$

"Exponentialfunktion schlägt Polynom"

(c) Für beliebige $\alpha > 0$ ist: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{\alpha\, x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha\, x^\alpha} = 0$ und

[Typ $\frac{\infty}{\infty}$]

$\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0$ und damit für $\alpha\,,\beta > 0$:

[Typ $0\cdot\infty$] [Typ $\frac{\infty}{\infty}$]

9.4

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0\\ &\lim_{x\to 0+} x^\alpha\,(\ln x)^\beta = 0\end{aligned}}$$

"Polynom schlägt Logarithmus"

Jede noch so große, positive Potenz von $\ln x$ geht für $x \to \infty$ oder $x \to 0+$ dem Betrage nach langsamer gegen ∞ als jede noch so kleine (positive) Potenz von x bzw. $1/x$.

(d) Die folgenden Beispiele beherzigen die

9.5

Faustregel:
Ableitungen und Grenzwerte von Funktionen des Typs $f(x) = a(x)^{\,b(x)}$ bestimmt man am bequemsten mit Hilfe der e–Funktion über:

$$\boxed{\boxed{a(x)^{\,b(x)} = e^{\,b(x)\,\ln a(x)}}}\ :$$

$$\boxed{\left(a(x)^{\,b(x)}\right)' = \left(e^{\,b(x)\,\ln a(x)}\right)' = a(x)^{\,b(x)}\left(b(x)\,\ln a(x)\right)'}$$ und — da die e–Funktion *stetig* ist (d.h.: aus: $g(x) \to a$ für $x \to x_0$ folgt: $e^{\,g(x)} \to e^a$ für $x \to x_0$!) —:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} a(x)^{\,b(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(e^{\,b(x)\,\ln a(x)}\right) = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left(b(x)\,\ln a(x)\right)}}\ .$$

$$(x^x)' = \left(e^{\,x\,\ln x}\right)' \overset{\text{s.o.}}{=} e^{x\,\ln x}\left(1 + \ln x\right) = x^x\,(1 + \ln x)\ ,\quad \lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\,\ln x} \overset{\text{s.o.}}{=} e^0 = 1\ .$$

Für beliebige $x,\, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ und $\dfrac{x}{y} > -1$ ist $\left(\dfrac{x+y}{y}\right)^y = \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^y = e^{y\,\ln(1+x/y)}$. Wegen:

$$\underset{[\text{Typ}\,\infty\cdot 0]}{\lim_{y\to\infty}\left(y\cdot\ln(1+x/y)\right)} = \underset{[\text{Typ}\,\frac{0}{0}]}{\lim_{y\to\infty}\frac{\ln(1+x/y)}{1/y}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{y\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x/y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)}{-1/y^2} = \lim_{y\to\infty}\frac{x}{1+x/y} = x$$

ergibt sich: $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left(\frac{x+y}{y}\right)^y = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{x}{y}\right)^y = e^{\lim\limits_{y\to\infty}(y\cdot\ln(1+x/y))} = e^x$.

(vgl. Nr. 3.10 und Abschnitt 5.B !)

9.C Fehlerabschätzung (I).

Sei $f = f(\vec{r}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ nach allen Variablen differenzierbar. Aufgrund des Mittelwertsatzes $\boxed{\text{D}}$ gibt es dann zu $\vec{r}_0 = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ und $\Delta\vec{r} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ eine Zahl $0 < \vartheta < 1$ so, dass

(i) $$\boxed{\Delta f := f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r}_0) = \operatorname{grad} f(\vec{r}_0 + \vartheta\,\Delta\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}}\ .$$

Wenn $|\Delta\vec{r}|$ nicht zu groß ist, hat man somit näherungsweise:

(ii) $$\boxed{\Delta f \approx \operatorname{grad} f(\vec{r}_0)\cdot\Delta\vec{r} = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x_n}\Delta x_n}\ ,$$

und zwar umso genauer, je kleiner $|\Delta\vec{r}|$ ist: im Grenzfall $|\Delta\vec{r}| \to 0$ bekommt man das **totale Differential:**

$$\textbf{(iii)} \quad \boxed{df = \operatorname{grad} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n} \,.$$

Δf ist der absolute Fehler, der sich für $f(x_1, \ldots, x_n)$ ergibt, wenn die "Mess"–Werte $x_1, \ldots, x_n$ mit dem absoluten Fehler Δx_1 bzw. $\ldots, \Delta x_n$ behaftet sind.

Wenn man Auskunft über die Größe des resultierenden Fehlers Δf in Abhängigkeit von den "vorgegebenen" Fehlern $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ haben möchte, muss man — da die Zahl ϑ in **(i)** in der Regel unbekannt ist — versuchen, für Δf mit Hilfe von **(ii)** obere Grenzen abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
|\Delta f| \approx \; & |\operatorname{grad} f \cdot \Delta\vec{r}| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right| \leq \\
\leq \; & \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n| = \\
= \; & \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\right) \cdot \Big(|\Delta x_1|, \ldots, |\Delta x_n|\Big) \leq \quad \text{[Schwarz'sche Ungleichung]} \\
\leq \; & \left|\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\right)\right| \, \Big|\Big(|\Delta x_1|, \ldots, |\Delta x_n|\Big)\Big| = \\
= \; & \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|^2} \cdot \sqrt{|\Delta x_1|^2 + \cdots + |\Delta x_n|^2} = |\operatorname{grad} f| \, |\Delta\vec{r}|
\end{aligned}$$

Wir erhalten:

die "optimistische" Fehlerabschätzung:

$$\textbf{9.6} \quad \boxed{|\Delta f| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|}$$

die "pessimistische" Fehlerabschätzung:

$$\textbf{9.7} \quad \boxed{|\Delta f| \leq \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2} \cdot \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2} = |\operatorname{grad} f| \, |\Delta\vec{r}|}$$

(Der "optimistische" Fehler ist stets $\leq$ dem "pessimistischen" Fehler! (s.o.))

z.B.: Sei $f(x,y) = e^{x+y^2-1}$ mit $x = -4$, $y = 2$, wobei die "Mess"–Werte für x und y jeweils mit einem Fehler von etwa 3% behaftet seien.

Dann ist zunächst $|\Delta x| = 4 \cdot \dfrac{3}{100} = \dfrac{12}{100}$, $|\Delta y| = 2 \cdot \dfrac{3}{100} = \dfrac{6}{100}$, also $x = -4 \pm 0.12$, $y = 2 \pm 0.06$, und es ist $f(-4,2) = e^{-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y^2-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-4,2) = e^{-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\, e^{x+y^2-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-4,2) = 4e^{-1}$. Hieraus ergibt sich

(a) die "optimistische" Abschätzung:

$|\Delta f| \le e^{-1} \cdot \frac{12}{100} + 4e^{-1} \cdot \frac{6}{100} = \frac{36}{100}\, e^{-1} \approx 0.14\,,$

d.h. es ist $f(x,y) = e^{-1} \pm |\Delta f| = 0.37 \pm 0.14$

und man hat für $f(x,y)$ einen prozentualen Fehler von maximal $\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \approx \frac{36}{100} = 36\%\,;$

(b) die "pessimistische" Abschätzung:

$|\Delta f| \le e^{-1}\sqrt{1+16} \cdot \frac{1}{100}\sqrt{144+36} \approx \frac{55}{100}\, e^{-1} \approx 0.21\,,$

d.h. es ist $f(x,y) = e^{-1} \pm |\Delta f| = 0.37 \pm 0.21$

und man hat für $f(x,y)$ einen prozentualen Fehler von maximal $\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \approx \frac{55}{100} = 55\%\,.$

Ist z.B. $x = -3.88$ und $y = 2.06$, so liegen x und y (gerade noch) im Bereich $x = -4 \pm 0.12$, $y = 2 \pm 0.06$ und es ist $f(x,y) = e^{-0.6364} \approx 0.53 = 0.37 + 0.16$; in diesem Fall wäre der falsche Wert $f(-4\,,\,2) = e^{-1}$ mit einem prozentualen Fehler von etwa 44% belastet:
die optimistische Abschätzung wäre hier also etwas zu optimistisch!

Leider können diese Abschätzungen die Ungenauigkeit von **(ii)** gegenüber **(i)** nicht immer ausreichend kompensieren: z.B. versagen beide Abschätzungen — weil sie einen Fehler $|\Delta f| \approx 0$ liefern würden! —, wenn f an der "Mess"–Stelle die Ableitungen

$\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx 0\,,\ \ldots\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \approx 0$ hat.

z.B.: Ist $f(x,y) = -4xy + 8x - 16y + 35$ und — wie im letzten Beispiel — $x = -4 \pm 0.12$, $y = 2 \pm 0.06$, so ist $f(-4\,,\,2) = 3$, $f_x(x,y) = -4y + 8$, also $f_x(-4\,,\,2) = 0$, und $f_y = -4x - 16$, also $f_y(-4\,,\,2) = 0$: mit beiden Abschätzungen ergäbe sich der Fehler $\Delta f = 0$!

Um auch in solchen Fällen vernünftige Fehlerabschätzungen zu bekommen, kann man z.B. die Taylorentwicklung von f an der "Mess"–Stelle zu Hilfe nehmen (s. Abschnitt 11.A).

10 Potenzreihen und Taylorentwicklung.

Stichpunkte: Potenzreihen für eine Variable, Konvergenzradius, Wurzel– und Quotientenkriterium; Taylorkoeffizienten, Taylorentwicklung, Taylorpolynome und Taylorrestglied; Gegenbeispiel: $e^{-}1/x^2$; gängige Reihenentwicklungen; Taylorentwicklung für mehrere Variablen.

10.A Allgemeine Potenzreihen.

Eine **Potenzreihe** an der (Entwicklungs–) Stelle x_0 ist eine Reihe der Form

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n}$$

mit der **Variablen** $x \in \mathbb{K}$
und den **Koeffizienten** $c_n \in \mathbb{K}$.

Die **Grenzfunktion** oder **Summenfunktion** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ einer solchen Potenzreihe ist an jeder Stelle x definiert, an der die Reihe *eigentlich* konvergiert; für jedes *feste* $x \in \mathbb{K}$ ist diese Reihe eine (reelle oder komplexe) Zahlenreihe, über deren Konvergenz oder Nicht–Konvergenz mit Hilfe der Konvergenzkriterien für Zahlenreihen entschieden werden kann (siehe Abschnitt 4.D). Man erhält auf diese Weise z.B. das

Quotienten– und Wurzelkriterium für Potenzreihen:

10.1

Wenn einer der Grenzwerte $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ oder $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$
eigentlich oder uneigentlich existiert,
dann hat die **Potenzreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ den **Konvergenzradius**

$\boxed{\rho = \frac{1}{L}}$ (mit $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$),

d.h. sie konvergiert (sogar absolut) an jeder Stelle x mit $|x - x_0| < \rho$
und sie divergiert an jeder Stelle x mit $|x - x_0| > \rho$.

An den Stellen x mit $|x - x_0| = \rho$ muss man im Einzelfall gesondert über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe entscheiden!

Denn: für festes x sei $a_n := c_n\,(x - x_0)^n$. Mit $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ bzw. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ ist dann:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot |x - x_0| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \cdot |x - x_0| \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \cdot |x - x_0| \, .$$

Aus dem Quotienten– und Wurzelkriterium für Zahlenreihen (Nr. 4.9) folgt, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ absolut *konvergiert*, wenn $L \cdot |x-x_0| < 1$, wenn also $|x-x_0| < \dfrac{1}{L}$, und dass sie *divergiert*, wenn $L \cdot |x-x_0| > 1$, d.h. wenn $|x-x_0| > \dfrac{1}{L}$. $\blacksquare$

Beispiele:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad = \quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots :$$

Mit $c_n = \dfrac{1}{n!}$ ist $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} \to 0 \;\; (n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ diese Reihe (= Exponentialreihe) hat den Konvergenzradius $\boxed{\rho = 1/0 = \infty}$, d.h. sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad = \quad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots :$$

Mit $c_n = 1$ ist $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \to 1 \;\; (n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ diese Reihe (=geometrische Reihe) hat den Konvergenzradius $\boxed{\rho = 1/1 = 1}$, d.h. sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und sie divergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > 1$ (sogar für $|x| \geq 1$).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n \quad = \quad 1 \cdot x + 4 \cdot x^2 + 9 \cdot x^3 + 16 \cdot x^4 + \cdots :$$

Mit $c_n = n^n$ ist $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{n^n} = n \to \infty \;\; (n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ diese Reihe hat den Konvergenzradius $\boxed{\rho = 1/\infty = 0}$, d.h. sie konvergiert außer an der Stelle $x = 0$ nirgends.

Beachte: wenn die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$

- an einer Stelle $x = \bar{x}$ *konvergiert*, dann **konvergiert** sie eigentlich und absolut an jeder Stelle x mit $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$,

- an einer Stelle $x = \tilde{x}$ *divergiert*, dann **divergiert** sie an jeder Stelle x mit $|x-x_0| > |\tilde{x}-x_0|$.

Der **Konvergenzbereich** der Reihe ist (wenn er nicht nur aus x_0 besteht):
– **im Reellen** das zu x_0 symmetrische **Intervall** $]\,x_0-\varrho\,,\, x_0+\varrho\,[$ und
– **im Komplexen** das Innere der **Kreisscheibe** um x_0 vom Radius ρ:

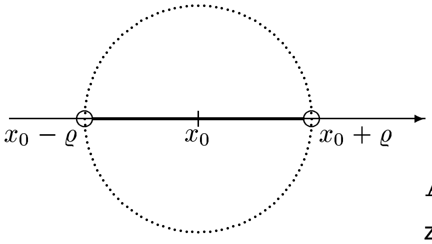
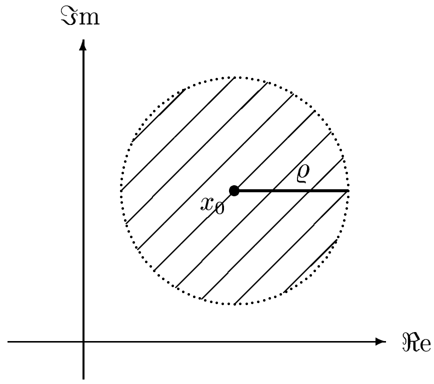


Abbildung 10.1
zum Konvergenzradius ρ



10.2

Potenzreihen dürfen **gliedweise differenziert und integriert** werden:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n c_n (x-x_0)^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-x_0)^n \ ,$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right) + c = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (x-x_0)^n \ .$$

Für *beliebige* Funktionenreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist dies **in der Regel nicht richtig!**

z.B.:

1. $(e^x)' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ .$

2. Für $|x| < 1$ ist $\left(\ln(1-x)\right)' = -\frac{1}{1-x} \overset{\text{s.u.}}{=} -\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, damit:

$$\ln(1-x) = -\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c = c - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ ;$$

mit $x = 0$ folgt: $0 = \ln(1-0) = c - 0$, d.h. $c = 0$, somit:

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \quad \text{für } |x| < 1} \ .$$

10.B Taylorreihe und Taylorpolynom.

Im letzten Abschnitt haben wir uns u.a. überlegt, für welche x es zu einer *gegebenen* **Potenzreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ eine **Summenfunktion** $f(x)$ mit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ *gibt*; nur in Ausnahmefällen ist es hierbei möglich, diese Grenzfunktion $f(x)$ auch explizit anzugeben.

In diesem Abschnitt geht es umgekehrt darum zu entscheiden, für welche x sich eine *gegebene* **Funktion** $f(x)$ als **Potenzreihe** darstellen lässt, also Summenfunktion einer "geeigneten" Potenzreihe *ist*:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$; in diesem Fall kann diese "geeignete" Potenzreihe stets — mit Hilfe eines einfachen "Rezeptes"! — explizit angegeben werden.

Einer der Vorteile, die eine Entwicklung von $f(x)$ als Potenzreihe um einen Punkt x_0 bietet, ist z.B. die Möglichkeit, die Funktion $f(x)$ dann sogar in der Nähe von x_0 näherungsweise als Polynom darstellen zu können: $f(x) \approx \sum_{n=0}^{N} c_n (x - x_0)^n$ — mit einem bequemen "Rezept" zur Gewinnung dieses Polynoms!

In diesem Zusammenhang ist die folgende Feststellung von zentraler Bedeutung:

10.3

Wenn $f(x)$ für gewisse x als **Potenzreihe** an der Stelle x_0 darstellbar ist:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, dann sind die Koeffizienten c_n dieser Potenzreihe die

Taylorkoeffizienten von f an der Stelle x_0 : $\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$.

Beachte — und staune! —: man bekommt $f(x)$ auf einer *ganzen Umgebung* der Stelle x_0, wenn man nur *an der einen* Stelle x_0 den Funktionswert $f(x_0)$ und alle Ableitungen $f^{(n)}(x_0)$ kennt! (Wenn $f(x)$ an einer Stelle x_0 Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, dann ist $f(x)$ in der Nähe dieser Stelle "sehr glatt".)

(Man kann dieses Resultat als einfache Differentiationsübung durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$ erhalten.)

Wenn $f(x)$ an einer Stelle x_0 beliebig oft differenzierbar ist, kann man daher stets die Potenzreihe mit den **Taylorkoeffizienten** bilden — zunächst unabhängig davon, inwieweit diese Reihe die Funktion $f(x)$ darstellt:

10.4

Für eine an einer Stelle x_0 beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ ist

$\boxed{\mathcal{T}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n}$ **die Taylorreihe von f an der Stelle x_0** und

$\boxed{\mathcal{T}_N(x) := \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n}$ **das N–te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0.**

z.B.: Sei $\boxed{f(x) = \cos x}$ und $x_0 = 0$.

Es ist: $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, ..., somit:

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$, ... usw., allgemein:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für alle ungeraden } n \in \mathbb{N}\ , \\ +1 & \text{für } n = 0, 4, 8, \dots\ , \\ -1 & \text{für } n = 2, 6, 10, \dots\ . \end{cases}$$

Damit ergibt sich für die Funktion $f(x) = \cos x$ an der Stelle 0 die **Taylorreihe:**

$$\boxed{\mathcal{T}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}\ .$$

10.5 Der Praktiker geht in der Regel stillschweigend davon aus, dass jede Funktion $f(x)$, die an einer Stelle x_0 eine **Taylorreihe** besitzt, in *hinreichender Nähe* von x_0 auch durch diese dargestellt wird:

$$\boxed{f(x) = \mathcal{T}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n\ , \text{ falls } x \text{ in der Nähe von } x_0 \text{ liegt}}\ ;$$

in diesem Fall lässt sich $f(x)$ in *hinreichender Nähe* von x_0 stets durch ihr N–tes **Taylorpolynom** approximieren (umso besser, je größer N ist):

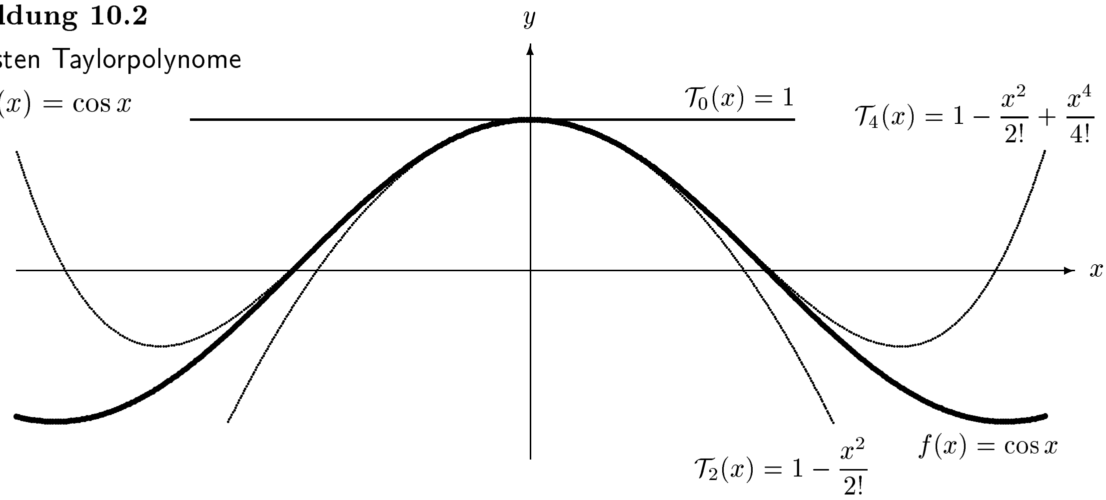
$$\boxed{f(x) \approx \mathcal{T}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n\ , \text{ falls } |x - x_0| \ll 1}\ .$$

z.B.: Der Praktiker wird also stillschweigend davon ausgehen, dass zumindest *in hinreichender Nähe* von $x_0 = 0$ gilt: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

(das gilt tatsächlich sogar *für alle* $x \in \mathbb{C}$, s.u.) und dass für $|x| \ll 1$

$\cos x \approx 1$ oder (genauer): $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ oder (noch genauer): $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $\dots$:

Abbildung 10.2
die ersten Taylorpolynome
von $f(x) = \cos x$



10.6 Wir wollen nocheinmal festhalten:

$\boxed{1}$ Die *einzige* **Potenzreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, durch die eine Funktion $f(x)$ in der Nähe einer Stelle x_0 dargestellt werden kann, ist die **Taylorreihe** $\mathcal{T}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ mit den **Taylorkoeffizienten** $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$; zumindest in "hinreichender Nähe" von x_0 gilt dann:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \mathcal{T}(x)} \; .$$

$\boxed{2}$ Ist (irgendwoher) eine **Potenzreihendarstellung** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ gegeben, so **ist diese Reihe die Taylorreihe von** $f(x)$ **an der Stelle** x_0 , insbesondere **sind die Koeffizienten** c_n **die Taylorkoeffizienten** $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ und liefern z.B. die Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 : $\boxed{f^{(n)}(x_0) = n!\, c_n}$.

$\boxed{3}$ Für $N \in \mathbb{N}_0$ ist die N–te Partialsumme dieser Potenzreihe **das** N**–te Taylorpolynom** $\mathcal{T}_N(x)$ **von** $f(x)$ **an der Stelle** x_0 und für $|x-x_0| \ll 1$ gilt:

$$\boxed{f(x) \approx \sum_{n=0}^{N} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \mathcal{T}_N(x)} \; .$$

$\boxed{4}$ **Eine Funktion $f(x)$ in der Nähe einer Stelle x_0 durch eine Potenzreihe darzustellen oder in eine Potenzreihe zu entwickeln heißt also, die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle x_0 zu bestimmen; und wenn $f(x)$ in der Nähe von x_0 durch ein Polynom vom Grad N zu approximieren ist, so ist das N–te Taylorpolynom von $f(x)$ an dieser Stelle gesucht.**

10.7 Mit dem 1.Taylorpolynom $\mathcal{T}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$ von f an der Stelle x_0 hat man stets auch die **Gleichung der Tangente** an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$: $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)}$.

Zum Beispiel: Ist $f(x) = x^2 - x + 1$, so ist dies bereits die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ (mit $c_n = 0$ für $n > 2$) und ist das 2.Taylorpolynom von $f(x)$ an dieser Stelle.

Die Taylorentwicklung bzw. das 2.Taylorpolynom von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = -2$ ergibt sich durch eine einfache Umformung:

$$\begin{aligned} f(x) &= [(x+2)-2]^2 - [(x+2)-2] + 1 = (x+2)^2 - 4(x+2) + 4 - (x+2) + 2 + 1 = \\ &= 7 - 5(x+2) + (x+2)^2 \ ; \end{aligned}$$

hier kann man z.B. *ablesen*, dass $f(-2) = 7$, $f'(-2) = -5$, $f''(-2) = 2$ und $f^{(n)}(-2) = 0$ für $n > 2$.

Natürlich kann man auch zuerst $f(-2) = 7$, $f'(-2) = -5$, $f''(-2) = 2$ und $f^{(n)}(-2) = 0$ für $n > 2$ *berechnen* und *damit* die Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = -2$ erhalten:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-2) + f'(-2)\,(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}\,(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}\,(x+2)^3 + \cdots = \\ &= 7 - 5(x+2) + 2(x+2)^2 \ . \end{aligned}$$

Die Tangente an die Kurve $y = x^2 - x + 1$ an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Gleichung: $y = -x + 1$ und die Tangente an der Stelle $x_0 = -2$ ist: $y = 7 - 5(x+2) = -5x - 3$.

10.C Taylorrestglied. (*)

Will man genauer wissen, in *welcher* "hinreichenden Nähe" von x_0 eine Funktion $f(x)$ durch ihre Taylorreihe $\mathcal{T}(x)$ dargestellt werden kann und welcher Fehler entsteht, wenn $f(x)$ durch ihr Taylorpolynom $\mathcal{T}_N(x)$ approximiert wird, muss man die **Restglieder** untersuchen:

10.8

Mit dem N–ten Taylorpolynom $\mathcal{T}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ ist

$\boxed{\mathcal{R}_N(x) := f(x) - \mathcal{T}_N(x)}$ **das N–te Taylorrestglied von $f(x)$ an der Stelle x_0.**

$\mathcal{R}_N(x)$ ist also der **absolute Fehler**, der entsteht, wenn die Funktion $f(x)$ durch ihr N–tes Taylorpolynom approximiert wird.

Dieses Taylorrestglied lässt sich — mit Hilfe des Mittelwertsatzes — auf verschiedene Weisen abschätzen, z.B.:

10.9

Wenn $f(x)$ auf einer Umgebung U von x_0 mindestens $(N+1)$–mal stetig differenzierbar ist, gibt es zu jedem $x \in U$ eine Zahl ξ_x mit $|\xi_x - x_0| < |x - x_0|$

so, dass $\boxed{\mathcal{R}_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}}$.

Wenn man also die Ableitungen $f^{(N+1)}(x)$ auf einer Umgebung U von x_0 abschätzen kann, hat man hiermit eine Abschätzung für den Fehler $|f(x) - \mathcal{T}_N(x)|$ und man kann entscheiden, ob $f(x) = \mathcal{T}(x)$, denn offenbar ist

10.10 $\boxed{f(x) = \mathcal{T}(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{N\to\infty} |\mathcal{R}_N(x)| = 0}$.

z.B.: Für $f(x) = \cos x$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $f^{(n)}(x) = \{\pm \sin x$ oder $\pm \cos x\}$; damit hat man für alle $x, \xi_x \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$: $|f^{(n)}(\xi_x)| \leq 1$. Hieraus folgt für alle $N \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{C}$:

$$|\mathcal{R}_N(x)| = \frac{|f^{(N+1)}(\xi_x)|}{(N+1)!}|x|^{N+1} \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \to 0 \ \ (N \to \infty) .$$ (s. Nr. 3.15, Beispiel (b))

Daher wird die Funktion $f(x) = \cos x$ **überall** durch ihre Taylorreihe bei $x_0 = 0$ dargestellt:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad \forall\, x \in \mathbb{C}} .$$

Außerdem ergibt sich für alle $x \in \mathbb{C}$ und alle $N \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung:

$$\boxed{|\cos x \ - \ \mathcal{T}_N(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}} , \text{ d.h.: } \cos x = \mathcal{T}_N(x) \pm \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} ,$$

also z.B.: (s.o. die Skizze!)

$$\left|\cos x \ - \ \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{|x|^3}{6} , \text{ d.h.: } \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \pm \frac{|x|^3}{6} , \text{ d.h.: } -\frac{|x|^3}{6} \leq \cos x \ - \ \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{|x|^3}{6} :$$

z.B. bekommt man für $x = \frac{\pi}{8}$ (≈ 0.4) die Abschätzung:
$\cos \frac{\pi}{8} = 0.923 \pm 0.010$, d.h. $0.913 \leq \cos \frac{\pi}{8} \leq 0.933$ (exakt: $\cos \frac{\pi}{8} = 0.9239$),
oder für $x = \frac{\pi}{4}$ (≈ 0.7854):
$\cos \frac{\pi}{4} = 0.69 \pm 0.92$, d.h. $0.61 \leq \cos \frac{\pi}{4} \leq 0.77$ (exakt: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$).

Da Potenzreihen gliedweise differenziert werden dürfen, bekommt man schließlich auch noch die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \sin x \quad &= (-\cos x)' = \left(-1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} \pm \cdots\right)' = \\ &= 2\,\frac{x^1}{2!} - 4\,\frac{x^3}{4!} + 6\,\frac{x^5}{6!} - 8\,\frac{x^7}{8!} \pm \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots . \end{aligned}$$

Da sich die Ableitungen von $\sin x$ genauso abschätzen lassen wie die Ableitungen von $\cos x$, bekommt man auch dieselbe Restglied–Abschätzung: (für alle $x \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{|\sin x \ - \ \mathcal{T}_N(x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}} , \text{ d.h.: } \sin x = \mathcal{T}_N(x) \pm \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} .$$

10.D Wichtige Potenzreihen–Entwicklungen.

10.11

Geometrische Reihe: $(x \in \mathbb{C},\ |x| < 1)$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Exponentialreihe: $(x \in \mathbb{C})$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Sinus–Reihe: $(x \in \mathbb{C})$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

Cosinus–Reihe: $(x \in \mathbb{C})$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots$$

Logarithmus–Reihe: $(x \in \mathbb{R},\ -1 < x \leq 1)$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots$$

Binomialreihe: $(\alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{C},\ |x| < 1)$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots$$

Die Koeffizienten $\binom{\alpha}{n}$ in der Binomialreihe sind die **verallgemeinerten Binomialkoeffizienten:** $\boxed{\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ ,\quad \binom{\alpha}{0} := 1}$.

Mit der Exponentialreihe ergibt sich z.B. für alle $x \in \mathbb{C}$:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\,\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\,\frac{x^7}{7!} \pm \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots\right) = \cos x + i\,\sin x\ :$$

wir erhalten die wichtige **Euler'sche Formel:** (s. Lektion 14 !)

10.12

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{C}$:

$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n - (-x)^n}{n!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ und

$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n + (-x)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$; wir haben:

10.13

die **Sinus–hyperbolicus–Reihe:** $(x \in \mathbb{C})$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

und die **Cosinus–hyperbolicus–Reihe:** $(x \in \mathbb{C})$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

(Beachte die ähnliche Struktur dieser beiden Reihen und der Sinus– bzw. Cosinus–Reihe!)

Zum Beispiel: Um die Funktion $\boxed{f(x) = \frac{1}{3+x}}$ in der Nähe von $x_0 = 1$ durch ein Polynom $P_3(x)$ vom Grad 3 zu approximieren, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen:

1. Der Fußweg:

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)\,(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)\,(x-1)^3$$

ist das 3.Taylorpolynom an der Stelle $x_0 = 1$; um dieses zu erhalten, müssen zunächst die Ableitungen $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ und $f'''(1)$ bestimmt werden:

$\boxed{f(1) = \frac{1}{4}}$; $f'(x) = -\frac{1}{(3+x)^2}$, $\boxed{f'(1) = -\frac{1}{16}}$; $f''(x) = \frac{2}{(3+x)^3}$, $\boxed{f''(1) = \frac{1}{32}}$;

$f'''(x) = -\frac{6}{(3+x)^4}$, $\boxed{f'''(1) = -\frac{3}{128}}$. Damit ist:

$$\boxed{f(x) \approx P_3(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x-1) + \frac{1}{64}(x-1)^2 - \frac{1}{256}(x-1)^3 \quad \text{für } |x-1| \ll 1} .$$

2. Verwendung bekannter Reihen:

$$f(x) = \frac{1}{4+(x-1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} =$$ [geometrische Reihe; Konvergenz für $|x-1| < 4$]

$= \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$: das **ist** bereits die **Taylorreihe** von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$; für alle x mit $|x-1| < 4$ stellt sie $f(x)$ dar!

Das gesuchte Polynom ist die 3.Partialsumme dieser Reihe:

$$\boxed{P_3(x) = \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x-1) + \frac{1}{64}(x-1)^2 - \frac{1}{256}(x-1)^3} .$$

An der Taylorreihe kann man z.B. ablesen: $f^{(5)}(1) = 5!\cdot\frac{(-1)^5}{4^6} = -\frac{15}{512}$.

10.E Taylor–Entwicklung bei mehreren Variablen.

Für die Potenzreihenentwicklung von Funktionen mit mehreren Variablen gilt entsprechend dasselbe wie im Fall einer Variablen:

10.14

Sei $f = f(x, y, \ldots, z)$ an der Stelle $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ beliebig oft differenzierbar:

dann ist $\mathcal{T}(x, y, \ldots z) =$

$$= \sum_{k,m,\ldots,n=0}^{\infty} \frac{D_x^k D_y^m \cdots D_z^n f(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{k!m! \cdots n!} (x - x_0)^k (y - y_0)^m \cdots (z - z_0)^n$$

die **Taylorreihe** von f an der Stelle $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$

mit den **Taylorkoeffizienten**:

$$c_{k,m,\ldots,n} = \frac{D_x^k D_y^m \cdots D_z^n f(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{k!m! \cdots n!} ;$$

für $N \in \mathbb{N}$ ist das Polynom: $\mathcal{T}(x, y, \ldots z) =$

$$= \sum_{k,m,\ldots,n=0}^{k+m+\cdots+n=N} \frac{D_x^k D_y^m \cdots D_z^n f(x_0, y_0, \ldots, z_0)}{k!m! \cdots n!} (x - x_0)^k (y - y_0)^m \cdots (z - z_0)^n$$

das **N–te Taylorpolynom von f an der Stelle** $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$.

Wie im Fall einer Variablen ist die Taylorentwicklung an einer Stelle $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ die *einzig mögliche* Potenzreihenentwicklung von f an dieser Stelle und die zugehörigen Taylorpolynome sind die *einzigen* Polynome, durch die f in der Nähe dieser Stelle beliebig gut approximiert werden kann.

Bei Verwendung von Multi–Indices $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in N_0^n$ und mit den für Multi–Indices üblichen Konventionen:

$|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_n$, $\mathbf{k}! := k_1! \cdots k_n!$, $D^{\mathbf{k}} f := D_{x_1}^{k_1} \cdots D_{x_n}^{k_n} f$ und

$(\vec{x} - \vec{x_0})^{\mathbf{k}} := (x_1 - x_{01})^{k_1} \cdots (x_n - x_{0n})^{k_n}$ lassen sich Taylorreihe und Taylorpolynome einer Funktion $f = f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ an einer Stelle $\vec{x_0} = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ wie bei Funktionen einer Variablen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{x}) = \mathcal{T}(\vec{x}) &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n} \frac{D^{\mathbf{k}} f(\vec{x_0})}{\mathbf{k}!} (\vec{x} - \vec{x_0})^{\mathbf{k}} \\ f(\vec{x}) \approx \mathcal{T}_N(\vec{x}) &= \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n \\ |\mathbf{k}| \leq N}} \frac{D^{\mathbf{k}} f(\vec{x_0})}{\mathbf{k}!} (\vec{x} - \vec{x_0})^{\mathbf{k}} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad |\vec{x} - \vec{x_0}| \ll 1 .$$

10.15

Ist $f = f(x,y)$ eine Funktion von zwei Variablen, so liefert das 1.Taylorpolynom $\mathcal{T}_1(x,y)$ die Gleichung der **Tangentialebene** an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)}\ .$$

z.B.: Um die Funktion $\boxed{f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}}$ in der Nähe von $(x_0,y_0) = (1,0)$ durch ein Polynom $P_2(x,y)$ vom (Gesamt–)Grad 2 zu approximieren, kann man wieder zwei Wege gehen:

1. der Fußweg: $P_2(x,y)$ ist das 2.Taylorpolynom von f an der Stelle $(1,0)$, also:

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(1,0) + f_x(1,0)\cdot(x-1) + f_y(1,0)\cdot y + \tfrac{1}{2}\,f_{xx}(1,0)\cdot(x-1)^2 + \\ &\quad + f_{xy}(1,0)\cdot(x-1)y + \tfrac{1}{2}\,f_{yy}(1,0)\cdot y^2 \end{aligned} \ .$$

Daher müssen zunächst die einzelnen Ableitungen an der Stelle $(1,0)$ bestimmt werden:

$\boxed{f(1,0) = 1}$; $f_x(x,y) = -\frac{1}{2}\,(x-y)^{-3/2}$, $\boxed{f_x(1,0) = -\dfrac{1}{2}}$; $f_y(x,y) = \frac{1}{2}\,(x-y)^{-3/2}$,

$\boxed{f_y(1,0) = \dfrac{1}{2}}$; $f_{xx}(x,y) = \frac{3}{4}\,(x-y)^{-5/2}$, $\boxed{f_{xx}(1,0) = \dfrac{3}{4}}$; $f_{xy}(x,y) = -\frac{3}{4}\,(x-y)^{-5/2}$,

$\boxed{f_{xy}(1,0) = -\dfrac{3}{4}}$; $f_{yy}(x,y) = \frac{3}{4}\,(x-y)^{-5/2}$, $\boxed{f_{yy}(1,0) = \dfrac{3}{4}}$.

Für $|x-1| \ll 1$ und $|y| \ll 1$ ist damit:

$$\boxed{f(x,y) \approx P_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\,(x-1) + \frac{1}{2}\,y + \frac{3}{8}\,(x-1)^2 - \frac{3}{4}\,(x-1)y + \frac{3}{8}\,y^2}\ .$$

2. Verwendung bekannter Reihen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x-y}} = \Big(1 + [(x-1)-y]\Big)^{-1/2} = \\ &\qquad \Big[\ \text{Binomialreihe, für } |(x-1)-y| < 1\ \Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}\,[(x-1)-y\,]^n \approx \\ &\qquad \Big[\ \text{falls } |x-1| \ll 1 \text{ und } |y| \ll 1\ \Big] \\ &\approx 1 - \frac{1}{2}\,[\,(x-1)-y\,] + \binom{-1/2}{2}\,[\,(x-1)-y\,]^2 = \\ &\qquad \left[\ \text{da } \binom{-1/2}{2} = \frac{-1/2\,(-1/2\,-1)}{2} = \frac{3}{8}\ \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,(x-1) + \frac{1}{2}\,y + \frac{3}{8}\,(x-1)^2 - \frac{3}{4}\,(x-1)y + \frac{3}{8}\,y^2 =: P_2(x,y) \end{aligned}$$

Die **Tangentialebene** E an die Fläche $z = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ im Punkt $(1, 0, 1)$ hat die Gleichung:

$z = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}\,y$, also: $\boxed{E: \;\; x - y + 2z = 3}$.

Ein anderes Beispiel: Es ist der Anfang der Potenzreihenentwicklung (bis zur Gesamtordnung 3) der Funktion $g(x,y) = \tan(x-y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (\pi/2\,,\, -\pi/2)$ gesucht:

Mit $h := (x - \pi/2)$ und $k := (y + \pi/2)$ hat man zunächst:

$(x-y) = [\,(x-\pi/2) - (y+\pi/2)\,] + \pi = [\,h-k\,] + \pi$.

Wenn x hinreichend nahe bei $\pi/2$ und y hinreichend nahe bei $-\pi/2$ liegt, ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \tan(x-y) = \tan\left([\,h-k\,] + \pi\right) = \tan[\,h-k\,] = \frac{\sin[\,h-k\,]}{\cos[\,h-k\,]} = \\
&= \left([\,h-k\,] - \frac{1}{3!}\,[\,h-k\,]^3 + - \cdots\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2!}\,[\,h-k\,]^2 - + \cdots\right)} = \\
&= \left([\,h-k\,] - \frac{1}{3!}\,[\,h-k\,]^3 + - \cdots\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2!}\,[\,h-k\,]^2 - + \cdots\right)^n = \\
&= \left([\,h-k\,] - \frac{1}{3!}\,[\,h-k\,]^3 + - \cdots\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2!}\,[\,h-k\,]^2 - + \cdots\right) + \cdots\right) = \\
&= \left([\,h-k\,] - \frac{1}{6}\,[\,h-k\,]^3 + - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\,[\,h-k\,]^2 + \cdots\right) = \\
&= [\,h-k\,] - \frac{1}{6}\,[\,h-k\,]^3 + \frac{1}{2}\,[\,h-k\,]^3 + \cdots \text{ (Potenzen höherer Ordnung) } = \\
&= h - k + \frac{1}{3}\,h^3 - h^2k + hk^2 - \frac{1}{3}\,k^3 + \cdots \text{ (Potenzen höherer Ordnung) } = \\
&= (x-\pi/2) - (y+\pi/2) + \frac{1}{3}(x-\pi/2)^3 - (x-\pi/2)^2(y+\pi/2) + \\
&\quad + (x-\pi/2)(y+\pi/2)^2 - \frac{1}{3}(y+\pi/2)^3 + \cdots \text{ (Potenzen höherer Ordnung)} .
\end{aligned}
$$

11 Fehlerabschätzung (II), Extrema, Höhenlinien.

Stichpunkte: Fehlerabschätzung durch Potenzreihenentwicklung; Extrema ohne Nebenbedingung, Lineare Regression, Hesse–Determinante bei zwei Variablen; Extrema mit Nebenbedingung, Lagrange'scher Multiplikator; Höhenlinien, Niveauflächen.

11.A Fehlerabschätzung (II).

Die **Potenzreihenentwicklung** einer Funktion $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ liefert eine recht brauchbare **Fehlerabschätzung** für $f(x_1, \ldots, x_n)$, wenn die "Mess"–Werte $x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_n = \bar{x}_n$ mit einem Fehler $\pm\Delta x_1$ bzw.... $\pm\Delta x_n$ behaftet sind. (s. auch Abschnitt 9.C):

Mit dem 2. Taylorpolynom von f an der "Mess"–Stelle $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ gilt zunächst (wenn die Fehler $|\Delta x_1|, \ldots, |\Delta x_n|$ nicht zu groß sind):

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx \sum_{k_1+\cdots+k_n=0}^{2} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} (x_1 - \bar{x}_1)^{k_1} \cdots (x_n - \bar{x}_n)^{k_n}\,, \text{ somit:}$$

$$\begin{aligned} |\Delta f| = {} & \Big| f(x_1, \ldots, x_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \Big| \approx \\ \approx {} & \sum_{k_1+\cdots+k_n=1}^{2} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \left| \frac{\partial^{k_1+\cdots k_n} f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right| |\Delta x_1|^{k_1} \cdots |\Delta x_n|^{k_n} = \\ = {} & \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial x_j} \right| |\Delta x_j| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial x_j^2} \right| |\Delta x_j|^2 + \\ & + \sum_{1 \le j < k \le n} \left| \frac{\partial^2 f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial x_j \, \partial x_k} \right| |\Delta x_j| \, |\Delta x_k| \,; \end{aligned}$$

damit haben wir die **Fehlerabschätzung:**

11.1
$$\boxed{|\Delta f| \le \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| |\Delta x_j| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right| |\Delta x_j|^2 + \sum_{1 \le j < k \le n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k} \right| |\Delta x_j| \, |\Delta x_k|}$$

Diese Abschätzung liefert auch dann noch echte Fehlergrenzen, wenn f an der "Mess"–Stelle die Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ hat.

(Nimmt man das 1. Taylorpolynom statt des 2., so ergibt sich hier nur die erste der drei Summen: das ist gerade die "optimistische" Fehlerabschätzung aus Nr. 9.6.)

z.B.: Für $f(x, y) = -4xy + 8x - 16y + 35$ und $x = -4 \pm 0.12$, $y = 2 \pm 0.06$ ist

$f(-4, 2) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-4, 2) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-4, 2) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4, 2) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(-4, 2) = -4$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-4, 2) = 0$. Das liefert die Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}|\Delta f| \leq\ & \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y| + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| |\Delta x|^2 + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right| |\Delta x||\Delta y| + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| |\Delta y|^2 = \\ =\ & 4 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{6}{100} \approx 0.03\ ,\end{aligned}$$

d.h. es ist $f(x,y) = 3 \pm |\Delta f| \approx 3 \pm 0.03$ und für $f(x,y)$ hat man einen prozentualen Fehler von etwa $\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \approx \frac{1}{100} = 1\%$.

Man kann mit Hilfe des Mittelwertsatzes $\boxed{\text{D}}$ (Abschnitt 9.A) auch für Funktionen $f(\vec{r})$ von mehreren Variablen die Restglieder $\mathcal{R}_N(\vec{r}) = f(\vec{r}) - \mathcal{T}_N(\vec{r})$ abschätzen (entsprechend Nr. 10.9) und damit eine sehr zuverlässige (allerdings auch etwas aufwendige) Fehlerabschätzung bekommen.

Die oben in Nr. 11.1 erhaltene Fehlerabschätzung mit Hilfe des 2. Taylorpolynoms ist in der Regel völlig ausreichend — realistischer und zuverlässiger als die beiden Abschätzungen aus Nr. 9.6 und 9.7 — und ist (besonders wenn man bekannte Reihenentwicklungen verwenden kann!) nicht allzu mühsam zu gewinnen.

z.B.: (siehe das Beispiel im Anschluss von Nr. 9.7)

Für die Funktion $f(x,y) = e^{x+y^2-1}$ bekommt man mit der Exponentialreihe:

$$\begin{aligned}f(x,y) = e^{x+y^2-1} =\ & e^{(x+4)-4+((y-2)+2)^2-1} = e^{-1}\, e^{(x+4)+4(y-2)+(y-2)^2} = \\ =\ & e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(x+4)+4(y-2)+(y-2)^2]^n}{n!} \approx \\ \approx\ & e^{-1} \Big(1 + (x+4) + 4(y-2) + (y-2)^2 + \\ & +\frac{1}{2}\left[(x+4)^2 + 8(x+4)(y-2) + 16(y-2)^2\right]\Big)\ , \quad \text{somit:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\Delta f| \leq\ & e^{-1}\left(|\Delta x| + 4|\Delta y| + |\Delta y|^2 + \frac{1}{2}|\Delta x|^2 + 4|\Delta x||\Delta y| + 8|\Delta y|^2\right) = \\ =\ & e^{-1}\left(\frac{12}{100} + 4\cdot\frac{6}{100} + \frac{1}{2}\cdot\frac{144}{10^4} + 4\cdot\frac{72}{10^4} + 9\cdot\frac{36}{10^4}\right) = \\ =\ & e^{-1}\,\frac{42.84}{100} \approx \frac{43}{100}\, e^{-1} \approx 0.16\ ,\end{aligned}$$

d.h. es ist $f(x,y) = e^{-1} \pm |\Delta f| \approx 0.37 \pm 0.16$ und für $f(x,y)$ hat man einen maximalen prozentualen Fehler von etwa $\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \approx \frac{43}{100} = 43\%$.

(In Abschnitt 9.C hat die "optimistische" Abschätzung einen prozentualen Fehler von 36% und die "pessimistische" Abschätzung einen prozentualen Fehler von 55% geliefert.)

11.B Extrema von Funktionen einer Variablen.

11.2

Ist $f(x)$ an der Stelle x_0 *stetig* und jeweils in einer Umgebung beiderseits von x_0 differenzierbar, so hat $f(x)$ an dieser Stelle *genau dann* ein **relatives Extremum**, wenn $f'(x)$ links und rechts von x_0 *verschiedenes* Vorzeichen hat: ein

- **relatives Minimum**, wenn $f'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_0$,
- **relatives Maximum**, wenn $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$;

hierbei ist es nicht erforderlich, daß $f'(x_0)$ selbst existiert: $y = f(x)$ kann z.B. bei x_0 eine "Spitze" haben!

Eine an der Stelle x_0 *differenzierbare* Funktion $f = f(x)$ hat an der Stelle x_0 *höchstens dann* ein **relatives Extremum**, wenn $f'(x_0) = 0$ ist, wenn also $y = f(x)$ an dieser Stelle eine waagrechte Tangente hat.

z.B.: Die Funktion $f(x) = e^{-|x|}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ zwar stetig, aber **nicht differenzierbar** — trotzdem hat $f(x)$ an dieser Stelle ein **Maximum**:

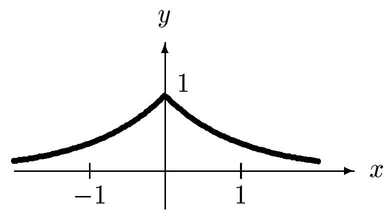


Abbildung 11.1 $y = e^{-|x|}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x<0 \text{ ist } f(x)=e^{x}, \quad f'(x)=e^{x}>0 \\ \text{für } x>0 \text{ ist } f(x)=e^{-x}, \quad f'(x)=-e^{-x}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; f(x) \text{ hat bei } x_0=0 \text{ ein } \mathbf{Maximum}.$$

An jeder anderen Stelle $x_0 \neq 0$ ist $f(x)$ differenzierbar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } x_0<0 \text{ ist } f'(x_0)=e^{x_0}>0 \\ \text{für } x_0>0 \text{ ist } f'(x_0)=-e^{-x_0}<0 \end{array}\right\}, \text{ also } f'(x_0)\neq 0 \;:\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ besitzt keine} \\ \text{weiteren Extrema!} \end{array}\right.$$

11.3

Hinreichende Bedingung, falls $f(x)$ in der Nähe von x_0 (genügend oft) differenzierbar ist:

Ist $k \geq 2$ *gerade* und ist $f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$,

$$\text{so hat } f(x) \text{ bei } x_0 \text{ ein} \left\{\begin{array}{l} \textbf{relatives Minimum}, \text{ wenn } f^{(k)}(x_0) > 0, \\ \textbf{relatives Maximum}, \text{ wenn } f^{(k)}(x_0) < 0; \end{array}\right.$$

ist $k \geq 3$ *ungerade* und ist $f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, so hat $f(x)$ bei x_0 einen **Wendepunkt**; im Fall $f'(x_0) = 0$ ist dies ein **Sattelpunkt**.

z.B.: Sei $f(x) = (x^2-1)^4$. Es ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x\,(x^2-1)^3 \,, \\ f''(x) &= 8\,(7x^2-1)(x^2-1)^2 \,, \\ f'''(x) &= 48x\,(7x^2-3)(x^2-1) \,, \\ f^{(4)}(x) &= 48\,(35x^4-30x^2+3) \,. \end{aligned}$$

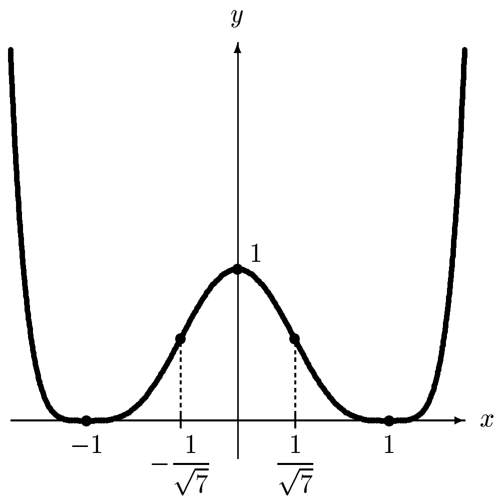


Abbildung 11.2 $y = (x^2-1)^4$

Hiermit ergibt sich:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0\,,\ x_{2,3} = \pm 1:$

$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow f(x)$ hat bei $x_1 = 0$ ein **Maximum** ($k = 2$ gerade),

$f''(\pm 1) = 0\,;$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm 1\,,\ x_{4,5} = \pm 1/\sqrt{7}:$

$f'''(\pm 1) = 0\,,$

$f'''(\pm 1/\sqrt{7}) = \pm\, 31.1010\ldots \neq 0 \Rightarrow$ $f(x)$ hat bei $x_{4,5} = \pm\, 1/\sqrt{7}$ je einen **Wendepunkt** ($k = 3$ ungerade);

$f^{(4)}(\pm 1) = 384 > 0 \Rightarrow f(x)$ hat bei $x_{2,3} = \pm 1$ je ein **Minimum** ($k = 4$ gerade).

11.C Extrema ohne Nebenbedingung bei mehreren Variablen.

11.4 Eine auf einer Umgebung von $\vec{r}_0 = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ differenzierbare Funktion $f = f(\vec{r}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ besitzt *höchstens dann* an der Stelle $\vec{r}_0$ ein **relatives Extremum**, wenn $\vec{r}_0$ ein **stationärer Punkt** von f ist, d.h.

wenn $\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{r}_0) = \vec{o}}$, wenn also: $\boxed{\dfrac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x_1} = \cdots = \dfrac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x_n} = 0}$.

In vielen Fällen reicht diese *notwendige* Bedingung bereits aus, um die Extrema einer Funktion $f(\vec{r})$ zu bestimmen: weiß man z.B., daß f ein Extremum (Minimum oder Maximum) *besitzt*, und hat $f(\vec{r})$ nur *einen* stationären Punkt $\vec{r}_0$, d.h. sind die Gleichungen: $\dfrac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_1} = \cdots = \dfrac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_n} = 0$ nur an *einer* Stelle $\vec{r} = \vec{r}_0$ erfüllt, so *muß* an dieser Stelle das Extremum liegen!

z.B.: Lineare Regression:

Durch n vorgegebene Punkte $(x_j\,,\,y_j)$, $j = 1, \ldots, n$, ist eine Gerade $\boxed{g\,:\,y = ax + b}$ so zu legen, dass die **mittlere quadratische Abweichung** $m = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\Big(y(x_j) - y_j\Big)^2}$ der Geraden zu den n Punkten **minimal** wird.

Die Anschauung zeigt, daß es eine in diesem Sinne "günstigste" Gerade g gibt. Außerdem vereinfacht es die Rechnung, wenn nicht das Minimum der mittleren quadratischen Abweichung, sondern stattdessen das Minimum des Quadrates der quadratischen Abweichung
$M = M(a,b) = n \cdot m^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(ax_j + b - y_j)^2$ ermittelt wird:

für a, b hat man damit die beiden Bestimmungsgleichungen: $\dfrac{\partial M}{\partial a} = 0$, $\dfrac{\partial M}{\partial b} = 0$, also:

$$\textbf{(1)}\quad 0 \overset{!}{=} \frac{\partial M}{\partial a} = 2\sum_{j=1}^{n}(ax_j + b - y_j)\,x_j = 2a\sum_{j=1}^{n}x_j^2 + 2b\sum_{j}x_j - 2\sum_{j=1}^{n}x_jy_j\,,$$

$$\textbf{(2)}\quad 0 \overset{!}{=} \frac{\partial M}{\partial b} = 2\sum_{j=1}^{n}(ax_j + b - y_j) = 2a\sum_{j=1}^{n}x_j + 2nb - 2\sum_{j=1}^{n}y_j\,;$$

mit den **Gauß'schen Symbolen:** $[\,x^ky^m\,] := \displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_j^ky_j^m \quad (k, m \in \mathbb{N}_0)$ ergeben sich

für a und b die beiden Gleichungen: $\boxed{\begin{array}{rcl}[\,x^2\,]\cdot a + [\,x\,]\cdot b &=& [\,xy\,]\\ [\,x\,]\cdot a + n\cdot b &=& [\,y\,]\end{array}}$, aus denen sich a und b (in den meisten Fällen eindeutig) berechnen lassen.

z.B.: seien die 4 Punkte $(1,\,2)$, $(2,\,4)$, $(2,\,3)$ und $(3,\,4)$ gegeben:

j	x_j	y_j	x_j^2	x_jy_j
1	1	2	1	2
2	2	4	4	8
3	2	3	4	6
$n = 4$	3	4	9	12
$\sum$	8	13	18	28
	$[\,x\,]$	$[\,y\,]$	$[\,x^2\,]$	$[\,xy\,]$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{rcl}18a + 8b &=& 28\\ 8a + 4b &=& 13\end{array}}$$

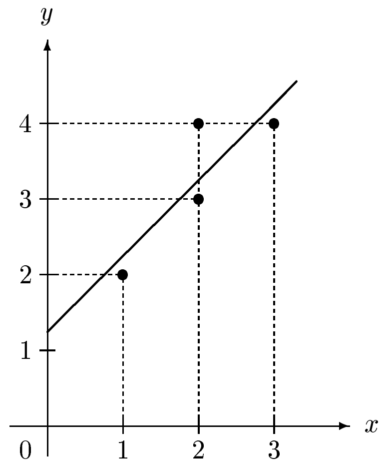


Abbildung 11.3
Regressionsgerade

Hieraus ergibt sich: $a = 1$, $b = 1.25$
und die Regressionsgerade durch die 4 gegebenen Punkte
hat die Gleichung: $\boxed{g\,:\,y = x + 1.25}$.

Die mittlere quadratische Abweichung von g zu den 4 Punkten ist:

$$m = \sqrt{\frac{1}{4}\Big((2.25-2)^2 + (3.25-4)^2 + (3.25-3)^2 + (4.25-4)^2\Big)} = 0.433\,.$$

11.5

Hinreichende Bedingung für Funktionen $f(x,y)$ von *zwei* Variablen, die auf einer Umgebung von $(x_0\,,\,y_0)$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung 2 besitzen:

Mit der **Hesse–Determinante** $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$ gilt:

Ist $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$ und $D(x_0, y_0) > 0$, so hat f bei (x_0, y_0) ein **relatives Extremum:**

- ein **relatives Minimum**, wenn $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$,
- ein **relatives Maximum**, wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$;

ist $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$ und $D(x_0, y_0) < 0$, so hat f bei (x_0, y_0) einen **Sattel– oder Jochpunkt**.

Im Fall $D(x_0, y_0) = 0$ sind weitere Untersuchungen nötig, um zu entscheiden, ob f an der Stelle (x_0, y_0) ein Extremum besitzt.

z.B.: Sei $\boxed{f(x,y) = 0.1\,x^3 + 0.3\,xy^2 - 1.5\,x - 1.2\,y + 12}$.

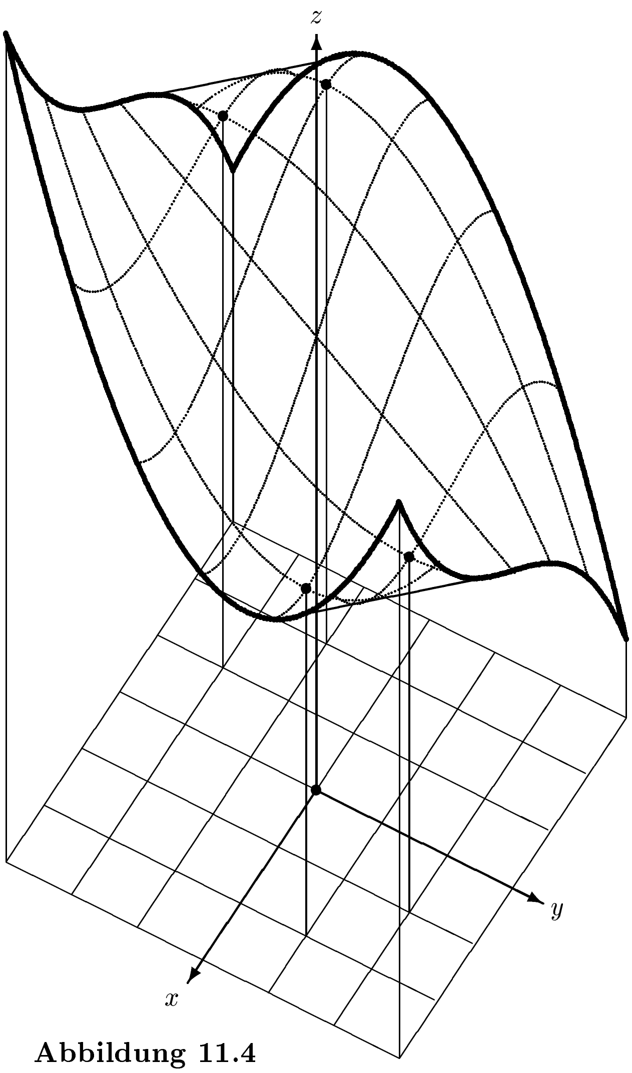


Abbildung 11.4

Dann ist $f_x = 0.3\,x^2 + 0.3\,y^2 - 1.5$, $f_y = 0.6\,xy - 1.2$ und aus den beiden *notwendigen* Bedingungen: $f_x = 0$, $f_y = 0$ bekommt man: $x^2 + y^2 = 5$, $xy = 2$, somit:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 5 + 4 = 9\,, \\ (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 5 - 4 = 1\,, \end{array} \right\}.$$

Das ergibt 4 **stationäre Punkte** von f:

1.: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = 2\,,\ y_1 = 1\,;$

2.: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = 1\,,\ y_2 = 2\,;$

3.: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_3 = -1\,,\ y_3 = -2\,;$

4.: $\left\{ \begin{array}{l} x + y = -3 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_4 = -2\,,\ y_4 = -1\,.$

Die Funktion $f(x)$ kann also *höchstens* an diesen vier stationären Stellen $\pm(2,1)$, $\pm(1,2)$ ein Extremum besitzen.

Da die Anschauung keine eindeutige Entscheidung zuläßt (s.Skizze), müssen die zweiten Ableitungen herangezogen werden, um mehr zu erfahren:

$f_{xx} = 0.6\,x$, $f_{xy} = 0.6\,y$, $f_{yy} = 0.6\,x$, somit $D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = 0.36\,(x^2 - y^2)$.

An den vier stationären Stellen ergibt sich:

$D(2,1) = 1.08 > 0$, $f_{xx}(2,1) = 1.2 > 0 \Rightarrow$
f hat an der Stelle $(x_1, y_1) = (2,1)$ ein **relatives Minimum**;

$D(1,2) = D(-1,-2) = -1.08 < 0 \Rightarrow$
f hat an den Stellen $(x_{2,3}, y_{2,3}) = \pm\,(1,2)$ einen **Sattel– oder Jochpunkt**;

$D(-2,-1) = 1.08 > 0$, $f_{xx}(-2,-1) = -1.2 < 0 \Rightarrow$
f hat an der Stelle $(x_4, y_4) = (-2,-1)$ ein **relatives Maximum**.

11.D Extrema mit Nebenbedingungen.

11.6

Eine Funktion $f = f(\vec{r}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, die auf einer Umgebung von $\vec{r}_0 = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ stetig differenzierbar ist, hat *höchstens dann* an der Stelle $\vec{r}_0$ ein **relatives Extremum unter k Nebenbedingungen:**

$\Phi_1(\vec{r}) = c_1\,, \ldots, \Phi_k(\vec{r}) = c_k \quad (c_1\,, \ldots, c_k$ konstant$)$,

wenn es k **Lagrange'sche Multiplikatoren** $\lambda_1\,, \ldots, \lambda_k$ (für jede Nebenbedingung eine dieser Hilfskonstanten) so gibt, dass an der Stelle $\vec{r}_0$ gilt:

$$\left.\begin{array}{ll}
\textbf{(1):} & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \cdots \lambda_k \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \\
\vdots & \\
\textbf{(n):} & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} + \cdots \lambda_k \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} \\
\textbf{(n+1):} & \Phi_1 = c_1 \\
\vdots & \\
\textbf{(n+k):} & \Phi_k = c_k
\end{array}\right\}$$

das sind $(n+k)$ Bestimmungsgleichungen für die n Unbekannten $\bar{x}_1\,, \ldots, \bar{x}_n$ und die k Hilfskonstanten $\lambda_1\,, \ldots, \lambda_k$.

Sind diese $(n+k)$ Gleichungen an der Stelle $\vec{r}_0$ erfüllt, so muß mit *zusätzlichen* Überlegungen oder mit Hilfe der Anschauung entschieden werden, ob an dieser Stelle ein Extremum unter den k Nebenbedingungen tatsächlich vorliegt und um welche Art von Extremum (Minimum oder Maximum, relativ oder absolut) es sich dann handelt!

Beispiele:

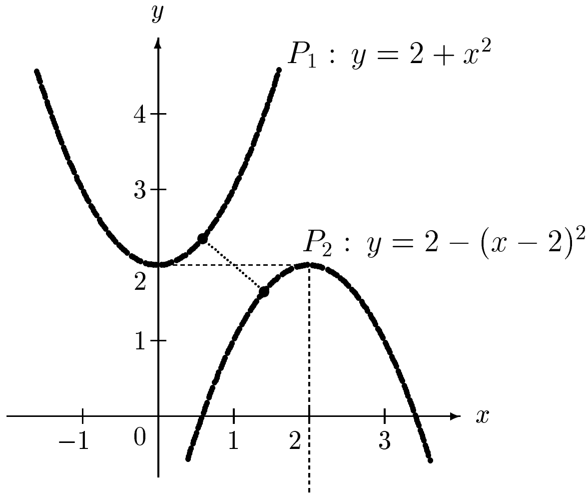


Abbildung 11.5

1. Wir bestimmen den Abstand d der beiden Parabeln:

$\boxed{P_1 \,:\, y = x^2 + 2}$ und

$\boxed{P_2 \,:\, y = -x^2 + 4x - 2}$:

Der Abstand von zwei Punkten $(x_1\,,\,y_1) \in P_1$ und $(x_2\,,\,y_2) \in P_2$ ist $d = \sqrt{f}$ mit $f = f(x_1,y_1,x_2,y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$:

Diese Funktion f muss also minimal werden unter den beiden Nebenbedingungen: $(x_1,\,y_1) \in P_1$ und $(x_2,\,y_2) \in P_2$, d.h.:

$\boxed{\Phi_1(x_1,y_1) := y_1 - x_1^2 = 2}$ und $\boxed{\Phi_2(x_2,y_2) := y_2 + x_2^2 - 4x_2 = -2}$.

Mit zwei Lagrange'schen Multiplikatoren λ_1 , λ_2 ergeben sich 6 Gleichungen, aus denen x_1 , y_1 , x_2 , y_2 zu bestimmen sind (λ_1 und λ_2 sind nur zwei Hilfsgrößen, deren Wert nicht weiter interessiert):

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) - 2\lambda_1\, x_1 \\[2ex]
(2) & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 2(y_1 - y_2) + \lambda_1 \\[2ex]
(3) & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2) + \lambda_2 (2x_2 - 4) \\[2ex]
(4) & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial f}{\partial y_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} = -2(y_1 - y_2) + \lambda_2 \\[2ex]
(5) & y_1 = x_1^2 + 2 \\[1ex]
(6) & y_2 = -x_2^2 + 4x_2 - 2
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{ll}
(7) & \boxed{x_1 + x_2 = 2} \\[1ex]
(8) & \boxed{y_1 + y_2 = 4} \\[1ex]
(9) & \boxed{2x_1^2 = \dfrac{1}{x_1} - 1}
\end{array}$$

Denn: $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \overset{(1)\,,\,(2)}{\Longrightarrow} \boxed{\lambda_1 \neq 0}$; (2) & (4) $\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -\lambda_1}$;

(1) & (3) $\Rightarrow \lambda_1 x_1 = -\lambda_1 (x_2 - 2) \overset{\lambda_1 \neq 0}{\Longrightarrow}$ (7) $\boxed{\boxed{x_1 + x_2 = 2}} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{\lambda_1 = 2 - 2/x_1}$.

(5) + (6) $\Rightarrow\ y_1 + y_2 = (x_1^2 - x_2^2) + 4x_2 = (x_1 + x_2)\,(x_1 - x_2) + 4x_2 \overset{\text{s.o.}}{=} 2\,(2x_1 - 2) + 4\,(2 - x_1) = 4$,

also: (8) $\boxed{\boxed{y_1 + y_2 = 4}}$. Schließlich ist $y_1 - y_2 \overset{(8)}{=} 2y_1 - 4 \overset{(5)}{=} 2x_1^2$ und

$y_1 - y_2 \overset{(2)}{=} -\frac{1}{2}\lambda_1 \overset{\text{s.o.}}{=} 1/x_1 - 1$, somit: (9) $\boxed{\boxed{2x_1^2 = \frac{1}{x_1} - 1}}$.

Die zuletzt erhaltene Gleichung: $2x_1^2 = \dfrac{1}{x_1} - 1$ kann man umformen: $x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}(1 - x_1)}$
und z.B. mit dem allgemeinen Iterationsverfahren lösen: mit dem Startwert 0.5 ergibt sich:

$$x_1 = 0.589754512 \quad \begin{cases} \overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad x_2 = 1.410245488 \\ \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad y_1 = 2.347810384 \quad \overset{(8)}{\Longrightarrow} \quad y_2 = 1.652189615 \ . \end{cases}$$

Höchstens an dieser Stelle (x_1, y_1, x_2, y_2) kann also f ein Extremum besitzen! Da die Anschauung zeigt, dass f sicher ein Minimum *hat*, *muss* sich das Minimum an dieser Stelle befinden.

Für den Abstand $d = \sqrt{f}$ der beiden Parabeln erhält man damit den Wert: $\boxed{d = 1.075682897}$.

2. Von einem geraden Drahtstück der Länge L wird beiderseits ein Stück der Länge $a < L/2$ um den Winkel γ nach oben gebogen.

Wir wollen a und γ so bestimmen, dass das entstehende Trapez **maximalen Flächeninhalt** F hat:

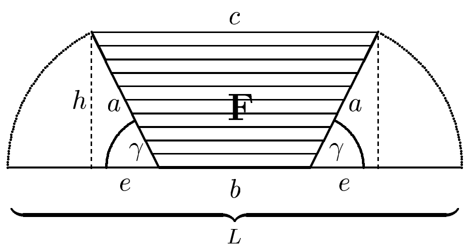


Abbildung 11.6

Es ist $F = \frac{1}{2}h(b + c)$ mit: $h = a\sin\gamma$, $e = a\cos\gamma$, $c = b + 2e = b + 2a\cos\gamma$, somit
$\boxed{F(a, b, \gamma) = a\sin\gamma\,(b + a\cos\gamma)}$.

F soll also maximal werden unter der Nebenbedingung: $\boxed{\Phi(a, b) = b + 2a = L}$. Mit einem Lagrange'schen Multiplikator λ ergeben sich vier Bestimmungsgleichungen für a , b , γ , λ :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial F}{\partial a} + \lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = b\sin\gamma + 2a\sin\gamma\cos\gamma + 2\lambda \\ (2) & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial F}{\partial b} + \lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = a\sin\gamma + \lambda \\ (3) & 0 \overset{!}{=} \dfrac{\partial F}{\partial \gamma} + \lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = ab\cos\gamma + a^2(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) \\ (4) & b + 2a = L \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{\begin{array}{l} a = b = L/3 \\ \gamma = \pi/3 \end{array}}}$$

denn aus (1) folgt mit (2) nach Division durch $\sin\gamma \neq 0 : b = 2a\,(1 - \cos\gamma)$; hieraus ergibt sich mit (3) nach Division durch $a^2 \neq 0 : 0 = 2\,(1 - \cos\gamma)\cos\gamma + \cos^2\gamma - \sin^2\gamma = 2\cos\gamma - 2\cos^2\gamma + \cos^2\gamma - 1 + \cos^2\gamma$, also $\cos\gamma = 1/2$, somit $\boxed{\gamma = \pi/3}$ und $b = 2a\,(1 - 1/2) = a$; aus (4) folgt: $3a = L$, also $\boxed{a = b = L/3}$.

Da F sicher ein Maximum hat, kann dieses nur mit diesen Werten für a , b und γ erhalten werden; der sich ergebende maximale Flächeninhalt ist: $F = \dfrac{\sqrt{3}}{12}L^2 \approx 0.14434\,L^2$.

Wir hätten die Nebenbedingung auch verwenden können, um eine der Variablen zu eliminieren: statt der Extrema von $F(a,b,\gamma)$ *mit* der Nebenbedingung $b = L - 2a$

hätten wir dann die Extrema von $\boxed{f(a,\gamma) = F(a, L-2a, \gamma) = a\sin\gamma\,(L - 2a + a\cos\gamma)}$

ohne Nebenbedingung bestimmen müssen:

Es ist: $\dfrac{\partial f}{\partial a} = L\sin\gamma - 2a\sin\gamma\,(2-\cos\gamma)$ und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \gamma} &= La\cos\gamma - a^2\left(\cos\gamma\,(2-\cos\gamma) + \sin^2\gamma\right) = \\ &= La\cos\gamma - 2a^2\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma = \\ &= La\cos\gamma - 2a^2\cos\gamma + 2a^2\cos^2\gamma - a^2\ ,\ \text{somit:}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \boxed{2a\,(2-\cos\gamma) = L}\ (+)\quad \text{und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0 \Leftrightarrow \boxed{L\cos\gamma = 2a\cos\gamma - 2a\cos^2\gamma + a}\ (++)$$

Setzt man (+) in (++) ein, folgt: $4a\cos\gamma - 2a\cos^2\gamma = 2a\cos\gamma - 2a\cos^2\gamma + 1$, also $\cos\gamma = 1/2$, d.h. $\boxed{\gamma = \pi/3}$. Hiermit ergibt sich aus (+): $L = 3a$ bzw. $\boxed{a = L/3}$.

Die einzige stationäre Stelle von f ist also $(a,\gamma) = (L/3\,,\,\pi/3)$; da f nach unserer Anschauung ein Maximum *hat*, muss das Maximum an dieser Stelle angenommen werden:

wie schon oben ergibt sich der maximale Flächeninhalt

$$F = f(L/3\,,\,\pi/3) = \frac{L}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(L - \frac{2L}{3} + \frac{L}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2\,.$$

Wer seiner Anschauung misstraut, kann z.B. versuchen, mit Hilfe der Hesse–Determinante mehr zu erfahren: hierzu berechnen wir zunächst:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = -2\sin\gamma\,(2-\cos\gamma)\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(L/3\,,\,\pi/3) = -\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma\,\partial a} = L\cos\gamma - 2a\cos\gamma\,(2-\cos\gamma) - 2a\sin^2\gamma\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma\,\partial a}(L/3\,,\,\pi/3) = -\frac{L}{2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} = -La\sin\gamma + 2a^2\sin\gamma - 4a^2\cos\gamma\sin\gamma\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}(L/3\,,\,\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{6}L^2\,.$$

Damit ist $D(L/3\,,\,\pi/3) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} & -\frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6}L^2 \end{vmatrix} = \dfrac{L^2}{2} > 0$ und wegen $f_{aa}(L/3\,,\,\pi/3) < 0$

hat f an der Stelle $(L/3\,,\,\pi/3)$ tatsächlich ein **Maximum**.

11.E Höhenlinien, Niveauflächen.

11.7

Die zum Funktionswert c gehörende **Höhenlinie** von $f(x,y)$ ist die in der x,y–Ebene gelegene Kurve $y = y_c(x)$, die definiert ist durch $f\Big(x, y_c(x)\Big) = c$.

Um $y_c(x)$ zu erhalten, muss also die Gleichung $f(x,y) = c$ nach y aufgelöst werden (falls das geht!) .

Entsprechend ist die zum Funktionswert c gehörende **Niveaufläche** von $f(x,y,z)$ die im x,y,z–Raum gelegene Fläche $z = z_c(x,y)$, die durch $f\Big(x,y,z_c(x,y)\Big) = c$ definiert ist.

Besitzt eine Funktion $f = f(x,y)$ von *zwei* Variablen mehrere Extrema unter einer Nebenbedingung $\Phi(x,y) = \tilde{c}$, so empfiehlt es sich, mit Hilfe einer Skizze der Höhenlinien von f zu entscheiden, um welche Art von Extremum (Minimum oder Maximum) es sich jeweils handelt:

Wenn es gelingt, die durch die Nebenbedingung $\Phi(x, y_\Phi) = \tilde{c}$ definierte Kurve $y = y_\Phi$ zu skizzieren, kann man aus der Lage dieser Kurve innerhalb der Schar der Höhenlinien abschätzen, an welchen Stellen (ungefähr) welche Art von Extrema zu erwarten sind.

z.B.: Wir wollen die Extrema von

$$\boxed{z = f(x,y) = e^{y-x^2}}$$

über dem Kreis $K \,:\, x^2 + (y-1)^2 = 1$ bestimmen:

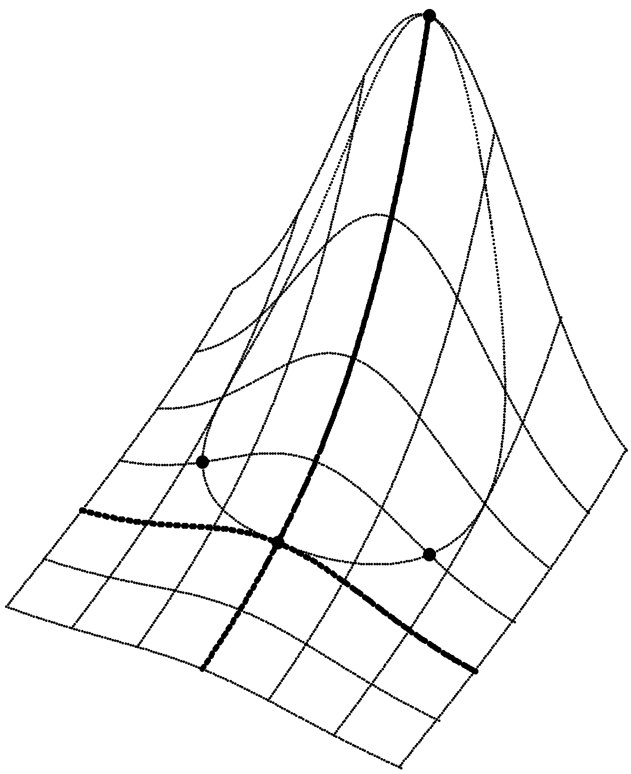
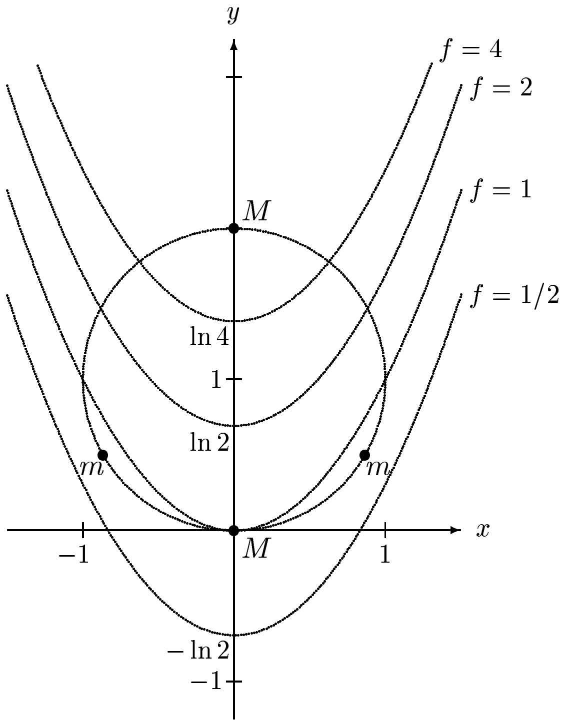


Abbildung 11.7: $z = e^{y-x^2}$

Die zum Funktionswert c gehörende Höhenlinie $f = c$ hat die Gleichung $y = x^2 + \ln c$ (mit $c > 0$). Die Höhenlinien von f bilden also eine Schar von in vertikaler Richtung parallel verschobenen Normalparabeln mit Scheitel bei $(0\,, \ln c)$. Zeichnet man in die Skizze einiger dieser Höhenlinien den Kreis K ein, so erkennt man sofort, dass f über K jeweils ein **Maximum** an den Stellen $(0, 0)$ und $(0, 2)$ hat und dass *ungefähr* bei $(\pm 0.8\,,\ 0.5)$ zwei **Minima** liegen müssen:

Abbildung 11.8 **Höhenlinien** der Funktion $f(x, y) = e^{y-x^2}$



Rechnerisch ergeben sich die Extrema von $f(x, y) = e^{y-x^2}$ unter der Nebenbedingung $\Phi(x, y) := x^2 + (y-1)^2 = 1$ mit Hilfe eines Lagrange'schen Multiplikators λ aus den 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&(1) \quad 0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2x\, e^{y-x^2} + 2\lambda\, x \\
&(2) \quad 0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{y-x^2} + 2\lambda\,(y-1) \\
&(3) \quad x^2 + (y-1)^2 = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow: \begin{cases} x = 0 \text{ mit: } y = 0 \text{ oder } y = 2\,, \\ \text{oder} \\ y = 1/2 \text{ mit: } x = \pm\sqrt{3}/2 = \pm 0.866\,. \end{cases}$$

Aufgrund der anfänglichen Überlegungen kann gefolgert werden, dass f über K die folgenden vier Extrema besitzt:

- je ein **Maximum** bei $(0, 0)$ mit $f(0, 0) = 1$ und bei $(0, 2)$ mit $f(0, 2) = e^2 = 7.389$,
- je ein **Minimum** bei $(\pm\sqrt{3}/2\,,\ 1/2)$ mit $f(\pm\sqrt{3}/2\,,\ 1/2) = e^{-1/4} = 0.7788$.

12 Bestimmtes Integral.

Stichpunkte: Bestimmtes Integral, einfache Regeln, Mittelwertsatz der Integralrechnung, uneigentliche Integrale, Ableitung von Parameterintegralen; Stammfunktion/unbestimmtes Integral, wichtige Stammfunktionen, Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung.

12.A Bestimmte Integration als Summationsprozess.

12.1 Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kann interpretiert werden als **orientierter (= vorzeichenbehafteter) Flächeninhalt** zwischen der Kurve $y = f(x)$, $a \le x \le b$, und dem Intervall $[a, b]$ auf der x–Achse.

Unterhalb der x–Achse gelegene Flächenteile haben hierbei *negativen* Flächeninhalt.

z.B.: $\int_0^a x\,dx$ ist der Flächeninhalt zwischen dem Geradenstück $y = x$, $0 \le x \le a$, und dem Intervall $[0, a]$ auf der x–Achse, also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(a|0)$ und $C(a|a)$. Damit ist $\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$.

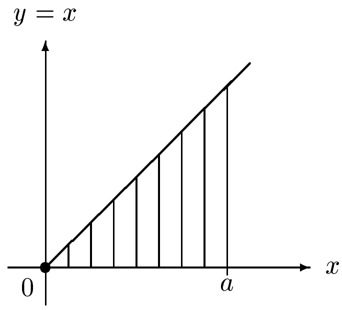


Abbildung 12.1 zu Nr. 12.1

12.2 Aus Symmetriegründen gilt $\forall a > 0$:

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, wenn $f(x)$ **ungerade** ist, d.h. wenn $f(-x) = -f(x)$;

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$, wenn $f(x)$ **gerade** ist, d.h. wenn $f(-x) = f(x)$.

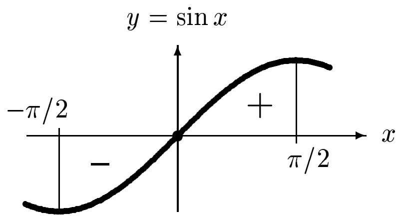


Abbildung 12.2 ungerade Funktion

z.B.: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx = 0$,

$\int_{-a}^a |x|\,dx = 2 \cdot \int_0^a x\,dx \overset{\text{s.o.}}{=} a^2$.

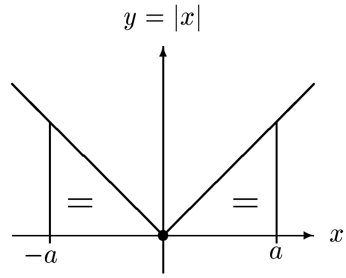


Abbildung 12.3 gerade Funktion

Allgemeiner kann man bei der praktischen Verwendung des bestimmten (Riemann–) Integrals — etwas grob — von der Vorstellung ausgehen, dass sich das (Riemann–) Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ als Grenzwert (für $\Delta x \to 0$) von Summen der Form

$\sum_{x_j \in [a,b]} f(x_j) \cdot \Delta x$ (mit $\Delta x = x_j - x_{j-1}$) ergibt.

Daher wird das symbolische dx häufig als "sehr kleines" Δx interpretiert:

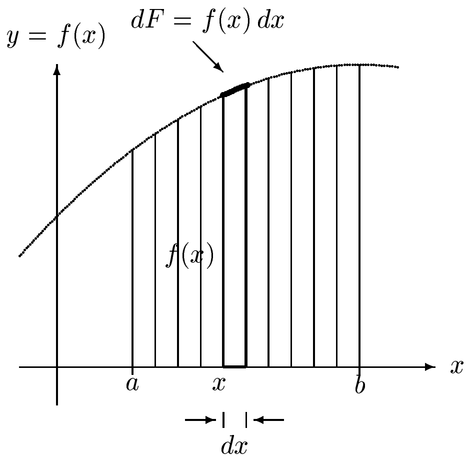


Abbildung 12.4: **zu 12.1**

Bestimmte Integration ist ein Summationsprozess!

12.3 Die **Integrationsvariable** x spielt hierbei die Rolle eines Summationsindexes und kann daher *beliebig* umgetauft werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b f(\heartsuit)\,d\heartsuit = \ldots .$$

Zwei Beispiele (nach robuster Praktiker–Art):

1. Den Flächeninhalt F eines Kreises vom Radius $R > 0$ kann man bekommen, wenn man die Kreisfläche in "sehr dünne" Kreisringflächen mit der Breite dr und dem Radius r $(0 \le r \le R)$ aufteilt:

jede dieser Kreisringflächen hat den Flächeninhalt $dF = 2\pi r \cdot dr$ (Umfang mal Breite). Die Gesamtfläche ergibt sich dann durch "Aufsummieren" dieser Teilflächen:

$$F = \int_0^R 2\pi r\,dr = 2\pi \int_0^R r\,dr \overset{\text{s.o.}}{=} \pi R^2 .$$

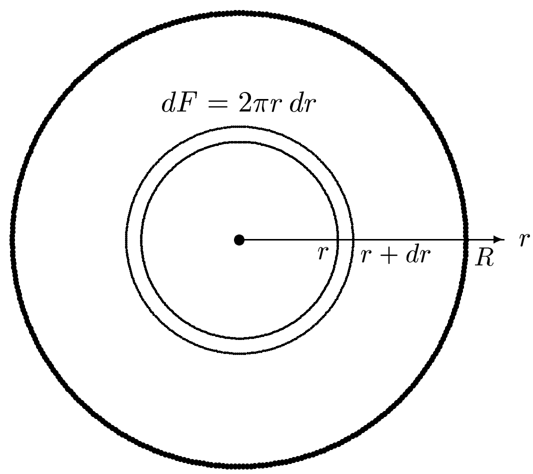


Abbildung 12.5 Kreisflächenbestimmung

2. Das Volumen V des Rotationskörpers, der sich durch Rotation eines Kurvenbogens $y = f(x)$, $a \le x \le b$ um die x–Achse ergibt, kann erhalten werden, wenn man den Körper für $a \le x \le b$ in "sehr dünne" Scheiben mit der Dicke dx und dem Scheibenradius $r = |y| = |f(x)|$ "aufschneidet":

jede dieser Scheiben hat das Volumen $dV = \pi y^2 \cdot dx$ (Scheibenfläche mal Scheibenbreite) . Das Gesamtvolumen ergibt sich durch "Aufsummieren" dieser Teilvolumina:

12.4 $\boxed{V = \pi \int_a^b y^2\, dx \quad \text{mit } y = f(x)}$

Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Kurvenbogens: $y = f(x)$, $a \le x \le b$ um die x–Achse entsteht.

(Zur Manteloberfläche siehe Lektion 25 ; beachte außerdem die Guldin'schen Regeln in Lektion 29 !)

z.B.: Ein rotationsparaboloidförmiger "Zuckerhut" mit dem Grundkreisradius R und der Höhe H kann durch Rotation des Kurvenbogens: $y = f(x) = R\sqrt{x/H}$, $0 \le x \le H$, um die x–Achse erhalten werden.

Sein Volumen ist damit:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^H R^2 \cdot \frac{x}{H}\, dx = \pi \frac{R^2}{H} \int_0^H x\, dx \overset{\text{s.o.}}{=} \\ &= \pi \frac{R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 H \,. \end{aligned}$$

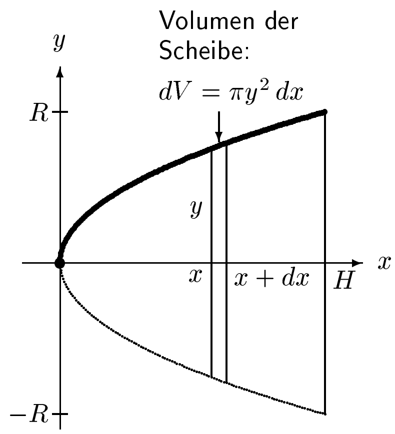


Abbildung 12.6
Volumen eines Zuckerhutes

12.B Elementare Regeln für bestimmte Integrale.

12.5

1. $\int_a^b dx = b - a$
2. $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$
3. $\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$
4. $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

aber: (!) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)\cdot g(x)\big)\,dx \overset{\text{i.a.}}{\neq} \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$ ⟵ **!**

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ für beliebige $c \in \mathbb{R}$.

6. Ist $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$, so ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

7. Ist $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ auf $[a,b]$.

8. Ist $f(x) \leq g(x)$ auf $[a,b]$, so ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

12.6 **Mittelwertsatz der Integralrechnung:**

9. Ist $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a,b]$, so ist $\displaystyle m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$

und es gibt ein $\mu \in\,]m,M[$ so, dass $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)$.

10. Ist $f(x)$ stetig auf $[a,b]$, so gibt es ein $\xi \in\,]a,b[$ mit:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

(Als Anwendungsbeispiel siehe den folgenden Abschnitt.)

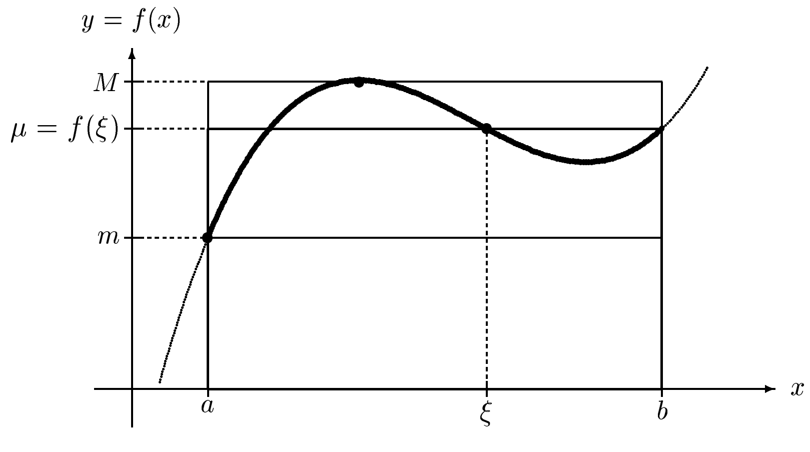


Abbildung 12.7 zum Mittelwertsatz der Integralrechnung

12.C Ableitung von Parameterintegralen.

12.7 Ist $f(x,t)$ stetig mit stetiger partieller Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und sind $a(x)$ und $b(x)$ differenzierbar, so gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt + f\Big(x,b(x)\Big)\cdot b'(x) - f\Big(x,a(x)\Big)\cdot a'(x)}\,.$$

z.B.:

$$\frac{d}{d\omega}\int_0^\omega \frac{\sin\omega t}{t}\,dt = \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)dt + \frac{\sin\omega^2}{\omega} = \int_0^\omega \cos\omega t\,dt + \frac{\sin\omega^2}{\omega} = 2\,\frac{\sin\omega^2}{\omega}$$

Beachte, dass man das Integral $\displaystyle\int_0^\omega \frac{\sin\omega t}{t}\,dt$ nicht explizit angeben kann!

Zwei Sonderfälle:

Der erste Sonderfall ergibt sich mit $f = f(t)$ (also f *unabhängig* von x) und $a(x) = a$ (konstant), $b(x) = x$:

12.8 Ist $f(x)$ stetig, so ist $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

die Ableitung nach der oberen Grenze ergibt den Integranden!

z.B.: Für $F(x) = \displaystyle\int_a^x t^{-5}\sin^3(1-\sqrt{t})\,dt$ ist $F'(x) = x^{-5}\sin^3(1-\sqrt{x})$.

Beachte, dass wir hierzu das Integral — gottlob! — nicht ausrechnen müssen!

Wegen der großen Bedeutung dieser Regel (und als Rechenübung), wollen wir sie kurz herleiten:

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt, dass es zu x und Δx ein $t_{\Delta x}$ zwischen x und $x+\Delta x$ so gibt, dass $\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f\left(t_{\Delta x}\right)\Delta x$; da $t_{\Delta x} \to x$ für $\Delta x \to 0$ ergibt sich:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) =$$

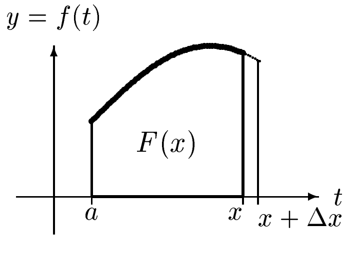


Abbildung 12.8

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \frac{1}{\Delta x} f\left(t_{\Delta x}\right)\Delta x = f\left(t_{\Delta x}\right) \to f(x) \text{ für } \Delta x \to 0\,. \quad \blacksquare$$

Der Praktiker argumentiert hier weniger sensibel:

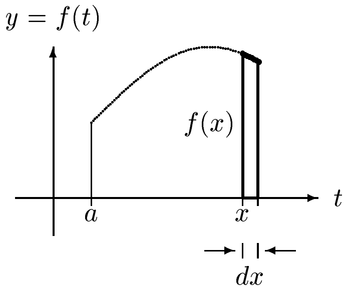


Abbildung 12.9

mit $dF = f(x)\,dx$ ist $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$.

Der zweite bemerkenswerte Sonderfall von Nr. 12.7 ergibt sich mit konstanten Integrationsgrenzen $a(x) = a$, $b(x) = b$ $(\Rightarrow\ a'(x) = b'(x) = 0\,)$:

12.9

Ist $f(x,t)$ stetig mit stetiger partieller Ableitung $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$,

so ist $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$.

die Reihenfolge von Integration und Differentiation darf vertauscht werden!

z.B.: Für $x > 0$ ist:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt}}{t}\right)dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}\,(-t)\,e^{-xt}\,dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}\,e^{-xt}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{x}\,(0-1) = -\frac{1}{x}\ ;$$

für $T > 0$ und mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ist:

$$\frac{d}{d\omega}\int_{-T/4}^{T/4} \frac{\sin\omega t}{t}\,dt = \int_{-T/4}^{T/4} \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)dt = \int_{-T/4}^{T/4} \cos\omega t\,dt =$$

$$= \sin\omega t\Big|_{-T/4}^{T/4} = 2\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) = 2\ .$$

Beachte, dass wir hier die Ableitungen der Funktionen $F_1(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t}\,dt$ und $F_2(x) = \displaystyle\int_{-T/4}^{T/4} \frac{\sin\omega t}{t}\,dt$ bestimmt haben, ohne diese Funktionen zunächst explizit anzugeben!

12.D Uneigentliche Integrale.

12.10

Niemals über Unstetigkeitsstellen des Integranden hinwegintegrieren!

Ist $f(x)$ unstetig an der Stelle $c \in [a, b]$, so wird das Integrationsintervall an der Stelle c unterteilt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

12.11

Man nennt das Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ein **uneigentliches Integral**, wenn es als Funktion der oberen oder unteren Grenze unstetig ist oder wenn das Integrationsintervall $[a, b]$ unbeschränkt ist.

In diesem Fall bestimmt man das Integral als Grenzwert:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b-0} \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to \infty} \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ .$$

Das Integral existiert (eigentlich oder uneigentlich), wenn die entsprechenden Grenzwerte (eigentlich bzw. uneigentlich) existieren.

z.B.: **1.** Für $f(x) = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}$ und $0 < a < b$ erhält man z.B. durch Integration mit Potenzreihenentwicklung (s. Abschnitt 13.F): $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\sin b}{b} - \frac{\sin a}{a}$.

Damit bekommt man: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} - \lim_{a \to 0+} \frac{\sin a}{a} = \frac{2}{\pi} - 1$,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \frac{\sin b}{b} - \lim_{a \to 0+} \frac{\sin a}{a} = 0 - 1 = -1 \ .$$

2. Für $f(x) = 2x\,e^{-x^2}$ und $a < b$ gilt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -e^{-b^2} + e^{-a^2}$.

Damit hat man: $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = -\lim_{b \to \infty} e^{-b^2} + e^0 = 0 + 1 = 1$.

12.E Stammfunktion/Unbestimmtes Integral.

12.12 Eine Funktion $F(x)$ ist eine **Stammfunktion** zu $f(x)$ über $[a, b]$, wenn $F(x)$ auf $[a, b]$ **differenzierbar** ist mit der Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Es gilt:

12.13

(1) Mit $F(x)$ ist auch $F(x) + c$ mit beliebiger Konstanten c eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $[a, b]$.

(2) Umgekehrt unterscheiden sich zwei Stammfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ zu $f(x)$ über $[a, b]$ höchstens um eine additive Konstante c: $G(x) = F(x) + c$ auf $[a, b]$.

Denn: ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ auf $[a, b]$, also $F(x)$ differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$, so ist (mit einer beliebigen Konstanten c) auch die Funktion $G(x) := F(x) + c$ auf $[a, b]$ differenzierbar und sie hat die Ableitung $G'(x) = F'(x) = f(x)$, d.h. auch $G(x)$ ist eine Stammfunktion zu $f(x)$ auf $[a, b]$.

Sind umgekehrt $F(x)$ und $G(x)$ *zwei* Stammfunktionen zu $f(x)$ auf $[a, b]$, also $F(x)$ und $G(x)$ beide differenzierbar auf $[a, b]$ mit der Ableitung $F'(x) = G'(x) = f(x)$, so ist auch die Funktion $H(x) := G(x) - F(x)$ auf $[a, b]$ differenzierbar (insbesondere stetig) mit der Ableitung
$H'(x) = \big(G(x) - F(x)\big)' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$:
damit muss $H(x) = c$ konstant sein, also $G(x) = F(x) + c$. ∎

12.14

Man kennt also *alle* Stammfunktionen zu $f(x)$ über $[a, b]$, wenn man *eine* kennt:

ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ über $[a, b]$, so ist $\{F(x) + c \mid c \text{ konstant}\}$ die **Gesamtheit aller Stammfunktionen** zu $f(x)$ über $[a, b]$.

Man schreibt diese Gesamtheit *symbolisch* als **unbestimmtes Integral:**

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ (c beliebig konstant).

12.F Einige Grundregeln für unbestimmte Integrale.

(c ist beliebig konstant)

12.15

(3)	$\int dx = x + c$
(4)	$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$
(5)	$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

denn:

Zu (3): $(x+c)' = 1$.

Zu (4): Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, so ist $c\,F(x)$ eine Stammfunktion zu $c\,f(x)$:
$\big(c\,F(x)\big)' = c\,F'(x) = c\,f(x)$.

Zu (5): Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion zu $g(x)$, so ist $F(x) \pm G(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x) \pm g(x)$:
$\big(F(x) \pm G(x)\big)' = f'(x) \pm G'(x) = f(x) + g(x)$.

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, also $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, so ist $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = F'(x) = f(x)$; andererseits ist sicher $f(x)$ eine Stammfunktion zu $f'(x)$ und damit $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$:

12.16

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x) \\ &\int \frac{df(x)}{dx}\,dx = f(x) + c \end{aligned}}$$

Die unbestimmte Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

Daher ist jede Differentiationsregel auch eine Integrationsregel; insbesondere ist jede Tabelle von Ableitungen auch eine Tabelle von Stammfunktionen:

Funktion	$\longrightarrow$	Ableitung
Stammfunktion	$\longleftarrow$	Funktion

12.G Wichtige Stammfunktionen.

(c ist beliebig konstant)

Die angegebenen Funktionen $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ sind in der Regel *nur auf geeigneten* Intervallen Stammfunktionen zu $f(x)$! Es sind nur solche Intervalle $[a,b]$ oder $]a,b[$ zugelassen, auf denen $f(x)$ stetig und $F(x)$ differenzierbar ist. Nur bei *einigen* der folgenden Stammfunktionen wurden die maximalen Gültigkeitsbereiche angegeben:

1.	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$	auf $\mathbb{R}^+$
2.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \in \mathbb{N})$	auf $\mathbb{R}$
3.	$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + c \qquad (n \in \mathbb{N},\ n > 1)$	auf $\mathbb{R}^-$ und $\mathbb{R}^+$

z.B.: $\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c\,, \quad \int \frac{dx}{x^7} = -\frac{1}{6x^6} + c\,, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c\,,$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c\,, \quad \int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c\,.$$

4. $\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)}$ **5.** $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c}$

z.B.: $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c\,,$

$$\int \tanh x\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = \ln|\cosh x| + c\,,$$

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + c\,.$$

6. $\boxed{\int e^x\,dx = e^x + c}$ **7.** $\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0\,,\ \neq 1)}$

z.B.: $\int 2^{-x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{(1/2)^x}{\ln 1/2} + c = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + c \approx -1.4427 \cdot 2^{-x} + c$

8.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	**10.**	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$
9.	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	**11.**	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

12.	$\int \sin^2 x\,dx$	$= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$	$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$
13.	$\int \cos^2 x\,dx$	$= \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$	$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$
14.	$\int \sinh^2 x\,dx$	$= \frac{1}{2}(-x + \sinh x \cosh x) + c$	$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x + c$
15.	$\int \cosh^2 x\,dx$	$= \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x) + c$	$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x + c$

16.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$	**18.**	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c$
17.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	**19.**	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$

20.	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$= \arctan x + c$	auf $\mathbb{R}$
21.	$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$= \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$	auf $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, oder $]1, \infty[$
		$= \operatorname{Artanh} x + c$	für $\lvert x\rvert < 1$
		$= \operatorname{Arcoth} x + c$	für $x > 1$

22.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$= \arcsin x + c$	für $\lvert x\rvert < 1$
23.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$= \begin{cases} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c \\ = \operatorname{Arsinh} x + c \end{cases}$	auf $\mathbb{R}$
24.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$= \begin{cases} \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \\ = +\operatorname{Arcosh} x + c \end{cases}$	für $x > 1$
		$= \begin{cases} -\ln\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \\ = -\operatorname{Arcosh}(-x) + c \end{cases}$	für $x < -1$

Grundintegrale für die Integration mit Partialbruchzerlegung: (s. Abschnitt 13.E)

25. $\boxed{\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c}\ ,$

26. $\int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + c\ ,$

27. $\int \frac{dx}{(x-a)^3} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-a)^2} + c\ ,$

28. $\boxed{\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c \quad \text{für } k>1\ ,}$

29. $\int \frac{x}{(x-a)^2}\,dx = \ln|x-a| - \frac{a}{x-a} + c\ ,$

30. $\int \frac{x}{(x-a)^3}\,dx = -\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{(x-a)^2} + c\ ,$

31. $\int \frac{x^2}{(x-a)^3}\,dx = \ln|x-a| - \frac{2a}{x-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(x-a)^2} + c\ ,$

32. $\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\cdot\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c\ ,$

33. $\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\Big((x-a)^2+b^2\Big) + \frac{a}{b}\cdot\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c\ ,$

34. $\int \frac{dx}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^2} = \frac{1}{2b^2}\cdot\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + \frac{1}{2b^3}\cdot\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c\ ,$

35. $\int \frac{x}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^2}\,dx = \frac{1}{2b^2}\cdot\frac{a(x-a)-b^2}{(x-a)^2+b^2} + \frac{a}{2b^3}\cdot\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c\ ,$

36. $$\int \frac{dx}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^k} = \frac{1}{2(k-1)b^2}\cdot\frac{x-a}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)b^2}\cdot\int\frac{dx}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^{k-1}} \quad \text{für } k>1\ ,$$

37. $$\int \frac{x}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^k}\,dx = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^{k-1}} + a\cdot\int\frac{dx}{\Big((x-a)^2+b^2\Big)^{k}} \quad \text{für } k>1\ .$$

12.H Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung.

In Nr. 12.8 haben wir festgestellt:

12.17

Ist $f(x)$ stetig auf $[a, b]$, so ist die **Integralfunktion:**

$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$, eine **Stammfunktion** zu $f(x)$ auf $[a, b]$:

$I(x)$ ist auf $[a, b]$ differenzierbar mit der Ableitung $I'(x) = f(x)$.

Ist $F(x)$ *irgendeine* Stammfunktion zu $f(x)$ auf $[a, b]$, so unterscheiden sich $I(x)$ und $F(x)$ höchstens um eine additive Konstante (s. Nr. 12.13):

$\boxed{I(x) = F(x) + c}$; das gilt *für alle* $x \in [a, b]$, insbesondere für $x = a$: hieraus erhält man:

$0 = \int_a^a f(x)\,dx = I(a) = f(a) + c$, also $c = -F(a)$, somit $\boxed{I(x) = F(x) - F(a)}$;

das gilt nach wie vor *für alle* $x \in [a, b]$, insbesondere für $x = b$: damit ergibt sich:

$\int_a^b f(x)\,dx = I(b) = F(b) - F(a)$ und wir haben gezeigt:

12.18

Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung:

Ist $f(x)$ stetig und $F(x)$ eine **Stammfunktion** zu $f(x)$ auf $[a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big[\, F(x) \,\Big]_{x=a}^{b} =: F(x)\,\Big|_{x=a}^{b} \quad .$$

Hierbei hat man die folgenden **Konventionen** zur Bestimmung von $F(b)$ und $F(a)$ in den Fällen $b = \infty$, $a = -\infty$ oder wenn $F(x)$ bei b oder a unstetig ist: (vgl. Nummer 12.10)

$$F(\infty) = \lim_{b\to\infty} F(b) \ , \ F(-\infty) = \lim_{a\to-\infty} F(a) \ , \ F(b) = \lim_{x\to b-0} F(x) \ , \ F(a) = \lim_{x\to a+0} F(x) \ .$$

Beispiele:

1.
$$\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx =$$
$$= -\int \frac{\left(\cos^2 x\right)'}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$$
$$= -\ln\cos^2 x + \tan x + c \text{ , somit:}$$

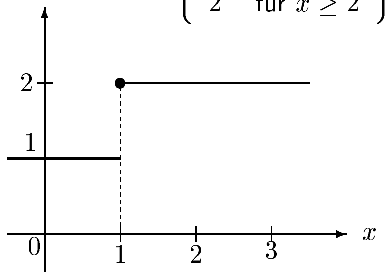
$$\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx = \Big[-\ln\cos^2 x + \tan x \Big]_{x=0}^{\pi/4} =$$
$$= \Big(-\ln\cos^2 \pi/4 + \tan \pi/4\Big) - \Big(-\ln\cos^2 0 + \tan 0\Big) =$$
$$= -\ln 1/2 + 1 - \ln 1 =$$
$$= 1 + \ln 2 = 1.693147\ldots \; .$$

2. Es ist $\left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{-\sqrt{x}}$, somit: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\sqrt{x}}dx = -2e^{-\sqrt{x}} + c$ und

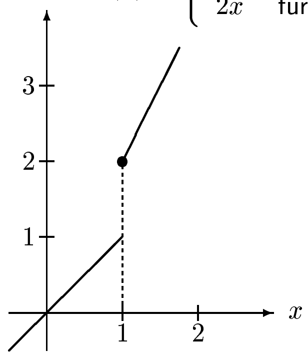
$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\sqrt{x}}dx = \Big[-2e^{-\sqrt{x}} \Big]_{x=1}^\infty = -2 \lim_{b\to\infty} e^{-\sqrt{b}} + 2\,e^{-\sqrt{1}} = 0 + \frac{2}{e} = 0.735758882\ldots \; .$$

3. Das nächste Beispiel soll Ihre Aufmerksamkeit auf die Tatsache lenken, dass eine Funktion $F(x)$ nur dann **Stammfunktion** zu $f(x)$ über einem — beschränkten oder unbeschränkten — Intervall $[a, b]$ ist, wenn $F(x)$ **ohne Ausnahme (!) auf dem gesamten Intervall** differenzierbar ist mit der Ableitung $F'(x) = f(x)$: sei z.B.

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 2 \\ 2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$



$$y = F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 2 \\ 2x & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$



Dann ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ sowohl über $]-\infty, 1[$ als auch über $]1, \infty[$, ist aber *keine* Stammfunktion zu $f(x)$ über irgend einem Intervall $[a, b]$ mit $1 \in]a, b[$, da $F(x)$ an der Stelle $x = 1$ nicht differenzierbar ist! Will man $f(x)$ über die Stelle $x = 1$ hinwegintegrieren, muss man das Integrationsintervall an dieser Stelle unterteilen (s. Nummer 12.10 !) : $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 2\,dx = x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = 1 + 2 = 3 \neq F(2) - F(0) = 4 - 0 = 4$!

13 Integrationsmethoden.

Stichpunkte: Partielle Integration, Rekursionsformeln, Umformung des Integranden, Substitution, Partialbruchzerlegung, Integration mit Potenzreihenentwicklung.

13.A Partielle Integration/Produkt–Intergration.

13.1

$$\begin{aligned}
\int u(x) \cdot v'(x)\, dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx \\
\int u'(x) \cdot v(x)\, dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx &= \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx \\
\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx &= \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx
\end{aligned}$$

Einige typische Beispiele:

(a) $\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot (\ln x\ - 1)\ + c$

$(u' = 1\,,\ v = \ln x\ \Rightarrow\ u = x\,,\ v' = 1/x)$

$$\int_1^e \ln x\, dx = x \cdot \ln x\,\Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$$

(b) $\int x \cdot \sin x\, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \sin x\ + c$

$(u = x\,,\ v' = \sin x\ \Rightarrow\ u' = 1\,,\ v = -\cos x)$

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x\, dx = -x \cdot \cos x\,\Big|_{x=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 0 + \sin x\,\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \sin \pi/2\ = 1$$

(c) $I(x) := \int \sin x \cdot \cos x\, dx = \sin^2 x - \int \cos x \cdot \sin x\, dx = \sin^2 x - I(x)$

$(u = \sin x\,,\ v' = \cos x\ \Rightarrow\ u' = \cos x\,,\ v = \sin x)$

$\Rightarrow\ 2I(x) = \sin^2 x$, somit: $\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x\ + c$

$$I := \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x\, dx = \sin^2 x\,\Big|_{x=0}^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin x\, dx = 1 - I$$

$\Rightarrow\ 2I = 1$, d.h.: $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2}$

(d) $I(x) := \int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x\,dx =$

$(u = \sin x\,,\ v' = \sin x \ \Rightarrow\ u' = \cos x\,,\ v = -\cos x)$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx = -\sin x \cdot \cos x + x - I(x)$$

$\Rightarrow\ 2I(x) = x - \sin x \cos x$, somit: $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x)\ + c$

und: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

13.B Integration mit Hilfe von Rekursionsformeln.

13.2

Integrale vom Typ $I_k =$

$$\int x^k e^{ax} dx\ ,\ \int x^k \sin ax\,dx\ ,\ \int x^k \cos ax\,dx\ ,\ \int x^k \sinh ax\,dx\ ,\ \int x^k \cosh ax\,dx\ ,$$
$$\int sin^k ax\,dx\ ,\ \int \cos^k ax\,dx\ ,\ \int \sinh^k ax\,dx\ ,\ \int \cosh^k ax\,dx\ ,\ \ldots \text{ usw.}$$

lassen sich **im Fall größerer** $k \in \mathbb{N}$ meistens einigermaßen bequem mit Hilfe

einer **Rekursionsformel** der Art $\boxed{I_n = \text{Funktion von } (I_{n-1}, \ldots, I_0)\ ,\ n \in \mathbb{N}}$

lösen, die durch **partielle Integration** erhalten werden kann:

mit dem Integral I_0 lässt sich dann das Integral I_k schrittweise bestimmen, ohne jedesmal erneut integrieren zu müssen:

$$\boxed{I_0 \xrightarrow[\text{mit } n=1]{\text{Rekursionsformel}} I_1 \xrightarrow[\text{mit } n=2]{\text{Rekursionsformel}} \cdots \xrightarrow[\text{mit } n=k]{\text{Rekursionsformel}} I_k}$$

Zwei Beispiele:

(a) Zu berechnen sei das Integral $\int x^4\, e^{-2x} dx$. Statt viermal partiell zu integrieren, wird zunächst eine Rekursionsformel bestimmt: Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$I_n(x) := \int x^n\, e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\, x^n\, e^{-2x} + \frac{n}{2} \int x^{n-1}\, e^{-2x} dx = \frac{n}{2}\, I_{n-1}(x) - \frac{1}{2}\, x^n\, e^{-2x}$$

$(u = x^n\,,\ v' = e^{-2x} \ \Rightarrow\ u' = n\, x^{n-1}\,,\ v = -\frac{1}{2}\, e^{-2x})$

Die **Rekursionsformel** lautet also: $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n}{2}\, I_{n-1}(x) - \dfrac{x^n}{2}\, e^{-2x}}$.

Gesucht ist $I_4(x)$.

Mit $I_0(x) = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$ ergibt sich der Reihe nach:
(c ist jeweils beliebig konstant)

$$I_1(x) = \frac{1}{2} I_0(x) - \frac{x}{2} e^{-2x} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) e^{-2x} + c\,,$$

$$I_2(x) = \frac{2}{2} I_1(x) - \frac{x^2}{2} e^{-2x} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) e^{-2x} + c\,,$$

$$I_3(x) = \frac{3}{2} I_2(x) - \frac{x^3}{2} e^{-2x} = -\left(\frac{3}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{2}\right) e^{-2x} + c\,,$$

$$I_4(x) = \frac{4}{2} I_3(x) - \frac{x^4}{2} e^{-2x} = -\left(\frac{3}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{2}\right) e^{-2x} + c\,.$$

(b) Zu berechnen sei das Integral $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x\, dx$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\begin{aligned}
I_n \;&:=\; \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx = \\
&\qquad (u' = \sin x\,,\ v = \sin^{n-1} x \;\Rightarrow\; u = -\cos x\,,\ v' = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x\,) \\
&= \; -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \,\Big|_{x=0}^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx = \\
&= \; 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx = (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n\ .
\end{aligned}$$

Hieraus bekommt man die Rekursionsformel: $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ \ (n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 2)}$.

Gesucht ist I_8 :

Mit $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich der Reihe nach:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}\,,\quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}\,,\quad I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5\pi}{32}\,,\quad I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{35\pi}{256}\,.$$

Manchmal gelingt es — leider nicht immer —, das Integral I_n mit Hilfe der Rekursionsformel *explizit* für $n \in \mathbb{N}_0$ zu bestimmen.

z.B.: (siehe das letzte Beispiel)

Für das Integral $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ haben wir oben die Rekursionsformel:

$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ \ (n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 2)}$ erhalten und es ist

$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}\,,\ I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{\pi/2} = 1$. Hiermit ergibt sich:

$I_2 = \frac{1}{2} I_0$, $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} I_0$, $I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} I_0$, $\ldots$ usw.:

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} I_0 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot (2k)}{\Big(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots (2k)\Big)^2} I_0 = \\ &= \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} I_0 = 2^{-2k} \binom{2k}{k} I_0 = 2^{-(2k+1)} \binom{2k}{k} \pi \ , \end{aligned}$$

z.B.: (mit $k = 4$, s.o.) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = I_8 = 2^{-9} \binom{8}{4} \pi = \frac{70}{512} \pi = \frac{35}{256} \pi = 0.4295$.

$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$, $I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$, $I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$, $\ldots$ usw.:

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{\Big(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)\Big)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (2k) \cdot (2k+1)} = \\ &= \frac{\Big(2^k k!\Big)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}}{2k+1} \binom{2k}{k}^{-1} . \end{aligned}$$

z.B.: (mit $k = 4$) $\int_0^{\pi/2} \sin^9 x \, dx = I_9 = \frac{2^8}{9} \binom{8}{4}^{-1} = \frac{128}{315} = 0.4043$.

13.C Integration durch Umformung des Integranden.

Nicht selten lässt sich der Integrand durch eine elementare Umformung so vereinfachen, dass sich komplexere Integrationsmethoden erübrigen, z.B.:

13.3

Wenn $k, m \in \mathbb{N}$ **nicht zu groß** sind, können Integrale von Produkten trigonometrischer oder hyperbolischer Funktionen der Art:

$$\int \sin^k ax \, dx \ , \ \int \cos^k ax \, dx \ , \ \int \sin^k ax \cdot \cos^m bx \, dx \ \text{ bzw.}$$
$$\int \sinh^k ax \, dx \ , \ \int \cosh^k ax \, dx \ , \ \int \sinh^k ax \cdot \cosh^m bx \, dx$$

auch mit Hilfe der **Produkt–Formeln** für die trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen (die findet man in jeder vernünftigen Formelsammlung) oder über deren Darstellung mit Hilfe der e–Funktion (s. Lektion 14) auf bequem zu lösende Integrale zurückgeführt werden:

Zwei Beispiele:

(a) $\sin^2 2x \cdot \cos^3 x \;=\; \dfrac{1}{8}\,(1-\cos 4x)(3\cos x + \cos 3x) \;=$

$$= \frac{3}{8}\,\cos x - \frac{3}{8}\,\cos 4x \cdot \cos x + \frac{1}{8}\,\cos 3x - \frac{1}{8}\,\cos 4x \cdot \cos 3x \;=$$
$$= \frac{3}{8}\,\cos x - \frac{3}{16}\,\cos 3x - \frac{3}{16}\,\cos 5x + \frac{1}{8}\,\cos 3x - \frac{1}{16}\,\cos x - \frac{1}{16}\,\cos 7x \;=$$
$$= \frac{5}{16}\,\cos x - \frac{1}{16}\,\cos 3x - \frac{3}{16}\,\cos 5x - \frac{1}{16}\,\cos 7x \;;\text{ hieraus folgt:}$$

$$\int \sin^2 2x \cdot \cos^3 x \, dx \;=$$
$$= \frac{5}{16}\int \cos x\,dx - \frac{1}{16}\int \cos 3x\,dx - \frac{3}{16}\int \cos 5x\,dx - \frac{1}{16}\int \cos 7x\,dx =$$
$$= \frac{5}{16}\,\sin x - \frac{1}{48}\,\sin 3x - \frac{3}{80}\,\sin 5x - \frac{1}{112}\,\sin 7x \;+ c\;.$$

(b) $\sinh^2 2x \cdot \cosh^2 x \;=\; \dfrac{1}{16}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)^2 \left(e^{x} - e^{-x}\right)^2 \;=$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4x} - 2 + e^{-4x}\right)\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) \;=$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{6x} + 2e^{4x} - e^{2x} - 4 - e^{-2x} + 2e^{-4x} + e^{-6x}\right) \;;\text{ hieraus folgt:}$$

$$\int \sinh^2 2x \cdot \cosh^2 x\,dx \;=\; \frac{1}{16}\int \left(e^{6x} + 2e^{4x} - e^{2x} - 4 - e^{-2x} + 2e^{-4x} + e^{-6x}\right) dx \;=$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{6}\,e^{6x} + \frac{1}{2}\,e^{4x} - \frac{1}{2}\,e^{2x} - 4x + \frac{1}{2}\,e^{-2x} - \frac{1}{2}\,e^{-4x} - \frac{1}{6}\,e^{-6x}\right) \;+ c \;=$$
$$= \frac{1}{48}\,\sinh 6x + \frac{1}{16}\,\sinh 4x - \frac{1}{16}\,\sinh 2x - \frac{x}{4} \;+ c\;.$$

13.4

Gelegentlich lassen sich Integrale der Form $\int f(x)\cos ax\,dx$ und $\int f(x)\sin ax\,dx$ mit *reellem* $f(x)$ einfacher mit Hilfe der Euler'schen Formel:
$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ lösen:

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(x)\cos ax\,dx &= \Re\mathrm{e}\int f(x)\,e^{iax}dx\;, \\ \int f(x)\sin ax\,dx &= \Im\mathrm{m}\int f(x)\,e^{iax}dx\;. \end{aligned}}$$

z.B.:

Die beiden Integrale $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$ und $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$ lassen sich in einem Arbeitsgang bestimmen:

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cdot e^{ibx}\,dx &= \int e^{(a+ib)x}\,dx = \left(\frac{1}{a+ib}\,e^{(a+ib)x}\right)+c = \\ &= \frac{a-ib}{a^2+b^2}\,e^{ax}\Big(\cos bx + i\sin bx\Big)+c = \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big((a\cos bx + b\sin bx) + i(a\sin bx - b\cos bx)\Big)+c\,.\end{aligned}$$

Wir haben die beiden Integrale:

13.5

$$\boxed{\begin{array}{rclcl} \displaystyle\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx &=& \Re\mathrm{e}\displaystyle\int e^{ax}\cdot e^{ibx}\,dx &=& \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos bx + b\sin bx\Big)+c \\ \displaystyle\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx &=& \Im\mathrm{m}\displaystyle\int e^{ax}\cdot e^{ibx}\,dx &=& \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\sin bx - b\cos bx\Big)+c \end{array}}$$

13.D Integration mit Substitution.

Bei der Berechnung eines Integrals $\int f(x)\,dx$ mit **Substitution** wird entweder

(a) die alte Variable x als Funktion einer neuen Variablen t oder

(b) eine neue Variable u als Funktion der alten Variablen x angesetzt:

hiermit ist dann jeweils

(i) der Differentialausdruck $f(x)\,dx$ umzurechnen in einen Differentialausdruck der Form $h(t)\,dt$ bzw. $h(u)\,du$,

(ii) das resultierende Integral $\int h(t)\,dt$ bzw. $\int h(u)\,du$ auszuwerten und schließlich

(iii) im Ergebnis die alte Variable x wieder zurückzusubstituieren:

13.6

<table>
<tr><td colspan="2">alter Integrand: $f(x)$, neuer Integrand: $h(t) = f\Big(g(t)\Big)\,g'(t)$</td></tr>
<tr><td>Substitution $\boxed{x = g(t)}$, $\dfrac{dx}{dt} = g'(t) \;\Rightarrow$
$\left\{\begin{array}{c} dx = g'(t)\,dt \\ f(x) = f\Big(g(t)\Big)\end{array}\right\}\; h(t) := f\Big(g(t)\Big)\,g'(t)$</td><td>Rücksubstitution $\boxed{t = g^{-1}(x)}$
$F(x) := H\Big(g^{-1}(x)\Big)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\int f(x)\,dx \overset{\downarrow}{=} \int f\Big(g(t)\Big)\,g'(t)\,dt = \int h(t)\,dt = H(t)+c \overset{\downarrow}{=} F(x)+c$</td></tr>
</table>

Diese erste Variante $\boxed{x = g(t)}$ führt den Integranden $f(x)$ in einen Integranden der Form $h(t) = f\big(g(t)\big)\,g'(t)$ über.

Die folgende zweite Variante $\boxed{u = g(x)}$ führt umgekehrt einen Integranden der Form $f(x) = h\big(g(x)\big)\,g'(x)$ über in den Integranden $h(u)$:

13.7

<table>
<tr><td colspan="2">alter Integrand: $f(x) = h\big(g(x)\big)\,g'(x)$, neuer Integrand: $h(u)$</td></tr>
<tr><td>Substitution $\boxed{u = g(x)}$, $\dfrac{du}{dx} = g'(x) \;\Rightarrow$
$g'(x)\,dx = du\,,\;h\big(g(x)\big) = h(u)$</td><td>Rücksubstitution $\boxed{u = g(x)}$:
$F(x) := H\big(g(x)\big)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\int f(x)\,dx = \int h\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx \stackrel{\downarrow}{=} \int h(u)\,du = H(u) + c \stackrel{\downarrow}{=} F(x) + c$</td></tr>
</table>

Für die Berechnung eines **bestimmten Integrals mit Substitution** bestehen zwei Möglichkeiten: man kann

$\boxed{\text{a}}$ entweder zunächst das *unbestimmte* Integral durch Substitution und anschließender Rücksubstitution lösen und dann die *alten* Grenzen über die erhaltene Stammfunktion berücksichtigen:

$$\int f(x)\,dx \;\underset{\text{neue Variable } \xi}{\overset{\text{Substitution:}}{=}}\; \int h(\xi)\,d\xi = H(\xi) + c \;\underset{\text{Substitution}}{\overset{\text{Rück–}}{=}}\; F(x) + c$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)\,,$$

$\boxed{\text{b}}$ oder die Grenzen bei der Substitution *umrechnen* — dann erübrigt sich eine Rücksubstitution:

$$\textbf{(1):}\quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \;\underset{x\,=\,g(t)}{\overset{\text{Substitution}}{=}}\; \int_{t=g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} h(t)\,dt = H(t)\Big|_{t=g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \quad \text{bzw.}$$

$$\textbf{(2):}\quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \;\underset{u\,=\,g(x)}{\overset{\text{Substitution}}{=}}\; \int_{u=g(a)}^{g(b)} h(u)\,du = H(u)\Big|_{u=g(a)}^{g(b)} \quad .$$

Grundsätzlich gibt es **keine Vorschrift**, die regelt, was und wie zu substituieren ist, und die **Faustregel**: $\boxed{\text{was am meisten stört, wird "wegsubstituiert"}}$ ist — bei etwas Erfahrung — die nützlichste Substitutionsregel:

Jede Substitution, die das Auswerten eines Integrals vereinfacht, ist sinnvoll und zulässig — andererseits sind Substitutionen, die auf hässliche Integrale führen, höchstens ungeschickt!

Im folgenden werden einige Substitutionen aufgelistet, die sich bei gewissen Typen von Integranden $f(x)$ häufig — aber keineswegs immer — bewähren:

13.8

$f(x) = h\Big(g(x)\Big)\, g'(x)$	$\boxed{u = g(x)}$	$g'(x)\,dx = du\,,\ h\Big(g(x)\Big) = h(u)$

z.B.: $f(x) = \cos x\,\sqrt{\sin x}$: $\cos x = (\sin x)'$, also: $\boxed{u = \sin x}$

$\Rightarrow\ \dfrac{du}{dx} = \cos x\,,\ \cos x\,dx = du\,,$ somit:

$$\int \cos x\,\sqrt{\sin x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\,u^{3/2} + c = \frac{2}{3}\,\sqrt{\sin^3 x} + c\,,$$

$$\int_{x=0}^{\pi/4} \cos x\,\sqrt{\sin x}\,dx = \int_{u=0}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_{u=0}^{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{3} = 0.3964\ldots\,.$$

13.9

$f(x) = \tilde{f}(\sin x\,,\,\cos x)$	$\boxed{x = \arctan t}$	$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}\,,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$
für $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$	$\boxed{t = \tan x}$	$\sin x = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
		$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

z.B.: $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$: $\boxed{x = \arctan t}$ bzw. $\boxed{t = \tan x}$. Damit ist:

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}\,,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\,,\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}\,,\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, somit:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{t^2\,(1+t^2)^2}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3}\,\tan^3 x\, + c\,,$$

$$\int_{x=0}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int_{t=0}^{1} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{3}\,.$$

Auf dieselbe Substitution wird man auch geführt, wenn man gemäß 13.8 verfährt:

es ist $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan^2 x$ und $\dfrac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'\,,$

daher empfiehlt sich die Substitution: $t = \tan x$.

13.10

$f(x) = \tilde{f}(\sin x\,,\,\cos x)$	$\boxed{x = 2\arctan t}$	$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}\,,\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
für $-\pi < x < \pi$	$\boxed{t = \tan x/2}$	$\sin x = \dfrac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$
		$\cos x = \dfrac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

z.B.: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$: $\boxed{x = 2\arctan t}$ bzw. $\boxed{t = \tan x/2}$. Damit ist:

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, somit:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^3} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt = -\frac{1}{16t^4} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{8} + c =$$

$$= -\frac{1}{16}\cot^4 x/2 + \frac{1}{2}\ln|\tan x/2| + \frac{1}{8}\tan^2 x/2 + c\,;$$

dies gilt nur auf den beiden Intervallen $]-\pi\,,\,0[$ und $]\,0\,,\,\pi\,[$, da Integrand und Stammfunktion für $x \to \pm 0$ nicht existieren!

$$\int\limits_{x=\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{4}\int\limits_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt = -\frac{1}{16t^4} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{8}\Bigg|_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{8}{9} + \ln 3\,.$$

Der nächsten Substitution liegt die Beziehung: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ bzw.
(falls $|t| \le \pi/2$): $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ zugrunde:

13.11	$f(x) = \tilde{f}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$	$\boxed{x = a\sin t}$	$\dfrac{dx}{dt} = a\cos t\,,\ dx = a\cos t\,dt$
		$\boxed{t = \arcsin x/a}$	$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$

z.B.: $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$: $\boxed{x = 2\sin t}$ bzw. $\boxed{t = \arcsin x/2}$. Damit ist:

$\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$, $dx = 2\cos t\,dt$, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t$, somit:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int \cos^2 t\,dt = 2t + 2\sin t\cos t\ + c = 2\arcsin x/2 + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c\,,$$

$$\int_{x=-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 2t + 2\sin t\cos t\,\Big|_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi\,.$$

(= halber Flächeninhalt eines Kreises vom Radius $a = 2$!)

Die beiden letzten Substitutionen benutzen die Beziehung $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$:
es ist $\cosh t = \sqrt{1+\sinh^2 t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t\ - 1}$ für $t \ge 0$:

13.12	$f(x) = \tilde{f}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$	$\boxed{x = a\sinh t}$	$\dfrac{dx}{dt} = a\cosh t\,,\ dx = a\cosh t\,dt$
	für $a > 0\,,\ x \in \mathbb{R}$	$\boxed{t = \operatorname{Arsinh} x/a}$	$\sqrt{a^2+x^2} = a\cosh t$

z.B.: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$: $\boxed{x = 2\sinh t}$ bzw. $\boxed{t = \operatorname{Arsinh} x/2}$. Damit ist:

$$\frac{dx}{dt} = 2\cosh t\,,\ dx = 2\cosh t\,dt\,,\ \sqrt{(4+x^2)^3} = \left(\sqrt{4+4\sinh^2 t}\right)^3 = 8\cosh^3 t\ \text{, somit:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cosh t}{\cosh^3 t}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \frac{1}{4}\,\tanh t\ + c =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{2\sinh t}{\sqrt{4+4\sinh^2 t}} + c = \frac{1}{4}\,\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c\,,$$

$$\int_{x=0}^{9.9} \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \frac{1}{4}\int_{t=0}^{\ln 10} \frac{dt}{\cosh^2 t} = \frac{1}{4}\,\tanh t\,\Big|_{t=0}^{\ln 10} = 0.2450\ldots.$$

13.13			
	$f(x) = \tilde f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)$	$\boxed{x = a\cosh t\,,\ t>0}$	$\frac{dx}{dt} = a\sinh t\,,\ dx = a\sinh t\,dt$
	für $a>0\,,\ x>a$	$\boxed{t = \operatorname{Arcosh} x/a}$	$\sqrt{x^2-a^2} = a\sinh t$

z.B.: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$: $\boxed{x = 2\cosh t}$ $(t>0)$ bzw. $\boxed{t = \operatorname{Arcosh} x/2}$. Damit ist

$$\frac{dx}{dt} = 2\sinh t\,,\ dx = 2\sinh t\,dt\,,\ \sqrt{(x^2-4)^3} = \left(\sqrt{4\cosh^2 t - 4}\right)^3 = 8\sinh^3 t\ \text{, somit:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sinh^2 t} = \frac{1}{4}\,\coth t\ + c = \frac{1}{4}\,\frac{2\cosh t}{\sqrt{4\cosh^2 t - 4}} + c = \frac{1}{4}\,\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} + c\,,$$

$$\int_{x=5.2}^{10.1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = \frac{1}{4}\int_{t=\ln 5}^{\ln 10} \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\frac{1}{4}\,\coth t\,\Big|_{t=\ln 5}^{\ln 10} = 0.01578\ldots.$$

13.E Integration mit Partialbruchzerlegung.

Um das Integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)\,dx}$ einer **gebrochen–rationalen Funktion** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind) auswerten zu können, wird $f(x)$ mit Hilfe der **Partialbruchzerlegung** in eine Summe von "einfachen" Partialbrüchen plus evtl. einer ganz–rationalen Funktion (einem Polynom oder einer Konstanten) zerlegt:

1.Schritt: Ist der Grad des Zählers $P(x)$ größer oder gleich dem Grad des Nenners $Q(x)$, so wird zunächst durch Polynom–Division ein *ganz–rationaler* Summand abgespaltet. Dann ist $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ mit einem Polynom $P_0(x)$ und einer **echt gebrochenrationalen** Funktion $r(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$. (hierbei ist $P_0(x)$ konstant, falls $P(x)$ und $Q(x)$ gleichen Grad haben); der Grad von $P_1(x)$ ist damit also *echt kleiner* als der Grad von $Q(x)$!

2.Schritt : Der gegebene Nenner $Q(x)$ ist als Hauptnenner der zu ermittelnden "einfachen" Partialbrüche" das Produkt der Nenner der einzelnen Partialbrüche. Um diese Nenner zu bekommen, muss $Q(x)$ in Linearfaktoren — evtl. auch Quadratfaktoren, wenn man im Reellen bleiben will — zerlegt werden: hierzu benötigt man in der Regel die Nullstellen von $Q(x)$: jede reelle Nullstelle $x_1 = a$ liefert den Linearfaktor $(x - x_1) = (x - a)$, jedes konjugiert–komplexe Paar nicht–reeller Nullstellen $x_{1,2} = a \pm ib$ liefert den reellen Quadratfaktor $(x - x_1)(x - x_2) = (x - a)^2 + b^2$; diese Faktoren treten jeweils so oft auf, wie die Vielfachheit der zugehörigen Nullstelle beträgt.

3.Schritt : Mit der Linear– bzw. Quadratfaktorzerlegung des Nenners $Q(x)$ kennt man zumindest die Nenner der gesuchten Partialbrüche.

Um die Partialbruchzerlegung der (echt gebrochen–rationalen) Funktion $r(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ zu erhalten, macht man für $r(x)$ einen **Partialbruchansatz** , indem man $r(x)$ formal als Summe von Partialbrüchen der folgenden Art schreibt (mit zunächst noch unbestimmten Koeffizienten A , B , . . . , A_ν , . . .) :

13.14

Nullstelle(n) des Nenners	Vielfachheit	zugehöriger Linear– oder Quadratfaktor des Nenners	zugehöriger **Partialbruch**
$x_1 = a$	einfach	$(x-a)$	$\dfrac{A}{x-a}$
reell	zweifach	$(x-a)^2$	$\dfrac{A+Bx}{(x-a)^2}$
	dreifach	$(x-a)^3$	$\dfrac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	k–fach	$(x-a)^k$	$\dfrac{A_0+A_1x+\cdots+A_{k-1}x^{k-1}}{(x-a)^k}$
$x_{1,2} = a \pm ib$	je einfach	$(x-a)^2+b^2$	$\dfrac{A+Bx}{(x-a)^2+b^2}$
nicht reell	je zweifach	$((x-a)^2+b^2)^2$	$\dfrac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{((x-a)^2+b^2)^2}$
$b \neq 0$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	je m–fach	$((x-a)^2+b^2)^m$	$\dfrac{A_0+A_1x+\cdots A_{2m-1}x^{2m-1}}{((x-a)^2+b^2)^m}$

Beim **Partialbruchansatz** steht im Zähler der einzelnen Partialbrüche jeweils das *allgemeinste* Polynom, dessen Grad *um 1 kleiner* ist als der Grad des Nenners!

13.15

Es ergeben sich wesentlich bequemer zu integrierende Partialbrüche, wenn man im Partialbruchansatz die oben angegebenen Partialbrüche weiter aufspaltet:

im Fall einer k–fachen reellen Nullstelle $x_1 = a$:

$$\frac{[\text{allg.Polynom vom Grad } (k-1)]}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \,,$$

im Fall von zwei m–fachen, nicht–reellen Nullstellen $x_{1,2} = a \pm ib$:

$$\frac{[\text{allg.Polynom vom Grad } (2m-1)]}{((x-a)^2+b^2)^m} = \frac{A_1 + B_1 x}{(x-a)^2+b^2} + \cdots + \frac{A_m + B_m x}{((x-a)^2+b^2)^m} \,,$$

jeweils wieder mit "geeignet" zu bestimmenden Koeffizienten A_ν, B_ν.

4.Schritt: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die unbekannten Koeffizienten zu bestimmen: z.B.:

(1) Man bringt die Partialbrüche auf der rechten Seite auf einen **Hauptnenner**; da dieser gleich dem gegebenen Nenner $Q(x)$ ist, müssen beide Zähler übereinstimmen; sortiert man also den rechts erhaltenen Zähler nach Potenzen von x, so ergeben sich durch **Koeffizientenvergleich** so viele Bestimmungsgleichungen, wie es unbekannte Koeffizienten gibt.

(2) Oder man setzt in die Gleichung für x so viele verschiedene konkrete Werte ein (nicht gerade Nullstellen des Nenners!), wie es unbekannte Koeffizienten gibt: das liefert entsprechend viele Bestimmungsgleichungen. (Die Nullstellen des Nenners kann man *dann* einsetzen, wenn man vorher beide Seiten mit der maximalen Potenz des zugehörigen Linear– bzw. Quadratfaktors durchmultipliziert: in diesem Fall ergeben sich besonders einfache Bestimmungsgleichungen!)

Letzter Schritt: Zum Schluss sind noch die erhaltenen Partialbrüche zu integrieren. Die hierbei auftretenden **Grundintegrale** sind in Abschnitt 12.G, Nr.25 ff) aufgelistet.

Beispiel zur Integration mit Partialbruchzerlegung:

Zu bestimmen sei das Integral: $\displaystyle\int \frac{2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x - 3}{x^5 - x^4 - x^2 + x}\, dx$:

1.Schritt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x - 3}{x^5 - x^4 - x^2 + x} = \text{(Polynom–Division)} \\ &= 2 + \frac{-3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x - 3}{x^5 - x^4 - x^2 + x}\,. \end{aligned}$$

2.Schritt: Linear– bzw. Quadratfaktorzerlegung des Nenners:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^5 - x^4 - x^2 + x = x^4(x-1) - x(x-1) = (x-1)\,(x^4 - x) = \\ &= x(x-1)\,(x^3-1) = x(x-1)^2(x^2+x+1) \end{aligned}$$

Leider geht das nicht immer so einfach! In der Regel ist dieser Schritt der härteste Teil der Partialbruchzerlegung (die anderen Teile sind höchstens lästig langwierig — aber nicht schwer!).

Wenn es nicht gelingt, den Nenner $Q(x)$ durch einfaches Ausklammern in Linear– oder Quadratfaktoren zu zerlegen, muss man entweder möglichst viele Nullstellen von $Q(x)$ erraten oder diese mit Hilfe von Näherungsverfahren ermitteln: jede bekannte Nullstelle x_0 wird in Form des Linearfaktors $(x - x_0)$ sofort "wegdividiert", um den Grad von $Q(x)$ zu verkleinern!

3.Schritt: Partialbruchansatz:

$$r(x) = \frac{-3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x - 3}{x\,(x-1)^2(x^2+x+1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{(x-1)^2} + \frac{D+Ex}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2(x^2+x+1) + (B+Cx)\,x\,(x^2+x+1) + (D+Ex)\,x\,(x-1)^2}{x\,(x-1)^2(x^2+x+1)}\ \text{, d.h.:}$$

$$-3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x - 3 \stackrel{!}{=} A(x-1)^2(x^2+x+1) + (B+Cx)\,x\,(x^2+x+1) + (D+Ex)\,x\,(x-1)^2 =$$

$$= (A+C+E)\,x^4 + (-A+B+C+D-2E)\,x^3 + (B+C-2D+E)\,x^2 + (-A+B+D)\,x + A\ .$$

4.Schritt: Bestimmung der Koeffizienten:

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A = -3 \\ (2) & -A+B+D = 4 \\ (3) & B+C-2D+E = 4 \\ (4) & -A+B+C+D-2E = 1 \\ (5) & A+C+E = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -3 \\ B = 2 \\ C = -1 \\ D = -1 \\ E = 1 \end{array}\right.$$

Der etwas feinere Partialbruchansatz: $r(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D+Ex}{x^2+x+1}$ ergibt:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A = -3 \\ (2) & -A-B+C+D = 4 \\ (3) & C-2D+E = 4 \\ (4) & -A+C+D-2E = 1 \\ (5) & A+B+E = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -3 \\ B = -1 \\ C = 1 \\ D = -1 \\ E = 1 \end{array}\right.$$

Damit hat man die Partialbruchzerlegungen:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x - 3}{x^5 - x^4 - x^2 + x} &= 2 - \frac{3}{x} + \frac{2-x}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1} = \\ &= 2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1}\ . \end{aligned}$$

Letzter Schritt: Jetzt kann **integriert** werden:

Mit: $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ bekommt man:

$$\int \frac{2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x - 3}{x^5 - x^4 - x^2 + x}\,dx = \int \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1}\right) dx =$$

$$= 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= 2x - 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2+x+1\right) - \sqrt{3}\,\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c\ .$$

13.F Integration über Potenzreihenentwicklung.

Manche Integrale lassen sich nicht (oder nur sehr mühsam) elementar auswerten. Wenn sich der Integrand in eine Potenzreihe entwickeln lässt, dann kann man durch **gliedweises Integrieren** dieser Potenzreihe das Integral zumindest in Form einer Reihe erhalten.

Beispiele:

(a)
$$\begin{aligned}\int e^{-x^2}dx &= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right)dx = c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \\ &= c+x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}\pm\cdots\end{aligned}$$

(b) Der Integralsinus: $(x\geq 0)$
$$\begin{aligned}\mathsf{Si}\,(x) := \int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt &= \int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k}\right)dt = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_{t=0}^{x} = \\ &= x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}\pm\cdots\end{aligned}$$

(c) Die Integralexponentialfunktion: $(x<0)$
$$\begin{aligned}\mathsf{Ei}\,(x) := \int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}\,dt &= \int_{-\infty}^x\left(\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}\right)dt = \left[\ln|t|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot n!}\right]_{t=-\infty}^{x} = \\ &= C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}+\cdots\end{aligned}$$

mit der **Euler'schen Konstanten** $C = 0.5772156649\ldots = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}-\ln n\right)$.

(d) Sei $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}$.

Aus den Potenzreihenentwicklungen für $\cos x$ und $\sin x$ ergibt sich für alle $x\neq 0$:
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\cdots\right)-\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\cdots\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)x^3-\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)x^5\pm\cdots = \\ &= -\frac{2}{3!}x+\frac{4}{5!}x^3-\frac{6}{7!}x^5\pm\cdots;\end{aligned}$$

damit ist $f(x)$ mit $f(0)=0$ auch an der Stelle $x=0$ definiert und stetig und es folgt (auf $\mathbb{R}$):
$$\int\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)dx = \int\left(-\frac{2}{3!}x+\frac{4}{5!}x^3-\frac{6}{7!}x^5\pm\cdots\right)dx = c_0-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\pm\cdots =$$
$$= c+\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\cdots\right) = \frac{\sin x}{x}+c \quad (c_0\,,c \text{ beliebig konstant}).$$

14 Komplexe Zahlen.

Stichpunkte: Algebraische, exponentielle und trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen, Real– und Imaginärteil, Argument und Betrag, Konjugiert–Komplexe, Rechenregeln, komplexer Einheitskreis, Fundamentalsatz der Algebra, komplexe Wurzeln, komplexer natürlicher Logarithmus, komplexe Potenzen.

14.A Algebraische und exponentielle Darstellung.

14.1

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy = r\,e^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
mit $x, y \in \mathbb{R}$, $r, \varphi \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ (!) ist:

$z = x + iy$	die **algebraische Darstellung** von z
$z = r\,e^{i\varphi}$	die **exponentielle Darstellung** von z
$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	die **trigonometrische Darstellung** von z
$\Re\mathrm{e}\, z = x = r\cos\varphi$	der **Realteil** von z
$\Im\mathrm{m}\, z = y = r\sin\varphi$	der **Imaginärteil** von z (nicht iy !)
$\lvert z\rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$	der **Betrag** von z $(r = \lvert z\rvert \geq 0\ !)$
$\arg(z) = \varphi$	das **Argument** (der Winkel) von z (s.u.)
$z^* = x - iy = r\,e^{-i\varphi}$	die **Konjugiert–Komplexe** von z

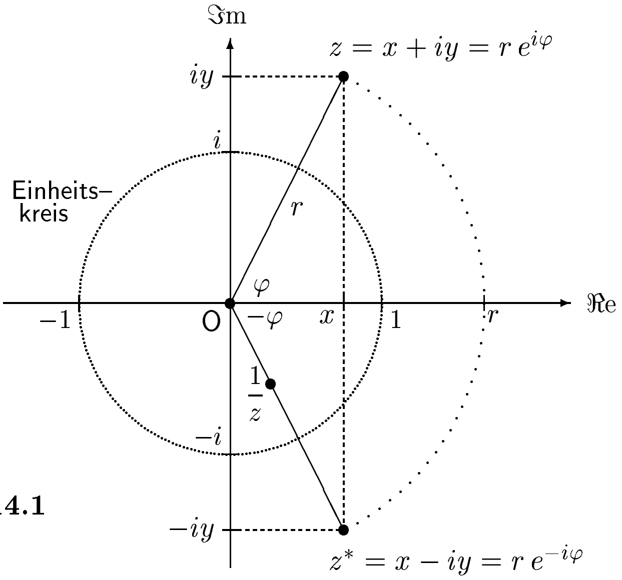


Abbildung 14.1

z.B.: Für $z = 2\,e^{i\pi/3} = 2\,(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = 1 + i\,\sqrt{3}$ ist: $x = \Re\mathrm{e}\, z = 1$ der **Realteil**, $y = \Im\mathrm{m}\, z = \sqrt{3}$ der **Imaginärteil**, $r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$ der **Betrag**, $\varphi = \arg(z) = \pi/3$ das **Argument** und $z^* = 1 - i\,\sqrt{3} = 2\,e^{-i\pi/3}$ die **Konjugiert–Komplexe**.

Der Zusammenhang zwischen der trigonometrischen und der exponentiellen Darstellung ist durch die **Euler'sche Formel** gegeben: (siehe Nr. 10.12)

14.2

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$	$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$
$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$	$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$

14.3

Das **Argument** (der Winkel) $\varphi = \arg(z)$ ist nur bis auf Summanden $k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt.
Der Wert von φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ ist der **Hauptwert des Arguments**.

Es ist üblich — auch in unserem Kurs — für das Argument stets stillschweigend seinen Hauptwert zu nehmen, wenn nichts Gegenteiliges gesagt wird!

14.4

Aus der **algebraischen** Darstellung $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gewinnt man die **exponentielle** Darstellung $z = r\,e^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit dem **Hauptwert** des Arguments $\varphi = \arg(z)$ aus:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und den *beiden* Beziehungen: $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$.

Zunächst liefert der Taschenrechner über $\varphi_0 = \cos^{-1} x/|z|$ einen Winkel $\varphi_0 \in [0, \pi]$:
beide Winkel $\varphi = \pm\varphi_0$ erfüllen dann die erste Beziehung: $\cos\varphi = x/|z|$;
mit Hilfe der zweiten Beziehung: $\sin\varphi = y/|z|$ kann dann entschieden werden,
ob $\varphi = +\varphi_0$ oder $\varphi = -\varphi_0$.

z.B.: $z = -1 - i$: es ist $|z| = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$, somit $\varphi = \pm 3\pi/4$;
die zweite Beziehung: $\sin\varphi = -1/\sqrt{2}$ zeigt, dass $\varphi = \arg(z) = -3\pi/4$ sein muss .
Damit ist: $z = -1 - i = \sqrt{2}\,e^{-3/4\,\pi i}$.

Achtung: In vielen Formelsammlungen wird für φ die Bestimmungsgleichung: $\tan\varphi = y/x$ angegeben: da Taschenrechner nur mit dem Hauptwert des arcus–Tangens arbeiten, liefert diese Gleichung nur dann den richtigen Winkel φ, wenn $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$!

Im letzten Beispiel ergäbe sich aus der Beziehung: $\tan\varphi = 1$ der falsche Winkel $\varphi = \pi/4$!

Beachte:

14.5

> Für $z = r\,e^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ ist $|z| = r$ und φ ist das Argument;
> für $z = -r\,e^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ ist *ebenfalls* $|z| = r$ und das Argument ist $\varphi \pm \pi$!

z.B.:

$e^{i\,\pi/4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$, $|e^{i\,\pi/4}| = 1$; $e^{i\,\pi/3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $|e^{i\,\pi/3}| = 1$; $e^{\pm 2\pi\,i} = e^{k\cdot 2\pi\,i} = 1\ \forall k \in \mathbb{Z}$;
$e^{\pm i\,\pi/2} = \pm i$, $|e^{\pm i\,\pi/2}| = |\pm i| = 1$; $e^{\pm i\,\pi} = -1$, $|e^{\pm i\,\pi}| = |-1| = 1$.
$z = -3\,e^{2 - i\,\pi/4} = 3e^2 \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-i\,\pi/4} = 3e^2 \cdot e^{3/4\,\pi i} \quad\Rightarrow\quad |z| = 3e^2$, $\arg(z) = 3/4\,\pi$.

14.B Einige Regeln.

14.6

> In der **komplexen Ebene** (=Gauß'sche Ebene) liegen:
> z und z^* **spiegelsymmetrisch** zur reellen Achse,
> z und $-z$ **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung.

14.7

$\Re\mathrm{e}\, z \leq \|z\|$, $\Im\mathrm{m}\, z \leq \|z\|$	$i = \sqrt{-1}$
$(z \pm w)^* = z^* \pm w^*$	$i^2 = -1$
$(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$, $\left(\dfrac{z}{w}\right)^* = \dfrac{z^*}{w^*}$	$\dfrac{1}{i} = -i$
$z \cdot z^* = \|z\|^2$ bzw. $1/z = z^*/\|z\|^2$ für $z \neq 0$	für beliebige $\varphi \in \mathbb{R}$ ist
$\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$ **(Dreiecksungleichung)**	$\|e^{i\varphi}\| = 1$
$\|z \cdot w\| = \|z\| \cdot \|w\|$	$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
$\left\|\dfrac{z}{w}\right\| = \dfrac{\|z\|}{\|w\|}$	$\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

14.8

> **Darstellungen des komplexen Einheitskreises:**
> $K: \quad |z| = 1$
> $K: \quad z = x + iy$ mit $x^2 + y^2 = 1$
> $K: \quad z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$

Diese Regeln sind elementar nachzurechnen, etwas Mühe bereitet höchstens die
Dreiecksungleichung:

für beliebige reelle Zahlen x, y, u, v hat man zunächst:
$0 \leq (xv - yu)^2 = x^2v^2 - 2xyuv + y^2u^2$, somit: $2xyuv \leq x^2v^2 + y^2u^2$;
damit ergibt sich für beliebige komplexe Zahlen $z = x + iy$, $w = u + iv$:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (x+u)^2 + (y+v)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2(xu + yv) = \\
&= x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2\sqrt{(xu+yv)^2} = \\
&= x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2\sqrt{x^2u^2 + 2xuyv + y^2v^2} \leq \\
&\leq x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2\sqrt{x^2u^2 + x^2v^2 + y^2u^2 + y^2v^2} = \\
&= \left(x^2 + y^2\right) + \left(u^2 + v^2\right) + 2\sqrt{(x^2+y^2)\,(u^2+v^2)} = \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

∎

14.9 Der Nenner eines Bruches "wird reell", wenn man den Bruch mit der Konjugiert-Komplexen des Nenners erweitert: $\dfrac{Z}{N} = \dfrac{Z \cdot N^*}{N \cdot N^*} = \dfrac{Z \cdot N^*}{|N|^2}$.

z.B.: $\dfrac{3-i}{4-3i} = \dfrac{(3-i)\,(4+3i)}{(4-3i)\,(4+3i)} = \dfrac{15+5i}{25} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}\,i$.

Beachte:
Werden zwei komplexe Zahlen $z = |z|e^{i\varphi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$ **multipliziert**, so **multiplizieren** sich ihre Beträge: $|zw| = |z||w|$ und ihre Argumente **addieren** sich: $\arg(zw) = \varphi + \psi$.

> Insbesondere bewirkt die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit $e^{i\psi}$ eine **Drehung von z um den Winkel ψ !**

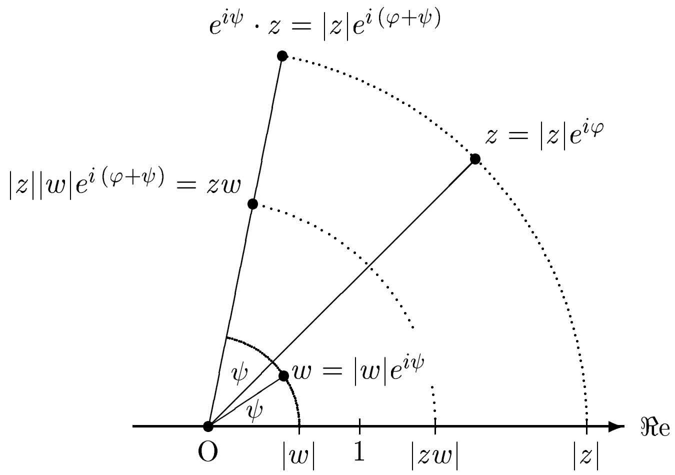


Abbildung 14.2: **Produkt komplexer Zahlen**

14.C Komplexe Wurzeln.

14.10

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vom Grad n besitzt eine **eindeutige Linearfaktorzerlegung:**

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\,.$$

Die Zahlen $x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\,,\ x_n \in \mathbb{C}$ sind die **Nullstellen** von $P(x)$.

Tritt einer der Faktoren x_j mehrfach (k–fach) auf, so ist x_j eine **mehrfache** (bzw. **k–fache**) Nullstelle von $P(x)$; diesem Fall lässt sich mit Hilfe der Polynomdivision von $P(x)$ der Faktor $(x - x_j)^k$ abspalten.

14.11

Hat das Polynom $P(x)$ nur *reelle* Koeffizienten a_k, so treten alle *nicht–reellen* Nullstellen x_j als **konjugiert–komplexe Paare** auf; in diesem Fall lässt sich von $P(x)$ der **reelle Quadratfaktor** $(x - x_j)(x - x_j^*)$ abspalten. Ein Polynom $P(x)$ *ungeraden* Grades mit *nur reellen* Koeffizienten hat demnach *mindestens eine reelle* Nullstelle.

z.B.:

$P(x) = x^4 + 4$: irgendwoher sei bekannt, dass $x_1 = 1 + i$ eine Nullstelle von $P(x)$ ist.
Dann ist auch $x_2 = 1 - i$ eine Nullstelle und man kann (über Polynomdivision) von $P(x)$ den reellen Quadratfaktor:

$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$ abspalten:
$(x^4 + 4)\ :\ (x^2 - 2x + 2)\ =\ x^2 + 2x + 2\,.$

Damit ergeben sich zwei weitere Nullstellen: $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i$ und man bekommt für $P(x)$ die folgende reelle Quadratfaktorzerlegung und nicht–reelle Linearfaktorzerlegung:

$$\begin{aligned} P(x) = x^4 + 4 \ &= \ (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = \\ &= \ \Big(x - (1 + i)\Big)\Big(x - (1 - i)\Big)\Big(x - (-1 + i)\Big)\Big(x - (-1 - i)\Big)\ . \end{aligned}$$

(s. auch unten das Beispiel: $\sqrt[4]{-4}$.)

14.12

Jede komplexe Zahl $z = |z|\, e^{i\varphi}$ $(z \neq 0)$ hat **genau n verschiedene n–te Wurzeln**:

$$\boxed{\boxed{w_k = |z|^{1/n} \cdot e^{i\,(\varphi/n\,+\,k\cdot 2\pi/n)}}} \quad (\,k = 0, \ldots, n-1\,)\,.$$

Ist $\varphi = \arg(z)$ der **Hauptwert des Arguments** von z, so ist

$\boxed{w_0 = |z|^{1/n} \cdot e^{i\,\varphi/n}}$ der **Hauptwert der n–ten Wurzel** aus z.

Die n–ten Wurzeln aus 1 sind die n **n–ten Einheitswurzeln:**

$$\boxed{e_k = e^{ik\cdot 2\pi/n} \quad (\,k = 0, \ldots, n-1\,)}\,.$$

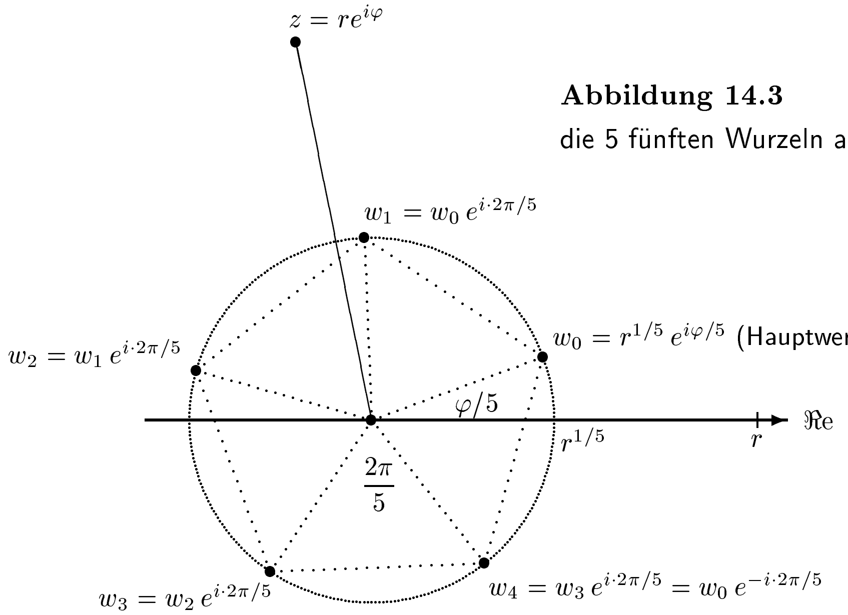


Abbildung 14.3
die 5 fünften Wurzeln aus z:

14.13

Die n n–ten Wurzeln aus z liegen auf einem Kreis um 0 vom Radius $|z|^{1/n}$ und bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n–Ecks mit Innenwinkel $2\pi/n$.

Man erhält daher mit jeder n–ten Wurzel w_k die nächste durch "Weiterdrehen“ um den Winkel $2\pi/n$, d.h. durch Multiplikation mit dem Faktor $e^{i\,2\pi/n}$:

14.14 $$\boxed{\boxed{w_{k+1} = w_k \cdot e^{i\,2\pi/n}}}\,.$$

z.B.: $\sqrt[4]{-4}$: (s. auch oben: die Nullstellen von $P(x) = x^4 + 4$)

$z = -4 = 4 \cdot e^{i\pi}$ hat die vier vierten Wurzeln:

$w_0 = 4^{1/4}\, e^{i\,\pi/4} = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = 1 + i$ (Hauptwert),

$w_1 = w_0 \cdot e^{i\,\pi/2} = \sqrt{2}\, e^{i\,(\pi/4+\pi/2)} = \sqrt{2}\, e^{3/4\,\pi i} = \sqrt{2}\,(\cos 3/4\,\pi + i \sin 3/4\,\pi) = -1 + i$,

$w_2 = w_1 \cdot e^{i\,\pi/2} = \sqrt{2}\, e^{(3/4\,\pi+\pi/2)i} = \sqrt{2}\, e^{5/4\,\pi i} = \sqrt{2}\,(\cos 5/4\,\pi + i \sin 5/4\,\pi) = -1 - i$,

$w_3 = w_2 \cdot e^{i\,\pi/2} = \sqrt{2}\, e^{(5/4\,\pi+\pi/2)i} = \sqrt{2}\, e^{7/4\,\pi i} = \sqrt{2}\,(\cos 7/4\,\pi + i \sin 7/4\,\pi) = 1 - i$.

14.D Komplexer Logarithmus und komplexe Potenzen. (*)

14.15 Der **komplexe natürliche Logarithmus** $\operatorname{Ln} z$ stimmt auf $\mathbb{R}^+$ (für $\arg z = 0$) mit dem reellen natürlichen Logarithmus $\ln x$ überein und genügt darüberhinaus den üblichen Rechenregeln für Logarithmen:

mit $z = |z|\, e^{i\varphi}$ ist $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}\,(|z|\, e^{i\varphi}) = \ln|z| + \operatorname{Ln} e^{i\varphi} = \ln|z| + i\varphi$:

$\boxed{\text{für } z = |z|\, e^{i\varphi} \text{ ist } \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi}$.

