



**Universität Konstanz**  
Fachbereich Physik

# **Kann die Higgs Skalar-Tensortheorie zur Lösung der modernen Probleme der Kosmologie beitragen?**

Diplomarbeit

vorgelegt von  
Nils Manuel Bezares Roder

Erarbeitet in der **Gravitationsphysik**-Gruppe der Universität Konstanz

Betreuer: **Prof. em. Dr. H. Dehnen**  
Universität Konstanz  
**PD Dr. B. Fauser**  
Max-Planck-Institut für Mathematik in  
den Naturwissenschaften

Konstanz, 1. August 2005

„Die Dingheit muß etwas unbedingtes sein.“  
M. Heidegger, Die Frage nach dem Ding, 1935/36

“Izena duen guztiak izatea ere badauke.”  
(*Was Name hat, existiert*)  
Baskischer Spruch

A mi familia, con especial cariño a mis padres,  
por su preocupación y apoyo (Aceves incluidas).

# Kann die Higgs Skalar-Tensortheorie zur Lösung der modernen Probleme der Kosmologie beitragen?

Nils M. Bezares Roder

Konstanz, den 1. August 2005

## Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Vorwort und Danksagung</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Die Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .   | 3         |
| 2.2      | Die Standardmodelle der Elementarteilchen . . . . .  | 4         |
| 2.3      | Die Skalar-Tensortheorien . . . . .  | 6         |
| 2.4      | Die HSTT und diese Arbeit . . . . .  | 8         |
| <b>3</b> | <b>Higgsmechanismus mit Krümmungskopplung</b>  | <b>10</b> |
| 3.1      | Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und das Higgspotential $V(\phi)$ . . . . .                  | 10        |
| 3.2      | Die Feldgleichungen vor Symmetriebrechung . . . . .  | 12        |
| 3.3      | Spontane Symmetriebrechung der Higgs Skalar-Tensortheorie . . . . .                          | 14        |
| 3.4      | Die Feldgleichungen nach Symmetriebrechung . . . . .   | 17        |
| 3.4.1    | Die kosmologische Funktion und die kosmologische Konstante . . . . .                         | 19        |
| 3.4.2    | Über die kosmologische Konstante $\Lambda_0$ . . . . .                                       | 20        |
| 3.5      | Die Higgsfeldgleichung nach Symmetriebrechung . . . . .                                      | 22        |
| 3.6      | Über die Renormierung der Gravitationskonstante $G$ . . . . .                                | 23        |
| <b>4</b> | <b>Higgsgravitation und Zentralsymmetrie</b>   | <b>25</b> |
| 4.1      | Die verallgemeinerte Einsteingleichungen . . . . .   | 25        |
| 4.2      | Die Dunkle Materie . . . . .   | 27        |
| 4.2.1    | DM-Arten und DM-Modelle . . . . .  | 30        |
| 4.3      | Die zentralsymmetrische Metrik in der Skalar-Tensortheorie . . . . .                         | 33        |
| 4.4      | Feldgleichungen für die ideale Flüssigkeit . . . . .   | 35        |
| 4.5      | Nichtlineare Betrachtung der Vakuumsfeldgleichungen . . . . .                                | 37        |
| 4.6      | Meißner-Effekt in der HSTT . . . . .   | 46        |
| <b>5</b> | <b>Linearisierte Modelle der zentralsymmetrischen HSTT</b>                                   | <b>52</b> |
| 5.1      | Die verallgemeinerte Emden-Theorie polytroper Gase . . . . .                                 | 52        |
| 5.2      | Linearisierte Vakuumlösung der statischen Metrik für die isolierte massive Kugel. . . . .    | 55        |
| 5.3      | Zur Lösung der sphärisch-symmetrischen Metrik ohne erzeugbaren Higgsteilchen . . . . .       | 57        |
| 5.3.1    | Asymptotische Betrachtung des $\xi$ -Feldes . . . . .  | 58        |
| 5.4      | Lineare Materielösung der statischen Metrik mit Higgsteilchen und $p \ll \rho c^2$ . . . . . | 59        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 5.5       | Das statische linearisierte Linienelement der homogenen Kugel mit Higgsteilchen und $p \ll \rho c^2$ . . . . .                   | 63         |
| 5.6       | Materielösung und Anschlußbedingungen für Polytropenindex $\gamma = 2$ mit Quelle für die Higgsteilchen . . . . .                | 69         |
| 5.6.1     | Das $\gamma = 2$ -polytrope linearisierte Linienelement mit Higgsteilchen ohne massiven Kern . . . . .                           | 75         |
| 5.7       | Teilweise linearisierte Skalar-Tensor-Theorie mit Higgsteilchen und singulärer extremer Zentralmasse . . . . .                   | 81         |
| 5.7.1     | Die statische zentralsymmetrische Lösung für die homogene Kugel mit singulärer Zentralmasse . . . . .                            | 82         |
| 5.7.2     | Das teilweise linearisierte statische Linienelement einer homogenen Kugel mit Extremmasse und Quelle des Higgsteilchen . . . . . | 87         |
| <b>6</b>  | <b>Die Rotationsgeschwindigkeit in statischer sphärischer Symmetrie</b>  | <b>93</b>  |
| 6.1       | Die Geodätengleichung und die Tangentialgeschwindigkeit . . . . .  | 93         |
| 6.2       | Die Rotationskurven . . . . .  | 95         |
| 6.2.1     | Die Rotationskurven im linearen Modell homogener Dichteverteilung  | 95         |
| 6.2.2     | Die Rotationskurven für die linearisierte polytrope $\gamma = 2$ -Kugel ohne Kern . . . . .                                      | 98         |
| 6.2.3     | Die Rotationskurven im teilweise linearisierten Modell der homogenen Kugel mit singulärer Zentralmasse . . . . .                 | 100        |
| 6.2.4     | Die Rotationskurven und Vergleich mit empirischen Daten . . . . .  | 104        |
| 6.3       | Betrachtung ungebundener Zustände für die homogene Kugel . . . . .   | 109        |
| <b>7</b>  | <b>Kosmologie und die Friedmann-Robertson-Walker Metrik</b>  | <b>115</b> |
| 7.1       | Das Standard-Modell . . . . .  | 115        |
| 7.1.1     | Die Quintessenz . . . . .  | 116        |
| 7.2       | Die RW-Metrik . . . . .  | 117        |
| 7.2.1     | Die Krümmungskonstante . . . . .   | 118        |
| 7.2.2     | Weitere Probleme der Kosmologie und die Inflation . . . . .  | 119        |
| 7.3       | RW-Metrik und verallgemeinerte Friedmanngleichungen . . . . .  | 122        |
| 7.4       | Allgemeine Eigenschaften des verallgemeinerten FRW-Modells . . . . .   | 127        |
| 7.5       | Statische Lösung der verallgemeinerten Friedmanngleichungen . . . . .  | 129        |
| 7.6       | Dynamik aus den verallgemeinerten Friedmanngleichungen . . . . .   | 133        |
| 7.6.1     | Stabilitätsuntersuchung der statischen Lösung und nicht-statische Lösungen . . . . .   | 133        |
| 7.6.2     | Fazit des linearen Modells: Inflation und atmendes Universum . . . . .   | 142        |
| 7.6.3     | Numerische Lösung des verallgemeinerten Friedmann-Modells . . . . .  | 143        |
| 7.7       | Vergleich des linearisierten Modells mit der numerischen Lösung . . . . .  | 148        |
| <b>8</b>  | <b>Zusammenfassung</b>   | <b>149</b> |
| <b>9</b>  | <b>Anhang A: Priester-Modell</b>   | <b>150</b> |
| <b>10</b> | <b>Anhang B: Definitionen und Konventionen</b>   | <b>157</b> |
| 10.1      | Naturkonstanten und Einheiten . . . . .  | 157        |
| 10.2      | Signatur und Indizes . . . . .   | 157        |
| 10.3      | Die Ableitung . . . . .  | 158        |
| 10.4      | Konnektionen und Krümmungstensoren . . . . .   | 158        |
| 10.5      | Higgfelder . . . . .   | 159        |

**11 Referenzen****160**

## 1 Vorwort und Danksagung

Ich möchte mich bei all denen bedanken, die die Erstellung dieser Arbeit in irgend einer Weise möglich gemacht haben. All denjenigen Leuten, die in diesem sich ändernden und nicht immer einfachen Abschnitt meines Lebens hinter mir standen und trotz all den Schwierigkeiten dort geblieben sind oder dazu kamen, wenn ich auch nicht jeden explizit erwähnen kann.

In erster Linie möchte ich Prof. em. Dr. Heinz Dehnen danken, daß er mich als Diplomand angenommen hat und mir dieses äußerst interessante Thema gab. Auch für die Betreuung und Hilfe während der Diplomarbeit, sowie für seine Geduld und Interesse und die interessanten Gespräche, Tipps, Hilfestellungen und Kommentare über Wissenschaft, von denen man sehr viel lernen kann.

Besonders bedanke ich mich bei Herrn Hemwati Nandan, der mich so viel unterstützte und Hilfestellungen und Vorschläge gab.

Den Besuchern, Kollaboratoren und ehemaligen Mitarbeitern der Gruppe der Gravitationsphysik Konstanz bin ich sehr dankbar, für die Diskussionen und Anregungen, insbesondere Dr. Dieter Ebner, Prof. Dr. Jorge Luis Cervantes Cota am ININ und Prof. Dr. Manuel G. Corona Galindo am INAOE, die mich als eigentlichen Wissenschaftler anerkannten und Kraft gaben, weiter zu machen. Auch PD Dr. Bertfried Fauser, der die Korrektur und Begutachtung meiner Diplomarbeit freundlicherweise übernahm.

Bei Dr. Thomas Konrad der AG Audretsch bedanke ich mich für die moralische Unterstützung, sowie ein großes Dankeschön insbesondere auch an Roman Petres und Ing. Rafael Forsbach Valle, ohne deren Zeit und Hilfe die Bereitstellung dieser Arbeit viel schwieriger gewesen wäre.

Die Unterstützung aller Art von Seiten meiner Eltern und meiner Schwester Karen und ihrem Mann Helmut darf ich nicht vergessen. Deren Hilfe und Bereitstellung, teilweise sogar auf Korrekturen meines Textes, war mir in dieser turbulenten Zeit von großer Bedeutung. Ich weiß nicht, was ich in den letzten Monaten ohne sie gemacht hätte, und mir ist bewußt, daß es für sie in dieser Zeit und in der Vorbereitung davor nicht immer leicht mit mir war.

## 2 Einleitung

*Die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie und des Standardmodells werden erörtert sowie deren Mängel, insbesondere in Richtung einer Vereinheitlichung, die durch Skalar-Tensortheorien zu lösen versucht werden. Die Entwicklung dieser Theorien wird gegeben im Hinblick auf eine Verallgemeinerung der Relativität, Massenerzeugung und Lösung der kosmologischen Probleme durch Vereinheitlichungsmechanismen.*

### 2.1 Die Allgemeine Relativitätstheorie

1915 stellte A. EINSTEIN unter Mitwirkung D. HILBERTS die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) auf, die die erste Eichtheorie war und die Gravitation als Folge der Krümmung der Raumzeit postulierte. Diese geometrische Theorie vereinigt Raum und Zeit in ein vierdimensionales Gebilde, dessen wichtigste Eigenschaften gegeben sind durch die sog. EINSTEINSchen Feldgleichungen [8]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3; \kappa = 8\pi G, \quad (1)$$

unter der wichtigen vereinigenden Konsequenz (BIANCHI-Identität)

$$G_{\mu\nu||\nu} \equiv T_{\mu\nu||\nu} \equiv 0. \quad (2)$$

Die Feldgleichungen lassen sich mittels des Variationsprinzips herleiten, nach Vorgabe der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa}R + \mathcal{L}_M, \quad (3)$$

wobei  $R$  und  $R_{\mu\nu}$  die Krümmung der Raumzeit wiedergeben und die Metrik  $g_{\mu\nu}$  die Form der i.d.R. nicht flachen Raumzeit und seine geometrische Eigenschaften besitzt. Dieser Metrik entspricht im nichtrelativistischen Limes das NEWTONsche Gravitationspotential  $\Phi_N$  in erster Näherung [8], und durch sie ergeben sich die YANG-MILLS-Konnektionen, die hier die CHRISTOFFEL-Symbole  $\Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}$  sind und in den Elementarteilchenmodellen den Eichpotentialen der Eichfelder entsprechen. Sie definieren die kovariante Ableitung  $D_{\mu}$ , die die Kovarianz der Theorie gegenüber beliebigen Raum-Zeit-Transformationen garantiert und formal die Wirkung der Gravitation in die Bewegungsgleichungen einführt. Außerdem ergibt sich aus der RICCI-Identität die Krümmung der Raumzeit entsprechend dem RIEMANN-Tensor  $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa}$  durch 4-Rotation plus Kommutator der Konnektionen [33].

Die Allgemeine Relativitätstheorie hat ihre Anwendung in der Untersuchung astrophysischer Phänomene, indem sie die Dynamik massiver Körper im All erklärt. Man stellt sich gigantische Materiewolken im Universum vor, die durch die Wirkung der Gravitation zusammengehalten werden. Unter den richtigen Bedingungen werden die Wolken zu kompakteren Strukturen, sodaß Sterne und Planeten entstehen können. Deren stabile Struktur ist durch das Gleichgewicht zwischen anziehender Gravitation und der auseinandertreibenden Wirkung des Gasdrucks im Sterninneren gegeben.

Trotz großer Erfolge läßt die Theorie aber eine Erklärung der Masse selbst und insbesondere der Entstehung der Masse außer Acht und ließ sich bis jetzt nicht mit den Elementarteilchentheorien richtig vereinigen. Sie ist nicht renormierbar und somit nicht quantisierbar, was eine Quantengravitation aus der EINSTEINSchen Theorie bis heute unmöglich macht. Eine solche wäre aber wichtig, will man alle elementaren Wechselwirkungen mit einer einzigen Theorie erklären.

Außerdem gibt es auch ungelöste makroskopische Probleme (z.B. die anscheinend fehlende Masse im Universum [37, 61] und/oder die flachen Rotationskurven spiraler Galaxien [54, 99, 87, 88, 61]). Selbst das Urknallmodell zeigt ungünstige Eigenschaften, wie die “Anfangssingularität” oder die Nicht-Erklärung der Expansion des Universums, abgesehen von Schwarzen Löchern, die die Theorie zwar voraussagt, selbst aber nicht richtig erklären kann, weil solche Phänomene Quanteneffekte zeigen müßten.

Ohne intrinsische Antwort bleiben Probleme mit dem Weltalter von Kugelsternhaufen oder Galaxien oder die Blasenstruktur des Universums, und erklären läßt sich auch nicht die kosmologische Konstante  $\Lambda_0$  [109], die antigravitativ wirken soll und nach neueren Messungen der Helligkeits-Rotverschiebungsrelation von Super Novae des Typs Ia nötig ist [118] und das Universum beschleunigt, aber von EINSTEIN nur per Hand in die Theorie eingeführt wurde.

## 2.2 Die Standardmodelle der Elementarteilchen

Das Standardmodell der Elementarteilchen von GLASHOW, SALAM, WEINBERG und GELLMANN beruht auf den allgemeineren YANG-MILLS-Theorien der Feldtheorie. Diese entsprechen spezialrelativistischen, i.A. nichtabelschen Verallgemeinerungen der MAXWELL-Theorie in  $N$  Dimensionen, gegeben durch die Dimension der Eichgruppe, die die Anzahl der Isobaren- oder Iso- Spinkomponenten der  $\psi$ -Felder bestimmt.

Im Standardmodell wird die Dimension durch die Anzahl der bezüglich der Wechselwirkung ununterscheidbaren Teilchen bestimmt, wodurch die betrachtete Eichgruppe gegeben ist [33]. Faßt man Leptonen und Quarks in Multipletts zusammen im sog. Standard- “Großvereinheitlichenden Modell” GUT unter der Eichgruppe  $SU(5)$  von GEORGI und GLASHOW, so sind alle elementaren Wechselwirkungen, außer der Gravitation, vereinigt.

Die “GUT(5)” operiert mit der speziellen unitären Symmetriegruppe  $SU(5)$ , die sich durch Brechung der Symmetrie durch sogenannte Higgsfelder  $\phi$  in die Restsymmetrie  $SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$  des Standardmodells spaltet [80]. Dieses Modell erklärt eine Produktgruppe für die verschiedenen elementaren Wechselwirkungen. Sie sind die *Starke Wechselwirkung*, gegeben durch die Gruppe  $SU(3)_C$  der Quantenchromodynamik (QCD), die *Schwache* durch  $SU(2)_W$  der Quantenasthenodynamik (QAD) und der *Elektromagnetismus*, identifizierbar mit der Gruppe  $U(1)_Y$ .<sup>1</sup>

Die Dimension der verschiedenen Teilgruppen gibt die Anzahl der Generatoren der verschiedenen Wechselwirkungen und somit die Anzahl der Eichfeldern oder Eichbosonen, die für jede Wechselwirkung zuständig sind. Zu  $N$ -dimensionalen Transformationsgruppen existieren  $N^2$  linear unabhängige, hermitesche Generatoren, wobei einer davon die Einheitsmatrix ist (Basis der  $U(1)$ ). Die restlichen  $N^2 - 1$  sind spurfrei und bilden eine Basis des  $SU(N)$ -Gruppenraums.

Für den Elektromagnetismus ( $N = 1$ ) hat man die Photonen als Eichfelder, mit den Elektronen (oder auch Myonen und Tauonen) als ununterscheidbaren Teilchen; in der QAD ( $N = 2$ ) hat man  $N^2 - 1 = 3$  neue Generatoren, die Weakonen  $W^\pm$  und  $Z^0$ , mit Neutrinos und Elektronen ununterscheidbar für die Wechselwirkung (in 3 Familien); in der QCD ( $N = 3$ ) die 8 Gluonen als Träger der Farbladungen, mit den 3 “farbigen” Quarks (in 6 “Geschmäcker”) als ununterscheidbar. Zuletzt folgten aus  $SU(5)$  insgesamt  $5^2 - 1 = 24$  Eichbosonen, von denen 12 neu sein sollten und als  $X$ - und  $Y$ -Bosonen bezeichnet werden. Die ununterscheid-

<sup>1</sup>Die Elektrodynamik ist gegeben durch  $U(1)_{em}$ , was nicht genau die selbe Gruppe darstellt wie  $U(1)_Y$ , da die zweite noch die Zustände der Neutrinos enthält, die nicht elektrodynamischer Natur sind. Deswegen spricht man in  $U(1)_Y$  über die Hyperladung  $Y$  als Eichboson, das aber mit dem Photon durch die GELLMANN-NISHIJIMA-Formel verknüpft ist.

baren Teilchen wären drei gleichartige Quarks verschiedener Farbladung, das Positron und das Antineutrino (alle rechtshändig).

Die einfachste Symmetrie zur Vereinigung des Standardmodells ist die  $SU(5)$ , die hier teilweise, und analog dem Standard-Modell, betrachtet wird. Sie führt zur Konsequenz, daß die Komponenten des Multipletts  $\psi$  ineinander übergehen können, insbesondere Leptonen in Quarks, was bis heute nicht beobachtet wurde<sup>2</sup>. Die YANG-MILLS-Theorien stoßen aber auch auf andere, noch nicht ganz gelöste Fragen:

1. Sie beinhalten nicht die **Gravitation** als weitere elementare Wechselwirkung,
2. Sie postulieren die Existenz von HIGGS-Bosonen zur Erzeugung der Masse durch Symmetriebrechung. Dennoch wurden diese noch nicht experimentell nachgewiesen,
3. Sie postulieren die Paritätsverletzung *ad hoc*,
4. Sie besitzen zu viele freie Parameter,
5. Sie erklären nicht die Anzahl an Familien,
6. Hierarchieproblem: die "nackte" Masse der Quarks ist nicht meßbar. Sie bedarf Korrekturen durch die Selbstenergie der HIGGS-Bosonen,
7. ...

Das erste Problem heißt unter anderem, daß die Elementarteilchentheorien Eichbosonen der Gravitation (Gravitonen) beinhalten sollten um die Gravitation quantenmechanisch zu erklären. Versuche einer Vereinheitlichung gibt es zum Beispiel innerhalb der (supersymmetrischen) Supergravitation und Stringtheorien und innerhalb der sog. **Skalar-Tensor-Theorien**, hier insbesondere durch die *Higgs Skalar-Tensortheorie HSTT*, zur Vereinheitlichung aller fundamentalen Wechselwirkungen.

Das zweite Problem benötigt noch experimentelle Realisierung. Resultate des CERN September 2000 ließen auf Higgsteilchenmassen im Bereich von 114GeV hoffen. Nachdem die Untersuchungen eingestellt wurden, konnten diese Resultate dennoch nicht wiederholt werden. Aus theoretischer Sicht wäre diese eine relativ gute Energieskala für die Higgsteilchen, da, supersymmetrisch gesehen, eine maximale Top-Squark Mischung, d.h. der Top-Quarks des SM mit den supersymmetrischen Partnern, auf eine Higgsmasse bei 125GeV oder höher hoffen läßt (schon 112GeV, im Falle, daß die Mischung vernachlässigbar ist (mit  $m_{\bar{t}} = 1TeV$  für den Top-Squark) [77]). Ähnliches gilt in anderen Arbeiten, wie [78], in der die elektroschwache supersymmetrische Skala  $m_H \lesssim 130GeV$  benötigt wird, obwohl ältere Analysen, von den Zeiten vor der Entdeckung der Top-Quarks, mit  $m_T=175GeV$  eher instabile Higgsteilchen für  $m_H \lesssim 140GeV$  erwarten ließen [74]. Die obere Grenze liegt bei 700GeV [71], da oberhalb dieser Skala die einfachste Version der elektroschwachen Theorie inkonsistent werden sollte. Das Problem könnte innerhalb der Theorie verändert oder sogar teilweise behoben werden. Die Frage nach der Fundamentalität der Higgsteilchen bleibt offen. Eine Natur als Quasiteilchen, also als effektive Erscheinungen tieferer Natur (insb.

<sup>2</sup>Die Protonen, die wegen solchen Übergängen zerfallen sollten, sind nach jüngsten Untersuchungen sogar stabiler als sie es nach Abschätzungen mit der  $SU(5)$ -GUT sein sollten.

Technicolor TC), oder zusammengesetzter Teilchen, gekoppelt z.B. durch die starke Wechselwirkung [72] kann noch nicht ausgeschlossen werden. Demnach könnten sie gar Anregungszustände anderer Teilchen oder von Systemzuständen wie dem Vakuum sein [57].

Das dritte Problem liegt außerhalb dieser Arbeit. Beim hiesigen Higgsmechanismus (anders als z.B. im SCHWINGER- $\sigma$ -Modell, mit 3 massiven und einem masselosen Teilchen als Resultat [76]) muß die vektorielle Natur und Kopplung nur an einen Helizitätszustand, und somit CP-Verletzung, postuliert werden. Das Problem wird aber in Arbeiten wie [32, 52] untersucht, innerhalb einer Eichtheorie der Gravitation durch Eichung des Spins.

Das Hierarchieproblem wird durch die Supersymmetrie-Modelle (SuSy) behoben. Diese entsprechen einer Verallgemeinerung des Standard-Modells durch Postulierung der sog.  $R$ -Parität, durch die jedem Boson ein zugehöriges Fermion und umgekehrt zugeordnet wird. Dieses sollte, wenn man nicht am fundamentalen Charakter der Higgsteilchen zweifelt, die einzige mögliche Symmetrie sein, die den Higgsskalar vor zu großen radiativen Korrekturen in seiner Masse schützen kann [73], nicht aber im ganzen, da SuSy nicht exakt in Erscheinung auftritt (s. auch [9]).<sup>3</sup>

Vereinigungen der Gravitation mit der Supersymmetrie in einer Eichtheorie führen zur sog. Supergravitation. Es bestehen aber Analogien in verschiedenen Merkmalen der Supergravitation mit den der HSTT, insbesondere weil die HIGGS-Teilchen den Gravitonen ähneln [11] und beide Theorien zu antigravitativen Kräften führen [102]. Das ist ein Grund, wieso die Dynamik der HIGGS-Teilchen und -Felder innerhalb der EINSTEINSchen Theorie untersucht werden sollte, insbesondere in den Skalar-Tensortheorien, deren Geschichte bis Anfang des 20. Jahrhunderts reicht, als Versuche, die Relativität zu verallgemeinern.

### 2.3 Die Skalar-Tensortheorien

Seit der Postulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie haben Physiker immer wieder versucht, die Theorie so zu verallgemeinern oder zu verbessern, daß sie sich mit den anderen Naturkräften vereinigen läßt und auch, daß eine vollkommener Formulierungen bessere oder sogar neue Erklärungen der Naturphänomene gibt.

Mit diesen Gedanken geometrisierten 1917 TH. KALUZA und O. KLEIN den Elektromagnetismus in einer vereinheitlichenden fünfdimensionalen Theorie der Elektrodynamik und der Gravitation (die später zum Grundgedanken der heutigen *Stringtheorien* zur Geometrisierung der übrigen Wechselwirkungen in mehreren Dimensionen werden würde).

1944 sprachen P. JORDAN und 1948 Y. THIRY die Vermutung aus, gestärkt von Gedanken u.a. EINSTEINS und DIRACS, daß die Gravitationskonstante  $G$  möglicherweise vom "Weltalter" abhängt [23]. In den nächsten Jahren wurde KALUZA-KLEINS Theorie von JORDAN übernommen und verallgemeinert, indem er, aus gruppentheoretischen Überlegungen heraus erklärte, daß ein allgemeines fünftes Diagonalelement in der Metrik zu einer variablen skalaren "Gravitationskonstante" (oder Gravitationszahl) führen würde, was ihm zu seiner *Projektiven Relativitätstheorie* führte [66]<sup>4</sup>.

1961 formulierten C. BRANS und R. DICKE [16] eine modifizierte Version der Allgemeinen Relativitätstheorie, die kompatibel mit dem MACHschen Prinzip sein sollte. Sie erklärten somit, wie früher schon JORDAN, die Gravitationskonstante  $G$  als variabel, abhängig von der Massenverteilung im Universum, Funktion einer skalaren Variablen, die sie als Feld in die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  koppelten.

<sup>3</sup>Nach den SuSy-Modellen läßt sich denken, daß die  $SU(3)_C \otimes U(1)_Y$ -Brechung auch die der Supersymmetrie ist, und zwar in natürlicher Weise aufgrund von Quantenkorrekturen.

<sup>4</sup>Sollte  $G$  funktionswertig sein, dann könnte dies die scheinbare Unmöglichkeit erklären, sie in mehr als 3 Dezimalen genau zu messen [42].

BRANS und DICKES Theorie wurde später u.a. von R. WAGONER [113] durch Zunahme mehrerer skalarer Felder verallgemeinert oder mit JORDANS Theorie in JORDAN-BRANS-DICKE-(JBD-) Theorien verknüpft [23]. Doch erst A. ZEE verknüpfte 1979 in seiner *Gebrochen-symmetrischen Theorie der Gravitation* [116, 117] diese Idee skalarer Felder mit der **Spontanen Symmetriebrechung** als zentraler Bestandteil des Vereinigungsschemas, womit *Vakuumswerte*  $v$  des skalaren Feldes sowohl die Masse der intermediären Bosonen als auch die *Gravitationskonstante*  $G$  generieren, deren Wert bei steigender Temperatur schwächer wird, um das Horizont-Problem der Kosmologie zu lösen. Dabei dachte er an einen vereinigten Mechanismus der **Symmetriebrechung durch** ein und dasselbe Feld, nämlich das **HIGGS-Feld** als Link zwischen der Gravitation und den anderen Wechselwirkungen, wie schon Y. FUJII 1974 durch eine HIGGS-Kopplung an die Krümmung postuliert hatte [51]. Die Kopplung des Higgsfeldes soll mit dem fundamentalen eichinvarianten Konstruktionsblock  $\phi^\dagger\phi$  gegeben sein, mit der einfachsten Kopplung der Teilchen mit dem Higgsfeld, nämlich

$$\tilde{\lambda}x\phi^\dagger\phi \quad (4)$$

mit  $x$  als einem skalaren Feld, was zu einer Mischung zwischen dem skalaren Feld und dem Higgsfeld führt [65], wobei hier als  $X$ -Feld die Raumkrümmung genommen wird.

Die Betrachtung, ob das Higgsfeld überhaupt die Eigenschaften hat, um in natürlicher Weise an die Gravitation zu koppeln, führte H. DEHNEN *et al.* 1990 [26] dann, seine kurzreichweitige gravitative Eigenschaften zu untersuchen und eine mit der ZEEschen verwandten Theorie vorzustellen [28].

Das Higgsfeld wechselwirkt mit den massiven Teilchen. Diese skalare Wechselwirkung ist nach [26] gravitativer Art und YUKAWA-artig; auch im Standard-Modell [27]. Das Feld  $\phi$  koppelt mit den Massen und diese sind ihrerseits die Quelle dieses Higgsfeldes, während zugleich die Masse der Elementarteilchen über die Symmetriebrechung erzeugt wird.

Auch aus mehrdimensionalen Gravitationstheorien folgen JBD- verwandte Theorien, da nach dem *Konformen Äquivalenztheorem* solche Gravitationstheorien konform gleich der gewöhnlichen Allgemeinen Relativitätstheorie sind mit einem zusätzlichen skalaren Feld [22]. Daß das skalare Feld dasjenige von HIGGS sein sollte, folgt dann aus Betrachtung der physikalischen Eigenschaften und mathematischen Notwendigkeit, zuletzt aber der experimentellen Realisierung.

Die Existenz eines zusätzlichen skalaren Vektorfeldes, nämlich das des HIGGS-Bosons, macht aus dem Standard-Modell eine renormierbare Theorie [110] (und demzufolge mathematisch konsistent [111]). Die Vereinigung der Idee von BRANS und DICKES mit dem Higgsfeld-Mechanismus behält diese Eigenschaft und macht aus ihr eine renormierbare Theorie der Gravitation [28] mit einer funktionellen kosmologischen "Konstante", wobei EINSTEINS Theorie nach Symmetriebrechung nahe des Higgsfeld- Grundzustandes realisiert wird.

Bis jetzt ist die Existenz der HIGGS-Teilchen, Vektorbosonen, noch nicht nachgewiesen, sodaß man denken kann, daß sie entweder sehr massiv oder vielleicht gar nicht erzeugbar sind (oder sie gibt es nicht). Auf jeden Fall, wenn der Higgsmechanismus die Physik richtig wiedergeben soll (und bis jetzt hat er sich trotz fehlendem Nachweis der Higgsbosonen gut bewährt), soll oberhalb eines bestimmten Energiebereiches  $E_t$  neue Physik ins Spiel kommen. Dann gibt es laut M. VELTMAN [110] zwei Möglichkeiten:

1. Zur massiven YANG-MILLS-Theorie kommt der Higgs-Mechanismus hinzu, oder
2. Man hat eine reine masselose YANG-MILLS-Theorie.

Wenn man Massenerzeugung so versteht, daß die Teilchenzustände aufgrund der Wechselwirkung mit den Higgsteilchen massiv werden und GOLDSTONE-Bosonen (masselose

Higgsteilchen) verschwinden, indem sie absorbiert werden und zum Teil dieser Masse und zu den longitudinalen Komponenten der Polarisation der massiven Vektorbosonen (der massiven Eichfelder) werden ([59], S.256ff), besagt die zweite Möglichkeit, daß die Polarisation der Vektorbosonen verschwindet. Das wäre der Fall, wenn die Masse der Higgsteilchen so groß wäre, daß sie nicht entstehen könnten. Somit bliebe die Theorie mathematisch konsistent. Damit bliebe die Problematik der Entstehung der Masse eigentlich außerhalb der Theorie. In dem Fall müßte sie aus einem anderen Mechanismus zu erklären sein.

Innerhalb der Theorie kann durch die Energieskala unterschieden werden, ob das Higgsfeld bei der Symmetriebrechung gerade den Zuständen Masse “gibt” oder nicht. Das führt zu zwei verschiedenen Ansätzen, die dennoch viele Analogien besitzen und für verschiedene Symmetriegruppen der Symmetriebrechung gültig sein könnten [18, 19]. Sie unterscheiden sich insbesondere darin, daß bei Kopplung des Higgsfeldes an die Materie-Lagrangedichte [29] (und an  $R$ , was die HSTT ausmacht), die Higgsteilchen aus der Theorie entkoppeln und, außer gravitativ, nicht mehr angeregt werden können. Solche Entkopplung der Higgsbosonen basiert auf einer nichtminimalen Kopplung mit der Gravitation, woraus eine lange Wellenfunktion-Renormierung der Higgsbosonen folgen soll, die die Kopplung der Higgsbosonen bis zur gravitativen Stärke reduziert, sodaß HIGGS effektiv aus der Theorie verschwindet [65].

Das formale  $X$ -Feld, hier teilweise identifizierbar mit dem Krümmungsfeld im Lagrangian, besitzt dabei Ähnlichkeiten mit dem hypothetischen *Graviton*, da beide unter der Eichgruppe Singulett sind [11], was wiederum die Tatsache unterstützt [10], daß das Higgspotential eine kosmologische “Konstante” generiert [28].

Die Generierung einer kosmologischen “Konstante” (oder besser gesagt Funktion) kann bei der Lösung mehrerer kosmologischer Probleme helfen, da sie antigravitativ wirkt, was laut J. SCHERK auch Formen der *Supergravitation* beim Austausch von Vektorbosonen zeigen [65]; *Antigravitation* die das Problem der fehlenden Masse des Universums lösen könnte [11] und die die richtige Erklärung der *flachen Rotationskurven* spiraler Galaxien liefert [99, 100, 54] oder die zu einer *modifizierten Newton-Dynamik* (MOND) führen könnte [99, 87, 88].

Die Modifizierung der klassischen Dynamik folgt aus der Kurzreichweitigkeit der Higgsgravitation, die die Existenz massiver Gravitationsteilchen (nämlich die Higgsteilchen) zusätzlich zu den Gravitonen als Eichbosonen einer Quantengravitation suggeriert [100], insbesondere, wenn das EÖTVÖS-Experiment zu einem Ergebnis führen soll, das ungleich Null ist [45], woraus man auf die Existenz einer sog. 5. Kraft, vielleicht mit Higgsnatur, folgern kann [49, 6]<sup>5</sup>.

Die Modifizierung der Dynamik, folgend aus dem Higgsfeld, gekoppelt an der Raumzeitkrümmung, könnte die Existenz von Dunkler Materie essentiell irrelevant machen und nicht nur die theoretische Untersuchungen massiver Gebilde wie Sterne oder Galaxien im All verbessern, sondern auch die allgemeine kosmologische Untersuchungen aus den Friedmannmodellen.

Die Standardmodelle der Kosmologie stoßen auf mehrere Probleme, wie das der Flachheit oder des Horizonts, sowie auch die fehlenden Beweise von magnetischen Monopolen. Die Inflationsmodelle könnten auch verbessert werden, und die Existenz der kosmologischen Funktion ausgehend aus dem Higgsfeld könnte die Dunkle Energie als antigravitative Wechselwirkung erklären.

---

<sup>5</sup>In einigen Texten besagt die Spontane Symmetriebrechung allein schon die Existenz einer 5. Kraft, die dazu notwendig ist (siehe z.B.[70]).

## 2.4 Die HSTT und diese Arbeit

Die Higgsgravitation ist öfters verdächtigt, für gewisse Änderungen der NEWTONSchen Gesetze im kurzreichweitigen (“Fünfte Kraft” [10, 11, 6]) und im kosmologischen Bereich (Flache Rotationskurven der Spiralgalaxien [28, 54]) zu verursachen, was mit der gravitativen (kurzreichweitigen) Kopplung des Higgsfeldes [26], auch innerhalb des SM [27] im Einklang steht. Ein Versuch wurde von Seite H. FROMMERTS [49] gemacht, die sog. 5. Kraft aus dem “Tower-Experiment” [40] mit Hilfe der Skalar-Tensortheorie mit Higgsfeldern zu erklären, und zwar mit einer mehrfachen HIGGS-Gravitation, mit einem Extra-Higgsfeld für die Fermionenmasse. Diese 5. Kraft ergibt sich auch aus FISCHBACHS *et al.* “Reanalyse des EÖTVÖS-Experiments” [45], da beide eine YUKAWA-artige Extrakraft erfordern. Flache Rotationskurven ergeben sich z.B., wenn man als Dunkle Materie unsichtbare Higgssteilchen nimmt [30]. Solche Kurven ergeben sich gut innerhalb der Skalar-Tensortheorie mit Higgsfeld HSTT, sowohl im Falle einer Kopplung an das SM [103], wie an das GUT unter  $SU(5)$  [56], innerhalb der NEWTONSchen Näherung der Theorie, mit Drehimpulsfreiheitsgrade für das Higgsfeld, beziehungsweise mit hohen Massen im Zentrum der Galaxien. Auch Inflation innerhalb der SM [19] und der GUT [18] ist möglich.

Die gravitative Kopplung des Higgsfeldes führt zur Wahl desselben Feldes als skalares Feld, sodaß sich mit der HSTT eine gebrochen-symmetrische Theorie der Gravitation ergibt, mit dem Higgsfeld selbstkonsistent in die Theorie eingebaut, gekoppelt an die Krümmung  $R$ . Es spielt die Rolle einer variablen Gravitationszahl (in natürlicher Weise gekoppelt an der Masse der Eichosonen<sup>6</sup> durch  $G = \frac{1}{\alpha v^2}$ ) als auch diejenige in der Elementarteilchenphysik, indem es die träge Masse generiert.<sup>7</sup>

Die hier behandelte Theorie ist eine Kombination der *Skalar-Tensor-Theorie* der Gravitation von C. BRANS und R. H. DICKE [16] oder P. JORDAN [66] mit dem *Higgsmechanismus*. Nach dem Abzählbarkeitskriterium von B. S. DEWITT sollte die Theorie sogar renormierbar sein. Ob das wirklich der Fall ist, müßte extra bewiesen werden. Sie wird aber sicher renormierbar, falls man zusätzlich quadratische Terme dazu nimmt([49], vgl. K. S. STELLE [105]), d.h.  $R^2$ -Terme des RICCI- Skalars in die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ .

Im Rahmen dieser Arbeit wird im wesentlichen die klassische Theorie diskutiert, sodaß die Renormierbarkeit nicht relevant ist. Die EINSTEINSche Allgemeine Relativitätstheorie erhält man exakt auf natürliche Weise im Fall der gebrochenen Symmetrie, indem man die quadratischen Terme nicht betrachtet. Somit werden sie hier auch nicht weiter berücksichtigt.