14.16 Da $\varphi = \arg(z)$ unendlich vieldeutig ist, ist auch $\operatorname{Ln} z$ unendlich vieldeutig; ist φ_0 der **Hauptwert des Arguments**, so ist $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi_0$ der **Hauptwert des komplexen Logarithmus'**.

z.B.: $\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln} e^{i\pi} = i\pi$ (Hauptwert), $\operatorname{Ln} i = \operatorname{Ln} e^{i\,\pi/2} = i\,\pi/2$ (Hauptwert).

14.17 **Komplexe Potenzen** werden wie im Reellen mit der e–Funktion definiert:

$\boxed{\text{Für } z = |z|\, e^{i\varphi} \text{ ist } z^w = e^{w \operatorname{Ln} z} = e^{w\,(\ln|z| + i\varphi)}}$;

der **Hauptwert von** z^w ergibt sich mit dem Hauptwert von $\varphi = \arg(z)$.

z.B.: $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i\,\pi/2} = e^{-\pi/2} = 0.207879576\ldots$ (Hauptwert).

15 Schwingungen. Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Stichpunkte: Reelle und komplexe Darstellungen harmonischer Schwingungen. Trennung der Variablen für Differentialgleichungen 1. Ordnung; die allgemeine Lösung $\Big(D - a(x)\Big)^{-1}(0)$ einer homog. linearen Dgl. 1. Ordnung; die allgemeine Lösung inhomogener lin. Dgln. 1. Ordnung.

15.A Harmonische Schwingungen.

Darstellung reeller einfacher harmonischer Schwingungen:
(mit der Periode $T > 0$, der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ und der Amplitude A).

15.1

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \cos(\omega t - \varphi) \\ &= a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t \\ &= c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \text{mit: } \begin{aligned} & a = A \cdot \cos\varphi = c_+ + c_- = 2\,\Re\mathrm{e}\, c_+ \\ & b = A \cdot \sin\varphi = i\,(c_+ - c_-) = -2\,\Im\mathrm{m}\, c_+ \\ & \cos\varphi = \tfrac{a}{A}\,,\ \sin\varphi = \tfrac{b}{A} \\ & A^2 = a^2 + b^2 = 4|c_+|^2 = 4|c_-|^2 \\ & c_+ = \tfrac{1}{2}\,(a - ib) = \tfrac{A}{2}\,e^{-i\varphi} \\ & c_- = c_+^* = \tfrac{1}{2}\,(a + ib) = \tfrac{A}{2}\,e^{i\varphi} \end{aligned}$$

z.B.:

$$\begin{aligned} f(t) &= 4\cos(3t - \pi/4) \\ &= 2\sqrt{2}\,\cos 3t + 2\sqrt{2}\,\sin 3t \\ &= \sqrt{2}\,(1-i)\,e^{3it} + \sqrt{2}\,(1+i)\,e^{-3it} \end{aligned}$$

mit:

$\omega = 3\,,\ T = 2\pi/3\,,\ A = 4$

$a = 4\cos\,\pi/4 = 2\sqrt{2}\,,\ b = 4\sin\,\pi/4 = 2\sqrt{2}$

$\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$

$c_+ = \sqrt{2}\,(1-i)\,,\ c_- = \sqrt{2}\,(1+i)$

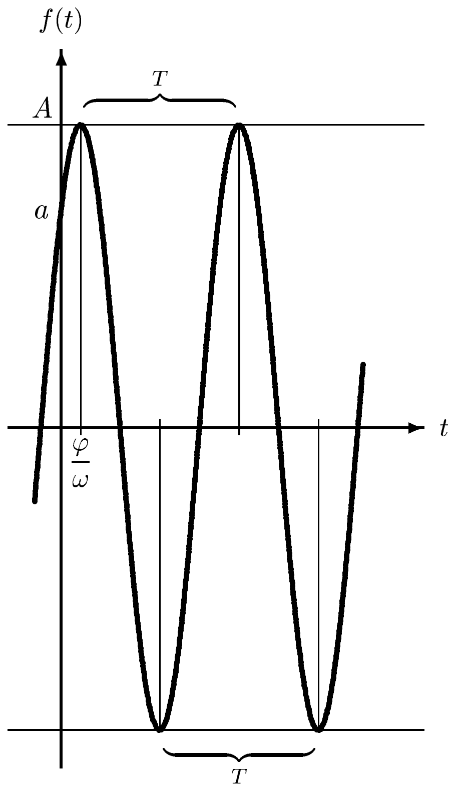


Abbildung 15.1: $f(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$

Das ergibt sich mit Hilfe des **Additions–Theorems für den Cosinus** (Nr. 6.5) und der **Euler'schen Formel** (Nr. 14.2) als einfache Rechenübung, z.B.:

$$\begin{aligned} f(t) &= \boxed{A\cos(\omega t - \varphi)} = A(\cos\omega t \cdot \cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi) = \\ &= \underbrace{A\cos\varphi}_{=:a} \cdot \cos\omega t + \underbrace{A\sin\varphi}_{=:b} \cdot \sin\omega t = \boxed{a\cos\omega t + b\sin\omega t} = \\ &= \frac{a}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + \frac{b}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)}_{=:c_+} e^{i\omega t} + \underbrace{\frac{1}{2}(a + ib)}_{=:c_-} e^{-i\omega t} = \\ &= \boxed{c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

15.2

Die Funktion $f(t) = c_1\, e^{i\omega t} + c_2\, e^{-i\omega t}$ (mit $c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{C}\,,\ \omega \in \mathbb{R}$)

ist *genau dann* **reell** $\forall t \in \mathbb{R}$, wenn $\boxed{c_2 = c_1^*}$; in diesem Fall ist

$$f(t) = a \cdot \cos\omega t + b \cdot \sin\omega t \quad \text{mit } \textit{reellen} \ \begin{cases} a = c_1 + c_1^* = 2\Re\mathrm{e}\, c_1 \\ b = i\,(c_1 - c_1^*) = -2\Im\mathrm{m}\, c_1\,. \end{cases}$$

Umgekehrt ist die *reelle* Funktion
$f(t) = a \cdot \cos\omega t + b \cdot \sin\omega t$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
eindeutig darstellbar in der Form
$f(t) = c \cdot e^{i\omega t} + c^* \cdot e^{-i\omega t}$ mit $c = \frac{1}{2}(a - ib) \in \mathbb{C}$.

Nocheinmal:

15.3 !

Für $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$) stimmt die Gesamtheit aller Funktionen der Form

$$\boxed{f(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}\left(c_1\, e^{i\omega t} + c_2\, e^{-i\omega t}\right)} \quad (c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{C})$$

überein mit der Funktionenschar:

$$\boxed{f(t) = e^{\alpha t}\,(a\cos\omega t + b\sin\omega t)} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}\,.$$

Diese Funktionen sind *genau dann reell* ($\forall\, t \in \mathbb{R}$), wenn $c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{C}$ mit $c_2 = c_1^*$ bzw. mit $a, b \in \mathbb{R}$.

15.B Trennung der Variablen bei Dgln. 1. Ordnung.

In der Regel gibt es verschiedene, unterschiedlich einfach oder schwer zu handhabende Methoden, eine Dgl. zu lösen, und man muss im Einzelfall entscheiden, welche von ihnen gerade die günstigste ist. Bei Dgln. 1. Ordnung ist die Methode der **Trennung der Variablen** — sofern sie anwendbar ist — **fast immer die bequemste Methode:**

15.4

Die Funktion f sei von der Form: $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ mit $h \neq 0$. Um die Dgl. (*) $\boxed{y' = f(x,y)}$ zu lösen, fasst man den (symbolischen) Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$ als echten Bruch auf:

$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y)}$, und trennt in dieser Gleichung die Variablen:

$\boxed{\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx}$: **hier sind (formal) die Variablen getrennt.**

Wenn man beide Seiten (unabhängig voneinander!) integriert:

$$\boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx}$$

und die beiden Integrationskonstanten zu einer Konstanten c auf der rechten Seite zusammenfasst, ergibt sich eine Gleichung der Form:

(**) $\boxed{H(y) = G(x) + c}$, durch die die Lösung y der Dgl. (*) implizit gegeben ist. Diese Gleichung wird nach Möglichkeit nach $y = y(x)$ — notfalls auch nach $x = x(y)$ — aufgelöst.

Diese Methode hat einen einfachen mathematischen Hintergrund:

Sei $G(x)$ eine Stammfunktion zu $g(x)$ und $H(y)$ eine Stammfunktion zu $\frac{1}{h(y)}$, also

$\int g(x)\,dx = G(x) +$ const. und $\int \frac{dy}{h(y)} = H(y) +$ const. .

Dann gilt (aufgrund der Kettenregel) für die Lösungen $y(x)$ der Dgl. (*) $\boxed{y' = g(x)\cdot h(y)}$:

$$\frac{dH\big(y(x)\big)}{dx} = \frac{dH(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h(y)}\cdot y' \overset{(*)}{=} \frac{1}{h(y)}\cdot g(x)\cdot h(y) = g(x) = \frac{dG(x)}{dx}\,,\ \text{folglich:}$$

$\frac{d}{dx}\Big(H\big(y(x)\big) - G(x)\Big) = 0$, d.h. $H(y) - G(x) = c$ (konstant) , bzw.:

(**) $\boxed{H(y) = G(x) + c}$. ∎

z.B.: Wir wollen das Anfangswertproblem:

(*) $\boxed{\boxed{yy'(x+2)+1=0\,,\ \ y(-1)=-2}}$ durch **Trennung der Variablen** lösen:

$$y\,\frac{dy}{dx}\,(x+2)=-1\ \Rightarrow\ y\,dy=-\frac{dx}{x+2}\ \Rightarrow\ \int y\,dy=-\int\frac{dx}{x+2}\ \Rightarrow$$
$$y^2=-2\,\ln|x+2|\,+c=-\ln(x+2)^2+c\ \Rightarrow$$

$\boxed{y(x)=\pm\sqrt{c-\ln(x+2)^2}\,,\ \ c \text{ bel. konst.}}$: das ist zunächst die **allgemeine Lösung** .

Die Bedingung: $y(-1)=-2$ ist eine Bedingung an die Konstante c :

$-2\overset{!}{=}y(-1)=\pm\sqrt{c-\ln 1}=\pm\sqrt{c}\ \Rightarrow\ c=4$ und die Wurzel hat das *negative* Vorzeichen.

Wir erhalten die **gesuchte Lösung** von (*) :

$\boxed{\boxed{y(x)=-\sqrt{4-\ln(x+2)^2}}}$.

Hier ist es angebracht, zu überlegen, *wo* diese Lösung definiert ist: es muss $x\neq-2$ sein und: $4-\ln(x+2)^2\geq 0$, also $\ln(x+2)^2\leq 4$ bzw. $|x+2|\leq e^2$. Damit hat die gesuchte Lösung den

Definitionsbereich: $\boxed{\mathcal{D}y=[-2-e^2\,,\ -2+e^2\,]\setminus\{-2\,\}}$:

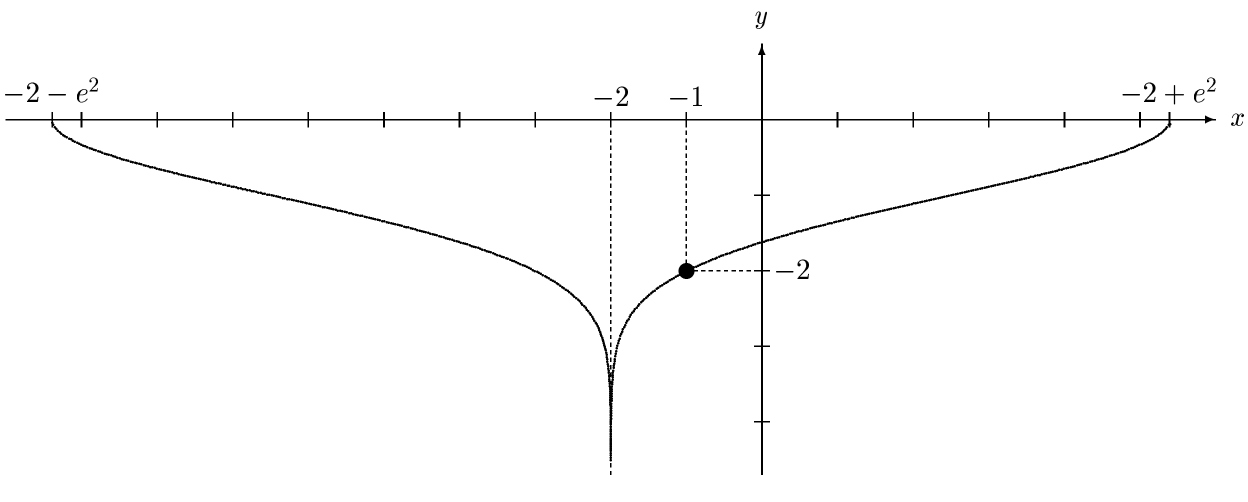


Abbildung 15.2 $y=-\sqrt{4-\ln(x+2)^2}\,,\ y(-1)=-2$

15.C Homogene lineare Dgl. 1. Ordnung.

15.5

Die **homogene lineare Dgl. 1. Ordnung:**

$$(*)_0 \quad \boxed{\begin{array}{c} y' - a(x)\,y = 0 \\ \hline \big(D - a(x)\big) = 0 \end{array}} \quad \text{bzw., mit } D = \tfrac{d}{dx}\ :$$

ist, wenn $a(x)$ integrierbar ist, stets durch **Trennung der Variablen** zu lösen (s.o. Abschnitt 15.C) ; die **allgemeine Lösung** dieser Dgl. ist:

$$\boxed{y_0(x) = \big(D - a(x)\big)^{-1}\{0\} = c \cdot \exp\left(\int a(x)\,dx\right) \quad (c \text{ bel. konstant})}\ .$$

Denn: $y' - a(x)\,y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = a(x)\,y \Leftrightarrow y = o$ oder $\dfrac{dy}{y} = a(x)\,dx \Leftrightarrow$
$y = o$ oder $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$, d.h. $y = o$ oder $\ln|y| = \displaystyle\int a(x)\,dx + c_0$, d.h.
$y = o$ oder $|y| = \exp\left(\displaystyle\int a(x)\,dx + c_0\right)$, d.h. $y = c \cdot \exp\left(\displaystyle\int a(x)\,dx\right)$.

z.B.: 1. $\boxed{y' + y\,\sin x = 0}$:

$\dfrac{dy}{dx} = -y\,\sin x \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = -\sin x\,dx \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = \cos x + c_0 \Leftrightarrow$

$|y| = e^{\cos x + c_0} = e^{c_0} e^{\cos x}$ (c_0 beliebig konst.) $\Leftrightarrow$ $\boxed{y_0(x) = c\,e^{\cos x}}$ (c beliebig konst.)

Wenn der Koeffizient a *konstant* ist, kann man in der oben angegebenen Lösung das Integral $\displaystyle\int a(x)\,dx$ auch einfach ausrechnen: $\displaystyle\int a\,dx = ax + c_0$ und erhält damit:

15.6

Die **homogene lineare Dgl. 1. Ordnung:**

$$(*)_0 \quad \left.\boxed{\begin{array}{c} y' - ay = 0 \\ \hline (D - a)\,y = 0 \end{array}} \quad \text{bzw.}\right\} \text{ mit \textbf{konstantem Koeffizient} } a$$

hat die **allgemeine Lösung:**

$$\boxed{y_0(x) = (D - a)^{-1}\{0\} = c\,e^{ax}} \quad (c \text{ beliebig konstant})\,.$$

z.B.: 2. $\boxed{y' + 7y = 0}$:

$$\frac{dy}{dx} = -7y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -7\,dx\,,\text{ d.h. } \int \frac{dy}{y} = -\int 7\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = -7x + c_0 \Leftrightarrow$$

$$|y| = e^{-7x+c_0} = e^{c_0}e^{-7x} \Leftrightarrow \boxed{y_0(x) = c\,e^{-7x}} \quad (c \text{ beliebig konstant})\,.$$

Spätestens nach der dritten oder vierten gelösten Dgl. dieser Art werden Sie nicht mehr lange rechnen müssen, sondern die Lösung sofort hinschreiben können:

15.7 Wenn a konstant ist, hat man:

! $\boxed{y' - ay = 0 \Leftrightarrow y = c\,e^{ax} \quad (c \text{ beliebig konstant})}$, m.a.W.:

! $\boxed{(D-a)^{-1}\{0\} = c\,e^{ax} \quad (c \text{ beliebig konstant})}$.

z.B.: Die homogene lineare Dgl. $y' - 13y = 0$ hat die Lösungen

$y_0(x) = (D-13)^{-1}\{0\} = c\,e^{13x} \quad (c$ bel. konstant).

15.D Inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung.

15.8 Wenn die Funktionen $a(x)$ und $f(x)$ integrierbar sind, kann die **inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:**

(*) $\boxed{y' - a(x)\,y = f(x)}$ bzw., mit $D = \frac{d}{dx}$: $\boxed{\big(D - a(x)\big)\,y = f(x)}$

stets durch **Variation der Konstanten** gelöst werden:

15.9 Bei der Methode der **Variation der Konstanten**, die in Lektion 39 noch ausführlich behandelt wird, geht man von der allgemeinen Lösung

$$\boxed{y_0(x) = c \cdot \exp\left(\int a(x)\,dx\right)}$$

der zugehörigen *homogenen* Dgl. aus (s.o. die Lösungsformel in Nr. 15.5) und *variiert* hier die Konstante c, d.h. man ersetzt sie durch eine geeignet zu bestimmende *Funktion* $c(x)$: das führt auf den **Lösungsansatz** für die *inhomogene* Dgl.:

15.10 $$\boxed{\boxed{y(x) = c(x) \cdot \exp\Big(\int a(x)\,dx\Big)\ , \quad (\,c(x)\ \text{“geeignet”}\,)}}\ .$$

Man nennt diesen Ansatz einen **Variationsansatz** oder **Variation der Konstanten**.

Um $c(x)$ zu bestimmen, muss man (15.10) in die Dgl. (*) einsetzen:

mit $y' = c'(x)\exp\Big(\int a(x)\,dx\Big) + c(x)\,a(x)\exp\Big(\int a(x)\,dx\Big)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{!}{=} y' - a(x)\,y = c'(x)\exp\Big(\int a(x)\,dx\Big)\ , \quad \text{somit:}\\
c'(x) &\overset{!}{=} f(x)\exp\Big(-\int a(x)\,dx\Big)\ , \quad \text{also:}\\
c(x) &= \int f(x)\exp\Big(-\int a(x)\,dx\Big)\,dx + c \quad (c \text{ beliebig konstant})\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund des Ansatzes (15.10) ergibt sich:

15.11

Die **allgemeine Lösung** der **inhomogenen lin. Dgl.** (*) ist:

$$\boxed{y(x) = \Big(c + \int f(x)\cdot\exp\Big(-\int a(x)\,dx\Big)\,dx\Big)\cdot\exp\Big(\int a(x)\,dx\Big)}$$

(c beliebig konstant).

Häufig ist die Dgl. (*) nicht allgemein zu lösen, sondern es sind nur solche Lösungen gefragt,die einer gegebenen **Anfangsbedingung** $y(x_0) = y_0$ genügen: das ist dann eine Bedingung an die Konstante c:

Wenn man in Nr. 15.11 die unbestimmten Integrale $\int h(x)\,dx$ in der gleichwertigen Form $\int\limits_{x_0}^{x} h(\xi)\,d\xi$ schreibt: $y(x) = \left(c + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\cdot\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\xi} a(\tau)\,d\tau\right)d\xi\right)\cdot\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right)$, ergibt sich:

$y_0 \overset{!}{=} y(x_0) = \left(c + \int\limits_{x_0}^{x_0} \cdots\,d\xi\right)\cdot\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x_0}\cdots\,d\xi\right) = c$ und wir erhalten:

15.12

Das **inhomogene lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung:**

$\boxed{y' - a(x)\,y = f(x)\,,\quad y(x_0) = y_0}$ hat die **Lösung:**

$$y(x) = \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\xi} a(\tau)\,d\tau\right)d\xi\right)\cdot\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\,d\xi\right)\ .$$

In der Praxis wird man die angegebenen Lösungsformeln Nr. 15.11 und 15.12 nur in Ausnahmefällen verwenden. Meistens bewährt sich als Lösungsweg:

15.13
- Mit einem Variationsansatz (15.10) in der oben vorgeführten Weise die Lösungsgesamtheit (15.11) bestimmen und
- danach (falls gewünscht) "Anpassung" der Konstanten c an eine gegebene Anfangsbedingung.

Zum Beispiel:

1. $\boxed{y' + y\sin x = \cos^2 x - \cos x - 1}$.

Die zugehörige *homogene* Dgl. $y' + y\sin x = 0$ hat die allgemeine Lösung $y_0(x) = c\,e^{\cos x}$, c bel. konstant (s. das Beispiel **1.** zu Nr.15.5) . Diese Lösung führt auf den **Variationsansatz** für die gegebene *inhomogene* Dgl. :

(+) $\boxed{y(x) = c(x)\,e^{\cos x}\,, \quad (c(x) \ \text{"geeignet"})}$:

Mit $y'(x) = c'(x)\,e^{\cos x} - c(x)\sin x\,e^{\cos x}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - \cos x - 1 &\overset{!}{=} y' + y\sin x = \\
&= \Big(c'(x) - c(x)\,\sin x\Big)\,e^{\cos x} + \sin x\cdot c(x)\,e^{\cos x} = c'(x)\cdot e^{\cos x} \\
\Rightarrow\ c'(x) &\overset{!}{=} (\cos^2 x - \cos x - 1)\,e^{-\cos x} = -(\cos x + \sin^2 x)\,e^{-\cos x} = \\
&= -\Big(\cos x\cdot e^{-\cos x} + \sin x\,(\sin x\cdot e^{-\cos x})\Big) = -\Big(\sin x\cdot e^{-\cos x}\Big)' \\
\Rightarrow\ c(x) &= -\sin x\cdot e^{-\cos x} + c \quad (c \ \text{konst.})\,; \ \text{das ergibt die allgemeine Lösung:} \\
y(x) &= \Big(c - \sin x\cdot e^{-\cos x}\Big)\cdot e^{\cos x}\,, \ \text{d.h.:}
\end{aligned}$$

$\boxed{y(x) = c\,e^{\cos x} - \sin x \quad (c \ \text{bel. konstant})}$:

hier ist $y_0(x) = c\,e^{\cos x}$ die allgemeine Lösung der *homogenen* Dgl. $y' + y\,\sin x = 0$ und $y_s(x) = -\sin x$ ist eine Partikulärlösung der gegebenen *inhomogenen* Dgl..

Ist das **Anfangswertproblem** :

1'. $\boxed{y' + y\,\sin x = \cos^2 x - \cos x - 1\,, \ y(\pi/2) = 0}$ zu lösen,

kann man die Konstante c so bestimmen, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist:

$0 \overset{!}{=} y(\pi/2) = c\cdot e^{\cos\pi/2} - \sin\pi/2 = c - 1$, d.h. $c = 1$; das liefert die Lösung:

$\boxed{y(x) = e^{\cos x} - \sin x}$.

2. $\boxed{y' + \frac{2}{x}\,y = \sin x\,, \quad y(\pi) = 2}$

Die allgemeine Lösung $y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* lin. Dgl. $y' + \frac{2}{x}\,y = 0$ bekommen wir entweder mit der in Nr. 15.5 angegebenen Lösungsformel oder wir rechnen sie schnell aus — das geht meistens bequemer und schneller als nachzuschlagen: Trennung der Variablen liefert:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}\,y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -2\,\frac{dx}{x}$, d.h. $\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x}$, d.h.

$\ln|y| = -2\ln|x| + c_0 = \ln x^{-2} + c_0 \;\Rightarrow\; |y| = e^{c_0}\cdot x^{-2}$ (c_0 bel. konst.) , d.h.

$\boxed{y_0(x) = \frac{c}{x^2} \quad (c \text{ bel. konstant})}$. Diese Lösung führt uns auf den **Variationsansatz:**

(+) $\boxed{y(x) = c(x)\cdot\frac{1}{x^2}\,, \quad (c(x) \text{ “geeignet”})}$. Wenn man diese Funktion $y(x)$ und ihre

Ableitung $y'(x) = c'(x)\cdot\frac{1}{x^2} - 2\,c(x)\cdot\frac{1}{x^3}$ in die (*inhomogene*!) Dgl. einsetzt, ergibt sich:

$\sin x \overset{!}{=} y' + \frac{2}{x}\,y = c'(x)\cdot\frac{1}{x^2} - 2\,c(x)\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x)\cdot\frac{1}{x^2} = c'(x)\cdot\frac{1}{x^2}$, also:

$c'(x) = x^2\,\sin x$. Partielle Integration ergibt:

$$
\begin{aligned}
c(x) &= \int \underset{u}{x^2}\,\underset{v'}{\sin x}\,dx = -x^2\cos x + 2\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{\cos x}\,dx = \\
&\qquad u' = 2x\,,\ v = -\cos x \qquad\qquad u' = 1\,,\ v = \sin x \\
&= -x^2\cos x + 2\left(x\,\sin x - \int \sin x\,dx\right) = -x^2\cos x + 2x\,\sin x + \cos x + c\,,
\end{aligned}
$$

wobei c jetzt eine beliebige Konstante ist. Mit (+) erhalten wir die **allgemeine Lösung** der gegebenen inhomogenen lin. Dgl.:

$\boxed{y(x) = \frac{c}{x^2} - \cos x + \frac{2}{x}\,\sin x + \frac{1}{x^2}\,\cos x \quad (c \text{ beliebig konstant})}$.

Jetzt muss noch die Konstante c der gegebenen Anfangsbedingung $y(\pi) = 2$ angepasst werden:

$2 \overset{!}{=} y(\pi) = \frac{c}{\pi^2} - \cos\pi + \frac{2}{\pi}\,\sin\pi + \frac{1}{\pi^2}\,\cos\pi = \frac{c-1}{\pi^2} + 1 \;\Rightarrow\; c = 1 + \pi^2$.

Das **Anfangswertproblem 2.** hat damit die **Lösung:**

$\boxed{y(x) = \frac{1+\pi^2}{x^2} - \cos x + \frac{2}{x^2}\,\sin x + \frac{1}{x^2}\,\cos x}$.

Dieselbe Lösung muss sich natürlich auch mit der Lösungsformel aus Nr. 15.12 ergeben — allerdings ist die Anwendung dieser Formel keineswegs bequemer als die Rechnung von eben:

Mit $f(x) = \sin x$, $a(x) = -\dfrac{2}{x}$, $x_0 = \pi$, $y_0 = 2$ bekommt man aus Nr. 15.12 die Lösung:

$$y(x) = \left(2 + \int\limits_{\pi}^{x} \sin x \cdot \exp\left(2\int_{\pi}^{x} \frac{dx}{x}\right) dx\right) \cdot \exp\left(-2\int_{\pi}^{x} \frac{dx}{x}\right)$$

(wir haben hier — aus mathematischer Sicht zwar nicht ganz korrekt, aber von den Praktikern überwiegend so gehandhabt — die Integrationsvariablen trotz der oberen Grenze x durchweg ebenfalls mit x bezeichnet) .

Mit den Teilintegralen:

$$2\int_{\pi}^{x} \frac{dx}{x} = 2\ln|x|\Big|_{\pi}^{x} = \ln x^2\Big|_{\pi}^{x} = \ln x^2 - \ln \pi^2 = \ln \frac{x^2}{\pi^2} ,$$

$$\exp\left(2\int_{\pi}^{x} \frac{dx}{x}\right) = \exp\left(\ln \frac{x^2}{\pi^2}\right) = \frac{x^2}{\pi^2} , \quad \exp\left(-2\int_{\pi}^{x} \frac{dx}{x}\right) = \left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{x^2} \qquad \text{folgt:}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(2 + \int\limits_{\pi}^{x} \sin x \cdot \frac{x^2}{\pi^2}\, dx\right) \frac{\pi^2}{x^2} = \frac{2\pi^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \int\limits_{\pi}^{x} x^2 \sin x \, dx \overset{\text{s.o.}}{=} \\ &= \frac{2\pi^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + \cos x\Big]_{\pi}^{x} = \\ &= \frac{2\pi^2}{x^2} - \cos x + \frac{2}{x} \sin x + \frac{1}{x^2} \cos x - \frac{\pi^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{\pi^2 + 1}{x^2} - \cos x + \frac{2}{x} \sin x + \frac{1}{x^2} \cos x . \end{aligned}$$

Rechenaufwand und Ergebnis vereinfachen sich wieder, wenn $a(x)$ konstant ist. Statt die fertige Lösungsformel Nr. 15.11 zu verwenden, wollen wir die inhomogene lineare Dgl. für diesen Fall als Rechenübung nocheinmal lösen. Sei also $a(x) = a$ konstant. Da die *homogene* lin. Dgl. $y' - ay = 0$ die allgemeine Lösung $y_0(x) = c\, e^{ax}$ (c bel. konst.) hat (s.o. Nr. 15.6) , empfiehlt sich

für die *inhomogene* lineare Dgl. $\boxed{y' - ay = f(x)}$ der **Variationsansatz:**

(+) $\boxed{y(x) = c(x)\, e^{ax} \quad (c(x) \text{ “geeignet”})}$. Einsetzen dieser Funktion $y(x)$ und ihrer Ableitung

$y'(x) = c'(x)\, e^{ax} + a\, c(x)\, e^{ax}$ in die Dgl. ergibt eine Bestimmungsgleichung für $c'(x)$:

$f(x) \overset{!}{=} y' - ay = c'(x)\, e^{ax} + a\, c(x)\, e^{ax} - a\, c(x)\, e^{ax} = c'(x)\, e^{ax}$ d.h.: $c'(x) = f(x)\, e^{-ax}$, somit:

$c(x) = \displaystyle\int f(x)\, e^{-ax}\, dx + c$ und $y(x) = \left(c + \displaystyle\int f(x)\, e^{-ax}\, dx\right) e^{ax}$ (c bel. konst.) :

15.14

Die **inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung:**

$$(*)\quad \left.\boxed{\begin{array}{c} y' - ay = f(x) \\ \hline (D-a)y = f(x) \end{array}} \quad \text{bzw.} \right\} \quad \text{mit } \textbf{konstantem Koeffizient } a$$

hat die **allgemeine Lösung:**

$$\boxed{\boxed{y(x) = (D-a)^{-1}\{f(x)\} = \left(c + \int f(x)\, e^{-ax}\, dx\right) e^{ax}}}$$

(c beliebig konstant)

Wenn noch der Anfangswert $y(x_0) = y_0$ zu berücksichtigen ist, erhält man mit

$\int_{x_0}^{x} a\, d\xi = a \cdot (x - x_0)$ und $\int_{x_0}^{\xi} a\, d\tau = a \cdot (\xi - x_0)$ gemäß Nr. 15.12 die Lösung:

$$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, e^{-a\cdot(\xi - x_0)}\, d\xi\right) e^{a\cdot(x-x_0)} = \left(y_0\, e^{-ax_0} + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, e^{-a\xi}\, d\xi\right) e^{ax} :$$

15.15

Das **inhomogene lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung:**

$$(*)\ \boxed{y' - ay = f(x)\,, \quad y(x_0) = y_0} \quad \text{mit } \textbf{konstantem Koeffizient } a$$

hat die **Lösung:**

$$\boxed{\boxed{y(x) = \left(y_0\, e^{-ax_0} + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, e^{-a\xi}\, d\xi\right) e^{ax}}}$$

Zum Beispiel: 3. $\boxed{y' + 3y = 2x \sinh 3x\,, \quad y(0) = 1}$

Die *homogene* lin. Dgl. $y' + 3y = 0$ hat die allgemeine Lösung $y_0(x) = c\, e^{-3x}$, c bel. konstant (s. Nr. 15.7) ; diese führt auf den **Variationsansatz** (für die *inhomogene* Dgl.) :

$$(+)\quad \boxed{y(x) = c(x)\, e^{-3x}\,, \quad c(x) \ \text{“geeignet”}}\ .$$

Einsetzen der Funktion $y(x)$ und ihrer Ableitung $y'(x) = c'(x)\, e^{-3x} - 3\, c(x)\, e^{-3x}$ in die Dgl. ergibt:

$2x\,\sinh 3x = x\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) \overset{!}{=} y' + 3y = c'(x)\,e^{-3x}$, d.h.

$c'(x) \overset{!}{=} x\left(e^{3x} - e^{-3x}\right)e^{3x} = x\,e^{6x} - x$; es folgt:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^{6x}}\,dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}\,x\,e^{6x} - \frac{1}{6}\int e^{6x}\,dx = \\ &\quad u' = 1\,,\ v = \tfrac{1}{6}\,e^{6x} \\ &= -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x\,e^{6x} - \frac{1}{36}\,e^{6x} + c \quad (c \text{ konst.})\,,\ \text{somit:} \\ y(x) &= c(x)\,e^{-3x} = -\frac{1}{2}\,x^2\,e^{-3x} + \frac{1}{6}\,x\,e^{3x} - \frac{1}{36}\,e^{3x} + c\,e^{-3x}\,. \end{aligned}$$

Die **allgemeine Lösung** von Dgl. **3.** ist also:

$$\boxed{y(x) = (D+3)^{-1}\{2x\,\sinh 3x\} = \left(c - \frac{1}{2}\,x^2\right)e^{-3x} + \left(\frac{1}{6}\,x - \frac{1}{36}\right)e^{3x}\,,\quad c \text{ beliebig konstant}}\,.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt noch: $1 \overset{!}{=} y(0) = c - \dfrac{1}{36}$, also $c = \dfrac{37}{36}$.

Damit hat das **Anfangswertproblem 3.** die **Lösung:**

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{36}\left(37 - 18x^2\right)e^{-3x} + \frac{1}{36}\,(6x-1)\,e^{3x}}\,.$$

4. Beispiel:

Ein **Stromkreis** , in dem ein **Strom** von $J = J(t)$ [Ampère] fließt, bestehe aus einer **Spannung** von E [Volt], einem **Widerstand** von R [Ohm] und einer **Spule** von L [Henry]. Dann entsteht am Widerstand eine Spannung von $E_R = -RJ$ [Volt] und die durch die Selbstinduktion entstehende Spannung ist $E_L = -L\dfrac{dJ}{dt}$. Nach den Kirchhoff'schen Gesetzen ist $E + E_L + E_R = 0$, d.h. $L\dfrac{dJ}{dt} + RJ = E$ bzw.

$$\boxed{\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L}J = \frac{E}{L}}\,.$$

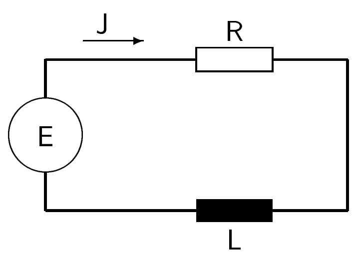


Abbildung 15.3 Stromkreis

Wenn zur Zeit $t = 0$ eine Wechselspannung von $E = E_0 \sin \omega t$ [Volt] der Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ angelegt wird, erhalten wir die **Anfangswertaufgabe:**

$$(*) \quad \boxed{J' + \frac{R}{L} J = \frac{E_0}{L} \sin \omega t\,, \quad J(0) = 0}\,.$$

Wir wollen die Lösungsformel aus Nr. 15.15 anwenden.

(Beachte, dass in (*) die unabhängige Variable t — und nicht x — heißt und dass die zu bestimmende Funktion $J = J(t)$ ist — und nicht $y = y(x)$!)

Mit $a = -\frac{R}{L}$, $f(t) = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$, $t_0 = 0$, $J_0 = J(0) = 0$ ergibt sich:

$J(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{E_0}{L} \int_0^t \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\, dt$. Wir berechnen zunächst das Integral:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^t \underset{u}{\sin \omega t} \cdot \underset{v'}{e^{\frac{R}{L}t}}\, dt = \frac{L}{R} \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\Big|_0^t - \frac{\omega L}{R} \int_0^t \underset{u}{\cos \omega t} \cdot \underset{v'}{e^{\frac{R}{L}t}}\, dt = \\
&\qquad u' = \omega \cos \omega t\,,\ v = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \qquad\qquad u' = -\omega \sin \omega t\,,\ v = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \\
&= \frac{L}{R} \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega L}{R} \left(\frac{L}{R} \cos \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\Big|_0^t + \frac{\omega L}{R} \int_0^t \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\, dt \right) = \\
&= \frac{L}{R} \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega L^2}{R^2} \left(\cos \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t} - 1 \right) - \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \cdot I \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right) I = \frac{\omega L^2}{R^2} + \left(\frac{L}{R} \sin \omega t - \frac{\omega L^2}{R^2} \cos \omega t \right) e^{\frac{R}{L}t}$, d.h.

$I = \frac{\omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)\, e^{\frac{R}{L}t}$. Wegen $J(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{E_0}{L} \cdot I$ folgt:

$$\boxed{J(t) = \frac{\omega L E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \cdot \sin \omega t - \omega L \cdot \cos \omega t \right)}\,.$$

Da der Term $J_h(t) = \frac{\omega L E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ exponentiell abklingt und sehr rasch nicht mehr messbar ist, stellt sich nach kurzer Zeit als **stationäre Lösung** die reine harmonische Schwingung $J_s(t) = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \cdot \sin \omega t - \omega L \cdot \cos \omega t \right)$ ein; diese hat dieselbe Frequenz wie E und hat die Amplitude $\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ (s. Nr. 15.1).

16 Allgemeine lineare Differentialgleichungen.

Stichpunkte: Art und Anzahl der Lösungen. Homogene lin. Dgln. mit konstanten Koeffizienten: Exponentialansatz und charakteristisches Polynom, allgemeine und allgemeine reelle Lösung. Operatorschreibweise. Inhomogene lin. Dgln. mit konstanten Koeffizienten: Störgliedansatz/Resonanzfall.

16.A Bezeichnungen und Schreibweisen.

16.1

Die **allgemeine inhomogene lineare Differentialgleichung (inh. lin. Dgl.) der Ordnung n** hat die Form:

$(*)$: $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$;

hier sind $a_0 , \ldots , a_{n-1}$ die **Koeffizienten** (i.a. stetige Funktionen $a_j = a_j(x)$) und $f(x)$ ist der **inhomogene Term** oder die **Störfunktion** .

Die zugehörige **homogene lineare Differentialgleichung (hom. lin. Dgl.)** ist:

$(*)_h$: $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0}$.

16.2

Bei Verwendung des Operators $D = \dfrac{d}{dx}$ haben diese Dgln. die Form:

$(*)$: $\boxed{D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = f(x)}$ und

$(*)_h$: $\boxed{D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = 0}$.

16.3

Mit dem **charakteristischen Polynom** dieser Differentialgleichungen:

$$\boxed{\boxed{p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}}$$

und dem zugehörigen Differentialoperator:

$$\boxed{\boxed{L_n := p_n(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0}}$$

schreiben sich diese Differentialgleichungen kurz:

$(*)$: $\boxed{L_n y := p_n(D)\, y = f(x)}$ und

$(*)_h$: $\boxed{L_n y := p_n(D)\, y = 0}$.

(Der Index n bei $p_n(\lambda)$, $p_n(D)$ und L_n soll daran erinnern, dass es sich um ein Polynom vom Grad n bzw. um einen Differentialoperator der Ordnung n handelt: dieser Index wird meistens weggelassen. Zum charakteristischen Polynom siehe Abschnitt 16.C .)

16.4 Mit $D: y \mapsto y'$ ist auch

$L_n : y \mapsto p_n(D)\, y$ ein *linearer* Operator:

$$\begin{array}{rcl} (y_1+y_2)' &=& y_1' + y_2' \\ (cy)' &=& c\,y' \\ \hline L_n(y_1+y_2) &=& L_n y_1 + L_n y_2 \\ L_n(cy) &=& c\,L_n y \end{array}$$

Es folgt:

(i) Ist $y_s(x)$ irgendeine Partikulärlösung der *inhomogenen* lin. Dgl. $L_n y = f(x)$, so ist *für jede* Lösung $y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* Dgl. $L_n y = 0$ stets auch $y(x) := y_0(x) + y_s(x)$ eine Lösung der *inhomogenen* Dgl., denn aufgrund der Linearität von L_n ist:
$L_n y = L_n(y_0 + y_s) = L_n y_0 + L_n y_s = 0 + f(x) = f(x)$.

(ii) Andererseits: ist neben $y_s(x)$ noch $y(x)$ irgendeine Lösung der *inhomogenen* lin. Dgl. $L_n y = f(x)$, so löst $y_0(x) := y(x) - y_s(x)$ die zugehörige *homogene* Dgl.:
$L_n y_0 = L_n(y - y_s) = L_n y - L_n y_s = f(x) - f(x) = 0$.
Demzufolge hat *jede* Lösung $y(x)$ der *inhomogenen* Dgl. $L_n y = f(x)$ die Form: $y(x) = y_0(x) + y_s(x)$.

16.5 Damit haben wir die entsprechend *für alle* **linearen Gleichungen** gültige Aussage (s. Lektion 31):

Die **allgemeine Lösung** $y(x)$ der **inh.** lin. Dgl. $(*)$ ist die Summe aus **allgemeiner Lösung** $y_0(x)$ der zugehörigen **hom.** lin. Dgl. $(*)_h$ und einer **Partikulärlösung** $y_s(x)$ der **inh.** lin. Dgl. $(*)$:

allg. Lösung der **inh.** lin. Dgl. $(*)$ $\boxed{L_n y = f(x)}$	$=$	**allg.** Lösung der **hom.** lin. Dgl. $(*)_h$ $\boxed{L_n y = 0}$	$+$	**Partikulärlösung** der **inh.** lin. Dgl. $(*)$ $\boxed{L_n y = f(x)}$

$$\boxed{y(x) \quad = \quad y_0(x) \quad + \quad y_s(x)}$$

16.6 Jedes *linear unabhängige* System $\{y_1(x), \ldots, y_k(x)\}$ von Lösungen $y_j(x)$ der *homogenen* lin. Dgl. $(*)_h$ $\boxed{L_n y = 0}$ ist ein **Fundamentalsystem** für diese Dgl., und man nennt die einzelnen Funktionen eines Fundamentalsystems auch **Fundamentallösungen** der Dgl. $(*)$ oder $(*)_h$; ein System $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ aus n Fundamentallösungen ist ein **vollständiges Fundamentalsystem**: hiermit ist dann

$$\boxed{y_0(x) = c_1 y_1(x) + \cdots c_n y_n(x) \qquad (c_1, \ldots, c_n \text{ beliebig konstant})}$$

die **allgemeine Lösung** der homogenen lin. Dgl. $(*)_h$.

16.B Über die Existenz und Anzahl von Lösungen.

Wir haben eben festgestellt:

16.7

Ist $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein **vollständiges Fundamentalsystem** für die Dgl. $L_n y = 0$, d.h. sind $y_1, \ldots, y_n$ n linear unabhängige Lösungen dieser Dgl., und ist y_s irgendeine Lösung der inhomogenen lin. Dgl. $L_n y = f(x)$ (also eine **Partikulärlösung** dieser Dgl.), so ist

$\boxed{y_0(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \quad (c_1, \ldots, c_n \text{ beliebig konstant})}$ die **allgemeine Lösung** der **homogenen** lin. Dgl. $L_n y = 0$ und

$\boxed{y(x) = y_s(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \quad (c_1, \ldots, c_n \text{ beliebig konstant})}$ die **allgemeine Lösung** der **inhomogenen** lin. Dgl. $L_n y = f(x)$.

Dass die allgemeine Lösung jeweils n unabhängig voneinander wählbare Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ enthält und somit n Fundamentallösungen erforderlich sind, um *alle* Lösungen der beiden Dgln.: $L_n y = 0$ und $L_n y = f(x)$ zu bekommen, ist zumindest plausibel: denn es sind n Integrationen mit insgesamt n Integrationskonstanten nötig, um in den beiden Dgln. alle Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ wegzubekommen.

Da die n Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ in den in Nr. 16.7 angegebenen Lösungen durch (in der Regel beliebig vorgebbare) n Anfangswerte $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ eindeutig bestimmt sind, haben wir:

16.8

Wenn über dem Intervall $[a, b]$ die Koeffizienten $a_j(x)$ des Operators L_n *stetig* sind, dann besitzt für $x_0 \in]a, b[$ das *homogene* **Anfangswertproblem**

$$\boxed{L_n y = 0 \quad \text{mit } y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0}$$

nur die triviale Lösung $y = o$ (Nullfunktion auf $[a, b]$).

16.9

Wenn außerdem noch die Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig ist, dann besitzt für $x_0 \in]a, b[$ und mit beliebig vorgegebenen Werten $y_{0,1}, \ldots, y_{0,n}$ das **inhomogene Anfangswertproblem**

$$\boxed{L_n y = f(x) \quad \text{mit } y(x_0) = y_{0,1}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n}}$$

genau eine Lösung $y(x)$ auf $[a, b]$.

16.C Homogene lineare Dgln. mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten **homogene lineare Differentialgleichungen der Ordnung** n:

$(*)_h$: $\boxed{L_n y := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0}$ mit **konstanten** Koeffizienten a_j

und das jeweils **zugehörige charakteristische Polynom**:

$$\boxed{\boxed{p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}}\ ,$$

mit dessen Hilfe sich der Differentialoperator L_n in $(*)_h$ auch in der Form:

$\boxed{L_n = p_n(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\ , \text{ mit } D = \frac{d}{dx}}$ schreiben lässt.

Man kann das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ formal erhalten, wenn man in der linken Seite von $(*)_h$ jeweils die j–te Ableitung von y durch die j–te Potenz von λ ersetzt: $y^{(j)} \leftrightarrow \lambda^j$,
insbesondere: $y = y^{(0)} \leftrightarrow \lambda^0 = 1$:

16.10

$L_n y$	$=$	$y^{(n)}$	$+$	$a_{n-1}y^{(n-1)}$	$+\cdots+$	$a_1 y'$	$+$	$a_0 y$
$p_n(\lambda)$	$=$	λ^n	$+$	$a_{n-1}\lambda^{n-1}$	$+\cdots+$	$a_1\lambda$	$+$	a_0

Der Zusammenhang zwischen dem Differentialoperator $L_n = p_n(D)$ und dem charakteristischen Polynom $p_n(\lambda)$ ist jedoch keineswegs nur formaler Art:

16.11

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$\boxed{L_n\left(e^{\lambda x}\right) = p_n(D)\left(e^{\lambda x}\right) = p_n(\lambda)\cdot e^{\lambda x}}\ .$$

Das ist einfach nachzurechnen:
mit: $D^j e^{\lambda x} = \left(e^{\lambda x}\right)^{(j)} = \lambda^j e^{\lambda x}\ \forall j \in \mathbb{N}_0$ hat man:

$$\begin{aligned} L_n\left(e^{\lambda x}\right) &= \left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)^{(n-1)} + \cdots + a_1\left(e^{\lambda x}\right)' + a_0\, e^{\lambda x} = \\ &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0\, e^{\lambda x} = \\ &= \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = p_n(\lambda)\cdot e^{\lambda x}\ . \end{aligned}$$ ∎

Da genau dann $y(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der Dgl. $(*)_h$ ist, wenn $L_n\left(e^{\lambda x}\right) = 0$, und andererseits genau dann λ eine Nullstelle von $p_n(\lambda)$ ist, wenn $p_n(\lambda) = 0$, hat man mit Nr. 16.11 sofort:

16.12 Genau dann ist $\boxed{y(x) = e^{\lambda x}}$ eine **Lösung der homogenen lin. Dgl.** $(*)_h$: $\boxed{L_n y = 0}$, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$ ist, d.h. wenn $p_n(\lambda) = 0$.

16.13 k verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des charakteristischen Polynoms ergeben somit k linear unabhängige Lösungen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_k(x) = e^{\lambda_k x}$ der Dgl. $(*)_h$, bilden also ein (i.a. noch nicht vollst.) Fundamentalsystem für diese Dgl..

Auf die Nullstellen von $p_n(\lambda)$ wird man durch den **Exponentialansatz:**

$\boxed{\boxed{y(x) = e^{\lambda x}, \ (\lambda \text{ “geignet”})}}$ geführt: Einsetzen in die Dgl. $(*)_h$ liefert die Bedingung: $p_n(\lambda) = 0$.

z.B.: Das zur Dgl. $(*)_h$: $\boxed{y^{(4)} + 5y''' + 6y'' - 4y' - 8y = 0}$ gehörende charakteristische Polynom ist: $p(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda - 8$.

Eine Nullstelle kann man (z.B.) erraten: $\lambda_1 = 1$. Damit kann von $p(\lambda)$ der Linearfaktor $(\lambda - 1)$ abgespalten werden: Polynomdivision ergibt:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
(\lambda^4 & + & 5\lambda^3 & + & 6\lambda^2 & - & 4\lambda & - & 8) & : \ (\lambda - 1) \ = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = \\
\lambda^4 & - & \lambda^3 & & & & & & & = (\lambda + 2)^3 ; \\
\hline
 & & 6\lambda^3 & + & 6\lambda^2 & - & 4\lambda & - & 8 & \\
 & & 6\lambda^3 & - & 6\lambda^2 & & & & & \\
\hline
 & & & & 12\lambda^2 & - & 4\lambda & - & 8 & \\
 & & & & 12\lambda^2 & - & 12\lambda & & & \\
\hline
 & & & & & & 8\lambda & - & 8 & \\
 & & & & & & 8\lambda & - & 8 & \\
\hline
\end{array}
$$

es gibt somit nur noch *eine* weitere Nullstelle: $\lambda_2 = -2$ (dreifach).

Mit diesen beiden Nullstellen haben wir (zunächst nur) zwei linear unabhängige Lösungen der Dgl. $(*)_h$ gefunden: $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-2x}$. (Zur *allgemeinen* Lösung s.u.!)

Tatsächlich kann man mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms *alle* Lösungen der homogenen lin. Dgl. $(*)_h$ **bekommen!** Es gilt nämlich:

16.14 Ist λ_0 eine **k –fache Nullstelle** des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$, so sind $\boxed{y_{0,1} = e^{\lambda_0 x}\,,\ y_{0,2} = x \cdot e^{\lambda_0 x}\,,\ \dots\,,\ y_{0,k-1} = x^{k-1} \cdot e^{\lambda_0 x}}$ k **Fundamentallösungen**, d.h. k linear unabhängige Lösungen der homogenen lin. Dgl. $(*)_h$: $\boxed{L_n y = 0}$.

Der zur Nullstelle λ_0 gehörende **allgemeine Lösungsanteil** dieser Dgl. ist damit: $\boxed{\tilde{y}_0(x) = \left(c_{0,0} + c_{0,1}x + \cdots + c_{0,k-1}x^{k-1}\right) e^{\lambda_0 x}}$ mit beliebigen Konstanten $c_{0,0}\,,\ \dots\,,\ c_{0,k-1}$. (s. auch Nr. 16.17 !)

Da $p_n(\lambda)$ als Polynom vom Grad n genau n Nullstellen hat, wenn man jede Nullstelle ihrer Vielfachheit entsprechend oft zählt, ist zugleich auch gezeigt:

16.15 Sei: $\boxed{p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}}$ die **Linearfaktorzerlegung** des charakteristischen Polynoms der hom. lin. Dgl. $(*)_h$: $\boxed{L_n y = 0}$ $\big($mit $L_n := p_n(D)$ und *konstanten* Koeffizienten$\big)$ d.h. es seien $\lambda_1\,,\ \dots\,,\ \lambda_m$ die *verschiedenen* Nullstellen von $p_n(\lambda)$ und $k_1\,,\ \dots\,,\ k_m$ jeweils entsprechend ihre Vielfachheit ($\Rightarrow\ k_1 + \cdots + k_m = n$); dann ist

$$\boxed{\boxed{y_0(x) = P_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x) \cdot e^{\lambda_m x}}}$$

mit beliebigen Polynomen $P_j(x) = c_{j0} + c_{j1}x + \cdots c_{jk_j}x^{k_j-1}$ vom Grad $(k_j - 1)$ die **allgemeine Lösung der Dgl.** $(*)_h$. (s. auch Nr. 16.16 !)

z.B.: (s.o. das letzte Beispiel)

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda - 8$ der hom. lin. Dgl. $(*)_h$: $\boxed{y^{(4)} + 5y''' + 6y'' - 4y' - 8y = 0}$ hat die *einfache* Nullstelle $\lambda_1 = 1$ $(k_1 = 1)$ und die *dreifache* Nullstelle $\lambda_2 = -2$ $(k_2 = 3)$.

Damit ist $\left\{y_1 = e^x\,,\ y_2 = e^{-2x}\,,\ y_3 = x\,e^{-2x}\,,\ y_4 = x^2\,e^{-2x}\right\}$ ein **vollständiges Fundamentalsystem** und $\boxed{y_0(x) = c\,e^x + \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) e^{-2x}}$ (mit beliebigen Konstanten $a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ c$) ist die **allgemeine Lösung** der Dgl. $(*)_h$.

16.D Reelle Lösungen homogener lin. Dgln. mit konst. Koeff..

Wir wollen **alle reellen Lösungen** einer homogenen linearen Dgl.:

$(*)_h$: $\boxed{L_n y := y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0}$

mit **konstanten und reellen** Koeffizienten a_j bestimmen. (Diese bekommt man keineswegs dadurch, dass man in der allgemeinen Lösung $y_0(x)$ in Nr. 16.14 und 16.15 alle Terme mit "i" weglässt!)

Aus der **Linearität** des **reellen** Operators $L_n = p_n(D)$ folgt sofort:

16.16 Mit jeder Lösung $y_0(x)$ der homogenen lin. Dgl. $(*)_h$ sind auch die **Konjugiert–Komplexe** $y_0^*(x)$, der **Realteil** $u(x) = \Re\mathrm{e}\,\big(y_0(x)\big)$ und der **Imaginärteil** $v(x) = \Im\mathrm{m}\,\big(y_0(x)\big)$ Lösungen der Dgl. $(*)_h$.

Denn aus: $L_n y_0 = 0$ und $y_0(x) = u(x) + i\,v(x)$ mit reellen Funktionen $u(x)$, $v(x)$ folgt — da $L_n = p_n(D)$ ein *reeller* Operator ist (d.h. nur *reelle* Koeffizienten hat) —:

$L_n y_0 = L_n u + i\,L_n v$ also: $L_n u = \Re\mathrm{e}\,\big(L_n y_0\big) = 0$ und $L_n v = \Im\mathrm{m}\,\big(L_n y_0\big) = 0$.

Damit sind $u(x)$ und $v(x)$ Lösungen von $(*)_h$, und wegen der Linearität von L_n ist somit auch $y_0^*(x) = u(x) - i\,v(x)$ eine Lösung von $(*)_h$. ▮

Zum selben Schluss führt auch die folgende Argumentation:

Da $p_n(\lambda)$ ein *reelles* Polynom ist, treten alle nicht–reellen Nullstellen von $p_n(\lambda)$ als konjugiert–komplexe Paare $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ auf (s. den Fundamentalsatz der Algebra, Nr. 14.10 und 14.11): das liefert die zueinander konjugiert–komplexen Fundamentallösungen $y_{1,2}(x) = x^j\,e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ (mit $0 \le j \le k-1$, wenn $\lambda_{1,2}$ *k–fache* Nullstellen sind). Der von diesen beiden Fundamentallösungen erzeugte allgemeine Lösungsanteil der Dgl. $(*)_h$ ist dann von der Form:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x^j\,e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 x^j\,e^{(\alpha-i\beta)x} = \\
&\quad \text{(mit beliebigen Konstanten } c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{C}\text{)} \\
&= x^j\,e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right) = \quad \text{[mit der Euler'schen Formel]} \\
&= x^j\,e^{\alpha x}\Big(c_1\left[\cos\beta x + i\sin\beta x\right] + c_2\left[\cos\beta x - i\sin\beta x\right]\Big) = \\
&= x^j\,e^{\alpha x}\Big((c_1+c_2)\cos\beta x + i(c_1-c_2)\sin\beta x\Big) = \\
&\quad \text{(mit } a := c_1 + c_2\,,\ b := i(c_1 - c_2)\text{)} \\
&= x^j\,e^{\alpha x}\Big(a\cos\beta x + b\sin\beta x\Big) \quad (a, b \in \mathbb{C} \text{ beliebig konstant}).
\end{aligned}
$$

Wir haben damit — über Nr. 16.16 hinausgehend — gezeigt:

16.17

! Für jedes konjugiert–komplexe Paar $\boxed{\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta}$ k–facher Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$ haben wir für die zugehörigen Lösungen $y_0(x)$ die beiden *gleichwertigen* Darstellungen:

A

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(x) = \quad & \left(c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1,k-1}x^{k-1}\right) e^{(\alpha+i\beta)\,x} + \\ & + \left(c_{20} + c_{21}x + \cdots + c_{2,k-1}x^{k-1}\right) e^{(\alpha-i\beta)\,x} \end{aligned}}$$

und

B

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(x) = \quad & e^{\alpha x}\Bigg(\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}\right)\cos\beta x + \\ & + \left(b_0 + b_1x + \cdots + b_{k-1}x^{k-1}\right)\sin\beta x\Bigg)\,. \end{aligned}}$$

(i) Die Gesamtheit **aller** zugehörigen Lösungen bekommt man mit *beliebig* konstanten $c_{1\nu}\,,\ c_{2\nu} \in \mathbb{C}$ oder $a_\nu\,,\ b_\nu \in \mathbb{C}$.

(ii) Die Gesamtheit aller **reellen** zugehörigen Lösungen ergibt sich in der Darstellung **A** mit beliebigen *konjugiert–komplexen* $c_{1\nu}\,,\ c_{2\nu} = (c_{1\nu})^* \in \mathbb{C}$
und in der Darstellung **B** mit beliebig *reellen* $a_\nu\,,\ b_\nu \in \mathbb{R}$.

(Siehe hierzu die Darstellung reeller harmonischer Schwingungen in Abschnitt 15.A !)

Einige Beispiele:

1. Sei $\boxed{\lambda_0 = -3}$ eine *vierfache* Nullstelle von $p(\lambda)$. Dann enthält die Faktorzerlegung von $p(\lambda)$ den Faktor $(\lambda+3)^4$ und der zugehörige allgemeine Lösungsanteil der homog. lin. Dgl. $(*)_h$ ist: $\boxed{y_0(x) = \left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3\right) e^{-3x}}$:

mit $c_0\,,\ \ldots\,,\ c_3 \in \mathbb{C}$, um **alle** zugehörigen Lösungen zu bekommen, bzw.
mit $c_0\,,\ \ldots\,,\ c_3 \in \mathbb{R}$, um alle **reellen** zugehörigen Lösungen zu bekommen.

2. Seien $\boxed{\lambda_{1,2} = -2 \pm 4i}$ zwei *dreifache* Nullstellen von $p(\lambda)$.

Die Faktorzerlegung von $p(\lambda)$ enthält dann den Faktor

$$(\lambda+2-4i)^3\,(\lambda+2+4i)^3 = \left((\lambda+2)^2+16\right)^3 = \left(\lambda^2+4\lambda+20\right)^3 =$$
$$= \lambda^6 + 12\lambda^5 + 108\lambda^4 + 544\lambda^3 + 2160\lambda^2 + 4800\lambda + 8000$$

und der zugehörige allgemeine Lösungsanteil der Dgl. $(*)_h$ ist:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(x) &= \left(c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2\right)e^{(-2+4i)\,x} + \left(c_{20}+c_{21}x+c_{22}x^2\right)e^{(-2-4i)\,x} \\ &= e^{-2x}\left(\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)\cos 4x + \left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)\sin 4x\right) \end{aligned}} :$$

mit $c_{1\nu}\,,\,c_{2\nu}\in\mathbb{C}$ bzw. $a_\nu\,,\,b_\nu\in\mathbb{C}$ für die Gesamtheit **aller** zugehörigen Lösungen und mit paarweise *konjugiert–komplexen* $c_{1\nu}\,,\,c_{2\nu}=(c_{1\nu})^*\in\mathbb{C}$ bzw. beliebig *reellen* $a_\nu\,,\,b_\nu$, um alle **reellen** zugehörigen Lösungen zu erhalten.

3. Seien $\boxed{\lambda_{1,2}=\pm 4i}$ zwei *dreifache* Nullstellen von von $p(\lambda)$.

Die Faktorzerlegung von $p(\lambda)$ enthält dann den Faktor
$(\lambda-4i)^3\,(\lambda+4i)^3=\left(\lambda^2+16\right)^3=\lambda^6+48\lambda^4+768\lambda^2+4096$

und der zugehörige allgemeine Lösungsanteil der Dgl. $(*)_h$ ist:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(x) &= \left(c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2\right)e^{4i\,x} + \left(c_{20}+c_{21}x+c_{22}x^2\right)e^{-4i\,x} \\ &= \left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)\cos 4x + \left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)\sin 4x \end{aligned}} :$$

mit $c_{1\nu}\,,\,c_{2\nu}\in\mathbb{C}$ bzw. $a_\nu\,,\,b_\nu\in\mathbb{C}$ für die Gesamtheit **aller** zugehörigen Lösungen und mit paarweise *konjugiert–komplexen* $c_{1\nu}\,,\,c_{2\nu}=(c_{1\nu})^*\in\mathbb{C}$ bzw. beliebig *reellen* $a_\nu\,,\,b_\nu$, um alle **reellen** zugehörigen Lösungen zu erhalten.

4. Als letztes Beispiel wollen wir die homogene lineare Dgl. kleinstmöglicher Ordnung finden, die (u.a.) von der Funktion $\boxed{\tilde{y}(x)=6x\sin 2x\sinh 3x}$ gelöst wird, und *alle* Lösungen dieser Dgl. bestimmen.

Es ist $\tilde{y}(x)=6x\sin 2x\cdot\frac{1}{2}\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)=3x\,e^{3x}\sin 2x\;-3x\,e^{-3x}\sin 2x$.

Ein Vergleich mit der Darstellung **B** in Formel Nr. 16.17 zeigt, dass der erste Term von $\tilde{y}(x)$ zu dem konjugiert–komplexen Paar $\lambda_{1,2}=3\pm 2i$ *zweifacher* Nullstellen und der zweite Term zu dem konjugiert–komplexen Paar $\lambda_{3,4}=-3\pm 2i$ ebenfalls *zweifacher* Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ der gesuchten Dgl. gehört: damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left((\lambda-3)-2i\right)^2\left((\lambda-3)+2i\right)^2\left((\lambda+3)-2i\right)^2\left((\lambda+3)+2i\right)^2 = \\ &= \left((\lambda-3)^2+4\right)^2\left((\lambda+3)^2+4\right)^2 = \left(\lambda^2-6\lambda+13\right)^2\left(\lambda^2+6\lambda+13\right)^2 = \\ &= \left(\left(\lambda^2+13\right)^2-36\lambda^2\right)^2 = \left(\lambda^4-10\lambda^2+169\right)^2 = \\ &= \lambda^8-20\lambda^6+438\lambda^4-3380\lambda^2+28561 \quad \text{und die gesuchte Dgl. ist:} \end{aligned}$$

$$(*)_h:\quad \boxed{\boxed{y^{(8)}-20\,y^{(6)}+438\,y^{(4)}-3380\,y''+28561\,y=0}}\,.$$

Diese Dgl. hat die **allgemeine Lösung** :

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(x) \;=\; & e^{3x}\Big(\big(a_1+a_2x\big)\cos 2x+\big(b_1+b_2x\big)\sin 2x\Big)\;+\\ & \qquad +\,e^{-3x}\Big(\big(a_3+a_4x\big)\cos 2x+\big(b_3+b_4x\big)\sin 2x\Big)\end{aligned}}\;:$$

mit a_ν , $b_\nu \in \mathbb{C}$ bekommt man **alle** und mit a_ν , $b_\nu \in \mathbb{R}$ bekommt man **alle reellen** Lösungen der Dgl..

Wenn wir hier insbesondere $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $b_1 = b_3 = 0$ und $b_2 = 3$, $b_4 = -3$ setzen, erhalten wir wieder die am Anfang vorgegebene Partikulärlösung:

$\tilde{y}(x) = 3x\,e^{3x}\,\sin 2x\; - 3x\,e^{-3x}\,\sin 2x = 6x\,\sin 2x\,\sinh 3x$.

16.E Bemerkung über die Linearfaktorzerlegung von $p(D)$.

Wir betrachten nachfolgend nur homogene oder inhomogene lineare Dgln.

$(*)_h$: $\boxed{L_n y = 0}$ bzw. (*) : $\boxed{L_n y = f(x)}$ mit *konstanten* Koeffizienten.

Hierbei bezeichnet L_n wieder das Differentialpolynom $\Big($mit $D = \frac{d}{dx}\Big)$:

$\boxed{\boxed{L_n = p_n(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0}}$, wobei

$\boxed{p_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}$ das charakteristische Polynom der Dgl. ist:

in diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass das Polynom p_n *konstante* Koeffizienten a_ν hat.

Von großer Tragweite ist die Tatsache, dass für konstante a , b die beiden Differentialoperatoren $D-a$ und $D-b$ **vertauschbar** sind:

16.18

Für beliebige Konstanten a , b ist $\boxed{(D-a)\,(D-b) = (D-b)\,(D-a)}$.

(Dies ist i.a. *nicht* richtig, wenn a , b variabel sind!)

Das ist schnell einzusehen: für beliebige Funktionen $y = y(x)$ ist:

$(D-a)\,(D-b)\,y = (D-a)\,(y'-by) = (y'-by)' - a(y'-by) = y'' - by' - ay' + aby$ und

$(D-b)\,(D-a)\,y = (D-b)\,(y'-ay) = (y'-ay)' - b(y'-ay) = y'' - ay' - by' + aby$, also $(D-a)\,(D-b)\,y = (D-b)\,(D-a)\,y$. ▮

Hiermit ergibt sich sofort:

16.19

Wenn das charakteristische Polynom $p_n(\lambda)$ (mit konstanten Koeffizienten!) die Faktorzerlegung: $\boxed{p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}}$
(mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, $k_1 + \cdots + k_m = n$) hat, dann hat man auch für den Operator $L_n = p_n(D)$ die **Faktorzerlegung:**

$\boxed{\boxed{L_n = p_n(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} \cdots (D - \lambda_m)^{k_m}}}$, wobei es aufgrund von Nr. 16.18 **auf die Reihenfolge der einzelnen Faktoren nicht ankommt.**

z.B.: Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ der Dgl.
$Ly = y''' + 4y'' - 3y' - 18y = f(x)$ hat die **Faktorzerlegung**:

$\boxed{p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = (\lambda + 3)^2\,(\lambda - 2)}$.

Damit hat der Differentialoperator $L = p(D) = D^3 + 4D^2 - 3D - 18$ die **Faktorzerlegung**:

$\boxed{L = p(D) = (D + 3)^2\,(D - 2)}$; die **Reihenfolge** der einzelnen Faktoren kann hierbei **nach Belieben** gewählt werden, denn für jede dreimal differenzierbare Funktion $y(x)$ ist (dreimal dasselbe!):

$$
\begin{aligned}
Ly \; &= (D+3)^2\Big((D-2)y\Big) &&= (D+3)\Big((D+3)\,(y' - 2y)\Big) = \\
&&&= (D+3)\Big(y'' - 2y' + 3y' - 6y\Big) = \\
&&&= y''' + y'' - 6y' + 3y'' + 3y' - 18y = \\
&&&= y''' + 4y'' - 3y' - 18y = \\
&= (D+3)\Big((D-2)\,((D+3)y)\Big) &&= (D+3)\Big((D-2)\,(y' + 3y)\Big) = \\
&&&= (D+3)\,\Big(y'' + 3y' - 2y' - 6y\Big) \overset{\text{s.o.}}{=} \\
&&&= y''' + 4y'' - 3y' - 18y = \\
&= (D-2)\Big((D+3)^2 y\Big) &&= (D-2)\Big((D+3)\,((D+3)y)\Big) = \\
&&&= (D-2)\Big((D+3)\,(y' + 3y)\Big) = \\
&&&= (D-2)\Big(y'' + 3y' + 3y' + 9y\Big) = \\
&&&= y''' + 6y'' + 9y' - 2y'' - 12y' - 18y = \\
&&&= y''' + 4y'' - 3y' - 18y\,.
\end{aligned}
$$

16.20

Im Folgenden bezeichnet $\boxed{(D - \lambda_0)^{-k}(f) := \Big((D - \lambda_0)^k\Big)^{-1}(f)}$ die Gesamtheit aller Lösungen einer *inhomogenen* lin. Dgl. (*) $\boxed{(D - \lambda_0)^k y = f(x)}$; insbesondere besteht dann $(D - \lambda_0)^{-k}(0)$ gerade aus der Lösungsgesamtheit der *homogenen* lin. Dgl. $(*)_h$ $\boxed{(D - \lambda_0)^k y = 0}$.

Es ist klar, dass damit für beliebige *ganze* Zahlen $k, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

16.21 $\boxed{(D-\lambda_0)^k(D-\lambda_0)^m = (D-\lambda_0)^{k+m}}$.

Eine sehr wichtige Anwendung ist das folgende **Lösungsverfahren für inhomogene lineare Dgln. mit konstanten Koeffizienten:**

16.22 Wenn das charakteristische Polynom $p_n(\lambda)$ die **Linearfaktorzerlegung** $\boxed{p_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)}$ hat, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die — weder notwendig verschiedenen noch notwendig reellen — Nullstellen von $p_n(\lambda)$ sind, dann hat die Dgl. $\boxed{L_n := p_n(D)\, y = f(x)}$ die **Lösung:**

$$\boxed{\begin{aligned} y &= p_n(D)^{-1}(f) = \\ &= (D-\lambda_n)^{-1}\Big((D-\lambda_{n-1})^{-1}\Big(\cdots\Big((D-\lambda_2)^{-1}\Big((D-\lambda_1)^{-1}(f)\Big)\Big)\cdots\Big)\Big). \end{aligned}}$$

16.23 Man geht demnach *schrittweise* vor, um diese Lösung y zu erhalten:

$$\begin{aligned} u_1 &:= (D-\lambda_1)^{-1}(f)\,, \\ u_2 &:= (D-\lambda_2)^{-1}(u_1)\,, \\ &\ \ \ldots \\ u_{n-1} &:= (D-\lambda_{n-1})^{-1}(u_{n-2})\,, \\ y &= (D-\lambda_n)^{-1}(u_{n-1}): \end{aligned}$$

mit $u_0(x) := f(x)$ hat man also nacheinander für $j = 1, \ldots, n$ zu bestimmen (mit der Lösungsformel Nr. 15.15):

$$\boxed{u_j(x) = (D-\lambda_j)^{-1}u_{j-1}(x) = e^{\lambda_j x}\left(c_j + \int u_{j-1}(x)\, e^{-\lambda_j x}\, dx\right)} \quad (c_j \text{ bel. konst.}):$$

dann ist $y(x) = u_n(x)$ die gesuchte Lösung.

Bemerkung/Tip: Da mit der Faktorzerlegung von $p_n(\lambda)$ auch die allgemeine Lösung $y_0(x)$ der *homogenen* Dgl. $L_n y = 0$ bekannt ist (s.o. Nr. 16.14 und 16.15), kann man im Fall einer *inhomogenen* lin. Dgl. alle Integrationskonstanten c_j weglassen: dann erhält man zwar mit $y_s(x) = u_n(x)$ nur noch eine Partikulärlösung, aber man hat dennoch mit $y(x) = y_0(x) + y_s(x)$ die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Dgl. (s.o. Nr. 16.5).

Als Demonstration dieses Lösungsverfahrens (für den Fall $f(x) = 0$) wiederholen wir nocheinmal Nr. 16.14 und beweisen sie:

16.24

Die allgemeine Lösung der homogenen lin. Dgl. $\boxed{(D-\lambda_0)^k\, y = 0}$ ist:

$$\boxed{y_0(x) = \Big((D-\lambda_0)^k\Big)^{-1}(0) = \Big(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1}x^{k-1}\Big)\; e^{\lambda_0 x}} \;,$$

$c_0, \ldots, c_{k-1}$ beliebig konstant.

Der **Beweis** wird mit der Operatorschreibweise sehr übersichtlich:
wiederholtes Anwenden von Nr. 15.15 und 15.7 ergibt:

$$\begin{aligned}
(D-\lambda_0)^{-1}(0) &\overset{(2)}{=} c_{k-1}\, e^{\lambda_0 x} \quad [c_{k-1} \text{ bel. konstant}]\,,\\
(D-\lambda_0)^{-2}(0) &= (D-\lambda_0)^{-1}\Big((D-\lambda_0)^{-1}(0)\Big) = (D-\lambda_0)^{-1}\Big(c_{k-1}\, e^{\lambda_0 x}\Big) =\\
&\overset{(1)}{=} e^{\lambda_0 x}\left(c_{k-2} + \int c_{k-1}\, e^{\lambda_0 x}\, e^{-\lambda_0 x}\, dx\right) =\\
&= \Big(c_{k-2} + c_{k-1}x\Big)\; e^{\lambda_0 x} \quad [c_{k-2} \text{ bel. konstant}]\,,\\
(D-\lambda_0)^{-3}(0) &= (D-\lambda_0)^{-1}\Big((D-\lambda_0)^{-2}(0)\Big) =\\
&= (D-\lambda_0)^{-1}\Big(\,(c_{k-2} + c_{k-1}x)\; e^{\lambda_0 x}\Big) =\\
&\overset{(1)}{=} e^{\lambda_0 x}\left(c_{k-3} + \int \Big(c_{k-2} + c_{k-1}x\Big)\; e^{\lambda_0 x}\, e^{-\lambda_0 x}\, dx\right) =\\
&= \Big(c_{k-3} + c_{k-2}x + \tfrac{1}{2!}\, c_{k-1}x^2\Big)\; e^{\lambda_0 x} \quad [c_{k-3} \text{ bel. konstant}]\,,
\end{aligned}$$

usw. (vollständige Induktion!) :

$$(D-\lambda_0)^{-k}(0) = \Big(c_0 + c_1 x + \tfrac{1}{2!}\, c_2 x^2 + \cdots + \tfrac{1}{(k-1)!}\, c_{k-1}x^{k-1}\Big)\, e^{\lambda_0 x}$$

mit beliebigen Konstanten $c_0, \ldots, c_{k-1}$, bzw., bequemer: (mit c_j statt $\frac{1}{j!}c_j$)

$$\boxed{(D-\lambda_0)^{-k}(0) \;=\; \Big(c_0 + c_1 x \;+\; c_2 x^2 \;+\; \cdots \;+\; c_{k-1}x^{k-1}\Big)\, e^{\lambda_0 x}}$$

mit beliebigen Konstanten $c_0, \ldots, c_{k-1}$. ▮

z.B.: (*) $\boxed{y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 2x\sinh 3x}$. (s.o. das letzte Beispiel)

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ hat die Faktorzerlegung:

$p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = (\lambda+3)^2(\lambda-2)$. Damit bekommen wir zunächst die **allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen** lin. Dgl.: $y_0(x) = c_1\, e^{2x} + (c_2\, x + c_3)\, e^{-3x}$ und wir können im Folgenden alle Integrationskonstanten weglassen:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= (D-2)^{-1}(2x\sinh 3x) = (D-2)^{-1}\Big(x\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)\Big) = \\
&= e^{2x}\int x\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)e^{-2x}\,dx = \\
&= e^{2x}\int x\left(e^{x}-e^{-5x}\right)\,dx = \quad [\,\text{partielle Integration}\,] \\
&= e^{2x}\left(x\,e^{x}+\frac{x}{5}\,e^{-5x}-e^{x}-\frac{1}{25}\,e^{-5x}\right) = \\
&= (x-1)\,e^{3x}+\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{25}\right)e^{-3x}\,, \\
u_2(x) &= (D+3)^{-1}\,(u_1(x)) = \\
&= e^{-3x}\int\left((x-1)\,e^{3x}+\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{25}\right)e^{-3x}\right)e^{3x}\,dx = \\
&= e^{-3x}\int\left((x-1)\,e^{6x}+\frac{x}{5}+\frac{1}{25}\right)dx = \\
&= e^{-3x}\left(\frac{1}{6}\,(x-1)\,e^{6x}-\frac{1}{36}\,e^{6x}+\frac{x^2}{10}+\frac{x}{25}\right) = \\
&= \left(\frac{x}{6}-\frac{7}{36}\right)e^{3x}+\left(\frac{x^2}{10}+\frac{x}{25}\right)e^{-3x}\,, \\
y_s(x) &= (D+3)^{-1}\,(u_2(x)) = \\
&= e^{-3x}\int\left(\left(\frac{x}{6}-\frac{7}{36}\right)e^{6x}+\frac{x^2}{10}+\frac{x}{25}\right)dx = \\
&= e^{-3x}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{x}{6}-\frac{7}{36}\right)e^{6x}-\frac{1}{216}\,e^{6x}+\frac{x^3}{30}+\frac{x^2}{50}\right)\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten die **Partikulärlösung:**

$y_s(x) = \left(\frac{x}{36}-\frac{1}{27}\right)e^{3x}+\left(\frac{x^3}{30}+\frac{x^2}{50}\right)e^{-3x}$ und damit die **allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen lin. Dgl.:**

$$\boxed{y(x) = c_1\,e^{2x}+\left(\frac{x}{36}-\frac{1}{27}\right)e^{3x}+\left(\frac{x^3}{30}+\frac{x^2}{50}+c_2\,x+c_3\right)e^{-3x}}$$

(c_1 , c_2 , c_3 beliebig konstant) . In den folgenden Abschnitten wird dieselbe Dgl. noch mit anderen Lösungsverfahren gelöst.

16.F Bemerkung über die Partialbruchzerlegung von $p(D)^{-1}$. (*)

Wir setzen wieder voraus, dass die Dgl.

(*) $\boxed{L_n\,y := y^{(n)}+a_{n-1}\,y^{(n-1)}+\cdots+a_1\,y'+a_0\,y = f(x)}$ *konstante Koeffizienten* a_j hat und

dass: $p_n(\lambda) = \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$

die Faktorzerlegung des zugehörigen charakteristischen Polynoms ist. Dann können wir für die gebrochen–rationale Funktion $\dfrac{1}{p_n(\lambda)}$ eine **Partialbruchzerlegung** machen:

(+) $\boxed{\boxed{\dfrac{1}{p_n(\lambda)} = \dfrac{A_1}{q_1(\lambda)} + \cdots + \dfrac{A_n}{q_n(\lambda)}}}$, wobei $A_1, \ldots, A_n$ geeignete

Konstanten und die Nenner geeignete Polynome der Form $q_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_\nu)^\mu$ sind (s. die in Nr. 13.14 und 13.15 beschriebene, "etwas feinere" Partialbruchzerlegung) : wir gehen also davon aus, dass die Partialbruchzerlegung von der Form:

$$\frac{1}{p_n(\lambda)} = \frac{A_1}{\lambda - \lambda_1} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{A_{\ldots}}{\lambda - \lambda_m} + \cdots + \frac{A_n}{(\lambda - \lambda_m)^{k_m}}$$ ist.

16.25

Mit der Partialbruchzerlegung (+) ist:

$$\boxed{\boxed{p_n(D)^{-1} = A_1\, q_1(D)^{-1} + \cdots + A_n\, q_n(D)^{-1}}}\ .$$

16.26

Um mit hiermit die Lösung $y(x)$ der Dgl. (*) zu bekommen, hat man also für jedes der Polynome $q_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_\nu)^\mu$ die Dgl. $(*)_j$: $\boxed{q_j(D)\, y_j = f(x)}$ zu lösen, also

$\boxed{y_j(x) = (D - \lambda_\nu)^{-\mu} f(x)}$ zu bestimmen: dann ist:

$\boxed{\boxed{y(x) = A_1\, y_1(x) + \cdots + A_n\, y_n(x)}}$ die **allgemeine Lösung** der Dgl. (*) .

z.B.: (*) $\boxed{y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 2x \sinh 3x}$

(Vgl. mit demselben Beispiel in den anderen Abschnitten dieser und der nächsten Lektion !)

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)^2$ führt auf den **Partialbruchansatz:**

$$\frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{\lambda - 2} + \frac{B}{\lambda + 3} + \frac{C}{(\lambda + 3)^2}$$ und dieser auf die Gleichung:

$$\begin{aligned}
1 &\overset{!}{=} A(\lambda + 3)^2 + B(\lambda - 2)(\lambda + 3) + C(\lambda - 2) = \\
&= A(\lambda^2 + 6\lambda + 9) + B(\lambda^2 + \lambda - 6) + C\lambda - 2C = \\
&= (A + B)\lambda^2 + (6A + B + C)\lambda + (9A - 6B - 2C)\,, \text{ somit:} \\
0 &\overset{!}{=} A + B\,, \text{ d.h. } B = -A\,, \text{ somit:} \\
0 &\overset{!}{=} 6A + B + C = 5A + C\,, \text{ d.h. } C = -5A\,, \text{ somit:} \\
1 &\overset{!}{=} 9A - 6B - 2C = 9A + 6A + 10A = 25A\,, \text{ d.h. } A = \tfrac{1}{25}\,, \text{ somit: } B = -\tfrac{1}{25}\,,\ C = -\tfrac{1}{5}\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten die **Partialbruchzerlegung:**

$$\boxed{\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{\lambda - 2} - \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{\lambda + 3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(\lambda + 3)^2}}$$

und können damit die **Lösung** der Dgl. (*) auf Grund von Nr. 16.29 in der folgenden Form schreiben: (mit $f(x) = 2x \sinh 3x$)

$$(+) \quad \boxed{y(x) = p(D)^{-1}(f) = \frac{1}{25}\,(D-2)^{-1}(f) \; - \; \frac{1}{25}\,(D+3)^{-1}(f) \; - \; \frac{1}{5}\,(D+3)^{-2}(f)} \; .$$

Daher haben wir als Nächstes die drei folgenden Einzel–Dgln. zu lösen (wir lassen hierbei alle Integrationskonstanten weg — und bekommen somit allerdings auch nur eine Partikulärlösung) :

(i) $y_1(x) = (D-2)^{-1}(2x \sinh 3x) =$ [mit Nr. 16.18]

$$= e^{2x} \int 2x \sinh 3x \cdot e^{-2x}\, dx = e^{2x} \int x \left(e^{3x} - e^{-3x}\right) e^{-2x}\, dx =$$

$$= e^{2x} \int x \left(e^{x} - e^{-5x}\right) dx = \quad \text{[partielle Integration]}$$

$$= e^{2x} \left(x \left(e^{x} + \frac{1}{5}\, e^{-5x} \right) - \int \left(e^{x} + \frac{1}{5}\, e^{-5x} \right) dx \right) =$$

$$= e^{2x} \left(x \left(e^{x} + \frac{1}{5}\, e^{-5x} \right) - \left(e^{x} - \frac{1}{25}\, {}^{-5x} \right) \right) =$$

$$= (x-1)\, e^{3x} + \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25} \right) e^{-3x} \; ,$$

(ii) $y_2(x) = (D+3)^{-1}(2x \sinh 3x) =$ [wieder mit Nr. 16.18]

$$= e^{-3x} \int x \left(e^{3x} - e^{-3x}\right) e^{3x}\, dx = e^{-3x} \int \left(x\, e^{6x} - x \right) dx = \quad \text{[partielle Integration]}$$

$$= e^{-3x} \left(\frac{x}{6}\, e^{6x} - \frac{1}{6} \int e^{6x}\, dx - \frac{x^2}{2} \right) = \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{36} \right) e^{3x} - \frac{x^2}{2}\, e^{-3x} \; ,$$

(iii) $y_3(x) = (D+3)^{-2}(2x \sinh 3x) =$

$$= x \cdot (D+3)^{-1}(2x \sinh 3x) - (D+3)^{-1}(2x^2 \sinh 3x) \; ;$$

für den ersten Term haben wir gemäß (ii) :

$$y_{3,1}(x) = x \cdot (D+3)^{-1}(2x \sinh 3x) = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{36} \right) e^{3x} - \frac{x^3}{2}\, e^{-3x} \; ,$$

den zweiten Term berechnen wir entsprechend:

$y_{3,2}(x) = (D+3)^{-1}(2x^2 \sinh 3x) =$ [mit Nr. 16.18]

$$= e^{-3x} \int \left(x^2\, e^{6x} - x^2 \right) dx = e^{-3x} \left(\frac{x^2}{6}\, e^{6x} - \frac{1}{3} \int x\, e^{6x}\, dx - \frac{x^3}{3} \right) =$$

$$= e^{-3x} \left(\frac{x^2}{6}\, e^{6x} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{6}\, e^{6x} - \frac{1}{36}\, e^{6x} \right) - \frac{x^3}{3} \right) =$$

$$= \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{18} + \frac{1}{108} \right) e^{3x} - \frac{x^3}{3}\, e^{-3x} ; \quad \text{damit ist}$$

$$y_3(x) = y_{3,1}(x) + y_{3,2}(x) = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{36} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{18} - \frac{1}{108} \right) e^{3x} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} \right) e^{-3x} =$$

$$= \left(\frac{x}{36} - \frac{1}{108} \right) e^{3x} - \frac{x^3}{6}\, e^{-3x} \; .$$

Wenn wir diese drei Einzellösungen in $(+)$ einsetzen, bekommen wir die folgende **Partikulärlösung** von Dgl. (*) :

$$
\begin{aligned}
y_s(x) &= \left(\frac{1}{25}\,(D-2)^{-1} - \frac{1}{25}\,(D+3)^{-1} - \frac{1}{5}\,(D+3)^{-2}\right)(2x\sinh 3x) = \\
&= \left(\frac{x}{25} - \frac{1}{25} - \frac{x}{150} + \frac{1}{900} - \frac{x}{180} + \frac{1}{540}\right) e^{3x} + \left(\frac{x}{125} + \frac{1}{625} + \frac{x^2}{50} + \frac{x^3}{30}\right) e^{-3x} = \\
&= \left(\frac{x}{36} - \frac{1}{27}\right) e^{3x} + \left(\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{50} + \frac{x}{125} + \frac{1}{625}\right) e^{-3x}\,.
\end{aligned}
$$

Beachte, dass diese Partikulärlösung nicht genau mit der im letzten Abschnitt erhaltenen Partikulärlösung übereinstimmt! Zusammen mit der allgemeinen Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl.:
$y_0(x) = c_1\,e^{2x} + (c_2\,x + c_3)e^{-3x}$ erhalten wir jedoch dieselbe **Lösungsgesamtheit** für die gegebene inhomogene Dgl. (*) : $y(x) = y_0(x) + y_s(x) =$

$$
= c_1\,e^{2x} + \left(\frac{x}{36} - \frac{1}{27}\right) e^{3x} + \left(\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{50} + \left(\frac{1}{125} + c_2\right) x + \left(\frac{1}{625} + c_1\right)\right) e^{-3x}\,,
$$

bzw. (mit c_2 statt $\frac{1}{25} + c_2$ und mit c_1 statt $\frac{1}{125} + c_1$) :

$$
\boxed{y(x) = c_1\,e^{2x} + \left(\frac{x}{36} - \frac{1}{27}\right) e^{3x} + \left(\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{50} + c_2 x + c_3\right) e^{-3x}} \quad (c_1\,,\ c_2\,,\ c_3 \text{ bel. konstant})\,.
$$

16.G Störgliedansatz.

Vorbemerkung:

Wie in den letzten beiden Abschnitten betrachten wir inhomogene lineare Dgln.

(*) $\boxed{\boxed{L_n\,y = f(x)}}$ mit *konstanten Koeffizienten*, deren charakteristisches Polynom m paarweise verschiedene Nullstellen λ_j der Vielfachheit k_j $(j = 1, \ldots, m)$ und damit die Faktorzerlegung $\boxed{p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}}$ hat.

Der Beitrag der Nullstelle λ_j zur allgemeinen Lösung der *homogenen* lin. Dgl.
$(*)_h$ $\boxed{L_n\,y = 0}$ ist nach Nr. 16.14 :

$(+)_0$: $\boxed{\boxed{y_{0,j} = \left(c_0 + c_1\,x + \ldots + c_{k_j-1}\,x^{k_j-1}\right) e^{\lambda_j\,x}}}$, bzw., nach Nr. 16.17 ,

wenn $\lambda_j\,,\ \lambda_j^* = \alpha_j \pm i\beta_j$ ein konjugiert–komplexes Paar k_j–facher Nullstellen ist:

$$
(+) : \quad \boxed{\boxed{\begin{aligned} y_{0,j} = e^{\alpha_j\,x}\Big(&\left(a_0 + a_1\,x + \cdots + a_{k_j-1}\,x^{k_j-1}\right)\cos\beta_j x + \\ &+ \left(b_0 + b_1\,x + \cdots + b_{k_j-1}\,x^{k_j-1}\right)\sin\beta_j x\Big) \end{aligned}}}
$$

(mit beliebigen Konstanten $a_\nu\,,\ b_\nu\,,\ c_\nu$) ;

hierbei ist $(+)$ die allgemeinere Darstellung: sie bleibt gültig — und geht dann in die Form $(+)_0$ über —, wenn λ_j reell ist, also wenn $\beta_j = 0$, $\lambda_j = \alpha_j$.

16.27

Die Lösungen einer homogenen lin. Dgl. $(*)_h$ mit konstanten Koeffizienten sind also genau die Linearkombinationen von Funktionen der Form:

$$\boxed{\substack{0\\0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{01}(x) = e^{\alpha\, x} \cdot x^j \cdot \cos \beta x\,, \\ y_{02}(x) = e^{\alpha\, x} \cdot x^j \cdot \sin \beta x \end{array} \right\} \quad \text{mit } \alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}\,,\ j \in \mathbb{N}_0\,.$$

16.28

Im Fall $\beta \neq 0$ und für $j = 0, \ldots, k-1$ gehören diese Lösungen zu dem konjugiert–komplexen Paar $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ k–facher Nullstellen des charakteristischen Polynoms und sind $2k$ Fundamentallösungen der Dgl. $\boxed{\tilde{L}\, y = 0}$ mit dem Differentialoperator $\tilde{L} = \Big(D - (\alpha + i\beta)\Big)^k \Big(D - (\alpha - i\beta)\Big)^k = \Big((D-\alpha)^2 + \beta^2\Big)^k$; im Fall $\beta = 0$ gehören die Funktionen $y_{01}(x) = x^j\, e^{\alpha\, x}$ für $j = 0, \ldots, k-1$ zur k–fachen Nullstelle $\lambda = \alpha$ und sind k Fundamentallösungen der Dgl. $\boxed{\tilde{L}\, y = 0}$ mit $\tilde{L} = (D - \alpha)^k$.

Wir untersuchen in diesem Abschnitt inhomogene lineare Dgln. (*), deren "Störfunktion" $f(x)$ ebenfalls eine Linearkombination von Funktionen der Art $\boxed{\substack{0\\0}}$ ist.

Hierzu zählen insbesondere **Polynome** (wenn $\alpha\,,\ \beta = 0$), **Exponentialfunktionen** $e^{\alpha\, x}$ (wenn $\beta = 0\,,\ j = 0$), **harmonische Schwingungen** $a \cos \beta x + b \sin \beta x$ (wenn $\alpha = 0\,,\ j = 0$), **hyperbolische Funktionen** $\sinh \gamma x\,,\ \cosh \gamma x$ (wenn $\beta = 0\,,\ \alpha = \pm\gamma\,,\ j = 0$) und **beliebige Vielfache, Summen, Produkte und Summen von Produkten** hiervon. (Produkte harmonischer Schwingungen lassen sich mit Hilfe geeigneter Produktformeln für $\sin$ und $\cos$ stets wieder als Linearkombinationen von $\sin$ und $\cos$ schreiben!)

Diese Funktionen $f(x)$ zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Ableitungen stets wieder *vom selben allgemeinen Typ* sind wie sie selbst. Ein Blick auf die zu lösende Dgl. (*) zeigt, dass diese daher wahrscheinlich mit einer Funktion $y(x)$ gelöst werden kann, *die ebenfalls vom selben allgemeinen Typ* ist wie die Störfunktion $f(x)$. Man kann also davon ausgehen, dass es eine Partikulärlösung $y_s(x)$ gibt, die eine Linearkombination von Funktionen der Art $\boxed{\substack{0\\0}}$ ist.

Wir haben die folgende einfache

16.29

Regel zur Aufstellung eines geeigneten Störgliedansatzes für eine Dgl. der Form (ν) $\boxed{\boxed{L_n\, y := p_n(D)y = f_\nu(x)}}$:

Wenn — mit *einem* Paar $\alpha,\ \beta$ reeller Zahlen — die Störfunktion $f_\nu(x)$ eine Linearkombination von Funktionen der Art $\boxed{\substack{0\\0}}$ ist, d.h. mit einer gewissen natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$ von der Form

$$\boxed{f_\nu(x) = e^{\alpha x}\Big(\big(a_0 + \cdots + a_{m-1}\, x^{m-1}\big)\cos\beta x + \big(b_0 + \cdots + b_{m-1}\, x^{m-1}\big)\sin\beta x\Big) \quad \text{ist}}$$

(also insbesondere (z.B.) in den Fällen $f_\nu(x) = x^{m-1}\, e^{\alpha x}\cos\beta x$ oder $f_\nu(x) = x^{m-1}\, e^{\alpha x}\sin\beta x$ mit $\beta \neq 0$), dann liefert der **Störgliedansatz:**

(a)
$$\boxed{y_{s\nu}(x) = e^{\alpha x}\Big(\big(A_0 + \cdots + A_{m-1}\, x^{m-1}\big)\cos\beta x + \big(B_0 + \cdots + B_{m-1}\, x^{m-1}\big)\sin\beta x\Big)\ ,}$$

falls $\lambda_\nu,\ \lambda_\nu^* = \alpha \pm i\beta$ *keine* Nullstellen von $p_n(\lambda)$ sind (dann ist insbesondere $f_\nu(x)$ *keine Lösung* der homogenen lin. Dgl. $(*)_h:\ L_n\, y = 0$), bzw.

(b)
$$\boxed{y_{s\nu}(x) = x^k\cdot e^{\alpha x}\Big(\big(A_0 + \cdots + A_{m-1}\, x^{m-1}\big)\cos\beta x + \big(B_0 + \cdots + B_{m-1}\, x^{m-1}\big)\sin\beta x\Big)}$$

im **Resonanzfall**[1], d.h. wenn $\lambda_\nu,\ \lambda_\nu^* = \alpha \pm i\beta$ jeweils **k–fache Nullstellen** von $p_n(\lambda)$ sind (mit $k \in \mathbb{N}$), d.h. wenn $f_\nu(x)$ oder einzelne Terme von $f_\nu(x)$ die *homogene* Dgl. $(*)_h$ lösen,

mit "geeignet" zu bestimmenden Konstanten A_μ, B_μ **stets eine Partikulärlösung** $y_{s\nu}(x)$ **der Dgl.** (ν)**.**

Für die Konstanten A_μ, B_μ bekommt man (durch Koeffizientenvergleich) genügend viele Bestimmungsgleichungen, wenn man den Ansatz in die Dgl. (ν) einsetzt. Im Fall $\beta = 0$ entfallen natürlich die Konstanten B_μ.

[1] Auf die Bezeichnung "Resonanzfall" wird man bei der Untersuchung von Schwingungsdifferentialgleichungen geführt.

Zum Beispiel:

1. Wir betrachten die Dgl. (*) $\boxed{y'' + 2y' + y = f(x)}$ mit verschiedenen Störfunktionen $f(x)$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$ und hat die zweifache Nullstelle $\lambda_0 = -1$; die zugehörige *homogene* lin. Dgl. $(*)_h$ $\boxed{L\,y = (D+1)^2 y = 0}$ hat daher die allgemeine Lösung:

(+) $\boxed{y_0(x) = (D+1)^{-2}(0) = (a+bx)\,e^{-x} \quad \text{mit beliebigen Konstanten } a, b}$.

1.1 $(*)_1$: $\boxed{\boxed{y'' + 2y' + y = e^x}}$: die Störfunktion $f_1(x) = e^x$ ist vom Typ $\boxed{\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}}$ und ist eine Partikulärlösung der hom. lin. Dgl. $L_{f_1}\,y = (D-1)\,y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $p_{f_1}(\lambda) = (\lambda - 1)$ und der allgemeinen Lösung: $\boxed{y_{0,f_1}(x) = c\,e^x\,, \quad c \text{ bel. konst.}}$. Da $y = f_1(x) = e^x$ *nicht* die homogene Dgl. $(*)_h$ löst, m.a.W., da die Nullstelle $\tilde{\lambda}_1 = 1$ von $p_{f_1}(\lambda)$ *keine Nullstelle* des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ der homogenen lin. Dgl. $(*)_h$ ist,

ist $\boxed{y_s(x) = A\,e^x\,, \quad A \text{ "geeignet"}}$ ein **sinnvoller Störgliedansatz** für die Dgl. $(*)_1$.

Um A passend zu bestimmen, müssen wir den Ansatz in die Dgl. $(*)_1$ einsetzen.

Mit: $y_s' = A\,e^x$, $y_s'' = A\,e^x$ haben wir: $e^x \overset{!}{=} y_s'' + 2y_s' + y_s = A\,e^x + 2A\,e^x + A\,e^x = 4A\,e^x$,

somit: $A = \frac{1}{4}$. Wir erhalten die **Partikulärlösung:** $\boxed{y_{s,1}(x) = \frac{1}{4}\,e^x}$ und damit die

allgemeine Lösung: $\boxed{\boxed{y_{f_1}(x) = (a+bx)\,e^{-x} + \frac{1}{4}\,e^x \quad \text{mit beliebigen Konstanten } a, b}}$.

1.2 $(*)_2$: $\boxed{\boxed{y'' + 2y' + y = e^{-x}}}$: die Störfunktion $f_2(x) = e^{-x}$ ist vom Typ $\boxed{\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}}$ und ist eine Partikulärlösung der hom. lin. Dgl. $L_{f_2}\,y = (D+1)\,y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $p_{f_2}(\lambda) = \lambda + 1$ und der allgemeinen Lösung: $\boxed{y_{0,f_2}(x) = c\,e^{-x}\,, \quad c \text{ bel. konst.}}$. Da die Nullstelle $\tilde{\lambda}_2 = -1$ von $p_{f_2}(\lambda)$ eine *zweifache Nullstelle* von $p(\lambda)$ ist,

ist $\boxed{y_s(x) = x^2 \cdot A\,e^{-x}\,, \quad A \text{ "geeignet"}}$ ein **geeigneter Störgliedansatz** für die Dgl. $(*)_2$.

Mit: $y_s' = A\,(2x - x^2)\,e^{-x}$, $y_s'' = A\,(2 - 4x + x^2)\,e^{-x}$ haben wir:

$e^{-x} \overset{!}{=} y_s'' + 2y_s' + y_s = A\,(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2)\,e^{-x} = 2A\,e^{-x}$, somit: $A = \frac{1}{2}$.

Wir erhalten die **Partikulärlösung:** $\boxed{y_{s,2}(x) = \frac{x^2}{2}\,e^{-x}}$ und damit die **allgemeine Lösung:**

$$\boxed{\boxed{y_{f_2}(x) = \left(a + bx + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} \quad \text{mit beliebigen Konstanten } a, b}}\,.$$

1.3 $(*)_3$: $\boxed{\boxed{y'' + 2y' + y = 2\sinh x}}$: es ist $f_3(x) = 2\sinh x = e^x - e^{-x} = f_1(x) - f_2(x)$.

Daher haben wir aufgrund von 1.1 und 1.2 mit $\boxed{y_{s,3}(x) = y_{s,1}(x) - y_{s,2}(x) = \frac{1}{4}\,e^x - \frac{x^2}{2}\,e^{-x}}$

bereits eine **Partikulärlösung** der Dgl. $(*)_3$.

Wenn die Dgln. 1.1 und 1.2 noch nicht einzeln gelöst sind, kann man die beiden Teilansätze aus 1.1 und 1.2 auch zu *einem einzigen* Störgliedansatz für die Dgl. $(*)_3$ addieren:

die Störfunktion $f_3(x) = e^x - e^{-x}$ ist eine Partikulärlösung der homogenen lin. Dgl.:
$L_{f_3}\, y = y'' - y = \Big((D-1)(D+1)\Big)\, y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom:
$p_{f_3}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)$ (mit den beiden einfachen Nullstellen $\tilde{\lambda}_{1,2} = \pm 1$) und der allgemeinen Lösung: $\boxed{y_{0,f_3}(x) = c_0\, e^x + c_1\, e^{-x}\,, \quad c_0\,,\, c_1 \text{ bel. konst.}}$

Da $\tilde{\lambda}_1 = 1$ *keine* und $\tilde{\lambda}_2 = -1$ eine *zweifache Nullstelle* von $p(\lambda)$ ist, ergibt sich für die Dgl. $(*)_3$ der **Störgliedansatz** : $\boxed{y_s = A\, e^x \;+ x^2 \cdot B\, e^{-x}\,, \quad A, B \text{ “geeignet”}}$

Mit: $y_s' = A\, e^x + B\,(2x - x^2)\, e^{-x}$, $y_s'' = A\, e^x + B\,(2 - 4x + x^2)\, e^{-x}$ haben wir:

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} \quad &= 2\sinh x \overset{!}{=} y_s'' + 2y_s' + y_s = \\ &= A\,(1+2+1)\, e^x + B\,(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2)\, e^{-x} = 4A\, e^x + 2B\, e^{-x}\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $4A = 1$, d.h. $A = \frac{1}{4}$, und $2B = -1$, d.h. $B = -\frac{1}{2}$.

Wir erhalten wieder dieselbe **Partikulärlösung** wie eben: $\boxed{y_{s,3}(x) = \frac{1}{4}\, e^x - \frac{x^2}{2}\, e^{-x}}$

und bekommen damit die **allgemeine Lösung:**

$$\boxed{\boxed{y_{f_3}(x) = \left(a + bx - \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} + \frac{1}{4}\, e^x \quad \text{mit beliebigen Konstanten } a, b}}\,.$$

1.4 $(*)_4$: $\boxed{\boxed{y'' + 2y' + y = 4\sinh x - 6\cosh x}}$: da die Differentialgleichungen 1.3 und 1.4 *dasselbe charakteristische Polynom* haben und da die Störfunktionen $f_3(x) = e^x - e^{-x}$ und $f_4(x) = 4\sinh x - 6\cosh x = 2\,(e^x - e^{-x}) - 3\,(e^x + e^{-x}) = -e^x - 5e^{-x}$ Partikulärlösungen *derselben homogenen lin. Dgl.* sind, können wir hier auch *denselben* **Störgliedansatz** verwenden:

$\boxed{y_s = A\, e^x \;+ x^2 \cdot B\, e^{-x}\,, \quad A, B \text{ “geeignet”}}$. Wir haben hier:

$$\begin{aligned} -e^x - 5e^{-x} \quad &= 4\sinh x - 6\cosh x \overset{!}{=} y_s'' + 2y_s' + y_s = \\ &= A\,(1+2+1)\, e^x + B\,(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2)\, e^{-x} = 4A\, e^x + 2B\, e^{-x}\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $4A = -1$, d.h. $A = -\frac{1}{4}$, und $2B = -5$, d.h. $B = -\frac{5}{2}$.

Das ergibt die **Partikulärlösung:** $\boxed{y_{s,4}(x) = -\frac{1}{4}\,e^x - \frac{5}{2}\,x^2\,e^{-x}}$ und damit die

allgemeine Lösung: $\boxed{\boxed{y_{f_4}(x) = \left(a + bx - \frac{5}{2}\,x^2\right)\,e^{-x} - \frac{1}{4}\,e^x}}$.

1.5 $(*)_5$: $\boxed{\boxed{y'' + 2y' + y = 5x^3\,e^{-x}}}$: die Störfunktion $f_5(x) = 5x^3\,e^{-x}$ ist eine Partikulärlösung der hom. lin. Dgl. $L_{f_5}\,y = (D+1)^4 y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $p_{f_5}(\lambda) = (\lambda+1)^4$ (mit der vierfachen Nullstelle $\tilde\lambda_1 = -1$) und der allgemeinen Lösung:

$\boxed{y_{0,f_5}(x) = (c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3\,)\,e^{-x}\,,\quad c_0, c_1, c_2, c_3 \text{ bel. konst.}}$.

Da $\tilde\lambda_1 = -1$ eine *zweifache Nullstelle* von $p(\lambda)$ ist, ist

$\boxed{y_s(x) = x^2 \cdot \left(A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3\right)e^{-x}\,,\quad A_0, A_1, A_2, A_3 \text{ “geeignet”}}$

ein **sinnvoller Störgliedansatz** für die Dgl. $(*)_5$. Beachte, dass zwar $\tilde\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist, dass aber $y = f_5(x)$ *nicht* die homogene lin. Dgl. $(*)_h$: $L\,y = p(D)\,y = (D-1)^2 y = 0$ löst! Mit:

$$\begin{aligned}
y_s &= \left(A_0x^2 + A_1x^3 + A_2x^4 + A_3x^5\right)e^{-x}\,,\\
y_s' &= \left(2A_0x + (3A_1 - A_0)x^2 + (4A_2 - A_1)x^3 + (5A_3 - A_2)x^4 - A_3x^5\right)e^{-x}\,,\\
y_s'' &= \Big(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)x + (12A_2 - 6A_1 + A_0)x^2 + (20A_3 - 8A_2 + A_1)x^3 +\\
&\qquad + (-10A_3 + A_2)x^4 + A_3x^5\Big)\,e^{-x}
\end{aligned}$$

haben wir die Bedingung:

$$5x^3\,e^{-x} \stackrel{!}{=} y_s'' + 2y_s' + y_s = \left(2A_0 + (6A_1 - 2A_0)x + 12A_2x^2 + 20A_3x^3\right)e^{-x}\,;$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$2A_0 \stackrel{!}{=} 0$, also $A_0 = 0$, $0 \stackrel{!}{=} 6A_1 - 2A_0 = 6A_1$, also $A_1 = 0$, $12A_2 \stackrel{!}{=} 0$, also $A_2 = 0$ und $20A_3 \stackrel{!}{=} 5$, d.h. $A_3 = \frac{1}{4}$.

Wir erhalten die **Partikulärlösung:** $\boxed{y_{s,5}(x) = \frac{x^5}{4}\,e^{-x}}$ und bekommen damit die

allgemeine Lösung: $\boxed{\boxed{y_{f_5}(x) = \left(a + bx + \frac{x^5}{4}\right)e^{-x} \text{ mit beliebigen Konstanten } a, b}}$.

1.6 $(*)_6$: $\boxed{\boxed{y'' + 2y' + y = x\,e^{-x}\cos 2x}}$: die Störfunktion $f_6(x) = x\,e^{-x}\cos 2x$ ist eine Lösung der hom. lin. Dgl. $L_{f_6}\,y = \left((D+1)^2 + 4\right)^2\,y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $p_{f_6}(\lambda) = \left((\lambda+1)^2 + 4\right)^2$ (mit den beiden zweifachen Nullstellen $\tilde\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$) und der allgemeinen Lösung:

$$\boxed{y_{0,f_6}(x) = e^{-x}\Big((a_0 + a_1\,x)\cos 2x\ + (b_0 + b_1\,x)\sin 2x\Big)\ ,\quad a_0\,,\, a_1\,,\, b_0\,,\, b_1 \text{ bel. konst.}}\,.$$

Da $\tilde{\lambda}_{1,2}$ *keine Nullstellen* von $p(\lambda)$ sind, ist also

$$\boxed{y_s(x) = e^{-x}\Big((A_0 + A_1\,x)\cos 2x\ + (B_0 + B_1\,x)\sin 2x\Big)\ ,\quad A_0\,,\, A_1\,,\, B_0\,,\, B_1 \text{ “geeignet”}}$$

ein **realistischer Störgliedansatz** für die Dgl. $(*)_6$. Mit:

$$y_s' = e^{-x}\Bigg(\Big(-A_0 + A_1 - A_1x + 2B_0 + 2B_1x\Big)\cos 2x + \\ + \Big(-B_0 + B_1 - B_1x - 2A_0 - 2A_1x\Big)\sin 2x\Bigg)\,,$$

$$y_s'' = e^{-x}\Bigg(\Big(-3A_0 - 2A_1 - 3A_1x - 4B_0 + 4B_1 - 4B_1x\Big)\cos 2x + \\ + \Big(4A_0 + 4A_1x - 3B_0 - 3B_1x\Big)\sin 2x\Bigg)$$

haben wir für die Koeffizienten A_0, A_1, B_0, B_1 die Bedingung:

$$x\,e^{-x}\cos 2x \stackrel{!}{=} y_s'' + 2y_s' + y_s = \\ = e^{-x}\Bigg(\Big(-4A_0 + 4B_1 - 4A_1x\Big)\cos 2x + \Big(-4A_1 - 4B_0 - 4B_1x\Big)\sin 2x\Bigg)\,,$$

somit (durch Koeffizientenvergleich):

$-4A_0 + 4B_1 \stackrel{!}{=} 0$,
$-4A_1 \stackrel{!}{=} 1$, d.h. $A_1 = -\frac{1}{4}$,
$-4A_1 - 4B_0 \stackrel{!}{=} 0$, folglich $B_0 = \frac{1}{4}$, und
$-4B_1 \stackrel{!}{=} 0$, also $B_1 = 0$, folglich $A_0 = 0$.

Das ergibt die **Partikulärlösung:** $\boxed{y_{s,6}(x) = e^{-x}\Big(-\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\Big)}$

und damit die **allgemeine Lösung:**

$$\boxed{\boxed{y_{f_6}(x) = \Big(a + b\,x\ - \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\Big)\,e^{-x}\quad \text{mit beliebigen Konstanten } a, b}}\,.$$

2. Die Dgl. (*): $\boxed{\boxed{y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 2x\sinh 3x}}$ haben wir schon mit verschiedenen anderen Methoden gelöst.

Wir wollen sie hier mit Hilfe eines Störgliedansatzes lösen. Dazu benötigen wir zunächst die Lösungen $y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* lin. Dgl.: mit der Faktorzerlegung des charakteristischen Polynoms: $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = (\lambda + 3)^2(\lambda - 2)$ haben wir:

$\boxed{y_0(x) = (a+bx)e^{-3x} + c\,e^{2x} \quad \text{mit beliebigen Konstanten } a, b}$.

Die Störfunktion $f(x) = 2x\sinh 3x = x\left(e^{3x} - e^{-3x}\right)$ ist eine Lösung der hom. lin. Dgl. $L_f\, y = (D-3)^2(D+3)^2 y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $p_f(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+3)^2$ (mit den beiden zweifachen Nullstellen $\tilde{\lambda}_{1,2} = \pm 3$) und der allgemeinen Lösung:

$\boxed{y_{0,f}(x) = (a_0 + a_1\,x)\,e^{3x} + (b_0 + b_1\,x)\,e^{-3x}}$.

Da $\tilde{\lambda}_1 = 3$ *keine* und $\tilde{\lambda}_2 = -3$ eine *zweifache Nullstelle* von $p(\lambda)$ ist, ist

$\boxed{y_s(x) = (A_0 + A_1\,x)\,e^{3x} + x^2 \cdot (B_0 + B_1\,x)\,e^{-3x} \quad A_0,\, A_1,\, B_0,\, B_1 \text{ "geeignet"}}$

ein **erfolgsversprechender Störgliedansatz** für die Dgl. (*) . Mit:

$$y_s' = \Big(A_1 + 3A_0 + 3A_1x\Big)\,e^{3x} + \Big(2B_0x + 3B_1x^2 - 3B_0x^2 - 3B_1x^3\Big)\,e^{-3x}\,,$$
$$y_s'' = \Big(6A_1 + 9A_0 + 9A_1x\Big)\,e^{3x} + \Big(2B_0 + 6B_1x - 12B_0x - 18B_1x^2 + 9B_0x^2 + 9B_1x^3\Big)\,e^{-3x}\,,$$
$$\begin{aligned} y_s''' = {} & \Big(27A_1 + 27A_0 + 27A_1x\Big)\,e^{3x} + \\ & + \Big(6B_1 - 18B_0 - 54B_1x + 54B_0x + 81B_1x^2 - 27B_0x^2 - 27B_1x^3\Big)\,e^{-3x} \end{aligned}$$

bekommen wir für die Konstanten $A_0,\, A_1,\, B_0,\, B_1$ die Bedingung:

$$\begin{aligned} x\,e^{3x} - x\,e^{-3x} \quad & \stackrel{!}{=} y_s''' + 4y_s'' - 3y_s' - 18y_s = \\ & = \Big(27A_1 + 27A_0 + 27A_1x + 24A_1 + 36A_0 + 36A_1x - \\ & \qquad - 3A_1 - 9A_0 - 9A_1x - 18A_0 - 18A_1x\Big)\,e^{3x} + \\ & \quad + \Big(6B_1 - 18B_0 - 54B_1x + 54B_0x + 81B_1x^2 - 27B_0x^2 - 27B_1x^3 + \\ & \qquad + 8B_0 + 24B_1x - 48B_0x - 72B_1x^2 + 36B_0x^2 + 36B_1x^3 - \\ & \qquad - 6B_0x - 9B_1x^2 + 9B_0x^2 + 9B_1x^3 - 18B_0x^2 - 18B_1x^3\Big)\,e^{-3x} = \\ & = \Big(48A_1 + 36A_0 + 36A_1x\Big)\,e^{3x} + (6B_1 - 10B_0 - 30B_1x)\,e^{-3x}\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} 48A_1 + 36A_0 &\stackrel{!}{=} 0 \\ 36A_1 &\stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{36} \Rightarrow A_0 = -\frac{48}{36}\,A_1 = -\frac{1}{27}\,,$$
$$\left.\begin{aligned} 6B_1 - 10B_0 &\stackrel{!}{=} 0 \\ -30B_1 &\stackrel{!}{=} -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_1 = \frac{1}{30} \Rightarrow B_0 = \frac{6}{10}\,B_1 = \frac{1}{50}\,.$$

Wir erhalten die **Partikulärlösung:** $\boxed{y_s(x) = \left(-\frac{1}{27} + \frac{x}{36}\right)e^{3x} + \left(\frac{x^2}{50} + \frac{x^3}{30}\right)e^{-3x}}$

und damit die **allgemeine Lösung:**

$$\boxed{\boxed{y(x) = \left(-\frac{1}{27} + \frac{x}{36}\right)e^{3x} + \left(a + bx + \frac{x^2}{50} + \frac{x^3}{30}\right)e^{-3x} + c\,e^{2x}\,, \quad a, b, c \text{ beliebig konstant}}}\,.$$

17 Variation *einer* Konstanten; Potenzreihenansatz.

Stichpunkte: Reduktion der Ordnung (= Variation *einer* Konstanten); Potenzreihenansatz; Beispiel: Hermite'sche Dgl. und –Polynome.

17.A Reduktion der Ordnung.

Wir betrachten lineare Differentialgleichungen

(*) $$\boxed{\boxed{L_n y := y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}}$$

mit i.a. stetigen variablen Koeffizienten $a_\nu(x)$. Wenn es nicht gelingt, oder wenn es sehr mühsam ist, auf Anhieb eine geeignete Lösungsmethode für die Dgl. (*) zu finden, kann das folgende Verfahren, das **"Reduktion der Ordnung"** genannt wird, recht hilfreich sein:

17.1

Wenn $y_0(x)$ $(\neq 0)$ irgend–*eine* Lösung der *homogenen* Dgl. $(*)_h$: $\boxed{L_n y = 0}$

ist, dann führt der **Reduktionsansatz:** $\boxed{y(x) = c(x)\, y_0(x)\ ,\ \ c(x)\ \text{"geeignet"}}$

durch Einsetzen in die Dgl. (*) zu einer linearen Dgl.

(**) $\boxed{L_{n-1} u = f(x)}$ der **reduzierten Ordnung** $n-1$ für die Funktion

$\boxed{u(x) := c'(x)}$.

Für die Praxis ist diese Information völlig ausreichend: man geht mit dem Reduktionsansatz in die Dgl. (*) und wird dann sehen, *welche* Dgl. $L_{n-1} u = f(x)$ sich für die Funktion $u(x) := c'(x)$ ergibt. **Wichtig** ist, dass — wenn man sich nicht verrechnet — hierbei alle Terme, die nur $c(x)$ (und keine Ableitungen von $c(x)$) enthalten, wegfallen!

z.B.: 1. (*) $\boxed{\boxed{xy'' - y' + \dfrac{y}{x} = x^4 + x}}$.

Eine Lösung der *homogenen* Dgl. $(*)_h$: $xy'' - y' + \dfrac{y}{x} = 0$ ist offenbar: $y_0(x) = x$.

Daher machen wir für die Dgl. (*) den **Reduktionsansatz:** $\boxed{y = c(x) \cdot x\ ,\ \ c(x)\ \text{"geeignet"}}$.

Mit: $y' = c'x + c$, $y'' = c''x + 2c'$ folgt durch Einsetzen in (*):

$c'' \cdot x^2 + 2c' \cdot x - c' \cdot x - c + c = x^4 + x$, also, mit $u(x) := c'(x)$: (**) $\boxed{\boxed{x\,u' + u = x^3 + 1}}$.

Der Reduktionsansatz führt also die gegebene Dgl. (*) 2. Ordnung in die Dgl. (**) 1. Ordnung für $\boxed{u = c'}$ über.

Die zu (**) gehörende *homogene* Dgl. $(**)_h$: $x\,u' + u = 0$ löst man rasch durch Trennung der Variablen: $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{u}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$, d.h. $\ln|u| = -\ln|x| +$ const. $= \ln\dfrac{1}{|x|} +$ const..

Eine Lösung von $(**)_h$ ist z.B. $u_0(x) = \dfrac{1}{x}$ und wir können für die Dgl. (**) erneut einen **Reduktionsansatz** machen: $\boxed{u(x) = b(x)\,\frac{1}{x}\,,\ \ b(x)\ \text{“geeignet”}}$.

Mit $u' = b'\,\dfrac{1}{x} - b\,\dfrac{1}{x^2}$ ergibt sich durch Einsetzen in die Dgl. (**):

$$x\left(b'\,\frac{1}{x} - b\,\frac{1}{x^2}\right) + b\,\frac{1}{x} = x^3 + 1\,, \text{ d.h. } b' = x^3 + 1\,, \text{ also: } \boxed{b(x) = \frac{x^4}{4} + x + c_1}\,.$$

Mit $b(x)$ bekommt man die Lösung $u(x)$ von Dgl. (**): $\boxed{\boxed{u(x) = b(x)\,\frac{1}{x} = \frac{x^3}{4} + 1 + \frac{c_1}{x}}}$;

hiermit erhält man: $c(x) = \displaystyle\int u(x)\,dx = \int\left(\frac{x^3}{4} + 1 + \frac{c_1}{x}\right)dx = \frac{x^4}{16} + x + c_1\,\ln|x| + c_2$,

und mit $c(x)$ bekommt man schließlich die **gesuchte Lösung** $y(x)$ von Dgl. (*):

$$\boxed{\boxed{y(x) = c(x)\cdot x = \frac{x^5}{16} + x^2 + c_1\,x\,\ln|x| + c_2\,x}}\,.$$

2. (*) $\boxed{\boxed{\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = \frac{1 - x^2}{x}}}$. Wie im letzten Beispiel erkennt man sofort, dass $y_0(x) = x$ *eine* Lösung der zugehörigen *homogenen* lin. Dgl. $(*)_h$: $(1 + x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$ ist und wir haben wieder den **Reduktionsansatz:** $\boxed{y(x) = c(x)\cdot x\,,\ \ c(x)\ \text{“geeignet”}}$.

Mit: $y' = c'\,x + c$ und $y'' = c''\,x + 2c'$ folgt durch Einsetzen in die Dgl. (*):

$$\left(1 + x^2\right)\cdot\left(c''\,x + 2c'\right) - 2x\cdot\left(c'\,x + c\right) + 2x\cdot c = \frac{1 - x^2}{x}\,, \text{ d.h. } x\left(1 + x^2\right)c'' + 2c' = \frac{1 - x^2}{x}\,;$$

mit $\boxed{u(x) := c'(x)}$ ergibt sich die Dgl. der Ord. 1: (**) $\boxed{\boxed{x\left(1 + x^2\right)u' + 2u = \frac{1 - x^2}{x}}}$.

Die zu (**) gehörende *homogene* lin. Dgl. $(**)_h$: $x\,(1 + x^2)\,u' + 2u = 0$ wird durch Trennung der Variablen gelöst: $x\left(1 + x^2\right)\dfrac{du}{dx} = -2u \;\Rightarrow$

$$\ln|u| = \int\frac{du}{u} = -2\int\frac{dx}{x\,(1 + x^2)} \overset{\substack{\text{Partial–}\\\text{bruch–}\\\text{zerlegung}}}{=} -2\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}\right)dx =$$
$$= -2\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)\right) + c_0 = \ln\frac{1}{x^2} + \ln\left(1 + x^2\right) + c_0 = \ln\frac{1 + x^2}{x^2} + c_0\,;$$

damit ist z.B. $u_0(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$ *eine* Lösung von $(**)_h$ und wir bekommen für die Dgl. (**) den

Reduktionsansatz: $\boxed{u(x) = b(x) \cdot \dfrac{1+x^2}{x^2}\,,\ \ b(x)\ \text{"geeignet"}}$.

Es ist $u = h\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, $u' = h'\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^3}\,h$. Einsetzen in die Dgl. (**) ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{1-x^2}{x} &= x\left(1+x^2\right)\left(h'\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^3}\,h\right) + 2h\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \\
&= \frac{\left(1+x^2\right)^2}{x}\,h' + 2h\left(1+\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\left(1+x^2\right)\right) = \frac{\left(1+x^2\right)^2}{x}\,h'\ , \\
h'(x) &= \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\left(1+x^2\right) - x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'\ , \\
h(x) &= \frac{x}{1+x^2} + c_1\ , \\
u(x) &= h(x)\cdot\frac{1+x^2}{x^2} = \left(\frac{x}{1+x^2} + c_1\right)\frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{x} + c_1\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\ , \\
c(x) &= \int u(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} + c_1 \int \frac{1+x^2}{x^2}\,dx = \ln|x| - \frac{c_1}{x} + c_1\,x + c_2\ , \\
y(x) &= c(x)\cdot x = x\ln|x| - c_1 + c_1\,x^2 + c_2\,x\ ;
\end{aligned}$$

Wir erhalten die **allgemeine Lösung** der Dgl. (*) :

$$\boxed{\boxed{y(x) = x\ln|x| + c_1\left(x^2-1\right) + c_2\,x\ ,\ \ c_1\,,\ c_2\ \text{bel. konst.}}}\ .$$

3. (*) $\boxed{\boxed{y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 2x\sinh 3x}}$: diese Dgl. haben wir schon verschiedentlich mit anderen Methoden gelöst.

(1) (*) ist eine *lineare* Dgl. mit konstanten Koeffizienten. Da das charakteristische Polynom $p_3(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18$ u.a. die Nullstelle $\lambda_0 = 2$ hat, ist $y_0(x) = e^{2x}$ *eine* Lösung der *homogenen* lin. Dgl. $(*)_h$: $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$ und wir können für die Dgl. (*) den

Reduktionsansatz: $(+)_1$: $\boxed{y(x) = c(x)\,e^{2x}\,,\ \ c(x)\ \text{"geeignet"}}$ machen.

Durch Einsetzen von: $y = c\,e^{2x}$, $y' = c'\,e^{2x} + 2c\,e^{2x}$, $y'' = c''\,e^{2x} + 4c'\,e^{2x} + 2c\,e^{2x}$ und $y''' = c'''\,e^{2x} + 6c''\,e^{2x} + 12c'\,e^{2x} + 8c\,e^{2x}$ in die Dgl. (*) bekommt man:

$$\begin{aligned}
2x\sinh 3x &\overset{!}{=} \left(c''' + 6c'' + 12c' + 8c + 4c'' + 16c' + 16c - 3c' - 6c - 18c\right)e^{2x} = \\
&= \left(c''' + 10c'' + 25c'\right)e^{2x}\ ,\quad \text{somit, mit } \boxed{u(c) := c'(x)}\ :
\end{aligned}$$

$u'' + 10u' + 25u = e^{-2x}\cdot 2x\sinh 3x = x\,e^{-2x}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) = x\left(e^{x} - e^{-5x}\right)$,

d.h. wir erhalten die Dgl. der reduzierten Ordnung 2:

(**) $\boxed{\boxed{u'' + 10u' + 25u = x\left(e^{x} - e^{-5x}\right)}}$.

(2): Das charakteristische Polynom $p_2(\lambda) = \lambda^2+10\lambda+25 = (\lambda+5)^2$ von (**) hat die (zweifache) Nullstelle $\lambda_1 = -5$; damit ist u.a. $u_0(x) = e^{-5x}$ eine Lösung der *homogenen* lin. Dgl. $(**)_h$: $u'' + 10u' + 25 = 0$ und der entsprechende **Reduktionsansatz** für die Dgl. (**) ist:

$(+)_2$: $\boxed{u(x) = b(x)\, e^{-5x}\,, \quad b(x) \ \text{“geeignet”}}$.

Wenn wir: $u = b\, e^{-5x}$, $u' = b'\, e^{-5x} - 5b\, e^{-5x}$, $u'' = b''\, e^{-5x} - 10b'\, e^{-5x} + 25b\, e^{-5x}$ in die Dgl. (**) einsetzen, bekommen wir:

$x\left(e^x - e^{-5x}\right) \stackrel{!}{=} \Big(b'' - 10b' + 25b + 10b' - 50b + 25b\Big)\, e^{-5x} = b''\, e^{-5x}$, also:

(***) $\boxed{\boxed{b'' = x\left(e^{6x} - 1\right)}}$.

Jetzt muss alles wieder zurückgespult werden: $b(x)$ bekommt man aus (***) durch zweimaliges Integrieren, dann ergibt sich $u(x)$ aus $(+)_2$ und $c(x)$ durch Integration von $u(x)$; aus $(+)_1$ erhält man schließlich die gesuchte Lösung $y(x)$.

(3): Zuvor empfiehlt es sich, einige Hilfsintegrale auszurechnen, die hierbei auftreten:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $I_{n,\alpha}(x) = \displaystyle\int x^n\, e^{\alpha x}\, dx$.

Partielle Integration: $u = x^n$ $(\Rightarrow\ u' = n\, x^{n-1})$, $v' = e^{\alpha x}$ $\left(\Rightarrow\ v = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\right)$ ergibt (unter Vernachlässigung aller Integrationskonstanten):

$$I_{n,\alpha}(x) = \frac{x^n}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha}\int x^{n-1}\, e^{\alpha x}\, dx = \frac{x^n}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha}\, I_{n-1,\alpha}(x)\,.$$

Mit dieser Rekursionsformel und mit:

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha x}\, dx = \quad & I_{0,\alpha}(x) &&= \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x} \quad \text{erhalten wir:}\\
\int x\, e^{\alpha x}\, dx = \quad & I_{1,\alpha}(x) &&= \frac{x}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\, I_{0,\alpha}(x) = \frac{x}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}\, e^{\alpha x}\,,\\
\int x^2\, e^{\alpha x}\, dx = \quad & I_{2,\alpha}(x) &&= \frac{x^2}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\, I_{1,\alpha}(x) = \frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2}\, e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3}\, e^{\alpha x}\,,\\
\int x^3\, e^{\alpha x}\, dx = \quad & I_{3,\alpha}(x) &&= \frac{x^3}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha}\, I_{2,\alpha}(x) = \frac{x^3}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{3x^2}{\alpha^2}\, e^{\alpha x} + \frac{6x}{\alpha^3}\, e^{\alpha x} - \frac{6}{\alpha^4}\, e^{\alpha x}\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b'(x) \quad & \stackrel{(***)}{=} \int \Big(x\, e^{6x} - 1\Big)\, dx = -\frac{x^2}{2} + I_{1,6}(x) + c_1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\, e^{6x} - \frac{1}{36}\, e^{6x} + c_1 \ \Rightarrow\\
b(x) \quad & = \int \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\, e^{6x} - \frac{1}{36}\, e^{6x} + c_1\right) dx = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}\, I_{1,6}(x) - \frac{1}{216}\, e^{6x} + c_1\, x + c_2 =\\
& = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{6}\, e^{6x} - \frac{1}{36}\, e^{6x}\right) - \frac{1}{216}\, e^{6x} + c_1\, x + c_2 =\\
& = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{36}\, e^{6x} - \frac{1}{108}\, e^{6x} + c_1\, x + c_2\,;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u(x) &\overset{(+)_2}{=} b(x)\,e^{-5x} = -\frac{x^3}{6}\,e^{-5x} + \frac{x}{36}\,e^{x} - \frac{1}{108}\,e^{x} + c_1\,x\,e^{-5x} + c_2\,e^{-5x}\,,\\
c(x) &= \int u(x)\,dx = \int \left(-\frac{x^3}{6}\,e^{-5x} + \frac{x}{36}\,e^{x} - \frac{1}{108}\,e^{x} + c_1\,x\,e^{-5x}\right) dx = \\
&= -\frac{1}{6}\,I_{3,-5} + \frac{1}{36}\,I_{1,1} - \frac{1}{108}\,e^{x} + c_1\,I_{1,-5} - \frac{c_2}{5}\,e^{-5x} + c_3 = \\
&= -\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{5}\,e^{-5x} - \frac{3x^2}{25}\,e^{-5x} - \frac{6x}{125}\,e^{-5x} - \frac{6}{625}\,e^{-5x}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{36}\,(x\,e^{x} - e^{x}) - \frac{1}{108}\,e^{x} + c_1\left(-\frac{x}{5}\,e^{-5x} - \frac{1}{25}\,e^{-5x}\right) - \frac{c_2}{5}\,e^{-5x} + c_3 = \\
&= \left(\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{50} + \frac{x}{125} + \frac{1}{625} - \frac{c_1}{5}\,x - \frac{c_1}{25} - \frac{c_2}{5}\right) e^{-5x} + \left(\frac{x}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{108}\right) e^{x} + c_3\,;\\
y(x) &\overset{(+)_1}{=} c(x)\,e^{2x} = \left(\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{50} + \frac{1-25c_1}{125}\,x + \frac{1-25c_1}{625} - \frac{c_2}{5}\right) e^{-3x} + \\
&\quad + \left(\frac{x}{36} - \frac{1}{27}\right) e^{3x} + c_3\,e^{2x}\,,\quad c_1\,,\, c_2\,,\, c_3 \ \text{ bel. konst.}\,,
\end{aligned}
$$

bzw., mit $b = \dfrac{1-25c_1}{125}\,,\ a = \dfrac{b - c_2}{5}\,,\ c = c_3\,:$

$$
\boxed{y(x) = \left(\frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{50} + bx + a\right) e^{-3x} + \left(\frac{x}{36} - \frac{1}{27}\right) e^{3x} + c\,e^{2x}\,,\quad a,b,c \ \text{ bel. konst.}}\ .
$$

17.B Potenzreihenansatz.

Wir betrachten wieder eine allgemeine lineare Differentialgleichung der Form:

(*) $$\boxed{L_n y = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$$

mit i.a. *stetigen* Koeffizienten $a_\nu(x)$ und mit $a_n \neq 0$.

In den Fällen, in denen es nicht möglich ist, die Dgl. (*) mit einer der bisher besprochenen Methoden zu lösen, kann man versuchen, die Lösungen in Form einer Potenzreihe zu finden:

17.2 Wenn die Funktionen $\dfrac{a_\nu(x)}{a_n(x)}$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ und $\dfrac{f(x)}{a_n(x)}$ auf einem Intervall $]x_0 - \rho\,,\, x_0 + \rho[$ durch eine konvergente Potenzreihe um x_0 dargestellt werden können, dann lässt sich auch die allgemeine Lösung der Dgl. (*) auf diesem Intervall durch eine konvergente Potenzreihe um x_0 darstellen:
$y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ mit geeigneten Koeffizienten c_k.

Um eine Lösung der Dgl. (*) in Form einer Potenzreihe um x_0 zu bekommen, macht man zunächst einen **Potenzreihenansatz:**

$$(+)\quad \boxed{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k\,, \quad c_0, c_1, \ldots \text{ “geeignet”}}\,.$$

17.3 Wenn man diesen Ansatz in die Dgl. (*) einsetzt und die Funktionen $f(x)$ und $a_0(x)$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$ durch ihre Potenzreihe um x_0 darstellt, ergeben sich durch **Koeffizientenvergleich** die Koeffizienten c_k in Form einer **Rekursionsformel**

der Art: (R) $\boxed{c_k = \text{Funktion von } (c_0, c_1, \ldots, c_{k-1})}$ für $k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq n$.

(Leider gelingt es nur in günstigen Ausnahmefällen, mit dieser Rekursionsformel auch ein allgemeines Bildungsgesetz für die Koeffizienten c_k finden.)

Zum Rechnen ist es meistens **einfacher**, statt der Potenzreihen der Quotienten $\dfrac{f(x)}{a_n(x)}, \dfrac{a_0(x)}{a_n(x)}, \ldots, \dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}$ die Potenzreihen der Funktionen $f(x)$ und $a_0(x)$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$ zu verwenden.

Hierbei konvergiert jedoch die mit den Koeffizienten c_k gemäß (R) gebildete Reihe (+) für die Lösung $y(x)$ in der Regel nur dann auf einer Umgebung von x_0, wenn die Reihen für alle Quotienten $\dfrac{f(x)}{a_n(x)}, \dfrac{a_0(x)}{a_n(x)}, \ldots, \dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}$ auf dieser Umgebung konvergieren!

Im günstigsten Fall hat man:

17.4 Wenn die Funktionen $\dfrac{a_0(x)}{a_n(x)}, \ldots, \dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}$ und $\dfrac{f(x)}{a_n(x)}$ **Polynome** sind, dann konvergiert die Potenzreihe (+) für $y(x)$ **überall**.

Werden die **Anfangswerte** $y^{(k)}(x_0) = y_{0,k}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ vorgegeben, so sind hierdurch in (+) die Koeffizienten $c_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ festgelegt und die Koeffizienten c_k für $k \geq n$ ergeben sich aufgrund der Rekursionsformel (R) in Abhängigkeit dieser Anfangswerte $y_{0,0}, \ldots, y_{0,n-1}$.

Beachte:

Gelegentlich genügt es, für die Lösung $y(x)$ von (*) *nur den Anfang* ihrer Potenzreihen–Entwicklung anzugeben:

$$(+)_0 \quad \boxed{y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot\Big(x - x_0\Big) + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot\Big(x - x_0\Big)^2 + \cdots}\,.$$

Das geht — statt mit einem Potenzreihen–Ansatz $(+)$ — meistens *erheblich* bequemer, wenn man mit den vorgegebenen Anfangswerten

17.5 $y(x_0) = y_{0,0},\ y'(x_0) = y_{0,1},\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$

die für die Taylorkoeffizienten $c_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$ benötigten Ableitungen $y^{(k)}(x_0)$

$(k \geq n)$ **schrittweise** mit Hilfe der gegebenen Dgl. (*) bestimmt:

$$y^{(n)}(x_0) = \left(\frac{f(x)}{a_n(x)} - \frac{a_0(x)}{a_n(x)}\,y'(x) - \cdots - \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\,y^{(n-1)}(x)\right)\Bigg|_{x=x_0},$$

$$y^{(n+1)}(x_0) = \left(\frac{f(x)}{a_n(x)} - \frac{a_0(x)}{a_n(x)}\,y'(x) - \cdots - \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\,y^{(n-1)}(x)\right)'\Bigg|_{x=x_0},$$

usw.

1. Beispiel: Wir wollen die **binomische Reihe** herleiten:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\boxed{y = (1+x)^\alpha}$. Dann ist $y(0) = 1$ und $y' = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}$, d.h. y ist die Lösung des Anfangswertproblems: (*) $\boxed{\boxed{(1+x)\,y' - \alpha\,y = 0\,,\ y(0) = 1}}$.

Da der Quotient $\dfrac{-\alpha}{1+x}$ für $|x| < 1$ als Potenzreihe um 0 darstellbar ist (geometrische Reihe!), ist gemäß (1) auch die Lösung $y(x)$ von (*) für $|x| < 1$ als Potenzreihe um 0 darstellbar. Wir können also einen **Potenzreihenansatz** machen:

$$(+) \quad \boxed{\boxed{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,x^k \quad \text{mit „geeigneten" Koeffizienten } c_k}}\,.$$ Hiermit ist:

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k\,x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,c_{k+1}x^k \quad \text{und}$$

$$xy' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,x^k\,.$$ Einsetzen in die Dgl. (*) ergibt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,c_{k+1}\,x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,x^k - \alpha\sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,x^k = 0\,,$$ also:

$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+1)\,c_{k+1}-(\alpha\,-k)\,c_k\Big]\,x^k=0$. Damit ist: $(k+1)\,c_{k+1}-(\alpha\,-k)\,c_k=0\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0$

und wir bekommen für die Koeffizienten c_k die **Rekursionsformel:**

(R) $\boxed{c_{k+1}=\dfrac{\alpha\,-k}{k+1}\,c_k\quad \text{mit }\ c_0=y(0)=1=\binom{\alpha}{0}}$. Hieraus ergibt sich schrittweise:

Mit $k=0:\ c_1=\alpha=\binom{\alpha}{1}$; mit $k=1:\ c_2=\dfrac{\alpha-1}{2}\,\alpha=\binom{\alpha}{2}$;
mit $k=2:\ c_3=\dfrac{\alpha-2}{3}\cdot\dfrac{\alpha-1}{2}\,\alpha=\binom{\alpha}{3}$; mit $k=3:\ c_4=\dfrac{\alpha-3}{4}\cdot\dfrac{\alpha-2}{3}\cdot\dfrac{\alpha-1}{2}\,\alpha=\binom{\alpha}{4}$,
usw.: $c_k=\binom{\alpha}{k}\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0$. Wir erhalten damit die **Binomialreihe:**

$$\boxed{(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\,x^k\quad \text{für }\ |x|<1}\,.$$

2. Beispiel: (*) $\boxed{y''+x^2\,y'+2xy\;=x\,,\ \ y(0)=y_0,\,y'(0)=u_0}$.

Die Lösung $y(x)$ dieses Anfangswertproblems *besitzt* aufgrund von (1) und (2) eine überall konvergente Potenzreihen–Entwicklung um $x_0=0$.

(i) Potenzreihen–Ansatz: (+) $\boxed{y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^n\,,\quad c_n\ \text{“geeignet”}}$. Damit ist:

$$xy=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\ ,\quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}n\,c_n\,x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,c_{n+1}\,x^n\ ,\quad x^2y'=\sum_{n=1}^{\infty}n\,c_n\,x^{n+1}\ ,$$
$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_{n+1}\,x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}\,x^n=2c_2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)c_{n+3}\,x^{n+1}\,.$$

Außerdem haben wir: $c_0=y(0)=y_0$ und $c_1=y'(0)=u_0$.

(ii) Einsetzen in die Dgl. (*) und nach Potenzen von x sortieren:

$$\begin{aligned}
0\ &\overset{!}{=}\ y''+x^2y'+2xy-x=\\
&=2c_2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)\,c_{n+3}\,x^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}n\,c_n\,x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}2c_n\,x^{n+1}\ -x=\\
&=2c_2+6c_3\,x+2c_0\,x-x+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)(n+3)\,c_{n+3}+n\,c_n+2c_n\Big]\,x^{n+1}=\\
&=2c_2+\Big(6c_3+2c_0-1\Big)\,x+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)(n+3)\,c_{n+3}+(n+2)\,c_n\Big]\,x^{n+1}
\end{aligned}$$

(iii) Koeffizientenvergleich: rechte Seite $\overset{!}{=}$ linke Seite = Nullreihe:

$2c_2 = 0$, d.h. $c_2 = 0$;
$6c_3 + 2c_0 - 1 = 0$, d.h. $c_3 = \frac{1}{6}(1 - 2c_0) = -\frac{1}{3}\left(c_0 - \frac{1}{2}\right)$;
$(n+2)(n+3)\, c_{n+3} + (n+2)\, c_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $c_{n+3} = -\frac{1}{n+3}\, c_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_0 = y_0\,, \\ c_1 = u_0\,, \\ c_2 = 0\,, \\ c_3 = -\dfrac{1}{3}\left(y_0 - \dfrac{1}{2}\right), \\ \hline c_{n+3} = -\dfrac{1}{n+3}\, c_n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots\,. \end{array}}$$

Rekursionsformel für die Koeffizienten c_n.

(iv) Versuch, ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten c_n zu finden:

$$\boxed{c_1 = u_0} \quad \Rightarrow \quad c_4 = -\frac{1}{4}\, c_1 = -\frac{1}{4}\, u_0\,,$$

$$\Rightarrow \quad c_7 = -\frac{1}{7}\, c_4 = +\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}\, u_0\,,$$

$$\Rightarrow \quad c_{10} = -\frac{1}{10}\, c_7 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10}\, u_0\,, \text{ usw., allgemein:}$$

$$c_{3k+1} = \left[(-1)^k \prod_{\nu=0}^{k} \frac{1}{3\nu + 1}\right] u_0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0\,;$$

$$\boxed{c_2 = 0} \quad \Rightarrow \quad c_2 = c_5 = c_8 = c_{11} = \dots = 0\,, \text{ also: } c_{3k-1} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\,;$$

$$\boxed{c_3 = -\frac{1}{3}\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad c_6 = -\frac{1}{6}\, c_3 = +\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(y_0 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\Rightarrow \quad c_9 = -\frac{1}{9}\, c_6 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(y_0 - \frac{1}{2}\right), \text{ usw., allgemein:}$$

$$c_{3k} = (-1)^k \frac{1}{3 \cdot 6 \cdots (3k)} \cdot \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^k}{3^k\, k!}\left(y_0 - \frac{1}{2}\right) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\,.$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_0 = y_0\,,\ c_{3k} = \dfrac{(-1)^k}{3^k\, k!}\left(y_0 - \dfrac{1}{2}\right) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots\,, \\ c_{3k-1} = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots\,, \\ c_{3k+1} = \left[(-1)^k \displaystyle\prod_{\nu=0}^{k} \frac{1}{3\nu + 1}\right] u_0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots\,. \end{array}}$$

(v) Mit diesen Koeffizienten ergibt sich die **allgemeine Lösung:**

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = y_0 + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k\, k!}\, x^{3k} + u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \prod_{\nu=0}^{k} \frac{1}{3\nu+1}\right] x^{3k+1}}\,.$$

Für die erste der beiden Potenzreihen auf der rechten Seite können wir sofort die Grenzfunktion angeben (Exponential–Reihe!):

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k\, k!}\, x^{3k} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x^3}{3}\right)^k = -1 + e^{-x^3/3}$. Damit ist:

$$\boxed{\boxed{y(x) = \frac{1}{2} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^3/3} + u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \prod_{\nu=0}^{k} \frac{1}{3\nu+1}\right] x^{3k+1}}}\,.$$

Die Lösung ist von der Form: $y(x) = y_s(x) + \bar{a}\, y_1(x) + b\, y_2(x)$, $\bar{a} = y_0 - \dfrac{1}{2}$ und $b = u_0$ beliebig konstant; $y_s = \dfrac{1}{2}$ ist eine **Partikulärlösung** der *inhomogenen* Dgl. (*);

$y_1(x) = e^{-x^3/3}$ und $y_2(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \prod_{\nu=0}^{k} \frac{1}{3\nu+1}\right] x^{3k+1}$ sind zwei **Fundamentallösungen**,

d.h. zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen *homogenen* Dgl..

(Die Grenzfunktion der Potenzreihe für $y_2(x)$ ist keine der bekannten Funktionen.)

17.C Hermite'sche Differentialgleichung und Polynome.

17.6 Eine Differentialgleichung für $y = y(x)$ der Form

(H) $\boxed{\boxed{y'' - 2xy' + 2\beta\, y = 0}}$, wobei β eine Konstante ist,

bezeichnet man als **Hermite'sche Differentialgleichung**.

Da die Koeffizienten $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = -2x$ und $a_0(x) = 2\beta$ dieser Dgl. Polynome sind, lässt sich ihre allgemeine Lösung $y(x)$ nach Nr. 17.4 an *jeder* Stelle x_0, insbesondere bei $x_0 = 0$ in eine überall konvergente Potenzreihe entwickeln. Daher können wir für die Dgl. (H) einen **Potenzreihen–Ansatz** machen:

(+) $\boxed{\boxed{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k}}$, ($c_k$ "geeignet" konstant).

Mit den entsprechenden Reihen für xy' und y'':

$$\begin{aligned} 2xy' &= 2x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2k c_k x^k \,, \\ y'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k \,, \end{aligned}$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Dgl. (H):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2\beta\, c_k x^k = 0 \,,$$

also: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+2)(k+1) c_{k+2} - 2(k-\beta) c_k\Big]\, x^k = 0\,,$

somit: $(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2(k-\beta)c_k = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0\,,$ d.h.:

(R) $$\boxed{c_{k+2} = \frac{2(k-\beta)}{(k+2)(k+1)}\, c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0}$$

Rekursionsformel für die Koeffizienten c_k .

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel können wir versuchen, ein **Bildungsgesetz** für die Koeffizienten c_k zu finden:

Setzen wir $y_0 := y(0)$ und $u_0 := y'(0)$, so ergibt sich der Reihe nach aus (R):

$$\begin{aligned} c_{2\cdot 0} &= c_0 = y_0 \,, \\ c_{2\cdot 1} &= c_2 = \frac{-2\beta}{2\cdot 1}\, c_0 = \frac{2^1(0-\beta)}{2!}\, y_0 \,, \\ c_{2\cdot 2} &= c_4 = \frac{2(2-\beta)}{4\cdot 3}\, c_2 = \frac{2^2(0-\beta)(2-\beta)}{4!}\, y_0 \,, \\ c_{2\cdot 3} &= c_6 = \frac{2(4-\beta)}{6\cdot 5}\, c_4 = \frac{2^3(0-\beta)(2-\beta)(4-\beta)}{6!}\, y_0 \,, \\ c_{2\cdot 4} &= c_8 = \frac{2(6-\beta)}{8\cdot 7}\, c_6 = \frac{2^4(0-\beta)(2-\beta)(4-\beta)(6-\beta)}{8!}\, y_0 \,, \quad \text{usw:} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_{2m} = \left[\frac{2^m}{(2m)!} \prod_{\nu=0}^{m-1} (2\nu-\beta)\right] y_0 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}}\,,$$

$$\begin{aligned} c_{2\cdot 0+1} &= c_1 = u_0 \,, \\ c_{2\cdot 1+1} &= c_3 = \frac{2(1-\beta)}{3\cdot 2}\, c_1 = \frac{2^1(1-\beta)}{3!}\, u_0 \,, \\ c_{2\cdot 2+1} &= c_5 = \frac{2(3-\beta)}{5\cdot 4}\, c_3 = \frac{2^2(1-\beta)(3-\beta)}{5!}\, u_0 \,, \\ c_{2\cdot 3+1} &= c_7 = \frac{2(5-\beta)}{7\cdot 6}\, c_5 = \frac{2^3(1-\beta)(3-\beta)(5-\beta)}{7!}\, u_0 \,, \quad \text{usw:} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_{2m+1} = \left[\frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{\nu=0}^{m-1} (2\nu+1-\beta)\right] u_0 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}}\,.$$

Wir erhalten:

17.7

Die **Hermite'sche Differentialgleichung**:

(H) $\boxed{\boxed{y'' - 2xy' + 2\beta y = 0}}$ (β konstant)

hat die **allgemeine Lösung** $\boxed{y(x) = y_0 \cdot y_1(x) + u_0 \cdot y_2(x)}$ ($x \in \mathbb{R}$)

mit den beiden **Fundamentallösungen**:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[2^m \prod_{\nu=0}^{m-1} (2\nu - \beta) \right] \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \beta x^2 - \frac{1}{6}\,\beta(2-\beta)\,x^4 - \cdots,$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \left[2^m \prod_{\nu=0}^{m-1} (2\nu + 1 - \beta) \right] \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} =$$

$$= x + \frac{1}{3}\,(1-\beta)\,x^3 + \frac{1}{30}\,(1-\beta)(3-\beta)\,x^5 + \cdots.$$

Ist man nur an den **ersten Gliedern der Potenzreihen–Entwicklung** der Lösung von (H) interessiert, so kann man die erforderlichen Ableitungen $y^{(k)}(0)$ schneller unmittelbar aus der Dgl. (H) erhalten:

$\boxed{y(0) = y_0}$, $\boxed{y'(0) = u_0}$ (Vorgaben) und

$y'' = 2xy' - 2\beta y$ (gegebene Dgl.) $\Rightarrow$

$\boxed{y''(0) = -2\beta\, y_0}$ und

$y''' = 2y' + 2xy'' - 2\beta\, y' = 2(1-\beta)\, y' + 2xy''$ $\Rightarrow$

$\boxed{y'''(0) = 2(1-\beta)\, u_0}$ und

$y^{(4)} = 2(1-\beta)\, y'' + 2y'' + 2xy''' = 2(2-\beta)\, y'' + 2xy'''$ $\Rightarrow$

$\boxed{y^{(4)}(0) = -4\beta(2-\beta)\, y_0}$ und

$y^{(5)} = 2(2-\beta)\, y''' + 2y''' + 2xy^4 = 2(3-\beta)\, y''' + 2x\, y^4$ $\Rightarrow$

$\boxed{y^{(5)}(0) = 4(1-\beta)(3-\beta)\, u_0}$ usw.: es ergibt sich (wie oben):

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) \quad &= y_0 \left(1 - \beta x^2 - \frac{1}{6}\,\beta(2-\beta)\,x^4 - \cdots \right) + \\ &+ u_0 \left(x + \frac{1}{3}\,(1-\beta)\,x^3 + \frac{1}{30}\,(1-\beta)(3-\beta)\,x^5 + \cdots \right). \end{aligned}}$$

Wir wollen als Nächstes herausfinden, für welche Werte β die Hermite'sche Dgl. (H) ein **Polynom vom Grad n** als Lösung besitzt.

Es sei also $y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ mit $c_n \neq 0$ eine Lösung von (H).

Wegen $c_k = 0$ für $k > n$ und $c_n \neq 0$ folgt aus der Rekursionsformel (R):

$0 = c_{n+2} = \dfrac{2(n-\beta)}{(n+2)(n+1)}\, c_n$, also: $\boxed{\beta = n}$, und wir bekommen nun die

Rekursionsformel: $(\mathrm{R})_n$ $\boxed{\boxed{c_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2(k-n)}\, c_{k+2} \quad \text{für } k < n}}$.

Da $c_{n+1} = 0$ ist, folgt noch: $c_{n-1} = c_{n-3} = \cdots = 0$, d.h. es ist $c_1 = c_3 = \cdots = c_{n-1} = 0$, wenn n *gerade* ist, und $c_0 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$, wenn n *ungerade* ist.

Um nicht die Fälle "n gerade" und "n ungerade" unterscheiden zu müssen, ist es — wie schon bei der Legendre'schen Dgl. — bequemer, die Koeffizienten $c_{n-2}, c_{n-4}, \ldots$ in Abhängigkeit von c_n darzustellen: aus der Rekursionsformel $(\mathrm{R})_n$ folgt:

$$
\begin{aligned}
c_{n-2} &= \frac{(n-1)\,n}{2(-2)}\, c_n = \frac{-n!}{2^2 \cdot 1! \cdot (n-2)!}\, c_n\,, \\
c_{n-4} &= \frac{(n-3)(n-2)}{2(-4)}\, c_{n-2} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)\,n}{2^4 \cdot 2}\, c_n = \frac{n!}{2^4 \cdot 2! \cdot (n-4)!}\, c_n\,, \\
c_{n-6} &= \frac{(n-5)(n-4)}{2(-6)}\, c_{n-4} = \frac{-(n-5)\cdots(n-1)\,n}{2^6 \cdot 2 \cdot 3}\, c_n = \frac{-n!}{2^6 \cdot 3! \cdot (n-6)!}\, c_n\,, \\
&\vdots \quad \text{usw.: für } k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n - 2k \geq 0, \text{ d.h. für } 0 \leq k \leq \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor : \\
c_{n-2k} &= \frac{(-1)^k\, n!}{2^{2k}\, k!\, (n-2k)!}\, c_k\,.
\end{aligned}
$$

Es ist üblich, c_n in der Form $c_n = 2^n c$ ($c \neq 0$ konst.) anzusetzen. Wir erhalten:

17.8

Die **Hermite'sche Differentialgleichung**

(H) $\boxed{y'' - 2xy' + 2\beta\, y = 0}$ (β konstant)

besitzt genau dann ein **Polynom vom Grad n als Lösung**, wenn

$\boxed{\boxed{\beta = n}}$; die **Polynomlösungen** sind in diesem Fall genau die Vielfachen

$\boxed{y(x) = c\, H_n(x)\,, \quad c \text{ bel. konst.}}$ des **n–ten Hermite'schen Polynoms:**

$$\boxed{\boxed{H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k\, 2^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\, x^{n-2k}}}\,.$$

Selbstverständlich besitzt die Dgl. (H) gemäß Nr. 17.7 auch im Fall $\beta = n$ *zwei* Fundamentallösungen, nur ist die zweite Fundamentallösung *kein Polynom*.

Diese Polynomlösungen der Hermite'schen Dgl. (H) spielen in der Quantentheorie bei der Diskussion harmonischer Schwingungen (z.B. Molekülschwingungen) eine große Rolle.

18 Fourierreihen.

Stichpunkte: Approximation im quadratischen Mittel durch trigonometrische Polynome, Fourierreihen (als Extremwertaufgabe, reell und komplex); Fourierentwicklung gerader und ungerader Funktionen.

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ und $f(t)$ eine T–periodische Funktion mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, die der Bedingung $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ genügt.

18.A Approximation durch trigonometrische Polynome.

Die **Approximationsaufgabe**, $f(t)$ durch Superposition (=Überlagerung) von harmonischen Schwingungen bis zur Frequenz $N\omega$, d.h. durch ein **trigonometrisches Polynom**

18.1
$$\boxed{T_N\{f\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cdot \cos n\omega t \,+\, b_n \cdot \sin n\omega t\Big) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{i\,n\,\omega\,t}}$$

im quadratischen Mittel optimal anzunähern, d.h. so, dass die

mittlere quadratische Abweichung $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - T_N\{f\}(t)|^2\, dt}$

minimal wird, kann als **Extremwertaufgabe** gelöst werden:

Die Koeffizienten a_n, b_n bzw. c_n sind hierzu so zu bestimmen, dass $M := \int_0^T |f(t) - T_N\{f\}(t)|^2\, dt$

minimal wird; sie ergeben sich folglich aus den $(2N+1)$ Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial a_n} = 0 \ \text{ für } n = 0, 1, \ldots, N \\ \dfrac{\partial M}{\partial b_n} = 0 \ \text{ für } \ n = 1, \ldots, N \end{array}\right\} \quad \text{im Fall } M = M\Big(a_n\,,\, b_n \ \big|\ n \in \mathbb{N}\Big) \text{ bzw.}$$

$$\frac{\partial M}{\partial c_n} = 0 \ \text{ für } \ n = -N, \ldots, N \qquad \text{im Fall } M = M\Big(c_n \ \big|\ n \in \mathbb{Z}\Big).$$

Als eindeutige Lösung dieser Approximationsaufgabe bekommt man:

18.2
$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) \cdot \cos n\,\omega t\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) \cdot \sin n\,\omega t\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{array}}$$

Fourierkoeffizienten (reelle Form), bzw.

18.3
$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i\,n\,\omega\,t} dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)}$$

Fourierkoeffizienten (komplexe Form), wobei:

18.4 $$\boxed{c_0 = \frac{a_0}{2} \text{ und } c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\,,\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}\,.}$$

Mit diesen Fourierkoeffizienten ist $T_N\{f\}(t)$ das **N–te Fourierpolynom** von $f(t)$ und die Güte der Approximation: $f(t) \approx T_N\{f\}(t)$ kann höchstens durch Vergrößerung von N im quadratischen Mittel verbessert werden.

18.5 Da die in den Formeln für die Fourierkoeffizienten auftretenden Integranden sämtlich T–periodisch sind, können die Integrale jeweils über ein *beliebig anderes* Intervall der Länge T genommen werden: $\int_0^T \cdots\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cdots\, dt = \int_a^{a+T} \cdots\, dt$ ($a \in \mathbb{R}$ beliebig); das ist — abhängig von der Art der Definition von $f(t)$ — mitunter vorteilhaft.

Hieraus ergibt sich auch:

18.6

ist $f(t)$ **ungerade**, d.h. $f(-t) = -f(t)$ (wie der Sinus), so ist:

$$a_n = 0\,,\ b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\,\omega t\,dt\,,\ c_{\pm n} = \mp\frac{i}{2}\,b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,;$$

ist $f(t)$ **gerade**, d.h. $f(-t) = f(t)$ (wie der Cosinus), so ist:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\,\omega t\,dt\,,\ b_n = 0\,,\ c_{\pm n} = \frac{1}{2}\,a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten sind die folgenden Beziehungen immer wieder nützlich:

18.7 $$\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für alle } \textit{geraden } n \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{für alle } \textit{ungeraden } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ und:

18.8 $$\cos\frac{n}{2}\pi = \begin{cases} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0,4,8,\ldots = 2k \ (k \text{ gerade}) \\ -1 & \text{für } n = 2,6,10,\ldots = 2k \ (k \text{ ungerade}) \end{cases} \\ 0 \qquad \text{für alle } \textit{ungeraden } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

18.9 $$\sin\frac{n}{2}\pi = \begin{cases} 0 \qquad \text{für alle } \textit{geraden } n \in \mathbb{N}_0 \\ (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1,5,9,\ldots = 2k+1 \ (k \text{ gerade}) \\ -1 & \text{für } n = 3,7,11,\ldots = 2k+1 \ (k \text{ ungerade}) \end{cases} \end{cases}$$

z.B.: Sei $f(x)$ 8–periodisch mit $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 4 & \text{für} & -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} & 2 < x < 6 \end{array} \right\}$.

Dann ist $T = 8$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$ und $f(x)$ ist *gerade*, somit:

$b_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $a_n = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega x)\, dx = 2 \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi}{4} x\right) dx$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Es ergibt sich: $a_0 = 2 \displaystyle\int_0^2 dx = 4$, also $\dfrac{a_0}{2} = 2$, und für $n > 0$:

$$a_n = 2 \; \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4} x\right)\Bigg|_{x=0}^{2} = \frac{8}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \overset{\text{s.o.}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für alle } \textit{geraden } n \\ \dfrac{(-1)^k \cdot 8}{(2k+1)\,\pi} & \text{für } n = 2k+1\,,\; k \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right.$$

Wir bekommen damit für $f(x)$ die **Fourier–Polynome**:

$$T_N(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left(\frac{2k+1}{4} \pi x\right) \text{, also:}$$

$$T_1(x) = T_2(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right), \; T_3(x) = T_4(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right) - \frac{8}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{4} x\right),$$

$$T_5(x) = T_6(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right) - \frac{8}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{4} x\right) + \frac{8}{5\pi} \cos\left(\frac{5\pi}{4} x\right) \text{, usw.:}$$

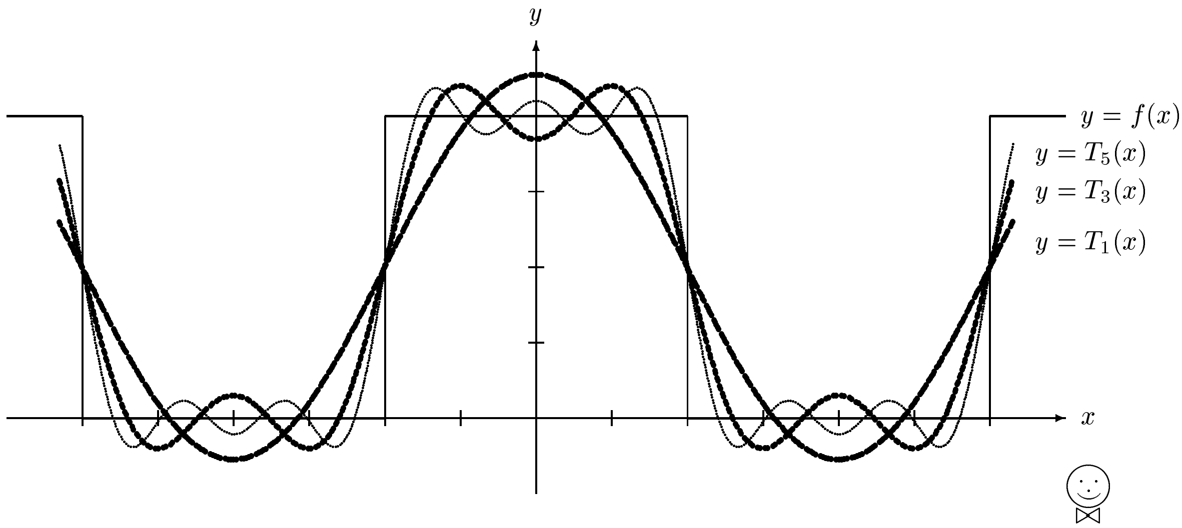


Abbildung 18.1 Die ersten Fourierpolynome von $f(x)$

18.B Fourierreihen–Entwicklung.

Wie bei jeder Approximationsaufgabe (vgl. mit der Approximation durch Taylorpolynome und der Taylorreihen–Entwicklung in Lektion 10) stellt sich auch hier die Frage, "wie gut" — im quadratischen Mittel — eine gegebene, T–periodische Funktion $f(t)$ durch ihre Fourierpolynome $T_N(t)$ approximiert werden kann, insbesondere möchte man gern wissen, ob jede "hinreichend anständige", periodische Funktion $f(t)$ durch ihre Fourierreihe $T(t) = \lim\limits_{N \to \infty} T_N(t)$ dargestellt wird. Es zeigt sich, dass die Antwort für eine große Klasse von Funktionen $f(t)$ positiv ist:

Ist $f(t)$ T–periodisch mit der Kreisfrequenz $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, erfüllt $f(t)$ die

18.10

Dirichlet'sche Bedingung (D):
An jeder Unstetigkeitsstelle t_0 von $f(t)$ existieren die beiden einseitigen Grenzwerte $f(t_0 - 0)$ und $f(t_0 + 0)$ und jedes Periodenintervall von $f(t)$ lässt sich so in endlich viele Teilintervalle aufteilen, dass $f(t)$ im Innern dieser Teilintervalle **beschränkt, stetig** und **monoton** ist.

und sind a_n, b_n bzw. c_n die Fourierkoeffizienten aus Nr. 18.2 und 3, so hat man die **Fourierreihen–Entwicklung:**

18.11

- an jeder Stetigkeitsstelle t:

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) = T(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cdot \cos n\,\omega t + b_n \cdot \sin n\,\omega t \Big) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\,n\,\omega\,t}\,, \end{aligned}}$$

Fourierreihe (reelle Form)

Fourierreihe (komplexe Form)

- an jeder Unstetigkeitsstelle t_0:

$$\boxed{T(t_0) = \frac{1}{2}\Big(f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0) \Big)}\;.$$

Für gerade oder ungerade periodische Funktionen, die der Dirichlet'schen Bedingung (D) genügen, hat man aufgrund von Nr. 18.6:

18.12

Wenn $f(t)$ **gerade** ist (wie der Cosinus), so hat $f(t)$ eine reine **Cosinus–Entwicklung:** an jeder Stetigkeitsstelle ist:

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n\,\omega t \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos n\,\omega t\, dt}$$

wenn $f(t)$ **ungerade** ist (wie der Sinus), so hat $f(t)$ eine reine **Sinus–Entwicklung:** an jeder Stetigkeitsstelle ist:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n\,\omega t \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin n\,\omega t\, dt}$$

Weitere Beispiele zur Fourier–Entwicklung:

1. $\boxed{f(t) \text{ ist } T\text{–periodisch mit } f(t) = \frac{2A}{T}\, t \text{ für } -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}}$ **("Sägezahnkurve")**

$f(t)$ ist ungerade, hat also eine reine Sinus–Entwicklung:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n\,\omega t$$

mit den Fourierkoeffizienten:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin n\,\omega t\, dt =$$

$$= \frac{4}{T}\,\frac{2A}{T} \int_0^{T/2} t \cdot \sin n\,\omega t\, dt =$$

$$= \frac{8A}{T^2} \left(-\frac{t}{n\omega} \cos n\,\omega t \Big|_{t=0}^{T/2} + \frac{1}{n\omega} \int_0^{T/2} \cos n\omega t\, dt \right) =$$

$$= \frac{8A}{T^2} \left[-\frac{t}{n\omega} \cos n\omega t + \frac{1}{n^2\omega^2} \sin n\omega t \right]_{t=0}^{T/2} \overset{\omega\mathrm{T}=2\pi}{=}$$

$$= \frac{8A}{T^2} \left(-\frac{T^2}{2n \cdot 2\pi} \cos n\pi + \frac{1}{n^2\omega^2} \sin n\pi \right) = (-1)^{n+1}\,\frac{2A}{n\pi}\ .$$

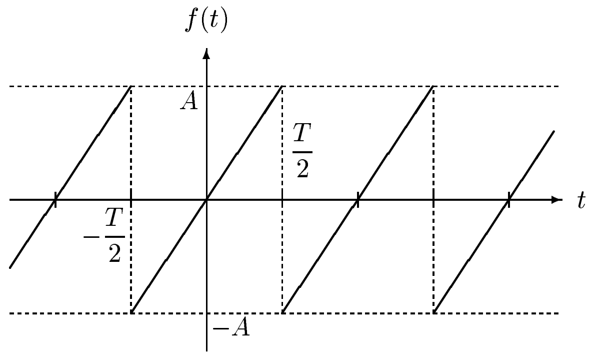


Abbildung 18.2 Sägezahnkurve

Damit hat man an jeder Stetigkeitsstelle:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\,\omega t = \\ &= \frac{2A}{\pi} \Bigg(\underbrace{\frac{\sin \omega t}{1}}_{\text{Grund–Schwingung}} - \underbrace{\frac{\sin 2\,\omega t}{2}}_{\text{1.Ober–Schwingung}} + \underbrace{\frac{\sin 3\,\omega t}{3}}_{\text{2.Ober–Schwingung}} \mp \cdots \Bigg)\ . \end{aligned}$$

(An den Unstetigkeitsstellen von $f(t)$, also an den Stellen $t = \frac{2k+1}{2} T$ mit $k \in \mathbb{Z}$, hat diese Reihe den Wert 0.)

2. $\boxed{f(t) = A \cdot |\sin t|}$

$f(t)$ ist π–periodisch, d.h. $T = \pi$, $\omega = 2$, und $f(t)$ ist gerade, hat also eine reine Cosinus–Entwicklung:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n\,\omega t$$

mit den Fourierkoeffizienten:

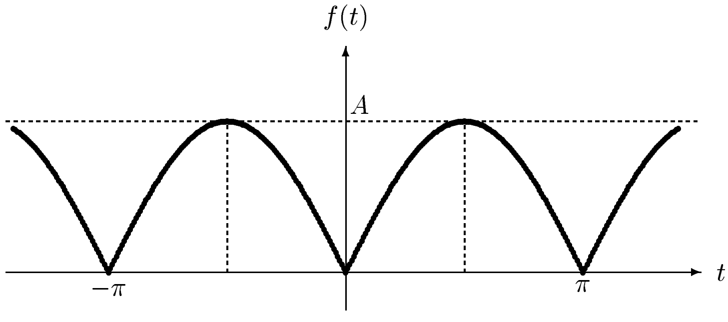


Abbildung 18.3 $f(t) = A\,|\sin t|$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{A}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_{t=0}^{\pi} = \frac{2A}{\pi} \qquad \text{und für } n>0:$$

$$a_n = \frac{2A}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cdot\cos 2nt\,dt = \frac{A}{\pi}\int_0^\pi \Big(\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t\Big)\,dt =$$
$$= \frac{A}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right]_{t=0}^{\pi} = -\frac{4A}{\pi}\,\frac{1}{(2n+1)\,(2n-1)}\ .$$

Da $f(t)$ stetig ist, ergibt sich für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{(2n+1)\,(2n-1)} = \\ &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\Big(\underbrace{\frac{\cos 2t}{1\cdot 3}}_{\text{Grund–Schwingung}} + \underbrace{\frac{\cos 4t}{3\cdot 5}}_{\text{1.Ober–Schwingung}} + \underbrace{\frac{\cos 6t}{5\cdot 7}}_{\text{2.Ober–Schwingung}} + \cdots\Big)\ . \end{aligned}$$

Hiermit hat man z.B.: $0 = f(0) = \dfrac{2A}{\pi} - \dfrac{4A}{\pi}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots\right)$,

also: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2}$.

18.C Verwendung von Formelsammlungen.

Die folgenden Bemerkungen sind hilfreich, wenn man die Fourier–Entwicklung einer gegebenen Funktion $f(t)$ mit Hilfe einer Formelsammlung ermitteln will, in der nur eine ähnliche Funktion $f_0(t)$ verzeichnet ist:

18.13

Ist $\boxed{f(t) = f_0(t-t_0)}$ und sind die Fourierkoeffizienten $\tilde a_n$, $\tilde b_n$ von $f_0(t)$ bekannt, so ergibt sich die Fourier–Entwicklung der Funktion $f(t)$ mit Hilfe der Additionstheoreme für $\cos n\omega(t-t_0)$ und $\sin n\omega(t-t_0)$ aus der Darstellung:

$$f(t) = f_0(t-t_0) = \frac{\tilde a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\tilde a_n\cdot\cos n\omega(t-t_0) + \tilde b_n\cdot\sin n\omega(t-t_0)\Big)\ .$$

z.B.: $\boxed{f(t) = A\cdot|\sin(t+\pi/4)|}$: Mit $f_0(t) = A\cdot|\sin t|$ (s.o. Beispiel 2) folgt:

$$f(t) = f_0(t+\pi/4) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n(t+\pi/4)}{(2n+1)\,(2n-1)}\ . \quad \text{Nun ist:}$$

$$\begin{aligned} \cos 2n(t+\pi/4) &= \cos(2nt+n\pi/2) = \cos 2nt\cdot\cos n\pi/2 - \sin 2nt\cdot\sin n\pi/2 = \\ &= \begin{cases} \cos 2nt\ , & \text{für } n = 0,4,8,12,\ldots\ , \\ -\cos 2nt\ , & \text{für } n = 2,6,10,14,\ldots\ , \\ -\sin 2nt\ , & \text{für } n = 1,5,9,13,\ldots\ , \\ \sin 2nt\ , & \text{für } n = 3,7,11,15,\ldots\ ; \end{cases} \end{aligned}$$

damit erhält man für $f(t)$ die Fourier–Entwicklung:

$$f(t) \;=\; \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\left(\underbrace{\frac{\sin 2t}{1\cdot 3}}_{\text{Grund–Schwingung}} + \underbrace{\frac{\cos 4t}{3\cdot 5}}_{\text{1.Ober–Schwingung}} - \underbrace{\frac{\sin 6t}{5\cdot 7}}_{\text{2.Ober–Schwingung}} - \underbrace{\frac{\cos 8t}{7\cdot 9}}_{\dots} \pm \cdots\right) :$$

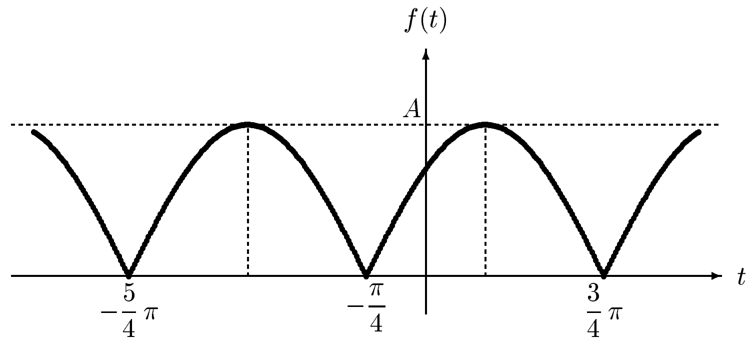


Abbildung 18.4 $f(t) = A\,|\sin(t+\pi/4)|$

18.14

Ist $f_0(t)$ T_0–periodisch mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$, so ist

$\boxed{f(t) = f_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\,t\right) = f_0\left(\dfrac{T_0}{T}\,t\right)}$ T–periodisch mit der Kreisfrequenz $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$;

$f_0(t)$ und $f(t)$ haben *dieselben* Fourierkoeffizienten.

Insbesondere:

Ist $f_0(t)$ 2π–periodisch mit der Kreisfrequenz $\omega = 1$, so ist

$\boxed{f(t) = f_0(\omega t)}$ T–periodisch mit der Kreisfrequenz $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ und

$f(t)$ hat *dieselben* Fourierkoeffizienten wie $f_0(t)$.

Hat $f_0(t)$ die maximale Amplitude $A_0 > 0$, so hat $\boxed{f(t) = \dfrac{A}{A_0}\,f_0(t)}$

die maximale Amplitude A; hat $f_0(t)$ die Fourierkoeffizienten $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$ bzw. $\tilde{c}_n$,

so hat $f(t)$ die Fourierkoeffizienten $a_n = \dfrac{A}{A_0}\,\tilde{a}_n$, $b_n = \dfrac{A}{A_0}\,\tilde{b}_n$ bzw. $c_n = \dfrac{A}{A_0}\,\tilde{c}_n$.

z.B.: Sei $\boxed{f(t)\ \ T\text{–periodisch mit } f(t) = \dfrac{2A}{T}\,t \text{ für } -\dfrac{T}{2} < t \le \dfrac{T}{2}}$ (s.o. Beispiel 1)

In den meisten Formelsammlungen findet man für die ungerade, 2π–periodische Funktion

$\boxed{f_0(t) = t \text{ für } -\pi < t \le \pi}$ die Fourier–Entwicklung:

$f_0(t) = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} \mp \cdots\right)$; $f_0(t)$ hat demnach die Fourierkoeffizienten:

$\tilde{a}_n = 0$, $\tilde{b}_n = (-1)^{n+1}\,\frac{2}{n}$, und die maximale Amplitude von $f_0(t)$ ist $A_0 = \pi$.

Da $f(t)$ die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und die maximale Amplitude A hat, ergibt sich:

$f(t) = \frac{A}{\pi}\,f_0(\omega t) = \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} \mp \cdots\right)$;

$f(t)$ hat die Fourierkoeffizienten: $a_n = 0$, $b_n = \frac{A}{\pi}\,\tilde{b}_n = (-1)^{n+1}\,\frac{2A}{n\pi}$.

19 Fouriertransformation.

Stichpunkte: Cauchy'scher Hauptwert; Fouriertransformierte, Fourierintegraldarstellung, Fourier–Sinus– und Fourier–Cosinus–Transformation, Approximation durch Überlagerungen harmonischer Schwingungen; Delta– und Heaviside–Funktion, Faltungssatz und Differentiationssatz.

19.A Cauchy'scher Hauptwert eines Integrals.

In diesem Abschnitt über Fourierintegraldarstellung sei $f(t)$ stets eine **absolut–integrierbare** Funktion, d.h. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\,.$

Alle auftretenden uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ sind im Sinne des **Cauchy'schen Hauptwertes**

19.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt := \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(t)\, dt \quad \text{bzw. — wenn } f(t) \text{ bei } t = t_0 \text{ unstetig ist —}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt := \lim_{a\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-a}^{t_0-\varepsilon} f(t)\, dt \,+ \int_{t_0+\varepsilon}^{a} f(t)\, dt \right)$$

zu verstehen, auch wenn jeweils das linke Integral im strengen Sinne

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{a\to-\infty} \lim_{\varepsilon_1\to 0-} \int_{a}^{\varepsilon_1} f(t)\, dt + \lim_{b\to\infty} \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \int_{\varepsilon_2}^{b} f(t)\, dt \quad \text{nicht existiert!}$$

z.B.: das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\, dt$ existiert *nicht* im strengen Sinne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\, dt = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \Big[-\cos t \Big]_{t=a}^{b} = -\lim_{b\to\infty} \cos b + \lim_{a\to-\infty} \cos a : \quad \text{existiert nicht!}$$

es existiert jedoch als **Cauchy'scher Hauptwert**: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\, dt = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \sin t\, dt = 0\,.$

Ebenso existiert das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t}$ *nicht* im strengen Sinne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{a\to\infty} \lim_{\varepsilon_1\to 0+} \int_{-a}^{-\varepsilon_1} \frac{dt}{t} + \lim_{b\to\infty} \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \int_{\varepsilon_2}^{b} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0+} \ln\varepsilon_1 - \lim_{a\to\infty} \ln a + \lim_{b\to\infty} \ln b - \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \ln\varepsilon_2 : \quad \text{existiert nicht!}$$

aber es existiert zumindest als **Cauchy'scher Hauptwert**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{a\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dt}{t} \right) =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\ln\varepsilon - \ln a + \ln a - \ln\varepsilon \Big) = 0\,.$$

Uneigentliche Integrale, die im strengen Sinne existieren, existieren — mit demselben Wert — natürlich auch als Cauchy'scher Hauptwert.

19.B Fouriertransformation und Fourierintegraldarstellung.

Periodische Funktionen mit der Grundfrequenz ω_0, die der Dirichlet'schen Bedingung (D) genügen, können als Überlagerung von harmonischen Schwingungen der (diskreten) Frequenzen $n\omega_0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ aufgefasst und somit als trigonometrische Fourierreihe dargestellt werden.

Ähnlich können auch nichtperiodische Funktionen, sofern sie geeignete Zusatzbedingungen erfüllen, als Überlagerung von harmonischen Schwingungen der (kontinuierlichen) Frequenzen ω $(\omega \geq 0)$ aufgefasst und als **Fourierintegral** dargestellt werden; statt der Fourierkoeffizienten c_n (in der komplexen Form) hat man hier die **Fouriertransformierte** $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$:

19.2

Die **Fouriertransformierte** einer absolutintegrierbaren Funktion $f(t)$ ist

$$\boxed{F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt};$$

sie ist *für alle* absolutintegrierbaren Funktionen $f(t)$ wohldefiniert und **stetig**.

Die Abbildung $\mathcal{F}:\ f(t) \mapsto F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$
heißt **Fouriertransformation**; sie ist **linear**, d.h. es gilt:

$\mathcal{F}\{f(t) + g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) + \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$ und
$\mathcal{F}\{\lambda f(t)\}(\omega) = \lambda\, \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$.

An die Stelle der Dirichlet'schen Bedingung (D) tritt eine

19.3

modifizierte Dirichlet'sche Bedingung (D'), z.B.:

f ist T–periodisch und **absolut–integrierbar** und es gibt eine Zerlegung
$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ des Periodenintervalls $[0, T]$
so, dass $f(t)$ auf jedem der offenen Teilintervalle $]\, t_{j-1}, t_j\, [$:

(i) **monoton** und **beschränkt** ist oder

(ii) eine **beschränkte Ableitung** besitzt oder sogar

(iii) eine **stetige Ableitung** besitzt.

(An den Stellen t_j braucht weder $f(t_j)$ noch $f'(t_j)$ definiert zu sein.)

19.4

Erfüllt die Funktion $f(t)$ eine modifizierte Dirichlet'sche Bedingung (D'), so gilt

— **an jeder Stetigkeitsstelle** $t \in \mathbb{R}$**:**

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(t)}$$

Fourier–Integral-darstellung der Funktion $f(t)$

mit

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)}$$

Fourier-transformierte der Funktion $f(t)$.

— **an jeder Unstetigkeitsstelle** t_0**:**

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t_0}\, d\omega = \frac{1}{2}\Big(f(t_0+0) + f(t_0-0)\Big)}\;.$$

Die Abbildung $\mathcal{F}^{-1} : F(\omega) \mapsto \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(t)$ ist die **inverse Fourier-transformation**; sie ist ebenfalls linear.

19.5

Beachte die Symmetrie der Darstellungen von $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$ und $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(t)$:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt = F(\omega) \quad \textbf{Fouriertransformierte},$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega = f(t) \quad \textbf{Fourier–Integraldarstellung}$$

von $f(t)$ (an den Stetigkeitsstellen t). Die beiden Faktoren $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ vor den beiden Integralen sind weitgehend willkürlich wählbar: ihr Produkt muss nur $\frac{1}{2\pi}$ ergeben!

19.C Fouriertransformation gerader und ungerader Funktionen.

($f(t)$ sei stets eine Funktion, die eine modifizierte Dirichlet'sche Bedingung (D') erfüllt!)

Vermöge der Euler'schen Formel: $e^{i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ kann man die Fouriertransformierte $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$ zerlegen:

19.6

$$\boxed{\boxed{F(\omega) = F_C(\omega) \; - iF_S(\omega)}}$$

mit der **Fourier-Cosinus-Transformierten :**

$$\boxed{F_C(\omega) = \mathcal{F}_C\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt}$$

und der **Fourier-Sinus-Transformierten :**

$$\boxed{F_S(\omega) = \mathcal{F}_S\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt}$$

Hiermit haben wir:

19.7

Ist $f(t)$ **gerade**, d.h. $f(-t) = f(t)$, so ist $F_S(\omega) = 0$ und an jeder Stetigkeitsstelle t gilt:

$$\boxed{\boxed{f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} F_C(\omega) \cos \omega t \, d\omega \; = \mathcal{F}_C^{-1}\{F_C(\omega)\}(t)}}$$

Fourierintegral einer **geraden** Funktion

mit $$\boxed{\boxed{F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \; = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)}}$$

Fourier-Cosinus-Transformierte einer **geraden** Funktion

Ist $f(t)$ **ungerade**, d.h. $f(-t) = -f(t)$, so ist $F_S(\omega) = 0$ und an jeder Stetigkeitsstelle t gilt:

$$\boxed{\boxed{f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} F_C(\omega) \sin \omega t \, d\omega \; = \mathcal{F}_S^{-1}\{F_S(\omega)\}(t)}}$$

Fourierintegral einer **geraden** Funktion

mit $$\boxed{\boxed{F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \; = i\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)}}$$

Fourier-Sinus-Transformierte einer **ungeraden** Funktion

Wenn die Funktion $f(t)$ weder gerade noch ungerade ist, kann man sie in ihren geraden und ungeraden Anteil zerlegen:

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t) \quad \text{mit} \quad f_g(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t) + f(-t)\Big) \quad \textbf{(gerader Anteil)}$$

$$f_u(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t) - f(-t)\Big) \quad \textbf{(ungerader Anteil)};$$

19.8 damit ist: $\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{F}_C\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}_C\{f_g(t)\}(\omega)\,,\ \mathcal{F}_S\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}_S\{f_u(t)\}(\omega) \\ \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}_C\{f_g(t)\}(\omega)\ - i\mathcal{F}_S\{f_u(t)\}(\omega) \end{array}}$ und

an jeder Stetigkeitsstelle t gilt, falls $f_g(t)$ und $f_u(t)$ die Bedingung (D') erfüllen:

$$\boxed{f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathcal{F}_C\{f_g(t)\}(\omega)\cos\omega t\,d\omega\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathcal{F}_S\{f_u(t)\}(\omega)\sin\omega t\,d\omega}\ .$$

(siehe hierzu Beispiel 6)

19.D Typische Beispiele.

Beispiel 1. Sei $a > 0$ und

$f_a(t) = \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-at} & \text{für } t > 0 \end{array}\right\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_a(t)\}(\omega) \ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-at}\,e^{-i\omega t}\,dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-1}{a+i\omega}\ e^{-(a+i\omega)\,t}\Big|_{t=0}^{\infty} \overset{*)}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\omega}\ . \end{aligned}$$

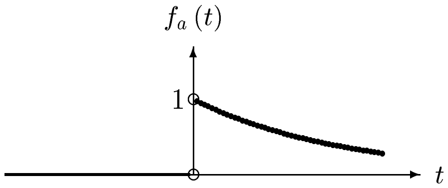


Abbildung 19.1: $f_a(t) = H(t)\,e^{-at}$

*) denn für $a > 0$ ist $\left|e^{-(a+i\omega)\,t}\right| = \left|e^{-at}\cdot e^{-i\omega\,t}\right| = e^{-at} \to 0\ \ (t \to \infty)$.

$f_a(t)$ hat somit die **Fouriertransformierte** $\mathcal{F}\{f_a(t)\}(\omega) = F_a(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1}{a+i\omega}$,

und da $f_a(t)$ die Bedingung (D') erfüllt, ergibt sich für $f_a(t)$ die **Integraldarstellung**:

$$\begin{aligned} f_a(t) \ &= \mathcal{F}^{-1}\{F_a(\omega)\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega)\,e^{i\omega\,t}\,d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\,t}}{a+i\omega}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(a-i\omega)(\cos\omega t + i\,\sin\omega t)}{a^2+\omega^2}\,d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\underset{\text{(gerade)}}{\frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}}\ + i\ \underset{\text{(ungerade)}}{\frac{a\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}}\Bigg)\ d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}\,d\omega \quad \text{(an jeder Stetigkeitsstelle } t\text{).} \end{aligned}$$

Hiermit folgt: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} 0 & \text{, für } t<0 \\ \pi/2 & \text{, für } t=0 \\ \pi\, e^{-at} & \text{, für } t>0\ . \end{cases}$

Beispiel 2. $\displaystyle\mathcal{F}\{e^{-t^2/2}\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2i\omega-\omega^2+\omega^2)}\,dt =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\omega^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\omega)^2}\,dt = \quad \left[\text{Substitution } z = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+i\omega)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\omega^2/2}\cdot\sqrt{2}\int_{-\infty+i\omega/\sqrt{2}}^{\infty+i\omega/\sqrt{2}} e^{-z^2}\,dz \overset{*)}{=} \begin{cases} \text{da das Integral } \displaystyle\int_C e^{-(x+iy)^2}\,(dx+i\,dy) \\ \text{im } \mathbb{R}^2 \ \textbf{wegunabhängig} \text{ ist! (s.u.)} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\omega^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\omega^2/2}\cdot\sqrt{\pi} = e^{-\omega^2/2}\ .$$

*) denn für die Funktionen $P(x,y) = e^{-(x+iy)^2}$ und $Q(x,y) = i\,e^{-(x+iy)^2}$ hat man: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$;
da beide Funktionen überall (beliebig oft) stetig differenzierbar sind, ist also jedes Wegintegral
$\displaystyle\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C e^{-(x+iy)^2}\,(dx+i\,dy)$ **wegunabhängig** im $\mathbb{R}^2$ (s. Lektion 26).

Beispiel 3: Mit der **Heaviside–Funktion:** $H(t) = \left\{\begin{matrix} 0 & \text{für } t<0 \\ 1 & \text{für } t>0 \end{matrix}\right\}$ und für $a>0$ sei

$f_a(t) = H(a - |\,t\,|)$, also $f_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t|<a \\ 0 & \text{für } |t|>a \end{cases}$:

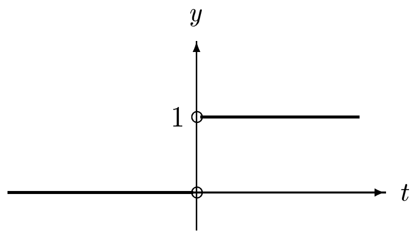


Abbildung 19.2 $y = H(t)$

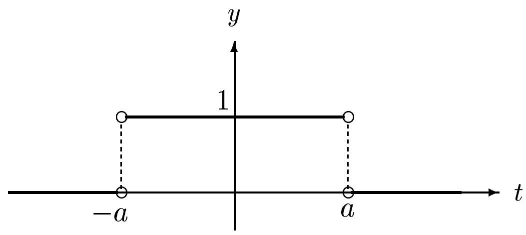


Abbildung 19.3 $y = H(a - |t\,|)$

Da die Funktion $f_a(t)$ *gerade* ist, kann man ihre Fouriertransformierte auf zwei Weisen berechnen:

$$\mathcal{F}\{f_a(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{-1}{i\omega}\,e^{-i\omega t}\Big|_{t=-a}^{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{-1}{i\omega}\left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega a}{\omega}\ , \text{ oder:}$$

$$\mathcal{F}\{f_a(t)\}(\omega) = \mathcal{F}_C\{f_a(t)\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_a(t)\cos\omega t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos\omega t\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\omega}\Big[\sin\omega t\Big]_{t=0}^{a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega a}{\omega}\ .$$

$H(a-|\,t\,|)$ hat also die **Fouriertransformierte** $\mathcal{F}\{H(a-|\,t\,|)\}(\omega) = F_a(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{\sin \omega a}{\omega}$

und damit (an jeder Stetigkeitsstelle t) die **Fourier–Integraldarstellung** :

$$H(a-|\,t\,|) = \mathcal{F}_C^{-1}\{F_a(\omega)\}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_a(\omega) \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin \omega a \cdot \cos \omega t}{\omega} \, d\omega \, .$$

Hieraus ergibt sich z.B. für $a > 0$ (vgl. mit einer Integraltafel):

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega a \cdot \cos \omega t}{\omega} \, d\omega = \begin{cases} 0 & \text{für } |\,t\,| > a \\ \pi/4 & \text{für } |\,t\,| = a \\ \pi/2 & \text{für } |\,t\,| < a \, . \end{cases}$$

19.E Approximation durch Überlagerung harmon. Schwingungen.

Will man eine *periodische* Funktion $f(t)$ der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ im quadratischen Mittel optimal durch eine Überlagerung "geeigneter" harmonischer Schwingungen bis zur Kreisfrequenz $N\omega$ approximieren, so wird man auf das N–te Fourierpolynom geführt (Abschn. 18.A):

$$f(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\,\omega t} \quad \text{mit den } \textbf{Fourierkoeffizienten}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\,\omega t} \, dt \, .$$

19.9 Völlig entsprechend lassen sich auch *nicht–periodische* Funktionen $f(t)$, die z.B. die modifizierte Dirichlet'sche Bedingung (D') erfüllen, beliebig gut durch eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen der Kreisfrequenzen $\leq \omega_0$ approximieren (umso besser, je größer ω_0 ist):

$$f(t) \approx \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega)\, e^{i\,\omega t} \, d\omega \quad \text{mit der } \textbf{Fouriertransformierten}$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega t} \, dt \, .$$

z.B.: Für die Funktion **aus dem letzten Beispiel 3** ergibt sich:

$H(a-|\,t\,|) \approx \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\omega_0} \dfrac{\sin \omega a \, \cos \omega t}{\omega} \, d\omega$; mit $a = 1$ und $\omega_0 = 10$ bekommt man: (vgl. Abb. 18.1)

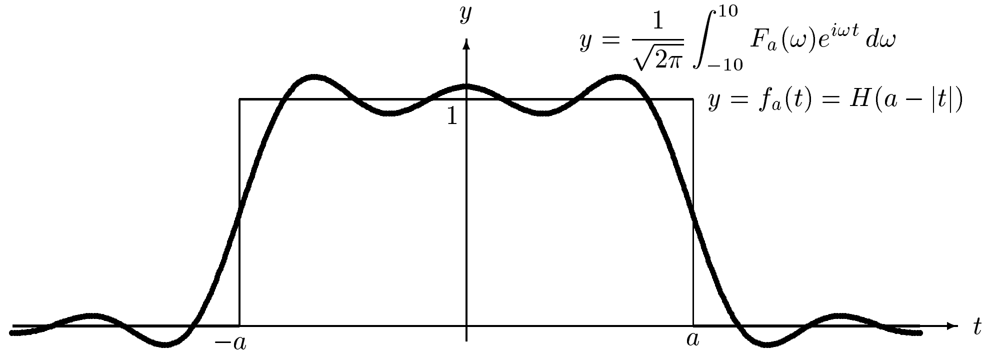


Abbildung 19.4 Approximation von $f_a(t)$ durch Überlagerung harmon. Schwingungen

Beispiel 4: Sei $a > 0$ und $f(t) = e^{-a|t|}$. Da die Funktion $f(t)$ **gerade** ist, ist ihre **Fouriertransformierte** gleich ihrer **Fourier–Cosinus–Transformierten** :

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \mathcal{F}_C\{e^{-a|t|}\}(\omega) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-at} \cos\omega t \, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2} (-a\cos\omega t + \omega \sin\omega t) \right]_{t=0}^\infty =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[0 - \frac{-a+0}{a^2+\omega^2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+\omega^2} .$$

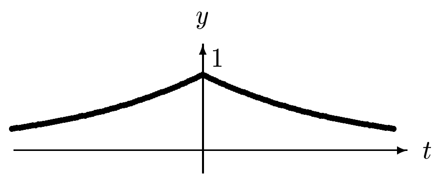


Abbildung 19.5 $f(t) = e^{-a|t|}$

Die Funktion $f(t) = e^{-a|t|}$ hat damit die **Fouriertransformierte** :

$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+\omega^2}$, und da $e^{-a|t|}$ überall stetig ist, gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{-a|t|} = \mathcal{F}^{-1}\{F_C(\omega)\}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_C(\omega) \cos\omega t \, d\omega =$$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2} \, d\omega \quad \textbf{(Fourier–Integraldarstellung von } e^{-a|t|} \textbf{)} ;$$

hiermit hat man: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|}$.

Beispiel 5: Sei $a > 0$ und $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -e^{at} & \text{für } t < 0 , \\ e^{-at} & \text{für } t > 0 . \end{array} \right\}$.

Da die Funktion $f(t)$ **ungerade** ist, ist $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = -i \cdot \mathcal{F}_S\{f(t)\}(\omega)$ mit

$$\mathcal{F}_S\{f(t)\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin\omega t \, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-at} \sin\omega t \, dt =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2} (a\sin\omega t + \omega\cos\omega t) \Big|_{t=0}^\infty =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{a^2+\omega^2} .$$

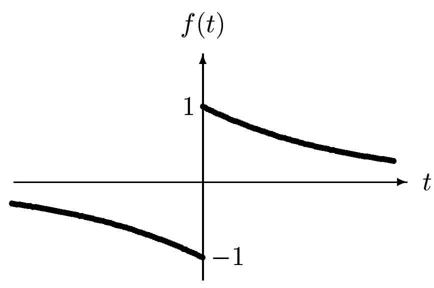


Abbildung 19.6 $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -e^{at} & \text{für } t < 0 , \\ e^{-at} & \text{für } t > 0 \end{array} \right.$

Mit der Fourier–Sinus–Transformierten $F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$ bekommt man die

Fouriertransformierte $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = -i \cdot F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-i\omega}{a^2+\omega^2}$;

an jeder Stelle $t \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F_S(\omega)\}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_S(\omega) \sin \omega t \, d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega t}{a^2+\omega^2} d\omega \quad \textbf{(Fourierintegraldarstellung von } f(t)\,\textbf{)}\,; \end{aligned}$$

damit hat man: $$\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega t}{a^2+\omega^2} d\omega = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} e^{at} & \text{, für } t<0\,, \\ 0 & \text{, für } t=0\,, \\ \frac{\pi}{2} e^{-at} & \text{, für } t>0\,. \end{cases}$$

Beispiel 6: Wir betrachten für $a > 0$ nocheinmal die Funktion aus Beispiel 1 von oben:

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{, für } t<0\,, \\ e^{-at} & \text{, für } t>0\,. \end{array} \right\}$$

Dann ist $$f_g(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t)+f(-t)\Big) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} e^{at} & \text{, für } t<0 \\ \frac{1}{2} e^{-at} & \text{, für } t>0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} e^{-a|t|}$$

und $$f_u(t) = \frac{1}{2}\Big(f(t)-f(-t)\Big) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2} e^{at} & \text{, für } t<0 \\ \frac{1}{2} e^{-at} & \text{, für } t>0 \end{array} \right\}.$$

Mit den Ergebnissen aus den Beispielen 4 und 5 folgt:

$\mathcal{F}_C\{f_g(t)\}(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+\omega^2}$ und $\mathcal{F}_S\{f_u(t)\}(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$, somit:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}_C\{(f_g(t)\}(\omega) - i\,\mathcal{F}_S\{f_u(t)\}(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+i\omega}\ ;$$

außerdem ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_C^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+\omega^2}\right\}(t) + \mathcal{F}_S^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right\}(t) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathcal{F}_C\{f_g(t)\}(\omega) \cos \omega t \, d\omega + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathcal{F}_S\{f_u(t)\}(\omega) \sin \omega t \, d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos\omega t + \omega \sin \omega t}{a^2+\omega^2} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+i\omega}\right\}(t)\ . \end{aligned}$$

Zusammenfassung der Fouriertransformierten und Fourier-Integraldarstellungen aus den bisherigen Beispielen:

19.10

Beispiele 1 und 6 :

$$H(t)\,e^{-at} = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{für } t<0 \\ e^{-at} & \text{für } t>0 \end{array} \right\} \quad (a>0)$$

$$\mathcal{F}\{H(t)\,e^{-at}\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+i\omega}$$

$$H(t)\,e^{-at} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{1}{a+i\omega} \right\}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}\,d\omega$$

(wobei $H(t)\,e^{-at} := 1/2$ für $t = 0$)

19.11

Beispiel 2 :

$$\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/2}\right\}(\omega) = \mathcal{F}_C\left\{e^{-t^2/2}\right\}(\omega) = e^{-\omega^2/2}$$

$$e^{-t^2/2} = \mathcal{F}_C^{-1}\left\{e^{-\omega^2/2}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\omega^2/2}\cos\omega t\,d\omega$$

19.12

Beispiel 3 :

$$H(a-|t|) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{für } |t|>a \\ 1 & \text{für } |t|<a \end{array} \right\} \quad (a>0)$$

$$\mathcal{F}\{H(a-|t|)\}(\omega) = \mathcal{F}_C\{H(a-|t|)\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\omega a}{\omega}$$

$$H(a-|t|) = \mathcal{F}_C^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\omega a}{\omega}\right\}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega a \cdot \cos\omega t}{\omega}\,d\omega$$

(wobei $H(a-|t|) := 1/2$ für $|t| = a$)

Beispiel 4 :

19.13

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \mathcal{F}_C\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2} \quad (a>0)$$

$$e^{-a|t|} = \mathcal{F}_C^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}\right\}(t) = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}\,d\omega$$

Beispiel 5 :

19.14

$$\Big(2H(t)-1\Big)\,e^{-a|t|} = \left\{\begin{array}{ll} -e^{at} & \text{für } t<0 \\ e^{-at} & \text{für } t>0 \end{array}\right\} \quad (a>0)$$

$$\mathcal{F}_S\left\{\Big(2H(t)-1\Big)\,e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\Big(2H(t)-1\Big)\,e^{-a|t|}\right\}(\omega) = -i\,\mathcal{F}_S\left\{\Big(2H(t)-1\Big)\,e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{-i\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\Big(2H(t)-1\Big)\,e^{-a|t|} = \mathcal{F}_S^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right\}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{-i\omega}{a^2+\omega^2}\right\}(\omega) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}\,d\omega$$

(wobei $\Big(2H(t)-1\Big)\,e^{-a|t|} := 0$ für $t=0$)

19.F Delta– und Heaviside–Funktion.

Es folgen einige Aussagen und Regeln, die teilweise aus klassischer Sicht kaum einzusehen sind. Die scheinbar sorglose und anschauliche Art, mit der erfahrene Praktiker damit umgehen, darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass z.B. die Delta–Funktion *keine* Funktion im klassischen Sinne ist, dass es aus klassischer Sicht z.B. *nicht möglich* ist, eine unstetige Funktion an ihren Sprungstellen abzuleiten oder einer nicht absolut–integrierbaren Funktion eine Fouriertransformierte zuzuordnen!

Daher sind alle Regeln, die direkt oder indirekt mit Funktionen dieser Art, z.B. mit der Delta–Funktion oder der Heaviside–Funktion zu tun haben, **stets mit Bedacht** zu verwenden: sie sind oft nur im Distributionen–Sinne zu verstehen! Leider ist es im knappen Rahmen dieses Kurses nicht möglich, auf Distributionen (= verallgemeinerte Funktionen) einzugehen.

Für die Funktionen $\varphi_a(t) = \dfrac{1}{2a}\, H(a - |t\,|)$, $a > 0$, gilt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(t)\,dt = 1$ und ihre Fouriertransformierten sind $\mathcal{F}\{\varphi_a(t)\}(\omega) = \dfrac{1}{2a} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{\sin\omega a}{\omega} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{\sin\omega a}{\omega a}$ (s.o. Beisp. 3).

Man kann diese Funktionen verwenden, um — nach sehr robuster Praktiker–Art — die **Dirac'sche Delta-Funktion** $\delta(t)$ und ihre **Fouriertransformierte** plausibel zu machen:

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0+} \varphi_a(t) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = \lim_{a \to 0+} \mathcal{F}\{\varphi_a(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Trotz der üblichen Bezeichnung "Delta–Funktion" ist $\delta(t)$ *keine* Funktion im klassischen Sinne mehr, sondern ist eine **verallgemeinerte Funktion** oder **Distribution**

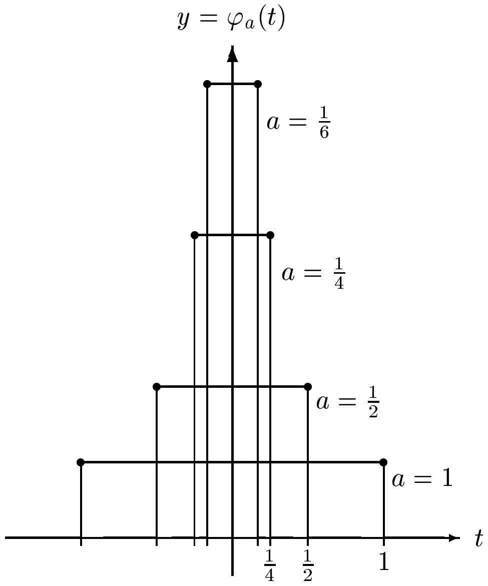


Abbildung 19.7: $\varphi_a(t) = \dfrac{1}{2a}\, H(a - |\,t\,|)$

Anstelle der Funktionen $\varphi_a(t)$ kann man jede andere Funktionenschar oder –folge zur "anschaulichen" Definition der Delta–Funktion $\delta(t)$ heranziehen, sofern diese Funktionen entsprechende Eigenschaften haben, wie **z.B.** die Folge

$$\psi_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2 t^2}\ ,\ n \in \mathbb{N}:$$

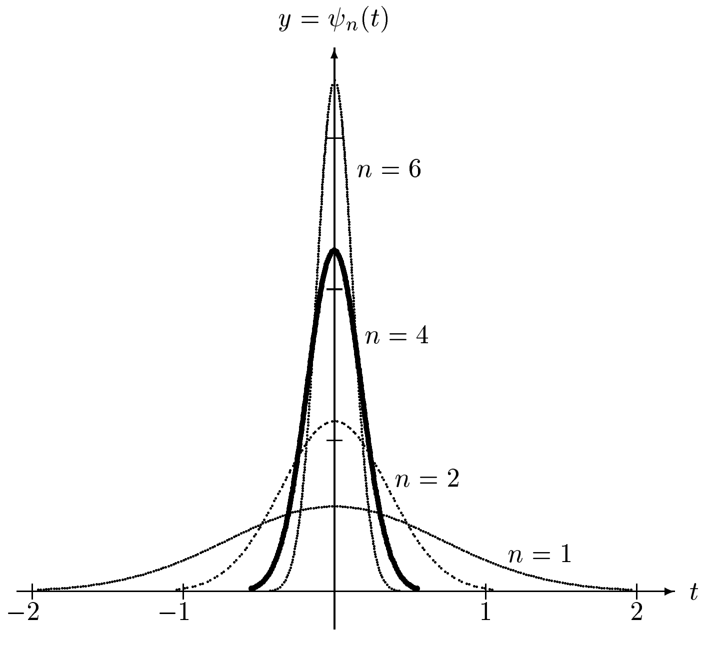


Abbildung 19.8: $\psi_n(t) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2 t^2}$

[$\mathcal{F}$ **1**]

Ist $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Funktionen

mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t) = \left\{ \begin{array}{cc} +\infty & \text{für } t=0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{array} \right\}$

und $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t)\, dt = 1 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

so ist $\delta(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t)$.

"anschauliche" Definition der **Delta–Funktion**

Allgemeiner gilt:

[$\mathcal{F}$ **1a**] $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$ ist $\delta(t-t_0) = \left\{ \begin{array}{cc} +\infty & \text{für } t=t_0 \\ 0 & \text{für } t \neq t_0 \end{array} \right\}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1$

[$\mathcal{F}$ **2**] $f(t)\cdot\delta(t-t_0) = f(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$ **z.B.:** $e^{at}\,\delta(t) = \delta(t)$;

[$\mathcal{F}$ **2a**] ist insbesondere $f(0)=0$, so ist $f(t)\delta(t)=0$ und somit $f(t)\,g(t) = f(t)\,\big(g(t)+c\delta(t)\big)$ für beliebig konstantes c. !

z.B.: $t\cdot\delta(t) = 0$, $\sin\omega t\cdot\delta(t) = 0$, $i\omega F(\omega) = i\omega\,\big(F(\omega)+c\delta(\omega)\big)$.

[$\mathcal{F}$ **3**]

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\, dt = f(t_0)}$$

! **charakteristische Eigenschaft der Delta–Funktion**

z.B.: $\int_{-\infty}^{\infty} \cos t\, \delta(t-\pi/4)\, dt = \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$,

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-i\omega\cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.$$

Betrachtet man die Heaviside–Funktion $H(t)$ als Funktion, die an der Stelle $t=0$ den Anstieg $+\infty$ hat, so kann man die Deltafunktion $\delta(t)$ als **Ableitung** von $H(t)$ ansehen:

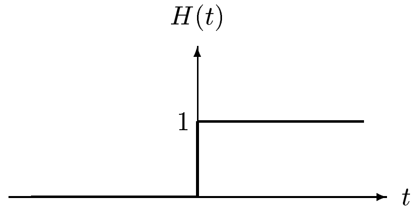


Abbildung 19.9: $H'(t) = \delta(t)$

[$\mathcal{F}$ **4**] $\boxed{\boxed{H'(t) = \delta(t)}}$ Ableitung der **Heaviside–Funktion** im Distributionen–Sinne.

Die **klassische Ableitung** der Heaviside–Funktion ist $H'(t) = 0$ für $t \neq 0$; an der Stelle $t = 0$ ist sie nicht definiert!

19.15 Das **Faltungsprodukt** von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ ist:

$$\boxed{f(t) * g(t) = \big(f * g\big)\,(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau}$$

Damit ergibt sich:

$$f(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta(\tau-t_0)\,d\tau \overset{[\mathcal{F}\,3]}{=} f(t-t_0) \quad \text{und}$$

$$f(t) * H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)H(\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} f(t-\tau)\,d\tau = \quad \left[\text{Substitution } \tilde{\tau} = t-\tau\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(\tilde{\tau})\,d\tilde{\tau}\,, \text{ also:}$$

[$\mathcal{F}$ **5**]

$$\boxed{f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)}$$
$$\boxed{f(t) * H(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau}$$

$\delta(t)$ ist das **neutrale Element** des Faltungsproduktes und $f(t) * H(t)$ ist eine **Stammfunktion** zu $f(t)$!

Die wichtigste Eigenschaft des Faltungsproduktes kommt jedoch erst im **Faltungssatz** zum Ausdruck (s.u. [$\mathcal{F}$ 16] und [$\mathcal{F}$ 17]).

[$\mathcal{F}$ **6**] $\boxed{\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{(konstant)}}}$ **Fouriertransformierte** der **Delta–Funktion** (s. [$\mathcal{F}$ 3]).

[$\mathcal{F}$ **6a**] $\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\omega\,t_0}}$

[$\mathcal{F}$ **7**] $\boxed{\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\omega t\,d\omega}$ **Fourier–Integral–Darstellung der Delta–Funktion.**

z.B.: $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\,e^{i(x-x_0)\,y}\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(x-x_0)}\,dy\right)dx \overset{[\mathcal{F}\,7]}{=}$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx \overset{[\mathcal{F}\,3]}{=} 2\pi\cdot f(x_0)\,.$$

Anderes Beispiel: $\displaystyle\mathcal{F}\{1\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot e^{-i\omega t}\,dt \overset{[\mathcal{F}\,7]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi\,\delta(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\delta(\omega)$:

[$\mathcal{F}$ **8**] $\boxed{\mathcal{F}\{1\}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\delta(\omega)}$ **Fouriertransformierte** der **konstanten Funktion** $f(t) = 1$.

[$\mathcal{F}$ **9**] $\boxed{\boxed{\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(\omega)}}$ **Fouriertransformierte** der **Heaviside–Funktion** .

(siehe unten die Beispiele 7 und 9 !)

[$\mathcal{F}$ **10**] $\boxed{H(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega + \frac{1}{2}}$ **Fourier–Integraldarstellung** der **Heaviside–Funktion .**

19.G Allgemeine Regeln für die Fouriertransformation.

[$\mathcal{F}$ **11**] $\mathcal{F}\{f(-t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(-\omega)$ **!**

[$\mathcal{F}$ **12**] $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\}(\omega) = e^{-i\omega\, t_0}\,\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) \quad (t_0 \in \mathbb{R})$ **!**

[$\mathcal{F}$ **13**] $\mathcal{F}\{f(\lambda t)\}(\omega) = \frac{1}{|\lambda|}\,\mathcal{F}\{f(t)\}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) \quad (\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \neq 0)$ **!**

[$\mathcal{F}$ **14**] $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega-\omega_0) = \mathcal{F}\left\{e^{i\omega_0 t}\,f(t)\right\}(\omega) \quad (\omega_0 \in \mathbb{R})$ **!**

[$\mathcal{F}$ **15**] $\mathcal{F}\{t\cdot f(t)\}(\omega) = i\cdot\frac{d}{d\omega}\,\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$ **!**

Beispiel 7: (siehe die Beispiele 3 und 9) Sei $a > 0$.

Ea ist $H(a-|t\,|) = H(t+a) - H(t-a)$; daher folgt mit Beispiel 3 :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega a}{\omega} &= \mathcal{F}\left\{H(a-|t\,|)\right\}(\omega) = \mathcal{F}\{H(t+a)\}(\omega) - \mathcal{F}\{H(t-a)\}(\omega) \overset{[\mathcal{F}12]}{=} \\ &= e^{i\omega a}\,\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) - e^{-i\omega a}\,\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) = \\ &= \left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right)\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) = 2i\,\sin\omega a\cdot\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) \overset{[\mathcal{F}2]}{=} \\ &= 2i\,\sin\omega a\left(\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) + c\cdot\delta(\omega)\right) \quad \text{mit (zunächst) beliebigem } c\,.\end{aligned}$$

Da dies für alle ω gilt, hat man: $\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{i\omega} - c\cdot\delta(\omega)$,

also auch, da $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$: $\mathcal{F}\{H(t)\}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{-1}{i\omega} - c\cdot\delta(\omega)$;

wegen: $H(t)+H(-t)=1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega) &\overset{[\mathcal{F}8]}{=} \mathcal{F}\{1\}(\omega)=\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega)\;+\mathcal{F}\{H(-t)\}(\omega)\overset{[\mathcal{F}11]}{=}\\ &=\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega)\;+\mathcal{F}\{H(t)\}(-\omega)=\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{i\omega}-c\cdot\delta(\omega)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{i\omega}-c\cdot\delta(\omega)=-2c\,\delta(\omega)\;,\end{aligned}$$

also $c=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ und damit schließlich: $\boxed{\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{i\omega}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(\omega)}$.

(Siehe hierzu auch Beispiel 9 !)

$$\begin{array}{ll}[\mathcal{F}\,\mathbf{16}] & \mathcal{F}\{f(t)\,*\,g(t)\}(\omega)=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)\\ [\mathcal{F}\,\mathbf{17}] & \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)\,*\,\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{f(t)\cdot g(t)\}(\omega)\end{array}$$

Faltungssatz

z.B.: Nach Beispiel 2 ist $e^{-x^2/2}=\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/2}\right\}(x)$ und nach [$\mathcal{F}$ 6] ist $1=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{\delta(t)\}(x)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-x_0)^2/2}\,dx &= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/2}\right\}(x_0-x)\cdot\mathcal{F}\{\delta(t)\}(x)\,dx \overset{\substack{\text{Def. der}\\ \text{Faltung}}}{=}\\ &=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/2}\right\}(x_0)\,*\,\mathcal{F}\{\delta(t)\}(x_0)\overset{[\mathcal{F}17]}{=}\\ &=2\pi\,\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/2}\,\delta(t)\right\}(x_0)\overset{[\mathcal{F}2]}{=}2\pi\,\mathcal{F}\{\delta(t)\}(x_0)\overset{[\mathcal{F}6]}{=}\sqrt{2\pi}\,.\end{aligned}$$

Anderes Beispiel: Für $0<a<b$ soll die Lösung $x(t)$ der **Integralgleichung:**

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\omega)\,d\omega}{(t-\omega)^2+a^2}=\frac{1}{t^2+b^2}}$ bestimmt werden.

Zunächst hat man für *gerade* Funktionen $f(\tau)$ die Beziehungen:

$\mathcal{F}\{f(\tau)\}(\xi)=\mathcal{F}_C\{f(\tau)\}(\xi)=\mathcal{F}_C^{-1}\{f(\tau)\}(\xi)=\mathcal{F}^{-1}\{f(\tau)\}(\xi)$.

Daher gilt für $\gamma>0$: $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+\gamma^2}\right\}(\omega)=\mathcal{F}_C^{-1}\left\{\frac{1}{t^2+\gamma^2}\right\}\overset{\text{Bsp.4}}{=}\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\gamma\,|\omega|}$.

Schreibt man die Integralgleichung in der Form: $\boxed{\frac{1}{t^2+a^2}\,*\,x(t)=\frac{1}{t^2+b^2}}$ und nimmt von beiden Seiten die Fouriertransformierte, so ergibt sich mit dem **Faltungssatz** :

$\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+a^2}\right\}(\omega)\cdot\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+b^2}\right\}(\omega)$; hieraus folgt:

$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-b\,|\omega|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{a\,|\omega|}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(b-a)|\omega|}$ und schließlich:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-(b-a)|\omega|}\right\}(t)=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}\left\{e^{-(b-a)|\omega|}\right\}(t) \overset{\text{Bsp.4}}{=} \\ &= \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{b-a}{(b-a)^2+t^2}\ , \text{ d.h. } \boxed{x(t)=\frac{a(b-a)}{2b\left((b-a)^2+t^2\right)}}\ . \end{aligned}$$

19.H Der Differentiationssatz.

[$\mathcal{F}$ 18]

Ist $f(t)$ **differenzierbar** bis auf höchstens endlich viele endliche Sprungstellen der Höhe $\Delta(t_j):=f(t_j+0)-f(t_j-0)$ bei $t_1<t_2<\cdots<t_m$, so hat die **(klassische) Ableitung** $f'(t)$ die Fouriertransformierte

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)=i\omega\cdot\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)\ -\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{m}\Delta(t_j)\,e^{-i\omega\,t_j}}\ ;$$

ist insbesondere $f(t)$ **stetig**, so ist $\Delta(t_j)=0\ \forall\,j$ und

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)=i\omega\cdot\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)}\ .$$

Ist $f'(t)$ die Ableitung von $f(t)$ im **Distributionen–Sinne**, so gilt:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)=i\omega\cdot\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)}\ .$$

Beispiel 8: Sei $a>0$ und

$f(t)=e^{-a|t|}=\left\{\begin{array}{ll} e^{at} & \text{für } t<0 \\ e^{-at} & \text{für } t>0\end{array}\right\}\ ,\quad g(t)=\left\{\begin{array}{ll} -e^{at} & \text{für } t<0 \\ e^{-at} & \text{für } t>0\end{array}\right\}$. Dann ist:

$f'(t)=\left\{\begin{array}{ll} a\,e^{at} & \text{für } t<0 \\ -a\,e^{-at} & \text{für } t>0\end{array}\right\}=-a\cdot g(t)\ ,\quad g'(t)=\left\{\begin{array}{ll} -a\,e^{at} & \text{für } t<0 \\ -a\,e^{-at} & \text{für } t>0\end{array}\right\}=-a\cdot f(t)\ .$

Da $f(t)$ stetig ist, hat man:

$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)\overset{\text{Bsp.5}}{=}a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{i\omega}{a^2+\omega^2}=i\omega\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}\overset{\text{Bsp.4}}{=}i\omega\cdot\mathcal{F}\{f(t)\}$, also:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)=i\omega\cdot\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)}\ .$$

$g(t)$ hat bei $t_0 = 0$ eine endliche Sprungstelle der Höhe $\Delta(0) = g(0+0) - g(0-0) = 2$;
daher gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega) &\overset{\text{Bsp.4}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-a^2}{a^2+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-a^2-\omega^2+\omega^2}{a^2+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega^2}{a^2+\omega^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \\
&= i\omega \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-i\omega}{a^2+\omega^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\, e^{i\omega\cdot 0} \overset{\text{Bsp.5}}{=} \\
&= i\omega \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Delta(0)\, e^{-i\omega\cdot 0}\ , \text{ also:}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega) = i\omega \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Delta(0)\, e^{-i\omega\cdot 0}}\ .$$

Nimmt man von $g(t) = \Big(2H(t)-1\Big)\, e^{-a|t|}$ die **Ableitung im Distributionen–Sinne** :

$$\begin{aligned}
g'(t) &\overset{[\mathcal{F}4]}{=} 2\,\delta(t)\, e^{-a|t|} + \Big(2H(t)-1\Big)\, f'(t) \overset{\text{s.o.}}{=} 2\,\delta(t)\, e^{-a|t|} - a\Big(2H(t)-1\Big)\, g(t) \overset{[\mathcal{F}2]}{=} \\
&= 2\delta(t) - a\Big(2H(t)-1\Big)^2 e^{-a|t|} = 2\delta(t) - a\Big(4H^2(t) - 4H(t) + 1\Big)\, f(t) = \\
&= 2\delta(t) - a\, f(t)\ , \text{ so ergibt sich:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega) &= 2\,\mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) - a\,\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) \overset{[\mathcal{F}6],\,\text{Bsp.4}}{=} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a^2}{a^2+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \frac{a^2}{a^2+\omega^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega^2}{a^2+\omega^2} = \\
&= i\omega \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-i\omega}{a^2+\omega^2} \overset{\text{Bsp.5}}{=} i\omega \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)\ , \text{ also:}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega) = i\omega \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)}\ .$$

Beispiel 9: Mit der **Distributionen–Ableitung:** $\boxed{H'(t) = \delta(t)}$
der **Heaviside–Funktion** $H(t)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} &\overset{[\mathcal{F}6]}{=} \mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{H'(t)\}(\omega) \overset{[\mathcal{F}18]}{=} i\omega \cdot \mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) \overset{[\mathcal{F}2]}{=} \\
&= i\omega\,(\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) + c\,\delta(t)) \quad \text{mit einer Konstanten } c\,.
\end{aligned}$$

Es folgt: $\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} - c\,\delta(t)$, und wie in Beispiel 7 erhält man: $c = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

also: $\boxed{\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(\omega)}$ **Fouriertransformierte von $H(t)$**

$\Big($Man kann zeigen, dass $H(t)$ im Distributionen–Sinne eine Fouriertransformierte *besitzt*: daher ist in diesem Fall der Differentiationssatz problemlos anwendbar!$\Big)$ ☺

Durch Fouriertransformation geht das Differenzieren im Wesentlichen über in das Multiplizieren mit der unabhängigen Variablen. Daher lassen sich lineare Differential-Gleichungen und -Gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten gelegentlich recht bequem mit Hilfe der Fouriertransformation lösen:

19.16 Jede lineare **Differentialgleichung** (mit konstanten Koeffizienten) für eine Funktion $x(t)$ geht durch Fouriertransformation über in eine lineare **Gleichung** für die Fouriertransformierte $F(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$.
Löst man diese Gleichung nach $F(\omega)$ auf, so ergibt sich $x(t)$ durch Rücktransformation.

19.17 Jedes lineare **Differentialgleichungssystem** (mit konstanten Koeffizienten) für n Funktionen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ geht durch Fouriertransformation über in ein lineares **Gleichungssystem** für die Fouriertransformierten
$F_1(\omega) = \mathcal{F}\{x_1(t)\}(\omega), \ldots, F_n(\omega) = \mathcal{F}\{x_n(t)\}(\omega)$.
Löst man dieses Gleichungssystem nach $F_1(\omega), \ldots, F_n(\omega)$ auf, so ergeben sich $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ durch Rücktransformation.

In der Praxis ist diese Methode allerdings nur dann sinnvoll anwendbar, wenn eine genügend reichhaltige Tabelle von Fouriertransformierten zur Verfügung steht — die auch für die Rücktransformationen verwendet werden kann!

Beispiel 10: Sei $a > 0$ und es sei eine (nach Möglichkeit *stetige*) Partikulärlösung der Dgl.: $\boxed{\dot{x} + ax = H(t)}$ gesucht.

(1) Um einen Überblick über die Gesamtheit aller klassischen Lösungen zu bekommen, wird die Dgl. zunächst "zu Fuß" gelöst: wegen der bei $t = 0$ nicht definierten Heaviside–Funktion $H(t)$ sind die Fälle $t < 0$ und $t > 0$ getrennt und unabhängig voneinander zu behandeln:

$t < 0: \quad \dot{x} + ax = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = c_1 e^{-at}$ (c_1 beliebig konstant),

$t > 0: \quad \dot{x} + ax = 1 \;\Rightarrow\; x(t) = c_2 e^{-at} + \dfrac{1}{a}$ (c_2 beliebig konstant);

mit jeweils beliebig konstanten c_1, c_2 ergibt sich:

$x(t) = c_1 e^{-at} + (c_2 - c_1)e^{-at} H(t) + \dfrac{1}{a} H(t)$ bzw. (mit $c_2 = c_2 - c_1$)

$$\boxed{x(t) = \Big(c_1 + c_2 H(t)\Big)\, e^{-at} + \frac{1}{a}\, H(t)}$$ **allgemeine Lösung.**

Damit ist $\Delta(0) = x(0+0) - x(0-0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{a} - c_1 = c_2 + \frac{1}{a}$, d.h. die *stetigen* Lösungen ergeben sich mit $c_2 = -\frac{1}{a}$:

$$\boxed{x_c(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) H(t) + ce^{-at} \quad (c \text{ beliebig konstant})} \quad \textbf{stetige Lösungen.}$$

Hier ist $x_0(t) = ce^{-at}$ die allgemeine stetige Lösung der homogenen Dgl. und

$$\boxed{x_s(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) H(t)}$$ ist eine **stetige Partikulärlösung** .

(2) Lösung durch Fouriertransformation im Distributionen–Sinne:

Mit $F(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$ ist $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\}(\omega) \overset{[\mathcal{F}18]}{=} i\omega\, F(\omega)$ und aus der Dgl. ergibt sich:

$i\omega\, F(\omega) + aF(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(\omega)$, also:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{1}{a+i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{a+i\omega}\,\delta(\omega) \overset{[\mathcal{F}2]}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{1}{a+i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{a}\,\delta(\omega) \ ; \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung liefert:

$\frac{1}{i\omega} \cdot \frac{1}{a+i\omega} \overset{!}{=} \frac{A}{i\omega} + \frac{B}{a+i\omega} \Leftrightarrow 1 \overset{!}{=} A(a+i\omega) + B\,i\omega = Aa + (A+B)i\omega$,

also: $A = \frac{1}{a}$, $B = -A = -\frac{1}{a}$. Damit ist:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{i\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{a}\,\delta(\omega) = \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(\omega)\right) - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+i\omega} \overset{[\mathcal{F}9],\text{ Bsp.1}}{=} \\ &= \frac{1}{a}\,\mathcal{F}\{H(t)\}(\omega) - \frac{1}{a}\,\mathcal{F}\left\{e^{-at}H(t)\right\}(\omega) \quad \text{, also:} \\ x(t) &= \frac{1}{a}\,H(t) - \frac{1}{a}\,e^{-at}H(t) \ . \end{aligned}$$

Man erhält also wie oben die **stetige Partikulärlösung:**

$$\boxed{x_s(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) H(t)} \ .$$

Beispiel 11: Die Dgl.: $\boxed{x - \ddot{x} = \delta(t)}$ ist wegen der Delta–Funktion nur im Distributionen–Sinne zu lösen:

Sei $F(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Dann ist $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\}(\omega) = i\omega\, F(\omega)$ und
$\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\}(\omega) = i\omega\, \mathcal{F}\{\dot{x}(t)\}(\omega) = -\omega^2 F(\omega)$. Aus der Dgl. ergibt sich:
$F(\omega) + \omega^2 F(\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} \overset{[\mathcal{F}6]}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, somit: $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{1}{1+\omega^2} \overset{\text{Bsp.4}}{=} \dfrac{1}{2}\,\mathcal{F}\left\{e^{-|t|}\right\}(\omega)$.

Man erhält die **stetige Partikulärlösung**: $\boxed{x_s(t) = \dfrac{1}{2}\, e^{-|t|}}$.

Beispiel 12: Es soll die eindimensionale **Diffusionsgleichung**

$\boxed{\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \lambda \cdot \dfrac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}}$ $\lambda > 0$ konstant, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$

bei vorgegebener **Anfangskonzentration** $\boxed{c(x,0) = f(x)}$ gelöst werden.
(Die Konzentration $c(x,t)$ bleibt für $t > 0$ beschränkt und $c(x,t)$ ist stetig differenzierbar!).

Zunächst sei $c_t\,(x) := c(x,t)$ $\Big($d.h. $c(x,t)$ soll nur als Funktion von x aufgefasst werden$\Big)$
und sei $F(\omega,t) = \mathcal{F}\{c_t\,(x)\}(\omega)$ die Fouriertransformierte von $c(x,t)$ bzgl. x.
Damit hat man: $\mathcal{F}\{c_t''\,(x)\}(\omega) = i\omega\, \mathcal{F}\{c_t'\,(x)\}(\omega) = -\omega^2 F(\omega,t)$ und

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}\right\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial c(x,t)}{\partial t}\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c_t\,(x) e^{-i\omega x}\, dx\right) = \frac{\partial F(\omega,t)}{\partial t}.$$

Aus der Differentialgleichung ergibt sich:
$\dfrac{\partial}{\partial t} F(\omega,t) = -\lambda\omega^2\, F(\omega,t)$, d.h.: $F(\omega,t) = C_\omega\, e^{-\lambda\omega^2 t}$ mit einer Konstanten C_ω bzgl. t.

Wegen: $C_\omega = F(\omega,0) = \mathcal{F}\{c(x,0)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ folgt:

$$\boxed{\mathcal{F}\{c_t\,(x)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) \cdot e^{-\lambda\omega^2 t}}\ .$$

Mit $w = \sqrt{2\lambda t} \cdot \omega$ ist: $e^{-\lambda\omega^2 t} = e^{-w^2/2} \overset{\text{Bsp.2}}{=} \mathcal{F}\left\{e^{-x^2/2}\right\}(w) = \mathcal{F}\left\{e^{-x^2/2}\right\}\left(\sqrt{2\lambda t} \cdot \omega\right)$
und mit $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda \cdot t}}$ ist $\sqrt{2\lambda t} = \dfrac{\omega}{\kappa}$, somit:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-x^2/2}\right\}\left(\sqrt{2\lambda\,t}\cdot\omega\right) = \mathcal{F}\left\{e^{-x^2/2}\right\}\left(\frac{\omega}{\kappa}\right) \overset{[\mathcal{F}\,13]}{=} \kappa\,\mathcal{F}\left\{e^{-(\kappa x)^2/2}\right\}(\omega) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda\,t}}\,\mathcal{F}\left\{e^{-x^2/4\lambda t}\right\}(\omega)\,; \quad \text{damit hat man:}$$

$$\mathcal{F}\{c_t\,(x)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\,t}}\,\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)\cdot\mathcal{F}\left\{e^{-x^2/4\lambda t}\right\}(\omega) \overset{[\mathcal{F}\,16]}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda\,t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}\left\{f(x) * e^{-x^2/4\lambda t}\right\}(\omega)\;, \quad \text{d.h.}$$

$$c(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi\,t}}\,f(x) * e^{-x^2/4\lambda t} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi\,t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\,e^{-\xi^2/4\lambda t}\,d\xi\;.$$

Mit der Substitution $u = \dfrac{\xi}{2\sqrt{\lambda t}}$ erhält man schließlich:

$$\boxed{c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,f\left(x - 2\sqrt{\lambda t}\,u\right)\,du}\;.$$

Hat man **z.B.** die Anfangskonzentration $\boxed{c(x,0) = q\cdot\delta(x)}$ gegeben,

so bekommt man wegen [$\mathcal{F}$ 3] die mit wachsendem t immer flacher werdenden

Gauß–Verteilungen: $\boxed{c(x,t) = \dfrac{q}{2\sqrt{\lambda\pi\,t}}\cdot e^{-x^2/4\lambda t}}$.

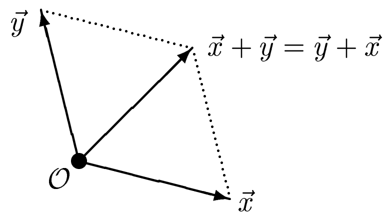
20 Lineare Räume, lineare (Un-) Abhängigkeit.

Stichpunkte: Anschauungsraum; allgemeiner Vektorraum (= linearer Raum), Vektorraumaxiome; Durchschnitt und Summe von Untervektorräumen. Die Räume $\mathbb{K}^n$. Erzeugendensysteme und Erzeugnis, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

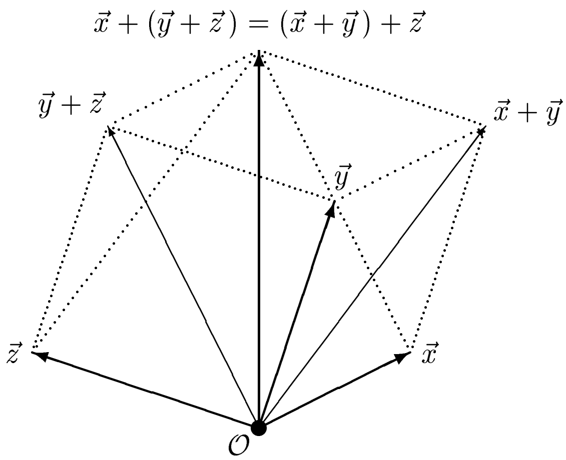
20.A Die Vektoren des Anschauungsraumes.

Ursprünglich verstand man unter **Vektoren** ausschließlich die aus einer **Richtung** und einem **Betrag** bestehenden Größen — wie z.B. Kraftvektoren, Geschwindigkeitsvektoren, ... —, die im 2– oder 3–dimensionalen Anschauungsraum als Pfeil entsprechender Richtung und Länge dargestellt werden können: wenn man diese Pfeile alle von einem ausgezeichneten Punkt $\mathcal{O}$ (dem **Ursprung**) der Ebene oder des Raumes ausgehen läßt, hat man die **Ortsvektoren** bzgl. $\mathcal{O}$.

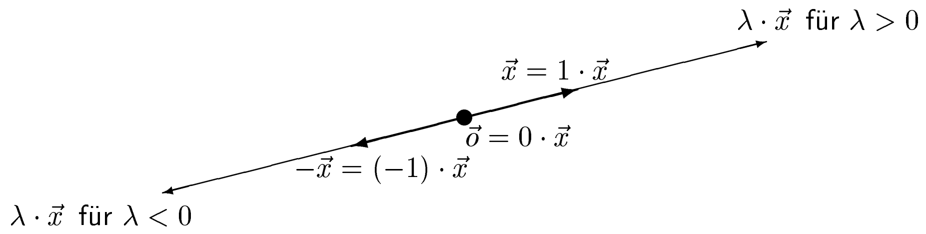
Je zwei solcher Ortsvektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ lassen sich in bekannter Weise **nach der Parallelogrammregel addieren** , wobei es auf die Reihenfolge bei der Addition nicht ankommt: $\boxed{\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}}$:



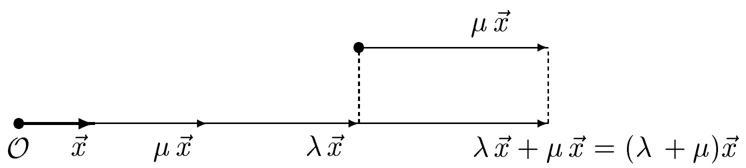
Mit der Parallelogrammregel folgt auch, dass es für drei Ortsvektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ gleichgültig ist, ob man zu $\vec{x}$ die Summe von $\vec{y}$ und $\vec{z}$ addiert oder ob man $\vec{z}$ zur Summe von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ addiert:
$\boxed{\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}}$:



Jeder Ortsvektor $\vec{x}$ kann mit einer beliebigen reellen Zahl λ **multipliziert** werden: mit einem *positiven* Faktor $\lambda > 0$ wird $\vec{x}$ — unter Beibehaltung der Richtung — um diesen Faktor gestreckt (verlängert oder verkürzt) , während mit einem *negativen* Faktor $\lambda < 0$ außerdem noch die Richtung umgekehrt wird; der Faktor $\lambda = 1$ bewirkt nichts: $\boxed{1\cdot\vec{x}=\vec{x}}$, und der Faktor $\lambda = 0$ liefert den **Nullvektor** : $\boxed{0\cdot\vec{x}=\vec{o}}$: dieser hat als einziger Vektor die Länge 0 und ihm kann *jede* Richtung zugeordnet werden; es ist klar, dass stets $\boxed{\vec{o}+\vec{x}=\vec{x}}$ ist; der Faktor $\lambda = -1$ führt
den Vektor $\vec{x}$ in den **negativen** Vektor $-\vec{x}$ über, der dieselbe Länge, aber entgegengesetzte
Richtung wie $\vec{x}$ hat: $\boxed{(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}}$; offenbar ist $\boxed{-\vec{x}+\vec{x}=\vec{o}}$:



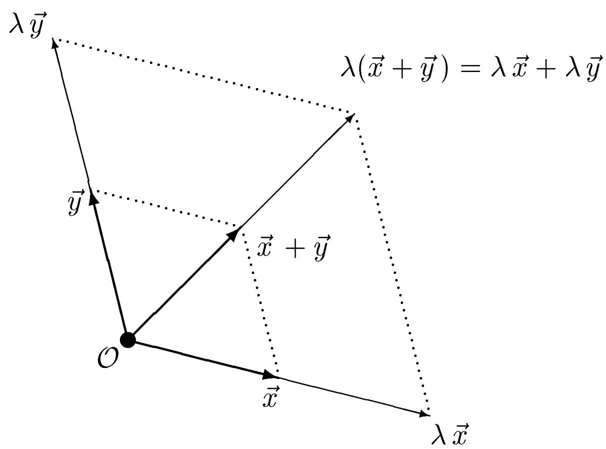
Wenn man für zwei reelle Zahlen λ, μ zum λ–Fachen von $\vec{x}$ das μ–Fache von $\vec{x}$ addiert, erhält man das $(\lambda + \mu)$–Fache von $\vec{x}$: $\boxed{(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}}$:



und es ist klar, dass das λ–Fache von $\mu\,\vec{x}$ das $\lambda\mu$–Fache von $\vec{x}$ ergibt: $\boxed{\lambda\,(\mu\,\vec{x}\,) = (\lambda\mu)\,\vec{x}}$.

Schließlich bekommt man mit der Parallelogrammregel auch noch die vektorielle Form des **Strahlensatzes**:

$\boxed{\lambda\,(\vec{x} + \vec{y}\,) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}}$:



Durch eine Abstraktion, die von der speziellen Natur dieser Ortsvektoren und Rechenoperationen absieht, wird man vom anschaulichen "Pfeilchenvektorraum" auf den allgemeinen Begriff eines Vektorraumes geführt:

hierzu hat man weiter nichts zu tun, als die wesentlichen der vertrauten Prinzipien und Rechenregeln zu **übernehmen!**:

20.B Allgemeine Vektorraumaxiome.

20.1

Ein reeller oder komplexer **Vektorraum** oder **linearer Raum** $[V, \mathbb{K}, +, \cdot]$ besteht aus

$\boxed{1}$ einer nicht–leeren Menge V, deren Elemente (oft) **Vektoren** genannt und mit einem Pfeil geschrieben werden: $\vec{x}, \vec{y}, \ldots,$

$\boxed{2}$ dem reellen oder komplexen **Skalarkörper** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$,

$\boxed{3}$ einer **Vektoraddition** $+ : V \times V \to V : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} + \vec{y}$, die jedem geordneten Paar $(\vec{x}, \vec{y})$ von Elementen aus V eindeutig ein mit $\vec{x} + \vec{y}$ bezeichnetes Element aus V zuordnet und

$\boxed{4}$ einer **Multiplikation mit Skalaren** $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V : (\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda \cdot \vec{x}$, die jedem geordneten Paar $(\lambda, \vec{x})$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{x} \in V$ ein mit $\lambda \cdot \vec{x}$ oder kurz mit $\lambda \vec{x}$ bezeichnetes Element aus V zuordnet,

so dass die folgenden **Vektorraumaxiome** (V1) bis (V7) erfüllt sind:
(vgl. mit den eingerahmten Rechenregeln auf den beiden letzten Seiten !)

20.2

(V1) $\boxed{\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}}$. (**Assoziativität** der *Vektoraddition*)

Hiernach dürfen bei endlichen Summen Klammern *beliebig* gesetzt und damit auch *weggelassen* werden: $\boxed{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} := \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}}$.

(V2) Es gibt einen **Nullvektor** $\vec{o} \in V$ mit $\boxed{\vec{o} + \vec{x} = \vec{x} \ \forall \vec{x} \in V}$.

(V3) Zu jedem $\vec{x} \in V$ gibt es ein bzgl. $+$ **inverses Element** $-\vec{x} \in V$ mit

$\boxed{-\vec{x} + \vec{x} = \vec{o}}$; $-\vec{x}$ ist der zu $\vec{x}$ **negative** Vektor und man schreibt:

$\boxed{\vec{y} - \vec{x} := \vec{y} + (-\vec{x})}$.

(V4) $\boxed{\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}}$. (**Kommutativität** der *Vektoraddition*)

Aufgrund der Axiome (V1) bis (V4) ist das System $[V, +]$ eine additiv geschriebene, **abelsche Gruppe**.

Es folgen noch drei Axiome für die **Multiplikation mit Skalaren**:

20.3

(V5) $\boxed{(\lambda\mu)\,\vec{x} = \lambda\,(\mu\vec{x})}$. (**Assoziativität** der *Multiplikation mit Skalaren*)

(V6) $\boxed{\begin{array}{rcl}\lambda(\vec{x}+\vec{y}) & = & \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y} \\ (\lambda+\mu)\,\vec{x} & = & \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}\end{array}}$. (**Distributivität**)

(V7) $\boxed{1\,\vec{x} = \vec{x}\ \forall \vec{x} \in V}$. (**Neutralität der Zahl 1**)

Es ist üblich, einen Vektorraum $[\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ kurz mit V zu bezeichnen und durch die Schreibweise: $V = [\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ zum Ausdruck zu bringen, dass V ein **linearer Raum** über dem **Skalarkörper** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist mit der *Vektoraddition* "$+$" und der *Multiplikation mit Skalaren* "$\cdot$" . **Beachte** auch, dass die *Multiplikation mit Skalaren* nichts mit der *skalaren Multiplikation* (s. Lektion 21) zu tun hat!

Mit Hilfe der Regeln (V1) bis (V4) kann *gezeigt* werden, dass sich (V2) und (V3) wesentlich verschärfen lassen:

20.4

(V2)$^+$ Jeder Vektorraum $[\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ besitzt **genau einen Nullvektor** $\vec{o}$ und für diesen gilt: $\boxed{\vec{o}+\vec{x} = \vec{x}+\vec{o} = \vec{x}\ \ \forall \vec{x} \in V}$.

(V3)$^+$ In jedem Vektorraum $[\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ gibt es zu jedem Vektor $\vec{x} \in V$ **genau einen negativen Vektor** $-\vec{x} \in V$ und für diesen gilt:

$\boxed{\vec{x}-\vec{x} := \vec{x}+(-\vec{x}) = -\vec{x}+\vec{x} = \vec{o}}$.

(V8) In jedem Vektorraum $[\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ sind für beliebige $\vec{a}\,,\,\vec{b} \in V$ die Gleichungen $\vec{a}+\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{x}+\vec{a} = \vec{b}$ **eindeutig in** V **lösbar** mit der Lösung: $\vec{x} = \vec{b}-\vec{a} := \vec{b}+(-\vec{a})$. Insbesondere hat man:

$\boxed{\vec{a}+\vec{x} = \vec{a} \text{ oder } \vec{x}+\vec{a} = \vec{a} \ \Rightarrow\ \vec{x} = \vec{o}}$ und

$\boxed{\vec{a}+\vec{x} = \vec{o} \text{ oder } \vec{x}+\vec{a} = \vec{o} \ \Rightarrow\ \vec{x} = -\vec{a}}$.

Darüberhinaus lässt sich mit Hilfe dieser Regeln noch herleiten:

20.5

In jedem Vektorraum $[\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ und für $\lambda \in \mathbb{K}\,,\,\vec{x} \in V$ gilt:

(V9) $\boxed{\lambda\,\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ oder } \vec{x} = \vec{o}}$, insbesondere:

(V9a) $\boxed{0\,\vec{x} = \vec{o} \text{ und } \lambda\,\vec{o} = \vec{o}}$; außerdem:

(V10) $\boxed{(-1)\,\vec{x} = -\vec{x} \;\; \forall \vec{x} \in V}$.

Aus den Axiomen (V1) bis (V7) ergeben sich somit wieder alle Regeln, die wir von den anschaulichen "Pfeilchenvektoren" gewohnt sind. Die Sparsamkeit des Axiomensystems (V1) bis (V7) erleichtert den Nachweis, dass ein System $[\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ ein Vektorraum ist.

20.C Lineare Teilräume.

20.6

Eine nicht–leere Teilmenge U eines Vektorraumes $V = [\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ ist ein **Untervektorraum** oder **linearer Teilraum** von V, wenn $U = [\,U\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ selbst wieder ein Vektorraum ist (bzgl. *derselben Addition* und *derselben Multiplikation mit Skalaren* wie auf V und natürlich mit *demselben Skalarkörper* $\mathbb{K}$!) .

Meistens spricht man nur kurz von einem **Unterraum** oder **Teilraum** eines Vektorraumes V, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, dass es sich um einem Unter*vektor*raum bzw. *linearen* Teilraum von V handelt.

20.7

$U = [\,U\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ ist genau dann ein Untervektorraum von $V = [\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$, wenn U bzgl. der Operationen "$+$" und "$\cdot$" **abgeschlossen** ist, d.h. wenn die *Addition* "$+$" und die *Multiplikation mit Skalaren* "$\cdot$" nicht aus U herausführen, d.h. wenn gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{x} + \vec{y} \in U & \forall \vec{x}\,,\,\vec{y} \in U \\ \lambda\,\vec{x} \in U & \forall \vec{x} \in U\,,\,\lambda \in \mathbb{K} \end{array}}$$

nur diese beiden Bedingungen hat man also zu überprüfen, wenn man entscheiden will, ob eine *Teilmenge* U von V sogar ein *linearer Teilraum* von V ist!

Ist nämlich $\vec{x} \in U$, so folgt aus (UV2) mit $\lambda = 0$, dass $\vec{o} = 0 \cdot \vec{x} \in U$, und mit $\lambda = -1$, dass $-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} \in U$, womit die Axiome (V2) und (V3) auf U erfüllt sind; und da die übrigen Axiome auf ganz V gelten, gelten sie insbesondere auch auf U. ∎

Jeder Vektorraum V enthält zumindest die beiden **trivialen Untervektorräume** $U = V$ und $U = \{\vec{o}\}$ und jeder Untervektorraum U von V enthält mindestens den **Nullvektor** $\vec{o}$; daneben enthält jeder Untervektorraum U mit jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{o}$ die gesamte **Ursprungsgerade** $g_0 : \ \vec{x} = \lambda\,\vec{a} \ (\lambda \in \mathbb{K})$ und mit je zwei Vektoren $\vec{a}\,,\vec{b} \neq \vec{o}$, die nicht beide auf derselben Ursprungsgeraden liegen, die gesamte **Ursprungsebene** $E_0 : \ \vec{x} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$ $(\lambda\,,\mu \in \mathbb{K})$.

20.D Durchschnitt und Summe linearer Teilräume.

Im folgenden sei I eine (endliche oder unendliche) Indexmenge und U_i für jeden Index $i \in I$ ein linearer Teilraum von V .

20.8

Der **Durchschnitt** der Teilräume U_i $(i \in I)$ ist:

$$\bigcap_{i\in I} U_i := \left\{\vec{x} \in V \,\middle|\, \vec{x} \in U_i \ \ \forall i \in I\right\}$$

und die **Summe** der Teilräume U_i $(i \in I)$ ist:

$$\sum_{i\in I}{}' U_i := \left\{\vec{x} = \sum_{i\in I}{}'\vec{x}_i \,\middle|\, \vec{x}_i \in U_i\,,\ \vec{x}_i \neq \vec{o} \text{ höchstens für } \textit{endlich} \text{ viele } i \in I\right\} =$$

$$= \left\{\vec{x} = \vec{x}_{i_1} + \cdots + \vec{x}_{i_m} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}\,,\ i_1\,,\ \ldots\,,\ i_m \in I\,,\ \vec{x}_{i_\nu} \in U_{i_\nu}\right\}.$$

Im Fall von *endlich* vielen Teilräumen $U_1\,,\ \ldots\,,\ U_n$ schreibt man auch:

$\bigcap_{j=1}^{n} U_j = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ für den **Durchschnitt** und

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = U_1 + \cdots + U_n = \left\{\vec{x} = \sum_{j=1}^{n}\vec{x}_j \,\middle|\, \vec{x}_j \in U_j \ \text{ für } \ j = 1,\ldots,n\right\}$$

für die **Summe**.

Der Strich am Summenzeichen (der oft auch weggelassen wird!) bedeutet, dass **nur endliche** Summen auftreten, also Summen, bei denen nur *höchstens endlich viele* Summanden von $\vec{o}$ verschieden sind. Wenn die Indexmenge I *endlich* ist, kann natürlich auf den Strich verzichtet werden.

Bedenke: in *beliebigen* linearen Räumen sind in der Regel nur *endliche* Summen erklärt. *Unendliche* Summen, bei denen mehr als endlich viele Summanden ungleich $\vec{o}$ sind, ergeben höchstens dann Sinn, wenn auf dem betreffenden linearen Raum die **Konvergenz** von Folgen und Reihen definiert ist, wenn also z.B. je zwei Elementen des Raumes ein **Abstand** zugeordnet werden kann! Aus diesem Grund können wir (zunächst) nur Summen der Form $\sum{}' \cdots$ definieren.

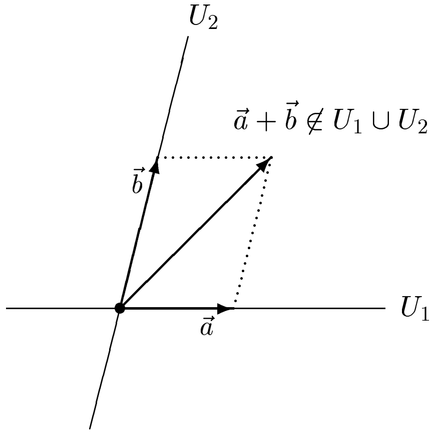
20.9

Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} U_i$ und **Summe** $\sum_{i\in I}{}' U_i$ von beliebig vielen linearen Teilräumen U_i von V sind wieder lineare Teilräume von V:

[i] der Durchschnitt ist der *größte* lineare Teilraum von V, der *in allen* U_i $(i \in I)$ *enthalten* ist,

[ii] die Summe ist der *kleinste* lineare Teilraum von V, der *alle* U_i $(i \in I)$ *enthält*.

Die **Vereinigung** linearer Teilräume von V ist in der Regel *kein* linearer Teilraum mehr! :



20.E Die Räume $\mathbb{K}^n$.

20.10

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ besteht der **Raum** $\mathbb{K}^n$ aus allen **n–Tupeln** $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit den **Komponenten** $x_j \in \mathbb{K}$.
Auf dem $\mathbb{K}^n$ wird eine *Addition* $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ und eine *Multiplikation mit Skalaren* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ **komponentenweise** erklärt:

mit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{array}}$$

Das System $\mathbb{K}^n = \left[\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot\right]$ ist ein **Vektorraum** über $\mathbb{K}$ mit dem **Nullvektor** $\vec{o} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$; der zu $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ **negative** Vektor ist $-\vec{x} = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{K}^n$.

z.B.: Die Vektoren $\vec{x} = (1,2,3)$ und $\vec{y} = (3,2,1)$ liegen beide sowohl im $\mathbb{R}^3$ als auch im $\mathbb{C}^3$;
dagegen liegt $\vec{z} = (1,i,0)$ nur im $\mathbb{C}^3$ und liegt — trotz der 0 – *nicht* im $\mathbb{C}^2$;
der Vektor $\vec{w} = (3,2)$ liegt im $\mathbb{R}^2$ und ebenso im $\mathbb{C}^2$, aber z.B. *nicht* im $\mathbb{R}^3$: auch wenn man für $m < n$ den Raum $\mathbb{K}^m$ in den Raum $\mathbb{K}^n$ *isomorph einbetten* kann — das ist auf viele Arten möglich — ist $\mathbb{K}^m$ *kein* Teilraum des $\mathbb{K}^n$!
Es ist: $(1,2,3) + 2\cdot(3,2,1) = (1+2\cdot 3\,,\, 2+2\cdot 2\,,\, 3+2\cdot 1\,) = (7,6,5)$ und $i\cdot(1,i) = (i,-1)$;
dagegen ist: $(1,2,0) + (2,3)$ — trotz der 0 — *nicht erklärt*!

20.11	Für endliches $n \in \mathbb{N}$ können die Räume $\mathbb{K}^n$ als die (reellen bzw. komplexen) n–dimensionalen **Anschauungsräume** gedeutet werden, wenn man die Komponenten x_j der Vektoren $\vec{x} = (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) \in \mathbb{K}^n$ als **Koordinaten** bzgl. eines — woher auch immer — vorgegebenen, in der Regel rechtwinkligen und rechts–orientierten Koordinatensystems auffasst (s. Abschnitt 21.B).

(Sie werden sich schnell daran gewöhnen, dass sich ein beliebig–*endlich*–dimensionaler Vektorraum nicht wesentlich von den vertrauten 2– bzw. 3–dimensionalen Anschauungsräumen unterscheidet — sogar dann, wenn die Skalare nicht immer reell sind!)

Beachte, dass *derselbe Vektor* $\vec{r}$ des n–dimensionalen Anschauungsraumes bzgl. verschiedener Koordinatensysteme auch *verschiedene Darstellungen* als Koordinatenvektor des $\mathbb{K}^n$ besitzt und dass umgekehrt *derselbe Koordinatenvektor* des $\mathbb{K}^n$ bzgl. verschiedener Koordinatensysteme auch *verschiedene Vektoren* des n–dimensionalen Anschauungsraumes darstellt!:

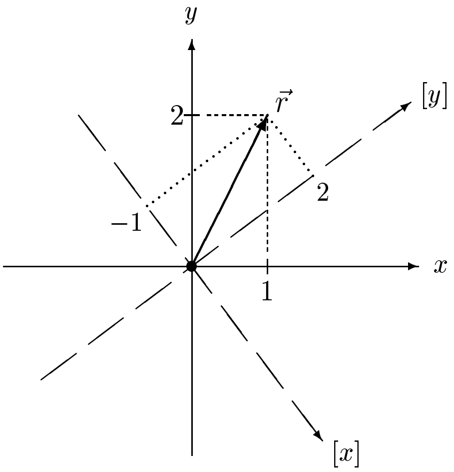
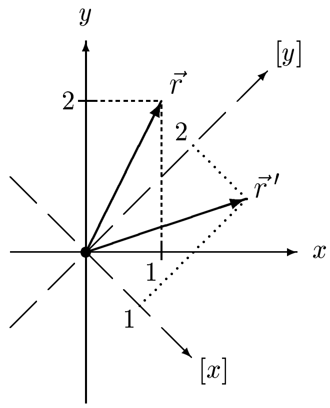


Abbildung 20.1



Der Vektor $\vec{r}$ hat im durchgezogenen x,y–Koordinatensystem die Darstellung $\vec{r} = (1,2)$ und im gestrichelten $[x],[y]$–Koordinatensystem die Darstellung $\vec{r} = (-1,2)$.

Der Koordinatenvektor $(1,2)$ stellt im durchgezogenen x,y–Koordinatensystem den Vektor $\vec{r}$ und im gestrichelten $[x],[y]$–Koordinatensystem den Vektor $\vec{r}\,'$ dar.

Aus diesem Grund denken wir uns im folgenden in allen Anschauungsräumen jeweils ein rechtwinkliges und rechts–orientiertes Koordinatensystem **fest "installiert"** — wir nennen dies die **natürliche** oder **kanonische Basis** : bzgl. dieser natürlichen Basen können wir dann jeweils den Raum $\mathbb{K}^n$ mit dem (reellen bzw. komplexen) n–dimensionalen Anschauungsraum **identifizieren**.

Insbesondere ist im folgenden also mit dem $\mathbb{R}^2$ stets die 2–dimensionale anschauliche Ebene und mit dem $\mathbb{R}^3$ der übliche 3–dimensionale Anschauungsraum gemeint, wobei Ebene und Raum in der gewohnten Weise mit einem rechtwinkligen und rechts–orientierten x, y– bzw. x, y, z–Koordinatensystem **fest** versehen sind.

Obwohl es im Prinzip belanglos ist, ob ein Vektor des $\mathbb{K}^n$ als **Zeilenvektor** $(x_1, \ldots, x_n)$ oder als **Spaltenvektor** $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ geschrieben wird, ist es — im Hinblick auf spätere Anwendungen (wie z.B. Matrixoperationen) — zweckmäßig, **Koordinatenvektoren** bzgl. einer Basis **als Spaltenvektoren** zu schreiben!

In der Regel (auch in diesem Kurs) werden — wenn es nicht darauf ankommt — *beide* Schreibweisen verwendet. Darüberhinaus werden **Spaltenvektoren** (*nur!*) in diesem Kurs gelegentlich auch mit einem **vertikalen Pfeil** $\downarrow$ gekennzeichnet: $\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, um daran zu erinnern, dass es sich hier um einen **Koordinatenvektor** bzgl. einer Basis handelt.

z.B.: die natürlichen Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ der reellen Ebene und $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ des 3–dim. Anschauungsraumes haben (jeweils bzgl. der natürlichen Basis) die Darstellungen $\overset{\downarrow}{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{\downarrow}{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als $\mathbb{R}^2$–Vektoren bzw. $\overset{\downarrow}{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{\downarrow}{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{\downarrow}{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als $\mathbb{R}^3$–Vektoren:

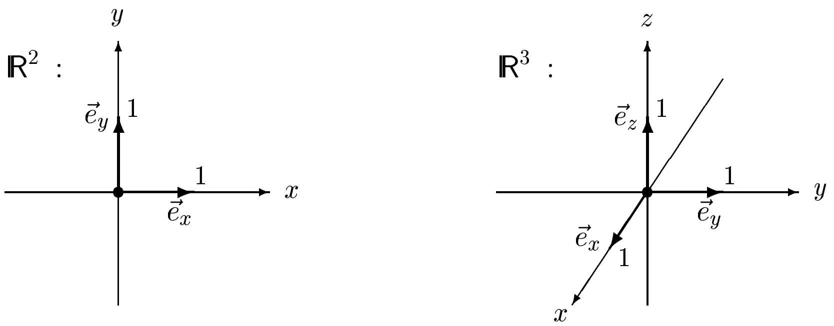


Abbildung 20.2 Die natürlichen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

! **Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Raum $\mathbb{K}^n$ der Prototyp aller n–dimensionalen linearen Räume** : da nämlich die Elemente jedes n–dimensionalen Raumes V bzgl. einer Basis von V umkehrbar–eindeutig als Vektoren des $\mathbb{K}^n$ geschrieben werden können, stimmt V "im Wesentlichen" mit dem Raum $\mathbb{K}^n$ überein! (s. 21.B !) !

20.F Bemerkung über Funktionenräume.

20.12

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei M eine nicht–leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, z.B. $M = \mathbb{R}$ oder $M = [a, b]$ mit $a < b$, und sei

$\mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M] := \{ f : M \to \mathbb{K} \}$ die Gesamtheit aller auf M definierten, $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen. Auf der Menge $\mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M]$ wird durch:

$$\boxed{\left.\begin{array}{lcll} \big(f+g\big)\,(x) & := & f(x)+g(x) & \forall x \in M \\ \big(\lambda\, f\big)\,(x) & := & \lambda \cdot f(x) & \forall x \in M \end{array}\right\} \ \forall f, g \in \mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M]\,,\ \lambda \in \mathbb{K}}$$

eine *Addition* $+ : \mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M] \times \mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M] \to \mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M]$ und

eine *Multiplikation mit Skalaren* $\cdot\ : \mathbb{K} \times \mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M] \to \mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M]$ definiert.

Damit ist $\mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M] = \Big[\mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M]\,,\ \mathbb{K}\,,\ +\,,\ \cdot\,\Big]$ ein **linearer Raum** : **der Raum aller auf M definierten, $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen** .

Der "Nullvektor" in diesem Raum ist die **Nullfunktion** o mit $o(x) = 0$ für alle $x \in M$.

Bei **Funktionenräumen** bevorzugt man die Bezeichnung "linearer Raum" statt "Vektorraum" (obwohl *beide* Bezeichnungen zulässig sind), nennt die Funktionen "Elemente" statt "Vektoren" und kennzeichnet diese nicht mit einem Pfeil.

Diese globalen Funktionenräume $\mathbf{F}_{\mathbb{K}}[M]$ sind “zu groß“, um in der Praxis von Bedeutung zu sein, aber eine Reihe von **Teilräumen** dieser Räume spielen in der theoretischen Physik und Chemie eine große Rolle, wie z.B.

der **lineare Raum** $\mathcal{C}[M] = \{f : M \to \mathbb{K} \mid f$ **ist stetig**$\}$ **aller stetigen Funktionen** $f : M \to \mathbb{K}$,

der **lineare Raum** $\mathcal{C}^\infty[M] = \{f : M \to \mathbb{K} \mid f$ **ist beliebig oft differenzierbar**$\}$ **aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen** $f : M \to \mathbb{K}$,

oder der **lineare Raum** $L^2[M] = \left\{ f : M \to \mathbb{K} \mid \|f\|_2 := \sqrt{\int_M |f(x)|^2\, dx} < \infty \right\}$ **aller quadratisch integrierbaren Funktionen** $f : M \to \mathbb{K}$.

20.G Erzeugnis und Erzeugendensysteme.

In diesem Abschnitt ist stets $V = [\,V\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,\cdot\,]$ ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

20.13 Zu vorgegebenen Elementen $\vec{x}_1\,,\,\ldots\,,\,\vec{x}_m \in V$ nennt man die Elemente

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_m\vec{x}_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\vec{x}_j \in V \quad \text{mit } \alpha_j \in \mathbb{K}$$

die **Linearkombinationen** von $\vec{x}_1\,,\,\ldots\,,\,\vec{x}_m$.

z.B.: der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der drei Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

die Funktion $f(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ist eine Linearkombination der beiden Funktionen $f_1(x) = \cos x$ und $f_2(x) = \sin x$;

wegen: $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1$ ist die Funktion $\varphi(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ eine Linearkombination der beiden Funktionen $\varphi_1(t) = 1$ (konstant) und $\varphi_2(t) = \cos 2t$.

20.14 Sei M eine nicht–leere Teilmenge von V . Die Gesamtheit aller *endlichen* Linearkombinationen $\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\vec{x}_j$ mit $m \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_j \in V$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$ nennt man die **lineare Hülle** oder das **Erzeugnis** von M und bezeichnet sie mit $\operatorname{span}\{M\}$:

$$\boxed{\operatorname{span}\{M\} = \left\{ \vec{x} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\vec{x}_j \;\middle|\; m \in \mathbb{N}\,,\ \vec{x}_j \in M\,,\ \alpha_j \in \mathbb{K} \right\}}\,.$$

$\operatorname{span}\{M\}$ ist ein linearer Teilraum von V — **der von M erzeugte Teilraum** — und ist gleich dem Durchschnitt aller linearen Teilräume von V , die M enthalten:

$$\boxed{\operatorname{span}\{M\} = \bigcap \left\{ U \subseteq V \;\middle|\; M \subseteq U \text{ und } U \text{ ist linearer Teilraum von } V \right\}}\,.$$

Ist nämlich U ein linearer Teilraum von V , also $\vec{x} + \vec{y} \in U$ und $\lambda\vec{x} \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $\vec{x}\,,\,\vec{y} \in U$ (siehe Nr. 20.7 !) , so gilt dies insbesondere für alle $\vec{x}\,,\,\vec{y} \in M$, wenn M in U enthalten ist: damit ist für jeden linearen Teilraum $U \subseteq V$ mit $M \subseteq U$ stets sogar $\operatorname{span}\{M\} \subseteq U$, d.h. $\operatorname{span}\{M\}$ liegt im **Durchschnitt** aller M enthaltenden linearen Teilraume von V .

Andererseits ist klar, dass $\operatorname{span}\{M\}$ selbst ein **linearer Teilraum** von V ist, denn beliebige skalare Vielfache und (endliche) Summen von endlichen Linearkombinationen von Elementen aus M sind offenbar ebenfalls endliche Linearkombinationen von Elementen aus M: damit ist $\operatorname{span}\{M\}$ **gleich dem Durchschnitt** aller M enthaltenden linearen Teilraume von V und ist somit **der kleinste lineare Teilraum von V, der M enthält.** ▮

20.15 Ist U ein linearer Teilraum von V mit $U = \operatorname{span}\{M\}$, so sagt man: U **wird von M erzeugt** und nennt M ein **Erzeugendensystem** von U.

Erzeugendensysteme für einen linearen Teilraum U können sehr klein ("sparsam"), aber auch sehr groß sein; das größtmögliche Erzeugendensystem für U ist U selbst:

20.16 $U = \operatorname{span}\{U\}$ für jeden linearen Raum U. Etwas genauer hat man:

20.17 Für $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in V$ ist stets

$\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\} \subseteq \operatorname{span}\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$, und zwar:

$\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\} = \operatorname{span}\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$, falls
$\vec{x}_0 \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$,

$\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\} \overset{\neq}{\subset} \operatorname{span}\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$, falls
$\vec{x}_0 \notin \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$.

20.H Lineare (Un–) Abhängigkeit.

20.18 Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt **linear abhängig**, wenn es ein Element $\vec{x}_0 \in M$ gibt, das sich von den *übrigen* Elementen aus M erzeugen lässt, d.h. mit:

$\boxed{\vec{x}_0 \in \operatorname{span}\{M \setminus \{\vec{x}_0\}\}}$,

oder — aufgrund von Nr. 20.17 gleichwertig —:

$\boxed{\operatorname{span}\{M \setminus \{\vec{x}_0\}\} = \operatorname{span}\{M\}}$.

Die Menge M heißt **linear unabhängig**, wenn sie *nicht* linear abhängig ist.

Ein Erzeugendensystem M für einen linearen Teilraum $U = \mathrm{span}\,\{M\}$ ist also linear abhängig, wenn es "unnötig groß" ist, wenn man mindestens ein Element aus M weglassen kann, um U zu erzeugen.

20.19 M ist ein **minimales Erzeugendensystem** für den linearen Teilraum $U = \mathrm{span}\,\{M\}$, wenn man — um U zu erzeugen — *kein* Element aus M weglassen darf; in diesem Fall ist M linear unabhängig:

20.20 Eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann **linear unabhängig**, wenn sie ein **minimales Erzeugendensystem** für den von M erzeugten Teilraum $U := \mathrm{span}\,\{M\}$ ist.

Ist die Menge $M \subseteq V$ **linear abhängig**, so gibt es (s.o.) ein $\vec{x}_0 \in M$ so, dass $\vec{x}_0 \in \mathrm{span}\,\{M \setminus \{\vec{x}_0\}\}$; zu $\vec{x}_0$ gibt es dann Elemente $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in M \setminus \{\vec{x}_0\}$ und Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ derart, dass $\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{x}_j$ bzw., mit $\alpha_0 := -1$ $(\neq 0\,!)$: $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$.

Sei umgekehrt $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in M$ und $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$: wenn *nicht* alle α_j gleich Null sind, z.B. (Œ) $\alpha_0 \neq 0$, so kann man diese Gleichung nach $\vec{x}_0$ auflösen:
$\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j \vec{x}_j$, wobei $\bar{\alpha}_j := -\alpha_j/\alpha_0$ für $j = 1, \ldots m$;
dann ist $\vec{x}_0 \in \mathrm{span}\,\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathrm{span}\,\{M \setminus \{\vec{x}_0\}\}$ und somit M **linear abhängig**.

Wir haben gezeigt:

20.21 Die Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann **linear abhängig**, wenn sich der Nullvektor $\vec{o}$ auf *nicht–triviale* Weise als endliche Linearkombination $\vec{o} = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \vec{x}_j$ mit $\vec{x}_j \in M$ darstellen lässt.
("nicht–trivial" bedeutet hier, dass *nicht* alle Koeffizienten α_j gleich 0 sind, d.h. dass $\alpha_j \neq 0$ für mindestens ein $j = 0, \ldots, m$.)

Die triviale Darstellung des Nullvektors: $\vec{o} = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \vec{x}_j$ mit $\alpha_j = 0\ \forall j$ ist natürlich stets möglich — sie ist jedoch i.a. nicht sehr "ergiebig".

Aus Nr. 20.21 ergibt sich ein äußerst brauchbares **Kriterium für die lineare Unabhängigkeit** einer Menge M :

20.22 Wenn für beliebige (endlich viele) Elemente $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in M$ aus der Beziehung: $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$ stets **folgt** (!), dass $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ ist, dann — und nur dann — ist M **linear unabhängig**.

Denn M ist nach Nr. 20.21 genau dann **linear unabhängig**, wenn sich der Nullvektor $\vec{o}$ **nur auf triviale Weise** als Linearkombination von Elementen aus M darstellen läßt.

Nocheinmal:

20.23

- Wenn für beliebige $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in M$ die Beziehung:
  $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$ **nur mit** $\alpha_j = 0 \; \forall j$ **möglich** ist,
  dann — und nur dann — ist M **linear unabhängig**;
- wenn dagegen für gewisse Elemente $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in M$
  aus der Beziehung: $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$ **nicht folgt**,
  dass alle α_j gleich 0 sein **müssen**,
  dann — und nur dann — ist M linear abhängig.

Zum Beispiel:

1.: Um zu überprüfen, ob die drei Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
linear abhängig oder unabhängig sind, **setzt** man:

$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$ (mit gewissen Skalaren α_j, über die nichts weiter ausgesagt wird).

Das ergibt drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ (2) & 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ (3) & 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2(1) - (3): & 4\alpha_3 - \alpha_2 = 0 \\ 4(2): & 4\alpha_3 + 8\alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_2 = 0 & \text{und} \\ \alpha_3 = 0 & \text{, somit} \\ \alpha_1 = 0 & \end{array} \right.$$

Aus der Beziehung: $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$ **folgt** also, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ sein **muß**:

damit ist die Menge $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ **linear unabhängig**.

2.: Für $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ liefert die Beziehung $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{o}$

die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ (2) & 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ (3) & 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} (1)+(2)-(3): & 3\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ \text{bzw.:} & \alpha_2 = -2\alpha_3 \end{array}\right.$$

Mit (1) ergibt sich: $\alpha_1 = -4\alpha_2 - 7\alpha_3 = 8\alpha_3 - 7\alpha_3 = \alpha_3$.

Setzt man die beiden erhaltenen Beziehungen: $\boxed{\alpha_1 = \alpha_3 \,,\ \alpha_2 = -2\alpha_3}$ in alle drei Gleichungen ein:

$$\begin{array}{ll} (1) & \alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = \alpha_3 - 8\alpha_3 + 7\alpha_3 = (1-8+7)\,\alpha_3 = 0\cdot\alpha_3 = 0\,, \\ (2) & 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 2\alpha_3 - 10\alpha_3 + 8\alpha_3 = (2-10+8)\,\alpha_3 = 0\cdot\alpha_3 = 0\,, \\ (3) & 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 3\alpha_3 - 12\alpha_3 + 9\alpha_3 = (3-12+9)\,\alpha_3 = 0\cdot\alpha_3 = 0\,, \end{array}$$

so sieht man, dass sie mit *beliebig wählbarem* α_3 erfüllt sind: es **folgt also nicht** , dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ist. Damit ist die Menge $\{\vec{x}_1\,,\,\vec{x}_2\,,\,\vec{x}_3\}$ **linear abhängig** .

Aus der Rechnung ergibt sich noch, *wie* die drei Vektoren voneinander abhängen: z.B. mit $\alpha_3 = 1$ ist $\alpha_1 = 1\,,\ \alpha_2 = -2$, somit:

$\boxed{\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{0}}$ bzw. (z.B.) $\boxed{\vec{x}_3 = 2\vec{x}_2 - \vec{x}_1}$.

3.: Um zu überprüfen, ob die fünf Funktionen

$\varphi_0(t) = 1$ (konstant), $\varphi_1(t) = \cos t\,,\ \varphi_2(t) = \sin t\,,\ \varphi_3(t) = \cos 2t\,,\ \varphi_4(t) = \sin 2t$

linear abhängig oder unabhängig sind, **setzt** man:

$\sum_{j=0}^{4} \alpha_j \varphi_j = o$ (Nullfunktion), d.h.: $\sum_{j=0}^{4} \alpha_j \varphi_j(t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Nimmt man 5 verschiedene Werte für t, z.B. $t = 0\,, \pi/4\,, \pi/2\,, \pi$ und $3\pi/2$, so ergeben sich fünf Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \text{mit } t = 0: & (1) & \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \text{mit } t = \pi/4: & (2) & \alpha_0 + 1/\sqrt{2}\,\alpha_1 + 1/\sqrt{2}\,\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \text{mit } t = \pi/2: & (3) & \alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \text{mit } t = \pi: & (4) & \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \text{mit } t = 3\pi/2: & (5) & \alpha_0 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} (1)+(4) & \Rightarrow & \alpha_0 + \alpha_3 = 0 \\ (3)+(5) & \Rightarrow & \alpha_0 - \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \overset{\pm}{\Rightarrow} \alpha_0 = \alpha_3 = 0 \overset{(1),\,(3)}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \alpha_4 = 0\,.$$

Die Beziehung $\sum_{j=0}^{4} \alpha_j \varphi_j = o$ ist also nur mit $\alpha_j = 0 \ \ (j = 0, \ldots, 4)$ möglich, d.h.

die Menge $\{\varphi_0\,,\,\varphi_1\,,\ldots,\,\varphi_4\}$ ist **linear unabhängig** .

Es folgen noch einige einfache Bemerkungen über lineare (Un–) Abhängigkeit:

20.24

Jede **einelementige** Menge $\{\vec{x}\}$ mit $\vec{x} \neq \vec{o}$ ist **linear unabhängig** .

Zwei Elemente $\vec{x}$, $\vec{y}$ sind genau dann **linear abhängig** , wenn sie skalare Vielfache voneinander sind, wenn also $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ bzw. $\vec{x} = \beta\vec{y}$ mit gewissen Skalaren α , $\beta \in \mathbf{K}$.

20.25

Wenn die Menge M eine **linear abhängige** Teilmenge M_0 enthält, dann ist sie selbst **linear abhängig** , m.a.W.:

20.26

Ist die Menge M **linear unabhängig** , dann ist auch jede Teilmenge M_0 von M **linear unabhängig** .

Aber es ist sehr wohl möglich, dass eine **linear abhängige** Menge M **linear unabhängige** Teilmengen enthält!

z.B.: die drei Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ aus dem 2.Beispiel von oben

sind **linear abhängig** , aber je zwei von ihnen sind **linear unabhängig** .

20.27

Ist die Menge M **linear unabhängig** und ist $\vec{x}_0 \notin \operatorname{span}\{M\}$, so ist auch die Menge $M \cup \{\vec{x}_0\}$ **linear unabhängig** .

21 Basis und Dimension. Skalarprodukt und Norm.

Stichpunkte: Basis, Dimension, Darstellung und Koordinatenvektor bzgl. einer Basis. Skalarprodukt und Norm auf dem $\mathbb{K}^n$, anschauliche Deutung auf dem $\mathbb{R}^n$. Allgemeine Norm und allgemeines inneres Produkt.

21.A Algebraische Basis.

21.1 Ein **linear unabhängiges Erzeugendensystem** B von V nennt man eine **algebraische Basis** oder **Hamel–Basis** oder im folgenden kurz **Basis** von V.

Basen lassen sich auf verschiedene Weisen charakterisieren:

21.2 Eine nicht–leere Teilmenge B von V ist eine **Basis** von V

$\overset{\text{per def.}}{\iff}$ (B1): B ist ein **linear unabhängiges Erzeugendensystem** von V, d.h. B ist linear unabhängig und $\mathrm{span}\,\{B\} = V$;

$\iff$ (B2): B ist ein **minimales Erzeugendensystem** von V (s. Nr. 20.20);

$\iff$ (B3): B ist eine **maximale linear unabhängige** Teilmenge von V, d.h. B ist linear unabhängig und für alle $\vec{x}_0 \in V \setminus B$ ist $B \cup \{\vec{x}_0\}$ linear abhängig;

$\iff$ (B4): jedes Element $\vec{x} \in V$ lässt sich **eindeutig bzgl.** B **darstellen**, d.h. zu $\vec{x}$ gibt es **endlich viele, eindeutig** bestimmte Elemente $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in B$ und hierzu **eindeutig** bestimmte Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ so, dass $\vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{x}_j$.

Wir wollen als **Übungsbeispiel** zeigen, wie sich die Charakterisierung (B4) ergibt:

1.: Sei B eine Basis im Sinne der Definition (B1). Dann ist insbesondere $V = \mathrm{span}\,\{B\}$, d.h. jedes $\vec{x} \in V$ *besitzt* eine Darstellung als endliche Linearkombination von Elementen aus B.

In (B4) wird ausgesagt, dass jedes $\vec{x} \in V$ nur *genau eine* solche Darstellung besitzt. Um das einzusehen sei $\vec{x} \in V$ und es seien: $\vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{k} \tilde{\alpha}_j \vec{a}_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{\beta}_j \vec{b}_j$ zwei Darstellungen von $\vec{x}$ mit $\vec{a}_j, \vec{b}_j \in B$ und Skalaren $\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j \neq 0$.

Durch geeignetes Umtaufen und Umnumerieren dieser Vektoren $\vec{a}_j$, $\vec{b}_j$ und Skalare $\tilde{\alpha}_j$, $\tilde{\beta}_j$ lassen sich die beiden Darstellungen auch in der Form: $\vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{x}_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \vec{x}_j$ schreiben: die Menge der $\vec{x}_j$ mit $\alpha_j \neq 0$ ist die Menge aller $\vec{a}_j$ und die Menge aller $\vec{x}_j$ mit $\beta_j \neq 0$ ist die Menge aller $\vec{b}_j$; n ist die Anzahl der Elemente in der Vereinigung aller $\vec{a}_j$, $\vec{b}_j$.

Damit ist:

$\vec{o} = \vec{x} - \vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j\,)\,\vec{x}_j$ und wegen der linearen Unabhängigkeit der Menge B folgt: $\alpha_j - \beta_j = 0$, d.h. $\alpha_j = \beta_j \;\forall j = 1\,, \ldots, n$. Damit stimmen die beiden — ursprünglich als möglicherweise verschieden angesehenen — Darstellungen von $\vec{x}$ überein.

2.: Nun sei B eine Basis im Sinne von (B4) . Dann ist B zunächst ein Erzeugendensystem von V , da sich jedes Element $\vec{x} \in V$ bzgl. B darstellen lässt.

In (B1) wird gefordert, dass B darüberhinaus auch noch linear unabhängig ist.
Wäre das falsch , dann gäbe es ein $\vec{x}_0 \in B$ so, dass $\vec{x}_0 \in \operatorname{span}\{B \setminus \{\vec{x}_0\}\}$, d.h. es gäbe $\vec{x}_1\,, \ldots, \vec{x}_m \in B \setminus \{\vec{x}_0\}$ und Skalare $\alpha_1\,, \ldots, \alpha_m$ mit: $\vec{x}_0 = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{x}_j$.

Da $\vec{x}_0$ in B liegt, gibt es aber neben dieser Darstellung von $\vec{x}_0$ bzgl. B noch die triviale Darstellung bzgl. B : $\vec{x}_0 = 1\,\vec{x}_0$, und dies widerspricht der Aussage von (B4) , wonach $\vec{x}_0$ **nur genau eine** Darstellung bzgl. B haben kann. Dieser Widerspruch zeigt, dass B linear unabhängig ist. ▮

Die beiden folgenden Sätze sind für die Theorie der linearen Räume von entscheidender Bedeutung:

21.3

Jede linear unabhängige Teilmenge B_0 von V lässt sich zu einer **Basis** B von V erweitern, so dass $B_0 \subseteq B$.
Insbesondere *besitzt* jeder lineare Raum V mindestens eine Basis B, denn für $\vec{o} \neq \vec{x}_0 \in V$ ist $B_0 = \{\vec{x}_0\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V .

21.4

Alle Basen eines linearen Raumes V sind **gleichmächtig** ("gleich groß") .

21.5

Die (stets gleich große) Mächtigkeit der Basen von V nennt man die **Dimension** von V und bezeichnet sie mit $\dim V$.

Besitzt insbesondere V eine Basis aus endlich vielen (etwa n) Elementen, so enthält *jede* Basis von V ebensoviele Elemente und V ist ein **endlich–dimensionaler** (bzw. n**–dimensionaler**) linearer Raum.

Bemerkungen: (*)

1.: Diese beiden Sätze sind im nicht–endlichen Fall nicht elementar zu beweisen (man benötigt dann das Auswahl–Axiom oder das Zorn'sche Lemma); die Sätze sind aber "recht plausibel" und wir wollen hier zumindest den endlichen Fall andeuten:

Wenn V eine n–elementige Basis $B = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ besitzt, dann ist *jede* Basis n–elementig: denn ist $B_0 = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m\}$ irgendeine andere Basis von V, so lässt sich jedes $\vec{y}_k$ bzgl. B darstellen: $\vec{y}_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j}\vec{x}_j$; da mehr als n Linearkombinationen der n Elelente $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ linear abhängig sind, muss dann $m \leq n$ sein; andererseits lassen sich aber auch alle $\vec{x}_k$ bzgl. B_0 darstellen: $\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{m} \beta_{k,j}\vec{y}_j$: daher ist auch $n \leq m$ und somit $m = n$.

Um eine endliche Basis B zu *erhalten*, kann man — beginnend mit einer ein–elementigen Menge $M_1 = \{\vec{x}_1\}$ mit $\vec{x}_1 \neq \vec{o}$ — der Reihe nach k–elementige linear unabhängige Mengen $M_k = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$, $k = 2, 3, \ldots,$ finden, wobei jeweils $\vec{x}_k \in V \setminus \mathrm{span}\,\{M_{k-1}\}$. Wenn V endlich–dimensional ist, muss dieses Verfahren — da alle Basen gleich groß sind — nach endlich vielen Schritten, etwa mit $k = n$ abbrechen: dann ist $B = M_n$ eine Basis von V . ▮

2.: Die **Mächtigkeit** einer Menge M wird durch ihre **Kardinalzahl** $\kappa(M)$ gegeben und bedeutet so viel wie "Anzahl ihrer Elemente":

[a] jede n–elementige Menge M mit $n \in \mathbb{N}$ hat die Mächtigkeit $\kappa(M) = n$,

[b] die Mächtigkeit einer **abzählbar–unendlichen** Menge M (die "so groß" ist wie die Menge $\mathbb{N}$) wird mit $\aleph_0$ ("Aleph–Null") bezeichnet,

[c] die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ (= Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$) hat die Mächtigkeit $\aleph_1 := 2^{\aleph_0}$,

[d] die Potenzmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hat die Mächtigkeit $\aleph_2 := 2^{\aleph_1}$ usw. ,

[e] die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}$ der rellen Zahlen ist $\kappa(\mathbb{R}) = c$ ("**Kontinuum**") ,

[f] Mengen, deren Mächtigkeit größer als $\aleph_0$ ist, heißen **überabzählbar** .

Es ist $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$ und für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$ ist $n < \aleph_0 < c$ und $k\,\aleph_0 = \aleph_0$.
Bis heute ist noch unbekannt, ob $\aleph_1 = c$.

Zwei Mengen M , N heißen **gleichmächtig** (haben dieselbe Mächtigkeit) , wenn es eine umkehrbar–eindeutige Abbildung der Menge M auf die Menge N gibt.

So sind z.B. alle n–elementigen Mengen gleichmächtig
oder die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$
oder die Mengen $\mathbb{R}$, $]-1,1[$ und die Menge aller Folgen, deren Glieder gleich 0 oder 1 sind (denken Sie an das binäre Zahlensystem!) .

Eine unmittelbare Folge von Nr 21.3 ist

21.6 In jedem n–dimensionalen linearen Raum V sind *mehr* als n Elemente stets linear abhängig. M.a.W.:

21.7 Eine n–elementige Teilmenge B eines n–dimensionalen linearen Raumes V ist daher genau dann eine **Basis** von V, wenn sie **linear unabhängig** ist.

21.B Darstellung bzgl. einer Basis.

21.8 Ist V ein n–dimensionaler linearer Raum, so hat jede Basis von V genau n Elemente, und ist $B = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ eine Basis von V, so gibt es gemäß (B4) zu jedem $\vec{x} \in V$ *eindeutig bestimmte* Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{x}_j$: dies ist **die Darstellung von $\vec{x}$ bzgl. B**,

für die wir auch kurz schreiben: $\vec{x} \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Das Element $\vec{x} \in V$ ist bzgl. der Basis B durch diesen Koordinatenvektor $\overset{\downarrow}{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ eindeutig bestimmt:

$$!! \quad \boxed{\vec{x} \overset{\mathsf{B}}{=} \overset{\downarrow}{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad :\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{x}_j} \quad !!$$

Damit stimmt jeder n–dimensionale lineare Raum V über $\mathbb{K}$ "im Wesentlichen" mit dem Raum $\mathbb{K}^n$ überein — auch wenn V ein Funktionenraum ist!

Wenn nicht ausdrücklich eine andere Basis angegeben ist, fassen wir die Vektoren des $\mathbb{K}^n$ stets stillschweigend als Koordinatenvektor bzgl. der — fest vorgegebenen — **natürlichen** oder **kanonischen** Basis $B_{nat} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ auf, *ohne* dies durch die Schreibweise: $\vec{x} \overset{\mathsf{B_{nat}}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ zum Ausdruck zu bringen; wir verwenden diese Schreibweise nur bei der Darstellung von $\vec{x}$ bzgl. einer *anderen* Basis $B = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$. (Die Bezeichnung "kanonische" Basis kommt vom griechischen $\kappa\alpha\nu\omega\nu$ [Kanon], was soviel wie "Regel" oder "Richtlinie" bedeutet.)

21.9

In den Räumen $\mathbf{K}^n$ bedeuten also die Schreibweisen:

$\vec{x} = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ oder $\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$,

dass $\boxed{\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n}$ mit den **natürlichen** Basisvektoren $\vec{e}_1 , \dots , \vec{e}_n$.

Nur im Fall *irgend*–einer Basis $B = \{\vec{x}_1 , \dots , \vec{x}_n\}$ wird durch die die Schreibweise:

$\vec{x} \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ zum Ausdruck gebracht, dass $\boxed{\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n}$.

Zum Beispiel:

1.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ ist der Vektor $\vec{x} = 7\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$

mit den natürlichen Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{K}^3$.

Derselbe Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ hat bzgl. der Basis

$B = \left\{ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{K}^3$ die Darstellung: $\vec{x} \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

denn es ist: $2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 2\vec{x}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \vec{x}$;

die Basisvektoren $\vec{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ aus B haben bzgl. B wieder die Darstellungen:

$\vec{x}_i \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \end{pmatrix}$, denn es ist: $\vec{x}_1 = 1\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + 0\vec{x}_3 \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = 0\vec{x}_1 + 1\vec{x}_2 + 0\vec{x}_3 \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\vec{x}_3 = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + 1\vec{x}_3 \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.: $B = \{\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3\}$ mit $\varphi_1(x) = 1$ (konstant), $\varphi_2(x) = \cos x$, $\varphi_3(x) = \sin x$ ist eine Basis von $V = \operatorname{span}\{\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3\}$, da diese drei Funktionen linear unabhängig sind.

Für $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ist $f = 0\varphi_1 + 1\varphi_2 + i\varphi_3 \in V$ und f hat bzgl. B die Koordinaten:

$f \overset{\mathsf{B}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$. Der **Vektor** $\overset{\downarrow}{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ stellt also bzgl. der Basis B von V die **Funktion** $f(x) = e^{ix}$ dar!

21.C Skalarprodukt und Betrag auf dem $\mathbb{K}^n$.

Für beliebige Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des $\mathbb{K}^n$ ist:

21.10

(S1) $\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{j=1}^{n} x_j^* y_j}$ das **übliche Skalarprodukt** auf dem $\mathbb{K}^n$,

(S2) $\boxed{|\vec{x}\,| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}}$ der **übliche Betrag** auf dem $\mathbb{K}^n$. Damit ist:

(S3) $\boxed{|\vec{x}\,| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}}$! **Zusammenhang** zwischen üblichem Betrag und üblichem Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}^n$.

Beachte (!) :

- beim **Skalarprodukt** die **Konjugiert–Komplexen** der Komponenten des *ersten* Faktors! Dies ist die von den Naturwissenschaftlern bevorzugte Definition: die Mathematiker setzen in (S1) das Sternchen auf den *zweiten* Faktor, sie definieren also: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j^*$.
- beim **Betrag**, dass nicht die Quadrate, sondern die Quadrate der **Beträge** addiert werden!
- dass damit $\vec{x} \cdot \vec{x}$ und $|\vec{x}\,|$ stets nicht–negative **reelle** Zahlen sind und:
  $\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j^* x_j = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = |\vec{x}\,|^2$.

Gelegentlich bezeichnet man das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}^n$ wie in allgemeinen Innenprodukträumen mit $\langle\, \vec{x} \mid \vec{y}\,\rangle$ und den Betrag mit $\|\vec{x}\,\|$ oder auch $\|\vec{x}\,\|_2$ und nennt ihn die **Norm** bzw. die übliche **euklidische Norm** auf dem $\mathbb{K}^n$ (siehe Abschnitt 21.G).

z.B.: Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ i \end{pmatrix}$. Dann ist:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle\, \vec{x} \mid \vec{y}\,\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ i \end{pmatrix} = 4(1-i) - i(1+i) + 3i = 5 - 2i\,,$$

$$|\vec{x}\,| = \|\vec{x}\,\|_2 = \sqrt{|1+i|^2 + |i|^2 + 3^2} = \sqrt{(1+1) + 1 + 9} = \sqrt{12} \approx 3.4641\,,$$

$$|\vec{y}\,| = \|\vec{y}\,\|_2 = \sqrt{4^2 + |1+i|^2 + |i|^2} = \sqrt{16 + (1+1) + 1} = \sqrt{19} \approx 4.3589\,,$$

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = \langle\, \vec{x} \mid \vec{x}\,\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 3 \end{pmatrix} = (1-i)(1+i) - i\,i + 9 = (1+1)+1+9 = 12 \overset{\text{s.o.}}{=} |\vec{x}\,|^2 \,.$$

Bitte nicht schreiben:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} \overset{\text{f}}{=} \begin{pmatrix} 1-i \\ -i \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ i \end{pmatrix} \overset{\text{f}}{=} 4(1-i) - i(1+i) + 3i = 5-2i\,:$$

obwohl das Ergebnis wieder stimmt, sind die beiden ersten Gleichheitszeichen falsch! :

das erste Gleichheitszeichen ist falsch, weil $\begin{pmatrix} 1-i \\ -i \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}^{\,*} \neq \vec{x}$, und das zweite ist falsch,

weil $\begin{pmatrix} 1-i \\ -i \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ i \end{pmatrix} = 4(1+i) + i(1+i) + 3i = 3+8i\,.$

Die folgenden elementaren Regeln für das Skalarprodukt und den Betrag auf den Räumen $\mathbf{K}^n$ dienen in den folgenden Abschnitten als Vorbild für die Definition allgemeiner inneren Produkte und Normen auf beliebigen linearen Räumen!

21.11

Die wichtigsten Gleichungen:

(S4) $\boxed{\left.\begin{array}{r} \vec{x}\cdot\vec{x} \geq 0 \\ |\vec{x}\,| \geq 0 \end{array}\right\} \ \forall\, \vec{x} \in I\!K^n}$ und (S4a) $\boxed{\left.\begin{array}{r} \vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \\ |\vec{x}\,| = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}}$.

(S5) $\boxed{\vec{y}\cdot\vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{y}\,)^*}$! **nur im reellen Fall $\mathbf{K} = I\!R$ ist $\vec{y}\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{y}$!**

(S6) $\boxed{\begin{array}{l} \vec{x}\cdot(\lambda\vec{y}\,) = \lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}\,) \\ (\lambda\vec{x}\,)\cdot\vec{y} = \lambda^*(\vec{x}\cdot\vec{y}\,) \end{array}}$! **nur für *reelle* λ ist** $\lambda\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}\,)$!

(S7) $\boxed{\begin{array}{rcl} \vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}\,) & = & \vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z} \\ (\vec{x}+\vec{y}\,)\cdot\vec{z} & = & \vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z} \end{array}}$ **Distributivgesetze**

21.12

Zwei fundamentale Ungleichungen:

(S8) $\boxed{\boxed{|\vec{x}+\vec{y}\,| \le |\vec{x}\,| + |\vec{y}\,|}}$ **Dreiecksungleichung**

Mit (S2) hat die Dreiecksungleichung die Form:

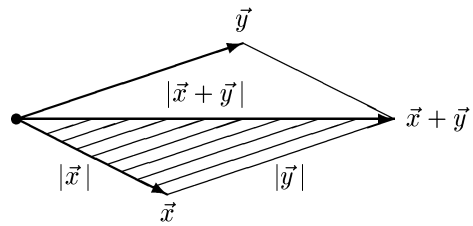
(S8a) $\boxed{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}}$ **Minkowski'sche Ungleichung** für Summen

(S9) $\boxed{\boxed{|\vec{x}\cdot\vec{y}\,| \le |\vec{x}\,||\vec{y}\,|}}$ **Schwarz'sche Ungleichung**

Mit (S1) und (S2) hat die Schwarz'sche Ungleichung die Form:

(S9a) $\boxed{\left|\sum_{j=1}^{n} x_j^* y_j\right| \le \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2\right)}}$ **Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung**, auch: **Hölder'sche Ungleichung** für Summen

Die **Dreiecksungleichung** (S8) ist anschaulich einleuchtend: in jedem Dreieck ist die Länge einer Seite höchstens so groß wie die Summe der Längen der beiden anderen Seiten:



In der speziellen Form (S8a) und (9a) sind diese beiden Ungleichung nur sehr mühsam zu beweisen; dagegen werden sie sich in allgemeiner Form in Abschnitt 21.H "fast spielerisch" aus den Regeln (S3) bis (S7) ergeben — unabhängig von den speziellen Realisationen (S1) und (S2)!

z.B.: Mit den beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \\ i \end{pmatrix}$ aus dem letzten Beispiel ist:

$$\vec{y}\cdot\vec{x} = (\ c\ )\, 41 + ii \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 3 \end{pmatrix} = 4(1+i) + +i(1-i) - 3i = 5+2i \overset{\text{s.o.}}{=} (\vec{x}\cdot\vec{y})^*\,,\ \vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 5+i \\ 1+2i \\ 3+i \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |\vec{x}+\vec{y}\,| &= \sqrt{|5+i|^2 + |1+2i|^2 + |3+i|^2} = \\ &= \sqrt{(25+1)+(1+4)+(9+1)} = \sqrt{41} \approx 6.4031 \\ &< |\vec{x}\,| + |\vec{y}\,| \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt{12}+\sqrt{19} \approx 7.8230\,,\ \text{und} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}\cdot\vec{y}\,| &\overset{\text{s.o.}}{=} |5-2i| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \approx 5.3852 \\
&< \; |\vec{x}\,||\vec{y}\,| \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt{12}\,\sqrt{19} = \sqrt{228} \approx 15.1\,.
\end{aligned}
$$

21.D Länge, Winkel und Orthogonalität im $\mathbb{K}^n$.

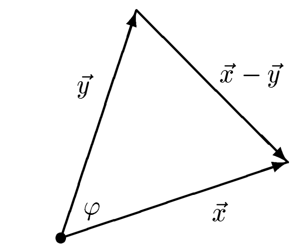
21.13 Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|\vec{x}\,| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

die übliche "pythagoräische" **Länge** des Vektors $\vec{x}$ und

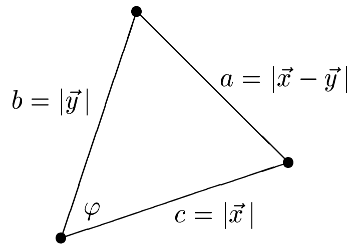
$$|\vec{x}-\vec{y}\,| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

der übliche "pythagoräische" **Abstand** zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$.



Aus den Rechenregeln für das Skalarprodukt ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}-\vec{y}\,|^2 &= (\vec{x}-\vec{y}\,)\cdot(\vec{x}-\vec{y}\,) \\
&= \vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y} = \text{[da } \mathbb{K} = \mathbb{R}] \\
&= |\vec{x}\,|^2 - 2(\vec{x}\cdot\vec{y}\,) + |\vec{y}\,|^2\,;
\end{aligned}
$$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$

andererseits erhält man mit dem Cosinus–Satz:

$|\vec{x}-\vec{y}\,|^2 = |\vec{x}\,|^2 + |\vec{y}\,|^2 - 2|\vec{x}\,||\vec{y}\,|\cos\varphi$.

Ein Vergleich der beiden erhaltenen Beziehungen liefert die Gleichung:

21.14 (S10) $\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}\,||\vec{y}\,|\cos\varphi}$

Mit dieser Gleichung wird üblicherweise das **Skalarprodukt auf den reellen Anschauungsräumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$** *definiert.*

Da sich das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ mit (S1) gut berechnen lässt, kann man umgekehrt die letzte Gleichung verwenden, um Winkel zu berechnen:

21.15 (S10a) $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}\,||\vec{y}\,|}}$ der **Winkel** φ (mit $0 \le \varphi \le \pi$), den die *reellen* Vektoren $\vec{x}\,,\,\vec{y} \ne \vec{o}$ einschließen.

Von besonderem Interesse ist der rechte Winkel: wegen $\cos\pi/2 = 0$ ergibt sich aus (S10):

21.16 (S11) $\boxed{\boxed{\vec{x}\perp\vec{y} \;\Leftrightarrow\; \vec{x}\cdot\vec{y} = 0}}$ **Kriterium für Orthogonalität.**

Hierdurch wird die Orthogonalität für *beliebige* Vektoren $\vec{x}\,,\,\vec{y} \in \mathbb{K}^n$ *definiert* — auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$! (Die Beziehungen (S10) und (S10a) sind jedoch im nicht–reellen Fall wenig sinnvoll, da sich im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ für $\cos\varphi$ i.a. ein nicht–reeller Wert ergäbe.)

Zum Beispiel:

(1) Die beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+i \\ -2+2i \end{pmatrix}$ sind **orthogonal**,

denn: $\vec{x}\cdot\vec{y} = 3(1-i) - i(1+i) + 2(-2+2i) = 3 - 3i - i + 1 - 4 + 4i = 0$;

dagegen sind die beiden reellen Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *nicht* orthogonal, denn:

$\vec{x}\cdot\vec{y} = 3 + 4 + 3 = 10 \ne 0$; den Winkel φ, den diese beiden Vektoren einschließen, erhält man aus der Beziehung (S10a): $\cos\varphi = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}\,||\vec{y}\,|} = \dfrac{10}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \dfrac{5}{7}$, also: $\varphi \approx 0.247\pi$ $(\approx 44.4^\circ)$.

(2) Für beliebige Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ sind die Vektoren $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} b^* \\ -a^* \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c^* \\ -b^* \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -c^* \\ 0 \\ a^* \end{pmatrix}$ **orthogonal** zu $\vec{r}$, denn:

$$\vec{r}\cdot\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b^* \\ -a^* \\ 0 \end{pmatrix} = a^*b^* - b^*a^* = 0\,,$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ c^* \\ -b^* \end{pmatrix} = b^*c^* - c^*b^* = 0 \quad \text{und}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -c^* \\ 0 \\ a^* \end{pmatrix} = -a^*c^* + c^*a^* = 0\,.$$

(Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann man natürlich die Sternchen weglassen!)

(3) Die Kosinusse der Winkel α_j $(j = 1, \ldots, n)$, die ein Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ mit den natürlichen Koordinatenachsen einschließt, nennt man die **Richtungskosinusse** von $\vec{r}$:

für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und mit den natürlichen Basisvektoren $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \delta_{3j} \end{pmatrix}$ ist

$$\boxed{\cos\alpha_j = \frac{\vec{e}_j \cdot \vec{r}}{|\vec{e}_j\,||\vec{r}\,|} = \frac{x_j}{|\vec{r}\,|} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}}\ ;$$

wegen: $\cos^2\alpha_1 + \cdots \cos^2\alpha_n = \dfrac{x_1^2}{|\vec{r}\,|^2} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{|\vec{r}\,|^2} = \dfrac{|\vec{r}\,|^2}{|\vec{r}\,|^2} = 1$ gilt für diese:

$$\boxed{\cos^2\alpha_1 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1}\ .$$

z.B.: der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schließt mit den drei Koordinatenachsen jeweils denselben Winkel $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z =: \alpha$ ein; die Richtungskosinusse erhält man aus der Beziehung: $3\cos^2\alpha = 1$,
d.h. $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, oder direkt: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{e}_x \cdot \vec{r}}{|\vec{e}_x\,||\vec{r}\,|} = \dfrac{\vec{e}_y \cdot \vec{r}}{|\vec{e}_y\,||\vec{r}\,|} = \dfrac{\vec{e}_z \cdot \vec{r}}{|\vec{e}_z\,||\vec{r}\,|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Damit ist $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z \approx 0.304\pi$ ($\approx 54.7^\circ$) .

21.E Allgemeine Norm.

21.17

Sei $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto \|x\|$ (die "Norm von x") ist eine **Norm** auf V, wenn die folgenden **Norm–Axiome** erfüllt sind:

(N1) $\boxed{\|x\| \geq 0 \ \ \forall\, x \in V\,, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o}$,

(N2) $\boxed{\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \ \forall\, x \in V\,,\ \lambda \in \mathbb{K}}$,

(N3) $\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall\, x, y \in V}$ **Dreiecks–Ungleichung**

Für $x, y \in V$ ist $\|x - y\|$ der **Abstand** zwischen x und y **im Sinne dieser Norm**.

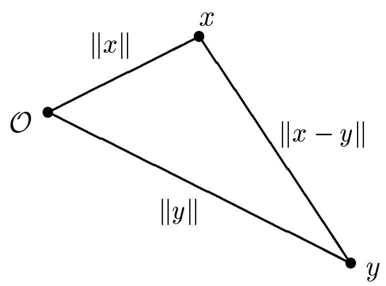
Man nennt den linearen Raum V einen **normierten Raum**, wenn auf V eine Norm $\|\cdot\|$ definiert ist; mit der Schreibweise: $V = (V, \|\cdot\|)$ wird in diesem Fall zum Ausdruck gebracht, dass der bzgl. $\|\cdot\|$ normierte Raum gemeint ist.

Die Dreiecks–Ungleichung (N3) benutzt man oft auch in der "verkehrten" Form:

21.18 (N3') $\boxed{\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|}$ **Dreiecks–Ungleichung** ("verkehrte" Form)

Diese Variante der Dreiecks–Ungleichung ergibt sich sehr einfach aus der "echten" Dreiecks–Ungleichung (N3):

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| = \|(x-y)+y\| \overset{(N3)}{\leq} \|x-y\| + \|y\| \\ \|y\| = \|(y-x)+x\| \overset{(N3)}{\leq} \|y-x\| + \|x\| \end{array}\right\} ,$$



somit: $\left\{\begin{array}{l} \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \\ \|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\| \end{array}\right\} ,$

d.h.: $\big|\|x\| - \|y\|\big| = \max\big\{\|x\| - \|y\|\,,\ \|y\| - \|x\|\big\} \leq \|x-y\|$. ▮

Eine unmittelbare Folge dieser Dreiecks–Ungleichung (N3') ist die **Stetigkeit der Norm:**

21.19 (N4) Wenn $x_n \to x$ in $(V, \|.\|)$, d.h. $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$, dann ist auch $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$. (s. Abschnitt 22.A)

(Denn dann hat man: $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \overset{(N3')}{\leq} \|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty)$. ▮)

Beispiele gebräuchlicher Normen:

21.20

auf den Räumen $\mathbf{K}^n$:

(a) $\boxed{\boxed{\|\vec{x}\,\|_2 = |\vec{x}\,| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}}}$ **üblicher Betrag**, **übliche Norm**: **euklidische Norm** oder **2–Norm**,

(b) $\boxed{\|\vec{x}\,\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|}$ die **1–Norm**,

(c) $\boxed{\|\vec{x}\,\|_\infty = \max\{x_1, \ldots, x_n\}}$ die **Maximum–Norm**;

auf den Räumen $C[a,b]$ und $L^2[a,b]$ aller auf einem Intervall $[a,b]$ **stetigen** bzw. **quadratisch integrierbaren** Funktionen (s. Abschnitt 20.F):

(d) $\boxed{\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}}$ **übliche Norm** für Funktionen: **euklidische Norm** oder **2–Norm**,

(e) $\boxed{\|f\|_\infty = \sum_{x\in[a,b]} |f(x)|}$ die **Supremum–Norm** auf $C[a,b]$ (falls $[a,b]$ endlich ist).

Auf den endlich-dimensionalen Räumen $\mathbb{K}^n$ ist aufgrund des folgenden Satzes eine Unterscheidung der verschiedenen Normen in der Regel nicht sehr wesentlich:

21.21 Je zwei Normen $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ auf dem $\mathbb{K}^n$ sind **äquivalent**, d.h. es gibt stets zwei Konstanten $\gamma_1,\gamma_2>0$ so, dass

$$\boxed{\gamma_1\|\vec{x}\,\|_a \le \|\vec{x}\,\|_b \le \gamma_2\|\vec{x}\,\|_a \quad \forall\,\vec{x}\in\mathbb{K}^n}\ .$$

21.F Allgemeines inneres Produkt.

21.22 Sei $V=(V,\mathbb{K},+,\cdot)$ ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.
Eine Funktion $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{K} : (x,y)\mapsto\langle x\,|\,y\rangle\in\mathbb{K}$ (lies: "x mal y")
ist ein **inneres Produkt** oder ein **Skalarprodukt** auf V, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(IP 1) $\boxed{\langle x\,|\,x\rangle \ge 0\ \forall x\in V,\quad \langle x\,|\,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0}$,

(IP 2) $\boxed{\langle y\,|\,x\rangle = \langle x\,|\,y\rangle^*}$ **!** das innere Produkt ist i.a. **nicht kommutativ**

$\boxed{\textbf{nur im reellen Fall } \mathbb{K}=\mathbb{R} \textbf{ ist } \langle y\,|\,x\rangle = \langle x\,|\,y\rangle}$ **!**

(IP 3) $\boxed{\begin{array}{l}\langle x\,|\,\lambda y\rangle = \lambda\langle x\,|\,y\rangle\\ \langle \lambda x\,|\,y\rangle = \lambda^*\langle x\,|\,y\rangle\end{array}}$ **!** $\boxed{\begin{array}{l}\textbf{nur für } \textit{reelle } \lambda \textbf{ ist}\\ \langle x\,|\,\lambda y\rangle = \langle\lambda x\,|\,y\rangle = \lambda\langle x\,|\,y\rangle\end{array}}$ **!**

(IP 4) $\boxed{\begin{array}{l}\langle x\,|\,y+z\rangle = \langle x\,|\,y\rangle + \langle x\,|\,z\rangle\\ \langle x+y\,|\,z\rangle = \langle x\,|\,z\rangle + \langle y\,|\,z\rangle\end{array}}$: das sind die üblichen **Distributivgesetze**.

Für $x,y\in V$ ist $\langle x\,|\,y\rangle$ das **innere Produkt** von x und y — in dieser Reihenfolge!

(Wir haben die Regeln für das Skalarprodukt auf den Räumen $\mathbb{K}^n$ übernommen (siehe Nr. 21.11 und 12), um auf *beliebigen* linearen Räumen ein inneres Produkt zu definieren!)

Wenn auf dem linearen Raum V ein inneres Produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ definiert ist, nennt man V einen

$\boxed{\textbf{unitären Raum}}$ oder $\boxed{\textbf{Innenproduktraum}}$ oder $\boxed{\textbf{Prähilbertraum}}$,

im *reellen* Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch oft einen $\boxed{\textbf{euklidischen Raum}}$.

In diesem Fall wird mit der Schreibweise: $V = (V\,, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ zum Ausdruck gebracht, dass das inneres Produkt auf V mit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ bezeichnet wird.

Es ist klar, dass das in Nr. 21.10 definierte, übliche Skalarprodukt auf den Räumen $\mathbb{K}^n$ *auch* ein inneres Produkt ist. Daneben verwenden wir noch

21.23 das **übliche innere Produkt auf den Funktionenräumen** $L^2[a,b]$ (auch auf $C[a,b]$, falls $[a,b]$ beschränkt ist):

$$\boxed{\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x)^* g(x)\,dx} \quad \text{für } f\,,\ g \in L^2[a,b] \text{ bzw. } C[a,b]\,.$$

z.B.: Die beiden Funktionen $f(x) = e^{ix}$ und $g(x) = \sin x$ gehören zu $L^2[0,\pi]$:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^\pi |f(x)|^2\,dx = \int_0^\pi dx = \pi < \infty \quad \text{und}$$

$$\|g\|_2^2 = \int_0^\pi |g(x)|^2\,dx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin x\,\cos x\right)\Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} < \infty\,;$$

ihr (übliches) inneres Produkt ist:

$$\begin{aligned}
\langle f \mid g \rangle &= \int_0^\pi f(x)^*\,g(x)\,dx = \int_0^\pi e^{-ix}\sin x\,dx = [\text{Euler'sche Formel}] \\
&= \int_0^\pi \cos x \sin x\,dx - i\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin^2 x - i\left(x - \sin x \cos x\right)\right]_{x=0}^{\pi} = -i\,\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

22 Unitäre Räume. Konvergenz in normierten Räumen.

Stichpunkte: Euklidische Norm, Schwarz'sche Ungleichung und Dreiecksungleichung; Abstände bzgl. einer Norm, Konvergenz bzgl. einer Norm, gleichmäßige Konvergenz und Konvergenz im quadratischen Mittel; Vollständigkeit, Hilbert- und Banachräume.

22.A Euklidische Norm.

22.1 Auf jedem unitären Raum $U = (U, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ wird durch

(IP5) $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}}$ die zugehörige **euklidische Norm** $\|\cdot\|$

definiert (wie auf den Räumen $\mathbb{K}^n$: siehe Nr. 21.10, Regel (S3)!).

Für diese Norm sind also die Normaxiome (N1), (N2), (N3) erfüllt; darüberhinaus gilt mit ihr die **Schwarz'sche Ungleichung:**

22.2 (IP6) $\boxed{\big|\langle x \mid y \rangle\big| \leq \|x\|\,\|y\|}$

(siehe die Regeln (S9) und (S9a) in Nr. 21.12).

Die beiden ersten Normaxiome (N1) und (N2) sind unmittelbar einleuchtend:
aufgrund von (IP1) ist $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x \mid x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
und mit (IP3) folgt: $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x \mid \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^* \lambda \langle x \mid x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x \mid x \rangle} = |\lambda|\,\|x\|$.

Nachweis der **Schwarz'schen Ungleichung:**

Im Fall $y = 0$ ist $|\langle x \mid y \rangle| = 0 = \|x\|\,\|y\|$. Sei $y \neq 0$. Für beliebige $\beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \beta y\|^2 &\overset{\text{(IP5)}}{=} \langle x - \beta y \mid x - \beta y \rangle \overset{\text{(IP3)},\text{(IP4)}}{=} \\ &= \langle x \mid x \rangle - \langle x \mid \beta y \rangle - \langle \beta y \mid x \rangle + \langle \beta y \mid \beta y \rangle = \\ &= \|x\|^2 - \beta \langle x \mid y \rangle - \beta^* \langle y \mid x \rangle + \beta^* \beta \|y\|^2 ; \end{aligned}$$

mit $\beta = \dfrac{\langle y \mid x \rangle}{\|y\|^2}$ ergibt sich insbesondere:

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\langle y \mid x \rangle \langle x \mid y \rangle}{\|y\|^2} - \frac{\langle y \mid x \rangle^* \langle y \mid x \rangle}{\|y\|^2} + \frac{\langle y \mid x \rangle^* \langle y \mid x \rangle}{\|y\|^4} \|y\|^2 \overset{\text{(IP2)}}{=} \|x\|^2 - \frac{|\langle x \mid y \rangle|^2}{\|y\|^2} ,$$

somit: $0 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x \mid y \rangle|^2$ bzw. $\boxed{|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\|}$.

Mit der Schwarz'schen Ungleichung bekommt man die **Dreiecksungleichung:**

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y \mid x + y \rangle = \langle x \mid x \rangle + \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x \mid y \rangle + \langle x \mid y \rangle^* + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\mathrm{e}\, \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \overset{*)\, s.u.}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x \mid y \rangle| + \|y\|^2 \overset{(IP6)}{\leq} \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 , \end{aligned}$$

somit: $\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$. (*): wir haben hier benutzt, dass für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ gilt: $\Re\mathrm{e}\, z = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$.) ▮

Aus der Schwarz'schen Ungleichung (IP6) und der "verkehrten" Dreiecks–Ungleichung (N3') folgt

22.3 (IP7)

die **Stetigkeit des inneren Produktes:**

Wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ in $(V, \|\cdot\|)$, d.h. wenn $\|x_n - x\| \to 0$ und $\|y_n - y\| \to 0$ für $n \to \infty$, dann ist auch $\langle x_n \mid y_n \rangle \to \langle x \mid y \rangle$ für $n \to \infty$.

Denn dann ist:

$$\begin{aligned}
\Big|\langle x_n \mid y_n \rangle - \langle x \mid y \rangle\Big| &= \Big|\langle x_n - x + x \mid y_n \rangle - \langle x \mid y - y_n + y_n \rangle\Big| = \\
&= \Big|\langle x_n - x \mid y_n \rangle + \langle x \mid y_n \rangle - \langle x \mid y - y_n \rangle - \langle x \mid y_n \rangle\Big| = \\
&= \Big|\langle x_n - x \mid y_n - y \rangle + \langle x_n - x \mid y \rangle - \langle x \mid y - y_n \rangle\Big| \leq \\
&\leq \Big|\langle x_n - x \mid y_n - y \rangle\Big| + \Big|\langle x_n - x \mid y \rangle\Big| + \Big|\langle x \mid y - y_n \rangle\Big| \overset{(IP6)}{\leq} \\
&\leq \|x_n - x\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| + \|x\|\,\|y - y_n\| \;\to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, somit: $\boxed{\langle x_n \mid y_n \rangle \to \langle x \mid y \rangle \text{ für } n \to \infty}$. ▮

Jeder **unitäre** Raum $U = (U, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ist also mit der gemäß (IP5) gebildeten, **euklidischen Norm** $\|\cdot\|$ insbesondere auch ein **normierter** Raum.

22.4 Allgemein nennt man eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem normierten Raum $V = (V, \|\cdot\|)$ eine **euklidische Norm**, wenn sich auf V ein inneres Produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ so definieren lässt, dass (IP5) gilt, d.h. dass $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}\ \forall x \in V$.

Nicht jede Norm ist euklidisch! :

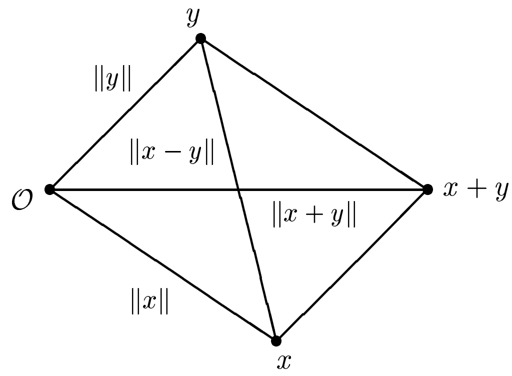
22.5 (N5)

Die Norm $\|\cdot\|$ eines normierten Raumes $V = (V, \|\cdot\|)$ ist genau dann eine **euklidische Norm**, wenn für sie die **Parallelogrammgleichung:**

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$$

erfüllt ist.

In jedem unitären Raum — und nur in unitären Räumen! — ist die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten dieses Parallelogramms:



z.B.: Die beiden **2–Normen**, die wir bisher eingeführt haben, sind **euklidisch**, d.h. sie werden gemäß (IP5) jeweils von einem inneren Produkt erzeugt (sie erfüllen somit alle die Parallelogrammgleichung):

(a) (s. Nummer 21.10, (S3))

Das übliche Skalarprodukt auf den Räumen $\mathbb{K}^n$:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j^* y_j \quad \text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

erzeugt die euklidische 2–Norm (den üblichen Betrag):

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^* x_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}\ .$$

(b) (s. Nummer 21.23)

Das übliche innere Produkt für Funktionen aus $L^2[a,b]$ oder — falls $[a,b]$ beschränkt ist — aus $C[a,b]$:

$$\langle\, f \mid g \,\rangle = \int_a^b f(x)^* g(x)\, dx \quad \text{für } f,g \in L^2[a,b] \text{ bzw. } \in C[a,b]$$

erzeugt die übliche 2–Norm für Funktionen:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle\, f \mid f \,\rangle} = \sqrt{\int_a^b f(x)^* f(x)\, dx} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}\ .$$

Bei diesen Beispielen ist es nicht erforderlich, die Parallelogrammgleichung heranzuziehen, weil zu den Normen jeweils das erzeugende innere Produkt bekannt ist. Die Parallelogrammgleichung wird in der Regel auch nur dann benutzt, wenn nachgewiesen werden soll, dass es zu einer gegebenen Norm ein erzeugendes inneres Produkt *nicht gibt*.

Eine Norm, welche die Parallelogrammgleichung *nicht* erfüllt, kann *nicht* euklidisch sein! So ist **z.B.** die **Supremum–Norm** $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Raum $C[a,b]$ *nicht* euklidisch:

Betrachten wir z.B. auf dem Raum $C[0,1]$ die Funktionen $f(x) = 1$ (konstant) und $g(x) = x$. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \max_{0\le x\le 1} |f(x)| = 1 \\ \|g\|_\infty &= \max_{0\le x\le 1} |x| = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 = 4\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &= \max_{0\le x\le 1} |1+x| = 2 \\ \|f-g\|_\infty &= \max_{0\le x\le 1} |1-x| = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 5\,,$$

folglich: $\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2$,

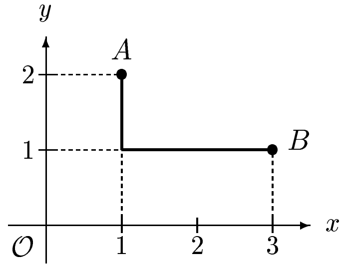
d.h. die Supremum–Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $C[0,1]$ ist *nicht* euklidisch.

22.B Abstände.

Verschiedene Normen auf den einzelnen Räumen bieten verschiedene Möglichkeiten, "Abstände", "Unterschiede", "Abweichungen", ... auf diesen Räumen zu messen:

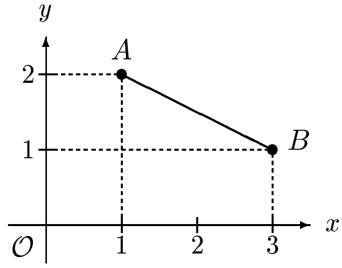
z.B.: 1. Im $\mathbb{R}^2$ haben die beiden Punkte $A(1|2)$ und $B(3|1)$ die Abstände:

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_1 = 2 + 1 = 3$$

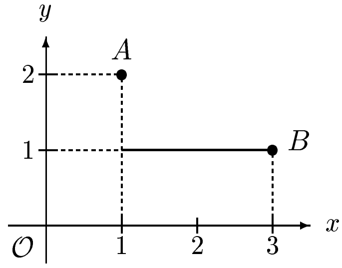


$$\|\vec{b} - \vec{a}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

(= üblicher Abstand)

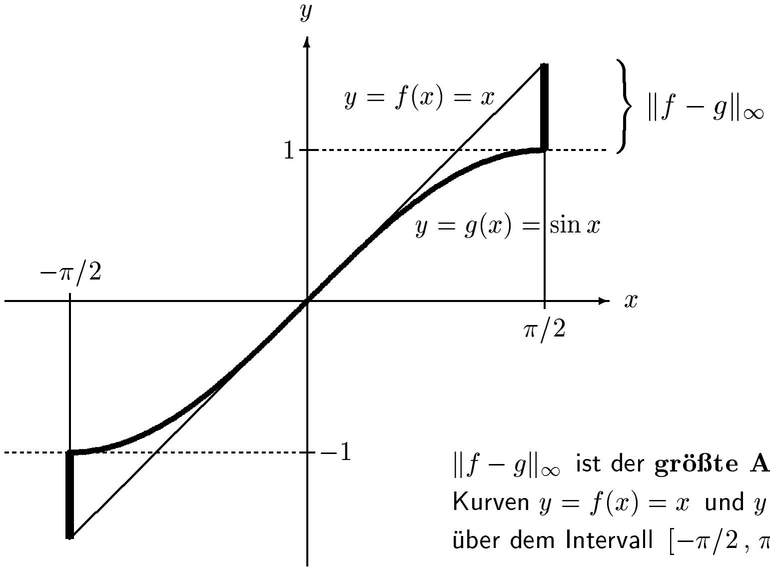


$$\|\vec{b} - \vec{a}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{2, 1\} = 2$$



2. Für die beiden Funktionen $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ ergeben sich über dem Intervall $[-\pi/2\,,\,\pi/2]$ die **Abstände:**

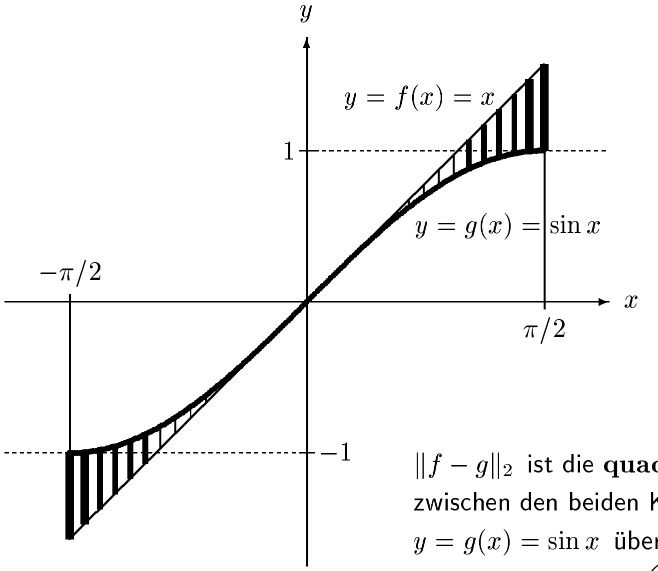
$$\|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi/2\,,\,\pi/2]} |x-\sin x| = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57:$$



$\|f-g\|_\infty$ ist der **größte Abstand** der beiden Kurven $y = f(x) = x$ und $y = g(x) = \sin x$ über dem Intervall $[-\pi/2\,,\,\pi/2]$.