Diese Theorie wird in den nächsten Kapiteln vorgestellt. Daraus folgen verallgemeinerte (HILBERT)-EINSTEIN-Gleichungen mit kosmologischer Funktion und funktioneller Gravitationszahl, mit dem skalaren Feld essentiell von anderer Natur als in der gewöhnlichen BRANS-DICKE-Theorie. Dem folgt eine Untersuchung der Theorie unter der Gültigkeit der Zentralsymmetrie, spezialisiert für den statischen Fall. Die Untersuchung geschieht insbesondere für die in der Metrik linearisierten Theorie. Es werden dadurch die Eigenschaften von Spiralgalaxien untersucht. Die Zentralsymmetrie innerhalb der HSTT wird dann für kosmologische Modelle innerhalb der ROBERTSON-WALKER- Metrik benutzt. Daraus folgen verallgemeinerte FRIEDMANN-Gleichungen, die benutzt werden um die Dynamik des Kosmos innerhalb dieser Theorie zu untersuchen.

<sup>6</sup>Die Masse der Weakonen lautet  $M_W = \sqrt{\pi} g v$ .  $\alpha \simeq (M_{Pl}/M_W)^2 \gg 1$  mit der PLANCK-Masse  $M_{Pl}$ .

<sup>7</sup>Ein ähnlicher Ansatz wurde von J. J. VAN DER BIJ in [11] mit zwei Higgsfeldern, die sich ineinander mischen und eine effektive Lagrangedichte bilden, gemacht.

### 3 Higgsmechanismus mit Krümmungskopplung

Die Grundlagen der Skalar-Tensortheorie mit Higgsfeld als skalarem Feld (HSTT) werden angegeben vor und nach spontaner Symmetriebrechung. Es werden verallgemeinerte Einstein-Gleichungen hergeleitet und mit der gewöhnlichen ART verglichen. Die kosmologische Konstante wird durch die Theorie anhand des Higgspotentials eingeführt, sowie eine Variabilität der Gravitationszahl. Die verschiedenen Arten von Kopplungen der Higgsteilchen werden für zwei Modelle der Theorie besprochen.

#### 3.1 Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und das Higgspotential $V(\phi)$

Wie betrachten im GAUSS-System, d.h. mit natürlichen geometrischen Einheiten, mit der Konvention,  $\hbar = c = 1$  (wenn nicht anderes erwähnt), eine Lagrangedichte mit mehreren Higgsfeldern gekoppelt über den RICCI-Skalar an die Gravitation, im wesentlichen wie H. FROMMERT ([49], S.175) sie diskutiert. Dabei handelt es sich um eine verallgemeinerte Theorie, in der die Grundzustände der Higgsfelder Beiträge zur Gravitationskonstante oder Gravitationszahl  $G$  liefern, die im Hochenergielimes den primordialen Wert  $G_p$  haben:

$$\mathcal{L} \sim \left\{ [G_p^{-1} + \sum_r (\alpha_r \phi_r^\dagger \phi_r)] R + \frac{1}{2} \sum_r \phi_r^\dagger \parallel_\mu \phi_r^{\parallel\mu} - V(\phi_r^\dagger \phi_r) + \mathcal{L}_M \right\} \sqrt{-g}. \quad (5)$$

Hierbei sind

- $R$ : der RICCI- (LAUE- oder RIEMANN-) Krümmungsskalar,
- $\phi_r$ : die  $n$  Higgsfelder ( $r = 1, \dots, n$ ),
- $\parallel_\mu = D_\mu \equiv \frac{D}{Dx^\mu}$ : der Operator der kovarianten Ableitung bezüglich der Eichgruppe.

Dabei könnte die materielle Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  von den Higgsfeldern abhängen oder nicht. Abhängig von (mindestens) zwei Feldern wäre sie zum Beispiel in die  $SU(5)$ -GUT, in der die Massen der  $X$ - und  $Y$ - Bosonen (die sog. Leptoquarks) aus Wechselwirkung mit dem einen skalaren Feld erzeugt werden. Die Masse der Weakonen folgt mit Hilfe eines anderen Higgsfeldes, und zwar in einem verschiedenen Energiebereich. Im Standard-Modell wird stattdessen nur ein Higgsfeld benötigt.

Mehrere Higgsfelder bräuchte man höchstens bei höheren Energiebereichen, die auch experimentell wahrscheinlich nicht zugänglich sind. Also wird hier der Spezialfall eines Higgsfeldes bearbeitet und seine Wirkung untersucht, also das **minimalst gekoppelte Modell**<sup>8</sup>. Es wird die Lage gewählt, daß nur ein Higgsfeld Massen erzeugt und gleichzeitig zur Gravitation beiträgt. Daraus folgt eine Art HIGGS-Teilchen, deren Änderungen der Dynamik untersucht werden. Die Dynamik-Änderungen aufgrund anderer Higgsteilchen werden an dieser Stelle vernachlässigt.

Als minimales Modell der Materie und der heute bekannten Wechselwirkungen unter Anschluß der Gravitation bietet sich das Standard-Modell an, eingebettet in die Gravitationstheorie. Alternativ könnte das Standard-Modell auch in die Allgemeine Relativitätstheorie eingebaut werden. Das hat z.B. D. EBNER [39] untersucht.

In diesem Fall der minimalsten Kopplung lautet die Lagrangedichte mit einem Higgsfeld gekoppelt an den RICCI-Skalar und das dazugehörige Higgspotential:

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{16\pi} \alpha \phi^\dagger \phi R + \frac{1}{2} \phi^\dagger \parallel_\mu \phi^{\parallel\mu} - V(\phi) \right] \sqrt{-g} + \mathcal{L}_M \sqrt{-g}, \quad (6)$$

<sup>8</sup>Nicht "minimalgekoppelt", da  $\phi$  außer durch die kovariante Ableitung auch durch  $R$  koppeln soll.

$$\text{Higbspotential: } V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4!} (\phi^\dagger \phi)^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\lambda} - \Lambda_0 \frac{6\mu^2}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{8\pi}, \quad (7)$$

wobei die Koeffizienten vor  $\Lambda_0$  für die Dimensionierung von  $[\Lambda] = l^{-2}$  und der Wirkung  $[W] = [\int \mathcal{L} d^4x] = 1$  sorgen.

Es gilt

$$\lambda > 0, \quad \mu^2 < 0. \quad (8)$$

$\alpha$  ist eine numerische Konstante, die später das ‘‘Anfitten’’ der Stärke der Gravitation an die experimentellen Daten unabhängig von der Stärke der Higgswechselwirkung erlaubt ([49], S.95). Sie ist gegeben durch  $\alpha = \frac{2\pi}{\omega}$ , wobei  $\omega$  analog der Konstante in der BRANS-DICKE- Theorie ist, jedoch hier viel kleiner als die dortige, für die  $\omega > 500$  aus Messungen der Laufzeit-Verzögerung von Radio-Signalen der Viking-Sonden auf dem Mars als nötig ermittelt wurde [96]<sup>9</sup>.

Was das Higgsfeld und -Potential angeht, definierte H. FROMMERT [49] **Higgsfelder** allgemein als

- **Felder mit nichttrivialen, d.h. von Null verschiedenen Vakuumzuständen,**
- mit der Eigenschaft, daß sie die Symmetrie einer Theorie zu einer Gruppe  $G$  (z.B.  $G_{QAD} = SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ ) auf die Restsymmetrie zur Isotropiegruppe  $\tilde{G}$  (dann  $U(1)_Y$ ) des Vakuumzustandes spontan zu brechen.
- Jedes Higgsfeld in einer Feldtheorie liefert auch gravitationsartige Wechselwirkungen zwischen diejenigen Teilchen an denen es koppelt.<sup>10</sup>

Also muß  $\mu^2 < 0$  gelten, sodaß es sich um einen Fall von *Tachyon-Kondensation* handelt (gegeben durch imaginäre Massen der Felder). Ein positiver Wert für  $\mu^2$  entspräche zwar einer reellen Masse  $\sqrt{\mu^2}$ , aber der Grundzustand würde dann bei  $\phi_0 = 0$  liegen (klassisches Vakuum), was zur Symmetriebrechung ungeeignet ist. Es würde sich dann um eine WIGNER-Mode handeln, die für klassische Vakua gilt und z.B. beim ZEEMAN-Effekt zu finden ist und dort die Rotationssymmetrie bricht. In dem Fall käme das Higgsfeld nicht zur Wechselwirkung mit den Fermionen und Bosonen [9].

Der Grundzustand des Higgsfeldes lautet mit dem Betrag  $v$  und einem konstanten Isovektor  $N$  mit  $N^\dagger N = 1$ :

$$\phi_0^{(+)} = +\sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}} N \equiv vN, \quad v^2 = -\frac{6\mu^2}{\lambda}. \quad (9)$$

Nach (8) gilt  $\lambda > 0$ , sodaß der Grundzustandswert  $v$  eine reelle Zahl ist und  $v^2$  positiv.

<sup>9</sup>Die BRANS-DICKE- Theorie geht in die ART bei  $\omega \rightarrow \infty$  über, führt zu neuer Physik bei kleinen  $\omega$ - Werten. Den Messungen nach soll sie EINSTEINSCH werden und wird somit uninteressant. Die HSTT, dagegen, benötigt wegen der großen Kopplung an der Gravitation,  $\omega$  klein, was zuläßt, neue Effekte herauszubekommen.

<sup>10</sup>So ist ein Higgsfeld für die Higgsgravitation nicht unbedingt wie in der Standard-Theorie, sondern z.B. Spinmatrizen in einer *Spin-Eichtheorie*, wie in [32] und [52] von H. DEHNEN, A. GEITNER *et al.* eingeführt.

Das Higgspotential  $V(\phi)$  in (7) besitzt hier einen additiven Term  $\bar{k}\Lambda_0$  einer im Nullpunkt angenommenen existierenden kosmologischen Konstante, deren Wirkung auf die Feldgleichungen untersucht werden kann. Sonst ist das Higgspotential so normiert, daß es ohne kosmologische Konstante  $\Lambda_0$  sein Minimum bei  $V(\phi_0) = 0$  besitzt (damit wird eine formelle negative kosmologische Konstante vermieden):

$$\begin{aligned} V(\phi_0) &= -\frac{3\mu^4}{\lambda} + \frac{36}{4!} \frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\lambda} + u_0 \\ &= -\frac{3\mu^4}{\lambda} + \frac{3\mu^4}{2\lambda} + \frac{3\mu^4}{2\lambda} + u_0 \\ &= u_0 \quad \text{mit } u_0 = -\Lambda_0 \cdot \frac{6\mu^2}{\lambda} \frac{\alpha}{8\pi} = +v^2 \cdot \frac{\alpha}{8\pi} \Lambda_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Dabei ist  $u_0$  die *Grundzustands-Energiedichte* des Higgsfeldes. Ohne Normierung (Term  $V(\phi) \propto \mu^4$ ) und mit  $\Lambda_0 = 0$  gilt  $\check{V}(\phi_0) = -\frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\lambda}$ , d.h. es gibt eine formelle kosmologische Konstante, die hier zu Null gesetzt werden soll.<sup>11</sup>

### 3.2 Die Feldgleichungen vor Symmetriebrechung

Mit der Annahme, daß  $\phi$  ein beliebiger  $U(N)$ -Isovektor ist, der nicht an der Materie-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  in (6) koppelt (also nur an den RICCI-Skalar und die Gravitation), und mit den EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} \right)_{|\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = 0, \quad (11)$$

bekommt man die **Higgsfeld-Gleichung**<sup>12</sup>

$$\phi^{||\mu}{}_{||\mu} - \frac{1}{8\pi} \alpha \phi R + \mu^2 \phi + \frac{\lambda}{6} (\phi^\dagger \phi) \phi \equiv 0 \quad (\mathcal{L}_M \approx \phi). \quad (12)$$

Dabei ist  $\cdot_{||\mu}$  die kovariante Ableitung bezüglich aller geeichter Gruppen und ergibt sich aus der speziellen Problematik (siehe Anhang B).

Wählt man dasselbe Higgsfeld für die Materie-Lagrangedichte wie für die gravitative Kopplung, so folgt (im minimalst gekoppelten Fall des Standard-Modells)

$$\mathcal{L}_M = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_{L,R}^\mu \psi_{||\mu} + h.c. - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \underline{\mathbf{k}} \bar{\psi} \phi^\dagger \hat{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{L}} + h.c. \quad (13)$$

Die materielle Kopplung ändert die Form der Higgsfeldgleichung. Im Falle *keiner Kopplung* an  $\mathcal{L}_M$  ist die *Higgsfeldgleichung homogen* wie in  $SU(5)$ -GUT. *Bei der Kopplung* ist sie *inhomogen*, analog zum Standard-Modell. Sie hat die Form<sup>13</sup>

$$\phi^{||\mu}{}_{||\mu} - \frac{1}{8\pi} \alpha \phi R + \mu^2 \phi + \frac{\lambda}{6} (\phi^\dagger \phi) \phi = -2\mathbf{k} \bar{\psi}_{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{L}} \quad (\mathcal{L}_M \sim \phi). \quad (14)$$

<sup>11</sup>Im Standard-Modell mit HIGGS-Mechanismus findet man das Higgsfeld nicht normiert.

<sup>12</sup>Wie in [28] oder in die  $SU(5)$ -GUT [18], da dieses Higgsfeld die fermionische Massen nicht produziert. Damit man in  $SU(5)$ -GUT das isovektorielle Charakter des Higgsfeldes erkennt, schreibt man oft um:  $\phi \rightarrow \Phi = \phi N$ , mit  $N = \sqrt{2/15} \text{diag}(1, 1, 1, -3/2, -3/2)$  mit  $\phi$  als eine reellwertige Funktion. Also steht in der Lagrangedichte anstatt  $\phi^\dagger \phi$ ,  $\text{tr} \Phi^\dagger \Phi \dots$

<sup>13</sup>Zum Vergleich, hat die Higgsfeld-Gleichung im Standard-Modell [27] die analoge Form  $\phi^{||\mu}{}_{||\mu} + \mu^2 \phi + \frac{\lambda}{6} (\phi^\dagger \phi) \phi = -2k \bar{\psi}_{Rm_i} \hat{x}^{m_i} n_j \psi_L^{n_j}$ .

Der inhomogene Anteil der Feldgleichung, der im ersten Fall verschwindet, ist die Quelle  $\tilde{X}$  des Higgsfeldes. Es handelt sich um ein Isovektor vom gleichen Typ wie das Higgsfeld  $\phi$ . Für ihn gilt

$$\tilde{X} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi^\dagger} = 2 \left( \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi} \right)^\dagger. \quad (15)$$

Analog zur Elementarteilchenphysik lautet die **DIRAC-Gleichung**

$$i \gamma_{(L)}^\mu \psi_{||\mu} - k \left( \hat{x}^\dagger \psi \psi_R \right) = 0 \quad (16)$$

mit dem YUKAWA-Kopplungsoperator  $\hat{x}$  und den DIRAC-Matrizen  $\gamma^\mu$ , gegeben durch die CLIFFORD-Algebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (17)$$

Die **YANG-MILLS-Gleichungen** der Eichfeldstärke  $F_{\mu\nu}$  sind formal wie gewöhnlich:<sup>14</sup>

$$F_a^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 4\pi j_a^\mu, \quad (18)$$

mit den Feldströmen

$$\begin{aligned} j_a^\mu &= j_a^\mu(\psi) + j_a^\mu(\phi) \\ &= g \bar{\psi} \gamma_{L,R}^\mu \tau_a \psi + \frac{ig}{2} \phi^\dagger \tau_a \phi_{||\mu} + h.c. \end{aligned} \quad (19)$$

Der symmetrische Energie-Impuls-Spannungstensor (**EIST**) ist definiert durch

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} - \mathcal{L}_M g^{\mu\nu} \cong \mathbf{T}(\dots). \quad (20)$$

Der EIST ist hier der Form

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_{L,R}^{(\mu} \psi^{|\nu)} + h.c. - \frac{1}{4\pi} (F_a^{\mu\lambda} F_a^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}), \quad (21)$$

mit einer i.A. nichtverschwindenden Divergenz, abhängig vom Higgsfeld  $\phi$ :

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{||\nu} = k \bar{\psi}_R \phi_{||\mu}^\dagger \hat{x} \psi_L + h.c. + F_{\mu\nu}^a j_a^\nu(\phi). \quad (22)$$

Die **EINSTEIN-Gleichungen**, identisch für beide  $\mathcal{L}_M$ -Fälle (sowohl mit Kopplung an das Standard-Modell als auch formal an die  $SU(5)$ -GUT), bekommt man aus dem HAMILTON-Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x \equiv 0 : \quad (23)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{8\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} V(\phi) g_{\mu\nu} = \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{8\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} T_{\mu\nu} - \frac{4\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} [\phi_{||\mu}^\dagger \phi_{||\nu} + \phi_{||\nu}^\dagger \phi_{||\mu}] + \frac{4\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} \phi_{||\lambda}^\dagger \phi^{||\lambda} g_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi^\dagger \phi} [(\phi^\dagger \phi)_{||\mu||\nu} - (\phi^\dagger \phi)^{||\beta}{}_{||\beta} g_{\mu\nu}] \\ &= -\frac{8\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} T_{\mu\nu} - \frac{8\pi}{\alpha \phi^\dagger \phi} [\phi_{(||\mu}^\dagger \phi_{||\nu)} - \frac{1}{2} \phi_{||\lambda}^\dagger \phi^{||\lambda} g_{\mu\nu}] - \frac{1}{\phi^\dagger \phi} [(\phi^\dagger \phi)_{||\mu||\nu} - (\phi^\dagger \phi)^{||\beta}{}_{||\beta} g_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (25)$$

<sup>14</sup>In abstrakter CARTAN-Schreibweise heißt das  $\mathbf{d}^* \mathbf{F} = 4\pi \mathbf{J} \Leftrightarrow \nabla \mathbf{F} = 4\pi \mathbf{J}$ , mit der äußeren Ableitung  $\mathbf{d}$  (mit  $\mathbf{d}\mathbf{d} \equiv 0$ ) und  $*$  für den dualen Tensor, und  $\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$  mit dem (antisymmetrischen) äußeren (Wedge- oder Dach-) Produkt  $\wedge$ :  $\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \equiv \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta - \mathbf{d}x^\beta \otimes \mathbf{d}x^\alpha$ . Ladungserhaltung  $\mathbf{d}^* \mathbf{J} = 0$  gilt direkt aus  $\mathbf{d}\mathbf{d} \equiv 0$  mit  $\mathbf{d}\mathbf{d}^* \mathbf{F} = 0$ .

Anhand des ersten Summanden auf der rechten Seite dieser Feldgleichung (24) (und unter Betracht von (1)) sieht man ([49], S.149), daß  $(\alpha\phi^\dagger\phi)^{-1}$  den Platz der Gravitationskonstante  $G$  in der EINSTEIN-Gleichung einnimmt. Diese ist hier eine Feldgröße und somit lokal (orts- und zeitabhängig).

Die Spur der Gravitationsfeldgleichung liefert den RICCI-Skalar

$$R = \frac{8\pi}{\alpha\phi^\dagger\phi} [T + 4V - \phi_{\parallel\beta}^\dagger\phi^{\parallel\beta}] - \frac{3}{\phi^\dagger\phi} (\phi^\dagger\phi)^{\parallel\beta}{}_{\parallel\beta}. \quad (26)$$

### 3.3 Spontane Symmetriebrechung der Higgs Skalar-Tensortheorie

Das Higgspotential  $V(\phi)$  ist nach (7) nicht bilinear und ist in den YANG-MILLS-Theorien und speziell in dem Standard-Modell der Elementarteilchen für die Entstehung der Masse sinnvoll und nötig. Es beschreibt eine Selbstwechselwirkung und gibt dieser Art von Theorien den Namen  $\phi^4$ -Theorien.

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}(\phi)$  ist invariant unter Spiegelungen  $\phi \rightarrow -\phi$ , sodaß nach dem NOETHER-Theorem eine bestimmte Symmetrie nach  $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(-\phi)$  folgt.

Entwickelt man  $\phi$  um den Grundzustand  $v$  durch

$$\phi = v + \phi' \quad (27)$$

mit den Anregungszuständen  $\phi'$ , dann geht wegen auftretender  $\phi'^3$ -Terme die Spiegelungsinvarianz der Lagrangedichte verloren (d.h.  $\mathcal{L}(\phi') \neq \mathcal{L}(-\phi')$ ). Die Symmetrie ist spontan gebrochen; mathematisch erfolgte ein Übergang der Symmetriegruppe  $G$  in die Restsymmetrie  $\tilde{G}$ :

$$G \rightarrow \tilde{G}.$$

Nimmt man nur den positiven Wert des Grundzustandes, so kann  $\phi_0$  in folgender Form geschrieben werden:

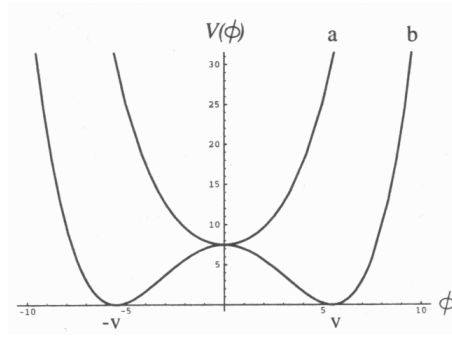
$$\phi_0 = vNe^{i\alpha}, \quad v^2 = -\frac{6\mu^2}{\lambda}, \quad (28)$$

mit  $N$  als einem konstanten Einheits-Isovektor ( $N^\dagger N = 1$ ), dessen Länge durch  $v$  gegeben ist. Der Grundzustand wird festgelegt durch die Auswahl des Isovektors  $N$ . Die Wahl seiner Komponenten legt wiederum fest, welche Zustände massiv werden.

$e^{i\alpha}$  in (28) ist eine Phase, die durch Wahl von  $\alpha = 0$  festgelegt werden kann ohne das System zu beschränken, da das keine physikalische Konsequenzen trägt<sup>15</sup>. Nach Definition der Masse durch Symmetriebrechung kann das System aber nach dieser Wahl keine Phasenübergänge durchmachen ohne den Vakuumswert ändern zu müssen, damit die Lagrangedichte invariant bleibt. Die Lagrangedichte zeigt explizite Konsequenzen, herrührend aus diesem Verlust der Invarianz des Grundzustands. Die Symmetrie scheint gebrochen zu sein, was "Spontane Brechung der Symmetrie" genannt wird.

Das Higgsfeld im angeregten Stadium unterscheidet sich vom Grundzustand durch eine lokale Transformation, die sich durch eine Eichtransformation, die sog. unitäre Eichung,

<sup>15</sup>Die Phase könnte auch ortsabhängig sein. Um Diskontinuitäten zu vermeiden, sollte es dann ein Punkt oder kleine Gegend geben, wo  $|\phi| = 0$  gilt. Dieser ist Teil eines "Rohres" falschen Vakuums (damit  $\Delta\phi = 2\pi n$  gilt), der *kosmischer Faden* genannt wird, und der wohl zu Dichte-Inhomogenitäten führen kann ([55], S.34).



1: Potentialkurve von  $\phi$  für (a)  $\mu^2 > 0$  (WIGNER-Mode) und (b)  $\mu^2 < 0$  mit Minimum bei  $\phi = \pm v$ . [20]

beseitigen läßt<sup>16</sup>:

$$\check{\phi} = U^{-1}\phi = \rho U^{-1}UN = \rho N. \quad (29)$$

Diese ist nach ([49], S.15) nicht eindeutig; Transformationen bleiben übrig, die an  $N$  nichts ändern. Diese bilden eine Untergruppe der Eichgruppe  $G$  (im Standard-Modell ist  $G_{SM} = (SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y)$  mit der Restsymmetrie  $\tilde{G}$ ).

In unitärer Eichung (unter Vernachlässigung der Akzente  $\check{x}$ ) gilt

$$\phi = \rho N, \quad (30)$$

mit  $\rho^2 = \phi^\dagger\phi$  als Betragsquadrat des Higgszustandes  $\phi$ .

Nach Symmetriebrechung kann dann von  $\phi$  zu der reellwertigen Funktion  $\rho$  oder

$$\zeta = \rho/v, \quad \zeta = 1 + \varphi \quad (31)$$

übergegangen werden. Sie gibt den Wert des Higgsfeldes und  $\varphi$  den des angeregten Feldes an. Der Grundzustand ist beschrieben durch  $\varphi = 0$ .<sup>17</sup>

Nach Symmetriebrechung und bei Berücksichtigung von Termen maximal zweiter Ordnung<sup>18</sup> in den Feldvariablen  $A_\mu$  und  $\phi'$  (mit  $\phi'$  nach (27)) folgt durch Streichung des konstanten Wertes in  $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi') + const.$ :

$$\mathcal{L}(\phi') = \frac{1}{2}\phi'^a{}_{|\mu}\phi'^a{}_{|\mu} + \frac{1}{2}g^2 A_{\mu a}{}^b \phi_0^{+a} A^\mu{}_b{}^c \phi_{0c} - \frac{\lambda}{4!}(\phi_0^{+a}\phi'_a + \phi'^{+a}\phi_{0a})^2, \quad (32)$$

wobei der erste Term ein kinetischer Term ist. Der zweite ist der *Massenterm der Eichbosonen* und der dritte der Massenterm des Higgsfeldes.

Der Massenterm der Eichbosonen läßt sich umschreiben als

$$\frac{1}{2}g^2 A_{\mu a}{}^b \phi_0^{+a} A^\mu{}_b{}^c \phi_{0c} = \frac{1}{2}A_{\mu i}A_j^\mu \frac{1}{4\pi\hbar c}(M^2)^{ij}, \quad (33)$$

mit der Massenquadrat-Matrix der Eichbosonen (es wird nicht summiert)

$$(M^2)^{ab} = 4\pi\hbar c g^2 v^2 \cdot N^\dagger \tau^{(a}\tau^{b)} N \Rightarrow (M^2)^{aa} = 4\pi\hbar c v^2 ((\tau^a N)^\dagger (\tau^a N)) > 0 \quad (34)$$

$$(\text{= } 4\pi\hbar c g^2 v^2 \quad \text{in } SU(2)).$$

<sup>16</sup>Dadurch verschwinden die formal entstandenen masselose GOLDSTONE-Teilchen, die von den Eichfeldern bei der Massengenerierung absorbiert werden und zu deren Polarisation beitragen ([59], S.256ff).

<sup>17</sup>In einigen Fällen ist zweckmässig den Grundzustand zu renormieren, oft durch  $\zeta = 1 + \varphi = \sqrt{1+2\chi} = \sqrt{1+\xi}$ .

<sup>18</sup>Höhere Terme beschreiben Selbstwechselwirkungen [33].

Hierin findet man die Eichkopplungskonstante  $g$  und die Generatoren  $\tau^i$  der Symmetriegruppe, mit der  $SU(N)$ - Transformationsgruppe, gegeben durch die Algebra-Relationen  $[\tau^i, \tau^j] = if^{ij}\tau^k$  und  $\{\tau^i, \tau^j\} = c^{ij}\mathbf{1} + d^{ij}{}_k\tau^k$ .

Die Massenmatrix ist symmetrisch und reell. Die Diagonalelemente (die Eigenwerte) sind positiv definit mit

$$M^{(i)} \equiv 2\sqrt{\pi\hbar cgv}\sqrt{(\tau^i N)^\dagger(\tau^i N)} \quad (35)$$

als die Masse der Eichbosonen.

Die Masse der Fermionen ist gegeben durch den YUKAWA-Kopplungsterm

$$\mathcal{L}(\phi, \psi) = -\widehat{G}(\bar{\psi}^A \phi^{+a} \psi_{aA} + \bar{\psi}^{aA} \phi_a \psi_A) \equiv -\hat{m}(\bar{\psi}^A N^{+a} \psi_{aA} + \bar{\psi}^{aA} N_a \psi_A), \quad (36)$$

der zu (6) addiert wird, wobei  $\psi_{aA}$  sowohl Spinor- wie Isospinorkomponenten besitzt, hingegen  $\psi_A$  ein Skalar im Isospin-Raum ist.<sup>19</sup>  $\widehat{G}$  ist eine dimensionslose Kopplungskonstante, d.h.  $\hat{m} \equiv \widehat{G}v$  hat die Dimension einer Masse.

In höherer Ordnung sollten noch (quantenmechanische) radiative Korrekturen zum Higgs-potential dazukommen, sodaß  $V(\phi)$  zum effektiven Potential  $V_{eff}(\phi)$  wird ([20], S.37ff), abhängig vom Quadrat der effektiven Masse der Felder, und weitere  $\phi^2$ - und  $\phi^4$ -Terme als Normalisierungsbedingungen, sodaß das Potential integrierbar ist.

Die Korrekturterme destabilisieren die Symmetrie bei  $\phi = 0$ , sodaß oft gesagt wird, daß die Quantenkorrekturen die Symmetriebrechung provozieren.

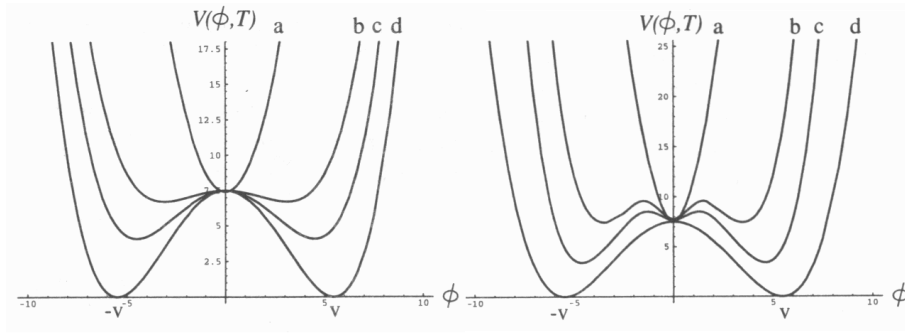
Zu den radiativen Korrekturen kommen noch quantengravitative Korrekturen dazu, die mit gravitativen Wechselwirkungen zwischen Vakuumsfluktuationen zu tun haben.

Zur Beschreibung des Universums kommt noch ein Thermalbad dazu und damit endliche Temperatur-Korrekturen, sodaß

$$V_{eff}(\phi, T) \sim V_{eff}(\phi) + M^2(\phi)T^2 - T^4 \quad (37)$$

gilt. Daraus folgt für hohe Energien, daß  $\langle \phi \rangle = 0$  günstiger ist, da  $V_{eff}(\phi, T)$  dann minimal ist ([20], S.40). Somit wird die Symmetrie bei hohen Energien restauriert. Also ist das Anfangs-Universum symmetrischer als das heutige. Nach Symmetriebrechung ist aber die Richtung von  $\phi$  nicht eindeutig determiniert ([20], S.42f). Im Weltall könnte es mehrere Regionen (sog. *topologische Defekte*) geben, mit  $\phi \sim v$  und  $\phi \sim -v$ . Auch sollte es "Interface"-Domänen geben, in denen  $\phi$  zwischen  $-v$  und  $v$  variiert.

<sup>19</sup>Wodurch die *Paritätsverletzung* per Hand eingebaut wird. Bei der schwachen Wechselwirkung entspricht der Isospinor den linksdrehenden Spinor, der Isoskalar den rechtsdrehenden. Elektronenähnliche Zustände und Neutrinos sind bezüglich der Symmetriegruppe ununterscheidbar und geben die Dimension der Gruppe an. Mit der Paritätsverletzung folgt, daß es rechtsdrehende Neutrinos nach der Theorie nicht geben kann. Nach der Diracgleichung folgt ja, daß, Paritätsverletzung gegeben, die linksdrehende Zustände nicht an der Masse koppeln können (oder andersrum, schließt man eine Masse der linksdrehenden Bosonen aus, so verschwinden die rechtsdrehende Zustände). Eigentlich sollte dies aus einer höheren Theorie folgen können. Solche gibt es noch nicht und es besteht die Möglichkeit (Stichwort "Neutrinooszillationen"), daß Neutrinos Masse besitzen. Die Paritätsverletzung folgt in natürlicher Weise aus der *Spin-Eichtheorie* [32, 52] und die Masse der Neutrinos könnte aus einem anderen Mechanismus folgen, bzw. die Kopplung der verschiedenartigen Neutrinos (und der Teilchen verschiedener Familien allgemein) an die Gravitation sollte experimentell überprüft werden.



2: Effektives Potential eines Phasenübergangs 2. Ordnung bzw. 1. Ordnung. Die Symmetrie wird bei hohen Temperaturen restauriert. Es gibt ein Phasenübergang bei  $T = T_x$  (siehe Kurve (b)). Für  $T < T_x$ , das Potentialminimum liegt unterhalb von  $V(0)$ . Die Kritische Temperatur  $T_x$  liegt für die  $SU(5)$ -GUT bei  $T_x = 10^{14-15}$  GeV.[20]

### 3.4 Die Feldgleichungen nach Symmetriebrechung

Die Feldgleichungen (24) lauten nach Symmetriebrechung und mit (28) ( $\phi_0^\dagger \phi_0 = v^2 := -\frac{6\mu}{\lambda}$ ):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{8\pi}{\alpha v^2} \zeta^{-2} V(\zeta) \\ = -\frac{8\pi}{\alpha v^2} \zeta^{-2} T_{\mu\nu} - \frac{4\pi}{\alpha} \zeta^{-2} [2\zeta_{|\mu} \zeta_{|\nu]} + \frac{4\pi}{\alpha} \zeta^{-2} \zeta_{|\lambda} \zeta^{|\lambda} g_{\mu\nu} - \zeta^{-2} [(\zeta^2)_{|\mu|\nu} - \zeta^{2|\beta}{}_{|\beta} g_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (38)$$

Mit der **Gravitationszahl**

$$G = (\alpha v^2)^{-1} \quad (39)$$

kann man Gl. (38) umschreiben in

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + 8\pi G \zeta^{-2} V(\zeta) \\ = -8\pi G \zeta^{-2} T_{\mu\nu} - 4\pi G v^2 \zeta^{-2} [2\zeta_{|\mu} \zeta_{|\nu]} + 4\pi G v^2 \zeta^{-2} \zeta_{|\lambda} \zeta^{|\lambda} g_{\mu\nu} - \zeta^{-2} [(\zeta^2)_{|\mu|\nu} - \zeta^{2|\beta}{}_{|\beta} g_{\mu\nu}] \\ = -8\pi G \zeta^{-2} T_{\mu\nu} - 8\pi G v^2 \alpha \zeta^{-2} [\zeta_{|\mu} \zeta_{|\nu} - \frac{1}{2} \zeta_{|\lambda} \zeta^{|\lambda} g_{\mu\nu}] - \zeta^{-2} [(\zeta^2)_{|\mu|\nu} - \zeta^{2|\lambda}{}_{|\lambda} g_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (40)$$

Unter Gebrauch des Massenquadrates  $(M^2)^{ab}$  wird die rechte Seite der EINSTEIN- Feldgleichungen (40) zu

$$\begin{aligned} \dots = -8\pi G \zeta^{-2} [T_{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} \zeta^2 M_{ab}^2 (A_\mu^a A_\nu^b - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_\lambda^a A^{b\lambda}) + v^2 (\zeta_{|\mu} \zeta_{|\nu} - \frac{1}{2} \zeta_{|\lambda} \zeta^{|\lambda} g_{\mu\nu})] - \\ - \zeta^{-2} [(\zeta^2)_{|\mu|\nu} - \zeta^{2|\lambda}{}_{|\lambda} g_{\mu\nu}] \\ = -8\pi G \zeta^{-2} [\hat{T}_{\mu\nu} + v^2 (\zeta_{|\mu} \zeta_{|\nu} - \frac{1}{2} \zeta_{|\lambda} \zeta^{|\lambda} g_{\mu\nu})] - \zeta^{-2} [(\zeta^2)_{|\mu|\nu} - \zeta^{2|\lambda}{}_{|\lambda} g_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (41)$$

mit dem effektiven EIST der Materie sowie der massiven Eichbosonen<sup>20</sup>

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + \frac{(1 + \varphi)^2}{4\pi} M_{ab}^2 (A_\mu^a A_\nu^b - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_\lambda^a A^{b\lambda}) \\
&= T_{\mu\nu} + \frac{\zeta^2}{4\pi} M_{ab}^2 (A_\mu^a A_\nu^b - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_\lambda^a A^{b\lambda}) \\
&= T_{\mu\nu} + \frac{1 + \xi}{4\pi} M_{ab}^2 (A_\mu^a A_\nu^b - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_\lambda^a A^{b\lambda}).
\end{aligned} \tag{42}$$

Hierbei ist

- $R_{\mu\nu}$ : RICCI-Krümmungstensor
- $R$ : RICCI-Skalar
- $g_{\mu\nu}$ : Metrik der gekrümmten Raumzeit
- $V$ : Higgspotential
- $A_\nu$ : Eichfeld
- $T_{\mu\nu}$ : Metrischer Energie-Spannungstensor
- $G$ : Gravitations ‘konstante’
- $\zeta = 1 + \varphi = \sqrt{1 + \xi}$ : skalares Higgsfeld
- $g$ : Eichkopplungskonstante

Nahe des Grundzustands gelten die gewöhnlichen EINSTEIN-Gleichungen (1):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu} = -8\pi G \hat{T}_{\mu\nu}.$$

Die Einschränkung auf Werte nahe den Grundzustand bedeutet keine weitere Einschränkung des Modells, da der Higgsmechanismus zur Massenproduktion schon diese Einschränkung trägt. Die Vektorbosonen benehmen sich wegen der Wechselwirkung der Felder mit  $\phi_0$  nur als massiv, solange die Energie des Systems klein ist und  $\phi$  nahe seines Minimums liegt ([58], S.147). Mathematisch verhält sich nur dann der Propagator massiver Felder richtig, ohne seine (masselose) Transversalität zu verlieren, wodurch die FEYNMAN-Graphen nicht divergieren und die Theorie renormierbar ist ([58], S.134f).

Nach Symmetriebrechung gilt für  $T_{\mu}{}^\nu$  in (22):

$$T_{\mu}{}^\nu{}_{||\nu} = 2\zeta_{||\mu} \bar{\psi} \hat{m} \psi + F_{\nu\mu}^a j_a^\nu(\zeta). \tag{43}$$

Die **DIRAC-Gleichung** (16) mit der Massenmatrix der Fermionen  $\hat{m}$  (Massenoperator<sup>21</sup>) lautet

$$i\gamma_{(L)}^\mu \psi_{||\mu} - (1 + \varphi) \hat{m} \psi_{(L)} = 0, \tag{44}$$

<sup>20</sup>An dieser Stelle kann man die Vorteile der verschiedenen Higgsfeldwert-Schreibweisen sehen.