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x-\sin x|^2\,dx} = \sqrt{2\int_0^{\pi/2}\left(x^2 - 2x\sin x + \sin^2 x\right)\,dx} =$$

$$= \sqrt{2\left[\frac{x^3}{3} - 2(-x\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}(x - \sin x\,\cos x)\right]_0^{\pi/2}} = \sqrt{2\left(\frac{\pi^3}{24} - 2 + \frac{\pi}{4}\right)} \approx 0.39:$$



$\|f-g\|_2$ ist die **quadratische Abweichung** zwischen den beiden Kurven $y = f(x) = x$ und $y = g(x) = \sin x$ über dem Intervall $[-\pi/2\,,\,\pi/2]$.

22.C Konvergenz bzgl. einer Norm.

22.6 Sei $V = (V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine **Folge** $(x_n)_{\mathbb{N}}$ mit $x_n \in V$ **konvergiert bzgl.** $\|\cdot\|$ oder **konvergiert in** $(V, \|\cdot\|)$ gegen ein Element $x_0 \in V$, wenn die reelle Folge der Abstände $\|x_n - x_0\|$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert:

$$\boxed{x_n \to x_0 \text{ für } n \to \infty \text{ in } (V, \|\cdot\|) \;:\Leftrightarrow\; \|x_n - x_0\| \to 0 \;(n \to \infty)}\;.$$

Dementsprechend ist eine **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ (mit $x_k \in V$) **bzgl.** $\|\cdot\|$ oder **in** $(V, \|\cdot\|)$ gegen ein Element $x_0 \in V$ **konvergent**, wenn die Abstände $\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} x_k - x_0\right\|$ der n–ten Partialsummen zu x_0 für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren:

22.7
$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x_k = x_0 \text{ in } (V, \|\cdot\|) \;:\Leftrightarrow\; \left\|\sum_{k=0}^{n} x_k - x_0\right\| \to 0 \text{ für } n \to \infty}\;.$$

I. Konvergenz im $\mathbb{K}^n$.

Die Konvergenz bzgl. der üblichen euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ auf den Räumen $\mathbb{K}^n$ ist die übliche, "anschauliche" Konvergenz auf diesen Räumen, insbesondere stimmt sie auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit der früher definierten Konvergenz von Zahlen–Folgen und –Reihen überein.

Da auf dem $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind (s.o. Nr. 21.21), ist auf dem Raum $\mathbb{K}^n$ jede bzgl. *irgendeiner* Norm $\|\cdot\|_*$ konvergente Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch bzgl. jeder *anderen* Norm konvergent; zum Nachweis der Konvergenz kann man sich somit die gerade bequemste Norm aussuchen, insbesondere ist z.B. auf dem $\mathbb{K}^n$ — für irgendeine Norm $\|\cdot\|_*$ — eine Folge $(\vec{x}_k)_{\mathbb{N}}$ genau dann bzgl. $\|\cdot\|_*$ konvergent, wenn sie bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, d.h. wenn sie *komponentenweise* konvergent ist:

22.8
$$\vec{x}_k \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \vec{x}_0 \text{ bzgl. } \|\cdot\|_* \Leftrightarrow \vec{x}_k \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \vec{x}_0 \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow$$
$$x_{k1} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} x_{01} \;\ldots\; x_{kn} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} x_{0n}\;.$$

Eine nützliche Folgerung hieraus ist:

Auf den Räumen $\mathbb{K}^n$ ist eine **Reihe** genau dann bzgl. *irgendeiner* Norm $\|\cdot\|_*$ konvergent, wenn sie (im üblichen Sinne) **komponentenweise** konvergiert:

22.9

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 \text{ bzgl. } \|\cdot\|_* \iff \left\| \sum_{k=1}^{m} \vec{x}_k - \vec{x}_0 \right\|_* \overset{(m\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

$$\iff \text{für alle } j = 1, \ldots, n \text{ ist } \sum_{k=1}^{\infty} x_{kj} = x_{0j} \,.$$

II. Gleichmäßige Konvergenz. (*)

Die bisher von uns überwiegend betrachtete Konvergenz von **Funktionen–Folgen und –Reihen** ist die **punktweise** Konvergenz:

22.10

$f_n \to f \;\; (n \to \infty)$ **punktweise** auf $[a,b]$

$$:\Leftrightarrow \;\; \forall x \in [a,b] \; : \; \big|f_n(x) - f(x)\big| \to 0 \;\; (n \to \infty)\,.$$

Hier konvergieren die Folgen $\big(f_n(x)\big)_{\mathbb{N}}$ an den einzelnen Stellen $x \in [a,b]$ — *unabhängig* voneinander — gegen die Zahl $f(x)$; an verschiedenen Stellen x, x' kann dabei die Konvergenz sehr ungleichmäßig sein: schnell an der einen, langsam an der anderen Stelle.

Die Konvergenz in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ bzgl. der **Supremum–Norm** $\|\cdot\|_\infty$ ist die **gleichmäßige** Konvergenz: für eine Funktionenfolge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ und eine Funktion f ist

22.11

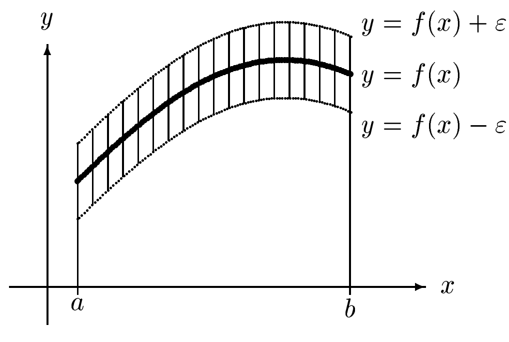
$f_n \to f \;\; (n \to \infty)$ **gleichmäßig** auf $[a,b]$

$$:\Leftrightarrow \;\; \sup_{x \in [a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \to 0 \;\; (n \to \infty) \;\; \Leftrightarrow \;\; \|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad \text{über } [a,b]$$

$$\Leftrightarrow \;\; f_n \to f \;\; (n \to \infty) \;\; \text{bzgl. } \|\cdot\|_\infty \quad \text{über } [a,b]\,.$$

Im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz gibt es bei der *gleichmäßigen* Konvergenz zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_\varepsilon$ **und für alle** $x \in [a,b]$:

die Graphen $y = f_n(x)$ verlaufen damit für $n \ge n_\varepsilon$ **ganz** in dem "ε–Schlauch": $f(x) - \varepsilon \le f_n(x) \le f(x) + \varepsilon$ über $[a,b]$.



Beispiel 1 : Die Funktionenfolge $\boxed{f_n(x) = \dfrac{n\,\sin x + \cos x}{n}\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht nur **punktweise**, sondern sogar **gleichmäßig** auf $\mathbb{R}$ — also in $(C[\mathbb{R}]\,,\,\|\cdot\|_\infty\,)$ — gegen die Funktion $f(x) = \sin x$:

da nämlich $|\cos x| \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, kann man zu $\varepsilon > 0$ stets ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $1/n_\varepsilon < \varepsilon$; man hat dann **für alle** $x \in \mathbb{R}$ und für $n \ge n_\varepsilon$: $\left|\dfrac{\cos x}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$,

also: $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{\cos x}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ für $n \ge n_\varepsilon$.

III. Konvergenz im quadratischen Mittel.

Die **mittlere quadratische Abweichung** zwischen zwei Funktionen f, g aus $C[a,b]$ oder $L^2[a,b]$ über einem *endlichen* Intervall $[a,b]$ ist die Zahl

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|^2\,dx} = \frac{\|f-g\|_2}{\sqrt{b-a}}\,. \qquad \text{(s.o. Nr. 22.B)}$$

Aus diesem Grund nennt man — auch für unbeschränkte Intervalle $[a,b]$ — die Konvergenz bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ auf den Räumen $C[a,b]$ oder $L^2[a,b]$ die **Konvergenz im quadratischen Mittel**:

22.12

$f_n \to f\quad (n \to \infty)$ **im quadratischen Mittel** auf $[a,b]$

$:\Leftrightarrow\ \|f_n - f\|_2 \to 0\ \ (n\to\infty)$ über $[a,b]$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b |f_n(x) - f(x)\,|^2\,dx\ \to 0\ \ (n\to\infty)$.

Beispiel 2 : Wir betrachten die Funktionenfolge

$\boxed{f_n(x) = n\left(x^n - x^{n+1}\right)\ ,\ x \in [0,1]\,,\ n \in \mathbb{N}}$:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(0) = f_n(1) = 0$ und $f_n(x) > 0$ für $0 < x < 1$,

und wegen $n\,x^n \to 0\ \ (n\to\infty)$ für $0 < x < 1$, ist auch $f_n(x) \to 0\ \ (n\to\infty)$ für $0 < x < 1$.

$(f_n)_{\mathbb{N}}$ ist damit eine Folge *stetiger* Funktionen $f_n \in C[0,1]$, die *punktweise* auf $[0,1]$ gegen die *stetige* Funktion $f(x) = 0$ (konstant) konvergiert.

Diese Folge konvergiert allerdings **nicht gleichmäßig**, d.h. sie konvergiert *nicht* in dem Raum $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$! Um das einzusehen, bestimmen wir zunächst die Maxima:

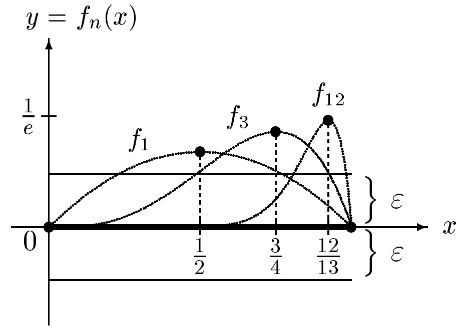


Abbildung 22.1: $f_n(x) = n\,(x^n - x^{n+1})$

es ist $f_n'(x) = n\left(n\,x^{n-1} - (n+1)\,x^n\right)$, für $0 < x < 1$ also:

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n\,x^{n-1} = (n+1)\,x^n \Leftrightarrow x = \dfrac{n}{n+1}$.

$f_n(x)$ hat demnach bei $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ein lokales Maximum mit dem Funktionswert

$f_n(x_n) = n\left(\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. Damit ist

$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \nearrow e^{-1} = 0.36788 > 0$ für $n \to \infty$.

Jeder der Graphen $y = f_n(x)$ verlässt also im Fall $\varepsilon < e^{-1} = 0.36788$ den "ε–Schlauch" $]f(x) - \varepsilon\,,\, f(x) + \varepsilon[$.

Damit kann die Folge $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$ **nicht gleichmäßig** auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion $f(x) = 0$ konvergieren. Sie konvergiert jedoch **im quadratischen Mittel** (d.h. sie konvergiert im Raum $\left(C[0,1], \|\cdot\|_2\right)$, da die Funktionen $f(x)$ und $f_n(x)$ sämtlich stetig sind), denn:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_2^2 &= \|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx = n^2 \int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right)^2 dx = \\
&= n^2 \int_0^1 \left(x^{2n} - 2x^{2n+1} + x^{2n+2}\right) dx = \\
&= n^2 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}\right) = \\
&= \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \to 0 \quad (n \to \infty)\,.
\end{aligned}$$

IV. Vergleich zwischen punktweiser Konvergenz, gleichmäßiger Konvergenz und Konvergenz im quadratischen Mittel. (*)

22.13

Die Grenzfunktion f einer nur **punktweise** auf $[a,b]$ konvergenten Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ **stetiger** Funktionen f_n ist *nicht notwendig* ebenfalls stetig:

$\boxed{f_n \text{ stetig, } f_n \to f \text{ punktweise} \overset{i.a.}{\not\Rightarrow} f \text{ stetig}}$;

22.14 Die Grenzfunktion f einer **gleichmäßig** auf einem (endlichen oder unendlichen Intervall) $[a, b]$ konvergenten Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ **stetiger** Funktionen f_n ist *stets* ebenfalls **stetig**:

$\boxed{f_n \text{ stetig, } f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2 \;\Rightarrow\; f \text{ stetig}}$;

22.15 Die Grenzfunktion f einer **im quadratischen Mittel** konvergenten Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ **stetiger** Funktionen f_n ist *nicht notwendig* stetig!:

$\boxed{f_n \text{ stetig, } f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2 \;\overset{i.a.}{\not\Rightarrow}\; f \text{ stetig}}$.

22.16 Jede über einem (beliebigen) Intervall $[a, b]$ **gleichmäßig** konvergente Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ist über $[a, b]$ auch **punktweise** konvergent:

$\boxed{f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty \;\Rightarrow\; f_n \to f \text{ punktweise}}$.

22.17 Die Umkehrung von Nr. 22.16 *gilt nicht!*: wenn die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ *nur punktweise* auf $[a, b]$ konvergiert, konvergiert sie *nicht notwendig* auch gleichmäßig auf $[a, b]$:

$\boxed{f_n \to f \text{ punktweise } \;\overset{i.a.}{\not\Rightarrow}\; f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty}$.

22.18 Jede über einem *endlichen* Intervall $[a, b]$ **gleichmäßig** konvergente Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ist über $[a, b]$ auch **im quadratischen Mittel** konvergent:

$\boxed{f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty \;\Rightarrow\; f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2}$.

22.19 Die Voraussetzung der *gleichmäßigen* Konvergenz in Nr. 22.18 ist wesentlich: wenn die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ *nur punktweise* über $[a, b]$ konvergiert, konvergiert sie *nicht notwendig* auch im quadratischen Mittel:

$\boxed{f_n \to f \text{ punktweise } \;\overset{i.a.}{\not\Rightarrow}\; f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2}$.

22.20 Umgekehrt ist eine **im quadratischen Mittel** konvergente Folge *nicht notwendig* **punktweise**, insbesondere also auch *nicht notwendig* **gleichmäßig** konvergent:

$$\boxed{f_n \to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2 \overset{i.a.}{\not\Rightarrow} f_n \to f \text{ punktweise}}\,.$$

Gegenbeispiel zu Nr. 22.13 :

Beispiel 3 : Die Folge

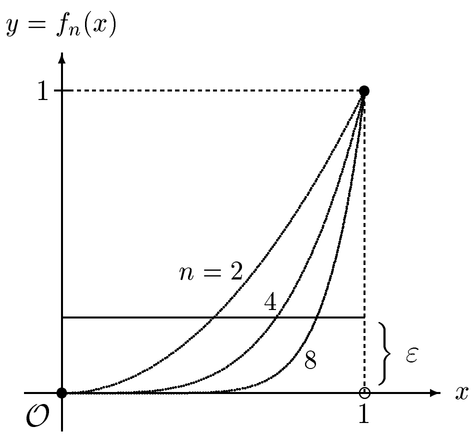
$\boxed{f_n(x) = x^n \;\; (n \in \mathbb{N})}$ ist eine Folge (überall) stetiger Funktionen, die **punktweise** auf dem Intervall $[0,1]$ gegen die *nicht–stetige* Funktion

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{array} \right\}$$

konvergiert; sie konvergiert jedoch *nicht gleichmäßig* auf $[0,1]$:

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, also $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0 \;\; (n \to \infty)$.



$f_n(x) = x^n$ für $n = 2, 4, 8$.

Abbildung 22.2:

Gegenbeispiel zu Nr. 22.15 :

Beispiel 4 : Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\boxed{f_n(x) := \begin{cases} 1 \;\text{ für } \; -1 \leq x \leq 0\,, \\ \sqrt{1-n^2x^2} \;\text{ für } 0 < x < 1/n\,, \\ 0 \;\text{ für } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}}$$

und sei $f(x)$ der punktweise Grenzwert dieser über dem Intervall $[-1,1]$:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \;\text{ für } \; -1 \leq x \leq 0\,, \\ 0 \;\text{ für } 0 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

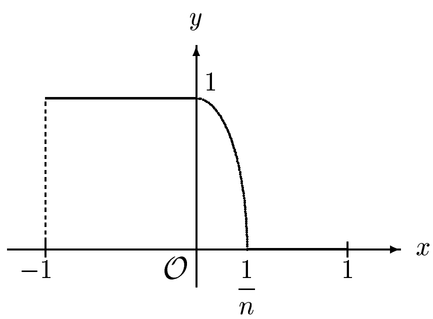


Abbildung 22.3: $y = f_n(x)$

Die Funktionen $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, sind stetig, $f(x)$ ist nicht stetig, also: $f_n \in C[-1,1]$, $f \notin C[-1,1]$, und die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert auch im quadratischen Mittel gegen f:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2\,dx = \int_0^{1/n} (1 - n^2x^2)\,dx = \left[x - \frac{n^2}{3}x^3\right]_0^{1/n} = \frac{2}{3n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0\,.$$

Da $f(x)$ unstetig ist, kann die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ über dem Intervall $[-1,1]$ nicht gleichmäßig konvergieren (s.o. Nr. 22.14): für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 .$$

Zu Nr. 22.18 : Der Beweis ist einfach: wenn $[a,b]$ ein *endliches* Intervall ist und die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ über $[a,b]$ gegen f konvergiert, so gilt:

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_2^2 &= \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \le \int_a^b \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\right)^2 dx = \\ &= \int_a^b \|f_n - f\|_\infty^2\,dx = (b-a)\|f_n - f\|_\infty^2 \to 0 \ \ (n\to\infty)\ ,\end{aligned}$$

d.h. $f_n \to f\ \ (n\to\infty)$ im quadratischen Mittel. ∎

Beachte: die *Beschränktheit* des Intervalls $[a,b]$ ist hier wesentlich: über dem *unbeschränkten* Intervall $[1,\infty]$ konvergiert z.B. die Folge $f_n(x) = 1/n\sqrt{x}$, $n \in \mathbb{N}$, zwar **gleichmäßig** gegen die Nullfunktion $f(x) = 0$: $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[1,\infty[} \left|\frac{1}{n\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{n} \to 0\ \ (n\to\infty)$,

aber sie konvergiert über $[1,\infty[$ **nicht im quadratischen Mittel:**

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_1^\infty \left|\frac{1}{n\sqrt{x}}\right|^2 dx = \frac{1}{n^2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty \ \ \forall n \in \mathbb{N} .$$

Gegenbeispiel zu Nr. 22.19 :

Beispiel 5 : (vgl. mit Abbildung 22.1) Die Folge

$$\boxed{f_n(x) = n^2(x^n - x^{n+1})\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ \ \ (x \in [0,1])}$$

konvergiert über $[0,1]$ punktweise gegen die Nullfunktion $f(x) = 0$:

Zunächst ist $f_n(0) = f_n(1) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$,
und wegen $n^2x^n \to 0\ \ (n\to\infty)$ für $|x| < 1$ ist
$f_n(x) = n^2x^n(1-x) \to 0\ \ (n\to\infty)$ *punktweise* auf $[0,1]$.

Diese Folge konvergiert jedoch *nicht* im quadratischen Mittel über $[0,1]$:

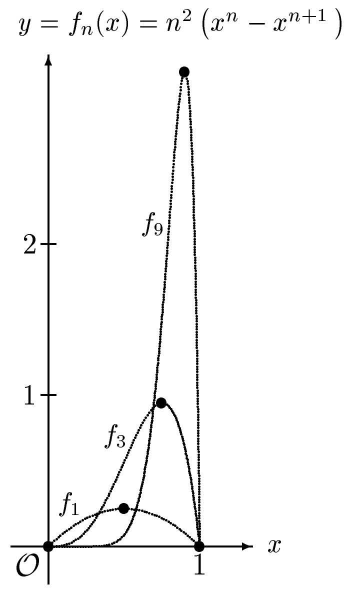


Abbildung 22.4:

$$\begin{aligned}\|f_n - o\|_2^2 &= \|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx = n^4 \int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right)^2 dx = \\ &= n^4 \int_0^1 \left(x^{2n} - 2x^{2n+1} + x^{2n+2}\right)^2 dx = n^4 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}\right) = \\ &= \frac{2n^4}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow \infty \ (n \to \infty)\,.\end{aligned}$$

Aufgund von Nr. 22.18 kann die Folge auch nicht bzgl. der Supremum–Norm konvergieren: in der Tat hat jeweils $f_n(x)$ an der Stelle $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ein Maximum mit dem Funktionswert $f_n(x_n) = n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \infty \ (n \to \infty)$.

Gegenbeispiel zu Nr. 22.19 :

s.o. **Beispiel 3** (Abbildung 22.2):

Die Folge $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert *im quadratischen Mittel* über dem Intervall $[0,1]$ gegen die Nullfunktion $f(x) = 0$:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx = \int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)\,,$$

d.h. es ist $f_n \to f$ in $\big(C[0,1],\, \|\cdot\|_2\big)$,

aber diese Folge konvergiert über $[0,1]$ weder bzgl. der Supremumnorm:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1 \not\to 0\,,$$

noch konvergiert sie punktweise über $[0,1]$: $f_n(1) = 1 \to 1 \neq 0$ $(n \to \infty)$.

22.D Vollständige normierte Räume.

22.21

Eine Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ aus V ist eine **Cauchy–Folge** in $(V, \|\cdot\|)$ (oder auch: ist **in sich konvergent** bzgl. $\|\cdot\|$), wenn $\|x_m - x_n\| \to 0$ für $m, n \to \infty$.

22.22

Jede in $(V, \|\cdot\|)$ gegen ein $x_0 \in V$ konvergente Folge (x_n) ist insbesondere eine Cauchy–Folge in $(V, \|\cdot\|)$, aber umgekehrt ist eine Cauchy–Folge in $(V, \|\cdot\|)$ nicht norwendig auch in $(V, \|\cdot\|)$ konvergent:

Denn ist $(x_n)_{\mathbb{N}}$ eine bzgl. $\|\cdot\|$ gegen ein $x_0 \in V$ **konvergente** Folge aus V, so gilt für $m, n \to \infty$:
$0 \leq \|x_m - x_n\| = \|(x_m - x_0) + (x_0 - x_n)\| \leq \|x_m - x_0\| + \|x_n - x_0\| \to 0$,
d.h. $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ist eine **Cauchy–Folge** in $(V, \|\cdot\|)$. ▌ Andererseits:
betrachten wir über dem Intervall $[-1, 1]$ die Funktionenfolge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ aus Beispiel 4 (Abb. 22.3):

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{1-n^2x^2} \text{ für } 0 < x < 1/n, \\ 0 \text{ für } 1/n \leq x \leq 1, \end{array} \right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } -1 \leq x \leq 0, \\ 0 \text{ für } 0 < x \leq 1. \end{array} \right\}$$

Die Funktionen $f_n(x)$ sind stetig, $f(x)$ ist nicht stetig, und wir haben oben gesehen, dass $f_n \to f$ im quadratischen Mittel über $[-1, 1]$:

Die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ ist damit eine **Cauchy–Folge** im Raum $(L^2[-1,1], \|\cdot\|_2)$, die in $L^2[-1,1]$ einen Grenzwert f *besitzt*, und sie ist auch eine **Cauchy–Folge** im Raum $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$, **besitzt jedoch in diesem Raum *keinen* Grenzwert** (denn f ist ja nicht stetig)!

22.23

> Der Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig**, wenn in $(V, \|\cdot\|)$ jede Cauchy–Folge $(x_n)_{\mathbb{N}}$ gegen ein $x_0 \in V$ konvergiert.
> Einen *vollständigen normierten* Raum nennt man auch einen **Banach–Raum** und einen *vollständigen unitären* Raumeinen **Hilbert–Raum**.

z.B.: Die in Nr. 3.13 und Nr. 4.11 formulierten **Cauchy–Kriterien** für Zahlenfolgen bzw. Zahlenreihen besagen, dass in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ eine Folge oder Reihe genau dann (eigentlich) konvergiert, wenn sie eine Cauchy–Folge bzw. –Reihe ist: **der Raum $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ ist also (bzgl. des üblichen Betrages $|\cdot|$) *vollständig*.**

Dieses **Cauchy–Kriterium** gilt nicht nur in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sondern in allen Räumen $\mathbb{K}^n$ und damit in allen *endlich–dimensionalen* normierten Räumen:

22.24

> Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der Raum $\mathbb{K}^n$ **vollständig:**
> da auf dem Raum $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind (s. Nr.21.21), ist somit:
> $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ für jede Norm $\|\cdot\|$ ein **Banach–Raum** und mit der üblichen euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ ein **Hilbert–Raum**.

Zusammen mit Nr. 21.8 folgt hieraus:

22.25 | ***Jeder* endlich–dimensionale normierte Raum ist vollständig!**

22.26

1. Für beliebige beschränkte Intervalle $[a,b]$ sind die Räume $(C[\,a,b\,]\,,\,\|\cdot\|_\infty)$ aller auf $[\,a,b\,]$ **stetigen** Funktionen **Banach–Räume**;
2. für beliebige Intervalle $[\,a,b\,]$ ist der Raum $(L^2[\,a,b\,]\,,\,\|\cdot\|_2)$ aller **quadratisch–integrierbaren** Funktionen ein **Hilbert–Raum**. (s.u. (*) !)
3. Dagegen ist der Raum $(C[\,a,b\,]\,,\,\|\cdot\|_2)$ *nicht* vollständig.

(*) **Bemerkung zu 2.** : In den Norm–Axiomen wird u.a. gefordert (siehe Axiom (N1) in Nr. 21.17): $\boxed{\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o}$, d.h. im Fall der quadratisch–integrierbaren Funktionen muss insbesondere gelten:

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0 \Rightarrow f = o\,.$$

Um zu gewährleisten, dass dies auch für nicht–stetige Funktionen f richtig ist, wird **vereinbart (!)**, Funktionen, die sich höchstens auf einer Menge vom Maß 0 (z.B. auf einer *endlichen* oder *abzählbaren* Teilmenge von $[\,a,b\,]$) unterscheiden, in dem Raum $L^2[\,a,b\,]$ **als gleich** anzusehen, also in diesem Raum **nicht zu unterscheiden!**

23 Orthogonale Projektion.

Stichpunkte: Orthogonal– und Orthonormalsysteme, Orthonormalbasen und vollständige Orthonormalsysteme; orthogonale Projektion, orthogonale Zerlegung bzgl. eines linearen Teilraumes oder bzgl. eines Vektors, Bestapproximation durch ein Element eines linearen Teilraumes; Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren; Fourier-Entwicklung als Projektionsaufgabe.

In dieser Lektion sei $V = (V\,, \langle\cdot\mid\cdot\rangle\,, \|\cdot\|\,)$ ein **unitärer** Raum mit innerem Produkt $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ und der zugehörigen euklidischen Norm $\|\cdot\|$.

23.A Orthogonalsysteme.

In Anlehnung an die Orthogonalitätsbedingung auf den Räumen $\mathbb{K}^n$ (s. (S11) , Nr. 21.16) wird für $x, y \in V$ definiert:

23.1 $\boxed{x \perp y \ \ (x \text{ ist } \textbf{orthogonal} \text{ zu } y\,) \ \ :\Longleftrightarrow \ \langle\, x \mid y\,\rangle = 0}$

(Genau genommen müsste man sagen: x und y sind orthogonal *bzgl. des inneren Produkts* $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$, aber in der Regel ist klar und geht aus dem Zusammenhang hervor, welches innere Produkt gemeint ist!)

Bemerkung: (*)

23.2 In jedem unitären Raum gilt der **Satz des Pythagoras:**

Wenn die Elemente $x_1\,, \ldots, x_m$ **paarweise orthogonal** sind (also $x_k \perp x_j$ für $k \neq j$) , dann ist $\|x_1 + \cdots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_m\|^2$.

Denn aus: $\langle\, x_j \mid x_k\,\rangle = 0$ für $k \neq j$ folgt:

$$\Big\|\sum_{j=1}^m x_j\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{j=1}^m x_j \,\Big|\, \sum_{k=1}^m x_k \Big\rangle = \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m \langle\, x_j \mid x_k\,\rangle = \sum_{j=1}^m \langle\, x_j \mid x_j\,\rangle = \sum_{j=1}^m \|x_j\|^2 \,. \qquad \blacksquare$$

In *reellen* unitären Räumen gilt auch die Umkehrung:

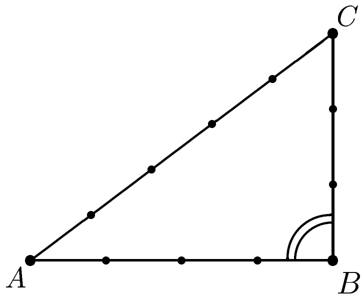
23.3 Zwei Elemente x, y eines *reellen* unitären Raumes sind **genau dann orthogonal** , wenn $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Denn aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 &= \|x+y\|^2 = \langle\, x+y \mid x+y\,\rangle = \|x\|^2 + \langle\, x \mid y\,\rangle + \langle\, y \mid x\,\rangle + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\mathrm{e}\,\langle\, x \mid y\,\rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

folgt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle\, x \mid y\,\rangle = \Re\mathrm{e}\,\langle\, x \mid y\,\rangle = 0$, d.h. $x \perp y$. ▮

Vom letzten Satz machen die Maurer und Zimmerleute Gebrauch, die (s. .Skizze) bei B einen rechten Winkel haben wollen: hierzu legen sie zunächst A in $4m$ Entfernung von B fest und messen C so ein, dass C von B $3m$ Abstand und von A $5m$ Abstand hat; wegen: $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist dann $\sphericalangle ABC$ ein rechter Winkel.



"Maurer–Dreieck"

23.4 Für Elemente $y \in V$ und Teilmengen $M,\, N \subseteq V$ schreiben wir:

$y \perp M \;:\Leftrightarrow\; y \perp x \;\forall x \in M$,

$M \perp N \;:\Leftrightarrow\; x \perp y \;\forall\, x \in M\,,\; y \in N$,

$M^{\perp} := \{\, y \in V \;\mid\; y \perp M \,\}$: $M^{\perp}$ ist der **Orthogonalraum** zu M in V (s.u. (b)) .

23.5

(a) $y \perp M \;\Leftrightarrow\; y \perp \operatorname{span} M$ (lineare Hülle) ,

(b) $M^{\perp}$ ist ein linearer Teilraum von V .

(c) Wenn $x_n \to x$ in $(V, \|\cdot\|)$ und $y \perp x_n \;\; \forall n$, dann ist $y \perp x$.

Zu (a): Sei $y \in M^{\perp}$ und $x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \in \operatorname{span} M$ (mit $x_j \in M$) . Dann ist $\langle\, y \mid x_1 \,\rangle = \ldots = \langle\, y \mid x_m \,\rangle = 0$ und somit:

$\langle\, y \mid x \,\rangle = \left\langle\, y \mid \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \,\right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle\, y \mid x_j \,\rangle = 0$, also $y \perp x \;\forall\, x \in \operatorname{span} M$, d.h. $y \perp \operatorname{span} M$.

Ist umgekehrt $y \perp \operatorname{span} M$, d.h. $y \perp x \;\forall\, x \in \operatorname{span} M$, so ist insbesondere $y \perp x \;\forall x \in M$, d.h. $y \perp M$.

Zu (b): Für alle $y, y_1, y_2 \in M^{\perp}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in M$ ist $\langle\, x \mid y \,\rangle = \langle\, x \mid y_1 \,\rangle = \langle\, x \mid y_2 \,\rangle = 0$ und somit: $\langle\, x \mid y_1 + y_2 \,\rangle = \langle\, x \mid y_1 \,\rangle + \langle\, x \mid y_2 \,\rangle = 0$ und $\langle\, x \mid \lambda y \,\rangle = \lambda \langle\, x \mid y \,\rangle = 0$, also: $y_1 + y_2 \in M^{\perp}$ und $\lambda y \in M^{\perp}$. Damit ist $M^{\perp}$ ein **linearer Teilraum** von V .

Zu (c): Sei $x_n \to x$ in $(V, \|\cdot\|)$, und $y \perp x_n \;\; \forall n$, d.h. $\langle\, y \mid x_n \,\rangle = 0 \;\; \forall n$. Dann folgt aus der Stetigkeit des inneren Produkts (s. (IP7) , Nr. 22.3): $\langle\, y \mid x \,\rangle = \lim_{n \to \infty} \langle\, y \mid x_n \,\rangle = 0$, also $y \perp x$ ∎

23.6 Eine nicht–leere Teilmenge $M \subseteq V$ ist ein **Orthogonalsystem (OGS)** in V , wenn $o \notin M$ und wenn die Elemente aus M paarweise orthogonal sind.
Sind darüberhinaus die Elemente aus M normiert ($\|x\| = 1 \;\forall x \in M$) , so ist M ein **Orthonormalsystem (ONS)** in V .

23.7 $M = \{ e_1 , e_2 , e_3 , \ldots \}$ ist **genau dann ein Orthonormalsystem**, wenn

$$\boxed{\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 \text{ für } i = j , \\ 0 \text{ für } i \neq j . \end{cases}}$$

($\delta_{i,j}$ ist das **Kroneckersymbol**)

23.8 Jedes **Orthogonalsystem** ist **linear unabhängig**.

Denn: ist M ein OGS und $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j = o$ für $x_j \in M$ und $\lambda_j \in \mathbb{K}$, so ergibt sich für alle $k = 1, \ldots, m$:

$$0 = \langle x_k \mid o \rangle = \left\langle x_k \mid \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x_k \mid x_j \rangle = \lambda_k \langle x_k \mid x_k \rangle = \lambda_k \|x_k\|^2 ,$$

also $\lambda_k = 0$ (da $x_k \neq o$). Damit ist M **linear unabhängig** (s. Nr. 20.23 !).

23.B Orthonormalbasen und vollständige Orthonormalsysteme.

23.9 Sei $V = (V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle, \| \cdot \|)$ ein **unitärer Raum** und $B = \{e_1 , e_2 , e_3 , \ldots \}$ ein **Orthonormalsystem** in V (also $\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle i, j).

$\boxed{1}$ B ist ein **vollständiges Orthonormalsystem (VONS)** oder ein **maximales Orthonormalsystem** in V, wenn es *kein* Element $x \neq o$ in V gibt, welches zu *jedem* Element $e_j \in B$ orthogonal ist:

$$\boxed{\langle e_j \mid x \rangle = 0 \ \forall j \Leftrightarrow x = o} .$$

$\boxed{2}$ B ist eine **Orthonormalbasis (ONB)** oder **Hilbert–Basis** von V, wenn sich jedes Element $x \in V$ **eindeutig bzgl.** B **darstellen** lässt:

d.h. zu jedem $x \in V$ gibt es **eindeutig bestimmte** Skalare $\lambda_j \in \mathbb{K}$

$(j = 1, 2, \ldots)$ so, dass $\boxed{x = \sum_j \lambda_j e_j}$. (siehe hierzu Nr. 23.15 !)

23.10 Jeder unitäre Raum V *besitzt* ein VONS und jede ONB eines unitären Raumes V ist ein VONS in V.

Wenn V *vollständig* ist (also ein Hilbert-Raum, z.B. endlich-dimensional), dann ist in V ein **"vollstängiges Orthonormalsystem"** *dasselbe* wie eine **"Orthonormalbasis"**. (siehe hierzu Nr. 23.15 !)

23.C Orthogonale Projektion und Bestapproximation.

23.11

Sei V ein unitärer Raum und $B = \{e_1\,,\, e_2\,,\, e_3\,,\, \dots\}$ ein ONS in V.
Dann gilt für alle $x \in V$ und jedes Element y, welches sich in der Form $y = \sum_j \beta_j e_j$ darstellen lässt, die Beziehung:

$$\boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \sum_j |\beta_j - \langle\, e_j \mid x\,\rangle|^2 - \sum_j |\langle\, e_j \mid x\,\rangle|^2}\,.$$

Denn:
$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \langle\, x-y \mid x-y\,\rangle = \langle\, x \mid x\,\rangle - \langle\, x \mid y\,\rangle - \langle\, y \mid x\,\rangle + \langle\, y \mid y\,\rangle = \\
&= \|x\|^2 - \Big\langle\, x \mid \sum_{i\in I} \beta_i e_i \Big\rangle - \Big\langle \sum_{i\in I} \beta_i e_i \mid x \Big\rangle + \Big\langle \sum_{i\in I} \beta_i e_i \mid \sum_{i\in I} \beta_i e_i \Big\rangle = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i\in I} \langle\, x \mid \beta_i e_i\,\rangle - \sum_{i\in I} \langle\, \beta_i e_i \mid x\,\rangle + \sum_{i\in I} \Big\langle \sum_{j\in I} \beta_j e_j \mid \beta_i e_i \Big\rangle = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i\in I} \Big(-\beta_i \langle\, e_i \mid x\,\rangle^* - \beta_i^* \langle\, e_i \mid x\,\rangle + \beta_i \beta_i^* \Big) = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i\in I} \Big(\Big(\beta_i - \langle\, e_i \mid x\,\rangle\Big) \Big(\beta_i^* - \langle\, e_i \mid x\,\rangle^*\Big) - \langle\, e_i \mid x\,\rangle \langle\, e_i \mid x\,\rangle^* \Big) = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i\in I} \Big|\beta_i - \langle\, e_i \mid x\,\rangle\Big|^2 - \sum_{i\in I} |\langle\, e_i \mid x\,\rangle|^2\,.
\end{aligned}$$
∎

Mit Hilfe von Nr. 23.11 bekommt man:

23.12

Sei U ein *vollständiger* (z.B. *endlich-dimensionaler*) linearer Teilraum des unitären Raumes V und sei $B = \{e_1\,,\, e_2\,,\, \dots\}$ eine ONB von U.
Für jedes Element $x \in V$ ist dann

$$\boxed{\boxed{x_U = \sum_j \langle\, e_j \mid x\,\rangle e_j}}$$

die **orthogonale Projektion** von x auf den Teilraum U.

x_U ist zugleich die **Bestapproximation** von x durch ein Element aus U.

Es ist: $\boxed{\|x_U\|^2 = \sum_j |\langle\, e_j \mid x\,\rangle|^2}$ und

$$\boxed{\boxed{x = x_U + x_U^{\perp} \text{ mit } x_U \in U \text{ und } x_U^{\perp} := x - x_U \perp U}}$$

ist die **orthogonale Zerlegung** von x bzgl. U. Man nennt $x_U^{\perp}$ auch das **orthogonale Komplement** von x bzgl. U.

Mit dem Satz von Pythagoras (s. Nr. 23.2) folgt noch:

23.13

$\boxed{\|x\|^2 = \|x_U\|^2 + \|x_U^\perp\|^2}$, m.a.W.:

$\boxed{d(x,U) = \|x_U^\perp\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|x_U\|^2}}$ ist der (kleinste) **Abstand** von x zu U .

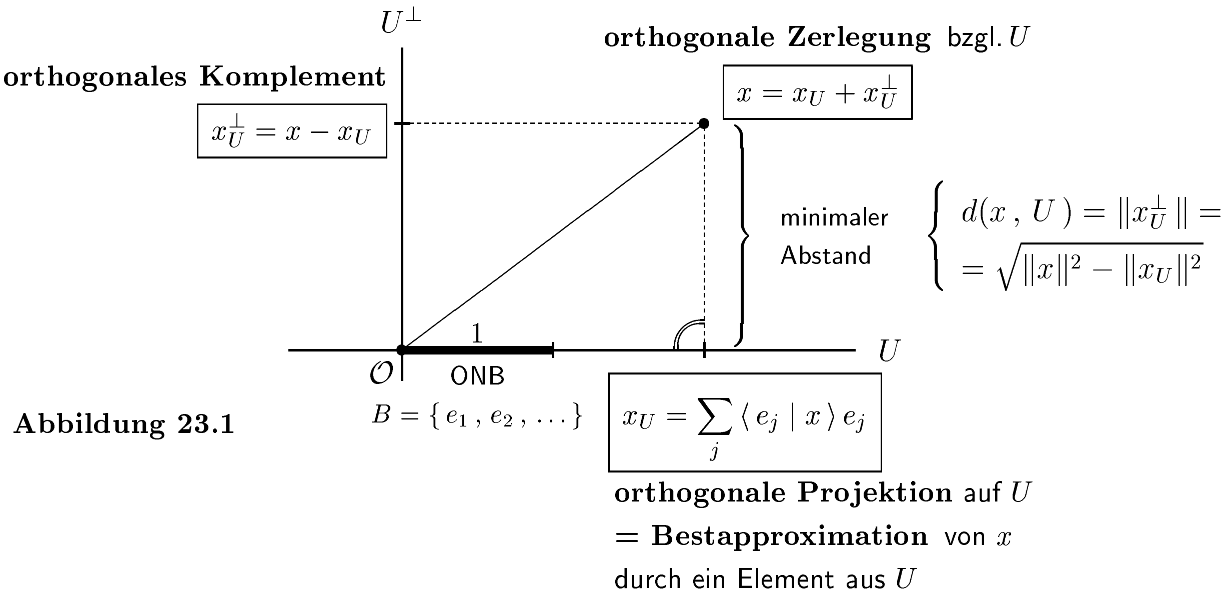


Abbildung 23.1

Wir betrachten noch zwei wichtige Sonderfälle:

I. (U ist eindimensional) :

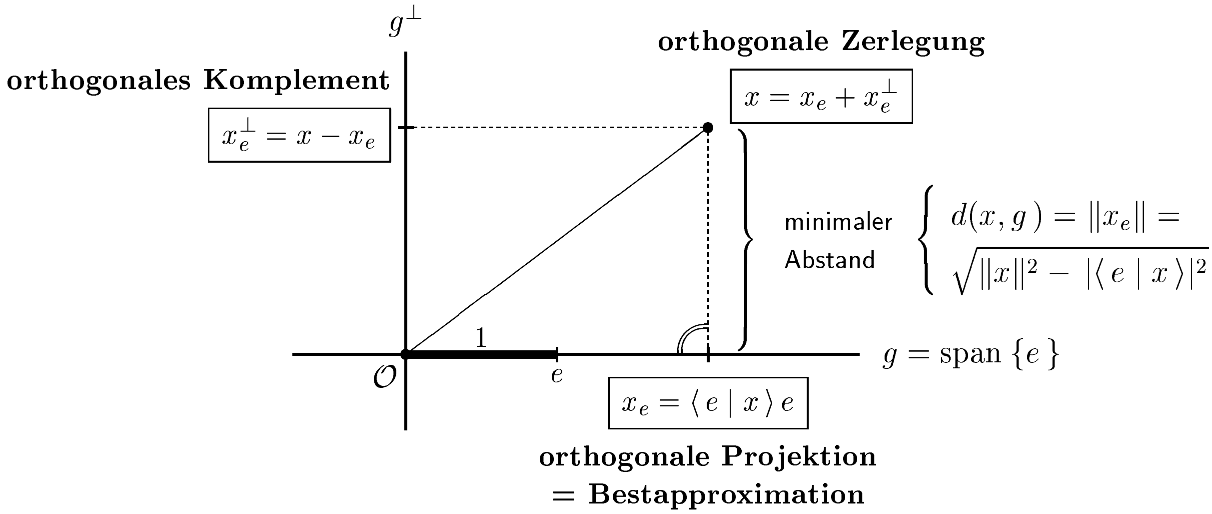
23.14

Für alle Elemente x eines unitären Raumes V und mit jedem **Einheitsvektor** $e \in V$ (d.h. $\|e\| = 1$) ist

$\boxed{x_e = \langle\, e \mid x \,\rangle\, e}$ die **orthogonale Projektion** von x auf die Richtung von e , d.h. auf die Gerade $g = \operatorname{span}\{e\}$ und

$\boxed{x = x_e + x_e^\perp \text{ mit } x_e^\perp := x - x_e}$ ist die **orthogonale Zerlegung** von x bzgl. e mit:

$x_e \in \operatorname{span}\{e\}$ und $x_e^\perp \perp \operatorname{span}\{e\}$.



II. ($U = V$: dann ist $x = x_U$ für alle $x \in V$!)

23.15

Sei V ein **Hilbertraum** (d.h. **ein vollständiger** unitärer, z.B. ein **endlich-dimensionaler** unitärer Raum) und sei $B = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots \}$ eine Orthonormalbasis von V .

Dann hat jedes Element $x \in V$ die eindeutige Darstellung: (vgl. Nr. 23.9 und 10 !)

$$\boxed{x = \sum_j \langle e_j \mid x \rangle e_j} \; .$$

Man nennt diese Darstellung auch die **verallgemeinerte Fourier-Entwicklung**

und die Koeffizienten $\langle e_j \mid e \rangle$ die **verallgemeinerten Fourierkoeffizienten** von x bzgl. B . (vgl. Abschnitt 23.F !)

23.D Gram–Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren.

Mit Hilfe der letzten Sätze lässt sich ein ebenso einfaches wie nützliches Verfahren zur Umwandlung einer (höchstens abzählbaren) linear–unabhängigen Teilmenge M eines unitären Raumes V in ein Orthonormalsystem B herleiten:

23.16 !

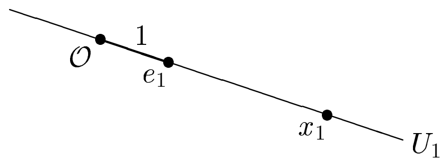
Aus jeder **linear–unabhängigen** Teilmenge $M = \{ x_1, x_2, \ldots \}$ eines unitären Raumes V lässt sich ein **Orthonormalsystem** $B = \{ e_1, e_2, \ldots \}$ in V so konstruieren, dass für alle $k = 1, 2, \ldots$ gilt: $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Hierzu geht man schrittweise vor (bitte merken Sie sich die **Methode** und weniger die erhaltenen Formeln!) :

1. Schritt:

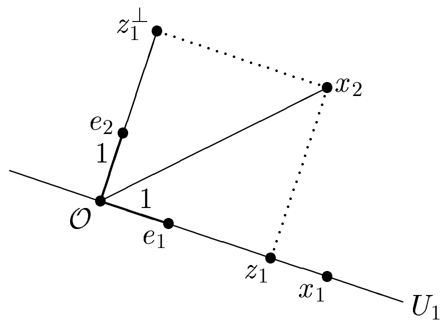
x_1 wird normiert: $\boxed{e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}}$; es ist klar,

dass dann $\operatorname{span}\{e_1\} = \operatorname{span}\{x_1\} =: U_1$.



2. Schritt:

x_2 wird bzgl. $U_1 = \operatorname{span}\{e_1\}$ orthogonal zerlegt: $\boxed{x_2 = z_1 + z_1^\perp}$. Hierzu wird x_2 auf die Richtung von e_1 projiziert: das ergibt $\boxed{z_1 = \langle e_1 \mid x_2 \rangle\, e_1}$. Dann wird das orthogonale Komplement $\boxed{z_1^\perp = x_2 - z_1}$ gebildet. Hiermit ist $\boxed{e_2 = \dfrac{z_1^\perp}{\|z_1^\perp\|}}$ das zweite Element aus B .



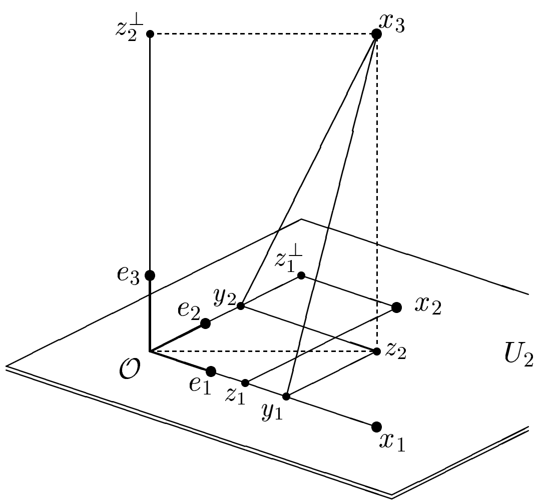
Offenbar ist damit $\operatorname{span}\{e_1, e_2\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2\} =: U_2$.

3. Schritt:

x_3 wird orthogonal bzgl. $U_2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ zerlegt: $\boxed{x_3 = z_2 + z_2^\perp}$:
hierzu wird x_3 auf die e_1– und e_2–Richtung projiziert: $y_1 = \langle e_1 \mid x_3 \rangle$, $y_2 = \langle e_2 \mid x_3 \rangle$;
damit ist $\boxed{z_2 = \langle e_1 \mid x_3 \rangle\, e_1 + \langle e_2 \mid x_3 \rangle\, e_2}$
die Projektion von x_3 auf die Ebene U_2 . Mit dem Komplement $\boxed{z_2^\perp = x_3 - z_2}$ ergibt sich durch Normieren das nächste Element aus B :

$\boxed{e_3 = \dfrac{z_2^\perp}{\|z_2^\perp\|}}$ und es ist

$\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2, x_3\} =: U_3$.



usw.:

23.17

Wenn n orthonormierte Elemente $e_1, \ldots, e_n$ $(n \geq 1)$ gefunden sind mit $U_k := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ für alle $k = 1, \ldots, n$, dann ist

$\boxed{e_{n+1} = \dfrac{z_n^\perp}{\|z_n^\perp\|}}$; hierbei ist $\boxed{z_n^\perp = x_{n+1} - z_n}$ das orthogonale Komplement der Projektion $\boxed{z_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x_{n+1} \rangle e_k}$ von x_{n+1} auf den Teilraum U_n und für jedes k ist $\langle e_k \mid x_{n+1} \rangle e_k$ die Projektion von x_{n+1} auf die e_k–Achse.

1. Beispiel:

Wir wollen die linear–unabhängige Teilmenge

$$M = \left\{ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$ des $\mathbb{R}^4$ **orthonormieren:**

1. Schritt: $\|\vec{x}_1\| = \sqrt{16+4+16} = 6 \Rightarrow \vec{e}_1 = \dfrac{\vec{x}_1}{6}$: $\boxed{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}}$.

2. Schritt: Die orthogonale Projektion von $\vec{x}_2$ auf die Richtung von $\vec{e}_1$ ist

$$\vec{z}_1 = (\vec{e}_1 \cdot \vec{x}_2)\, \vec{e}_1 = \frac{1}{9} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mit dem zugehörigen orthogonalen Komplement

$$\vec{z}_1^\perp = \vec{x}_2 - \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$ und $\|\vec{z}_1^\perp\| = \sqrt{16+16+4} = 6$ ergibt sich:

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{z}_1^\perp}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$, also: $\boxed{\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}}$.

3. Schritt: Die orthogonale Projektion von $\vec{x}_3$ auf die Ebene $\operatorname{span}\{\vec{x}_1\,,\,\vec{x}_2\} = \operatorname{span}\{\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\}$

ist $\vec{z}_2 = \langle\,\vec{e}_1 \mid \vec{x}_3\,\rangle\,\vec{e}_1 + \langle\,\vec{e}_2 \mid \vec{x}_3\,\rangle\,\vec{e}_2 =$

$$= \frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Mit dem zugehörigen orthogonalen Komplement $\vec{z}_2^{\,\perp} = \vec{x}_3 - \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\|\vec{z}_2^{\,\perp}\| = 2\sqrt{1+4+4} = 6$ ergibt sich:

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{z}_2^{\,\perp}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also: } \boxed{\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}}\,.$$

Durch Orthonormierung der Menge M nach dem Gram–Schmidt–Verfahren bekommt man also

das ONS: $B = \left\{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^3$ — und nur im $\mathbb{R}^3$! — orthonormiert man eine linear–unabhängige Teilmenge $M = \left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}\right\}$ in der Regel schneller und bequemer mit Hilfe des Vektor–Produktes:

$B = \{\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\,,\,\vec{e}_3\}$ mit $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\,\|}\,,\ \vec{e}_3 = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\,\|}\,,\ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ ist ein rechts–orientiertes

ONS des $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{span}\{\vec{e}_1\} = \operatorname{span}\{\vec{a}\}\,,\ \operatorname{span}\{\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\} = \operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\right\}$ und

$\operatorname{span}\{\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\,,\,\vec{e}_3\} = \mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}\right\}$. (siehe die nächste Lektion)

(Wer das nicht auf Anhieb durchschaut, sollte sich einmal überlegen, warum hier zur Gewinnung des ONS's B der Vektor $\vec{c}$ nicht benötigt wird!)

2. Beispiel: (*)

Wenn man im Hilbert–Raum $L^2[-1,1]$ die Polynome $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, ... mit dem Gram–Schmidt'schen Verfahren orthonormiert,

ergeben sich für $n \in \mathbb{N}_0$ die **Legendre'schen Funktionen** $\boxed{\eta_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, P_n(x)}$

mit den **Legendre'schen Polynomen** $\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n}$.

Man kann die Legendre'schen Polynome $P_n(x)$ auch als Polynom–Lösungen der **Legendre'schen Differentialgleichungen** $\boxed{(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)\, y = 0}$ erhalten (siehe Übungsaufgabe Nr. 137 !).

An dieser Stelle begnügen wir uns damit, **die ersten Legendre'schen Polynome:**

$$\boxed{P_0(x) = 1\,,\ P_2(x) = x\,,\ P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\,,\ P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)}$$

durch Orthonormierung der Menge $\{1, x, x^2, x^3\}$ nach dem Gram–Schmidt–Verfahren zu bestimmen:

1. Schritt: $\|f_0\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$, $\eta_0 = \dfrac{f_0}{\|f_0\|}$: $\boxed{\eta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0 + \frac{1}{2}}\, P_0(x) \text{ mit } P_0(x) = 1}$.

2. Schritt: $\langle \eta_0 \mid f_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \eta_0(x)^* f_1(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$, d.h. $f_1 \perp \eta_0$;

$\|f_1\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_1(x)|^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$, also $\|f_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, somit $\eta_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, f_1$:

$\boxed{\eta_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x = \sqrt{1 + \frac{1}{2}}\, P_1(x) \text{ mit } P_1(x) = x}$.

3. Schritt: $\langle \eta_0 \mid f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \eta_0(x)^* f_2(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$\langle \eta_1 \mid f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \eta_1(x)^* f_2(x)\, dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$, d.h. $f_2 \perp \eta_1$. Damit ist

$z_2(x) := \langle \eta_0 \mid f_2 \rangle\, \eta_0(x) + \langle \eta_1 \mid f_2 \rangle\, \eta_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$,

$z_2^{\perp}(x) = f_2(x) - z_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$,

$\|z_2^{\perp}\|^2 = \int_{-1}^{1} \left| x^2 - \frac{1}{3} \right|^2 dx = 2 \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} \right) dx = 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 5}$,

folglich: $\|z_2^{\perp}\| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$, $\eta_2(x) = \dfrac{z_2^{\perp}(x)}{\|z_2^{\perp}\|} = \sqrt{\frac{5}{2}}\, \frac{3}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$:

$\boxed{\eta_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(3x^2 - 1\right) = \sqrt{2 + \frac{1}{2}}\, P_2(x) \text{ mit } P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)}$, usw..

23.E Zur klassischen Fourierreihen–Entwicklung. (*)

Zum Abschluss dieser Lektion wollen wir als wichtiges **Anwendungsbeispiel** zur **Darstellung bzgl. einer ONB** und zur **orthogonalen Projektion** bzw. — gleichwertig! — zur **Bestapproximation** in einem unitären Raum nocheinmal kurz auf die (klassische) **Fourierreihen–Entwicklung** eingehen (diese wurde in Lektion 18 als Extremwertaufgabe behandelt):

Die klassische Fourierreihen–Entwicklung T–periodischer Funktionen basiert — aus funktionalanalytischer Sicht — auf der Tatsache, dass die Mengen

$$B = \left\{ \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,,\ \varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(m\omega x)\,,\ \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega x)\ \mid m,n \in \mathbb{N} \right\}$$

und $B_c = \left\{ \eta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\,n\omega x} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ (wobei $\omega = 2\pi/T$)

Orthonormalbasen von $L^2[0,T]$ sind, bzgl. der alle $L^2[0,T]$–Funktionen gemäß Nr. 23.15 dargestellt werden können.

Zunächst ist der Nachweis, dass B und B_c **Orthonormalsysteme** im $L^2[0,T]$ sind, eine elementare Integrationsübung: Sei $\widetilde{\varphi_o}(x) = 1$, $\widetilde{\varphi_m}(x) = \cos(m\omega x)$ und $\widetilde{\psi_n}(x) = \sin(n\omega x)$ für $m,n \in \mathbb{N}$; dann hat man (mit geeigneten Produktformeln für die trigonometrischen Funktionen, die in jeder vernünftigen Formelsammlung zu finden sind):

(i) $\|\widetilde{\varphi_0}\|^2 = \langle \widetilde{\varphi_0} \mid \widetilde{\varphi_0} \rangle = \int_0^T |\widetilde{\varphi_0}(x)|^2\,dx = \int_0^T dx = T$, also $\|\widetilde{\varphi_0}\| = \sqrt{T}$;

(ii) für $m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $(m,n) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\varphi_m} \mid \widetilde{\varphi_n} \rangle &= \int_0^T \widetilde{\varphi_m}(x)\widetilde{\varphi_n}(x)\,dx = \int_0^T \cos(m\omega x)\cos(n\omega x)\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \Big(\cos[(m-n)\omega x] + \cos[(m+n)\omega x]\Big)\,dx\ ;\end{aligned}$$

(iii) es folgt im Fall $m = n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\varphi_n}\|^2 &= \langle \widetilde{\varphi_n} \mid \widetilde{\varphi_n} \rangle = \frac{1}{2}\int_0^T \Big(1 + \cos(2n\omega x)\Big)\,dx = \\ &= \frac{T}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n\omega}\sin(2n\omega x)\Big|_{x=0}^{T} = \quad (\text{da } \omega T = 2\pi) \\ &= \frac{T}{2}\,, \quad \text{also } \|\widetilde{\varphi_n}\| = \sqrt{\frac{T}{2}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,,\end{aligned}$$

(iv) und im Fall $m \neq n$:

$$\langle\, \widetilde{\varphi_m} \mid \widetilde{\varphi_n}\,\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m-n)\omega}\sin[(m-n)\omega x] + \frac{1}{(m+n)\omega}\sin[(m+n)\omega x]\right]_{x=0}^{T} =$$

$$= 0 \quad (\text{da } \omega T = 2\pi)\text{, also } \widetilde{\varphi_m} \perp \widetilde{\varphi_n} \text{ für } m \neq n\,;$$

(v) ähnlich gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ (wieder mit den Produktformeln):

$$\left\langle\, \widetilde{\psi_m} \mid \widetilde{\psi_n}\,\right\rangle = \int_0^T \widetilde{\psi_m}(x)\widetilde{\psi_n}(x)\,dx = \int_0^T \sin(m\omega x)\sin(n\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \Big(\cos[(m-n)\omega x] - \cos[(m+n)\omega x]\Big)\,dx\,;$$

(vi) es folgt im Fall $m = n \neq 0$:

$$\|\widetilde{\psi_n}\|^2 = \left\langle\, \widetilde{\psi_n} \mid \widetilde{\psi_n}\,\right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^T \Big(1 - \cos(2n\omega x)\Big)\,dx =$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n\omega}\sin(2n\omega x)\Big|_{x=0}^{T} = \quad (\text{da } \omega T = 2\pi)$$

$$= \frac{T}{2}\,;\quad \text{somit } \|\widetilde{\psi_n}\| = \sqrt{\frac{T}{2}} \text{ für } n \in \mathbb{N}\,,$$

(vii) und im Fall $m \neq n$:

$$\left\langle\, \widetilde{\psi_m} \mid \widetilde{\psi_n}\,\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m-n)\omega}\sin[(m-n)\omega x] - \frac{1}{(m+n)\omega}\sin[(m+n)\omega x]\right]_{x=0}^{T} =$$

$$= 0 \quad (\text{da } \omega T = 2\pi)\text{, also } \widetilde{\psi_m} \perp \widetilde{\psi_n} \text{ für } m \neq n\,;$$

(viii) schließlich hat man für $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\langle\, \widetilde{\varphi_m} \mid \widetilde{\psi_n}\,\right\rangle = \int_0^T \widetilde{\varphi_m}(x)\widetilde{\psi_n}(x)\,dx = \int_0^T \cos(m\omega x)\sin(n\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \Big(\sin[(n-m)\omega x] + \sin[(n+m)\omega x]\Big)\,dx\,;$$

(ix) im Fall $m = n \neq 0$ also:

$$\left\langle\, \widetilde{\varphi_n} \mid \widetilde{\psi_n}\,\right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^T \sin(2n\omega x)\,dx = -\frac{1}{4n\omega}\cos(2n\omega x)\Big|_{x=0}^{T} =$$

$$= 0 \quad (\text{da } \omega T = 2\pi)$$

(x) und im Fall $m \neq n$:

$$\left\langle\, \widetilde{\varphi_m} \mid \widetilde{\psi_n}\,\right\rangle = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)\omega}\cos[(n-m)\omega x] + \cos[(n+m)\omega x]\right]_{x=0}^{T} =$$

$$= 0\,,\quad \text{insgesamt: } \widetilde{\varphi_m} \perp \widetilde{\psi_n} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Damit ist $\widetilde{B} = \{\widetilde{\varphi_m}\,,\ \widetilde{\psi_n}\ \mid m \in \mathbb{N}_0\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ ein **Orthogonalsystem** und
$B = \{\varphi_m\,,\ \psi_n\ \mid m \in \mathbb{N}_0\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ mit
$\varphi_0(x) = \dfrac{\widetilde{\varphi_0}(x)}{\|\widetilde{\varphi_0}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{T}}\,,\ \varphi_m(x) = \dfrac{\widetilde{\varphi_m}(x)}{\|\widetilde{\varphi_m}\|} = \sqrt{\dfrac{2}{T}}\cos(m\omega x)$ und
$\psi_n(x) = \dfrac{\widetilde{\psi_n}(x)}{\|\widetilde{\psi_n}\|} = \sqrt{\dfrac{2}{T}}\sin(n\omega x)$ (für $m,n \in \mathbb{N}$)
ist ein **Orthonormalsystem** in $L^2[0,T]$.

Dass $\widetilde{B_c} = \{\widetilde{\eta_n}\ \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit $\widetilde{\eta_n}(x) = e^{i\,n\omega x}$ ein **Orthogonalsystem** in $L^2[0,T]$ ist, ergibt sich wesentlich einfacher: für $m,n \in \mathbb{Z}$ ist:

(i) $\langle\,\widetilde{\eta_m} \mid \widetilde{\eta_n}\,\rangle = \displaystyle\int_0^T \widetilde{\eta_m}(x)^*\widetilde{\eta_n}(x)\,dx = \int_0^T e^{-i\,m\omega x}e^{i\,n\omega x}\,dx = \int_0^T e^{i\,(n-m)\omega x}\,dx$,

(ii) im Fall $m \neq n$ somit:

$$\langle\,\widetilde{\eta_m} \mid \widetilde{\eta_n}\,\rangle = \frac{1}{i\,(n-m)\omega}\,e^{i\,(n-m)\omega x}\Big|_{x=0}^{T} = \frac{e^{i\,(n-m)\omega T}-1}{i\,(n-m)\omega} = 0\ ,$$

(da $\omega T = 2\pi$ und $e^{ik\cdot 2\pi} = 1\ \forall k \in \mathbb{Z}$), also $\widetilde{\eta_m}\perp\widetilde{\eta_n}$ für alle $m \neq n$ aus $\mathbb{Z}$;

(iii) im Fall $m = n \in \mathbb{Z}$ ergibt sich:

$$\|\widetilde{\eta_n}\|^2 = \int_0^T |\widetilde{\eta_n}(x)|^2\,dx = \int_0^T dx = T\ ,\ \text{d.h. } \|\widetilde{\eta_n}\| = \sqrt{T}\,.$$

Daher ist $B_c = \{\eta_n\ \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit den normierten Funktionen $\eta_n(x) = \dfrac{\widetilde{\eta_n}(x)}{\|\widetilde{\eta_n}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{T}}e^{i\,n\omega x}$ ebenfalls ein **Orthonormalsystem** in $L^2[0,T]$.

Gemäß Nr. 23.15 gilt somit für alle $f \in L^2[0,T]$:

$$f = \langle\,\varphi_0 \mid f\,\rangle\,\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\langle\,\varphi_n \mid f\,\rangle\,\varphi_n + \langle\,\psi_n \mid f\,\rangle\,\psi_n\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\,\eta_n \mid f\,\rangle\,\eta_n \quad \text{also}$$

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\,n\omega x}\ ,\quad \text{wobei:}$$

$\dfrac{a_0}{2} = \langle\,\varphi_0 \mid f\,\rangle\,\varphi_0(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\,dx$ (konstant) und für $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle\,\varphi_n \mid f\,\rangle\,\varphi_n(x) = a_n\cos(n\omega x) \quad \text{mit } a_n = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\langle\,\varphi_n \mid f\,\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx\ ,$$

$$\langle\,\psi_n \mid f\,\rangle\,\psi_n(x) = b_n\sin(n\omega x) \quad \text{mit } b_n = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\langle\,\psi_n \mid f\,\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

und $\langle\,\eta_n \mid f\,\rangle\,\eta_n(x) = c_n\,e^{i\,n\omega x}$ mit $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{T}}\,\langle\,\eta_n \mid f\,\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\,e^{-i\,n\omega x}\,dx$.

Wir erhalten als Resultat:

23.18

Jede Funktion $f \in L^2[0,T]$ hat die (klassische, "gewöhnliche", spezielle) **Fourierreihen–Darstellung** (mit $\omega = 2\pi/T$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \Big) && \text{(reelle Form)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i n\omega x} && \text{(komplexe Form)} \end{aligned}$$

mit den ("gewöhnlichen", speziellen) **Fourier–Koeffizienten**:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x)\, dx \,, \; b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x)\, dx \,,$$

bzw. $c_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(x)\, e^{-i n\omega x}\, dx$.

Aufgrund von Nr. 23.12 hat man außerdem für alle $N \in \mathbb{N}_0$:

23.19

Mit den Fourier–Koeffizienten a_n, b_n bzw. c_n ist

$$\begin{aligned} f(x) \approx T_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \Big) = \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{i n\omega x} \end{aligned}$$

die **Bestapproximation** von $f(x)$ in $L^2[0,T]$, also die **im quadratischen Mittel** über $[0,T]$ (und damit über jedem Intervall der Periodenlänge T) **optimale Approximation** von $f(x)$ **durch ein trigonometrisches Polynom** vom Grad N.

! Da die Fourier–Reihen und –Summen in 23.18 und 19 T–periodisch sind und über das Intervall $[0,T]$ T–periodische fortgesetzt werden können, bleiben 23.18 und 19 **für alle T–periodischen** L^2–Funktionen $f(x)$ richtig.

! **Aber beachte!:** 23.18 und 19 sind **Hilbertraum–Gleichungen** in $L^2[0,T]$ (oder $L^2[a,a+T]$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$), die *nicht notwendig punktweise* für alle x gelten, sondern **in der Regel nur f.ü.** auf $\mathbb{R}$ stimmen!

Ob eine T–periodische Funktion f durch ihre Fourierreihe *punktweise* dargestellt wird, hängt wesentlich von den Eigenschaften von f ab. Wenn die Funktion f z.B. die **Dirichlet'sche Bedingung** (D) erfüllt (siehe Nr. 18.10), dann liefert ihre Fourierreihe an jeder Stetigkeitsstelle x den Funktionswert $f(x)$ und an jeder Sprungstelle x_0 den Mittelwert $\frac{1}{2}\Big(f(x_0+0)+f(x_0-0)\Big)$.

(Weitere Informationen über Fourierreihen findet man in Lektion 18 ; dort sind auch einige konkrete Beispiele angegeben.)

24 Vektorprodukt. Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$.

Stichpunkte: Links– und Rechtssysteme im $\mathbb{R}^3$, 2,2–Determinanten, Flächeninhalt eines Parallelogramms im $\mathbb{R}^2$; Vektorprodukt: Definition und anschauliche Deutung; Spatprodukt/3,3–Determinanten: Definition und anschauliche Deutung, Volumen eines Parallelflachs im $\mathbb{R}^3$. Darstellungen von Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$.

24.A Links– und Rechtssysteme im $\mathbb{R}^3$.

24.1 Jede von zwei linear–unabhängigen Vektoren $\vec{a}\,,\,\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ aufgespannte Ebene $E=\operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\right\}$ — in dieser Reihenfolge! — hat zwei Seiten:
die **positive Seite**, auf der $\sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b})>0$ ist,
und die **negative Seite**, auf der $\sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b})<0$ ist.

24.2 Jede in diesem Sinne **orientierte** Ebene E teilt den Raum $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume: den **positiven Halbraum** auf der positiven Seite von E und den **negativen Halbraum** auf der negativen Seite von E.

24.3 Drei Vektoren $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ bilden — in dieser Reihenfolge! —
ein **Rechtssystem** (sind **positiv orientiert**), wenn $\vec{c}$ in den *positiven* Halbraum bzgl. $E=\operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\right\}$ gerichtet ist,
anderenfalls ein **Linkssystem** (dann sind sie **negativ orientiert**).

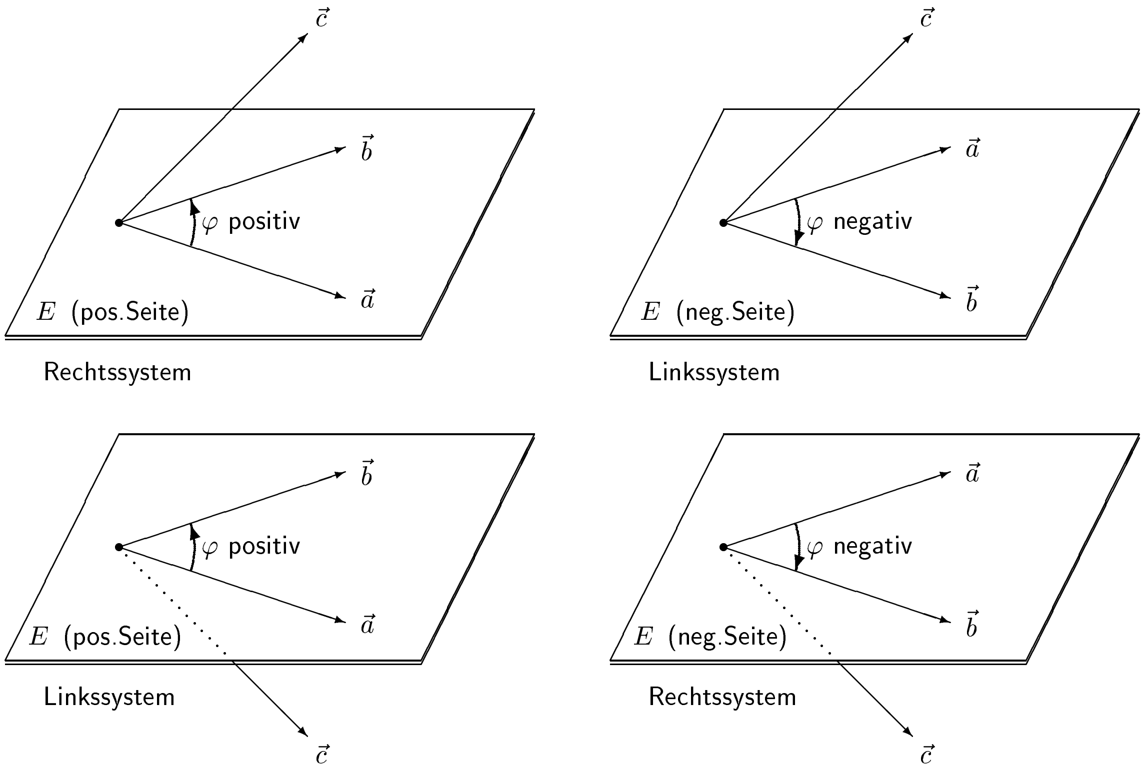


Abbildung 24.1 Links- und Rechtssysteme.

Jede Vertauschung von zwei der Vektoren des Systems $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ändert die Orientierung dieses Systems — zwei Vertauschungen ändern die Orientierung somit nicht:
damit haben $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$ und $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ *dieselbe* Orientierung (**zyklisches Vertauschen** ändert die Orientierung nicht!);
ebenso haben die Systeme $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$, $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ und $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$ jeweils dieselbe Orientierung, jedoch ist diese umgekehrt zur Orientierung von $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

24.B Definition des Vektorprodukts.

24.4

Das **Vektorprodukt (= Kreuzprodukt)** $\vec{a} \times \vec{b}$ von zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ des $\mathbb{R}^3$ ist durch die vier folgenden Bedingungen bestimmt:

(VP1) $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein **Vektor** des $\mathbb{R}^3$;

(VP2) die Länge dieses Vektors ist gleich dem (absoluten) **Flächeninhalt** des Parallelogramms, das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannt wird:
$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi}$;

(VP3) der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht **senkrecht** auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$;

(VP4) die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden — in dieser Reihenfolge! — ein **Rechtssystem**.

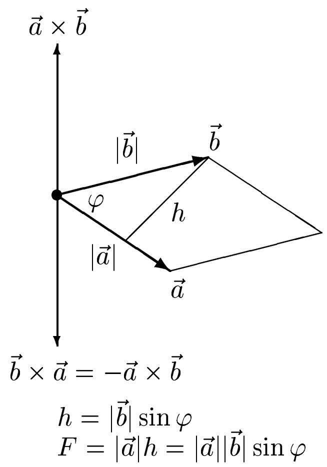


Abbildung 24.2: **Zum Vektorprodukt**

! Aufgrund von (VP3) und (VP4) ist das Vektorprodukt **nur im $\mathbb{R}^3$ eindeutig definiert:**
im $\mathbb{R}^2$ gibt es keine Richtung, die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist,
und im $\mathbb{R}^4$ oder $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 4$ gibt es "zu viele" solche Richtungen!

Beachte, dass wir das **Vektorprodukt** *nicht* — wie das häufig geschieht — auch "äußeres Produkt" nennen! Wir vermeiden die Bezeichnung "äußeres Produkt", da diese noch mit einer anderen Bedeutung verwendet wird (das äußere Produkt $\vec{a} \wedge \vec{b}$ zweier Vektoren ist in der anderen Bedeutung eine **gerichtete Fläche**).

24.C Rechenregeln für das Vektorprodukt.

24.5

(VP5) $\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -\,\vec{a} \times \vec{b}}$ das Vektorprodukt ist **antikommutativ** (s. Abb. 24.2)

(VP6) $\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{array}}$ **Distributivität**

(VP7) $\boxed{\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})}$ **Homogenität**

(VP6), (VP7): das Vektorprodukt ist in jeder Komponente **linear**

24.6

Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ linear abhängig, so entartet das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm und hat den Flächeninhalt 0; daher gilt:

(VP8) $\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \ \vec{a}, \vec{b} \text{ sind \textbf{linear abhängig}; insbesondere:} \\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{o} \quad \forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \end{array}}$;

hiermit folgt noch:

24.7

(VP9) $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_a^{\perp}}$, wenn $\vec{b} = \vec{b}_a + \vec{b}_a^{\perp}$ die orthogonale Zerlegung von $\vec{b}$ bzgl. $\vec{a}$ ist (siehe Nr. 23.14):

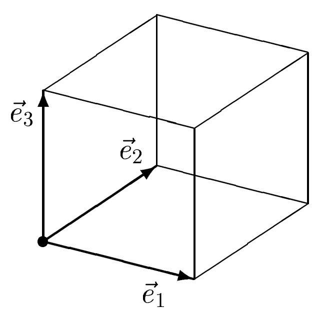
denn: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_a + \vec{b}_a^{\perp}) = \vec{a} \times \vec{b}_a + \vec{a} \times \vec{b}_a^{\perp} = \vec{a} \times \vec{b}_a^{\perp}$, da $\vec{a}$ und $\vec{b}_a$ linear abhängig sind.

24.8

Ist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eine positiv orientierte ONB des $\mathbb{R}^3$, so gilt:

(VP10)

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$
$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$
$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$



24.D Koordinatenabhängige Darstellung des Vektorproduktes.

Mit den (2,2) - Determinanten $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} := ad - bc$ ist:

24.9

(VP11)
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung ergibt sich — als elementare Rechenübung — aus den Regeln von oben:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \Big(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\Big) \times \Big(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\Big) = \quad \Big[\text{mit (VP6), (VP7)}\Big] \\
&= a_1b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + a_1b_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\
&\quad + a_2b_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + a_2b_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + a_2b_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\
&\quad + a_3b_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + a_3b_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + a_3b_3(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = \quad \Big[\text{mit (VP8), (VP10)}\Big] \\
&= \vec{o} + a_1b_2\vec{e}_3 - a_1b_3\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3 + \vec{o} + a_2b_3\vec{e}_1 + a_3b_1\vec{e}_2 - a_3b_2\vec{e}_1 + \vec{o} = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{e}_3 = \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Es gibt eine kleine **Eselsbrücke** , die am Anfang helfen kann, dieses **Kreuzprodukt** auszurechnen:

hierzu schreibt man unter die beiden zu multiplizierenden Vektoren nocheinmal die beiden ersten Zeilen dieser Vektoren und kann dann in der angedeuteten Art und Weise"kreuzweise“ das **Kreuzprodukt** bestimmen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \\ a_3 & \times & b_3 \\ \hline a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & & & b_1 \\ a_2 & & & b_2 \\ + & \searrow & \nearrow & \\ - & \nearrow & \searrow & \\ a_3 & & & b_3 \\ + & \searrow & \nearrow & \\ - & \nearrow & \searrow & \\ a_1 & & & b_1 \\ + & \searrow & \nearrow & \\ - & \nearrow & \searrow & \\ a_2 & & & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Hiermit ist: $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, denn: $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$;

das von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm hat den (absoluten) **Flächeninhalt**

$$F = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{6} \approx 7.35\,\text{FE}.$$

24.E (2,2)–Determinanten.

Um die **geometrische Bedeutung** der (2,2)–Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ von zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ zu erkennen, betrachten wir die beiden

Vektoren $\vec{a}_+ = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_+ = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$:

es ist klar, dass das von $\vec{a}_+$ und $\vec{b}_+$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm denselben (absoluten) Flächeninhalt $|F|$ hat wie das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^2$ aufgespannte Parallelogramm:

$$|F| = |\vec{a}_+ \times \vec{b}_+| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right| = |\det(\vec{a}\,,\,\vec{b})|\,.$$

Andererseits ist $|F| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin|\varphi|$ mit $-\pi \le \varphi := \sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) \le \pi$,
also $F = 0$ für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pm\pi$, und für $\varphi \in]-\pi,\pi[\,: F = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi > 0$ für $\varphi > 0$, $F < 0$ für $\varphi < 0$:

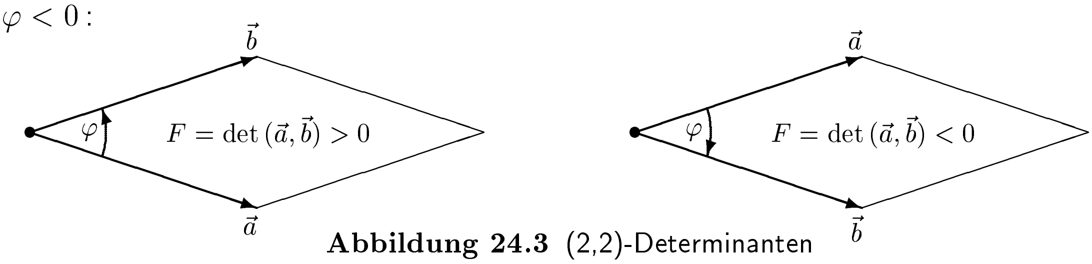


Abbildung 24.3 (2,2)-Determinanten

24.10

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ ist

$$\boxed{F = \det(\vec{a}\,,\,\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

der **orientierte Flächeninhalt** des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ — in dieser Reihenfolge — aufgespannten Parallelogramms:

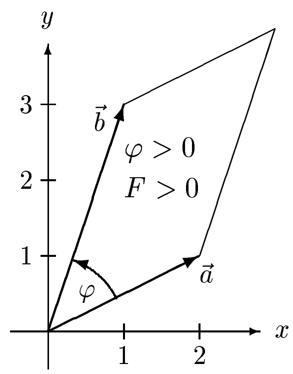
es ist $\boxed{F > 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) > 0}$ und $\boxed{F < 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) < 0}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, und $F = 0$ wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind.

z.B.:

Das von den beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ — in dieser Reihenfolge! — aufgespannte Parallelogramm hat den orientierten Flächeninhalt:

$$F = \det(\vec{a}\,,\,\vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5\,.$$

Es ist $F \neq 0$, da $\vec{a}$, $\vec{b}$ linear unabhängig sind, und es ist $F > 0$, da $\sphericalangle(\vec{a}\,,\,\vec{b}) > 0$ ist.



Mit Nummer 24.10 haben auch die Komponenten

$$F_x = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\ F_y = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\ F_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

des **Vektorprodukts** $\vec{a} \times \vec{b}$ eine **geometrische Bedeutung:**

24.11 Ist P das von $\vec{a}\,,\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm und sind $P_x\,,\ P_y\,,\ P_z$ die **Projektionen** von P parallel zur x–Achse auf die y,z–Ebene bzw. parallel zur y–Achse auf die z,x–Ebene bzw. parallel zur z–Achse auf die x,y–Ebene, so sind $F_x\,,\ F_y\,,\ F_z$ jeweils entsprechend die **orientierten Flächeninhalte** von $P_x\,,\ P_y$ bzw. P_z.

24.F Mehrfach–Vektorprodukte.

24.12 Das Vektorprodukt ist i.a. **nicht assoziativ**
(d.h. Klammern dürfen *nicht* beliebig gesetzt werden!) :

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$ $\Big($liegt in der Ebene $\operatorname{span}\left\{\vec{b}\,,\ \vec{c}\,\right\}$!$\Big)$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$ $\Big($liegt in der Ebene $\operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\ \vec{b}\,\right\}$!$\Big)$

(Das nachzuweisen ist eine elementare Rechenübung!)

z.B.: Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{b} + \vec{c} \in \operatorname{span}\left\{\vec{b}\,,\vec{c}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \\
&= -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{b} + \vec{a} \in \operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\vec{b}\right\}.
\end{aligned}$$

24.G Die Abbildung $\vec{r} \mapsto \vec{n} \times \vec{r}$.

Ist $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor einer Ebene E durch den Koordinatenursprung und ist $\vec{r} = \vec{r}_E + \vec{r}_E^{\perp}$ die orthogonale Zerlegung eines Vektors $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. E, so steht der Vektor $\vec{n}\times\vec{r} = \vec{n}\times\vec{r}_E$ senkrecht auf $\vec{n}$, liegt also in E, und er steht in E senkrecht auf $\vec{r}_E$.

Wegen: $|\vec{n} \times \vec{r}| = |\vec{n} \times \vec{r}_E| = |\vec{n}||\vec{r}_E| \sin \pi/2 = |\vec{r}_E|$ folgt:

$\boxed{\vec{r}_1 := \vec{n} \times \vec{r} = \vec{r}_{E,\perp}}$ ist der Vektor, der durch Projektion von $\vec{r}$ auf E und anschließender Drehung in E um den Winkel $\pi/2$ entsteht.

Der Vektor $\boxed{\vec{r}_2 := \vec{n} \times \vec{r}_1 = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})}$ liegt ebenfalls in E und geht aus $\vec{r}_1$ durch Drehung in E um $\pi/2$ hervor: es ist also $\vec{r}_2 = -\vec{r}_E$ (siehe die Skizze). Wir haben daher:

24.13

Sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor (also $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$),

und E die zu $\vec{n}$ orthogonale Ebene durch den Ursprung. Dann ist

$$\boxed{\hat{P}_E : \vec{r} \mapsto \vec{r}_E := -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})}$$

die (orthogonale) **Projektion** von $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ auf die Ebene E.

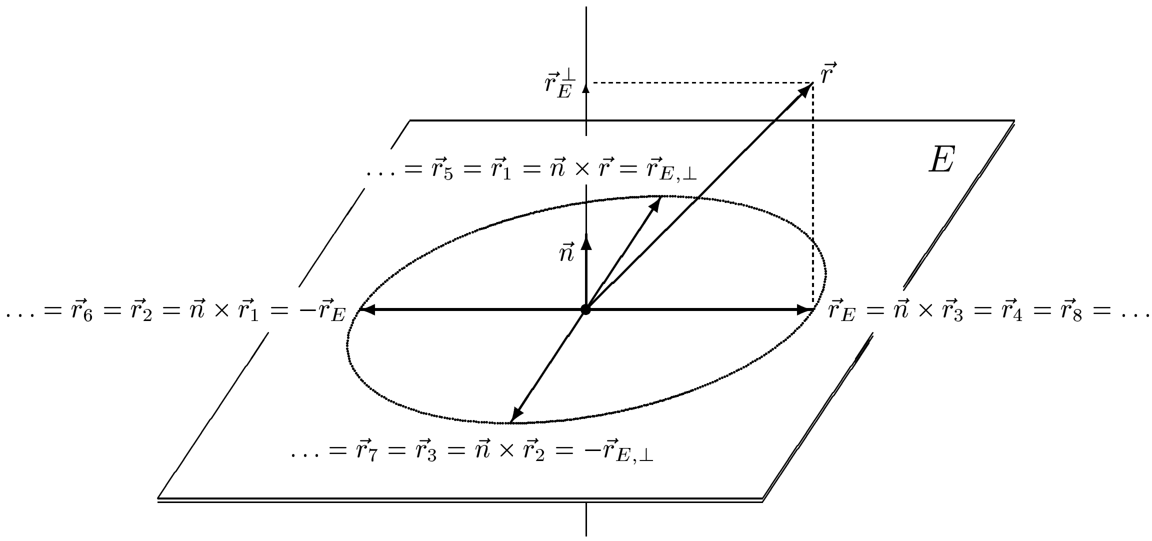


Abbildung 24.4 Die Abbildung $\vec{r} \mapsto \vec{n} \times \vec{r}$

Setzt man das Verfahren von oben fort, so bekommt man immer wieder dieselben Vektoren:

24.14

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &:= \vec{r} = \vec{r}_E^{\perp} + \vec{r}_E\,,\\
\vec{r}_1 &:= \vec{n} \times \vec{r}_0 = \vec{r}_{E,\perp}\,,\\
\vec{r}_2 &:= \vec{n} \times \vec{r}_1 = -\vec{r}_E\,,\\
\vec{r}_3 &:= \vec{n} \times \vec{r}_2 = -\vec{r}_{E,\perp}\,,\\
\vec{r}_4 &:= \vec{n} \times \vec{r}_3 = \vec{r}_E\,,\\
\vec{r}_5 &:= \vec{n} \times \vec{r}_4 = \vec{r}_{E,\perp}\,,\ \text{usw.:}\ \ \vec{r}_0 = \vec{r}\ \text{und}
\end{aligned}$$

$$\vec{r}_n := \vec{n} \times \vec{r}_{n-1} = \begin{cases} (-1)^k\,\vec{r}_{E,\perp} & \text{, für } \textit{ungerade}\ n = 2k+1 \ \ (k \in \mathbb{N}_0)\,, \\ (-1)^k\,\vec{r}_E & \text{, für } \textit{gerade}\ n = 2k \ \ (k \in \mathbb{N})\,. \end{cases}$$

24.H (3,3)–Determinanten/Spatprodukt.

24.15 Die **(3,3)–Determinante** (= **Spatprodukt**) von drei Vektoren $\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ — in dieser Reihenfolge — ist die Zahl

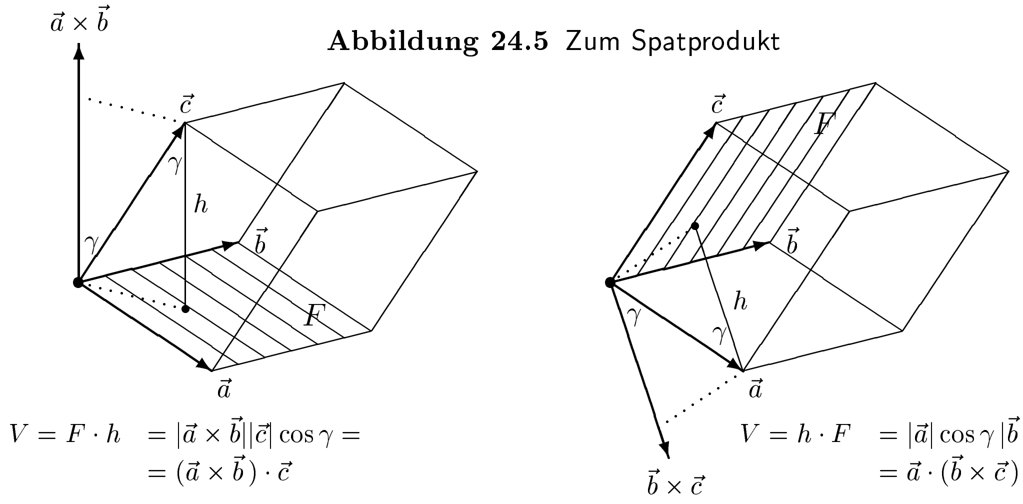
$$\boxed{\det(\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}\,) := (\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}\,)}\ .$$

24.16 $V = \det(\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}\,)$ ist das **orientierte** (:= vorzeichenbehaftete) **Volumen** des Parallelflachs (= **Spat** , = Parallelepiped) , das von diesen drei Vektoren — in dieser Reihenfolge — aufgespannt wird:

es ist $V = \det(\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}\,) > 0$, wenn $\{\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}\,\}$ ein linear unabhängiges **Rechtssystem** ist (wie unten in der Skizze) ,
und es ist $V = \det(\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}\,) < 0$, wenn $\{\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}\,\}$ ein linear unabhängiges **Linkssystem** ist.

Genau dann ist $V = \det(\vec{a}\,,\ \vec{b}\,,\ \vec{c}\,) = 0$, wenn die drei Vektoren **linear abhängig** sind: in diesem Fall entartet das Parallelflach zu einem Parallelogramm (oder einer Strecke) .

Abbildung 24.5 Zum Spatprodukt



Da sich bei Vertauschung nur die Orientierung, nicht aber das absolute Volumen ändert, hat man:

24.17

$$\det(\vec a, \vec b, \vec c) = \det(\vec b, \vec c, \vec a) = \det(\vec c, \vec a, \vec b)\ ;$$
$$\det(\vec c, \vec b, \vec a) = \det(\vec b, \vec a, \vec c) = \det(\vec a, \vec c, \vec b) = -\det(\vec a, \vec b, \vec c)\,.$$

Bei **zyklischer Vertauschung** $(1,2,3 \to 2,3,1 \to 3,1,2 \to 1,2,3)$ der Argumente einer Determinante ändert sich dieses nicht!

24.I Rechenregeln für (3,3)–Determinanten.

Aus den Rechenregeln für Vektorprodukt und inneres Produkt ergibt sich:

24.18

Die (3,3)–Determinante ist in jeder Komponente **linear:**

$$\det(\vec a, \vec b, \vec c_1 + \vec c_2) = \det(\vec a, \vec b, \vec c_1) + \det(\vec a, \vec b, \vec c_2)\ ,$$
$$\det(\vec a, \vec b, \lambda\vec c) = \lambda \det(\vec a, \vec b, \vec c)$$

und entsprechend für die beiden anderen Komponenten.

24.19

Für drei Spaltenvektoren $\vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ — in dieser Reihenfolge! — ist

$$\det(\vec a, \vec b, \vec c) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1\ .$$

Denn: $\det(\vec a\,,\vec b\,,\vec c\,) \;= \vec a\cdot(\vec b\times\vec c\,) =$

$$= \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3\\ b_1 & c_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3\\ b_1 & c_1\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} =$$

$$= a_1\,(b_2c_3-b_3c_2) + a_2\,(b_3c_1-b_1c_3) + a_3\,(b_1c_2-b_2c_1) =$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1\;. \qquad \blacksquare$$

Zum Beispiel: Für $\vec a = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $\vec b = \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $\vec c = \begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$ ist (dreimal dasselbe!):

$$\det(\vec a\,,\vec b\,,\vec c\,) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 6 + 2\cdot 5\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 6 - 1\cdot 3\cdot 5 =$$

$$= 12+10+12-8-12-15 = 34-35 = \underline{\underline{-1}}\,,$$

$$= \vec a\cdot(\vec b\times\vec c\,) = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12-15\\ 12-12\\ 10-8\end{pmatrix} = -3+0+2 = \underline{\underline{-1}}\,,$$

$$= (\vec a\times\vec b\,)\cdot\vec c = \left[\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-2\\ 2-3\\ 2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 6\end{pmatrix} = 4-5+0 = \underline{\underline{-1}}\;.$$

Hieraus lässt sich für die drei gegebenen Vektoren folgern:

(i) die drei Vektoren $\vec a\,,\vec b\,,\vec c$ sind **linear unabhängig**, da $\det(\vec a\,,\vec b\,,\vec c\,)\neq 0$,

(ii) sie bilden ein **Linkssystem**, da $\det(\vec a\,,\vec b\,,\vec c\,) < 0$

(iii) und sie spannen ein Parallelflach auf vom **absoluten Volumen** $|V| = \left|\det(\vec a\,,\vec b\,,\vec c\,)\right| = 1$; das **orientierte Volumen** ist $V = -1$ .ebsp

Der Anfänger kann sich die Berechnung von (3,3)–Determinanten — und nur von diesen! — auch bequem mit Hilfe der **Sarrus'schen Regel** merken:

24.20

$$\det(\vec{a}\,,\ \vec{b}\ \vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & + \ + & + \end{array} \right| =$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1\ .$$

z.B.:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ - & - & - & + \ + & + \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= +\Big(1\cdot 1\cdot(-1)\Big) + \Big((-2)\cdot 2\cdot 2\Big) + \Big(1\cdot(-1)\cdot 1\Big) - \\ &\quad -\Big(2\cdot 1\cdot 1\Big) - \Big(1\cdot 2\cdot 1\Big) - \Big((-1)\cdot(-1)\cdot(-2)\Big) = \\ &= -1-8-1-2-2+2 = -12\,. \end{aligned}$$

Zwei weitere Regeln sind noch von Interesse:

24.21

Der Wert einer Determinante bleibt erhalten, wenn man

Zeilen und Spalten vertauscht: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(Das ist einfach nachzurechnen.)

z.B.: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 6 + 1\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 1 - 6\cdot 2\cdot 1 - 5\cdot 3\cdot 1 = 34 - 35 = -1$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 6 + 2\cdot 5\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 6 - 1\cdot 3\cdot 5 = 34 - 35 = -1\ .$

24.22

Der Wert einer Determinante, die **Diagonalform** hat, ist gleich dem **Produkt ihrer Diagonalelemente:** $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$.

Das ist ebenfalls leicht nachzurechnen, ist aber auch anschaulich klar:
der Wert der Determinante ist in diesem Fall gleich dem (orientierten) Volumen des von den drei **paarweise orthogonalen** Vektoren $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ aufgespannten **Quaders!**

An den hier erhaltenen Regeln für (3,3)–Determinanten bzw. Spatprodukte orientiert sich die allgemeine Definition von (n,n)–Determinanten! (siehe Lektion 34)

24.J Bemerkungen über Ebenen im $\mathbb{R}^3$. (*)

Der Inhalt der beiden letzten Abschnitte dürfte weitgehend von der Schule her bekannt sein. Wir stellen trotzdem einige Aussagen über Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$ nocheinmal zusammen, weil deren *anschauliches* Verständnis hilfreich ist für das Verstehen einer Fülle von Beispielen aus dem gesamten Gebiet der Linearen Algebra.

24.23

Die allgemeine **Koordinatendarstellung** einer **Ebene** E ist:

$\boxed{E:\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta}$ bzw. $\boxed{E:\ \vec{n}\cdot\vec{r} = \delta}$: hierbei ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

der allgemeine Vektor und $\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$ ein **Normalenvektor** auf E .

24.24

Die zu E **parallele Ebene durch den Koordinatenursprung** hat die Gleichung: $\boxed{E_0:\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0}$ bzw. $\boxed{E_0:\ \vec{r}\cdot\vec{n} = 0}$:

E_0 ist die eindeutig bestimmte **Ursprungsebene, die auf dem Vektor** $\vec{n}$ **senkrecht steht:** $\vec{n}\perp\vec{r} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \in E_0$.

24.25 $\boxed{d(\mathcal{O},E) = \dfrac{|\delta\,|}{|\vec{n}\,|} = \dfrac{|\delta\,|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}}$ ist der **Abstand des Koordinatenursprungs** $\mathcal{O}$ **zur Ebene** E

In der Regel lohnt es sich nicht, die letzte Formel nachzuschlagen oder gar zu merken: eine kurze Herleitung bei Bedarf ist bequemer und schneller:

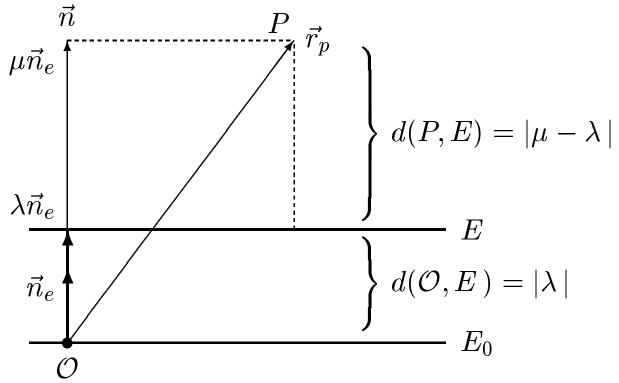
Ist $\vec{n}_e = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}\,|} = \dfrac{\vec{n}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$, so bestimmt man zunächst $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\lambda\vec{n}_e \in E$:

dann ist $d(\mathcal{O},E\,) = |\lambda\,|$:

$$\lambda\vec{n}_e = \frac{\lambda}{|\vec{n}\,|}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \in E \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\lambda}{|\vec{n}\,|}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\,) = \delta \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\lambda|\vec{n}\,|^2}{|\vec{n}\,|} = \delta\text{ , d.h. } \lambda = \frac{\delta}{|\vec{n}\,|}\,.$$



Damit ist $d(\mathcal{O},E\,) = \dfrac{|\delta|}{|\vec{n}\,|} = \dfrac{|\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$.

z.B.: Die Ebene $\boxed{E: x+2y+3z=-4}$ steht senkrecht auf der Geraden $g = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E.

$d(\mathcal{O},E) = \dfrac{|-4|}{|\vec{n}\,|} = \dfrac{4}{\sqrt{14}} = 1.069$ ist der Abstand der Ebene E zum Koordinatenursprung.

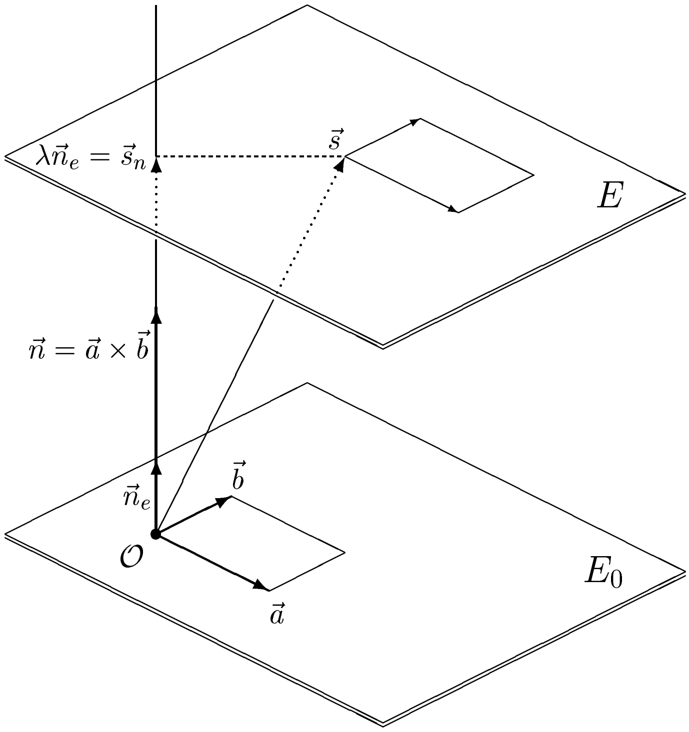
Um eine ONB $B = \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{span}\{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\} = E_0\ : x+2y+3z = 0$ zu finden, kann man folgendermaßen vorgehen:

Es ist $\vec{e}_3 = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\,\|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, und jeder zu $\vec{e}_3$ senkrechte Vektor liegt in E_0, z.B. $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ *und* $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$: hiermit ist $B = \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3\}$ eine rechtsorientierte ONB des $\mathbb{R}^3$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Die allgemeine **Parameterdarstellung** (= **vektorielle Darstellung**) einer Ebene ist:

$\boxed{E : \vec{r} = \vec{s} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad (\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R})}$ bzw. $\boxed{E = \vec{s} + \operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\,\right\}}$:

hierbei ist $\vec{s}$ ein **Stützvektor** und $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind zwei (linear unabhängige!) **Richtungsvektoren** von E .



24.26

Die zu E **parallele Ursprungsebene** hat die Darstellung:

$\boxed{E_0 : \vec{r} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad (\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R})}$ bzw. $\boxed{E_0 = \operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\,\right\}}$ und

$\boxed{\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}}$ ist ein **Normalenvektor** von E .

24.27 $\boxed{d(\mathcal{O}, E) = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{s}\,|}{|\vec{n}\,|} = \dfrac{|(\vec{a}\times\vec{b}\,)\cdot\vec{s}\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|} = \dfrac{|\det(\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{s}\,)\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|}}$ ist der **Abstand** des **Koordinatenursprungs** zu E ,

z.B.: $E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R})$ ist eine Parameterdarstellung der Ebene mit Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor zu E und $E_0 = \operatorname{span}\left\{\vec{a}\,,\,\vec{b}\,\right\} =$

$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist die zu $\vec{n}$ orthogonale und zu E parallele Ebene durch den Koordinatenursprung. E hat vom Koordinatenursprung den Abstand:

$$d(\mathcal{O}, E) = \left| \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+16+1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = 0.655 \,.$$

24.28

Für eine Ebene $\boxed{\boxed{E : \vec{r} = \vec{s} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \;\; (\lambda, \mu \in \mathbb{R})}}$ ergibt sich eine Koordinatendarstellung der Form $E : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ am einfachsten aus der Darstellung $E : \vec{n} \cdot \vec{r} = \delta$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$:

wegen $\vec{s} \in E$ ist $\delta = \vec{n} \cdot \vec{s}$ und $\boxed{E : \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{s}}$, folglich:

$\boxed{\boxed{E : \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{s})}}$: wenn man beide Determinanten ausrechnet, erhält man eine Koordinatendarstellung für E.

24.29

Es gibt mehrere Möglichkeiten, für eine Ebene $\boxed{\boxed{E : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta}}$ eine Parameterdarstellung $E : \vec{r} = \vec{s} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \;\; (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ zu finden, z.B.:
Man kann die gegebene Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ nach z auflösen (falls $\gamma \neq 0$) oder nach y (falls $\beta \neq 0$) oder nach x (falls $\alpha \neq 0$).
Auflösen nach z ergibt z.B.: $z = \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} x - \frac{\beta}{\gamma} y$, somit:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} x - \frac{\beta}{\gamma} y \end{pmatrix}$$; mit beliebigen $x = \lambda, \; y = \mu \in \mathbb{R}$

erhält man hiermit die Parameterdarstellung:

$$\boxed{\boxed{E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta/\gamma \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha/\gamma \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\beta/\gamma \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})}} \,.$$

Beachte: Die **Koordinatendarstellung** $E : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ einer Ebene E im $\mathbb{R}^3$ ist — bis auf einen konstanten Faktor $\neq 0$, mit dem die Gleichung durchmultipliziert werden kann — *eindeutig*, denn es gibt — bis auf ein Vorzeichen — *nur eine* Normalenrichtung im $\mathbb{R}^3$; dagegen besitzt jede Ebene E

beliebig viele **Parameterdarstellungen** $E : \vec{r} = \vec{s} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \ \ (\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R})$ — denen man auch nicht ohne weiteres ansieht, dass sie dieselbe Ebene darstellen! —, denn als Stützvektor kann man *jeden* Vektor $\vec{s} \in E$ und als Richtungsvektoren *irgend*–zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}\,,\,\vec{b} \in E_0$, also *irgend*–zwei linear unabhängige und zum Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *orthogonale* Vektoren $\vec{a}\,,\,\vec{b}$ wählen!

z.B.: 1. Eine Koordinatendarstellung der Ebene aus dem letzten Beispiel:

$$\boxed{E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R})}$$

erhält man aus der Beziehung: $E : \det(\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{r}) = \det(\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{s})$, d.h.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \text{ , also: } \boxed{E : 2x - 4y - z = 3} \ .$$

2. Es soll eine Parameterdarstellung für die Ebene $\boxed{E : x + 2y + 3z = -4}$ gefunden werden:

Auflösen der Gleichung für E z.B. nach x ergibt: $x = -4 - 2y - 3z$, also:

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ;$$

mit beliebigen $y = \lambda\,,\ z = \mu \in \mathbb{R}$ erhält man die Parameterdarstellung:

$$\boxed{E : \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R})} \ .$$

24.K Bemerkungen über Geraden im $\mathbb{R}^3$. (*)

24.30

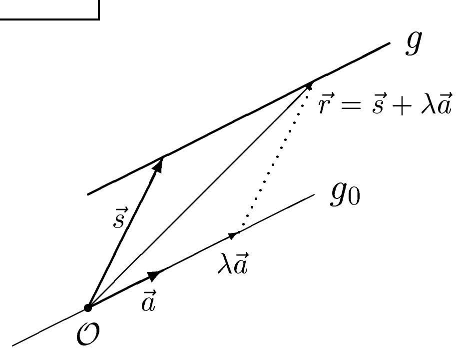
Die **Gerade** g mit dem **Stützvektor** $\vec{s}$ und dem **Richtungsvektor** $\vec{a}$ hat die **Parameterdarstellung**:

$\boxed{g : \vec{r} = \vec{s} + \lambda\vec{a} \ \ (\lambda \in \mathbb{R})}$ bzw. $\boxed{g = \vec{s} + \operatorname{span}\{\vec{a}\}}$;

die zu g parallele Gerade g_0 durch den Koordinatenursprung hat die Gleichung:

$\boxed{g_0 : \vec{r} = \lambda\vec{a} \ \ (\lambda \in \mathbb{R})}$

bzw. $\boxed{g_0 = \operatorname{span}\{\vec{a}\}}$.



24.31

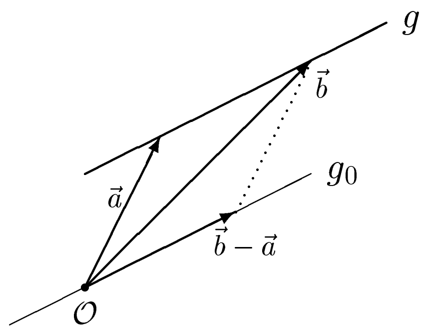
Für die **Gerade** g **durch zwei Punkte** $\vec a$, $\vec b$ kann man z.B. $\vec a$ als **Stützvektor** und $\vec b - \vec a$ als **Richtungsvektor** nehmen: das ergibt die **Parameterdarstellung:**

$\boxed{g:\ \vec r = \vec a + \lambda(\vec b - \vec a)\ \ (\lambda \in \mathbb{R})}$ bzw. $\boxed{g = \vec a + \operatorname{span}\left\{\vec b - \vec a\right\}}$;

die zu g parallele Gerade g_0 durch den Koordinatenursprung hat die Gleichung:

$\boxed{g_0:\ \vec r = \lambda(\vec b - \vec a)\,,\quad \lambda \in \mathbb{R}}$

bzw. $\boxed{g_0 = \operatorname{span}\left\{\vec b - \vec a\right\}}$.

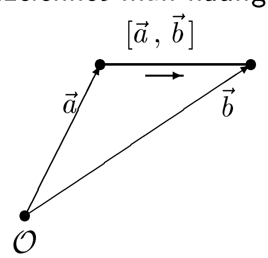


24.32

Die orientierte **Verbindungsstrecke** zwischen $\vec a$ und $\vec b$ bezeichnet man häufig als **Intervall:**

$\boxed{[\vec a\,,\,\vec b] := \left\{\vec r = \vec a + \lambda(\vec b - \vec a)\,\middle|\, 0 \le \lambda \le 1\right\}}$:

es beginnt mit $\lambda = 0$ bei $\vec a$ und endet mit $\lambda = 1$ bei $\vec b$.

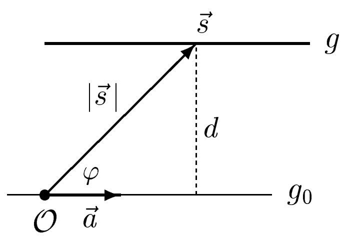


24.33

Der **Abstand der Geraden** $g = \vec s + \operatorname{span}\{\vec a\}$ **vom Koordinatenursprung** ist

$\boxed{d(\mathcal{O}\,,\,g) = \dfrac{|\vec a \times \vec s\,|}{|\vec a\,|}}$, denn

$$d = |\vec s\,|\sin\varphi = \left|\frac{\vec a}{|\vec a\,|}\right|\,|\vec s\,|\,\sin\varphi = \left|\frac{\vec a}{|\vec a\,|} \times \vec s\right| = \frac{|\vec a \times \vec s\,|}{|\vec a\,|}\,.$$



Zum Beispiel:

1. Die Gerade g durch den **Punkt** $S(1\,|\,2\,|\,3\,)$ mit der **Richtung** von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die

Gleichung: $\boxed{g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$ bzw. $\boxed{g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$.

2. Die Gerade $\tilde{g}$ **durch die beiden Punkte** $A(1\,|\,2\,|\,3\,)$, $B(-1\,|\,0\,|\,2\,)$ stimmt mit g überein:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = g\ . \end{aligned}$$

3. Das **Intervall** von A bis B ist:

$$\big[A\,,\,B\,\big] = \left\{\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \le \lambda \le 1 \right\}\ .$$

4. Die Gerade g hat vom **Koordinatenursprung** den **Abstand**:

$$d(\mathcal{O}\,,\,g\,) = \frac{|\vec{a} \times \vec{s}\,|}{|\vec{a}\,|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{14}} = 4\sqrt{\frac{3}{7}} = 2.619\,.$$

24.34

Da jede Gleichung der Form $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ eine **Ebene** des $\mathbb{R}^3$ darstellt, ist es nicht möglich, **Geraden** des $\mathbb{R}^3$ durch *eine* Koordinatengleichung dieser Art darzustellen: man benötigt für **Geraden** *zwei* solcher Gleichungen:

$$\boxed{g : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \end{cases}}$$

jede **Gerade** g wird als **Schnittgerade** von zwei Ebenen $E_1\,:\,\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1$ und $E_2\,:\,\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2$ dargestellt.

Zum Beispiel:

1. Sei $\boxed{g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$ die Gerade aus dem letzten Beispiel.

Es ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in g$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

das sind drei Gleichungen: $x = 1 + 3\lambda$, $y = 2 + 2\lambda$, $z = 3 + \lambda$.

Löst man (z.B.) die letzte Gleichung nach λ auf: $\lambda = z - 3$, so folgt:

$x = 1 + 3(z-3) = 3z - 8$, d.h.: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 : x - 3z = -8$ *und*

$y = 2 + 2(z-3) = 2z - 4$, d.h.: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 : y - 2z = -4$.

Man erhält auf diese Weise für die Gerade g die **Koordinatendarstellung:**

$$\boxed{g : \begin{cases} x - 3z = -8 \\ y - 2z = -4 \end{cases}} :$$

die Gerade g wird hiermit als Schnittgerade der beiden Ebenen $E_1 : x - 3z = -8$ und $E_2 : y - 2z = -4$ dargestellt:

die Ebene E_1 steht senkrecht auf der z,x–Ebene und schneidet diese in der Geraden $x = 3z - 8$, die Ebene E_2 steht senkrecht auf der y,z–Ebene und schneidet diese in der Geraden $z = \frac{1}{2}y + 2$.

2. Um für die Gerade $\boxed{g : \begin{cases} x - y + 2z &= 3 \\ 2x + 3y - z &= -1 \end{cases}}$ eine **Parameterdarstellung** zu bekommen, muss man versuchen, aus diesen beiden Gleichungen zwei der drei Koordinaten zu eliminieren, z.B.:

$$\begin{array}{llcrl}
(1) & x - y + 2z = 3 & \Rightarrow & x = & y - 2z + 3 \\
(2) & 2x + 3y - z = -1 & \Rightarrow & z = & 2x + 3y + 1 \stackrel{(1)}{=} 2(y - 2z + 3) + 3y + 1 = \\
 & & & = & 5y - 4z + 7 \\
 & & \Rightarrow & 5z = & 5y + 7 \text{ bzw. } z = y + 7/5 \ ,
\end{array}$$

damit ist $x = y - 2(y + 7/5) + 3 = -y + 1/5$ und mit beliebigem $y = \lambda$ folgt:

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda + 1/5 \\ \lambda \\ \lambda + 7/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 7/5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \ .$$

25 Richtungsableitung. Wegintegrale.

Stichpunkte: Ableitung von Vektoren, Ableitungsregeln. Beschreibung von Kurvenbögen; skalares und vektorielles Bogenelement, die Länge eines Kurvenbogens; Tangential– und Normalenvektoren. Richtungsableitung von Kurvenbögen; Gradient und maximale Änderung, Höhenlinien und Niveauflächen. Integration nach der Bogenlänge (Wegintegrale erster Art), allgemeine Wegintegrale (zweiter Art).

25.A Ableitungsregeln für Vektoren.

25.1 Die **Ableitung** eines variablen Vektors $\vec{F}(t) = \big(F_1(t), \ldots, F_n(t)\big)$ wird wie im Fall skalarer Funktionen definiert:

$$\boxed{\vec{F}'(t) = \frac{d\vec{F}}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}(t+\Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}}\,.$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{u\to u_0} \vec{A}(u) = \lim\limits_{u\to u_0} (A_1(u), \ldots, A_n(u))$ stets der *koeffizientenweise* zu bildende Grenzwert ist (siehe Nummer 22.8): $\lim\limits_{u\to u_0} (A_1(u), \ldots, A_n(u)) = \left(\lim\limits_{u\to u_0} A_1(u), \ldots, \lim\limits_{u\to u_0} A_n(u)\right)$,

erhält man die **Ableitung** $\vec{F}'(t)$ eines Vektors $\vec{F}(t)$ durch *koeffizientenweises* Ableiten dieses Vektors:

25.2 !! **Vektoren werden komponentenweise abgeleitet.** !!

!! $\boxed{\vec{F}'(t) = \big(F_1(t), \ldots, F_n(t)\big)' = \big(F_1'(t), \ldots, F_n'(t)\big)}$!!

z.B.: Für $\vec{F}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ist $\vec{F}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

Für die Ableitung vektorwertiger Funktionen ergeben sich ähnliche **Regeln** wie im Fall skalarwertiger Funktionen einer Veränderlichen:

25.3

(1) $\boxed{\big(\alpha\vec{F} + \beta\vec{G}\big)' = \alpha\vec{F}' + \beta\vec{G}'}$ **Linearität**;

(2) $\boxed{\big(\Phi\vec{F}\big)' = \Phi'\vec{F} + \Phi\vec{F}'}$ **Produktregel** für die Multiplikation mit skalaren Funktionen;

(3) $\boxed{\big(\vec{F}\cdot\vec{G}\big)' = \vec{F}'\cdot\vec{G} + \vec{F}\cdot\vec{G}'}$ **Produktregel** für das Skalarprodukt;

(4) $\boxed{\big(\vec{F}\times\vec{G}\big)' = \vec{F}'\times\vec{G} + \vec{F}\times\vec{G}'}$ **Produktregel** für das Kreuzprodukt.

Diese Regeln sind einfach nachzurechnen, z.B.:

$$\begin{aligned}
\text{zu } \mathbf{(3):}\ (\vec F \cdot \vec G\,)' &= \left(\sum_{j=1}^{n} F_j^* G_j\right)' = \sum_{j=1}^{n} \left(F_j^{*\prime} G_j + F_j^* G_j'\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} F_j'^{*} G_j + \sum_{j=1}^{n} F_j^* G_j' = \vec F\,' \cdot \vec G + \vec F \cdot \vec G\,' , \\
\text{zu } \mathbf{(4):}\ (\vec F \times \vec G\,)' &= \begin{pmatrix} (F_2G_3 - F_3G_2)' \\ (F_3G_1 - F_1G_3)' \\ (F_1G_2 - F_2G_1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2'G_3 + F_2G_3' - F_3'G_2 - F_3G_2' \\ F_3'G_1 + F_3G_1' - F_1'G_3 - F_1G_3' \\ F_1'G_2 + F_1G_2' - F_2'G_1 - F_2G_1' \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} F_2'G_3 - F_3'G_2 \\ F_3'G_1 - F_1'G_3 \\ F_1'G_2 - F_2'G_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2G_3' - F_3G_2' \\ F_3G_1' - F_1G_3' \\ F_1G_2' - F_2G_1' \end{pmatrix} = \vec F\,' \times \vec G + \vec F \times \vec G\,' . \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Aus (3) ergibt sich noch:

25.4 Für *reelle* vektorwertige Funktionen $\vec F = \vec F\,(t)$ gilt:
$\vec F\,' \perp \vec F \ \Leftrightarrow\ \|\vec F\,\|$ konstant.

Denn: $\vec F\,' \perp \vec F \Leftrightarrow \vec F\,' \cdot \vec F = 0 \Leftrightarrow \left(\|\vec F\,\|^2\right)' = \left(\vec F \cdot \vec F\right)' \overset{(3)}{=} \vec F\,' \cdot \vec F + \vec F \cdot \vec F\,' = 2\left(\vec F\,' \cdot \vec F\right) = 0$
$\Leftrightarrow \|\vec F\,\|^2$ konstant, also auch $\|\vec F\,\|$ konstant. $\blacksquare$

Ist **z.B.** $\vec t\,(t)$ der **Tangenteneinheitsvektor** an eine Kurve $C\ : \vec r = \vec r\,(t)$, so ist $\|\vec t\,\| = 1$, also konstant, damit $\vec n := \vec t\,' \perp \vec t$, d.h. $\vec n$ ist ein **Normalenvektor.** (s.u. Abschnitt 25.C)

25.B Kurvenbögen.

In diesem Abschnitt sei C ein **Kurvenbogen (= Weg)** im $\mathbb{R}^n$, der sich mit einem Parameter t in der Form $C\ :\ \vec r = \vec r\,(t) = \left(x_1(t)\,,\ \ldots\ ,\, x_n(t)\right)$, $a \le t \le b$, mit (zumindest stückweise) stetig differenzierbaren "Orts"–Koordinaten $x_j\,(t)$ darstellen lässt.

$\vec r_a = \vec r\,(a)$ ist der **Weganfang** und $\vec r_b = \vec r\,(b)$ das **Wegende** ; der Weg C hat also eine **Orientierung** : er wird von $\vec r_a$ nach $\vec r_b$ durchlaufen.

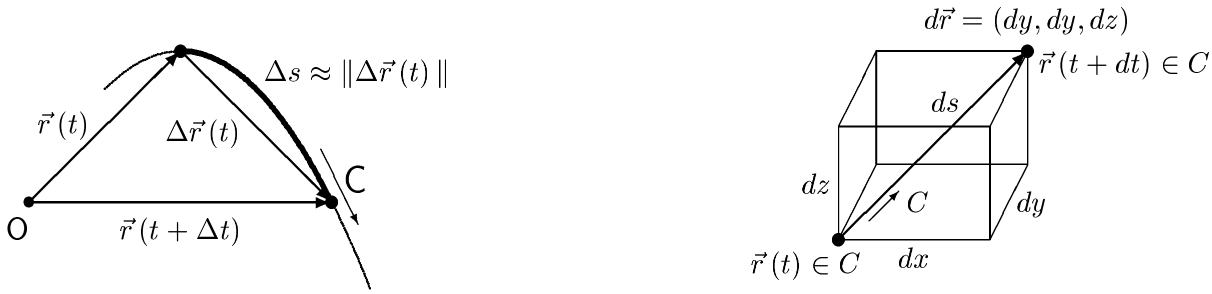
Derselbe, jedoch in *umgekehrter* Richtung von $\vec r_b$ nach $\vec r_a$ durchlaufene Weg wird mit $-C$ bezeichnet: C und $-C$ haben dieselbe Parameterdarstellung $\vec r = \vec r\,(t)$, doch läuft beim Weg $-C$ der Parameter t "von b bis a" , wenn beim Weg C der Parameter t "von a bis b" läuft.

Ist C_1 ein Weg von $\vec r_a$ nach $\vec r_b$ und C_2 ein Weg von $\vec r_b$ nach $\vec r_c$, so ist $C = C_1 + C_2$ (in *dieser* Reihenfolge!) der **zusammengesetzte Weg** , der zunächst längs C_1 von $\vec r_a$ nach $\vec r_b$, dann längs C_2 von $\vec r_b$ nach $\vec r_c$ führt.

Dann ist:

25.5 $\boxed{d\vec{r} = (dx_1\,, \,\ldots\,,\, dx_n) = \bigl(x_1'(t)\,, \,\ldots\,,\, x_n'(t)\bigr)\;dt = \vec{r}\,'(t)\,dt}$ das **vektorielle Bogenelement** auf C und

25.6
$$\boxed{\begin{aligned} ds &= \|d\vec{r}\,\| = \sqrt{(dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2} = \\ &= \|\vec{r}\,'(t)\,\|\,dt = \sqrt{\bigl(x_1'(t)\bigr)^2 + \cdots + \bigl(x_n'(t)\bigr)^2}\;dt \end{aligned}}$$
ist das **skalare Bogenelement** auf C.



$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{\Delta\vec{r}\,(t)}{\Delta t}\right\| = \|\vec{r}\,'(t)\,\|$$

$$ds = \|d\vec{r}\,\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Abbildung 25.1 skalares und vektorielles Bogenelement

25.7

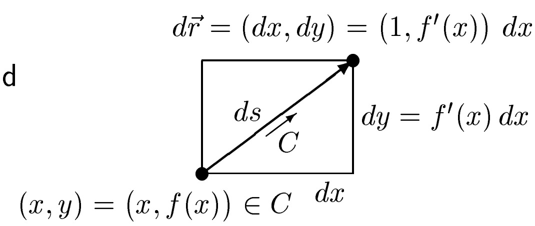
Für einen *ebenen* Kurvenbogen der Form $C: y = f(x)\,,\; a \le x \le b$ ist $C\;:\;\vec{r} = \vec{r}\,(x) = \bigl(x, f(x)\bigr)$, somit: $\vec{r}\,'(x) = \bigl(1, f'(x)\bigr)$; dann ist:

$$\boxed{d\vec{r} = (dx, dy) = \bigl(1, f'(x)\bigr)\;dx}$$

das **vektorielle Bogenelement** und

$$\boxed{\begin{aligned} ds &= \|d\vec{r}\,\| = \|\vec{r}\,'(x)\,\|\,dx = \\ &= \sqrt{1 + \bigl(f'(x)\bigr)^2}\;dx \end{aligned}}$$

das **skalare Bogenelement** auf C.



$$\begin{aligned} ds &= \|d\vec{r}\,\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \bigl(f'(x)\bigr)^2}\;dx \end{aligned}$$

Die **Länge eines Kurvenbogens** C ergibt sich durch "Aufsummieren" der skalaren Bogenelemente auf C:

25.8

für einen Kurvenbogen $C: \vec{r} = \vec{r}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, $a \le t \le b$:

$$s = \int\limits_C ds = \int\limits_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x_1'(t)\big)^2 + \cdots + \big(x_n'(t)\big)^2} \, dt \,,$$

25.9

für einen ebenen Kurvenbogen $C: y = f(x)$, $a \le x \le b$:

$$s = \int\limits_C ds = \int\limits_a^b \|\vec{r}'(x)\| \, dx = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} \, dx \,.$$

Zum Beispiel:

1. Für den **Kreis** $C: x = r\cos\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ ist

$\vec{r} = \vec{r}(\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $\vec{r}'(\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$; damit ist

$ds = \|\vec{r}'(\varphi)\| \, d\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} \, d\varphi = r \, d\varphi$ das Bogenelement auf C und

$s = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(\varphi)\| \, d\varphi = \int_0^{2\pi} r \, d\varphi = 2\pi r$ ist der Kreisumfang.

2. Für eine **Ellipse** $C: x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ ist

$\vec{r} = \vec{r}(\varphi) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, $\vec{r}'(\varphi) = (-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$, also

$ds = \|\vec{r}'(\varphi)\| \, d\varphi = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} \, d\varphi$ das Bogenelement;

für den Ellipsenumfang ergibt sich:

$s = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(\varphi)\| \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} \, d\varphi$:

dies ist ein **elliptisches Integral** und ist im Fall $a \ne b$ **nicht elementar auswertbar!**

(Aus diesem Grund findet man auch in keiner Formelsammlung eine Formel für den Ellipsenumfang.)

3. Für den **Parabelbogen** $C: y = x^2$, $-1 \le x \le 1$ ist

$\vec{r} = \vec{r}(x) = (x, x^2)$, somit $\vec{r}'(x) = (1, 2x)$ und $\|\vec{r}'(x)\| = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$.

Damit hat man das Bogenelement: $ds = \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$

und erhält für C die Länge:

$$\begin{aligned} s = \int_C ds &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = 2\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{2}\operatorname{Arsinh} 2x + x\sqrt{1 + 4x^2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arsinh} 2 + \sqrt{5} \approx 2.958 \,. \end{aligned}$$

4. Die **Kardioide** (Herzkurve) hat die **Polargleichung:** (mit $a > 0$)

$C\,:\; r = r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$, d.h. es ist:

$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi = a\,\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)$
$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi = a\,\sin\varphi\,(1+\cos\varphi)$;

damit ergibt sich für C:

$\vec{r} = \vec{r}\,(\varphi) = a\,(1+\cos\varphi)\,\Big(\cos\varphi\,,\,\sin\varphi\Big)$,

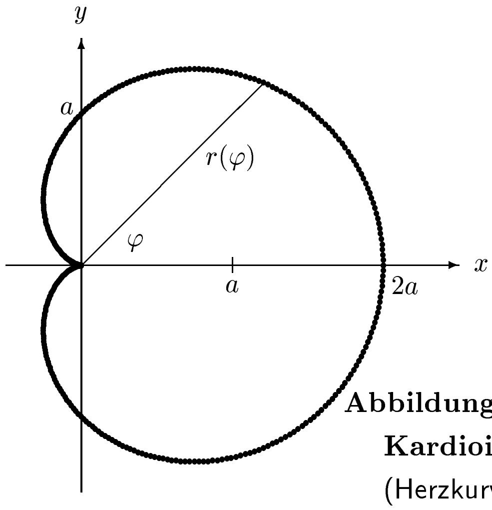


Abbildung 25.2
Kardioide
(Herzkurve)

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(\varphi) &= -a\sin\varphi\Big(\cos\varphi\,,\,\sin\varphi\Big) + a(1+\cos\varphi)\Big(-\sin\varphi\,,\,\cos\varphi\Big) = \\
&= a\Big(-2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\,,\,-\sin^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi\Big)\;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{r}\,'(\varphi)\|^2 &= a^2\,(4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi + \sin^4\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi + \\
&\qquad + \cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2\cos^3\varphi + \cos^4\varphi) = \\
&= a^2\,((\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 + 1 + 2(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi - 2\cos^3\varphi) = \\
&= 2a^2\,(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2(\varphi/2)\;.
\end{aligned}$$

Das Bogenelement ist: $ds = \|\vec{r}\,'(\varphi)\| = 2a\,|\cos(\varphi/2)|\,d\varphi$

und für die Länge der Kardioide C erhält man:

$$s = \int_C ds = 2\int_0^{\pi}\|\vec{r}\,'(\varphi)\|\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos(\varphi/2)\;d\varphi = 4a\Big[2\sin(\varphi/2)\Big]_0^{\pi} = 8a\,.$$

Bemerkung zur Länge eines Kurvenbogens. (*)

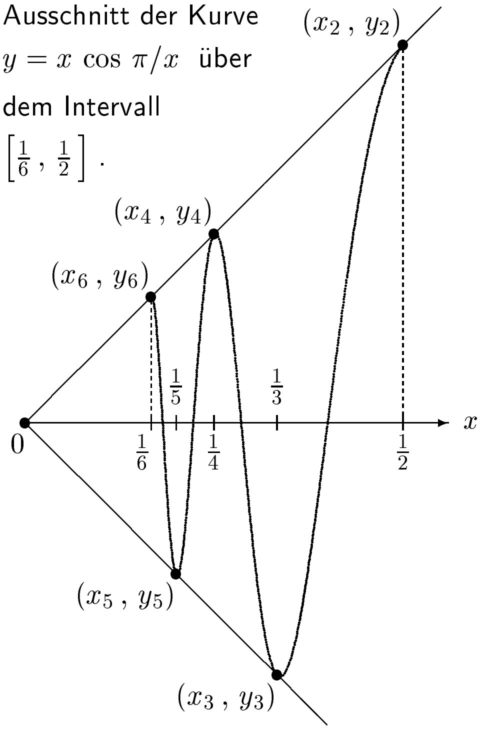
Die vorangegangenen Formeln und Beispiele für die Länge eines Kurvenbogens könnten vermuten lassen, dass jeder stetige Kurvenbogen $C\,:\,\vec{r} = \vec{r}\,(t)\,,\; a \le t \le b$ **rektifizierbar** ist, d.h. eine *endliche* Länge hat, sofern das Intervall $[a, b]$ endlich ist. Das folgende Beispiel soll zeigen, dass diese Vermutung *falsch* ist (!):

z.B.: Mit $y(0) = 0$ und $y(x) = x\cos\pi/x$ für $x \ne 0$ sei

$C\,:\,\vec{r} = \vec{r}\,(x) = \big(x, y(x)\big)$ für $0 \le x \le 1$.

Um die Länge von C abzuschätzen, zerlegen wir das Intervall $[0, 1]$ durch die Stützstellen $x_k = \frac{1}{k}\,,\; k \in \mathbb{N}$:

Abbildung 25.3
10–fach vergrößerter Ausschnitt der Kurve $y = x\,\cos\,\pi/x$ über dem Intervall $\left[\frac{1}{6}\,,\,\frac{1}{2}\right]$.



die zu den Stützstellen x_k gehörenden Funktionswerte sind:

$$y_k = y(x_k) = \frac{1}{k}\,\cos\,k\pi = \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

Wenn man für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiert:

$\Delta s_k := \left\|(x_k\,,\,y_k) - (x_{k+1}\,,\,y_{k+1})\right\|$, dann ist:

$$\begin{aligned}(\Delta s_k)^2 &= (x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2 = \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)^2 \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)^2 \geq \left(\frac{2}{k+1}\right)^2,\end{aligned}$$

damit ist: $\Delta s_k \geq \dfrac{2}{k+1}$.

Für die Länge s von C erhalten wir: $s \geq \sum_{k=1}^{\infty} \Delta s_k \geq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k+1} = \infty$; die Kurve C hat also *keine endliche* Länge: das liegt daran, daß sie mit $x \to 0+$ "sehr stark" oszilliert; an der Stelle $x = 0$ ist $\vec{r}\,(x) = (x\,,\,y(x))$ auch nicht differenzierbar!

25.C Tangential– und Normalenvektoren. (*)

25.10

Für einen Kurvenbogen $C:\ \vec{r} = \vec{r}\,(t)\,,\ a \leq t \leq b$ ist $\vec{r}\,'(t)$ ein **Tangentialvektor** und

$\boxed{\vec{t}\,(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\,\|}}$ der **Tangenteneinheitsvektor** von C an der Stelle $\vec{r}\,(t)$.

Da $\|\vec{t}\,(t)\,\| = 1$ konstant ist (als Einheitsvektor), ist $\vec{t}\,'(t)$ orthogonal zu $\vec{t}\,(t)$ (s.o. Nr. 25.4):

$\boxed{\vec{n}\,(t) = \dfrac{\vec{t}\,'(t)}{\|\vec{t}\,'(t)\,\|}}$ ist der **Hauptnormaleneinheitsvektor** an der Stelle $\vec{r}\,(t)$.

25.11 Ist t die Zeit und beschreibt $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ die Bewegung eines Körpers auf seiner Bahnkurve C, so ist $\vec{r}\,'(t)$ der **Geschwindigkeitsvektor** und

$\boxed{v = \dfrac{ds}{dt} = \|\vec{r}\,'(t)\,\|}$ ist die (skalare)

Momentangeschwindigkeit zur Zeit t, wobei

$$s = s(t) = \int_a^t \|\vec{r}\,'(\tau)\,\|\,d\tau$$

die Länge des bis zum Zeitpunkt $t \geq a$ zurückgelegten Weges ist.

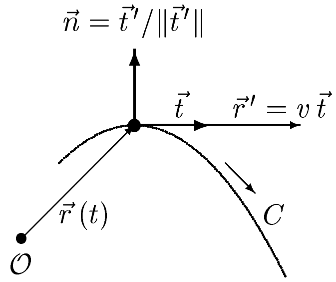


Abbildung 25.4
Tangenten– und Hauptnormaleneinheitsvektor

25.12 Der **Beschleunigungsvektor** zur Zeit t ist $\vec{b}\,(t) = \vec{r}\,''\,(t)$. Aus der Darstellung $\vec{r}\,' = \|\vec{r}\,'\,\|\,\vec{t} = v\,\vec{t}$ ergibt sich mit der Produktregel (2) in Nr. 25.3:

$$\boxed{\vec{b} = v'\,\vec{t} + v\,\vec{t}\,' = v'\,\vec{t} + (v\,\|\vec{t}\,'\,\|)\,\vec{n}} :$$

die Beschleunigung setzt sich somit aus zwei Teilen zusammen:

$\boxed{\vec{b}_t := v'\,\vec{t}}$ ist die **Tangentialbeschleunigung** (in Richtung der Bahntangente) und

$\boxed{\vec{b}_n := (v\,\|\vec{t}\,'\,\|)\,\vec{n}}$ ist die **Normalbeschleunigung** (in Hauptnormalen–Richtung).

z.B.: Wir betrachten den Kurvenbogen $C: \; x = t\,,\; y = t^2\,,\; z = \frac{2}{3}t^3$ mit $0 \leq t \leq t_e$, den wir auch als die Bahnkurve eines sich bewegenden Körpers auffassen können.
Für jedes $t \in [0\,,\,t_e\,]$ bzw. zu jeder Zeit t $0 \leq t \leq t_e$ haben wir dann:

(i) den **allgemeinen Vektor** auf C bzw. den **Ortsvektor** des Körpers:

$$\vec{r}\,(t) = \left(t\,,\,t^2\,,\,\tfrac{2}{3}t^3\right)\,,$$

(ii) den **Tangentialvektor** von C an der Stelle $\vec{r}\,(t)$ bzw, die **(vektorielle) Geschwindigkeit** des Körpers:

$$\vec{r}\,'\,(t) = (1\,,\,2t\,,\,2t^2)\,,$$

(iii) die **(skalare) Momentangeschwindigkeit**:

$$v = \frac{ds}{dt} = \|\vec{r}\,'\,(t)\,\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 1 + 2t^2\,,$$

(iv) das **skalare Bogenelement** auf C: $ds = \|d\vec{r}\,\| = \|\vec{r}\,'\,(t)\,\|\,dt = (1 + 2t^2)\,dt$,

(v) die **Bogenlänge** über dem Intervall $[0, t\,]$ bzw. die **Länge** des bis zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weges:

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \|\vec{r}\,'\,(\tau)\,\|\,d\tau = \int_0^t (1 + 2\tau^2)\,d\tau = t + \frac{2}{3}t^3\,,$$

(vi) den **Tangenteneinheitsvektor** von C an der Stelle $\vec{r}\,(t)$:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{r}\,'\,(t)}{\|\vec{r}\,'\,(t)\,\|} = \frac{1}{1+2t^2}\,\Big(1\,,\,2t\,,\,2t^2\Big)$$

mit der Ableitung

$$\vec{t}\,' = \frac{(1+2t^2)\;(0\,,\,2\,,\,4t) - 4t\,(1\,,\,2t\,,\,2t^2)}{(1+2t^2)^2} = \frac{(\,-4t\,,\,2-4t^2\,,\,4t)}{(1+2t^2)^2}$$

und $\|\vec{t}\,'\,\| = \dfrac{\sqrt{16t^2+(2-4t^2)^2+16t^2}}{(1+2t^2)^2} = \dfrac{2}{1+2t^2}$,

(vii) den **Hauptnormaleneinheitsvektor** zu C an der Stelle $\vec{r}\,(t)$:

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{t}\,'}{\|\vec{t}\,'\,\|} = \frac{(\,-2t\,,\,1-2t^2\,,\,2t)}{1+2t^2}\;,$$

(viii) die **(vektorielle) Beschleunigung**:

$$\vec{b}\,(t) = \vec{b}_t\,(t) + \vec{b}_n\,(t) = \vec{r}\,''\,(t) = (0\,,\,2\,,\,4t)$$

mit der **Tangentialbeschleunigung**:

$$\vec{b}_t\,(t) = v'\,\vec{t} = \frac{4t}{1+2t^2}\,\Big(1\,,\,2t\,,\,2t^2\Big)$$

und der **Normalbeschleunigung**:

$$\vec{b}_n\,(t) = \Big(v\,\|\vec{t}\,'\,\|\Big)\,\vec{n} = \frac{2}{1+2t^2}\,\Big(\,-2t\,,\,1-2t^2\,,\,2t\Big)\;.$$

25.D Richtungsableitung von Skalarfeldern.

Sei f ein n−**dimensionales Skalarfeld**, d.h. eine skalarwertige Funktion $f(\vec{r}\,) = f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ von n unabhängigen Variablen $\vec{r} = (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) \in \mathbb{R}^n$, und sei $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{b} \neq \vec{o}$ eine vorgegebene Richtung mit dem zugehörigen Einheitsvektor $\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\,\|}$.

25.13 Die **(Richtungs-) Ableitung** (auch: der **Anstieg** oder die **Änderung**) von f **an einer Stelle** $\vec{a} = (a_1\,,\,\ldots\,,\,a_n\,) \in \mathbb{R}^n$ **in Richtung von** $\vec{b}$ bzw. (dasselbe) **in Richtung von** $\vec{e} = (e_1\,,\,\ldots\,,\,e_n)$ ist:

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec{a}\,)}{\partial\vec{b}} = \frac{\partial f(\vec{a}\,)}{\partial\vec{e}} := \lim_{\vartheta\to 0}\frac{f(\vec{a}+\vartheta\vec{e}\,) - f(\vec{a}\,)}{\vartheta}}$$

Ableitung von $f(\vec{r}\,)$ **an der Stelle** $\vec{a}$ **in Richtung von** $\vec{e} = \vec{b}\,/\|\vec{b}\,\|$.

(sofern dieser Grenzwert existiert).

Eine einfache Herleitung (s.u.) ergibt:

25.14

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec{a}\,)}{\partial\vec{b}} = \operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\,\|}}$$

Ableitung von $f(\vec{r}\,)$ **an der Stelle** $\vec{a}$ **in Richtung von** $\vec{b}$.

Hierbei ist $\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \left(\dfrac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_n} \right)$ der **Gradient** von $f(\vec{r}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ (s. auch den nächsten Abschnitt!)

Herleitung (*) : Wir wollen uns kurz überlegen — unter Vernachlässigung einiger mathematischer Feinheiten —, wie sich diese Formel ergibt:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial \vec{b}} = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(a_1 + \vartheta e_1, \ldots, a_n + \vartheta e_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\vartheta} =$$

$$= \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(a_1 + \vartheta e_1, a_2 + \vartheta e_2, \ldots, a_n + \vartheta e_n) - f(a_1, a_2 + \vartheta e_2, \ldots, a_n + \vartheta e_n)}{\vartheta} +$$

$$+ \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \vartheta e_2, a_3 + \vartheta e_3, \ldots, a_n + \vartheta e_n) - f(a_1, a_2, a_3 + \vartheta e_3, \ldots, a_n + \vartheta e_n)}{\vartheta} +$$

$$+ \cdots + \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_n + \vartheta e_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\vartheta} .$$

Mit $\bar{a}_j := a_j + \vartheta e_j$ $\left(\Rightarrow \bar{a}_j \to a_j \text{ für } \vartheta \to 0 \text{ und } \dfrac{\bar{a}_j - a_j}{\vartheta} = e_j \right)$ folgt:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial \vec{b}} = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) - f(a_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)}{\bar{a}_1 - a_1} \cdot \frac{\bar{a}_1 - a_1}{\vartheta} +$$

$$+ \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n) - f(a_1, a_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n)}{\bar{a}_2 - a_2} \cdot \frac{\bar{a}_2 - a_2}{\vartheta} +$$

$$+ \cdots + \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{n-1}, \bar{a}_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\bar{a}_n - a_n} \cdot \frac{\bar{a}_n - a_n}{\vartheta} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})\, e_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial e_n}(\vec{a})\, e_n = \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \right) \cdot (e_1, \ldots, e_n) =$$

$$= \operatorname{grad} f(\vec{a}) \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} . \quad \blacksquare$$

z.B.: Die Funktion $f(x,y) = \ln|x^2 + y|$ hat den Gradienten

$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y}, \dfrac{1}{x^2 + y} \right)$ und die Ableitung von $f(x,y)$ an der Stelle $\vec{a} = (2, -5)$ in Richtung des Vektors $\vec{b} = (-3, 4)$ ist:

$$\frac{\partial f(2,-5)}{\partial(-3, 4)} = \operatorname{grad} f(2,-5) \cdot \frac{(-3, 4)}{\|(-3, 4)\|} = (-4, -1) \cdot \frac{1}{5}(-3, 4) = \frac{8}{5} .$$

Wenn man bei der Ableitung $\dfrac{\partial f(\vec{a})}{\partial \vec{b}}$ für $\vec{a}$ einen Kurvenpunkt $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ auf einer Kurve $C : \vec{r} = \vec{r}(t)$ und für den Richtungsvektor $\vec{b}$ den Tangentenvektor $\vec{r}\,'(t_0)$ an der Stelle $\vec{r}_0$ nimmt, bekommt man:

25.15 $$\boxed{\frac{df(\vec{r}_0)}{ds} = \operatorname{grad} f(\vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{\|\vec{r}\,'(t_0)\|}}$$

die **Ableitung** von $f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \in C$ **in Richtung eines Weges** C $\Big($d.h. in Richtung des Tangentialvektors $\vec{r}\,'(t_0)$ $\Big)$.

z.B.: Sei $f(x,y) = \ln|x^2+y|$ (s.o.) und C der Kreis: $x = \cos\varphi$, $y = 2+\sin\varphi$.

Dann gilt auf C: $\vec{r}\,(\varphi) = (\cos\varphi\,,\, 2+\sin\varphi)$, $\vec{r}\,'(\varphi) = (-\sin\varphi\,,\, \cos\varphi)$, $\|\vec{r}\,'(\varphi)\| = 1$.

Die Ableitungen von f über dem Weg C in Richtung von C sind damit:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,f\,(\vec{r}\,(\varphi))}{ds} &= \operatorname{grad} f\,(\vec{r}\,(\varphi)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(\varphi)}{\|\vec{r}\,'(\varphi)\|} = \\
&= \left(\frac{2\cos\varphi}{\cos^2\varphi+2+\sin\varphi}\,,\, \frac{1}{\cos^2\varphi+2+\sin\varphi}\right)\cdot(-\sin\varphi\,,\,\cos\varphi) = \\
&= \frac{-2\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi}{\cos^2\varphi+2+\sin\varphi}\;.
\end{aligned}$$

Die oben in Nr. 25.15 angegebene Richtungsableitung $\dfrac{df(\vec{r}\,)}{ds}$ einer Funktion $f(\vec{r}\,)$ an einer Stelle $\vec{r}$ eines Weges $C:\ \vec{r} = \vec{r}\,(t)$, $a \le t \le b$, in Richtung dieses Weges darf nicht verwechselt werden mit der **totalen Ableitung** $\dfrac{df\big(\vec{r}\,(t)\big)}{dt}$: mit $ds = \|\vec{r}\,'(t)\,\|\,dt$ ist:

$$\frac{df\big(\vec{r}\,(t)\big)}{dt} = \|\vec{r}\,'(t)\,\|\,\frac{df\big(\vec{r}\,(t)\big)}{\|\vec{r}\,'(t)\,\|\,dt} = \|\vec{r}\,'(t)\,\|\,\frac{df(\vec{r}\,)}{ds} \overset{(3)}{=} \|\vec{r}\,'(t)\,\|\left(\operatorname{grad} f(\vec{r}\,)\cdot\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\,\|}\right)\ :$$

das ist die **Kettenregel für skalarwertige Funktionen von mehreren Variablen:**

25.16
$$\boxed{\frac{df\big(\vec{r}\,(t)\big)}{dt} = \operatorname{grad} f(\vec{r}\,)\cdot\vec{r}\,'(t) = \frac{\partial f(\vec{r}\,)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f(\vec{r}\,)}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}}\;.$$

z.B.: Sei wieder $f(x,y) = \ln|x^2+y|$ (s.o.) und mit einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ sei

$\vec{r}\,(\varphi) = (a\cos\varphi\,,\, 2+\sin\varphi)$. Wegen: $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2+y}\,,\,\dfrac{1}{x^2+y}\right)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{df\,(\vec{r}\,(\varphi))}{d\varphi} &= \operatorname{grad} f\,(\vec{r}\,(\varphi))\cdot\vec{r}\,'(\varphi) = \\
&= \left(\frac{2a\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi+2+\sin\varphi}\,,\,\frac{1}{a^2\cos^2\varphi+2+\sin\varphi}\right)\cdot(-a\sin\varphi\,,\,\cos\varphi) = \\
&= \frac{\cos\varphi(1-2a\sin\varphi)}{a^2\cos^2\varphi+2+\sin\varphi}\;.
\end{aligned}$$

Das Gleiche muss sich natürlich ergeben, wenn man die Funktion $h(\varphi) := f\,(\vec{r}\,(\varphi))$ nach φ ableitet:

$$h(\varphi) = \ln|a^2\cos^2\varphi+2+\sin\varphi| \ \Rightarrow\ h'(\varphi) = \frac{\cos\varphi(1-2a\sin\varphi)}{a^2\cos^2\varphi+2+\sin\varphi}\;.$$

25.E Geometrische Interpretation des Gradienten.

In Nummer 25.14 haben wir gesehen, dass die **Ableitung** einer skalarwertigen Funktion $f(\vec{r})$ **an einer Stelle** $\vec{a}$ **in Richtung eines Vektors** $\vec{b}$ durch

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec{a}\,)}{\partial \vec{b}} = \operatorname{grad} f(\vec{a}\,) \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\,\|}}$$ gegeben ist.

(a) Ist insbesondere $\vec{b}$ ein **Tangentenvektor** an die durch $\vec{a}$ verlaufende **Höhenlinie** bzw. **Niveaufläche** $f =$ const. $= f(\vec{a}\,)$, so ändert sich $f(\vec{r})$ an dieser Stelle $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ *nicht* (denn definitionsgemäß ist ja die Funktion f auf ihren Höhenlinien bzw. Niveauflächen $f = c =$ const. jeweils konstant), d.h. dann ist

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}\,) \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\,\|} = 0\,, \text{ somit: } \boxed{\operatorname{grad} f(\vec{a}\,) \perp \vec{b}}\,.$$

! **Der Gradient steht also senkrecht auf der durch $\vec{a}$ verlaufenden Höhenlinie bzw. Niveaufläche von f.**

(b) Mit der Schwarz'schen Ungleichung $|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \leq \|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\|$ (siehe Nummer 22.2) ist

$$\left|\frac{\partial f(\vec{a}\,)}{\partial \vec{b}}\right| = \left|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,) \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\,\|}\right| \leq \|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\| \left\|\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\,\|}\right\| = \|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\,\|\,,$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn die beiden Vektoren $\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind: mit $\vec{b} = \operatorname{grad} f(\vec{a}\,)$ ergibt sich in der Tat:

$$\frac{\partial f(\vec{a}\,)}{\partial \operatorname{grad} f(\vec{a}\,)} = \operatorname{grad} f(\vec{a}\,) \cdot \frac{\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)}{\|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\,\|} = \frac{\|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\,\|^2}{\|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\,\|} = \|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\,\|\,.$$

! Hiermit ist gezeigt, **dass** $m = \|\operatorname{grad} f(\vec{a}\,)\,\|$ **der maximal mögliche Anstieg von f an der Stelle $\vec{a}$ ist und dass f diesen maximalen Anstieg m in Richtung des Vektors $\vec{b} = \operatorname{grad} f(\vec{a}\,)$ hat.**

Fassen wir zusammen:

25.17 !

Sei $f = f(\vec{r})$ eine skalarwertige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. An jeder Stelle $\vec{a} \in \mathcal{D}(f)$:

(a) steht der **Gradient** $\operatorname{grad} f(\vec{a})$ **senkrecht auf der durch** $\vec{a}$ **verlaufenden Höhenlinie bzw. Niveaufläche** $f =$ **const.** $= f(\vec{a})$,

(b) hat der **Gradient** $\operatorname{grad} f(\vec{a})$ **die Richtung des maximalen Anstiegs von** $f(\vec{r})$ und

(c) ist die **Länge des Gradienten gleich dem maximalen Anstieg von** $f(\vec{r})$: $\|\operatorname{grad} f(\vec{a})\| = \dfrac{\partial f(\vec{a})}{\partial \operatorname{grad} f(\vec{a})}$.

z.B.: Sei $f(x,y) = \ln|x^2 + y|$ und $\vec{a} = (1.5\,, -3.25)$ (vgl. mit dem letzten Beispiel).

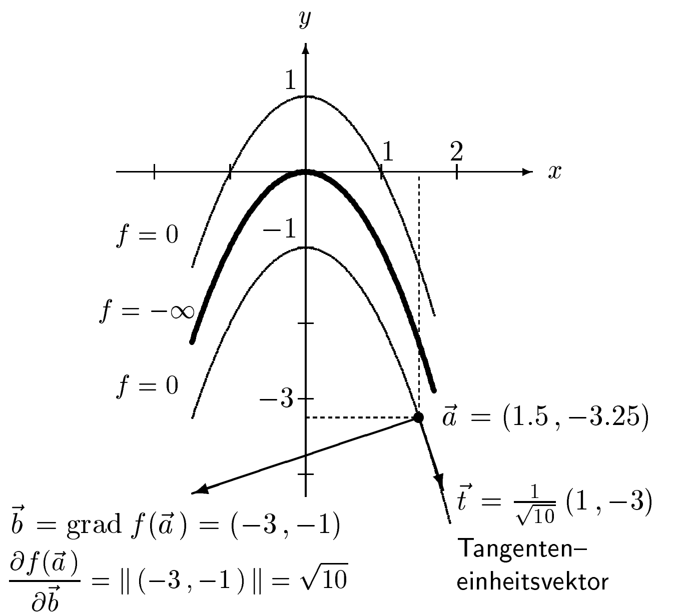
Die **Höhenlinien** $f = c$ sind:
$|x^2 + y| = e^c$ bzw. $y = -x^2 \pm e^c$.
Wegen $f(1.5\,, -3.25) = \ln|-1| = 0$ ist also $\boxed{y = -x^2 - 1}$ die durch $\vec{a} = (1.5\,, -3.25)$ verlaufende Höhenlinie.

Für den **Gradienten** ergibt sich:

$$\operatorname{grad} f(x\,,y) = (f_x\,, f_y) = \left(\frac{2x}{x^2+y}\,, \frac{1}{x^2+y}\right)$$

und damit: $\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{a}) = (-3\,, -1)}$.

Abbildung 25.5 Höhenlinien von $f(x,y) = \ln|x^2 + y|$



Die Funktion $f(x,y) = \ln|x^2 + y|$ nimmt also an der Stelle $\vec{a} = (1.5\,, -3.25)$ **am stärksten zu in Richtung des Vektors** $\vec{b} = \operatorname{grad} f(\vec{a}) = (-3\,, -1)$ und der zugehörige **maximale Anstieg** ist $m = \|\operatorname{grad} f(\vec{a})\| = \sqrt{10}$.

Die Höhenlinien haben an jeder Stelle x den Anstieg $y' = -2x$, an der Stelle $\vec{a} = (1.5\,, -3.25)$ also den Anstieg $m_{\vec{a}} = -3$; der **Tangenteneinheitsvektor** an die durch $\vec{a}$ verlaufende Höhenlinie ist damit $\vec{t} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1\,, -3)$ und wir haben — wie es sein muss —: $\operatorname{grad} f(\vec{a}) \cdot \vec{t} = 0$,

d.h. $\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{a}) \perp \vec{t}}$.

25.F Integration nach der Bogenlänge (Wegintegrale 1. Art).

Das **Integral** $\int\limits_C f(\vec{r})\,ds$ einer über C beschränkten Funktion $f(\vec{r})$ **nach der Bogenlänge** s eines Kurvenbogens C ist vergleichbar mit dem bestimmten Integral $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ einer beschränkten Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$:

Mit der symbolischen Schreibweise $\int\limits_C f(\vec{r})\,ds$ wird zunächst nur zum Ausdruck gebracht, dass die "Werte" $f(\vec{r})\,ds$ für $\vec{r} \in C$ "aufzusummieren" sind, dass es sich also bei diesem **Wegintegral 1.Art** um den Grenzwert von Summen der Form $\sum\limits_j f(\vec{r}_j)\,\Delta s$ handelt.

Da hierbei nur Argumente $\vec{r} \in C$, also $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit $a \le t \le b$ zugelassen sind, und mit der Darstellung $ds = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$ für das Bogenelement (s.o. Nummer 25.6 und 7) wird dieses Wegintegral auf naheliegende Weise auf ein gewöhnliches bestimmtes Integral zurückgeführt:

25.18

Für einen Kurvenbogen $C : \vec{r} = \vec{r}(t),\ a \le t \le b$ ist

$$\int\limits_C f(\vec{r})\,ds = \int\limits_a^b f\left(\vec{r}(t)\right)\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int\limits_a^b f\left(x_1(t),\ldots,x_n(t)\right)\sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \cdots + \left(x_n'(t)\right)^2}\,dt$$

das **Integral** der Funktion $f(\vec{r})$ **nach der Bogenlänge von** C.
(Synonyme: Wegintegral, Kurvenintegral, Linienintegral — jeweils **1.Art**)

Mit $f(\vec{r}) = 1$ (konstant) liefert dieses Integral gerade die **Bogenlänge** von C:

$$s = \int\limits_C ds = \int\limits_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \cdots + \left(x_n'(t)\right)^2}\,dt$$

(s.o. Nummer 25.8 und 9).

Der Wert eines Wegintegrals $\int_C f(\vec{r})\,ds$ läßt sich im Fall einer Funktion $f = f(x,y)$ von zwei Variablen als **Flächeninhalt** zwischen der "Boden"–Kurve C und der "Dach"–Fläche $z = f(x,y)$ deuten:

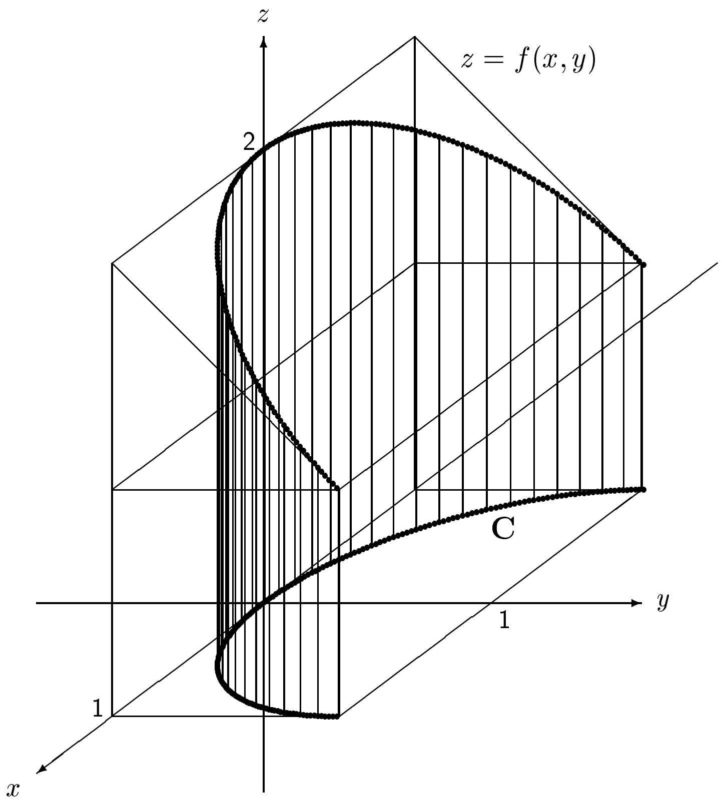


Abbildung 25.6 $z = f(x,y) = 2 - y$ über dem Halbkreis $C : x^2 + (y-1)^2 = 1\,,\ 0 \le y \le 1$

z.B.: (siehe die Skizze)

Sei $C:\ x = \cos\varphi\,,\ y = 1 + \sin\varphi\,,\ -\pi \le \varphi \le 0$ und $f(x,y) = 2 - y$.

Zunächst ist auf $C : \vec{r}\,(\varphi) = (\cos\varphi\,,\ 1 + \sin\varphi)\,,\ \vec{r}\,'(\varphi) = (-\sin\varphi\,,\ \cos\varphi)\,,\ \|\vec{r}\,'(\varphi)\| = 1\,,$
folglich $ds = d\varphi$.

Damit hat das vertikale Flächenstück zwischen der Kurve C und der "Dach"–Fläche $z = f(x,y) = 2 - y$ den Flächeninhalt:

$$A = \int\limits_C (2-y)\,ds = \int\limits_{-\pi}^{0} \Big(2 - (1 + \sin\varphi)\Big)\,d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{0} d\varphi - \int\limits_{-\pi}^{0} \sin\varphi\,d\varphi = \pi + 2 \approx 5.1416\,.$$

Die **Manteloberfläche eines Rotationskörpers**, der durch Rotation eines Kurvenbogens C : $y = f(x) \ge 0\,,\ a \le x \le b$, um die x–Achse entsteht, kann erhalten werden, wenn man den Körper in "dünne" Scheiben der Dicke dx und dem Scheibenradius $r = y = f(x)$ (für $a \le x \le b$) "aufschneidet":

Die Manteloberfläche dM dieser Scheiben der Breite ds ist gleich der Manteloberfläche eines Zylinders mit dem Radius y, also mit dem Umfang $2\pi y$, und der Höhe ds und hat somit den Flächeninhalt $dM = 2\pi y\, ds$ mit dem Bogenelement $ds = \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ von C.

Der Gesamtflächeninhalt der **Manteloberfläche** ergibt sich durch "Aufsummieren":

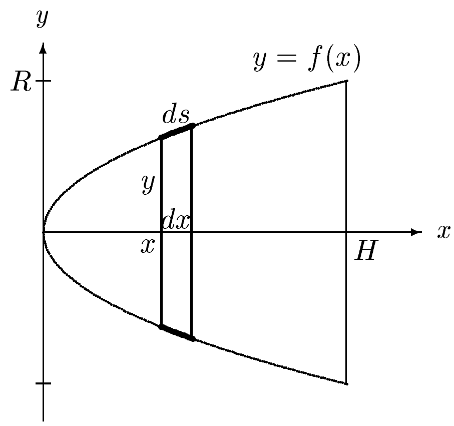


Abbildung 25.7: **Zur Manteloberfläche eines Rotationskörpers**

25.19

$$M = 2\pi \int_C y\, ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad \text{mit } y = f(x)$$

Manteloberfläche eines Rotationskörpers

25.G Allgemeine Wegintegrale 2.Art.

25.20

Das **allgemeine Wegintegral (2.Art)** eines stetigen Vektorfeldes $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \big(F_1(\vec{r}), \ldots, F_n(\vec{r})\big)$ mit $\vec{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ längs eines Weges $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, $a \le t \le b$, ist:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C F_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \cdots + F_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n =$$

$$= \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \Big(F_1\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)\, \dot{x}_1(t) + \cdots + F_n\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)\, \dot{x}_n(t)\Big)\, dt\,.$$

Man schreibt: $\oint_C$ statt $\int_C$, wenn C ein **geschlossener Weg** ist.

In der Regel wird die Kennzeichnung "2.Art" weggelassen: wenn von **Wegintegralen** die Rede ist, sind meistens diese **Wegintegrale 2.Art** gemeint. Soll betont werden, dass es sich um **Wegintegrale 1.Art** handelt (s.o. Abschnitt F), so spricht man gewöhnlich von **Wegintegralen nach der Bogenlänge**.

Bemerkungen zu dieser Definition:

(a) Mit der Schreibweise

$$\int_C \vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} \quad \text{oder} \quad \int_C F_1(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)\,dx_1 + \cdots + F_n(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)\,dx_n$$

wird **symbolisch** zum Ausdruck gebracht, dass die "Größen"

$\vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} = F_1\,dx_1 + \cdots + F_n\,dx_n$ über alle $\vec{r} \in C$ von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$

"aufzusummieren" sind: es wird also zunächst nur gesagt, *was* zu tun ist, aber noch nicht, *wie* dieses Integral ausgerechnet werden kann.

Allerdings enthält diese Schreibweise bereits die Information, dass es sich bei Wegintegralen 2.Art um Grenzwerte von Summen der Form $\sum\limits_{j=1}^{m} \vec{F}\,(\vec{r}_{j,0}\,) \cdot \Delta\vec{r}_j$ handelt

mit $\Delta\vec{r}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_{j-1}$ und $\vec{r}_{j,0}$ zwischen $\vec{r}_{j-1}$ und $\vec{r}_j$, wobei jeweils über eine (möglichst feine) Zerlegung: $\vec{r}_a = \vec{r}_0\,,\,\vec{r}_1\,,\,\ldots\,,\,\vec{r}_m = \vec{r}_b$ des Weges C summiert wird.

(b) Durch: $\displaystyle\int_c \vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\,\Big(\vec{r}(t\,)\Big) \cdot \dot{\vec{r}}\,(t)\,dt =$

$$= \int_a^b \Big(F_1\,\Big(x_1(t)\,,\,\ldots\,,\,x_n(t)\Big)\,\dot{x}_1(t) + \cdots + F_n\,\Big(x_1(t)\,,\,\ldots\,,\,x_n(t)\Big)\,\dot{x}_n(t)\Big)\,dt$$

wird dieses Wegintegral auf ein gewöhnliches **bestimmtes Integral** zurückgeführt, das nach den üblichen Regeln ausgewertet werden kann.

Wegintegrale 2.Art lassen sich am bequemsten physikalisch interpretieren:

(c) Ist z.B. $\vec{F}\,(\vec{r}\,)$ ein **Kraftfeld**, so leistet dieses — Bezeichnungen s.o. — bei der Bewegung eines Massenpunktes der Masse 1 von $\vec{r}_{j-1}$ nach $\vec{r}_j$ näherungsweise die **Arbeit**
$\Delta A_j = \vec{F}\,(\vec{r}_{j,0}\,) \cdot \Delta\vec{r}_j$ (**Arbeit = Kraft mal Weg**); damit ist

$A = \displaystyle\int_C \vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r}$ die **Arbeit**, die das Kraftfeld $\vec{F}$ bei der Bewegung des Massenpunktes

längs C von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$ leistet.

(d) Ist z.B. C ein **elektrischer Leiter** und $\vec{E}\,(\vec{r}\,)$ ein **elektrisches Feld**, so ist

$U = \displaystyle\int_C \vec{E}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r}$ die **Spannung** zwischen dem Anfangspunkt $\vec{r}_a$ und dem

Endpunkt $\vec{r}_b$ des Leiters C und $A = QU$ ist die Arbeit bei der Bewegung einer Ladung Q längs C von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$.

Für Wegintegrale gelten die üblichen **Rechenregeln** :

25.21

$$\int_C (\vec{F} + \vec{G}\,) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}\,,$$

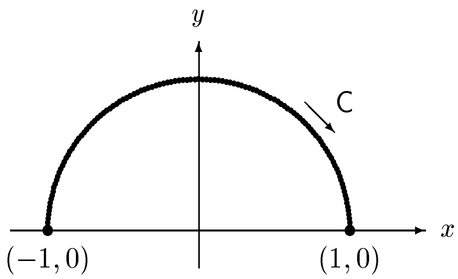
$$\int_C \lambda\vec{F} \cdot d\vec{r} = \lambda \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}\,,$$

$$\int_{C=C_1+C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}\,,$$

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Zum Beispiel:

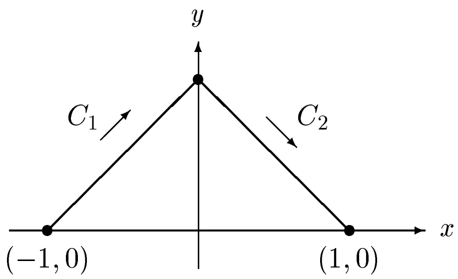
Sei $\vec{F}\,(x,y) = (x - y^2\,,\, y - x^2)$ und sei C der Weg in der x,y–Ebene, der den Punkt $\vec{r}_a = (-1,0)$ mit dem Punkt $\vec{r}_b = (1,0)$ längs des oberen Halbkreisbogens vom Radius 1 verbindet.



Mit der üblichen Parameterdarstellung:
$C\ :\ x = \cos\varphi\,,\ y = \sin\varphi$, φ von π bis 0
(nicht: $0 \le \varphi \le \pi$: das würde eine falsche Orientierung liefern!)
hat man auf C :
$dx = -\sin\varphi\, d\varphi\,,\ dy = \cos\varphi\, d\varphi$, somit:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} \;&=\; \int_C \Big(x - y^2\Big)\, dx + \Big(y - x^2\Big)\, dy \\
&=\; \int_\pi^0 \Big(\Big(\cos\varphi - \sin^2\varphi\Big)\ (-\sin\varphi\,) + \Big(\sin\varphi - \cos^2\varphi\Big) \cos\varphi\Big)\, d\varphi = \\
&=\; \int_\pi^0 \Big(\sin^3\varphi - \cos^3\varphi\Big)\, d\varphi = \int_0^\pi \Big(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi\Big)\, d\varphi = \\
&=\; \frac{1}{4} \int_0^\pi \Big(3\cos\varphi + \cos 3\varphi - 3\sin\varphi + \sin 3\varphi\Big)\, d\varphi = \\
&=\; \frac{1}{4} \left[3\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + 3\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi} = \\
&=\; \frac{1}{4} \left(\left[-3 + \frac{1}{3}\right] - \left[3 - \frac{1}{3}\right]\right) = -\frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Wählt man anstelle des Weges C den Weg $\tilde{C} = C_1 + C_2$ mit



$C_1\,:\; y = 1 + x\;,\; -1 \le x \le 0\,,$
$C_2\,:\; y = 1 - x\;,\; 0 \le x \le 1\,,$
so hat man auf $C_1 : dy = dx$
und auf $C_2 : dy = -dx$; damit ist:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\tilde{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int\limits_{\tilde{C}} \left(x - y^2\right) dx + \left(y - x^2\right) dy = \\
&= \int\limits_{C_1} \left(x - y^2\right) dx + \left(y - x^2\right) dy + \int\limits_{C_2} \left(x - y^2\right) dx + \left(y - x^2\right) dy = \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \left(\left(x - (1+x)^2\right) + \left((1+x) - x^2\right) \right) dx + \\
&\qquad + \int\limits_{0}^{1} \left(\left(x - (1-x)^2\right) - \left((1-x) - x^2\right) \right) dx = \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \left(-2x^2\right) dx + \int\limits_{0}^{1} \left(-2 + 4x\right) dx = \\
&= -\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{x=-1}^{0} + \left[-2x + 2x^2\right]_{x=0}^{1} = -\frac{2}{3}\,.
\end{aligned}
$$

! Dieses letzte Beispiel zeigt, dass für *verschiedene* Wege C und $\tilde{C}$ die Integrale $\int\limits_{C} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ und $\int\limits_{\tilde{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ *in der Regel verschieden* sind, auch wenn beide Wege denselben Anfangspunkt $\vec{r}_a$ und denselben Endpunkt $\vec{r}_b$ haben! !

Für weitere Rechenbeispiele siehe die nächste Lektion! Dort wird auch die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen ein Wegintegral $\int\limits_{C} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ **nicht vom Verlauf des Weges C, sondern nur noch vom Anfangspunkt $\vec{r}_a$ und Endpunkt $\vec{r}_b$ des Weges C abhängt**.

26 Nabla-Operator. Konservative Felder.

Stichpunkte: grad, div, rot, $\vec{\nabla}$, Δ . Konservative und rotationsfreie Vektorfelder, Stammfunktion, Satz über die Wegunabheit von Wegintegralen.

26.A Nabla– und Deltaoperator.

In diesem Abschnitt sei $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ eine reelle, *skalarwertige* Funktion (ein **Skalarfeld**) mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen (so daß also der Satz von Schwarz gilt!) und es sei $\vec{F} = \vec{F}\,(x_1, \ldots, x_n) = \Big(F_1(x_1, \ldots, x_n)\,,\ \ldots\ ,\ F_n(x_1, \ldots, x_n)\Big)$ eine reelle, *vektorwertige* Funktion (ein **Vektorfeld**) mit stetig differenzierbaren Komponenten $F_j(x_1, \ldots, x_n)$.

26.1 Der n–dimensionale **Nablaoperator** $\vec{\nabla}$ ist der symbolisch als Vektor geschriebene, *vektorwertige* Differentialoperator

$$\boxed{\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right)}}\ .$$

Mit Hilfe des Nablaoperators definiert man:

26.2 den **Gradienten** eines Skalarfeldes Φ :

$$\boxed{\operatorname{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\,,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)}$$

$\operatorname{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi =$ "Nabla *angewandt* auf Φ" ist ein **Vektorfeld !**

26.3 die **Divergenz** eines Vektorfeldes $\vec{F}$:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}$$

$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ ist ein **Skalarfeld !** $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ ist ein formales reelles Skalarprodukt, bei dem die Reihenfolge der Faktoren einzuhalten ist (s.u.) !

26.4 die **Rotation** eines **3–dimensionalen (!)** Vektorfeldes $\vec{F} = \Big(F_1(x,y,z)\,,\ F_2(x,y,z)\,,\ F_3(x,y,z)\Big)$:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)}$$

$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$ ist ein **Vektorfeld !** $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ ist ein formales Vektorprodukt, bei dem die Reihenfolge der Faktoren einzuhalten ist (s.u.) !

26.5 den (Laplace'schen) **Deltaoperator** :

$$\boxed{\boxed{\Delta = \vec{\nabla}^{\,2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}}}$$

Für ein Skalarfeld Φ ist
$\Delta\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_n^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi$ ein **Skalarfeld** .

a b e r :

26.6 $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}$ ist ein **Operator:**

$$\boxed{\vec{F} \cdot \vec{\nabla} = F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + F_n \frac{\partial}{\partial x_n}}$$

Für ein Skalarfeld Φ ist $\left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right) \Phi = \vec{F} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \vec{F} \cdot \operatorname{grad} \Phi$ ein **Skalarfeld!**

26.7 $\vec{F} \times \vec{\nabla}$ ist ein **Operator:**

$$\boxed{\vec{F} \times \vec{\nabla} = \left(F_2 \frac{\partial}{\partial z} - F_3 \frac{\partial}{\partial y} , \, F_3 \frac{\partial}{\partial x} - F_1 \frac{\partial}{\partial z} , \, F_1 \frac{\partial}{\partial y} - F_2 \frac{\partial}{\partial x} \right)}$$

Für ein Skalarfeld Φ ist $\left(\vec{F} \times \vec{\nabla}\right) \Phi = \vec{F} \times \vec{\nabla}\Phi = \vec{F} \times \operatorname{grad} \Phi$ ein **Vektorfeld!**

Zum Beispiel:

Sei $\Phi(x,y,z) = x^2y - y^2z$ und $\vec{F}\,(x,y,z) = (\, x^2y \,,\, y^2z \,,\, z^2x \,)$. Dann ist:

[1] $\operatorname{grad} \Phi = \vec{\nabla}\Phi \;=\; \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right) (x^2y - y^2z) = \left(2xy \,,\, x^2 - 2yz \,,\, -y^2\right)$,

[2] $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2z) + \dfrac{\partial}{\partial z}(z^2x) = 2xy + 2yz + 2zx$,

[3] $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \;=\; \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix} =$ (wieder als Zeilenvektor)

$$= \left(\frac{\partial z^2x}{\partial y} - \frac{\partial y^2z}{\partial z} , \frac{\partial x^2y}{\partial z} - \frac{\partial z^2x}{\partial x} , \frac{\partial y^2z}{\partial x} - \frac{\partial x^2y}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(0 - y^2 \,,\, 0 - z^2 \,,\, 0 - x^2\right) = (-y^2 \,,\, -z^2 \,,\, -x^2\,) \,,$$

[4] $$\Delta\Phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2y-y^2z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2y-y^2z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2y-y^2z) = $$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2-2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = 2y-2z\ ,$$

[5] $$\Delta\vec{F} = \Big(\Delta(x^2y)\,,\,\Delta(y^2z)\,,\,\Delta(z^2x)\Big) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(x^2y\,,\,y^2z\,,\,z^2x\Big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(x^2y\,,\,y^2z\,,\,z^2x\Big) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(x^2y\,,\,y^2z\,,\,z^2x\Big) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\Big(2xy\,,\,0\,,\,z^2\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2\,,\,2yz\,,\,0\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(0\,,\,y^2\,,\,2zx\Big) =$$
$$= \Big(2y\,,\,0\,,\,0\Big) + \Big(0\,,\,2z\,,\,0\Big) + \Big(0\,,\,0\,,\,2x\Big) = (2y\,,\,2z\,,\,2x)$$

[6] $$\vec{F}\cdot\vec{\nabla} = (x^2y\,,\,y^2z\,,\,z^2x)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\,\frac{\partial}{\partial z}\right) = x^2y\,\frac{\partial}{\partial x} + y^2z\,\frac{\partial}{\partial y} + z^2x\,\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$\Big(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\Big)\,\Phi = \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \vec{F}\cdot\operatorname{grad}\Phi =$$
$$= \Big(x^2y\,,\,y^2z\,,\,z^2x\Big)\cdot\Big(2xy\,,\,x^2-2yz\,,\,-y^2\Big) =$$
$$= 2x^3y^2 + x^2y^2z - 2y^3z^2 - xy^2z^2 =$$
$$= x^2y^2(2x+z) - y^2z^2(2y+x)\ ,$$

[7] $$\vec{F}\times\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} =$$
$$= \left(y^2z\,\frac{\partial}{\partial z} - z^2x\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\; z^2x\,\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\,\frac{\partial}{\partial z}\,,\; x^2y\,\frac{\partial}{\partial y} - y^2z\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\ ,$$

$$\Big(\vec{F}\times\vec{\nabla}\Big)\,\Phi = \vec{F}\times\vec{\nabla}\Phi = \vec{F}\times\operatorname{grad}\Phi = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2-2yz \\ -y^2 \end{pmatrix} = \text{(als Zeilenvektor)}$$
$$= \Big(-y^4z - x^3z^2 + 2xyz^3\,,\; x^2yz^2 + x^2y^3\,,\; x^4y - 2x^2y^2z - 2xy^3z\Big)\ .$$

Einige der Differentialoperatoren grad , div , rot lassen sich wiederholt anwenden:
die folgenden fünf Kombinationen (von je zwei) sind möglich:

(a) **Divergenz–Gradient = Delta:**

für ein Skalarfeld Φ ist: $\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\,\Phi = \Delta\,\Phi$ (s.o.);

(b) **Rotation–Gradient = Nullvektor:**

für ein Skalarfeld $\Phi = \Phi(x,y,z)$ ist: $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = \vec{o}$ (!),

denn das Vektorfeld $\vec{F} = \operatorname{grad}\Phi$ ist konservativ, somit auch rotationsfrei (s.u.);

(c) **Divergenz–Rotation = Null:**

für ein drei–dimensionales Vektorfeld $\vec{F}$ ist: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ (!) :

$\Big(\; \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}\,)$ ist ein formales Spatprodukt mit zwei gleichen Spalten!$\Big)$;

(d) **Gradient–Divergenz:**

für ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist: $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,)$;

(e) **Rotation–Rotation:**

für ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{F}$ ist

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}\,) = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,) - \Delta\vec{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$.

Zum Beispiel:

Sei (s.o.) $\Phi(x,y,z) = x^2y - y^2z$ und $\vec{F}\,(x,y,z) = (\,x^2y\,,\,y^2z\,,\,z^2x\,)$. Dann ist:

$$\text{(a)}\quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi \;=\; \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \overset{\text{s.o.}}{=} 2y - 2z\ ,$$

$$\text{(b)}\quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2xy\\ x^2-2yz\\ -y^2\end{pmatrix} =$$
$$=\; (\,-2y+2y\,,\,0-0\,,\,2x-2x\,) = \vec{o}\ ,$$

$$\text{(c)}\quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} \;=\; \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}\,) \overset{\text{s.o.}}{=} \Big(\frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\,\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot\Big(-\,y^2\,,\,-z^2\,,\,-x^2\Big) =$$
$$=\; 0+0+0 = 0\ ,$$

$$\text{(d)}\quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} \;=\; \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,) \overset{\text{s.o.}}{=} \Big(\frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\,\frac{\partial}{\partial z}\Big)\,(\,2xy+2yz+2zx\,) =$$
$$=\; \Big(2(y+z)\,,\,2(x+z)\,,\,2(y+x)\Big)\ ,$$

$$\text{(e)}\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} \;=\; \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}\,) \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-y^2\\ -z^2\\ -x^2\end{pmatrix} =$$
$$=\; (\,0+2z\,,\,0+2x\,,\,0+2y\,) = 2(z,x,y)\ ,$$

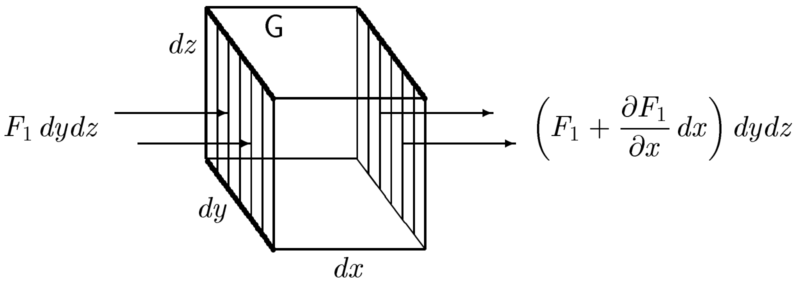
$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F} \overset{\text{s.o.}}{=} (2y+2z\,,\,2x+2z\,,\,2y+2x\,) - (2y\,,\,2z\,,\,2x\,) = 2\,(z,x,y)\ .$$

26.B Zu den Bezeichnungen "Divergenz" und "Rotation". (*)

I. Heuristische Überlegung zur Bezeichnung "Divergenz".

Wir betrachten eine strömende Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der Dichte $\rho = \rho(x, y, z, t)$. $\vec{F} = \Big(F_1\,,\,F_2\,,\,F_3\Big) = \rho\vec{v}$ ist die (Massen–) **Stromdichte** der Flüssigkeit und beschreibt die pro Flächen– und Zeiteinheit fließende Flüssigkeitsmasse.

Sei G ein "kleines" , von der Flüssigkeit durchströmtes, achsenparalleles Gebiet vom Volumen $dV \;=\; dx\,dy\,dz$:



Die Flüssigkeitsmasse, die pro Zeiteinheit in das Gebiet eintritt, ist

— in x–Richtung: $F_1\,dydz$,

— in y–Richtung: $F_2\,dzdx$,

— in z–Richtung: $F_3\,dxdy$.

Die *Änderung* pro Längeneinheit beträgt

— in x–Richtung: $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}$, insgesamt im Intervall $[\,x\,,\,x+dx\,]$ also: $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\,dx$,

— in y–Richtung: $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}$, insgesamt im Intervall $[\,y\,,\,y+dy\,]$ also: $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\,dy$,

— in z–Richtung: $\dfrac{\partial F_3}{\partial z}$, insgesamt im Intervall $[\,z\,,\,z+dz\,]$ also: $\dfrac{\partial F_3}{\partial z}\,dz$;

die Masse, die pro Zeiteinheit das Gebiet G (auf der anderen Seite) verlässt, ist damit:

— in x–Richtung: $\left(F_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\right)\,dydz$,

— in y–Richtung: $\left(F_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\,dy\right)\,dzdx$,

— in z–Richtung: $\left(F_3 + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}\,dz\right)\,dxdy$.

Die "Netto"–**Abnahme** (Abfluß minus Zufluß) an Flüssigkeitsmasse pro Zeiteinheit **im Gebiet G** ist dann:

$$\left(F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\right) dydz - F_1\,dydz + \left(F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dy\right) dzdx - F_2\,dzdx$$
$$+ \left(F_3 + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz\right) dxdy - F_3\,dxdy = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV\,,$$

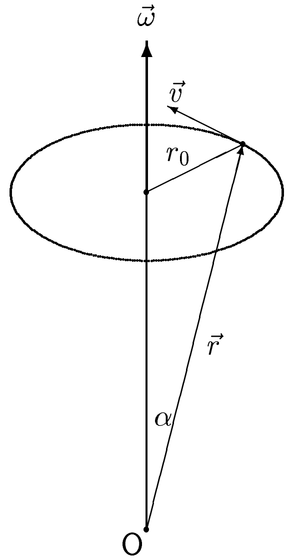
d.h. $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV$ ist die Flüssigkeitsmasse, die pro Zeiteinheit aus dem Gebiet G **divergiert**.

Daher nennt man die Größe: $\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ die **Divergenz des Vektorfeldes** $\vec{F} = \rho\vec{v}$: sie gibt an, wieviel Flüssigkeitsmasse an jeder Stelle pro Volumen– und Zeiteinheit hinzukommt; im Fall $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ heißt das Vektorfeld $\vec{F}$ **quellenfrei**.

II. Beispiel zur Bezeichnung "Rotation".

Wir betrachten die Drehung eines Körpers K um eine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\omega_3)$:

Für die lineare Geschwindigkeit $\vec{v}$ jedes Punktes $\vec{r} = (x, y, z)$ dieses Körpers hat man:



(a) $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ und $\vec{v} \perp \vec{r}$, d.h.
$\vec{v}$ hat die Richtung von $\vec{\omega} \times \vec{r}$;

(b) $r_0 = |\vec{r}\,| \sin\alpha$ und $|\vec{v}\,| = |\vec{\omega}\,|\,r_0$, somit
$|\vec{v}\,| = |\vec{\omega}\,|\,|\vec{r}\,| \sin\alpha = |\vec{\omega} \times \vec{r}\,|$.

Hieraus folgt:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix}$$

und somit:

$$\operatorname{rot} \vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}[\omega_1 y - \omega_2 x] - \frac{\partial}{\partial z}[\omega_3 x - \omega_1 z] \\ \frac{\partial}{\partial z}[\omega_2 z - \omega_3 y] - \frac{\partial}{\partial x}[\omega_1 y - \omega_2 x] \\ \frac{\partial}{\partial x}[\omega_3 x - \omega_1 z] - \frac{\partial}{\partial y}[\omega_2 z - \omega_3 y] \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_1 \\ \omega_2 + \omega_2 \\ \omega_3 + \omega_3 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}\;;$$

die Winkelgeschwindigkeit ist also: $\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}}$.

26.C Einige Produktregeln.

26.8

$$\vec{\nabla}(\Phi\Psi) = \Phi\,\vec{\nabla}\Psi \;+\; \Psi\,\vec{\nabla}\Phi \text{ , d.h.}$$
$$\operatorname{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \operatorname{grad}\Psi \;+\; \Psi \operatorname{grad}\Phi \;;$$

26.9

$$\vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{F}\,) = (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{F} \;+\; \Phi\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,) \text{ , d.h.}$$
$$\operatorname{div}(\Phi\vec{F}\,) = (\operatorname{grad}\Phi)\cdot\vec{F} \;+\; \Phi \operatorname{div}\vec{F} \;;$$

26.10

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}\,) = \vec{G}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}\,) \;-\; \vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{G}\,) \text{ , d.h.}$$
$$\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}\,) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} \;-\; \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G} \;;$$

26.11

$$\vec{\nabla}\times(\Phi\vec{F}\,) = (\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{F} \;+\; \Phi\,(\vec{\nabla}\times\vec{F}\,) \text{ , d.h.}$$
$$\operatorname{rot}(\Phi\vec{F}\,) = (\operatorname{grad}\Phi)\times\vec{F} \;+\; \Phi \operatorname{rot}\vec{F} \;.$$

Diese Regeln lassen sich — als einfache Rechenübung — mit Hilfe der elementaren Differentiationsregeln herleiten. z.B. Nr. 26.8 :

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\Phi\Psi) &= \vec{\nabla}(\Phi\Psi) = \left(\frac{\partial(\Phi\Psi)}{\partial x}, \frac{\partial(\Phi\Psi)}{\partial y}, \frac{\partial(\Phi\Psi)}{\partial z}\right) = \\
&= \left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \\
&= \Phi\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) + \Psi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \\
&= \Phi\,\vec{\nabla}\Psi \;+\; \Psi\,\vec{\nabla}\Phi \;=\; \Phi\operatorname{grad}\Psi \;+\; \Psi\operatorname{grad}\Phi
\end{aligned}$$

26.D Konservative Felder und Stammfunktionen.

26.12 Ein Vektorfeld $\vec{F} = \big(F_1\,,\,\cdots\,,\,F_n\big)$ heißt **rotationsfrei** (oder **wirbelfrei**), wenn

(A) $\boxed{\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall\; i,j = 1,\cdots,n}$;

ein **3–dimensionales** Vektorfeld $\vec{F}$ ist also genau dann **rotationsfrei**, wenn $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{o}}$.

26.13 Ein Skalarfeld $\Phi = \Phi(\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n\,)$ ist eine **Stammfunktion** (oder eine **Potentialfunktion**) zum Vektorfeld $\vec{F} = \vec{F}\,(\,x_a\,,\,\ldots\,,\,x_n\,)$ über einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn $\boxed{\mathrm{grad}\,\Phi = \vec{F} \text{ auf } G}$, d.h. wenn auf G gilt:

(B) $$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= F_1 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} &= F_n\,. \end{aligned}}$$, d.h. $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}\,,\,\ldots\,,\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right) = \big(F_1\,,\,\ldots\,,\,F_n\big)$

(Die Bezeichnung "Potentialfunktion" kommt von den in der Physik auftretenden Gleichungen der Form: $\vec{F}\,(\vec{r}\,) = \mathrm{grad}\,E_{pot}(\vec{r}\,)$, z.B. für die Feldstärke bei Gravitation. Das Gebiet G wird in der Regel — nach Belieben oder Bedarf — so gewählt, dass G keine "Unanständigkeitsstellen" von $\vec{F}$ enthält.)

26.14 Ein Vektorfeld $\vec{F}$ heißt **konservativ** auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es zu $\vec{F}$ eine **Stammfunktion** Φ über G gibt; da dann $\vec{F} = \mathrm{grad}\,\Phi$ ist, nennt man $\vec{F}$ in diesem Fall auch ein **Gradientenfeld**.

Zum Beispiel:

1. Das Vektorfeld $\boxed{\vec{F} = \left(2xy\,,\, x^2 - 2yz\,,\, -y^2\right)}$ ist **rotationsfrei**, denn:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial(x^2-2yz)}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial(2xy)}{\partial z} = 0 = \frac{\partial\left(-y^2\right)}{\partial x} = \frac{\partial F_3}{\partial x}\,,\\
&\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial(x^2-2yz)}{\partial z} = -2y = \frac{\partial\left(-y^2\right)}{\partial y} = \frac{\partial F_3}{\partial y}\,,\\
&\text{also: } \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{mit } x_1 = x\,,\; x_2 = y\,,\; x_3 = z\,,
\end{aligned}\right\}
\quad \begin{aligned} &\text{d.h. — gleichwertig:}\\ &\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\end{pmatrix} = \vec{o}\,.\end{aligned}$$

2. Das Vektorfeld $\boxed{\vec{F} = \left(x + y^2\,,\, y + x^2\right)}$ ist *nicht* rotationsfrei,

denn $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(x+y^2\right)}{\partial y} = 2y \neq 2x = \dfrac{\partial\left(y+x^2\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$.

(Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass damit $\vec{F}$ auch *nicht* konservativ sein kann!)

3. Das Skalarfeld $\boxed{\Phi(x,y,z) = x^2y - y^2z + 5}$ ist eine **Stammfunktion**

zum Vektorfeld $\vec{F} = \left(2xy\,,\, x^2 - 2yz\,,\, -y^2\right)$, denn es ist

$$\operatorname{grad}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,\, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,\, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \left(2xy\,,\, x^2 - 2yz\,,\, -y^2\right) = \vec{F}\,.$$

4. Aufgrund von 3. ist das Vektorfeld $\boxed{\vec{F} = \left(2xy\,,\, x^2 - 2yz\,,\, -y^2\right)}$ **konservativ**

auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$, denn mit der Funktion $\Phi(x,y,z)$ von oben ist

$\operatorname{grad}\Phi(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z) \;\; \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$.

26.E Konservativ = Rotationsfrei.

Sei $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ ein reelles **Skalarfeld** mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen und es sei $\vec{F} = \vec{F}(x_1, \ldots, x_n) = \big(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)\big)$ ein reelles **Vektorfeld** mit stetig differenzierbaren Komponenten $F_j(x_1, \ldots, x_n)$.

Der folgende Satz ist einer der ganz wichtigen Sätze der mehrdimensionalen Analysis:

26.15 !

> Auf einem **einfach–zusammenhängenden** Gebiet $G \subseteq \mathbf{R}^n$
> (das ist ein zusammenhängendes Gebiet **ohne "Löcher"**)
> ist ein Vektorfeld $\vec{F}$ **genau dann konservativ**
> (und besitzt damit eine **Stammfunktion** Φ),
> wenn $\vec{F}$ **rotationsfrei** ist!

Vermöge dieses Satzes spielen konservative Felder eine große Rolle z.B.

$\boxed{1}$ bei **Wegintegralen:** ist $\vec{F}$ konservativ auf einem einfach–zusammenhängenden Gebiet G, so ist innerhalb G jedes Wegintegral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ **wegunabhängig** (siehe unten den Abschnitt 26.G !);

$\boxed{2}$ bei **Differentialgleichungen** der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$:
ist $\vec{F} = (P, Q)$ konservativ — dann nennt man diese Dgl. **exakt** —, so läßt sich die Dgl. mit Hilfe einer **Stammfunktion** zu $\vec{F}$ lösen (s. die nächste Lektion !).

Die eine Aussage: **konservativ** $\Rightarrow$ **rotationsfrei** fast trivial: ist nämlich $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ ein **konservatives** Feld mit stetig differenzierbaren Komponenten F_j und ist $\vec{F} = \operatorname{grad}\Phi$ mit einer Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, so ist für $j = 1, \ldots, n$ jeweils $F_j = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ und mit dem **Satz von Schwarz** (s. Nr. 8.11) ergibt sich für alle $i, j = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j\,\partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\,,$$ d.h. $\vec{F}$ **ist rotationsfrei.**

Die andere Aussage: **rotationsfrei** $\Rightarrow$ **konservativ** ist etwas mühsamer einzusehen — sie ist aber auch die interessantere, da sie uns ein bequemes Kriterium zum Überprüfen, ob ein gegebenes Vektorfeld konservativ ist, in die Hand gibt.

Im Fall einer Funktion $f(x)$ *einer* Variablen haben wir früher gesehen (s. Nummer 12.8), dass jede Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist. Hier kann man ähnlich vorgehen und zu (beliebig) fest vorgegebenem $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ und für alle $\vec{r} = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ die **Integralfunktion**:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) := \int\limits_{a_1}^{x_1} F_1(\xi_1, a_2, \ldots, a_n)\,d\xi_1 + \int\limits_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, \xi_2, a_3, \ldots, a_n)\,d\xi_2 + \ldots + \int\limits_{a_n}^{x_n} F_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n)\,d\xi_n .$$

definieren: man kann zeigen, dass Φ **eine Stammfunktion** zu $\vec{F}$ über G ist, **falls** $\vec{F}$ **rotationsfrei** ist, d.h. falls $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$ — und vorausgesetzt, dass alle diese Ableitungen auf G existieren *und stetig* sind.

26.F Bestimmung von Stammfunktionen.

26.16 Um zu entscheiden, ob ein Vektorfeld $\vec{F}$ eine Stammfunktion Φ *besitzt*, ist zu überprüfen, ob die **Gleichungen (A)**:

$$\boxed{\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_J}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n}$$

erfüllt sind; und wenn es eine Stammfunktion Φ *gibt*, kann diese aus den **Bestimmungsgleichungen (B)**:

$$\boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} = F_j \quad \forall j = 1, \ldots, n}$$

erhalten werden (s.o. die Nummern 26.12 und 13): hierzu werden diese Gleichungen zweckmäßigerweise der Reihe nach "abgearbeitet".

z.B.: Sei $\vec{F}(x, y, z) = \Big(1 + 2xy + z^2,\ 1 - 2yz + x^2,\ -1 + 2zx - y^2\Big)$.

Zunächst wird überprüft, ob $\vec{F}$ rotationsfrei ist, d.h. ob die **Gleichungen (A)** erfüllt sind: das sind drei Gleichungen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(1 + 2xy + z^2\Big) = 2x\,,\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(1 - 2yz + x^2\Big) = 2x\,,\ \text{also: } \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(1 + 2xy + z^2\Big) = 2z\,,\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-1 + 2zx - y^2\Big) = 2z\,,\ \text{also: } \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(1 - 2yz + x^2\Big) = -2y\,,\ \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(-1 + 2zx - y^2\Big) = -2y\,,\ \text{also: } \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}:$$

da $\vec{F}$ somit rotationsfrei ist, *gibt* es zu $\vec{F}$ eine Stammfunktion Φ.

Für Φ hat man die drei **Bestimmungsgleichungen (B) :**

$$\boxed{\textbf{(1)}\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_1 = 1 + 2xy + z^2\,,\ \textbf{(2)}\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2 = 1 - 2yz + x^2\,,\ \textbf{(3)}\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_3 = -1 + 2zx - y^2}$$

Zunächst wird **Gleichung (1)** nach x integriert:

(a) $\Phi(x,y,z) = \int \Big(1 + 2xy + z^2\Big)\,dx = x + x^2y + z^2x + c_1(y,z)\,;$

hierbei ist c_1 eine Integrationskonstante bzgl. x , d.h. $c_1 = c_1(y,z)$ darf noch beliebig von y und z abhängen.

Als Nächstes wird die in **(a)** erhaltene Funktion Φ nach y abgeleitet und in **Gleichung (2)** eingesetzt:

$1 - 2yz + x^2 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial c_1(y,z)}{\partial y}\,;$

hieraus ergibt sich die Gleichung: $\dfrac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = 1 - 2yz$, und Integration nach y liefert:

(b) $c_1(y,z) = \int \Big(1 - 2yz\Big)\,dy = y - y^2z + c_2(z)\,;$

c_2 ist eine Integrationskonstante bzgl. y , also darf $c_2 = c_2(z)$ noch beliebig von z abhängen (von x *nicht*, da bereits $c_1(y,z)$ nicht mehr von x abhängt!).

Setzt man **(b)** in **(a)** ein, so erhält man: $\Phi(x,y,z) = x + x^2y + z^2x + y - y^2z + c_2(z)\,.$

Diese Gleichung wird nun nach z abgeleitet und in **Gleichung (3)** eingesetzt:

$-1 + 2zx - y^2 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 2zx - y^2 + c_2'(z)$; es folgt: $c_2'(z) = -1$, d.h. $c_2(z) = -z + c$

und somit schließlich: $\boxed{\Phi(x,y,z) = x + x^2y + z^2x + y - y^2z - z + c}$.

(Die Konstante c lässt man in der Regel weg, wenn *nur eine* Stammfunktion gebraucht wird!)

Wer einen guten Blick — und auch etwas Erfahrung! — hat, integriert zunächst jede der Bestimmungsgleichungen **(B)** für sich — unabhängig voneinander:

(1) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 + 2xy + z^2 \;\Rightarrow\; \Phi(x,y,z) = \int \Big(1 + 2xy + z^2\Big)\,dx = x + x^2y + z^2x + c_1(y,z)\,,$

(2) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 1 - 2yz + x^2 \;\Rightarrow\; \Phi(x,y,z) = \int \Big(1 - 2yz + x^2\Big)\,dy = y - y^2z + x^2y + c_2(x,z)\,,$

(3) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -1 + 2zx - y^2 \;\Rightarrow\; \Phi(x,y,z) = \int \Big(-1 + 2zx - y^2\Big)\,dz = -z + z^2x - y^2z + c_3(x,y)\,.$

Die drei Integrationskonstanten $c_1(y,z)$, $c_2(x,z)$, $c_3(x,y)$ sind dann so zu bestimmen, dass

$x + x^2y + z^2x + c_1(y,z) = y - y^2z + x^2y + c_2(x,z) = -z + z^2x - y^2z + c_3(x,y)\,.$

Durch "scharfes Hinsehen" erkennt man, dass:

$c_1(y,z) = y - y^2 z - z$ (reine y,z–Anteile des 2. und 3. Ausdrucks),

$c_2(x,z) = x + z^2 x - z$ (reine x,z–Anteile des 1. und 3. Ausdrucks),

$c_3(x,y) = x + x^2 y + y$ (reine x,y–Anteile des 1. und 2. Ausdrucks).

(Es genügt natürlich, *nur eine* dieser drei Integrationskonstanten zu finden!)

Wir erhalten — dreimal dasselbe: $\Phi(x,y,z) =$

$= x + x^2 y + z^2 x + y - y^2 z - z = y - y^2 z + x^2 y + x + z^2 x - z = -z + z^2 x - y^2 z + x + x^2 y + y$.

26.G Wegunabhängigkeit bei Wegintegralen.

Sei wieder C ein Weg der in Abschnitt 25.B beschriebenen Art und sei $\vec{F}$ ein **konservatives** Vektorfeld, also ein **Gradientenfeld**:

$\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right)$. (siehe Nummer 26.14 !)

Für $\vec{r} = \vec{r}\,(t) \in C$ ist dann (mit der Kettenregel Nr. 8.9):

$$\vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\,\dot{x}_1, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\,\dot{x}_n \right) dt = \frac{d\Phi\left(\vec{r}\,(t)\right)}{dt}\,dt \quad \text{und somit:}$$

$$\int_C \vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d\Phi\left(\vec{r}\,(t)\right)}{dt}\,dt = \Phi\left(\vec{r}\,(t)\right)\Big|_{t=a}^{b} = \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a) \;:$$

der Wert des Integrals hängt in diesem Fall also nur noch vom Anfangspunkt $\vec{r}_a$ und Endpunkt $\vec{r}_b$, *nicht* aber vom Verlauf des Weges C ab!

Zusammen mit den Ergebnissen der Nummern 26.15 und 16 haben wir damit den wichtigen

26.17 Satz über die Wegunabhängigkeit von Wegintegralen:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein **einfach–zusammenhängendes** Gebiet (also ein zusammenhängendes Gebiet ohne "Löcher") und sei $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ ein n–dimensionales Vektorfeld, dessen Komponenten $F_j = F_j(x_1, \ldots, x_n)$ über G **stetig differenzierbar** sind.

Dann sind die folgenden vier Aussagen über $\vec{F}$ äquivalent:

(1) $\vec{F}$ **ist rotationsfrei auf** G, d.h.: $\boxed{\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall\, i \neq j}$ auf G.

(2) $\vec{F}$ **ist konservativ auf** G, d.h. es gibt eine Stammfunktion Φ zu $\vec{F}$ auf G: $\vec{F} = \operatorname{grad} \Phi$; in diesem Fall kann man Φ aus den **n Bestimmungsgleichungen**: $\boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = F_1 \,, \; \ldots \,, \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = F_n}$ erhalten.

(3) **Das Integral** $\displaystyle\int_C \vec{F}\,(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r}$ **ist wegunabhängig auf** G ,

d.h. der Wert des Integrals hängt für jeden in G gelegenen Weg C nur vom Anfangspunkt $\vec{r}_a$ und Endpunkt $\vec{r}_b$ des Weges C ab:

a ist $\tilde{C}$ irgendein **anderer**, "bequemerer" Weg in G von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$, so ist

$$\boxed{\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}\,;$$

b ist Φ eine **Stammfunktion** zu $\vec{F}$ auf G, so ist

$$\boxed{\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{\text{s.o.}}{=} \Phi(\vec{r}_b\,) - \Phi(\vec{r}_a\,)}\,.$$

(4) **Für geschlossene Wege** C **in** G **ist** $\boxed{\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$.

Durch die Schreibweise: $\displaystyle\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ wird zum Ausdruck gebracht, dass das Wegintegral nur von $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ abhängt, also (innerhalb von G) **wegunabhängig** ist: anderenfalls ergäbe diese Schreibweise auch keinen Sinn!

Wenn also das Vektorfeld $\vec{F}$ **konservativ** ist, lässt sich ein Wegintegral $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ außer "zu Fuß" (wie am Anfang beschrieben) meistens einfacher entweder durch die Wahl eines bequemeren Weges $\tilde{C}$ statt C oder mit Hilfe einer (allerdings erst zu bestimmenden) Stammfunktion Φ zu $\vec{F}$ lösen.

Hierzu ist es in der Regel nicht nötig, das einfach–zusammenhängende Gebiet G, innerhalb dessen sich alles abspielt, explizit anzugeben : wichtig ist nur, daß es **möglich** ist, ein **einfach–zusammenhängendes** Gebiet G zu finden, das einerseits alle Wege enthält, die von Interesse sind, andererseits aber **keine "Unanständigkeitsstellen" von** $\vec{F}$ **enthält!**

Beispiel 1 : Das Vektorfeld $\vec{F} = \left(x - y^2\,,\, y - x^2\right)$ aus dem letzten Beispiel ist nicht konservativ: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x - y^2\right) = -2y \neq -2x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y - x^2\right)$;
es ist — wie wir gesehen haben — auch nicht wegunabhängig.

Beispiel 2 : (siehe das Beispiel in Abschnitt 26.F)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Sei} & \vec{F}(\vec{r}\,) = \left(1 + 2xy + z^2\,,\, 1 - 2yz + x^2\,,\, -1 + 2zx - y^2\right) \\ \text{und} & C\,:\; x = \cos\varphi\,,\, y = \sin\varphi\,,\, z = 2\varphi \;\;\text{mit}\;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ . \end{array}}$$

(C beschreibt eine Windung einer Schraubenlinie)

Da die Komponenten von $\vec{F}$ an jeder Stelle stetige partielle Ableitungen haben, kann man für G irgendein — hinreichend großes — Gebiet wählen: z.B. $G = \mathbb{R}^3$.

In Abschnitt 26.F wurde festgestellt, dass $\vec{F}$ **rotationsfrei** und somit **konservativ** ist und es wurden die **Stammfunktionen** zu $\vec{F}$ bestimmt:

$$\boxed{\textit{eine}\ \text{Stammfunktion ist z.B.: } \Phi(x,y,z) = x + y - z + x^2y - y^2z + z^2x\,.}$$

Damit kann das Wegintegral $\boxed{\displaystyle\int_C \vec{F}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{r}}$ auf *drei verschiedene* Arten berechnet werden:

Erster Lösungsweg: $\boxed{\text{der "Fußweg" :}}$

(so lassen sich alle Wegintegrale $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ berechnen, auch wenn $\vec{F}$ nicht konservativ ist.)

Für $x = \cos\varphi\,,\; y = \sin\varphi\,,\; z = 2\varphi$ ist zunächst:
$dx = -\sin\varphi\; d\varphi\,,\; dy = \cos\varphi\; d\varphi\,,\; dz = 2\,d\varphi$; damit folgt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_C \left(1 + 2xy + z^2\right)dx + \left(1 - 2yz + x^2\right)dy + \left(-1 + 2zx - y^2\right)dz = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \Big[\left(1 + 2\sin\varphi\cos\varphi + 4\varphi^2\right)(-\sin\varphi) + \left(1 - 4\varphi\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\varphi + \\
&\qquad + \left(-1 + 4\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi\right)\,2\Big]\,d\varphi = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \Big[-\sin\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi - 4\varphi^2\sin\varphi + \cos\varphi - 4\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \\
&\qquad + \cos^3\varphi - 2 + 8\varphi\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\Big]\,d\varphi\ .
\end{aligned}$$

Mit den Einzel–Integralen:

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0 \ , \quad \int_0^{2\pi} 2\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\, sin^3\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0 \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi^2 \sin\varphi\, d\varphi = \Big[-\varphi^2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\Big(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\Big)\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{2} \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\left[3\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (-2)\, d\varphi = -4\pi \ , \quad \int_0^{2\pi} \varphi\cos\varphi\, d\varphi = \Big[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\Big]_0^{2\pi} = 0 \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} (-2)\sin^2\varphi\, d\varphi = -\Big[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} = -2\pi$$

ergibt sich: $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 16\pi^2 + 2\pi - 4\pi - 2\pi = \underline{16\pi^2 - 4\pi}$.

Zweiter Lösungsweg: $\boxed{\text{Wahl eines bequemeren Weges } \tilde{C}:}$

(das geht natürlich nur bei wegunabhängigen Integralen, also wenn $\vec{F}$ konservativ ist!)

Die bequemsten Wege sind in der Regel Wege, die sich aus achsenparallelen Teilwegen zusammensetzen — allerdings muß man i.a. darauf achten, daß sich der neue Weg $\tilde{C}$ im *selben* einfach–zusammenhängenden Gebiet G befindet wie der ursprüngliche Weg C: es muß möglich sein, den alten Weg C *stetig* in den neuen Weg $\tilde{C}$ überzuführen, ohne dabei G zu verlassen!

In unserem Beispiel führt C von $\vec{r}_a = (1,0,0)$ bis $\vec{r}_b = (1,0,4\pi)$; und da $\vec{F}$ überall “anständig” ist, kann man für $\tilde{C}$ die direkte Verbindungsstrecke von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$ wählen:

$$\boxed{\tilde{C} \ : \ x = 1 \text{ (konstant)}\, , \ y = 0 \text{ (konstant)}\, , \ 0 \le z \le 4\pi}\ .$$

Da x und y auf $\tilde{C}$ konstant sind, ist $dx = dy = 0$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{\tilde{C}} \Big(1 + 2xy + z^2\Big)\, dx + \Big(1 - 2yz + x^2\Big)\, dy - \Big(-1 + 2zx - y^2\Big)\, dz = \\ &= \int_0^{4\pi} (-1 + 2z)\, dz = \Big[-z + z^2\Big]_{z=0}^{4\pi} = \underline{16\pi^2 - 4\pi}\ .\end{aligned}$$

Dritter Lösungsweg: $\boxed{\text{Berechnung mit Hilfe einer Stammfunktion:}}$

(dieser Lösungsweg ist nur für konservative Vektorfelder möglich: in diesem Fall muss zunächst eine Stammfunktion bestimmt werden!)

Mit der bereits ermittelten Stammfunktion $\boxed{\Phi(x,y,z) = x + y - z + x^2y - y^2z + z^2x}$ (s.o.) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;&=\; \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a) \;=\; \Phi(1,0,4\pi) - \Phi(1,0,0) = \\
&=\; \Big(1 + 0 - 4\pi + 0 - 0 + 16\pi^2\Big) - \Big(1 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0\Big) = \underline{16\pi^2 - 4\pi}\,.
\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Wenn — irgendwoher — bereits eine Stammfunktion Φ zu $\vec{F}$ bekannt ist, dann liegt es nahe, das Integral $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ auch mit Hilfe von Φ zu berechnen: $\boxed{\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Phi\left(\vec{r}_b\right) - \Phi\left(\vec{r}_a\right)}$.

Ist Φ nicht bekannt und auch nicht schnell zu erhalten, dann löst man dieses Integral — sofern es wegunabhängig ist — am einfachsten über einen bequemeren Weg $\tilde{C}$ (meistens wählt man für $\tilde{C}$ einen aus achsenparallelen Teilwegen zusammengesetzten Weg):

$$\boxed{\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\tilde{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}\,.$$

Die Methode **"zu Fuß"** — die *stets möglich* ist — empfiehlt sich i.a. nur dann, wenn $\vec{F}$ nicht konservativ ist, wenn es also keine Stammfunktion zu $\vec{F}$ gibt und damit das Integral $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ auch nicht wegunabhängig ist.

Das nächste Beispiel soll deutlich machen, dass im Satz von der Wegunabhängigkeit von Wegintegralen das einfach–zusammenhängende Gebiet G nicht immer ignoriert werden kann, dass man also im Integral $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ den Weg C nicht beliebig durch andere Wege $\tilde{C}$ ersetzen kann — auch wenn das Vektorfeld $\vec{F}$ konservativ und damit das Wegintegral wegunabhängig ist:

es kommt wesentlich darauf an, *wo* $\vec{F}$ konservativ und damit das Wegintegral wegunabhängig ist; es ist also darauf zu achten, *wo* die "Unanständigkeitsstellen" von $\vec{F}$ liegen!

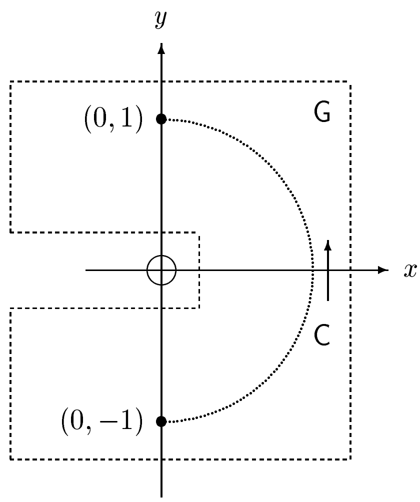
Beispiel 3:

Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$ für $\vec{r} = (x,y) \neq (0,0)$

und $C\,:\ x = \cos\varphi\,,\ y = \sin\varphi$ mit $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist auf der gelochten Ebene $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ stetig differenzierbar und an der Stelle $(0,0)$ wesentlich unstetig.

Daher ist das einfach–zusammenhängende Gebiet G so zu wählen, dass der gesamte Weg C, *nicht* aber der Koordinatenursprung in G enthalten ist!



Auf jedem derartigen Gebiet G ist $\vec{F}$ rotationsfrei, somit konservativ, denn:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) &= \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) &= \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}\right\}$$

beide Ableitungen stimmen überein: folglich ist $\vec{F}$ konservativ!

Damit kann das Integral $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ wieder auf drei Arten gelöst werden:

Erster Lösungsweg: "Fußweg" :

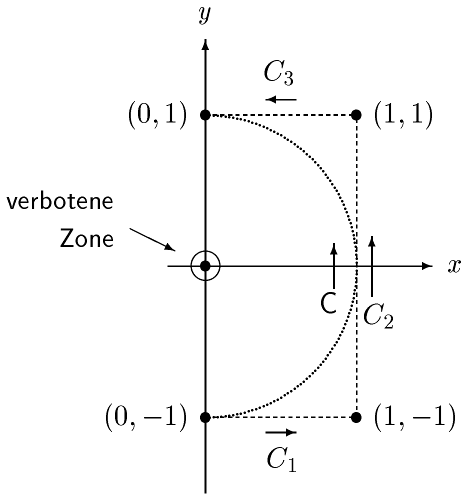
Mit: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ ist: $dx = -\sin\varphi\, d\varphi$, $dy = \cos\varphi\, d\varphi$ und $x^2+y^2 = 1$, somit:

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_C \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \\
&= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) d\varphi = -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \underline{-\pi}\ .
\end{aligned}$$

(Hier ist der "Fußweg" sogar der bequemste Weg!)

Zweiter Lösungsweg: $\boxed{\text{Wahl eines bequemeren Weges:}}$

Da die auf der y–Achse gelegene, direkte Verbindungsstrecke von $(0,-1)$ bis $(0,1)$ das Gebiet G verlässt — wie immer das einfach–zusammenhängende Gebiet G definiert wird! —, bietet sich z.B. der folgende "Aus"–Weg an: $\tilde{C} = C_1 + C_2 + C_3 \; : \; (0,-1) \xrightarrow{C_1} (1,-1) \xrightarrow{C_2} (1,1) \xrightarrow{C_3} (0,1)$ mit



$C_1 \; : \; 0 \le x \le 1 \, , \; y = -1$ (konstant, $\Rightarrow dy = 0$),
$C_2 \; : \; -1 \le y \le 1 \, , \; x = 1$ (konstant, $\Rightarrow dx = 0$),
$C_3 \; : \; 1 \ge x \ge 0 \, , \; y = 1$ (konstant, $\Rightarrow dy = 0$).

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;&=\; \int_{\tilde{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{C}} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \;= \\
&=\; \underbrace{\int_0^1 \frac{-1}{x^2+1}\, dx}_{= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \;+\; \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{-1}{1+y^2}\, dy}_{= \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \;+\; \underbrace{\int_1^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx}_{= \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}} \;= \\
&=\; -\arctan x \,\Big|_{x=0}^{1} - \; \arctan y \,\Big|_{y=-1}^{1} - \; \arctan x \,\Big|_{x=0}^{1} = \\
&=\; -\,4 \arctan 1 = \underline{-\,\pi} \, .
\end{aligned}$$

Dritter Lösungsweg: $\boxed{\text{Berechnung mit Hilfe einer Stammfunktion } \Phi\text{ :}}$

Für Φ hat man die beiden Bestimmungsgleichungen:

(1) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, d.h. $\Phi(x,y) = \displaystyle\int \frac{y}{x^2+y^2}\, dx + c(y) = \arctan \frac{x}{y} + c(y)$,

(2) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$, somit: $\dfrac{-x}{x^2+y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\arctan \dfrac{x}{y} + c(y)\right) = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + c'(y)$;

damit ist $c'(y) = 0$, also (z.B.) $c(y) = 0$ und $\boxed{\Phi(x,y) = \arctan \frac{x}{y}}$.

Mit dieser Funktion Φ als Stammfunktion ergeben sich allerdings **Probleme**:

für $x > 0$ und $y \to +0$ ist $\frac{x}{y} \to +\infty$, also $\arctan\frac{x}{y} \to +\frac{\pi}{2}$,
für $x > 0$ und $y \to -0$ ist $\frac{x}{y} \to -\infty$, also $\arctan\frac{x}{y} \to -\frac{\pi}{2}$;

die erhaltene Funktion $\Phi(x,y)$ ist also jeweils nur auf der unteren Halbebene $y < 0$ und auf der oberen Halbebene $y > 0$ (beide *ohne* die x–Achse) eine Stammfunktion zu $\vec{F}$, *nicht* aber auf einem Gebiet G, welches die positive x–Achse schneidet!

Um zu $\vec{F}$ eine Stammfunktion $\tilde{\Phi}$ auf einem den Weg C, nicht aber den Koordinatenursprung $(0,0)$ enthaltenden, *einfach*–zusammenhängenden Gebiet G zu bekommen, kann man die Funktion $\Phi(x,y)$ auf der unteren Halbebene $y < 0$ um π "anheben":

$$\boxed{\tilde{\Phi}(x,y) \;=\; \begin{cases} \arctan\frac{x}{y} & \text{für } y > 0 \\[2ex] \pi + \arctan\frac{x}{y} & \text{für } y < 0 \end{cases}}$$

; diese Funktion ist nun auf G stetig differenzierbar mit $\operatorname{grad}\Phi = \vec{F}$, d.h. $\tilde{\Phi}$ ist eine für unsere Zwecke geeignete Stammfunktion.

Wir erhalten schließlich: $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \tilde{\Phi}(0,1) - \tilde{\Phi}(0,-1) = \arctan 0 - (\pi + \arctan 0) = \underline{-\pi}$.

Der Satz von der Wegunabhängigkeit von Wegintegralen hat viele Anwendungen in der Physik,
z.B.: jedes elektrostatische Feld $\vec{E}$ ist wirbelfrei ($\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{o}$); daher ist im elektrostatischen Feld die **Spannung** $U = \int\limits_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a)$ [= Potentialdifferenz] zwischen zwei Punkten $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ unabhängig vom Weg C zwischen $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$, und die **Umlaufarbeit** $A = Q\,U$
bei der Bewegung einer Ladung Q auf einer beliebigen geschlossenen Kurve innerhalb eines elektrostatischen Feldes $\vec{E}$ ist gleich Null (anderenfalls hätte man ein perpetuum mobile!).

27 Exakte Dgln. und integrierender Faktor.

Stichpunkte: Exakte Differentialgleichung und zugehörige Stammfunktion, Lösung einer nichtexakten Dgl. mit Hilfe eines "exakt–machenden" integrierenden Faktors.

27.A Exakte Differentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung (*) $\boxed{y' = f(x,y)}$ kann in der Regel auf viele Arten in der Form

$(**)_1$ $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{-Q(x,y)}}$ und damit in **Differentialform:**

$(**)_2$ $\boxed{\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}}$ geschrieben werden.

27.1 Die Dgl. $(**)_1$ bzw. $(**)_2$ ist **exakt**, wenn der Differentialausdruck $P\,dx + Q\,dy$ das **totale Differential** eine Funktion $\Phi(x,y)$ ist, d.h.

wenn $\boxed{P\,dx + Q\,dy = d\Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy}$.

27.2 Das ist genau dann der Fall, wenn die einfach nachprüfbare Bedingung:

(A): $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}}$ erfüllt ist.

In diesem Fall bekommt man eine **Stammfunktion** $\Phi(x,y)$ aus den beiden Gleichungen:

(B): $\boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = P\,,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q}$. (siehe Nummer 26.15 und 16 !)

Die **Lösungen** der gegebenen Dgl. (*) bzw. $(**)_{1,2}$ erhält man dann aus der zu (*) bzw. (**) *äquivalenten* (!) Gleichung:

(C): $\boxed{\Phi(x,y) = c \quad \text{(beliebig konstant)}}$.

Diese Gleichung (C) löst man — falls das möglich ist — nach y auf, notfalls auch nach x ; ungünstigstenfalls — wenn beides nicht geht — muss man sich mit Gleichung (C) als *implizit* gegebener Lösung begnügen.

Zum Beispiel:

1. Für die Differentialgleichung (1) $\boxed{\boxed{y' = \frac{y}{x}(1-y)}}$ gibt es (u.a.) folgende Darstellungen in der Differentialform (wenn man die triviale Lösung $y = 0$ ausschließt):

- $f(x,y) = \frac{y}{x}(1-y) = \frac{y-y^2}{x}$ $\quad\rightarrow\quad$ (1a) $\boxed{\left(y-y^2\right)dx - x\,dy = 0}$,
- $f(x,y) = \frac{y}{x}(1-y) = \frac{1-y}{x/y}$ $\quad\rightarrow\quad$ (1b) $\boxed{(1-y)\,dx - \frac{x}{y}\,dy = 0}$,
- $f(x,y) = \frac{y}{x}(1-y) = \frac{1-1/y}{-x/y^2}$ $\quad\rightarrow\quad$ (1c) $\boxed{\left(1-\frac{1}{y}\right)dx + \frac{x}{y^2}\,dy = 0}$,
- $f(x,y) = \frac{y}{x}(1-y) = \frac{(y-1)/x}{-1/y}$ $\quad\rightarrow\quad$ (1d) $\boxed{\frac{y-1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0}$ usw..

Von diesen vier Dgln. (1a) bis (1d) ist *nur eine* exakt:

zu (1a): $\frac{\partial}{\partial y}\left(y-y^2\right) = 1-2y\,,\ \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1 \ \Rightarrow$ (1a) ist *nicht* exakt;

zu (1b): $\frac{\partial}{\partial y}(1-y) = -1\,,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{y} \ \Rightarrow$ (1b) ist *nicht* exakt;

zu (1c): $\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2}\right) \ \Rightarrow$ (1c) ist **exakt** ;

zu (1d): $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-1}{x}\right) = \frac{1}{x}\,,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \ \Rightarrow$ (1d) ist *nicht* exakt.

Zur exakten Dgl. (1c) kann man eine Stammfunktion $\Phi(x,y)$ finden; diese ergibt sich aus den zwei Gleichungen:

(i) $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P = 1-\frac{1}{y} \ \Rightarrow\ \Phi(x,y) = \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dx = x\left(1-\frac{1}{y}\right) + c_0(y)\,,$

(ii) $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q = \frac{x}{y^2} \overset{\text{(i)}}{=} \frac{x}{y^2} + c_0'(y) \ \Rightarrow\ c_0'(y) = 0$, d.h. $c_0(y)$ konstant, z.B. $c_0(y) = 0$. Damit ist

(z.B.) $\boxed{\Phi(x,y) = x\left(1-\frac{1}{y}\right)}$. Die Lösungen der Dgln. (1) und (1a) bis (1d) bekommt man nun aus der Gleichung: $\Phi = c$ (beliebig konstant), also: $x\left(1-\frac{1}{y}\right) = c$ bzw. $1-\frac{c}{x} = \frac{1}{y}$ bzw.

(mit c statt $-c$): $\boxed{\boxed{y = \frac{x}{x+c} \quad (c \text{ bel. konst.})}}$.

Der geübte Praktiker würde diese Dgl. (1) eher durch "scharfes Hinsehen" lösen: *eine* Lösung ist $y = 0$;

für $y \neq 0$ ist: $y' = \frac{y}{x}(1-y) \Leftrightarrow xy' = y - y^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{y - xy'}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)'$, also $\frac{x}{y} = x + c$ bzw.
$\boxed{y = \frac{x}{x+c} \quad (c \text{ bel. konst.})}$.

Weitere Beispiele:

2. Die Dgl. **(i)** $\boxed{2(x+1)y + \Big((x+1)^2 + 2y\Big)\, y' = 0}$ bzw. (nach Multiplikation beider Seiten mit dx): **(ii)** $\boxed{2(x+1)y\,dx + \Big((x+1)^2 + 2y\Big)\,dy = 0}$ ist **exakt**, denn:
$\frac{\partial}{\partial y}\Big(2(x+1)y\Big) = 2(x+1) = \frac{\partial}{\partial x}\Big((x+1)^2 + 2y\Big)$.
Damit gibt es eine Stammfunktion $\Phi(x,y)$ mit:
(1) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x+1)y \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = (x+1)^2 y + c_1(y)$,
(2) $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (x+1)^2 + 2y \overset{(1)}{=} (x+1)^2 + c_1'(y) \quad \Rightarrow \quad c_1'(y) = 2y \quad \Rightarrow$ (z.B.) $c_1(y) = y^2$,
$\Rightarrow$ (z.B.) $\Phi(x,y) = (x+1)^2 y + y^2$. Die Lösungen $y(x)$ bekommt man nun aus der Gleichung $\Phi(x,y) = c$ (konstant), d.h. aus der Gleichung: $\boxed{(x+1)^2 y + y^2 = c \text{ (konstant)}}$.
Es ergeben sich die Lösungen (wenn man statt $4c$ wieder c schreibt):
$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(-(x+1)^2 \pm \sqrt{(x+1)^4 + c}\right) \quad (c \text{ beliebig konstant})}$.

3. Die Differentialgleichung **(i)** $\boxed{2xy\,\cos\Big(x^2+y\Big) + y'\Big(\sin\Big(x^2+y\Big) + y\,\cos\Big(x^2+y\Big)\Big) = 0}$
bzw. **(ii)** $\boxed{2xy\,\cos\Big(x^2+y\Big)\,dx + \Big(\sin\Big(x^2+y\Big) + y\,\cos\Big(x^2+y\Big)\Big)\,dy = 0}$ ist **exakt**, denn:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Big(2xy\,\cos\Big(x^2+y\Big)\Big) \quad &= 2x\Big(\cos\Big(x^2+y\Big) - y\sin\Big(x^2+y\Big)\Big) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin\Big(x^2+y\Big) + y\,\cos\Big(x^2+y\Big)\Big)\ .\end{aligned}$$

Es gibt also eine Stammfunktion $\Phi(x,y)$ mit:

(1) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xy\cos\Big(x^2+y\Big) \quad \Rightarrow$

$\Phi(x,y) = \int 2xy\cos\Big(x^2+y\Big)\,dx = y\sin\Big(x^2+y\Big) + c_1(y)$,

(2) $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sin\Big(x^2+y\Big) + y\cos\Big(x^2+y\Big) \overset{(1)}{=} \sin\Big(x^2+y\Big) + y\cos\Big(x^2+y\Big) + c_1'(y)$,

$\Rightarrow c_1'(y) = 0 \Rightarrow c_1(y) =$ konst., z.B. $c_1(y) = 0 \Rightarrow$ (z.B.) $\Phi(x,y) = y\sin(x^2+y)$.

Damit ergeben sich die Lösungen der Differentialgleichung aus der Gleichung: $\Phi(x,y) = c$ (konstant), d.h.: $\boxed{y\sin\left(x^2+y\right)=c \text{ (beliebig konstant)}}$: diese Gleichung ist nicht explizit nach y auflösbar, wohl aber nach x , d.h. man kann die Lösungen zumindest in der Form $x=x(y)$ ermitteln:

$\sin\left(x^2+y\right)=\dfrac{c}{y} \;\Rightarrow\; x^2=\arcsin\left(\dfrac{c}{y}\right)-y$, also:

$$\boxed{x=\pm\sqrt{\arcsin\left(\frac{c}{y}\right)-y}\ ,\quad c \text{ beliebig konstant}}\ .$$

4. Die Differentialgleichung: $\boxed{(x+1)\,e^x\,dx+(y+1)\,e^y\,dy=0}$ ist sicher **exakt** , denn

$\dfrac{\partial}{\partial y}\Big((x+1)\,e^x\Big)=0=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big((y+1)\,e^y\Big)$. Es gibt demnach eine Stammfunktion $\Phi(x,y)$ mit:

(1) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=(x+1)\,e^x \;\Rightarrow\; \Phi(x,y)=\displaystyle\int(x+1)\,e^x\,dx=x\,e^x+c_1(y)$,

(2) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=(y+1)\,e^y \;\Rightarrow\; \Phi(x,y)=\displaystyle\int(y+1)\,e^y\,dy=y\,e^y+c_2(x)$,

somit (z.B.) : $\Phi(x,y)=x\,e^x+y\,e^y$. Die Lösungen $y=y(x)$ bzw. $x=x(y)$ genügen dann der Gleichung $\Phi(x,y)=$ konstant, also: $\boxed{x\,e^x+y\,e^y=c \text{ (beliebig konstant)}}$.

Da diese Gleichung jedoch weder nach x noch nach y auflösbar ist, muss man sich mit ihr (als implizit gegebener Lösung) begnügen.

In der Regel kann man in solchen Fällen die Lösungskurven mit geeigneten Näherungsverfahren zumindest skizzieren.

Im vorliegenden Beispiel wurde — natürlich nicht von Hand, sondern mit Hilfe eines PC — das **allgemeine Iterationsverfahren** (s. Nummer 4.2) verwendet, um die Lösungskurven durch $(0,0)$ und $(1/2\,,\,1/2)$, also die Kurven

$$\boxed{x\,e^x+y\,e^y=c \text{ mit } c=0 \text{ bzw. } c=e^{1/2}}$$

zu skizzieren: hierzu wurde zu "einigen" $x\in[-2\,,\,0]$ bzw. $x\in[-2\,,\,1/2]$ der zugehörige y–Wert mit Hilfe der **Iterationsfolge** :

$\boxed{y_{n+1}=(c-xe^x)\;e^{-y_n}}$ bestimmt:

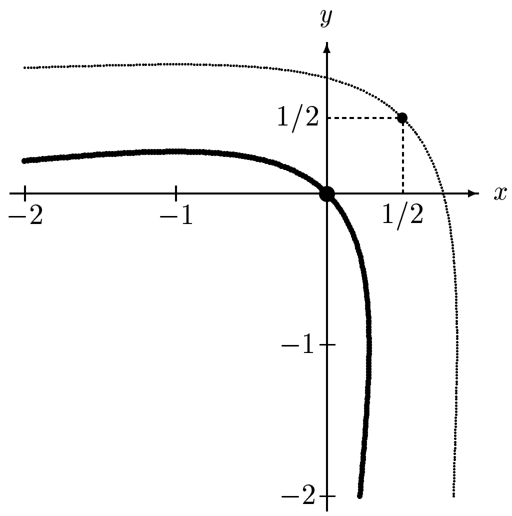


Abbildung 27.1: $xe^x+ye^y=0,=\sqrt{e}$

(Darüberhinaus wurde davon Gebrauch gemacht, dass die Lösungskurven offenbar zur Winkelhalbierenden $y=x$ symmetrisch sind.)

5. Die Dgl. $\boxed{\sin(x-y)\,dx + \sin(x+y)\,dy = 0}$ ist *nicht* exakt,

denn $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x-y) = -\cos(x-y) \neq \cos(x+y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x+y)$.

Diese Dgl. kann daher mit der oben beschriebenen Methode (Bestimmung einer Stammfunktion) *nicht* gelöst werden!

(Wir werden jedoch im nächsten Abschnitt sehen, dass es sich mitunter lohnt, nicht–exakte Differentialgleichungen dieser Art mit Hilfe eines **integrierenden Faktors** "exakt zu machen", um sie dann *doch* in der oben beschriebenen Weise lösen zu können!)

27.B Integrierender Faktor.

An den Differentialgleichungen (1a) bis (1d) aus dem ersten Beispiel von oben kann man erkennen, dass es mitunter möglich ist, eine *nicht*–exakte Dgl. durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion $\mu(x,y)$ **exakt zu machen**:

man erhält die **exakte** Dgl. (1c), wenn man die Dgl. (1a) mit $\mu(y) = -1/y^2$ oder die Dgl. (1b) mit $\mu(y) = -1/y$ oder die Dgl. (1d) mit $\mu(x,y) = x/y$ durchmultipliziert.

27.3

Eine Funktion $\mu(x,y)$ ($\mu \neq 0$) ist ein **integrierender Faktor** (auch: ein **Euler'scher Multiplikator**) für die Differentialgleichung:

(*) $\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$, wenn die Differentialgleichung:

(+) $\boxed{\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0}$ **exakt** ist, wenn also:

(A$_+$): $\boxed{\dfrac{\partial\mu}{\partial y}P + \mu\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial\mu}{\partial x}Q + \mu\dfrac{\partial Q}{\partial x}}$.

In diesem Fall wird die zur Dgl. (*) äquivalente Dgl. (+) entsprechend ebenso gelöst, wie das im letzten Abschnitt beschrieben wurde:

27.4

zunächst wird mit Hilfe der beiden Gleichungen:

(B$_+$): $\boxed{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \tilde{P} := \mu\,P\,,\quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \tilde{Q} := \mu\,Q}$

eine **Stammfunktion** $\Phi(x,y)$ bestimmt; die Lösungen der Dgl. (+) — und damit der Dgl. (*) — ergeben sich dann aus der Gleichung:

(C$_+$): $\boxed{\Phi(x,y) = c \quad \text{(bel. konstant)}}$.

Die Hauptschwierigkeit bei dieser Methode liegt darin, einen integrierenden Faktor $\mu(x, y)$ zu *finden*, also eine Funktion $\mu(x, y)$, welche die Bedingung (A_+) erfüllt.

27.5 Da die Dgl. (A_+) für μ in dieser Allgemeinheit sicher wesentlich schwerer zu lösen ist als die ursprünglich gegebene Dgl. (*), hat es sich bewährt, stets zunächst zu **versuchen, einen integrierenden Faktor von sehr spezieller Form zu finden**, wie z.B.:

$\boxed{\mu(x, y) = f(x)\, g(y) \quad \text{mit } f, g \neq 0}$ oder $\boxed{\mu(x, y) = f\left(x^2 + y^2\right) \quad \text{mit } f \neq 0}$

usw..

Der **Ansatz:** $\boxed{\mu(x, y) = f(x)\, g(y) \quad \text{mit } f, g \neq 0}$ liefert z.B.:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(f(x)\, g(y)\, P(x, y)\Big) \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x)\, g(y)\, Q(x, y)\Big), \text{ d.h.}$$

$$f(x)\left(g'(y)\, P(x, y) + g(y)\, \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) \stackrel{!}{=} g(y)\left(f'(x)\, Q(x, y) + f(x)\, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right)$$

bzw., nach Division beider Seiten durch $f(x)\, g(y)$:

$$(A_{++}): \boxed{\frac{g'(y)}{g(y)}\, P(x, y) + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \stackrel{!}{=} \frac{f'(x)}{f(x)}\, Q(x, y) + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}\,.$$

Aus dieser Gleichung kann man oft — meistens mit zusätzlichen Annahmen — zwei voneinander unabhängige Dgln. für $f(x)$ und $g(y)$ gewinnen: jede zusätzliche Einschränkung oder Annahme, die sich mit Gleichung (A_{++}) verträgt und etwas nützt, ist zulässig und sinnvoll — schließlich wird ja mehr als eine Lösung nicht benötigt!

z.B.: (s.o. 27.A, Beispiel 1.) : wir wollen versuchen, für die nicht–exakte Dgl.

(1a): $\boxed{(y - y^2)\, dx \; - x\, dy \; = 0}$ einen integrierenden Faktor der speziellen Form

$\boxed{\boxed{\mu(x, y) = f(x)\, g(y) \quad \text{mit } f, g \neq 0}}$ zu finden: wir wollen also zwei Funktionen

$f(x)$, $g(y)$ mit $f, g \neq 0$ so finden, dass die Dgl. $f(x)\, g(y)\, \left(y - y^2\right)\, dx - x\, f(x)\, g(y)\, dy \; = 0$ exakt ist. Hierzu muss gelten:

$$f(x)\Big(g'(y) \cdot (y - y^2) + g(y) \cdot (1 - 2y)\Big) \stackrel{!}{=} g(y)\Big(-f(x) - x f'(x)\Big), \text{ bzw.}$$

(a) $\boxed{\frac{g'(y)}{g(y)} \cdot (y - y^2) + 1 - 2y \stackrel{!}{=} -1 - x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Gleichung

mit geeigneten Funktionen $f(x)$, $g(y)$ zu erfüllen, wie z.B.:

1. Möglichkeit, (a) zu erfüllen:

Da die linke Seite von (a) nur von y (und nicht von x) abhängt, während die rechte Seite nur von x (und nicht von y) abhängt, kann (a) nur erfüllt sein, wenn beide Seiten gleich einer (derselben!) Konstanten sind. Wir nehmen (z.B.) an, dass beide Seiten gleich 0 sind: dann zerfällt (a) in die beiden — voneinander unabhängigen — Gleichungen:
(i) $\dfrac{g'(y)}{g(y)} \cdot (y-y^2) + 1 - 2y = 0$ und (ii) $-1 - x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 0$. (i) ergibt:

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = -\frac{1-2y}{y-y^2} = -\frac{(y-y^2)'}{y-y^2}\text{, d.h. } \Big(\ln|g(y)|\Big)' = \Big(-\ln|y-y^2|\Big)' = \left(\frac{1}{|y-y^2|}\right)',$$

also z.B. $g(y) = \dfrac{1}{y-y^2}$. Aus (ii) folgt:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x}\text{, d.h. } \Big(\ln|f(x)|\Big)' = (-\ln|x|)' = \left(\ln\frac{1}{|x|}\right)'\text{, also z.B. } f(x) = \frac{1}{x}.$$

Wir erhalten den integrierenden Faktor $\boxed{\mu(x,y) = f(x)\,g(y) = \dfrac{1}{x(y-y^2)}}$.

Multiplikation der Dgl. (1a) $\boxed{(y-y^2)\,dx - x\,dy = 0}$ mit diesem integrierenden Faktor führt auf die *exakte* Dgl. (1e) $\boxed{\dfrac{1}{x}\,dx - \dfrac{1}{y-y^2}\,dy = 0}$, zu der in der gewohnten Weise (wie oben in Nummer 27.4 beschrieben) eine Stammfunktion $\Phi(x,y)$ bestimmt werden kann:

$$(1)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} \overset{!}{=} \frac{1}{x} \Rightarrow \Phi(x,y) = \ln|x| + c_1(y)\,,\quad (2)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} \overset{!}{=} -\frac{1}{y-y^2} \overset{(1)}{=} c_1'(y) \Rightarrow$$

$$c_1(y) = -\int\frac{dy}{y-y^2} \overset{\substack{\text{Partialbruch–}\\ \text{zerlegung}}}{=} -\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = -\ln|y| + \ln|1-y| \ (+\,\text{const.}),$$

somit (z.B.): $\Phi(x,y) = \ln|x| - \ln|y| + \ln|1-y| = \ln\left|\dfrac{(1-y)x}{y}\right|$. Hieraus ergeben sich wieder dieselben Lösungen wie oben:

$$\Phi(x,y) = c_0 \text{ (bel. konst.)} \Leftrightarrow \frac{(1-y)x}{y} = c \text{ (bel. konst.)} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{x}{x+c} \quad (c \text{ bel. konst.})}.$$

2. Möglichkeit, (a) zu erfüllen:

Wenn $f(x) = 1$ (konstant) ist, dann ist $f'(x) = 0$ und (a) ist erfüllt mit:
$\dfrac{g'(y)}{g(y)}(y-y^2) + 2 - 2y = 0$, d.h. $\dfrac{g'(y)}{g(y)} = \dfrac{-2+2y}{y-y^2} = -\dfrac{2}{y}$, also (z.B.): $g(y) = \dfrac{1}{y^2}$. Multiplikation von Dgl. (1a) mit dem sich ergebenden integrierenden Faktor $\mu(x,y) = f(x)\,g(y) = \dfrac{1}{y^2}$ führt auf die exakte Dgl. (1c), die oben bereits gelöst wurde.

28 2- und 3-dimensionale Bereichsintegrale.

Stichpunkte: Ebene und räumliche Normalbereiche, 2- und 3-dimensionale Bereichs- und Mehrfachintegrale über einem Normalbereich; einige Rechenregeln und Beispiele.

28.A Normalbereiche.

Die Bereiche, die wir hier und in den folgenden Abschnitten betrachten, sind hauptsächlich 2– oder 3–dimensionale **Normalbereiche** oder Vereinigungen von solchen:

Ein **ebener Normalbereich** in der x, y–Ebene besitzt eine Darstellung einer der beiden folgenden Arten:

28.1 $\boxed{B \;:\; a \le x \le b \;,\; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)}$

mit stetig differenzierbarer, unterer und oberer Begrenzungskurve $y = \varphi_1(x)$ bzw. $y = \varphi_2(x)$.

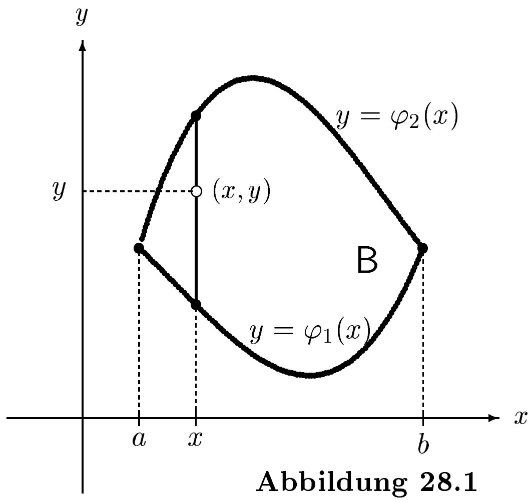


Abbildung 28.1

oder

28.2 $\boxed{B \;:\; c \le y \le d \;,\; \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)}$

mit stetig differenzierbarer, linker und rechter Begrenzungskurve $x = \psi_1(y)$ bzw. $x = \psi_2(y)$.

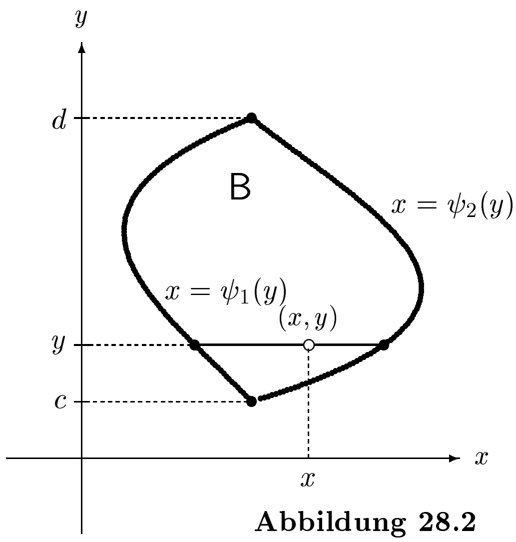


Abbildung 28.2

Bereiche B , die keine Normalbereiche sind, kann man versuchen so zu zerlegen, dass sie sich als Vereinigung von Bereichen der beschriebenen Art darstellen lassen.

Ganz entsprechend besitzt ein **räumlicher Normalbereich** B (im x, y, z–Raum) eine Darstellung einer der folgenden Arten:

28.3

$$\boxed{B \,:\, a \leq x \leq b \,,\; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \,,\; \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)}$$

Hierbei ist: (vgl. mit der Abbildung 28.5)

(a) $B_0 \,:\, a \leq x \leq b \,,\; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ der ebene **Grundbereich**, der sich durch Projektion des "Körpers" B auf die x, y–Ebene ergibt;

(b) $z = \psi_1(x,y)$ ist die Gleichung der unteren Begrenzungsfläche (der "Boden") und

(c) $z = \psi_2(x,y)$ ist die Gleichung der oberen Begrenzungsfläche (der "Deckel") des Körpers B.

Man bekommt alle Punkte $(x, y, z) \in B$, wenn man für alle Punkte $(x, y) \in B_0$ jeweils z von der "Boden"–Fläche $z = \psi_1(x,y)$ bis zur "Deckel"–Fläche $z = \psi_2(x,y)$ laufen lässt.

Völlig analog hat man für einen **räumlichen Normalbereich** B noch die Darstellungsmöglichkeiten:

28.4

$$\boxed{B \,:\, a \leq y \leq b \,,\; \varphi_1(y) \leq z \leq \varphi_2(y) \,,\; \psi_1(y,z) \leq x \leq \psi_2(y,z)}$$

mit dem Grundbereich $B_0 \,:\, a \leq y \leq b \,,\; \varphi_1(y) \leq z \leq \varphi_2(y)$ in der y, z–Ebene, und

28.5

$$\boxed{B \,:\, a \leq z \leq b \,,\; \varphi_1(z) \leq x \leq \varphi_2(z) \,,\; \psi_1(z,x) \leq y \leq \psi_2(z,x)}$$

mit dem Grundbereich $B_0 \,:\, a \leq z \leq b \,,\; \varphi_1(z) \leq x \leq \varphi_2(z)$ in der z, x–Ebene.

28.6 Einen 3–dimensionalen Normalbereich, der **konvex** ist, der also mit je zwei Punkten $\vec{a}\,,\ \vec{b}$ stets die gesamte Verbindungsstrecke $[\vec{a}\,,\, \vec{b}\,] := \left\{ \vec{r} = (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$ enthält, nennt man auch — ganz "offiziell" — eine **konvexe Kartoffel**.

28.B Beispiele ebener und räumlicher Normalbereiche.

1. Der **kreisförmige Bereich** $B\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq R^2$ hat die beiden äquivalenten Darstellungen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} B: & x_0 - R \leq x \leq x_0 + R\ , \\ & \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{array}}$$

mit dem unteren Halbkreis

$\varphi_1(x) = y_0 - \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$

und dem oberen Halbkreis

$\varphi_2(x) = y_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$;

und

$$\boxed{\begin{array}{ll} B: & y_0 - R \leq y \leq y_0 + R\ , \\ & \Psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{array}}$$

mit dem linken Halbkreis

$\psi_1(y) = x_0 - \sqrt{R^2-(y-y_0)^2}$

und dem rechten Halbkreis

$\psi_2(y) = x_0 + \sqrt{R^2-(y-y_0)^2}$.

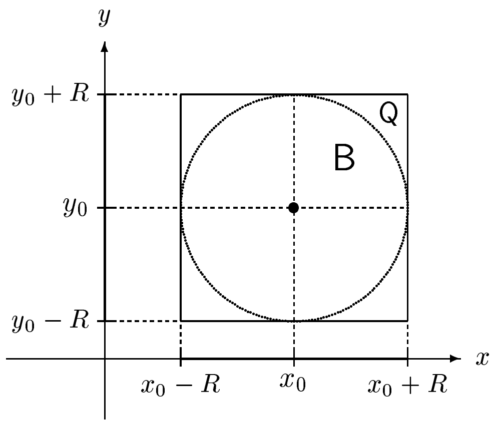


Abbildung 28.3
B = Kreis–Bereich,
Q = Quadrat (s.u.) .

Für jedes x zwischen $x_0 - R$ und $x_0 + R$ sind also nur alle y zwischen dem unteren Halbkreis $y = \varphi_1(x) = y_0 - \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ und dem oberen Halbkreis $y = \varphi_2(x) = y_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ zugelassen,

und für jedes y zwischen $y_0 - R$ und $y_0 + R$ sind nur alle x zwischen dem linken Halbkreis $x = \psi_1(y) = x_0 - \sqrt{R^2-(y-y_0)^2}$ und dem rechten Halbkreis $x = \psi_2(y) = x_0 + \sqrt{R^2-(y-y_0)^2}$ zugelassen! :

Beachte (!) : Der Bereich

$$\boxed{Q\ :\ x_0 - R \leq x \leq x_0 + R\ ,\ y_0 - R \leq y \leq y_0 + R}$$

wäre ein ausgefülltes **Quadrat** mit dem Mittelpunkt bei $(x_0\ ,\ y_0\ )$ und der Seitenlänge $2R$!

2. Der **ellipsenförmige Bereich** $B\ :\ \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}\le 1$ hat — völlig analog — die beiden äquivalenten Darstellungen:

$$\boxed{\begin{aligned} B\ :\ & x_0-a\le x\le x_0+a\ ,\\ & y_0-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}\le y\le y_0+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}\end{aligned}}$$

und:

$$\boxed{\begin{aligned} B\ :\ & y_0-b\le y\le y_0+b\ ,\\ & x_0-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-y_0)^2}\le x\le x_0+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-y_0)^2}\ .\end{aligned}}$$

3. Der Bereich B, der von den beiden Kurven $y=x^2/2$ und $y=\sqrt{x}$ eingeschlossen wird, hat die beiden äquivalenten Darstellungen:

$$\boxed{B\ :\ 0\le x\le 4^{1/3}\ ,\ \frac{x^2}{2}\le y\le\sqrt{x}}$$

(die Grenze $b=4^{1/3}$ ergibt sich als nicht–triviale Lösung der Gleichung $\dfrac{x^2}{2}=\sqrt{x}$) und

$$\boxed{B\ :\ 0\le y\le 2^{1/3}\ ,\ \sqrt{2y}\le x\le y^2}$$

$$\left(d=\frac{b^2}{2}=\sqrt{b}=\sqrt{4^{1/3}}=2^{1/3}\right)\ .$$

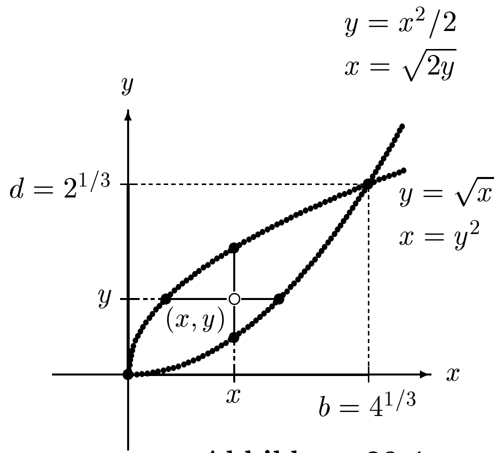


Abbildung 28.4

4. Die Kugel $B\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le R^2$ vom Radius R mit Mittelpunkt $(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ hat (in cartesischen Koordinaten) die Darstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} B\ :\ & x_0-R\le x\le x_0+R\ ,\\ & y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}\le y\le y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}\ ,\\ & z_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\le z\le z_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\ .\end{aligned}}$$

Bei der nebenstehenden Skizze handelt es sich um die Seitenansicht und Aufsicht der **Kugel**

$B \,:\, (x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 \leq 4\,.$

Hier ist also:

$x_0 = 1\,,\ y_0 = -1\,,\ z_0 = 3\,,$
$R = 2\,,\ a = -1\,,\ b = 3\,,$

$\varphi_1(x) = -1 - \sqrt{4-(x-1)^2}\,,$

(unterer Halbkreis)

$\varphi_2(x) = -1 + \sqrt{4-(x-1)^2}\,,$

(oberer Halbkreis)

$\psi_1(x,y) =$
$= 3 - \sqrt{4-(x-1)^2-(y+1)^2}\,,$

(untere Halbkugelschale)

$\psi_2(x,y) =$
$= 3 + \sqrt{4-(x-1)^2-(y+1)^2}\,.$

(obere Halbkugelschale)

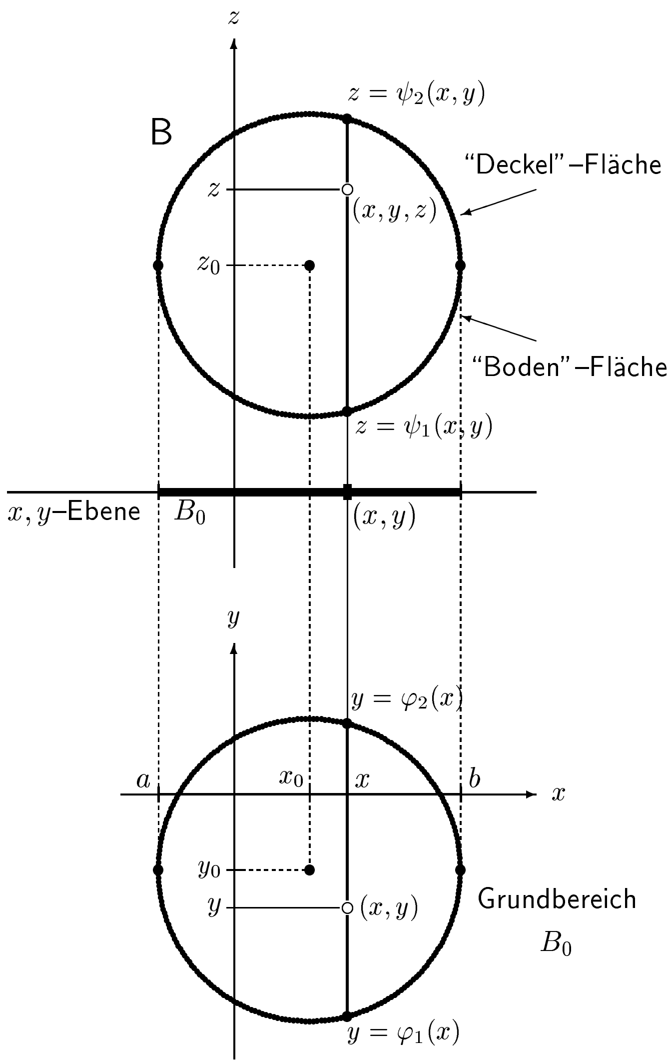


Abbildung 28.5
Seitenansicht und Aufsicht einer Kugel

Die hier skizzierte **Kugel** hat z.B. noch die beiden weiteren Darstellungen in cartesischen Koordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} B\ :\ \ & -3 \leq y \leq 1\,,\ \ 3-\sqrt{4-(y+1)^2} \leq z \leq 3+\sqrt{4-(y+1)^2}\,, \\ & 1-\sqrt{4-(y+1)^2-(z-3)^2} \leq x \leq 1+\sqrt{4-(y+1)^2-(z-3)^2} \end{aligned}}$$

und:

$$\boxed{\begin{aligned} B\ :\ \ & 1 \leq z \leq 5\,,\ \ 1-\sqrt{4-(z-3)^2} \leq x \leq 1+\sqrt{4-(z-3)^2}\,, \\ & -1-\sqrt{4-(z-3)^3-(x-1)^2} \leq y \leq -1+\sqrt{4-(z-3)^3-(x-1)^2}\,. \end{aligned}}$$

28.C Ebene Bereichsintegrale über einem Normalbereich.

28.7

Sei $\boxed{B \,:\, a \le x \le b \,,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)}$

bzw. $\boxed{B \,:\, c \le y \le d \,,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)}$

ein 2–dimensionaler Normalbereich und sei $f(x,y)$ **stetig** auf B (einschließlich Rand!) .

Das **Bereichsintegral** von f über B ist:

$$\iint_B f(x,y)\,dF = \iint_B f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dydx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dxdy \,.$$

(**Beachte** die verschiedene Reihenfolge der Integration bei den beiden letzten Doppelintegralen!)

Bemerkungen:

(a) dF ist das **Flächenelement** auf B; die Bezeichnung $dF = dxdy$ wird verwendet, wenn das Gebiet B in cartesischen Koordinaten x, y dargestellt ist.

(b) Die **Stetigkeit** von $f(x,y)$ auf B *einschließlich* Rand ist wesentlich!

Ist $f(x,y)$ nur in einem einzigen Randpunkt von B unstetig, so ist das Integral $\iint_B f(x,y)\,dF$ möglicherweise nicht mehr definiert und die beiden Doppelintegrale liefern — sofern sie existieren — in der Regel *verschiedene* Werte! (s.u. im folgenden Abschnitt D das 3.Beispiel)

(c) Durch die symbolische Schreibweise $\iint_B f(x,y)\,dF$ bzw. $\iint_B f(x,y)\,dxdy$ wird zum Ausdruck gebracht, daß die "Größen" $f(x,y)\,dF$ bzw. $f(x,y)\,dxdy$ über B "aufzusummieren" sind — sie enthält noch keine Information, *wie* dieses Integral auszurechnen ist.

(d) Mit: $\displaystyle\iint_B f(x,y)\,dF = \int_{x=a}^{b}\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dydx$

bzw.: $\displaystyle\iint_B f(x,y)\,dF = \int_{y=c}^{d}\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dxdy$

wird das Bereichsintegral jeweils auf ein **Doppelintegral** zurückgeführt, welches in der üblichen Weise — von innen nach außen — ausgewertet werden kann:

ist $\displaystyle\Phi(x) := \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ und $\displaystyle\Psi(y) := \int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$, so ist

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dydx := \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx\ ,$$

$$\int_{y=c}^{d}\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dxdy := \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d \Psi(y)\,dy\ .$$

(e) Nimmt man insbesondere die konstante Funktion $f(x,y)=1$, so ergibt sich der **Flächeninhalt** F des Bereiches B :

28.8

$$\boxed{\begin{aligned} F = \iint_B dF &= \int_{x=a}^{b}\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dydx = \int_a^b \Big(\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\Big)\,dx = \\ &= \int_{y=c}^{d}\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dxdy = \int_c^d \Big(\psi_2(y)-\psi_1(y)\Big)\,dy\ . \end{aligned}}$$

28.D Beispiele für ebene Bereichsintegrale.

1. Sei B der von den beiden Kurven $y = x^2/2$ und $y=\sqrt{x}$ eingeschlossene Bereich (s.o. das 3.Beispiel im letzten Abschnitt B).

Den Flächeninhalt F von B kann man auf zwei verschiedene Weisen erhalten:

$$\begin{aligned} F = \iint_B dF &= \int_0^{4^{1/3}}\int_{x^2/2}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^{4^{1/3}} \left(\sqrt{x}-x^2/2\right)dx = \\ &= \left[\frac{2}{3}\,x^{3/2} - \frac{1}{6}\,x^3\right]_0^{4^{1/3}} = \frac{4}{3}-\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\ , \quad \text{oder:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \iint_B dF &= \int_0^{2^{1/3}}\int_{y^2}^{\sqrt{2y}} dxdy = \int_0^{2^{1/3}} \left(\sqrt{2y}-y^2\right)dy = \\ &= \left[\frac{1}{3}\,(2y)^{3/2} - \frac{1}{3}\,y^3\right]_0^{2^{1/3}} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,-2\right) = \frac{2}{3}\ . \end{aligned}$$

2. Es sei die Gesamtladung Q einer ebenen, kreisförmigen Platte vom Radius R mit der Ladungsdichte $\sigma(P) = r^2$ (r = Abstand des Plattenpunktes P vom Plattenmittelpunkt) zu bestimmen.

Legt man die Platte in die x, y–Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, so beschreibt sie den kreisförmigen Bereich (s.o. das 1.Beispiel im letzten Abschnitt B mit $x_0 = y_0 = 0$):

$$\boxed{B \,:\, -R \le x \le R \,,\ -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}}$$

und die Ladungsdichte ist: $\sigma(x,y) = x^2 + y^2$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Q &= \iint_B \sigma(x,y)\,dF = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dydx = \int_{-R}^{R}\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \\
&= 2\int_{-R}^{R}\left(x^2\sqrt{R^2-x^2} + \frac{1}{3}(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2}\right)dx = \\
&= \frac{4}{3}R^2\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R + \\
&\quad + \frac{8}{3}\left[-\frac{x}{4}\sqrt{(R^2-x^2)^3} + \frac{R^2}{8}\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right)\right]_0^R = \\
&= \frac{2}{3}R^2\cdot R^2\arcsin 1 + \frac{8}{3}\cdot\frac{R^4}{8}\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}R^4\,.
\end{aligned}$$

(Das letzte Integral lässt sich *wesentlich* bequemer lösen, wenn man Polarkoordinaten verwendet! siehe in der nächsten Lektion das 1.Beispiel von Abschnitt 29.C.)

3. Mit dem folgenden Beispiel wird demonstriert, dass für die Existenz eines Bereichsintegrals $\iint_B f(x,y)\,dF$ die **Stetigkeit** von $f(x,y)$ auf dem gesamten Bereich B — einschließlich Rand! — wichtig ist:

Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$

über dem Quadrat $B \,:\, 0 \le x \le a \,,\ 0 \le y \le a$.

$f(x,y)$ ist wesentlich unstetig bei $(0,0)$, denn:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\infty\,,\ \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty\,.$$

Die beiden Doppelintegrale $I_{[yx]} := \displaystyle\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dydx$ und

$I_{[xy]} := \displaystyle\int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{a}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$ existieren zwar beide, **sind aber verschieden:**

$$
\begin{aligned}
I_{[yx]} &= \int_{x=0}^{a} \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{a} dx = a \int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = a \cdot \left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_{x=0}^{a} = \\
&= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \, , \\
I_{[xy]} &= \int_{y=0}^{a} \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{a} dy = -a \int_0^a \frac{dy}{a^2+y^2} \overset{\text{s.o.}}{=} -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4} \, .
\end{aligned}
$$

Wählt man (mit $0 < b \leq a$ und $0 < c \leq a$) anstelle von B den Bereich:

$B_{bc} \, : \, 0 \leq x \leq a \, , \; \varphi(x) \leq y \leq a$ mit

$$\varphi(x) := \begin{cases} c & \text{für } 0 \leq x < b \\ 0 & \text{für } b \leq x \leq a \, , \end{cases}$$

bzw. (äquivalente Darstellung) :

$B_{bc} \, : \, 0 \leq y \leq a \, , \; \psi(y) \leq x \leq a$ mit

$$\psi(y) := \begin{cases} b & \text{für } 0 \leq y < c \\ 0 & \text{für } c \leq y \leq a \, , \end{cases}$$

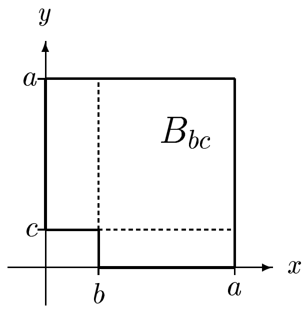


Abbildung 28.6

so ist $f(x,y)$ stetig auf B_{bc} und es ist:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{bc}}\!\!\int f(x,y)\,dF &= \int_{x=0}^{a}\int_{y=\varphi(x)}^{a} f(x,y)\,dydx = \\
&= \int_{x=0}^{b}\left(\int_{y=c}^{a}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx + \int_{x=b}^{a}\left(\int_{y=0}^{a}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx = \\
&= \int_{x=0}^{b}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=c}^{a} dx + \int_{x=b}^{a}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{a} dx = \\
&= a\cdot\int_0^b \frac{dx}{x^2+a^2} - c\cdot\int_0^b \frac{dx}{x^2+c^2} + a\cdot\int_b^c \frac{dx}{x^2+a^2} = a\cdot\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} - c\cdot\int_0^b \frac{dx}{x^2+c^2} = \\
&= a\cdot\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_{x=0}^{a} - c\cdot\left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_{x=0}^{b} = \\
&= \arctan 1 - \arctan\frac{b}{c} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{b}{c} \, .
\end{aligned}
$$

Zum selben Ergebnis kommt man auch mit geänderter Integrationsreihenfolge:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{bc}}\!\!\int f(x,y)\,dF &= \int_{y=0}^{a}\int_{x=\psi(y)}^{a} f(x,y)\,dxdy = \\
&= \int_{y=0}^{c}\left(\int_{x=b}^{a}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy + \int_{y=c}^{a}\left(\int_{x=0}^{a}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = \\
&= -\int_{y=0}^{c}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=b}^{a} dy - \int_{y=c}^{a}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{a} dy = \\
&= -a\cdot\int_0^c \frac{dy}{a^2+y^2} + b\cdot\int_0^c \frac{dy}{b^2+y^2} - a\cdot\int_c^a \frac{dy}{a^2+y^2} = b\cdot\int_0^c \frac{dy}{b^2+y^2} - a\cdot\int_0^a \frac{dy}{a^2+y^2} =
\end{aligned}
$$

$$= b \cdot \left[\frac{1}{b}\arctan\frac{y}{b}\right]_{y=0}^{c} - a \cdot \left[\frac{1}{a}\arctan\frac{y}{a}\right]_{y=0}^{a} = \arctan\frac{c}{b} - \arctan 1 =$$

$$= \arctan\frac{c}{b} - \frac{\pi}{4} \overset{\text{s.1.4}}{=} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{b}{c}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{b}{c}\ .$$

Da der Grenzwert $\lim\limits_{(b,c)\to(0+,0+)} \arctan\frac{b}{c}$ (wesentlich) nicht existiert, kann auch das Bereichsintegral $\iint_B f(x,y)\,dF = \lim\limits_{(b,c)\to(0+,0+)} \iint_{B_{bc}} f(x,y)\,dF$ nicht existieren!

28.9 Jedes ebene Bereichsintegral $\iint_B f(x,y)\,dF$ *kann* (muss nicht!) als **Volumen** V (mit Vorzeichen) des Körpers K interpretiert werden, der zylinderartig zwischen dem in der x,y–Ebene gelegenen "Boden"–Bereich B und der "Dach"–Fläche $z = f(x,y)$ eingeschlossen ist.

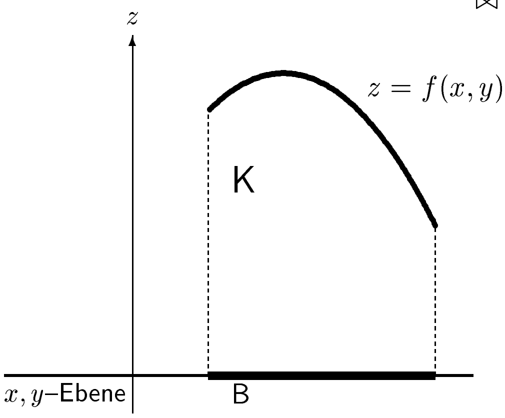


Abbildung 28.7

Zum Beispiel:

4. Die obere Halbkugelschale um $(0,0,0)$ vom Radius R hat die Gleichung:
$z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}\ .$

Mit dem in der x,y–Ebene $z = 0$ gelegenen Kreis–Bereich
$B\ :\ -R \le x \le R\ ,\ -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$
ergibt sich als Volumen dieser Halbkugel:

$$\begin{aligned}
V &= \iint_B f(x,y)\,dF = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dy dx = \left[\text{mit } a := \sqrt{R^2-x^2}\right] \\
&= \int_{-R}^{R}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left[y\sqrt{a^2-y^2} + a^2 \arcsin\frac{y}{a}\right]_{y=-a}^{a} dx = \\
&= \int_{-R}^{R} a^2 \arcsin 1\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{R} (R^2-x^2)\,dx = \\
&= \frac{\pi}{2}\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{R=-R}^{R} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3\ .
\end{aligned}$$

(Wesentlich bequemer lässt sich dieses Integral mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnen! :
siehe in der nächsten Lektion das 4.Beispiel von Abschnitt 29.C .)

28.E Rechenregeln und Eigenschaften ebener Bereichsintegrale.

(1) $\iint_B \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dF = \iint_B f(x,y)\,dF \;+\; \iint_B g(x,y)\,dF\;.$

(2) $\int_B$

$!intc \cdot f(x,y)\,dF \;=\; c\cdot \iint_B f(x,y)\,dF\;.$ (c konstant)

(3) Ist B eine Nullmenge (Flächeninhalt von B gleich Null), so ist $\iint_B f(x,y)\,dF \;=0\;.$

(4) Ist $B=B_1\cup B_2$ und $B_1\cap B_2$ eine Nullmenge, so ist

$$\iint_B f(x,y)\,dF \;=\; \iint_{B_1} f(x,y)\,dF + \iint_{B_2} f(x,y)\,dF\;.$$

(5) Ist $f(x,y)=0$ f.ü. auf B, so ist $\int_B$

$!intf(x,y)\,dF \;=\; 0\;.$

(6) Ist $f(x,y)\geq 0$ f.ü. auf B, so ist $\iint_B f(x,y)\,dF \;\geq\; 0\;.$

(7) Ist $m\leq f(x,y)\leq M$ f.ü. auf B und hat B den Flächeninhalt F, so ist

$$m\cdot F\leq \iint_B f(x,y)\,dF\leq M\cdot F\;.$$

(8) Mittelwertsatz:

Ist B zusammenhängend und hat den Flächeninhalt F,

ist $f(x,y)$ **stetig** auf B und gibt es ein $c>0$ so, daß $|f(x,y)|\leq c$ auf B,

so gibt es einen inneren Punkt $(x_0\,,\,y_0\,)\in B$ so, daß

$$\iint_B f(x,y)\,dF \;=\; f(x_0\,,\,y_0)\cdot F\;.$$

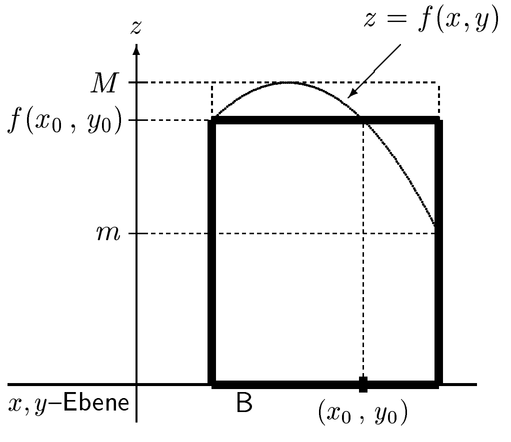


Abbildung 28.8 Zum Mittelwertsatz

28.F Räumliche Bereichsintegrale.

28.10

Sei B ein 3–dimensionaler Bereich, der z.B. in der Form

$B \, : \, a \leq x \leq b \, , \, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \, , \, \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)$

gegeben ist, und sei $f(x,y,z)$ eine auf B (einschließlich Oberfläche!) **stetige** Funktion.

Das **Bereichsintegral** von f über B ist:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV \;=\; \iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz \;=$$

$$= \int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{z=\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx \;.$$

$\Big($Beachte die Integrationsreihenfolge im letzten Integral!$\Big)$

Bemerkungen:

(a) dV ist das **Volumenelement** auf B; die Bezeichnung $dV = dxdydz$ wird verwendet, wenn der Bereich B in cartesischen Koordinaten x, y, z dargestellt ist.

(b) Wie schon bei ebenen Bereichsintegralen ist auch hier die **Stetigkeit** von $f(x,y,z)$ auf ganz B — *einschließlich* Oberfläche! — wesentlich! (vgl. mit dem 3. Beispiel in Abschnitt D .)

(c) Durch die *symbolische* Schreibweise $\iiint_B f(x,y,z)\,dV$ bzw.

$\iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz$ wird zum Ausdruck gebracht, dass die "Größen"

$f(x,y,z)\,dV$ bzw. $f(x,y,z)\,dxdydz$ "aufzusummieren" sind.

(d) Mit: $\displaystyle\iiint f(x,y,z)\,dV \;=\; \int_{x=a}^{b} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{z=\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$

wird das 3–dimensionale Bereichsintegral auf ein Dreifachintegral zurückgeführt, das in der üblichen Weise — von innen nach außen — ausgewertet werden kann:

ist $\displaystyle\Psi(x,y) := \int_{z=\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ und $\displaystyle\Phi(x,y) := \int_{y=ph_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Psi(x,y)\,dy$, so ist

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{z=\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx \;=$$

$$= \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Psi(x,y)\,dy \right) dx = \int_{x=a}^{b} \Phi(x)\,dx \;.$$

(e) Ist insbesondere $f(x,y,z) = 1$ (konstant), so ergibt sich das
Volumen V des Bereiches B:

28.11

$$V = \iiint_B dV = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{z=\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz dy dx =$$
$$= \int_{x=a}^{b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \big(\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)\big)\, dy dx \,.$$

(V ist also gleich der Differenz der Volumina der beiden Körper, die zylinderartig zwischen dem Grundbereich $B_0 \,:\, a \le x \le b \,,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ und den Flächen $z = \psi_2(x,y)$ und $z = \psi_1(x,y)$ eingeschlossen sind.)

28.12

Für räumliche Bereichsintegrale gelten sinngemäß (mit "Volumen" statt "Flächeninhalt") dieselben **Rechenregeln** wie im letzten Abschnitt 28.E.

Der folgende **Sonderfall** ist manchmal recht nützlich:

28.13

Hat die Funktion $f(u,v,w)$ die spezielle Form: $f(u,v,w) = f_1(u)f_2(v)f_3(w)$
und sind die Integrationsgrenzen konstant:
$B \,:\, a_1 \le u \le b_1 \,,\ a_2 \le v \le b_2 \,,\ a_3 \le w \le b_3 \,,$

so zerfällt das Bereichsintegral $\iiint_B f(u,v,w)\, dV$ in ein Produkt aus drei Einfach–Integralen:

$$\iiint_B f(u,v,w)\, dV = \int_{u=a_1}^{b_1} \int_{v=a_2}^{b_2} \int_{w=a_3}^{b_3} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\, dw dv du =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} f_1(u)\, du \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(v)\, dv \cdot \int_{a_3}^{b_3} f_3(w)\, dw \,.$$

29 Substitutionsregel für Bereichsintegrale.

Stichpunkte: Substitutionsregel für ebene und räumliche Bereichsintegrale, Funktionaldeterminanten für die gängigen Koordinatentransformationen: ebene und räumliche Polarkoordinaten, Ellipsen- und Ellipsoidkoordinaten, Zylinderkoordinaten; einige Beispiele, Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment, die Guldinschen Regeln; Gauß'scher Integralsatz der Ebene.

29.A Allgemeine Substitutionsregel.

Manche Bereichsintegrale lassen sich mit cartesischen Koordinaten nur recht holprig beschreiben und auswerten (siehe z.B. in der letzten Lektion die Beispiele 2 und 4 aus Abschnitt 28.D). In diesem Fall empfiehlt es sich, geeignete andere Koordinaten einzuführen, also eine Koordinatentransformation vorzunehmen: (Wir erläutern hier — wegen der besseren Anschaulichkeit — nur den 2–dimensionalen Fall; bei höherdimensionalen Bereichen kann man völlig analog argumentieren!)

Sei B_{uv} ein ("schöner") Bereich in der u,v–Ebene,
B der gegebene ("weniger schöne") Bereich in der x,y–Ebene und

$$\boxed{\gamma \,:\, B_{uv} \to B \,:\, (u,v) \mapsto \big(x(u,v)\,,\, y(u,v)\big)}$$

eine **Koordinatentransformation** mit stetig differenzierbaren Komponenten $x(u,v)$, $y(u,v)$, welche die Punkte $(u,v) \in B_{uv}$ eineindeutig den Punkten $(x,y) \in B$ zuordnet:

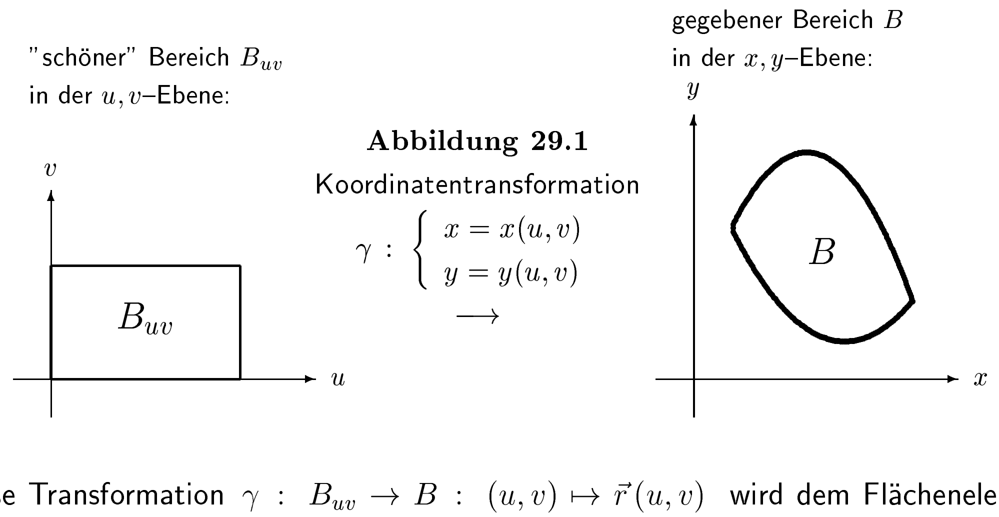


Abbildung 29.1
Koordinatentransformation

$$\gamma \,:\, \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \longrightarrow$$

Durch diese Transformation $\gamma \,:\, B_{uv} \to B \,:\, (u,v) \mapsto \vec{r}\,(u,v)$ wird dem Flächenelement $dudv$ auf B_{uv} das Flächenelement dF auf B zugeordnet, das von den Vektoren:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,du \;\;(\,v \text{ konstant, } u \to u + du\,) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,dv \;\;(\,u \text{ konstant, } v \to v + dv\,)$$

aufgespannt wird.

Da im $\mathbb{R}^2$ das von zwei Vektoren $\vec{a}\,,\ \vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm den absoluten Flächeninhalt $|\det(\vec{a}\,,\ \vec{b})|$ hat (**Betrag** der Determinante!), ergibt sich:

$dF = \left|\det\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,du\ ,\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\,dv\right)\right| = \left|\det\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\ ,\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\right|\,du\,dv$ mit der **Funktionaldeterminante** der Transformation γ :

29.1 Die **Funktionaldeterminante** einer Koordinatentransformation
$\gamma:\ x_1 = x_1(u_1,\ldots,u_n)\,,\ \ldots\,,\ x_n = x_n(u_1,\ldots,x_n)$
ist die Determinante $\dfrac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$.

29.2 Für Funktionaldeterminante einer 1-1 Koordinatentransformation hat man:
$\dfrac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}\cdot\dfrac{\partial(u_1,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = 1\,.$

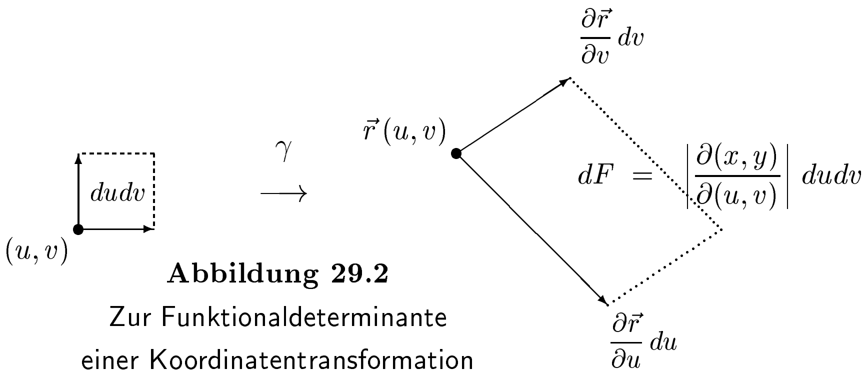


Abbildung 29.2
Zur Funktionaldeterminante
einer Koordinatentransformation

Wir erhalten die **Substitutionsregel für ebene Bereichsintegrale:**

29.3 Das **Flächenelement** eines ebenen Bereiches
$B\ :\ x = x(u,v)\,,\ y = y(u,v)$ für $(u,v)\in B_{uv}$
mit eineindeutigen und stetig differenzierbaren Funktionen $x(u,v)\,,\ y(u,v)$ ist:

$$\boxed{dF = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv}$$

mit dem **Betrag der Funktionaldeterminante** $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

29.4

Das **Bereichsintegral** über B einer auf B stetigen Funktion $f(x,y)$ ist:

$$\boxed{\int\!\!\int_B f(x,y)\,dF = \int\!\!\int_{B_{uv}} \tilde{f}(u,v)\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv},$$

wobei $\tilde{f}(u,v) := f\left(x(u,v)\,,\,y(u,v)\right)$.

Entsprechend wie im zweidimensionalen Fall wird bei der Variablensubstitution für einen **räumlichen Bereich** B:

$\gamma\,:\,B_{uvw}\to B\,:\,(u,v,w)\mapsto\vec{r}\,(u,v,w) = \left(x(u,v,w)\,,\,y(u,v,w)\,,\,z(u,v,w)\right)$

das Volumenelement $dudvdw$ des Bereiches B_{uvw} übergeführt in das (absolute!) Volumen dV des von den drei Vektoren $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}du\,,\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv\,,\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial w}dw$ aufgespannten Parallelflachs.

Da im $\mathbb{R}^3$ das von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannte Parallelflach das absolute Volumen $|\det(\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c})|$ hat (mit dem **Betrag** der Determinante!), ist

$$dV = \left|\det\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du\,,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv\,,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}dw\right)\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\,dudvdw\,.$$

Damit ergibt sich — völlig analog zum ebenen Fall — die **Substitutionsregel für räumliche Bereiche:**

29.5

Das **Volumenelement** eines räumlichen Bereiches
$B\,:\,x = x(u,v,w)\,,\ y = y(u,v,w)\,,\ z = z(u,v,w)$ mit $(u,v,w)\in B_{uvw}$
mit eineindeutigen, stetig–differenzierbaren Funktionen
$x(u,v,w)\,,\ y(u,v,w)\,,\ z(u,v,w)$ ist:

$$\boxed{dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\,dudvdw}$$

mit dem **Betrag** der Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$.

29.6 Das **Bereichsintegral** über B einer auf B stetigen Funktion $f(x,y,z)$ ist

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_{B_{uvw}} \tilde{f}(u,v,w)\cdot\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw},$$

wobei $\tilde{f}(u,v,w) := f\Big(x(u,v,w)\,,\, y(u,v,w)\,,\, z(u,v,w)\Big)$.

Für die Funktionaldeterminante gilt noch: $\boxed{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\cdot\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 1}$.

29.B Gängige Koordinatentransformationen.

Die beiden neben *ebenen cartesischen* Koordinaten (x,y) gebräuchlichsten ebenen Koordinaten sind **ebene Polarkoordinaten** und **ebene Ellipsen–Koordinaten**: (s. Lektion 7)

29.7 **Ebene Polarkoordinaten** $\boxed{x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi}$ mit der zugehörigen Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\ .$$

29.8 **Substitutionsregel für ebene Polarkoordinaten:**

Ein mit ebenen Polarkoordinaten $(r\,,\,\varphi)$ dargestellter Bereich
$B\ :\ x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi\,,\ y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$ mit
$(r,\varphi)\in B_{r\varphi}\ :\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\,,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$ hat das Flächenelement

$\boxed{dF = r\,drd\varphi}$ und für eine auf B stetige Funktion $f(x,y)$ ist

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dF = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \tilde{f}(r,\varphi)\cdot r\,drd\varphi},$$

wobei $\tilde{f}(r,\varphi) := f\Big(x(r,\varphi)\,,\, y(r,\varphi)\Big)$.

29.9

Ebene Ellipsen–Koordinaten $\boxed{x = a\,t\cos\varphi\,,\ y = b\,t\sin\varphi}$

mit der zugehörigen Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\,t\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\,t\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\,t\cos^2\varphi + ab\,t\sin^2\varphi = ab\,t\ .$$

29.10

Substitutionsregel für ebene Ellipsen–Koordinaten:

Ein mit ebenen Ellipsen–Koordinaten: $x = a\,t\cos\varphi\,,\ y = b\,t\sin\varphi$
dargestellter Bereich $B\ :\ x = x(t,\varphi) = a\,t\cos\varphi\,,\ y = y(t,\varphi) = b\,t\sin\varphi$
mit $(t,\varphi) \in B_{t\varphi}\ :\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\,,\ t_1(\varphi) \le t \le t_2(\varphi)$ hat das Flächenelement

$\boxed{dF = ab\cdot t\,dtd\varphi}$ und für eine auf B stetige funktion $f(x,y)$ ist

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dF = ab\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{t_1(\varphi)}^{t_2(\varphi)} \tilde{f}(t,\varphi)\cdot t\,dtd\varphi}\ ,$$

wobei $\tilde{f}(t,\varphi) := f\Big(x(t,\varphi)\,,\ y(t,\varphi)\Big)$.

Die drei neben *räumlichen cartesischen* Koordinaten (x,y,z) gebräuchlichsten räumlichen Koordinaten sind **Zylinderkoordinaten**, **räumliche Polarkoordinaten** und **räumliche Ellipsoid–Koordinaten** (siehe Lektion 7):

29.11

Zylinderkoordinaten $\boxed{x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,,\ z = z}$ oder

$\boxed{y = r\cos\varphi\,,\ z = r\sin\varphi\,,\ x = x}$ oder $\boxed{z = r\cos\varphi\,,\ x = r\sin\varphi\,,\ y = y}$.

Die zugehörigen Funktionaldeterminanten haben jeweils den Wert r:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \frac{\partial(y,z,x)}{\partial(r,\varphi,x)} = \frac{\partial(z,x,y)}{\partial(r,\varphi,y)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\ .$$

Substitutionsregel für Zylinderkoordinaten:

($f(x,y,z)$ sei eine auf dem Bereich B stetige Funktion.)

(1) Ein mit **Zylinderkoordinaten** (r,φ,z) dargestellter Bereich

$B \,:\, x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi\,,\ y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi\,,\ z = z$ mit

$(r,\varphi,z) \in B_{r\varphi z} \,:\, \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\,,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\,,\ z_1(r,\varphi) \le z \le z_2(r,\varphi)$

hat das **Volumenelement**: $\boxed{dV = r \cdot dr\, d\varphi\, dz}$ und es ist

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \int_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} \tilde{f}(r,\varphi,z) \cdot r\,dz\,dr\,d\varphi}\ ,$$

wobei $\tilde{f}(r,\varphi,z) = f\left(x(r,\varphi)\,,\ y(r,\varphi)\,,\ z\right)$;

29.12 (2) ein mit **Zylinderkoordinaten** (r,φ,x) dargestellter Bereich

$B \,:\, y = y(r,\varphi) = r\cos\varphi\,,\ z = z(r,\varphi) = r\sin\varphi\,,\ x = x$ mit

$(r,\varphi,x) \in B_{r\varphi x} \,:\, \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\,,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\,,\ x_1(r,\varphi) \le x \le x_2(r,\varphi)$

hat das **Volumenelement**: $\boxed{dV = r \cdot dr\, d\varphi\, dx}$ und es ist

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \int_{x_1(r,\varphi)}^{x_2(r,\varphi)} \tilde{f}(r,\varphi,x) \cdot r\,dx\,dr\,d\varphi}\ ,$$

wobei $\tilde{f}(r,\varphi,x) = f\left(x\,,\ y(r,\varphi)\,,\ z(r,\varphi)\right)$;

(3) ein mit **Zylinderkoordinaten** (r,φ,y) dargestellter Bereich

$B \,:\, z = z(r,\varphi) = r\cos\varphi\,,\ x = x(r,\varphi) = r\sin\varphi\,,\ y = y$ mit

$(r,\varphi,y) \in B_{r\varphi y} \,:\, \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\,,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\,,\ y_1(r,\varphi) \le y \le y_2(r,\varphi)$

hat das **Volumenelement**: $\boxed{dV = r \cdot dr\, d\varphi\, dy}$ und es ist

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \int_{y_1(r,\varphi)}^{y_2(r,\varphi)} \tilde{f}(r,\varphi,y) \cdot r\,dy\,dr\,d\varphi}\ ,$$

wobei $\tilde{f}(r,\varphi,y) = f\left(x(r,\varphi)\,,\ y\,,\ z(r,\varphi)\right)$.

29.13

Räumliche Polarkoordinaten

$$\boxed{x = r\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta\,,\ z = r\cos\vartheta}\,.$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante hat den Wert:

$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = -r^2\sin\vartheta$ mit dem Betrag: $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}\right| = r^2\sin\vartheta$,

denn: $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos^2\vartheta - r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos^2\vartheta - r^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta =$$

$$= -r^2\Big(\sin^3\vartheta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sin\vartheta\cos^2\vartheta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\Big) =$$

$$= -r^2\Big(\sin^3\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta\Big) = -r^2\sin\vartheta\Big(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\Big) = -r^2\sin\vartheta\ ;$$

und da man für ϑ die maximalen Grenzen $0 \le \vartheta \le \pi$ hat und in diesem Bereich $\sin\vartheta \ge 0$ ist, ergibt sich: $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}\right| = \left| -r^2\sin\vartheta \right| = r^2\sin\vartheta$. ∎

29.14

Substitutionsregel für räumliche Polarkoordinaten:

Ein mit räumlichen Polarkoordinaten (r,φ,ϑ) dargestellter Bereich

$B\ :\ x = x(r,\varphi,\vartheta) = r\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ y = y(r,\varphi,\vartheta) = r\sin\varphi\sin\vartheta\,,$

$z = z(r,\vartheta) = r\cos\vartheta$ mit

$(r,\varphi,\vartheta) \in B_{r\varphi\vartheta}\ :\ \vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2\ ,\ \varphi_1(\vartheta) \le \varphi \le \varphi_2(\vartheta)\ ,\ r_1(\varphi,\vartheta) \le r \le r_2(\varphi,\vartheta)$,

hat das Volumenelement: $\boxed{dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta}$

und für eine auf B stetige Funktion $f(x,y,z)$ ist

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{\varphi_1(\vartheta)}^{\varphi_2(\vartheta)}\int_{r_1(\varphi,\vartheta)}^{r_2(\varphi,\vartheta)} \tilde f(r,\varphi,\vartheta)\cdot r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta}\ ,$$

wobei $\tilde f(r,\varphi,\vartheta) := f\Big(x(r,\varphi,\vartheta)\,,\ y(r,\varphi,\vartheta)\,,\ z(r,\vartheta)\Big)$.

29.15

Räumliche Ellipsoid–Koordinaten $(t\,,\,\varphi\,,\,\vartheta)$:

$\boxed{x = at\,\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ y = bt\,\sin\varphi\sin\vartheta\,,\ z = ct\,\cos\vartheta}$.

(= *verallgemeinerte* oder *modifizierte* räumliche Polarkoordinaten)

Die zugehörige Funktionaldeterminante ist:
$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\varphi,\vartheta)} = -abc\cdot t^2\,\sin\vartheta$ mit dem Betrag: $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\varphi,\vartheta)}\right| = abc\cdot t^2\,\sin\vartheta$;

denn: man kann die zugehörige Funktionaldeterminante mit Hilfe der Funktionaldeterminante für räumliche Polarkoordinaten (s.o.) erhalten:

es ist: $\dfrac{x}{a} = t\,\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ \dfrac{y}{b} = t\,\sin\varphi\sin\vartheta\,,\ \dfrac{z}{c} = t\,\cos\vartheta$, folglich:

$\dfrac{\partial\left(\frac{x}{a}\,,\,\frac{y}{b}\,,\,\frac{z}{c}\right)}{\partial(t,\varphi,\vartheta)} = -t^2\,\sin\vartheta$; andererseits ist: $\dfrac{\partial\left(\frac{x}{a}\,,\,\frac{y}{b}\,,\,\frac{z}{c}\right)}{\partial(t,\varphi,\vartheta)} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\varphi,\vartheta)}$,

denn aus den drei Spalten der Funktionaldeterminante kann man jeweils die Faktoren

$\dfrac{1}{a}$ bzw. $\dfrac{1}{b}$ bzw. $\dfrac{1}{c}$ herausziehen. Damit ist $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\varphi,\vartheta)} = -abc\cdot t^2\,\sin\vartheta$,

und da wieder $\sin\vartheta \geq 0$ für $0 \leq \vartheta \leq \pi$, hat man:

$$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\varphi,\vartheta)}\right| = \left|-abc\cdot t^2\,\sin\vartheta\right| = abc\cdot t^2\,\sin\vartheta$$ ∎

29.16

Substitutionsregel für räumliche Ellipsoid–Koordinaten:

Ein mit räumlichen Ellipsoid–Koordinaten

$\boxed{x = at\,\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ y = bt\,\sin\varphi\sin\vartheta\,,\ z = ct\,\cos\vartheta}$ dargestellter Bereich

$B\ :\ x = x(t,\varphi,\vartheta) = at\cdot\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ y = y(t,\varphi,\vartheta) = bt\cdot\sin\varphi\sin\vartheta\,,$
$z = z(t,\vartheta) = ct\cdot\cos\vartheta$ mit
$(t,\varphi,\vartheta)\in B_{t\varphi\vartheta}\ :\ \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2\,,\ \varphi_1(\vartheta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\vartheta)\,,\ t_1(\varphi,\vartheta) \leq t \leq t_2(\varphi,\vartheta)$,

hat das Volumenelement $\boxed{dV = abc\cdot t^2\sin\vartheta}$

und für eine auf B stetige Funktion $f(x,y,z)$ ist

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = abc\cdot\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{\varphi_1(\vartheta)}^{\varphi_2(\vartheta)}\int_{t_1(\varphi,\vartheta)}^{t_2(\varphi,\vartheta)} \tilde{f}(t,\varphi,\vartheta)\cdot t^2\sin\vartheta\,dt\,d\varphi\,d\vartheta} ,$$

wobei $\tilde{f}(t,\varphi,\vartheta) := f\Big(x(t,\varphi,\vartheta)\,,\,y(t,\varphi,\vartheta)\,,\,z(t,\vartheta)\Big)$.

29.C Einige Beispiele.

1. (s. Beispiel 2 in Abschnitt 28.D): Ladung Q einer kreisförmigen Platte $B \,:\, x^2+y^2 \leq R^2$ mit der Ladungsdichte $\sigma(x,y) = x^2+y^2$:

Bei Verwendung von ebenen Polarkoordinaten ergibt sich für B die Darstellung
$B \,:\, x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi\,,\ 0 \leq r \leq R\,;$
mit: $dF = r\,dr d\varphi$ und $\sigma = r^2$ folgt:

$$Q = \iint_B \sigma\, dF = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \cdot r\, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R r^3\, dr = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} R^4 \,.$$

2. Obwohl zur Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ keine Stammfunktion angegeben werden kann, ist es — mit einem kleinen Trick — dennoch möglich, das **Fehlerintegral** $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ auszurechnen: es ist $I > 0$ und

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-y^2}\, dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dF \,.$$

Stellt man die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit ebenen Polarkoordinaten dar:
$\mathbb{R}^2 \,:\, x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi\,,\ 0 \leq r < \infty$, so ergibt sich:

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} r\, e^{-r^2}\, dr = 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2}\, e^{-r^2} \right]_{r=0}^{\infty} = \pi \,,$$

wegen $I > 0$ also $I = \sqrt{\pi}$, d.h.: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}}$.

3. Zur Berechnung des Integrals $\iint_B y^2\, dF$ über der rechten Ellipsenhälfte $B \,:\, \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \leq 1\,,\ x \geq 0$ bieten sich die Ellipsen–Koordinaten $x = 2t\,\cos\varphi\,,\ y = 5t\,\sin\varphi$ mit den Grenzen $B \,:\, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq t \leq 1$ an:

$$\iint_B y^2\, dF = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 25t^2 \sin^2\varphi \cdot 10t\, dt\, d\varphi = \quad \text{(siehe Nummer 28.13)}$$

$$= 250 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^1 t^3\, dt = 125 \left[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} = 31.25\pi \,.$$

4. (siehe in Lektion 12 das Beispiel zu Nummer 12.4.)

Das Rotationsparaboloid
$B \,:\, x = r\cos\varphi\,,\; y = r\sin\varphi\,,\; z = z$ mit
$0 \le \varphi \le 2\pi\,,\; 0 \le r \le R\,,\; 0 \le z \le H\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$
hat das Volumen:

$$V = \iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{H(1-r^2/R^2)} r\,dz\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \left(r\int_0^{H(1-r^2/R^2)} dz\right) dr =$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^R rH\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) dr = 2\pi H\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\pi R^2 H \quad \left(= \frac{1}{2}\cdot \text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}\right)\;.$$

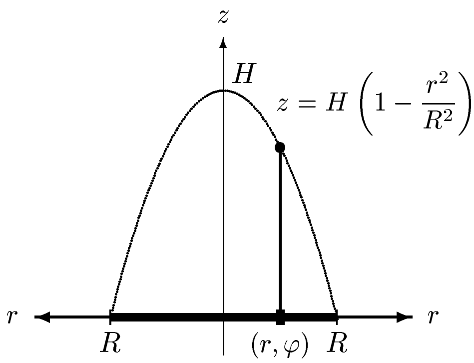


Abbildung 29.3 Rotationsparaboloid

5. Volumen einer Halbkugel B vom Radius R: (vgl. mit dem 4.Beispiel in Abschnitt 28.D !)

mit $B \,:\, x = r\cos\varphi\sin\vartheta\,,\; y = r\sin\varphi\sin\vartheta\,,\; z = r\cos\vartheta$,
wobei $0 \le \varphi \le 2\pi\,,\; 0 \le r \le R\,,\; 0 \le \vartheta \le \dfrac{\pi}{2}$, ist $dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$ und somit:

$$V = \iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^R r^2\,dr = 2\pi\cdot\Big[-\cos\vartheta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}\,\pi R^3\;.$$

6. Es soll das Volumen des Körpers B bestimmt werden, den der Kegel $K \,:\, \sqrt{y^2+z^2} \le x \le 2$ aus dem Ellipsoid $E \,:\, 4x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ herausschneidet:

Zur Beschreibung von B kann man räumliche elliptische Koordinaten (t,φ,ϑ) — mit den Halbachsenlängen $a = 1\,,\; b = c = 2$ und mit $\vartheta = 0$ in positiver x–Richtung — oder auch Zylinderkoordinaten (r,φ,x) verwenden (da das Ellipsoid rotationssymmetrisch bzgl. der x–Achse ist).

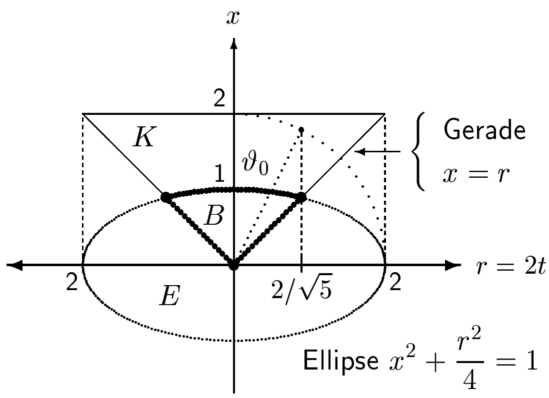
Bei Verwendung von **Ellipsoid–Koordinaten** ist:

$$B: \quad y = 2t\,\cos\varphi\sin\vartheta\,, \quad z = 2t\,\sin\varphi\sin\vartheta\,, \quad x = t\,\cos\vartheta$$

mit $0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le t \le 1\,,$
$0 \le \vartheta \le \vartheta_0$ (! s. Skizze),

und bei Verwendung von **Zylinderkoordinaten** hat man:

$B\ :\ y = r\cos\varphi\,,\ z = r\sin\varphi\,,\ x = x$
mit $0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le r \le 2/\sqrt{5}\,,$
$r \le x \le \sqrt{1 - r^2/4}$ (! s. Skizze).



$$r = \sqrt{1 - r^2/4} \Rightarrow r = 2/\sqrt{5}\,,$$
$$\sin\vartheta_0 = \frac{2/\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$
$$\cos\vartheta_0 = \sqrt{1 - 1/5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Abbildung 29.4 Kegelförmiger Ausschnitt aus einem Ellipsoid

Mit **Ellipsoid–Koordinaten** ist $dV = 4t^2\sin\vartheta\,dt\,d\vartheta\,d\varphi$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B dV = 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\vartheta_0}\int_0^1 t^2\sin\vartheta\,dt\,d\vartheta\,d\varphi = \\ &= 4\cdot 2\pi\cdot\Big[-\cos\vartheta\Big]_0^{\vartheta_0}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}\,\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.2815\,\pi\,; \end{aligned}$$

mit **Zylinderkoordinaten** ist $dV = r\,dx\,dr\,d\varphi$ und man erhält:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2/\sqrt{5}}\int_0^{\sqrt{1-r^2/4}} r\,dx\,dr\,d\varphi = \\ &= 2\pi\int_0^{2/\sqrt{5}} r\left(\sqrt{1 - r^2/4} - r\right)\,dr = \\ &= 2\pi\int_0^{2/\sqrt{5}} r\sqrt{1 - r^2/4}\,dr\ - 2\pi\int_0^{2/\sqrt{5}} r^2\,dr\,; \end{aligned}$$

(das erste der beiden letzten Integrale kann man z.B. mit der Substitution $u = 1 - r^2/4$ lösen: $\Rightarrow r\,dr = -2\,du\,,\ 1 \ge u \ge 4/5$) es ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\cdot 2\int_{4/5}^1 \sqrt{u}\,du\ - 2\pi\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 = 4\pi\cdot\frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_{4/5}^1 - \frac{2}{3}\,\pi\cdot\frac{8}{5\sqrt{5}} = \\ &= \frac{8}{3}\,\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.2815\,\pi\,. \end{aligned}$$

29.D Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment.

Ein in ein x, y, z–Koordinatensystem eingebetteter Körper K mit der Dichte $\varrho = \varrho(x, y, z)$ hat:

29.17

die **Masse:** $\boxed{m = \iiint_K \varrho(x, y, z)\, dV}$;

ist die Dichte ϱ konstant, so ist $m = \varrho \iiint_K dV = \varrho \cdot V$.

29.18

den **Massenschwerpunkt** $S(x_s\,,\, y_s\,,\, z_s)$ mit den Koordinaten:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_s = \dfrac{1}{m} \iiint_K x \cdot \varrho(x, y, z)\, dV\ , \quad y_s = \dfrac{1}{m} \iiint_K y \cdot \varrho(x, y, z)\, dV\ , \\ z_s = \dfrac{1}{m} \iiint_K z \cdot \varrho(x, y, z)\, dV \qquad (m = \text{Masse von } K)\,; \end{array}}$$

ist die Dichte ϱ konstant, so lässt sich ϱ jeweils wegkürzen und man erhält den **geometrischen Schwerpunkt** mit den Koordinaten:

$$\boxed{x_s = \frac{1}{V} \iiint_K x\, dV\ , \quad y_s = \frac{1}{V} \iiint_K y\, dV\ , \quad z_s = \frac{1}{V} \iiint_K z\, dV\ .}$$

29.19

das (polare bzw. axiale) **Trägheitsmoment** bzgl. eines Punktes oder einer Achse A:

$\boxed{J_A = \iiint_K r_A^2(x, y, z)\, \varrho(x, y, z)\, dV}$, wobei

$r_A(x, y, z)$ den Abstand des Punktes $(x, y, z) \in K$ zu A bezeichnet.

ist z.B. A der Ursprung $(0, 0, 0)$, so ist $r_A^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ und

$\boxed{J_O = \iiint_K \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, \varrho(x, y, z)\, dV}$ ist das **polare Trägheitsmoment** bzgl. des Koordinatenursprungs;

ist A die z–Achse, so ist $r_A^2(x, y, z) = x^2 + y^2$ und

$\boxed{J_z = \iiint_K \left(x^2 + y^2\right)\, \varrho(x, y, z)\, dV}$ ist das **axiale Trägheitsmoment** bzgl. der z–Achse.

Zum Beispiel:

1. Sei K eine **Halbkugelschale** mit Innenradius R_0 und Außenradius R :

$K\ :\ x = r\,\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ y = r\,\sin\varphi\sin\vartheta\,,\ z = r\,\cos\vartheta$
mit $0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le \vartheta \le \pi/2\,,\ R_0 \le r \le R\,.$

K hat das **Volumen:**
$V = \frac{2}{3}\,\pi R^3 - \frac{2}{3}\,\pi R_0^3 = \frac{2}{3}\,\pi\left(R^3 - R_0^3\right)\,.$

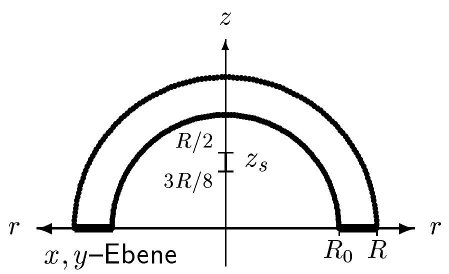


Abbildung 29.5 Halbkugelschale

Der **geometrische Schwerpunkt** liegt aus Symmetriegründen auf der z–Achse (d.h. $x_s = y_s = 0$) und hat die z–Komponente:

$$\begin{aligned} z_s = {} & \frac{1}{V}\iiint_K z\,dV = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{R_0}^{R} r\cos\vartheta\cdot r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \\ = {} & \frac{1}{V}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_{R_0}^{R} r^3\,dr = \frac{2\pi}{V}\left[\frac{1}{2}\,\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{1}{4}\left(R^4 - R_0^4\right) = \\ = {} & \frac{3\,(R^4 - R_0^4)}{8\,(R^3 - R_0^3)} = \frac{3}{8}\left(R + \frac{R_0^3}{R^2 + R_0R + R_0^2}\right) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\,R & \text{für } R_0 \to R \\ \frac{3}{8}\,R & \text{für } R_0 \to 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Der geometrische Schwerpunkt der Halbkugelhülle $(R_0 \to R)$ liegt also bei $z_s = \frac{1}{2}\,R$ und der geometrische Schwerpunkt der ausgefüllten Halbkugel $(R_0 \to 0)$ liegt bei $z_s = \frac{3}{8}\,R$.

Das **Trägheitsmoment** bzgl. der z–Achse ist (bei konstanter Dichte ϱ):

$$\begin{aligned} J_z = {} & \varrho\iiint_K\left(x^2 + y^2\right)\,dV = \varrho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{R_0}^{R} r^2\sin^2\vartheta\cdot r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \\ = {} & \varrho\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_{R_0}^{R} r^4\,dr = 2\pi\varrho\left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\,\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{1}{5}\left(R^5 - R_0^5\right) = \\ = {} & \frac{4\pi}{15}\cdot\varrho\left(R^5 - R_0^5\right)\ . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Schwerpunktformeln von oben lassen sich auch die **geometrischen Schwerpunkte von ebenen Bereichen und von Kurvenbögen** angeben:

Ist K eine (dünne) ebene **"Platte"** der Stärke δ, die auf dem ebenen Bereich B aufliegt:
$K \,:\, (x, y) \in B\,,\ 0 \leq z \leq \delta$,
so hat man auf K das **Volumenelement** $dV = \delta\, dF$ (mit dem Flächenelement dF auf B), K hat das **Volumen** $V = \delta F$ (mit dem Flächeninhalt F von B) und der geometrische Schwerpunkt von K hat die x–, y–Koordinaten:

$$x_s = \frac{1}{V} \iiint_K x\, dV = \frac{\delta}{\delta F} \iint_B x\, dF = \frac{1}{F} \iint_B x\, dF\,,$$

$$y_s = \frac{1}{V} \iiint_K y\, dV = \frac{\delta}{\delta F} \iint_B y\, dF = \frac{1}{F} \iint_B y\, dF\,:$$

29.20

Ein *ebener* Bereich B hat den **geometrischen Schwerpunkt** $S(x_s \,|\, y_s)$ mit:

$$\boxed{x_s = \frac{1}{F} \iint_B x\, dF\,,\ y_s = \frac{1}{F} \iint_B y\, dF \ \text{ mit dem Flächeninhalt } F = \iint_B dF}\,.$$

Beachte, dass F ein *orientierter* Flächeninhalt ist!

Ist K ein (dünner) **"Draht"** längs eines Kurvenbogens C und hat K die Querschnittfläche q, so hat man auf K das **Volumenelement** $dV = q\, ds$ (mit dem Bogenelement ds auf C), K hat das **Volumen** $V = q\, L$ (mit der Bogenlänge L von C) und der geometrische Schwerpunkt von K hat die Koordinaten:

$$x_s = \frac{1}{V} \iiint_K x\, dV = \frac{q}{qL} \int_C x\, ds = \frac{1}{L} \int_C x\, ds\,,$$

$$y_s = \frac{1}{V} \iiint_K y\, dV = \frac{1}{L} \int_C y\, ds\,,\ z_s = \frac{1}{V} \iiint_K z\, dV = \frac{1}{L} \int_C z\, ds\,:$$

29.21

Ein *Kurvenbogen* C hat den **geometrischen Schwerpunkt** $S(x_s \,|\, y_s \,|\, z_s)$ mit:

$$\boxed{x_s = \frac{1}{L} \int_C x\, ds\,,\ y_s = \frac{1}{L} \int_C y\, ds\,,\ z_s = \frac{1}{L} \int_C z\, ds \ \text{ mit } L = \int_C ds}\,.$$

Beachte, dass die Bogenlänge L eine *orientierte* Länge ist!

Zum Beispiel:

2. Der geometrische Schwerpunkt $S(x_s\,|\,y_s)$ der oberen **Halbkreisscheibe:**

$B\;:\;x = r\cos\varphi\,,\;y = r\sin\varphi$ mit $0 \le r \le R\,,\;0 \le \varphi \le \pi$

liegt aus Symmetriegründen auf der y–Achse, d.h.
es ist $x_s = 0$.

Mit dem Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}\pi R^2$ ergibt sich für y_s:

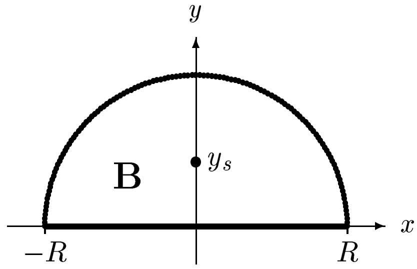


Abbildung 29.6
Schwerpunkt einer Halbkreisscheibe

$$\begin{aligned} y_s = {} & \frac{1}{F}\iint_B y\,dF = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi\int_0^R r\sin\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi = \\ = {} & \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2\,dr\cdot\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3}\cdot\Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi = \frac{4}{3\pi}R \approx 0.4244\,R\,. \end{aligned}$$

3. Der geometrische Schwerpunkt $S(x_s\,|\,y_s)$ des oberen **Halbkreisbogens:**

$C\;:\;x = R\cos\varphi\,,\;y = R\sin\varphi$ mit $0 \le \varphi \le \pi$

liegt aus Symmetriegründen wieder auf der y–Achse, d.h.
es ist $x_s = 0$.

Mit der Halbkreislänge $L = \pi R$ und dem Bogenelement $ds = R\,d\varphi$ ergibt sich für y_s:

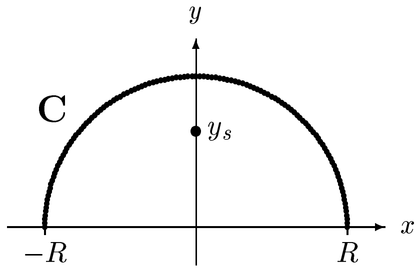


Abbildung 29.7
Schwerpunkt eines Halbkreisbogens

$$y_s = \frac{1}{L}\int_C y\,ds = \frac{R^2}{\pi R}\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = \frac{R}{\pi}\Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi}R \approx 0.6366\,R\,.$$

29.E Guldin'sche Regeln. (*)

Geometrische Schwerpunkte von Kurvenbögen und ebenen Bereichen finden in den beiden **Guldin'schen Regeln** eine einfache Anwendung:

(i) Sei C ein ebener Kurvenbogen der Länge L, der um eine — diesen nicht schneidende — Achse rotiert und sei η der Abstand des geometrischen Schwerpunktes von dieser Achse.

Legt man das Koordinatensystem so, dass die Rotationsachse mit der x–Achse zusammenfällt und der Kurvenbogen in der oberen Halbebene $y \ge 0$ liegt, so ist $\eta = y_s = \frac{1}{L}\int_C y\,ds$ die y–Koordinate des geometrischen Schwerpunktes von C.

Hiermit ergibt sich für den Flächeninhalt M der Manteloberfläche des entstehenden Rotationskörpers (siehe Lektion 25, Abbildung 25.7 und Nummer 25.19):

$M = 2\pi \int_C y\,ds = 2\pi L \cdot \frac{1}{L} \int_C y\,ds = 2\pi L \cdot y_s$. Damit haben wir die

29.22

1. Guldin'sche Regel:

Der Flächeninhalt M der Manteloberfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung eines Kurvenbogens C um eine — diesen nicht schneidende — Achse entsteht, ist gleich dem Produkt $\boxed{M = 2\pi\eta \cdot L}$ aus der Länge L des Kurvenbogens C und der Länge $2\pi\eta$ des Weges, den der geometrische Schwerpunkt von C bei einer Umdrehung um die Rotationsachse beschreibt. (η = Abstand vom Schwerpunkt zur Achse)

(ii) Sei B ein ebener Bereich vom Flächeninhalt F, der um eine — diesen nicht schneidende — Achse rotiert und sei η der Abstand des geometrischen Schwerpunktes von B zu dieser Achse.

Legt man das Koordinatensystem wieder so, dass die Rotationsachse mit der x–Achse zusammenfällt und der Bereich in der oberen Halbebene $y \geq 0$ liegt, so ist $\eta = y_s = \frac{1}{F} \iint_B y\,dF$ die y–Koordinate des geometrischen Schwerpunktes von B.

Für $(x, y) \in B$ und das Flächenelement dF auf B ist $dV = 2\pi y\,dF$ das Volumen des ringförmigen Gebildes, das durch Rotation von dF an der Stelle (x, y) um die x–Achse entsteht.

Hiermit ergibt sich für das Volumen V des gesamten Rotationskörpers, der durch Rotation von B um die x–Achse entsteht:

$V = 2\pi \iint_B y\,dF = 2\pi F \cdot \frac{1}{F} \iint_B y\,dF = 2\pi F \cdot y_s$.

Damit erhalten wir die 2. Guldin'sche Regel:

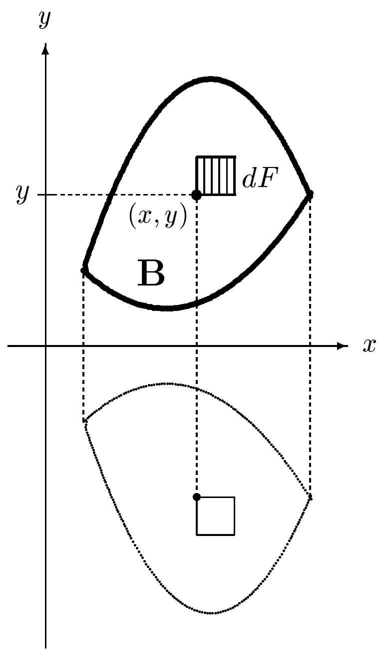


Abbildung 29.8
zur 2.Guldin'schen Regel:
Volumen eines Rotationskörpers

2. Guldin'sche Regel:

Das Volumen V des Rotationskörpers, der durch Drehung eines ebenen Bereiches B um eine — diesen nicht schneidende — Achse entsteht, ist gleich dem Produkt
29.23 $\boxed{V = 2\pi\eta \cdot F}$ aus dem Flächeninhalt F des Bereiches B und der Länge $2\pi\eta$ des Weges, den der geometrische Schwerpunkt von B bei einer Umdrehung um die Rotationsachse beschreibt. (η = Abstand vom Schwerpunkt zur Achse)

Zum Beispiel:

4. Die Oberfläche einer Kugel K vom Radius R kann erzeugt werden durch Rotation des Halbkreisbogens
$C\ :\ x = R\cos\varphi\,,\ y = R\sin\varphi$ mit $0 \le \varphi \le \pi$.
um die x–Achse. C hat die Länge $L = \pi R$ und die y–Koordinate des geometrischen Schwerpunktes von C ist $\eta = y_s = \dfrac{2}{\pi} R$ (s.o. das 3. Beispiel) .

Wir erhalten die **Kugeloberfläche** $O = 2\pi\eta \cdot L = 2\pi \cdot \dfrac{2}{\pi} \cdot \pi R = 4\pi R^2$.

Die (Voll–) Kugel K kannn von der Halbkreisfläche
$B\ :\ x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi$ mit $0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le \pi$
durch Rotation um die x–Achse erzeugt werden. B hat den Flächeninhalt $F = \dfrac{\pi}{2} R^2$ und der geometrische Schwerpunkt von B hat die y–Koordinate $\eta = y_s = \dfrac{4}{3\pi} R$ (s.o. das 2. Beispiel) .

Damit bekommt man das **Kugelvolumen** $V = 2\pi\eta \cdot F = 2\pi \cdot \dfrac{4}{3\pi} R \cdot \dfrac{\pi}{2} R^2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

5. Wenn man die Kreisscheibe $B\ :\ x^2 + (y - R)^2 \le r^2 \quad (0 < r \le R)$ um die x–Achse rotieren lässt, erhält man einen **Torus** ("Schlauchring") vom äußeren (Ring–) Radius R und innerem (Schlauch–) Radius r .
Der geometrische Schwerpunkt sowohl der Kreisscheibe B als auch der Randkurve C liegen im Mittelpunkt von B , haben also die y–Koordinate $\eta = y_s = R$. Mit dem Flächeninhalt $F = \pi r^2$ von B und der Länge $L = 2\pi L$ von C ergibt sich für den Torus:
das **Volumen:** $V = 2\pi\eta \cdot F = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$ und

die **Oberfläche:** $O = 2\pi\eta \cdot L = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 r R$.

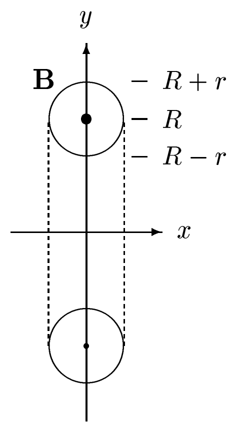


Abbildung 29.9
Torus

29.F Gauß'scher Integralsatz der Ebene. (*)

29.24

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet der Ebene $\mathbb{R}^2$ und das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ sei auf G definiert mit stetigen partiellen Ableitungen.

Für jeden in G gelegenen, *einfach–zusammenhängenden* Bereich B (d.h. B ist *zusammenhängend* und hat *keine Löcher*) mit *doppelpunktfreiem* Rand $C = \partial B$ gilt dann:

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial B} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dF}$$

Das ist der **Gauß'sche Integralsatz der Ebene** (auch: der **Integralsatz von Green**).

Wir wollen den **Beweis** dieses nützlichen Satzes nur grob skizzieren:

I. Zunächst nehmen wir an, dass B ein **konvexer Normalbereich** ist mit den *beiden* Darstellungen: $B : a \le x \le b\,,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ und $B : c \le y \le d\,,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$:

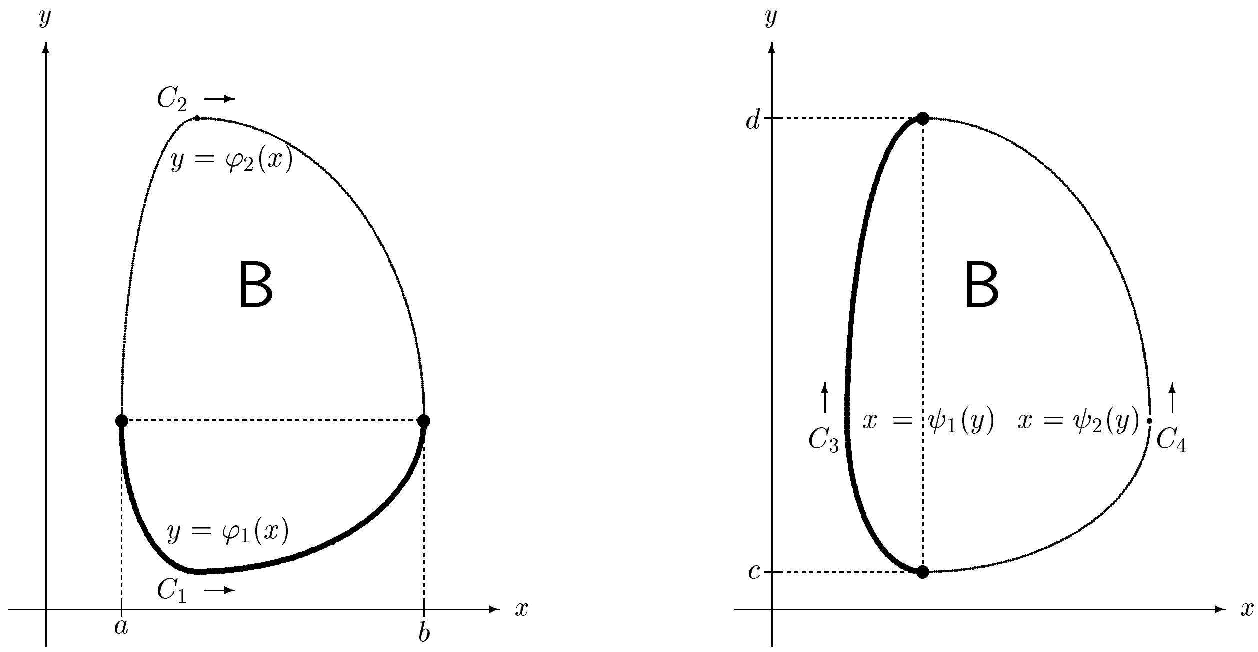


Abbildung 29.10 konvexer Normalbereich

Der Rand C von B hat dann die beiden Darstellungen:

$C = \partial B = C_1 - C_2$ mit $C_1 : y = \varphi_1(x)$, $C_2 : y = \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$ und

$C = \partial B = -C_3 + C_4$ mit $C_3 : y = \psi_1(y)$, $C_4 : y = \psi_2(y)$, $c \le y \le d$. Damit ist:

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF = \iint_B \frac{\partial Q}{\partial x}\, dF - \iint_B \frac{\partial P}{\partial y}\, dF =$$

$$= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx =$$

$$= \int_c^d Q(x,y)\Big|_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy - \int_a^b P(x,y)\Big|_{y=\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dx =$$

$$= \int_c^d \Big(Q\big(\psi_2(y)\,, y\big) - Q\big(\psi_1(y)\,, y\big)\Big)\, dy - \int_a^b \Big(P\big(x, \varphi_2(x)\big) - P\big(x, \varphi_1(x)\big)\Big)\, dx =$$

$$= \int_c^d Q\big(\psi_2(y)\,, y\big)\, dy - \int_c^d Q\big(\psi_1(y)\,, y\big)\, dy - \int_a^b P\big(x, \varphi_2(x)\big)\, dx + \int_a^b P\big(x, \varphi_1(x)\big)\, dx =$$

$$= \int_{C_4} Q(x,y)\, dy - \int_{C_3} Q(x,y)\, dy - \int_{C_2} P(x,y)\, dx + \int_{C_1} P(x,y)\, dx =$$

$$= \int_{C_4 - C_3} Q(x,y)\, dy + \int_{-C_2 + C_1} P(x,y)\, dx = \oint_{\partial B} Q(x,y)\, dy + \oint_{\partial B} P(x,y)\, dx =$$

$$= \oint_{\partial B} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \oint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{r}\,. \qquad \blacksquare$$

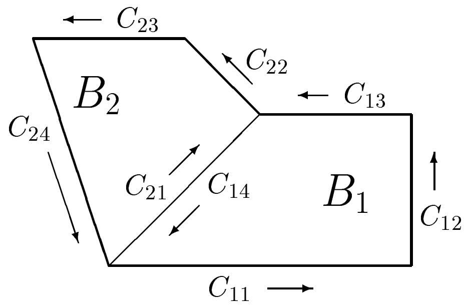
II. Ist $B \subseteq G$ ein "krummer" Bereich, so kann man versuchen, ihn als Summe, d.h. als disjunkte Vereinigung $B = \sum_j B_j = \dot{\bigcup_j} B_j$ von konvexen Normalbereichen B_j darzustellen.