<sup>21</sup>Es gilt  $\hat{m} = kv(N^\dagger \hat{x} + \hat{x}^\dagger N)$  mit dem YUKAWA-Kopplungsoperator  $\hat{x}$  für die Masse der Fermionen.

mit Kopplung des Higgsfeldes an  $\mathcal{L}_M$  (an der Masse  $\hat{m}$  zu erkennen). Die inhomogene **YANG-MILLS-Gleichungen** (18) sind jetzt

$$F_a^{\nu\mu}{}_{||\nu} + (1 + \varphi)^2 M_{ab}^2 A^{\mu b} = 4\pi j_a^\mu(\psi) \quad (45)$$

und für die Spur von  $T_{\mu\nu}$ , unter Verwendung der DIRAC-Gleichung:

$$T = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_{L,R}^\mu \psi_{||\mu} + h.c. = \underline{(1 + \varphi) \bar{\psi} \hat{m} \psi}. \quad (46)$$

Das Higgspotential  $V(\zeta)$  ist unabhängig von der Materie-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$ . Mit dem EINSTEIN-Tensor<sup>22</sup>  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  hat die linke Seite der Feldgleichungen (38) die Form

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + 8\pi G \zeta^{-2} \left[ \frac{\mu^2}{\lambda} v^2 + \frac{\lambda}{24} v^4 \zeta^4 + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\lambda} + u_0 \right] g_{\mu\nu} \\ = G_{\mu\nu} + 12\pi G \frac{\mu^4}{\lambda} \zeta^{-2} (\zeta^2 - 1)^2 g_{\mu\nu} + \Lambda_0 \zeta^{-2} g_{\mu\nu} \\ = G_{\mu\nu} + \Lambda(\zeta), \end{aligned} \quad (47)$$

in Analogie zu (1), mit  $\frac{8\pi}{\alpha v^2} u_0 = \Lambda_0$ .

### 3.4.1 Die kosmologische Funktion und die kosmologische Konstante

Aus einem Vergleich mit den EINSTEINschen Feldgleichungen der gewöhnlichen Allgemeinen Relativitätstheorie (1) definiert man eine "KOSMOLOGISCHE FUNKTION"  $\Lambda(\zeta)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda(\zeta) &= 12\pi G \frac{\mu^4}{\lambda} \zeta^{-2} (\zeta^2 - 1)^2 + \Lambda_0 \\ &= 12\pi G \frac{\mu^4}{\lambda} \frac{[(1 + \varphi)^2 - 1]^2 + \Lambda_0}{(1 + \varphi)^2} = \Lambda(\varphi). \end{aligned} \quad (48)$$

Sie ist im wesentlichen gegeben durch das Higgspotential  $V(\phi)$  und die kosmologische Konstante  $\Lambda_0$ , mit

$$\Lambda(\zeta) = \left[ \frac{8\pi G}{\alpha v^2} \frac{V(\zeta)}{\zeta^2} \right] + \Lambda_0. \quad (49)$$

Im Grundzustand ( $\varphi = 0$ ) wird diese kosmologische Funktion zur gewöhnlichen kosmologischen Konstante  $\Lambda(v) = \Lambda_0$  in (1), die ursprünglich EINSTEIN 1917 einführte, um ein geschlossenes Universum zu erreichen<sup>23</sup>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (\text{im HIGGS-Grundzustand}).$$

Das Higgspotential kann man auch noch, insbesondere für kosmologische Betrachtungen, in eine KLEIN-GORDON-Gleichung umschreiben. Dazu ist die Definition

$$\xi = (1 + \varphi)^2 - 1 = \zeta^2 - 1 \quad \implies \quad \zeta^2 = \xi + 1 \quad (50)$$

<sup>22</sup>Nach [90] wäre eine andere Definition von  $G_{\mu\nu}$  gegeben durch  $(*R^*)_{\alpha\beta} \gamma^\delta = \bar{G}_{\alpha\beta} \gamma^\delta \Rightarrow \bar{G}_{\alpha\beta} \alpha^\delta = G_\beta{}^\delta$ .

<sup>23</sup>Oft liest man, daß EINSTEIN ein statisches Universum erreichen wollte. Das ist falsch: das Universum ergab sich unter seinen Voraussetzungen zwar statisch, die Statik spielte aber für EINSTEIN an der Stelle eine untergeordneter Rolle.

sinnvoll. Man schreibt (7) dann als

$$\begin{aligned}
 V(\zeta) &= \frac{\mu^2}{2}\zeta^2 v^2 + \frac{1}{24}v^2\zeta^4 + \frac{3\mu^4}{2\lambda} + u_0 \\
 &= \frac{\mu^2}{2}v^2\left[\zeta^2 - \frac{1}{2}\zeta^4 - \frac{1}{2}\right] + u_0 \\
 &= \frac{3\mu^4}{2\lambda}\xi^2 + u_0 \\
 &= \frac{3M^2}{32\pi G}\left(1 + \frac{4\pi}{3\alpha}\right)\xi^2 + \frac{3\mu^2\alpha}{8\pi\lambda}\Lambda_0
 \end{aligned} \tag{51}$$

mit  $M^2 = \frac{16\pi G(\mu^4/\lambda)}{(1+4\pi/3\alpha)}$  als die **Masse des Higgsteilchens** [29]. Sie determiniert die Energieskala der Symmetriebrechung und ist im Standard-Modell um  $\sqrt{\frac{4\pi}{3\alpha}} \approx 10^{-17}$  niedriger als ohne Gravitation, und in  $SU(5)$ -GUT um ca.  $10^{-4}$ . Dies determiniert die Dichteperturbationen bei der Inflation des Universums [18, 19].

Mit  $\phi = v\sqrt{1+\xi}N$  beschreibt  $\xi = 0$  auch den Grundzustand  $\phi = vN$ , und  $\xi = -1$  ( $\chi = -\frac{1}{2}$ ) das Vakuum  $\phi = 0$ .<sup>24</sup>

Das Skalarfeld hat eine endliche Reichweite  $l = M^{-1}(= \frac{\hbar}{M})$ , sodaß die Variabilität der Gravitationszahl  $G$  von der Reichweite  $l$  abhängt. Die Skalargröße  $\zeta^{-2}$  beschreibt die Variabilität der Gravitationskonstante, die funktionswertig wird.  $G$  ist somit lokal variabel, was wieder die Analogie zu der Theorie von BRANS und DICKE [16] zeigt und gleichzeitig die EINSTEINSchen Gedanken wiedergibt, daß durch die “gravitative Wechselwirkung” die Masse entsteht. Der wesentliche Unterschied zur BRANS-DICKE-Theorie liegt bei der *kosmologischen Funktion* (49) und an der *Kurzreichweitigkeit* des Higgsfeldes als skalares Feld. Diese kurzreichweitige gravitative Kraft, die es in der NEWTONSchen und EINSTEINSchen Theorie nicht gibt, kann mit Addition eines YUKAWA-Potentials zum gewöhnlichen Gravitationspotentials gedeutet werden, wie E. GESSNER [54, 55] zur theoretischen Herleitung der sog. FLAG-Theorie<sup>25</sup> von R.H. SANDERS [100] gezeigt hat, ausgehend vom NEWTONSchen Limes der HIGGS Skalar-Tensor-Theorie. So kann man sich die flachen Rotationskurven spiraler Galaxien außerhalb des leuchtenden Bereiches erklären.

### 3.4.2 Über die kosmologische Konstante $\Lambda_0$

Die geometrische Eigenschaften des Raumes hängen mit der Energie- und Impulsdichte des Weltraums zusammen. Als Energiequellen sind am naheliegendsten die Materie und die Strahlung. Aber auch das Vakuum spielt eine Rolle durch seine Fluktuationen oder Paar-Erzeugungen bzw. -Vernichtungen, und es sollte polarisierbar sein.

Beim Vakuum handelt es sich um einen Zustand geringster Energie, im Standard-Modell zu verstehen als rein aus der kosmologischen Konstanten und Quantenfluktuationen bestehend (und vielleicht aus noch nicht bekannten Wechselwirkungen zwischen den Teilchen). Die kosmologische Konstante ist ein freier Parameter und die zweite Art der Beiträge ist insbesondere auch als Folge des Higgsfeldes zu betrachten [1].

Die kosmologische Konstante in (49) entspricht einer Anregung des Vakuumszustandes des

<sup>24</sup>Bei welchem Wert das Higgsfeld am Anfang steht ist für die Inflation wichtig, und zwar allgemein und nicht nur in der HSTT.

<sup>25</sup>FLAG: “Finite length-scale anti-gravity”.

Higgsfeldes. Sie ist im wesentlichen die Grundzustands-Energiedichte  $u_0$  (10) des Higgsfeldes, und bewirkt einen negativen Druck. Deswegen ist sie ein natürlicher Kandidat für die Erklärung der *Quintessenz* oder *Dunkler Energie* (s. Abschnitt 7.1.1), die antigravitativ wirken und die Expansion des Universums teilweise beschleunigen soll. Allerdings ist eine per Hand eingebaute Konstante nur unbefriedigend zur Erklärung einer solchen antigravitativen Kraft und sollte auch nur als vorübergehend angesehen werden.

EINSTEIN führte 1917 die kosmologische Konstante  $\Lambda_0$  ein in einem Versuch, das Universum räumlich zu schließen, mit der Hoffnung, die Massenerzeugung daraus zu folgern [1]. Zugleich glaubte EINSTEIN, mit der kosmologischen Konstante dem MACHschen Prinzip Rechnung zu tragen, indem nunmehr die Geometrie der Welt eindeutig durch die Materieverteilung im Universum "bedingt und bestimmt" ist. Dennoch zeigte W. DESITTER, daß es materiefreie (gekrümmte) Räume gibt.<sup>26</sup> Außerdem erwies sich der zunächst statische EINSTEIN-Kosmos als instabil, sodaß jede kleine Störung ihn aus dem Gleichgewicht bringen würde. Das gab den Anstoß, nach einer Expansion oder Kontraktion des Universums zu suchen, in welchen Zusammenhang E. HUBBLE die Galaxienflucht 1929 entdeckte. Da aber expandierende geschlossene Weltmodelle auch ohne  $\Lambda_0$  möglich sind, sah EINSTEIN die Einführung der kosmologischen Konstante später als einen sehr großen Fehler an.

Trotzdem sind die kosmologischen Aspekte einer solcher Konstante interessant zu erwähnen; moderne Ergebnisse zeigen auch, daß die Galaxien, so wie wir sie beobachten, nur entstehen konnten, wenn es eine positive nichtverschwindende kosmologische Konstante (oder kosmologischer Term) gab, zumindest in einem Teil der Geschichte des Universums (siehe dazu das PRIESTER-Modell und die Inflation). Ein kosmologischer Term  $\Lambda \simeq 10^{-4} \text{cm}^{-2}$  ist aber zu groß, insbesondere wenn  $\Lambda_{\text{beobachtet}} \approx 10^{-56} \text{cm}^{-2}$  ist. Die heutige kosmologische Konstante sollte zwischen Null und die der Elementarteilchentheorie liegen.

Wenn  $\Lambda$  so groß wie im Standard-Modell wäre, sollte man sie als Verzerrungen der Raumzeit-Geometrie über Distanzen von einem Kilometer oder weniger beweisen können. Die euklidische Geometrie ist aber in solchen Distanzen vollkommen richtig, sodaß  $\Lambda$  viel kleiner zu erwarten ist. Nach einer Berechnung ausgehend vom LYMAN- $\alpha$ -Wald [36], sollte der kosmologische Term  $\Lambda = 2,1 \cdot 10^{-56} \text{cm}^{-2}$  sein. So eine kleine Größe muß über sehr große Entfernung überblickt werden, um die Auswirkungen auf die Raumzeit-Struktur zu erkennen [1].

Eine positive kosmologische Konstante (wie sie in der Lagrangedichte (6) eingebaut wurde) korrespondiert mit einer positiven Massendichte und einem negativen Druck. Das entspräche einer Energiedichte des Vakuums, einer Art Anregung des Higgsfeldes, während eine negative Funktion  $\Lambda < 0$  unphysikalisch erscheint. Sie führt zu einem viel zu kleinen Weltalter. Das Verhalten einer negativen kosmologischen Konstante  $\Lambda_0$  wurde von E. GESSNER in [54, 55] im Bezug auf die flachen Rotationskurven spiraler Galaxien untersucht, mit dem Ergebnis, daß bei  $-10^{-51} \text{cm}^{-2} \leq \Lambda_0 \leq -10^{-53} \text{cm}^{-2}$  ansteigende Rotationskurven folgen. Der minimale Druck  $\rho_{\text{min}}$  des Universums liege aber um fünf Größenordnungen höher als heute und könne selbst durch die Annahme Dunkler Materie nicht kompensiert werden. Außerdem wäre das errechnete Weltalter mit  $t_{(\Lambda=-10^{-52} \text{cm}^2)} = 2 \cdot 10^8$  Jahre kleiner als heute bekannt. Das hieße, daß die negative kosmologische Konstante die Gravitationskraft verstärkt hätte.<sup>27</sup>

Die kosmologische Konstante als nichtverschwindende Anregung des Higgsfeldes bewirkt also eine zu starke Kraft um die Quintessenz richtig zu erklären. Der funktionale Anteil von  $\Lambda$  aber ändert seinen Wert im Laufe der Evolution des Kosmos. Also ist die Betrachtung der kosmologischen Funktion im Zwischenbereich der möglichen  $\Lambda_0$  wesentlich, um zu versu-

<sup>26</sup>Während der Inflation verhält sich das Universum wie ein DESITTER-Universum.

<sup>27</sup>Die Betrachtung des Alters des Universums aufgrund der LYMAN- $\alpha$ -Wälder ohne Higgsfeld ergibt  $t_0 = 36,97 \cdot 10^9$  Jahren [36].

chen, die Dunkle Energie und die aus ihr herrührenden Problemen zu erklären. Dafür sollte man am besten all die Ereignisse direkt aus den Grundlagen der Theorie herleiten, sodaß der per Hand eingeführte additive Faktor in  $\Lambda$  unschön erscheint; er widerspricht dem Geist der Higgs Skalar-Tensortheorie HSTT und der EINSTEINSchen “Denkökonomie” und soll, außer es wird explizit anders erwähnt, aus weiterer Betrachtung ausgeschlossen sein, sodaß nur eine im Grundzustand verschwindende Funktion  $\Lambda(\varphi)$  bleibt.

### 3.5 Die Higgsfeldgleichung nach Symmetriebrechung

Die **Higgsfeldgleichung ((14) wie auch (12)) nach Symmetriebrechung** lautet mit  $\xi$ :<sup>28</sup>

$$\xi^{|\mu}{}_{||\mu} + M^2\xi = \frac{1}{1 + 4\pi/3\alpha} \cdot \frac{8\pi G}{3} [T - \sqrt{\xi + 1}\bar{\psi}\hat{m}\psi]. \quad (52)$$

Setzt man die Spur  $T$  aus (46) ein, so sieht man, daß im Falle der Kopplung des Higgsfeldes an  $\mathcal{L}_M$  (nach (13)), *die Quelle des Higgsfeldes verschwindet*:

$$\xi^{|\mu}{}_{||\mu} + M^2\xi \equiv 0, \quad (\phi \sim \mathcal{L}_M), \quad (53)$$

während *ohne Kopplung* noch *die massiven Teilchen als Quelle* dienen:

$$\xi^{|\mu}{}_{||\mu} + M^2\xi = \frac{8\pi G}{3} T, \quad (\phi \approx \mathcal{L}_M). \quad (54)$$

Das *Verschwinden der Quelle des Higgsfeldes* in (53) (vor Brechung (14)) ist wesentlich, da, wie man sieht, sowohl die fermionische Massen als auch die der Eichbosonen nicht mehr als Quelle des angeregten Higgsfeldes beitragen. Das Higgsteilchen dieser Art ist nur an das sehr schwache Gravitationsfeld gekoppelt, in der einzigen raumzeitlichen kovarianten Ableitung. Im Fall mehrerer Higgsfelder gilt das aber nur für dasjenige, das für die Generierung der Gravitationskonstanten  $G$ , nach (39) zuständig ist und für die Massen, die dasselbe Higgsfeld generiert [29].

Ohne Quelle entkoppeln die Higgsteilchen nach Symmetriebrechung im frühen Universum vom Rest der Welt. Das Higgsfeld  $\varphi$  und seine assoziierten Teilchen der Masse  $M$  können somit nicht in einem Labor generiert werden. Nur die gravitativen Folgen dieser Higgsteilchen wären bemerkbar, so daß sie, als ein kosmologisches Untergrundfeld zur Lösung des Dunkle-Materie- Problems beitragen können. Die kosmologischen Folgen kurz nach dem Urknall sind noch von den Anfangsbedingungen im Universum abhängig und davon, welche Rolle das Higgspotential dort spielte.

Ohne Kopplung des Higgsfeldes  $\phi$  an der  $\mathcal{L}_M$ , wie es vor Symmetriebrechung in (12) der Fall ist, und wie es insbesondere im Falle des Modells unter  $SU(5)$  zutrifft, verschwindet die Quelle des Higgsfeldes nicht, sodaß Higgsteilchen prinzipiell generierbar sind. Sie wechselwirken mit dem Rest des Universums und deren Quelle sollten nach (46) die Teilchen sein. Also besitzen die Higgsteilchen nach dem Standard-Modell und  $SU(5)$ -GUT gekoppelt an der HSTT verschiedene Eigenschaften, gegeben durch unterschiedliche Kopplungen an den elementaren Wechselwirkungen. Die durch die SM-Symmetriebrechung produzierten Higgsteilchen wechselwirken nur gravitativ, während nur die der GUT-Brechung experimentell erzeugbar sind.

<sup>28</sup> $\xi$  ist eine skalare Größe, sodaß die kovariante Ableitung gleich der gewöhnlichen Ableitung ist. Zu bemerken ist auch, daß  $M^2 \sim \hat{m}$ . So sollte das MACHsche Prinzip vielleicht nicht gelten.

### 3.6 Über die Renormierung der Gravitationskonstante $G$

Die Gravitationskonstante, die eigentlich die Stärke  $\vec{F}$  des Gravitationsfeldes am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  als Folge der Massendichte  $\varrho_m$  festlegt, also klassisch durch  $\vec{\nabla} \vec{F}(t, \psi) = -4\pi G \varrho_m(t, \psi)$  bestimmt, wurde hier als funktionelle Größe hergeleitet, abhängig vom Higgsfeld und somit abhängig von der Massenverteilung im Universum, wie in der BRANS-DICKE-Theorie. Die Größe der Gravitationskonstante ist somit nicht immer gleich und weniger eine richtige Konstante, sodaß sie nicht *a-priori* die NEWTONsche Gravitationskonstante  $G_N$  ist.

$G$  kann im Endeffekt nur im Labor bestimmt werden, was zum ersten Mal H. CAVENDISH 1798 gelungen ist und zwar um die Dichte der Erde bestimmen zu können. Dazu benutzte er eine Drehwaage, nach ihm genannt [42, 7], und das Äquivalenzprinzip  $m_t = m_s$ , sodaß  $G_N$  eindeutig durch die klassische Gravitationskraft  $\vec{K}(\vec{x}, t) = m_s \vec{F}(\vec{x}, t)$  bestimmt ist.

Bei der CAVENDISH-Waage handelt es sich im historischen Fall um eine sehr empfindliche Drehwaage, in der, an einem dünnen Torsionsfaden ein Stab der Länge  $d$  hängt, an dessen Enden zwei Bleikugeln der Masse  $m$  befestigt sind. Üben zwei große Massen  $\widetilde{M}$  im Abstand  $b$  auf die Bleikugeln Kräfte aus, so dreht sich der Torsionsfaden. Aus der entstandenen Schwingung um die Gleichgewichtsposition  $S$  kann man die Gravitationszahl mit Hilfe eines Spiegels in Entfernung  $L$  von einem Maßstab ausrechnen, mit Hilfe der Formel

$$G_N = \frac{\pi^2 \cdot b^2 \cdot S \cdot d}{\widetilde{M} \cdot T^2 \cdot L} \\ \approx 6,67 \cdot 10^{-11} N \widetilde{M}^2 / kg^2.$$

Dabei ist wichtig, daß der Waagebalken in der Mitte horizontal aufgehängt wird und an dessen Enden zwei identische Kugeln der Masse  $m$  befestigt sind, sodaß der Einfluß des Gravitationsfeldes der Erde auf die Messung eliminiert wird.

Aufgrund der CAVENDISH-Messung konnten die Erdmasse und mittlere Dichte

$$M_E = 6 \cdot 10^{27} g \\ \bar{\varrho} = 5,5 g \cdot cm^3$$

ermittelt werden, was theoretische Vorhersagen geologischer Eigenschaften ermöglicht. Für astronomische Handhabungen sind aber genauere Werte von  $G$  nötig, und erstaunlicherweise war das im Falle von  $G$  (anders als bei allen anderen Konstanten) bis jetzt nicht möglich: heute gilt

$$G = 6,674 \cdot 10^{-8} cm^3 / (gs^2). \quad (55)$$

Bei der 4. Dezimalen schließen sich verschiedene Meßwerte gegenseitig aus, was als Grund nicht-lineare Effekte des Torsionsmoduls  $D$  oder Eigenschaften der Gravitationskraft selbst (als sehr schwache, langreichweitige und nicht abschirmbare Kraft) haben könnte [42].

Auch neue Effekte aufgrund unterschiedlicher chemischer Zusammensetzungen wären möglich oder auch neue Kräfte (wie 5. Higgskräfte). Dann wäre aber die Gravitationsdynamik auf kurzen oder langen Skalen abzuändern, wie MOND [87, 88] oder FLAG [99, 55] vorschlagen: Entweder wäre die Dynamik abhängig von der Beschleunigung  $\frac{|a|}{a_0}$  oder die Gravitationskonstante abhängig von der Feldstärke:

$$\text{FLAG: } G_{eff} = G_N \left( \epsilon \left( \frac{|\vec{F}|}{a_0} \right) \right), \quad (56)$$

sodaß sie mit abnehmender Feldstärke ( $|\vec{F}| < a_0$ ) zunehmen sollte, was man als ein Vakuum-polarisationseffekt interpretieren könnte [42]. Dabei wäre  $G$  “quasi”-konstant für  $|\vec{F}|$  groß gegenüber  $a_0$ .

Im CAVENDISH-Experiment wäre  $G_{eff}$  das gemessene und es ist zu bemerken, daß die gegenseitige Gravitationsfeldstärke der Massen auf der Torsionswaage von der Größenordnung der kritischen Beschleunigung  $a_0$  ist, bei der sich  $\epsilon$  ändert, also  $G_{eff}$  funktional wird, was im Einklang mit den verallgemeinerten KALUZA-KLEIN- und Skalar-Tensor-Theorien steht, mit  $G$  als Feldfunktion nach den Ideen von DIRAC, JORDAN, u.s.w., sodaß FLAG und MOND formal herleitbar sein könnten. Das hat teilweise E. GESSNER in [54] gemacht und wird in dieser Arbeit in einer abgeänderten Form zu finden sein. Dabei würde die Bedeutung des Higgsfeldes eine neue Interpretation erlangen, nicht mehr unbedingt als Elementarteilchenfeld, sondern als Einfluß des Vakuums auf Trägheit und Gravitation. Die Varianz der Gravitationskonstante bedeutet dann eine Änderung der Dynamik, die man unter der ART mit  $G = const$  als Massendiskrepanzen bemerken könnte (s. Abschnitt 4.2 und 6.2)).

## 4 Higgsgravitation und Zentralsymmetrie

Das Dunkle-Materie-Problem wird erläutert und verschiedene Modelle zur Erklärung dessen vorgestellt. Die Zentralsymmetrie wird untersucht und die HSTT im Fall der zentralsymmetrischen Metrik wird angegeben. Das äußere Feld wird im Hinblick auf Schwarzschildradius und Horizonte untersucht und die Analogien zwischen HSTT und Supraleitung besprochen.

### 4.1 Die verallgemeinerte Einsteingleichungen

Mit der Planckmasse  $M_{Pl} \simeq 10^{19} GeV$  und eine Bosonenmasse  $M_{Bos} \lesssim 10^{15} GeV$  kann

$$\alpha = \left( \frac{M_{Pl}}{M_{Bos}} \right)^2 \gg 1 \quad (57)$$

als ziemlich zutreffend angesehen werden. Ausgehend von Gln. (57) und (39) können die Feldgleichungen (38) und (52) somit genähert werden zu

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + 12\pi G \frac{\mu^4}{\lambda} \zeta^{-2} (\zeta^2 - 1)^2 g_{\mu\nu} &= \\ &= -8\pi G \zeta^{-2} \hat{T}_{\mu\nu} - 2\zeta^{-2} \zeta_{|\mu} \zeta_{|\nu} + \\ &+ 2\zeta^{-2} \zeta^{|\lambda} \zeta_{|\lambda} g_{\mu\nu} - \\ &- 2\zeta^{-1} [\zeta_{|\mu} \zeta_{|\nu} - \zeta^{|\lambda} \zeta_{|\lambda}] g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (58)$$

und

$$\begin{aligned} \zeta^{2|\mu} \zeta_{|\nu} + 16\pi G \frac{\mu^4}{\lambda} (\zeta^2 - 1) &= \frac{8\pi G}{3} \hat{\Pi} T \\ &= \xi^{|\mu} \zeta_{|\mu} + 16\pi G \frac{\mu^4}{\lambda} \xi, \end{aligned} \quad (59)$$

mit der Higgsmasse  $M_\varphi^2 = 16\pi G \frac{\mu^4}{\lambda} = l^{-2}$  (die im weiteren auch  $M$  geschrieben sein wird) und mit der Definition eines  $\mathcal{L}_M$ -abhängigen Koeffizients<sup>29</sup>

$$\hat{\Pi} := \begin{cases} 0 & : (\mathcal{L}_M \sim \varphi) \\ 1 & : (\mathcal{L}_M \not\sim \varphi) \end{cases} . \quad (60)$$

Somit kann man die Feldgleichungen für den Higgsmechanismus mit und ohne Higgsteilchen zusammensetzen. Dazu setzt man am besten  $\zeta^2$  in die Feldgleichungen (58) und (59) mit dem Anregungsfeld  $\xi = \zeta^2 - 1$  ein. So erhält man, wie in [54],

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \frac{1}{l^2} (1 + \xi)^{-1} \xi (1 + \frac{3}{4} \xi) &= \\ &= -8\pi G (1 + \xi)^{-1} (T_{\mu\nu} - \hat{\Pi} \frac{1}{3} T g_{\mu\nu}) - \\ &- (1 + \xi)^{-1} \xi_{|\mu} \zeta_{|\nu} \end{aligned} \quad (61)$$

und

$$\xi^{|\mu} \zeta_{|\mu} + \frac{1}{l^2} \xi = \hat{\Pi} \frac{8\pi G}{3} T = \hat{\Pi} 2\pi G_N T; \quad G = \frac{3}{4} G_N. \quad (62)$$

<sup>29</sup>In [20] findet man  $\tilde{\mu} = 1 - \hat{\Pi}$ .  $\hat{\Pi}$  ist hier für die Betrachtung angenehmer und spiegelt das Verschwinden der Quelle des Higgsfeldes besser wider.

Multipliziert man Gl. (61) mit  $g^{\mu\nu}$ , so erhält man unter Verwendung der Higgselfgleichung (62):

$$R = \frac{3}{l^2}\xi, \quad (63)$$

sodaß man den Krümmungsskalar eliminieren kann.

Eingesetzt in die Feldgleichungen (58) ergibt sich nach einfachen Umformungen:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2l^2}(1 + \xi)^{-1}\xi(1 + \frac{3}{2}\xi)g_{\mu\nu} &= \\ &= -8\pi G(1 + \xi)^{-1}(T_{\mu\nu} - \hat{\Pi}\frac{1}{3}Tg_{\mu\nu}) - (1 + \xi)^{-1}\xi_{|\mu||\nu}. \end{aligned} \quad (64)$$

Diese Form der Feldgleichungen soll benutzt werden für die Untersuchung einer verallgemeinerten Form der SCHWARZSCHILD-Metrik und der FRIEDMANN- Gleichungen, d.h. der zugehörigen Gleichungen des FRIEDMANN- Modells, ausgehend von einer bestimmten gegebenen Metrik, hier mit einem Higgspotential  $V(\xi)$ . Hieraus sollen dann die kosmologische Konsequenzen untersucht werden.

Zu analogen Ergebnissen kommt man in der ART mit dem RICCI-Tensor

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) + \Lambda_0 g_{\mu\nu} \quad (65)$$

und daraus mit dem RICCI-Skalar:

$$\begin{aligned} R &= -\kappa(T - 2T) + 4\Lambda_0 \\ &= \kappa T + 4\Lambda_0 \implies \kappa T = R - 4\Lambda_0. \end{aligned} \quad (66)$$

Daraus folgt

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (67)$$

Man sieht wieder, daß die kosmologische Konstante, die im Fall der verallgemeinerten Feldgleichungen zu einer kosmologischen Funktion (49) wird, hauptsächlich gegeben ist durch das Higgspotential  $V(\xi)$  aus (7).

Als Verknüpfung zwischen der Gravitations-‘Konstante’  $G$  und der NEWTONschen Konstanten  $G_N$ , bestimmt auf der CAVENDISH-Waage, erhält man

$$G = \frac{3}{4}G_N.$$

Die Änderung von  $G$  in kosmologischen Bereichen kann unter Umständen zu Änderungen der Dynamik in Bezug auf die allgemeinrelativistischen und NEWTONschen Gleichungen führen. Somit könnte sich die Variabilität von  $G$  als Massendiskrepanz zwischen Experimenten und der Theorie mit konstanter Gravitationskonstante  $G$  bemerkbar machen, da sich die Stärke der Gravitationskraft verändert. Somit erschwert sich die Deutung experimenteller Daten.

## 4.2 Die Dunkle Materie

Die Dunkle Materie (DM) ist eine Art Materie, die essentiell nicht elektromagnetisch (wenn überhaupt nur schwach) wechselwirkt, sodaß sie nicht durch elektromagnetische Ausstrahlung oder Absorption zu entdecken ist. Die Existenz von solcher Materie hat man unter anderem aus der Beobachtung der Bewegung von Galaxien geschlossen. Ihre Bewegung ist nur erklärbar, wenn es nach der NEWTONSchen Dynamik deutlich mehr Materie gibt, als man in Form von Sternen sehen kann. Dabei könnte es sich um exotische Materie handeln, wie wir sie noch nicht kennen (oder experimentell erzeugt haben, wie supersymmetrische Teilchen) oder aber beispielsweise um sehr leuchtschwache Sterne wie Graue/Braune Zwerge oder auch zum Teil heißes ionisiertes Gas.

Man unterscheidet zwischen baryonischer (“normaler”) und nicht-baryonischer Dunkelmaterie. Aus kosmologischen Modellen über die Entstehung des Universums und der Elemente weiß man aber, daß nicht die gesamte fehlende Materie (und dies scheint der überwiegende Teil der Materie des Universums zu sein) in Form von “normaler” Dunkelmaterie vorliegen kann, sondern ein erheblicher Teil aus einer bislang unbekannt Form von Materie bestehen muß [41].

Die Materie im Standard-Modell kann sich nicht durch Gravitation zusammenballen, solange sie dem Strahlungsdruck der elektromagnetischen Strahlung (und auch der anderen Wechselwirkungen) ausgesetzt ist. Erst nachdem das Universum durchsichtig wird (siehe Abschnitt 7), kann der Prozeß der Galaxienbildung beginnen. Da dies aber erst nach ca.  $1,2 \cdot 10^6$  Jahren geschieht, ist es zu spät, um die heutigen Strukturen noch erzeugen zu können, da die Dichte schon zu weit abgesunken ist. Die Zusammenballung hätte nach der NEWTONSchen und EINSTEINSchen Dynamik schon viel früher beginnen müssen. Unter der Annahme der Existenz Dunkler Materie in der frühesten Phase des Universums aber, kann das behoben werden. Sie soll *per definitionem* nicht mit elektromagnetischer Strahlung wechselwirken, soll also nicht dem Strahlungsdruck unterworfen sein und soll sich nur durch ihre Gravitation bemerkbar machen.<sup>30</sup>

Auch Messungen bei Spiralgalaxien zeigen, daß sie viel mehr Masse besitzen sollten, als leuchtende Materie zur Verfügung steht, wenn man die ART in der gewöhnlichen Form benutzt.

Große Galaxienhaufen haben auch zu wenig leuchtende Masse, um die Galaxien in ihnen mit den gemessenen großen kinetischen Energien zu halten. Die Galaxien müßten wegfliegen.<sup>31</sup>

Um die beobachtete Massendiskrepanz

$$D = \frac{M_{dyn}}{M_{obs}} - 1 \quad (68)$$

selbst-gravitierender Objekte zu erklären, mit

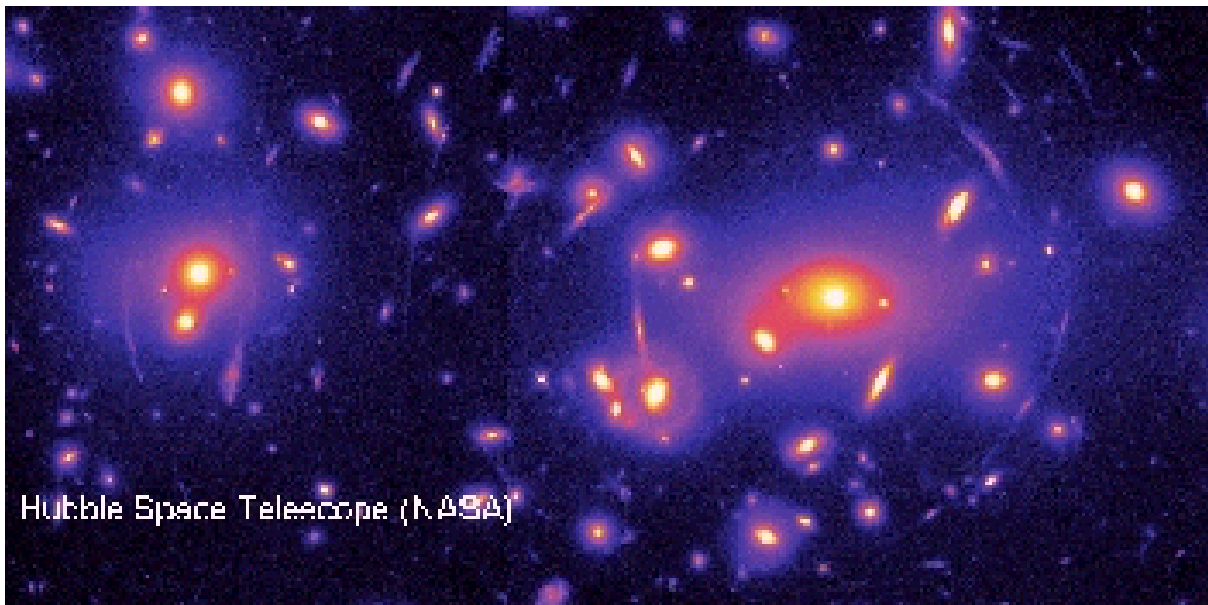
- dynamischer Masse  $M_{dyn}$  und

- beobachteter Masse  $M_{obs}$ ,

geht man in den Standardtheorien davon aus, daß die Dunkle Materie die Galaxien in einem kugelförmigen Halo (oder Corona zur Unterscheidung zwischen der Art Dunkler Materie [41]) umgibt, dessen Ausdehnung weit größer als die sichtbare Scheibe ist [93]. Dieses Bild kann gestützt werden durch Messungen der DOPPLER-Verschiebung der 21cm-Linie des

<sup>30</sup>Es gibt auch den Ansatz, wie in der Stringtheorie [94], daß die Dunkle Materie aus der Brechung der Symmetriegruppe in  $E_8 \otimes E_8$  folgt, wobei die Elemente einer Gruppe mit den der anderen dann nur gravitativ wechselwirken. Es handelt sich dann um ein Universum und ein “Schattenuniversum”, das man nur gravitativ bemerkt. Die Annahmen der Stringtheorie sind von den der hiesigen Theorie verschieden, da hier die Bosonen als das Grundlegende angesehen werden, und nicht die Fermionen.

<sup>31</sup>Das wurde laut [79] erstmals von ZWICKY 1933 untersucht.



3: Die vom Galaxienhaufen Abell 2218 erzeugte Gravitationskraft bewirkt Verzerrung von Bildern der Hintergrundobjekte zu Punktquellen und Bögen. Aus der Form der Verzerrung und weiteren Informationen ist die Gesamtmasse des Galaxienhaufens modellierbar. Auch aus diesem Phänomen leitet man die Existenz von deutlich mehr Masse ab, als die bekannten Massekomponenten erklären können. Ein weiterer Fall für Dunkle Materie (Aufnahme HST).[13]

neutralen Wasserstoffes außerhalb der Region des optischen Radius. Außerdem zeigen diese Messungen, daß eine sensitive Kopplung zwischen sichtbarer und Dunkler Materie bestehen muß (*“disk-halo conspiracy”*), da die *“Leucht-Materie”* dem Anschein nach den asymptotischen Wert der Rotationsgeschwindigkeit der Galaxien determiniert, in der Form, daß die Rotationskurven im Bereich der Dominanz der sichtbaren Materie immer noch flach bleiben. Dafür müßten die spezifischen Drehimpulse des Disk- und Halomaterials identisch sein:

$$\frac{J_d}{M_d} = \frac{J_h}{M_h}, \quad (69)$$

und Leuchtmaterie und Dunkle Materie dynamisch gekoppelt sein, da die Corona auf den Kollaps der Dissipationsmaterie reagiert [101].

Die Dichteverteilung der Dunkelmaterie kann laut [54] wie folgt abgeschätzt werden, im Hinblick auf die flachen Rotationskurven spiraler Galaxien:

Um zu flachen Rotationskurven zu gelangen, muß für das Gravitationspotential  $\Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{C}{r} \quad (70)$$

gelten, worin  $C$  die konstante Tangentialgeschwindigkeit zum Quadrat bedeutet. Hieraus folgt für die Dichte  $\rho_D$  der Dunkelmaterie:

$$\rho_D \sim \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sim \frac{C}{r^2}. \quad (71)$$

Dieses Dichteverhalten muß aber auf einen endlichen Bereich beschränkt sein, da das Integral der Dichte sonst divergiert.

Betrachtet man für dieses Problem die Eulergleichung

$$\varrho_D \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial p_D}{\partial r} = 0, \quad (72)$$

so ergibt sich für den Druck  $p_D$ :

$$p_D \sim r^{-2}. \quad (73)$$

Der Vergleich mit (71) ergibt die Zustandsgleichung

$$p_D = \alpha \varrho_D. \quad (74)$$

Hier handelt es sich um eine Polytropengleichung mit dem Polytropenindex  $\gamma = 1$  und der Polytropenamplitude  $\alpha$ , welcher die Dunkelmaterie genügen muß.

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß diese Zustandsgleichung, in die Eulergleichung eingesetzt, zu folgendem Zusammenhang zwischen der Dichte  $\varrho_D$  und dem Potential  $\Phi$  führt:

$$\varrho_D = e^{\frac{1}{\alpha}(\Phi_0 - \Phi)} =: \varrho_0 e^{-\Phi/\alpha}. \quad (75)$$

Gemäß dieser barometrischen Höhenformel besitzt die Dunkelmaterie keinen Rand ( $\varrho_D = 0$ ). Die Poissongleichung nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \varrho_0 e^{-\Phi/\alpha}. \quad (76)$$

Mit der Substitution

$$\Phi = \alpha \ln \varsigma^2 \quad (77)$$

läßt sich Gl. (76) im kugelsymmetrischen Fall zu

$$\varsigma \varsigma'' - \varsigma'^2 + \frac{2}{r} \varsigma' \varsigma = \frac{2\pi G \varrho_0}{\alpha} \quad (78)$$

vereinfachen ( $\varrho_D = \varrho_0/\varsigma^2$ ,  $p_D = \alpha \varrho_D$ ). Diese Differentialgleichung kann z.B. mit einem Potentialansatz  $\varsigma = ar^n$  gelöst werden. Man findet, daß nur  $n = 1$  auf eine Lösung der Poissongleichung führt. Dann gilt:

$$a^2 = \frac{2\pi G \varrho_0}{\alpha}, \quad (79)$$

$$\Phi = 2\alpha(\ln r + \ln a), \quad (80)$$

$$\varrho_D = \frac{\alpha}{2\pi G r^2}, \quad (81)$$

$$p_D = \frac{\alpha^2}{2\pi G r^2} \quad (82)$$

und das Quadrat der Tangentialgeschwindigkeit ist:

$$v^2 = 2\alpha = \text{const.} \quad (83)$$

$v^2$  ist also konstant und gerade das Doppelte der Polytropenamplitude  $\alpha$ .

In der Literatur wird die Dichteverteilung des dunklen Halos (Coronae) darüber hinaus unter Zuhilfenahme komplizierter N-Körper-Rechnungen diskutiert [101].

#### 4.2.1 DM-Arten und DM-Modelle

Die Existenz der Dunklen Materie zur Erklärung solcher kosmologischen Probleme bringt die Frage mit sich, was sie eigentlich ist. Baryonisch oder normal kann sie größtenteils nicht sein und Neutrinos (die sog. Heiße Dunkle Materie HDM) sind mit deren (fast) verschwindender Masse unpassend für eine richtige Erklärung und könnten nach CROFT *et al.* (laut [79]) nicht mehr als 10% zur kritischen Dichte beitragen.

Eine andere Erklärung wird oft gegeben durch die sog. Kalte Dunkle Materie CDM. Es ist in der Theorie aber noch unklar, was sie am besten sein könnte. Erwähnt werden oft neue Teilchen wie die sog. Axions<sup>32</sup>, supersymmetrische Teilchen wie die Neutralinos (die prototypische WIMPS -“weak interacting massive particles”-), die Gravitinos oder die Photinos (SuperWIMPS). Auch Versuche gibt es, die Dunkle Materie aus höheren Dimensionen der KALUZA-KLEIN-Theorien zu bekommen, indem es zu jeder Extra-Dimension neue Teilchen gibt.[44]

Es bleibt dennoch, daß das NEWTONSche  $1/r$ -Gesetz empirisch nur gut im Satellitenbereich und im Sonnensystem getestet ist. Die flachen Rotationskurven könnten daher ein erster Hinweis darauf sein, daß das  $1/r$ -Gesetz auf Skalen von etwa 10kpc und mehr nicht mehr zutrifft. Es besteht die Möglichkeit, daß nicht so ein großer Teil an Materie im Universum dunkel ist. Die Dynamik kann aus mikroskopischen Gründen und Kräften zu ändern sein, sodaß die Skalar-Tensortheorie zur Lösung des Problems beitragen könnte. Das würde vielleicht erklären, warum es in unserer Gegend, d.h. in unserer Galaxis kaum Dunkle Materie gibt, wenn sie doch einen großen Anteil der Masse im Universum ausmacht.<sup>33</sup>

Zur Modifikation des NEWTONSchen Gravitationsgesetzes sind eine Reihe von *ad hoc* Ansätzen vorgeschlagen worden. Zunächst haben TOHLINE (1983), später KUHN und KRUGLYAK (1987) [101] folgendes Kraftgesetz für eine Masse  $M$  verwendet:

$$F = \frac{GM}{r^2} + \frac{GM}{rr_0}, \quad (84)$$

wobei  $r_0$  eine Reichweite der Größe 10 bis 20 kpc ist. Die Rotationskurven, die sich daraus ergeben, sind asymptotisch flach, wie sie auch gemessen werden.

Ein weiterer Ansatz ist eine endlich reichweitige Antigravitation in der FLAG-Theorie von R. H. SANDERS ([99, 100]), der ein YUKAWA-Potential mit endlicher Reichweite  $r_0$  und einer negativen Kopplungskonstante  $\alpha$  zum NEWTON-Potential hinzuaddiert. Die negative Kopplungskonstante bewirkt, daß der YUKAWA-Anteil repulsiv ist. In dieser Theorie lautet das Potential einer Punktmasse

$$\Phi = -\frac{G_\infty M}{r} (1 + \alpha e^{-r/r_0}). \quad (85)$$

$G_\infty$  ist die Gravitationskonstante im Unendlichen. Die lokale Gravitations‘konstante’  $G_0$  ist variabel:

$$G_0 = G_\infty (1 + \alpha). \quad (86)$$

<sup>32</sup>Hypothetische Teilchen, die aus der Brechung der chiralen  $U(1)$ -Symmetrieminvarianz zur CP-Verletzung im PECCEI-QUINN-Mechanismus [91] entstehen sollten.

<sup>33</sup>P.D. MANNHEIM beschreibt das Problem so, daß die Dunkle Materie “wissen müßte”, wo und im welchen Grade sie erscheinen muß, damit die Standard-Gravitation im Planetensystem, wo es kein hohes Grad an DM gibt, gilt [84].

Auf diese Weise können Rotationskurven von Galaxien der Größe 5 bis 40 kpc reproduziert werden, wobei  $\alpha \approx -0,92$  und  $20 \text{ kpc} < r_0 < 40 \text{ kpc}$  ist.<sup>34</sup>

Beide Modifikationen führen jedoch dazu, daß die empirische Beziehung zwischen Leuchtkraft  $L$  und der maximalen Rotationsgeschwindigkeit  $v$  statt  $L \sim v^4$  (TULLY-FISHER-Gesetz) die Gestalt  $L \sim v^2$  haben müßte. Außerdem sollten nach diesen Theorien größere Galaxien größere Massendiskrepanzen zeigen, was aber nicht beobachtet wird.

Ein dritter *ad hoc*-Ansatz zur Änderung des NEWTON-Gesetzes kommt von M. MILGROM [87, 88], der annimmt, daß eine Abweichung vom NEWTON-Gesetz in großen astronomischen Systemen erst unterhalb einer kritischen Beschleunigung auftritt. Daraus hat er eine Modifikation der NEWTON-Dynamik (MOND) entwickelt, in der die Bewegungsgleichung wie folgt lautet:

$$m\mu(a/a_0)\vec{a} = \vec{F}. \quad (87)$$

Hier bezeichnet  $a_0$  eine Beschleunigungskonstante, und  $\mu(a/a_0)$  ist eine Funktion von  $a/a_0$ :

$$\mu(a/a_0) = \begin{cases} a/a_0 & \text{für } a \ll a_0 \\ 1 & \text{für } a \gg a_0 \end{cases}. \quad (88)$$

Der Verlauf der Funktion  $\mu$  ist empirisch zu bestimmen und ist für jede Galaxie derselbe. MILGROM selbst betont, daß diese Bewegungsgleichung nur zu guten Resultaten führt, aber keine geschlossene Theorie darstellt [87]. Aus diesem Grund haben BECKENSTEIN und MILGROM [4] versucht, die MOND-Theorie im Rahmen einer Feldtheorie zu formulieren. Sie sind von einer nichtrelativistischen Lagrangedichte ausgegangen, aus der eine modifizierte Poissongleichung folgt:

$$\Delta[(\nabla\Phi)\mu(|\nabla\Phi|/a_0)] = 4\pi\rho, \quad (89)$$

während das NEWTONsche Gravitationsgesetz entgegengesetzt der ursprünglichen MILGROM-Bewegungsgleichung beibehalten wird (die neue Gleichung entspricht dem GAUSSschen Gesetz der Elektrodynamik im Falle isotroper nichtlinearer dielektrischer Medien) [101].

Im Falle hoher Beschleunigung ( $\mu = 1$ ) geht diese Gleichung in die bekannte Poissongleichung über. Die Theorie beschreibt sehr gut die Massendiskrepanzen in minimal beschleunigten Systemen. Die Beschleunigung sollte dabei kleiner sein als ca.  $a_0 = 10^{-8} \text{ cm/s}^2 \sim cH_0$ .

Es gibt Diskussionen zwischen den Verfechtern der CDM und MOND, ob das MILGROM-Gesetz aus der CDM-Theorie als Zufall oder asymptotisch zu kriegen ist oder nicht, und ob MOND die Phänomenologie besser erklären könnte als CDM und die Simulationen daraus [79, 86, 38]. J. DUNKEL [38] erklärt einen formellen asymptotischen Übergang der DM-Theorie in MOND im Falle großer Abstände und sehr kleinen Beschleunigungsverhältnissen  $\epsilon(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x})}{a(\vec{x})} = \frac{g(\vec{x})}{g_d(\vec{x})} - 1$  (mit der Beschleunigung der Dunklen Materie  $g_d$ ), der dazu führt, daß die DM-Theorien für einige Cluster oder Galaxien bessere Resultate geben als die nach MOND. Dabei wäre im CDM-Modell  $a(\vec{x})$  nicht mehr eine Konstante  $a_0$  wie bei MOND, und die Gleichheit entspräche der Grenze zwischen den Modellen. Nach seiner Auffassung wären MOND-erklärbare Systeme demnach DM dominiert und weitere DM-Systeme allgemeiner und nicht durch MOND erklärbar. Dabei nimmt er aber an, daß die sichtbare Massenverteilungen und die Dunkle Materie sich in derselben Richtung bewegen und ähnlich verhalten (eine Form der "Disk-Halo-Verschwörung").

<sup>34</sup>Dabei handelt es sich um eine Änderung der Dynamik aufgrund einer 5. Kraft, die SANDERS mit der möglichen Existenz massiver Gravitationsquanten begründet [100].

Ändert man die existierende Dynamik einfach durch empirische Faktoren, wie SANDERS es in [99] mit (85) versucht oder MILGROM in [87, 88] mit (87), so ist die Dunkle Materie zumindest teilweise gegeben durch diese Änderung der Dynamik. Will man die Dynamik aber grundlegend verstehen und neue Effekte herleiten, müssen diese Änderungen grundsätzlich erklärt werden. Die Änderung soll auf die gesamte Gravitationstheorie wirken und sich z.B. bei den flachen Rotationskurven bemerkbar machen, und gleichzeitig sollen die Vorhersagen in Skalen des Sonnensystems mit hoher Genauigkeit ununterscheidbar sein von denjenigen der Allgemeinen Relativität.

Eine vielversprechende Möglichkeit besteht dabei in den Skalar-Tensor-Theorien (s. [9]). Innerhalb der HSTT folgt die Änderung aus neuen Gravitationseffekten der Higgsfelder, die sich erst in astrophysikalischen Maßen bemerkbar machen (siehe die zentralsymmetrische Metrik).

Diese neue Dynamik aufgrund skalarer Felder läßt sich mit einer Art Dunkler Materie identifizieren (zu mindest formal): die sogenannte Selbstwechselwirkende Dunkle Materie (oder SIDM: “self-interacting Dark Matter”), aufgrund eines skalaren Eichsingulets, gekoppelt an dem Higgsboson, wie zum Beispiel auch von BENTO, BERTOLAMI *et al.* in [5] oder von BØEM und FAYET in [14] untersucht. Das führt zu unsichtbaren zerfallenden Higgsteilchen, die gute Kandidaten für die selbstwechselwirkende DM sind. Solch ein Verhalten folgt den Gedanken in [29, 18, 19]<sup>35</sup>, mit dem Higgsmechanismus ohne erzeugbaren Higgsteilchen und Inflation durch das Higgspotential.

Das Higgspotential entspricht nach (49) im Prinzip der kosmologischen Funktion oder Konstante  $\Lambda$ , und am Anfang des Universums sollen GAUSS-Dichtefluktuationen (entsprechend der CDM) durch Inflation entstehen. Diese Fluktuationen wachsen dann gravitativ und formen Dunkle Halos, wo leuchtende Materie eventuell kondensiert und abgekühlt wird. Die Selbstwechselwirkung zeigt sich in der charakteristischen Reichweite (hier  $l$ ) durch den freien Weg der Teilchen im Halo.

Man kann annehmen, daß die HIGGS-Oszillationen nach der Inflation in Baryonen und Leptonen zerfallen. Die Energie ist in  $V(0)$  gespeichert und zerfällt, um das Universum wiederzuerwärmen. Die Wiedererwärmung führt seinerseits dazu, daß das Higgspotential  $V(\phi) \triangleq \Lambda$  fast komplett verschwindet und Materie entsteht. Falls es noch inkohärente Oszillationen gibt, sind sie Resonanzen von  $V(\phi)$ , unsichtbar als Kalte Dunkle Materie (eigentlich SIDM) [18, 19].

Ein Zerfall der Oszillationen in Baryonen und Leptonen ist nötig, da sonst die baryonische Masse zu wenig ist. Bei der Wiedererwärmung kann aber  $\Lambda$  zu meisten Teilen verschwinden und die bekannte Materie erzeugen. Das steht in Übereinstimmung mit [30, 31], wo eine Untersuchung massiver bosonischer Teilchen durchgeführt wird. Indem sie den Galaxiedisk umgeben, können sie flache Rotationskurven generieren. Diese könnten nur einzig gravitativ wechselwirkende Higgsteilchen sein.

Nach [14] verbietet der LEE-WEINBERG-Limit i.d.R. DM unter einigen  $\text{GeV}$ <sup>36</sup>; das müßte aber für skalare Dunkle Materie nicht unbedingt der Fall sein. Nach [12] könnten sich mit einem skalaren DM-Kandidat in einem Higgsmodell DM-Teilchen mit Massen der Ordnung  $100\text{GeV}$  (mit DM-Teilchen, die nicht mit schwachen Vektorbosonen wechselwirken) oder  $500\text{GeV}$  (schwach wechselwirkend, also als eine Art WIMP<sup>37</sup>) ergeben und für akzeptable DM-Verhältnisse sorgen.

<sup>35</sup>Siehe insb. das Unterabschnitt 7.2.2 über den weiteren Problemen der Kosmologie.

<sup>36</sup>Nach [14] erwartet man für Neutralinos als Teilchen der CDM eine Energie der Ordnung  $30\text{GeV}$ .

<sup>37</sup>Diese Modelle werden insb. innerhalb der Supersymmetrie (SuSy) untersucht.

### 4.3 Die zentralsymmetrische Metrik in der Skalar-Tensortheorie

Die Raumzeit wird laut WALD [115] als sphärisch (oder zentral-) symmetrisch definiert, wenn ihre Isometriegruppe eine isomorphe Untergruppe der Gruppe  $SO(3)$  besitzt und die Orbits (d.h. die Anzahl an Punkte aus der Wirkung der Untergruppe auf einem gegebenen Punkt) zwei-dimensionale Kugeln sind.  $SO(3)$ -Isometrien können dann physikalisch interpretiert werden als Rotationen, sodaß eine sphärisch-symmetrische Raumzeit eine Metrik besitzt, die invariant gegenüber Rotationen ist. Die Metrik der Raumzeit induziert eine Metrik auf jeder Orbit-2-Kugel, die wegen der Rotationssymmetrie ein Vielfaches der Metrik eines Einheits-2-Orbit ist, und folglich vollständig charakterisiert ist durch eine Gesamtfläche  $A$  der 4-Kugel. Man benutzt dann die Funktion  $r$ , definiert durch

$$r = (A/4\pi)^{1/2}. \quad (90)$$

In sphärischen Koordinaten  $(\vartheta, \varphi)$  ist somit die Metrik auf jeder Orbit-2-Kugel von der Form

$$d\sigma^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (91)$$

In einem flachen 3-dimensionalen euklidischen Raum ist  $r$  der Wert des Radius der Kugel und wird als "radiale Koordinate" der Kugel bezeichnet, obwohl in gekrümmten Räumen die Kugel nicht unbedingt ein Zentrum besitzen muß.

Untersucht werden die Feldgleichungen für die Metrik

$$\mathbf{g} = d\mathbf{s}^2 = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \otimes \mathbf{d}x^\nu$$

für den Fall der Zentralsymmetrie und Zeitabhängigkeit (Signatur  $(+, -, -, -)$ ) gemäß dem Linienelement<sup>38</sup>

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(dx^0)^2 - \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j \\ &= e^{\nu(r,t)}(dx^0)^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - e^{\beta(r,t)}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \end{aligned} \quad (92)$$

oder

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}(dx^0)^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - e^{\mu(r,t)} r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (93)$$

$$(94)$$

mit den 1-Formen  $\omega^\mu \cong \mathbf{d}x^\mu$  als Koordinatenbasis [90].  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  und  $\mu = 2\beta \log r$  sind i.a. Funktionen von  $x^1$  und  $x^0$ , wobei man sie nach SYNGE ([107], S.270) spezialisieren kann:

- Polare Gauß-Koordinaten:  $\lambda = 0$ ,
- Krümmungs- oder Schwarzschildkoordinaten:  $\beta = 2 \log x^1$ ,  $(x^1 = r)$ ,
- Isotherme Koordinaten:  $\lambda = \nu$ ,
- Isotrope Koordinaten:  $\beta = \lambda + 2 \log x^1$ .

Benutzt man eine nichtholonome orthonormale Basis von Vektorfeldern  $(e_\mu)^a$  mit

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}, \quad (95)$$

<sup>38</sup> $t$  kann umgeschrieben werden gemäß  $e^\nu dt^2 = e^\nu dt^{*2} + 2bdrdt$ .

so bekommt man die *Tetrade*  $\{(e_\mu)^a\}$ .  
Man definiert die Konnektion-1-Formen

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b. \quad (96)$$

Dann impliziert die Orthonormalität der Tetrade

$$\omega_{a\mu\nu} = -(e_\nu)^b \nabla_a (e_\mu)_b = -\omega_{a\nu\mu}, \quad (97)$$

mit  $\nabla_a g_{bc} = 0$ .

Die *Basis* der sphärisch-symmetrischen Metrik lautet<sup>39</sup> (nach [107])

$$\left. \begin{aligned} (e_0)_a &= e^{\frac{1}{2}\nu} (dt)_a \\ (e_1)_a &= e^{\frac{1}{2}\lambda} (dr)_a \\ (e_2)_a &= e^{\frac{1}{2}\beta} (d\vartheta)_a \\ (e_3)_a &= e^{\frac{1}{2}\beta} \sin\vartheta (d\varphi)_a \end{aligned} \right\}. \quad (98)$$

Die von Null verschiedenen CHRISTOFFEL-Symbole oder -Konnektionskomponenten (abkürzend -Konnektionen) lauten<sup>40</sup> (siehe Anhang B):

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c} \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}\dot{\nu} & \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} & \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}\dot{\beta} & \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}\dot{\beta} \\ \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}\nu' & \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}\dot{\lambda} & \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\beta' & \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}\beta' \\ \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda-\nu} & \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\lambda' & & \Gamma_{23}^3 = \cot\vartheta \\ \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}\beta e^{\beta-\nu} & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}\beta' e^{\beta-\lambda} & & \\ \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}\beta e^{\beta-\nu} \sin^2\vartheta & \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2}\beta' e^{\beta-\lambda} \sin^2\vartheta & \Gamma_{33}^2 = -\sin\vartheta \cos\vartheta & \end{array} \right|$$

Am wichtigsten sind hier isotrope und Krümmungskordinaten. Die zweiten führen in der gewöhnlichen Relativitätstheorie zu der SCHWARZSCHILD-Metrik. Sie ist dort die einzige sphärisch-symmetrische Lösung der EINSTEIN-Gleichungen ohne kosmologische Konstante  $\Lambda_0$ , außer der MINKOWSKI-Metrik der flachen Raumzeit. Mit  $\Lambda_0 \neq 0$  wird sie zur WEYL-Metrik, wenn nicht die des DE SITTER Universums, mit nicht verschwindender kosmologischer Konstante in einer gekrümmten Raumzeit ohne Massen.<sup>41</sup>

Statisch gilt besonders für die Fälle der Krümmungskordinaten und Isotropie:

|                                 | Krümmungsk.                       | isotrop  |
|---------------------------------|-----------------------------------|--|
| $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3$ | $\frac{1}{r}$                     | $\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\lambda'$                      |
| $\Gamma_{22}^1$                 | $-r e^{-\lambda}$                 | $-r - \frac{1}{2}r^2 \lambda'$                           |
| $\Gamma_{22}^0$                 | 0                                 | $\frac{1}{2}\lambda$                                     |
| $\Gamma_{33}^1$                 | $-r \sin^2\vartheta e^{-\lambda}$ | $-r - \frac{1}{2}r^2 \lambda' \sin^2\vartheta$           |
| $\Gamma_{33}^0$                 | 0                                 | $\frac{r^2}{2} \lambda e^{-\lambda-\nu} \sin^2\vartheta$ |

Im zentralsymmetrischen Fall gilt

$$\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\nu}{\partial\varphi} = 0. \quad (99)$$

$g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu \neq 0, 1$ ) ist somit isometrisch in  $\vartheta$  und  $\varphi$ <sup>42</sup>.

<sup>39</sup>In CARTAN-Schreibweise gilt  $e_\mu = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^\mu}$  mit dem "Event"  $\mathcal{P}$  und mit holonomer Basis [90].

<sup>40</sup>Sie sind so nur für die holonome Basis definiert.

<sup>41</sup>Das DESITTER-Linienelement ist gegeben durch das statische homogene mit der Bedingung  $\varrho_{00} + p_0 = 0$ ,  $\lambda' = -\mu'$  und  $\lambda = -\nu$ . Das MINKOWSKI-Element besitzt  $\lambda = \nu = 0$ , während das instabile EINSTEIN-Element durch  $\nu' = 0$  gegeben ist. Diese drei sind die einzigen Arten statischer homogener Linienelemente in der ART.

<sup>42</sup>Wäre das für die ganze Metrik der Fall, so könnte man den Killingvektoren KV bauen. Translation über den läßt die Geometrie der Mannigfaltigkeit unverändert und der Impuls in der KV-Richtung ist der konjugierter Impuls der in dem Fall zyklischen Koordinaten  $\vartheta, \varphi$  konstant. Das ist in der Schwarzschildmetrik der Fall für  $t$  und  $\varphi$ , sodaß  $p_0 = E$  und  $p_\varphi = \pm L$  erhalten bleiben.

Mit den CHRISTOFFEL-Symbolen bekommt man für den **RICCI-Tensor** (siehe Anhang B) die folgenden nichtverschwindenden Elemente [81, 107]<sup>43</sup>

$$\begin{aligned}
R^0_0 &= e^{-\nu} \left( \frac{1}{2} \ddot{\lambda} + \frac{1}{4} \dot{\lambda}^2 - \frac{1}{4} \dot{\nu} \dot{\lambda} + \ddot{\beta} + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\nu} \dot{\beta} \right) - \\
&\quad - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{2} \nu' \beta' \right), \\
R^0_1 &= e^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda)} \left( \dot{\beta}' + \frac{1}{2} \dot{\beta} \beta' - \frac{1}{2} \nu' \dot{\beta} - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \beta' \right), \\
R^1_1 &= e^{-\nu} \left( \frac{1}{2} \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{1}{4} \dot{\nu} \dot{\lambda} + \frac{1}{2} \dot{\lambda} \dot{\beta} \right) - \\
&\quad - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \beta'' + \frac{1}{2} \beta'^2 - \frac{1}{2} \lambda' \beta' \right), \\
R^2_2 = R^3_3 &= e^{-\nu} \left( \frac{1}{2} \ddot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 - \frac{1}{4} \dot{\nu} \dot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{4} \dot{\lambda} \dot{\beta} \right) - \\
&\quad - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{4} \nu' \beta' + \frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{2} \beta'' - \frac{1}{4} \lambda' \beta' \right) + e^{-\beta}.
\end{aligned} \tag{100}$$

Das heißt insbesondere für die zentralsymmetrische nichtisotrope Metrik (93) (d.h. mit Krümmungskordinaten):

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -e^{\nu-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4}, \\
R_{10} &= \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\
R_{11} &= -e^{\lambda-\nu} \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} \right) + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r}, \\
R_{22} &= e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r}{2} (\nu' - \lambda') \right] - 1, \\
R_{33} &= \sin^2 \vartheta R_{22}.
\end{aligned} \tag{101}$$

#### 4.4 Feldgleichungen für die ideale Flüssigkeit

Im folgenden wird der Fall mit Krümmungskordinaten untersucht. Das führt in der Allgemeinen Relativitätstheorie zur Schwarzschildlösung der Einsteingleichungen, wo man in der exakten Lösung Schwarze Löcher bekommt, mit dem Schwarzschildradius  $r_{SS} = 2\eta \propto 2m$ , der also im wesentlichen von der Masse, z.B. des Sterns abhängt. Dort ist die Schwarzschildlösung die einzige Lösung und nach dem BIRKHOFF-Theorem im Außenraum immer statisch<sup>44</sup>.

Aus Einfachheitsgründen wählt man für die folgende Betrachtung ein System aus einer perfekten Flüssigkeit im thermodynamischen Gleichgewicht. Die chemische Komposition ist gegeben durch zwei thermodynamische Variablen (Entropie und Baryonenzahl). Solche einfachen Flüssigkeiten sind realisiert, wenn die Reaktionsraten so langsam sind, daß sie auf

<sup>43</sup>Mit Tetrade-Schreibweise, ist das RICCI-Tensor  $R_{\mu\nu} \equiv R_{ab}(e_\mu)^a (e_\nu)^b$ .

<sup>44</sup>Außerdem sind in der ART die Lösungen nach dem BIRKHOFF-Theorem eindeutig -inparametrig- und die Felder verschwinden für  $r \rightarrow \infty$  wie  $1/r$ .

großen Skalen keine Rolle spielen können oder auf der anderen Seite, wenn sie so schnell sind, daß das Gleichgewicht trotz sich änderndem Druck und Entropie, erhalten wird. Die Zentralsymmetrie ist mit der Annahme, daß der EIST die Form einer *idealen Flüssigkeit* hat, kompatibel, d.h. daß er folgende Form besitzt:

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + (p + \varrho)u_\mu u_\nu. \quad (102)$$

Im Falle der Zeitabhängigkeit und Zentralsymmetrie ist die 4-Geschwindigkeit

$$u_\mu = (u_0|u_1|0|0)^T, \quad (103)$$

wobei  $u_1$  mit der 3er-Radialgeschwindigkeit der Flüssigkeit  $v$  gegeben ist durch

$$u_1 := vu_0. \quad (104)$$

Außerdem gilt

$$u_\mu u^\mu = 1 \implies u_0 u^0 + u_1 u^1 = 1 \quad (105)$$

$$\implies u_0^2 = [e^{-\nu} - v^2 e^{-\lambda}]^{-1}. \quad (106)$$

Die von Null verschiedenen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors (102) und dessen Spur<sup>45</sup> lauten hiermit unter Verwendung der Metrik (93):

$$\begin{aligned} T_{00} &= [e^{-\nu} - v^2 e^{-\lambda}]^{-1}(\varrho + v^2 p e^{\nu-\lambda}), \\ T_{01} &= [e^{-\nu} - v^2 e^{-\lambda}]^{-1}(p + \varrho)v, \\ T_{11} &= [e^{-\nu} - v^2 e^{-\lambda}]^{-1}(v^2 \varrho + p e^{\lambda-\nu}), \\ T_{22} &= pr^2, \\ T_{33} &= pr^2 \sin^2 \vartheta, \\ T &= \varrho - 3p. \end{aligned} \quad (107)$$

Dann ergeben sich aus den Feldgleichungen (58) und (59)

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2l^2}(1 + \xi)^{-1}\xi(1 + \frac{3}{2}\xi)g_{\mu\nu} &= -8\pi G(1 + \xi)^{-1}(T_{\mu\nu} - \hat{\Pi}\frac{1}{3}Tg_{\mu\nu}) - (1 + \xi)^{-1}\xi_{|\mu||\nu}, \\ \xi^{|\mu}{}_{||\mu} + \frac{1}{l^2}\xi &= \hat{\Pi}\frac{8\pi G}{3}T = 2\hat{\Pi}\pi G_N T. \end{aligned}$$

mit Hilfe der kovarianten Ableitungen und CHRISTOFFEL- Konnektionen folgende Differentialgleichungen:

Aus der 0-0-Komponente:

$$\begin{aligned} e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{1}{2l^2}(1 + \xi)^{-1}\xi(1 + \frac{3}{2}\xi)e^\nu &= \\ = 8\pi G(1 + \xi)^{-1}[(e^{-\nu} - v^2 e^{-\lambda})^{-1}(\varrho + v^2 p e^{\nu-\lambda}) - \frac{\hat{\Pi}}{3}(\varrho - 3p)e^\nu] + \\ + (1 + \xi)^{-1}\left[\ddot{\xi} - \frac{\dot{\nu}}{2}\dot{\xi} - \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\xi'\right]. \end{aligned} \quad (108)$$

<sup>45</sup>Im Fall des Higgsmechanismus ohne erzeugbaren Higgsteilchen  $\hat{\Pi} = 0$  gilt hier anstatt des EIST der effektive EIST  $\hat{T}_{\mu\nu}$ . Das heißt, daß angenommen wird, und angenommen werden muß, wegen der Zentralsymmetrie, daß die Felder und Teilchen sich wie eine ideale Flüssigkeit verhalten, was für sie im Mittel, als Ensemble, schon zu erwarten ist.

Aus der 1-1-Komponente:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda-\nu} \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{2l^2} (1+\xi)^{-1} \xi \left( 1 + \frac{3}{2}\xi \right) e^\lambda = \\
= 8\pi G (1+\xi)^{-1} [(e^{-\nu} - v^2 e^{-\lambda})^{-1} (v^2 \varrho + p e^{\lambda-\nu}) + \frac{\hat{\Pi}}{3} (\varrho - 3p) e^\lambda] + \\
+ (1+\xi)^{-1} \left[ \xi'' - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \dot{\xi} - \frac{\lambda'}{2} \xi' \right]. \tag{109}
\end{aligned}$$

Aus der 0-1-, bzw. 1-0-Komponente:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\lambda}}{r} = -8\pi G (1+\xi)^{-1} [e^{-\nu} - v^2 e^{-\lambda}]^{-1} (p + \varrho) v - \\
- (1+\xi)^{-1} \left[ \xi'' - \frac{\nu'}{2} \dot{\xi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \xi' \right]. \tag{110}
\end{aligned}$$

Aus der 2-2-Komponente:

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{r}{2} (\nu' - \lambda') \right) - 1 + \frac{r^2}{2l^2} (1+\xi)^{-1} \xi \left( 1 + \frac{3}{2}\xi \right) = \\
= -8\pi G (1+\xi)^{-1} \left[ p r^2 + \frac{\hat{\Pi}}{3} (\varrho - 3p) r^2 \right] - (1+\xi)^{-1} r e^{-\lambda} \xi'. \tag{111}
\end{aligned}$$

Aus der  $\xi$ -Feldgleichung (59) resultiert, unter Verwendung der Summenkonvention:

$$\ddot{\xi} e^{-\nu} - \xi'' e^{-\lambda} + \frac{\dot{\nu} + \dot{\lambda}}{2} e^{-\nu} \dot{\xi} - \frac{\nu' - \lambda'}{2} e^{-\lambda} \xi' - \frac{2}{r} e^{-\lambda} \xi' + \frac{1}{l^2} \xi = -\hat{\Pi} \frac{8\pi G}{3} (\varrho - 3p). \tag{112}$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich noch durch geeignete Kombinationen vereinfachen. Aus der 0-1-Komponente (110) erkennt man, daß im Vakuum  $\dot{\lambda}$  und  $\dot{\xi}$  identisch Null zwar eine mögliche Lösung ( $\lambda$  und  $\xi$  sind dann zeitunabhängig), aber nicht unbedingt die einzige ist (was in der gewöhnlichen EINSTEIN-Theorie an dieser Stelle zu schließen ist). Demnach dürfte der BIRKHOFFSche Satz nicht gelten.

#### 4.5 Nichtlineare Betrachtung der Vakuumsfeldgleichungen

Betrachtet werden die Felder außerhalb einer massiven Kugel mit Radius  $R$  als Modell für eine Spiralgalaxie oder einen Stern. Aus  $T_{00} = 0$  für den Außenraum  $r > R$  erhält man  $\varrho = -v^2 p e^{\nu-\lambda}$  und es gilt wegen  $T = 0$ ,  $\varrho = 3p$ . Mit  $T_{11} = 0$  gilt  $v^2 = -3e^{\lambda-\nu}$ , und aus  $T_{01} = 0$  schließlich:

$$\varrho = p = 0, \quad (r > R). \tag{113}$$

Der Spannungstensor  $T_{\mu\nu}$  und dessen Konstituenten gegeben durch den Druck  $p$  und Dichteverteilung  $\varrho$  verschwinden außerhalb des massiven Gebildes. In der Allgemeinen Relativitätstheorie heißt das, daß der Krümmungsskalar  $R$  verschwindet und die Vakuumsfeldlösung  $R_{\mu\nu} = 0$  betrachtet wird. Innerhalb der HSTT ist ein Restkrümmungsskalar aus dem Higgsfeld vorhanden und es gilt

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2l^2} (1+\xi)^{-1} \xi \left( 1 + \frac{3}{2}\xi \right) g_{\mu\nu} = (1+\xi)^{-1} \xi_{|\mu||\nu}. \tag{114}$$

Im statischen Fall hat man somit für  $r > R$  (Index  $a$ ):

- Die zentralsymmetrischen Vakuumsfeldgleichungen und quellenfreie Higgsfeldgleichung lauten:

$$(A) \quad -\left[\frac{1}{2}\nu_a'' - \frac{1}{4}\lambda_a'\nu_a' + \frac{1}{r}\nu_a' + \frac{1}{4}\nu_a'^2\right]e^{\nu_a-\lambda_a} - \frac{1}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi_a}{1 + \xi_a} \xi_a e^{\nu_a} = \frac{1}{1 + \xi_a} \frac{1}{2} \nu_a' e^{\nu_a-\lambda_a} \xi_a', \quad (115)$$

$$(B) \quad \frac{1}{2}\nu_a'' - \frac{1}{r}\lambda_a' - \frac{1}{4}\lambda_a'\nu_a' + \frac{1}{4}\nu_a'^2 + \frac{1}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi_a}{1 + \xi_a} \xi_a e^{\lambda_a} = -\frac{1}{1 + \xi_a} (\xi_a'' - \frac{1}{2}\lambda_a'\xi_a'), \quad (116)$$

$$(C) \quad \left[1 - \frac{1}{2}r\lambda_a' + \frac{1}{2}r\nu_a'\right]e^{-\lambda_a} - 1 + \frac{1}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi_a}{1 + \xi_a} \xi_a r^2 = -\frac{1}{1 + \xi_a} r e^{-\lambda_a} \xi_a'. \quad (117)$$

Die Higgsfeldgleichung lautet

$$(D) \quad \xi_a'' - \frac{1}{2}(\lambda_a' - \nu_a')\xi_a' + \frac{2}{r}\xi_a' - \frac{1}{l^2}\xi_a e^{\lambda_a} = 0. \quad (118)$$

Durch Spurbildung folgt<sup>46</sup>

$$\begin{aligned} \frac{3}{l^2}\xi_a &= -\left[\nu_a'' + 2\frac{1}{r}(\nu_a' - \lambda_a') - \frac{1}{2}\lambda_a'\nu_a' + \frac{1}{2}\nu_a'^2\right]e^{-\lambda_a} - 2\frac{1}{r^2}e^{-\lambda_a} + \frac{2}{r^2} \\ &= R. \end{aligned} \quad (119)$$

Addiert man die erste Feldgleichung (115) und die zweite (116), so bekommt man ((A)+(B)):

$$\begin{aligned} +\frac{1}{r}(\lambda_a' + \nu_a') &= +\frac{1}{1 + \xi_a} (\xi_a'' - \frac{1}{2}\lambda_a'\xi_a') - \frac{1}{1 + \xi_a} \frac{1}{2} \nu_a' \xi_a' \\ \implies \frac{1}{1 + \xi_a} [\xi_a'' - \frac{1}{2}(\lambda_a' + \nu_a')\xi_a'] &= \frac{1}{r}(\lambda_a' + \nu_a'). \end{aligned} \quad (120)$$

Daraus erhält man eine Gleichung, die frei von der Reichweite  $l$  des Higgsfeldes ist:

$$\xi_a'' - \frac{1}{2}(\lambda_a' + \nu_a')\xi_a' = \frac{1}{r}(1 + \xi_a)(\lambda_a' + \nu_a'). \quad (121)$$

Subtrahiert man von der vorigen Gleichung die Gleichung des Higgsfeldes (118), so bekommt man, nach einigen Umrechnungen, (A)+(B)-(D):

$$\nu_a'\xi_a' + \frac{2}{r}\xi_a' + \frac{1}{r}(1 + \xi_a)(\lambda_a' + \nu_a') + \frac{1}{l^2}\xi_a e^{\lambda_a} = 0. \quad (122)$$

Für große Reichweiten  $l$  wird die Higgsfeldgleichung (118) zu

$$\begin{aligned} \frac{\xi_a''}{\xi_a'} &= \frac{1}{2}(\lambda_a' - \nu_a') - \frac{2}{r} \quad (l \longrightarrow \infty) \\ \implies \ln \xi_a' &= \frac{1}{2}(\lambda_a - \nu_a) + \ln r^{-2} + const, \quad (l \longrightarrow \infty). \end{aligned} \quad (123)$$

Daraus folgt

$$\xi_a' = \frac{A}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\lambda_a - \nu_a)}, \quad A = Const., \quad (l \longrightarrow \infty). \quad (124)$$

<sup>46</sup>Man sieht, daß für verschwindendes Higgsfeld im Vakuum, der Restkrümmungsskalar verschwindet und es gilt wie in der ART  $R = 0$ .