Addiert man dann die Linienintegrale $\oint_{\partial B_j} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ über die Ränder dieser Teilbereiche B_j, so heben sich die Beiträge längs sich berührender Bereiche gegenseitig auf (da sie entgegengesetztes Vorzeichen haben) und man erhält das Linienintegral über den Rand des gesamten Bereiches B:

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF = \iint_{\sum_j B_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF = \sum_j \iint_{B_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF \overset{29.24}{=}$$

$$= \sum_j \oint_{\partial B_j} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

z.B.: Im Fall des skizzierten Bereiches $B = B_1 + B_2$ mit dem Rand $\partial B = C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_{22} + C_{23} + C_{24}$ ergibt sich:



$$\oint\limits_{\partial B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{C_{11}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{12}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{13}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{22}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{23}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{24}} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int\limits_{C_{11}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{12}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{13}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\int\limits_{C_{14}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{21}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{=0\text{ , da } C_{14} = -C_{21}} + \int\limits_{C_{22}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{23}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_{24}} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \oint\limits_{\partial B_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint\limits_{\partial B_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,.$$

Zum Beispiel:

Sei $\vec{F}(x,y) = (2x^2y\,,\,y^2x)$, also $P(x,y) = 2x^2y$, $Q(x,y) = y^2x$, und sei B der erste Quadrant der Kreisfläche mit Mittelpunkt $\mathcal{O}$ vom Radius 1: $B:\, x^2+y^2 \le 1\,,\; x,y \ge 0$. Dann hat man:

(i) $\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF = \iint_B (y^2 - 2x^2)\, dF =$ (mit ebenen Polarkoordinaten)

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \int\limits_{r=0}^{1} r^2(\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} (\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - 2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\Big)\Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} = -\frac{1}{8}\,(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\big|_{\varphi=0}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{16}\,;$$

(ii) $\partial B:\, x = \cos\varphi\,,\, y = \sin\varphi\,,\; 0 \le \varphi \le \pi/2$, somit:

$$\oint\limits_{\partial B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\partial B} 2x^2y\,dx + y^2x\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} \Big(2\cos^2\varphi\sin\varphi\,(-\sin\varphi) + \sin^2\varphi\cos\varphi\,\cos\varphi\Big)\, d\varphi =$$

$$-\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 t\, dt =$$

$$= -\frac{1}{16}\Big(t - \sin t\cos t\Big)\Big|_{t=0}^{\pi} = -\frac{\pi}{16} \overset{\text{s.o.}}{=} \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF$$

Zwei Folgerungen:

1. Im Fall eines *ebenen* geschlossenen Kurvenbogens $C = \partial B$, der ein einfach–zusammenhängendes Gebiet B der Ebene begrenzt, ergibt sich aus dem Gauß'schen Integralsatz der Ebene, dass

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF = 0 \quad \textbf{genau dann}\text{, wenn } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\,,$$

d.h. wenn $\vec{F} = \Big(P(x,y)\,,\,Q(x,y)\Big)$ **konservativ** ist: siehe den **Satz über die Wegunabhängigkeit von Wegintegralen** in Nummer 26.17.

2. Mit dem speziellen Vektorfeld $\vec{F}(x,y) = \Big(-y/2\,,\,x/2\Big)$ ist

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF = \iint_B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dF = \iint_B dF$$

gerade der Flächeninhalt von B:

29.25

Der **Flächeninhalt** eines einfach–zusammenhängenden ebenen Bereiches B ist:

$$\boxed{F = \iint_B dF = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial B} x\,dy - y\,dx}\,.$$

z.B.: (siehe Abbildung 25.2)

Sei B der von der **Kardioide**: $C: r = r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ fest, $0 \le \varphi \le 2\pi$, begrenzte Bereich. Auf C hat man: $\vec{r} = \vec{r}(\varphi) = a(1+\cos\varphi)\Big(\cos\varphi\,,\,\sin\varphi\Big)$ und

$\vec{r}\,'(\varphi) = a\Big(-2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\,,\,-\sin^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi\Big)$.

Damit ergibt sich für B gemäß Nr. 29.25 der Flächeninhalt:

$$F = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \Big(x(\varphi)y'(\varphi) - y(\varphi)x'(\varphi)\Big)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\Big(\cos\varphi(-\sin^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi) + \sin\varphi(2\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi)\Big)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)\Big(-\sin^2\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi + \cos^3\varphi + 2\sin^2\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi\Big)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)\left(\sin^2\varphi\cos\varphi + 1 + \cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\right)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)\,(1+\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\,\pi a^2 :$$

Der von der Kardioide $r = a(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $a > 0$, begrenzte Bereich B hat den Flächeninhalt $F = \frac{3}{2}\,\pi a^2$.

In diesem Beispiel ergibt sich der Flächeninhalt von B allerdings bequemer mit Hilfe der Substitutionsregel für ebene Polarkoordinaten (Nummer 29.8):

Mit der Darstellung: $B:\ x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le r \le r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$, erhält man:

$$F = \iint_B dF = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{a(1+\cos\varphi)} d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi \overset{\text{s.o.}}{=}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\,\pi a^2 .$$

30 Elementare Matrizenrechnung.

Stichpunkte: Bezeichnungen, Klassifikation und Eigenschaften: Nullmatrix, Einheitsmatrix, Diagonal- und Dreiecksmatrizen. Algebraische Operationen: Summe und Vielfache von Matrizen, Matrixprodukte: Zeile mal Spalte, Matrix mal Spalte, Matrix mal Einheitsvektor, Matrix mal Matrix. Reguläre Matrix und Inverse; Transponierte und Adjungierte; hermitesche, schiefhermitesche, unitäre und normale Matrizen.

30.A Bezeichnungen.

30.1

Eine (m,n) –**Matrix** A ist (zunächst) nur ein rechteckiges Zahlenschema:

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{a}_1, \overset{\downarrow}{a}_2, \cdots, \overset{\downarrow}{a}_n \end{pmatrix}$$

mit den **Elementen** (oder **Koeffizienten**) $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$;
der erste Index i ist der **Zeilenindex**, der zweite Index j der **Spaltenindex**;

m ist die **Anzahl der Zeilen**: $i = 1, \ldots, m$,
n ist die **Anzahl der Spalten**: $j = 1, \ldots, n$.

$\vec{a}_i = \left(a_{i1}, \ldots, a_{in}\right)$, $i = 1, \ldots, m$, ist die **i–te Zeile** oder der **i–te Zeilenvektor** und

$\overset{\downarrow}{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, n$, ist die **j–te Spalte** oder der **j–te Spaltenvektor** von A.

30.2

A ist eine **reelle Matrix**, wenn sie *nur reelle* Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ hat; im (allgemeineren) Fall $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist A eine **komplexe Matrix**.

> Im Folgenden werden Matrizen stets stillschweigend als *komplex* vorausgesetzt, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird!

Eine **quadratische Matrix** A hat ebensoviele Zeilen wie Spalten (d.h. $m = n$); in diesem Fall bilden die Koeffizienten $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ die **Hauptdiagonale** von A; die andere Diagonale ist die **Nebendiagonale**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & \ddots & \swarrow & \\ & \swarrow & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nebendiagonale Hauptdiagonale

30.3 Eine **Diagonalmatrix** ist eine *quadratische* Matrix der Form

$$A = \operatorname{diag}\left(a_i\right)_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

bei der *höchstens* die Hauptdiagonalelemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ungleich 0 sind.

30.4 Eine quadratische Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{nn}$ heißt obere oder untere **Dreiecksmatrix**, wenn alle Koeffizienten unterhalb bzw. oberhalb der Hauptdiagonale den Wert 0 haben:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{pmatrix}$: *obere* Dreiecksmatrix, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & O \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}$: *untere* Dreiecksmatrix.

(Mit "$*$" wird angedeutet, dass hier *beliebige* Koeffizienten stehen dürfen.)

Jede Diagonalmatrix ist insbesondere eine Dreiecksmatrix.

30.5 Mit dem **Koneckersymbol** $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{, wenn } i = j \\ 0 & \text{, wenn } i \neq j \end{cases}$ ist die quadratische Matrix

$I = I_n = \left(\delta_{ij}\right)_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix}$ die (n, n) –**Einheitsmatrix**;

ihre Zeilen und Spalten sind die natürlichen Einheitsvektoren des $\mathbb{K}^n$:

$I_n = \left(\overset{\downarrow}{e}_1, \dots, \overset{\downarrow}{e}_n\right) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$, wobei $\overset{\downarrow}{e}_j = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der 1 an der Stelle j und $\vec{e}_i = \left(\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}\right) = \left(0, \dots, 1, \dots, 0\right)$ mit der 1 an der Stelle i.

I_n ist eine Diagonalmatrix. (Den Index n lässt man meistens weg, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, welche Einheitsmatrix $I = I_n$ gemeint ist.)

30.6 Die (m, n) –**Nullmatrix** ist $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

30.7

Sei $A = \left(a_{ij}\right)_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ eine (m,n)–Matrix.

Die **zu A transponierte Matrix** oder die **Transponierte von A** ist die (n,m)–Matrix $A^t = \left(a_{ji}\right)_{nm} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

die **zu A konjugiert–komplexe Matrix** oder **Konjugiert–Komplexe** ist die (m,n)–Matrix $A^* = \left(a^*_{ij}\right)_{mn} = \begin{pmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a^*_{m1} & \cdots & a^*_{mn} \end{pmatrix}$

und die **zu A adjungierte Matrix** oder die **Adjungierte von A** ist die (n,m)–Matrix $A^+ = \left(a^*_{ji}\right)_{nm} = \begin{pmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^*_{1n} & \cdots & a^*_{mn} \end{pmatrix}$;

30.8

Die **Transponierte** A^t entsteht durch Vertauschen von Zeilen und Spalten von A: ist $\vec{a}_i = \left(a_{i1}\,,\,\ldots\,,\,a_{in}\right)$ die i–te Zeile von A, so ist $\overset{\downarrow}{a}_i = \vec{a}_i^{\,t} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ die i–te Spalte der Transponierten A^t von A;

die **Adjungierte** A^+ entsteht durch Transponieren *und* Konjugieren von A:

$\boxed{A^+ = \left(A^t\right)^* = \left(A^*\right)^t}$; ist $\vec{a}_i = \left(a_{i1}\,,\,\ldots\,,\,a_{in}\right)$ die i–te Zeile von A, so ist $\overset{\downarrow}{a}_i = \vec{a}_i^{\,+} = \begin{pmatrix} a^*_{i1} \\ \vdots \\ a^*_{in} \end{pmatrix}$ die i–te Spalte von A^+.

30.9

Es ist klar, dass zweimaliges Transponieren oder Konjugieren oder Adjungieren stets wieder die Ausgangsmatrix liefert:

$\boxed{\left(A^t\right)^t = A\,,\ \left(A^*\right)^* = A\,,\ \left(A^+\right)^+ = A}$,

und wenn A ***reell*** ist, dann ist $A^* = A$ und $A^+ = A^t$.

Zum Beispiel:

	reell:	nicht–reell
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ 1 & 0 & 1-2i \end{pmatrix}$
Transponierte:	$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$	$B^t = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 0 \\ 2 & 1-2i \end{pmatrix}$
Kongugiert- -Komplexe:	$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = A$	$B^* = \begin{pmatrix} 1-i & -i & 2 \\ 1 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$
Adjungierte:	$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = A^t$	$B^+ = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -i & 0 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix} = (B^t)^*$

Beachte!: In der Literatur wird die **Adjungierte** einer Matrix A statt mit A^+ meistens mit A^* bezeichnet — eine besondere Bezeichnung der Konjugiert–Komplexen ist i.a. nicht üblich! Auch wird die **Transponierte** (uneinheitlich) statt mit A^t gelegentlich mit A' oder auch mit A^{T} bezeichnet.

30.10 Die **Spur** einer *quadratischen* Matrix $A = \big(a_{ij}\big)_{n,n}$ ist die Summe ihrer Hauptdiagonal–Elemente; gemäß der englisch–sprachigen Literatur wird sie meistens mit **trace** bezeichnet:

$$\boxed{\textbf{Spur} \text{ von } A = \big(a_{ij}\big)_{n,n} \;:\; \operatorname{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}}$$

z.B.: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ hat die Spur: $\operatorname{trace}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

30.11 Beachte, dass $\operatorname{trace}(A^t) = \operatorname{trace}(A)$ und $\operatorname{trace}(A^+) = \operatorname{trace}(A^*) = \big(\operatorname{trace}(A)\big)^*$.

30.B Algebraische Operationen.

I. Vielfache und Summen von Matrizen.

Jede Matrix $A = \big(a_{ij}\big)_{m,n}$ kann **mit einem Skalar** λ **multipliziert** und je zwei *gleichgroße* Matrizen $A = \big(a_{ij}\big)_{m,n}$, $B = \big(b_{ij}\big)_{m,n}$ können **addiert** werden: beides geschieht koeffizientenweise:

30.12

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda\, A &= \lambda\,\big(a_{ij}\big)_{m,n} := \big(\lambda\, a_{ij}\big)_{m,n} \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \\ A + B &= \big(a_{ij}\big)_{m,n} + \big(b_{ij}\big)_{m,n} := \big(a_{ij} + b_{ij}\big)_{m,n} \end{aligned}}$$

Wenn die beiden Matrizen A, B *verschieden* groß sind, dann ist ihre Summe *nicht* definiert!

Beachte den Unterschied zwischen dem **Vielfachen einer Matrix** und dem **Vielfachen einer Determinante**:

- um das λ–Fache einer **Matrix** zu erhalten, muss man *sämtliche* Zeilen (oder Spalten) von A mit λ multiplizieren;
- dagegen erhält man das λ–Fache der **Determinante** von A, wenn man irgend–*eine* Zeile (oder Spalte) von A mit λ multipliziert! (vgl. mit der Determinantenregel Nr. 24.18 .)

Zum Beispiel:

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 3\lambda & 3\lambda & 2\lambda \\ 4\lambda & 2\lambda & 3\lambda & 2\lambda \\ 5\lambda & 7\lambda & 2\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a & 1+b & 4+c \\ 5+d & 7+e & 2+f \end{pmatrix};$$

dagegen ist $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ *nicht erklärt*!

Es ist klar, dass: $A + \mathcal{O}_{m,n} = \mathcal{O}_{m,n} + A = A$ und $A - A = \mathcal{O}_{m,n}$ für jede (m,n)–Matrix A, und dass $(A+B)+C = A+(B+C)$ und $A+B = B+A$ und $\lambda\,(A+B) = \lambda A + \lambda B$ jeweils für $\lambda \in \mathbf{K}$ und alle *gleichgroßen* Matrizen A, B, C. Damit haben wir: (s. Abschnitt 20.B)

30.13

> Die Gesamtheit $\mathcal{M}_{m,n}$ aller (m,n)–Matrizen ist bzgl. der oben definierten *Multiplikation mit Skalaren* und *Addition* ein **linearer Raum**.

Wenn man für $m, n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ definiert:

$$\Omega_{i,j}^{[m,n]} = \left(\omega_{\mu,\nu}\right)_{m,n} \quad \text{mit} \quad \omega_{\mu,\nu} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für} \quad (\mu,\nu) = (i,j) \\ 0 & \text{für} \quad (\mu,\nu) \neq (i,j) \end{array} \right\},$$

d.h. $\Omega_{i,j}^{[m,n]}$ ist eine (m,n)–Matrix, die genau an der Stelle (i,j) eine 1 und sonst überall eine 0 hat,

dann hat jede (m,n)–Matrix $A = \left(a_{i,j}\right)_{m,n}$ die eindeutige Darstellung: $\boxed{A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Omega_{i,j}^{[m,n]}}$.

30.14 Die Menge $\mathcal{B}^{[m,n]} = \left\{\Omega_{i,j}^{[m,n]} \mid 1 \leq i \leq m \,,\, 1 \leq j \leq n\right\}$ ist demnach die **natürliche Basis** des $m \cdot n$–dimensionalen linearen Raumes $\mathcal{M}_{m,n}$ aller (m,n)–Matrizen, und die **Koeffizienten** a_{ij} der Matrizen $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ sind genau die **Koordinaten** von A bzgl. dieser Basis — der (äußere) Unterschied des linearen Raumes $\mathcal{M}_{m,n}$ zum Raum $\mathbb{K}^{m \cdot n}$ liegt nur in der Schreibweise der Matrizen als rechteckiges $m \times n$–Zahlenschema statt als Spaltenvektoren der Länge $m \cdot n$.

II. Matrix mal Spaltenvektor.

Wir definieren zunächst das **Matrixprodukt** eines **Zeilenvektors** $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit einem *gleichlangen* (!) **Spaltenvektor** $\overset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$: das ist die **Zahl** :

30.15
$$\vec{a} \; \overset{\downarrow}{b} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu$$

(Diese Definition ist natürlich nur für *gleichlange* Vektoren sinnvoll!)

Beachte die Reihenfolge: *Zeilen*vektor mal *Spalten*vektor, nicht umgekehrt! (s.u. **III.**)

Beachte außerdem den **Unterschied** zwischen dem *Matrix*produkt $\vec{a} \; \overset{\downarrow}{b} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu$ und dem *Skalar*produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overset{\downarrow}{a} \cdot \overset{\downarrow}{b} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^* b_\nu$: **nur wenn $\vec{a}$ ein *reeller* Vektor ist, ergeben beide Produkte denselben Wert!**

Das **Produkt** einer (m,n) –**Matrix** $A = \big(a_{ij}\big)_{m,n} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{a}_1 , \ldots , \overset{\downarrow}{a}_n \end{pmatrix}$ mit einem **Spaltenvektor** $\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ ist der **Spaltenvektor** :

30.16

$$A \cdot \overset{\downarrow}{x} = A\,\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{x} := \begin{pmatrix} \vec{a}_1\,\overset{\downarrow}{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_m\,\overset{\downarrow}{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m , \quad \text{d.h.}$$

$$A\,\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1\,\overset{\downarrow}{a}_1 + \cdots + x_n\,\overset{\downarrow}{a}_n$$

Beachte, dass der Vektor $\overset{\downarrow}{x}$ mit seiner Länge zur Matrix A passen muss:

$\big((m,n)$ –Matrix $A\big)$ mal $\big($Vektor der Länge $n\big)$ ergibt $\big($Vektor der Länge $m\big)$

z.B.: $(1\ 2\ 0\ 4)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 4 + 0 + 4 = 4$, $(-1\ 1\ 1\ 2)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 - 2 + 3 + 2 = -1$,

$(2\ -2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$, somit: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Dagegen ist das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *nicht erklärt*!

Die beiden folgenden beiden **Regeln** sind unmittelbar einzusehen:

30.17 Mit der **Einheitsmatrix** $I = I_n$ gilt: $I\,\overset{\downarrow}{x} = \overset{\downarrow}{x} \quad \forall\ \overset{\downarrow}{x} \in \mathbb{K}^n$, denn:

$$I\,\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overset{\downarrow}{x} .$$

Für den j –ten natürlichen **Einheitsvektor** $\overset{\downarrow}{e}_j$ des $\mathbf{K}^n$ und jede (m,n) –Matrix A gilt:

30.18 ♡ **!** $\boxed{A\,\overset{\downarrow}{e}_j = \overset{\downarrow}{a}_j \quad (= j\text{–te Spalte von } A)}$ **!** ♡ , denn:

$$A\,\overset{\downarrow}{e}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \boxed{1}_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 0 + \cdots + a_{1j}\cdot 1 + \cdots + a_{1n}\cdot 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot 0 + \cdots + a_{mj}\cdot 1 + \cdots + a_{mn}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Diese Eigenschaft wird sich noch als äußerst nützlich erweisen!

30.19

Gemäß Nr. 30.16 kann man jedes **lineare Gleichungssystem** mit m Gleichungen für n Unbekannte $x_1, \ldots, x_n$ der Art:

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ ---------- & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}}$$

bequemer und übersichtlicher in der vektoriellen Form: $(*)$ $\boxed{A\,\overset{\downarrow}{x} = \overset{\downarrow}{b}}$ mit der **Koeffizientenmatrix** $A = (a_{ij})_{m,n}$, der "rechten Seite" $\overset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ und dem (gesuchten) **Lösungsvektor** $\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ schreiben.

Zum Beispiel: Das lineare Gleichungssystem: $(*)$ $\boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 6 \end{array}}$ lässt sich mit der **Koeffizientenmatrix** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, der "rechten Seite" $\overset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und dem gesuchten Vektor $\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gleichwertig in der Form: $(*)$ $\boxed{A\,\overset{\downarrow}{x} = \overset{\downarrow}{b}}$ schreiben.

Eine (und tatsächlich die einzige) Lösung kann man wegen Nr. 30.18 sofort ablesen:

es ist $A\,\overset{\downarrow}{e}_y =$ (2. Spalte von A) $= \frac{1}{2}\,\overset{\downarrow}{b}$, also $\overset{\downarrow}{x} = 2\,\overset{\downarrow}{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $x = z = 0$, $y = 2$.

Bemerkung zur Schreibweise:

Wir haben bisher das Produkt (Matrix mal Vektor) in der Form $A\overset{\downarrow}{x}$ geschrieben, um zu betonen, dass $\overset{\downarrow}{x}$ ein *Spalten*–Vektor ist, und wir werden diese Schreibweise — nicht immer ganz konsequent — noch eine Weile beibehalten.

In der Literatur ist der senkrechte Pfeil $\downarrow$ zur Kennzeichnung von Spaltenvektoren unüblich:

wenn die gerade betrachteten Vektoren $\vec{x}$ **Zeilenvektoren** sind, dann ist $\vec{x}^{\,t}$ ein **Spaltenvektor**, und wenn die gerade betrachteten Vektoren $\vec{x}$ **Spaltenvektoren** sind, dann ist $\vec{x}^{\,t}$ ein **Zeilenvektor**.

III. Matrix mal Matrix.

Das **Produkt** einer (m,n)–**Matrix** $A = \left(a_{ij}\right)_{m,n} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix}$ mit einer

(n,k)–**Matrix** $B = \left(b_{ij}\right)_{n,k} = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{b_1}, \cdots, \overset{\downarrow}{b_k} \end{pmatrix}$ ist die (m,k)–**Matrix**

30.20

$$A \cdot B = AB \;= A \cdot \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{b_1}, \cdots, \overset{\downarrow}{b_k} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A\,\overset{\downarrow}{b_1}, \cdots, A\,\overset{\downarrow}{b_k} \end{pmatrix} \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix} \vec{a}_1\,\overset{\downarrow}{b_1} & \cdots & \vec{a}_1\,\overset{\downarrow}{b_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{a}_m\,\overset{\downarrow}{b_1} & \cdots & \vec{a}_m\,\overset{\downarrow}{b_k} \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_{ij}\right)_{m,n} \cdot \left(b_{ij}\right)_{n,k} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k}\right)_{m,k}$$

30.21

An der Stelle (i,j), d.h. in der i–ten Zeile und j–ten Spalte der **Produktmatrix** AB steht das (Matrix–) Produkt: $\left(i\text{ –}\textbf{te Zeile von } A\right)$ **mal** $\left(j\text{ –}\textbf{te Spalte von } B\right)$, also die Zahl:

$$\boxed{\vec{a}_i\,\overset{\downarrow}{b_j} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}} \; .$$

Wem das Ausmultiplizieren von zwei Matrizen noch Schwierigkeiten bereitet, kann das nebenstehende Rechenschema verwenden:

$$
\begin{array}{r|ccc|ccccc|l}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{5}{c}{\text{Spalte } j} & \\
\cline{5-9}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \mathsf{B} \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} & \\
\cline{2-9}
 & a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \vdots & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \\
\text{Zeile } i & a_{i1} & \cdots & a_{in} & \cdots & & \boxed{\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}} & & \cdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \\
\mathsf{A} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & & & \vdots & & & \mathsf{AB} \\
\cline{2-9}
\end{array}
$$

Beachte wieder, dass die beiden zu multiplizierenden Matrizen *zusammenpassen* müssen! :

$$\Big((m,n)\text{–Matrix } A\Big) \text{ mal } \Big((n,k)\text{–Matrix } B\Big) \text{ ergibt } \Big((m,k)\text{–Matrix } AB\Big)$$

z s z s

Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1+0 & 4+0+0 \\ -4-1+3 & 8+0+1 \\ -6+0-3 & 12+0-1 \\ -8+1+6 & 16+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 9 \\ -9 & 11 \\ -1 & 18 \end{pmatrix};$$

$$(4,\underline{3}) \quad \cdot \quad (\underline{3},2) \qquad = \qquad (4,2)$$

und dasselbe nocheinmal mit dem **Rechenschema**:

$$
\begin{array}{|ccc|cc|l}
\cline{4-5}
\multicolumn{1}{c}{} & & & -2 & 4 & \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & 1 & 0 & \mathsf{B} \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & 3 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & -1 & 4 & \\
2 & -1 & 1 & -2 & 9 & \\
3 & 0 & -1 & -9 & 11 & \\
4 & 1 & 2 & -1 & 18 & \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{\mathsf{A}} & \multicolumn{2}{c}{\mathsf{AB}} &
\end{array}
$$

Das Produkt: $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist *nicht definiert*! : $(3,2)$–Matrix $\cdot$ $(4,3)$–Matrix $= ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt eines *Zeilen*–Vektors und eines (gleichlangen) *Spalten*–Vektors ist eine Zahl: $(1,n)\cdot(n,1)=(1,1)$: s.o. Nr. 30.15 .

Dagegen ist das Produkt eines *Spalten*–Vektors der Länge m mit einem *Zeilen*–Vektor der Länge n eine (m,n)–*Matrix*: $(m,1)\cdot(1,n)=(m,n)$!

z.B.: $(1\,,2\,,3)\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}=-4\,,\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(4\,,-1\,,-2\,,1)=\begin{pmatrix}4&-1&-2&1\\8&-2&-4&2\\12&-3&-6&3\end{pmatrix}$

Wie die letzten Beispiele zeigen, ist das Matrixprodukt **nicht kommutativ** , d.h., i.a. ist $AB\neq BA$ — auch dann, wenn beide Produkte erklärt sind. Offenbar können die Produkte AB und BA *höchtens* dann beide erklärt und gleich sein, wenn die Matrizen A und B *gleich–groß* und *quadratisch* sind.

30.22 Zwei (gleich–große und quadratische) Matrizen $A\,,B$ heißen **vertauschbar** , wenn ihr **Kommutator** $[A,B]:=AB-BA=\mathcal{O}$ die Nullmatrix ist, wenn also $AB=BA$.

z.B.: Die beiden Matrizen $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$ sind *nicht vertauschbar* (s.o.) und ihr Kommutator ist: $[A,B]=AB-BA=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-2\\4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-2\end{pmatrix}\neq\mathcal{O}$.

Dagegen sind die beiden Matrizen $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5&4\\6&1\end{pmatrix}$ *vertauschbar*:

$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4\\6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\9&16\end{pmatrix}\,,\ BA=\begin{pmatrix}-5&4\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\9&16\end{pmatrix}$,

also $AB=BA$, und ihr Kommutator ist die Nullmatrix: $[A,B]=AB-BA=\mathcal{O}$.

Unmittelbar aus der Definition des Matrixproduktes folgt:

30.23 $\boxed{I_mA=A \text{ und } AI_n=A}$ für jede (m,n)–Matrix A ,
insbesondere (mit $m=n$) ist jede *quadratische* Matrix A mit der (entsprechend großen) Einheitsmatrix I vertauschbar und es ist
$\boxed{AI=IA=A}$ (Diese Eigenschaft ist für die Einheitsmatrix I *charakteristisch*: s.u. Nummer 30.33 !) ,

denn mit den Nummern 30.17 u. 18 hat man:

$$I_m A = \left(I_m \overset{\downarrow}{a}_1 , \dots , I_m \overset{\downarrow}{a}_n \right) \overset{17}{=} \left(\overset{\downarrow}{a}_1 , \dots , \overset{\downarrow}{a}_n \right) = A \quad \text{und}$$

$$A I_n = \left(A \overset{\downarrow}{e}_1 , \dots , A \overset{\downarrow}{e}_n \right) \overset{18}{=} \left(\overset{\downarrow}{a}_1 , \dots , \overset{\downarrow}{a}_n \right) = A \, .$$

∎

Das Matrixprodukt ist zwar **nicht kommutativ** (s.o.), aber es ist **assoziativ**; außerdem gelten für die Matrix–Addition und Matrix–Multiplikation die üblichen **Distributivgesetze**:

30.24

$A(BC) = (AB)C$	für jede (m,n)–Matrix A, (n,k)–Matrix B und (k,l)–Matrix C,
$(A+B)C = AC + BC$	für alle (m,n)–Matrizen A, B und (n,k)–Matrizen C,
$A(B+C) = AB + AC$	für alle (m,n)–Matrizen A und (n,k)–Matrizen B, C.

30.25

$$(A\,B)^* = A^*\,B^*$$
$$(A\,B)^t = B^t\,A^t \quad \leftarrow \quad \text{beachte die}$$
$$(A\,B)^+ = B^+\,A^+ \quad \leftarrow \quad \textbf{Reihenfolge!}$$

die folgende Skizze macht diese Regel deutlich:

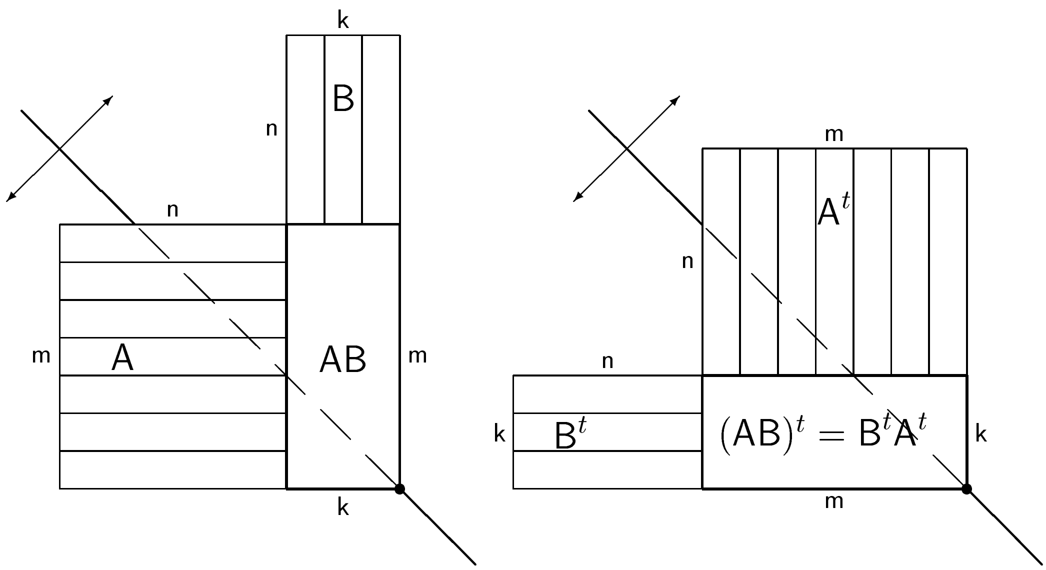


Abbildung 30.1 zur Transponierten einer Produktmatrix

Das Rechenschema zum Ausmultiplizieren von $A\,B$ geht durch Transponieren, d.h. durch Spiegelung an der skizzierten Winkelhalbierenden über in das Rechenschema zum Ausmultiplizieren von $B^t\,A^t$.

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2-i \\ 0 & 4i & 3 \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4-2i \\ 3+i & 0 \\ 1-i & 2i \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AB = \begin{pmatrix} 5+5i & 8+6i \\ -1+9i & 6i \\ -4+i & -6+2i \end{pmatrix}$,

$$B^+A^+ = \begin{pmatrix} 5 & 3-i & 1+i \\ 4+2i & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ -i & -4i & 0 \\ 2+i & 3 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5i & -1-9i & -4-i \\ 8-6i & -6i & -6-2i \end{pmatrix} = (AB)^+ ,$$

die Produkte A^tB^t und A^+B^+ sind dagegen *nicht definiert*!

30.C Rang und Regularität.

30.26 Die **Maximalanzahl linear–unabhängiger Spalten** einer (m,n)–Matrix A nennt man den **Spaltenrang** von A und die **Maximalanzahl linear–unabhängiger Zeilen** von A nennt man ihren **Zeilenrang**. Beide Ränge sind *gleich*:

30.27 $\boxed{\textbf{Zeilenrang} = \textbf{Spaltenrang} \quad \text{für jede Matrix } A}$;

daher ist es auch nicht nötig, für sie verschiedene Bezeichnungen zu haben:

30.28 Für jede Matrix A ist $\operatorname{rang} A :=$ (Zeilenrang von A) $=$ (Spaltenrang von A) **der Rang von** A.

Der **Beweis** von Nr. 30.27 ist elementar (zur linearen Un–/Abhängigkeit siehe Abschnitt 20.H), aber für uns nicht sehr informativ; er liefert noch:

30.29 Der **Rang** r ist die Größe der größten (r,r)–Untermatrix C von A, deren Zeilen und Spalten linear unabhängig sind.

30.30 Eine (m,n)–Matrix A heißt **regulär**, wenn sie den Rang $m = n$ hat, wenn sie also *quadratisch* ist mit *linear unabhängigen* Zeilen und Spalten.

30.31 Wenn es zur (n,n)–Matrix A eine (n,n)–Matrix B gibt mit $\boxed{AB = I}$, dann heißt A **invertierbar** und $A^{-1} := B$ ist die **zu** A **inverse Matrix**.

30.32 Eine Matrix A ist genau dann **invertierbar**, wenn sie **regulär** ist.
Die Inverse A^{-1} von A ist in diesem Fall *eindeutig bestimmt*.

Der **Beweis** dieser letzten Aussage wird einsichtig, wenn man mit dem Matrixprodukt vertraut ist (siehe Nummer 30.20):

Wenn die Matrix $A = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{a}_1, \dots, \overset{\downarrow}{a}_n \end{pmatrix}$ eine **Inverse** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{b}_1, \dots, \overset{\downarrow}{b}_n \end{pmatrix}$ besitzt mit den Spalten $\overset{\downarrow}{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, so dass also $A\,A^{-1} = I = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{e}_1, \dots, \overset{\downarrow}{e}_n \end{pmatrix}$, dann hat man für alle $j = 1, \dots, n$:

$\overset{\downarrow}{e}_j = A\,\overset{\downarrow}{b}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,\overset{\downarrow}{a}_i \in \operatorname{span}\left\{ \overset{\downarrow}{a}_1, \dots, \overset{\downarrow}{a}_n \right\}$, und es folgt:

$\mathbb{K}^n = \operatorname{span}\left\{ \overset{\downarrow}{e}_1, \dots, \overset{\downarrow}{e}_n \right\} \subseteq \operatorname{span}\left\{ \overset{\downarrow}{a}_1, \dots, \overset{\downarrow}{a}_n \right\} \subseteq \mathbb{K}^n$, d.h. es ist $\operatorname{span}\left\{ \overset{\downarrow}{a}_1, \dots, \overset{\downarrow}{a}_n \right\} = \mathbb{K}^n$.

Damit sind die Spalten von A linear unabhängig und A hat den **Rang n**.

Umgekehrt: A habe den **Rang n**. Dann sind die n Spalten von A linear unabhängig, bilden also eine Basis des Raumes $\mathbb{K}^n$. Daher gibt es zu jedem Einheitsvektor $\overset{\downarrow}{e}_j \in \mathbb{K}^n$ *eindeutig* bestimmte Skalare $b_{ij} \in \mathbb{K}$ so, dass $\overset{\downarrow}{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,\overset{\downarrow}{a}_i = A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$. Für die sich ergebende Matrix

$B = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{b}_1, \dots, \overset{\downarrow}{b}_n \end{pmatrix} = (b_{ij})_{n,n}$ ist $AB = \begin{pmatrix} A\,\overset{\downarrow}{b}_1, \dots, A\,\overset{\downarrow}{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{e}_1, \dots, \overset{\downarrow}{e}_n \end{pmatrix} = I$,

d.h. $B = A^{-1}$ ist die eindeutig bestimmte Inverse von A. ∎

Es folgen einige **elementare Eigenschaften** regulärer Matrizen und ihrer Inversen:

30.33

Mit einer (n, n)–Matrix B hat man die Implikationen:

$\boxed{B = I}$ $\Leftrightarrow$ für *jede* (m, n)–Matrix A ist $\boxed{AB = A}$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ *reguläre* (n, n)–Matrix A mit $\boxed{AB = A}$

(Dies verallgemeinert die Regel in Nr. 30.23)

30.34

(a) $I^{-1} = I$	(c) $(A^{-1})^{-1} = A$
(b) $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$	(d) $(A^{+})^{-1} = (A^{-1})^{+}$

30.35 $B = A^{-1} \Leftrightarrow AB = I$ (per def. A^{-1}) $\Leftrightarrow BA = I$

30.36

> Wenn A und B **regulär** (und gleich groß) sind, dann ist auch AB **regulär** und hat die **Inverse**:
>
> $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$ $\leftarrow$ beachte die **Reihenfolge**!

30.37

> C regulär $\Rightarrow \operatorname{rang} CA = \operatorname{rang} A$, B regulär $\Rightarrow \operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A$.

Die **Nachweise** auch dieser nützlichen Regeln sind sehr einfach und sind eine gute Fingerübung:

Zu 30.33: Den ersten Teil der Aussage haben wir bereits in Nummer 30.23 eingesehen: ist $I = I_n$, so ist $AI = A$ für *jede* (m,n)–Matrix A, insbesondere für jede *reguläre* (n,n)–Matrix A.

Sei umgekehrt $A = \left(\overset{\downarrow}{a}_1, \ldots, \overset{\downarrow}{a}_n\right)$ regulär und $B = (b_{ij})_{n,n} = \left(\overset{\downarrow}{b}_1, \ldots, \overset{\downarrow}{b}_n\right)$ eine (n,n)–Matrix so, dass $AB = A$ ist. Dann hat man für $j = 1, \ldots, n$ (s. die letzte Gleichung in Nummer 30.16):

$\overset{\downarrow}{a}_j = A\,\overset{\downarrow}{b}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,\overset{\downarrow}{a}_i$, daher, da die Spalten $\{\overset{\downarrow}{a}_1, \ldots, \overset{\downarrow}{a}_n\}$ linear unabhängig sind:

$b_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} = \delta_{ij}$, d.h. $B = (\delta_{ij})_{n,n} = I_n$.

Zu 30.34: **(a)**: Aufgrund der Definitionen von I und I^{-1} ist $I^{-1} = I\,I^{-1} = I$.

(b): Wegen: $A\,A^{-1} = I$ ist: $A = I\,A = (A\,A^{-1})\,A = A\,(A^{-1}A)$, nach 30.33 also: $A^{-1}A = I$.

(c): Aus (b) erhält man aufgrund der Definition der Inversen sofort: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(d): Mit der Regel: $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$ (s. Nr. 30.25) und der Definition der Inversen ergibt sich aus (b): $I = I^{+} = (A^{-1}\,A)^{+} = A^{+}\,(A^{-1})^{+}$ und somit: $\left(A^{+}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{+}$.

Zu 30.35: $BA = I \;\Leftrightarrow\; A = B^{-1}$ (per def. B^{-1}) $\Leftrightarrow\; A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$ (gemäß 30.34,c).

Zu 30.36: $(A\,B)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = A\,(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I$: mit $A\,B$ statt A und $B^{-1}\,A^{-1}$ statt B folgt aus 30.33: $B^{-1}\,A^{-1} = (A\,B)^{-1}$.

Zu 30.37: Sei C regulär, $M = CA = (C\,\overset{\downarrow}{a}_1, \ldots, C\,\overset{\downarrow}{a}_n)$ und $\operatorname{rang} A = r$; Œ seien die Spalten $\overset{\downarrow}{a}_1, \ldots, \overset{\downarrow}{a}_r$ von A linear unabhängig. Sei $\sum_{j=1}^{r} \beta_j C\,\overset{\downarrow}{a}_j = \overset{\downarrow}{o}$ mit gewissen Skalaren β_j. Dann ist

$\overset{\downarrow}{o} = C^{-1}\sum_{j=1}^{r} \beta_j C\,\overset{\downarrow}{a}_j = \sum_{j=1}^{r} \beta_j C^{-1}C\,\overset{\downarrow}{a}_j = \sum_{j=1}^{r} \beta_j\,\overset{\downarrow}{a}_j$, wegen der linearen Unabhängigkeit der Spalten $\overset{\downarrow}{a}_1, \ldots, \overset{\downarrow}{a}_r$ also $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. Damit sind die Spalten $C\,\overset{\downarrow}{a}_1, \ldots, C\,\overset{\downarrow}{a}_r$ von CA linear unabhängig, d.h. $\operatorname{rang} CA \leq r = \operatorname{rang} A$. Hieraus folgt weiter: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} C^{-1}M \leq \operatorname{rang} M = \operatorname{rang} CA$, insgesamt also: $\operatorname{rang} CA = \operatorname{rang} A$. Damit ist dann auch $\operatorname{rang} B^{+}A^{+} = \operatorname{rang} A^{+}$ und hiermit $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A$. ▌

30.D Hermitesche, unitäre, normale Matrizen.

30.38

Eine Charakterisierung der Adjungierten.

Für jede (m,n)–Matrix A gilt:

(a): $\boxed{(A\overset{\downarrow}{x})\cdot\overset{\downarrow}{y}=\overset{\downarrow}{x}\cdot(A^+\overset{\downarrow}{y})}$ für alle $\overset{\downarrow}{x}\in\mathbb{K}^n$, $\overset{\downarrow}{y}\in\mathbb{K}^m$.

Diese Eigenschaft ist *charakteristisch* für die **Adjungierte**: ist B eine (n,m)–Matrix mit der Eigenschaft:

(b): $\boxed{(A\overset{\downarrow}{x})\cdot\overset{\downarrow}{y}=\overset{\downarrow}{x}\cdot(B\overset{\downarrow}{y})}$ für alle $\overset{\downarrow}{x}\in\mathbb{K}^n$, $\overset{\downarrow}{y}\in\mathbb{K}^m$,

so ist $B=A^+$ die **Adjungierte** von A.

Denn: Wenn A die Zeilen $\vec{a}_i=(a_{i1},\dots,a_{in})$ und Spalten $\overset{\downarrow}{a}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ hat, dann hat die Adjungierte A^+ die Zeilen $\vec{b}_j=\begin{pmatrix}(\overset{\downarrow}{a}_j)^*\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}a^*_{1j},\dots,a^*_{mj}\end{pmatrix}$ und für alle $\overset{\downarrow}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ und $\overset{\downarrow}{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^m$ hat man: $(A\overset{\downarrow}{x})\cdot\overset{\downarrow}{y}=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\overset{\downarrow}{x}\\ \vdots\\ \vec{a}_m\overset{\downarrow}{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^m(\vec{a}_i\overset{\downarrow}{x})^*y_i=$

$$=\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^*y_i=\sum_{j=1}^n\left(x_j^*\sum_{i=1}^m a^*_{ij}\,y_i\right)=\sum_{j=1}^n x_j^*\,(\vec{b}_j\,\overset{\downarrow}{y})=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{b}_1\overset{\downarrow}{y}\\ \vdots\\ \vec{b}_n\overset{\downarrow}{y}\end{pmatrix}=\overset{\downarrow}{x}\cdot(A^+\overset{\downarrow}{y}).$$

Damit ist **(a)** nachgewiesen. Sei umgekehrt $B=(b_{ij})_{n,m}$ eine (n,m)–Matrix, welche die Bedingung **(b)** erfüllt. Dann gilt insbesondere für alle natürlichen Einheitsvektoren $\overset{\downarrow}{x}=\overset{\downarrow}{e}{}_j^{(n)}\in\mathbb{K}^n$ und $\overset{\downarrow}{y}=\overset{\downarrow}{e}{}_i^{(m)}\in\mathbb{K}^m$ die Beziehung: $(A\,\overset{\downarrow}{e}{}_j^{(n)})\cdot\overset{\downarrow}{e}{}_i^{(m)}=\overset{\downarrow}{e}{}_j^{(n)}\cdot(B\,\overset{\downarrow}{e}{}_i^{(m)})$, aufgrund von Nummer 30.18 also: $\overset{\downarrow}{a}_j\cdot\overset{\downarrow}{e}{}_i^{(m)}=\overset{\downarrow}{e}{}_j^{(n)}\cdot\overset{\downarrow}{b}_i$, d.h. (mit dem Kronecker–Symbol $\delta_{\mu\nu}$):

$$a^*_{ij}=\sum_{\nu=1}^m a^*_{\nu j}\,\delta_{i\nu}=\overset{\downarrow}{a}_j\cdot\overset{\downarrow}{e}{}_i^{(m)}=\overset{\downarrow}{e}{}_j^{(n)}\cdot\overset{\downarrow}{b}_i=\sum_{\mu=1}^n\delta_{j\mu}\,b_{\mu i}=b_{ji},$$ also: $B=A^+$. ∎

30.39

Bezeichnungen:

Eine (notwendigerweise *quadratische*) Matrix A heißt:

hermitesch,	wenn	$\boxed{A^+ = A}$,
schiefhermitesch,	wenn	$\boxed{A^+ = -A}$,
unitär,	wenn	$\boxed{A\,A^+ = I}$,
normal,	wenn	$\boxed{A\,A^+ = A^+\,A}$;
symmetrisch,	wenn	$\boxed{A^t = A}$,
schiefsymmetrisch,	wenn	$\boxed{A^t = -A}$,
orthogonal,	wenn	$\boxed{A^t\,A = I}$.

!

Die Eigenschaften *symmetrisch*, *schiefsymmetrisch*, *orthogonal* sind zwar für beliebige quadratische Matrizen definiert, sind aber in der Regel nur im Fall *reeller* Matrizen von Interesse, und in diesem Fall ist *symmetrisch*, *schiefsymmetrisch*, *orthogonal* dasselbe wie (bzw.) *hermitesch*, *schiefhermitesch*, *unitär*:

30.40

Eine *reelle* Matrix ist genau dann
— *hermitesch*, wenn sie *symmetrisch* ist,
— *schiefhermitesch*, wenn sie *schiefsymmetrisch* ist,
— *unitär*, wenn sie eine *Orthogonalmatrix* ist.

30.41

Offenbar gelten die **Implikationen**:

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{hermitesch} \text{ (d.h. } A^+ = A\text{)} \\
\text{insbes. } \textbf{reell symmetrisch} \\
\text{(d.h. } A^+ = A^t = A\text{)} \\[1em]
\textbf{schiefhermitesch} \text{ (d.h. } A^+ = -A\text{)} \\
\text{insbes. } \textbf{reell schiefsymmetrisch} \\
\text{(d.h. } A^+ = A^t = -A\text{)} \\[1em]
\textbf{unitär} \text{ (d.h. } A^+A = I = A\,A^+\text{)} \\
\text{insbes. } \textbf{reell orthogonal} \\
\text{(d.h. } A^+A = A^tA = I = A\,A^t = A\,A^+\text{)}
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\textbf{normal} \\
\text{(d.h. } A^+A = A\,A^+\text{)}
\end{array}\right.$$

30.42

$$A \ \textbf{hermitesch} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A^+ = A \overset{30.38}{\Leftrightarrow} A\overset{\downarrow}{x}\cdot\overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x}\cdot A\overset{\downarrow}{y} \quad \forall\ \overset{\downarrow}{x},\overset{\downarrow}{y}\in\mathbb{C}^n\,,$$

$$A \ \textbf{schiefhermitesch} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A^+ = -A \overset{30.38}{\Leftrightarrow} A\overset{\downarrow}{x}\cdot\overset{\downarrow}{y} = -\overset{\downarrow}{x}\cdot A\overset{\downarrow}{y} \quad \forall\ \overset{\downarrow}{x},\overset{\downarrow}{y}\in\mathbb{C}^n\,.$$

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ ist genau dann **hermitesch**, wenn ihre Koeffizienten "konjugiert–symmetrisch" zur Hauptdiagonale sind:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a = x+iy & \leftrightarrow & a^* = x-iy \\ (i,j) & & (j,i) \end{array}}\ ;$$

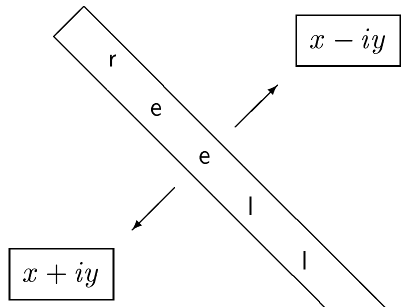
insbesondere hat damit A eine **reelle Hauptdiagonale**, (denn dann ist $a_{ii}^* = a_{ii}$, also a_{ii} reell):

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ ist genau dann **schiefhermitesch**, wenn ihre Koeffizienten "negativ konjugiert–symmetrisch" zur Hauptdiagonale sind:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a = x+iy & \leftrightarrow & -a^* = -x+iy \\ (i,j) & & (j,i) \end{array}}\ ;$$

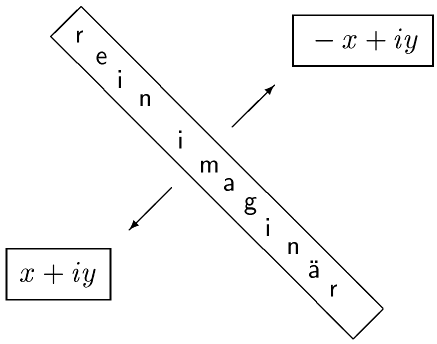
insbesondere hat damit A eine **rein imaginäre Hauptdiagonale**, (denn dann ist $a_{ii}^* = -a_{ii}$, also a_{ii} rein imaginär oder gleich Null):

hermitesche Matrix:



z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2i \\ 1+i & 0 & 1 \\ -2i & 1 & 3 \end{pmatrix}$

schiefhermitesche Matrix:



z.B.: $A = \begin{pmatrix} i & -1+i & -2i \\ 1+i & 0 & -1 \\ -2i & 1 & 3i \end{pmatrix}$

30.43

insbesondere: eine *reelle* Matrix ist **symmetrisch**, wenn ihre Koeffizienten

spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonale sind: $\boxed{\begin{array}{ccc} a & \leftrightarrow & a \\ (i,j) & & (j,i) \end{array}}$, und

eine *reelle* Matrix ist **schiefsymmetrisch**, wenn ihre Koeffizienten

"schiefsymmetrisch" zur Hauptdiagonale sind: $\boxed{\begin{array}{ccc} a & \leftrightarrow & -a \\ (i,j) & & (j,i) \end{array}}$

(ihre Hauptdiagonale muss in diesem Fall gleich 0 (denn $a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0$)).

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch und $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ist schiefsymmetrisch.

Einige **elementare Regeln:**

30.44 Für *jede* Matrix A ist AA^+ **hermitesch**.

30.45 Für zwei *gleich–große* Matrizen A und B gilt:

A *und* B hermitesch	$\Rightarrow$	$A+B$ **hermitesch**
A *und* B schiefhermitesch	$\Rightarrow$	$A+B$ **schiefhermitesch**

30.46 Die **Inverse** A^{-1} jeder *regulären* und hermiteschen bzw. schiefhermiteschen Matrix A ist ebenfalls **hermitesch** bzw. **schiefhermitesch**.

30.47

wenn ↓ / und → / dann ist ↘	λ reell	λ rein–imaginär
A hermitesch	λA **hermitesch**	λA **schiefhermitesch**
A schiefhermitesch	λA **schiefhermitesch**	λA **hermitesch**

30.48 **Genau dann, wenn A und B vertauschbar sind (d.h. wenn $AB = BA$)**, gilt:

wenn ↓ / und → / dann ist ↘	B hermitesch	B schiefhermitesch
A hermitesch	AB **hermitesch**	AB **schiefhermitesch**
A schiefhermitesch	AB **schiefhermitesch**	AB **hermitesch**

30.49 Jede Matrix A besitzt eine *eindeutige* Darstellung als Summe $A = A_h + A_s$ einer **hermiteschen** Matrix A_h und einer **schiefhermiteschen** Matrix A_s:

$A_h := \frac{1}{2}\left(A + A^+\right)$ ist der **hermitesche Anteil** von A,

$A_s := \frac{1}{2}\left(A - A^+\right)$ ist der **schiefhermitesche Anteil** von A.

Denn: **Zu 30.44**: Mit Nummer 30.25 hat man stets $(AA^+)^+ = A^{++}A^+ = AA^+$, d.h. die Matrix AA^+ ist stets **hermitesch**.

Zu 30.45: Wenn A und B *hermitesch* sind, dann ist $(A+B)^+ = A^+ + B^+ = A + B$, also $A+B$ **hermitesch**; wenn A und B *schiefhermitesch* sind, dann ist $(A+B)^+ = A^+ + B^+ = -A - B = -(A+B)$, also $A+B$ **schiefhermitesch**.

Zu 30.46: Wenn A regulär ist, ist $(A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}$ (s. Nummer 30.34,d). Wenn dann A *hermitesch* ist, dann ist $(A^{-1})^+ = (A^+)^{-1} = A^{-1}$, also A^{-1} **hermitsch**, und wenn A *schiefhermitesch* ist, dann ist $(A^{-1})^+ = (A^+)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$, also A^{-1} **schiefhermitsch**.

Zu 30.47: A *hermitesch* und λ *reell* $\Rightarrow$ $(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+ = \lambda A$, und: A *schiefhermitesch* und λ *rein–imaginär* $\Rightarrow$ $(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+ = (-\lambda)(-A) = \lambda A$, d.h. in beiden Fällen ist λA **hermitesch**.

A *hermitesch* und λ *rein–imaginär* $\Rightarrow$ $(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+ = -\lambda A$, und: A *schiefhermitesch* und λ *reell* $\Rightarrow$ $(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+ = \lambda(-A) = -\lambda A$, d.h. in beiden Fällen ist λA **schiefhermitesch**.

Zu 30.48: Wir machen wieder Gebrauch von Nummer 30.25:

Wenn A und B *hermitesch* sind, dann ist $(AB)^+ = B^+A^+ = BA$, und wenn A und B *schiefhermitesch* sind, dann ist $(AB)^+ = B^+A^+ = (-B)(-A) = BA$, d.h. in beiden Fällen ist das Produkt AB **genau dann hermitesch**, wenn A und B *vertauschbar* sind.

Wenn A *hermitesch* und B *schiefhermitesch* ist, dann ist $(AB)^+ = B^+A^+ = -BA$, und wenn A *schiefhermitesch* und B *hermitesch* ist, dann ist $(AB)^+ = B^+A^+ = B(-A) = -BA$, also ist in beiden Fällen das Produkt AB **genau dann schiefhermitesch**, wenn A und B *vertauschbar* sind.

Zu 30.49: Zunächst ist klar, dass A_h **hermitesch** und A_s **schiefhermitesch** ist mit $A = A_h + A_s$: $A_h^+ = \frac{1}{2}(A + A^+)^+ = \frac{1}{2}(A^+ + A) = A_h$, $A_s^+ = \frac{1}{2}(A - A^+)^+ = \frac{1}{2}(A^+ - A) = -A_h$, und $A_h + A_s = \frac{1}{2}(A + A^+) + \frac{1}{2}(A - A^+) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A$.

Ist andererseits $A = B_h + B_s$ mit einer hermiteschen Matrix B_h und einer schiefhermiteschen Matrix B_s, so ist $A_h = \frac{1}{2}(A + A^+) = \frac{1}{2}(B_h + B_s) + \frac{1}{2}\left(B_h^+ + B_s^+\right) = \frac{1}{2}B_h + \frac{1}{2}B_s + \frac{1}{2}B_h - \frac{1}{2}B_s = B_h$ und $A_s = \frac{1}{2}(A - A^+) = \frac{1}{2}(B_h + B_s) - \frac{1}{2}\left(B_h^+ + B_s^+\right) = \frac{1}{2}B_h + \frac{1}{2}B_s - \frac{1}{2}B_h + \frac{1}{2}B_s = B_s$. ▮

z.B.: 1. $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -1+i \\ 2+3i & 2i & i \\ i & 1 & 1-2i \end{pmatrix} \Rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} 1-i & 2-3i & -i \\ 2 & -2i & 1 \\ -1-i & -i & 1+2i \end{pmatrix}$, somit:

$A_h = \frac{1}{2}(A + A^+) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4-3i & -1 \\ 4+3i & 0 & i+1 \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$, $A_s = \frac{1}{2}(A - A^+) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & 3i & -1+2i \\ 3i & 4i & i-1 \\ 1+2i & 1+i & -4i \end{pmatrix}$.

A_h ist **hermitesch**, A_s **schiefhermitesch** und es ist $A = A_h + A_s$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^+ = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, somit: $A_h = \frac{1}{2}(A + A^+) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$,

$A_s = \frac{1}{2}(A - A^+) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; A_h ist **reell symmetrisch**, A_s **reell schiefsymmetrisch** und $A = A_h + A_s$.

30.50

A **unitär** $\Leftrightarrow$ (a) : $\boxed{AA^+ = I}$ (per def.) $\Leftrightarrow$ $\boxed{A^+A = I}$,

$\Leftrightarrow$ (b) : A **regulär** mit der **Inversen** $\boxed{\boxed{A^{-1} = A^+}}$;

$\Leftrightarrow$ (c) : die *Spalten* von A bilden ein **ONS** , d.h. sie haben die **Länge** 1 und sind **paarweise orthogonal** , !

$\Leftrightarrow$ (d) : die *Zeilen* von A bilden ein **ONS** ;

$\Leftrightarrow$ (e) : $\boxed{A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y} \quad \forall\ \overset{\downarrow}{x}, \overset{\downarrow}{y} \in \mathbb{C}^n}$, d.h. die Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \overset{\downarrow}{x} \mapsto A\overset{\downarrow}{x}$ ist **längen– und winkeltreu** (s.u. die Bemerkung 30.51).

Denn :

Mit Nummer 30.35 haben wir:
A **unitär** $\overset{\text{per. def.}}{\Leftrightarrow}$ $AA^+ = I \Leftrightarrow A$ ist **regulär** und hat die **Inverse** $A^{-1} = A^+ \Leftrightarrow A^+A = I$.
(a) und (b) sind also äquivalent.

Aus (a) folgt für alle $\overset{\downarrow}{x}, \overset{\downarrow}{y} \in \mathbb{C}^n$: $A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x} \cdot A^+A\overset{\downarrow}{y} \overset{(a)}{=} \overset{\downarrow}{x} \cdot I\overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y}$, also: (a) $\Rightarrow$ (e) ;
und mit der Charakterisierung der Adjungierten in Nummer 30.38 ergibt sich umgekehrt aus (e) :
$I\overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y} \overset{(e)}{=} A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x} \cdot A^+A\overset{\downarrow}{y}$, d.h. $A^+A = I^+ = I$, also: (e) $\Rightarrow$ (a) . Damit sind auch (a) und (e) äquivalent.

Mit dem j –ten natürlichen Einheitsvektor $\overset{\downarrow}{e_j}$ ist $A\overset{\downarrow}{e_j} = \overset{\downarrow}{a_j}$ die j –te Spalte von A (s. Nummer 30.18 !) .

Daher ergibt sich aus (e) sofort: $\overset{\downarrow}{a_i} \cdot \overset{\downarrow}{a_j} = A\overset{\downarrow}{e_i} \cdot A\overset{\downarrow}{e_j} \overset{(e)}{=} \overset{\downarrow}{e_i} \cdot \overset{\downarrow}{e_j} = \delta_{ij}$, d.h. die **Spalten von** A **bilden ein ONS** : (e) $\Rightarrow$ (c) .

A^+ hat die Zeilen $\vec{b}_i = (\overset{\downarrow}{a_i})^+$. Daher folgt mit (c) : $I = (\delta_{ij})_{n,n} \overset{(c)}{=} (\overset{\downarrow}{a_i} \cdot \overset{\downarrow}{a_j})_{n,n} = (\vec{b}_i\ \overset{\downarrow}{a_j})_{n,n} = A^+A$, also: (c) $\Rightarrow$ (a) . Wir haben damit gezeigt, dass die Aussagen (a), (b), (c), (e) äquivalent sind.

Mit A ist auch A^+ unitär (denn $A^+A^{++} = A^+A = I$) , also sind die Aussagen (a) und (c) entsprechend auch für die Matrix A^+ äquivalent. Da nun die *Spalten* von A^+ die Konjugiert–Komplexen der *Zeilen* von A sind und somit genau dann ein ONS bilden, wenn auch die Zeilen von A ein ONS bilden, sind (c) und (d) ebenfalls äquivalent. ∎

30.51

Bemerkung zu 30.50,e: Zunächst besagt (e), dass für alle $\overset{\downarrow}{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$\|A\overset{\downarrow}{x}\|^2 = A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{x} = \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{x} = \|\overset{\downarrow}{x}\|^2$, also (e'): $\boxed{\|A\overset{\downarrow}{x}\| = \|\overset{\downarrow}{x}\| \ \ \forall\ \overset{\downarrow}{x}}$,

d.h. die Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \overset{\downarrow}{x} \mapsto A\overset{\downarrow}{x}$ erhält die Längen, ist also **längentreu**.

Als **winkeltreue Abbildung** bezeichnet man in allgemeinen unitären Räumen Abbildungen, die *orthogonale* Elemente wieder in *orthogonale* Elemente überführen.
In unserem Fall ist:

$\overset{\downarrow}{x} \perp \overset{\downarrow}{y} \Rightarrow A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y} = 0$, d.h. $A\overset{\downarrow}{x} \perp A\overset{\downarrow}{y}$, also (e"): $\boxed{\overset{\downarrow}{x} \perp \overset{\downarrow}{y} \Rightarrow A\overset{\downarrow}{x} \perp A\overset{\downarrow}{y}}$.

Aus diesen beiden Bedingungen (e') und (e") ergibt sich umgekehrt die in (e) genannte Bedingung:

denn aus (e') und (e") folgt für beliebige $\overset{\downarrow}{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overset{\downarrow}{e}_j$, $\overset{\downarrow}{y} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overset{\downarrow}{e}_j \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{y} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A\overset{\downarrow}{e}_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k A\overset{\downarrow}{e}_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j^* \beta_k \,(A\overset{\downarrow}{e}_j \cdot A\overset{\downarrow}{e}_k) = \\ &\overset{\text{(e")}}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* \beta_j \,\|A\overset{\downarrow}{e}_j\|^2 \overset{\text{(e')}}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* \beta_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overset{\downarrow}{e}_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \overset{\downarrow}{e}_k\right) = \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y}\,. \end{aligned}$$

Wenn A eine *reelle* Matrix ist, dann besagt (e), dass die Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \overset{\downarrow}{x} \mapsto A\overset{\downarrow}{x}$ auch im gewohnten, anschaulichen Sinne **winkeltreu** ist:

ist α der Winkel zwischen $\overset{\downarrow}{x}$ und $\overset{\downarrow}{y}$ und α_A der Winkel zwischen $A\overset{\downarrow}{x}$ und $A\overset{\downarrow}{y}$, so folgt aus (e):

$$\cos\alpha_A = \frac{A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{y}}{\|A\overset{\downarrow}{x}\|\|A\overset{\downarrow}{y}\|} = \frac{\overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y}}{\|\overset{\downarrow}{x}\|\|\overset{\downarrow}{y}\|} = \cos\alpha\,.$$ ∎

z.B.: Sei $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & i & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. A ist **unitär**, da die Spalten $\overset{\downarrow}{a}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$,
$\overset{\downarrow}{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{\downarrow}{a}_3 = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ein ONS bilden, d.h. die Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind: $\|\overset{\downarrow}{a}_1\| = \|\overset{\downarrow}{a}_3\| = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1$, $\|\overset{\downarrow}{a}_2\| = 1$,

$\overset{\downarrow}{a}_1 \cdot \overset{\downarrow}{a}_2 = \overset{\downarrow}{a}_2 \cdot \overset{\downarrow}{a}_3 = 0 + 0 + 0 = 0$, $\overset{\downarrow}{a}_1 \cdot \overset{\downarrow}{a}_3 = (1/\sqrt{2})(i/\sqrt{2}) + (-i/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 0$.

Sei z.B. $\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-i \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix}$ und $\overset{\downarrow}{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3i \\ 1+i\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Dann ist: $\| \overset{\downarrow}{x} \| = \sqrt{2+1+4+9} = 4$,

$\| \overset{\downarrow}{y} \| = \sqrt{9+9+1+2} = \sqrt{21}$, $\overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y} = \left(\sqrt{2}+i\right)(-3) + 6i - 3i\left(1+i\sqrt{2}\right) = 0$, d.h. $\overset{\downarrow}{x} \perp \overset{\downarrow}{y}$,

und:

$$A\overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 2i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)i \end{pmatrix},$$

$$A\overset{\downarrow}{y} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)i \end{pmatrix},$$

somit:

			$\overset{\downarrow}{x}$	$\overset{\downarrow}{y}$
			$\sqrt{2}-i$	-3
			2	$3i$
			$3i$	$1+i\sqrt{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$1-\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}-1$
0	i	0	$2i$	-3
$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$i+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3i}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+i$
	A		$A\overset{\downarrow}{x}$	$A\overset{\downarrow}{y}$

$\|A\overset{\downarrow}{x}\| = \sqrt{\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} + \left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4 = \| \overset{\downarrow}{x} \|$,

$\|A\overset{\downarrow}{y}\| = \sqrt{\left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} + 9 + \frac{1}{2} + \left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{21} = \| \overset{\downarrow}{y} \|$, $\quad A\overset{\downarrow}{x} \cdot A\overset{\downarrow}{y} =$

$= \left[\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\right]\left[-\left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\right] + 6i + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)i\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)i\right] =$

$= 0 = \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y}$, also auch $A\overset{\downarrow}{x} \perp A\overset{\downarrow}{y}$.

30.52

> Wenn A **unitär** ist, so ist λA *genau dann* ebenfalls **unitär**, wenn $|\lambda| = 1$.
>
> Wenn A und B **unitär** (und gleich groß) sind, dann ist AB **unitär**;
>
> und wenn A *regulär* und **unitär** ist, dann ist auch die **Inverse** $A^{-1} = A^{+}$ **unitär**.

Das ist einfach nachzurechnen: aus $AA^{+} = I$ und $BB^{+} = I$ folgt:

$(\lambda A)(\lambda A)^{+} = \lambda\lambda^{*}AA^{+} = |\lambda|^2 I = I$ genau dann, wenn $|\lambda| = 1$, und:

$(AB)(AB)^{+} = ABB^{+}A^{+} = AIA^{+} = AA^{+} = I$, $\left(A^{-1}\right)\left(A^{-1}\right)^{+} = A^{+}A^{++} = A^{+}A = I$.

30.53

A **normal** $\Leftrightarrow$ **(a)** $\boxed{AA^+ = A^+A}$ (per def.),

$\Leftrightarrow$ **(b)** $\boxed{A^+ \overset{\downarrow}{x} \cdot A^+ \overset{\downarrow}{y} = A \overset{\downarrow}{x} \cdot A \overset{\downarrow}{y}}$ $\forall\ \overset{\downarrow}{x}, \overset{\downarrow}{y} \in \mathbb{C}^n$;

$\Leftrightarrow$ **(c)** für die Zeilen $\vec{a}_i$ und Spalten $\overset{\downarrow}{a}_i$ von A hat man

die *Skalarprodukte*: $\boxed{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = (\overset{\downarrow}{a}_i \cdot \overset{\downarrow}{a}_j)^*}$.

Aus (c) folgt mit $i = j$ insbesondere, dass in einer **normalen** Matrix (für $j = 1, \ldots, n$) die j **–te Zeile und** j **–te Spalte dieselbe Norm** haben. Das ist allerdings *nur eine notwendige* und *keine hinreichende* Bedingung für die Normalität einer Matrix!

Der **Beweis** von 30.53 ist wieder elementar: Wenn A die Zeilen $\vec{a}_i$ und Spalten $\overset{\downarrow}{a}_j$ hat, dann hat A^+ die Spalten $\overset{\downarrow}{b}_i = (\vec{a}_i)^+$ und Zeilen $\vec{b}_j = (\overset{\downarrow}{a}_j)^+$. Damit ist

$AA^+ = (\vec{a}_i\, \overset{\downarrow}{b}_j)_{n,n} = (\vec{a}_i\, (\vec{a}_j)^+)_{n,n} = (\vec{a}_j \cdot \vec{a}_i)_{n,n} = (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)^*_{n,n}$

und $A^+A = (\vec{b}_i\, \overset{\downarrow}{a}_j)_{n,n} = ((\overset{\downarrow}{a}_i)^+\, \overset{\downarrow}{a}_j)_{n,n} = (\overset{\downarrow}{a}_i \cdot \overset{\downarrow}{a}_j)_{n,n}$ und es folgt:

$AA^+ = A^+A \Leftrightarrow \overset{\downarrow}{a}_i \cdot \overset{\downarrow}{a}_j = (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)^* \ \forall i, j = 1, \ldots, n$, d.h. (a) und (c) sind äquivalent.

Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt aus der Charakterisierung der Adjungierten in Nummer 30.38:

$A^+ \overset{\downarrow}{x} \cdot A^+ \overset{\downarrow}{y} = \overset{\downarrow}{x} \cdot AA^+ \overset{\downarrow}{y} \overset{(a)}{=} \overset{\downarrow}{x} \cdot A^+A \overset{\downarrow}{y} = A \overset{\downarrow}{x} \cdot A \overset{\downarrow}{y}$, also (a) $\Rightarrow$ (b), und

$\overset{\downarrow}{x} \cdot AA^+ \overset{\downarrow}{y} = A^+ \overset{\downarrow}{x} \cdot A^+ \overset{\downarrow}{y} \overset{(b)}{=} A \overset{\downarrow}{x} \cdot A \overset{\downarrow}{y} = A^+A \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{y} \Rightarrow AA^+ = (A^+A)^+ = A^+A$, d.h. (b) $\Rightarrow$ (a). ▮

30.54

Mit A sind auch die **Vielfachen** λA ($\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig), die **Adjungierte** A^+ und — falls A *regulär* ist — die **Inverse** A^{-1} **normal**.

Wenn A und B **normal** (und gleich groß) und A und B^+ *vertauschbar* sind, dann ist auch AB **normal**.

Denn: wenn A **normal** ist, hat man für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$: $(\lambda A)(\lambda A)^+ = \lambda\lambda^* AA^+ = \lambda^* A^+ \lambda A = (\lambda A)^+(\lambda A)$, d.h. λA ist **normal**, und: $A^+A^{++} = A^+A = AA^+ = A^{++}A^+$, d.h. A^+ ist **normal**; wenn außerdem A *regulär* ist, folgt noch: $(A^{-1})\left(A^{-1}\right)^+ = A^{-1}\left(A^+\right)^{-1} = \left(A^+A\right)^{-1} = \left(AA^+\right)^{-1} = \left(A^+\right)^{-1} A^{-1} = \left(A^{-1}\right)^+ \left(A^{-1}\right)$, d.h. A^{-1} ist ebenfalls **normal**.

Nun seien A und B **normal**. Wenn A und B^+ *vertauschbar sind*, dann sind auch A^+ und B *vertauschbar*: $A^+B = (B^+A)^+ = (AB^+)^+ = BA^+$, und es gilt: $(AB)(AB)^+ = ABB^+A^+ = AB^+BA^+ = B^+AA^+B = B^+A^+AB = (AB)^+(AB)$, also ist AB **normal**. ▮

Es folgen noch einige **Beispiele** normaler und auch nicht normaler Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} - \frac{2}{7}i \\ \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i & \frac{3}{7} \end{pmatrix} :$$

hermitesch, insbesondere **normal**,
aber *nicht* unitär;

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} - \frac{2}{7}i \\ \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} :$$

hermitesch und **unitär**,
insbesondere **normal**;

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}i & -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i \\ \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i & \frac{3}{7}i \end{pmatrix} :$$

schiefhermitesch, insbesondere **normal**,
aber *nicht* unitär;

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}i & -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i \\ \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i & -\frac{3}{7}i \end{pmatrix} :$$

schiefhermitesch und **unitär**,
insbesondere **normal**;

$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i & -\frac{3}{7}i \\ \frac{3}{7}i & -\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i \end{pmatrix} :$$

unitär, insbesondere **normal**,
aber *weder* hermitesch *noch* schiefhermitesch;

$$A_6 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i & -\frac{3}{7}i \\ \frac{3}{7}i & \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i \end{pmatrix} :$$

normal, aber *weder* unitär
noch hermitesch *noch* schiefhermitesch;

$$A_7 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} + \frac{2}{7}i & -\frac{3}{7}i \\ \frac{3}{7}i & -\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i \end{pmatrix} :$$

nicht normal, insbesondere *weder* unitär
noch hermitesch *noch* schiefhermitesch;

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} :$$

hermitesch (reell symmetrisch),
insbesondere **normal**,
aber *nicht* unitär;

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix} :$$

hermitesch und **unitär**
(reell symmetrisch und orthogonal),
insbesondere **normal**;

$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} :$$

unitär (reell orthogonal),
insbesondere **normal**
aber *weder* hermitesch *noch* schiefhermitesch;

$$B_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} :$$

normal, aber *weder* unitär (orthogonal)
noch hermitesch (symmetrisch)
noch schiefhermitesch (schiefsymmetrisch);

$$B_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix} :$$

nicht normal, insbesondere
weder unitär (orthogonal)
noch hermitesch (symmetrisch)
noch schiefhermitesch (schiefsymmetrisch);

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} :$$

hermitesch (reell symmetrisch),
insbesondere **normal**,
aber *nicht* unitär (orthogonal);

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} :$$

schiefhermitesch (reell schiefsymmetrisch),
insbesondere **normal**,
aber *nicht* unitär (orthogonal);

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} :$$

normal, aber
weder hermitesch (symmetrisch)
noch schiefhermitesch (schiefsymmetrisch)
noch unitär (orthogonal);

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} :$$

nicht normal, insbesondere
weder hermitesch (symmetrisch)
noch schiefhermitesch (schiefsymmetrisch)
noch unitär (orthogonal).

Kurze **Begründungen**: die Spalten und Zeilen der jeweils betrachteten Matrizen A_ν, B_ν, C_ν bezeichnen wir mit $\overset{\downarrow}{a}_j$, $\vec{a}_j$ bzw. $\overset{\downarrow}{b}_j$, $\vec{b}_j$ bzw. $\overset{\downarrow}{c}_j$, $\vec{c}_j$.

Zunächst bemerken wir, dass sämtliche Spalten und Zeilen der 12 Matrizen A_ν, B_ν die Länge
$\| \overset{\downarrow}{a}_j \| = \|\vec{a}_j\| = \| \overset{\downarrow}{b}_j \| = \|\vec{b}_j\| = \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{9}{49} + \frac{4}{49}} = 1$ haben.

Zu A_1**:** $A_1^+ = A_1$, aber $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{3}{7}\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right) + \left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right)\frac{3}{7} \neq 0$;

zu A_2**:** $A_2^+ = A_2$ und $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{3}{7}\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right) + \left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right)\left(-\frac{3}{7}\right) = 0$;

zu A_3**:** $A_3^+ = -A_3$, aber $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \left(-\frac{3}{7}i\right)\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right) + \left(-\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right)\frac{3}{7}i \neq 0$;

zu A_4**:** $A_4^+ = -A_4$ und $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \left(-\frac{3}{7}i\right)\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right) + \left(-\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right)\left(-\frac{3}{7}i\right) = 0$;

zu A_5**:** $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right)\frac{3}{7}i + \frac{3}{7}i\left(-\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right) = 0$, aber $A_5^+ \neq \pm A_5$;

zu A_6**:** $\| \overset{\downarrow}{a}_1 \| = \|\vec{a}_1\| = 1$, $\| \overset{\downarrow}{a}_2 \| = \|\vec{a}_2\| = 1$ (s.o.) und

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 &= \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right)\frac{3}{7}i + \frac{3}{7}i\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right) = \frac{36}{49}i\,, \\ \overset{\downarrow}{a}_1 \cdot \overset{\downarrow}{a}_2 &= \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right)\left(-\frac{3}{7}i\right) - \frac{3}{7}i\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}i\right) = -\frac{36}{49}i \end{aligned}\right\}, \text{ also } \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (\overset{\downarrow}{a}_1 \cdot \overset{\downarrow}{a}_2)^* \neq 0\,;$$

darüberhinaus ist $A_6^+ \neq \pm A_6$;

zu A_7**:** $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right)\frac{3}{7}i + \frac{3}{7}i\left(-\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right) = \frac{12}{49}$ und

$\overset{\downarrow}{a}_1 \cdot \overset{\downarrow}{a}_2 = \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right)\left(-\frac{3}{7}i\right) - \frac{3}{7}i\left(-\frac{6}{7} - \frac{2}{7}i\right) = -\frac{12}{49}$, also $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \neq (\overset{\downarrow}{a}_1 \cdot \overset{\downarrow}{a}_2)^* = \overset{\downarrow}{a}_1 \cdot \overset{\downarrow}{a}_2$.

Zu B_1**:** B_1 ist *reell* mit $B_1^t = B_1$, aber (z.B.) $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{12}{49} + \frac{18}{49} + \frac{6}{49} = \frac{36}{49} \neq 0$;

zu B_2**:** B_2 ist *reell* mit $B_2^t = B_2$, alle Zeilen haben die Länge 1 (s.o.) und
$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{12}{49} - \frac{18}{49} + \frac{6}{49} = 0$, $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \frac{6}{49} + \frac{12}{49} - \frac{18}{49} = 0$, $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \frac{18}{49} - \frac{6}{49} - \frac{12}{49} = 0$;

zu B_3**:** wie bei B_2 haben alle Zeilen die Länge 1 und es ist $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$, aber B_3 ist reell mit $B_3^t \neq \pm B_3$;

zu B_4**:** alle Spalten und Zeilen sind *reell* und haben die gleiche Länge 1 (s.o.) und
$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \overset{\downarrow}{b}_1 \cdot \overset{\downarrow}{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \overset{\downarrow}{b}_1 \cdot \overset{\downarrow}{b}_3 = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \overset{\downarrow}{b}_2 \cdot \overset{\downarrow}{b}_3 = \frac{18}{49} + \frac{12}{49} + \frac{6}{49} = \frac{36}{49}$;

zu B_5**:** alle Spalten und Zeilen haben zwar die gleiche Länge, aber (z.B.)
$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \frac{6}{49} - \frac{12}{49} + \frac{18}{49} = \frac{12}{49}$, $\overset{\downarrow}{b}_2 \cdot \overset{\downarrow}{b}_3 = -\frac{6}{49} + \frac{12}{49} - \frac{18}{49} = -\frac{12}{49} \neq (\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3)^* = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3$.

Zu C_1**:** C_1 ist *reell* mit $C_1^t = C_1$, aber (z.B.) $\|\vec{c}_3\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{25}} = \frac{3}{5}\sqrt{2} \neq 1$;

zu C_2**:** C_2 ist *reell* mit $C_1^t = -C_1$, aber (wie oben) $\|\vec{c}_3\| \neq 1$;

zu C_3**:** alle Zeilen und Spalten haben die Länge $\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$ und C_3 ist *reell* mit
$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = \overset{\downarrow}{c}_1 \cdot \overset{\downarrow}{c}_2 = -\frac{9}{25}$, $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_3 = \overset{\downarrow}{c}_1 \cdot \overset{\downarrow}{c}_3 = \frac{12}{25}$, $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_3 = \overset{\downarrow}{c}_2 \cdot \overset{\downarrow}{c}_3 = \frac{12}{25}$, jedoch ist $C_3^t \neq \pm C_3$;

zu C_4**:** z.B. $\|\vec{c}_2\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{2}$, $\| \overset{\downarrow}{c}_2 \| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$, also $\|\vec{c}_2\| \neq \| \overset{\downarrow}{c}_2 \|$.

31 Allgemeine lineare Abbildungen.

Stichpunkte: Definition einer linearen Abbildung, Nullraum, Bildraum, Rang, Defekt, Rangformel; Lösbarkeit und Lösungsgesamtheit (Art der allgemeinen Lösung) einer linearen Gleichung.

Im Folgenden seien $U = (U, \mathbb{K}, +, \cdot)$, $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, ... stets lineare Räume über *demselben* Skalarkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

31.A Linearität.

31.1

Eine Abbildung $\varphi : U \to V : x \mapsto \varphi x$
(vom **Urbildraum** U in den **Zielraum** V)

ist eine **lineare Abbildung**
(=**linearer Operator** , **lineare Transformation**) , wenn

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi(x+y) & = & \varphi x + \varphi y \\ \varphi(\lambda x) & = & \lambda \varphi x \end{array}\right\} \text{ für alle } x, y \in U \,,\ \lambda \in \mathbb{K} \,.$$

(Es ist üblich, φx statt $\varphi(x)$ zu schreiben.)

Anschaulich bedeutet die **Linearität** einer Abbildung $\varphi : U \to V$:

[1] dass es gleichgültig ist, ob man zwei Elemente $x, y \in U$ zuerst in U addiert und dann die Summe $x + y$ abbildet: das liefert das Element $\varphi(x+y) \in V$,

oder ob man beide Elemente zunächst nach V abbildet und dann erst die Bilder φx , φy in V addiert: das ergibt das Element $\varphi x + \varphi y \in V$:

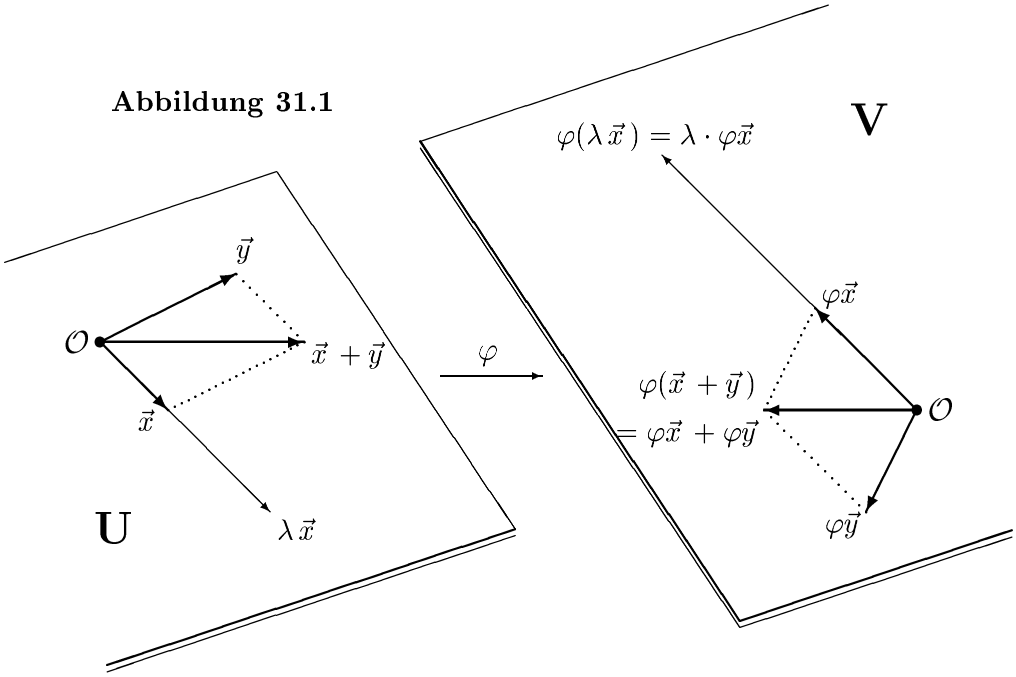
$\boxed{\varphi(x+y) = \varphi x + \varphi y}$

[2] und ebenso, dass es gleichgültig ist, ob man ein Element $x \in U$ zunächst in U mit einem Skalar λ multipliziert und dann das Vielfache λx abbildet: das liefert das Element $\varphi(\lambda x) \in V$,

oder ob man zunächst x nach V abbildet und dann erst das Bild φx in V mit dem Skalar λ multipliziert: das ergibt das Element $\lambda\, \varphi x \in V$:

$\boxed{\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi x}$:

Abbildung 31.1



Das Bild der Summe ist die Summe der Bilder, das Bild des λ–Fachen ist das λ–Fache des Bildes.

31.2 Jede lineare Abbildung $\varphi : u \to V$ bildet das Nullelement $o \in U$ auf das Nullelement $o \in V$ ab: $\boxed{\varphi o = o}$.

Denn aus der Linearität von φ ergibt sich mit einem beliebigen Element $x \in U$:
$\varphi o = \varphi(x - x) = \varphi x - \varphi x = o$.

31.3 (fast triviale) **Beispiele linearer Abbildungen**:

Die **Nullabbildung** $\boxed{O : U \to V : x \mapsto Ox = o}$, die den ganzen Raum U auf das Nullelement $o \in V$ abbildet,

die **identische Abbildung** $\boxed{I : U \to U : x \mapsto Ix = x}$, die den ganzen Raum U *unverändert* lässt, und für einen linearen Teilraum U_0 von U

die **Einbettung** (= **Inklusion**) $\boxed{\iota : U_0 \hookrightarrow U : x \mapsto \iota x = x}$

(Die identische Abbildung wird oft mit id bezeichnet: $\mathrm{id}\, x = Ix = x \;\; \forall x$.)

Weitere typische und wichtige Beispiele linearer Abbildungen:

31.4

Abbildungen von einem linearen Raum U in seinen Skalarkörper $\mathbb{K}$ nennt man auch **Funktionale** auf U

31.5

Ist U ein unitärer linearer Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, so wird für jedes Element $a \in U$ durch $\boxed{p_a : U \to \mathbb{K} : x \mapsto p_a x = \langle a \mid x \rangle}$
ein **lineares Funktional** p_a auf U definiert
(siehe die Axiome (IP 3) und (IP 4) in Nummer 21.22).

Beachte aber, dass im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ das Funktional $V \to \mathbb{K} : x \mapsto \langle x \mid a \rangle$ *nicht* linear ist, da für nicht–reelle λ gilt: $\langle \lambda x \mid a \rangle = \lambda^* \langle x \mid a \rangle \neq \lambda \langle x \mid a \rangle$!

31.6

Für jeden Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ sind die beiden Abbildungen
$\varphi_n : \vec{x} \mapsto \vec{n} \times \vec{x}$ und $\Psi_n : \vec{x} \mapsto \vec{x} \times \vec{n}$
lineare Abbildungen des Raumes $\mathbb{R}^3$ in sich
(siehe Abbildung 24.4 und die Axiome (VP6) und (VP7) in Nummer 24.5).

31.7

Eine der Regeln, durch die **Determinanten** definiert werden (siehe Lektion 34, Regel (D4)), besagt, dass für jede Zeile $i = 1, \ldots, n$ und jede Spalte $j = 1, \ldots, n$

die Funktionen $\det : \vec{a}_i \mapsto \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$ und $\det : \overset{\downarrow}{a}_j \mapsto \det(\ldots, \overset{\downarrow}{a}_j, \ldots)$

lineare Funktionale sind. (vgl. auch Nr. 24.18 .)

31.8

Jede (m, n)–Matrix A definiert durch

$\boxed{\hat{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \overset{\downarrow}{x} \mapsto \hat{A}(\overset{\downarrow}{x}) := A\, \overset{\downarrow}{x}}$ **eine lineare Abbildung** .

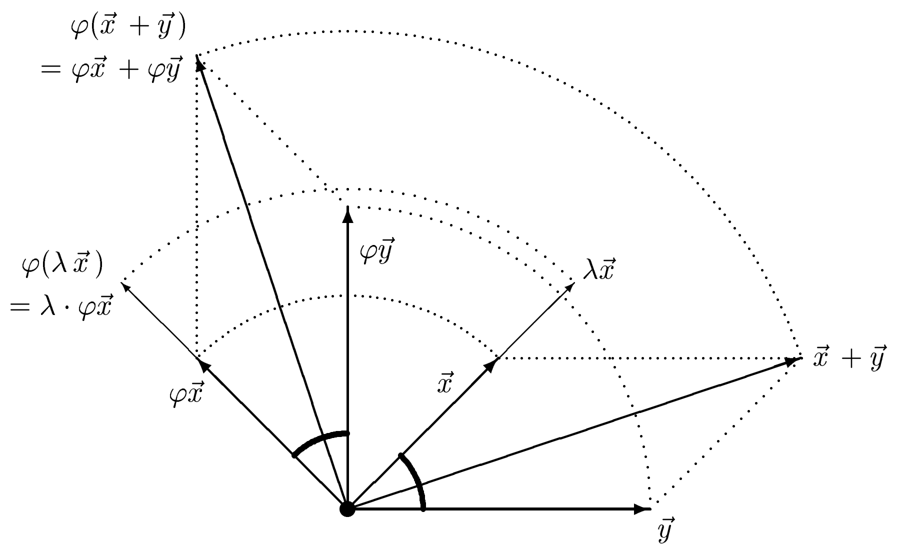
Man bezeichnet diese lineare Abbildung meistens wieder mit A (statt $\hat{A}$) und schreibt in der Regel $A\, \overset{\downarrow}{x}$ (oder $A\vec{x}$) statt $A(\overset{\downarrow}{x})$.

Beachte, dass eine (m, n)–Matrix a priori keine Abbildung *ist*, sondern nur (bzgl. vorgegebener Basen) als lineare Abbildung *interpretiert* werden kann — so, wie ein Zahlen–Tripel (x, y, z) a priori kein Vektor des $\mathbb{R}^3$ ist, sondern nur bzgl. einer Basis des $\mathbb{R}^3$ als Vektor interpretiert wird. Wir werden noch sehen, dass dieselbe Matrix bzgl. verschiedener Basen auch verschiedene lineare Abbildungen darstellt und dass sogar *jede* lineare Abbildung von einem n–dimensionalen linearen Raum in einen m–dimensionalen linearen Raum als (m, n)–Matrix geschrieben werden kann!

31.9 Jede **Drehung** des $\mathbb{R}^n$ um eine Achse durch den Koordinatenursprung ist eine **lineare** Abbildung.

Das kann man sich an der folgenden Skizze klarmachen:

Abbildung 31.2
Drehungen erhalten alle Längen und Winkel



31.10 Ist U ein linearer Teilraum eines unitären Raumes V und ist $\{e_1, e_2, \dots\}$ eine ONB von U, so ist die **orthogonale Projektion** (siehe Nummer 23.12)

$$\varphi_U \,:\, V \to V \,:\, x \mapsto \varphi_U x = x_U = \sum_j \langle\, e_j \mid x \,\rangle\, e_j$$ eine **lineare** Abbildung.

(Das ist eine Folge von Nummer 31.5.)

31.B Eineindeutigkeit und Surjektivität.

Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ ist "**wohldefiniert**", wenn für alle $x \in U$ der Funktionswert $y = \varphi x \in V$ *wohldefiniert* ist, d.h. wenn es zu jedem $x \in U$ *genau ein* $y \in V$ mit $\varphi x = y$ gibt.

Es kann aber vorkommen,

[i] dass es zu einem $y \in V$ *mehrere* Urbilder $x_1, x_2, \ldots \in U$ gibt mit $y = \varphi x_1 = \varphi x_2 = \ldots$, oder

[ii] dass es zu einem $y \in V$ *kein* Urbild $x \in U$ gibt, so dass also $\varphi x \neq y \; \forall x \in U$:

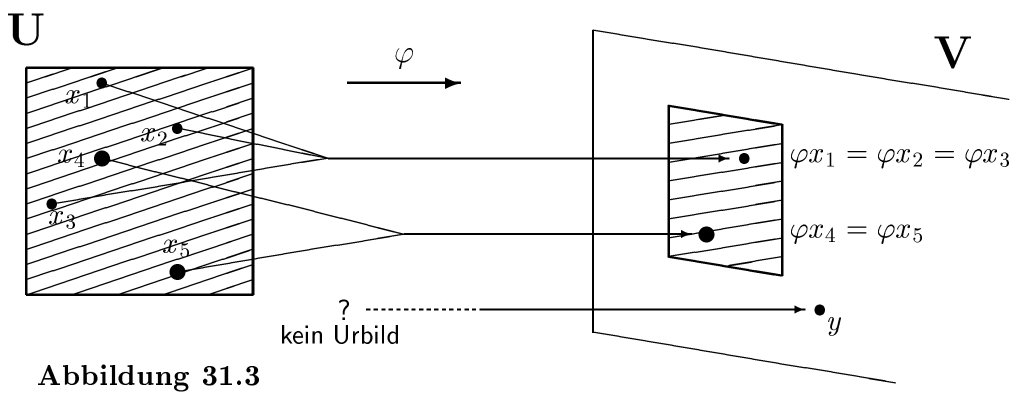


Abbildung 31.3

31.11

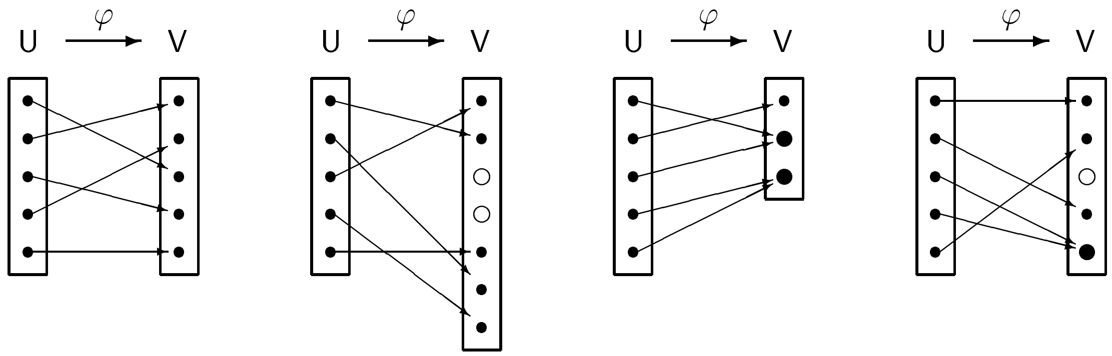
Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ heißt:

$\boxed{\text{a}}$ **eineindeutig** (auch: **umkehrbar-eindeutig** oder **injektiv**), kurz: **1–1**, wenn *verschiede* Elemente aus U stets auch *verschiedene Bilder* haben, wenn also für $x_1, x_2 \in U$ gilt: $\boxed{x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \varphi x_1 \neq \varphi x_2}$; hierzu äquivalent ist die Aussage, dass die Urbilder übereinstimmen müssen, wenn die Bilder übereinstimmen: $\boxed{\varphi x_1 = \varphi x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2}$;

$\boxed{\text{b}}$ eine Abbildung **auf** (auch: **surjektiv**), wenn jedes Element $y \in V$ das Bild eines Elementes $x \in U$ ist, d.h. wenn es zu jedem $y \in V$ ein $x \in U$ mit $\varphi x = y$ gibt: $\boxed{\forall y \in V \; \exists x \in U \; : \; \varphi x = y}$;

$\boxed{\text{c}}$ **bijektiv**, wenn φ **eineindeutig und auf** ist.

Das folgende (etwas primitive) Schema macht deutlich, was mit diesen Begriffen gemeint ist:



1–1 und **auf**, also **bijektiv**	**1–1**, aber **nicht auf**	**auf**, aber **nicht 1–1**	**weder auf noch 1–1**

Abbildung 31.4 Zur Injektivität und Surjektivität einer Abbildung φ

31.12

> Eine bijektive lineare Abbildung $\varphi : U \to V$ von einem linearen Raum U auf einen linearen Raum V nennt man auch einen **Isomorphismus**; und wenn es einen Isomorphismus $\varphi : U \to V$ *gibt*, dann heißen die beiden Räume U und V **isomorph**.
> Eine bijektive lineare Abbildung $\varphi : U \to V$ von einem linearen Raum U **auf sich** heißt **regulär**.

Zwei isomorphe lineare Räume stimmen im Wesentlichen überein: sie unterscheiden sich (was ihre algebraische Struktur betrifft) höchstens durch Art und Namen ihrer Elemente.

Zum Beispiel:

1. Die **identische Abbildung** $I : U \to U : x \mapsto x$ eines linearen Raumes U auf sich ist **regulär**.

2. Im Fall von zwei nichttrivialen linearen Räumen $U \neq \{o\}$, $V \neq \{o\}$ ist die **Nullabbildung** $O : U \to V : x \mapsto o$ **nicht regulär**: sie ist "in hohem Maße" *weder eineindeutig noch surjektiv*.

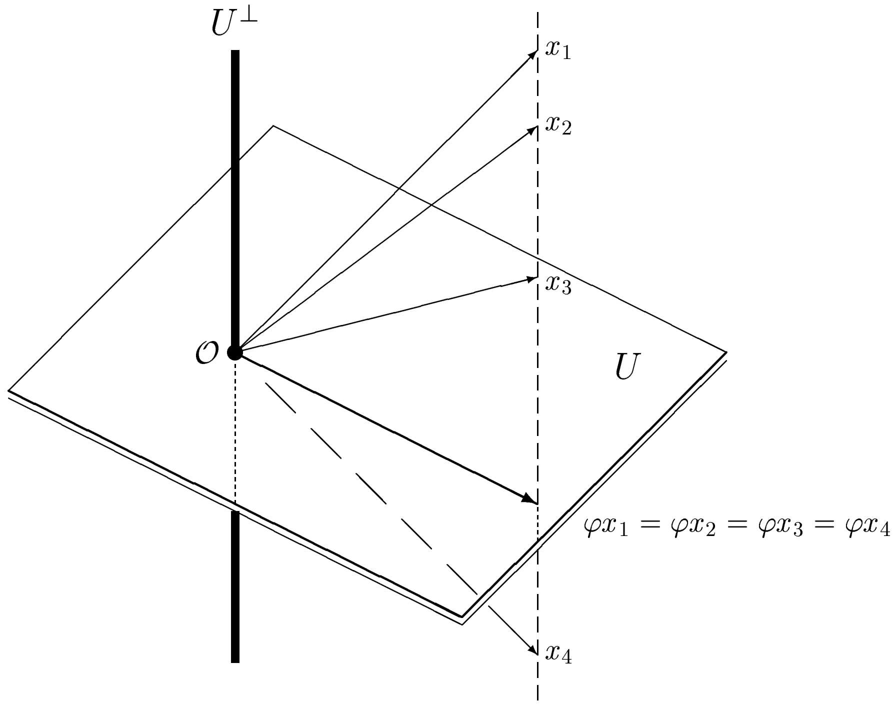
3. Die durch eine **reguläre** (n,n)**-Matrix** A definierte lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ (s. Nr. 31.8) ist ebenfalls **regulär**: denn für jeden Vektor $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ der *eindeutig* bestimmte Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $A\vec{x} = AA^{-1}\vec{y} = \vec{y}$.

4. Jede **Drehung** des $\mathbb{R}^3$ um eine Achse durch den Koordinatenursprung (s. Nr. 31.9) ist offensichtlich **regulär**, denn der Raum $\mathbb{R}^3$ bleibt durch die Drehung "als Ganzes erhalten".

5. Die **orthogonale Projektion** $\varphi_U : V \to V$ von einem unitären linearen Raum V auf einen echten linearen Teilraum U ist **weder surjektiv** (das ist klar, wenn $U \neq V$) **noch eineindeutig**, denn (z.B.) für jedes Element x, das zu U orthogonal ist, ist $\varphi_U\, x = o$: es gibt also "viele" Elemente $x \in V$ mit $\varphi_U\, x = o$:

Abbildung 31.5

Die Projektion φ auf einen (echten) linearen Teilraum U von V ist **nicht 1–1**, und als lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ von V in sich auch **nicht surjektiv**:



6. Der Differentialoperator $D = \dfrac{d}{dx} : C^1[a,b] \to \mathbb{F}[a,b] : f(x) \mapsto f'(x)$ vom linearen Raum $C^1[a,b]$ aller über $[a,b]$ differenzierbaren Funktionen in den linearen Raum *aller* Funktionen über $[a,b]$ (siehe Abschnitt 20.F) ist **weder eineindeutig noch surjektiv**: denn für alle Funktionen $f \in C^1[a,b]$ und alle Konstanten $c \in \mathbb{C}$ ist $D(f+c) = f' = Df$ (also D nicht 1-1) und es *gibt* Funktionen $g(x)$, die über $[a,b]$ keine Stammfunktion besitzen, z.B. die Funktion $g(x) := 1$, wenn x rational ist, und $g(x) = 0$ für alle irrationalen x (also ist D auch nicht surjektiv).

31.13

> Jeder n-dimensionale lineare Raum V über $\mathbb{K}$ ist **isomorph** zum Raum $\mathbb{K}^n$:
> ist B irgendeine Basis von V, so wird durch:
> $\Phi : V \to \mathbb{K}^n : x \mapsto \Phi x = \overset{\downarrow}{a}$ mit $x \overset{B}{=} \overset{\downarrow}{a}$ (s. Nr. 21.8)
> ein **Isomorhismus** von V auf den $\mathbb{K}^n$ definiert..

(Diese Aussage ist in Nummer 21.2, (B4), und Nummer 21.8 enthalten.)

31.C Zusammensetzung linearer Abbildungen.

31.14

Für zwei Abbildungen $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ ist die Abbildung $\psi\varphi = \psi \circ \varphi : U \to W$ definiert durch:

$$\boxed{(\psi\varphi)x = (\psi \circ \varphi)x := \psi\Big(\varphi(x)\Big) \quad \forall x \in U}\ .$$

$\psi\varphi = \psi \circ \varphi$ ist die **Zusammensetzung** (auch: die **Hintereinanderausführung** oder auch das **Produkt**) der Abbildungen φ und ψ.

Für $\psi\varphi = \psi \circ \varphi$ lies: "ψ **nach** φ" oder "ψ **kreis** φ" oder auch "ψ **mal** φ".
Aber beachte, dass dieses Produkt nicht zu verwechseln ist mit dem "gewöhnlichen" Produkt fg "gewöhnlicher" Funktionen f und g: $(fg)(x) = f(x)g(x)$!

Abbildung 31.6
Zusammensetzung zweier Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, dotted, "\psi\,\varphi := \psi \circ \varphi"] & V \arrow[r, "\psi"'] & W \\
x \arrow[r, mapsto] & \varphi x \arrow[r, mapsto] & \psi(\varphi x) = (\psi \circ \varphi)x
\end{tikzcd}$$

Beachte die Reihenfolge der Abbildungen bei der zusammengesetzten Abbildung $\psi \circ \varphi$:
zuerst wird φ, **danach** wird ψ angewandt!

z.B.: Fasst man die (n,k)–Matrix B als lineare Abbildung $B : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ und die (m,n)–Matrix A als lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ auf, so wird das Produkt (die Zusammensetzung) $A \circ B$ dieser beiden Abbildungen gerade durch das (Matrix-) Produkt AB der beiden Matrizen dargestellt:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}^k & \overset{B}{\to} & \mathbb{C}^n & \overset{A}{\to} & \mathbb{C}^m \\[1em]
\mathbb{C}^k & & \overset{A\circ B = AB}{\longrightarrow} & & \mathbb{C}^m \\[1em]
\vec{x} & \overset{B}{\mapsto} & B\vec{x} & \overset{A}{\mapsto} & AB\vec{x}
\end{array}$$

Korrekter müsste man sagen: ist $\hat{A}$ die durch A und $\hat{B}$ die durch B definierte lineare Abbildung, so ist die Zusammensetzung $\hat{A} \circ \hat{B}$ gerade die durch das Produkt AB dargestellte lineare Abbildung:

$$\boxed{\hat{A} \circ \hat{B} = \widehat{AB}}\ .$$

31.15

Das Produkt (die Zusammensetzung) von zwei

(a) **linearen** Abbildungen ist wieder **linear** ;

(b) **eineindeutigen** Abbildungen ist wieder **eineindeutig** ;

(c) **surjektiven** Abbildungen ist wieder **surjektiv** ;

(d) **Isomorphismen** ist wieder ein **Isomorphismus** ;

(e) **regulären** Abbildungen ist wieder **regulär** .

31.16

Zu jedem Isomorphismus (bijektiven linearen Abbildung) $\varphi : U \to V$ gibt es eine **eindeutig bestimmte Inverse (= Umkehrabbildung)** $\varphi^{-1} : V \to U$ mit der Eigenschaft: $\boxed{\varphi^{-1}\varphi = I_U : U \to U \ \text{ und } \ \varphi\varphi^{-1} = I_V : V \to V}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \varphi^{-1}(y) = x \bullet \arrow[r, bend left=50, mapsto, "\varphi"] & \bullet\, y = \varphi(x) \arrow[l, bend left=50, mapsto, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Die Inverse ist ebenfalls ein Isomorphismus mit der Inversen $\boxed{\left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \varphi}$.

31.17

Insbesondere: Zu jeder **regulären** Abbildung $\varphi : U \to U$ gibt es eine **eindeutig bestimmte Inverse** $\varphi^{-1} : U \to U$ mit der Eigenschaft:

$\boxed{\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = I : U \to U}$;

φ^{-1} ist **ebenfalls regulär** mit der Inversen $\boxed{\left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \varphi}$.

z.B.: Inzwischen ist sicher klar, dass die **inverse Abbildung** zu der durch eine reguläre (n,n)-Matrix A dargestellten linearen Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ gerade durch die **inverse Matrix** A^{-1} dargestellt wird: $\boxed{\hat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}}$.

31.D Bildraum und Nullraum einer linearen Abbildung.

31.18 Für eine lineare Abbildung $\varphi : U \to V$ ist

$\boxed{1}$ $\mathcal{R}(\varphi) = \left\{ y = \varphi x \mid x \in U \right\}$ der **Bildraum** oder das **Bild** und

$\boxed{2}$ $\mathcal{N}(\varphi) = \left\{ x \in U \mid \varphi x = o \right\}$ der **Nullraum** oder der **Kern** von φ.

31.19 Der **Bildraum** $\mathcal{R}(\varphi)$, der manchmal auch mit $\mathrm{im}\,(\varphi)$ bezeichnet wird, ist ein **linearer Teilraum** des Zielraumes V und

der **Nullraum** $\mathcal{N}(\varphi)$, der manchmal auch mit $\mathrm{kern}\,(\varphi)$ bezeichnet wird, ist ein **linearer Teilraum** des Urbildraumes U der linearen Abbildung φ.

31.20 Die Dimension des Bildraumes bezeichnet man als den **Rang** und

die Dimension des Nullraumes als den **Defekt** der linearen Abbildung φ:

$\boxed{\mathrm{rang}\,(\varphi) = \dim \mathcal{R}(\varphi)\,,\ \mathrm{def}\,(\varphi) = \dim \mathcal{N}(\varphi)}$.

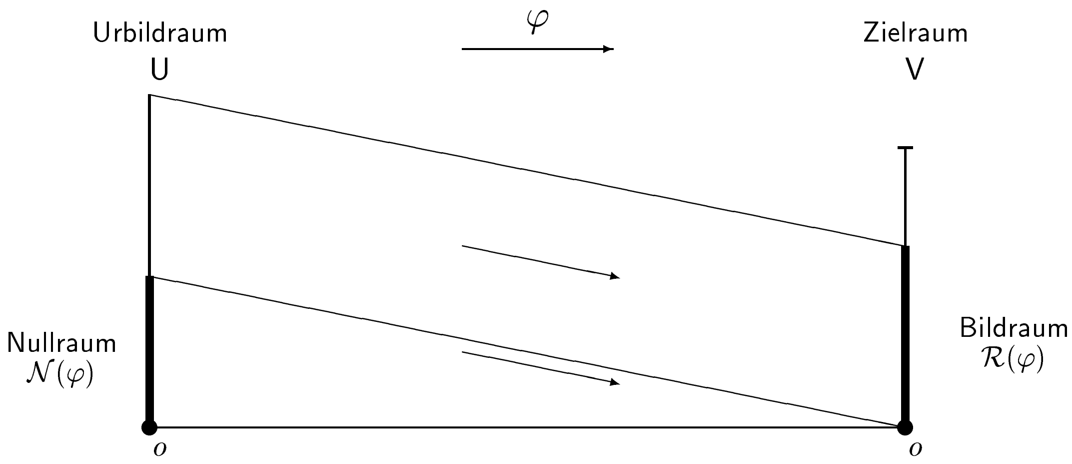


Abbildung 31.7 Bildraum und Nullraum einer lin. Abbildung

Die beiden nächsten Sätze sind sehr wichtig (!) : ***für jede lineare Abbildung*** $\varphi : U \to V$ ***gilt:***

31.21

$$\begin{array}{lcl} \varphi \ \textbf{surjektiv} & \iff & \mathcal{R}(\varphi) = V \\ \varphi \ \textbf{eineindeutig} & \iff & \mathcal{N}(\varphi) = \{o\} \end{array}$$

! (vgl. Abb. 31.7)

31.22

Wenn U endlich-dimensional ist, dann ist

$$\boxed{\dim U = \operatorname{rang} \varphi + \operatorname{def} \varphi}$$

! **Rangformel** (vgl. Abb. 31.7)

zu 31.21: Die erste Aussage ist trivialerweise richtig. Ist φ eineindeutig, so muss $\mathcal{N}(\varphi) = \{0\}$ sein, denn anderenfalls gäbe es "mehrere" Elemente $x \in U$ mit demselben Bild $\varphi x = o$. Ist umgekehrt $\mathcal{N}(\varphi) = \{0\}$ und sind $x, x' \in U$ zwei Elemente mit demselben Bild $\varphi x = \varphi x' = y$, so ist $\varphi(x' - x) = \varphi x' - \varphi x = y - y = o$, also $x' - x \in \mathcal{N}(\varphi) = \{o\}$, d.h. es ist $x' - x = o$, also $x' = x$: damit ist dann φ eineindeutig.

zu 31.22: Wir wollen den Beweisgang nur grob andeuten:

ausgehend von einer Basis $\{y_1, \ldots, y_r\}$ des r-dimensionalen Bildraumes $\mathcal{R}(\varphi)$ wählt man Elemente $e_1, \ldots, e_r \in U$ mit $\varphi e_j = y_j$ und stellt fest, dass diese ebenfalls linear unabhängig sind und somit einen r-dimensionalen linearen Teilraum U_r von U erzeugen. Als Nächstes ist es nicht schwer einzusehen, dass sich jedes Element $x \in U$ als Summe $x = x_r + x_0$ mit $x_r \in U_r$ und $x_0 \in \mathcal{N}(\varphi)$ darstellen lässt: ist $\varphi x = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_j$, so kann man $x_r = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j e_j$ und $x_0 = x - x_r$ wählen; wegen $U_r \cap \mathcal{N}(\varphi) = \emptyset$ ist diese Darstellung eindeutig. Ist also $\{e_{r+1}, \ldots, e_{r+d}\}$ eine Basis des d-dimensionalen Nullraumes $\mathcal{N}(\varphi)$, so muss $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+d}\}$ eine Basis von U sein: damit ist gezeigt, dass $r + d = n$. ▮

Hiermit bekommen wir z.B. die folgenden (bemerkenswerten!) **Charakterisierungen der Regularität einer linearen Abbildung** $\varphi : U \to U$ **von einem** n**-dimensionalen linearen Raum** U **in sich:** (das gilt natürlich auch, wenn $\varphi = A$ eine (n, n)-Matrix ist!)

31.23

$$
\begin{aligned}
\varphi \ \textbf{regulär} \ &\overset{\text{per def.}}{\Longleftrightarrow} \ \varphi \ \textbf{eineindeutig} \ \textit{und} \ \textbf{surjektiv} \\
&\Leftrightarrow \ \varphi \ \textbf{eineindeutig} \\
&\Leftrightarrow \ \mathcal{N}(\varphi) = \{o\} \\
&\Leftrightarrow \ \operatorname{def} \varphi = 0 \\
&\Leftrightarrow \ \varphi \ \textbf{surjektiv} \\
&\Leftrightarrow \ \mathcal{R}(\varphi) = \{o\} \\
&\Leftrightarrow \ \operatorname{rang} \varphi = n \\
&\Leftrightarrow \ \varphi \ \textbf{invertierbar}
\end{aligned}
$$

31.E Zur Lösbarkeit linearer Gleichungen.

Sei $\varphi : U \to V$ eine lineare Abbildung von einem linearen Raum U in einen linearen Raum V .

31.24 Wir betrachten die **inhomogene lineare Gleichung:**

$(*)$ $\boxed{\varphi x = b}$ ($b \in V$ ist gegeben, $x \in U$ gesucht)

und die **zugehörige homogene lineare Gleichung:**

$(*)_h$ $\boxed{\varphi x = o}$ (o ist das Nullelement aus V und $x \in U$ ist gesucht).

siehe als Beispiel die in Lektion 16 untersuchten linearen Differentialgleichungen:

die inhomogene lineare Dgl. $(*)$ $\boxed{L_n y = f(x)}$ und die zugehörige homogene lineare Dgl.

$(*)_h$ $\boxed{L_n y = o}$ mit einem linearen Differentialoperator $L_n = p(D)$. (s. Nr. 16.3 u. 4)

Trivialerweise (entsprechend der Definition des Nullraumes) gilt:

31.25 $x \in U$ ist genau dann Lösung der *homogenen* linearen Gleichung $(*)_h$ $\boxed{\varphi x = o}$,

wenn x im Nullraum von φ liegt: $\boxed{\varphi x = o \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(\varphi)}$.

Ist also $\{x_1, \ldots, x_d\}$ eine Basis des Nullraumes $\mathcal{N}(\varphi)$, so ist

$\boxed{x_0 = c_1 x_1 + \cdots + c_d x_d \ \ (c_1, \ldots, c_d \in \mathbf{K} \text{ beliebig})}$

die **allgemeine Lösung** der *homogenen* Gleichung $(*)_h$.

Sei x_s eine Lösung der *inhomogenen* linearen Gleichung $(*)$ $\boxed{\varphi x = b}$, d.h. $\varphi x_s = b$.
Für beliebige $x_0 \in \mathcal{N}(\varphi)$ ist dann $x = x_0 + x_s$ ebenfalls eine Lösung von $(*)$, denn: $\varphi x = \varphi(x_0 + x_s) = \varphi x_0 + \varphi x_s = o + b = b$.
Umgekehrt: Für beliebige Lösungen x, x_s der inhomogenen Gleichung $(*)$ liegt $x_0 = x - x_s$ im Nullraum $\mathcal{N}(\varphi)$, denn: $\varphi x_0 = \varphi(x - x_s) = \varphi x - \varphi x_s = b - b = o$.
Damit haben wir wie in Nr. 16.5:

31.26

allg. Lösung der ***inh.*** lin. Gleichung $(*)$ $\boxed{\varphi x = b}$	$=$	**allg.** Lösung der ***hom.*** lin. Gleichung $(*)_h$ $\boxed{\varphi x = 0}$	$+$	**Partikulärlösung** der ***inh.*** lin. Gleichung $(*)$ $\boxed{\varphi x = b}$
$y(x)$		$y_0(x)$		$y_s(x)$

Die **allgemeine Lösung** $y(x)$ der ***inhomogenen*** linearen Gleichung $(*)$ ist die Summe aus **allgemeiner Lösung** $y_0(x)$ der zugehörigen ***homogenen*** linearen Gleichung $(*)_h$ und einer **Partikulärlösung** $y_s(x)$ der **inhomogenen** linearen Gleichung $(*)$.

Hiemit ergibt sich u.a.:

31.27

Für jede lineare Abbildung $\varphi : U \to V$ von einem linearen Raum U in einen linearen Raum V besitzt die ***inhomogene*** lineare Gleichung $(*)$ $\boxed{\varphi x = b}$:

[1] genau dann eine **Lösung** x, wenn $b \in \mathcal{R}(\varphi)$;

[2] *zu jedem* $b \in V$ (mindestens) eine **Lösung** x, wenn $\mathcal{R}(\varphi) = V$, d.h. wenn φ **surjektiv** ist;

[3] *zu jedem* $b \in \mathcal{R}(\varphi)$ **genau eine Lösung** x, wenn $\mathcal{N}(\varphi) = \{o\}$, d.h. wenn φ **eineindeutig** ist;

[4] *zu jedem* $b \in \mathcal{R}(\varphi)$ **unendlich viele Lösungen** x, wenn $\mathcal{N}(\varphi) \neq \{o\}$, d.h. wenn φ *nicht* eineindeutig ist.

Diese Aussage lässt sich mit Hilfe der Rangformel (Nr. 31.22) noch präzisieren:

31.28

Sei $\varphi : U \to V$ linear, $\dim U = n$, $\dim V = m$, $\operatorname{rang}\varphi = r$, $\operatorname{def}\varphi = d$ (somit: $n = r + d$). Für die ***inhomogene*** lineare Gleichung $(*)$ $\boxed{\varphi x = b}$ ($b \in V$ vorgegeben, $x \in U$ gesucht) und die zugegörige ***homogene*** lineare Gleichung $(*)_h$ $\boxed{\varphi x = o}$ besteht genau eine der vier Möglichkeiten:

1. $r = m = n$ $\Leftrightarrow$ φ **surjektiv** und **eineindeutig** $(d = 0)$,
$\Leftrightarrow$ zu *jedem* $b \in V$ besitzt $(*)$ **genau eine Lösung** $x \in U$ und die homogene Gleichung $(*)_h$ ist *nur trivial* lösbar mit $x_0 = o$;

2. $r = m < n$ $\Leftrightarrow$ φ **surjektiv**, aber *nicht* eineindeutig $(d > 0)$,
$\Leftrightarrow$ zu *jedem* $b \in V$ besitzt $(*)$ **unendlich viele Lösungen** $x = x_0 + x_s$ (mit den unendlich vielen Lösungen $x_0 \in \mathcal{N}(\varphi)$ der homogenen Gleichung);

3. $r = n < m$ $\Leftrightarrow$ φ ist **eineindeutig** $(d = 0)$, aber *nicht* surjektiv,
$\Leftrightarrow$ es *gibt* $b \in V$, für die $(*)$ **unlösbar** ist, und für die anderen $b \in V$, d.h. für $b \in \mathcal{R}(\varphi)$ besitzt $(*)$ **genau eine Lösung** $x \in U$; die homogene Gleichung $(*)_h$ ist *nur trivial* lösbar mit $x_0 = o$;

4. $r < \min(m, n)$ $\Leftrightarrow$ φ ist **weder surjektiv noch eineindeutig**,
$\Leftrightarrow$ es *gibt* $b \in V$, für die $(*)$ **unlösbar** ist, und für die anderen $b \in V$, d.h. für $b \in \mathcal{R}(\varphi)$, besitzt $(*)$ **unendlich viele Lösungen** $x = x_0 + x_s$ (mit den unendlich vielen Lösungen $x_0 \in \mathcal{N}(\varphi)$ der homogenen Gleichung $(*)_h$).

Im Fall $U = V$, wenn also $\varphi : U \to U$ eine lineare Abbildung des n-dimensionalen linearen Raumes U *in sich* ist, sind nur noch die Fälle **1.** und **4.** möglich.

Von diesen Ergebnissen werden wir z.B. in Lektion 33 bei der Untersuchung linearer Gleichungssysteme Gebrauch machen.

32 Matrizen und lineare Abbildungen.

Stichpunkte: Matrizen als lineare Abbildungen; Matrixdarstellung allgemeiner linearer Abbildungen; Transformationsmatrix eines Basiswechsels, Matrixdarstellung bei Basiswechsel. Projektionsmatrizen, die Matrix $\Omega\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r}$, Drehmatrizen.

32.A Matrizen als lineare Abbildungen.

In den Nummern 31.8 und 30.18 haben wir bereits festgestellt:

32.1 Jede (m, n)–Matrix A definiert durch: $\boxed{\hat{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : \vec{r} \mapsto A\vec{r}}$ eine lineare Abbildung $\hat{A}$ (die meistens wieder mit A statt mit $\hat{A}$ bezeichnet wird). Die Bilder der natürlichen Einheitsvektoren $\vec{e}_j$ unter dieser Abbildung A sind genau die Spalten $\vec{a}_j$ der Matrix A: $\boxed{A\vec{e}_j = \vec{a}_j}$!

z.B.: Die $(2, 3)$–Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ wird als lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ interpretiert:

für $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ ist $A(\vec{r}) := A\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Die Linearität dieser Abbildungen ergibt sich sofort aus der Definition des Produktes einer (m, n)–Matrix A mit einem Spaltenvektor des $\mathbb{C}^n$ (s. Nr. 30.16):

$$A\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + a_{1n}(\lambda x_n + \mu y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + a_{mn}(\lambda x_n + \mu y_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \cdots a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots a_{mn}y_n \end{pmatrix} = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y}\,. \qquad \blacksquare$$

32.2 Für jede (m, n)–Matrix A mit den Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{C}^m$ und für jeden Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ist $A\vec{x} = x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \in \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ (s. Nr. 30.16), insbesondere haben wir damit:

$$\boxed{\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}}$$

der Bildraum einer Matrix wird von ihren Spalten erzeugt.

Da die Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ von A ein Erzeugendensystem für den Bildraum $\mathcal{R}(A)$ bilden, ist jede maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis von $\mathcal{R}(A)$ und die Maximalanzahl linear unabhängiger Spalten von A ist gleich der Dimension von $\mathcal{R}(A)$:

damit ist (sinnvollerweise!) der Rang der *Abbildung* A gleich dem Rang der *Matrix* A:

32.3

Rang einer Matrix A:

$\operatorname{rang} A$ = **Dimension** des Bildraumes von A,
= **Spaltenrang** von A,
(d.h. = Maximalanzahl linear unabhängiger Spalten)
= **Zeilenrang** von A,
(d.h. = Maximalanzahl linear unabhängiger Zeilen)
= **Dimension** des Bildraumes von A^t und von A^*.

32.4

Wenn die Matrix A den Rang r hat, dann bilden je r linear unabhängige Spalten von A eine **Basis des Bildraumes** $\mathcal{R}(A)$.

Zusammen mit der Rangformel (Nummer 31.22) ergibt sich darüberhinaus:

32.5

Wenn $\boxed{\dim \mathcal{R}(A) = \operatorname{rang} A = r}$ ist, d.h. wenn die (m, n)–Matrix A den Rang r hat, dann ist $r \leq \max\{m, n\}$ und der **Nullraum** $\mathcal{N}(A)$ hat die Dimension

$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) = \operatorname{def} A = n - r}$.

(In der nächsten Lektion werden wir sehen, wie man den Rang einer Matrix und ebenso eine Basis für den Nullraum einer Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens bestimmen kann!)

32.B Matrixdarstellung allgemeiner linearer Abbildungen.

Im Folgenden sei:
$B_U = \{e_1^U, \ldots, e_n^U\}$ eine **Basis** eines n-dimensionalen linearen Raumes U,
$B_V = \{e_1^V, \ldots, e_m^V\}$ eine **Basis** eines m-dimensionalen linearen Raumes V und
$\varphi : U \to V$ eine **lineare Abbildung von U nach V.**

Für jedes Basiselement $e_j^U \in B_U \ (j = 1, \ldots, n)$ liegt φe_j^U in V und besitzt eine Darstellung bzgl. der Basis B_V: $\varphi e_j^U = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} e_i^V$, d.h. es ist $\varphi e_j^U \overset{\mathrm{B_V}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} =: \vec{a}_j$. Sei $A = \left(\alpha_{ij}\right)_{m,n} = \left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right)$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_j \ (j = 1, \ldots, n)$.

32.6

! $\boxed{\text{Die } j\text{-te Spalte } \vec{a}_j \text{ von } A \text{ ist also der Koordinatenvektor bzgl. } B_V \text{ des Bildes } \varphi e_j^U \text{ des } j\text{-ten Basiselements } e_j^U \in B_U.}$!

Man schreibt: $\boxed{\varphi \overset{\mathrm{B_U,B_V}}{=} A}$ und nennt A die **Matrix** oder **Matrixdarstellung der linearen Abbildung** φ **bzgl. der Basen** B_U, B_V**.**

Nun sei $x \in U$ beliebig gewählt, $x \overset{\mathrm{B_U}}{=} \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h. $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j^U$.

Als Element von V besitzt φx bzgl. B_V eine Darstellung $\varphi x \overset{\mathrm{B_V}}{=} \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Damit ist:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i e_i^V = \varphi x = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j^U\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, \varphi e_j^U = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} e_i^V\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j\right) e_i^V \text{, also:}$$

$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ \ \forall i = 1, \ldots, m$, d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \cdots \alpha_{1n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}:$$

32.7

Wenn man den Koordinatenvektor $\vec{x}$ des Elementes $x \in U$ (bzgl. B_U) mit der Matrix A multipliziert, bekommt man den Koordinatenvektor $\vec{y} = A\vec{x}$ des Bildes $y = \varphi x$ (bzgl. B_V).

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ x & \overset{}{\underset{\varphi}{\longmapsto}} & \varphi x = y \\ B_U|| & ||\,B_U, B_V & ||B_V \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \overset{A}{\longmapsto} & A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{y} \end{array}$$

Abbildung 32.1
zur Matrix einer lin. Abbildung

32.C ♡ Ein wirklich nützlicher Satz! ♡

32.8 Weil sie so wichtig ist, wollen wir die letzte Aussage nocheinmal wiederholen: die **Matrix** oder **Matrixdarstellung** A einer linearen Abbildung φ von einem linearen Raum U mit Basis B_U in einen linearen Raum V mit Basis B_V bekommt man nach folgendem **Rezept:** (s.o. Nr. 32.6 !)

In den Spalten stehen die Ko-
ordinaten der Bilder der Basiselemente.In den
Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basisele-
mente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der
Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der
Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Ba-
siselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basisele-
mente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In
den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spal-
ten stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die
Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der
Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Ba-
siselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den
Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die
Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der
Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Ba-
siselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In
den Spalten stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten
stehen die Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die
Koordinaten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordi-
naten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten
der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der
Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordinaten der
Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen die Koordina-
ten der Bilder der Basiselemente.In den Spalten stehen
die Koordinaten der Bilder der Basiselemen-
te.In den Spalten stehen die

Man schreibt dann: $\varphi \overset{B_U,B_V}{=} A$.

32.9 Wenn $\varphi : U \to U$ eine lineare Abbildung eines linearen Raumes U (mit Basis B) *in sich* ist, schreibt man kurz: $\varphi \overset{\mathrm{B}}{=} A$ (statt $\varphi \overset{\mathrm{B,B}}{=} A$) und nennt A die **Matrix** (oder **Matrix–Darstellung**) von φ bzgl. der Basis B.

32.10 Im Fall $U = \mathbf{K}^n$, $V = \mathbf{K}^m$ und wenn $B_U = B_{nat}^{[n]}$, $B_V = B_{nat}^{[m]}$ jeweils die **natürlichen Basen** sind, **ist** $\varphi = A$ eine Matrix
(wir schreiben dann *nicht* $\varphi \overset{\mathrm{B}_{\mathrm{nat}}^{[\mathrm{n}]},\mathrm{B}_{\mathrm{nat}}^{[\mathrm{m}]}}{=} A$)
und die Spalten $\vec{a}_j$ dieser Matrix **sind** die Bilder $\vec{a}_j = A\vec{e}_j^{[n]} = \varphi\vec{e}_j^{[n]}$ der Basisvektoren $\vec{e}_j^{[n]}$. (s. Nr. 32.1 und 30.18 !)

In diesem Fall (der Räume $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ mit ihren natürlichen Basen) haben wir also das einfache Rezept:

♡ ♡

Die Spalten *sind* die
Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die
Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Ba-
sisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten
sind die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvek-
toren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder
der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die
Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind*
die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten
sind die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die
Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvek-
toren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder
der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten
sind die Bilder der Basisvektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basis-
vektoren.Die Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die
Spalten *sind* die Bilder der Basisvektoren.Die
Spalten *sind* die Bilder

♡ ♡

Zum Beispiel:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi = A$, d.h.

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$.

1. Bezüglich der **natürlichen** Basen $B_3 = B_{nat}^{[3]}$, $B_2 = B_{nat}^{[2]}$ in beiden Räumen ist (vgl. Nr. 30.18):

$$\varphi \vec{e}_x = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.\ \text{Spalte von } A,$$

$$\varphi \vec{e}_y = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.\ \text{Spalte von } A,$$

$$\varphi \vec{e}_z = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.\ \text{Spalte von } A;$$

damit hat die Abbildung φ bzgl. der beiden **natürlichen** Basen B_3, B_2 die Matrixdarstellung
$\varphi \stackrel{B_3, B_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$, d.h. es ist in der Tat $\varphi = A$.

2. Wir wählen im $\mathbb{R}^3$ die Basis $\tilde{B}_3 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und im $\mathbb{R}^2$ die Basis $\tilde{B}_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ mit $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und wollen die Matrixdarstellung $\tilde{A}$ von φ bzgl. dieser beiden Basen bestimmen:

$$\varphi \vec{x}_1 = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\,\vec{y}_1 + 0\,\vec{y}_2 \stackrel{\tilde{B}_2}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.\ \text{Spalte von } \tilde{A},$$

$$\varphi \vec{x}_2 = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\,\vec{y}_1 + \tfrac{1}{3}\,\vec{y}_2 \stackrel{\tilde{B}_2}{=} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 2.\ \text{Spalte von } \tilde{A},$$

$$\varphi \vec{x}_3 = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\,\vec{y}_1 + 1\,\vec{y}_2 \stackrel{\tilde{B}_2}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.\ \text{Spalte von } \tilde{A},$$

d.h. es ist $\varphi \stackrel{\tilde{B}_3, \tilde{B}_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}$.

3. Wir wählen schließlich im $\mathbb{R}^3$ die Basis $\hat{B}_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und im $\mathbb{R}^2$ die Basis $\tilde{B}_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ wie eben in **2.** und wollen die Matrixdarstellung $\hat{A}$ von φ bzgl. dieser Basen $\hat{B}_3$, $\tilde{B}_2$ finden:

$$\varphi\vec e_1 = \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \vec y_1 = 1\,\vec y_1 + 0\,\vec y_2 \overset{\tilde B_2}{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1.\ \text{Spalte von } \hat A\,,$$

$$\varphi\vec e_2 = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \vec y_2 = 0\,\vec y_1 + 1\,\vec y_2 \overset{\tilde B_2}{=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2.\ \text{Spalte von } \hat A\,,$$

$$\varphi\vec e_3 = \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\-1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \vec o = 0\,\vec y_1 + 0\,\vec y_2 \overset{\tilde B_2}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 3.\ \text{Spalte von } \hat A\,;$$

damit ist $\varphi \overset{\hat B_3,\tilde B_2}{=} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \hat A$.

Verschiedene Basen liefern also verschiedene Matrixdarstellungen von φ! In der Praxis ist man oft bemüht, zu einer linearen Abbildung φ die Basen so geschickt zu wählen, dass die zugehörige Matrixdarstellung möglichst "schön" ist, d.h. eine möglichst einfache Gestalt hat (wie z.B. in **3.**).

4. Die drei Funktionen $f_1(x) = 1$ (konstant), $f_2(x) = \cos x$ und $f_3(x) = \sin x$ sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ des 3–dimensionalen linearen Funktionenraumes $V = \operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3\}$. Um die Matrix A des linearen Differentiationsoperators $\varphi = \frac{d}{dx}$ bzgl. B zu erhalten, bestimmen wir:

$f_1'(x) = 0' = 0 = 0\cdot f_1(x) + 0\cdot f_2(x) + 0\cdot f_3(x)$, also: $\varphi f_1 \overset{B}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ = 1. Spalte von A ,

$f_2'(x) = (\cos x)' = -\sin x = 0\cdot f_1(x) + 0\cdot f_2(x) - 1\cdot f_3(x)$, also: $\varphi f_2 \overset{B}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ = 2. Spalte von A ,

$f_3'(x) = (\sin x)' = \cos x = 0\cdot f_1(x) + 1\cdot f_2(x) + 0\cdot f_3(x)$, also: $\varphi f_3 \overset{B}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ = 3. Spalte von A .

Wir erhalten: $\varphi = \frac{d}{dx} \overset{B}{=} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix} = A$.

Mit dieser Matrix A kann man in V differenzieren (!) :

sei z.B. $f(x) = e^{ix}$. Dann ist $f(x) = \cos x + i\sin x = 0\cdot f_1(x) + 1\cdot f_2(x) + i\cdot f_3(x)$, also $f \in V$

und $f \overset{B}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$ und damit: $\varphi f = f' \overset{B}{=} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\i\\-1\end{pmatrix}$,

d.h.: $(e^{ix})' = 0\cdot f_1(x) + i\cdot f_2(x) - 1\cdot f_3(x) = i\cos x - \sin x = i\,(\cos x + i\sin x) = ie^{ix}$.

32.D Die Matrixdarstellung von Produkten und Inversen.

32.11

Eine (n,n)-Matrix T ist genau dann **regulär**, wenn ihre Spalten $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n$ **linear unabhängig** sind, also eine **Basis** $B = \{\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\}$ des $\mathbb{K}^n$ bilden.

Dann ist T die Matrixdarstellung der identischen Abbildung

$\mathrm{id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : \vec{r} \mapsto \vec{r}$ bezüglich der Basen B, B_{nat}: $\boxed{\mathrm{id} \overset{B,B_{nat}}{=} T}$.

Bezüglich *derselben* Basis B hat dagegen jedem linearen Raum U die **identische Abbildung** $\mathrm{id} : U \to U$ die **Einheitsmatrix** als Matrixdarstellung: $\boxed{\mathrm{id} \overset{B}{=} I}$.

Denn für $j = 1, \ldots, n$ ist $\mathrm{id}\,\vec{t}_j = \vec{t}_j \overset{B_{nat}}{=} \vec{t}_j = j$-te Spalte von T; und in U hat man für das j-te Basislement $e_j \in B$: $\mathrm{id}\,e_j = e_j \overset{B}{=} \vec{e}_j$ [j-ter natürlicher Einheitsvektor des $\mathbb{K}^n$] $= j$-te Spalte von I. ▮

32.12

Die **Matrix des Produktes** $\varphi \circ \psi$ von zwei linearen Abbildungen φ, ψ mit den Matrixdarstellungen A bzw. B ist die **Produktmatrix** AB.

Genauer: sind U, V, W lineare Räume mit Basen B_U, B_V, bzw. B_W, und sind $\psi : U \to V$, $\varphi : V \to W$ zwei lineare Abbildungen mit den Matrixdarstellungen $\psi \overset{B_U,B_V}{=} B$ und $\varphi \overset{B_V,B_W}{=} A$, so hat die zusammengesetzte Abbildung $\varphi \circ \psi$ die Matrixdarstellung $\varphi \circ \psi \overset{B_U,B_W}{=} AB$.

Denn für das j-te Basiselement $e_j \in B_U$ $(j = 1, \ldots n)$ ist $\psi e_j \overset{B_V}{=} \vec{b}_j$ die j-te Spalte von B, und für die j-te Spalte $\vec{c}_j$ der Matrix C von $\varphi \circ \psi$ bzgl. der Basen B_U, B_W ergibt sich:

$\vec{c}_j \overset{B_W}{=} (\varphi \circ \psi)e_j = \varphi\left(\psi e_j\right) \overset{B_W}{=} A\vec{b}_j$, d.h. es ist $C = \left(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\right) = A\left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_j\right) = AB$. ▮

$$\begin{tikzcd} \text{Basis } B_U & \text{Basis } B_V & \text{Basis } B_W \\ U \arrow[r, "\psi \overset{B_U,B_V}{=} B"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ\psi \overset{B_U,B_W}{=} AB"'] & V \arrow[r, "\varphi \overset{B_V,B_W}{=} A"] & W \end{tikzcd}$$

$$e_j \xmapsto{\psi} \psi e_j \xmapsto{\varphi} \varphi\left(\psi e_j\right)$$

$$\vec{e}_j^{[n]} \xmapsto{B} B\vec{e}_j^{[n]} = \vec{b}_j \xmapsto{A} AB\vec{e}_j^{[n]} = \vec{c}_j$$

Abbildung 32.2
zur Matrixdarstellung
eines Abbildungsproduktes

Als einfache Folgerung aus den beiden letzten Aussagen hat man noch:

32.13 Die **Inverse** φ^{-1} einer regulären linearen Abbildung mit der Matrixdarstellung $\boxed{\varphi \overset{B}{=} A}$ hat die Matrixdarstellung $\boxed{\varphi^{-1} \overset{B}{=} A^{-1}}$.

32.E Die Transformationsmatrix eines Basiswechsels.

In dem n–dimensionalen linearen Raum U seien eine "alte" Basis $B_U = \{e_1, \dots e_n\}$ und eine "neue" Basis $B'_U = \{e'_1, \dots e'_n\}$ gegeben. Wir wollen uns überlegen, wie man möglichst bequem die Koordinaten eines Elementes $x \in U$ bzgl. der "neuen" Basis bekommen kann, wenn die Koordinaten bzgl. der "alten" Basis bekannt sind: $\boxed{x \overset{B_U}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow x \overset{B'_U}{=} ?}$:

Hierzu sei $\tau : U \to U : e_j \mapsto e'_j$ die eindeutig bestimmte, reguläre lineare Abbildung, welche die "alten" Basiselemente e_j in die "neuen" Basislemente e'_j $(j = 1, \dots, n)$ überführt. Und sei $\tau \overset{B_U}{=} T = (t_{ij})_{n,n}$ die Matrixdarstellung der Abbildung τ bzgl. der "alten" Basis:

32.14 $T = (t_{ij})_{n,n}$ ist die **Transformationsmatrix für den Basiswechsel** $\tau : B_U \longrightarrow B'_U$.

Gemäß Nr. 32.8 stehen in der j–ten Spalte von T die Koordinaten des j–ten "neuen" Basiselements e'_j bzgl. der "alten" Basis:

$$\boxed{e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i\text{, d.h. } e'_j \overset{B_U}{=} \begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix} = j\text{–te Spalte von } T} \quad (j = 1, \dots, n)$$

In den Räumen $\mathbf{K}^n$ hat man es nach Nr. 32.10 besonders einfach:

32.15 Die **Transformationsmatrix für einen Basiswechsel** $\tau : B_{nat} \to B$ ***von der natürlichen Basis*** B_{nat} zu einer anderen Basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ ist die Matrix $T = \left(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\right)$, d.h. die Spalten von T *sind* die "neuen" Basisvektoren!

Ist nun $x \in U$, $x \overset{B_U\downarrow}{=} \overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $x \overset{B'_U\downarrow}{=} \overset{\downarrow}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, so ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x = \sum_{j=1}^{n} y_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j \right) e_i \text{ , somit:}$$

$$x \overset{B_U\downarrow}{=} \overset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} t_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} t_{nj} y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}y_1 + \cdots + t_{1n}y_n \\ \vdots \\ t_{n1}y_1 + \cdots + t_{nn}y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T \overset{\downarrow}{y} ,$$

also: $\overset{\downarrow}{x} = T \overset{\downarrow}{y}$, bzw. $\overset{\downarrow}{y} = T^{-1} \overset{\downarrow}{x}$. Wir erhalten:

32.16

> Ist T die **Transformationsmatrix für den Basiswechsel** $\tau : B_U \to B'_U$,
>
> so gilt für alle Elemente $x \in U$: $\boxed{x \overset{B_U\downarrow}{=} \overset{\downarrow}{x} \Leftrightarrow x \overset{B'_U\downarrow}{=} \overset{\downarrow}{y} = T^{-1} \overset{\downarrow}{x}}$.

Wenn T die Transformationsmatrix für einen Basiswechsel $\tau : B_{alt} \to B_{neu}$ ist, dann hat jedes Element x , das bzgl. der "alten" Basis die Koordinaten $\overset{\downarrow}{x}$ hat, bzgl. der "neuen" Basis die Koordinaten $\overset{\downarrow}{y} = T^{-1} \overset{\downarrow}{x}$, ***und nicht*** $T \overset{\downarrow}{x}$! Diese Tatsache erscheint auf den ersten Blick vielleicht etwas befremdend. Jedoch so, wie die sich Landschaft aus einem fahrenden Zug gesehen rückwärts zu bewegen scheint, bewegt sich das fest–bleibende Element x relativ zum Koordinatensystem rückwärts, wenn das "alte" Koordinatensystem in das "neue" übergeführt wird!

z.B.: Sei $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die **Transformationsmatrix** für den Basiswechsel $\tau : B_{nat} \to B = \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ ist $T = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Mit der Regel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

bekommt man für T die Inverse

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Damit hat z.B. der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis B die Koordinaten

$$\vec{r} \overset{B}{=} T^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(Weitere Beispiele im nächsten Abschnitt!)

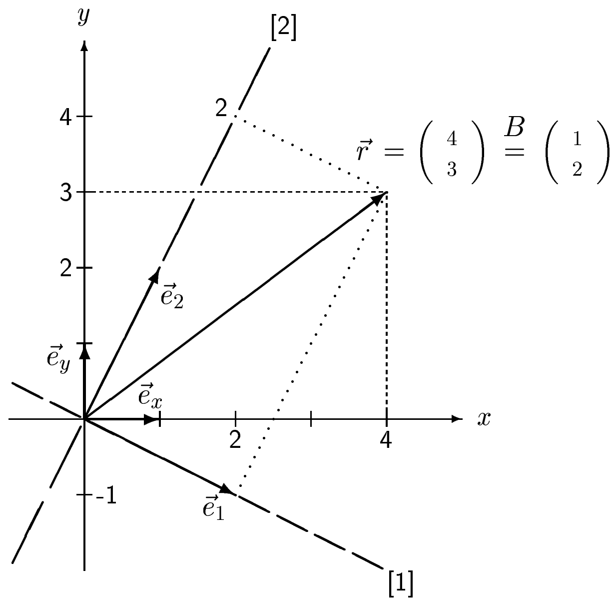


Abbildung 32.3
Darstellung eines Vektors bzgl. verschiedener Basen.

32.F Matrixdarstellung einer lin. Abb. bei Basiswechsel.

In diesem Abschnitt sei:

> $\varphi : U \to V$ eine **lineare Abbildung** von dem linearen Raum U in den linearen Raum V,
> $B_U = \left\{ e_1^U, \ldots, e_n^U \right\}$ eine "alte" Basis,
> $\tilde{B}_U = \left\{ \tilde{e}_1^U, \ldots, \tilde{e}_n^U \right\}$ eine "neue" Basis von U und
> T die **Transformationsmatrix** für den Basiswechsel $\tau : B_U \to \tilde{B}_U : e_j^U \mapsto \tilde{e}_j^U$,
> $B_V = \left\{ e_1^V, \ldots, e_m^V \right\}$ eine "alte" Basis,
> $\tilde{B}_V = \left\{ \tilde{e}_1^V, \ldots, \tilde{e}_m^V \right\}$ eine "neue" Basis von V und
> S die **Transformationsmatrix** für den Basiswechsel $\sigma : B_V \to \tilde{B}_V : e_j^V \mapsto \tilde{e}_j^V$,
> $\varphi \overset{B_U, B_V}{=} A$ die **Matrixdarstellung** von φ bzgl. der "alten" Basen B_U, B_V und
> $\varphi \overset{\tilde{B}_U, \tilde{B}_V}{=} \tilde{A}$ die **Matrixdarstellung** von φ bzgl. der "neuen" Basen $\tilde{B}_U, \tilde{B}_V$.

Wir wollen uns überlegen, wie man möglichst bequem die Matrix $\tilde{A}$ bekommen kann, wenn die Matrix A bekannt ist: $\boxed{\varphi \overset{B_U, B_V}{=} A \Longrightarrow \varphi \overset{\tilde{B}_U, \tilde{B}_V}{=} \tilde{A} = ?}$:

Das folgende Diagramm verdeutlicht die Situation; an ihr lässt sich das Ergebnis bereits ablesen:

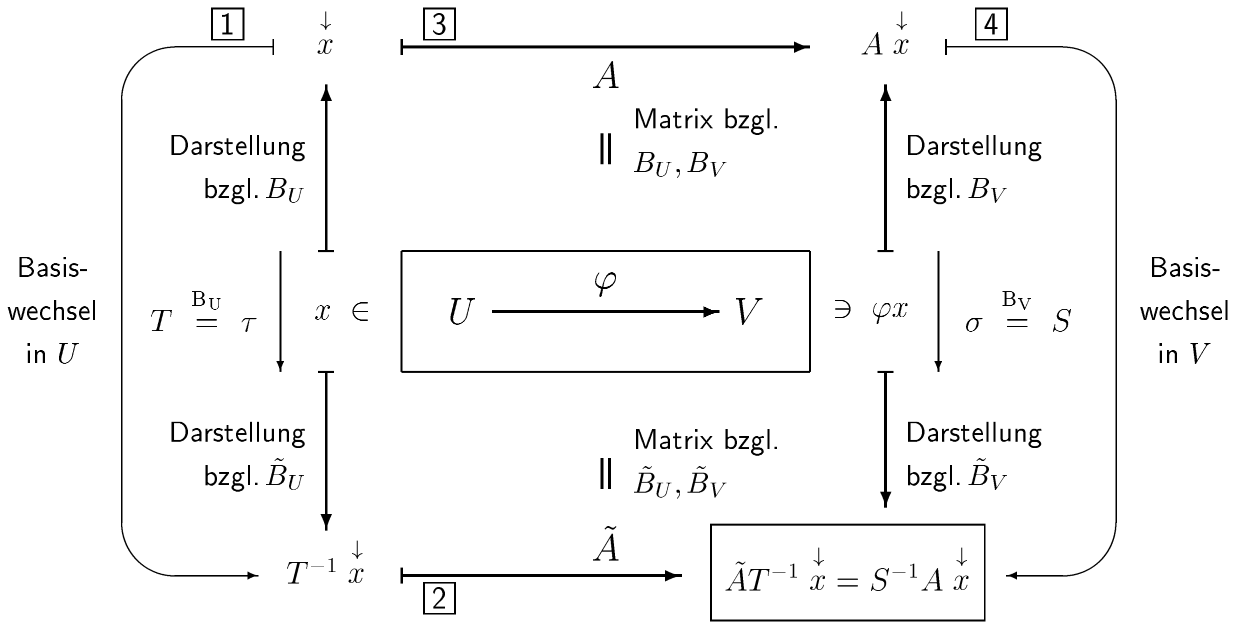


Abbildung 32.4 Zur Matrixdarstellung bei Basiswechsel

Jeder Vektor $\overset{\downarrow}{x} \in \mathbb{K}^n$ kann bzgl. der "alten" Basis B_U in U in ein–eindeutiger Weise als Koordinatenvektor eines Elementes $x \in U$ aufgefasst werden, und jedes Bild $\varphi x \in V$ besitzt bzgl. der "neuen" Basis $\tilde{B}_V$ in V einen eindeutig bestimmten Koordinatenvektor aus $\mathbb{K}^m$.

Wie das Diagramm andeutet, kann man zu jedem Koordinatenvektor $\overset{\downarrow}{x}$ eines Elementes $x \in U$ bzgl. B_U den Koordinatenvektor von φx bzgl. $\tilde{B}_V$ auf zwei Weisen erhalten:

der Weg $\boxed{\mathbf{1}}-\boxed{\mathbf{2}}$: zunächst wird $\overset{\downarrow}{x}$ mit Hilfe der Transformationsmatrix T umgerechnet in den Koordinatenvektor $T^{-1}\overset{\downarrow}{x}$ von x bzgl. $\tilde{B}_U$, danach wird $T^{-1}\overset{\downarrow}{x}$ mit der Matrix $\tilde{A}$ abgebildet: das ergibt den Koordinatenvektor $\tilde{A}T^{-1}\overset{\downarrow}{x}$ von φx bzgl. $\tilde{B}_V$, oder:

der Weg $\boxed{\mathbf{3}}-\boxed{\mathbf{4}}$: zunächst wird $\overset{\downarrow}{x}$ mit der Matrix A abgebildet: das ergibt den Koordinatenvektor $A\overset{\downarrow}{x}$ von φx bzgl. B_V , danach wird $A\overset{\downarrow}{x}$ mit Hilfe der Transformationsmatrix S umgerechnet in den Koordinatenvektor $S^{-1}A\overset{\downarrow}{x}$ von φx bzgl. $\tilde{B}_V$.
Da es zu φx ***nur einen*** Koordinatenvektor bzgl. $\tilde{B}_V$ gibt, liefern beide Wege stets dasselbe:
$\tilde{A}T^{-1}\overset{\downarrow}{x} = S^{-1}A\overset{\downarrow}{x}$ für alle $\overset{\downarrow}{x} \in \mathbb{K}^n$. Damit haben wir: $\tilde{A}T^{-1} = S^{-1}A$ bzw.: $\boxed{\tilde{A} = S^{-1}AT}$:

32.17

Mit den Bezeichnungen von oben haben wir für die **Matrixdarstellung** einer linearen Abbildung $\varphi : U \to V$ bei einem **Basiswechsel** in U und V die Regel:

$$! \quad \boxed{\varphi \overset{B_U, B_V}{=} A \iff \varphi \overset{\tilde{B}_U, \tilde{B}_V}{=} \tilde{A} = S^{-1}AT} \quad ! \qquad \text{kurz: } \boxed{\tilde{A} = S^{-1}AT}$$

Wenn $\varphi : U \to U$ eine lineare Abbildung von U *in sich* ist, vereinfacht sich diese Regel:

$$! \quad \boxed{\varphi \overset{B_U}{=} A \iff \varphi \overset{\tilde{B}_U}{=} \tilde{A} = T^{-1}AT} \quad ! \qquad \text{kurz: } \boxed{\tilde{A} = T^{-1}AT}$$

Rechenbeispiel: (weitere, fruchtbarere Beispiele folgen im nächsten Abschnitt!)

Wir wollen die in den Beispielen **2.** und **3.** des Abschnitts 32.C (Seite 32–6) erhaltenen Matrixdarstellungen der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \vec{r} \mapsto A\vec{r}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ineinander umrechnen:

Im $\mathbb{R}^3$ haben wir neben der natürlichen Basis die Basen

$$\tilde{B}_3 = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \text{ mit } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\hat{B}_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ mit } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und im $\mathbb{R}^2$ neben der natürlichen Basis noch die Basis $\tilde{B}_2 = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ mit $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die **Transformationsmatrix für den Basiswechsel** $\tau : B_{nat}^{[3]} \to \tilde{B}_3$ ist gemäß 32.15 die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit der Inversen } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(Wir werden in der nächsten Lektion sehen, wie man die Inverse einer Matrix z.B. mit Hilfe der Gauß–Elimination bekommen kann! An dieser Stelle genügt eine Probe: $TT^{-1} = I$.)

Sei $\tilde{T}$ die **Transformationsmatrix für den Basiswechsel** $\tilde{\tau} : \tilde{B}_3 \to \hat{B}_3$. Nach 32.14 stehen in den Spalten von $\tilde{T}$ die Koordinaten von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bzgl. $\tilde{B}_3$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_1 \overset{\tilde{B}_3}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{1.Spalte von } \tilde{T},$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}_3 \overset{\tilde{B}_3}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{2.Spalte von } \tilde{T},$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{3}{2}\vec{x}_2 - \frac{1}{2}\vec{x}_3 \overset{\tilde{B}_3}{=} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \text{3.Spalte von } \tilde{T}, \text{ somit:}$$

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ mit der Inversen } \tilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \text{ (Probe durch Nachrechnen: } \tilde{T}\tilde{T}^{-1} = I\text{)}.$$

Die **Transformationsmatrix für den Basiswechsel** $\sigma : B_{nat}^{[2]} \to \tilde{B}_2$ ist (wieder nach 32.15) :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit der Inversen } S^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Die im **2.** Beispiel auf Seite 32–6 erhaltene **Matrixdarstellung** $\tilde{A}$ der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 :$ $\vec{r} \mapsto A\vec{r}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basen $\tilde{B}_3, \tilde{B}_2$ kann man hiermit z.B. auf zwei weitere Arten gewinnen: entweder direkt mit der Matrix A :

$$\tilde{A} = S^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

oder mit der (vielleicht schon bekannten) **Matrixdarstellung** $\hat{A}$ von φ bzgl. der Basen $\hat{B}_3, \tilde{B}_2$:

$$\hat{A} = \tilde{A}\tilde{T} \Rightarrow \tilde{A} = \hat{A}\tilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

32.G Projektionsmatrizen.

32.18

Die **Projektionsmatrix**, die den Raum $\mathbb{K}^n$ auf die Richtung eines Einheitsvektors $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ projiziert, ist die Matrix: $\boxed{\boxed{P_e = \vec{e}\,\vec{e}^{+}}}$:

$$P_e = \vec{e}\,\vec{e}^{+} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^* & \cdots & e_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i e_j^* \end{pmatrix}_{n,n} = \begin{pmatrix} e_1 e_1^* & \cdots & e_1 e_n^* \\ \vdots & & \vdots \\ e_n e_1^* & \cdots & e_n e_n^* \end{pmatrix}.$$

Denn nach Nr. 23.14 ist $P_e \vec{r} = \vec{r}_e = \left(\vec{e} \cdot \vec{r}\right) \vec{e} = \left[\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} e_j^* x_j \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} e_1 e_1^* x_1 + \cdots e_1 e_n^* x_n \\ \vdots \\ e_n e_1^* x_1 + \cdots e_n e_n^* x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 e_1^* & \cdots & e_1 e_n^* \\ \vdots & & \vdots \\ e_n e_1^* & \cdots & e_n e_n^* \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^* \cdots e_n^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[\vec{e}\,\vec{e}^{+} \right] \vec{r}\,. \qquad \blacksquare$$

Beachte, dass $\vec{e}\,\vec{e}^{+}$ **kein Skalarprodukt**, sondern ein **Matrixprodukt** ist:
das Produkt der $(n, 1)$ –Matrix $\vec{e}$ mit der hierzu adjungierten $(1, n)$ –Matrix $\vec{e}^{+}$!

Aufgrund von Nr. 23.12 ergibt sich aus der letzten Regel sofort:

32.19

Die **Projektionsmatrix** P_U, die den Raum $\mathbf{K}^n$ auf einen linearen Teilraum U mit ONB $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m\}$ projiziert, ist die Matrix

$\boxed{P_U = \vec{e}_1\,\vec{e}_1^{+} + \cdots + \vec{e}_m\,\vec{e}_m^{+}}$.

z.B./insbesondere: Im $\mathbb{R}^3$ ist $\vec{h} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der **Ebene** $E : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} := \dfrac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ist der **Normaleneinheitsvektor** von E.

Wenn man eine ONB B_E von E haben möchte, kann man mit irgendeinem zu $\vec{n}$ orthogonalen Einheitsvektor $\vec{e}_1$ das Kreuzprodukt $\vec{e}_2 = \vec{n} \times \vec{e}_1$ bestimmen: da E definitionsgemäß alle zu $\vec{n}$ orthogonalen Vektoren enthält, liegen beide Vektoren in E und bilden folglich eine ONB $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ von E; $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ ist eine ONB des $\mathbb{R}^3$.

I. Mit Nr. 32.18 und 19 bekommen wir (vgl. mit der nachfolgenden Skizze):

32.20

Die **Projektionsmatrix** P_n , die den $\mathbb{R}^3$ auf die zu E orthogonale Gerade $E^\perp = \operatorname{span}\left\{\vec{h}\right\} = \operatorname{span}\left\{\vec{n}\right\}$ **projiziert** :

$$P_n = \vec{n}\,\vec{n}^{\,+} = \vec{n}\,\vec{n}^{\,t} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \; n_2 \; n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{pmatrix};$$

die **Projektionsmatrix** P_E , die den $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene E **projiziert** :

$$P_E = \vec{e}_1\,\vec{e}_1^{\,t} + \vec{e}_2\,\vec{e}_2^{\,t} = I - P_n = \begin{pmatrix} 1-n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & 1-n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & 1-n_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

die **Spiegelungsmatrix** S_E , die den $\mathbb{R}^3$ an der Ebene E **spiegelt** :

$$S_E = I - 2P_n = 2P_E - I = \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1 n_2 & -2n_1 n_3 \\ -2n_1 n_2 & 1-2n_2^2 & -2n_2 n_3 \\ -2n_1 n_3 & -2n_2 n_3 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix}.$$

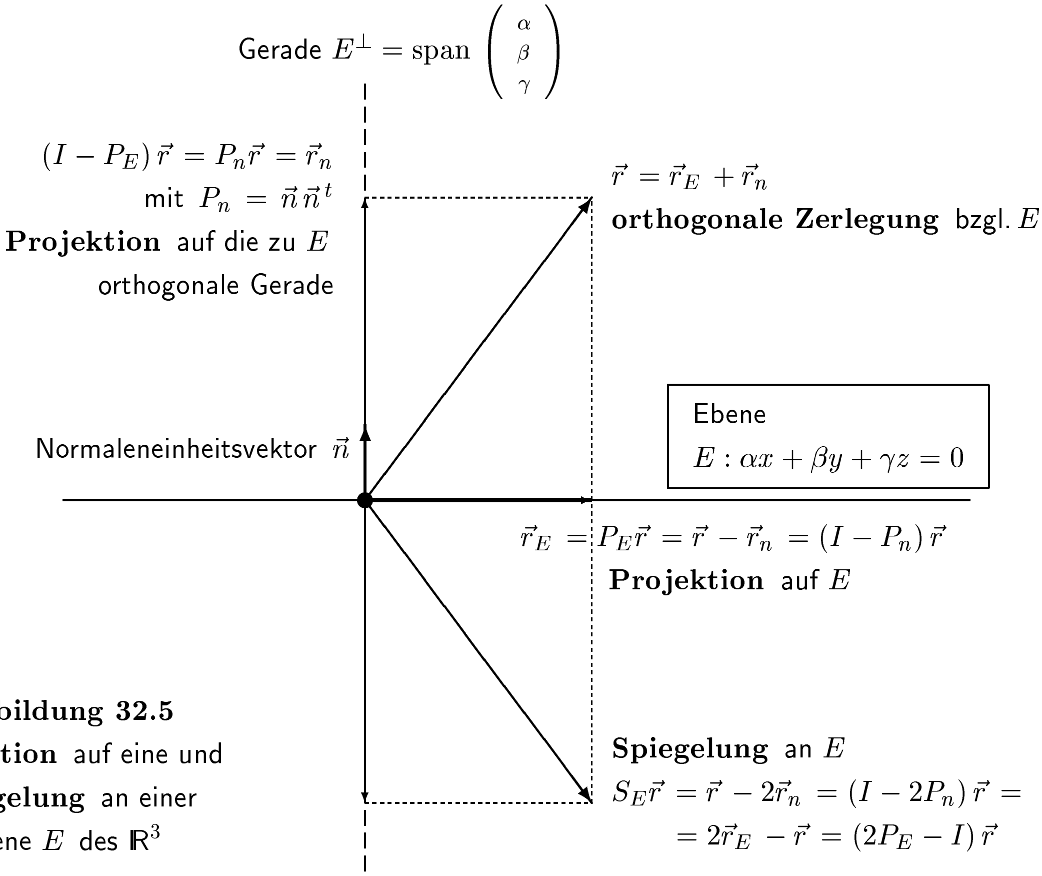


Abbildung 32.5
Projektion auf eine und
Spiegelung an einer
Ebene E des $\mathbb{R}^3$

II. Man kann diese Projektions– und Spiegelungsmatrizen auch recht einfach aus den **Matrixdarstellungen bzgl. der ONB** B von oben gewinnen:

Ist $\vec{n}$ ein Normaleneinheitsvektor und $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eine ONB der Ebene E, so ist $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$ und die Transformationsmatrix für den Basiswechsel $B_{nat} \to B$ ist die Matrix $U = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\right)$; U ist unitär (reel orthogonal) und hat die Inverse $U^{-1} = U^t$.

Die Bilder der Basisvektoren unter den Projektionen $\hat{P}_n$, $\hat{P}_E$ und der Spiegelung $\hat{S}_E$ lassen sich sofort angeben:

$\hat{P}_n : \vec{e}_1 \mapsto \vec{o}, \vec{e}_2 \mapsto \vec{o}, \vec{n} \mapsto \vec{n}$, $\hat{P}_E : \vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_1, \vec{e}_2 \mapsto \vec{e}_2, \vec{n} \mapsto \vec{o}$, $\hat{S}_E : \vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_1, \vec{e}_2 \mapsto \vec{e}_2, \vec{n} \mapsto -\vec{n}$.