Hiermit, in (122):

$$\begin{aligned}\xi_a'' &= \frac{\xi_a'}{2r}[-4 + r(\lambda_a' - \nu_a')] \\ &= \left[-\frac{2A}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{A}{r}(\lambda_a' - \nu_a')\right] e^{\frac{1}{2}(\lambda_a - \nu_a)}, \quad (l \rightarrow \infty).\end{aligned}\quad (125)$$

Daraus folgt

$$\xi_a'' = \frac{A}{r^2} \left[ \frac{1}{2}(\lambda_a' - \nu_a') - \frac{2}{r} \right] e^{\frac{1}{2}(\lambda_a - \nu_a)}, \quad (l \rightarrow \infty). \quad (126)$$

Eingesetzt in die Addition der ersten Feldgleichungen (120) folgt

$$\left(\frac{2A}{r^3} + \frac{A}{r^2} \nu_a'\right) e^{\frac{1}{2}(\lambda_a - \nu_a)} + \frac{1}{r}(1 + \xi_a)(\lambda_a' + \nu_a') = 0, \quad (l \rightarrow \infty). \quad (127)$$

Das ist eine Gleichung aus der Higgsfeldgleichung subtrahiert aus (120). Es gilt

$$1 + \xi_a = -\frac{\frac{2A}{r^2} + \frac{A}{r} \nu_a'}{\lambda_a' + \nu_a'} e^{\frac{1}{2}(\lambda_a - \nu_a)}, \quad (l \rightarrow \infty), \quad (128)$$

und daraus, im weiteren des Abschnitts mit  $l \rightarrow \infty$ :

$$\xi_a' = \left[ \frac{\frac{4A}{r^3} + \frac{A}{r^2} \nu_a' - \frac{A}{r} \nu_a''}{\lambda_a' + \nu_a'} + \frac{\frac{2A}{r^2} + \frac{A}{r} \nu_a'}{(\lambda_a' + \nu_a')^2} (\lambda_a'' + \nu_a'') - \frac{\frac{2A}{r^2} + \frac{A}{r} \nu_a'}{\lambda_a' + \nu_a'} \frac{1}{2} (\lambda_a' - \nu_a') \right] e^{\frac{1}{2}(\lambda_a - \nu_a)}. \quad (129)$$

(129) eingesetzt in (124), multipliziert mit  $(\lambda' + \nu')$  ergibt nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}\nu_a'' \left( \frac{2}{r^2} - \frac{\lambda_a'}{r} \right) + \left( \frac{4}{r^3} + \frac{\nu_a'}{r^2} \right) \nu_a' + \left( \frac{4}{r^3} - \frac{\nu_a'}{r^2} \right) \lambda_a' + \\ + \left( \frac{2}{r^2} + \frac{\nu_a'}{r} \right) \lambda_a'' - \left( \frac{2}{r^2} + \frac{\nu_a'}{2r} \right) \lambda_a'^2 + \frac{\nu_a'^3}{2r} = 0.\end{aligned}\quad (130)$$

Gln. (124) und (128) ergeben

$$p' := \frac{\xi_a'}{1 + \xi_a} = -\frac{\lambda_a' + \nu_a'}{2 + r\nu_a'}, \quad (131)$$

mit

$$p = \ln(1 + \xi_a). \quad (132)$$

Mit (131) werden die Feldgleichungen, mit  $l \rightarrow \infty$  zu:

$$\frac{1}{2} \nu_a'' - \frac{\lambda_a'}{r} - \frac{1}{4} \lambda_a' \nu_a' + \frac{1}{4} \nu_a'^2 = -\lambda_a' \xi_a'' + \frac{1}{2} \lambda_a' p' = \frac{p'}{2r} (4 + r\nu_a'), \quad (133)$$

$$\left[ 1 - \frac{r\lambda_a'}{2} + \frac{r\nu_a'}{2} \right] e^{-\lambda_a} - 1 = -\frac{r}{1 + \xi_a} e^{-\lambda_a} \xi_a' = -r e^{-\lambda_a} p', \quad (134)$$

$$\left[ \frac{1}{2} \nu_a'' - \frac{1}{4} \lambda_a' \nu_a' + \frac{\nu_a'}{r} + \frac{\nu_a'^2}{4} \right] e^{\nu_a - \lambda_a} = -\frac{1}{1 + \xi_a} \frac{\nu_a'}{2} e^{\nu_a - \lambda_a} \xi_a' = -\frac{\nu_a'}{2} p' e^{\nu_a - \lambda_a}. \quad (135)$$

Nach Subtraktion von (135) aus (133) bekommt man

$$\begin{aligned}\nu_a' + \lambda_a' &= \frac{r}{1 + \xi_a} \left[ \xi_a'' - \frac{\xi_a'}{2} (\nu_a' + \lambda_a') \right] = -p' (r\nu_a' + 2) \\ &= \frac{p'}{2} \frac{[r(\lambda_a' - \nu_a') - 4]}{1 + \frac{rp'}{2}}.\end{aligned}\quad (136)$$

Das kann man umformen in

$$\lambda'_a = -\nu'_a(p'r + 1) - 2p'. \quad (137)$$

Mit (230), Gl. (137) ist

$$\lambda'_a = -\frac{B}{r^2} e^{(\lambda_a - \nu_a)/2 - p} (p'r + 1) - 2p'. \quad (138)$$

Gleichung (135) kann umgeformt werden in eine totale Differentialgleichung:

$$\frac{\nu''_a}{\nu'_a} - \frac{1}{2}(\lambda'_a - \nu'_a) + \frac{2}{r} = -\frac{\xi'_a}{1 + \xi_a} = -p' \quad (139)$$

mit dem totalen Integral ( $B$  ist Integrationskonstante):

$$\begin{aligned} \nu'_a &= \frac{B}{r^2} \frac{1}{1 + \xi_a} e^{(\lambda_a - \nu_a)/2} \\ &= \frac{B}{r^2} e^{(\lambda_a - \nu_a)/2 - p}. \end{aligned} \quad (140)$$

Zu bemerken ist, daß mit  $B = 0$ , gilt  $\nu'_a \equiv 0$  Die Anfangsgleichung (135) ist erfüllt.

In dem Gleichungssystem (134), (136) und (140) substituiert man

$$\begin{aligned} &\underbrace{\lambda_a + \nu_a =: u, \quad \lambda_a - \nu_a =: v,}_{\Downarrow} \\ &\underbrace{\lambda_a = \frac{1}{2}(u + v), \quad \nu_a = \frac{1}{2}(u - v).} \end{aligned}$$

Wegen Gl. (138) gilt dann

$$u' = -p'(r\nu'_a + 2), \quad v' = u' + 2. \quad (141)$$

Aus Gl. (134) erhält man:

$$1 - \frac{1}{2}rv' = e^{(u+v)/2} - rp'. \quad (142)$$

Aus (136):

$$u' = \frac{\frac{r}{2}p'(v' - \frac{4}{r})}{1 + \frac{r}{2}p'}. \quad (143)$$

Schließlich aus Gl. (140):

$$\frac{1}{2}(u' - v') = \frac{B}{A}p'. \quad (144)$$

Aus Gl. (144) erhält man, unter Benutzung von Gl. (142):

$$p = \frac{A}{2B}(u - v), \quad \text{für } B \neq 0. \quad (145)$$

Elimination von  $u'$  in Gl. (144) mit Hilfe von Gl. (143) führt zur ungekoppelten Gleichung

$$v' = -2\frac{A+B}{r^2}e^{v/2-p} - \frac{AB}{r^3}e^{v-2p}. \quad (146)$$

Gl. (146) eingesetzt in (142) führt zu

$$e^{u/2+p} = e^{-v/2+p} + \frac{2A+B}{r} + \frac{AB}{2r} e^{v/2-p}. \quad (147)$$

Die Gleichungen (142)-(144) werden durch Gl. (146) und (147) erfüllt. Nur die Differentialgleichung (146) bleibt ungelöst; als Randbedingung postuliert man die MIN-KOWSKI-Metrik für das räumlich Unendliche. Für kleine Werte von  $\xi_a$ , verglichen mit  $c^2$ , wie für die teilweise linearisierte Theorie im Abschnitt 5 (siehe insb. Abschn. 5.7) benutzt wird (wenn man  $c$  explizit einsetzt, wird  $1 + \xi_a$  zu  $1 + \frac{1}{c^2}\xi_a$ <sup>47</sup>), erhält man aus Gl. (144) (vgl. Gl. (145)):

$$\xi_a = \frac{A}{2B}(u-v), \quad B \neq 0 \quad (\xi_a \ll c^2) \quad (148)$$

mit der Randbedingung  $\xi_a(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

Benutzt man (124), so wird Gleichung (140) nach Integration zu

$$\nu_a = \frac{B}{A}p = \frac{B}{A} \ln(1 + \xi_a) \iff p = \frac{A}{B}\nu_a = \frac{A}{B}(u-v). \quad (149)$$

Mit Gl. (149) oder (145) erhält man für das skalare Feld (das Higgsfeld)

$$\xi_a = -1 + e^{\frac{A}{2B}(u-v)}, \quad (150)$$

in erster Ordnung gleich Gl. (148).

Um die Bedeutung der Integrationskonstante  $B$  zu erhalten, muß der asymptotische Fall  $r \rightarrow \infty$ , d.h.  $|v| \ll 1$ ,  $|u| \ll 1$  untersucht werden. Dann erhält man aus den Gln. (146) und (143):

$$v = 2\frac{A+B}{r} + \frac{AB}{2r^2}, \quad u = \frac{A(B+4r)}{2r^2}. \quad (151)$$

Hiermit führt Gl. (137) zu

$$\nu_a = -\frac{B}{r}, \quad \lambda_a = \frac{AB}{2r^2} + \frac{2A+B}{r}. \quad (152)$$

Somit gilt mit dem Linienelement (93):

$$B = 2M_{SS}G, \quad (153)$$

mit der SCHWARZSCHILD-Masse  $M_{SS}$  des Teilchens. Also gibt die Integrationskonstante  $B$  des Potentials  $\nu_a$  im wesentlichen die Schwarzschildmasse, bzw. Schwarzschildradius innerhalb der SCHWARZSCHILD-Metrik in der statischen und zentralsymmetrischen HSTT, im Falle verschwindender Higgsmassen.

Nach der Substitution

$$e^{v/2-p} =: rg(r) \quad (154)$$

<sup>47</sup>Im Fall singularer Higgsfelder gilt die Vereinfachung natürlich nicht, aber im Fall eines schnell abklingenden skalaren Feldes dürfte die Näherung im Außenraum  $r > R$  wohl die richtigen Verhältnissen wiedergeben.

wird die Gleichung (147) zu

$$e^{u/2+p} = \frac{2A+B}{r} + \frac{1}{rg} + \frac{AB}{2r}g. \quad (155)$$

Definiert man

$$2A+B =:K, \quad (156)$$

$$-\frac{AB}{2} =: \alpha, \quad (157)$$

so kann Gl. (155) geschrieben werden als

$$e^{u/2+p} = \frac{K}{r} + \frac{1}{rg} - \frac{\alpha g}{r}. \quad (158)$$

Aus Gl. (155) erhält man für die Metrikoeffizienten

$$e^{\lambda_a} = 1 + Kg - \alpha g^2, \quad e^{\nu_a} = \frac{1}{r^2 g^2} (1 + Kg - \alpha g^2) e^{-2p}. \quad (159)$$

Jetzt kann Gl. (150) geschrieben werden als

$$\xi_a = -1 + e^{\frac{A}{B} \ln[\frac{1}{r^2 g^2} (1 + Kg - \alpha g^2)]^{A/B}} e^{\frac{A}{B} 2p}, \quad B \neq 0, \quad (160)$$

was in erster Näherung (d.h. mit  $\xi_a \ll c^2$ ) wird zu:

$$\xi_a = \frac{A}{B} \ln[\frac{1}{r^2 g^2} (1 + Kg - \alpha g^2)]. \quad (161)$$

Mit Gl.(159), heißt (150):

$$\xi_a = -1 + [\frac{1}{r^2 g^2} (1 + Kg - \alpha g^2)]^{\frac{A}{B} (1 + \frac{2A}{B})}. \quad (162)$$

Um  $v'$  in Gl. (146) innerhalb der Substitution (154) zu bekommen, d.h. eine Differentialgleichung für  $g$ , benutzt man

$$g' = \frac{g}{r} [(\frac{v'}{2} - p')r - 1]. \quad (163)$$

Mit Gln. (163) und (146), erhält man so

$$g' = \frac{1}{r} [\alpha g^3 - (A+B)g^2 - g(1+p'r)], \quad (164)$$

wobei der  $p'r$ -Term verschwindet im Falle kleiner  $\xi_a$ -Felder gegenüber des Lichtgeschwindigkeitsquadrats  $c^2$ . In dem Fall kann die genäherte Gleichung für Gl. (164) integriert werden und man erhält

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{g^2}{[1 + (A+B)g - \alpha g^2]^2} \right| + \frac{A}{\sqrt{(A+B)^2 + 4\alpha}} \ln \left| \frac{\sqrt{(A+B)^2 + 4\alpha} + (A+B) - 2\alpha g}{\sqrt{(A+B)^2 + 4\alpha} - (A+B) + 2\alpha g} \right| \\ = -2 \ln r + \text{const}, \quad (p \approx 0). \end{aligned} \quad (165)$$

Exponentierung führt zu

$$\left| \frac{g^2}{[1 + (A+B)g - \alpha g^2]^2} \right| \left| \frac{\sqrt{(A+B)^2 + 4\alpha} + (A+B) - 2\alpha g}{\sqrt{(A+B)^2 + 4\alpha} - (A+B) + 2\alpha g} \right|^{(A+B)/\sqrt{(A+B)^2 + 4\alpha}} = \frac{C}{r^2} \quad (166)$$

mit der Integrationskonstante  $C$ . Dabei gilt  $(A + B)^2 + 4\alpha = A^2 + B^2$ .

Die Integrationskonstante  $C$  erhält man unter der Forderung, daß die Größen in Gleichung (159) für  $r \rightarrow \infty$  MINKOWSKISch werden, d.h. 1. Daraus folgt

$$e^{\lambda_a} \rightarrow 1 (r \rightarrow \infty) \implies g = \frac{K}{\alpha} = -\frac{4}{B} - \frac{2}{A}. \quad (167)$$

In Gl. (166) ergibt das für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\left| \frac{g^2}{(1 + \frac{4A}{B})^2} \right| \left| \frac{\sqrt{(A+B)^2 - 2AB} - 3A - B}{\sqrt{(A+B)^2 - 2AB + 3A + B}} \right|^{\frac{A+B}{\sqrt{(A+B)^2 - 2AB}}} = \frac{C}{r^2}. \quad (168)$$

Dabei gilt  $B \neq 0$ . Aus

$$e^{\nu_a} \rightarrow 1 (r \rightarrow \infty) \implies r^2 g^2 = 1 + Kg - \alpha g \quad (169)$$

folgt direkt

$$C = \frac{1}{(1 + \frac{4A}{B})^2} \left| \frac{\sqrt{(A+B)^2 - 2AB} - 3A - B}{\sqrt{(A+B)^2 - 2AB + 3A + B}} \right|^{\frac{A+B}{\sqrt{(A+B)^2 - 2AB}}}. \quad (170)$$

Es gilt also für  $g(r)$ :

$$\left| \frac{g^2}{[1 + (A+B)g - \alpha g^2]^2} \right| (1 + \frac{4A}{B})^2 = \frac{1}{r^2}. \quad (171)$$

Durch Lösung dieser Gleichung erhält man die Felder für  $\xi \ll c^2$ .

- **Horizonte und skalare Felder:**

Die Differentialgleichung (140) ist ABELSCh und somit zu mindest für  $p \approx 0$  exakt lösbar. Ein analoger Fall, ausgehend von den Feldgleichungen der ART mit einem skalaren minimal gekoppelten Feld  $\phi$  führt auf

$$\phi|_r = -\frac{\epsilon}{r^2} e^{(\lambda_a - \nu_a)/2}, \quad \phi|_\mu = 0 \text{ für } \mu \neq r$$

und wurde von A. HARDELL und H. DEHNEN [63] untersucht. Dabei lauten die Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \phi|_\mu \phi|_\nu. \quad (172)$$

Das Ergebnis ist, daß jedes skalare Feld die Metrik unabhängig von seiner Stärke beeinflusst und modifiziert, in so einer Weise, daß ein simultanes Ergebnis der skalaren Feldgleichung und der Einsteingleichungen immer existiert, für den statischen Fall eines massiven Punktteilchens mit einer skalaren Punktladung als Quelle des skalaren Feldes. Somit ergibt sich kein SCHWARZSCHILD-Horizont! Nur am Punktteilchen wird die Metrik und das skalare Feld singulär (als nackte Singularität).

Dieses Problem ist mit dem einer elektrischen Punktladung verwandt, nämlich dem der REISSNER-NORDSTRÖM-Metrik, die die Folgen der Eigengravitation elektrischer Ladungen betrachtet [98].

Innerhalb der HSTT mit verschwindender Higgsquelle ist das Higgsfeld durch (162) gekoppelt an das Potential  $\nu_a$  der Metrik, und das  $\nu'_a$ -Feld ist formal gleich wie in [63], wenn man  $p \approx 0$  annimmt. Das  $\xi_a$ -Feld (161) hat dabei auch die Form wie in [63].

Insbesondere das Verschwinden des  $\nu_a$ -Feldes und die Verknüpfung mit der Schwarzschildmasse ist gegeben. Im asymptotischen Fall  $r \rightarrow \infty$  ist der Verlauf des  $\lambda_a$ -Feldes auch analog zu [63], nur die Integrationskonstanten ändern sich. Insbesondere, das skalare Punktladungsquadrat in [63], gegeben durch  $\frac{\kappa}{2}\epsilon^2$ , ist hier in der HSTT in Analogie gegeben durch die Schwarzschildmasse  $M_{SS}$  und die Integrationskonstante (skalare Ladung)  $A$  des skalaren Feldes:

$$4\pi G \frac{\epsilon^2}{r^2} = \frac{\kappa \epsilon^2}{2r^2} \triangleq -\frac{AB}{2r^2}. \quad (173)$$

Also ist das Ladungsquadrat hier gegeben sowohl durch die skalare Ladung wie auch durch die SS-Masse. Die Bedeutung der skalaren Punktladung  $\epsilon$  in [63] liegt hier als Wurzel des Ladungsprodukts  $A \cdot B = -2\alpha$  beider Felder  $\xi_a$  und  $\nu_a$ . Also tragen beide Felder in Analogie zur Gesamtladung bei. Analog liegt die Bedeutung von  $K$  als Ladungssumme, sodaß sowohl die SS-Masse wie auch die skalare Ladung zu den Metrikoeffizienten beitragen. Die Felder werden dadurch 2-parametrig und das BIRKHOFF-Theorem sollte wiederum nicht gelten.

–  $B \rightarrow 0$ :

Nimmt man  $nA = B$ , so gilt aus (168):

$$\frac{g^2}{[1 + (n+1)Ag + n^2A^2g^2]^2} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^2 = \frac{1}{r^2}. \quad (174)$$

Mit  $n \rightarrow 0$  geht Gl. (174) über in  $g^2 = 1/r^2$ . Daraus folgt für die Metrikoeffizienten:

$$e^{\lambda_a} = 1, \quad e^{\nu_a} = 1. \quad (175)$$

Das ist der MINKOWSKI-Fall. Also gilt die Metrik der speziellen Relativitätstheorie ohne Higgsfeld und ohne Gravitationspotential, gegeben durch  $\nu$ .

– Ohne Higgsfeld:  $A = 0$ :

Im Falle  $A = 0$ , also ohne skalare Ladung, gilt  $\alpha = 0$ , d.h. das Verschwinden des Ladungsquadrates  $\alpha$ . Also gilt für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\nu_a = -\frac{B}{r}, \quad \lambda_a = \frac{B}{r}. \quad (176)$$

Dann erhält man aus den Gleichungen (166) und (170):

$$\frac{g^2}{(1 + Bg)^2} = \frac{1}{r^2} \implies g = \frac{\pm(1/r)}{1 \mp (A/r)} :$$

$$e^{\lambda_a} = 1 + Bg = \frac{1}{1 \mp (B/r)}, \quad e^{\nu_a} = \frac{1}{r^2 g^2} (1 + Bg) = 1 \mp \frac{B}{r}. \quad (177)$$

Das ist die gewöhnliche SCHWARZSCHILD-Metrik. Die Krümmung ist gegeben durch den Parameter  $B \triangleq M_{SS}$ . Im Hinblick auf Gl. (153) gilt das obere Vorzeichen für die Schwarzschildmetrik SSM. Das untere entspricht einer negativen Masse. Für positive Massen ist  $g \geq 0$  nötig für einen Schwarzschildhorizont ( $r > B$ ), sodaß  $e^{\lambda_a}$  für  $r = B$  singulär wird.

–  $B \neq 0$  und  $A \neq 0$ :

Nur im Falle sowohl nichtverschwindender  $\xi_a$ - und  $\nu_a$ -Felder gibt es nichtverschwindende Ladungsquadrate  $\alpha$ , die nicht in der ART vorkommen. Betrachte als Spezialfall:

1.  $K = 0 \iff 2A = -B$ :

Es gilt

$$\frac{g^2}{[1 - Ag - A^2 g^2]} = \frac{1}{r^2}, \quad (178)$$

$$e^{\lambda_a} = 1 - A^2 g^2, \quad e^{\nu_a} = \frac{1}{r^2 g^2} (1 - A^2 g^2). \quad (179)$$

Daraus folgt mit den MINKOWSKI-Werten für das räumlich Unendliche:

$$e^{\lambda_a} = 1 + \frac{1}{2} (A \mp r \pm \sqrt{5A^2 \mp 2Ar + r^2}) \quad (180)$$

und

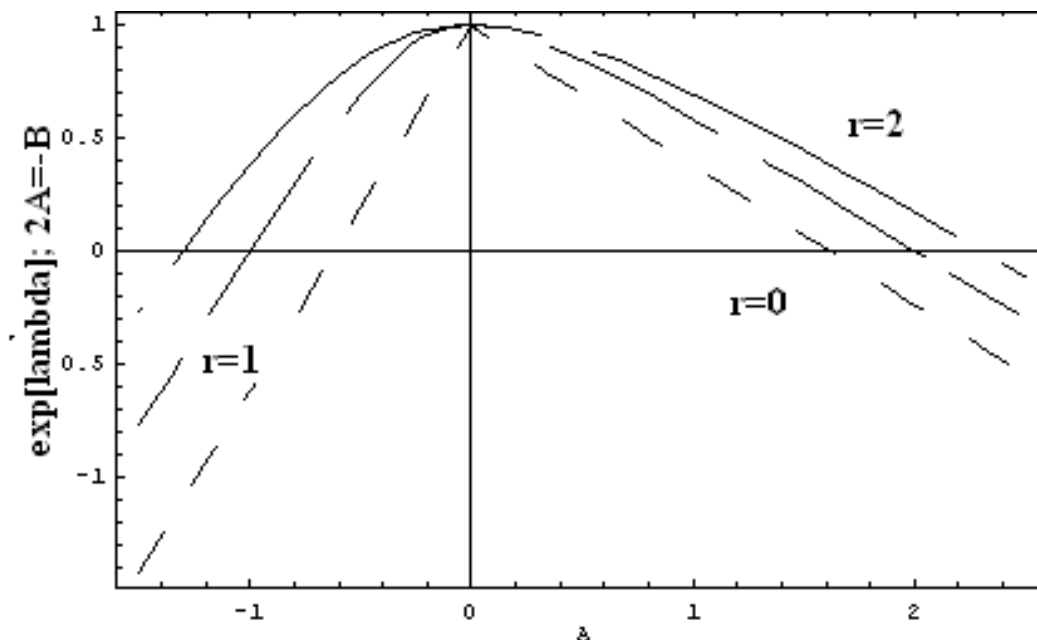
$$e^{\nu_a} = -\frac{2A^2(A \mp r)}{r^2(A \mp r \pm \sqrt{A^2 \mp 2Ar + r^2})^2}. \quad (181)$$

Für die oberen Vorzeichen ergeben sich keine Horizonte mit  $A < 0$  ( $B > 0$ ).

Für  $A > 0$  ist  $e^{\lambda_a}$  regulär, für  $e^{\nu_a}$  ergibt sich ein Horizont für  $r = A$ .

Für die unteren Vorzeichen ergeben sich u.U. negative Werte für  $e^{\lambda_a}$ , und zwar für

$$A \lesssim -0,6 \quad \text{und} \quad A \gtrsim 1,6, \quad (r = 0). \quad (182)$$



4:  $e^{\lambda_a}$  in Abhängigkeit von  $A$  für  $r = 0$ ,  $r = 1$  und  $r = 2$ .

Das Gravitationspotential, gegeben durch das Metrikoeffizient  $\nu$ , hat für  $A > 0$  positive Werte. Für  $A < 0$  ergibt sich ein Horizont für  $r = A$ .

Das untere Vorzeichen gehört zu  $g > 0$ , sodaß man annimmt, daß es sich um den Fall positiver Massen handelt. Also gibt es wie klassisch keine Horizonte für negative Massen, solange die Gravitation mit  $B > 0$  ( $A < 0$ ) koppelt. Horizonte, gegeben durch  $\nu$ , erscheinen für negative Kopplungen.

Für positive Massen ergeben sich Horizonte in  $\nu$  nur für  $A < 0$ . Das ist der Fall bindender Gravitation. Singularitäten in  $\lambda$  (d.h.  $e^{\lambda_a} < 0$ ) ergeben sich für nicht zu schwache Felder beider Bindungen (d.h., wenn die Felder  $\xi_a$ , bzw.  $\nu_a$  als nicht klein betrachtet werden, und zwar mit beliebigem Vorzeichen). In solchem Fall wirkt das Higgsfeld zwar durch  $2A = -B$  gegen das Gravitationspotential, verhindert Horizonte aber nicht (ist auch durch  $p \approx 0$  als relativ klein postuliert). Die Betrachtung ist wegen der Näherung nicht ganz sauber und das  $\xi$ -Feld könnte eine stärkere oder auch schwächere Rolle in der Dynamik spielen (es handelt sich um eine Extrapolation des Modells).

#### 4.6 Meißner-Effekt in der HSTT

Betrachtet man die in  $\nu$  und  $\lambda$  linearisierte Higgsfeldgleichung im Außenraum ( $r > R$ , Index  $a$ ), so ergibt sich mit  $\xi = \xi(r, t)$ :

$$\xi_a'' + \frac{2}{r}\xi_a' - \frac{1}{j^2}\xi = \ddot{\xi}. \quad (183)$$

Diese Gleichung hat die Form der nicht-statischen LONDON-Gleichung (und ist formal eine Telegraphengleichung mit Raum- und Zeitkoordinaten vertauscht<sup>48</sup>). Somit sollte es Analogien geben zum MEISSNER-Effekt der Supraleitung.

Die Analogie gibt es in zwei Formen, erstens wie schon erwähnt, durch die Higgsfeldgleichung in der HSTT, aber auch in der heuristisch möglichen Interpretation des MEISSNER-Effekts als Folge des HIGGS-Mechanismus ([59], S.260), was u.U. auf eine fundamentalere Natur der Higgsfelder deuten könnte.

##### 1. Die Higgsfeldgleichung und die Supraleitung:

Die LONDON-Gleichungen für den Suprastrom  $j_S$  lauten

$$4\pi c \lambda \operatorname{rot} \vec{j}_S = -\vec{B}, \quad (184)$$

$$4\pi \lambda \frac{\partial \vec{j}_S}{\partial t} = \vec{E}. \quad (185)$$

Im stationären Fall folgt hieraus (siehe ([48], S.184ff), daß  $\vec{E} = 0$  im Inneren des Supraleiters gelten muß, also, daß der OHMSche Strom verschwindet und

$$\text{Innen: } \vec{j} = \vec{j}_S. \quad (186)$$

Stationär gelten als MAXWELL-Gleichungen und LONDON-Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}_S, \quad (187)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (188)$$

$$4\pi c \lambda \operatorname{rot} \vec{j}_S = -\vec{B} \quad (189)$$

<sup>48</sup>Sie beschreibt ein Reaktions-Transport-Phänomen mit einem linearen selbstadjungierten Differentialoperator  $L[\xi(r, t)] = r^2 \ddot{\xi}(r, t)$ .

und durch nochmaliger Rotationsbildung folgt

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{B} &\equiv \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{B}} - \Delta \vec{B} \\ &= \frac{4\pi\mu}{c} \text{rot } \vec{j}_S \\ &= -\frac{\mu}{c^2\lambda} \vec{B}, \end{aligned} \quad (190)$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{j}_S &\equiv \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{j}_S} - \Delta \vec{j}_S \\ &= -\frac{1}{4\pi c\lambda} \text{rot } \vec{B} \\ &= -\frac{\mu}{c^2\lambda} \vec{j}_S, \end{aligned} \quad (191)$$

wobei die mit  $\underbrace{\quad}$  unterstrichenen Termen verschwinden, sodaß man erhält:

$$\Delta \vec{B} - \beta^2 \vec{B} = 0, \quad (192)$$

$$\Delta \vec{j}_S - \beta^2 \vec{j}_S = 0, \quad (193)$$

$$\text{mit } \beta = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}. \quad (194)$$

Diese Gleichungen sind im zentralsymmetrischen Fall von der Form

$$\Delta \xi - \frac{1}{l^2} \xi = \xi'' + \frac{2}{r} \xi' - \frac{1}{l^2} \xi = 0 \quad (195)$$

$$(196)$$

mit  $l = \frac{1}{M}$ . Dabei gilt

$$\begin{aligned} \beta^2 &\triangleq \frac{1}{l^2} = M^2, \\ c &\equiv 1 : \beta^2 = \frac{\mu}{\lambda}. \end{aligned} \quad (197)$$

Also ist die Eindringtiefe  $\sqrt{\lambda}$  in der Analogie gegeben durch die Reichweite  $l$  der Higgsteilchen. Verschwindende Higgsmassen bedeuteten unendlich große Eindringtiefen, also das Verschwinden der Superkonduktivität.

Beim MEISSNER-Effekt schließen sich die magnetischen Kraftlinien, sodaß kein Strom im Supraleiter entsteht. Das  $\vec{B}$ -Feld entlang der  $\varphi$ -Richtung (in Zylindersymmetrie) ist nur vom Abstand  $r$  abhängig und

$$\text{Innen: } B_\varphi = 4\pi c\lambda \frac{d}{dr} j_S. \quad (198)$$

Außen, mit  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $j_S = 0$ , gilt

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} J \quad (199)$$

mit dem Strom

$$J = 2\pi \int_0^a j r dr \quad (200)$$

für einen Radius  $a$  des Supraleiters. Für  $r > a$  gilt

$$r > a : B_\varphi = \frac{2J}{cr} \quad (\text{mit } \mu = 1). \quad (201)$$

Für den inneren Strom gilt nach Gl. (193) als Lösung von

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} - \beta^2 j = 0 \quad (202)$$

die Zylinderfunktion (mit NEUMANN-Funktion  $N_0$  logarithmisch singulär für  $r = 0$ )

$$j = C_1 I_0(i\beta r) + C_2 N_0(i\beta r), \quad (r \leq a), \quad (203)$$

wobei  $C_2 = 0$  gilt damit der Strom regulär bleibt. Damit wird das magnetische Feld nach Gl. (198) (vgl. [48], S.187) für den Innenraum  $r \leq a$ :

$$B_\varphi = 4\pi c \lambda \cdot C_1 \frac{dJ_0(i\beta r)}{dr} = -4\pi \lambda i \beta C_1 J_1(i\beta r). \quad (204)$$

Die BESSEL-Funktionen  $J_0$  und  $iJ_1$  haben für rein imaginäre Argumente reelle Werte. Daher definiert man

$$I_0(z) = J_0(iz) \quad I_1 = -iJ_1(iz). \quad (205)$$

Den Messungen nach, soll  $\frac{1}{\beta} \approx 10^{-6} - 10^{-5} \text{ cm}$  sein, es handelt sich also um relativ kleine Eindringtiefen. Für Supraleiter mit Radius merklich größer als  $10^{-5} \text{ cm}$  hat man  $\beta a \gg 1$  und praktisch im ganzen Supraleiter (außer in einer sehr engen Zone) kann die BESSEL-Funktion durch die asymptotische Darstellung ersetzt werden, nach dem Schema

$$i^m J_m(ix) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^x. \quad (206)$$

Also für  $x \gg 1$ :

$$I_0(x) = -I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (207)$$

und die Stromstärke wird nach einigen Umrechnungen

$$J = \frac{C_1 \sqrt{2\pi}}{\beta^2} \cdot \sqrt{\beta a} e^{\beta a} \quad (208)$$

$$\Rightarrow j = \frac{J\beta}{2\pi \sqrt{ar}} e^{\beta(r-a)}. \quad (209)$$

Für das Magnetfeld gilt (vgl. [48], S.189)

$$B_\varphi = \frac{2c\lambda\beta^2 J}{\sqrt{ar}} e^{\beta(r-a)} = \frac{2\mu J}{c} \frac{e^{\beta(r-a)}}{\sqrt{ra}}, \quad (210)$$

was der Randbedingung entspricht, daß  $H_\varphi$  für  $r = a$  stetig bleibt. Das Ergebnis ist, daß der Suprastrom nur in einer engen Oberflächenschicht der Dicke  $\frac{1}{\beta}$  fließt, wo  $\vec{B}$  eindringen kann.

Im Falle der HSTT kann man das Higgsfeld  $\xi$  entweder mit  $\vec{B}$  oder mit dem Suprastrom  $\vec{j}_S$  identifizieren. Im ersten Fall hätte man durch Analogie formal

$$\begin{aligned}\xi &= 4\pi\lambda \frac{d}{dr} j_S \\ &= 4\pi \frac{l^2}{\mu} j_S|_r.\end{aligned}\quad (211)$$

$$= \frac{2\mu J}{\sqrt{ar}} e^{-l^2(r-R)} = 2\mu J \frac{e^{-l^2(r-R)}}{\sqrt{rR}}.\quad (212)$$

Dabei ist  $R$  der Radius des massiven Körpers, z.B. eine Galaxie als massives Gebilde. In diesem Fall dringe  $\xi$  bis einer Tiefe  $\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \cong l$  ein, was von Innen nach Außen zu verstehen ist, da das Higgsfeld sein Ursprung am Zentrum des Körpers besitzt. Also lautet die Interpretation, daß Higgsfelder nicht mehr als bis  $l$  (als Eindringtiefe) direkt wirken.<sup>49</sup>

Die Identifizierung von  $\xi$  mit  $j_S$  könnte mehr mit sich bringen, indem es nur innerhalb des massiven Körpers endliche Werte des Higgsfeldes geben kann (das erwartet man ja, insbesondere, wenn  $l \approx 2R$  nach [55] gilt). Diese entsprächen dann einem Suprastrom der keinen Widerstand spürt. Solch ein Suprastrom ist bei den Supraleitern in der Festkörperphysik Folge von gekoppelten Elektronenpaaren, den sog. COOPER (BCS)-Paaren. Solche COOPER-Paare sind Spindoublett-Zustände aus zwei Elektronen mit einem spezifischen Widerstand  $\rho = 0$ . Dabei wirkt das die Paare koppelnde Phonon als elastisches Medium, das eine Kondensation der normalleitenden Elektronen zu COOPER-Paare vermittelt, wobei es aber möglich ist, daß auch magnetische Kopplungen von Leitungselektronen zu solchen Paaren führen können, insbesondere bei Hochtemperatursupraleitern.

In der HSTT könnte man, entsprechend, auch an der Elementarität der Higgsbosonen zweifeln und zumindest offen lassen, ob sie Quasiteilchen sind oder nicht, vielleicht gekoppelte Zustände anderer Teilchen, wie z.B. GEORGI "hofft" [72] und mittels Composite- oder Technicolormodellen zu erklären versucht. Dabei bleibt nur die Möglichkeit, daß Higgssteilchen phänomenologische Erscheinungen sind, z.B. als Polarisierungen des Vakuums. Somit könnte man das antigravitierende Verhalten des Higgsfeldes im Innenraum der Kugel erklären, da Vakuumpolarisationen gemäß des LENZschen Gesetzes abschwächend wirken.

Nicht-stationär gilt aus der ersten LONDON-Gleichung (184)

$$4\pi\lambda \text{rot rot } \vec{j}_S = -\mu \text{rot } \vec{H} = -\frac{4\pi\mu}{c} (\sigma \vec{E} + \vec{j}_S) - \frac{\varepsilon\mu}{c} \vec{E}\quad (213)$$

und durch Differentiation nach  $t$ :

$$4\pi c \lambda \text{rot } \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{crot } \vec{E}.\quad (214)$$

Nach Gl. (214) ist der Vektor

$$4\pi\lambda \frac{\partial \vec{j}_S}{\partial t} - \vec{E}\quad (215)$$

<sup>49</sup>Diese Interpretation definiert eigentlich die Reichweite  $l$  genau wie kernphysikalisch und in natürlicher Weise: das bringt an sich keine neue Physik mit sich, nur jetzt mit einer Analogie des Terms zur Festkörperphysik, was die Interpretation breiter machen könnte.

wirbelfrei, so daß

$$4\pi\lambda\frac{\partial\vec{j}_S}{\partial t} = \vec{E} + \text{grad}\chi \quad (216)$$

wird. Die zweite LONDON-Gleichung (dessen Form mit  $\chi = 0$  in Gl. (185) ein Spezialfall darstellt) ist also nicht unabhängig von der ersten, sondern eine normierende Ergänzung. Aus Gl. (214), bei Kombination mit Gl. (216) folgt:

$$4\pi c\lambda(\text{graddiv}\vec{j}_S - \Delta\vec{j}_S) = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c}(4\pi\lambda\frac{\partial\vec{j}_S}{\partial t} - \text{grad}\chi) - \frac{\varepsilon\mu}{c}(4\pi\lambda\frac{\partial^2\vec{j}_S}{\partial t^2} - \text{grad}\frac{\partial\chi}{\partial t^2}) - \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}_S. \quad (217)$$

Wenn man die Träger des Stromes in solche des OHMSchen Stromes oder Raumdichte  $\rho$  und des Suprastromes der Raumdichte  $\rho_S$  aufteilt, für die je eine Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\text{div}\vec{j}_0 + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0; \quad \text{div}\vec{j}_S + \frac{\partial\rho_S}{\partial t} = 0, \quad (218)$$

dann ergibt sich aus (217) die inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $\vec{j}_S$  (vgl. [48]):

$$\Delta\vec{j}_S - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_S}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{j}_S}{\partial t^2} - \beta^2\vec{j}_S = -\text{grad}(\frac{\partial\rho_S}{\partial t} + \sigma\beta^2\chi + \frac{\varepsilon\mu\beta^2}{4\pi}\dot{\chi}) \quad (219)$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\Delta\vec{B} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \beta^2\vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad (220)$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \beta^2\vec{E} = \text{grad}(\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho + \beta^2\chi), \quad (221)$$

wobei  $\vec{j} = \sigma\vec{E}$  für den OHMSchen Strom gesetzt wurde.

Wechselstromuntersuchungen, z.B. über den Hochfrequenzwiderstand von Supraleitern, deuten darauf hin, daß zum mindestens für kleine Ladungsdichten der rechte Teil von (221) und damit auch  $\text{grad}\chi$  verschwinden, sodaß die LONDON-Gleichung (185) gilt (vgl. ([48], S.169).

Für den Energiesatz ([48], S.189f) besteht der einzige Unterschied zwischen Supraleitern und Normalleitern in der Bedeutung des Gliedes  $\vec{j} \cdot \vec{E}$ :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j}_0 \cdot \vec{E} + \vec{j}_S \cdot \vec{E} = \sigma\vec{E}^2 + \vec{j}_S \cdot 4\pi\lambda\frac{\partial\vec{j}_S}{\partial t} = \sigma\vec{E}^2 + \frac{\partial}{\partial t}(2\pi\lambda\vec{j}_S). \quad (222)$$

Nur der erste, vom OHMSchen Strome herrührende Anteil ist die JOULEsche Wärme (Energiestromdichte). Der zweite Term tritt als ein Anteil auf, der die elektromagnetische Feldenergie im Supraleiter um den Betrag  $2\pi\lambda j_S^2$  vermehren soll.

Die Vermehrung des Feldes durch HIGGS-Supraleitung wäre der Größe  $2\pi l^2 \mu j_S^2$ .

In HSTT gibt es keine  $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ -Anteile. Wenn die Analogie im nichtstationären Fall gelten soll, verschwindet das Analogon zu  $4\pi\mu\sigma\frac{\partial\vec{G}}{\partial t}$  ( $G \in \{E, B, j_S\}$ ). Das spräche dafür, daß

die Higgsfelder statisch sind, zu mindest im Außenraum. Hiernach sollte der BIRKHOFFSche Satz gelten (zu mindest die bekannteste Aussage über statische Vakuumlösungen)<sup>50</sup>

## 2. Supraleitung und Higgsmechanismus:

Die Analogie zwischen Supraleitung und Higgsmechanismus gilt auch andersherum. Es handelt sich im Fall des MEISSNER-Effektes um eine experimentelle Realisierung einer spontanen Symmetriebrechung (die in solchen Fällen oft als *dynamisch* bezeichnet wird), die in nichtrelativistischen Theorien den mikroskopischen Ursprung der spontanen Symmetriebrechung zu erklären versucht und die Tatsache benutzt, daß der Prozeß der spontanen Symmetriebrechung einer Art Phasensprung entspricht.

Im Fall des MEISSNER-Effektes erklärt man die dynamische Brechung mit dem endlichen Erwartungswert des skalaren Feldes im Vakuumzustand folgend aus dynamischen Feldern aus einer fundamentaleren Lagrangedichte. Demnach wären Higgsfelder Composites, wie TC es mit Hilfe von starkgekoppelten Techni-Fermionen versucht ([58], S.264), sollte die Analogie gelten.

Die Kopplung zwischen Higgsmechanismus und Supraleitung folgt aus der YUKAWA-WICK- Interpretation, nach der GOLDSTONE-Bosonen durch das Vorhandensein langreichweitiger Kräfte verschwinden. Demnach sollten diese langreichweitigen Kräfte kurzreichweitig werden, was man nach der YUKAWA-Theorie als die Generierung der Masse interpretieren kann. Diese Interpretation benutzten AITCHISON und HEY 1982 ([59], S.260) für eine heuristische Erklärung des MEISSNER-Effekts der Supraleitung: Kondensierte Elektronenpaare im Grundzustand eines Supraleiters identifiziert man mit dem Higgsfeld und das gibt den Photonen im Inneren des Supraleiters eine (effektive) Masse. Als Folge davon kann ein Magnetfeld nur exponentiell im Supraleiter eindringen, mit einer Eindringtiefe proportional zur inversen effektiven Masse der Photonen. Solche Supraleitern mit "massiven" Photonen sind in der Tat eichinvariant, als Folge davon, daß solch eine Masse aus dem Higgsmechanismus herrührt.

Die Eindringtiefe identifiziert man im nichtdynamischen Higgsmechanismus mit der Reichweite  $l$ , wie es hier in der ersten Interpretation gemacht wurde.

Den MEISSNER-Effekt benutzt man so auch im Versuch das *Confinement*, also die Einsperrung der Bosonen in den Hadronen, zu erklären: das geht aus dem Potential der starken Wechselwirkung hervor, das Außen linear mit dem Abstand  $r$  steigt und eine unendlich hohe Kraft voraussagt um freie Quarks zu verhindern. Die Quarks sollten sich dennoch nahe des Zentrums  $r \rightarrow 0$  wie frei bewegen (man spricht von der asymptotischen Freiheit oder *asymptotic freedom*). Diese Freiheit ist wie die der Cooperpaare im Supraleiter, die sich frei von Widerständen bewegen. Wie beim Supraleiter entstehen (effektiv) massive Teilchen (durch die Selbstwechselwirkung der Gluonen, d.h. durch die -masselose- Eichbosonen der starken Wechselwirkung, wird die Symmetrie dynamisch gebrochen, sodaß sog. *Glueballs* entstehen. Diese sind gekoppelte effektiv massive Zustände aus Gluonen).

<sup>50</sup>Die Außenlösung ergibt sich später als 2-parametrig, sodaß zweifelhaft erscheint, daß der BIRKHOFFSche Satz wirklich gilt. Das ergab sich auch innerhalb der exakten Lösung mit  $l \rightarrow \infty$  (Abschnitt 4.5).

## 5 Linearisierte Modelle der zentralsymmetrischen HSTT

Die statische linearisierte und teilweise (nicht in  $\xi$ ) linearisierte HSTT wird innerhalb einer verallgemeinerten Emden-Theorie polytroper Gase untersucht. Die verallgemeinerten Einstein-Gleichungen zentraler Symmetrie werden für homogene und polytrope Kugeln gelöst. Die Folgen einer singulären Masse im Zentrum der Kugel werden untersucht.

### 5.1 Die verallgemeinerte Emden-Theorie polytroper Gase

- Herleitung der Dichteverteilung nach Emden:  
EMDEN betrachtete 1907 Gassterne im hydrostatischen Gleichgewicht, wobei der Druck  $p$  über eine Polytropengleichung mit der Dichte  $\rho$  verknüpft ist. Die Dichte hängt dabei innerhalb einer kugelförmigen Massenverteilung vom Potential ab und ist außerhalb dieser identisch Null (Definition der Oberfläche).

Nach dem EMDEN-Modell wird die Zustandsgleichung gegeben durch

$$p = \alpha \rho^\gamma$$

mit

- dem Druck  $p$ ,
- der Dichteverteilung  $\rho$ ,
- der Polytropenamplitude  $\alpha = 2aA/3$ ,  $a = \text{const}$ ,  $A = \text{Const}$ ,
- dem Polytropenexponent  $\gamma = (1 - 2a/3)^{-1}$ ,  $a = \text{const}$ .

Die Zustandsgleichung kann man anhand der idealen BOLTZMANN-Gase

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2 \quad (223)$$

begründen, mit dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat  $\bar{v}^2$ .

Wenn man für die mittlere kinetische Energiebeziehung

$$\frac{m}{2} \bar{v}^2 = ma(\Phi_s - \Phi), \quad a = \text{const} \quad (224)$$

ansetzt, mit dem Potential  $\Phi$  und  $\Phi_s$  für den Potential an der Oberfläche der kugelförmigen Dichteverteilung, so folgt

$$\bar{v}^2 = 2a(\Phi_s - \Phi) =: av^2, \quad (225)$$

wobei dann  $v$  die maximale Geschwindigkeit ist, bei der die Teilchen das System gerade noch nicht verlassen können. Die Konstante  $a$  wird eingeführt um die Größe der Geschwindigkeit noch variieren zu können. Ausgehend von einem System, in dem die Teilchengeschwindigkeit der MAXWELLSchen Geschwindigkeitsverteilung genügt, so bedeutet  $a > 1$ , daß mehr Teilchen vorhanden sind als gehalten werden können: das System ist instabiler. Das System ist stabiler, je kleiner  $a$  ist.

Für den Druck (223) ergibt sich mit Gl. (225):

$$p = \frac{2}{3} a \rho (\Phi_s - \Phi). \quad (226)$$

Eine Beziehung zwischen der Dichte  $\rho$  und der Potentialdifferenz ( $\Phi_s - \Phi$ ) erhält man, indem man den Druck (226) in die Eulergleichung

$$\rho \nabla \Phi + \nabla p = 0 \quad (227)$$

einsetzt, die für eine Dichteverteilung im hydrostatischen Gleichgewicht gilt. Die Lösung lautet

$$\ln(\Phi_s - \Phi)^{1-\frac{2}{3}a} - \ln \varrho^{\frac{2}{3}a} = \text{const.} \quad (228)$$

Aufgelöst nach  $(\Phi_s - \Phi)$  ergibt sie

$$(\Phi_s - \Phi) = A \varrho^{\frac{2}{3}a}, \quad A = \text{const.} \quad (229)$$

Damit hängen Druck und Dichte wie folgt zusammen:

$$p = \frac{2}{3} a A \varrho^{1-\frac{2}{3}a}. \quad (230)$$

Die Integrationskonstante  $A$  ist zunächst unbestimmt und die Gleichung (230) hat die Gestalt einer Polytropengleichung. Der Polytropenexponent ist durch die Konstante  $a$  bestimmt und die Polytropenamplitude durch  $a$  und  $A$ .

In Gl. (230) erkennt man die Beziehung

$$p = \alpha \varrho^\gamma. \quad (231)$$

Mit der Zustandsgleichung (231) wird der Gradient des Druckes zu

$$\nabla p = \alpha \gamma \varrho^{\gamma-1} \nabla \varrho. \quad (232)$$

Damit wird die Eulergleichung (227) zu

$$\varrho \nabla \Phi + \alpha \gamma \varrho^{\gamma-1} \nabla \varrho = 0. \quad (233)$$

Die Lösung dieser totalen Differentialgleichung lautet mit  $\gamma > 1$ :

$$\Phi + \frac{\alpha \gamma}{\gamma - 1} \varrho^{\gamma-1} = \text{const} \equiv \Phi_s. \quad (234)$$

Für die Dichte folgt aus Gl. (234) die barometrische Höhenformel

$$\varrho = \left[ \frac{\gamma - 1}{\alpha \gamma} (\Phi_s - \Phi) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (235)$$

Ist der Polytropenindex  $\gamma = 1$ , so ergibt sich aus der Eulergleichung (233), daß die Dichte exponentiell vom Potential abhängt:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{1}{\alpha} \Phi}, \quad \varrho_0 = \text{const.} \quad (236)$$

Aus der barometrischen Höhenformel folgt, daß  $\gamma = 1$  nicht für Galaxien geeignet ist ( $a \neq 0$ ), da  $\varrho$  und  $p$  keine Nullstelle im Endlichen besitzen, was eine polytrope Gaskugel mit unendlichem Radius bedeuten würde. Endliche Oberflächen mit  $p = \alpha(\varrho c)^\gamma$  sind nur mit  $\gamma > 1$  gegeben [24].  $\gamma = 1$  entspricht z.B. den Strahlungsfall mit  $p = \frac{1}{3} \varrho c^2$ , der für die ideale Flüssigkeit und Gleichgewichtsbedingungen im Falle Schwarzer Strahlung (ohne endliche Oberfläche) zur STEFAN-BOLTZMANN-Beziehung  $\varrho \sim T^4$  führt [24].  $\gamma = 1$  ist auch der Fall bei der Standard-Dunklen Materie, die somit im ganzen Raum (d.h. ohne Rand) um die Galaxien verteilt sein soll. In einem klassischen System ist die Konstante  $a$  nicht scharf definiert. Der Wert  $a = 1$  führt zu einem Polytropenexponent  $\gamma = 3$ . Wählt man  $a = 3/2$ , so wird der Polytropenindex  $\gamma$  gleich unendlich und das Quadrat der maximalen Geschwindigkeit nimmt den Wert  $v^2 = 2\bar{v}^2/3$  an. Nach

MAXWELL ist diese die maximale Geschwindigkeit gleich der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit der Teilchen in einem System. Ein unendlich großer Polytropenindex entspricht dem Modell der inkompressiblen Materie, d.h. dem der homogenen Kugel. Die Konstante  $a = 3/4$  hat den Polytropenindex  $\gamma = 2$  zur Folge; das Quadrat der maximalen Geschwindigkeit lautet  $v^2 = 4\bar{v}^2/3$  und die Amplitude  $\alpha = A/2$ . Da die maximale Geschwindigkeit größer als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist, ist das System stabiler als im Fall  $a = 3/2$  oder  $a = 1$ . Gleichzeitig führt  $\gamma = 2$  zu einem linearen Zusammenhang zwischen dem Potential  $\Phi$  und der Dichte  $\varrho$  gemäß Gl. (235), sodaß sich sowohl die EMDENSche Differentialgleichung als auch die Feldgleichung für das Potential und das Higgsfeld der linearisierten Skalar-Tensor-Theorie streng lösen lassen.

Die Verbindung vom Potential  $\Phi$  mit dem Metrikkoeffizient  $\nu$  erhält man (siehe auch [24]) mit  $|\Phi| \ll 1$ :

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{e^\nu} = (1 + \nu)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\nu, \quad \nu = 2\Phi. \quad (237)$$

Aus Gl. (235) folgt dann

$$\varrho = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma} (\nu_s - \nu)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (238)$$

mit dem  $\nu$ -Feld der Metrik und  $\nu_s$  für die Oberfläche der polytropen Kugel. Somit lautet der Druck  $p$ :

$$p = \alpha \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma} (\nu_s - \nu)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (239)$$

Er ist nicht linear in  $\nu$ .

Hiermit können die Einsteingleichungen und Higgsfeldgleichung angegangen werden.

- Higgsfeld- und Einsteingleichungen:

Die Einsteingleichungen der HSTT für die statische kugelsymmetrische Metrik mit Polytropenexponent  $\gamma$  und Higgsteilchen lauten, zusammen mit der Higgsfeldgleichung, linearisiert:

$$(A) \quad \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{\xi}{2l^2} = 8\pi G \varrho \left(\frac{2}{3} + \alpha \varrho^{\gamma-1}\right), \quad (240)$$

$$(B) \quad \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\xi}{2l^2} + \xi'' = \frac{8\pi G \varrho}{3}, \quad (241)$$

$$(C) \quad -\lambda - \frac{r}{2}(\lambda' - \nu') + \frac{r^2}{2l^2} + r\xi' = -\frac{8\pi G \varrho r^2}{3}, \quad (242)$$

$$(D) \quad \xi'' + \frac{2}{r}\xi' - \frac{1}{l^2}\xi = -\frac{8\pi G}{3}\varrho(1 - 3\alpha\varrho^{\gamma-1}). \quad (243)$$

In dieser Arbeit betrachtet man den Innen ( $r \leq R$ )- und Außenraum ( $r > R$ ) einer Kugel mit Radius  $R$ , mit dem Druck nach der Polytropengleichung nach Gl. (231) mit dem Polytropenexponent  $\gamma$ .

Der Druck wird innerhalb der EMDEN-Theorie polytroper Gase erklärt. Das heißt, daß hier innerhalb der in der Skalar-Tensortheorie verallgemeinerten EMDEN-Theorie (siehe [54]) gearbeitet wird. Der einfachste Fall ist der der homogenen Kugeln mit  $p \ll \rho c^2$  und

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho = \text{const}, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} .$$

Betrachtet werden die Fälle

- $\gamma \rightarrow \infty$ , d.h.  $\rho \cong \text{const}$  und
- $\gamma = 2$ .

Die Zustandsgleichung mit einer Dichteverteilung nach EMDENS Modell wird bei Galaxien streng nicht erwartet. Sie wird aber der Einfachheits halber als Modell genommen. Durch Angabe von  $\gamma$  können prinzipiell verschiedene Situationen für die Dichteverteilung untersucht werden; hier betrachtet man dem homogenen und ein ins Zentrum verteilten Fall, die zwar nicht ganz aber wohl als Grenzfälle als Näherung bei Galaxien wiedergegeben werden könnten.

## 5.2 Linearisierte Vakuumlösung der statischen Metrik für die isolierte massive Kugel.

Untersucht wird die statische zentralsymmetrische Metrik für die Higgs Skalar-Tensortheorie für eine isolierte Kugel mit Radius  $R$ . Speziell wird die linearisierte Theorie betrachtet und danach die teilweise, d.h. nicht in  $\xi$  linearisierte Theorie. Die Lösung wird angegeben durch Berechnen der Metrik im Außenraum (Vakuum)  $r > R$ . Dabei ist die Vakuumlösung formal gleich für die Theorie mit und ohne Quelle des Higgsteilchens:

- Linearisierte Vakuumfeldgleichungen:  
Betrachtet wird der linearisierte Fall für die zeitunabhängigen Gleichungen für das Vakuum mit  $r > R$ .

Die EINSTEIN-Gleichungen lauten:

$$(A) \quad -\left(\frac{1}{2}\nu_a'' - \frac{1}{r}\nu_a'\right) + \frac{1}{2l^2}\xi_a = 0, \quad (244)$$

$$(B) \quad \frac{1}{2}\nu_a'' - \frac{\lambda_a'}{r} + \frac{1}{2l^2}\xi_a + \xi_a'' = 0, \quad (245)$$

$$(C) \quad -\lambda_a - \frac{1}{2}r(\lambda_a' - \nu_a') + \frac{1}{2l^2}\xi_a r^2 + r\xi_a' = 0. \quad (246)$$

Für die  $\xi$ -Feldgleichung im Vakuum und im statischen Fall gilt:

$$\xi_a'' + \left(\frac{\nu_a' - \lambda_a'}{2} + \frac{2}{r}\right)\xi_a' - \frac{1}{l^2}\xi_a e_a^\lambda = 0. \quad (247)$$

Linearisiert wird sie zu

$$(D) \quad \xi_a'' + \frac{2}{r}\xi_a' - \frac{1}{l^2}\xi_a = 0. \quad (248)$$

Bei der HIGGS-Feldgleichung handelt es sich um eine YUKAWA-Gleichung. Die äußere Lösung lautet damit

$$\xi_a = \frac{A}{r}e^{-r/l} + \frac{\hat{A}}{r}e^{r/l}. \quad (249)$$

mit den Integrationskonstanten  $A$  und  $\hat{A}$ . Die Wirkung des Feldes im räumlich Unendlichen soll verschwinden, sodaß  $\hat{A} = 0$  gesetzt werden muß<sup>51</sup>. Also lautet die Lösung der Gl. (248):

$$\xi_a = \frac{A}{r}e^{-r/l}, \quad A = \text{const.} \quad (250)$$

Mit Gl. (248) wird Gl. (244) nach Multiplikation mit  $2r^2$  zu

$$(r^2\nu_a')' + \frac{1}{l^2}Are^{-r/l} = 0, \quad (251)$$

sodaß nach Integration folgt:

$$\nu_a' = \frac{A}{r^2}e^{-r/l}\left(1 + \frac{r}{l}\right) + \frac{B}{r^2}, \quad (252)$$

mit der Integrationskonstante  $B$  für den Metrik-Potential  $\nu$ . Aus Gl. (244) in Gl. (245) folgt nach Umschreiben

$$\lambda_a' = r\xi_a'' - \nu_a' \quad (253)$$

sodaß

$$\begin{aligned} \lambda_a' &= A\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rl} + \frac{1}{l^2}\right)e^{-r/l} - \frac{B}{r^2} \\ &= -\left(\frac{A}{r}e^{-r/l}\right)' + \frac{A}{l^2}e^{-r/l} - \frac{B}{r^2}. \end{aligned} \quad (254)$$

Nach Integration von Gl. (252) folgt:

$$\nu_a = -\frac{A}{r}e^{-r/l} - \frac{B}{r}. \quad (255)$$

Für  $\nu_a$  gilt dann asymptotisch:

$$\nu_a \longrightarrow 0 \quad (r \longrightarrow \infty). \quad (256)$$

Integration von Gl. (299) führt zu

$$\lambda_a = -\frac{A}{r}e^{-r/l} - \frac{A}{l}e^{-r/l} + \frac{B}{r} + C, \quad (257)$$

mit

$$\lambda_a \longrightarrow 0 \quad (r \longrightarrow \infty) \quad \implies \quad C = 0. \quad (258)$$

<sup>51</sup>Die Lösung geht also nicht automatisch für  $r \rightarrow 0$  gegen Null, wie der BIRKHOFFSche Satz fordert.

Also:

$$\lambda_a = -\frac{A}{r}\left(1 + \frac{r}{l}\right)e^{-r/l} + \frac{B}{r}. \quad (259)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  sind die inhomogenen Gleichungen des Innenraumes ( $r \leq R$ , Index  $i$ ) zu integrieren und an die Außenlösung stetig und stetig differenzierbar anzuschließen.<sup>52</sup>

### 5.3 Zur Lösung der sphärisch-symmetrischen Metrik ohne erzeugbaren Higgsteilchen

Bevor die Feldgleichungen für den Fall erzeugbarer Higgsteilchen im Innenraum  $r \leq R$  betrachtet werden, wird der Fall nur gravitativ gekoppelter Higgsteilchen besprochen. Das ist der Fall  $\hat{\Pi} = 0$ , also die Materie-Lagrangedichte gekoppelt an das Higgsfeld, was z.B. im Standard-Modell der Fall ist. Dann verschwindet die Kopplung des Higgsfeldes an der Materie, sodaß es nur gravitativ koppelt.

- Die lineare Vakuumlösung ( $r > R$ ):

Im Falle einer Kopplung desselben Higgsfeldes an der Materielagrangedichte und an der Krümmung der Raumzeit via RICCI-Skalar  $R$ , also mit nicht-erzeugbaren Higgsteilchen, ist die Außenlösung die selbe wie im Falle erzeugbarer Higgsteilchen, also im linearisierten Fall<sup>53</sup>

$$\begin{aligned} \xi_a &= \frac{\dot{A}}{r}e^{-r/l}, \\ \nu'_a &= \frac{\dot{A}}{r^2}e^{-r/l}\left(1 + \frac{r}{l}\right) + \frac{\dot{B}}{r^2}, \\ \lambda'_a &= -\left(\frac{\dot{A}}{r}e^{-r/l}\right)' + \frac{\dot{A}}{l^2}e^{-r/l} + \frac{\dot{B}}{r}, \\ \nu_a &= -\frac{\dot{A}}{r}e^{-r/l} - \frac{\dot{B}}{r}, \\ \lambda &= -\frac{\dot{A}}{r}e^{-r/l} - \frac{\dot{A}}{l}e^{-r/l} + \frac{\dot{B}}{r}. \end{aligned}$$

- Die linearisierte Materiegleichungen:

Innerhalb der massiven Kugel gelten statisch, ohne Quelle der Higgsteilchen, d.h. mit  $\hat{\Pi} = 0$ , in linearer Näherung, die Feldgleichungen:

<sup>52</sup>Eingesetzt in die Gleichung (246) ergibt sich, daß diese identisch erfüllt ist.

<sup>53</sup>Da die Integrationskonstanten andere Werte annehmen beim Anschluß in der Materielösung als die Konstanten im Falle erzeugbarer Higgsteilchen, erhalten die Konstanten einen Akzent '.

$$(A) \quad \frac{\nu_i''}{2} + \frac{\nu_i'}{r} + \frac{1}{2l^2}\xi_i = 8\pi G\rho, \quad (260)$$

$$(B) \quad \frac{\nu_i''}{2} - \frac{\lambda_i'}{r} + \xi_i'' + \frac{1}{2l^2}\xi_i = 0, \quad (261)$$

$$(C) \quad -\lambda_i + \frac{r}{2}(\nu_i' - \lambda_i') + \frac{r^2}{2l^2}\xi_i + r\xi_i' = -8\pi Gpr^2, \quad (262)$$

$$(D) \quad \xi_i'' + \frac{2}{r}\xi_i' - \frac{1}{l^2}\xi_i = 0. \quad (263)$$

### 5.3.1 Asymptotische Betrachtung des $\xi$ -Feldes

Geht man wie in [106] vor, so nimmt man an, daß für große Abstände  $r \gg R$  die Metrik MINKOWSKISCH wird, sodaß die Higgsfeldgleichung linearisiert und zur KLEIN-GORDON-Gleichung der statischen, sphärisch-symmetrischen Felder wird mit

$$\xi_a(r) = \frac{\dot{A}}{r}e^{-r/l}, \quad r \gg R. \quad (264)$$

$\dot{A}$  ist eine beliebige reelle Konstante und diese ist die asymptotische Lösung für alle sphärisch-symmetrischen Systeme für große Werte für  $r$ , asymptotisch eingebettet in der MINKOWSKI-Raumzeit. Der Wert der Lösung fällt exponentiell mit  $r \rightarrow \infty$  ab.

Andererseits sollte die Metrik und das Higgsfeld sich auch für  $r \rightarrow 0$  regulär verhalten, sodaß es keine Singularitäten gibt. Die Lösung von Gl. (263) lautet dann

$$\xi_i(r) = \frac{\dot{A} \sinh(\frac{r}{l})}{r}, \quad 0 \leq r \ll R. \quad (265)$$

Der Absolutwert hat ein Minimum in  $r = 0$  und wächst für größere Abstände  $r$ .

Um das Verhalten der Higgsfeldlösung im Zwischenbereich richtig zu betrachten, ist es nötig, die nichtlinearisierte, homogene Higgsfeldgleichung zu betrachten. Nach Multiplikation mit  $r$  lautet sie

$$\frac{r}{2}\xi'' + [1 + \frac{r}{4}(\nu' - \lambda')\xi'] = \frac{r}{2l^2}e^{\lambda}\xi. \quad (266)$$

Für nichtsinguläre Felder muß  $\xi'(r)$  bei  $r = 0$  verschwinden. TAYLOR-Entwicklung von  $\xi(r)$  durch  $\xi(r) = \xi_0 + \xi_1 r + \xi_2 r^2 + \dots$  führt in [106] zu

$$\xi_1 = 0, \quad (267)$$

$$\xi_2 = \frac{e^{\lambda_0}\xi_0}{6l^2}, \quad (\lambda_0 = \lambda(r=0)), \quad (268)$$

sodaß  $\xi''$  dasselbe Vorzeichen bei  $r = 0$  hat wie  $\xi(r = 0)$ . Man könnte erwarten, daß für jedes  $\dot{A} > 0$  oder  $\dot{A} < 0$  die Lösung der Higgsfeldgleichung ein Maximum besitzt, wachsend von  $r = 0$  an und exponentiell fallend für  $r \rightarrow \infty$ . Die erste Ableitung würde aber an dieser Extremstelle verschwinden und aus der Higgsfeldgleichung hätten die Lösung von  $\xi(r)$  und ihre zweite Ableitung das gleiche Vorzeichen. Da  $\xi(r)$  positiv ist, hätte man ein Minimum statt ein Maximum an der Extremstelle, und analog für  $\dot{A} < 0$  oder  $\dot{A} > 0$ , wo man ein

Minimum erwartet und ein Maximum kriegen würde. Also ist es laut O. v. STYP REKOWSKI und H. FROMMERT in [106] nicht möglich, die asymptotische Außenlösung mit einer nichttrivialen, bei  $r = 0$  regulären Lösung der homogenen Higgsfeldgleichung zu verbinden.

*Die einzig mögliche statische zentralsymmetrische Lösung der Higgsfeldgleichung ohne Higgsteilchen ist die triviale  $\xi \equiv 0$ , sodaß  $\dot{A} = 0$  und  $\dot{\lambda} = 0$  gilt. In dem Fall geht die HSTT ohne erzeugbaren Higgsteilchen in die gewöhnliche Allgemeine Relativitätstheorie ART über.*

Da die reale Welt ja nicht statisch ist, sind dynamische Rechnungen von Interesse, wie zum Beispiel bei der Inflation. In diesem Fall könnte man nichttriviale Higgsfelder kriegen. Auch die ideale und komplette Zentralsymmetrie ist oft nicht gegeben, sodaß  $\xi \neq 0$  im Falle der HSTT gekoppelt an das Standard-Modell schon vorkommen könnte.<sup>54</sup> Im weiteren wird man, außer ausdrücklich anders erwähnt, nur dem Modell wechselwirkender Higgsteilchen [28] betrachten. Das ist der Fall einer Kopplung am GUT, wie in [18].

#### 5.4 Lineare Materielösung der statischen Metrik mit Higgsteilchen und $p \ll \varrho c^2$

- Die Materielösung und lineare Anschlußbedingungen:  
Innerhalb ( $r \leq R$ ) der massiven Kugel mit Radius  $R$ ; statisch, mit Higgsteilchen, d.h.  $\hat{\Pi} = 1$ , gelten die Feldgleichungen:

$$(A) \frac{\nu_i''}{2} + \frac{\nu_i'}{r} + \frac{1}{2l^2}\xi_i = 8\pi G\left(\frac{2}{3}\varrho + p\right), \quad (269)$$

$$(B) \frac{\nu_i''}{2} - \frac{\lambda_i'}{r} + \frac{1}{2l^2}\xi_i + \xi_i'' = \frac{8\pi G}{3}\varrho, \quad (270)$$

$$(C) -\lambda_i + \frac{r}{2}(\nu_i' - \lambda_i') + \frac{1}{2l^2}r^2\xi_i + r\xi_i = -\frac{8\pi G}{3}\varrho r^2, \quad (271)$$

$$(D) \xi_i'' + \frac{2}{r}\xi_i' - \frac{1}{l^2}\xi_i = -\frac{8\pi G}{3}(\varrho - 3p). \quad (272)$$

Man sieht, daß für gewisse Drucke und Dichten die Higgsfeldgleichung antigravitierend oder gravitierend wirkt (d.h. antibindend oder bindend). Das ist für die Massenstabilitätsverhältnisse der Rotationskurven wichtig, sowie auch bei der Inflation.

Hier wird der Fall der inkompressiblen homogenen Kugel mit  $p \ll \varrho c^2$  gewählt. Das ist insbesondere der Fall nichtrelativistischer Teilchen. Dort kann man im Vergleich zu  $\varrho c^2$  den Druck vernachlässigen. So kann man Gl. (272) lösen. Die Lösung ist der Form

$$\xi_i = \frac{1}{r}(C_1 \sinh \frac{r}{l} + C_2 \cosh \frac{r}{l}) + \frac{8\pi G}{3}\varrho l^2, \quad (273)$$

mit den Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$ .

Die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  werden durch Anpassung der Innenlösung  $\xi_i$  an

<sup>54</sup>Eine Nicht-statische Betrachtung wurde von H. SCHOOR in [103] übernommen, mit einem  $\xi$ -Feld  $\xi(\vec{r}, t) = h(t)\xi(r, \vartheta, \varphi) = h(t)\xi_0 f(r)Y_{km}(\vartheta, \varphi)$  mit Radialanteil  $f(r)$  und Kugelflächenfunktion  $Y_{km}$  (mit Drehimpuls  $k$ ), insbesondere für die Hochdrehimpulsnäherung für den Higgsfeld.

die Außenlösung  $\xi_a$  bei  $r = R$ , der Kugeloberfläche, bestimmt. An der Stelle  $r = R$  ist das  $\xi$ -Feld und dessen erste Ableitung nach  $r$  stetig.<sup>55</sup>

Die Stetigkeitsbedingungen lauten explizit:

$$\frac{1}{R}(C_1 \sinh \frac{R}{l} + C_2 \cosh \frac{R}{l}) + \frac{8\pi G l^2}{3} \varrho = \frac{A}{R} e^{-R/l}, \quad (274)$$

$$\frac{1}{l}(C_1 \cosh \frac{R}{l} + C_2 \sinh \frac{R}{l}) + \frac{8\pi G l^2}{3} \varrho = -\frac{A}{l} e^{-R/l}. \quad (275)$$

Addiert man das  $1/l$ -fache der Gleichung (274) zu Gleichung (275), so gewinnt man die Integrationskonstante  $C_1$ :

$$C_1 = -C_2 - \frac{8\pi G}{3} l^2 \varrho (R + l) e^{-R/l}. \quad (276)$$

Für  $r \rightarrow 0$  gilt

$$\xi_i \longrightarrow \frac{2C_2}{r}. \quad (277)$$

Ohne Punktmasse im Zentrum gilt  $C_2 = 0$ . Also gilt im linearisierten Fall der homogenen Kugel ohne Punktmasse im Zentrum  $r = 0$  der Kugel (vgl. (273)):

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{4\pi G}{3} \varrho \frac{l^2}{r} [(R + l) e^{-R/l} (e^{-r/l} - e^{r/l}) + 2r] \\ &= \frac{8\pi G}{3} \varrho \frac{l^2}{r} [r - (R + l) e^{-R/l} \sinh \frac{r}{l}]. \end{aligned} \quad (278)$$

Aus Gl. (244) folgt analog wie im Außenraum  $r > R$ :

$$\begin{aligned} r^2 \nu_i'' + 2r \nu_i' + \frac{r^2}{l^2} \xi_i &= \frac{16\pi G}{3} 2\varrho r^2 \\ \implies (r^2 \nu_i')' + \frac{4\pi G}{3} \varrho_i r [(R + l) e^{-R/l} (e^{-r/l} - e^{r/l}) + 2r] &= \frac{32\pi G}{3} \varrho r^2. \end{aligned} \quad (279)$$

Nach Integration folgt

$$\nu_i' = \frac{8\pi G}{3} \varrho r - \frac{4\pi G}{3} \varrho e^{-R/l} (R + l) \frac{l^2}{r^2} [(1 - \frac{r}{l}) e^{r/l} - (1 + \frac{r}{l}) e^{-r/l}] + \frac{C}{r^2} \quad (280)$$

mit der Integrationskonstante  $C = 0$ , da keine zusätzliche Punktmasse angenommen wird. Mit

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

kann man das Zwischenergebnis umschreiben in

$$\nu_i' = \frac{8\pi G}{3} \varrho [r - (R + l) \frac{l^2}{r^2} (\sinh \frac{r}{l} - \frac{r}{l} \cosh \frac{r}{l})], \quad (281)$$

sodaß nach nochmaliger Integration folgt:

$$\nu_i = \frac{4\pi G}{3} \varrho r^2 - \frac{4\pi G}{3} \varrho (R + l) l^2 [-\frac{1}{r} e^{r/l} + \frac{1}{r} e^{-r/l}] + D \quad (282)$$

$$= \frac{4\pi G}{3} \varrho r^2 + \frac{8\pi G}{3} \varrho (R + l) l^2 \frac{1}{r} \sinh \frac{r}{l} + D. \quad (283)$$

<sup>55</sup>Das ist nötig, da es sonst eine infinitesimal dünne harte Schicht um die Kugel gäbe, was nicht der physikalischen Vorstellung befriedigt.

$D$  ist die Integrationskonstante.

Für die Dichteverteilung wird angenommen:

$$\varrho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \text{const.} \quad (284)$$

Also kann man Gl. (276) im Fall eines massiven Kerns umschreiben in:

$$C_1 = -\frac{2MG}{R^3}l^2(R+l)e^{-R/l}, \quad C_2 \equiv 0. \quad (285)$$

Die Integrationskonstante  $A$  der Außenlösung des  $\xi$ -Feldes folgt aus Gl. (274) unter Verwendung des Wertes für  $C_1$  aus Gl. (285):

$$\begin{aligned} A &= \frac{2MG}{R^3}l^2[Re^{R/l} - (R+l)\sinh\frac{R}{l}] \\ &= \frac{2MG}{R^3}l^2[R\cosh\frac{R}{l} - l\sinh\frac{R}{l}], \quad (C_2 \equiv 0). \end{aligned} \quad (286)$$

Aus der Stetigkeit von  $\nu'$  folgt (vgl. Gln. (252) und (281)):

$$Ae^{-R/l}(1 + \frac{R}{l}) + B = \frac{2MG}{R^3}[R - (R+l)\frac{l^2}{R^2}(\sinh\frac{R}{l} - \frac{R}{l}\cosh\frac{R}{l})]. \quad (287)$$

Daraus folgt<sup>56</sup>

$$\begin{aligned} B &= 2MG(1 - \frac{R+l}{R}\frac{l^2}{R^2}(\sinh\frac{R}{l} - \frac{R}{l}\cosh\frac{R}{l}) - \frac{l^2}{R^2}(1 + \frac{R}{l})e^{-R/l}\frac{1}{R}[\frac{1}{2}Re^{R/l} + \\ &\quad + \frac{1}{2}Re^{-R/l} - l\sinh\frac{R}{l}]) \\ &= 2MG\{1 + (-\sinh\frac{R}{l} + \frac{R}{l}\cosh\frac{R}{l})(-\frac{R^2l+R}{l^2R}e^{-R/l} + \frac{l^2}{R^2}\frac{R+l}{R})\} \\ &= 2MG\{1 + \frac{l^2}{R^2}\frac{R+l}{R}(1 - e^{-R/l})(\frac{R}{l}\cosh\frac{R}{l} - \sinh\frac{R}{l})\}. \end{aligned} \quad (288)$$

Hiermit gilt im Vakuum für  $r > R$ :

$$\nu'_a = \frac{2MG}{r^2}\{1 + \frac{l^2}{R^2}(\frac{R}{l}\cosh\frac{R}{l} - \sinh\frac{R}{l})[(1 + \frac{l}{R})(1 - e^{-R/l}) + \frac{l}{R}e^{-r/l}(1 + \frac{r}{l})]\}. \quad (289)$$

- Untersuchung der  $\nu'$ -Merkmale:

Für  $l \gg R$  (kleinere Sterne) wird der Außenteil von  $\nu'$  zu:

$$\nu'_a = \frac{2MG}{r^2}\{1 + \frac{1}{3}\frac{R}{l}e^{-r/l}[1 + \frac{l}{R}e^{-r/l}(1 + \frac{r}{l})]\}, \quad l \gg R. \quad (290)$$

Für  $r \ll l$  gilt  $G = \frac{3}{4}G_N$ . Daraus folgt

$$\nu'_a = \frac{3}{2}\frac{MG_N}{r^2}\{1 + \frac{1}{3}\frac{R}{l}[1 + \frac{l}{R}e^{-r/l}(1 + \frac{r}{l})]\}, \quad r \ll l. \quad (291)$$

---

<sup>56</sup>  $\frac{1}{2}Re^{R/l} + \frac{1}{2}Re^{-R/l} = R\cosh\frac{R}{l}$ .