Mit Nummer 32.17 bekommen wir:

32.21

$$\hat{P}_n \overset{\mathrm{B}}{=} \tilde{P}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U^t P_n U, \quad \text{hiermit:} \quad \boxed{P_n = U\tilde{P}_n U^t},$$

$$\hat{P}_E \overset{\mathrm{B}}{=} \tilde{P}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U^t P_E U, \quad \text{hiermit:} \quad \boxed{P_E = U\tilde{P}_E U^t},$$

$$\hat{S}_E \overset{\mathrm{B}}{=} \tilde{S}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U^t S_E U, \quad \text{hiermit:} \quad \boxed{S_E = U\tilde{S}_E U^t}.$$

III. Schließlich lässt sich die Projektion auf die Ebene E auch mit Hilfe des **Vektorproduktes** beschreiben: Zunächst kann man zu beliebig vorgegebenem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $\vec{r} \mapsto \vec{a} \times \vec{r}$ bzgl. der natürlichen Basis als Matrix schreiben:

$$\vec{a} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ also:}$$

32.22

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist $\Omega_a = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ die **Matrix** bzgl. B_{nat}

der Abbildung $\vec{r} \mapsto \vec{a} \times \vec{r}$, d.h. für alle $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ist $\boxed{\boxed{\vec{a} \times \vec{r} = \Omega_a \vec{r}}}$.

(Wir nennen diese Matrix Ω_a im Folgenden kurz die **Matrixdarstellung des Vektorproduktes** $\vec{a} \times \vec{r}$.)

32.23 Diese Matrizen Ω_a sind **schiefhermitesch** (reell schiefsymmetrisch), und offensichtlich ist *jede* reelle schiefsymmetrische $3,3$-Matrix A die Matrix eines Vektorproduktes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{12} & 0 & -\alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & 0 \end{pmatrix} = \Omega_c \text{ mit } \vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha_{23} \\ -\alpha_{13} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}, \text{ also } \boxed{A\vec{r} = \vec{c} \times \vec{r} \ \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3}.$$

Zusammen mit den Ausführungen des Abschnitts 24.G (siehe Abbildung 24.4 !) bekommen wir:

32.24 Sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ der Normaleneinheitsvektor einer Ebene E des $\mathbb{R}^3$ und sei

$\Omega = \Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$ die Matrixdarstellung des Vektorproduktes $\vec{n} \times \vec{r}$.

Dann werden die Vektoren $\vec{r}$ des $\mathbb{R}^3$ durch die Abbildung

$$\boxed{P_{E,\perp} = \Omega : \vec{r} \mapsto \vec{r}_{E,\perp} = \Omega\,\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r}}$$

zunächst auf die Ebene E projiziert und anschließend in E um den Winkel $\pi/2$ gedreht.

Hiermit ist $\boxed{P_E = -\Omega^2 : \vec{r} \mapsto \vec{r}_E = -\Omega^2\,\vec{r} = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})}$

die **orthogonale Projektion** auf die Ebene E: wie oben in Nr 32.20 erhält man

die **Projektionsmatrix**: $P_E = -\Omega^2 = \begin{pmatrix} 1-n_1^2 & -n_1n_2 & -n_1n_3 \\ -n_1n_2 & 1-n_2^2 & -n_2n_3 \\ -n_1n_3 & -n_2n_3 & 1-n_3^2 \end{pmatrix}$.

z.B.: Wir wollen die **Projektionsmatrix** P_E, die den $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene $E : x + 2y + 3z = 0$ projiziert, und insbesondere die **Projektion** $\vec{r}_E$ des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf diese Ebene auf verschiedene Arten bestimmen: (siehe hierzu Abb. 32.5)

1. Am einfachsten bekommt man $\vec{r}_E$ mit der Projektion $\vec{r}_n = \left(\vec{n} \cdot \vec{r}\right)\vec{n}$ von $\vec{r}$ auf die Normalenrichtung $\vec{n}$ von E:

der Normaleneinheitsvektor zu E ist $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; damit ergibt sich sofort:

$$\vec{r}_E = \vec{r} - \vec{r}_n = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{14}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{16}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}.$$

(Allerdings hat man hiermit noch nicht die Projektionsmatrix P_E.)

2. Die Projektionsmatrix, die den $\mathbb{R}^3$ auf die Richtung des Normaleneinheitsvektors $\vec{n}$ projiziert, ist:

$$P_n = \vec{n}\,\vec{n}^{\,\perp} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix};\ \text{hiermit ist}$$

$$P_E = I - P_n = \frac{1}{14}\left[\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}\ \text{und}$$

$$\vec{r}_E = P_E\vec{r} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}.$$

3. Wir suchen uns zunächst (irgend-)eine ONB $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ von E, z.B.: $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\vec{e}_2 = \vec{n} \times \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.\ \text{Dann ist}$$

$$P_E = \vec{e}_1\,\vec{e}_1^{\,\perp} + \vec{e}_2\,\vec{e}_2^{\,\perp} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{70}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 9 & 18 & -15 \\ 18 & 36 & -30 \\ -15 & -30 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}\ \text{und (s.o.):}\ \vec{r}_E = \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}.$$

4. Die zum Vektorprodukt $\vec{n} \times \vec{r}$ mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Ebene E gehörende Matrix ist $\Omega = \Omega_n = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$P_E = -\Omega^2 = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix},\ \vec{r}_E \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}.$$

5. Mit der ONB B_E von oben ist $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$, bzgl. der P_E durch die Matrix $\tilde{P}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt wird. Die Transformationsmatrix für den Basiswechsel $B_{nat} \to B$ ist die unitäre Matrix $U = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} -2\sqrt{14} & -3 & \sqrt{5} \\ \sqrt{14} & -6 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ mit $U^{-1} = U^t$. Aus: $\tilde{P}_E = U^{-1}P_E U$ folgt:

$$P_E = U\tilde{P}_E U^t = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} -2\sqrt{14} & -3 & \sqrt{5} \\ \sqrt{14} & -6 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{14} & \sqrt{14} & 0 \\ -3 & -6 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{70}\begin{pmatrix} -2\sqrt{14} & -3 & \sqrt{5} \\ \sqrt{14} & -6 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{14} & \sqrt{14} & 0 \\ -3 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 65 & -10 & -15 \\ -10 & 50 & -30 \\ -15 & -30 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_E \overset{\text{s.o.}}{=} \begin{pmatrix} 12/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}.$$

32.H Drehmatrizen.

32.25

Jede Drehung des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel α hat bzgl. *jeder* positiv orientierten ONB $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die Matrixdarstellung $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. (s. die Abb.)

A_α ist eine relle Orthogonalmatrix mit der Determinante $\det A_\alpha = 1$.

Umgekehrt ist *jede* reelle Orthogonalmatrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det A = +1$ eine Drehmatrix: es ist $b = -c,\ d = a$ und $a^2 + c^2 = 1$, folglich:
$A = A_\alpha$ mit $\cos\alpha = a$ und $\sin\alpha = c$.

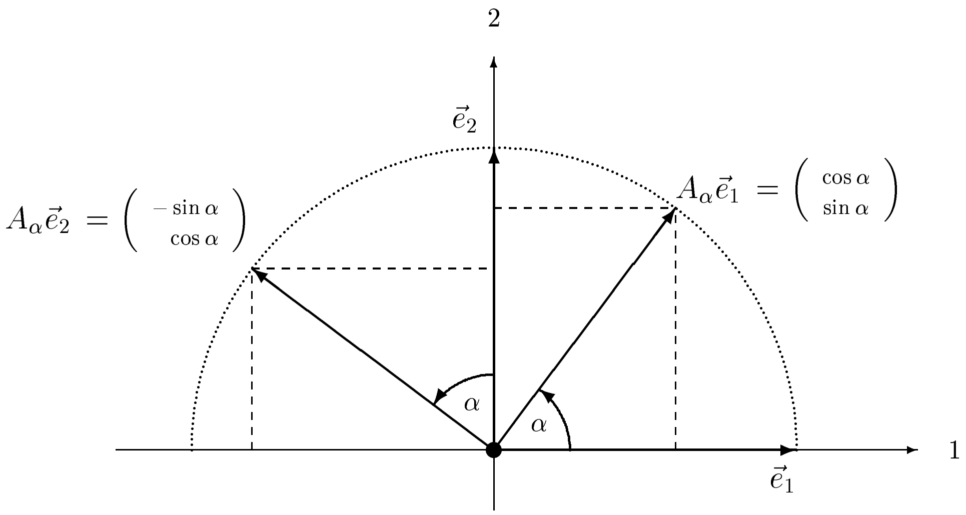


Abbildung 32.6
Drehung um den Winkel α

z.B.:

$$A_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad A_{\pi/6}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.464 \\ 3.732 \end{pmatrix},$$

$$A_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad A_{\pi/4}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.414 \\ 4.234 \end{pmatrix},$$

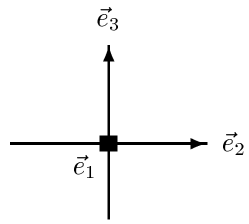
$$A_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A_{\pi/3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.268 \\ 4.464 \end{pmatrix},$$

$$A_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{\pi/2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

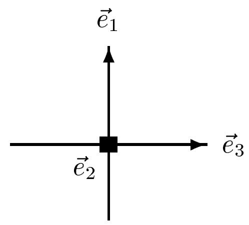
$$A = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \left\{ \begin{matrix} \cos\alpha = -0.8 \\ \sin\alpha = 0.6 \end{matrix} \right\}, \text{ d.h. } \alpha = 0.795\,\pi.$$

Die wichtigsten Drehungen des $\mathbb{R}^3$ sind die Drehungen um einen Winkel α **um die Hauptachsen einer *positiv* orientierten ONB** $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Bezüglich B haben diese Drehungen die Darstellungen:

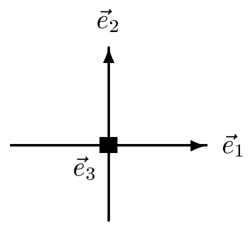
1. um die $\vec{e}_1$–Achse: $A_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$



32.26 **2.** um die $\vec{e}_2$–Achse: $A_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$



3. um die $\vec{e}_3$–Achse: $A_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



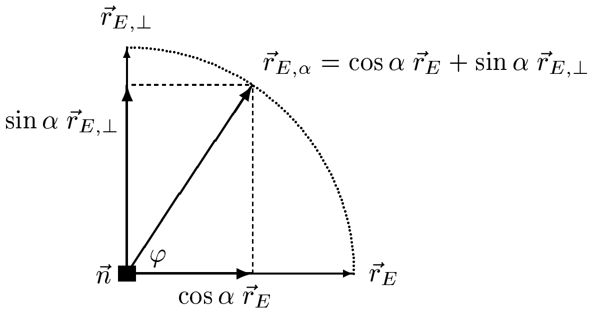
Es gibt zwei bequeme Möglichkeiten, die Drehmatrix $A_{g,\alpha}$ (bzgl. der natürlichen Basis) einer Drehung des $\mathbb{R}^3$ um einen Winkel α um eine *beliebige* Achse $g = \operatorname{span}\{\vec{a}\}$ zu erhalten:
Sei $\vec{n} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ und E die zu g orthogonale Ebene durch $\mathcal{O}$:

1. Man sucht (irgend–) eine positiv orientierte ONB $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{e}_3 = \vec{n}$, z.B. $\vec{e}_1$ ein beliebiger, zu $\vec{n}$ orthogonaler Einheitsvektor, und $\vec{e}_2 = \vec{n} \times \vec{e}_1$. Bezüglich dieser Basis hat die Drehung die Darstellung $A_{3,\alpha}$ von oben (Drehung um die 3.Koordinatenachse). Mit der Transformationsmatrix $U = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ für den Basiswechsel $B_{nat} \to B$ ($\Rightarrow$ U ist eine reelle Orthogonalmatrix mit der Inversen $U^{-1} = U^t$) ist dann $A_{3,\alpha} = U^{-1} A_{g,\alpha} U$ (s. Nr. 32.17), folglich: $A_{g,\alpha} = U \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^t$.

2. Sei Ω die Matrix für das Vektorprodukt $\vec{n} \times \vec{r}$ (s. Nr. 32.22 und 24). Dann bilden für alle Vektoren $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ die beiden in E gelegenen Vektoren $\vec{r}_E = -\Omega^2 \vec{r}$ und $\vec{r}_{E,\perp} = \Omega \vec{r}$ zusammen mit der Projektion $\vec{r}_n = \vec{r} - \vec{r}_E$ von $\vec{r}$ auf die Achse g ein positiv orientiertes Orthonormalsystem und der Vektor $\vec{r}_{E,\alpha} = \cos\alpha\, \vec{r}_E + \sin\alpha\, \vec{r}_{E,\perp}$ geht aus $\vec{r}_E$ durch Drehung in E um den Winkel α hervor.

Damit ist $\vec{r} \mapsto \vec{r}_\alpha = \vec{r}_n + \vec{r}_{E,\alpha}$ die Drehung von $\vec{r}$ um den Winkel α um die Drehachse g. Die zugehörige Drehmatrix ist: $A_{g,\alpha} = P_n - \cos\alpha\,\Omega^2 + \sin\alpha\,\Omega = I + \sin\alpha\,\Omega + (1-\cos\alpha)\,\Omega^2$:

in E :



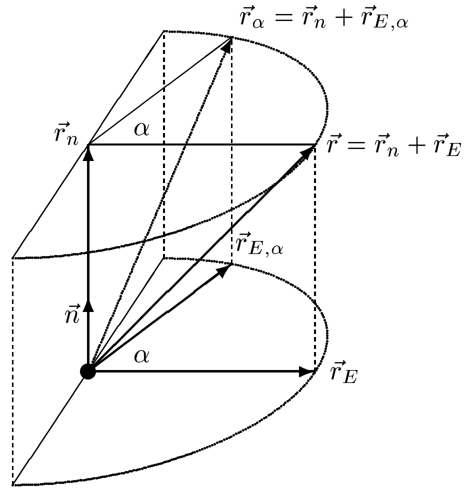


Abbildung 32.7 Drehung um den Winkel α

32.27

Die **Drehung** des $\mathbb{R}^3$ um einen Winkel α um eine *beliebige* Achse g durch $\mathcal{O}$ hat bzgl. der natürlichen Basis die Matrixdarstellung:

$$\boxed{\begin{aligned} A_{g,\alpha} &= U \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^t = \\ &= I + \sin\alpha\,\Omega + (1-\cos\alpha)\,\Omega^2 . \end{aligned}}$$

Hierbei ist:

$U = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\right)$ die Transformationsmatrix für den Basiswechsel $B_{nat} \to B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ mit dem Einheitsvektor $\vec{n}$ in *positiver* Drehachsenrichtung und zwei orthonormierten Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ der zu g orthogonalen Ebene E durch $\mathcal{O}$ (so, dass B eine *rechts*orientierte ONB des $\mathbb{R}^3$ ist),

und $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$ die zum Vektorprodukt $\vec{n} \times \vec{r}$ gehörende Matrix: $\Omega\vec{r} := \vec{n} \times \vec{r}$.

Bemerkung: (*) Diese Drehmatrix $A_{g,\alpha}$ ist gleich der Exponential–Matrix $e^{\alpha\,\Omega}$!

Es ist $\Omega^0 = I$ und aufgrund von Nr. 24.14 (s. auch Abb. 24.4) ist

$$\Omega^n = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^k\Omega & \text{, für } \textit{ungerade } n = 2k+1 \ \ (k \in \mathbb{N}_0)\,, \\ (-1)^k\,(-\Omega^2) & \text{, für } \textit{gerade } n = 2k \ \ (k \in \mathbb{N})\,. \end{array} \right\}, \ \text{somit:}$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha\,\Omega} \ &:= \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\,\Omega^n \quad \textbf{(Exponentialreihe!)} \ = \\ &= \ I + \Omega^2 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - + \cdots\right)\Omega^2 + \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - + \cdots\right)\Omega \ = \\ &= \ I + \sin\alpha\;\Omega \,+ (1-\cos\alpha)\,\Omega^2 \ = A_{g,\alpha}\,. \end{aligned}$$

z.B.: Wir wollen die Drehmatrix $A_{g,\pi/3}$ bestimmen, die den $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\alpha = \pi/3$ um die Drehachse $g = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ dreht.

1. Der Einheitsvektor in Drehachsenrichtung ist $\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und die beiden zu $\vec{n}$ orthogonalen Vektoren

$\vec{e}_1 \overset{\text{z.B.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \vec{n} \times \vec{e}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$ bilden ein ONS in der zu g orthogonalen Ebene durch $\mathcal{O}$. Bzgl. der ONB $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ des $\mathbb{R}^3$ hat die Drehung die Darstellung $A_{3,\pi/3} = \begin{pmatrix}\cos\pi/3 & -\sin\pi/3 & 0\\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, und die Transformationsmatrix für den Basiswechsel $B_{nat} \to B$ ist die reelle Orthogonalmatrix $U = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -4 & \sqrt{2}\\ 3 & 1 & 2\sqrt{2}\\ -3 & 1 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Hiermit ist

$$\begin{aligned} A_{g,\pi/3} \ &= U\,A_{3,\pi/3}\,U^{\,t} \ = \ \frac{1}{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2}\begin{pmatrix}0 & -4 & \sqrt{2}\\ 3 & 1 & 2\sqrt{2}\\ -3 & 1 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -4 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix}0 & -4 & \sqrt{2}\\ 3 & 1 & 2\sqrt{2}\\ -3 & 1 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & -3-\sqrt{3}\\ -4 & 3\sqrt{3}+1 & -3\sqrt{3}+1\\ 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3}\\ 2+6\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3}\\ 2-6\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Die Matrix für das Vektorprodukt $\vec{n} \times \vec{r}$ ist $\Omega = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, und ihr Quadrat ist

$\Omega^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 2\\ 2 & -5 & 4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$. Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{g,\pi/3} \ &= I + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\Omega + \frac{1}{2}\,\Omega^2 = \frac{1}{18}\left[\begin{pmatrix}18 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & 18\end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix}0 & -6 & 6\\ 6 & 0 & -3\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8 & 2 & 2\\ 2 & -5 & 4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}\right] = \\ &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix}10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3}\\ 2+6\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3}\\ 2-6\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus den beiden in Nr. 32.27 genannten Darstellungen der Drehmatrizen ergibt sich sofort:

32.28 Eine reelle $3,3$–Matrix A ist genau dann eine **Drehmatrix**, wenn sie eine **Orthogonalmatrix** ist mit der **Determinante** $\det A = +1$.

32.29 Jede **Drehmatrix** $A_{g,\alpha} = U\, A_{3,\alpha}\, U^t$ hat die **Spur** $\boxed{\operatorname{trace} A = 1 + 2\cos\alpha}$.

32.30 Da Ω *schiefhermitesch* ist und die Matrizen I und Ω^2 *hermitesch* sind, ist für jede **Drehmatrix** $A_{g,\alpha} = I + \sin\alpha\,\Omega + (1-\cos\alpha)\,\Omega^2$ die Matrix $\boxed{\sin\alpha\,\Omega = \left(A_{g,\alpha}\right)_s = \frac{1}{2}\left(A_{g,\alpha} - A_{g,\alpha}^{\,t}\right)}$ der **schiefhermitesche Anteil** von $A_{g,\alpha}$ (s. Nr. 30.49).

32.31 [**1**] Mit Nr. 32.28 kann man also **entscheiden, ob** eine reelle $3,3$–Matrix A eine Drehmatrix $A = A_{g,\alpha}$ ist.

[**2**] Nr. 32.29 liefert in diesem Fall über die Beziehung $\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{2}\,(\operatorname{trace} A\ - 1)}$ den **Drehwinkel** $\alpha \in [\,0,\pi\,]$ und

[**3**] schließlich kann man (z.B.) mit Hilfe von Nr. 32.30 die **Drehachse** finden: zunächst bestimmt man hierzu den **schiefhermiteschen Anteil** $A_s = \frac{1}{2}(A - A^t)$ von A; mit $0 < \alpha < \pi$ ist dann $\sin\alpha > 0$ und die Matrix $\Omega = \dfrac{1}{\sin\alpha}\, A_s$ ist die Matrix des Vektorproduktes $\vec{n} \times \vec{r}$:

Ω hat die Form $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ und damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix}$ (beachte das Minuszeichen!) der **Einheitsvektor in Drehachsenrichtung** (diese Richtung ergibt sich so, dass der Drehwinkel im Intervall $[\,0,\pi\,]$ liegt).

z.B.: Wir wollen "überprüfen", ob die im letzen Beispiel erhaltene Matrix

$A = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3} \\ 2+6\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3} \\ 2-6\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$ eine **Drehmatrix** ist und den **Drehwinkel** α sowie die

Drehachse g bestimmen.

Am mühsamsten ist (wegen der "krummen" Zahlen) der Nachweis der **Orthogonalität** und die Berechnung der **Determinante** von A:

Die Spalten von A haben die Norm 1:

$$\frac{1}{9}\left\|\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{9}\sqrt{25+(1+6\sqrt{3}+27)+(1-6\sqrt{3}+27)} = 1\,,$$

$$\frac{1}{18}\left\|\begin{pmatrix} 2-6\sqrt{3} \\ 13 \\ 4+3\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{18}\sqrt{(4-24\sqrt{3}+108)+169+(16+24\sqrt{3}+27)} = 1\,,$$

$$\frac{1}{18}\left\|\begin{pmatrix} 2+6\sqrt{3} \\ 4-3\sqrt{3} \\ 13 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{18}\sqrt{(4+24\sqrt{3}+108)+(16-24\sqrt{3}+27)+169} = 1\,,$$

und sie sind paarweise orthogonal:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2-6\sqrt{3} \\ 13 \\ 4+3\sqrt{3} \end{pmatrix} = (10-30\sqrt{3})+(13+39\sqrt{3})+(4-12\sqrt{3}+3\sqrt{3}-27) = 0\,,$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2+6\sqrt{3} \\ 4-3\sqrt{3} \\ 13 \end{pmatrix} = (10+30\sqrt{3})+(4-3\sqrt{3}+12\sqrt{3}-27)+(13-39\sqrt{3}) = 0\,,$$

$$\begin{pmatrix} 2-6\sqrt{3} \\ 13 \\ 4+3\sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2+6\sqrt{3} \\ 4-3\sqrt{3} \\ 13 \end{pmatrix} = (4-108)+(52-39\sqrt{3})+(52+39\sqrt{3}) = 0\,;$$

ihre Determinante ist:

$$\det A = \frac{1}{9\cdot 18\cdot 18}\begin{vmatrix} 5 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2916}\Big(845+(332-216\sqrt{3})+(332+216\sqrt{3})+676+55+676\Big) = 1\,.$$

Damit *ist* A nach Nr. 32.28 eine **Drehmatrix**. Um den **Drehwinkel** $\alpha\in[\,0,\pi\,]$ zu bekommen, müssen wir nach Nr. 32.29 die Spur von A berechnen: $1+2\cos\alpha = \operatorname{trace} A = \dfrac{10+13+13}{18} = 2$;
hieraus folgt: $\cos\alpha = 1/2$, d.h. $\alpha = \pi/3$.

Die **Drehachse** ergibt sich gemäß Nr. 32.30 mit Hilfe des schiefhermiteschen Anteils von A:

$$\sin\alpha\,\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\Omega = A_s = \frac{1}{2}\left(A-A^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 18}\left[\begin{pmatrix} 10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3} \\ 2+6\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3} \\ 2-6\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 2+6\sqrt{3} & 2-6\sqrt{3} \\ 2-6\sqrt{3} & 13 & 4+3\sqrt{3} \\ 2+6\sqrt{3} & 4-3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}\right] = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

damit ist $\Omega = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ ist der **Einheitsvektor in Drehachsenrichtung**.

33 Gauß'sches Eliminationsverfahren.

Stichpunkte: Elementare Zeilen– und Spaltenoperationen und die zugehörigen Transformationsmatrizen; Gauß'sches Eliminationsverfahren: zunächst nur für reguläre Matrizen, hiermit Matrix–Invertierung, dann auch für nicht–reguläre Matrizen, ohne und mit Spaltenvertauschung.

33.A Beispiel zur Motivierung.

Zu lösen sei das **lineare Gleichungssystem (LGS)** : (*) $\boxed{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 2 \\ 4x+y & = & 1 \end{array}}$.

Um dieses LGS zu lösen, formen wir es — wie man das schon in der Schule macht — schrittweise und solange um, bis die Lösung dasteht; jeder dieser Umformungen entspricht eine **Umformung der zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrix** :

	Wir lösen das lineare Gleichungssystem:	mit der erweiterten Koeffizientenmatrix:
(0)	$\begin{array}{lrcl} \boxed{1} & 2x+y & = & 2 \\ \boxed{2} & 4x+y & = & 1 \end{array}$	$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$
	Von Gleichung $\boxed{2}$ wird das 2–Fache von Gleichung $\boxed{1}$ subtrahiert:	Von der 2. Zeile wird das Doppelte der 1. Zeile subtrahiert:
(i)	$\begin{array}{lrcl} \boxed{1'} & 2x+y & = & 2 \\ \boxed{2'} & -y & = & -3 \end{array}$	$(A_1 \mid \vec{b}_1) = \left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$
	Zur Gleichung $\boxed{1'}$ wird die Gleichung $\boxed{2'}$ addiert:	Zur 1. Zeile wird die 2. Zeile addiert:
(ii)	$\begin{array}{lrcl} \boxed{1''} & 2x & = & -1 \\ \boxed{2''} & -y & = & -3 \end{array}$	$(A_2 \mid \vec{b}_2) = \left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$
	Gleichung $\boxed{1''}$ wird mit $1/2$ und Gleichung $\boxed{2''}$ mit -1 multipliziert:	Die erste Zeile wird mit $1/2$ und die zweite Zeile mit -1 multipliziert:
(iii)	$\begin{array}{lrcl} \boxed{1'''} & x & = & -1/2 \\ \boxed{2'''} & y & = & 3 \end{array}$	$(A' \mid \vec{b}') = \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$
	Der gesuchte Lösungsvektor ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.	

Um ein LGS (*) $A\vec{x} = \vec{b}$ mit *regulärer* Koeffizientenmatrix A — wie in diesem Beispiel — zu lösen, genügt es also, die **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A \mid \vec{b})$ in der angegebenen Weise solange umzuformen, bis man eine Matrix der Form $(A' \mid \vec{b}') = (I \mid \vec{b}')$ erhält: dann ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b}'$ der gesuchte Lösungsvektor. Alles andere braucht man garnicht hinzuschreiben.

33.B Elementare Zeilen– und Spaltenoperationen.

Alle im letzten Beispiel durchgeführten Matrixoperationen sind **elementare Zeilenoperationen**; hierunter versteht man Matrixoperationen der folgenden Art:

33.1

I zur i-ten Zeile der Matrix A wird das β-Fache der j-ten Zeile **addiert** ($i \neq j$!):

$$\mathcal{Z}_I : A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{Z}_I(A) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i + \beta\vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

II die i-te und j-te Zeile von A werden **vertauscht** (wobei $i \neq j$!):

$$\mathcal{Z}_{II} : A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{Z}_{II}(A) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

III die i-te Zeile von A wird mit $\beta \neq 0$ **multipliziert**:

$$\mathcal{Z}_{III} : A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{Z}_{III}(A) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \beta\vec{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

33.2

Entsprechend versteht man unter **elementaren Spaltenoperationen** Matrixoperationen der Art (für $i \neq j$) :

I zur i-ten Spalte der Matrix A wird das β-Fache der j-ten Spalte **addiert**,
II die i-te und j-te Spalte von A werden **vertauscht**,
III die i-te Spalte von A wird mit $\beta \neq 0$ **multipliziert**.

Der große Nutzen dieser elementaren Zeilen– und Spaltenoperationen beruht wesentlich auf der folgenden Tatsache:

33.3

Zu jeder elementaren **Zeilenoperation** $\mathcal{Z}$ (und zu $m \in \mathbb{N}$) gibt es eine *eindeutig bestimmte*, reguläre (m,m)–Matrix Z so, dass an jeder (m,n)–Matrix A ($n \in \mathbb{N}$ beliebig) die Zeilenoperation $\mathcal{Z}$ bewirkt wird, wenn man A *von links* mit Z multipliziert:

$$\boxed{\boxed{\mathcal{Z}(A) = Z \cdot A \text{ für jede } (m,n)\text{–Matrix } A}}\ ;$$

man erhält diese zur Zeilenoperation $\mathcal{Z}$ gehörende Transformationsmatrix Z durch Anwendung von $\mathcal{Z}$ auf die (m,m)–Einheitsmatrix $I = I_m$: $\boxed{Z = \mathcal{Z}(I)}$.

33.4

Völlig analog gibt es zu jeder elementaren **Spaltenoperation** $\mathcal{S}$ (und zu $n \in \mathbb{N}$) eine *eindeutig bestimmte*, reguläre (n,n)–Matrix S so, dass an jeder (m,n)–Matrix A ($m \in \mathbb{N}$ beliebig) die Spaltenoperation $\mathcal{S}$ bewirkt wird, wenn man A *von rechts* mit S multipliziert:

$$\boxed{\boxed{\mathcal{S}(A) = A \cdot S \text{ für jede } (m,n)\text{–Matrix } A}}\ ;$$

man erhält diese zur Spaltenoperation $\mathcal{S}$ gehörende Transformationsmatrix S durch Anwendung von $\mathcal{S}$ auf die (n,n)–Einheitsmatrix $I = I_n$: $\boxed{S = \mathcal{S}(I)}$.

Zunächst ist klar: *wenn* es zur Zeilenoperation $\mathcal{Z}$ eine Matrix Z so gibt, dass $\mathcal{Z}(A) = Z \cdot A$ *für jede* (m,n)–Matrix A, dann ist insbesondere $\mathcal{Z}(I_m) = Z \cdot I_m = Z$, und *wenn* es zur Spaltenoperation $\mathcal{S}$ eine Matrix S so gibt, dass $\mathcal{S}(A) = A \cdot S$ *für jede* (m,n)–Matrix A, dann ist insbesondere $\mathcal{S}(I_n) = I_n \cdot S = S$.

Dass umgekehrt die sich auf diese Weise zu jeder Zeilenoperation $\mathcal{Z}$ und jeder Spaltenoperation $\mathcal{S}$ ergebenden Transformationsmatrizen Z bzw. S stets das Gewünschte leisten, können wir z.B. bei den Zeilenoperationen des Typs I von oben einsehen (es lohnt nicht, dies für alle sich ergebenden Transformationsmatrizen auszuführen) :

Für $i \neq j$ und $\beta \in \mathbb{K}$ sei $\mathcal{Z}$ die Zeilenoperation "addiere zur i-ten Zeile das β-Fache der j–ten Zeile". Dann ergibt sich die Transformationsmatrix

$$Z = \mathcal{Z}(I_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \beta & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}_{m,m} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-Zeile} \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

und man erhält für jede (m,n)–Matrix A ($n \in \mathbb{N}$ beliebig) mit den Zeilen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$:

$$ZA = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \beta & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i + \beta\,\vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \mathcal{Z}(A)\ .$$

$\blacksquare$

Unsere bisherigen Überlegungen zeigen darüberhinaus:

33.5

Zu jeder **Zeilenoperation** $\mathcal{Z}$ für (m,n)–Matrizen, die sich aus mehreren elementaren Zeilenoperationen $\mathcal{Z}_1, \ldots \mathcal{Z}_k$ vom Typ **I**, **II** oder **III** (s.o.) zusammensetzt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathcal{Z}_1"] \arrow[rrrr, bend right, "\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_k \circ \cdots \circ \mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1"'] & A_1 \arrow[r, "\mathcal{Z}_2"] & A_2 \arrow[r, "\mathcal{Z}_3"] & \cdots \arrow[r, "\mathcal{Z}_k"] & A' \end{tikzcd}$$

gibt es eine reguläre (m,m)–Matrix Z so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle (m,n)–Matrizen A die Produktmatrix $Z \cdot A$ gleich der gemäß $\mathcal{Z}$ umgeformten Matrix A ist: $\boxed{A' = \mathcal{Z}(A) = ZA \text{ mit } Z = Z_k \cdots Z_2 Z_1}$.

(Die Matrizen Z_j sind gerade die gemäß Nr. 33.3 zu den elementaren Zeilenoperationen $\mathcal{Z}_j$ gehörenden, regulären (m,m)–Matrizen.)

33.6 Man erhält die zur Zeilenoperation $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_k \circ \cdots \circ \mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1$, gehörende Transformationsmatrix Z, wenn man die Einheitsmatrix $I = I_m$ gemäß $\mathcal{Z}$, also nacheinander gemäß $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \ldots, \mathcal{Z}_k$ umformt:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\mathcal{Z}_1"] \arrow[dddd, bend right=60, "\mathcal{Z}"'] & I_m \arrow[d] \arrow[dddd, bend left=60, "\mathcal{Z}"] \\
A_1 = Z_1 A \arrow[d, "\mathcal{Z}_2"] & Z_1 \arrow[d] \\
A_2 = Z_2 Z_1 A \arrow[d] & Z_2 \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d, "\mathcal{Z}_k"] & \vdots \arrow[d] \\
A' = Z_k \cdots Z_2 Z_1 A = ZA & Z = Z_k \cdots Z_2 Z_1
\end{tikzcd}$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für Spaltenoperationen. Beachte aber, dass in diesem Fall die zugehörigen Transformationsmatrizen S_j , S *von rechts* an die umzuformende Matrix zu multiplizieren sind!

Am letzten Ergebnis kann man bereits ein äußerst nützliches Resultat ablesen:

Wenn — wie im Beispiel vom Anfang dieser Lektion — die Matrix A durch Zeilenoperationen $\mathcal{Z}$ in die Einheitsmatrix I übergeführt wird, so hat man mit der zugehörigen Transformationsmatrix Z die Beziehung: $I = \mathcal{Z}(A) = ZA$, d.h. $Z = A^{-1}$! Damit haben wir eine sehr brauchbare **Methode zur Bestimmung der Inversen einer regulären Matrix**, die sich besonders für große und "nicht-schöne" (z.B. nicht–unitäre) Matrizen anzuwenden lohnt:

33.7 Man bekommt die **Inverse** A^{-1} einer regulären Matrix A, wenn man A durch elementare Zeilenoperationen $\mathcal{Z}$ in die Einheitsmatrix I und *parallel* hierzu die Einheitsmatrix I entsprechend umformt: hierdurch wird I in die Inverse A^{-1} übergeführt:

$$\boxed{\begin{array}{l} A \xrightarrow{\mathcal{Z}} I \\ I \xrightarrow{\mathcal{Z}} A^{-1} \end{array}}$$

z.B.: Wir kommen zurück auf das Beispiel vom Beginn dieser Lektion und bestimmen für jede der angegebenen Zeilenoperationen die zugehörige Transformationsmatrix:

Die durch $\vec{b}$ und I **erweiterte Matrix:**			wird umgeformt gemäß der **Zeilenoperation:**	mit der **Matrix:**
A	$\vec{b}$	I	$\mathcal{Z}_1$: von der 2. Zeile wird das 2–fache der 1. Zeile subtrahiert,	$Z_1 = \mathcal{Z}_1(I)$
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}$
A_1	$\vec{b_1}$	Z_1	$\mathcal{Z}_2$: zur 1. Zeile wird die 2. Zeile addiert,	$Z_2 = \mathcal{Z}_2(I)$
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$
A_2	$\vec{b_2}$	$Z_2 Z_1$	$\mathcal{Z}_3$: die 1. Zeile wird durch 2 und die 2. Zeile durch -1 geteilt;	$Z_3 = \mathcal{Z}_3(I)$
$\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$
$A' = I$	$\vec{b}\,'$	$Z_3 Z_2 Z_1$	insgesamt: $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_3 \circ \mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1$	$Z = \mathcal{Z}(I) = A^{-1}$
$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 \\ 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{matrix}$

Wir lesen ab, dass das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung $\vec{x} = \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat und dass die Koeffizientenmatrix invertierbar ist mit der Inversen $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Die linken Spalten dieses Beispiels enthalten bereits alle wesentlichen Elemente des Gauß'schen Eliminationsverfahrens!

33.C Gauß'sches Eliminationsverfahren für reguläre Matrizen.

Das **Gauß'sche Eliminationsverfahren** (= **Gauß–Algorithmus**) besteht darin, Matrizen auf *systematische Weise* so umzuformen, dass sie eine möglichst einfache Gestalt bekommen. Es wird im Wesentlichen dazu benutzt, **homogene** oder **inhomogene lineare Gleichungssysteme** zu lösen, gegebenenfalls die **Inverse** einer Matrix zu bestimmen oder um **Determinanten** zu berechnen.

Wir werden hier vom Gauß'schen Eliminationsverfahren, das es in einer ganzen Reihe von z.T. sehr verfeinerten Versionen gibt (die z.B. gewährleisten, dass die Rundungsfehler möglichst gering gehalten werden), nur die einfachste Grundversion diskutieren, bei der versucht wird, nur mit elementaren Zeilenoperationen auszukommen. Und da es sich hierbei nur um eine **systematische Vorgehensweise** bei der Umformung von Matrizen handelt, werden die wesentlichen Prinzipien dieses Verfahrens bereits deutlich, wenn wir es anwenden, um eine ***reguläre*** n,n–Matrix $A = (A_{ij})_{n,n}$ in die ***Einheitsmatrix*** $I = I_n$ überzuführen. Dazu gehen wir schrittweise wiefolgt vor:

1. Da $A = (a_{ij})_{n,n}$ regulär ist, ist die 1. Spalte von A nicht die Nullspalte, enthält also mindestens einen von Null verschiedenen Koeffizienten. Falls an der Stelle $(1,1)$ eine Null steht, kann durch $\boxed{\text{Vertauschung zweier Zeilen}}$ erreicht werden, dass an der Stelle $(1,1)$ eine *von Null verschiedene* Zahl a_1 steht. Man hat dann eine Matrix der Form:

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{mit } \boxed{a_1 \neq 0}$$

2. Mit Hilfe von $a_1 \neq 0$ wird die 1. Spalte unterhalb von a_1 ***ausgeräumt***, d.h. mit Hilfe der elementaren Zeilenoperationen:

für jedes $j = 2, \ldots, n$ wird von der j-ten Zeile das (a_j/a_1)-Fache der 1. Zeile subtrahiert

so umgeformt, dass die Matrix die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

3. Die auf diese Weise erhaltene Matrix hat denselben Rang wie die Ausgangsmatrix A, ist also wieder regulär. Damit sind insbesondere die beiden ersten Spalten linear unabhängig, womit die 2. Spalte *nicht* dieselbe Form haben kann wie die 1. Spalte. Daher ist es möglich — *ohne dabei die erste Zeile zu verändern!* —, durch $\boxed{\text{Vertauschung zweier Zeilen}}$ zu erreichen, das an der Stelle $(2,2)$ eine von Null verschiedene Zahl b_2 steht:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ 0 & b_3 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_n & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{mit } \boxed{b_2 \neq 0}$$

4. Mit Hilfe von $b_2 \neq 0$ wird die 2. Spalte unterhalb von b_2 ***ausgeräumt***, d.h. mit Hilfe der elementaren Zeilenoperationen:

für jedes $j = 3, \ldots, n$ wird von der j-ten Zeile das (b_j/b_2)-Fache der 2. Zeile subtrahiert

so umgeformt, dass die Matrix die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1} & * & * & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

5. Verfährt man entsprechend der Reihe nach mit den nächsten Spalten, so ergibt sich schließlich eine Matrix, die ***unterhalb der Hauptdiagonalen ausgeräumt*** ist, also eine obere Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{b_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{c_n} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: In der nächsten Lektion werden wir sehen, dass wir hiermit bereits die **Determinante** von A bestimmt haben: da Zeilenoperationen vom Typ I: *" addiere zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile"* den Wert einer Determinante *nicht verändern*, während Zeilenoperationen vom Typ II: *"vertausche zwei Zeilen"* zu einem Vorzeichenwechsel führen, hat die Determinante von A den Wert $\boxed{\det A = (-1)^k\, a_1 b_2 \cdots c_n}$, wenn bisher k Zeilenvertauschungen vorgekommen sind.

In den Schritten bisher wurde — von links nach rechts und oben links beginnend — die Matrix ***unterhalb der Hauptdiagonalen ausgeräumt***. Als Nächstes wird — völlig analog, nun von rechts nach links und unten rechts beginnend — die Matrix ***oberhalb der Hauptdiagonalen ausgeräumt***:

6. Zunächst wird die $\boxed{\text{letzte Zeile durch } c_n \text{ geteilt}}$, so dass an der Stelle (n,n) eine 1 steht:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1} & * & \cdots & c_1 \\ 0 & \boxed{b_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

7. Mit Hilfe der 1 an der Stelle (n,n) wird die letzte Spalte oberhalb dieser 1 ***ausgeräumt***, d.h. mit den elementaren Zeilenoperationen:

für jedes $j = 1,\ldots,n-1$ wird von der j-ten Zeile das c_j–Fache der n-ten Zeile subtrahiert

so umgeformt, dass die Matrix die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1} & * & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{b_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

8. In dieser Weise verfährt man entsprechend (von rechts nach links) mit den nächsten Spalten und erhält schließlich die **Einheitsmatrix**:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix}$$

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass es zu dieser Matrixumformung $\mathcal{Z} : A \rightharpoonup I$ eine reguläre Matrix Z so gibt, dass $\mathcal{Z}(A) = I = Z \cdot A$; damit ist $Z = A^{-1}$. Insgesamt haben wir:

33.8 Sei A eine (n,n)–Matrix, $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$ ein Spaltenvektor und I die (n,n)–Einheitsmatrix. Wenn man das System $\left(A \mid \vec{b} \mid I\right)$ mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens so umformt, dass dabei A in die Einheitsmatrix I übergeht:

$$\begin{array}{ccccc} A & | & \vec{b} & | & I \\ \downarrow & \mathcal{Z} & \downarrow & \mathcal{Z} & \downarrow \\ I & | & \vec{x} & | & A^{-1} \end{array}$$

so erhält man ***durch parallel durchgeführte Umformung*** von $\vec{b}$ und I die eindeutig bestimmte **Lösung** $\vec{x}$ des LGS's $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ und die **Inverse** A^{-1} von A.

z.B.: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Gauß–Elimination ergibt:

A			$\vec{b}$	I			Zeilenoperationen
1	0	3	1	1	0	0	
0	2	1	2	0	1	0	$\underline{(3)} - (1)$
1	3	0	3	0	0	1	
1	0	3	1	1	0	0	
0	2	1	2	0	1	0	$\underline{(3)} - \frac{3}{2}(2)$
0	3	-3	2	-1	0	1	
1	0	3	1	1	0	0	$\left[\Rightarrow \det A = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -9\right]$
0	2	1	2	0	1	0	
0	0	$-9/2$	-1	-1	$-3/2$	1	$\left(-\frac{9}{2}\right) \cdot \underline{(3)}$
1	0	3	1	1	0	0	$\underline{(1)} - 3\,(3)$
0	2	1	2	0	1	0	$\frac{1}{2}\left(\underline{(2)} - (3)\right)$
0	0	1	$2/9$	$2/9$	$1/3$	$-2/9$	
1	0	0	$1/3$	$1/3$	-1	$2/3$	
0	1	0	$8/9$	$-1/9$	$1/3$	$1/9$	$\boxed{\text{fertig!}}$
0	0	1	$2/9$	$2/9$	$1/3$	$-2/9$	
I			$\vec{x}$	A^{-1}			

Ergebnis: A hat die **Inverse** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 2/3 \\ -1/9 & 1/3 & 1/9 \\ 2/9 & 1/3 & -2/9 \end{pmatrix}$ und das LGS: $\left\{ \begin{array}{r} x + 3z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ x + 3y = 3 \end{array} \right\}$

hat die eindeutig bestimmte **Lösung**: $x = 1/3$, $y = 8/9$, $z = 2/9$.

33.D Gauß–Elimination bei nicht–regulären Matrizen.

Eine nicht–reguläre Matrix besitzt keine Inverse und lässt sich nicht mit Hilfe elementarer Zeilen– oder Spaltenoperationen in die Einheitsmatrix überführen. Wenn man von einer möglichen, aber umgehbaren Schwierigkeit absieht (s. u. den **Nachtrag**!), kann man jedoch jede (m,n)–Matrix A mit Hilfe elementarer Zeilenoperationen $\mathcal{Z}$ der beschriebenen Art auf die folgende Form bringen ("so dick wie möglich" oben links eine Einheitsmatrix I_r):

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \cdots & & 0 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{d=n-r}$$

Die Nullzeilen kann man hier auch weglassen!

33.9 Die Ausgangsmatrix A und die sich durch Gauß–Elimination ergebende Matrix A' haben **denselben Nullraum**: man bekommt eine Basis $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_d\}$ dieses Nullraumes, wenn man in der Schluss–Stellung A' ***die Hauptdiagonale*** in der angedeuteten Weise ***durch -1 ergänzt***:

$$A \searrow A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1d} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{rd} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1d} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{rd} \\ \hline & & & -1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array}\right)$$

Schluss–Stellung des Eliminationsverfahrens

$$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_d$$

Das *homogene* LGS: $(*)_h$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{o}}$ hat damit die **allgemeine Lösung**:
$\boxed{\vec{x}_0 = \gamma_1\vec{x}_1 + \cdots + \gamma_d\vec{x}_d}$ mit beliebigen Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$.

Das ist ganz einfach einzusehen:

Ist Z die den Elimationsschritten $\mathcal{Z} : A \searrow A' = ZA$ entsprechende, reguläre Matrix (s. Nr. 33.3), so ist $\vec{x} \in \mathcal{N}(A') \Leftrightarrow ZA\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow A\vec{x} \in \mathcal{N}(Z) = \{\vec{o}\} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathcal{N}(A)$ und (mit Nr. 30.37) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} ZA = \operatorname{rang} A' = r$, folglich $\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathcal{N}(A') = n - r = d$ (s. Nr 32.5), d.h. je d linear unabhängige Vektoren aus $\mathcal{N}(A') = \mathcal{N}(A)$ bilden auch eine Basis von $\mathcal{N}(A)$.

Nun sind die d Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_d$ offenbar linear unabhängig, und für jeden dieser Vektoren $\vec{x}_j$ hat man:

$$A'\vec{x}_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{rj} & \cdots & c_{rd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} - c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} - c_{rj} \end{pmatrix} = \vec{o}, \text{ also } \vec{x}_j \in \mathcal{N}(A). \quad \blacksquare$$

Wenn ein *inhomogenes* LGS $(*)$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ mit einer (m,n)–Matrix A und einem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$ zu lösen ist, hat man parallel zu A auch $\vec{b}$ umzuformen; das Gauß'sche Eliminationsverfahren führt dann auf eine **Schluss–Stellung** der Art:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \multicolumn{6}{c|}{A} & \vec{b} \\ \hline 1 & & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1d} & x_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{rd} & x_r \\ \hline O & & & \cdots & & O & O \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{A'} & \vec{b}' \end{array}\right)$$

Das *inhomogene* LGS $(*)$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ ist **genau dann lösbar**, wenn in der Schluss–Stellung $(A'|\,\vec{b}\,')$ des Gauß'schen Eliminationsverfahrens die untersten $(m-r)$ Komponenten des Vektors $\vec{b}\,'$ gleich 0 sind.

Wenn man in diesem Fall diesen Vektor $\vec{b}\,'$ ***auf die Länge*** n bringt, indem man — von unten beginnend! — Nullen streicht oder hinzufügt:

33.10

$$(A'\,|\,\vec{b}\,') = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1d} & x_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{r1} & \cdots & c_{rd} & x_r \\ \hline \mathsf{O} & & & \cdots & & \mathsf{O} & \mathsf{O} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{|ccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1d} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rd} & x_r \\ \hline -1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\vec{x}_1\,,\ \cdots\ ,\ \vec{x}_d\ ;\ \vec{x}_s} \end{array}$$

ergibt sich eine **Partikularlösung** $\vec{x}_s$ des LGS's $(*)$, zusammen mit den Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_d$ von oben also die **allgemeine Lösung**:

$\boxed{\vec{x} = \gamma_1\vec{x}_1 + \cdots + \gamma_d\vec{x}_d + \vec{x}_s}$ mit beliebigen Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$.

Auch das ist schnell gezeigt:

Mar rechnet leicht nach, dass $A'\vec{x}_s = \vec{b}\,'$; damit ist also $ZA\vec{x}_s = Z\vec{b}$, bzw., da Z regulär ist: $A\vec{x}_s = \vec{b}$.
Der Rest der Aussage ergibt sich mit Nr. 33.9 sofort aus Nr. 31.26. ▮

Zum Beispiel:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$. Wir wollen je eine Basis des Nullraumes $\mathcal{N}(A)$ und des Bildraumes $\mathcal{R}(A)$ bestimmen und sowohl das

inhomogene lineare Gleichungssystem: $(*)$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$, d.h. $\left\{\begin{array}{c} 2w - x + y + 2z = 3 \\ 2w + 2x + 2y + z = 12 \\ 4w + x + 3y + 3z = 15 \end{array}\right\}$, als auch

das zugehörige *homogene* LGS $(*)_h$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{o}}$, d.h. $\left\{\begin{array}{c} 2w - x + y + 2z = 0 \\ 2w + 2x + 2y + z = 0 \\ 4w + x + 3y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ lösen.

Hierzu wird die erweiterte Matrix $(A\,|\,\vec{b}\,)$ nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren umgeformt:

A				$\vec{b}$	Zeilenoperationen:
2	−1	1	2	3	$\underline{(2)} - (1)$
2	2	2	1	12	$\underline{(3)} - 2(1)$
4	1	3	3	15	
2	−1	1	2	3	$\underline{(3)} - (2)$
0	3	1	−1	9	$\frac{1}{3}\underline{(2)}$
0	3	1	−1	9	
2	−1	1	2	3	$\underline{(1)} + (2)$
0	1	1/3	−1/3	3	$\Rightarrow\ \operatorname{rang} A = 2$
0	0	0	0	0	(die Nullzeile könnte man auch weglassen!)
2	0	4/3	5/3	6	$\frac{1}{2}\underline{(1)}$
0	1	1/3	−1/3	3	
0	0	0	0	0	
1	0	2/3	5/6	3	***Schlussstellung***
0	1	1/3	−1/3	3	des Gauß–Algorithmus'
0	0	0	0	0	

A'				$\vec{b}\,'$	
1	0	2/3	5/6	3	
0	1	1/3	−1/3	3	
0	0	−1	0	0	***Auswertung***
0	0	0	−1	0	
		$\vec{x}_1$	$\vec{x}_2$	$\vec{x}_s$	

Wir lesen ab:

[1] A hat den **Rang 2**, also bilden je zwei linear unabhängige Spalten von A eine **Basis des Bildraumes**: z.B. $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

[2] A hat den **Defekt 2** $(\operatorname{def} A = 4 - \operatorname{rang} A)$ und $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind zwei linear unabhängige Vektoren aus dem Nullraum $\mathcal{N}(A)$, bilden also eine **Basis des Nullraumes**.

[3] *Gleichwertig* hierzu ist die Aussage, dass das *homogene* LGS $(*)_h$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{o}}$ die **allgemeine Lösung**: $\vec{x}_0 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ hat, d.h.

$\boxed{w_0 = 2c_1 + 5c_2,\ x_0 = c_1 - 2c_2,\ y_0 = -3c_1,\ z_0 = -6c_2}$, c_1, c_2 beliebig konstant.

(wir haben hier die Faktoren $1/3$ bzw. $1/6$ von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ den beliebig wählbaren Konstanten c_1, c_2 "zugeschlagen").

[4] $\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine **Partikulärlösung** des *inhomogenen* LGS's $(*)$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$;

damit hat dieses LGS die **allgemeine Lösung**: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, d.h.

$\boxed{w = 3 + 2c_1 + 5c_2,\ x = 3 + c_1 - 2c_2,\ y = -3c_1,\ z = -6c_2}$, c_1, c_2 beliebig konstant.

Nachtrag:

Mitunter kann eine (m,n)–Matrix A nur dann mit elementaren Matrix–Umformungen in die gewünschte Form gebracht werden, wenn man auch **Spaltenvertauschungen** zulässt. Das ist z.B. erforderlich bei einem Zwischenstand der Art:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccc}
\boxed{\neq 0} & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \boxed{\neq 0} & * & & * & & \\
\vdots & & 0 & \boxed{\boxed{0}} & \cdots & \boxed{\boxed{\neq 0}} & & \vdots \\
 & & & 0 & & * & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & * & \cdots & *
\end{array}\right)
\end{array}$$

Vertauschung der
i-ten und j–ten Spalte

Wenn hier die i–te und j–te Spalte vertauscht sind, kann das Gauß'sche Eliminationsverfahren in der gewohnten Weise mit einer geeigneten Zeilenoperation fortgesetzt werden. Allerdings ist diese **Spaltenvertauschung im Endergebnis zu berücksichtigen!**

Jede ***Spaltenvertauschung*** $\mathcal{S}$: "i–te Spalte $\leftrightarrow$ j–te Spalte" bewirkt nur, dass in dem LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ die ***Reihenfolge der Variablen vertauscht*** wird:

$$\begin{array}{cc|c|c|c|c}
a_{11}x_1 + \cdots + & a_{1i}x_i & + \cdots + & a_{1j}x_j & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{m1}x_1 + \cdots + & a_{mi}x_i & + \cdots + & a_{mj}x_j & + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{S}} \quad \begin{array}{cc|c|c|c|c}
a_{11}x_1 + \cdots + & a_{1j}x_j & + \cdots + & a_{1i}x_i & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{m1}x_1 + \cdots + & a_{mj}x_j & + \cdots + & a_{mi}x_i & + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

Demzufolge ergeben sich auch in den Lösungen $\vec{x}\,' = \vec{x}_s\,' + c_1\vec{x}_1\,' + \cdots + c_d\vec{x}_d\,'$ die Komponenten ***in derselben vertauschten Reihenfolge***:

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ vertauschte Reihenfolge} \qquad \text{statt} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ richtige Reihenfolge}$$

Wenn nur die Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ gesucht sind, spielt dies keine große Rolle: man muss sie nur ***in der richtigen Reihenfolge ablesen***. Wenn allerdings die Lösung in vektorieller Form oder wenn die Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_d$ des Nullraumes $\mathcal{N}(A)$ zu bestimmen sind, müssen hier jeweils die vertauschten ***Komponenten zurückvertauscht*** werden!

Zum Beispiel:

Wir wollen das *inhomogene* LGS: $(*)\ \left\{\begin{array}{rcr} 2x + y - z &=& 1 \\ 4x + 2y + 2z &=& 14 \\ 6x + 3y - 2z &=& 6 \end{array}\right\}$ und das zugehörige *homogene* LGS:

$(*)_h\ \left\{\begin{array}{rcr} 2x + y - z &=& 0 \\ 4x + 2y + 2z &=& 0 \\ 6x + 3y - 2z &=& 0 \end{array}\right\}$ lösen und für den Bildraum $\mathcal{R}(A)$ und Nullraum $\mathcal{N}(A)$ der

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ jeweils eine Basis filden. **Gauß–Elimination** ergibt:

A			$\vec{b}$	Matrix–Operationen:
x	y	z		(natürliche Anordnung der Variablen)
2	1	-1	1	$\underline{(2)} - 2(1)$
4	2	2	14	$\underline{(3)} - 3(1)$
6	3	-2	6	
2	1	-1	1	$\underline{(3)} - \frac{1}{4}(2)$
0	0	4	12	$\underline{\frac{1}{4}(2)}$
0	0	1	3	$\Rightarrow\ \operatorname{rang} A = 2,\ \operatorname{def} A = 3 - 2 = 1$
2	1	-1	1	
0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	3	***! Vertauschung von 2. und 3. Spalte !***
0	0	0	0	(wir lassen die Nullzeile weg)
x	z	y		(neue Reihenfolge der Variablen!)
2	-1	1	1	$\frac{1}{2}\big(\underline{(1)} + (2)\big)$
0	1	0	3	
1	0	1/2	2	***Schlussstellung***
0	1	0	3	des Gauß–Algorithmus'
A'			$\vec{b}\,'$	
1	0	1/2	2	
0	1	0	3	
0	0	-1	0	***Auswertung***
		$\vec{x}_1\,'$	$\vec{x}_s\,'$	

Wir lesen ab:

[1] Da A den Rang 2 hat, bilden je zwei linear unabhängige Spalten, z.B. die 2. und 3. Spalte: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (aber *nicht* die beiden ersten Spalten!) eine **Basis** von $\mathcal{R}(A)$.

[2] Die allgemeine **Lösung** des *inhomogenen* LGS's $(*)$ ist: $\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, d.h.

$x = 2 + \frac{1}{2}\,c$, $y = -c$, $z = 3$, und das *homogene* LGS $(*)_h$ hat die Lösungen: $\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

d.h. $x_0 = \frac{1}{2}\,c$, $y_0 = -c$, $z_0 = 0$ (c bel. konst.).

[3] $\mathcal{N}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

34 Determinanten.

Stichpunkte: Wiederholung von 2,2– und 3,3–Determinanten; allgemeine Definition; Berechnung mit Hilfe der Gauß–Elimination; wesentliche Eigenschaften, Laplace'scher und allgemeiner Entwicklungssatz; Cramer'sche Regel zur Lösung von linearen Gleichungssystemen und zur Matrix–Invertierung; Determinanten hermitescher und unitärer Matrizen.

34.A Wiederholung: 2,2– und 3,3–Determinanten.

34.1 **2,2– und 3,3–Determinanten:**

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \,,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\,b_2\,c_3 + a_2\,b_3\,c_1 + a_3\,b_1\,c_2 - a_1\,b_3\,c_2 - a_2\,b_1\,c_3 - a_3\,b_2\,c_1 \;.$$

34.2 **Sarrus'sche Regel**: (Eselsbrücke zur Berechnung von 3,3–Determinanten — und nur von 3,3–Determinanten!)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & + \; + & + \end{array} \right| =$$

$$= \quad a_1\,b_2\,c_3 + b_1\,c_2\,a_3 + c_1\,a_2\,b_3 - a_3\,b_2\,c_1 - b_3\,c_2\,a_1 - c_3\,a_2\,b_1 \;.$$

z.B.: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2\,;$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ - & - & - & + \; + & + \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= +\Big(1\cdot 1\cdot(-1)\Big) + \Big((-2)\cdot 2\cdot 2\Big) + \Big(1\cdot(-1)\cdot 1\Big) - \\ &\quad - \Big(2\cdot 1\cdot 1\Big) - \Big(1\cdot 2\cdot 1\Big) - \Big((-1)\cdot(-1)\cdot(-2)\Big) = \\ &= -1 - 8 - 1 - 2 - 2 + 2 = -12 \;. \end{aligned}$$

(Zur geometrischen Bedeutung von 2,2– und 3,3–Determinanten siehe Lektion 24, Abschnitte E, H und I.)

34.B Allgemeine Definition.

34.3 Die **Determinante**

$$\det A = \det\left(a_{ij}\right)_{n,n} = \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right) = \det\begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

einer (quadratischen!) n, n–Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{n,n}$ mit den Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ bzw. Zeilen $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ ist eine **Zahl**, die durch die folgenden vier Eigenschaften (D1) bis (D4) charakterisiert ist:

(D1) $\boxed{\det A^t = \det A}$.

(D2) Die Determinante einer **Diagonalmatrix** D ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente von D:

$$\det D = \begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \cdots d_n \ .$$

(D3)
$\det A = 0 \iff$ A ist *nicht* regulär,
$\iff$ die Spalten von A sind **linear abhängig**,
$\iff$ die Zeilen von A sind **linear abhängig**.

(D4) $\det A$ ist als Funktion jeder (*einzelnen!*) Zeile oder Spalte **linear**.

Diese Charakterisierung orientiert sich — entsprechend der geometrischen Interpretation von 2,2– und 3,3–Determinanten — an der "Vorstellung", dass die Zahl $\det A$ ***das orientierte (= vorzeichenbehaftete) Volumen des von den*** n ***Spalten oder Zeilen aufgespannten*** n***–dimensionalen Parallelflachs ist.*** Wir haben demzufolge hier auch nur die entsprechenden Regeln für 2,2– und 3,3–Determinanten zu übernehmen brauchen: siehe die Nummern **24**.16, 18, 21 und 22.

34.4 **Beachte:** Aus (D4) folgt u.a., dass man das λ–Fache von $\det A$ erhält, wenn man irgend–*eine* Zeile oder Spalte von A mit λ multipliziert! Anders als bei Matrizen: man muss *alle* Zeilen bzw. Spalten von A mit λ multiplizieren, um $\lambda \cdot A$ zu erhalten. Insbesondere hat man für eine n, n–Matrix A: $\boxed{\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A}$.

Zum Beispiel:

zu (D1) : $\begin{vmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -1$,

zu (D2) : $\det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$,

zu (D3) : $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$; die drei Spalten: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig: $\vec{a}_3 = 2 \cdot \vec{a}_2 - \vec{a}_1$; ebenso sind die drei Zeilen: $\vec{z}_1 = \big(1\,,\,4\,,\,7\big)$, $\vec{z}_2 = \big(2\,,\,5\,,\,8\big)$ und $\vec{z}_3 = \big(3\,,\,6\,,\,9\big)$ linear abhängig: $\vec{z}_3 = 2 \cdot \vec{z}_2 - \vec{z}_1$.

zu (D4) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & 2 & \boxed{1} \\ 1 & 3 & \boxed{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & 3 & \boxed{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & 2 & \boxed{4} \\ 1 & 3 & \boxed{5} \end{vmatrix} = -1$,

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \;\; 4 \;\; 8} \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{2} & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 2 & 4 \\ \boxed{2} & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 200\,.$$

34.C Berechnung mit Hilfe des Eliminationsverfahrens.

34.5

Folgerungen aus (D1) bis (D4) :

(D5) Der Wert von $\det A$ verändert sich nicht, wenn man A einer **elementaren Zeilenoperation vom Typ I** unterwirft, d.h. wenn man ***zu*** einer Zeile ein Vielfaches einer ***anderen*** Zeile addiert.

(D6) Der Wert von $\det A$ **ändert sein Vorzeichen**, wenn man A einer **elementaren Zeilenoperation vom Typ II** unterwirft, d.h. wenn man zwei (verschiedene) **Zeilen vertauscht** .

(D7) Ist $A = \big(a_{ij}\big)_{n,n}$ eine (obere oder untere) **Dreiecksmatrix**, so ist $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$ das **Produkt der Diagonalelemente.**

Aufgrund von (D1) gelten (D5) und (D6) entsprechend auch für die Spalten.

> **Beachte** in (D5), dass ***zu einer Zeile (oder Spalte)*** ein Vielfaches einer ***anderen Zeile (bzw. Spalte)*** addiert wird und *nicht* zum Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) eine andere Zeile (bzw. Spalte) oder ein Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Spalte) !!

Der **Nachweis** dieser Regeln ist elementar: wir zeigen sie für die Spalten; vermöge (D1) gelten sie damit auch für die Zeilen:

Zu (D5) :

$$\det(\ldots,\underbrace{\vec{a}_i+\lambda\vec{a}_j}_{i},\ldots,\vec{a}_j,\ldots)\overset{\text{(D4)}}{=}\underbrace{\det\Big(\ldots,\vec{a}_i,\ldots,\vec{a}_j,\ldots\Big)}_{=\det A}+\lambda\underbrace{\det\Big(\ldots,\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_j,\ldots\Big)}_{=0\text{ nach }(D3)}=\det A\ .$$

Zu (D6) : Mit (D5) ergibt sich:

$$\det(\ldots,\underbrace{\vec{a}_j}_{i},\ldots,\underbrace{\vec{a}_i}_{j},\ldots)\overset{\underline{\text{(i)}}-\text{(j)}}{=}\det(\ldots,\underbrace{\vec{a}_j-\vec{a}_i}_{i},\ldots,\underbrace{\vec{a}_i}_{j},\ldots)\overset{\underline{\text{(j)}}+\text{(i)}}{=}\det(\ldots,\underbrace{\vec{a}_j-\vec{a}_i}_{i},\ldots,\underbrace{\vec{a}_j}_{j},\ldots)\overset{\text{(D4)}}{=}$$

$$=\underbrace{\det\Big(\ldots,\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_j,\ldots\Big)}_{=0\text{ nach }(D3)}-\underbrace{\det\Big(\ldots,\vec{a}_i,\ldots,\vec{a}_j,\ldots\Big)}_{=\det A}=-\det A\ .$$

(Auch wenn das aussieht wie ein billiger Taschenspielertrick: das ist wirklich ein Beweis!)

Zu (D7) : Wenn die Dreiecksmatrix $A=\begin{pmatrix}a_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}$ *regulär* ist, ist $a_j\neq 0$ für alle j , und A lässt sich allein mit Zeilenoperationen vom Typ I: "addiere zur i-ten Zeile ein Vielfaches der j-ten Zeile" $(1\leq i<j,\ j=n\,,\ldots,\,2)$ auf Diagonalform $D=\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}$ bringen, *ohne* hierbei die Hauptdiagonalelemente a_j zu verändern. Nach (D5) und (D2) ist dann $\det A=a_1\,\cdots\,a_n$.

Wenn A *nicht* regulär ist, muss mindestens eines der Hauptdiagonalelemente a_j gleich Null sein: dann ist ebenfalls $a_1\,\cdots\,a_n\,=0=\det A$. ∎

z.B.: $\begin{vmatrix}2&1&3\\2&2&2\\4&1&3\end{vmatrix}\overset{\substack{\underline{(2)}-(1)\\ \underline{(3)}-2\cdot(1)}}{=}\begin{vmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\0&-1&-3\end{vmatrix}\overset{\underline{(3)}+(2)}{=}\begin{vmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\0&0&-4\end{vmatrix}=-8\ ,$

$\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\0&3&-4\end{vmatrix}\overset{(1)\leftrightarrow(2)}{=}-\begin{vmatrix}2&1&1\\1&-1&0\\0&3&-4\end{vmatrix}=-15\ .$

34.6

Vermöge (D5), (D6) und (D7) lässt sich jede Determinante $\det A$ **mit Hilfe des Eliminationsverfahrens** berechnen:

hierzu bringt man A mit Hilfe von elementaren Zeilen– oder Spaltenoperationen vom Typ I und II **auf Dreiecksform** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}\,,\mathrm{II}} \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \tilde{A} :$$

wenn hierbei k Zeilen– oder Spaltenvertauschungen vorkamen, so ist

$$\boxed{\det A = (-1)^k \det \tilde{A} = (-1)^k \, a_1 \cdots a_n} \; .$$

Zeilen– oder Spaltenoperationen vom **Typ III** : "multipliziere eine Zeile bzw. Spalte mit einer Zahl λ" sollten hierbei ***möglichst nicht*** vorkommen! Falls es dennoch nützlich ist, beim Eliminieren eine der Zeilen oder Spalten mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ zu multiplizieren (z.B. um hässliche Brüche wegzubekommen) , dann muss das ***Ergebnis wieder durch λ geteilt*** werden!

z.B.:

A				Zeilenoperationen:
2	1	1	−1	
1	2	−1	1	***Zeilenvertauschung***
1	−1	3	2	(1) $\leftrightarrow$ (2)
−2	2	1	1	
1	2	−1	1	
2	1	1	−1	$\underline{(2)} - 2 \cdot (1)$
1	−1	3	2	$\underline{(3)} - (1)$
−2	2	1	1	$\underline{(4)} + 2 \cdot (1)$
1	2	−1	1	
0	−3	3	−3	
0	−3	4	1	$\underline{(3)} - (2)$
0	6	−1	3	$\underline{(4)} + 2 \cdot (2)$
1	2	−1	1	
0	−3	3	−3	
0	0	1	4	
0	0	5	−3	$\underline{(4)} - 5 \cdot (3)$
1	2	−1	1	
0	−3	3	−3	
0	0	1	4	***fertig!***
0	0	0	−23	
$\tilde{A}$				

Wir lesen ab:

da *eine* Zeilenvertauschung vorkam, ist

$$\det A = -\det \tilde{A} =$$
$$= -\Big(1 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot (-23)\Big) = -69 \; .$$

34.D Weitere nützliche Regeln.

34.7

(D8) $\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$, insbesondere, mit $B = A^{-1}$:

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \; .$$

(D9) Wenn A **Dreiecks–Blockform** hat:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & * \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

mit jeweils quadratischen Untermatrizen $A_1 , \ldots , A_m$, so ist

$$\boxed{\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_m} \; .$$

Der Beweis zu (D8) ist sehr technisch und nicht besonders informativ: wir können ihn getrost unterschlagen. Zu (D9) genügt die Bemerkung, dass mit denselben Eliminationsschritten, mit denen — der Reihe nach, oben beginnend — die "große" Matrix auf Dreiecksform gebracht wird, insbesondere die einzelnen Untermatrizen auf Dreiecksform gebracht werden; die sich für die Untermatrizen ergebenden Hauptdiagonalelemente sind genau die sich für die "große" Matrix ergebenden Hauptdiagonalelemente.

z.B.: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ist $AB = \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$ und

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \, , \ \det B = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \, ,$$

$$\det AB = \begin{vmatrix} -15 & -10 \\ 14 & 8 \end{vmatrix} = 20 = (-4)\,(-5) = \det A \cdot \det B \; .$$

$$\left| \begin{array}{rrrrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 9 & 3 & 9 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{rr|rrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 8 & 1 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \Big(2 \cdot (-1)\Big) \, \Big(1 \cdot 3 \cdot (-1)\Big) \, \Big((-2) \cdot 2 \cdot 1\Big) = -24 \, .$$

34.E Entwicklungssätze.

34.8

> **(D10) Laplace'scher Entwicklungssatz:**
>
> Für eine n,n–Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ und für $i,j = 1,\dots n$ sei A_{ij} die Matrix, die aus A durch Streichen der i–ten Zeile und j–ten Spalte entsteht. Dann gilt
>
> **(A)** für jedes $j = 1,\dots n$ ist:
>
> $$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}}$$ **(Entwicklung nach der j–ten Spalte)**,
>
> **(B)** für jedes $i = 1,\dots n$ ist:
>
> $$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}}$$ **(Entwicklung nach der i–ten Zeile)**.

Die **Vorzeichen** $(-1)^{i+j}$ ergeben sich sehr einfach, wenn man die Vorzeichen $+$ und – schachbrettartig über die Matrix A verteilt, wobei oben links $\big($an der Stelle $(1,1)\big)$ mit $+$ zu beginnen ist:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & j=4 & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ i=3 \;\rightarrow & \left|\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & \boxed{-} & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right| \end{array} \qquad (-1)^{i+j} = (-1)^{3+4} = -1$$

Hierbei ist allerdings darauf zu achten, daß die bereits vorhandenen Vorzeichen der Koeffizienten von A nicht "verschluckt" werden!

> Der Laplace'sche Entwicklungssatz ist besonders dann von Nutzen, wenn in der Matrix A viele Nullen vorkommen: in diesem Fall entwickelt man vorteilhaft nach der Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen.

z.B.:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} & \overset{-}{3} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{-4} \\ \overset{+}{-2} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{3.Spalte}}}{=} -(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 8 = 3\,.$$

Es überrascht, wie einfach sich diese Entwicklungssätze aus den Determinantenregeln (D1) bis (D9) ergeben: z.B. die **Entwicklung nach der j-ten Spalte** $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$:

$$\det A = \det\left(\ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i, \ldots\right) \overset{(D4)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{e}_i}_{j}, \ldots, \vec{a}_n) \overset{(D6)}{=} \Big[\, j-1 \text{ Vertauschungen} \Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots \downarrow \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots \downarrow \cdots & \vdots \\ 1 & a_{i1} & \cdots \downarrow \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots \downarrow \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots \downarrow \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(D6)}{=} \Big[\, i-1 \text{ Vertauschungen} \Big]$$

$$\Big[\text{die } j\text{-te Spalte "fehlt"}\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots \downarrow \cdots & a_{in} \\ \hline 0 & a_{11} & \cdots \downarrow \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots \downarrow \cdots & \vdots \\ \rightarrow & \rightarrow & \cdots \downarrow \cdots & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \cdots \downarrow \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots \downarrow \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(D9)}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \,. \qquad \blacksquare$$

$$\left[\begin{matrix}\text{die } j\text{-te Spalte und} \\ \text{die } i\text{-te Zeile "fehlen"}\end{matrix}\right]$$

Fortgesetzte Entwicklung nach der 1. Zeile oder Spalte — bis nur noch $1,1$–Determinanten, also Zahlen vorkommen — liefert die Formel, mit der üblicherweise Determinanten definiert werden:

34.9

(D11) Allgemeiner Entwicklungssatz:

Für jede n,n–Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ ist

$$\boxed{\det A = \sum_{\pi \in S^n} \left(\operatorname{sign}(\pi) \cdot \prod_{k=1}^{n} a_{k,\pi(k)}\right) = \sum_{\pi \in S^n} \left(\operatorname{sign}(\pi) \cdot \prod_{k=1}^{n} a_{\pi(k),k}\right)}$$

Erläuterungen:

S^n ist die **symmetrische Gruppe** vom Grad n:

sie besteht aus den $n!$ Permutationen $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ von n Elementen:

$$\pi \;:\; (1, 2, \ldots, n) \overset{1-1}{\mapsto} (i_1, i_2, \ldots, i_n) = \Big(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\Big) \,.$$

Die "Multiplikation" auf der Gruppe S^n ist die "Hintereinanderausführung":

$\Big(\pi_1\pi_2\Big)(1, 2, \ldots, n) = \Big(\pi_1(\pi_2(1)), \pi_1(\pi_2(2)), \ldots, \pi_1(\pi_2(n))\Big)$;

das neutrale Element bzgl. dieser Multiplikation ist die identische Permutation, die nichts verändert.

Jeder Permutation $\pi \in S^n$ wird ein **Signum** (= Vorzeichen) zugeordnet:
$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{T(\pi)} = (-1)^{I(\pi)}$, wobei:

$T(\pi)$ = Anzahl der **Transpositionen** (= Vertauschungen) , die nötig sind, um $\big(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\big)$ in $(1, 2, \ldots, n)$ überzuführen,

$I(\pi)$ = Anzahl der **Inversionen** von π : das sind die Paare $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \leq i < j \leq n$, fr die $\pi(i) > \pi(j)$ ist.

(Die Anzahl $T(\pi)$ der Transposionen von $\pi \in S^n$ ist zwar nicht eindeutig bestimmt, aber sie ist entweder stets ungerade oder stets gerade!)

z.B.: die Anzahl $T(\pi)$ der Transpositionen der Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ist gerade:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 & \to & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & \to & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & \to & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & \to \\ \uparrow & & \uparrow & & & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & & \uparrow & \uparrow & & & & & & & \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

$\to \; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6$; damit ist $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{T(\pi)} = (-1)^4 = +1$.

Dieselbe Permutation hat 8 Inversionen $\pi(i) > \pi(j)$:
$3 > 1$, $3 > 2$, $5 > 1$, $5 > 4$, $5 > 2$, $6 > 4$, $6 > 2$, $4 > 2$; hiermit ist $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^8 = +1$.

Beispiel für den allgemeinen Entwicklungssatz:

(Berechnung von $2,2$– und $3,3$–Determinanten)

Statt diesen Entwicklungssatz allgemein zu beweisen, wollen wir ihn nur **plausibel** machen, indem wir ihn speziell für $2,2$– und $3,3$–Determinanten herleiten. Hiermit können wir zugleich auch einsehen, dass die Determinantendefinition dieser Lektion im Fall von $2,2$– und $3,3$–Determinanten *dasselbe* liefert wie unsere früheren Definitionen in Lektion 24 !

1. Die $2! = 2$ Permutationen der S^2 und ihre Inversionen sind:

π	1	2	Inversionen	$I(\pi)$	$\operatorname{sign}(\pi)$
π_1	1	2	keine	0	+
π_2	2	1	$2 > 1$	1	–

Wenn wir die $2,2$–Determinante $\det(a_{ij})_{2,2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ***nach der 1. Zeile entwickeln*** , erhalten wir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{1,\pi_1(1)}a_{2,\pi_1(2)} - a_{1,\pi_2(1)}a_{2,\pi_2(2)} = \sum_{\pi \in S^2} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)} \,,$$

in Übereinstimmung mit den Nummern 24.10 und 34.9 .

2. Die $3! = 6$ Permutationen der S^3 und ihre Inversionen sind:

π	1 2 3	Inversionen	$I(\pi)$	sign (π)
π_1	1 2 3	keine	0	+
π_2	1 3 2	$3 > 2$	1	–
π_3	2 1 3	$2 > 1$	1	–
π_4	2 3 1	$2 > 1\,,\ 3 > 1$	2	+
π_5	3 1 2	$3 > 1\,,\ 3 > 2$	2	+
π_6	3 2 1	$3 > 2\,,\ 3 > 1\,,\ 2 > 1$	3	–

Damit ist erhält man durch fortgesetztes ***Entwickeln nach der 1. Zeile***:

$$\det(a_{ij})_{3,3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= \ +a_{1,\pi_1(1)}\, a_{2,\pi_1(2)}\, a_{3,\pi_1(3)} - a_{1,\pi_2(1)}\, a_{2,\pi_2(2)}\, a_{3,\pi_2(3)} - a_{1,\pi_3(1)}\, a_{2,\pi_3(2)}\, a_{3,\pi_3(3)} +$$

$$+a_{1,\pi_4(1)}\, a_{2,\pi_4(2)}\, a_{3,\pi_4(3)} + a_{1,\pi_5(1)}\, a_{2,\pi_5(2)}\, a_{3,\pi_5(3)} - a_{1,\pi_6(1)}\, a_{2,\pi_6(2)}\, a_{3,\pi_6(3)} =$$

$$= \sum_{\pi \in S^3} \left(\operatorname{sign}(\pi) \cdot \prod_{k=1}^{3} a_{k,\pi(k)} \right) ,$$

in Übereinstimmung mit den Nummern 24.19 und 34.9 .

Am Entwicklungssatz (D11) kann man z.B. sofort ablesen, dass der Wert einer Determinante *ganzzahlig* (bzw. *rational*, bzw. *reell*) ist, wenn alle Koeffizienten *ganzzahlig* (bzw. *rational*, bzw. *reell*) sind. Darüberhinaus eignet sich dieser Entwicklungssatz hervorragend für theoretische Überlegungen (etwa um eine Formel für die Ableitung einer Determinante mit variablen Koeffizienten zu gewinnen), aber er ist ziemlich **ungeeignet, Determinanten konkret auszurechnen** .

34.F Cramer'sche Regel.

34.10

Wenn die Koeffizientenmatrix A des *inhomogenen* LGS's $(*)$ $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ **regulär** ist, hat dieses LGS die **eindeutig bestimmte Lösung**:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boxed{\boxed{x_j = \frac{\det A_j(\vec{b})}{\det A}}} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

wobei die Matrix $A_j(\vec{b})$ aus A entsteht, wenn man die j–te Spalte von A durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzt.

Wenn nämlich A die Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ hat und $A\vec{x} = \vec{b}$ ist, so ist (s. Nr. 30.16):
$\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$ und damit:

$$\det A_j(\vec{b}) = \det(\ldots, \underbrace{\vec{b}}_{j}, \ldots) = \det(\ldots, \underbrace{x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n}_{j}, \ldots) \overset{\text{(D4)}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\det(\ldots, \underbrace{\vec{a}_i}_{j}, \ldots)}_{\substack{= 0 \text{ für } i \neq j \\ = \det A \text{ für } i = j}} =$$

$$= x_j \det A, \quad \text{also:} \quad x_j = \frac{\det A_j(\vec{b})}{\det A}\,. \qquad \blacksquare$$

z.B.: Für das lineare Gleichungssystem: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{array}\right\}$ ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\,,$$

$$\det A_1(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8\,, \quad \text{somit:} \quad x = \frac{\det A_1(\vec{b})}{\det A} = \frac{8}{5}\,,$$

$$\det A_2(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\,, \quad \text{somit:} \quad y = \frac{\det A_2(\vec{b})}{\det A} = \frac{3}{5}\,,$$

$$\det A_3(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \text{somit:} \quad z = \frac{\det A_3(\vec{b})}{\det A} = -\frac{2}{5}\,.$$

Als weiteres, einfaches Anwendungsbeispiel für die Cramer'sche Regel können wir die **Inverse einer regulären Matrix** A bestimmen:

34.11 $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\Big(\det A_i(\vec{e}_j)\Big)_{n,n}}$$

Denn: eine Matrix $C = (c_{ij})_{n,n}$ mit den Spalten $\vec{c}_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$ ist genau dann die Inverse von A,

wenn $A\Big(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\Big) = \Big(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\Big)$, d.h. wenn $A\vec{c}_j = \vec{e}_j$ für $j = 1, \ldots, n$.

Mit der Cramer'schen Regel ergibt sich: $c_{ij} = \dfrac{\det A_i(\vec{e}_j)}{\det A}$, somit $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\Big(\det A_i(\vec{e}_j)\Big)_{n,n}$. $\blacksquare$

34.G Determinanten hermitescher und unitärer Matrizen.

34.12 Für jede n,n–Matrix A ist $\det A^+ = \det A^* = \big(\det A\big)^*$.

Ist A **hermitesch** (d.h. $A^+ = A$), so ist $\det A$ **reell**,

ist A **schiefhermitesch** (d.h. $A^+ = -A$), so ist

$$\det A \begin{cases} \textbf{reell}, & \text{wenn } n \text{ \textit{gerade} ist,} \\ \textbf{rein–imaginär}, & \text{wenn } n \text{ \textit{ungerade} ist;} \end{cases}$$

ist A **unitär** (d.h. $AA^+ = I$), so ist $\big|\det A\big| = 1$.

Insbesondere hat jede **hermitesche** *und* **unitäre** Matrix die Determinante $\det A = \pm 1$.

Wegen $\det A = \det A^t$ (s. (D1)) liest man die erste dieser Regeln: $\det A^+ = \det A^* = \big(\det A\big)^*$ z.B. unmittelbar am allgemeinen Entwicklungssatz (D11) ab. Hiermit ergibt sich:

A **hermitesch** (d.h. $A^+ = A$) $\Rightarrow$ $\det A = \det A^+ = \big(\det A\big)^*$, d.h. $\det A$ **reell**.

A **schiefhermitesch** (d.h. $A^+ = -A$) $\Rightarrow$ $\big(\det A\big)^* = \det A^+ = \det(-A) = (-1)^n \det A$, also, wenn n ***gerade*** ist: $\big(\det A\big)^* = \det A$, d.h. $\det A$ **reell**, und wenn n ***ungerade*** ist: $\big(\det A\big)^* = -\det A$, d.h. $\det A$ **rein–imaginär** (oder $= 0$). ∎

z.B.: 1. Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} i & 2-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ hat man:

$$\det A = \begin{vmatrix} i & 2-i \\ 1+i & 2 \end{vmatrix} = 2i - (1+i)(2-i) = -3+i\,,$$

$$\det A^+ = \begin{vmatrix} -i & 1-i \\ 2+i & 2 \end{vmatrix} = -2i - (2+i)(1-i) = -3-i = \big(\det A\big)^*\,.$$

2. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2(1-i)/3 \\ 2(1+i)/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ ist hermitesch und unitär,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1/3 & 2(1-i)/3 \\ 2(1+i)/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{4}{9}(1+i)(1-i) = -\frac{1}{9} - \frac{4}{9}\cdot 2 = -1\,.$$

3. Für reelle α, β, x, y ist $A = \begin{pmatrix} i\alpha & -x+iy \\ x+iy & i\beta \end{pmatrix}$ schiefhermitesch,

$$\det A = \begin{vmatrix} i\alpha & -x+iy \\ x+iy & i\beta \end{vmatrix} = -\alpha\beta - (iy+x)(iy-x) = x^2 + y^2 - \alpha\beta \ \text{(rell!)}.$$

35 Eigenwerte und Eigenelemente.

Stichpunkte: Allgemeine Definition von Eigenwerten, Eigenelementen, –vektoren und –funktionen. Eigenwerte und Eigenelemente der Matrixdarstellung einer lin. Abbildung, ähnlicher linearer Abbildungen bzw. Matrizen und der Inversen einer regulären linearen Abbildung bzw. Matrix. Der Eigenraum und die geometrische Vielfachheit (= Grad der Entartung) eines Eigenwertes. Charakteristisches Polynom einer Matrix, algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes, Bestimmung der Eigenvektoren einer Matrix mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Satz von Cayley-Hamilton.

35.A Allgemeine Definition.

35.1

a Sei V ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung von V *in sich*.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert (EW)** von φ, wenn es zu λ ein **Eigenelement (EE)** $x \in V$ gibt: das ist ein Element aus V mit

$$\boxed{x \neq o \text{ und } \varphi x = \lambda \cdot x}\ .$$

Jedes Element $x \neq o$ aus V mit dieser Eigenschaft ist ein **Eigenelement zum Eigenwert λ von φ**.

Wir nennen die Eigenelemente meistens **Eigenvektoren (EV)**, wenn die Elemente von V **Vektoren** sind, und **Eigenfunktionen (EF)**, wenn V ein **Funktionenraum** ist.

b Sei A eine *quadratische* n,n–Matrix mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ (!) heißt **Eigenwert (EW)** von A, wenn es zu λ einen **Eigenvektor (EV)** $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gibt, d.h. $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ mit

$$\boxed{\vec{x} \neq \vec{o} \text{ und } A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}}\ .$$

Jeder Vektor $\vec{x} \neq \vec{o}$ aus dem $\mathbb{C}^n$ mit dieser Eigenschaft ist ein **Eigenvektor zum Eigenwert λ von A**.

Die Eigenvektoren von A sind also genau die Vektoren $\vec{o} \neq \vec{x} \in \mathbb{C}^n$, die (bis evtl. auf ein Vorzeichen) unter A ihre **Richtung beibehalten**: wenn λ der zugegörige EW ist, wird $\vec{x}$ **nur um den Faktor λ gestreckt**.

Beachte, dass wir hier unterscheiden, ob A "nur" eine ***Matrix*** ist oder ob die Matrix A als ***lineare Abbildung*** $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ interpretiert wird!:

35.2 Fasst man die n,n–Matrix A mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ als *lineare Abbildung* $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ auf, so sind die Eigenwerte der *Abbildung* A **nur genau die in $\mathbb{K}$ gelegenen** Eigenwerte der *Matrix* A:

im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ stimmen demnach die Eigenwerte und Eigenvektoren der ***Abbildung*** A mit denen der ***Matrix*** A überein,
während im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *nur die reellen* Eigenwerte und Eigenvektoren der ***Matrix*** A zugleich auch Eigenwerte bzw. Eigenvektoren der ***Abbildung*** A sind!

Glücklicherweise (und sinnvollerweise!) gilt:

35.3 Wenn $\varphi \overset{\mathrm{B}}{=} A$ die Matrixdarstellung von φ bzgl. einer Basis B ist, dann sind die Eigenwerte von φ **genau die in $\mathbb{K}$ gelegenen** Eigenwerte von A:

ist x ein EE zum EW λ von φ und hat x bzgl. B die Koordinatendarstellung $x \overset{\mathrm{B}}{=} \vec{a}$, so ist $\vec{a}$ ein EV zum (*selben!*) EW λ von A.

Denn: $A\vec{a} \overset{\mathrm{B}}{=} \varphi x = \lambda \cdot x \overset{\mathrm{B}}{=} \lambda \cdot \vec{a}$, also: x EE zum EW λ von $\varphi \Leftrightarrow \vec{a}$ EV zum (*selben!*) EW λ von A.∎

Die Aussage in Nr. 35.3 ist offenbar unabhängig von der Wahl der Basis B in V. Wenn man also in V zu einer anderen Basis $\tilde{B}$ wechselt, und wenn T die Transformationsmatrix für den Basiswechsel $B \to \tilde{B}$ ist, so hat φ bzgl. $\tilde{B}$ die Matrixdarstellung $\varphi \overset{\tilde{\mathrm{B}}}{=} \tilde{A} = T^{-1}AT$ (siehe Nr. 32.14 und 17). $\tilde{A}$ hat dann nach Nr. 35.3 dieselben Eigenwerte wie A. Das gilt allgemein! Hierzu definieren wir zunächst:

35.4 Zwei lineare Abbildungen φ, $\psi : V \to V$ sind **ähnlich**,
wenn es eine reguläre lineare Abbildung $\tau : V \to V$ so gibt, dass $\boxed{\psi = \tau^{-1}\varphi\tau}$;

und analog: zwei n,n–Matrizen A, $\tilde{A}$ sind **ähnlich**,
wenn es eine reguläre Matrix T so gibt, dass $\boxed{\tilde{A} = T^{-1}AT}$.

35.5

Ähnliche lineare Abbildungen (oder Matrizen) haben *dieselben* Eigenwerte:

ist $\psi = \tau^{-1}\varphi\tau$ und x ein EE zum EW λ von φ, so ist $y := \tau^{-1}x$ EE zum (*selben*) EW λ von ψ.

(Völlig analog für Matrizen)

Denn: $\psi y = (\tau^{-1}\varphi\tau)(\tau^{-1}x) = \tau^{-1}\varphi\,(\tau\tau^{-1})x = \tau^{-1}\varphi x = \tau^{-1}\lambda \cdot x = \lambda \cdot \tau^{-1}x = \lambda \cdot y$. ∎

35.6

Genau dann ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert der lin. Abb. φ bzw. der Matrix A, wenn φ bzw. A *nicht* eineindeutig ist; insbesondere:

eine ***reguläre*** lin. Abbildung oder Matrix ***kann nicht den Eigenwert*** $\lambda = 0$ haben!

Denn: $\lambda = 0$ EW von $\varphi \Leftrightarrow \exists\ x \in V$ mit $x \neq o$ und $\varphi x = 0 \cdot x = o \Leftrightarrow \mathcal{N}(\varphi) \neq \{o\} \Leftrightarrow \varphi$ *nicht* 1–1 (s. Nr. 31.21); wenn also φ regulär ist, ist φ insbesondere 1–1 und hat den Nullraum $\mathcal{N}(\varphi) = \{o\}$, d.h. $\lambda = 0$ ist *kein* EW von φ. (Ebenso für Matrizen) ∎

In diesem Zusammenhang ist noch von Interesse:

35.7

Wenn λ ein EW der ***regulären*** lin. Abb. φ bzw. der ***regulären*** Matrix A ist ($\Rightarrow \lambda \neq 0$), dann ist λ^{-1} ein **EW der Inversen** φ^{-1} bzw. A^{-1}:

ist x EE zum EW λ von φ, so ist x auch EE zum EW λ^{-1} von φ^{-1} (und entsprechend für Matrizen).

Denn: für reguläre φ und für $\lambda \neq 0$ hat man:

$\varphi x = \lambda \cdot x \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi^{-1}x \Leftrightarrow \varphi^{-1}x = \lambda^{-1} \cdot x$. (Ebenso für Matrizen) ∎

Beispiele für Eigenwerte und Eigenelemente bzw. –vektoren gibt es im nächsten Abschnitt.

35.B Eigenraum und geometrische Vielfachheit.

35.8

Die zu einem (*demselben*) EW λ der linearen Abbildung φ gehörenden Eigenelemente bilden zusammen mit dem Nullelement $o \in V$ einen linearen Teilraum von V, den **Eigenraum $E(\lambda)$ zum Eigenwert λ von φ**; es ist $\boxed{E(\lambda) = \mathcal{N}\left(\varphi - \lambda I\right)}$;

und entsprechend: die zu einem (*demselben*) EW λ der Matrix A gehörenden Eigenvektoren bilden zusammen mit dem Nullvektor $\vec{o} \in \mathbb{C}^n$ einen linearen Teilraum des $\mathbb{C}^n$, den **Eigenraum $E(\lambda)$ zum Eigenwert λ von A**; es ist $\boxed{E(\lambda) = \mathcal{N}\left(A - \lambda I\right)}$.

Denn: $\varphi x = \lambda \cdot x \Leftrightarrow \left(\varphi - \lambda I\right) x = \varphi x - \lambda \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}\left(\varphi - \lambda I\right) =: E(\lambda)$

und entsprechend: $A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Leftrightarrow \left(A - \lambda I\right)\vec{x} = A\vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathcal{N}\left(A - \lambda I\right) =: E(\lambda)$. ∎

Hiermit gilt insbesondere:

35.9

Summen und skalare Vielfache von Eigenelementen zum (*selben!*) Eigenwert λ sind — sofern sie $\neq o$ (bzw. $\neq \vec{o}$) sind — stets wieder Eigenelemente zum (*selben!*) Eigenwert λ.

Trivialerweise gilt (das folgt *unmittelbar* aus der Definition mit $\lambda = 0$; vgl. auch mit Nr. 35.6 !):

35.10

Der ***Eigenraum zum EW*** $\lambda = 0$ einer lin. Abb. φ bzw. einer Matrix A ist der ***Nullraum*** von φ bzw. A:
$\boxed{E(0) = \mathcal{N}(\varphi) \quad \left(\text{bzw.} \ = \mathcal{N}(A)\right)}$.

Man definiert:

35.11

Ein Eigenwert λ von φ oder A ist ***k–fach entartet*** oder hat die ***geometrische Vielfachheit*** λ, wenn der zugehörige Eigenraum $E(\lambda)$ die Dimension k hat.

Wenn der Eigenraum $E(\lambda)$ die Dimension $k = 1$ hat, nennt man den Eigenwert λ ***nicht–entartet*** statt "1–fach entartet".

Beispiel 1 : Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel $0 < \alpha < \pi$ (mit einer zur Ebene orthogonalen Drehachse durch den Ursprung).

Für alle $\vec{o} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ist dann $\sphericalangle(\vec{x}\,, \varphi\vec{x}\,) = \alpha \neq 0\,, \neq \pi$, d.h. $\vec{x}$ und $\varphi\vec{x}$ haben wesentlich verschiedene Richtung. φ ***besitzt daher keine Eigenvektoren und somit auch keine Eigenwerte***.

Beachte aber Beispiel 7: die zugehörige Drehmatrix (s. Nr. 32.25): $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ hat *zwei* — allerdings *nicht–reelle* — Eigenwerte!

Dieses Beispiel zeigt auch, dass es lineare Abbildungen gibt, die* keine *Eigenwerte besitzen!

Beispiel 2 : Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die (orthogonale) **Projektion** auf eine Ebene E_1 durch den Ursprung und sei g die zu E_1 orthogonale Gerade durch den Ursprung.

Für alle $\vec{x} \in E_1$ ist dann $\varphi\vec{x} = \vec{x} = 1 \cdot \vec{x}$ und fr alle $\vec{x} \in g$ ist $\varphi\vec{x} = \vec{o} = 0 \cdot \vec{x}$.

Damit sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$ Eigenwerte von φ, jeder Vektor $\vec{o} \neq \vec{x} \in E_1$ ist Eigenvektor zum EW $\lambda_1 = 1$ und jeder Vektor $\vec{o} \neq \vec{x} \in g$ ist Eigenvektor zum EW $\lambda_2 = 0$.

Für jeden *anderen* Vektor $\vec{o} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{E_0 \cup g\}$ hat der Bildvektor $\varphi\vec{x}$ wesentlich andere Richtung als $\vec{x}$; damit kann $\vec{x}$ *kein* Eigenvektor von φ sein:

35.12 Jede (orthogonale) **Projektion** $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf eine Ebene E_1 hat genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$: Die Ebene $E_1 = E(\lambda_1)$ ist der Eigenraum zum EW $\lambda_1 = 1$ und die zu E_1 orthogonale Gerade $g = E(\lambda_2) = \mathcal{N}(\varphi)$ ist der Eigenraum zum EW $\lambda_2 = 0$; der EW λ_1 ist zweifach–entartet (seine geometrische Vielfachheit ist 2), der EW λ_2 ist nicht entartet (seine geometrische Vielfachheit ist 1).

Beispiel 3 : Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die (orthogonale) **Spiegelung** an einer Ebene E_1 durch den Ursprung und sei g die zu E_1 orthogonale Gerade durch den Ursprung.

Für alle $\vec{x} \in E_1$ ist dann $\varphi\vec{x} = \vec{x} = 1 \cdot \vec{x}$ und für alle $\vec{x} \in g$ ist $\varphi\vec{x} = -\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$.

Damit sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ Eigenwerte von φ, jeder Vektor $\vec{o} \neq \vec{x} \in E_1$ ist Eigenvektor zum EW $\lambda_1 = 1$ und jeder Vektor $\vec{o} \neq \vec{x} \in g$ ist Eigenvektor zum EW $\lambda_2 = -1$. Weitere Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt φ offenbar nicht:

35.13 Jede (orthogonale) **Spiegelung** $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an einer Ebene E_1 hat genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$: Die Ebene $E_1 = E(\lambda_1)$ ist der Eigenraum zum EW $\lambda_1 = 1$ und die zu E_1 orthogonale Gerade $g = E(\lambda_2) = \mathcal{N}(\varphi)$ ist der Eigenraum zum EW $\lambda_2 = -1$; der EW λ_1 ist zweifach–entartet (seine geometrische Vielfachheit ist 2), der EW λ_2 ist nicht entartet (seine geometrische Vielfachheit ist 1).

Beispiel 5: Sei C_T^∞ der lineare Raum aller T–periodischen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $\varphi = \dfrac{d}{dt} : C_T^\infty \to C_T^\infty : f \mapsto f'$.

Eine Funktion $\psi \in C_T^\infty$ ist genau dann EF zum EW $\lambda = 0$ von φ, wenn $\psi \neq o$ und $\psi'(t) = 0$, d.h. wenn $\psi(t)$ konstant $(\neq 0)$ ist.

Für $\lambda \neq 0$ und eine Funktion $o \neq \psi \in C_T^\infty$ hat man:

ψ ist EF zu λ $\Leftrightarrow$ $\psi'(t) = \lambda \cdot \psi(t)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \lambda$, d.h. $\Big(\ln|\psi(t)|\Big)' = \lambda$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\ln|\psi(t)| = \lambda\, t +$ konst. $\Leftrightarrow$ $\psi(t) = c\, e^{\lambda\, t}$ $(c \neq 0$ konst.$)$.

Als C_T^∞–Funktion mu $\psi(t)$ noch T–periodisch sein, d.h. es muss gelten:

$e^{\lambda\, t} = \psi(t) = \psi(t+T) = e^{\lambda\,(t+T)} = e^{\lambda\, t} \cdot e^{\lambda T}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, d.h. $e^{\lambda T} = 1$; wegen $\lambda \neq 0$ und $T > 0$ folgt: $\lambda T = n \cdot 2\pi i$, d.h. $\lambda = \lambda_n = n\,\omega i$ mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\psi(t) = c\,\psi_n(t)$ mit $\psi_n(t) = e^{i\,n\,\omega\, t}$. Wir haben gezeigt:

35.14

$\varphi = \dfrac{d}{dt} : C_T^\infty \to C_T^\infty : f \mapsto f'$ hat genau die Eigenwerte $\lambda_n = n\,\omega i$, $n \in \mathbb{Z}$, mit den zugehörigen Eigenräumen $E(\lambda_n) = \{\, c \cdot e^{i\,n\,\omega\, t} \mid c \in \mathbb{C}\,\}$; diese sind eindimensional, also sind die Eigenwerte λ_n nicht–entartet.

Beispiel 6: Sei $\varphi = \dfrac{d^2}{dt^2} : C_T^\infty \to C_T^\infty : f \mapsto f''$.

$\lambda_0 = 0$ ist EW und $o \neq f \in C_T^\infty$ eine zugehörige Eigenfunktion von φ genau dann, wenn $f''(t) = 0$, d.h. wenn $f(t) = c_1 t + c$; wegen der T–Periodizität muss hierbei $c_1 = 0$, also $f(t) = c$ konstant $(\neq 0)$ sein.

Zu $\lambda \neq 0$ ist $o \neq f \in C_T^\infty$ genau dann eine Eigenfunktion, wenn $f''(t) = \lambda \cdot f(t)$: der Exponentialansatz $f(t) = e^{\mu t}$, μ "geeignet" , liefert: $\mu^2 = \lambda$, und wegen der T–Periodizität von $f(t)$ hat man noch: $e^{\mu t} = e^{\mu(t+T)} = e^{\mu t} \cdot e^{\mu T}$, also $e^{\mu T} = 1$, d.h. $\mu T = n \cdot 2\pi i$ bzw. $\mu = i\, n\omega$ mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $n \in \mathbb{Z}$; für $n \in \mathbb{Z}$ ist dann $\lambda = \lambda_n = -n^2\omega^2$. Insgesamt:

35.15

$\varphi = \dfrac{d^2}{dt^2} : C_T^\infty \to C_T^\infty$ hat den EW $\lambda_0 = 0$ mit dem zugehörigen Eigenraum $E(0) = \mathrm{span}\,\{1\}$ (λ_0 ist also nicht–entartet) und

für alle $n \in \mathbb{N}$ den 2–fach entarteten EW $\lambda_n = -n^2\omega^2$ mit dem zugehörigen Eigenraum $E(\lambda_n) = \mathrm{span}\,\{e^{\pm\, i\, n\,\omega\, t}\} = \mathrm{span}\,\{\cos n\omega\, t\ ,\ \sin n\omega\, t\,\}$.

Da die Eigenwerte $\lambda_n = -n^2\omega^2$ *reell* sind, sind im Fall $n > 0$ die Funktionen $\psi_n^*(t) = e^{-in\omega t}$, $\Re\mathrm{e}\,\psi_n(t) = \cos n\omega t$ und $\Im\mathrm{m}\,\psi_n(t) = \sin n\omega t$ *ebenfalls* Eigenfunktionen:

$(e^{-in\omega t})'' = -n^2\omega^2 e^{-in\omega t}$, $(\cos n\omega t)'' = -n^2\omega^2 \cos n\omega t$, $(\sin n\omega t)'' = -n^2\omega^2 \sin n\omega t$. (s.u. Nr.35.20)

35.C Charakteristisches Polynom einer Matrix.

Die folgende Überlegung ist für das Verständnis der Aussagen dieses Abschnitts von zentraler Bedeutung:

Für eine n,n–Matrix A und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda \textbf{ \textit{ist EW von} } A \quad &\overset{\text{per def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\, \vec{x} \in \mathbb{C}^n \text{ mit: } \vec{x} \neq \vec{o} \text{ und } A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \vec{x} \in \mathbb{C}^n \text{ mit: } \vec{x} \neq \vec{o} \text{ und } (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{o} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \vec{x} \in \mathbb{C}^n \text{ mit: } \vec{x} \neq \vec{o} \text{ und } \vec{x} \in \mathcal{N}(A - \lambda I) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{N}(A - \lambda I) \neq \{\vec{o}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \textbf{\textit{die Matrix} } A - \lambda I \textbf{ \textit{ist nicht regulär}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ ist eine } \textbf{Nullstelle des charakteristischen Polynoms} \\
&\qquad\quad\; p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I):
\end{aligned}$$

35.16

Ein Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein **Eigenwert** der n,n–Matrix A, wenn sie eine **Nullstelle des charakteristischen Polynoms** $p_A(\lambda)$ von A ist, d.h. wenn

$$\boxed{p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0}\;.$$

Wenn λ eine k–fache Nullstelle von $p_A(\lambda)$ ist, dann ist λ ein **k–facher Eigenwert** von A und k ist die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ.

35.17

Die zu einem Eigenwert λ gehörenden **Eigenvektoren** der Matrix A sind genau die **nicht–trivialen Lösungen** des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\boxed{(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{o}}\;,$$

die man z.B. mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens erhalten kann.

Da das charakteristische Polynom einer n,n–Matrix A ein Polynom vom Grad n ist und jedes Polynom vom Grad n *genau* n Nullstellen besitzt, wenn man jede Nullstelle ihrer Vielfachheit entsprechend oft zählt, und da die *nicht–reellen* Nullstellen eines Polynoms mit nur reellen Koeffizienten stets als konjugiert–komplexe Paare auftreten (s. Nr. 14.10 und 11), hat man:

35.18

Jede n,n–Matrix A besitzt **genau n Eigenwerte**, wenn man jeden Eigenwert seiner (algebraischen) Vielfachheit entsprechend oft zählt.

Wenn A eine *reelle* Matrix ist, treten alle *nicht–reellen* Eigenwerte als konjugiert–komplexe Paare auf: ist $\vec{x}$ ein EV zum EW λ von A, so ist $\vec{x}^{\,*}$ ein EV zum EW λ^* von A.

Denn: ist $\vec{x}$ ein EV zum EW λ der *reellen* Matrix A, so ist $A\vec{x}^{\,*} = (A\vec{x}\,)^* = (\lambda \cdot \vec{x}\,)^* = \lambda^* \cdot \vec{x}^{\,*}$, d.h. $\vec{x}^{\,*}$ ist ein EV zum EW λ^* von A. ∎

35.19

Ist λ ein *reeller* EW der *reellen* Matrix A, so sind mit $\vec{x}$ auch die Vektoren $\vec{x}^{\,*}$, $\Re\mathrm{e}\,\vec{x}$ und $\Im\mathrm{m}\,\vec{x}$ (sofern sie $\neq \vec{o}$ sind) Eigenvektoren zum (*selben*) EW λ.

Denn wenn λ ein *reeller* EW der *reellen* Matrix A, so gilt für jeden zugehörigen Eigenvektor $\vec{x}$:
$A\vec{x}^{\,*} = (A\vec{x}\,)^* = (\lambda \cdot \vec{x}\,)^* = \lambda \cdot \vec{x}^{\,*}$, also $\vec{x}^{\,*}$ EV zum EW λ,
$A(\Re\mathrm{e}\,\vec{x}\,) = \Re\mathrm{e}\,(A\vec{x}\,) = \Re\mathrm{e}\,(\lambda \cdot \vec{x}\,) = \lambda \cdot \Re\mathrm{e}\,\vec{x}$, also $\Re\mathrm{e}\,\vec{x}$ EV zum EW λ,
$A(\Im\mathrm{m}\,\vec{x}\,) = \Im\mathrm{m}\,(A\vec{x}\,) = \Im\mathrm{m}\,(\lambda \cdot \vec{x}\,) = \lambda \cdot \Im\mathrm{m}\,\vec{x}$, also $\Im\mathrm{m}\,\vec{x}$ EV zum EW λ. ∎

35.20 Ist V ein linearer Raum von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, so gelten die Aussagen aus Nr. 35.18 und 19 entsprechend auch für lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ die *reelle* Funktionen $f \in V$ wieder in *reelle* Funktionen $\varphi f \in V$ überführt. (vgl. Beispiel 6)

Weitere Beispiele:

Beispiel 7: Sei $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A ist die Drehmatrix, die den $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α dreht (s.o. Beispiel 1).

Das charakteristische Polynom: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} =$
$= (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$
hat die beiden nicht–reellen, zueinander konjugiert–komplexen Nullstellen:
$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\,\alpha}$:
das sind die beiden Eigenwerte der Matrix A.

Die zugehörigen Eigenvektoren bekommt man z.B. mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

zu $\lambda_1 = e^{i\,\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$: $\left|\begin{array}{cc|ccc} -i\sin\alpha & -\sin\alpha & 1 & \vdots & -i \\ \cline{3-5} \sin\alpha & -i\sin\alpha & & \vdots & -1 \end{array}\right|$: z.B. $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$,

zu $\lambda_2 = \lambda_1^* = e^{-i\,\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$: $\left|\begin{array}{cc|ccc} i\sin\alpha & -\sin\alpha & 1 & \vdots & i \\ \cline{3-5} \sin\alpha & i\sin\alpha & & \vdots & -1 \end{array}\right|$: z.B.: $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{c}_1^{\,*}$.

$E(\lambda_1) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ist der Eigenraum zum EW λ_1 und $E(\lambda_2) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ist der Eigenraum zum EW λ_2.

> Beachte, dass die *Abbildung* $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *keine* Eigenwerte besitzt (s.o. Beispiel 1)), während die Abbildung $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ genau die Eigenwerte und Eigenvektoren der *Matrix* A hat.

Beispiel 8: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 4 \\ -4 & 1-\lambda & 8 \\ 4 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda)^2 - 256 - 32(1-\lambda) - 64(7-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729 = -\lambda^2(\lambda-9) + 81(\lambda-9) = -(\lambda-9)^2(\lambda+9)$$

und damit die Eigenwerte: $\lambda_1 = 9$ (2–fach) und $\lambda_2 = -9$ (1–fach).

Die Eigenvektoren zum EW $\lambda_1 = 9$ sind die nicht–trivialen Lösungen des homogenen LGS's: $(A-9I)\,\vec{x} = \vec{o}$, d.h. von: $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \\ 4 & 8 & -8 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{o}$. Gauß–Elimination liefert:

$\left|\begin{array}{ccc|cccc} -2 & -4 & 4 & 1 & \vdots & 2 & -2 \\ \cline{4-7} -4 & -8 & 8 & & \vdots & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -8 & & \vdots & 0 & -1 \end{array}\right|$: z.B.: $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; der 2–fache EW $\lambda_1 = 9$ ist also auch 2–fach entartet und der zugehörige Eigenraum ist: $E(9) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Völlig analog sind die Eigenvektoren zum EW $\lambda_2 = -9$ die nicht–trivialen Lösungen des homogenen LGS's: $(A+9I)\,\vec{x} = \vec{o}$, d.h. von: $\begin{pmatrix} 16 & -4 & 4 \\ -4 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{o}$. Gauß–Elimination liefert:

$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|cccc} 16 & -4 & 4 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 \\ -4 & 10 & 8 & -2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \cline{10-13} 4 & 8 & 10 & & & & & & & & & \vdots & -1 \end{array}\right|$: z.B.: $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; der Eigenraum zum (nicht–entarteten) EW $\lambda_2 = -9$ ist $E(-9) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

35.21

> Zu einem k–fachen EW λ gibt es *höchstens* k linear unabhängige Eigenvektoren; der Eigenraum $E(\lambda)$ eines k–fachen Eigenwertes λ ist also *höchstens* k–dimensional, d.h. ein k–facher Eigenwert ist *höchstens* k–fach entartet, m.a.W.: die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist stets kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit.

Beispiel 9: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$$ und damit den 3–fachen Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Die zugehörigen Eigenvektoren bekommt man z.B. wieder durch Gauß–Elimination:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & \end{array}\right.\left.\begin{array}{c} \vdots\; 0 \\ \vdots\; 0 \\ \hline \vdots\; -1 \end{array}\right| \quad : \text{ z.B. } \vec{c} = \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass ein k–facher EW *keineswegs* auch k–fach entartet sein muß: $\lambda_1 = 3$ ist 3–fach (die algebraische Vielfachheit ist 3), ist aber nicht–entartet (die geometrische Vielfachheit ist nur 1)!

Wenn A eine ***Dreiecksmatrix*** oder, insbesondere, eine ***Diagonalmatrix*** ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

so ist $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (\lambda_1 - \lambda) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda_n - \lambda) \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$, folglich:

35.22

> In der **Hauptdiagonalen** einer ***Dreieckmatrix***, insbesondere einer ***Diagonalmatrix*** A stehen genau die **Eigenwerte** von A.

z.B.: (a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 9 hat den 3–fachen EW $\lambda_{1,2,3} = 2$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.

Damit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ (2–fach) und $\lambda_2 = 2$.

Der konstante Term a_0 des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$ einer Matrix A ist offenbar gleich der Determinante von A, denn $a_0 = p_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$. Und der Vieta'sche Wurzelsatz besagt u.a., dass der vorletzte Koeffizient a_{n-1} eines Polynoms vom Grad n (mit dem höchsten Koefffizienten $a_n = 1$) das $(-1)^{(n-1)}$–Fache der Summe aller Nullstellen dieses Polynoms ist, wenn man alle Nullstellen ihrer Vielfachheit entsprechend oft zählt. Wir haben damit den (manchmal) nützlichen Satz:

35.23

Das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ einer n,n–Matrix A ist ein Polynom vom Grad n: $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$;

hierbei ist: $\boxed{a_0 = \det A}$ und

$\boxed{(-1)^{n-1}a_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$ ist die **Summe aller Eigenwerte** von A,

wobei jeder Eigenwert seiner Vielfachheit entsprechend oft mitzuzählen ist.

z.B.: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ aus dem vorletzten Beispiel 8 hat das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729$ mit den Koeffizienten $c_2 = 9$ und $c_0 = -729$ und sie hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 9$ (2–fach) und $\lambda_3 = -9$. Es gilt:

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9 + 9 - 9 = 9 = (-1)^2 c_2$, und

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 128 - 128 - 16 - 16 - 448 = -729 = c_0 .$$

35.24

Satz von Cayley–Hamilton: (*)

Jede n,n–Matrix A erfüllt ihre charakteristische Gleichung, d.h.:

hat A das charakteristische Polynom

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$, so ist

$p_A(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = O$ die **Nullmatrix**.

Dieser Satz ist einfach zu merken und gut zu gebrauchen, auch wenn sein Nachweis die Möglichkeiten dieses Kurses übersteigt.

Wenn man die Gleichung $p_A(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = O$ nach A^n auflöst:
$A^n = (-1)^{n-1}\Big(c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I\Big)$,
so sieht man, dass A^n eine Linearkombination von $I, A, \ldots, A^{n-1}$ ist. Das gilt dann auch für alle höheren Potenzen von A. Als einfache Folgerung des Satzes von Cayley–Hamilton haben wir damit das nützliche Ergebnis:

35.25 Für jede n,n–Matrix A und für jede natürliche Zahl $k \geq n$ ist A^k eine Linearkombination von $I, A, \ldots, A^{n-1}$.

z.B.: Für die Matrix A aus dem letzten Beispiel ist:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = 81\,I \text{ und } A^3 = A^2 A = 81A\,.$$

Ihr charakteristisches Polynom ist: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729$.

Damit bekommen wir:

$p_A(A) = -A^3 + 9A^2 + 81A - 729\,I = -81A + 9 \cdot 81\,I + 81A - 729\,I \;=\; O$,

$A^3 = 9A^2 + 81A - 729\,I \;\left(\overset{\text{s.o.}}{=} 81A\right)$,

$A^4 = 9A^3 + 81A^2 - 729A = 9\Big(9A^2 + 81A - 729I\Big) + 81A^2 - 729A = 162A^2 - 6561\,I \;\left(\overset{\text{s.o.}}{=} 6561\,I\right)$,

usw.

36 Diagonalisierbare und normale Matrizen.

Stichpunkte: Charakterisierung diagonalisierbarer Matrizen. Charakterisierung und Eigenschaften hermitescher, unitärer, normaler Matrizen; Projektionen und Spiegelungen. Spektraldarstellung normaler Matrizen.

In dieser Lektion sei stets A eine n,n–Matrix mit i.a. komplexen Koeffizienten (wobei nicht verboten ist, dass diese reell sind) und $\varphi : V \to V$ sei eine lineare Abbildung von einem unitären linearen Raum V (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) *in sich*.

36.A Diagonalisierbarkeit.

A ist **diagonalisierbar** oder **diagonalähnlich**:

:$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{A}}$

> A ***ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix***, d.h. es gibt eine reguläre Matrix T so, dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist (man sagt: A ***wird durch*** T ***diagonalisiert***) .

In diesem Fall sind die ***Spalten*** $\vec{t}_j$ der Matrix T **Eigenvektoren** von A und die ***Diagolalelemente*** λ_j der Diagonalmatrix T sind die **entsprechend zugehörigen Eigenwerte**: $\boxed{A\vec{t}_j = \lambda_j \cdot \vec{t}_j}$.

Da die Matrix $T = \left(\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right)$ regulär ist, ist $B = \left\{\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right\}$ eine **Basis aus Eigenvektoren von** A .

36.1 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{B}}$

> ***Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von*** A **.**

Ist $B = \left\{\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right\}$ diese Basis, so wird A durch die Matrix $T = \left(\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right)$ **diagonalisiert**: $T^{-1}AT = D$ ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente λ_j die jeweils **zugehörige Eigenwerte** sind.

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{C}}$

> Für jeden Eigenwert von A ***stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein***, d.h. jeder k–fache EW von A ist auch k–fach entartet,

d.h. zu jedem k–fachen EW gibt es k linear unabhängige Eigenvektoren von A: ist dann — für jeden EW λ_j — jeweils B_j eine Basis des zugehörigen Eigenraumes $E(\lambda_j)$, so ist $B = \left\{\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right\} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots$ eine Basis aus EV von A und A wird von der Matrix $T = \left(\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right)$ diagonalisiert.

Die Formulierung dieses Satzes ist aufwendiger als sein **Beweis**:

Es sei $T = \left(\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right)$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \left(\lambda_1 \vec{e}_1, \ldots, \lambda_n \vec{e}_n\right)$ mit den natürlichen Einheitsvektoren $\vec{e}_j$. Genau dann ist $T^{-1}AT = D$, wenn T regulär ist mit $AT = TD$, d.h. mit

$$\left(A\vec{t}_1, \ldots, A\vec{t}_n\right) = \left(T(\lambda_1 \vec{e}_1), \ldots, T(\lambda_n \vec{e}_n)\right) = (\lambda_1 \cdot T\vec{e}_1, \ldots, \lambda_n \cdot T\vec{e}_n) \overset{\text{Nr. } 30.18}{=} \left(\lambda_1 \cdot \vec{t}_1, \ldots, \lambda_n \cdot \vec{t}_n\right),$$

also: $\boxed{A\vec{t}_j = \lambda_j \cdot \vec{t}_j}$. ∎

Da es zu jedem EW auch mindestens einen EV gibt, und da ähnliche Matrizen stets dieselbe Spur haben: $\operatorname{trace}(T^{-1}AT) = \operatorname{trace} A$ (das ist ohne große Schwierigkeiten nachzurechnen), haben wir sofort die beiden Folgerungen:

36.2 Hat A *nur einfache* Eigenwerte, dann *ist* A diagonalisierbar.
Genau dann ist A *nicht* diagonalisierbar, wenn es einen *mehrfachen* (etwa k-fachen) EW und zu diesem *weniger als* k linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

36.3 Die Spur einer diagonalisierbaren Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte (wobei jeder EW seiner Vielfachheit entsprechend oft mitzuzählen ist):

$$\boxed{\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

Zum Beispiel:

(1) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 9 des letzten Abschnitts (im Anschluss von Nr. 35.21) ist *nicht* diagonalisierbar, denn der zum 3–fachen Eigenwert $\lambda_{1,2,3} = 2$ gehörende Eigenraum ist nur 1–dimensional: es gibt also keine 3 linear–unabhängigen Eigenvektoren zu A.

(2) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 8 des letzten Abschnitts soll diagonalisiert werden:

Zunächst hat A die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 9$ (2–fach) und $\lambda_3 = -9$.

Zu $\lambda_{1,2} = 9$ wurden in Beispiel 8 die zwei linear–unabhängigen Eigenvektoren $\overset{\downarrow}{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{\downarrow}{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zu $\lambda_3 = -9$ der Eigenvektor $\overset{\downarrow}{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ gefunden.

Daher wird A durch die Matrix $T = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{c_1}\,, \overset{\downarrow}{c_2}\,, \overset{\downarrow}{c_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ diagonalisiert:

es ist $T^{-1}AT = D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$. $\Big($Probe durch Nachrechnen!$\Big)$

Hierbei spielt es *keine Rolle*, in welcher Reihenfolge die Eigenvektoren in der Matrix T oder die Eigenwerte in der Hauptdiagonalen von D angeordnet werden: **wichtig** ist nur, dass sich **beide Reihenfolgen entsprechen**: die j–te Spalte von T ist EV zum j–ten Diagonalelement von D.

Außerdem können die Eigenvektoren, die in den Spalten der Matrix T stehen, durch beliebig andere Eigenvektoren (zum selben Eigenwert!) ersetzt werden, solange die Regularität von T hierdurch nicht verletzt wird.

z.B. ist $\overset{\downarrow}{t_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein EV zu $\lambda_3 = -9$ und $\overset{\downarrow}{t_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overset{\downarrow}{t_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind EV zu $\lambda_{1,2} = 9$.

Mit $T = \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{t_1}\,, \overset{\downarrow}{t_2}\,, \overset{\downarrow}{t_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist dann *ebenfalls* $T^{-1}AT = D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Man kann Diagonalisierbarkeit auch für lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ definieren:

φ ist ***diagonalisierbar*** oder ***diagonalähnlich***:

$:\Longleftrightarrow$ Es gibt in V eine Basis B, bzgl. der φ als Diagonalmatrix D dargestellt wird: $\varphi \overset{\mathrm{B}}{=} D$.

$\Longleftrightarrow$ ***Es gibt in V eine Basis B aus Eigenelementen von φ.***

36.4 In beiden Fällen ist $\varphi \overset{\mathrm{B}}{=} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ und die Diagonalelemente λ_j sind die Eigenwerte von φ; die Basiselemente $x_j \in B = \{x_1, x_2, \dots\}$ sind jeweils zugehörige Eigenelemente von φ in *entsprechender* Reihenfolge (!): $\boxed{\varphi x_j = \lambda_j \cdot x_j \quad \text{für } j = 1, 2, \dots}$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\varphi \overset{\mathrm{B_0}}{=} A$ die Matrixdarstellung von φ bzgl. irgendeiner Basis B_0 von V, so ist die lineare Abbildung φ genau dann diagonalisierbar, wenn die Matrix A diagonalisierbar ist: es ergibt sich dann jeweils dieselbe Diagonalmatrix D. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ trifft dies nur dann zu, wenn alle Eigenwerte von φ (oder A) *reell* sind.

z.B.: Für die Abbildung $\varphi = \dfrac{d}{dt} : C_T^\infty \to C_T^\infty$ aus Beispiel 5 der letzen Lektion (im Anschluss an Nr. 35.13) und für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\psi_n(t) = e^{i\,n\omega\,t}$ eine EF zum EW $\lambda_n = in\omega$.

$B = \{\,\psi_0\,,\,\psi_1\,,\,\psi_{-1}\,,\,\psi_2\,,\,\psi_{-2}\,,\,\ldots\}$ ist also eine Basis aus Eigenfunktionen von φ und es ist

$\varphi \overset{\mathrm{B}}{=} D$ mit der unendlichen Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \mathsf{O} \\ & i\omega & & & & \\ & & -i\omega & & & \\ & & & 2i\omega & & \\ & & & & -2i\omega & \\ \mathsf{O} & & & & & \ddots \end{pmatrix}$.

$\Big($In der j–ten Spalte von D stehen die Koordinaten bzgl. B des Bildes der j–ten EF aus B ! $\Big)$

36.B Eigenwerte hermitescher und unitärer lin. Abbildungen.

36.5

Die Eigenwerte jeder

- ***hermiteschen*** **Matrix oder linearen Abbildung sind** ***reell*****,**
- ***schiefhermiteschen*** **Matrix oder linearen Abbildung sind** ***rein–imaginär*** **(oder $= 0$),**
- ***unitären*** **Matrix oder linearen Abbildung haben den** ***Betrag 1*****.**

Denn: (es genügt, dies für lineare Abbildungen φ zu zeigen) Sei x ein EE zum EW λ von φ.
Dann ist $x \neq o$, $\varphi x = \lambda x$ und:

(a) wenn φ ***hermitesch*** ist (d.h. $\langle\,\varphi x \mid y\,\rangle = \langle\,x \mid \varphi y\,\rangle\ \forall\, x, y$: vgl. Nr. 30.42):

$\lambda\,\|x\|^2 = \lambda\langle\,x \mid x\,\rangle = \langle\,x \mid \lambda x\,\rangle = \langle\,x \mid \varphi x\,\rangle \overset{\text{Vor.}}{=} \langle\,\varphi x \mid x\,\rangle = \langle\,\lambda x \mid x\,\rangle = \lambda^*\langle\,x \mid x\,\rangle = \lambda^*\|x\|^2$,

wegen $\|x\| \neq 0$ somit: $\lambda = \lambda^*$, d.h. λ ist ***reell***;

(b) wenn φ ***schiefhermitesch*** ist (d.h. $\langle\,\varphi x \mid y\,\rangle = -\langle\,x \mid \varphi y\,\rangle\ \forall\, x, y$: vgl. Nr. 30.42):

$\lambda\,\|x\|^2 = \lambda\langle\,x \mid x\,\rangle = \langle\,x \mid \lambda x\,\rangle = \langle\,x \mid \varphi x\,\rangle \overset{\text{Vor.}}{=} \langle\,-\varphi x \mid x\,\rangle = \langle\,-\lambda x \mid x\,\rangle = -\lambda^*\langle\,x \mid x\,\rangle = -\lambda^*\|x\|^2$, wegen $\|x\| \neq 0$ somit: $\lambda = -\lambda^*$, d.h. λ ist ***rein–imaginär*** (oder $= 0$);

(c) wenn φ ***unitär*** ist (d.h. $\langle\,\varphi x \mid \varphi y\,\rangle = \langle\,x \mid y\,\rangle\ \forall\, x, y$: vgl. Nr. 30.50,e):

$|\lambda|^2\,\|x\|^2 = \lambda^*\lambda\langle\,x \mid x\,\rangle = \langle\,\lambda x \mid \lambda x\,\rangle = \langle\,\varphi x \mid \varphi x\,\rangle \overset{\text{Vor.}}{=} \langle\,x \mid x\,\rangle = \|x\|^2$,

wegen $\|x\| \neq 0$ somit: $|\lambda|^2 = 1$, d.h. λ hat den ***Betrag 1***. ▮

Zum Beispiel:

(a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ist ***hermitesch*** $(A^+ = A)$, also müssen ihre Eigenwerte *reell* sein:

$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$: damit hat A die beiden ***reellen Eigenwerte*** $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

(b) Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist **schief–hermitesch** $(B^+ = -B)$, also müssen ihre Eigenwerte *rein–imaginär* sein (der EW 0 scheidet aus, da B regulär ist!):

$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$: damit hat B die beiden ***rein–imaginären Eigenwerte*** $\lambda_{1,2} = \pm i$.

(c) Beide Matrizen A und B von oben sind auch **unitär** (die Spalten haben jeweils die Länge 1 und sind orthogonal): ihre Eigenwerte haben alle den **Betrag 1**.

(d) Die Abbildung $\varphi = \dfrac{d^2}{dt^2} : C_T^\infty \to C_T^\infty$ aus Lektion 35, Beispiel 6 (Nr. 35.15) ist ***hermitesch***, denn für alle $f, g \in C_T^\infty$ ergibt sich (mit partieller Integration und wegen der T–Periodizität von $f(t)$ und $g(t)$):

$$\langle \varphi f \mid g \rangle = \int_0^T f''(t)^* g(t)\, dt = f'(t)^* g(t)\Big|_0^T - \int_0^T f'(t)^* g'(t)\, dt = -\int_0^T f'(t)^* g'(t)\, dt =$$

$$= -f(t)^* g'(t)\Big|_0^T + \int_0^T f(t)^* g''(t)\, dt = \int_0^T f(t)^* g''(t)\, dt = \langle f \mid \varphi g \rangle .$$ Wir haben gesehen, dass φ die ***reellen Eigenwerte*** $\lambda_n = -n^2\omega^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ hat (mit $\omega = 2\pi/T$).

(e) Die Abbildung $\varphi = \dfrac{d}{dt} : C_T^\infty \to C_T^\infty$ aus Lektion 35, Beispiel 5 (Nr. 35.14) ist ***schiefhermitesch***, denn für alle $f, g \in C_T^\infty$ ergibt sich (wegen der T–Periodizität von $f(t)$ und $g(t)$):

$$\langle \varphi f \mid g \rangle = \int_0^T f'(t)^* g(t)\, dt = f(t)^* g(t)\Big|_0^T - \int_0^T f(t)^* g'(t)\, dt = -\int_0^T f(t)^* g'(t)\, dt = -\langle f \mid \varphi g \rangle .$$

Die in Beispiel 5 erhaltenen ***Eigenwerte*** $\lambda_n = n\omega i$ $(n \in \mathbb{Z})$ sind ***rein–imaginär*** bzw. $= 0$.

36.C Eigenelemente normaler linearer Abbildungen.

36.6 Die **Adjungierte** φ^+ einer linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ wird entsprechend Nr. 30.38 durch die folgende Bedingung definiert:

$\boxed{\left\langle x \mid \varphi^+ y \right\rangle = \langle \varphi x \mid y \rangle \quad \forall\, x, y \in V}$; hiermit ist φ **normal**, wenn

$\boxed{\left\langle \varphi^+ x \mid \varphi^+ y \right\rangle = \langle \varphi x \mid \varphi y \rangle \quad \forall\, x, y \in V}$ (vgl. Nr.30.53, b).

36.7 Jede **normale** Matrix A oder lineare Abbildung φ hat dieselben Eigenelemente wie ihre Adjungierte, und die zugehörigen Eigenwerte sind konjugiert–komplex zueinander, d.h. (für Matrizen *entsprechend*):

$$\left.\begin{array}{c} x \text{ EE zum EW } \lambda \text{ von } \varphi \\ (\text{also: } \varphi x = \lambda \cdot x) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \text{ EE zum EW } \lambda^* \text{ von } \varphi^+ \\ (\text{also: } \varphi^+ x = \lambda^* \cdot x) \end{array}\right.$$

Das ist einfach nachzurechnen: wenn φ **normal** ist, hat man vermöge Nr. 36.6 für beliebige $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \| \varphi^+ x - \lambda^* x \|^2 &= \langle \varphi^+ x - \lambda^* x \mid \varphi^+ x - \lambda^* x \rangle = \\ &= \langle \varphi^+ x \mid \varphi^+ x \rangle - \langle \varphi^+ x \mid \lambda^* x \rangle - \langle \lambda^* x \mid \varphi^+ x \rangle + \langle \lambda^* x \mid \lambda^* x \rangle = \\ &= \langle \varphi x \mid \varphi x \rangle - \lambda^* \langle x \mid \varphi x \rangle - \lambda \langle \varphi x \mid x \rangle + \lambda\lambda^* \langle x \mid x \rangle = \\ &= \langle \varphi x \mid \varphi x \rangle - \langle \lambda x \mid \varphi x \rangle - \langle \varphi x \mid \lambda x \rangle + \langle \lambda x \mid \lambda x \rangle = \\ &= \langle \varphi x - \lambda x \mid \varphi x - \lambda x \rangle = \| \varphi x - \lambda x \|^2 , \end{aligned}$$

also: $\| \varphi^+ x - \lambda^* x \| = \| \varphi x - \lambda x \|$. Daraus ergibt sich sofort:

$\varphi x = \lambda \cdot x \Leftrightarrow \| \varphi x - \lambda x \| = 0 \Leftrightarrow \| \varphi^+ x - \lambda^* x \| = 0 \Leftrightarrow \varphi^+ x = \lambda^* \cdot x$. ▮

36.8 **Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten einer *normalen* Matrix oder linearen Abbildung sind *orthogonal*.**

Denn mit der letzten Nummer folgt für zwei *verschiedene* Eigenwerte λ_1, λ_2 und zwei entsprechend zugehörige Eigenelemente x_1, x_2:

$\lambda_2 \langle x_1 \mid x_2 \rangle = \langle x_1 \mid \lambda_2 x_2 \rangle = \langle x_1 \mid \varphi x_2 \rangle = \langle \varphi^+ x_1 \mid x_2 \rangle = \langle \lambda_1^* x_1 \mid x_2 \rangle = \lambda_1 \langle x_1 \mid x_2 \rangle$, somit:

$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1 \mid x_2 \rangle = 0$, wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ also: $\langle x_1 \mid x_2 \rangle = 0$. ▮

z.B.: In Übereinstimmung mit Regel Nr. 30.42 haben wir definiert: Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ eines unitären Raumes V in sich ist **hermitesch** wenn $\boxed{\langle \varphi x \mid y \rangle = \langle x \mid \varphi y \rangle \ \forall x, y \in V}$.

36.9 **Jede orthogonale Projektion und Spiegelung ist hermitesch.**

Wenn $x = x_U + x_U^\perp$, $y = y_U + y_U^\perp$ die orthogonalen Zerlegungen der Elemente $x, y \in V$ bzgl. eines linearen Teilraumes U sind, so hat man für die Projektion $\hat{P}_U : V \to U$ auf U und die Spiegelung $\hat{S}_U : V \to U$ an U: $\left\langle \hat{P}_U x \mid y \right\rangle = \left\langle x_U \mid y_U + y_U^\perp \right\rangle = \langle x_U \mid y_U \rangle + \underbrace{\left\langle x_U \mid y_U^\perp \right\rangle}_{=0} = \langle x_U \mid y_U \rangle + \underbrace{\left\langle x_U^\perp \mid y_U \right\rangle}_{=0} =$

$= \left\langle x_U + x_U^\perp \mid y_U \right\rangle = \left\langle x \mid \hat{P}_U y \right\rangle$, d.h. $\hat{P}_U$ ist hermitesch;

und hiermit bekommt man:

$$\left\langle \hat{S}_U x \mid y \right\rangle = \left\langle (2\hat{P}_U - I)\, x \mid y \right\rangle = 2\left\langle \hat{P}_U x \mid y \right\rangle - \langle x \mid y \rangle =$$
$$= 2\left\langle x \mid \hat{P}_U y \right\rangle - \langle x \mid y \rangle = \left\langle x \mid (2\hat{P}_U - I)\, y \right\rangle = \left\langle x \mid \hat{S}_U y \right\rangle,$$

d.h. auch $\hat{S}_U$ ist hermitesch.

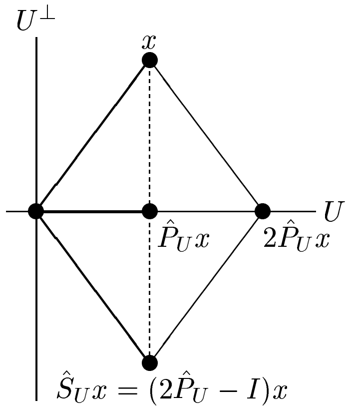


Abbildung 36.1: **Spiegelung an U**

Projektionen und Spiegelungen sind also **hermitesch**, insbesondere **normal**, sie haben die *reellen* Eigenwerte $1, 0$ bzw. $1, -1$, und die zugehörigen Eigenräume U und $U^\perp$ sind ***zueinander orthogonal*** (vgl. mit Nr. 35.12 und 13). ▮

Die erhaltenen Eigenschaften sind *charakteristisch* für Projektionen und Spiegelungen:
(siehe hierzu Nr. 23.12 und Abbildung 23.1!)

36.10

Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ eines unitären linearen Raumes V in sich ist genau dann eine (orthogonale) **Projektion** auf einen linearen Teilraum U, wenn sie ***hermitesch*** ist mit $\boxed{\varphi^2 = \varphi}$, also genau dann, wenn sie ***hermitesch*** ist und genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0$ hat. Dann ist $U = E(1)$ der Eigenraum zum EW $\lambda_1 = 1$ und das orthogonale Komplement von U ist der Eigenraum zum EW $\lambda_2 = 0$: $E(0) = \mathcal{N}(\varphi) = U^\perp$.

Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ eines unitären linearen Raumes V in sich ist genau dann eine (orthogonale) **Spiegelung** an einem linearen Teilraum U, wenn sie ***hermitesch*** ist mit $\boxed{\varphi^2 = I}$, also genau dann, wenn sie ***hermitesch*** ist und genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ hat. Dann ist $U = E(1)$ der Eigenraum zum EW $\lambda_1 = 1$ und das orthogonale Komplement von U ist der Eigenraum zum EW $\lambda_2 = -1$: $E(-1) = U^\perp$.

Es bleibt noch zu zeigen: ist λ ein EW und x ein zugehöriges EE, so folgt

– aus $\varphi^2 = \varphi$: $\lambda \cdot x = \varphi x = \varphi^2 x = \varphi(\varphi x) = \lambda \cdot \lambda \cdot x = \lambda^2 x$, wegen $x \neq o$ also: $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$, und

– aus $\varphi^2 = I$: $x = \varphi^2 x = \varphi(\varphi x) = \lambda \cdot \lambda \cdot x = \lambda^2 x$, wegen $x \neq o$ also: $\lambda_{1,2} = \pm 1$. ▮

Weiteres Beispiel: (siehe Nr. 35.14 und 15 und die Beispiele (d), (e) des letzten Abschnitts 36.B !)
Die Abbildung $\varphi = \frac{d^2}{dt^2} : C_T^\infty \to C_T^\infty$ ist ***hermitesch***, und die Abbildung $\varphi = \frac{d}{dt} : C_T^\infty \to C_T^\infty$ ist ***schiefhermitesch***, *beide* Abbildungen sind also insbesondere ***normal*** und *beide* haben genau die Eigenfunktionen $\psi_n(t) = e^{in\omega t}$, $n \in \mathbb{Z}$ (mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

diese Eigenfunktionen sind ***paarweise orthogonal***: für $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$, ist:

$$\langle \psi_m \mid \psi_n \rangle = \int_0^T \psi_m^*(t)\psi_n(t)\,dt = \int_0^T e^{-im\omega t} e^{in\omega t}\,dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\,dt = \frac{1}{i(n-m)\omega}\, e^{i(n-m)\omega t}\Big|_0^T =$$
$$= \frac{e^{i(n-m)\cdot 2\pi} - 1}{i(n-m)\omega} = \frac{1-1}{i(n-m)\omega} = 0\,.$$

36.D Spektraldarstellung normaler linearer Abbildungen.

Eine – etwas längere – **Vorbemerkung**:

Wir haben uns in Beispiel 1 des Abschnitts 35.B überlegt, dass die Drehung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ um einen "krummen" Winkel *keine* Eigenwerte besitzt.

Ein weiteres Beispiel für eine lineare Abbildung *ohne* Eigenwerte ist die Abbildung
$\varphi : C[a,b] \to C[a,b] : (\varphi f)(t) = t \cdot f(t)\ \forall t \in [a,b]$:
φ ist **linear**: $\big(\varphi(f+g)\big)(t) = t \cdot (f+g)(t) = t \cdot f(t) + t \cdot g(t) = (\varphi f)(t) + (\varphi g)(t) = \big(\varphi f + \varphi g\big)(t)$ $\forall t \in [a,b]$, d.h. $\varphi(f+g) = \varphi f + \varphi g$, und
$\varphi\big(\alpha f\big)(t) = t \cdot (\alpha f)(t) = \alpha \cdot (\varphi f)(t) = \big(\alpha \cdot \varphi f\big)(t)\ \forall t \in [a,b]$, d.h. $\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi f$;
φ ist sogar **hermitesch**, insbesondere **normal**, denn für $f, g \in C[a,b]$ ist
$\langle \varphi f \mid g \rangle = \int_a^b (\varphi f)(t)^* g(t)\,dt = \int_a^b t\, f(t)^* g(t)\,dt = \int_a^b f(t)^*(\varphi g)(t)\,dt = \langle f \mid \varphi g \rangle$.
Aber φ **hat keine Eigenwerte**: denn *wäre* λ ein EW, so müsste es eine über $[a,b]$ stetige Funktion $f \neq o$ geben mit: $t \cdot f(t) = (\varphi f)(t) = \lambda \cdot f(t)\ \forall t \in [a,b]$:
dann wäre $\lambda = t$ für alle $t \in [a,b]$ mit $f(t) \neq 0$ $\lightning$: da $f(t)$ *stetig* und *nicht die Nullfunktion* ist, gibt es "mehr als ein" $t \in [a,b]$ mit $f(t) \neq 0$!

Andererseits gilt (z.B.):

36.11 Jede lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ eines *endlich*–dimensionalen unitären Raumes $V \neq \{o\}$ (über dem *komplexen* Skalarkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) in sich ***hat mindestens einen Eigenwert***.

Denn: ist $\varphi \overset{B}{=} A$ die Matrixdarstellung von φ bzgl. irgendeiner Basis B von V, so *hat* A Eigenwerte in $\mathbb{C}$, da das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C}$ *hat*; und wegen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die Eigenwerte von A genau die Eigenwerte von φ (siehe Nr. 35.3 !). ∎

(+) Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden (auch in der Zusammenfassung des nächsten Abschnitts) auf lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ eines *endlich*–dimensionalen unitären Raumes V (über dem *komplexen* Skalarkörper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) in sich (immerhin gehören hierzu ***alle endlichen quadratischen Matrizen mit Koeffizienten aus*** $\mathbb{C}$ ***!***).

Die Aussagen der folgenden Nummern gelten außer für die Abbildungen, die (+) erfüllen, für alle linearen Abbildungen, die "stets" Eigenwerte *besitzen*, d.h. für die — sinngemäß entsprechend — eine Aussage der Art von Nr. 36.11 zutrifft. Wir gehen in diesem Kurs jedoch hierauf nicht weiter ein, da eine Präzisierung der gewünschten Eigenschaft *"hat stets Eigenwerte"* und eine Beschreibung solcher Abbildungen — auch der Nachweis, dass "solche" Abbildungen "stets" Eigenwerte *haben* — den Rahmen dieses Kurses weit überschreiten würde. Die Einschränkung (+) gestattet aber immer noch einen guten Eindruck dessen, was in der Theorie normaler linearer Abbildungen *möglich* und *"schön"* ist.

Sei φ eine lineare Abbildung gemäß (+), also z.B. $\varphi = A$ eine n, n–Matrix mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die *verschiedenen* **Eigenwerte** von φ, $E_j = E(\lambda_j)$ die zugehörigen **Eigenräume** und $\hat{P}_j : V \to V$ die **Projektionen auf die Eigenräume** E_j.

36.12 Dann sind die folgenden Aussagen ***äquivalent***:

$\boxed{\text{A}}$ φ **ist *normal***;

$\boxed{\text{B}}$ **es gibt eine *Orthonormalbasis* B von V aus Eigenelementen**: ist jeweils B_j eine ONB des Eigenraumes E_j, so ist $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ eine ONB von V aus Eigenelementen von φ;

$\boxed{\text{C}}$ φ **hat die *Spektraldarstellung***: $\boxed{\boxed{\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j}}$; in diesem Fall

hat die ***Adjungierte*** φ^+ die Spektraldarstellung. $\boxed{\varphi^+ = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \hat{P}_j}$.

Beachte, dass in der Spektraldarstellung der Eigenwert 0 nicht unterschlagen werden darf! Wegen der großen Bedeutung dieses Satzes wollen wir seinen **Beweis** skizzieren:

1. Sei φ normal, sei $U = E_1 + \cdots + E_m := \{x = x_1 + \cdots x_m \mid x_j \in E_j\}$ die Summe aller Eigenräume $E_j = E(\lambda_j)$ zu den verschiedenen Eigenwerten λ_j von φ und sei jeweils B_j eine ONB von E_j. Da diese Eigenräume E_j paarweise orthogonal sind (Nr. 36.8), ist dann $B = B_1 + \cdots + B_m$ eine ONB von U aus Eigenelementen von φ, und U *enthält sämtliche Eigenelemente* von φ. Es wird behauptet, dass $U = V$ ist.

Angenommen, U ist ein *echter* linearer Teilraum von V und somit das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in V ein *nicht–trivialer* linearer Teilraum von V. Mit Nr. 36.7 folgt dann für alle $y \in U^\perp$ und alle $x = x_1 + \cdots + x_m \in U$:

$$\langle \varphi y \mid x \rangle = \langle y \mid \varphi^+ x \rangle = \langle y \mid \varphi^+ x_1 + \cdots + \varphi^+ x_m \rangle = \langle y \mid \lambda_1^* x_1 + \cdots \lambda_m^* x_m \rangle =$$
$$= \lambda_1^* \langle y \mid x_1 \rangle + \cdots + \lambda_m^* \langle y \mid x_m \rangle = 0 \text{, also } \varphi y \perp x \;\forall\, x \in U \text{, d.h. } \varphi y \in U^\perp \;\forall\, y \in U^\perp .$$

Damit wäre die Einschränkung $\hat{\varphi}$ von φ auf den Teilraum $U^\perp$ eine lineare Abbildung von $U^\perp$ *in sich*: $\hat{\varphi} : U^\perp \to U^\perp : \hat{\varphi} y := \varphi y$, und $\hat{\varphi}$ besäße nach Nr. 36.11 einen Eigenwert λ_0 und hierzu natürlich Eigenelemente $y_0 \in U^\perp$: da diese auch in V liegen (und wegen $\varphi y_0 = \hat{\varphi} y_0 = \lambda_0 y_0$), gäbe es also außer den in U gelegenen Eigenelementen doch noch weitere, *nicht* in U gelegene Eigenelemente von φ: $\lightning$

dieser ***Widerspruch*** zeigt, dass $U = V$ und somit $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ eine ***ONB von*** V ***aus Eigenelementen von*** φ ist.

Damit besitzt jedes Element $x \in V$ eine eindeutige Darstellung $x = x_1 + \cdots + x_m$ mit $x_j \in E_j$, d.h. es ist jeweils $x_j = \hat{P}_j x$; hieraus folgt: $x = \hat{P}_1 x + \cdots + \hat{P}_m x \;\forall\, x \in V$, d.h. $I = \hat{P}_1 + \cdots + \hat{P}_m$, und außerdem: $\varphi x = \varphi x_1 + \cdots + \varphi x_m = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \lambda_1 \hat{P}_1 x + \cdots + \lambda_m \hat{P}_m x \;\forall\, x \in V$, d.h.

$\boxed{\varphi = \lambda_1 \hat{P}_1 + \cdots + \lambda_m \hat{P}_m}$: das ist die ***Spektraldarstellung*** von φ.

Die ***Spektraldarstellung der Adjungierten*** φ^+ ergibt sich völlig analog mit Hilfe von Nr. 36.7:
$\varphi^+ x = \varphi^+ x_1 + \cdots + \varphi^+ x_m = \lambda_1^* x_1 + \cdots + \lambda_m^* x_m = \lambda_1^* \hat{P}_1 x + \cdots + \lambda_m^* \hat{P}_m x \;\forall\, x \in V$, d.h.

$\boxed{\varphi^+ = \lambda_1^* \hat{P}_1 + \cdots + \lambda_m^* \hat{P}_m}$.

2. φ habe eine Darstellung $(*)$ $\boxed{\varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{P}_j}$ mit paarweise verschiedenen Zahlen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und Projektionen $\hat{P}_j$ von V auf paarweise orthogonale lineare Teilräume E_j, die den ganzen Raum aufspannen: $E_j \perp E_k$ für $k \neq j$ und $E_1 + \cdots + E_m = V$.

Wir haben zu zeigen, dass φ normal ist und die Spektraldarstellung $(*)$ hat.

Zunächst halten wir fest, dass jedes Element $x \in V$ die eindeutige Darstellung $x = \hat{P}_1 x + \cdots + \hat{P}_m x$ besitzt und dass für alle $x \in V$ und $j, k = 1, \ldots, m$ mit $k \neq j$ gilt: $\left\langle \hat{P}_j x \mid \hat{P}_k x \right\rangle = 0$.

Wir beginnen mit dem Nachweis, dass die Abbildung $\psi = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \hat{P}_j$ die Adjungierte von φ ist:

$$\forall\, x, y \in V \text{ ist: } \langle x \mid \psi y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \hat{P}_j x \mid \sum_{k=1}^m \lambda_k^* \hat{P}_k y \right\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \lambda_k^* \left\langle \hat{P}_j x \mid \hat{P}_k y \right\rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \left\langle \hat{P}_j x \mid \hat{P}_j y \right\rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \lambda_j^* \left\langle \hat{P}_j x \mid \hat{P}_k y \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{P}_j x \mid \sum_{k=1}^m \hat{P}_k y \right\rangle = \langle \varphi x \mid y \rangle :$$

nach Nr. 36.6 ist damit $\psi = \varphi^+$. Hiermit ergibt sich (völlig analog) für alle $x, y \in V$:

$$\langle \varphi^+ x \mid \varphi^+ y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \hat{P}_j x \mid \sum_{j=1}^m \lambda_k^* \hat{P}_k y \right\rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \lambda_j^* \left\langle \hat{P}_j x \mid \hat{P}_k y \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{P}_j x \mid \sum_{j=1}^m \lambda_k \hat{P}_k y \right\rangle =$$
$$= \langle \varphi x \mid \varphi y \rangle \text{, d.h. } \varphi \text{ ist } \textbf{\textit{normal}} \text{ (s. Nr. 36.6)} .$$

Außerdem haben wir für alle $k, j = 1, \ldots, m$ und $x_k \in E_k$: $\hat{P}_j x_k = x_k$ für $j = k$ und $= 0$ für $j \neq k$, folglich: $\varphi x_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j x_k = \lambda_k x_k$, d.h. die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sind die verschiedenen ***Eigenwerte*** von φ und die Räume E_j sind die zugehörigen ***Eigenräume***; die Darstellung $(*)$ ist somit bereits die ***Spektraldarstellung*** von φ. ▮

36.13 **Wenn φ *normal* ist, dann ist φ insbesondere *diagonalisierbar*.**

Denn wenn φ **normal** ist, gibt es sogar eine *Orthonormal*basis aus EE von φ; für die **Diagonalisierbarkeit** genügt bereits die Existenz *irgend–einer* Basis aus EE von φ. ▮

Die **Umkehrung** dieser Aussage gilt ***i.a. nicht***:

z.B.: die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist **diagonalisierbar**: A hat die beiden EW $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und zugehörige EV sind z.B. $\vec{e}_x$ zum EW 1 und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum EW 2; damit ist $\{\vec{e}_x, \vec{a}\}$ ist eine **Basis aus Eigenvektoren** von A und A wird von der Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **diagonalisiert**:

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Da andererseits diese beiden Eigenvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{a}$ *nicht* orthogonal sind, kann A **nicht normal** sein.

Mit Nummer 31.6 haben wir sofort:

36.14 **Eine Matrix A ist genau dann *normal*, wenn es eine *unitäre* Matrix U gibt, die A *diagonalisiert*: genau die Matrizen U, deren Spalten eine ONB aus Eigenvektoren von A bilden, erfüllen diese Bedingung.**

Wir haben früher gesehen (s. Nr. 30.41 und 36.5), dass jede hermitesche, schiefhermitesche und unitäre lineare Abbildung (oder Matrix) normal ist, dass die Eigenwerte einer hermiteschen lin. Abbildung reell und einer schiefhermiteschen lin. Abbildung rein–imaginär (oder $= 0$) sind und dass die Eigenwerte einer unitären lin. Abbildung den Betrag 1 haben. Wir können diese Aussagen verschärfen:

36.15

Genau dann ist φ:

- ***hermitesch*, wenn φ *normal* ist und nur *reelle* Eigenwerte besitzt,**
- ***schiefhermitesch*, wenn φ *normal* ist und die Eigenwerte *rein–imaginär* (oder $= 0$) sind,**
- ***unitär*, wenn φ *normal* ist und die Eigenwerte den *Betrag* 1 haben.**

Denn: sei φ normal und sei $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j$ die Spektraldarstellung von φ:

– wenn alle EW ***reell*** sind (also $\lambda_j^* = \lambda_j$), dann ist $\varphi^+ = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \hat{P}_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j = \varphi$,
somit φ ***hermitesch***,

– wenn alle EW ***rein–imaginär*** (oder $= 0$) sind (also $\lambda_j^* = -\lambda_j$), dann ist
$\varphi^+ = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \hat{P}_j = \sum_{j=1}^{m} (-\lambda_j) \hat{P}_j = -\varphi$, somit φ ***schiefhermitesch***, und

– wenn alle EW den ***Betrag*** 1 haben (also $\lambda_j \lambda_j^* = 1$), dann ist, da $\hat{P}_j \hat{P}_k = O$ für $k \neq j$, und $= \hat{P}_j$ für $k = j$: $\varphi\varphi^+ = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \hat{P}_k\right) = \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_j \lambda_k^* \hat{P}_j \hat{P}_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \lambda_j^* \hat{P}_j = \sum_{j=1}^{m} \hat{P}_j = I$,
somit φ ***unitär***. ∎

36.16

Wenn φ **normal** ist mit der Spektraldarstellung $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j$, so hat für jedes Polynom $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_N t^N$ das

Polynom $\boxed{p(\varphi) := a_0 I + a_1 \varphi + \cdots + a_N \varphi^N}$ die **Spektraldarstellung**

$$\boxed{\boxed{p(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} p(\lambda_j) \hat{P}_j}}\ .$$

Denn: $\varphi^0 := I = \sum_{j=1}^{m} \hat{P}_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 \hat{P}_j$, $\varphi^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \hat{P}_k\right) = \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_j \lambda_k \hat{P}_j \hat{P}_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 \hat{P}_j$,

$\varphi^3 = \varphi\varphi^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 \hat{P}_k\right) = \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_j \lambda_k^2 \hat{P}_j \hat{P}_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^3 \hat{P}_j$, ... usw.:

allgemein für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$: $\boxed{\varphi^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \hat{P}_j}$. Hiermit ergibt sich:

$$p(\varphi) = a_0 I + a_1\varphi + \cdots + a_N\varphi^N = a_0 \sum_{j=1}^{m} \hat{P}_j + a_1 \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j + \cdots + a_N \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^N \hat{P}_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_N\lambda_j^N\right) \hat{P}_j = \sum_{j=1}^{m} p(\lambda_j)\hat{P}_j \,.$$ ▮

Jede *stetige* Funktion $f(t)$ ist als Grenzwert einer Folge von Polynomen darstellbar (das *ist* so und kann in diesem Kurs weder präzisiert noch begründet werden!). Mit dieser Feststellung leuchtet dann aber — vemöge des letzten Ergebnisses — sogar die folgende Aussage ein:

36.17

Sei φ **normal** mit der **Spektraldarstellung** $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j$.

Dann wird für jede *stetige* Funktion $f(t)$ durch $(*)$ $\boxed{f(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)\hat{P}_j}$ eine **normale** lineare Abbildung $f(\varphi)$ definiert und die Darstellung $(*)$ ist die **Spektraldarstellung** von $f(\varphi)$.
(Wenn $\varphi = A$ eine Matrix ist, ist auch $f(\varphi) = f(A)$ eine Matrix.)

$\Big($ Für alle $k = 1, \ldots, m$ und alle $x_k \in E_k$ ist $f(\varphi)x_k = \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)\hat{P}_j x_k = f(\lambda_k)x_k$, also $f(\lambda_k)$ EW und E_k zugehöriger Eigenraum von $f(\varphi)$. $\Big)$

z.B.: Sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. A ist **hermitesch** (reell symmetrisch), insbesondere **normal**, insbesondere **diagonalisierbar** (aber *nicht* unitär). Wir wollen eine ONB aus Eigenvektoren und hiermit die Spektraldarstellung von A bestimmen. Hierzu ermitteln wir zunächst die Eigenwerte:

$$0 \overset{!}{=} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) - 4(4-\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 13\lambda + 36) \text{ , somit}$$

$\lambda = 4$ oder $\lambda = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$, d.h. A hat die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ (2–fach) und $\lambda_2 = 9$.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 4$ (mit Gauß–Elimination):

$$\left.\begin{array}{ccc||c|cc} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & & 0 & -1 \end{array}\right\} \text{ z.B. (normiert): } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(diese beiden Vektoren sind bereits orthogonal: anderenfalls hätten wir sie noch — *innerhalb* der der von ihnen aufgespannten Ebene! — orthonormieren müssen);

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 9$ (wieder mit Gauß–Elimination):

$$\left.\begin{array}{rrr||rr|r} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cline{4-6} 2 & 0 & -4 & & & -1 \end{array}\right\} \text{ z.B. (normiert)}: \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \text{ Hiermit ist}$$

$B = \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ eine **Orthonormalbasis aus Eigenvektoren** von A und die Matrix A wird von der ***unitären*** Matrix $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ **diagonalisiert**; die sich ergebende **Diagonalmatrix** muss die Matrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ sein:

$$D = U^{-1}AU = U^tAU = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 18 \\ 0 & 4\sqrt{5} & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$E_1 = E(4) = \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ist der **Eigenraum** zum 2–fachen Eigenwert $\lambda_1 = 4$ und $E_2 = E(9) = \operatorname{span}\{\vec{e}_3\}$ ist der **Eigenraum** zum einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 9$; diese beiden Eigenräume sind **orthogonal** (s. Nr. 36.8).

Die **Projektion** auf den Eigenraum $E_2 = E(9)$ ist (s. Nr. 32.18):

$$P_2 = \vec{e}_3\,\vec{e}_3^{\,t} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix},$$

und die Projektion auf den zu E_2 orthogonalen Eigenraum E_1 ist:

$$P_1 = I - P_2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

(Wir hätten statt dessen P_1 auch über die Beziehung $P_1 = \vec{e}_1\,\vec{e}_1^{\,t} + \vec{e}_2\,\vec{e}_2^{\,t}$ bestimmen können. Beachte auch , dass die beiden Projektionsmatrizen P_1, P_2 ***hermitesch*** (reell–symmetrisch) sind: s. Nr. 36.9!)

Mit diesen beiden Projektionsmatrizen erhalten wir die **Spektraldarstellung** von A:

$$\boxed{A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 4\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}}.$$

Mit Hilfe dieser Spektraldarstellung können wir nun z.B. eine Matrix C finden mit $C^2 = A$, also eine **Wurzel** von A: hiervon gibt es vier, denn $C_{1,2,3,4} = \sqrt{A} = \sqrt{4}P_1 + \sqrt{9}P_2 = \pm 2P_1 \pm 3P_2$, also z.B.:

$$C = C_1 = 2P_1 + 3P_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4/5 & 0 & 8/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12/5 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2/5 & 0 & 11/5 \end{pmatrix}.$$

Probe: $C^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 200 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 50 & 100 & 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A\,.$

Im Zusammenhang mit diesem Beispiel (aber nicht nur deshalb!) ist die folgende Definition von Interesse:

36.18 Eine ***reelle symmetrische*** Matrix A heißt
- **positiv definit** (auch kurz: **positiv**), wenn alle EW von $A > 0$ sind,
- **positiv semidefinit**, wenn alle EW von $A \geq 0$ sind,
- **negativ definit** (auch kurz: **negativ**), wenn alle EW von $A < 0$ sind,
- **negativ semidefinit**, wenn alle EW von $A \leq 0$ sind, und
- **indefinit** in allen anderen Fällen, wenn A also je mindestens einen (echt) positiven und (echt) negativen EW besitzt.

Die Matrix A des letzten Beispiels ist **positiv definit**, denn sie hat nur die beiden ***positiven*** Eigenwerte $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$; ebenso haben wir eine **positiv definite Wurzel** C von A bestimmt mit den ***positiven*** Eigenwerten 2 und 3. Daneben hat A noch eine **negativ definite Wurzel**:

$C_2 = -2P_1 - 3P_2 = -\begin{pmatrix} 14/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2/5 & 0 & 11/5 \end{pmatrix}$ mit den ***negativen*** Eigenwerten -2 und -3 und

zwei **indefinite Wurzeln**: $C_{3,4} = \pm\Big(-2P_1 + 3P_2\Big) = \pm\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $-2,\ +3$ bzw. $+2,\ -3$.

(*) Ohne Kommentar wollen wir noch ein nützliches **Kriterium für die Definitheit** anführen, das ohne Eigenwertbestimmung auskommt. Hierzu bezeichnen wir für eine n,n–Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ und für $k = 1,\dots,n$ mit $[A]_k$ die k-te Hauptuntermatrix $[A]_k = (a_{ij})_{k,k}$:

36.19 **(*)** Eine ***reelle symmetrische*** n,n–Matrix A ist *genau dann*
- **positiv definit**, wenn $\det[A]_k > 0$ ist $\forall\, k = 1,\dots,n$,
- **positiv semidefinit**, wenn $\det[A]_k \geq 0$ ist $\forall\, k = 1,\dots,n$,
- **negativ definit**, wenn $-A$ ***positiv definit*** ist, d.h. wenn $(-1)^k \det[A]_k > 0$ ist $\forall\, k = 1,\dots,n$,
- **negativ semidefinit**, wenn $-A$ ***positiv semidefinit*** ist, d.h. wenn $(-1)^k \det[A]_k \geq 0$ ist $\forall\, k = 1,\dots,n$, und
- **indefinit** in allen anderen Fällen.