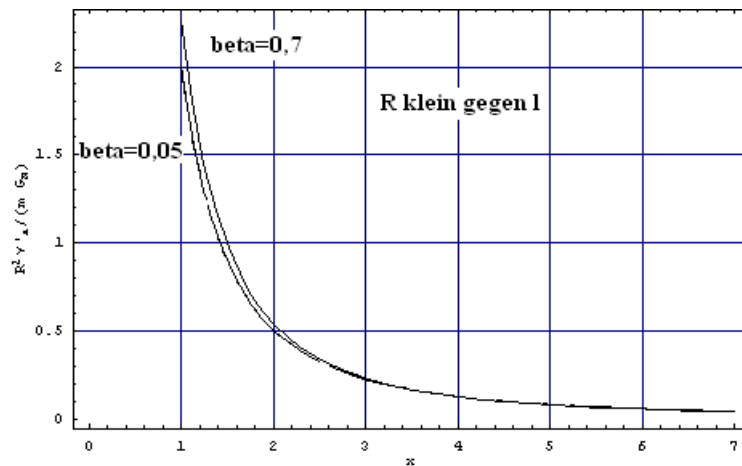
Definiert man

$$\beta := \frac{R}{l}, \quad x := \frac{r}{R} (\geq 1), \quad \beta x = \frac{r}{l}, \quad (292)$$

so kann man die Ableitung des Metrik-Potentials (für  $l \gg R$ ) umschreiben in

$$\begin{aligned} \nu'_a &= \frac{3}{2} \frac{MG_N}{R^2 x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \beta \left[ 1 + \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} (1 + \beta x) \right] \right\}, \quad l \gg R \\ &\sim \frac{1}{r^2} \left( 1 + e^{-r/l} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) \right). \end{aligned} \quad (293)$$

Dabei sieht man, daß der zweite Anteil den NEWTONSchen  $1/r^2$ -Anteil verstärkt. Wählt man  $\beta$  als Parameter und nimmt man  $x \geq 1$  als Variable, so erhält man eine Kurve für den genäherten Fall.



5:  $\nu'_a$  normiert, genähert für  $\beta \ll 1$  mit  $\beta = 0,05$  und  $\beta = 0,7$ . Die Kurven kleiner  $\beta$ -Werten liegen niedriger.

Man sieht aus der  $\nu'$ -Kurve, daß  $\nu'$ -Kurven verschiedener  $\beta$  für kleine  $\beta$  sich in deren  $r$ -Abhängigkeit nur schwach unterscheiden. Kleinere  $\beta$ -Kurven liegen niedriger, was heißt, daß große Reichweiten zu niedrigeren Kurven führen. Höhere  $\beta$ -Werte führten zu höheren Kurven, aber solche Werte wären innerhalb der Näherung  $\beta \ll 1$  nicht mehr passend.

Zu sehen ist aber auch, daß alle die Kurven höher liegen als die  $1/x^2$ -Kurve, nicht aber so, daß sie zu flacheren Geschwindigkeitskurven führen könnten.

Ohne Näherung schreibt man die Ableitung  $\nu'$  als

$$\nu'_a = \frac{3}{2} \frac{MG_N}{R^2} \frac{1}{x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta^2} (\beta \cosh \beta - \sinh \beta) \left[ \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta}) + \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} (1 + \beta x) \right] \right\}. \quad (294)$$

Die Kurven sind von derselben Form wie im vereinfachten Fall für  $\beta < 1$ . Durch  $\beta > 1$  ergeben sich noch höhere Kurven, aber keine Verflachung der  $\nu_a$ -Kurven.

### 5.5 Das statische linearisierte Linienelement der homogenen Kugel mit Higgsteilchen und $p \ll \varrho c^2$

Es werden andere Eigenschaften des sowohl in  $\xi$  als auch in der Metrik linearisierten Modells untersucht, soweit sie für andere Phänomene von Nutzen sein könnten.

Es gilt Gl. (93) im statischen Fall:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

also zentralsymmetrisch mit Krümmungskordinaten:

Außen ( $r > R$ ):

$$\begin{aligned} \xi_a(r) &= \frac{2MG}{rR^3} l^2 [R e^{R/l} - (R+l) \sinh \frac{R}{l}] e^{-r/l} \\ &= \frac{2MG}{rR^3} l^2 [R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l}] e^{-r/l}, \end{aligned} \quad (295)$$

sowie

$$\begin{aligned} \xi'_a(r) &= \frac{2MG}{R^3 r^2} l(l+r) [l \sinh \frac{R}{l} - R \cosh \frac{R}{l}] e^{-r/l}, \\ \xi''_a(r) &= \frac{2MG}{R^3} \frac{e^{-r/l}}{r^3} (2l^2 + 2lr + r^2) (R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l}), \end{aligned}$$

und für das Potential

$$\begin{aligned} \nu'_a(r) &= \frac{2GM}{r^2} [(1 - e^{-R/l}) (\frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l}) + \\ &\quad + \frac{e^{-r/l}}{R^3} (l+r) (R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l})]. \end{aligned} \quad (296)$$

Das zeitliche Potential der Metrik lautet für den Außenraum ( $r > R$ ):

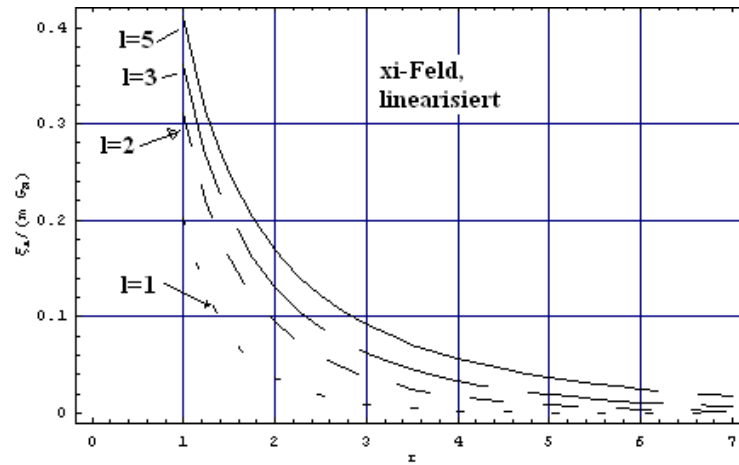
$$\begin{aligned} \nu_a(r) &= \frac{2MG}{R^3} [l^2 (\frac{l}{r} \sinh \frac{R}{l} - \frac{R}{r} \cosh \frac{R}{l}) e^{-r/l} - \\ &\quad - \frac{R^3}{r} - \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - e^{-R/l}) (\frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l})]. \end{aligned} \quad (297)$$

Das räumliche

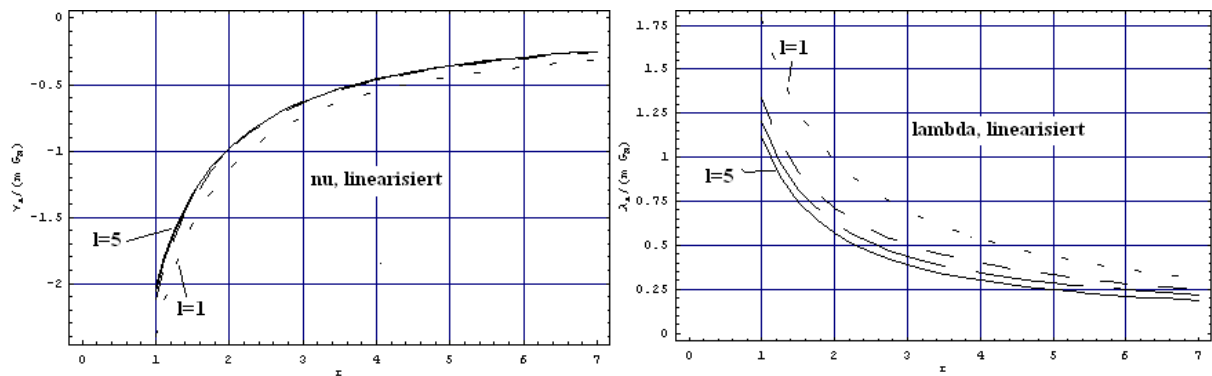
$$\begin{aligned} \lambda_a(r) &= - \frac{2MG}{R^3 r} l^2 [R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l}] (1 + \frac{r}{l}) e^{-r/l} + \\ &\quad + \frac{2MG}{r} [1 + \frac{l^2}{R^2} \frac{R+l}{R} (1 - e^{-R/l}) (\frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l})]. \end{aligned} \quad (298)$$

Innen ( $r \leq R$ ). Aus den Feldgleichungen (244) und (245) folgt

$$\frac{1}{r} \lambda'_i - \xi''_i + \frac{\nu'_i}{r} = 8\pi G(\varrho - 3p).$$



6: Verlauf des auf  $R$  normierten  $\xi$ -feldes pro Masse  $M$  im Außenraum  $r > R$  in linearer Näherung. Höhere Reichweiten  $l$  führen zu höheren  $\xi_\alpha$ -Feldern.



7: Die auf  $R$  normierte linearisierte Metrikkoeffizienten  $\lambda$  und  $\nu$  pro Masse  $M$  im Außenraum  $r > R$ . Kurven für  $l = 1, 2, 3, 5$ . Kurven hoher Reichweiten  $l$  liegen näher an Null.

Mit  $p = 0$ :

$$\lambda'_i(r) = r\xi''_i(r) - \nu'_i(r) + 8\pi G \rho r. \quad (299)$$

Es gilt ferner

$$\xi_i(r) = \frac{MG l^2}{R^3} \frac{1}{r} [(R+l)e^{-R/l}(e^{-r/l} - e^{r/l}) + 2r], \quad (300)$$

mit

$$\begin{aligned}
\xi'_i(r) &= MG \frac{l^2}{r^2 R^3} [(R+l)e^{-R/l}(e^{-r/l} - e^{r/l}) + 2r] + \\
&\quad + MG \frac{l^2}{r} [(R+l)e^{-R/l}(-\frac{1}{l}e^{-r/l} - \frac{1}{l}e^{r/l}) + 2] \\
&= \frac{2MGl}{R^3 r^2} (R+l)e^{-R/l} [l \sinh \frac{r}{l} - r \cosh \frac{r}{l}], \\
\xi''_i(r) &= 2MG \frac{l^2}{R^3 r^3} [(R+l)e^{-R/l}(e^{-r/l} - e^{r/l}) + 2r] - \\
&\quad - 2MG \frac{l^2}{R^3 r^2} [(R+l)e^{-R/l}(-\frac{1}{l}e^{-r/l} - \frac{1}{l}e^{r/l}) + 2] + \\
&\quad + MG \frac{1}{R^3 r} [(R+l)e^{-R/l}(e^{-r/l} - e^{r/l})] \\
&= \frac{2MG}{R^3 r^3} (R+l) [2l r \cosh \frac{r}{l} - (2l^2 + r^2) \sinh \frac{r}{l}] e^{-R/l},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\nu'_i(r) &= \frac{2MG}{R^3} [r - e^{-R/l}(R+l) \frac{l^2}{r^2} (\sinh \frac{r}{l} - \frac{r}{l} \cosh \frac{r}{l})] \\
&= \frac{2MG}{R^4} r - \frac{MG}{R^3} (R+l) \frac{l^2}{r^2} [(1 - \frac{r}{l})e^{r/l} - (1 + \frac{r}{l})e^{-r/l}].
\end{aligned}$$

Somit hat man nach Integration von  $\lambda'_i$ , vgl. Gl. (299):

$$\begin{aligned}
\lambda_i(r) &= \frac{MG}{R^3} \left[ \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - 2e^{-R/l}) (e^{-r/l} - e^{r/l}) - l(R+l)e^{-R/l} (e^{-r/l} + e^{r/l}) - 4l^2 \right] + E \\
&= \frac{MG}{R^3} \left[ -4l^2 - \frac{2l}{r} (R+l) e^{-R/l} (r \cosh \frac{R}{l} + 2l \sinh \frac{R}{l}) + (R+l) \frac{l^2}{r} \sinh \frac{r}{l} \right] + E,
\end{aligned} \tag{301}$$

mit der Integrationskonstante  $E$ . Aus der Stetigkeit von  $\lambda$  an der Kugeloberfläche  $r = R$  folgt für sie (vgl. Gln. (298) und (301)):

$$E = \frac{2MG}{R^3} [(R^2 + 2l^2) + l(R+l)(1 - e^{-R/l}) \cosh \frac{R}{l}]. \tag{302}$$

Für den räumlichen Koeffizienten der linearisierten statischen zentralsymmetrischen Metrik innerhalb der linearisierten Higgs Skalar-Tensortheorie gilt dann für den Innenraum:

$$\begin{aligned}
\lambda_i(r) &= \frac{MG}{R^3} \left\{ (R+l) \left[ -4l^2 - \frac{2l}{r} (R+l) e^{-R/l} (r \cosh \frac{r}{l} + 2l \sinh \frac{r}{l}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (R+l) \frac{l^2}{r} \sinh \frac{r}{l} \right] + 2[(R^2 + 2l^2) + l(R+l)(1 - e^{-R/l}) \cosh \frac{R}{l}] \right\}.
\end{aligned} \tag{303}$$

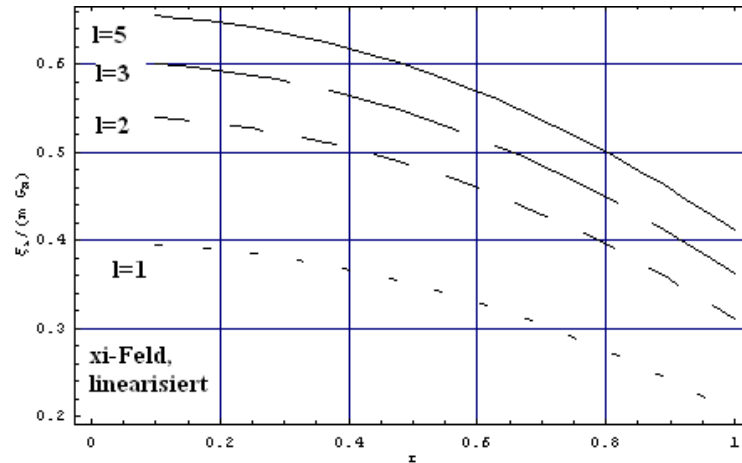
Aus der Stetigkeit von  $\nu$  an  $r = R$  folgt für die Integrationskonstante  $D$ , vgl. Gl. (297):

$$D = -3 \frac{MG}{R} - 2 \frac{MG}{R^3} l^2 \left[ \left(1 + \frac{R}{l}\right) \cosh \frac{R}{l} - \frac{R}{l} e^{-R/l} \cosh \frac{R}{l} \right] - 2 \frac{MG}{R^3} l^2 e^{-R/l} \sinh \frac{R}{l}. \tag{304}$$

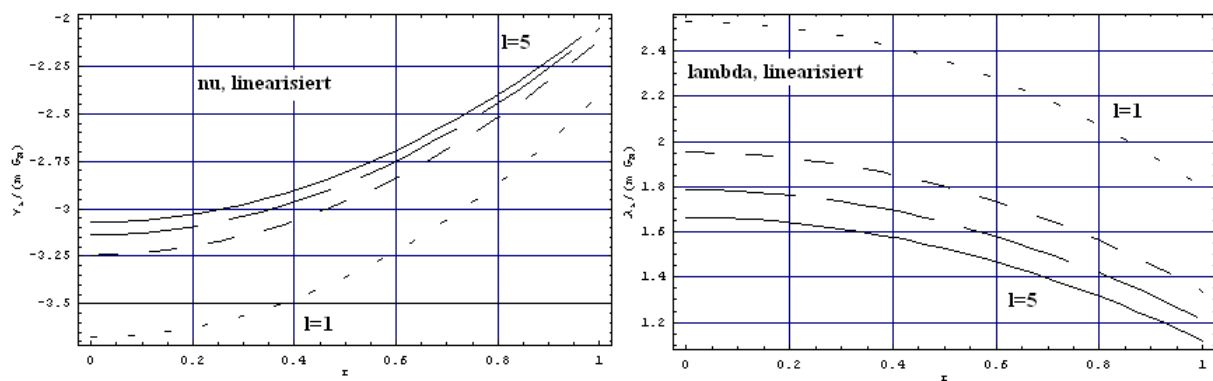
Der zeitliche Koeffizient der linearisierten statischen zentralsymmetrischen Metrik lautet dann im Innenraum ( $r \leq R$ ):

$$\nu_i(r) = \frac{MG}{R^3} \left\{ r^2 + 2(R+l)l^2 \frac{1}{r} \sinh \frac{r}{l} - 3R^2 - 2l^2 \left[ \left(1 + \frac{R}{l}\right) \cosh \frac{R}{l} - \frac{R}{l} e^{-R/l} \cosh \frac{R}{l} \right] - 2l^2 e^{-R/l} \sinh \frac{R}{l} \right\}. \quad (305)$$

Somit haben das  $\xi$ -Feld und die Metrikkoeffizienten den Verlauf:



8: Verlauf des auf  $R$  normierten  $\xi$ -feldes pro Masse  $M$  im Innenraum  $r \leq R$  in linearer Näherung. Für höhere Reichweiten  $l$  liegen die Kurven höher.



9: Die auf  $R$  normierte linearisierte Metrikkoeffizienten  $\lambda$  und  $\nu$  pro Masse  $M$  im Innenraum mit Einheitsradius  $R = 1$ . Kurven für  $l = 1, 2, 3, 5$ . Kurven hoher Reichweiten  $l$  liegen näher an Null.

- Verhalten der Komponenten:  
Es gilt:

Higgsfeld:

$$\xi_i(r) = \frac{MG l^2}{R^3} \frac{1}{r} [(R+l)e^{-R/l}(e^{-r/l} - e^{r/l}) + 2r], \quad (306)$$

$$\xi_a(r) = \frac{2MG}{rR^3} l^2 [R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l}] e^{-r/l}. \quad (307)$$

$\nu$ -Potential der Metrik:

$$\nu_i(r) = \frac{MG}{R^3} \left\{ r^2 + 2(R+l)l^2 \frac{1}{r} \sinh \frac{r}{l} - 3R^2 - 2l^2 \left[ \left(1 + \frac{R}{l}\right) \cosh \frac{R}{l} - \frac{R}{l} e^{-R/l} \cosh \frac{R}{l} \right] - 2l^2 e^{-R/l} \sinh \frac{R}{l} \right\}, \quad (308)$$

$$\nu_a(r) = \frac{2MG}{R^3} \left[ l^2 \left( \frac{l}{r} \sinh \frac{R}{l} - \frac{R}{r} \cosh \frac{R}{l} \right) e^{-r/l} - \frac{R^3}{r} - \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - e^{-R/l}) \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) \right]. \quad (309)$$

$\lambda$ -Potential der Metrik:

$$\lambda_i(r) = \frac{MG}{R^3} \left\{ (R+l) \left[ -4l^2 - \frac{2l}{r} (R+l) e^{-R/l} \left( r \cosh \frac{r}{l} + 2l \sinh \frac{r}{l} \right) - (R+l) \frac{l^2}{r} \sinh \frac{r}{l} \right] + 2 \left[ (R^2 + 2l^2) + l(R+l) (1 - e^{-R/l}) \cosh \frac{R}{l} \right] \right\}, \quad (310)$$

$$\lambda_a(r) = -\frac{2MG}{R^3 r} l^2 [R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l}] \left(1 + \frac{r}{l}\right) e^{-r/l} + \frac{2MG}{r} \left[ 1 + \frac{l^2}{R^2} \frac{R+l}{R} (1 - e^{-R/l}) \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) \right]. \quad (311)$$

### 1. $\xi$ -Feld:

Der Higgsfeldwert ist im Innen der Kugel konkav monoton fallend und im Außenraum konvex, gegen Null für  $r \rightarrow \infty$ . Er ist am höchsten für große Reichweiten und verschwindet für  $l \rightarrow 0 \iff M \rightarrow \infty$ . Am Ursprung  $r = 0$  ist er endlich und regulär.

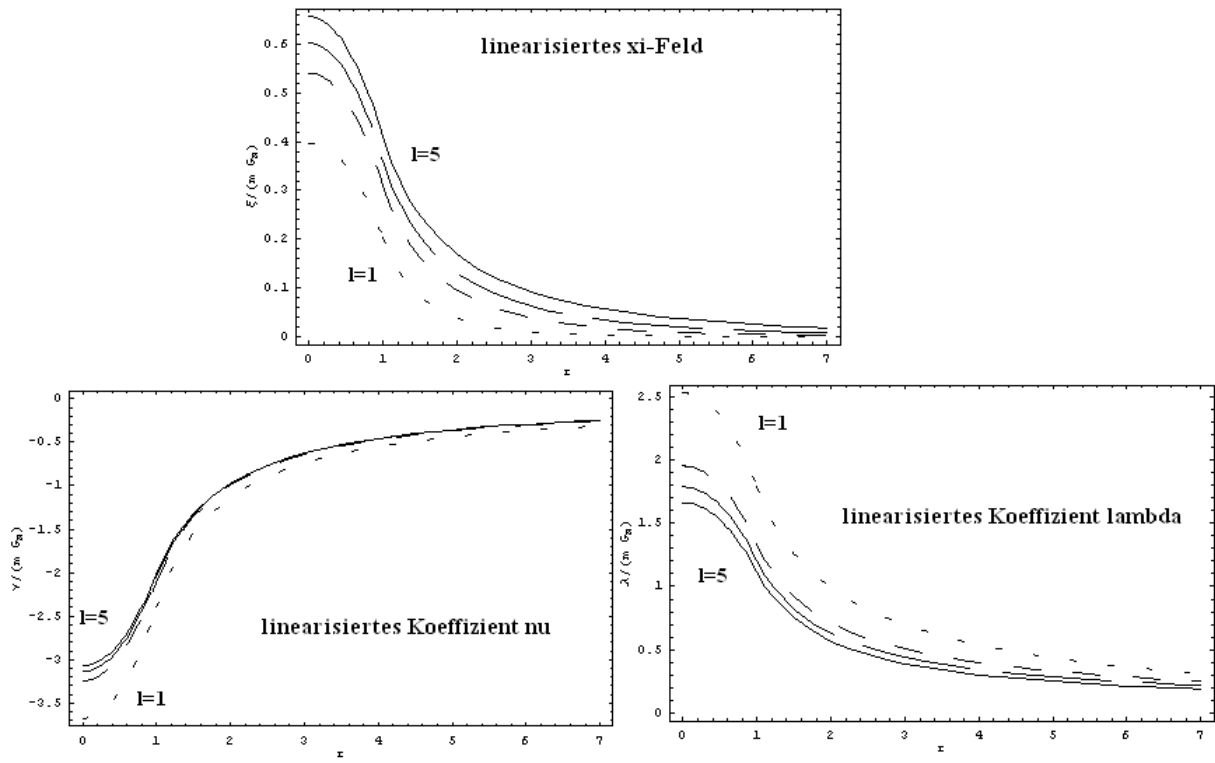
### 2. Der Metrikkoeffizient $\nu$ :

Das Potential  $\nu$  ist negativ, konvex monoton steigend im Inneren der Kugel, und Außen konkav monoton steigend, mit dem Wert  $\nu = 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

$|\nu|$  ist am größten für kleinere  $l$ -Werte, also größere Higgsmassen, und die Kurven mit größer werdenden  $l$  stehen immer näher. Der Abstand zwischen den verschiedenen Kurven verdreifacht sich fast, wenn  $l$  durch zwei geteilt wird, also ist der Abstand von den  $l = 1$ - und  $2$ -Kurven untereinander viel geringer als der zu der  $l = 0,5$ -Kurve.

### 3. Der Metrikkoeffizient $\lambda$ :

Das Potential  $\lambda$  ist positiv. Für  $r \rightarrow \infty$  strebt es den Wert Null an. Es fällt im Innenteil der Kugel mit konkaver Form monoton und außen konvex. Es ist am größten für hohe Higgsmassen  $M$ . Genau wie für  $\nu$ , kommen die Kurven immer näher,



10: Auf  $R$  normierte linearisierte Felder der HSTT:  $\xi$ ,  $\lambda$  und  $\nu$  pro Masse  $M$  in linearer Näherung. Kurven für  $l = 1, 2, 3, 5$ . Längere Linien entsprechen größere Reichweiten  $l$ .

wenn  $l$  groß genommen werden kann.

## 5.6 Materielösung und Anschlußbedingungen für Polytropenindex $\gamma = 2$ mit Quelle für die Higgsteilchen

Innerhalb der EMDEN-Theorie lauten die linearisierten Einstein- und Higgsfeldgleichungen der HSTT für die statische kugelsymmetrische Metrik mit Polytropenexponent  $\gamma = 2$  und Higgsteilchen:

$$(A) \quad \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{\xi}{2l^2} = 8\pi G \frac{2}{3} \varrho (1 + \alpha \varrho), \quad (312)$$

$$(B) \quad \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\xi}{2l^2} + \xi'' = -\frac{8\pi G}{3} \varrho, \quad (313)$$

$$(C) \quad -\lambda - \frac{r}{2}(\lambda' - \nu') + \frac{r^2}{2l^2}\xi + \xi' r = -\frac{8\pi G r^2}{3} \varrho, \quad (314)$$

$$(D) \quad \xi'' + \frac{2}{r}\xi' - \frac{1}{l^2}\xi = -\frac{8\pi G}{3} \varrho (1 - 3\alpha \varrho). \quad (315)$$

Die Dichteverteilung und der Druck lauten dann

$$\varrho = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{4} (\nu_s - \nu) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} (\Phi_s - \Phi), \quad (316)$$

$$p = \alpha \varrho^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{16} (\nu_s - \nu)^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{8} (\Phi_s - \Phi)^2. \quad (317)$$

Gl. (312) wird nach Multiplikation mit  $2r^2$  zu

$$\begin{aligned} \frac{(r^2 \nu')'}{2r^2} + \frac{1}{2l^2} \xi &= \frac{16\pi G}{3} \varrho + 8\pi G \alpha \varrho^2 \\ &= \frac{4\pi G}{\alpha} (\nu_s - \nu) + \frac{2\pi G}{\alpha} (\nu_s - \nu)^2. \end{aligned} \quad (318)$$

Es gilt

$$\Delta \Phi = \frac{(r^2 \nu')'}{2r^2}, \quad (319)$$

d.h.

$$\Delta \nu = \nu'' + \frac{2}{r} \nu', \quad (320)$$

der LAPLACE-Operator angewendet an  $\nu$ . So wird Gl. (318) zu

$$\begin{aligned} \Delta \Phi + \frac{1}{2l^2} \xi &= \frac{8\pi G}{3\alpha} (\Phi_s - \Phi) + \frac{4\pi G}{\alpha} (\Phi_s - \Phi)^2 \\ \iff \Delta \nu + \frac{1}{l^2} \xi &= \frac{8\pi G}{3\alpha} (\nu_s - \nu) + \frac{4\pi G}{\alpha} (\nu_s - \nu)^2. \end{aligned} \quad (321)$$

Gl. (315) kann man umschreiben in

$$\begin{aligned} \Delta \xi - \frac{1}{l^2} \xi &= -\frac{2\pi G}{3\alpha} (\nu_s - \nu) + \frac{\pi G}{2\alpha} (\nu_s - \nu)^2 \\ &= -\frac{4\pi G}{3\alpha} (\Phi_s - \Phi) + \frac{\pi G}{\alpha} (\Phi_s - \Phi)^2. \end{aligned} \quad (322)$$

Die unterstrichene Terme sind 2. Ordnung und somit in erster Näherung nicht zu betrachten.  $p$  linearisiert für  $\gamma = 3$ , d.h. im Falle  $a = 1$  und  $\alpha = \frac{2}{3}A$ , also, wenn das mittlere

Geschwindigkeitsquadrat gleich dem maximalen Wert des Geschwindigkeitsquadrates nach der MAXWELL-Verteilung ist. Im linearisierten  $\gamma = 2$ -Fall agiert  $p$  nur durch die veränderte Dichteverteilung  $\varrho$ .

- Innenlösung des Potentials und  $\xi$ -Feldes:

Wirkt der LAPLACE-Operator wieder auf Gl. (321) und substrahiert man davon Gl. (321) multipliziert mit  $\frac{1}{l^2}$ , so ergibt sich mit Hilfe von Gl. (322):

$$\Delta\Delta\Phi - \left[\frac{1}{l^2}\Delta\Phi + \frac{8\pi G}{3\alpha}\Delta(\Phi_s - \Phi)\right] + \frac{2\pi G}{\alpha l^2}(\Phi_s - \Phi) = 0 \quad (323)$$

oder

$$\Delta\Delta\nu - \left[\frac{1}{l^2}\Delta\nu + \frac{8\pi G}{3\alpha}\Delta(\nu_s - \nu)\right] + \frac{2\pi G}{\alpha l^2}(\nu_s - \nu) = 0. \quad (324)$$

Definiert man

$$u := 1 - \frac{\Phi_s}{\Phi} = 1 - \frac{\nu_s}{\nu}, \quad (325)$$

so werden Gln. (323) bzw. (324) zu

$$\Delta\Delta u + \left[-\frac{1}{l^2} + \frac{8\pi G}{3\alpha}\right]\Delta u - \frac{2\pi G}{\alpha l^2}u = 0. \quad (326)$$

Geht man zu Kugelkoordinaten über und substituiert mit

$$u =: \frac{w}{r}, \quad (327)$$

so erhält man eine Differentialgleichung 4. Ordnung

$$w'''' + D^*w'' - C^*w = 0 \quad (328)$$

mit

$$D^* = \frac{8\pi G}{3\alpha} - \frac{1}{l^2}, \quad (329)$$

$$C^* = \frac{2\pi G}{\alpha l^2}. \quad (330)$$

Diese Differentialgleichung wird durch die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus und die Hyperbelfunktionen Sinus-Hyperbolicus und Cosinus-Hyperbolicus gelöst.

Mit

$$\tilde{k}^2 = \frac{1}{l^2}k^2 = \frac{D^*}{2} + \sqrt{C^* + \frac{D^{*2}}{4}} \quad (331)$$

und

$$\tilde{\kappa}^2 = \frac{1}{l^2}\kappa^2 = -\frac{D^*}{2} + \sqrt{C^* + \frac{D^{*2}}{4}} \quad (332)$$

lautet die allgemeine Lösung für  $w$ :

$$w = \tilde{A}\sin(k\frac{r}{l}) + \tilde{B}\cos(k\frac{r}{l}) + \tilde{C}\sinh(\kappa\frac{r}{l}) + \tilde{D}\cosh(\kappa\frac{r}{l}). \quad (333)$$

Die allgemeine Lösung für das Potential gewinnt man durch Umkehrung der beiden Substitutionen:

$$\nu_i = \nu_s \left[ 1 - \frac{1}{r} (\tilde{A} \sin(k \frac{r}{l}) + \tilde{B} \cos(k \frac{r}{l}) + \tilde{C} \sinh(\kappa \frac{r}{l}) + \tilde{D} \cosh(\kappa \frac{r}{l})) \right] \quad (334)$$

Es gilt

$$k^2 = \frac{1}{2} [\delta - 1 + \sqrt{\delta^2 + \delta + 1}], \quad (335)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} [1 - \delta + \sqrt{\delta^2 + \delta + 1}] \quad (336)$$

und

$$\frac{\delta}{l^2} = \frac{8\pi G}{3\alpha}. \quad (337)$$

Der Parameter  $\delta$  ist umgekehrt proportional zur Polytropenamplitude  $\alpha$ , sodaß durch Änderung von  $\delta$  auch  $\alpha$  variiert wird.  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  und  $\tilde{D}$  sind Integrationskonstanten. Entwickelt man  $\nu_i$  für  $r$  gegen Null, verhalten sich die Terme mit Cosinus und hyperbolischem Cosinus wie  $1/r$ , die Terme mit Sinus und hyperbolischem Sinus werden konstant. Wie im homogenen Modell mit zentraler Masse liefert das Zentrum keinen direkten Beitrag zu  $\nu$ , da das  $\xi$ -Feld (reziproke Gravitationskonstante) dort unendlich groß wird. Hier sieht man, daß das Potential  $\nu$  trotz großen  $\xi$ -Werten endlich bleibt. Es gilt für die Integrationskonstante:

$$\tilde{D} = -\tilde{B}. \quad (338)$$

Somit darf in der Metrik weiterhin linearisiert werden.

Wählt man nichtsinguläre Felder im Zentrum, also keine Punktmasse an  $r = 0$ , so wird an das Innenpotential  $\nu_i$  für  $r = 0$  die Randbedingung gestellt, daß keine Singularität bei  $r = 0$  auftreten darf, sodaß  $\tilde{B} = 0$  gilt.

Geht man von der Differentialgleichung (321) aus und setzt man die Lösung für  $\nu_i$  ein, so hat das  $\xi_i$ -Feld folgende Gestalt:

$$\xi_i = \frac{\nu_s}{r} [\tilde{A}(\delta - k^2) \sin(k \frac{r}{l}) + \tilde{B}(\delta - k^2) \cos(k \frac{r}{l}) - \tilde{B}(\delta + \kappa^2) \cosh(\kappa \frac{r}{l}) + \tilde{C}(\delta + \kappa^2) \sinh(\kappa \frac{r}{l})]. \quad (339)$$

Fordert man an  $\xi_i$ , daß es bei  $r = 0$  endlich ist, so ergibt sich durch Entwickeln von  $\xi_i$  am Nullpunkt, daß  $\tilde{B} = 0$ .

Die Lösungen für  $\nu$  und  $\xi$  im Innenraum lauten somit:

$$\nu_i = \nu_s \left[ 1 - \frac{1}{r} (\tilde{A} \sin(k \frac{r}{l}) + \tilde{C} \sinh(\kappa \frac{r}{l})) \right]$$

und

$$\xi_i = \frac{\nu_s}{r} [\tilde{A}(\delta - k^2) \sin(k \frac{r}{l}) + \tilde{C}(\delta + \kappa^2) \sinh(\kappa \frac{r}{l})]. \quad (340)$$

- Außenlösung des Potentials und  $\xi$ -Feldes:

Die Außenlösung ( $r > R$ ) ist der Form nach identisch mit der der homogenen

Kugel.

Für das  $\xi$ -Feld gilt

$$\xi_a = \frac{A}{r}e^{-r/l} + \frac{\hat{A}}{r}e^{r/l}, \quad (341)$$

wobei  $\hat{A} = 0$  gilt, weil das äußere  $\xi$ -Feld im Unendlichen verschwinden soll.

Für  $\nu_a = 2\Phi_a$  gilt

$$\nu_a = -\frac{A}{r}e^{-r/l} + \frac{\hat{A}}{r}e^{r/l} + \check{A} - \frac{B}{r}. \quad (342)$$

Dabei ist  $\hat{A} = 0$  und  $\check{A} = 0$  wegen Verschwindens des  $\nu$ -Feldes im Außenraum für  $r \rightarrow \infty$ .

Die übrigen Integrationskonstanten werden wie im homogenen Fall über die Stetigkeitsbedingungen des  $\xi$ -Feldes und der  $\nu$ -Komponente der Metrik (bzw. des Gravitationspotentials  $\Phi$ ) am Kugelrand  $r = R$  bestimmt. Außerdem ist die Massenbedingung

$$M(R) = \int_0^R \varrho(x) d^3x \quad (343)$$

zu erfüllen.

Die Dichte geht am Rand gegen Null, sodaß auch die zweite Ableitungen stetig sind.<sup>57</sup>

Die Stetigkeitsbedingungen an der Kugeloberfläche  $r = R$  für  $\xi$ ,  $\nu$  und deren Ableitungen liefern folgendes Gleichungssystem:

$$\nu_s = -\frac{A}{R}e^{-R/l} - \frac{B}{R}, \quad (344)$$

$$\tilde{A}\sin(k\frac{R}{l}) + \tilde{B}[\cos(k\frac{R}{l}) - \cosh(\kappa\frac{R}{l})] + \tilde{C}\sinh(\kappa\frac{R}{l}) = 0, \quad (345)$$

$$\{\tilde{A}k\cos(k\frac{R}{l}) - \tilde{B}[k\sin(k\frac{R}{l}) + \kappa\sinh(\kappa\frac{R}{l})] + \tilde{C}\kappa\cosh(\kappa\frac{R}{l})\}\nu_s = l\nu_s - Ae^{-R/l}, \quad (346)$$

$$\nu_s\{\tilde{A}k^2\sin(k\frac{R}{l}) + \tilde{B}[k^2\cos(k\frac{R}{l}) + \kappa^2\cosh(\kappa\frac{R}{l})] - \tilde{C}\kappa^2\sinh(\kappa\frac{R}{l})\} = -Ae^{-R/l}, \quad (347)$$

$$\begin{aligned} \nu_s\{\tilde{A}k^3\cos(k\frac{R}{l}) - \tilde{B}[k^3\sin(k\frac{R}{l}) - \kappa^3\sinh(\kappa\frac{R}{l})] - \tilde{C}\kappa^3\cosh(\kappa\frac{R}{l})\} = \delta l\nu_s + \\ + A(1 - \delta)e^{-R/l}. \end{aligned} \quad (348)$$

Fordert man explizit die Stetigkeit der zweiten Ableitung von  $\xi$  an der Oberfläche  $r = R$ , so ergibt sich

$$\nu_s\{k^4\tilde{A}\sin(k\frac{R}{l}) + \tilde{B}[k^4\cos(k\frac{R}{l}) - \kappa^4\cosh(\kappa\frac{R}{l})] + \tilde{C}\kappa^4\sinh(\kappa\frac{R}{l})\} = +A(1 - \delta)e^{-R/l}. \quad (349)$$

Aus Gl. (345) folgt direkt

$$\tilde{A} = \tilde{B}\frac{\cosh(\kappa\frac{R}{l}) - \cos(k\frac{R}{l})}{\sin(k\frac{R}{l})} - \tilde{C}\frac{\sinh(\kappa\frac{R}{l})}{\sin(k\frac{R}{l})}. \quad (350)$$

<sup>57</sup>Das Verschwinden der Dichte am Rand  $r = R$  wird schon in der Herleitung der polytropen Größen in [24] gefordert.

Eingesetzt in Gl. (348) ergibt (350):

$$\nu_s[\tilde{A}(k^2 + \kappa^2)\sin(k\frac{R}{l}) + \tilde{B}(k^2 + \kappa^2)\cos(k\frac{R}{l})] = -Ae^{-R/l}. \quad (351)$$

Gleichung (351) eingesetzt in (347):

$$\tilde{C} = \frac{l + g_{2B}\tilde{B}}{g_2}, \quad (352)$$

mit

$$g_2 = \kappa \cosh(\kappa\frac{R}{l}) + [k^2 + \kappa^2 - k \cot(k\frac{R}{l})] \sinh(\kappa\frac{R}{l}), \quad (353)$$

$$g_{2B} = \kappa \sinh(\kappa\frac{R}{l}) + [k^2 + \kappa^2 - k \cot(k\frac{R}{l})] \cosh(\kappa\frac{R}{l}) + k[\sin(k\frac{R}{l}) + \cos(k\frac{R}{l})\cot(k\frac{R}{l})]. \quad (354)$$

Gl. (345) in (351) eingesetzt, ergibt

$$\left(-\frac{A}{R}e^{-R/l} - \frac{B}{R}\right)g_1 = -Ae^{-R/l} \quad (355)$$

mit

$$g_1 := \tilde{A}(k^2 + \kappa^2)\sin(k\frac{R}{l}) + \tilde{B}(k^2 + \kappa^2)\cos(k\frac{R}{l}). \quad (356)$$

Umgeformt ergibt das

$$-\frac{A}{B} = \frac{1}{R} \frac{g_1}{\frac{g_1}{R} - 1} e^{R/l} =: \frac{z}{R^2}. \quad (357)$$

$X := \cosh(\kappa\frac{R}{l}) - \cos(k\frac{R}{l})/\sin(k\frac{R}{l})$  liegt für meistens im Bereich  $[-4,4]$ . Bei  $\alpha \approx 0,8$  (normiert auf  $R$ ) wird es aber singulär. Somit divergieren die Integrationskonstanten an dieser Stelle. Die Wirkung eines massiven Kerns ist für  $\alpha \approx 0,8$  am größten. Für niedrige Werte von  $\alpha$  ist  $X$  negativ.