(Z.B. entscheidet die Art der **Definitheit der Hessematrix** $\Big(f_{x_i x_j}\Big)_{n,n}$ einer Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ an einer stationären Stelle darüber, ob und ggfs. von welcher Art f an dieser Stelle **Extrema** besitzt: vgl. Nr. 11.5.)

36.E Zusammenfassende Übersicht.

Die folgenden Implikationen gelten **ohne Einschränkungen** für ***für endliche Matrizen A mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$*** und ebenso für ***lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ eines endlich–dimensionalen unitären Raumes V über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in sich***. (Allgemein gelten sie für alle linearen Abbildungen, die "stets Eigenwerte besitzen": siehe die Bemerkung im Anschluss an $(+)$: die beiden Implikationen, die nur unter dieser Einschränkung zutreffen, sind mit $(+)$ gekennzeichnet.)

alle EW sind (a) reell (b) rein–imaginär (oder =0) (c) vom Betrag 1	$\not\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	EE zu verschiedenen EW sind orthogonal		
$\not\Downarrow\ \Uparrow$		$\not\Downarrow\ \Uparrow$		
$\forall\, x, y$: (a) $\langle\, \varphi x \mid y \,\rangle = \langle\, x \mid \varphi y \,\rangle$ (b) $\langle\, \varphi x \mid y \,\rangle = -\langle\, x \mid \varphi y \,\rangle$ (c) $\langle\, \varphi x \mid \varphi y \,\rangle = \langle\, x \mid y \,\rangle$	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	$\forall\, x, y$: $\langle\, \varphi^+ x \mid \varphi^+ y \,\rangle =$ $= \langle\, \varphi x \mid \varphi y \,\rangle$		
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		
(a) $\varphi^+ = \varphi$, (b) $\varphi^+ = -\varphi$ (c) $\varphi^+ \varphi = I$	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	$\varphi^+ \varphi = \varphi \varphi^+$		
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		
(a) hermitesch **(b) schiefhermitesch** **(c) unitär**	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	**normal**		
$(+)\Downarrow\ \Uparrow$		$(+)\Downarrow\ \Uparrow$		
$\exists$ ONB aus EE und alle EW sind (a) reell (b) rein–imaginär (oder =0) (c) vom Betrag 1	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	**$\exists$ ONB aus EE**	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	**$\exists$ Basis aus EE**
		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	φ diagonalisierbar bzgl. einer ONB bzw. A diagonalisierbar mit einer unitären Matrix	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	**diagonalisierbar**
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
φ besitzt eine Spektraldarstellung $\varphi = \sum_j \lambda_j \hat{P}_{\lambda_j}$ (analog für A) und alle λ_j sind (a) reell (b) rein–imaginär (oder =0) (c) vom Betrag 1	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	EE zu verschiedenen EW sind orthogonal und jeder k–fache EW ist k–fach entartet	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	Jeder k–fache EW ist k–fach entartet
		$\Updownarrow$		
	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	φ besitzt eine Spektraldarstellung $\varphi = \sum_j \lambda_j \hat{P}_{\lambda_j}$ (analog für A)		

37 Die Matrix e^{At} .

Stichpunkte: Definition mit Hilfe der Exponentialreihe, Bestimmung mit Hilfe der Spektraldarstellung oder eines Ansatzes. Rechenregeln und Inverse.

37.A Bestimmung mit Hilfe der Exponentialreihe.

37.1 Für jede quadratische Matrix A und für alle $t \in \mathbf{K}$ ist

$$\boxed{e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k} \qquad \text{(wobei } A^0 = I\text{)}$$

(Diese Reihe ist stets konvergent.)

Wenn es gelingt — *und i.a. nur dann!* —, für die Matrizen A^k ein bequemes **Bildungsgesetz** zu finden, lässt sich die Matrix e^{At} mit Hilfe dieser Exponentialreihe in der Regel gut berechnen.

z.B.: 1. Für $A = \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow \quad A^k = \begin{cases} I & \text{für alle geraden } k = 2m\,,\ m \in \mathbb{N}_0, \\ A & \text{für alle ungeraden } k = 2m+1\,,\ m \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \right) I + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) A = \cosh t \cdot I + \sinh t \cdot A =$$

$$= \cosh t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh t \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\cosh t + 7/9\ \sinh t] & -4/9\ \sinh t & 4/9\ \sinh t \\ -4/9\ \sinh t & [\cosh t + 1/9\ \sinh t] & 8/9\ \sinh t \\ 4/9\ \sinh t & 8/9\ \sinh t & [\cosh t + 1/9\ \sinh t] \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 8/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 5/9 & 4/9 \\ 2/9 & 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8/9\, e^t + 1/9\, e^{-t} & -2/9\, e^t + 2/9\, e^{-t} & 2/9\, e^t - 2/9\, e^{-t} \\ -2/9\, e^t + 2/9\, e^{-t} & 5/9\, e^t + 4/9\, e^{-t} & 4/9\, e^t - 4/9\, e^{-t} \\ 2/9\, e^t - 2/9\, e^{-t} & 4/9\, e^t - 4/9\, e^{-t} & 5/9\, e^t + 4/9\, e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Allgemein hat man (s. Nr. 36.10) :

37.2

Für jede **Projektion** P und **Spiegelung** S an einem Teilraum U ist

$e^{Pt} = (I-P) + e^t\,P$ und

$e^{St} = \frac{1}{2}\,e^t\,(I+S) + \frac{1}{2}\,e^{-t}\,(I-S) = e^{-t}(I-P) + e^tP\,.$

Denn: $P^2 = P \Rightarrow P^n = P\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow e^{Pt} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n = I + \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right) P = I + \left(e^t - 1\right) P$, und:

$$S^2 = I \Rightarrow S^n = \left\{\begin{array}{ll} S & \text{für ungerade } n \\ I & \text{für gerade } n \end{array}\right\} \Rightarrow e^{St} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} S^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\right) I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) S =$$

$$= \cosh t\, I + \sinh t\, S = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) I + \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) S = \frac{1}{2}\, e^t\,(I+S) + \frac{1}{2}\, e^{-t}\,(I-S)\,;$$

mit $I + S = 2P$ und $I - S = 2P^{\perp} = 2(I-P)$ (vgl. die Abbildungen 36.1 und 32.5) ergibt sich: $e^{St} = e^tP + e^{-t}(I-P)$ ▮

2. Mit einem **Einheitsvektor** $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ und der Matrix Ω für das Vektorprodukt $\vec{n} \times \vec{n}$, d.h. $\Omega\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r}$ (s. Nr. 32.22) ist:

$P_E = -\Omega^2$ die Projektion auf die zu $\vec{n}$ orthogonale Ebene E durch $\mathcal{O}$ (Nr. 24.13) und damit (s. Nr. 24.14 und Abb. 24.4 !) $\Omega^n = \left\{\begin{array}{ll} (-1)^k\,\Omega & \text{für } \textit{ungerade } n = 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N}_0\,, \\ (-1)^k\,(-\Omega^2) & \text{für } \textit{gerade } n = 2k\,,\ k \in \mathbb{N}\,. \end{array}\right.$

Hieraus ergibt sich für beliebige Winkel α :

$$e^{\alpha\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\,\Omega^n = I - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\right) \Omega^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \Omega = I - (\cos\alpha\, - 1)\Omega^2 + \sin\alpha\,\Omega,$$

d.h. $e^{\alpha\Omega} = A_{g,\alpha}$ ist die **Drehmatrix** , die den $\mathbb{R}^3$ um die Achse $g = \operatorname{span}\{\vec{n}\}$ um den Winkel α dreht (s. Nr. 32.27) .

37.B Bestimmung mit Hilfe eines Ansatzes.

In den meisten Fällen ist die Exponentialreihe zur Berechnung von e^{At} ungeeignet (wenn für die Matrizen A^k ein Bildungsgesetz nicht oder nur sehr mühsam zu finden ist).

Da jedoch jede n,n–Matrix A aufgrund des Satzes von Cayley–Hamilton (Nr. 35.24) ihre charakteristische Gleichung erfüllt und sich daher alle Potenzen A^k mit $k \geq n$ als Linearkombination von I , A , $\ldots$, A^{n-1} schreiben lassen (s. Nr. 35.25), kann die Exponentialreihe für e^{At} zu einem Polynom vom Grad $n-1$ in A reduziert werden. Diese Überlegung ist der Ausgangspunkt zu folgender Methode zur Bestimmung von e^{At} :

37.3

$\boxed{1}$ Bestimmung aller Eigenwerte λ_j von A einschließlich ihrer Vielfachheit.

$\boxed{2}$ ***Ansatz:*** $\boxed{e^{At} = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + \cdots + a_{n-1} \cdot A^{n-1}}$

mit "geeignet" zu bestimmenden *Funktionen* $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_{n-1}(t)$.

$\boxed{3}$ Mit der Hilfsfunktion $\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}}$ liefert jeder k–fache Eigenwert λ_j von A die folgenden k **Bestimmungsgleichungen** für die Funktionen $a_\nu(t)$:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f(\lambda_j) & = & e^{\lambda_j t} \\ f'(\lambda_j) & = & t e^{\lambda_j t} \\ & \vdots & \\ f^{(k-1)}(\lambda_j) & = & t^{k-1} e^{\lambda_j t} \end{array}}$$

Da A genau n Eigenwerte λ_j besitzt — wenn man jeden Eigenwert seiner Vielfachheit entsprechend oft zählt —, ergeben sich hiermit genau n Bestimmungsgleichungen für die n unbekannten Funktionen $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_{n-1}(t)$.

$\boxed{4}$ Die erhaltenen Funktionen $a_\nu(t)$ werden schließlich in den Ansatz von oben eingesetzt, um e^{At} zu bekommen.

z.B.: 1. Wir nehmen wieder die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ aus dem letzten Beispiel.

$\boxed{1}$ Bestimmung der Eigenwerte von A:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7/9 - \lambda & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 - \lambda & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{7}{9} - \lambda\right)\left(\frac{1}{9} - \lambda\right)^2 - \frac{256}{729} - \frac{32}{81}\left(\frac{1}{9} - \lambda\right) - \frac{64}{81}\left(\frac{7}{9} - \lambda\right) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

A hat also die Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$ (einfach) und $\lambda_2 = 1$ (zweifach).

$\boxed{2}$ **Ansatz:** $\boxed{e^{At} = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2}$ $\big(a_j(t)$ "geeignet"$\big)$

$\boxed{3}$ Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $(\Rightarrow\ f'(x) = a_1 + 2a_2 x\,)$.

Der einfache Eigenwert $\lambda_1 = -1$ liefert: $\boxed{f(-1) = e^{-t}}$,

der zweifache Eigenwert $\lambda_2 = 1$ liefert: $\boxed{f(1) = e^t\,,\ f'(1) = te^t}$.

Damit bekommt man für $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ die drei Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lrcl} 1. & a_0 - a_1 + a_2 & = & e^{-t} \\ 2. & a_0 + a_1 + a_2 & = & e^t \\ 3. & a_1 + 2a_2 & = & te^t \end{array}\right\} \text{ bzw.: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \\ te^t \end{pmatrix},$$

aus denen sich mit Hilfe des Eliminationsverfahrens oder der Cramer'schen Regel ergibt:

$$a_0(t) = \frac{1}{4}\, e^{-t} + \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2}\right) e^t\,,\quad a_1(t) = -\frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^t\,,\quad a_2(t) = \frac{1}{4}\, e^{-t} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) e^t\,.$$

$\boxed{4}$ Wegen $A^2 = I$ erhält man (wie oben) :

$$\begin{aligned} e^{At} &= \left[\frac{1}{4}\, e^{-t} + \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{2}\right) e^t\right] \cdot I + \left(-\frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^t\right) \cdot A + \left[\frac{1}{4}\, e^{-t} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) e^t\right] \cdot I = \\ &= \frac{1}{2}\,(e^t + e^{-t}) \cdot I + \frac{1}{2}\,(e^t - e^{-t}) \cdot A = \cosh t \cdot I + \sinh t \cdot A = \\ &= \begin{pmatrix} [\cosh t + 7/9\,\sinh t] & -4/9\,\sinh t & 4/9\,\sinh t \\ -4/9\,\sinh t & [\cosh t + 1/9\,\sinh t] & 8/9\,\sinh t \\ 4/9\,\sinh t & 8/9\,\sinh t & [\cosh t + 1/9\,\sinh t] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$. Zuerst werden die Eigenwerte von A bestimmt:

$$0 \stackrel{!}{=} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(6-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 :$$

$\lambda = 3$ ist also der einzige (dafür zweifache) Eigenwert von A .

Als Nächstes machen wir für die Matrix e^{At} den **Ansatz:** $\boxed{e^{At} = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A}$ mit "geeigneten" Funktionen $a_0(t)$, $a_1(t)$.

Mit der Hilfsfunktion $f(x) = a_0 + a_1 x$ $(\Rightarrow\ f'(x) = a_1\,)$ ergeben sich für a_0 , a_1 die beiden Bestimmungsgleichungen:

1. $f(3) = e^{3t}$, d.h. $a_0 + 3a_1 = e^{3t}$, 2. $f'(3) = te^{3t}$, d.h. $a_1 = te^{3t}$;

damit ist $a_0 = e^{3t} - 3a_1 = e^{3t} - 3\,te^{3t} = (1-3t)\,e^{3t}$ und

$$e^{At} = (1-3t)\,e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\,e^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3t)\,e^{3t} & t\,e^{3t} \\ -9t\,e^{3t} & (1+3t)\,e^{3t} \end{pmatrix}.$$

37.C Bestimmung mit Hilfe der Spektraldarstellung.

37.4

Ist die Matrix A ***normal*** mit der **Spektraldarstellung**

$$\boxed{A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j}\ , \quad \text{so ist} \quad \boxed{e^{At} = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} P_j}\ ,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die *verschiedenen* Eigenwerte von A sind und jeweils P_j die Projektion auf den zum Eigenwert λ_j gehörenden Eigenraum $E(\lambda_j)$ bezeichnet.

Beachte (!), dass man in der Spektraldarstellung von A ggfs. einen Term mit $\lambda_j = 0$ ***nicht unterschlagen*** darf, denn es ist $e^0 = 1 \neq 0$!

z.B.: Sei wieder $A = \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}$. A hat (s.o.) die Eigenwerte:

$\lambda_1 = -1$ (einfach) und $\lambda_2 = 1$ (zweifach). Mit dem Eliminationsverfahren bestimmen wir zunächst einen Eigenvektor $\vec{c}$ zu $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|cccc} 16/9 & -4/9 & 4/9 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 1 & 2 & 5/2 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 \\ -4/9 & 10/9 & 8/9 & -2 & 5 & 4 & 0 & 9 & 9 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \cline{13-16} 4/9 & 8/9 & 10/9 & 4 & -1 & 1 & & & & & & & & & \vdots & -1 \end{array} \quad , \text{ z.B. } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bzw. $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$; der zugehörige Eigenraum ist damit: $E(-1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\}$;

die Matrix, die den $\mathbb{R}^3$ auf den Eigenraum $E(-1)$ projiziert, ist:

$P_{-1} = \vec{e}\,\vec{e}^{\,+} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$, und die Projektion P_1 auf den zu $E(-1)$ *orthogonalen* Eigenraum $E(1)$ ist dann: $P_1 = I - P_{-1} = \begin{pmatrix} 8/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 5/9 & 4/9 \\ 2/9 & 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$.

Damit hat man schließlich erneut:

$$e^{At} = e^{-t} P_{-1} + e^{t} P_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} 8/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 5/9 & 4/9 \\ 2/9 & 4/9 & 5/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/9\,e^{-t} + 8/9\,e^{t} & 2/9\,e^{-t} - 2/9\,e^{t} & -2/9\,e^{-t} + 2/9\,e^{t} \\ 2/9\,e^{-t} - 2/9\,e^{t} & 4/9\,e^{-t} + 5/9\,e^{t} & -4/9\,e^{-t} + 4/9\,e^{t} \\ -2/9\,e^{-t} + 2/9\,e^{t} & -4/9\,e^{-t} + 4/9\,e^{t} & 4/9\,e^{-t} + 5/9\,e^{t} \end{pmatrix}.$$

37.D Einige Rechenregeln für die Matrizen e^A .

37.5

$e^O = I$	($O =$ Nullmatrix)
$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$	*genau dann* wenn A und B **vertauschbar** sind, d.h. wenn $AB = BA$, insbesondere:
$e^{At} \cdot e^{As} = e^{A(t+s)}$	$\forall\, t, s \in \mathbb{C}$ und:
$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$	(e^A ist also stets ***invertierbar***)

37.6

Die **Euler'sche Formel** gilt entsprechend auch für Matrizen:

$e^{i\,At} = \cos At + i\,\sin At$ wobei:

$$\cos At = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} = \frac{1}{2}\left(e^{i\,At} + e^{-i\,At}\right),$$

$$\sin At = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\,At} - e^{-i\,At}\right).$$

(Alle diese Formeln sind ganz einfach nachzurechnen.)

37.7

Für eine normale Matrix A sind die Matrizen $e^{i\,At}$ ($t \in \mathbb{R}$) *genau dann* ***unitär***, wenn A **hermitesch** ist.

Denn: wenn A die Spektraldarstellung $A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$ hat, dann hat e^{iAt} die Spektraldarstellung $e^{iAt} = \sum_{j=1}^{m} e^{i\lambda_j t} P_j$ mit den Eigenwerten $e^{i\lambda_j t}$: diese haben *genau dann* für alle $t \in \mathbb{R}$ den ***Betrag 1***, wenn λ_j *reell* ist für alle j, d.h. wenn A ***hermitesch*** ist (siehe Nr. 36.15 oder Abschnitt 36.E). ▮

37.8

Für jede *konstante* Matrix A und für jeden Vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ist:

$\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{At}\,\vec{r}\right) = A \cdot e^{At}\,\vec{r} + e^{At}\,\dot{\vec{r}}}$, insbesondere hat man

für jeden *konstanten* Vektor $\vec{c}$: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{At}\,\vec{c}\right) = A \cdot e^{At}\,\vec{c}}$.

(Hiervon wird in der nächsten Lektion Gebrauch gemacht!)

38 Homog. lin. Dgl.–Systeme mit konst. Koeffizienten.

Stichpunkte: Über die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Dgl.–Systems und Art der Lösungen eines homogenen linearen Dgl.–Systems. Lösung eines lin. Dgl.–Systems 1. Ordnung im Fall einer diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix, mit Hilfe der Matrix e^{At} oder mit Hilfe geeigneter Exponentialansätze. Bemerkung über entsprechende Exponentialansätze für homogene lin. Dgl.–Systeme 2.Ordnung und über die Umwandlung von Dgl.–Systemen hörerer Ordnung in Dgl.–Systeme 1.Ordnung.

38.A Vorbemerkung über allg. lin. Dgl.–Systeme 1.Ordnung.

Wir betrachten in dieser und der nächsten Lektion hauptsächlich nur **homogene** und **inhomogene Systeme** von n **linearen Dgln. 1.Ordnung** für n gesuchte Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ der Art:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{ll} y_1' & = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' & = a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \vdots & \\ y_n' & = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{array} \right\}$$

mit **konstanten Koeffizienten** a_{ij} und gewissen **Störfunktionen** $f_i(x)$, bzw., in vektorieller Form:

$$(*) \quad \boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b}}} \quad \text{mit} \quad \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \; \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

und der Koeffizientenmatrix $A = \left(a_{ij}\right)_{nn}$. Das Dgl.–System $(*)_h$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}}$ ist das **zugehörige homogene System**.

Wie für alle linearen Gleichungen gilt: (siehe Nummer 31.26 !)

allg. Lösung $\vec{r}$ des **inhom.** Systems $(*)$ $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b}(x)}$	=	**allg.** Lösung $\vec{r}_0$ des **homog.** Systems $(*)_h$ $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}$	+	**Partikulärlösung** $\vec{r}_s$ des **inhom.** Systems $(*)$ $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b}(x)}$

38.B Art der Lösungen homogener lin. Dgl.–Systeme.

Wir beginnen mit einer **Plausibilitätsbetrachtung** nach recht robuster Praktiker–Art:

Mit dem Differentialoperator $D = \dfrac{d}{dx}$ lässt sich das Dgl.–System $(*)_h$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}}$ auch in der Form: $\boxed{(A - DI)\,\vec{r} = \vec{o}}$ schreiben, d.h. in der Form:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11}-D)\,y_1 & + & a_{12}\,y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,y_n & = & 0 \\
a_{21}\,y_1 & + & (a_{22}-D)\,y_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,y_n & = & 0 \\
 & & \vdots & & & & & & \\
a_{n1}\,y_1 & + & a_{n2}\,y_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}-D)\,y_n & = & 0\,,
\end{array}$$

wobei $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ die Komponenten von $\vec{r}\,(x)$ sind.

Ist $p_A(\lambda)$ das charakteristische Polynom der Matrix A, so hat die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems die Determinante $\det(A-DI) = p_A(D)$ und es folgt:

38.1

Für jede Lösung $\vec{r}\,(x)$ des homogenen linearen Dgl.–Systems $(*)_h$ $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}$ ist *jede Komponente* y_j von $\vec{r}\,(x)$ eine Lösung der homogenen linearen Dgl. $(+)_h$ $\boxed{p_A(D)\,y = 0}$.

Beachte, dass die Umkehrung dieser Aussage in der Regel falsch ist!

Wenn man nämlich die Cramer'sche Regel zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $B\,\vec{r} = \vec{b}$:

$$\begin{array}{rcl}
\beta_{11}\,y_1 + \cdots + \beta_{1n}\,y_n & = & b_1 \\
 & \vdots & \\
\beta_{n1}\,y_1 + \cdots + \beta_{nn}\,y_n & = & b_n
\end{array}$$

herleitet, so erhält man für jede Variable y_j , $j = 1, \ldots, n$, *allein mit Hilfe elementarer Zeilenoperationen (nur durch Addition und Multiplikation)* die Gleichung:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1n} \\ & & \vdots & & \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nj} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix}}_{=\det B} \cdot y_j = \underbrace{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & \beta_{1n} \\ & & \vdots & & \\ \beta_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix}}_{=\det B_j(\vec{b}\,)}$$

Im Fall $\vec{b} = \vec{o}$ wird man also insbesondere von der Gleichung (0): $\boxed{B\,\vec{r} = \vec{o}}$ auf die Gleichungen (j): $\boxed{\det B \cdot y_j = 0}$ geführt. Dieses Ergebnis ist zunächst kaum erwähnenswert: denn wenn B *nicht* regulär ist, dann ist $\det B = 0$, und wenn B regulär ist, dann folgt aus (j), dass $y_j = 0$ ist, d.h. dann ergibt sich, dass das System (0) nur die triviale Lösung besitzt. Die Eliminationsschritte, die von (0) auf (j) führen, bleiben jedoch auch dann zulässig, wenn die Koeffizienten der Matrix B Differentialpolynome sind, also z.B. im Fall $B = A - DI$ (Multiplikation einer Zeile mit D besagt, dass die dieser Zeile entsprechende Gleichung abzuleiten ist); daher ergeben sich aus der

Gleichung (0) $\boxed{(A-DI)\,\vec{r} = \vec{o}}$ die Gleichungen (j) $\boxed{p_A(D)\,y_j = \det(A-DI)\,y_j = 0}$. ∎

Wir kennen alle Lösungen einer homogenen lin. Dgl. $p(D)\,y = 0$ mit konstanten Koeffizienten, wenn wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ dieser Dgl. kennen (s. z.B. Nummer 16.15). Da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$ der Dgl. $(+)_h$ in Nr. 38.1 gerade die Eigenwerte der Matrix A sind, können wir das Ergebnis aus Nr. 38.1 auch folgendermaßen schreiben:

38.2

Die Matrix A habe die paarweise verschiedenen, k_j–fachen Eigenwerte $\lambda_j\,,\ \lambda_j^* = \alpha_j \pm i\beta_j$ $(\alpha_j\,,\ \beta_j \in \mathbb{R},\ k_j \in \mathbb{N}\,,\ j = 1, \ldots, m\,,\ m \in \mathbb{N})$. Dann ist **jede Lösung** $\vec{r}\,(x)$ des homogenen Dgl.–Systems $(*)_h$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}}$ von der Form:

A $\boxed{\vec{r}\,(x) = \sum_{j=1}^{m} \left(e^{\lambda_j\,x}\vec{R}_j\,(x)\ + e^{\lambda_j^*\,x}\vec{S}_j\,(x)\right)}$, bzw., gleichwertig:

B $\boxed{\vec{r}\,(x) = \sum_{j=1}^{m} e^{\alpha_j\,x}\left(\vec{P}_j\,(x)\ \cos\beta_j x\ + \vec{Q}_j\,(x)\ \sin\beta_j x\right)}$,

wobei die Komponenten von $\vec{R}_j\,,\ \vec{S}_j$ und $\vec{P}_j\,,\ \vec{Q}_j$ Polynome vom Grad $(k_j - 1)$ sind ($\vec{S}_j = \vec{o}$, falls λ_j *reell* ist!). (**Beachte**, dass umgekehrt *nicht* jeder Vektor $\vec{r}\,(x)$ dieser Form das Dgl.–System $(*)_h$ löst!)

Etwas genauer ergibt sich im Fall einer *reellen* Koeffizientenmatrix A (vgl. mit Nr. 16.17):

38.3

1. Mit jeder **Lösung** $\vec{r}\,(x)$ des homogenen lin. Dgl.–Systems $(*)_h$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}}$ sind auch die **Konjugiert–Komplexe** $\vec{r}^{\,*}(x)$, der **Realteil** $\vec{u}\,(x) = \Re\mathrm{e}\,\left(\vec{r}\,(x)\right)$ und der **Imaginärteil** $\vec{v}\,(x) = \Im\mathrm{m}\,\left(\vec{r}\,(x)\right)$ Lösungen des Dgl.–Systems $(*)_h$.

2. Der zu jedem konjugiert–komplexen Paar $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ k–facher Eigenwerte von A gehörende **allgemeine Lösungsanteil** des Dgl.–Systems $(*)_h$ ist von der Form:

A $\boxed{\vec{r}_0\,(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}\,\vec{R}\,(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}\,\vec{S}\,(x)}$ bzw., gleichwertig (!):

B $\boxed{\vec{r}_0\,(x) = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x\,\vec{P}\,(x) + \sin\beta x\,\vec{Q}\,(x)\right)}$, wobei

$\vec{R}\,(x)\,,\ \vec{S}\,(x)\,,\ \vec{P}\,(x) = \vec{R}\,(x) + \vec{S}\,(x)$ und $\vec{Q}\,(x) = i\left(\vec{R}\,(x) - \vec{S}\,(x)\right)$ gewisse vektorielle Polynome vom Grad $k-1$ sind. ($\vec{S}\,(x) = \vec{o}$ falls $\beta = 0\,!$)

Achtung!: *nicht mit jeder* Wahl dieser Polynome ergeben sich auch Lösungen von $(*)_h$!

Die Darstellung **B** bekommt man aus der Darstellung **A** über die Euler'sche Formel:

$$\begin{aligned}\vec r_0\,(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x}\,\vec R\,(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}\,\vec S\,(x) = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x}\vec R\,(x) + e^{-i\beta x}\vec S\,(x)\right) = \\ &= e^{\alpha x}\left([\cos\beta x + i\sin\beta x]\,\vec R\,(x) + [\cos\beta x - i\sin\beta x]\,\vec S\,(x)\right) = \\ &= e^{\alpha x}\left(\cos\beta x\left[\vec R\,(x)+\vec S\,(x)\right] + \sin\beta x\; i\left[\vec R\,(x)-\vec S\,(x)\right]\right).\end{aligned}$$

▮

38.4 Die Lösungen in Nr. 38.3 sind genau dann ***reell***, wenn $\vec S\,(x) = \vec R\,(x)^*$ in der Darstellung $\mathbf{A}$; die ***reellen*** Lösungen in der Form $\mathbf{B}$ bekommt man hieraus mit $\vec P\,(x) = 2\,\Re\mathrm{e}\,\vec R\,(x)$, $\vec Q\,(x) = -2\,\Im\mathrm{m}\,\vec R\,(x)$.

38.C Diagonalisierbare Koeffizientenmatrix.

Ist die Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ des **homogenen linearen Dgl.–Systems:**

$$(*)_h \left\{\begin{array}{ccc} \dot x_1 &=& a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ &\vdots& \\ \dot x_n &=& a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{array}\right\} \quad \text{bzw. (in vektorieller Schreibweise): } (*)_h \ \boxed{\boxed{\dot{\vec r} = A\vec r}}$$

konstant und diagonalisierbar, so lässt sich dieses *gekoppelte* System linearer Dgln. durch eine geeignete Koordinatentransformation **entkoppeln**, d.h. in ein System von n voneinander unabhängigen Dgln. umwandeln, die einzeln gelöst werden können:

als neue Basis wählt man eine Basis $B = \{\,\vec c_1\,,\,\dots\,,\,\vec c_n\,\}$ aus Eigenvektoren von A (die gibt es genau dann, wenn A diagonalisierbar ist: s. Nr. 36.1 !) ; sind dann $\lambda_1\,,\,\dots\,,\,\lambda_n$ die entsprechend zugehörigen Eigenwerte: $A\vec c_j = \lambda_j\,\vec c_j$, so ist $T = (\,\vec c_1\,,\,\dots\,,\,\vec c_n\,)$ die Transformationsmatrix für den Basiswechsel $B_{\text{nat}} \to B$ und es ist $T^{-1}AT = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \lambda_n\end{pmatrix}$. Jeder Vektor des $\mathbb{K}^n$, der bzgl. B_{nat} die Koordinaten $\vec r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ hat, hat bzgl. der neuen Basis B die Koordinaten $\vec u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix} = T^{-1}\vec r$ (s. Nr. 32.15) .

Erfüllt nun $\vec r = \vec r\,(t)$ die Gleichung $(*)_h$ $\boxed{\boxed{\dot{\vec r} = A\vec r}}$, so ergibt sich für $\vec u = \vec u\,(t) = T^{-1}\vec r\,(t)$:

$\dot{\vec u} = T^{-1}\dot{\vec r} = T^{-1}A\vec r = T^{-1}TDT^{-1}\vec r = D\vec u$, also das entkoppelte Dgl.–System $\boxed{\boxed{\dot{\vec u} = D\vec u}}$,

d.h.: $\begin{pmatrix}\dot u_1 \\ \vdots \\ \dot u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1 \\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}$, bzw.: $\left\{\begin{array}{ccc}\dot u_1 &=& \lambda_1\,u_1 \\ &\vdots& \\ \dot u_n &=& \lambda_n\,u_n\end{array}\right\}$:

diese n Gleichungen lassen sich sofort lösen: $\dot u_j = \lambda_j\,u_j \Leftrightarrow u_j = \gamma_j\,e^{\lambda_j\,t}$ (γ_j bel. konstant) .

Die gesuchte Lösung $\vec r\,(t)$ des Dgl.–Systems $\boxed{\dot{\vec r} = A\vec r}$ ergibt sich durch Rücktransformation:

$$\vec{r}\,(t) \;=\; T\vec{u}\,(t) \;=\; (\,\vec{c}_1\,,\,\ldots\,,\,\vec{c}_n\,)\begin{pmatrix} \gamma_1\,e^{\lambda_1\,t} \\ \vdots \\ \gamma_n\,e^{\lambda_n\,t} \end{pmatrix} \;=\; \gamma_1\,e^{\lambda_1 t}\,\vec{c}_1 \,+\, \cdots \,+\, \gamma_n\,e^{\lambda_n t}\,\vec{c}_n$$

mit beliebig konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{C}$ (s. Nr. 30.16) . (Diese Konstanten sind in der Praxis meistens noch so zu bestimmen, dass die Lösung eine gewisse Anfangsbedingung $\vec{r}\,(t_0) = \vec{r}_0$ erfüllt.) **Ergebnis :**

38.5

Ein **homogenes lineares Dgl.–System** $\boxed{\dot{\vec{r}} = A\vec{r}}$, dessen Koeffizientenmatrix A ***konstant und diagonalisierbar*** ist, kann folgendermaßen gelöst werden:

Zunächst werden alle Eigenwerte $\lambda_1\,,\,\ldots\,,\,\lambda_n$ und dann n entsprechend zugehörige, **linear–unabhängige** Eigenvektoren $\vec{c}_1\,,\,\ldots\,,\,\vec{c}_n$ bestimmt (diese müssen weder normiert noch orthonormiert sein: eine Orthonormierung wäre, wenn A *nicht* normal ist, ohnehin nicht möglich!) .

Dann sind $\vec{r}_1\,(t) = e^{\lambda_1 t}\,\vec{c}_1\,,\,\ldots\,,\,\vec{r}_n\,(t) = e^{\lambda_n t}\,\vec{c}_n$ n linear unabhängige Lösungen des Dgl.–Systems $(*)_h$ $\boxed{\dot{\vec{r}} = A\vec{r}}$ (man sagt, sie bilden ein **Fundamentalsystem** für dieses Dgl.–System) .

Das Dgl.–System $(*)_h$ hat damit die **allgemeine Lösung :**

$$\boxed{\vec{r}\,(t) = \gamma_1\,e^{\lambda_1 t}\,\vec{c}_1 \,+\, \cdots \,+\, \gamma_n\,e^{\lambda_n t}\,\vec{c}_n} \qquad (\,\gamma_1\,,\,\ldots\,,\,\gamma_n \in \mathbb{C}\ \text{ beliebig konstant}\,)\,.$$

z.B.: 1. Die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ des Dgl.–Systems: $\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = 7x - 4y + 4z \\ \dot{y} = -4x + y + 8z \\ \dot{z} = 4x + 8y + z \end{array}\right.$

ist diagonalsierbar (sogar symmetrisch) : A hat (s. Bsp. 8 in Abschnitt 35.C) die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 9\,,\ \lambda_3 = -9$ und (z.B.) die entsprechend zugehörigen, linear–unabhängigen Eigenvektoren:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Somit hat das Dgl.–System die **allgemeine Lösung :**

$$\vec{r}\,(t) = \gamma_1\,e^{9t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2\,e^{9t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_3\,e^{-9t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \text{d.h.:}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& (2\gamma_1 + 2\gamma_2)e^{9t} + \gamma_3 e^{-9t} \\ y(t) &=& -\gamma_1 e^{9t} + 2\gamma_3 e^{-9t} \\ z(t) &=& \gamma_2 e^{9t} - 2\gamma_3 e^{-9t} \end{array}\right\} \text{ mit beliebig konstanten } \gamma_1\,,\,\gamma_2\,,\,\gamma_3 \in \mathbb{C}\,.$$

Noch einfacher als hier beschrieben lässt sich ein homogenes Dgl.–System $(*)_h$ mit ***konstanter und diagonalisierbarer*** Koeffizientenmatrix A *höchstens* dann lösen, wenn die Matrix e^{At} bekannt ist oder bequem zu bestimmen ist:

38.D Verwendung der Matrix e^{At}.

(Zur Matrix e^{At} siehe die letzte Lektion.)

Für jede konstante n,n–Matrix A und jeden konstanten Vektor $\vec{c} \in \mathbb{C}^n$ ist $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\,\vec{c}\right) = A\,e^{At}\,\vec{c}$ (s. Nr. 37.8 !), d.h. für $\vec{r} = e^{At}\,\vec{c}$ ist $\vec{r}\,' = A\vec{r}$; und eine Anfangsbedingung $\vec{r}\,(t_0) = \vec{r}_0$ liefert: $\vec{r}_0 = \vec{r}\,(t_0) = e^{At_0}\vec{c}$, also $\vec{c} = e^{-At_0}\vec{r}_0$ und somit: $\vec{r}\,(t) = e^{At}\,e^{-At_0}\vec{r}_0 = e^{A(t-t_0)}\vec{r}_0$. Damit haben wir bereits:

38.6

Die **allgemeine Lösung** eines homogenen linearen Dgl.–Systems $(*)_h$: $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}$ mit ***konstanter*** Koeffizientenmatrix A ist:

$\boxed{\vec{r}\,(t) = e^{At}\,\vec{c}\,, \quad \vec{c} \text{ beliebig konstant}}$. Von diesen Lösungen erfüllt

$\boxed{\vec{r}\,(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{r}_0}$ die **Anfangsbedingung:** $\vec{r}\,(t_0) = \vec{r}_0$.

Da für jede Matrix C und den j–ten natürlichen Einheitsvektor $\vec{e}_j$ stets $C\vec{e}_j$ die j–te Spalte von C ist, folgt insbesondere (mit $\vec{c} = \vec{e}_j$), dass die Spalten der Matrix e^{At} ein **vollständiges Fundamentalsystem** für das Dgl.–System $(*)_h$ bilden, d.h. n linear unabhängige Lösungen von $(*)_h$ sind.

38.7 Eine reguläre Matrix, deren Spalten ein vollständiges Fundamentalsystem für das Dgl.–System $(*)_h$ bilden, nennt man eine **Fundamentalmatrix** dieses Dgl.–Systems:

38.8

Die Matrix e^{At} ist eine ***Fundamentalmatrix*** des Dgl.–Systems $(*)_h$ $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}$.

So elegant und einfach dieser Satz auch zu erhalten und formulieren ist: man muss die Matrix e^{At} natürlich erst einmal haben, wenn man diesen Satz anwenden will!

Wenn A diagonalisierbar (und e^{At} noch nicht bekannt) ist, ist der in Nummer 38.5 beschriebene Lösungsweg sicher der bequemste. Daher wird man — wenn es nur darum geht, das homogene Dgl.–System $(*)_h$ zu lösen — die Matrix e^{At} in der Regel nur für eine *nicht–diagonalisierbare*, insbesondere *nicht–normale*

Matrix A zu bestimmen haben. Da uns in diesem Fall keine Spektraldarstellung von A zur Verfügung steht, können wir e^{At} in der Regel nur mit Hilfe eines **Ansatzes**, in günstigen Fällen — wenn für die Potenzen A^n ein einfaches Bildungsgesetz zu erkennen ist — über die **Exponentialreihe** erhalten.

z.B.: 2. $(*)_h : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -3x + y + 4z \\ \dot{y} &=& -3y + 2z \\ \dot{z} &=& -3z \end{array} \right\}$ für $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

(Der Praktiker würde hier zunächst die dritte dieser Gleichungen lösen und durch Einsetzen von $z(t)$ in die beiden ersten Gleichungen das gegebene homogene Dgl.–System auf ein inhomogenes $(2,2)$–System zurückführen.)

Wir machen für die Matrix e^{At} den **Ansatz:** $\boxed{e^{At} = a_0(t) \cdot I + a_1(t) \cdot A + a_2(t) \cdot A^2}$ mit "geeigneten" Funktionen $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$.

Da die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -22 \\ 0 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ als einzigen EW den dreifachen EW $\lambda_0 = -3$ hat (Nr. 35.22), bekommt man mit Hilfe von $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ($\Rightarrow$ $f'(x) = a_1 + 2a_2 x$, $f''(x) = 2a_2$) die **Bestimmungsgleichungen:**

$$\left. \begin{array}{lll} [1] & f(\lambda_0) = e^{\lambda_0 t} & \text{, d.h. } a_0 - 3a_1 + 9a_2 = e^{-3t} \\ [2] & f'(\lambda_0) = t\, e^{\lambda_0 t} & \text{, d.h. } a_1 - 6a_2 = t\, e^{-3t} \\ [3] & f''(\lambda_0) = t^2 e^{\lambda_0 t} & \text{, d.h. } 2a_2 = t^2 e^{-3t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_2(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-3t} \\ a_1(t) = (t + 3t^2) e^{-3t} \\ a_0(t) = \left(1 + 3t + \frac{9}{2} t^2\right) e^{-3t} \end{array} \right.$$

Einsetzen dieser Funktionen in den Ansatz liefert die Matrix $e^{At} =$

$$= e^{-3t} \left[\left(1 + 3t + \tfrac{9}{2} t^2\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(t + 3t^2\right) \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} 9 & -6 & -22 \\ 0 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \right] =$$

$= e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & t & 4t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit hat das Dgl.–System $(*)_h$ die **allgemeine Lösung:**

$$\vec{r}_0\,(t) = e^{At} \vec{c} = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & t & 4t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + 4c_3 t + c_3 t^2 \\ c_2 + 2c_3 t \\ c_3 \end{pmatrix},$$

bzw., mit $c_3 = \alpha$, $c_2 = \beta - 4\alpha$, $c_1 = \gamma$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) &=& (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\, e^{-3t} \\ y(t) &=& \left(2\alpha t + (\beta - 4\alpha)\right) e^{-3t} \\ z(t) &=& \alpha\, e^{-3t} \end{array} \right\}, \ \alpha, \beta, \gamma \text{ beliebig konstant.}$$

3. $(*)_h : \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 + 8y_2 - 4y_3 \\ y_2' &=& y_1 + 3y_2 - 2y_3 \\ y_3' &=& 3y_1 + 12y_2 - 7y_3 \end{array} \right\}$ für y_1, $y_2(x)$, $y_3(x)$.

Für die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 12 & -7 \end{pmatrix}$ hat man: $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -16 & 8 \\ -2 & -7 & 4 \\ -6 & -24 & 13 \end{pmatrix} = -2A - I$, somit:

$A^3 = -2A^2 - A = 4A + 2I - A = 3A + 2I$,
$A^4 = 3A^2 + 2A = -6A - 3I + 2A = -4A - 3I$, usw.: $(+)$ $\boxed{A^n = (-1)^{n-1}\Big(nA + (n-1)\,I\Big)}$:

das ist zunächst nur eine *Vermutung*, die für $n = 1, 2, 3, 4$ stimmt; sie wird *bewiesen* durch den **Induktions–Schluß**:

$$A^{n+1} \overset{(+)}{=} (-1)^{n-1}\Big(nA^2 + (n-1)\,A\Big) = (-1)^{n-1}\Big(-2nA - nI + (n-1)\,A\Big) =$$
$$= (-1)^n\Big((n+1)\,A + nI\Big)$$, in Übereinstimmung mit $(+)$. Damit bekommt man:

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,A^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,(-1)^{n-1}\Big(nA + (n-1)\,I\Big) = \\ &= I + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^n}{n!}\right)A + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^n}{n!}\right)I + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n}{n!}\right)I = \\ &= x\,e^{-x}\,A + x\,e^{-x}\,I + e^{-x}\,I = e^{-x}\Big(I + x(A+I)\Big) = \\ &= e^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x & 8x & -4x \\ x & 1+4x & -2x \\ 3x & 12x & 1-6x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

. Wir erhalten die **allgemeine Lösung** von $(*)_h$:

$$\vec{r}\,(x) = e^{Ax}\vec{c} = e^{-x}\begin{pmatrix} c_1\,(1+2x) + 8c_2\,x - 4c_3\,c \\ c_1\,x + c_2\,(1+4x) - 2c_3\,x \\ 3c_1\,x + 12c_2\,x + c_3\,(1-6x) \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} [2c_1 + 8c_2 - 4c_3]\,x + c_1 \\ [c_1 + 4c_2 - 2c_3]\,x + c_2 \\ [3c_1 + 12c_2 - 6c_3]\,x + c_3 \end{pmatrix},$$

bzw., mit $c_3 = \gamma$, $c_2 = -\beta$, $c_1 = \alpha + 4\beta + 2\gamma$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1(x) &=& (2\alpha x + \alpha + 4\beta + 2\gamma)\,e^{-x} \\ y_2(x) &=& (\alpha x - \beta)\,e^{-x} \\ y_3(x) &=& (3\alpha x + \gamma)\,e^{-x} \end{array}\right\}, \quad \alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma \text{ beliebig konstant.}$$

Beachte, dass die in Nr. 38.5 beschriebene Lösungsmethode bei diesen beiden Dgl.–Systemen *nicht anwendbar* ist, da in beiden Fällen die Koeffizientenmatrix A *nicht diagonalisierbar* ist!

38.E Exponentialansätze für homog. lin. Dgl.–Systeme 1.Ordnung.

Die hier beschriebene Lösungsmethode entspricht dem Exponentialansatz zum Lösen einer homogenen linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten (s. Nr. 16.13) und wird im Wesentlichen gerechtfertigt durch die Überlegungen in Abschnitt 38.B: ausgehend von den *verschiedenen* Eigenwerten λ_j der Koeffizientenmatrix A bestimmt man den zu *jedem einzelnen* dieser Eigenwerte gehörenden, allgemeinen Lösungsanteil $\vec{r}_j\,(x)$, der gemäß Nr. 38.2 und 3 die Form $(+)$ $\boxed{\vec{r}_j\,(x) = e^{\lambda_j\,x}\vec{R}\,(x)}$ hat, wobei $\vec{R}\,(x)$ ein gewisses vektorielles Polynom ist, welches durch den Exponential–***Ansatz*** $(+)$ zu ermitteln ist. Es ist sinnvoll, zunächst mit einem einfachen Sonderfall zu beginnen:

38.9

Der **Exponentialansatz** :

$(+)_0$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,(x) = e^{\lambda x}\vec{c}, \quad \lambda,\, \vec{c} \text{ “geeignet” konstant}}}$

führt durch Einsetzen in das homogene Dgl.–System $(*)_h$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}}$

auf das **Eigenwertproblem** $\boxed{\boxed{A\vec{c} = \lambda\,\vec{c}}}$:

genau dann ist also $\vec{r}\,(x) = e^{\lambda x}\vec{c}$ eine **Lösung** des Dgl.–Systems $(*)_h$,
wenn ($\vec{c} = \vec{o}$ oder) $\vec{c}$ ein **Eigenvektor zum Eigenwert** λ **von** A ist.

Denn aus: $\vec{r} = e^{\lambda x}\vec{c}$ folgt: $\vec{r}\,' = \lambda\, e^{\lambda x}\vec{c} \overset{!}{=} A\vec{r} = e^{\lambda x}\, A\vec{c}$, also: $A\vec{c} = \lambda\vec{c}$. ∎

Hiermit haben wir sofort:

38.10

Wenn es zum **k–fachen** (reellen oder nicht–reellen) **Eigenwert** λ_j von A
k linear–unabhängige Eigenvektoren $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k$ gibt, dann ist

$\boxed{\vec{r}_j\,(x) = e^{\lambda_j x}\left(\gamma_1\vec{c}_1 + \cdots + \gamma_k\vec{c}_k\right) \;, \quad \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{C} \text{ bel. konst.}}$

der zugehörige **allgemeine Lösungsanteil** des Dgl.–Systems $(*)_h$.

38.11

Wenn die Koeffizientenmatrix A *diagonalisierbar* ist, also zu jedem k–fachen EW auch k linear unabhängige EV besitzt, haben wir genau wieder die Situation von Nr. 38.5: man kann in diesem Fall auf den Exponentialansatz verzichten und so vorgehen, wie das in Nr. 38.5 beschrieben ist!

38.12

Da, wie wir unten in Nr. 38.14 sehen werden, auch weiterführende Exponentialansätze stets *auch* auf das Eigenwertproblem $\boxed{A\vec{c} = \lambda\vec{c}}$ führen, sollte man also **immer zunächst mit der Bestimmung aller Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A beginnen** — wer weiß, was er tut, kann hierbei auch auf den formalen Ansatz $(+)$ und Einsetzen in das System $(*)_h$ verzichten! In gutartigen Fällen hat man damit, wie oben (und in Nr. 38.5) beschrieben, bereits alle Lösungen oder zumindest Lösungsanteile.

38.13

Nur wenn die Koeffizientenmatrix A *nicht* diagonalisierbar ist, wenn also A mindestens einen mehrfachen EW hat, zu dem es *nicht entsprechend viele* linear unabhängige EV gibt, *und nur zu solchen* Eigenwerten, wird ein allgemeinerer Exponentialansatz benötigt:

38.14

Wenn λ_0 ein k–facher EW von A ist ($k > 1\,!$), zu dem es *keine* k linear unabhängige Eigenvektoren gibt, kann man den zu *diesem* EW gehörenden, allgemeinen Lösungsanteil des homogenen linearen Dgl.–Systems $(*)_h$: $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}$ mit Hilfe des **allgemeinen Exponentialansatzes:**

$$(+)_k \quad \boxed{\vec{r}\,(x) = e^{\lambda_0 x}\left(\vec{c}_{k-1} + \frac{x}{1!}\,\vec{c}_{k-2} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\vec{c}_0\right)}$$

erhalten:

für die "geeignet" zu bestimmenden, konstanten Vektoren $\vec{c}_0, \ldots, \vec{c}_{k-1}$ bekommt man durch Einsetzen von $(+)_k$ in das Dgl.–System $(*)_h$ die folgenden **Bestimmungsgleichungen**, die nacheinander zu lösen sind:

$$\begin{array}{ll} [1] & (A - \lambda_0 I)\,\vec{c}_0 = \vec{o}\,, \\ [2] & (A - \lambda_0 I)\,\vec{c}_1 = \vec{c}_0\,, \\ & \vdots \\ [k] & (A - \lambda_0 I)\,\vec{c}_{k-1} = \vec{c}_{k-2}\,. \end{array}$$

(d.h. $\vec{c}_0$ ist ein EV zum EW λ_0)

Beachte die nachfolgende Bemerkung!

Bemerkung zu den Gleichungen [1] bis [k]:

[i] **Diese Gleichungen sind *nicht notwendig* für jede rechte Seite lösbar!**

Gleichung [1] liefert alle Eigenvektoren zum EW λ_0.

Wenn es *mehrere* linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{c}_{0,1}, \ldots, \vec{c}_{0,\rho}$ gibt, ist Gleichung [2] nicht notwendig für jeden dieser EV lösbar! Man muss daher in Gleichung [2] die rechte Seite $\vec{c}_0$ zunächst in der Form $\vec{c}_0 = \gamma_1\vec{c}_{0,1} + \cdots + \gamma_\rho\vec{c}_{0,\rho}$ ansetzen und die unbestimmten Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_\rho$ so ermitteln, dass Gleichung [2] hiermit lösbar wird.

Ebenso ist dann Gleichung [3]: $(A - \lambda_0 I)\,\vec{c}_2 = \vec{c}_1$ nicht notwendig mit jeder sich ergebenden Lösung von [2] lösbar, sondern i.a. nur mit einer geigneten Linearkombination $\vec{c}_1 = \vec{c}_{1,0} + \bar{\gamma}_1\vec{c}_{0,1} + \cdots + \bar{\gamma}_\rho\vec{c}_{0,\rho}$, wobei $\vec{c}_{1,0}$ eine Partikulärlösung von [2] ist und $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_\rho$ wieder "gewisse" zu findende Konstanten sind, mit denen [3] lösbar wird. usw..

[ii] **Zum k–fachen EW λ_0 werden nur k linear unabhängige Lösungen von $((*))_h$ benötigt!**

Wenn also die ersten j der Gleichungen [1] bis [k] schon mehr als j linear unabängige Lösungen geliefert haben, muss man diese Gleichungen nicht mehr bis zum Ende lösen, sondern kann entsprechend vorher aufhören!

Dass die zum k–fachen EW λ_0 gehörenden Lösungen die Form $(+)_k$ haben, wurde in Abschnitt 38.B festgestellt. Daher *muss* der **Lösungs–Ansatz** $(+)_k$ diese Lösungen auch liefern; und es ist nicht schwer, einzusehen, dass dieser Ansatz auf die Gleichungen [1] bis [k] führt:

$$\vec r = e^{\lambda_0 x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!}\,\vec c_{k-1-j} \;\Rightarrow\; \vec r\,' = \lambda_0\, e^{\lambda_0 x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!}\,\vec c_{k-1-j} + e^{\lambda_0 x}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\,\vec c_{k-1-j} \;\Rightarrow$$

$$A\vec r = e^{\lambda_0 x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!}\,A\vec c_{k-1-j} \;\overset{!}{=}\; \vec r\,' = \lambda_0\, e^{\lambda_0 x}\left(\lambda_0\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!}\,\vec c_{k-1-j} + \sum_{j=0}^{k-2}\frac{x^j}{j!}\,\vec c_{k-2-j}\right),\ \text{d.h.}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!}\,A\vec c_{k-1-j} \;\overset{!}{=}\; \sum_{j=0}^{k-2}\frac{x^j}{j!}\left(\lambda_0\vec c_{k-j} + \vec c_{k-2-j}\right) + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\lambda_0\vec c_0 \;\Rightarrow\; \text{(Koeffizientenvergleich)}$$

für $j = k-1$: $A\vec c_0 = \lambda_0\,\vec c_0$, bzw. $\boxed{(A-\lambda_0 I)\,\vec c_0 = \vec o}$, und, für $j = k-2,\ \dots,\ 0$:

$A\vec c_{k-1-j} = \lambda_0\,\vec c_{k-1-j} + \vec c_{k-2-j}$, bzw. $\boxed{(A-\lambda_0 I)\,\vec c_{k-1-j} = \vec c_{k-2-j}}$.

Mit $j = k-2$ bis $j = 0$ sind das genau die Gleichungen [1] bis [k]. ∎

z.B.: 4. $\left\{\begin{array}{rcl} \dot x &=& -3x + y + 4z \\ \dot y &=& -3y + 2z \\ \dot z &=& -3z \end{array}\right\}$ für $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (s.o. das 2.Beispiel in 38.D).

Die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ hat als *einzigen* den dreifachen EW $\lambda_0 = -3$ und gemäß Nr. 38.14 haben wir die folgenden drei Gleichungen zu lösen:

$$\left.\begin{array}{lrcl} [1] & (A+3I)\,\vec c_0 &=& \vec o \\ [2] & (A+3I)\,\vec c_1 &=& \vec c_0 \\ [3] & (A+3I)\,\vec c_2 &=& \vec c_1 \end{array}\right\}$$

wir erledigen das nacheinander:
"stur" durch Gauß–Elimination (mit Spaltenvertauschung):

				[1]	[2]	[3]
	x	y	z	$\vec o$	$\vec c_0$	$\vec c_1$
	0	1	4	0	α	β
	0	0	2	0	0	α
	0	0	0	0	0	0
	y	z	x	Spaltenvertauschung!		
[1] − 2 [2]	1	4	0	0	α	β
$\frac{1}{2}$ [2]	0	2	0	0	0	α
	1	0	⋮ 0	0	α	$\beta - 2\alpha$
	0	1	⋮ 0	0	0	$\frac{1}{2}\alpha$
			⋮ − 1	0	0	0
	y			0	α	$\beta - 2\alpha$
Lösung:	z			0	0	$\frac{1}{2}\alpha$
	x			α	β	γ
				$\vec c_0$	$\vec c_1$	$\vec c_2$

Mit beliebigen Konstanten α, β, γ
(und mit α statt $\alpha/2$) haben wir erhalten:

$$\vec c_0 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec c_1 = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\vec c_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta - 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Aufgrund von Nr. 38.14 ergibt das die **allgemeine Lösung**:

$$\vec{r}\,(t) = e^{-3t}\left[\begin{pmatrix}\gamma\\ \beta-4\alpha\\ \alpha\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\beta\\ 2\alpha\\ 0\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right] = e^{-3t}\begin{pmatrix}\alpha t^2+\beta t+\gamma\\ 2\alpha t+(\beta-4\alpha)\\ \alpha\end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& \left(\alpha t^2+\beta t+\gamma\right) e^{-3t}\\ y(t) &=& \left(2\alpha t+(\beta-4\alpha)\right) e^{-3t}\\ z(t) &=& \alpha\, e^{-3t}\,. \end{array}\right\} \quad (\alpha,\beta,\gamma \text{ beliebig konstant})$$

5. $(*)_h$: $\left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1+8y_2-4y_3\\ y_2' &=& y_1+3y_2-2y_3\\ y_3' &=& 3y_1+12y_2-7y_3 \end{array}\right\}$ für $y_1(x)\,,\,y_2(x)\,,\,y_3(x)$ (s.o. das 3.Beispiel in 38.D).

Die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix}1&8&-4\\1&3&-2\\3&12&-7\end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda&8&-4\\1&3-\lambda&-2\\3&12&-7-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-7-\lambda)-96+12(3-\lambda)+8(7+\lambda)+24(1-\lambda) =$$

$= -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1 = -(\lambda+1)^3$, d.h. A hat den dreifachen Eigenwert $\lambda=-1$.

Wegen $A \neq -I$ kann es zu diesem EW keine *drei* linear unabhängigen Eigenvektoren geben: wir müssen also einen **verallgemeinerten Exponentialansatz** machen.

Zunächst bestimmen wir die Eigenvektoren (mit Hilfe der Gauß–Elimination):

$$\left.\begin{array}{rrr|rcrr} 2&8&-4&1&\vdots&4&-2\\ \cline{4-7} 1&4&-2&&\vdots&-1&0\\ 3&12&-6&&\vdots&0&-1 \end{array}\right\} \quad \text{z.B. } \vec{c}_{01} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix},\ \vec{c}_{02} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix};$$

A hat also genau die Eigenvektoren $\vec{c}_0 = \gamma_1\,\vec{c}_{01} + \gamma_2\,\vec{c}_{02} = \begin{pmatrix}4\gamma_1+2\gamma_2\\ -\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$, $\gamma_1\,,\,\gamma_2$ konstant.

Da wir bereits *zwei* linear unabhängige Eigenvektoren und damit *zwei* inear unabhängige Lösungen von $(*)_h$ haben — s.o. Nr.38.10 —, wird nur noch der Exponentialansatz:

(+) $\boxed{\boxed{\vec{r}(x) = e^{-x}\left(\vec{c}_1 + x\,\vec{c}_0\right)}}$ mit "geeignet" konstanten Vektoren $\vec{c}_0\,,\,\vec{c}_1$ benötigt.

Dieser Ansatz führt durch Einsetzen in das Dgl.–System auf die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lrcl} [1] & (A+I)\,\vec{c}_0 &=& \vec{o}\,,\\ [2] & (A+I)\,\vec{c}_1 &=& \vec{c}_0\,, \end{array}\right\} \quad \text{von denen wir die erste bereits gelöst haben.}$$

Wir wissen noch nicht, für welche Lösungen $\vec{c}_0$ von [1] die Gleichung [2] lösbar ist — es wird sich zeigen, dass [2] für *keinen* der beiden Vektoren $\vec{c}_{01}\,,\,\vec{c}_{02}$ lösbar ist! —; daher setzen wir in [2] den Vektor $\vec{c}_0$ in der oben angegebenen, allgemeinen Form an und bekommen (wieder mit Gauß–Elimination):

$$
\left.\begin{array}{ccc|c||c||ccc|c}
2 & 8 & -4 & 4\gamma_1 + 2\gamma_2 & \frac{1}{2}\,\underline{[1]} & 1 & 4 & -2 & 2\gamma_1 + \gamma_2 \\
1 & 4 & -2 & -\gamma_1 & \underline{[2]} - \frac{1}{2}[1] & 0 & 0 & 0 & -3\gamma_1 - \gamma_2 \\
3 & 12 & -6 & \gamma_2 & \underline{[3]} - \frac{3}{2}[1] & 0 & 0 & 0 & -2\gamma_2 - 6\gamma_1
\end{array}\right\}
$$

dieses System ist nur lösbar mit $\left\{\begin{array}{l} 3\gamma_1 + \gamma_2 = 0\,, \\ 2\gamma_2 + 6\gamma_1 = 0\,, \end{array}\right.$

d.h. $\gamma_1 = -\alpha\,,\ \gamma_2 = 3\alpha$, also mit $\vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$, α beliebig; es folgt:
$$
\left.\begin{array}{cccc|c}
1 & \vdots & 4 & -2 & \alpha \\
\hline
 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\
 & \vdots & 0 & -1 & 0
\end{array}\right\} :
$$

Das lineare Gleichungssystem [2] liefert also die Vektoren $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

($\beta\,,\ \gamma$ beliebig konstant), und aufgrund des Ansatzes (+) erhalten wir die folgende **allgemeine Lösung** des gegebenen Dgl.–Systems:

$$
\boxed{\vec{r}\,(x) = e^{-x}\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\,x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]}\,, \quad \text{d.h.}
$$

$$
\left\{\begin{array}{lcl}
y_1(x) & = & \big(2\alpha\,x + \alpha + 4\beta + 2\gamma\big)\,e^{-x} \\
y_2(x) & = & \big(\alpha\,x - \beta\big)\,e^{-x} \\
y_3(x) & = & \big(3\alpha\,x + \gamma\big)\,e^{-x}
\end{array}\right\} \quad \alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma \ \ \text{beliebig konstant.}
$$

38.F Exponentialansätze für homog. lin. Dgl.–Systeme 2.Ordnung.

Zu den gebräuchlichsten Hilfsmitteln des Praktikers, der eine Gleichung oder ein Gleichungssystem lösen möchte, gehört ein **passender Lösungsansatz** . Solch ein Ansatz kann zwar nie falsch sein, wohl aber ungeeignet: es zeichnet den erfahrenen Praktiker aus, jeweils einen geeigneten Ansatz zu finden, der den Anforderungen genügt (denn es gibt in der Regel keine Regel, die regelt, welche Regel gerade etwas nützt!) .

Die drei folgenden Lösungsansätze für drei — sehr spezielle und einfache — Typen homogener linearer Dgl.–Systeme 2.Ordnung sollen Ihre Phantasie anregen und Ihnen Mut machen, in ähnlichen Fällen — auch bei Systemem höherer als zweiter Ordnung — einen "passenden" Lösungsansatz zu versuchen.

38.15

Jedes homogene lineare Dgl.–System 2. Ordnung $(*)_h$: $\boxed{\ddot{\vec{r}} = A\,\vec{r}}$ für $\vec{r}\,(t)$

kann, zumindest teilweise, mit dem **Exponentialansatz** : $(+)_0$: $\boxed{\vec{r}\,(t) = e^{\mu\,t}\,\vec{c}}$

(μ, $\vec{c}$ "geeignet" konstant) gelöst werden: Einsetzen in das Dgl.–System $(*)_h$ führt auf das **Eigenwertproblem** : $\boxed{A\,\vec{c} = \mu^2\,\vec{c}}$.

38.16

Wenn die Koeffizientenmatrix A des homogenen linearen Dgl.–Systems $(*)_h$: $\boxed{\ddot{\vec{r}} = A\,\vec{r}}$ *nicht* diagonalisierbar ist, also mindestens einen k–fachen Eigenwert λ_0 besitzt, $k > 1$, zu dem es *keine* k linear unabhängigen Eigenvektoren gibt, dann liefert der **verallgemeinerte Exponentialansatz**

$$(+)_k : \boxed{\vec{r}\,(t) = e^{\mu\,t}\left(\vec{c}_{k-1} + \frac{t}{1!}\,\vec{c}_{k-1} + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,\vec{c}_0\right)} \quad (\mu = \pm\sqrt{\lambda_0}\,),$$

$\vec{c}_0, \ldots, \vec{c}_{k-1}$ "geeignet" konstant, zu jedem solchen EW $\lambda_0 = \mu^2$ ausreichend viele linear unabhängige Lösungen des Dgl.–Systems $(*)_h$:
Einsetzen in das System $(*)_h$ und Koeffizientenvergleich führt auf die nacheinander zu lösenden k Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{l|rcl|}
[1] & (A-\mu^2 I)\,\vec{c}_0 & = & \vec{o}, \\
[2] & (A-\mu^2 I)\,\vec{c}_1 & = & 2\mu\,\vec{c}_0\,, \\
[3] & (A-\mu^2 I)\,\vec{c}_2 & = & 2\mu\,\vec{c}_1 + \vec{c}_0\,, \\
\vdots & & \vdots & \\
[k] & (A-\mu^2 I)\,\vec{c}_{k-1} & = & 2\mu\,\vec{c}_{k-2} + \vec{c}_{k-3}\,.
\end{array}$$

Die erste dieser Gleichungen besagt, dass $\vec{c}_0$ ein EV zum EW $\lambda_0 = \mu^2$ ist.

(Vgl. Nr. 38.14 und beachte die dort anschließende Bemerkung!)

38.17

Auch das homogene lineare Dgl.–System $(*)_h$: $\boxed{\ddot{\vec{r}} = A\,\dot{\vec{r}} + B\,\vec{r}}$

kann — zumindest teilweise — wieder mit einem **Exponentialansatz**

$(+)_0$ $\boxed{\vec{r}\,(t) = e^{\lambda\,t}\,\vec{c}}$, $\lambda, \vec{c}$ "geeignet" konstant, gelöst werden:

Wenn man $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{r}}$ in das System $(*)_h$ einsetzt und kürzt, bekommt man für $\lambda, \vec{c}$ die Bestimmungsgleichung (+) $\boxed{\left(B + \lambda A - \lambda^2 I\right)\vec{c} = \vec{o}}$;

diese Gleichung besitzt genau dann Lösungen $\vec{c} \neq \vec{o}$, wenn

$\boxed{q(\lambda) := \det\left(B + \lambda A - \lambda^2 I\right) = 0}$ ist.

z.B.: 6.: (zu 38.15) $(*)_h : \left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & x+y \\ \ddot{y} & = & 9x+y \end{array} \right\}$, d.h. $(*)_h : \boxed{\boxed{\ddot{\vec{r}} = A\vec{r}}}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Der **Exponentialansatz**: $(+)_0 : \boxed{\boxed{\vec{r}\,(t) \ = e^{\mu\, t}\, \vec{c}}}$ $(\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \mu^2\, e^{\mu\, t}\, \vec{c}\,)$, μ, $\vec{c}$ "geeignet" konstant, führt nach Einsetzen in $(*)_h$ und Kürzen auf das Eigenwertproblem: $\boxed{\boxed{A\,\vec{c} = \mu^2\,\vec{c}}}$.

Wegen: $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9$ hat A die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3$, d.h. $\lambda_1 = \mu_{1,2}^2 = 4$ $(\Rightarrow \mu_{1,2} = \pm 2)$, $\lambda_2 = \mu_{3,4}^2 = -2$ $(\Rightarrow \mu_{3,4} = \pm i\,\sqrt{2})$.

Die zugehörigen Eigenvektoren bekommen wir z.B. mit Gauß–Elimination:

zu $\lambda_1 = 4$: $\left\{ \begin{array}{rr|rcr} -3 & 1 & 1 & \vdots & -1/3 \\ \hline 9 & -3 & & \vdots & -1 \end{array} \right\}$ z.B. $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

zu $\lambda_2 = -2$: $\left\{ \begin{array}{rr|rcr} 3 & 1 & 1 & \vdots & 1/3 \\ \hline 9 & 3 & & \vdots & -1 \end{array} \right\}$ z.B. $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Damit erhalten wir die **allgemeine Lösung** von $(*)_h$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{r}\,(t) \ = \left(\gamma_1\, e^{2t} \ + \gamma_2\, e^{-2t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\gamma_3\, e^{i\sqrt{2}\,t} \ + \gamma_4\, e^{-i\sqrt{2}\,t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$ $(\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ bel.konst.).

7. (zu 38.16) $(*)_h : \left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & 4x-y \\ \ddot{y} & = & x+2y \end{array} \right\}$, d.h. $(*)_h : \boxed{\boxed{\ddot{\vec{r}} = A\vec{r}}}$ mit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zunächst werden die Eigenwerte von A bestimmt:

$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2) \ + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$. A hat also nur den *einen*, dafür *zweifachen* Eigenwert $\boxed{\lambda_0 = \mu^2 = 3}$ $(\Rightarrow \mu = \pm\sqrt{3})$.

Da $A \neq 3I$ ist, kann A *keine zwei* linear unabhängigen Eigenvektoren haben: Gauß–Elimination liefert:

$\left. \begin{array}{rr|rcr} 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & -1 & & \vdots & -1 \end{array} \right\}$: A hat somit die Eigenvektoren $\vec{c}_0 = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \end{pmatrix}$, $\rho \neq 0$ bel. konst..

Der **verallgemeinerte Exponentialansatz** $((+))$: $\boxed{\boxed{\vec{r}\,(t) \ = e^{3t}\,(\vec{c}_1 \ + t\,\vec{c}_0\,)}}$, $\vec{c}_0$, $\vec{c}_1$ "geeignet" konstant, führt auf die beiden Gleichungen, von denen wir mit $\vec{c}_0 = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \end{pmatrix}$ die erste bereits gelöst haben:

[1]	$(A-3I)\,\vec{c}_0 \ = \vec{o}\,,$
[2]	$(A-3I)\,\vec{c}_1 \ = \pm 2\sqrt{3}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \end{pmatrix}$;

die zweite Gleichung ergibt mit Gauß–Elimination:

$$\left.\begin{array}{cc|c||c}1 & -1 & \pm 2\sqrt{3}\,\rho & 1 \;\vdots\; -1 \;\Big|\; \pm 2\sqrt{3}\,\rho \\ \hline 1 & -1 & \pm 2\sqrt{3}\,\rho & \;\vdots\; -1 \;\Big|\; 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ (mit bel. Konstanten } \alpha_j,\ \beta_j\text{):}$$

zu $\mu_1 = +\sqrt{3}$ (mit $\rho = \alpha_1$): $\vec{c}_{0,1} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_{1,1} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

zu $\mu_2 = -\sqrt{3}$ (mit $\rho = \alpha_2$): $\vec{c}_{0,2} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_{1,2} = \begin{pmatrix} -2\alpha_1\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hiermit erhalten wir die **allgemeine Lösung**:

$\vec{r}\,(t) \;= e^{\sqrt{3}\,t}\left(\vec{c}_{1,1} + t\vec{c}_{0,1}\right) + e^{-\sqrt{3}\,t}\left(\vec{c}_{1,2} + t\vec{c}_{0,2}\right)$, d.h.:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) &=& \left(\beta_1 + 2\sqrt{3}\,\alpha_1 + \alpha_1\,t\right)e^{\sqrt{3}\,t} + \left(\beta_2 - 2\sqrt{3}\,\alpha_2 + \alpha_2\,t\right)e^{-\sqrt{3}\,t} \\ y(t) &=& \left(\beta_1 + \alpha_1\,t\right)e^{\sqrt{3}\,t} + \left(\beta_2 + \alpha_2\,t\right)e^{-\sqrt{3}\,t}\end{array}} \quad (\alpha_{1,2}\,,\ \beta_{1,2}\ \text{bel.konst.})$$

Im Fall zweier n,n–Matrizen A, B hat das Dgl.–System $(*)_h$ $2n$ linear unabhängige Lösungen: wenn man mit Hilfe des Exponentialansatzes $(+)_0$ *weniger* Lösungen bekommt, muß man wieder einen allgemeineren Ansatz machen — z.B. den Ansatz $(+)_k$ aus Nr. 38.16, falls λ eine k–fache Nullstelle des Polynoms $q(\lambda)$ ist.

8. (zu 38.17) $(*)_h: \left\{\begin{array}{rcl} \ddot{x} &=& \dot{x} + 2\dot{y} + 2x - y \\ \ddot{y} &=& 2\dot{x} + \dot{y} - x + 2y \end{array}\right\}$, d.h.

$(*)_h$: $\boxed{\ddot{\vec{r}} = A\dot{\vec{r}} + B\vec{r}}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Mit dem **Ansatz** $(+)_0$: $\boxed{\vec{r} = e^{\lambda t}\,\vec{c}}$

und $\dot{\vec{r}} = \lambda e^{\lambda t}\,\vec{c}$, $\ddot{\vec{r}} = \lambda^2 e^{\lambda t}\,\vec{c}$ ergibt sich durch Einsetzen: $\lambda^2 e^{\lambda t}\,\vec{c} \stackrel{!}{=} \lambda e^{\lambda t}A\,\vec{c} + e^{\lambda t}B\,\vec{c}$,

also $(B + \lambda A - \lambda^2 I)\,\vec{c} = \vec{o}$, d.h. (+): $\boxed{\begin{pmatrix} 2-\lambda-\lambda^2 & -1-2\lambda \\ -1-2\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\vec{c} = \vec{o}}$. Dieses LGS ist

genau dann lösbar, wenn $q(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda-\lambda^2 & -1-2\lambda \\ -1-2\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = (2-\lambda-\lambda^2)^2 - (-1-2\lambda)^2 = 0$, d.h.

für $\lambda^2 + \lambda - 2 = \pm(2\lambda + 1)$:

(i) $\lambda^2 + \lambda - 2 = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{13}\right)$ und

(+) ergibt mit Gauß–Elimination: $\left.\begin{array}{cc|c} -1-2\lambda & -1-2\lambda & 1 \;\vdots\; 1 \\ \hline -1-2\lambda & -1-2\lambda & \;\vdots\; -1 \end{array}\right\}$, z.B. $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\lambda^2 + \lambda - 2 = -(2\lambda + 1) \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{3,4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{13}\right)$ und

(+) ergibt mit Gauß–Elimination: $\left.\begin{array}{cc|c} 1+2\lambda & -1-2\lambda & 1 \;\vdots\; -1 \\ \hline -1-2\lambda & 1+2\lambda & \;\vdots\; -1 \end{array}\right\}$, z.B. $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten die **allgemeine Lösung** des Dgl.–Systems $(*)_h$:

$$\vec{r}\,(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(\alpha_1\, e^{\frac{t}{2}\sqrt{13}} + \alpha_2\, e^{-\frac{t}{2}\sqrt{13}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-\frac{3t}{2}} \left(\beta_1\, e^{\frac{t}{2}\sqrt{13}} + \beta_2\, e^{-\frac{t}{2}\sqrt{13}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{\frac{t}{2}} \left(\alpha_1\, e^{\frac{t}{2}\sqrt{13}} + \alpha_2\, e^{-\frac{t}{2}\sqrt{13}}\right) + e^{-\frac{3t}{2}} \left(\beta_1\, e^{\frac{t}{2}\sqrt{13}} + \beta_2\, e^{-\frac{t}{2}\sqrt{13}}\right), \\ y(t) &= -e^{\frac{t}{2}} \left(\alpha_1\, e^{\frac{t}{2}\sqrt{13}} + \alpha_2\, e^{-\frac{t}{2}\sqrt{13}}\right) + e^{-\frac{3t}{2}} \left(\beta_1\, e^{\frac{t}{2}\sqrt{13}} + \beta_2\, e^{-\frac{t}{2}\sqrt{13}}\right). \end{aligned}} \quad (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \beta_1,\, \beta_2 \text{ bel.konst.})$$

38.G   Umwandlung in Systeme 1.Ordnung.

> Genauso, wie sich eine lineare Dgl. der Ordnung n in ein n,n–System linearer Dgln. der Ordnung 1 umwandeln läßt (s.u. Abschnitt 39.B), kann man auch ein n,n–System linearer Dgl. der Ordnung $k > 1$ in ein kn,kn–System linearer Dgln. der Ordnung 1 umschreiben.

Wenn man also alle **linearen Dgl.–Systeme der Ordnung** 1 beherrscht, dann beherrscht man **alle linearen Differentialgleichungen** und **linearen Dgl.–Systeme beliebiger Ordnung.**

Ein einfaches **Beispiel** genügt, um das Verfahren zu verdeutlichen: (s.o. das 6.Beisp. in 38.F)

Um das Dgl.–System $(*)_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{x} &=& x+y \\ \ddot{y} &=& 9x+y \end{array} \right\}$ der Ordnung 2 für $x(t),\, y(t)$ in ein Dgl.–System der Ordnung 1 umzuwandeln, setzt man:

$\boxed{x_1 := x\,,\ x_2 := \dot{x}\,,\ x_3 := y\,,\ x_4 := \dot{y}}$; dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = x + y = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= \dot{y} = x_4 \\ \dot{x}_4 &= \ddot{y} = 9x + y = 9x_1 + x_3 \end{aligned}\right\}. \text{ Mit } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

erhalten wir das gleichwertige Dgl.–System: $(*)_2 : \boxed{\boxed{\dot{\vec{r}} = A_2 \vec{r}}}$. Um dieses System zu lösen,

bestimmen wir zunächst die Eigenwerte und jeweils zugehörige Eigenvektoren von A_2 :

$$p_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 9 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 9 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left(-\lambda^3 + \lambda\right) - \left(\lambda^2 + 9 - 1\right) = \lambda^4 - 2\lambda^2 - 8 \overset{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2 = 1 \pm 3\,, \text{ also:}$$

$\lambda_{1,2} = \pm 2\,,\ \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$. Zugehörige Eigenvektoren bekommen wir z.B. mit Gauß–Elimination:

zu $\lambda_1 = 2$:

$$\left.\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrcr}
-2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1/6 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1/3 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1/2 \\ \cline{13-17}
9 & 0 & 1 & -2 & 0 & 18 & -8 & -2 & & & & & & & & \vdots & -1
\end{array}\right\} : \quad \text{z.B. } \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix};$$

zu $\lambda_2 = -2$:

$$\left.\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrcr}
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1/6 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1/3 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/2 \\ \cline{13-17}
9 & 0 & 1 & 2 & 0 & -18 & -8 & 2 & & & & & & & & \vdots & -1
\end{array}\right\} : \quad \text{z.B. } \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix};$$

zu $\lambda_3 = i\sqrt{2}$:

$$\left.\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrcr}
-i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 1 & -i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2}/2 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -i\sqrt{2}/6 \\
1 & -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 3 & i\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/3 \\
0 & 0 & -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & i\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 1 & \vdots & i\sqrt{2}/2 \\ \cline{13-17}
9 & 0 & 1 & -i\sqrt{2} & & & & & & & & & & & & \vdots & -1
\end{array}\right\} :$$

z.B.: $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 2 \\ 3i\sqrt{2} \\ -6 \end{pmatrix}$; damit ist noch $\vec{c}_4 = \vec{c}_3{}^* = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 2 \\ -3i\sqrt{2} \\ -6 \end{pmatrix}$ ein EV zum EW $\lambda_4 = \lambda_3^* = -i\sqrt{2}$.

Gemäß Nummer 38.2 ist somit

$$\boxed{\vec{r}\,(r) = \gamma_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \gamma_3 e^{i\sqrt{2}\,t} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 2 \\ 3i\sqrt{2} \\ -6 \end{pmatrix} + \gamma_4 e^{-i\sqrt{2}\,t} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 2 \\ -3i\sqrt{2} \\ -6 \end{pmatrix}}$$

mit beliebig konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_4 \in \mathbb{C}$ die **allgemeine Lösung** des Dgl.–Systems $(*)_2$;
die **allgemeine Lösung des gegebenen Dgl.–Systems** $(*)_1$ ist damit (wenn man statt $-i\sqrt{2}\,\gamma_3$ und $i\sqrt{2}\,\gamma_4$ kurz γ_3 bzw. γ_4 schreibt):

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(\gamma_1 e^{2t} + \gamma_2 e^{-2t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\gamma_3 e^{i\sqrt{2}\,t} + \gamma_4 e^{-i\sqrt{2}\,t}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

mit beliebig konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_4 \in \mathbb{C}$, und die **allgemeine reelle Lösung** von $(*)_1$ ist:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \gamma_1 e^{2t} + \gamma_2 e^{-2t} + \alpha \cos \sqrt{2}\,t + \beta \sin \sqrt{2}\,t \\ y(t) & = & 3\gamma_1 e^{2t} + 3\gamma_2 e^{-2t} - 3\alpha \cos \sqrt{2}\,t - 3\beta \sin \sqrt{2}\,t \end{array}}$$

mit beliebig konstanten $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. (*Wesentlich* bequemer ist dieses Dgl.–System mit Hilfe eines Exponentialansatzes zu lösen (s.o.)!)

39 Allgemeine Variation der Konstanten.

Stichpunkte: Vollständige Fundamentalsysteme linearer Dgln. und linearer Dgl.–Systeme mit konstanten Koeffizienten, zugehörige Fundamentalmatrix; Äquivalenz von linearen Dgln. der Ordnung n und (n,n)–Systemen linearer Dgln. der Ordnung 1. Variation der Konstanten bei inhom. lin. Dgl–Systemen und inhom. lin. Dgln..

39.A Inhomogene lin. Dgl.–Systeme 1.Ordnung.

Wir haben früher (in Nr. 38.7) schon einmal definiert:

39.1 Sei A eine n,n–Matrix. Je n linear unabhängige Lösungen $\vec{r}_1(x), \ldots, \vec{r}_n(x)$ des *homogenen* linearen Dgl.–Systems $(*)_h$: $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}$ bilden ein **vollständiges Fundamentalsystem** für dieses Dgl.–System und die mit den Spalten $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ gebildete Matrix $\mathcal{W} = \mathcal{W}[\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n] = \begin{pmatrix} \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n \end{pmatrix}$ ist eine **Fundamentalmatrix** zu $((*))_h$.

39.2

Wenn ein vollständiges Fundamentalsystem $\{\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n\}$ von $(*)_h$ gegeben ist, kann man das *inhomogene* lineare Dgl.–System

$(*)$: $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b}(x)}}$ durch **Variation der Konstanten**,

d.h. mit einem **Variations–Ansatz**:

$(+)$: $\boxed{\boxed{\vec{r}(x) = c_1(x)\vec{r}_1(x) + \cdots + c_n(x)\vec{r}_n(x)}}$, lösen, wobei

$c_1(x), \ldots, c_n(x)$ "geeignet" zu bestimmende Funktionen sind.

Die *Ableitung* $\vec{c}\,'(x)$ des Vektors $\vec{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}$ bekommt man mit der zugehörigen Fundamentalmatrix $\mathcal{W}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$\boxed{\boxed{\mathcal{W}\vec{c}\,' = \vec{b}(x)}}$ das man z.B. (wenn das System nicht zu groß ist) mit Hilfe der Cramer'schen Regel lösen kann.

Das ist unmittelbar einzusehen:

$$\vec{r} = c_1\vec{r}_1 + \cdots + c_n\vec{r}_n \Rightarrow A\vec{r} + \vec{b}(x) \overset{!}{=} \vec{r}\,' = \left(c_1'\vec{r}_1 + \cdots + c_n'\vec{r}_n\right) + \left(c_1\vec{r}_1\,' + \cdots + c_n\vec{r}_n\,'\right) =$$

$$= \mathcal{W}\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} + \left(c_1 A\vec{r}_1 + \cdots + c_n A\vec{r}_n\right) = \mathcal{W}\vec{c}\,' + A\vec{r}\,, \quad \text{also: } \mathcal{W}\vec{c}\,' = \vec{b}(x)\,.$$ ▮

Da die Spalten der Funktionalmatrix $\mathcal{W}$ linear unabhängig sind, ist $\mathcal{W}$ regulär; daher *besitzt* das LGS: $\mathcal{W}\,\vec{c}\,' = \vec{b}\,(x)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\vec{c}\,' = \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$.

Ist für $j = 1, \ldots, n$ jeweils $C_j(x)$ eine Stammfunktion zu $c_j'(x)$, also $\boxed{c_j(x) = C_j(x) + \text{const.},}$, so ist gemäß $(+)$:

A $$\boxed{\boxed{\vec{r}\,(x) = \Big(C_1(x) + \gamma_1\Big)\,\vec{r}_1\,(x) + \cdots + \Big(C_n(x) + \gamma_n\Big)\,\vec{r}_n\,(x)}}$$ mit beliebigen

Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ die **allgemeine Lösung** des inhomogenen Dgl.–Systems $(*)$:

39.3 offenbar hat die Lösung die Form $\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{r}_0$, wobei $\vec{r}_s = C_1\vec{r}_1 + \cdots + C_n\vec{r}_n$ eine **Partikulärlösung** des *inhomogenen* Dgl.–Systems $(*)$ und $\vec{r}_0 = \gamma_1\vec{r}_1 + \cdots + \gamma_n\vec{r}_n$ die **allgemeine Lösung** des zugehörigen *homogenen* Dgl.–Systems $(*)_h$ ist.

Die Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ können so bestimmt werden, dass die Lösung eine gewisse **Anfangsbedingung** $\vec{r}\,(x_0) \stackrel{!}{=} \vec{r}_a$ erfüllt:

B $$\boxed{\mathcal{W}(x_0)\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{r}_a - \mathcal{W}(x_0)\begin{pmatrix} C_1(x_0) \\ \vdots \\ C_n(x_0) \end{pmatrix}}\,.$$

z.B.: $((*))$: $\left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 + 8y_2 - 4y_3 + 2e^{2x} \\ y_2' &=& y_1 + 3y_2 - 2y_3 - e^{2x} \\ y_3' &=& 3y_1 + 12y_2 - 7y_3 + e^{2x} \end{array}\right\}$ für $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ mit $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2,\ y_3(0) = 3$. (s. Beispiel 5 in Abschnitt 38.E)

Für das zugehörige *homogene* Dgl.–System haben wir oben die allgemeine Lösung:

$$\vec{r}_0\,(x) = e^{-x}\left[\alpha\begin{pmatrix} 1+2x \\ x \\ 3x \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$ (α, β, γ beliebig konstant) erhalten.

Die drei Lösungen: $\vec{r}_1\,(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x \\ x \\ 3x \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2\,(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_3\,(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden also ein **vollständiges Fundamentalsystem** und die Matrix $\mathcal{W} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x & 4 & 2 \\ x & -1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die zugehörige **Fundamentalmatrix**.

Der **Variationsansatz** $(+)$: $\boxed{\vec{r}\,(x) = c_1(x)\,\vec{r}_1\,(x) + \cdots + c_n(x)\,\vec{r}_n\,(x)}$ mit "geeigneten" Funktionen $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ führt nach Nr. 39.2 auf das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} (1+2x)e^{-x} & 4e^{-x} & 2e^{-x} \\ xe^{-x} & -e^{-x} & 0 \\ 3xe^{-x} & 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$
. Mit der Determinante

$\det \mathcal{W} = e^{-3x}\Big(-(1+2x)+6x-4x\Big) = -e^{-3x}$ ergibt sich nach der Cramer'schen Regel:

$$c_1'(x) = -e^{3x}\begin{vmatrix} 2e^{2x} & 4e^{-x} & 2e^{-x} \\ -e^{2x} & -e^{-x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = -4e^{3x} \;\Rightarrow\;$$ (mit bel. konstantem α)

$$c_1(x) = -\frac{4}{3}e^{3x} + \alpha\,,$$

$$c_2'(x) = -e^{3x}\begin{vmatrix} (1+2x)e^{-x} & 2e^{2x} & 2e^{-x} \\ xe^{-x} & -e^{2x} & 0 \\ 3xe^{-x} & e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix} = (1-4x)\,e^{3x} \;\Rightarrow\;$$ (mit bel. konstantem β)

$$c_2(x) = \int \underset{u}{(1-4x)}\,\underset{v'}{e^{3x}}\;dx = \frac{1}{3}(1-4x)\,e^{3x} + \frac{4}{3}\int e^{3x}\,dx = \left(\frac{7}{9}-\frac{4}{3}\,x\right)e^{3x} + \beta\,,$$

$$c_3'(x) = -e^{3x}\begin{vmatrix} (1+2x)e^{-x} & 4e^{-x} & 2e^{2x} \\ xe^{-x} & -e^{-x} & -e^{2x} \\ 3xe^{-x} & 0 & e^{2x} \end{vmatrix} = (12x+1)\,e^{3x} \;\Rightarrow\;$$ (mit bel. konstantem γ)

$$c_3(x) = \int \underset{u}{(12x+1)}\,\underset{v'}{e^{3x}}\;dx = \frac{1}{3}(12x+1)\,e^{3x} - 4\int e^{3x}\,dx = (4x-1)\,e^{3x} + \gamma\,.$$

Hiermit bekommen wir aufgrund des Ansatzes (+) die **allgemeine Lösung** des inhomogenen linearen Dgl.–Systems ((∗)) :

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,(x) &= \left(-\frac{4}{3}\,e^{3x}+\alpha\right)e^{-x}\begin{pmatrix} 1+2x \\ x \\ 3x \end{pmatrix} + \left(\left(\frac{7}{9}-\frac{4}{3}\right)e^{3x}+\beta\right)e^{-x}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&\qquad + \Big((4x-1)\,e^{3x}+\gamma\Big)\,e^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= e^{2x}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}(1+2x)+\frac{28}{9}-\frac{16}{3}\,x+8x-2 \\ -\frac{4}{3}\,x-\frac{7}{9}+\frac{4}{3}\,x \\ -4x+4x-1 \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} \alpha\,(1+2x)+4\beta+2\gamma \\ \alpha\,x-\beta \\ 3\alpha\,x+\gamma \end{pmatrix} = \\
&= e^{2x}\begin{pmatrix} -2/9 \\ -7/9 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} 2\alpha\,x+(\alpha+4\beta+2\gamma) \\ \alpha\,x-\beta \\ 3\alpha\,x+\gamma \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung ergibt noch: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{r}\,(0) = \begin{pmatrix} -2/9 \\ -7/9 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha+4\beta+2\gamma \\ -\beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, also

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 11/9 \\ 25/9 \\ 4 \end{pmatrix}$, d.h. $\gamma = 4\,,\ \beta = -\dfrac{25}{9}\,,\ \alpha = \dfrac{11}{9}+\dfrac{100}{9}-8 = \dfrac{13}{9}\,.$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ((∗)) ist damit:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y_1(x) & = & \left(\frac{11}{9} + \frac{26}{3}\,x\right) e^{-x} - \frac{2}{9}\,e^{2x} \\ y_2(x) & = & \left(\frac{25}{9} + \frac{13}{3}\,x\right) e^{-x} - \frac{7}{9}\,e^{2x} \\ y_3(x) & = & \left(4 + 13x\right) e^{-x} - e^{2x} \end{array}}\,.$$

39.B Verwendung der Matrix e^{At}.

Wenn die Matrix e^{Ax} bekannt ist, dann führt der **Variationsansatz:** (+) $\boxed{\vec{r}\,(x) = e^{Ax}\vec{c}\,(x)}$, $\vec{c}\,(x)$ "geeignet', wegen $\vec{r}\,'(x) = Ae^{Ax}\vec{c}\,(x) + e^{Ax}\vec{c}\,'(x)$, $A\vec{r}\,(x) = Ae^{Ax}\vec{c}\,(x)$ durch Einsetzen in das Dgl.–System (∗) : $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b}\,(x)}$ auf die Gleichung: $\boxed{e^{Ax}\vec{c}\,'(x) = \vec{b}\,(x)}$: mit $\mathcal{W} = e^{Ax}$ ist das gerade die Aussage von Nr. 39.2 .

Da die Matrix e^{Ax} regulär ist mit der Inversen $\left(e^{Ax}\right)^{-1} = e^{-Ax}$, folgt: $\vec{c}\,'(x) = e^{-Ax}\vec{b}\,(x)$, und Integration ergibt (Vektoren werden *komponentenweise* differenziert, folglich auch *komponentenweise* integriert!) , mit einem beliebig konstanten Vektor $\vec{c}_0$:

$\boxed{\vec{c}\,(x) = \int e^{-Ax}\,\vec{b}\,(x)\,dx \;+ \vec{c}_0}$, bzw.,gleichwertig: $\boxed{\vec{c}\,(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-A\xi}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi \;+ \vec{c}_0}$.

Aufgrund des Ansatzes (+) ergibt sich: $\vec{r}\,(x) = e^{Ax}\,\vec{c}_0 \;+ e^{Ax}\int e^{-Ax}\,\vec{b}\,(x)\,dx$ bzw. $\vec{r}\,(x) = e^{Ax}\,\vec{c}_0 \;+ e^{Ax}\int_{x_0}^{x} e^{-A\xi}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi$. Die Anfangsbedingung $\vec{r}\,(x_0) \overset{!}{=} \vec{r}_a$ liefert dann noch:

$\vec{r}_a \overset{!}{=} e^{Ax_0}\,\vec{c}_0 \;+ e^{Ax_0}\int_{x_0}^{x_0} e^{-A\xi}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi \;= e^{Ax_0}\,\vec{c}_0$, d.h. $\vec{c}_0 \;= e^{-Ax_0}\,\vec{r}_a$ und damit:

$e^{Ax}\,\vec{c}_0 \;= e^{A(x-x_0)}\,\vec{r}_a$. Wir haben erhalten:

39.4

Das inhomogene lineare Dgl.–System (∗) : $\boxed{\boxed{\vec{r}\,'(x) = A\vec{r} + \vec{b}\,(x)}}$ hat die

allgemeine Lösung : $\boxed{\vec{r}\,(x) = e^{Ax}\,\vec{c}_0 \;+ e^{Ax}\int e^{-Ax}\,\vec{b}\,(x)\,dx}$, $\vec{c}_0$ bel. konst.;

von diesen Lösungen erfüllt $\boxed{\vec{r}\,(x) = e^{A(x-x_0)}\,\vec{r}_a + e^{Ax}\int_{x_0}^{x} e^{-A\xi}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi}$

die **Anfangsbedingung** $\vec{r}\,(x_0) = \vec{r}_a$.

z.B.: Wir lösen nocheinmal das Anfangswertproblem des letzten **Beispiels**:

$$((*)) : \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 + 8y_2 - 4y_3 + 2e^{2x} \\ y_2' &=& y_1 + 3y_2 - 2y_3 - e^{2x} \\ y_3' &=& 3y_1 + 12y_2 - 7y_3 + e^{2x} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{für } y_1(x)\,,\ y_2(x)\,,\ y_3(x) \text{ mit} \\ y_1(0) = 1\,,\ y_2(0) = 2\,,\ y_3(0) = 3\,. \end{array}$$

In Abschnitt 38.D, Beispiel 3, haben wir die Matrix e^{Ax} zur Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 12 & -7 \end{pmatrix}$ bestimmt:

$e^{Ax} = e^{-x} \begin{pmatrix} 1+2x & 8x & -4x \\ x & 1+4x & -2x \\ 3x & 12x & 1-6x \end{pmatrix}$. Mit $\vec{b}\,(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_0 = 0\,,\ \vec{r}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

bekommen wir gemäß Nr. 39.4 die Lösung:

$$\vec{r}\,(x) = e^{Ax}\,\vec{r}_a\ + e^{Ax} \int_0^x e^{-A\xi}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi =$$

$$= e^{-x} \begin{pmatrix} 1+2x & 8x & -4x \\ x & 1+4x & -2x \\ 3x & 12x & 1-6x \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \int_0^x e^{3\xi} \begin{pmatrix} 1-2\xi & -8\xi & 4\xi \\ -\xi & 1-4\xi & 2\xi \\ -3\xi & -12\xi & 1+6\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} d\xi \right] =$$

$$= e^{-x} \begin{pmatrix} 1+2x & 8x & -4x \\ x & 1+4x & -2x \\ 3x & 12x & 1-6x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \displaystyle\int_0^x (2+8\xi)\,e^{3\xi}\,d\xi \\ 2 + \displaystyle\int_0^x (-1+4\xi)\,e^{3\xi}\,d\xi \\ 3 + \displaystyle\int_0^x (1+12\xi)\,e^{3\xi}\,d\xi \end{pmatrix} ;$$

mit den drei Integralen:

$$\int_0^x (2+8\xi)\,e^{3\xi}\,d\xi\ = \left[\frac{1}{3}\,(2+8\xi)\,e^{3\xi} - \frac{8}{9}\,e^{3\xi} \right]_0^x = \left(-\frac{2}{9} + \frac{8}{3}\,x \right)\ e^{3x} + \frac{2}{9}\,,$$

$$\int_0^x (-1+4\xi)\,e^{3\xi}\,d\xi\ = \left[\frac{1}{3}\,(-1+4\xi)\,e^{3\xi} - \frac{4}{9}\,e^{3\xi} \right]_0^x = \left(-\frac{7}{9} + \frac{4}{3}\,x \right)\ e^{3x} + \frac{7}{9}\,,$$

$$\int_0^x (1+12\xi)\,e^{3\xi}\,d\xi\ = \left[\frac{1}{3}\,(1+12\xi)\,e^{3\xi} - \frac{4}{3}\,e^{3\xi} \right]_0^x = (-1+4x)\,e^{3x}\ + 1 \qquad \text{ergibt sich:}$$

$$\vec{r}\,(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1+2x & 8x & -4x \\ x & 1+4x & -2x \\ 3x & 12x & 1-6x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{9} + \frac{8}{3}\,x \right)\ e^{3x} + \frac{11}{9} \\ \left(-\frac{7}{9} + \frac{4}{3}\,x \right)\ e^{3x} + \frac{25}{9} \\ (-1+4x)\,e^{3x}\ + 4 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2x} \begin{pmatrix} (11+2x) \left(-\frac{2}{9} + \frac{8}{3}\,x \right) + 8x \left(-\frac{7}{9} + \frac{4}{3}\,x \right) - 4x\,(-1+4x) \\ x \left(-\frac{2}{9} + \frac{8}{3}\,x \right) + (1+4x) \left(-\frac{7}{9} + \frac{4}{3}\,x \right) - 2x\,(-1+4x) \\ 3x \left(-\frac{2}{9} + \frac{8}{3}\,x \right) + 12x \left(-\frac{7}{9} + \frac{4}{3}\,x \right) + (1-6x)\,(-1+4x) \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} \frac{11}{9} + \frac{22}{9}\,x + \frac{200}{9}\,x - 16x \\ \frac{11}{9}\,x + \frac{25}{9} + \frac{100}{9}\,x - 8x \\ \frac{11}{3}\,x + \frac{100}{3}\,x + 4 - 24x \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2x}\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} \frac{11}{9}+\frac{26}{3}x \\ \frac{25}{9}+\frac{13}{3}x \\ 4+13x \end{pmatrix}$$, d.h., wieder wie oben:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= \left(\frac{11}{9}+\frac{26}{3}x\right) e^{-x} - \frac{2}{9}e^{2x} \\ y_2(x) &= \left(\frac{25}{9}+\frac{13}{3}x\right) e^{-x} - \frac{7}{9}e^{2x} \\ y_3(x) &= \left(4+13x\right) e^{-x} - e^{2x} \end{aligned}}\ .$$

39.C Äquivalenz von lin. Dgln. und lin. Dgl.–Systemen.

Jede **lineare Differentialgleichung der Ordnung n**:

$(*)$ $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = f(x)}$ mit konstanten oder variablen Koeffizienten a_j kann auf einfache Weise in ein gleichwertiges **(n,n)–System linearer Differentialgleichungen der Ordnung 1** umgewandelt werden:

Setze: $\boxed{y_1 := y\,,\ y_2 := y'\,,\ y_3 := y''\,,\ \ldots\,,\ y_{n-1} := y^{(n-2)}\,,\ y_n := y^{(n-1)}}$.

Dann ist: $y_1' = y' = y_2\,,\ y_2' = y'' = y_3\,,\ \ldots\,,\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n$, und, mit (*):

$$\begin{aligned} y_n' &= y^{(n)} = -a_0\,y - a_1\,y' - \cdots - a_{n-1}\,y^{(n-1)} + f(x) = \\ &= -a_0\,y_1 - a_1\,y_2 - \cdots - a_{n-1}\,y_n + f(x)\,. \end{aligned}$$

Mit den Vektoren: $\vec{r} = \vec{r}\,(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \vec{b}\,(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$ und

der Matrix: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ ergibt sich

das lineare Dgl.–System: $((*))$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b}\,(x)}}$. Wir haben erhalten:

39.5

Ist $y = y(x)$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$(*) \quad \boxed{y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = f(x)}\,,$$

so ist $\vec{r} = \vec{r}\,(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ eine Lösung des Dgl.–Systems

$((*))$ $\boxed{\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b}\,(x)}}$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ und dem Vektor } \vec{b}\,(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt: ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ eine Lösung des Dgl.–Systems $((*))$,

so ist $y = y_1(x)$ eine Lösung der Dgl. $(*)$.

Wenn $y_1, \ldots, y_n$ n linear unabhängige Lösungen der *homogenen* linearen Dgl. $(*)$: $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = 0}$ sind, also ein vollständiges Fundamentalsystem der Dgl. $(*)$ bilden (s. Nr. 16.6), dann sind $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{r}_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$ n linear unabhängige Lösungen des entsprechenden *homogenen* linearen Dgl.–Systems $((*))$ $\boxed{\vec{r}\,' = A\vec{r}}$, bilden also ein vollständiges Fundamentalsystem für dieses Dgl.–System, und die mit den Spalten $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ gebildete Matrix $\mathcal{W} = \left(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n\right) = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$ ist eine Fundamentalmatrix zu $((*))$ (s.o. Nr. 39.1).

39.6

Man nennt diese Matrix auch ***die zu den Fundamentallösungen*** $y_1, \ldots, y_n$ ***gehörende*** — oder ***von diesen erzeugte — Fundamentalmatrix der Differentialgleichung*** $(*)_h$.

Die Analogie geht weiter:

39.7

Ist $p_n(\lambda)$ das **charakteristische Polynom der Dgl.** $(*)$, so ist

$$\boxed{p_A(\lambda) = (-1)^n p_n(\lambda)}$$

das **charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix** des entsprechenden Dgl.–Systems $(\!(*)\!)$. Die ***Nullstellen des charakteristischen Polynoms*** p_n sind also genau die ***Eigenwerte der Koeffizientenmatrix*** A.

Das ist einfach nachzurechnen:

Für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ sei
$$D_j := \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_j & -a_{j+1} & \cdots & -a_{n-2} & (-a_{n-1}-\lambda) \end{vmatrix}_{(n-j,n-j)} ;$$

dann ist $D_0 = p_A(\lambda)$, $D_{n-1} = (-a_{n-1} - \lambda)$ und für $0 \le j < n-1$ bekommt man durch Entwickeln nach der 1. Spalte:

$$D_j := -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_{j+1} & -a_{j+2} & \cdots & -a_{n-2} & (-a_{n-1}-\lambda) \end{vmatrix}_{(n-j-1,n-j-1)} +$$

$$+ (-1)^{n-j+1} (-a_j) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}_{(n-j-1,n-j-1)} = -\lambda\, D_{j+1} + (-1)^{n-j+1}(-a_j) .$$

Wir erhalten die Rekursionsformel:

$$\boxed{D_j = -\lambda\, D_{j+1} + (-1)^{n-j} a_j \quad \text{für } j = 0, \ldots, n-2 \quad \text{und mit } D_{n-1} = -a_{n-1} - \lambda}\,.$$

Hieraus ergibt sich der Reihe nach:

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= -a_{n-1} - \lambda \\ D_{n-2} &= -\lambda\, D_{n-1} + (-1)^{n-(n-2)}\, a_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1}\,\lambda + \lambda^2 \\ D_{n-3} &= -\lambda\, D_{n-2} + (-1)^{n-(n-3)}\, a_{n-3} = -a_{n-3} - a_{n-2}\,\lambda - a_{n-1}\,\lambda^2 - \lambda^3 \\ &\vdots \quad \text{usw., für } j \le n : \\ D_{n-j} &= (-1)^j \left(a_{n-j} + a_{n-j+1}\,\lambda + \cdots + a_{n-1}\,\lambda^{j-1} + \lambda^j\right), \quad \text{also, für } j = n : \\ p_A(\lambda) &= D_0 = (-1)^n \left(a_0 + a_1\,\lambda + \cdots + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \lambda^n\right) = (-1)^n\, p_n(\lambda) . \end{aligned}$$

∎

z.B.: 1. (*) $\boxed{p(D)\,y = y''' - y'' - 5y' - 3y = f(x)}$:

Setze: $y_1 := y\,,\ y_2 := y'\,,\ y_3 := y''$; dann ist: $y_1' = y' = y_2\,,\ y_2' = y'' = y_3$ und

$y_3' = y''' \overset{\text{Dgl.}}{=} y'' + 5y' + 3y + f(x) = 3y_1 + 5y_2 + y_3 + f(x)$; wir erhalten das zur Dgl. $(*)$

äquivalente Dgl.–System: $((*))$ $\boxed{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}}$.

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix A dieses Systems ist:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 3 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) + 3 + 5\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = -p(\lambda)\,.$$

2. Das nächste (zugegebenermaßen sehr einfache) Beispiel wollen wir etwas ausführlicher untersuchen:

$(*)$: $\boxed{\boxed{\ddot{x} - 64x = 10e^{-2t}}}$. Diese Dgl. hat das **charakteristische Polynom** $p(\lambda) = \lambda^2 - 64$ mit den **Nullstellen** $\lambda_{1,2} = \pm 8$. Die allgemeine Lösung der *homogenen* Dgl. $(*)_h$: $\boxed{\ddot{x} - 64x = 0}$ ist dann

(s. Nr. 16.15) : $\boxed{x_0(t) = \gamma_1 e^{8t} + \gamma_2 e^{-8t}\ \ (\gamma_1,\, \gamma_2\ \text{beliebig konstant})}$ mit den beiden Fundamental-

lösungen $x_{0,1}(t) = e^{8t}$, $x_{0,2}(t) = e^{-8t}$, und die zugehörige **Fundamentalmatrix** ist

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} \\ \dot{x}_{0,1} & \dot{x}_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{8t} & e^{-8t} \\ 8e^{8t} & -8e^{-8t} \end{pmatrix}.$$

Die *inhomogene* Dgl. $(*)$ löst man (statt durch Variation der Konstanten) bequem mit einem **Störgliedansatz** (s. Nr. 16.29) : $x_s = Ae^{-2t} \Rightarrow \ddot{x}_s = 4Ae^{-2t} \Rightarrow$ (Einsetzen) $10e^{-2t} \overset{!}{=} \ddot{x}_s - 64x_s =$ $= (4A - 64A)e^{-2t} = -60e^{-2t}$, d.h. $A = -1/6$. Die Dgl. $(*)$ hat also die **allgemeine Lösung** :

$\boxed{x(t) = \gamma_1 e^{8t} + \gamma_2 e^{-8t} - 1/6\ e^{-2t}\ \ (\gamma_1,\, \gamma_2\ \text{bel. konst.})}$ $\left(\Rightarrow \dot{x}(t) = 8\gamma_1 e^{8t} - 8\gamma_2 e^{-8t} + 1/3\ e^{-2t}\right)$.

Zu demselben Ergebnis kommt man über das zu $(*)$ ***äquivalente Dgl.–System:***

Mit $\boxed{\begin{matrix} x_1 := x \\ x_2 := \dot{x} \end{matrix}}$ $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} \overset{(*)}{=} 64x + 10e^{-2t} = 64x_1 + 10e^{-2t} \end{array} \right\}$ ergibt sich das zur Dgl. $(*)$

äquivalente Dgl.–System : $((*))$: $\boxed{\boxed{\dot{\vec{r}} = A\vec{r} + \vec{b}\,(t)}}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 64 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10e^{-2t} \end{pmatrix}$;

A hat das **charakteristische Polynom** $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 64 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 64 \overset{\text{s.o.}}{=} -p(\lambda)$, hat also die **Eigenwerte** $\lambda_{1,2} = \pm 8$. Um das Dgl.–System $((*))$ zu lösen, bestimmen wir je einen zugehörigen Eigenvektor (mit Gauß–Elimination) :

zu $\lambda_1 = 8$: $\left.\begin{array}{rr|ccc} -8 & 1 & 1 & \vdots & -1/8 \\ \hline 64 & -8 & & \vdots & -1 \end{array}\right\}$ z.B. $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, zu $\lambda_2 = -8$: $\left.\begin{array}{cc|ccc} 8 & 1 & 1 & \vdots & 1/8 \\ \hline 64 & 8 & & \vdots & -1 \end{array}\right\}$ z.B. $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Damit hat das *homogene* Dgl.–System $((*))_h$: $\boxed{\dot{\vec{r}} = A\vec{r}}$ die allgemeine Lösung (s. Nr. 38.5) :

$\boxed{\vec{r}_0 = \gamma_1 e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \text{ beliebig konstant})}$ mit den beiden Fundamentallösungen

$\vec{r}_1(t) = e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2(t) = e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$, und die zugehörige **Fundamentalmatrix** ist:

$$\mathcal{W} = \left(\vec{r}_1\,,\ \vec{r}_2\right) = \begin{pmatrix} e^{8t} & e^{-8t} \\ 8e^{8t} & -8e^{-8t} \end{pmatrix}.$$

Der **Variationsansatz** für das *inhomogene* Dgl.–System $((*))$:

$\boxed{\vec{r}(t) = c_1(t)\, e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}}$ $(c_1(t), c_2(t)$ "geeignete" Funktionen)

führt auf das LGS: $\mathcal{W} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \vec{b}(t)$, d.h.: $\begin{pmatrix} e^{8t} & e^{-8t} \\ 8e^{8t} & -8e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10e^{-2t} \end{pmatrix}$, das wir z.B. mit der Cramer'schen Regel (Nr. 34.10) lösen können: mit der Determinante $\det \mathcal{W} = \begin{vmatrix} e^{8t} & e^{-8t} \\ 8e^{8t} & -8e^{-8t} \end{vmatrix} =$

$= -16$ folgt: $\dot{c}_1 = -\dfrac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & e^{-8t} \\ 10e^{-2t} & -8e^{-8t} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{16}\, e^{-10t} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -8 \end{vmatrix} = \dfrac{10}{16}\, e^{-10t}$, $c_1 = -\dfrac{1}{16}\, e^{-10t} + \gamma_1$,

$\dot{c}_2 = -\dfrac{1}{16} \begin{vmatrix} e^{8t} & 0 \\ 8e^{8t} & 10e^{-2t} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{16}\, e^{6t} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = -\dfrac{10}{16}\, e^{6t}$, $c_2 = -\dfrac{10}{96}\, e^{6t} + \gamma_2$.

Einsetzen in den Ansatz ergibt die **allgemeine Lösung** des Systems $((*))$:

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{16}\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma_1 e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{10}{96}\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \gamma_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma_1 e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$\boxed{x(t) = x_1(t) = \gamma_1 e^{8t} + \gamma_2 e^{-8t} - 1/6\, e^{-2t}}$ und $\dot{x}(t) = x_2(t) = 8\gamma_1 e^{8t} - 8\gamma_2 e^{-8t} + 1/3\, e^{-2t}$.

39.D Inhomogene lineare Differentialgleichungen.

Variation der Konstanten ist ein stets — und "im Prinzip" einfach — anwendbares Verfahren zur allgemeinen Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung:

(*) $\boxed{\boxed{L_n y = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}}$ mit i.a. *stetigen* Koeffizienten $a_\nu(x)$,

das sich besonders dann empfiehlt, wenn ein Störgliedansatz nicht möglich ist:

39.8

Ausgehend von der allgemeinen Lösung

$(+)_h$ $\boxed{y_0(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\,,\quad c_1,\ldots,c_n \text{ beliebig } \textit{konstant}}$

der *homogenen* linearen Dgl. $(*)_h$ $\boxed{L_n y = 0}$, wobei also $\{\, y_1\,,\, \ldots\,,\, y_n \,\}$ ein vollständiges Fundamentalsystem von $(*)_h$ ist (siehe Lektion 16), kann man die Lösungen der *inhomogenen* lin. Dgl. (*) dadurch finden, dass man die *Konstanten* $c_1,\ldots,c_n$ in der allgemeinen Lösung $(+)_h$ "variiert", d.h. durch geeignete *Funktionen* $c_1(x),\ldots,c_n(x)$ ersetzt; man macht also für die inhomogene Dgl. (*) den **Variationsansatz**:

$(+)$ $\boxed{y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)\,,\quad c_1(x),\ldots,c_n(x) \text{ “geeignet”}}$.

Ist dann $\mathcal{W} = \mathcal{W}[y_1,\ldots,y_n](x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ die mit dem Fundamentalsystem $\{y_1,\ldots,y_n\}$ gebildete **Fundamentalmatrix**, so ergeben sich die *Ableitungen* $c_1'(x),\ldots,c_n'(x)$ der in (+) zu bestimmenden Funktionen $c_\nu(x)$ als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\boxed{\mathcal{W}\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}}\ .$$

Das ist ein einfach zu handhabendes “Kochrezept”, das aufgrund von Nr. 39.2 nicht besonders überrascht und sich auch einfach **beweisen** lässt:

Sei $\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$, d.h.

$\displaystyle\sum_{k=1}^n c_k' y_k^\nu = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{, für } \nu = 0,\ldots,n-2, \\ f(x) & \text{, für } \nu = n-1, \end{array}\right\}$ und sei $y = \displaystyle\sum_{j=1}^n c_j y_j$ gemäß (+). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
y' &= \sum_{j=1}^n c_j' y_j + \sum_{j=1}^n c_j y_j' \overset{(\nu=0)}{=} \sum_{j=1}^n c_j y_j' \quad \text{(falls } n \ge 3\text{)} \\
y'' &= \sum_{j=1}^n c_j' y_j' + \sum_{j=1}^n c_j y_j'' \overset{(\nu=1)}{=} \sum_{j=1}^n c_j y_j'' \quad \text{(falls } n \ge 4\text{)} \\
\vdots & \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots\\
y^{(n-1)} &= \sum_{j=1}^{n} c_j' y_j^{(n-2)} + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n-1)} \overset{(\nu=n-2)}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n-1)}\\
y^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n} c_j' y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n)} \overset{(\nu=n-1)}{=} f + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n)} , \ \Rightarrow \ (\text{mit } a_n := 1):\\
L_n\, y &= \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(k)} \right) = \\
&= f + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j \sum_{k=0}^{n} a_k y_j^{(k)} \right) = f + \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{L y_j}_{=0} = f \,.
\end{aligned}$$

Es ist noch festzuhalten, dass in 39.8 das lineare Gleichungssystem für $c_1', \ldots, c_n'$ *stets eine Lösung* hat: das ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass mit den Fundamentallösungen $y_1, \ldots, y_n$ auch die Spalten der Fundamentalmatrix $\mathcal{W}$ linear unabhängig sind und somit $\mathcal{W}$ regulär ist. ▮

Zum Beispiel:

1. (*) $\boxed{\boxed{y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}\,,\ y(0) = y'(0) = 0}}$: Die *homogene* Dgl. $(*)_h$ $\boxed{y'' + y = 0}$

hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i$ und hat damit die allgemeine Lösung: $(+)_h$ $\boxed{y_0(x) = a\cos x + b \sin x\,,\ \ a, b \text{ beliebig } \textit{konstant}}$.

Der **Variationsansatz** für die *inhomogene* Dgl. (*):

$(+)$ $\boxed{y(x) = a(x)\,\cos x + b(x)\,\sin x\,,\ \ (\,a(x), b(x)\ \text{“geeignet”}\,)}$

führt gemäß (1) auf das lineare Gleichungssystem für $a'(x), b'(x)$:

$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin y & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$. Mit $D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin y & \cos x \end{vmatrix} = 1$ erhalten wir nach der Cramer'schen Regel: $a' = \dfrac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} \ \Rightarrow\ a(x) = \ln|\cos x| + c_1$ und

$b' = \dfrac{1}{D} \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1 \ \Rightarrow\ b(x) = x + c_2$ und damit die *allgemeine* Lösung von (*):

$$\boxed{\boxed{y(x) = \Big(\ln|\cos x| + c_1\Big) \cos x + (x + c_2\,) \sin x\,,\ \ c_1, c_2 \text{ beliebig konstant}}}\,.$$

Die Anfangsbedingungen sind Bedingungen an die Konstanten c_1, c_2: $0 \overset{!}{=} y(0) = c_1$,
somit $y' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}\cos x - \ln|\cos x| \cdot \sin x + \sin x + (x + c_2\,)\cos x\,,\ 0 \overset{!}{=} y'(0) = c_2$.

Die gesuchte Lösung von (*) ist also: $\boxed{\boxed{y(x) = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \cdot \sin x}}$:

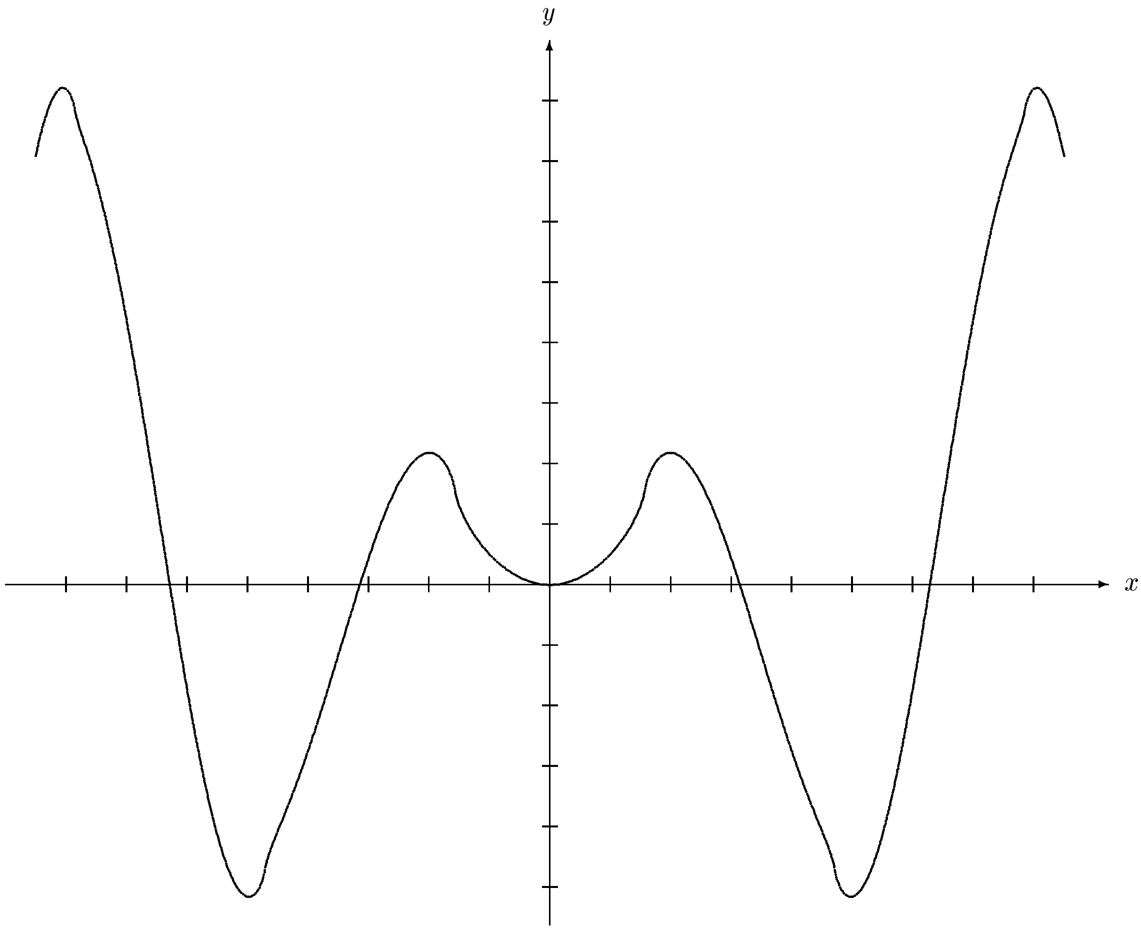


Abbildung 39.1 $y(x) = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \cdot \sin x$

2. (*) $\boxed{\boxed{y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 2x \sinh 3x}}$.

(Dieses Beispiel haben wir bereits in Lektion 16 mehrfach gelöst: siehe die Beispiele zu Nr. 16.24 (in 16.E) und Nr. 16.26 (in 16.F) und das 2. Beispiel zu Nr. 16.29 (in 16.G) .)

Die zugehörige *homogene* Dgl. $(*)_h$ $\boxed{y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0}$ hat die allgemeine Lösung:

$(+)_h$ $\boxed{y_0(x) = (a + bx)\, e^{-3x} + c\, e^{2x}\,,\quad a, b, c \text{ bel. konst.}}$ (s.o.) .

Aus dieser Lösung $(+)_h$ der *homogenen* Dgl. $(*)_h$ ergibt sich sich der folgende **Variationsansatz** $(+)$ für die *inhomogene* Dgl. (*) :

$(+)$ $\boxed{\boxed{y(x) = \big(a(x) + x\, b(x)\big)\, e^{-3x} + c(x)\, e^{2x}\,,\quad a(x), b(x), c(x) \text{ “geeignet”}}}$.

Mit den drei Fundamentallösungen $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = x\, e^{-3x}$, $y_3(x) = e^{2x}$ bekommt man die für alle x reguläre Fundamentalmatrix $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & x\, e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & (1-3x)\, e^{-3x} & 2e^{2x} \\ 9e^{-3x} & (-6+9x)\, e^{-3x} & 4e^{2x} \end{pmatrix}$ mit

$$W = \det \mathcal{W} = e^{-4x}\Big(4(1-3x) + 18x - 3(-6+9x) - 9(1-3x) + 12x - 2(-6+9x)\Big) = 25\, e^{-4x}\,.$$

Wir haben nach Nr. 39.8 das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} e^{-3x} & x\,e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & (1-3x)\,e^{-3x} & 2e^{2x} \\ 9e^{-3x} & (-6+9x)\,e^{-3x} & 4e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x\sinh 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x\left(e^{3x}-e^{-3x}\right) \end{pmatrix};$$

nach der Cramer'schen Regel erhalten wir:

$$a'(x) = \frac{1}{25}\,e^{4x} \begin{vmatrix} 0 & x\,e^{-3x} & e^{2x} \\ 0 & (1-3x)\,e^{-3x} & 2e^{2x} \\ \left(xe^{3x}-xe^{-3x}\right) & (-6+9x)\,e^{-3x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\,e^{3x}\left(xe^{3x}-xe^{-3x}\right)(2x-1+3x)\,,$$

$$\begin{aligned} a(x) &= \int\left(e^{6x}-1\right)\left(\frac{1}{5}\,x^2-\frac{1}{25}\,x\right)dx = \int\left(\frac{1}{5}\,x^2-\frac{1}{25}\,x\right)e^{6x}\,dx - \int\left(\frac{1}{5}\,x^2-\frac{1}{25}\,x\right)dx = \\ &= \left(\frac{1}{30}\,x^2-\frac{1}{150}\,x\right)e^{6x} - \int\left(\frac{1}{15}\,x-\frac{1}{150}\right)e^{6x}\,dx - \frac{1}{15}\,x^3+\frac{1}{50}\,x^2+a_0 = \\ &= \left(\frac{1}{30}\,x^2-\frac{1}{150}\,x\right)e^{6x} - \left(\frac{1}{90}\,x-\frac{1}{900}\right)e^{6x} + \frac{1}{540}\,e^{6x} - \frac{1}{15}\,x^3+\frac{1}{50}\,x^2+a_0 = \\ &= \left(\frac{1}{30}\,x^2-\frac{4}{225}\,x+\frac{2}{675}\right)e^{6x} - \frac{1}{15}\,x^3+\frac{1}{50}\,x^2+a_0\,, \end{aligned}$$

$$b'(x) = \frac{1}{25}\,e^{4x} \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 0 & 2e^{2x} \\ 9e^{-3x} & \left(xe^{3x}-xe^{-3x}\right) & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\,e^{3x}\,(-5)\left(xe^{3x}-xe^{-3x}\right),$$

$$b(x) = -\frac{1}{5}\int x\,e^{6x}\,dx + \frac{1}{5}\int x\,dx = \left(-\frac{1}{30}\,x+\frac{1}{180}\right)e^{6x}+\frac{1}{10}\,x^2+b_0\,,$$

$$c'(x) = \frac{1}{25}\,e^{4x} \begin{vmatrix} e^{-3x} & x\,e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & (1-3x)\,e^{-3x} & 0 \\ 9e^{-3x} & (-6+9x)\,e^{-3x} & \left(xe^{3x}-xe^{-3x}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\,e^{-2x}\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)x\,,$$

$$c(x) = \frac{1}{25}\int x\left(e^{x}-e^{-5x}\right)dx = \left(\frac{1}{25}\,x-\frac{1}{25}\right)e^{x} + \left(\frac{1}{125}\,x+\frac{1}{625}\right)e^{-5x}+c_0\,.$$

Mit diesen Funktionen $a(x), b(x), c(x)$ bekommen wir gemäß (+) die **allgemeine Lösung:**

$$\begin{aligned} y(x) &= a(x)\,e^{-3x}+b(x)\,x\,e^{-3x}+c(x)\,e^{2x} = \\ &= \left(\frac{1}{30}\,x^2-\frac{4}{225}\,x+\frac{2}{675}\right)e^{3x} + \left(-\frac{1}{15}\,x^3+\frac{1}{50}\,x^2+a_0\right)e^{-3x}+ \\ &\quad + \left(-\frac{1}{30}\,x^2+\frac{1}{180}\,x\right)e^{3x} + \left(\frac{1}{10}\,x^3+b_0\,x\right)e^{-3x}+ \\ &\quad + \left(\frac{1}{25}\,x-\frac{1}{25}\right)e^{3x} + \left(\frac{1}{125}\,x+\frac{1}{625}\right)e^{-3x}+c_0e^{2x} = \\ &= \left(\frac{1}{36}\,x-\frac{1}{27}\right)e^{3x} + \left(\frac{1}{30}\,x^3+\frac{1}{50}\,x^2+\left(\frac{1}{125}+b_0\right)x+\left(\frac{1}{625}+a_0\right)\right)e^{-3x}+c_0e^{2x}\,, \end{aligned}$$

mit den Konstanten $a=\dfrac{1}{625}+a_0$, $b=\dfrac{1}{125}+b_0$ und $c=c_0$ also wieder:

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{x}{36}-\frac{1}{27}\right)e^{3x} + \left(\frac{x^3}{30}+\frac{x^2}{50}+bx+a\right)e^{-3x}+c\,e^{2x}\,,\quad a,b,c \text{ bel. konst.}}$$

40 Bemerkungen über lineare partielle Dgln..

Stichpunkte: Über die Lösungsvielfalt; Superpositionsprinzip und Bernoulli'scher Produktansatz. Die eindimensionale Wärmeleitungs– oder Diffusionsgleichung: Diffusion durch einen endlich oder unendlich langen Stab.

Die Theorie der *partiellen* Differentialgleichungen ist wesentlich umfangreicher und härter als die der *gewöhnlichen* Differentialgleichungen. Andererseits spielen die *partiellen* Differentialgleichungen in der Praxis eine wesentlich bedeutendere Rolle als die *gewöhnlichen*. Daher sind zumindest einige (wenige) Bemerkungen über lineare partielle Differentialgleichungen angebracht.

40.A Bemerkung zur Lösungsvielfalt.

40.1 Die **allgemeine lineare partielle Differentialgleichung** der Ordnung n in k unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_k$ für eine (gesuchte) Funktion $u(x_1, \ldots, x_k)$ hat die Form $\boxed{L_n[u](x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)}$ mit dem Differentialoperator:

$$L_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1+\ldots+i_k=j}} a_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial^j}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_k^{i_k}}\,, \quad \text{wobei die Koeffizienten } a_{i_1,\ldots,i_k}$$

(i.a. stetige) Funktionen von $x_1, \ldots, x_k$ sind und $a_{i_1,\ldots,i_k} \neq 0$ ist für mindestens ein k–Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ mit $i_1 + \ldots + i_k = n$. (In der Praxis hat man oft die Variablen $(x_1, \ldots, x_4) = (x, y, z, t)$ mit den Ortskoordinaten (x, y, z) und der Zeit t.)

40.2 Der auffälligste Unterschied zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen ist, dass partielle Differentialgleichungen *wesentlich mehr* Lösungen haben als gewöhnliche: während wir als Faustregel haben, dass die allgemeine Lösung einer *gewöhnlichen* Differentialgleichung der Ordnung n i.a. n **frei wählbare *Konstanten*** enthält, treten in der allgemeinen Lösung einer *partiellen* Differentialgleichung der Ordnung n für k Variable i.a. n **frei wählbare *Funktionen*** von $k-1$ Variablen auf.

Wir wollen diese Tatsache mit einigen (einfachsten) **Beispielen** untermauern:

1. $\boxed{u_x = 0}$ für $u = u(x, y, z)$: die Bedingung $u_x = 0$ besagt nur, dass u *nicht* von x abhängt! Mit einer beliebigen (nicht notwendig differenzierbaren) Funktion $v(y, z)$ ist also:

$\boxed{u(x, y, z) = v(y, z)}$.

2. $\boxed{u_{xx} = 0}$ für $u = u(x,y,z)$: nach 1. ist $u_x(x,y,z) = v(y,z)$ mit einer beliebigen Funktion $v(y,z)$; damit ist $\boxed{u(x,y,z) = \int v(y,z)\,dx = x \cdot v(y,z) + w(y,z)}$ mit einer weiteren beliebigen Funktion $w(y,z)$ (als Integrationskonstante bzgl. x).

3. $\boxed{u_{xy} = f(x)}$ für $u = u(x,y)$. Hier braucht man nur zu integrieren:
$u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = f(x) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \int f(x)\,dy = y \cdot f(x) + g(x)$ mit einer beliebigen Funktion $g(x)$ als Integrationskonstante bzgl. y. Sind $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen zu $f(x)$ bzw. $g(x)$, so folgt weiter:
$u(x,y) = \int \Big(y\,f(x) + g(x)\Big)\,dx = y\,F(x) + G(x) + h(y)$ mit einer beliebigen Funktion $h(y)$ als Integrationskonstante bzgl. x. Wir erhalten die allgemeine Lösung:
$\boxed{u(x,y) = y\,F(x) + G(x) + h(y)}$, wobei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, $G(x)$ eine *beliebige*, aber *differenzierbare* Funktion und $h(y)$ eine weitere, *völlig beliebige* Funktion ist. (Probe durch Ableiten!)

Beachte, dass diese Funktion $u(x,y)$ i.a. *nicht* die Dgl. $u_{yx} = f(x)$ erfüllt! Das trifft nur dann zu, wenn die Funktion $h(y)$ differenzierbar ist — in diesem Fall ist es nicht nötig, dass $G(x)$ differenzierbar ist.

Partielle Dgln. sind meistens "physikalische" Gleichungen; daher ist der Praktiker in der Regel weniger an der Lösungsgesamtheit interessiert als an Lösungen, die auf einem gewissen Gebiet definiert sind und auf dem Rand dieses Gebietes gewissen vorgegebenen Bedingungen genügen (**Randwertproblem**); bei zeitabhängigen Problemen kommen meist noch vorgegebene Anfangsbedingungen hinzu (**Anfangswertproblem**). Einschränkende Randbedingungen führen oft auf ein **Eigenwertproblem** mit der Folge, dass die gegebene Dgl. mitunter nur noch für ganz bestimmte Werte einiger in der Dgl. auftretenden Parameter lösbar sind.

40.B Zum Superpositionsprinzip.

Da der Differentialoperator $u \mapsto L_n[u]$ *linear* ist, haben wir, wie schon bei gewöhlichen linearen Dgln. (wie bei *allen* linearen Gleichungen):

40.3

(1) Die **allgemeine Lösung** einer *inhomogenen* partiellen linearen Dgl. $L_n[u] = f$ ist die Summe aus der **allgemeinen** Lösung der zugehörigen *homogenen* linearen Dgl. $L_n[u] = 0$ und einer **Partikulärlösung** der gegebenen *inhomogenen* Dgl.; und:

(2) beliebige Summen und Vielfache von Lösungen der *homogenen* partiellen linearen Dgl. $L_n[u] = 0$ sind ebenfalls Lösungen dieser *homogenen* Dgl.. (**Superpositionsprinzip**)

Dieses **Superpositionsprinzip** ist die Ursache dafür, dass man beim Lösen von partiellen linearen Dgln. häufig auf **Fourierreihen** oder auf **Fourierintegrale** stößt:

40.4

Spezielle Lösungsansätze für die homogene partielle lineare Dgl. $L_n[u] = 0$ in den Variablen $x, y, \ldots, t$ liefern meist spezielle Lösungen der Form $u_0(x, y, \ldots, t) = g(x, y, \ldots, t, \lambda)$ mit einer beliebig wählbaren Konstanten λ.

Vorgegebene *Rand*bedingungen führen dann in der Regel dazu, dass in dieser Lösung (bzw. Lösungsschar) nur noch gewisse Werte von λ zugelassen sind:

$\boxed{\text{a}}$ entweder endlich oder abzählbar–unendlich viele Werte:

$\lambda \in \{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$ bzw. $\lambda \in \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$,

$\boxed{\text{b}}$ oder kontinuierlich viele Werte: $\lambda \in \mathbb{C}_0$ für eine Teilmenge $\mathbb{C}_0$ von $\mathbb{C}$.

40.5

Aufgrund des Superpositionsprinzips erhält man

im Fall a: die Lösungen $u(x, y, \ldots, t) = \sum_n c_n\, g(x, y, \ldots, t, \lambda_n)$ mit

beliebig wählbaren **Konstanten** c_n, für die die Summe existiert, und

im Fall b: die Lösungen $u(x, y, \ldots, t) = \int_{\mathbb{C}_0} c(\lambda)\, g(x, y, \ldots, t, \lambda)\, d\lambda$ mit

einer beliebig wählbaren **Funktion** $c(\lambda)$, für die das Integral definiert ist.

40.6

Sind noch *Anfangs*bedingungen zu berücksichtigen, etwa $u(x, y, \ldots, 0) = f(x, y, \ldots)$, so ergibt sich

im Fall a: $f(x, y, \ldots) = u(x, y, \ldots, 0) = \sum_n c_n\, g(x, y, \ldots, 0, \lambda_n)$:

das ist häufig ein **Fourierpolynom** bzw. eine **Fourierreihe**, womit sich die Konstanten c_n aus den **Fourierkoeffizienten** der Funktion $f(x, y, \ldots)$ ergeben,

im Fall b: $f(x, y, \ldots) = u(x, y, \ldots, 0) = \int_{\lambda \in \mathbb{C}_0} c(\lambda)\, g(x, y, \ldots, 0, \lambda)\, d\lambda$:

das ist häufig ein **Fourierintegral**, womit man die Funktion $c(\lambda)$ mit Hilfe der **Fouriertransformierten** von $f(x, y, \ldots)$ bekommt.

Beide Fälle werden unten in Abschnitt 40.D am Beispiel der eindimensionalen Wärmeleitungs– bzw. Diffusionsgleichung demonstriert.

Der folgende Satz ist eine Konsequenz des Superpositionsprinzips:

40.7 Seien $A(x_1,\ldots,x_k)$ und $B^{[1]}(x_1,\ldots,x_k),\ldots,B^{[k-1]}(x_1,\ldots,x_k)$ gewisse Funktionen.
Wenn $\boxed{\bar u(x_1,\ldots,x_k) = e^{A+\lambda_1 B^{[1]}+\cdots+\lambda_{k-1}B^{[k-1]}}}$ *für beliebige* Werte der konstanten Parameter $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{k-1}$ die homogene partielle lineare Dgl. in k Variablen: $L_n[u]=0$ löst, dann ist auch

$$\boxed{\tilde u(x_1,\ldots,x_k) = e^A\cdot F\left(B^{[1]},\ \ldots,\ B^{[k-1]}\right)}$$

mit einer *beliebig wählbaren*, bis zur Ordnung n partiell differenzierbaren Funktion $F(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1})$ eine Lösung dieser Dgl. $L_n[u]=0$.

(*) Plausibilitätabetrachtung (*nur für Interessierte*):

Wenn man die einzelnen Ableitungen der angegebenen Funktionen $\bar u$ und $\tilde u$ bestimmt und dabei
im Fall $\bar u$ jeweils **nach den Potenzen** $\lambda_1^{j_1}\cdots\lambda_{k-1}^{j_{k-1}}$ bzw.,
im Fall $\tilde u$ jeweils **nach den Ableitungen** $\dfrac{\partial^{j_1+\cdots+j_{k-1}}F}{\partial\xi_1^{j_1}\cdots\partial\xi_{k-1}^{j_{k-1}}}$ **sortiert**:

$$\bar u = \bar u\cdot 1\,,$$
$$\tilde u = e^A\cdot F\,;$$

$$\bar u_{x_j} = \bar u\cdot\left(1\cdot A_{x_j}+\lambda_1\cdot B^{[1]}_{x_j}+\cdots+\lambda_{k-1}\cdot B^{[k-1]}_{x_j}\right),$$
$$\tilde u_{x_j} = e^A\cdot\left(F\cdot A_{x_j}+F_{\xi_1}\cdot B^{[1]}_{x_j}+\cdots+F_{\xi_{k-1}}\cdot B^{[k-1]}_{x_j}\right);$$

$$\begin{aligned}\bar u_{x_jx_m} &= \bar u\cdot\left(A_{x_jx_m}+\lambda_1\cdot B^{[1]}_{x_jx_m}+\cdots+\lambda_{k-1}\cdot B^{[k-1]}_{x_jx_m}\right)+\\ &\qquad+\bar u\cdot\left(A_{x_j}+\lambda_1\cdot B^{[1]}_{x_j}+\cdots+\lambda_{k-1}\cdot B^{[k-1]}_{x_j}\right)\left(A_{x_m}+\lambda_1\cdot B^{[1]}_{x_m}+\cdots+\lambda_{k-1}\cdot B^{[k-1]}_{x_m}\right)=\\ &= \bar u\left[1\cdot\left(A_{x_jx_m}+A_{x_j}A_{x_m}\right)+\lambda_1\left(B^{[1]}_{x_jx_m}+A_{x_j}B^{[1]}_{x_m}+A_{x_m}B^{[1]}_{x_j}\right)+\right.\\ &\qquad\left.+\cdots+\lambda_{k-1}^2B^{[k-1]}_{x_j}B^{[k-1]}_{x_m}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde u_{x_jx_m} &= e^A\cdot A_{x_m}\left(F\,A_{x_j}+F_{\xi_1}B^{[1]}_{x_j}+\cdots+F_{\xi_{k-1}}B^{[k-1]}_{x_j}\right)+\\ &\quad+e^A\left[F\,A_{x_jx_m}+A_{x_j}\left(F_{\xi_1}B^{[1]}_{x_m}+\cdots+F_{\xi_{k-1}}B^{[k-1]}_{x_m}\right)+\right.\\ &\qquad+B^{[1]}_{x_j}\left(F_{\xi_1\xi_1}B^{[1]}_{x_m}+\cdots+F_{\xi_1\xi_{k-1}}B^{[k-1]}_{x_m}\right)+B^{[1]}_{x_jx_m}F_{\xi_1}+\cdots\\ &\qquad\left.\cdots+B^{[k-1]}_{x_j}\left(F_{\xi_{k-1}\xi_1}B^{[1]}_{x_m}+\cdots+F_{\xi_{k-1}\xi_{k-1}}B^{[k-1]}_{x_m}\right)+B^{[k-1]}_{x_jx_m}F_{\xi_{k-1}}\right]=\\ &= e^A\left[F\left(A_{x_jx_m}+A_{x_j}A_{x_m}\right)+F_{\xi_1}\left(B^{[1]}_{x_jx_m}+A_{x_j}B^{[1]}_{x_m}+A_{x_m}B^{[1]}_{x_j}\right)+\right.\\ &\qquad\left.+\cdots+F_{\xi_{k-1}\xi_{k-1}}B^{[k-1]}_{x_j}B^{[k-1]}_{x_m}\right];\end{aligned}$$

usw.: so erkennt man, dass die Ableitungen von $\bar{u}$ und $\tilde{u}$ die Form:

$$\frac{\partial^j \bar{u}}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_k^{j_k}} = \bar{u} \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_{k-1}^{j_{k-1}} \cdot \langle X_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \rangle \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\partial^j \tilde{u}}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_k^{j_k}} = e^A \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_{k-1}} F}{\partial \xi_1^{j_1} \cdots \partial \xi_{k-1}^{j_{k-1}}} \cdot \langle X_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \rangle \quad \text{haben,}$$

mit *demselben* Ausdruck $\langle X_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \rangle$, der von den Ableitungen der Funktionen A und $B^{[1]},\ldots,B^{[k-1]}$ abhängt. Entsprechend ähnlich sehen dann auch $L_n[\bar{u}]$ und $L_n[\tilde{u}]$ aus:

$$L_n[\bar{u}] = \bar{u} \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_{k-1}^{j_{k-1}} \cdot \langle Y_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \rangle, \quad L_n[\tilde{u}] = e^A \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_{k-1}} F}{\partial \xi_1^{j_1} \cdots \partial \xi_{k-1}^{j_{k-1}}} \cdot \langle Y_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \rangle$$

mit *demselben* Ausdruck $\langle Y_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \rangle$. Ist nun $\bar{u}$ eine Lösung der Dgl. $L_n[u] = 0$, so ergibt sich (wenn man $L_n[\bar{u}]$ als Polynom in $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1}$ auffasst), dass $\langle Y_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \rangle = 0$ für alle vorkommenden $(k-1)$–Tupel $(j_1,\ldots,j_{k-1})$. Damit ist dann aber auch $L_n[\tilde{u}] = 0$. ∎

40.C Bernoulli'scher Produktansatz.

40.8

Oft (leider nicht immer) kann man eine Lösung einer homogenen partiellen linearen Dgl. $((*))_h$: $\boxed{L_n[u] = 0}$ der Ordnung n für eine Funktion $u(x_1,\ldots,x_k)$ in k Variablen mit Hilfe eines

Bernoulli'schen Produktansatzes

$((+))$: $\boxed{u(x_1,\ldots,x_k) = P_1(x_1) \cdot P_2(x_2) \cdots P_k(x_k)}$ mit k "geeigneten"

Funktionen $P_j(x_j)$ (die jeweils nur von *einer* Variablen x_j abhängen!) bekommen. Die Ableitungen von $u(x_1,\ldots,x_k) = P_1(x_1) \cdot P_2(x_2) \cdots P_k(x_k)$ lassen sich bequem angeben, z.B.: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_\mu^2 \partial x_\nu} = P_\mu''(x_\mu) P_\nu'(x_\nu) \prod_{j \neq \mu,\nu} P_j(x_j)$.

40.9

Um mit Hilfe des Ansatzes $((+))$ Lösungen der Dgl. $((*))_h$ zu erhalten, setzt man $u = P_1 \cdots P_k$ und alle Ableitungen von u in die Dgl. ein, teilt die sich ergebende Gleichung durch $u = P_1 \cdots P_k$ und versucht, die Dgl. auf die Form

$$(+) : \boxed{F_1\Big(x_1,\, P_1(x_1),\, P_1'(x_1),\ldots\Big) + \cdots + F_k\Big(x_k,\, P_k(x_k),\, P_k'(x_k),\ldots\Big) = 0}$$

zu bringen.

40.10

Für jeden der k Summanden F_ν in $(+)$ hat man dann die Gleichung:
$F_\nu\Big(x_\nu,\, P_\nu(x_\nu),\, P'_\nu(x_\nu),\dots\Big) = -\sum\limits_{j\neq\nu} F_j\Big(x_j,\, P_j(x_j),\, P'_j(x_j),\dots\Big)$; da die rechte Seite dieser Gleichung *nicht* und die linke Seite *höchstens* von x_ν abhängt, muss die linke Seite *konstant* sein. *Jeder* der k Summanden in $(+)$ muss also konstant sein, d.h. die Gleichung $(+)$ ist äquivalent zu den k *gewöhnlichen* Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lrcl} [1] & F_1\Big(x_1,\, P_1(x_1),\, P'_1(x_1),\dots\Big) & = & \lambda_1 \\ [2] & F_2\Big(x_2,\, P_2(x_2),\, P'_2(x_2),\dots\Big) & = & \lambda_2 \\ \vdots & & & \\ [k] & F_k\Big(x_k,\, P_k(x_k),\, P'_k(x_k),\dots\Big) & = & \lambda_k \end{array}\right\}$$

wobei $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{C}$ beliebige Konstanten sind, für die gemäß $(+)$ nur gelten muss: $\boxed{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0}$.

40.11

Jede dieser k Dgln. kann für sich gelöst werden: bei festen $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ ergeben sich Lösungen der Art

$P_j(x_j) = f_j\Big(x_j,\, c_{j,1}(\lambda_j),\, c_{j,2}(\lambda_j),\dots\Big)\,, \quad j = 1,\dots,k\,,$

und damit für die Dgl. $((*))_h$ gemäß $((+))$ die Lösung

$\bar{u}(x_1,\dots,x_k) = f_1\Big(x_1,\, c_{1,1}(\lambda_1),\, c_{1,2}(\lambda_1),\dots\Big)\cdots f_k\Big(x_k,\, c_{k,1}(\lambda_k),\, c_{k,2}(\lambda_k),\dots\Big)$

mit beliebigen, nur vom entsprechenden Parameter λ_j abhängenden Konstanten $c_{j,\nu}(\lambda_j)$. Nach dem Superpositionsprinzip (durch "Addition" über alle möglichen $\lambda_1,\dots,\lambda_k$) erhält man schließlich die **Lösungen**:

$$\boxed{\tilde{u}(x_1,\dots,x_k) = \underset{\lambda_1+\cdots+\lambda_k=0}{\int\cdots\int} f_1\Big(x_1,\, c_{1,1}(\lambda_1),\dots\Big)\cdots f_k\Big(x_k,\, c_{k,1}(\lambda_k),\dots\Big)\, d\lambda_1\cdots d\lambda_k\,.}$$

40.12

Über die zunächst beliebigen Funktionen $c_{j,\nu}(\lambda_j)$ wird in der Praxis meistens so verfügt, dass die Lösungsfunktion u noch gewisse vorgegebene, physikalische Anfangs– oder Randbedingungen erfüllt. (Siehe hierzu als Beispiel die Lösung der Diffusions– bzw. Wärmeleitungsgleichung im nächsten Abschnitt 40.D!)

z.B.: 1. $((*))_h$: $\boxed{y u_x - x u_y = 0}$ für $u(x,y)$. Mit dem **Produktansatz** :

$((+))$: $\boxed{u(x,y) = P(x) \cdot Q(y)}$, $P(x),\, Q(y)$ "geeignet" , ergibt sich durch Einsetzen:

$y\,P'(x)Q(y) - x\,P(x)Q'(y) = 0$, bzw., wenn man beide Seiten noch durch $xy\,P(x)Q(y)$ teilt:

$(+)$ $\boxed{\frac{1}{x}\,\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{y}\,\frac{Q'(y)}{Q(y)}}$. Diese Gleichung ist nur erfüllbar, wenn mit beliebig konstantem λ :

$[1]\ \frac{1}{x}\,\frac{P'(x)}{P(x)} = \lambda$, $[2]\ \frac{1}{y}\,\frac{Q'(y)}{Q(y)} = \lambda$. $[1]$ ergibt: $\frac{d}{dx}\ln P(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \lambda\,x$, also:
$P(x) = c_P\, e^{\lambda\, x^2/2}$ mit einer beliebigen Konstanten $c_P = c_P(\lambda)$. Völlig analog liefert $[2]$:
$Q(y) = c_Q\, e^{\lambda\, y^2/2}$ mit einer beliebigen Konstanten $c_Q = c_Q(\lambda)$.
Damit haben wir die Lösungsschar: $u = \bar{u}(x,y) = c\, e^{\lambda\,(x^2+y^2)/2}$, $c = c(\lambda)$ beliebig konstant, und gemäß Nummer 40.7 erhalten wir insgesamt die **Lösungen** :

$\boxed{u = \tilde{u}(x,y) = F\left(x^2+y^2\right)}$ mit einer *beliebigen* differenzierbaren Funktion $F(\xi\,)$.

$$\tilde{u}(x,y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} c(\lambda)\, e^{\lambda\,(x^2+y^2)/2}\, d\lambda =: F\left(x^2+y^2\right).$$

2. $((*))_h$: $\boxed{x\,u_{xx} + y\,u_{xy} = 0}$ für $u(x,y)$, mit $\boxed{u(x,1) = f(x)\,,\ u(1,y) = g(y)\,,\ x,y > 0}$.

(Hierbei sind $f(x)$, $g(y)$ zwei fest vorgegebene Funktionen.) Der **Produktansatz** :

$((+))$: $\boxed{u(x,y) = P(x) \cdot Q(y)}$ $\left(\Rightarrow\ u_{xx} = P''(x)\,Q(y)\,,\ u_{xy} = P'(x)\,Q'(y)\right)$ liefert:

$x\,P''(x)\,Q(y) + y\,P'(x)\,Q'(y) = 0$ bzw.: $x\,\frac{P''(x)}{P'(x)} + y\,\frac{Q'(y)}{Q(y)} = 0$, mit beliebigen Konstanten λ , c_1 , c_2 , $c_3 \in \mathbb{C}$ somit:
$[1]$: $x\,\frac{P''(x)}{P'(x)} = \lambda$, d.h. $P(x) = c_1\, x^{\lambda+1} + c_2$, $[2]$: $y\,\frac{Q'(y)}{Q(y)} = -\lambda$, d.h. $Q(y) = c_3\, y^{-\lambda}$.
Wir erhalten zwei Scharen von Partikulärlösungen (mit neuen beliebigen Konstanten c_1 , c_2):
$\bar{u}(x,y) = c_1\, x\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda} + c_2\left(\frac{1}{y}\right)^{\lambda} = c_1\, e^{\ln x + \lambda\,\ln(x/y)} + c_2\, e^{\lambda\,\ln(1/y)}$, und daher nach Nr. 40.7

die **Lösungen** : $\boxed{u(x,y) = x\,F\left(\frac{x}{y}\right) + G(y)}$, $(F(\xi),\ G(y)$ beliebige Funktionen).

Es sind noch die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen:

$f(x) \overset{!}{=} u(x,1) = x\,F(x) + G(1)$, insbesondere: $f(0) = G(1) \ \Rightarrow\ F(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - f(0)\right)$,
$g(y) \overset{!}{=} u(1,y) = F\left(\frac{1}{y}\right) + G(y) \ \Rightarrow\ G(y) = g(y) - y\left(f\left(\frac{1}{y}\right) - f(0)\right)$, somit:

$$u(x,y) = x\,\frac{y}{x}\left(f\left(\frac{x}{y}\right) - f(0)\right) + g(y) - y\left(f\left(\frac{1}{y}\right) - f(0)\right) = y\left(f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right) + g(y)\,.$$

Für beliebige (hinreichend oft differenzierbare) Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ mit $f(1) = g(1)$ werden die **Anfangsbedingungen** $u(x,1) = f(x)$, $u(1,y) = g(y)$ erfüllt durch die Lösung:

$$\boxed{u(x,y) = y\left(f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right) + g(y)}\,.$$

40.D Die eindimensionale Diffusionsgleichung.(*)

Die **Diffusion** eines Stoffes in einem Körper und die **Temperaturverteilung** in einem Körper lassen sich durch dieselbe partielle lineare Dgl. 2. Ordnung beschreiben:

(0) $\boxed{\Delta u = \frac{1}{D}\,\frac{\partial u}{\partial t}}$ mit dem Laplace–Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

wenn $u = c(x,y,z,t)$ die **Konzentration** des Stoffes zut Zeit t an der Stelle (x,y,z) beschreibt (und mit der **Diffusionskonstanten** D), dann ist (0) die **Diffusionsgleichung** , und wenn $u = T(x,y,z,t)$ die **Temperatur** zur Zeit t an der Stelle (x,y,z) im Körper beschreibt (und mit der **Temperaturleitfähigkeit** D), dann ist (0) die **Wärmeleitungsgleichung** .

Wir wollen im Folgenden nur den eindimensionalen Sonderfall $u = u(x,t)$ betrachten:

$((*))_h$: $\boxed{\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\,\frac{\partial u}{\partial t}}}$ lineare **Diffusions**– oder **Wärmeleitungsgleichung** ,

und zwar in **I** in einem Stab der *endlichen* Länge L und in **II** in einem *unendlich* langen Stab. Zunächst bestimmen wir jedoch “einige” Lösungen der Dgl. $((*))_h$ und wir verwenden

wieder den **Produktansatz** : $((+))$: $\boxed{\boxed{u(x,t) = P(x)\cdot Q(t)}}$ mit “geeigneten” Funktionen $P(x)$, $Q(t)$:

Einsetzen in die Dgl. liefert die Gleichung: $P''(x)\,Q(t) = \frac{1}{D}\,P(x)\,\dot{Q}(t)$ bzw. $\frac{P''(x)}{P(x)} = \frac{1}{D}\,\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)}$. Da hier die linke Seite höchstens von x und die rechte Seite höchstens von t abhängt, müssen beide Seiten *konstant* sein, d.h. mit einer (zunächst) beliebigen Konstanten $\kappa^2 \in \mathbb{C}$ muss gelten:

$[1]$: $\frac{P''(x)}{P(x)} = \kappa^2$, bzw.: $P''(x) - \kappa^2\,P(x) = 0$, somit: $P(x) = \tilde{C}(+\kappa)\,e^{\kappa\,x} + \tilde{C}(-\kappa)\,e^{-\kappa\,x}$,

$[2]$: $\frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} = D\kappa^2$, d.h. $Q(t) = a\,e^{D\kappa^2 t}$ (wobei a , $\tilde{C}(\pm\kappa)$ beliebig konstant sind), also:

(+) $\boxed{u = \bar{u}(x,t) = e^{D\kappa^2 t}\left(C(+\kappa)\,e^{\kappa\,x} + C(-\kappa)\,e^{-\kappa\,x}\right)}$

mit zwei nur von κ abhängigen Konstanten $C(+\kappa)$, $C(-\kappa)$.

Dies ist eine Lösungsschar für die Dgl. $((*))_h$, die weder Anfangs– oder Randbedingungen berücksichtigt noch physikalisch sinnvoll zu sein braucht.

I. Diffusion in einem endlich langen Stab.

Wir haben die Dgl. $((*))_h$: $\boxed{\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial u}{\partial t}}}$ mit den **Rand**– und **Anfangs-bedingungen**: $\boxed{u(x,0) = f(x)\,,\ u(0,t) = u(L,t) = 0\,,\ 0 \le x \le L\,,\ t \ge 0}$ zu lösen,

wobei $f(x)$ eine vorgegebene Verteilung für $0 \le x \le L$ zur Zeit $t = 0$ ist.

Für die Lösungen (+) ergibt sich aus den **Randbedingungen** für alle $t \ge 0$:

$0 \overset{!}{=} u(0,t) = e^{D\kappa^2 t}\Big(C(+\kappa) + C(-\kappa)\Big)$, d.h. $C(-\kappa) = -C(\kappa)$, und hiermit:

$0 \overset{!}{=} u(L,t) = C(\kappa)\, e^{D\kappa^2 t}\Big(e^{\kappa L} - e^{-\kappa L}\Big)$, d.h. $e^{2\kappa L} = 1$, somit $2\kappa L = \pm 2n\pi i$, also:

$\kappa = \pm\kappa_n \pm \dfrac{n\pi i}{L}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Wegen

$C(\kappa_n)\, e^{\kappa_n x} - C(-\kappa_n)\, e^{-\kappa_n x} = C(\kappa_n)\Big(e^{(n\pi/L)\,ix} - e^{-(n\pi/L)\,ix}\Big) = 2iC(\kappa_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)$

und mit den (zunächst noch) *beliebigen* Konstanten $b_n = 2iC(\kappa_n)$ bekommen wir die Lösungen: $u = u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,Dt}$ und durch Superposition folglich die

Lösungsschar: (++) $\boxed{u = \tilde{u}(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,Dt}}$.

Es bleibt noch die **Anfangsbedingung** zu berücksichtigen; diese liefert:

$f(x) \overset{!}{=} u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)$: das ist eine **Fourierreihe** mit der Grundkreis–frequenz $\omega = \pi/L$ und der Periode $2L$.

Die Koeffizienten b_n sind damit die **Fourierkoeffizienten** der (ungeraden!) Funktion $f(x)$, d.h., es ist $b_n = \dfrac{2}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)dx$.

Für das gestellte Anfangs–/Randwertproblem erhalten wir die **Lösung**:

$$\boxed{\boxed{u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\int_0^L f(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\,\xi\right)d\xi\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,Dt}\right)}}$$: **Diffusion**

bzw. **Temperaturverteilung in einem Stab der Länge** L.

II. Diffusion in einem unendlich langen Stab.

Wir haben die Dgl. $((*))_h$: $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial u}{\partial t}}$ mit einer für alle $x,\, t$ **beschränkten**

Funktion $u(x,t)$, die einer gewissen **Anfangsbedingung** $\boxed{u(x,0) = f(x)}$ genügt.

Die oben in (+) erhaltenen Lösungen u sind Linearkombinationen der beiden Partikulär–lösungen $u_{1,2}(x,t) = e^{D\kappa^2 t \pm \kappa x}$, die mit $\kappa = \alpha + i\omega$ $(\alpha,\, \omega \in \mathbb{R})$ die Form $u_{1,2}(x,t) = e^{\pm(\alpha x + i\omega x)}\, e^{D(\alpha^2-\omega^2)t}\, e^{2i\alpha\omega\, t}$ haben.

Da nun $e^{\alpha x} \to \infty$ für $x \to \infty$ und $e^{-\alpha x} \to \infty$ für $x \to -\infty$ im Fall $\alpha > 0$ und $e^{-\alpha x} \to \infty$ für $x \to \infty$ und $e^{\alpha x} \to \infty$ für $x \to -\infty$ im Fall $\alpha < 0$, kann $u(x,t)$ nur mit $\alpha = 0$, d.h. mit $\kappa = i\omega$ $(\omega \in \mathbb{R})$ beschränkt sein.

Wir bekommen damit für jede Zahl $\omega \in \mathbb{R}$ die Lösung $u = u_\omega(x,t) = F(\omega)\, e^{-D\omega^2\, t + i\omega\, x}$, wobei $F(\omega)$ eine beliebige (nur von ω abhängige) Konstante ist. Durch Superposition

erhalten wir die **Lösungsschar**: (+++) $\boxed{u = \tilde{u}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-D\omega^2\, t + i\omega\, x}\, d\omega}$.

Die **Anfangsbedingung** ergibt: $f(x) \stackrel{!}{=} u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega\, x}\, d\omega$: das ist die **Fourierintegraldarstellung** der Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)$! Damit muss $F(\omega)$ die **Fouriertransformierte** dieser Funktion sein:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\right\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\,\xi}\, d\xi\,,$$

und für u ergibt sich hieraus: $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-D\omega^2\, t + \omega\,(x-\xi)\, i}\, d\omega\, d\xi$.

Das innere Integral können wir ausrechnen: mit quadratischer Ergänzung

$$-D\omega^2\, t \,+\, \omega\,(x-\xi)\, i = -Dt\left(\omega \,-\, \frac{(x-\xi)\, i}{2Dt}\right)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4Dt}$$

und der Substitution: $z = \sqrt{Dt}\left(\omega \,-\, \dfrac{(x-\xi)}{2Dt}\, i\right) = \sqrt{Dt}\cdot\omega \,-\, \dfrac{(x-\xi)}{2\sqrt{Dt}}\, i$

$\left(\Rightarrow\ d\omega = \dfrac{1}{\sqrt{Dt}}\, dz\,,\ z \text{ von } -\infty - i\rho \text{ bis } \infty - i\rho \text{ mit } \rho = \dfrac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}}\right)$ ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-D\omega^2\, t + \omega\,(x-\xi)\, i}\, d\omega = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt\left(\omega - \frac{(x-\xi)}{2Dt}\, i\right)^2}\, d\omega =$$

$$= e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\, \frac{1}{\sqrt{Dt}} \int_{-\infty-i\rho}^{\infty-i\rho} e^{-z^2}\, dz = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Dt}}\,.$$ (vgl. Beisp. 2 in Abschnitt 19.D)

Das ergibt die **Lösung**: $\boxed{u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\, d\xi}$, die wir mit der

Funktion $g_t(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ und dem Faltungsprodukt (siehe Nummer 19.15)

auch bequem in der Form: $\boxed{\boxed{u(x,t) = f(x) * g_t(x)}}$ schreiben können.

(Das Faltungsprodukt “glättet”!)

In der Praxis hat man häufig die **Anfangsbedingung**: $\boxed{f(x) = A\,\delta(x)}$

($A > 0$ konstant, $\delta(x)$ = Deltafunktion: siehe Abschnitt 19.F) ; hiermit erhalten wir die Lösung:

$$u(x,t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\, d\xi = \frac{A}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \right]_{\xi=0}\,,$$ also:

$$\boxed{\boxed{u(x,t) = A\, g_t(x) = \frac{A}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}}$$: das ist für jedes $t > 0$ eine **Gauß–Kurve**, die mit wachsendem t immer flacher wird:

$$\forall t > 0 : \; u(x,t) \to 0 \;\; (x \to \pm\infty)\,, \; \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = A\,; \;\; \forall x : \; u(x,t) \to 0 \;\; (t \to \infty)\,.$$

ENDE

Index