Die Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  kann man mit der Massenbedingung (343) festlegen. Das ergibt mit Hilfe von Gln. (344) und (357):

$$\begin{aligned} M(R) = & \frac{3\delta}{8G} \frac{B}{R} \left[ \frac{z}{R^2} e^{-R/l} - 1 \right] \left[ \frac{\tilde{A}}{k^2} \left( \sin(k\frac{R}{l}) - k\frac{R}{l} \cos(k\frac{R}{l}) \right) + \right. \\ & + \frac{\tilde{B}}{k^2} \left( \cos(k\frac{R}{l}) + k\frac{R}{l} \sin(k\frac{R}{l}) - 1 \right) - \\ & - \frac{\tilde{B}}{\kappa^2} \left( \kappa\frac{R}{l} \sinh(\kappa\frac{R}{l}) - \cosh(\kappa\frac{R}{l}) + 1 \right) + \\ & \left. + \frac{\tilde{C}}{\kappa^2} \left( \kappa\frac{R}{l} \cosh(\kappa\frac{R}{l}) - \sinh(\kappa\frac{R}{l}) \right) \right]. \quad (358) \end{aligned}$$

Das ergibt schließlich

$$B = MGB_B^* \quad (359)$$

mit

$$\begin{aligned}
 B_B^* = & \left\{ \frac{3}{8} \frac{\delta}{R} \left[ \frac{z}{R^2} e^{-R/l} - 1 \right] \left[ \frac{\tilde{A}}{k^2} \left( \sin\left(k \frac{R}{l}\right) - k \frac{R}{l} \cos\left(k \frac{R}{l}\right) \right) + \right. \right. \\
 & + \frac{\tilde{B}}{k^2} \left( \cos\left(k \frac{R}{l}\right) + k \frac{R}{l} \sin\left(k \frac{R}{l}\right) - 1 \right) - \frac{\tilde{B}}{\kappa^2} \left( \kappa \frac{R}{l} \sinh\left(\kappa \frac{R}{l}\right) - \right. \\
 & \left. \left. - \cosh\left(\kappa \frac{R}{l}\right) + 1 \right) + \frac{\tilde{C}}{\kappa^2} \left( \kappa \frac{R}{l} \cosh\left(\kappa \frac{R}{l}\right) - \sinh\left(\kappa \frac{R}{l}\right) \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (360)
 \end{aligned}$$

### 5.6.1 Das $\gamma = 2$ -polytrope linearisierte Linienelement mit Higgsteilchen ohne massiven Kern

Postuliert man als Modell eine polytrope massive Kugel mit Polytropenindex  $\gamma = 2$  ohne massives Zentrum  $r = 0$ , d.h. ohne Kern (z.B. eine Singularität als eine sehr dichte Massenanhäufung  $M_Z$ ), dann gilt  $\tilde{B} = -\tilde{D} = 0$ . Somit gilt:

- Polytropes Potential- und Higgsfeld ohne Kern:  
Außen ( $r > R$ ):

$$\xi_a(r) = -\frac{MGB^*}{R^2} \frac{z}{r} e^{-r/l} = -\frac{MGB^*}{R} \frac{g_1}{\frac{g_1}{R} - 1} \frac{e^{-r+R/l}}{r}, \quad (361)$$

$$\nu_a(r) = -\frac{MGB^*}{r} \left[ \frac{z}{R^2} e^{-r/l} + 1 \right], \quad (362)$$

$$\lambda_a(r) = -\frac{MGB^*}{R^2} \frac{z}{r} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) e^{-r/l} + \frac{MGB^*}{r}. \quad (363)$$

Es gilt aus der Substraktion der Einsteingleichung (241) aus der Gl. (240), wie im homogenen linearisierten Fall:

$$\lambda'_i = 8\pi G \varrho_i r + \xi''_i r - \nu'_i. \quad (364)$$

Somit gilt für alle Felder:

Innen ( $r \leq R$ ), aus Gln. (334) und (339), sowie aus der Integration von Gl. (364):

$$\xi_i(r) = \frac{\nu_s}{r} \left[ \tilde{A}(\delta - k^2) \sin(k \frac{r}{l}) + \tilde{C}(\delta + \kappa^2) \sinh(\kappa \frac{r}{l}) \right]. \quad (365)$$

$$\nu_i(r) = \frac{MGB^*}{R} \left[ \frac{z}{R^2} e^{-R/l} - 1 \right] \left[ 1 - \frac{1}{r} (\tilde{A} \sin(k \frac{r}{l}) + \tilde{C} \sinh(\kappa \frac{r}{l})) \right], \quad (366)$$

$$\begin{aligned} \lambda_i(r) = & -\frac{3}{4} \nu_s \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\tilde{A}}{k} \cos(k \frac{r}{l}) - \frac{\tilde{C}}{\kappa} \cosh(\kappa \frac{r}{l}) \right] + \\ & + \frac{\nu_s}{r} \left[ -2(k^2 - \delta) (\tilde{A} \sin(k \frac{r}{l}) + \tilde{C} \sinh(\kappa \frac{r}{l})) - \nu_i + const. \right] \end{aligned} \quad (367)$$

Die Konstante  $const = E$  in  $\lambda_i$  ist eine Integrationskonstante, die sich durch die Stetigkeitsbedingungen an der Kugeloberfläche ergibt. Die Stetigkeitsbedingungen an  $r = R$  für  $\nu$  und  $\xi$  und deren ersten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} \nu_s = & -\frac{A}{R} e^{-R/l} - \frac{B}{R}, \\ \tilde{A} \sin(k \frac{R}{l}) + \tilde{C} \sinh(\kappa \frac{R}{l}) = & 0, \\ [\tilde{A} k \cos(k \frac{R}{l}) + \tilde{C} \kappa \cosh(\kappa \frac{R}{l})] \nu_s = & l \nu_s - A e^{-R/l}, \\ [\tilde{A} k^2 \sin(k \frac{R}{l}) - \tilde{C} \kappa^2 \sinh(\kappa \frac{R}{l})] \nu_s = & -A e^{-R/l}, \\ [\tilde{A} k^3 \cos(k \frac{R}{l}) - \tilde{C} \kappa^3 \cosh(\kappa \frac{R}{l})] = & l \delta \nu_s + A(1 - \delta) e^{-R/l}. \end{aligned}$$

Das Potential an der Kugeloberfläche  $r = R$  schreibt man um in:

$$\nu_s = \frac{B}{R} \left[ -\frac{z}{R^2} e^{-R/l} - 1 \right]. \quad (368)$$

Die Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  sind formal identisch mit den Konstanten im homogenen Fall. Der Wert ist aber durch die Stetigkeitsbedingung bei  $r = R$  unterschiedlich.

- Die Integrationskonstanten:

Die Feldgrößen ergeben sich nach Vorgabe der Parameter  $R$  und  $l$  und der Polytropenamplitude  $\alpha$  und  $\delta$ . Daraus die Wellenzahlen  $k(\delta)$  und  $\kappa(\delta)$  aus Gl. (336). Danach durch Einsetzen in den Gleichungen (350), (352), (353), (354), (356), (357), (360), (358) und (359) mit  $\tilde{B} = 0$ :

$$\tilde{C} = \frac{l}{\kappa \cosh(\kappa \frac{R}{l}) + [k^2 + \kappa^2 - k \cot(k \frac{R}{l})] \sinh(\kappa \frac{R}{l})}. \quad (369)$$

Hierdurch erhält man

$$\tilde{A} = -\tilde{C} \frac{\sinh(\kappa \frac{R}{l})}{\sin(k \frac{R}{l})}. \quad (370)$$

$g_1$  ergibt sich als

$$g_1 = \tilde{A}(k^2 + \kappa^2) \sin(k \frac{R}{l}), \quad (371)$$

was zur Konstante

$$z = R \frac{g_1}{g_1 - 1} e^{-R/l} \quad (372)$$

führt.

Dadurch erhält man die Integrationskonstante  $B$  nach Gl. (359) und  $B^*$  durch  $B = MGB^*$ . Schließlich folgt:

$$A = -\frac{1}{R^2} z B. \quad (373)$$

Die Stetigkeit des  $\lambda$ -Potentials (vgl. (363) und (367)) führt mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen von  $\xi$  und  $\nu$  zu

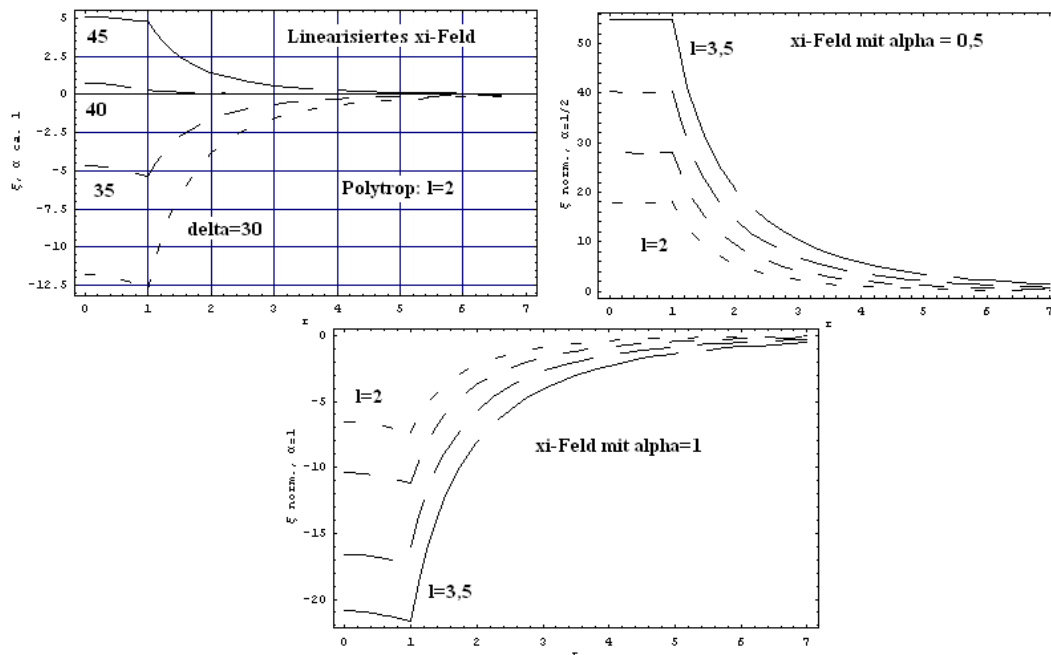
$$\begin{aligned} const = & \frac{\sin^{-1}(k \frac{R}{l})}{4lkR^2} e^{-R/l} \sinh(\kappa \frac{R}{l}) \{ -4AR\kappa k(2l + R) \sin(k \frac{R}{l}) - \\ & - (-A - Be^{R/l}) (k[8\tilde{B}l\kappa(k^2 + \kappa^2) + \tilde{C}R(3\delta + 4\delta\kappa^2 + \\ & + 4\kappa^4)] \sin(k \frac{R}{l}) \cosh(\kappa \frac{R}{l}) + (-\tilde{C}R(4k^4 - 3\delta - \\ & - 4k^2\delta)\kappa \cos(k \frac{R}{l}) + k(8\tilde{C}l\kappa(k^2 + \kappa^2))) \sin(k \frac{R}{l}) \} \\ & = E. \end{aligned} \quad (374)$$

- Verhalten der Komponenten:

1.  $\xi$ -Feld:

Das  $\xi$ -Feld ergibt sich im polytropen  $\gamma = 2$ -Modell ohne massiven Kern als relativ konstant im Innenraum  $r \leq R$  der Kugel mit Radius  $R$ . Für niedrige  $\alpha$ -Werte positiv wie im homogenen Fall, und negativ für hohe  $\alpha$ -Werte.

Der Umkehrpunkt zwischen bindende und antibindende Kopplung ergibt sich, mit



11: Polytropes lineares  $\xi$ -Feld mit  $\gamma = 2$  normiert auf  $MG_M/R$  für verschiedene  $\delta$ -Werte und  $l = 2$  und für  $l = 2, l = 2, 5, l = 3$  und  $l = 3, 5$  mit fester Polytropenamplitude  $\alpha$ . Längere Linien entsprechen höhere Reichweiten  $l$ .  $\alpha$  wird gewählt als  $\alpha \approx 1, \alpha = 0, 5$ , bzw.  $\alpha = 1$  ( $\alpha$  ist normiert auf dem Radius).

einer Normierung auf  $R$ , nahe des  $\alpha = 1$ -Wertes (dabei  $0,8 \approx \alpha \lesssim 1^{58}$ ) für die Kurven. Niedrigere Werte führen zu positiven  $\xi$ -Felder, während höhere zu negativeren. Also führen hohe  $\alpha$ -Werte zu einer Stärkung der gravitativen Kopplung durch das Higgsfeld, niedrige zu einer Schwächung.

## 2. Der Metrikoeffizient $\nu$ :

Das  $\nu$ -Feld ergibt als der Null anstrebend für  $r \rightarrow \infty$ . Positiv nur für kleine  $\alpha$ -Werte mit  $\alpha \lesssim 0,8$  (mit Normierung). Für kleine  $\alpha$ -Werte wächst  $\nu$  bis  $r = R$  als Maximum. Für größere Polytropenamplituden ist  $r = R$  ein Wendepunkt.

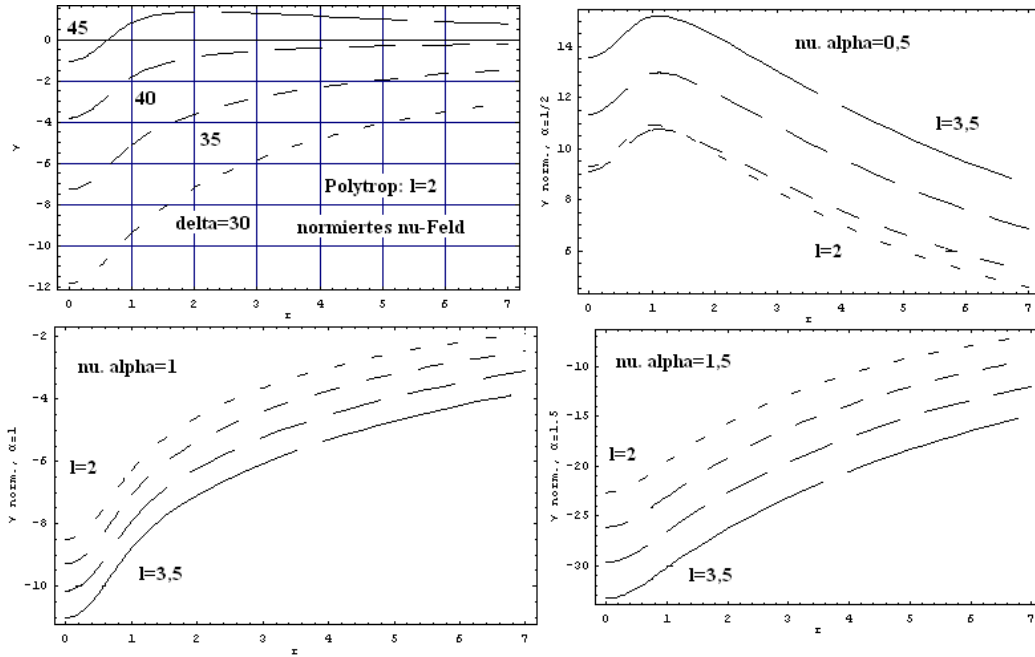
## 3. Der Metrikoeffizient $\lambda$ :

Das  $\lambda$ -Feld ergibt sich als der Null anstrebend für  $r \rightarrow \infty$ . Positiv für relativ hohe  $\alpha$ -Werte  $\alpha \gtrsim 0,8$  (mit Normierung) und für den mit einem äußeren Verlauf wie im linearen Fall ohne Kern. Innen ( $r \leq R$ ) relativ konstant. Für kleinere Polytropenamplituden wird  $\lambda$  negativ, behält aber die Form. Bei noch kleineren  $\alpha$ -Werten ( $< 1/4$ ) wird es wieder positiv. Für die Dynamik interessieren hier aber solche Werte nur wenig.

## 4. Fazit:

Die Felder verhalten sich für nicht allzu kleine  $\alpha$ -Werte nahezu wie im homogenen Fall, wobei  $\alpha$  zu klein zur gravitativen Schwächungen und ungebundenen Zuständen führen kann. Dabei zeigt sich  $\alpha \lesssim 0,8$  bis 1 oder  $\alpha \gtrsim 0,8$  bis 1 als ausschlaggebend für die Dynamik. Unter dem Abschnitt der Rotationskurven (6) wird die Interpretation von  $\alpha$  erweitert und überprüft und danach an die experimentellen Daten gekoppelt (6.2.4). Gewisse Constraints an der Polytropenamplitude  $\alpha$  folgen

<sup>58</sup>  $\alpha$  ist eine dimensionsbehaftete Größe. Im folgenden wird für  $\alpha$  innerhalb der PLANCKschen Dimensionen noch auf  $R$  normiert.



12: Polytropes linearisiertes  $\nu$ -Feld mit  $\gamma = 2$  normiert auf  $MG_N/R$  für verschiedene  $\delta$ -Werte und  $l = 2$  und für  $\alpha$  fest mit  $l = 2, 5$ ,  $l = 3$  und  $l = 3, 5$ . Längere Linien entsprechen höhere Reichweiten  $l$ .  $\alpha$  wird gewählt als  $\alpha \approx 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 1,5$ .

gleich.

- Die Polytropenamplitude  $\alpha$  der  $\gamma = 2$ -polytropen Kugel:  
Die Polytropenamplitude wurde schon im Abschnitt über das Linienelement als ein Stabilitätswert interpretiert, da Werte wenig unterhalb von  $\alpha = 1$  zu NEWTONSchem Verhalten und noch kleinere zu ungebundenen Zuständen führen können. Oberhalb von  $\alpha = 1$  ergibt sich eine Stärkung der gravitativen Kopplung (und im Abschnitt 6.2.2 sieht man, kommt es zu steigenden Rotationskurven), was man als Erhöhung der Anzahl an Bindungszustände interpretiert.

Interpretiert man  $\alpha$  über die Druck-Kraft, gegeben durch

$$-2\alpha\varrho\varrho|_r, \quad (375)$$

die die Zentrifugalkraft simmuliert, so läßt sich  $\alpha$  abschätzen. So gilt

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{r\varrho|_r}, \quad (376)$$

mit  $v = r\sqrt{\frac{MG}{R^2}}$ .

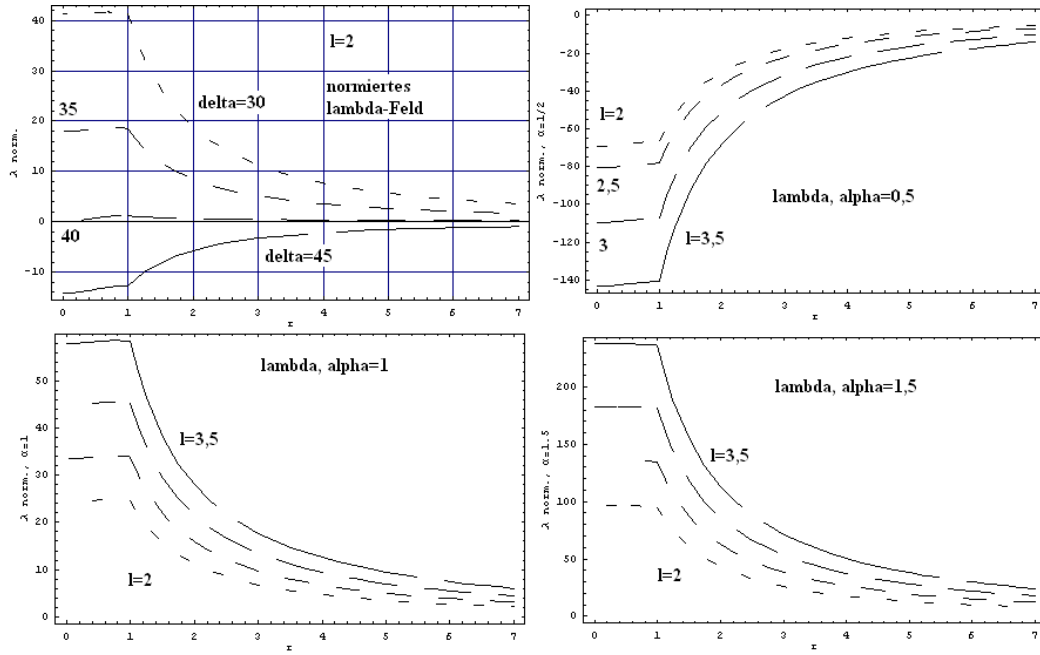
Nimmt man eine parabolische Dichteverteilung an:

$$\varrho|_r = -\tilde{a}r, \quad \tilde{a} > 0, \quad (377)$$

$$\varrho = \check{A} - \frac{1}{2}\tilde{a}r^2, \quad \tilde{a} > 0, \quad (378)$$

so gilt wegen  $\varrho(R) = 0$ :

$$\check{A} = \frac{\tilde{a}}{2}R^2. \quad (379)$$



13: Polytropes linearisiertes  $\lambda$ -Feld mit  $\gamma = 2$  normiert auf  $MG_N/R$  für verschiedene  $\delta$ -Werte und  $l = 2$  und für  $\alpha$  fest mit  $l = 2, l = 2,5, l = 3$  und  $l = 3,5$ . Längere Linien entsprechen höhere Reichweiten  $l$ .  $\alpha$  wird gewählt als  $\alpha \approx 1, \alpha = 0,5, \alpha = 1$  und  $\alpha = 1,5$ .

Mit der Masse

$$M = \int_0^R 4\pi \rho r^2 dr \quad (380)$$

erhält man

$$M = 4\pi \left( \frac{1}{3} \check{A} R^3 - \frac{1}{2} \frac{a}{5} R^5 \right), \quad (381)$$

also

$$a = \frac{15 M}{4\pi R^5} \quad (382)$$

und

$$\alpha = \frac{4\pi}{15} GR^2. \quad (383)$$

Also soll über diesem Weg  $\alpha$  ein Stabilitätswert der Rotationskurven wegen der Zentrifugalkraft aufgrund des Druckes und der Gravitation wiedergeben. Zu kleine  $\alpha$ -Werte ergeben ein klassisches Verhalten nach NEWTON. Das wiedergibt sich in den vorigen Betrachtungen der Felder der Metrik und des  $\xi$ -Feldes und wird in Betrachtungen in weiteren Kapiteln gestärkt.

Die Polytropenamplitude unter voriger Näherung der Dynamik ergibt sich von der Größenordnung der Radienquadrate der Galaxien. In der hierigen Näherung, mit Normierung auf dem Radius  $R$  und sonst mit geometrischen Koordinaten, von der Größenordnung  $\alpha = 1$ . Letzlich folgt aber eine genaue Vorgabe des Parameters nur durch Vergleich mit den experimentellen Daten (Kapitel 6.2.4). Zu starke Felder im Zentrum  $r = 0$  der Kugel oder z.B. verflachte Rotationskurven unter homogenere Dichteverhältnissen in Galaxien können aber nur unter einer Nichtlinearisierung mindestens des

$\xi$ -Feldes betrachtet werden. Das ist besonders interessant, im Falle von großen Massenanhäufungen in dem Zentrum von Galaxien (Abschnitte 5.7 und 6.2.3).

## 5.7 Teilweise linearisierte Skalar-Tensor-Theorie mit Higgsteilchen und singulärer extremer Zentralmasse

Im Abschnitt 5 wurde bislang die linearisierte Theorie für die homogene Kugel diskutiert, insbesondere für den Fall erzeugbarer Higgsteilchen. Das  $\xi$ -Feld verschwindet (fast) im Zentrum der Kugel, sowohl im homogenen wie im polytropen Fall. Bei der Herleitung der linearisierten Feldgleichungen wurde  $|\xi| \ll 1$  verwendet. Das erscheint nicht unbedingt plausibel. Im Zentrum der Galaxien könnten große Massen zu erwarten sein und deren Higgsfeldwert sollte am Ursprung nicht verschwindend sein. Es scheint daher geboten, diejenigen Feldgleichungen zu betrachten, bei denen im  $\xi$ -Feld nicht linearisiert wird<sup>59</sup>, insbesondere, wenn man bedenkt, daß Higgsfelder gravitative Wirkung besitzen. Es werden die Folgen eines Druckes untersucht, da  $p \neq 0$  zu negativen Kopplungen des Higgsfeldes und somit zu wichtigen Änderungen der Dynamik führen kann. Dabei untersucht man den Fall eines Druckes aus einer extremen singulären Masse und einer polytropen Dichteverteilung mit massivem Kern, wobei die Anwesenheit des Druckes die Dichteverteilung verändert und somit die gravitative Kopplung verändert. Die Anwesenheit des massiven Kerns bei  $r = 0$  führt zu hohen  $\xi$ -Feldern. Die Koeffizienten der zentralsymmetrischen Metrik dürfen bei der Benutzung nichtlinearisierter  $\xi$ -Felder demgegenüber weiterhin linearisiert werden, da die effektive Gravitationszahl ( $\sim (1 + \xi)^{-1}$ ) im Limes  $r \rightarrow 0$  gegen Null geht und hierdurch die Metrik-Koeffizienten klein bleiben. Die teilweise linearisierte Higgsfeldgleichung bleibt in dem Fall genau wie die linearisierte Version.

Die teilweise linearisierten Feldgleichungen lauten:

$$(A) \quad \frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{2l^2}\xi \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} = \frac{8\pi G}{1 + \xi}(\varrho - \frac{\hat{\Pi}}{3}(\varrho - 3p)), \quad (384)$$

$$(B) \quad \frac{\nu''}{2} - \frac{1}{r}\lambda' + \frac{1}{2l^2}\xi \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} + \frac{\xi''}{1 + \xi} = -\hat{\Pi} \frac{8\pi G \varrho}{3(1 + \xi)}, \quad (385)$$

$$(C) \quad -\lambda - \frac{1}{2}r(\lambda' - \nu') + \frac{r^2}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} + \frac{r\xi'}{1 + \xi} = -8\pi(1 + \xi)^{-1}G[pr^2 + \frac{\hat{\Pi}}{3}(\varrho - 3p)r^2], \quad (386)$$

$$(D) \quad \xi'' + \frac{2}{r}\xi' - \frac{1}{l^2}\xi = -\hat{\Pi} \frac{8\pi G}{3}(\varrho - 3p). \quad (387)$$

Betrachtet werden die Feldgleichungen für den Fall erzeugbarer Higgsteilchen mit  $\hat{\Pi} = 1$ , so folgt:

$$(A) \quad \frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{2l^2}\xi \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} = 8\pi G \frac{\frac{2}{3}\varrho + p}{1 + \xi}, \quad (388)$$

$$(B) \quad \frac{\nu''}{2} - \frac{1}{r}\lambda' + \frac{1}{2l^2}\xi \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} + \frac{\xi''}{1 + \xi} = -\frac{8\pi G \varrho}{3(1 + \xi)}, \quad (389)$$

$$(C) \quad -\lambda - \frac{1}{2}r(\lambda' - \nu') + \frac{r^2}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} + \frac{r\xi'}{1 + \xi} = -\frac{8\pi G \varrho r^2}{3(1 + \xi)}, \quad (390)$$

$$(D) \quad \xi'' + \frac{2}{r}\xi' - \frac{1}{l^2}\xi = -\frac{8\pi G}{3}(\varrho - 3p). \quad (391)$$

<sup>59</sup>Analog dem Vorgehen von E. GESSNER in [54].

Mit polytropem Druck lauten sie

$$(A) \quad \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{\xi}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} = 8\pi G \frac{\varrho(\frac{2}{3} + \alpha\varrho^{\gamma-1})}{1 + \xi}, \quad (392)$$

$$(B) \quad \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\xi}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} + \frac{\xi''}{1 + \xi} = \frac{8\pi G \varrho}{3(1 + \xi)}, \quad (393)$$

$$(C) \quad -\lambda - \frac{r}{2}(\lambda' - \nu') + \frac{r^2}{2l^2} \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} + \frac{r\xi'}{1 + \xi} = -\frac{8\pi G \varrho r^2}{3(1 + \xi)}, \quad (394)$$

$$(D) \quad \xi'' + \frac{2}{r}\xi' - \frac{1}{l^2}\xi = -\frac{8\pi G}{3}\varrho(1 - 3\alpha\varrho^{\gamma-1}). \quad (395)$$

Das heißt, für einen beliebigen Polytropenexponent  $\gamma$  ist die Außenlösung von derselben Form wie für  $\gamma = \infty$ . Die Innenlösung mit  $r \leq R$  hängt von der Dichteverteilung der Kugel ab, hier entweder homogen (konstante Dichte) oder polytrop ( $\gamma < \infty$ ). Allerdings wird man in dieser Arbeit nur die Folgen einer Zentralmasse im homogenen Fall betrachten, insbesondere weil flache Rotationskurven schon im  $\gamma = 2$ -polytropen Fall ohne Kern möglich sind. Dennoch könnten die Folgen der Zentralmasse (gegeben durch die Konstante  $\tilde{B}$ ) in der Dynamik polytroper  $\gamma = 2$ -Kugeln interessant sein.

### 5.7.1 Die statische zentralsymmetrische Lösung für die homogene Kugel mit singulärer Zentralmasse

Nimmt man an, daß die Kugel homogen ist, also, daß die Dichteverteilung  $\varrho$  im Innen der Kugel ( $r \leq R$ ) konstant bleibt. Der Druck wird vernachlässigt. Er ist im Vergleich zu der Dichte  $\varrho c^2$  verschwindend klein, also handelt es sich um den Fall nichtrelativistischer Teilchen, sodaß  $p \simeq 0$  gilt.

Die Vakuumlösungen sind aus dem linearen homogenen Modell bekannt (vgl. Gl. (250), (255) und (257)). Die allgemeine Form der inneren Higgsfeldgleichung mit  $r \leq R$  ist Gl. (273):

$$\xi_i = \frac{1}{r}(C_1 \sinh \frac{r}{l} + C_2 \cosh \frac{r}{l}) + \frac{8\pi G}{3}\varrho l^2.$$

$C_2$  ist an  $C_1$  gekoppelt durch Gl. (276)

$$C_1 = -C_2 - \frac{8\pi G}{3}l^2\varrho(R + l)e^{-R/l}$$

und wurde in der Behandlung des Modells der homogenen Kugel in linearer Näherung (5.4) gleich Null gesetzt. Nimmt man eine singuläre Masse im Zentrum der Kugel an, so kann man  $C_2 \neq 0$  wählen und aus der Zustandsgleichung geben.

Betrachtet wird jetzt eine isolierte homogene Kugel, in deren Zentrum eine Punktmasse  $M_S$  sitzt. Außerdem wird der Druck der Zentralmasse in den Feldgleichungen nicht vernachlässigt, sondern über eine extreme Zustandsgleichung mit der Punktmasse  $M_S$  verknüpft:

$$\begin{aligned} p &= a\varrho \\ &= aM_S\delta(\vec{x}). \end{aligned} \quad (396)$$

Dabei ist

-  $\delta(\vec{x})$ : die Delta-Verteilung.

-  $a$ : ein Druckparameter ( $a \geq 1$ ).

$\xi$  ist jetzt im Zentrum singulär und sonst klein.

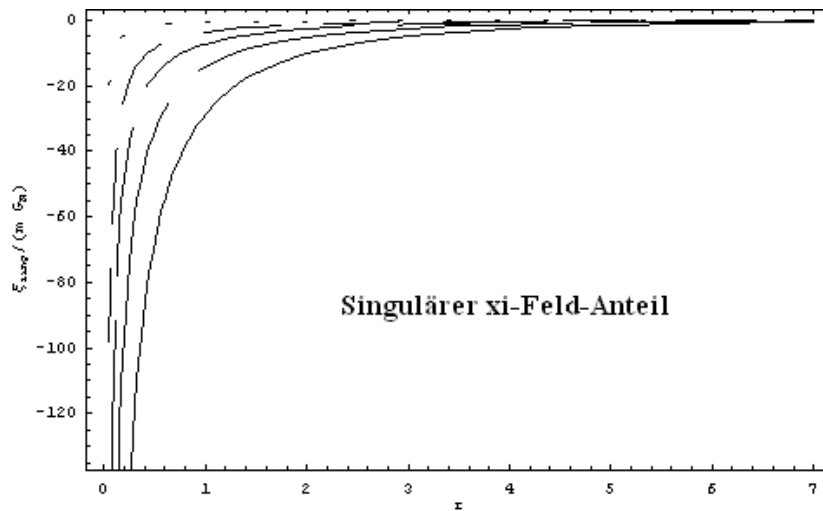
Zur Bestimmung der Integrationskonstanten gehen wir wie folgt vor:

Die Higgsfeldgleichung für die singuläre Masse lautet:

$$\xi_S'' + \frac{2}{r}\xi_S' - \frac{1}{l^2}\xi_S = -\frac{8\pi G}{3}M_S\delta(\vec{x})(1-3a) \quad (397)$$

mit der Lösung ( $\xi \rightarrow 0(r \rightarrow \infty)$ )

$$\xi_S = \frac{2G}{3}(1-3a)M_S\frac{e^{-r/l}}{r}. \quad (398)$$



14: Singulärer Anteil des  $\xi$ -Feldes pro Masse  $M$  normiert auf dem Radius  $R$  und mit  $M_S/M = 1, 5, 10, 20, 40$ . Höhere Massenverhältnisse entsprechen höhere Beträge des Feldes.

Die Konstante  $C_2$  in Gl. (276) bekommt man durch Vergleich des Grenzwerts

$$\xi_i \longrightarrow \frac{C_2}{r} \quad (r \rightarrow 0) \quad (399)$$

mit der allgemeinen Lösung für das  $\xi_S$ -Feld der isolierten Punktmasse, die ebenfalls für  $r \rightarrow 0$  entwickelt wird.

Das für  $r \rightarrow 0$  entwickelte  $\xi_S$ -Feld lautet

$$\xi_S \longrightarrow \frac{2G}{3}(1-3a)\frac{M_S}{r}. \quad (400)$$

Also folgt durch Vergleich

$$C_2 = \frac{2G}{3}(1-3a)M_S. \quad (401)$$

Einsetzen in (276) (bestimmt unter der Voraussetzung der Sterigkeit des  $\xi$ -Feldes und seine Ableitung in  $r$  bei  $r = R$ , vgl. (274) und (275)) liefert:

$$\begin{aligned} \xi_i = & \frac{2MG}{R^3}l^2\left[1 - \left(\frac{R}{r} + \frac{l}{r}\right)e^{-R/l}\sinh\frac{r}{l}\right] + \\ & + \frac{2G}{3}(1-3a)M_S\frac{e^{-r/l}}{r} \end{aligned} \quad (402)$$

und

$$\xi_a = \frac{2MG}{rR^3} l^2 \left( R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l} \right) e^{-r/l} + \frac{2G}{3} (1 - 3a) M_S \frac{e^{-r/l}}{r}. \quad (403)$$

Die Integrationskonstante  $A$  aus Abschnitt 5.2 wird im Bezug auf Kapitel 5.4 und 5.5 des homogenen Modells ohne Kern renormiert durch  $A \rightarrow A + A_S$ , mit  $A$  als die Integrationskonstante im ganz linearisierten Modell mit  $C_2 = 0$ . Dasselbe wird auch mit den anderen Integrationskonstanten durchgeführt.

Zurück zu den Feldgleichungen, läßt sich Gleichung (388) umschreiben durch Multiplikation mit  $2r^2$  in

$$\nu'' r^2 + 2r\nu' + \frac{r^2}{l^2} \xi \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} = 16\pi G r^2 \frac{\frac{2}{3}\varrho + p}{1 + \xi}. \quad (404)$$

Daraus folgt

$$(r^2 \nu')' + \frac{r^2}{l^2} \xi \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} = 16\pi G r^2 \frac{\frac{2}{3}\varrho + p}{1 + \xi}. \quad (405)$$

Definiert man  $\tilde{\Phi}$  durch  $\Delta \tilde{\Phi} = \frac{(r^2 \nu')'}{2r^2}$ , so kann man Gl. (405) umschreiben in

$$\Delta \tilde{\Phi} + \frac{1}{2l^2} \xi \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 + \xi} = \frac{8\pi G}{1 + \xi} \left( \frac{2}{3}\varrho + p \right), \quad (406)$$

was eine Verknüpfung mit [54] zeigt. Diese nur im Potential linearisierte Feldgleichung ist zunächst formal wie die aus [54].

Außerhalb der Singularität wird von einem vernachlässigbar kleinen Druck und einer homogenen Dichteverteilung ausgegangen. Dieses Modell ist in sich konsistent [54].

Zur Lösung der Potentialgleichung soll bemerkt werden, daß auf der linken Seite der Gleichung, der Quotient  $(1 + 3\xi/2)/(1 + \xi)$  auftritt, der gemäß den  $\xi$ -Gleichungen (402) und (403) für  $r \rightarrow 0$  gegen den Wert  $3/2$  und für  $r \rightarrow \infty$  gegen  $1$  geht. Da der Quotient monoton ist, liegt sein Wertebereich im Intervall  $[1, 3/2]$ ; er kann deshalb zur Vereinfachung der Rechnung durch eins genähert werden.

In der Herleitung der Feldgleichungen wurde für die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  genommen. Wird  $c^2$  mitgenommen, so steht auf der rechten Seite dieser Potentialgleichung im Nenner  $(1 + \xi c^{-2})$ . Außerhalb eines zentralen Bereichs ist das  $\xi$ -Feld von der Größenordnung eins, sodaß  $\xi c^{-2}$  dort vernachlässigt werden kann. Nur im Zentrum, wo  $\xi$  singulär wird, ist dieser Term mitzuführen. Somit gilt für die Vakuumlösung, bis auf Integrationskonstanten, die des linearisierten Modells.

Die Feldgleichung für das Potential kann in folgender Form geschrieben werden, indem Druck und Dichte in singuläre und homogene Kugel-Anteile separiert werden:

$$\Delta \tilde{\Phi} + \frac{1}{2l^2} \xi = \frac{8\pi G}{1 + \xi} \left( \frac{2}{3}\varrho_S + p_S \right) + \frac{16\pi G}{3} \varrho_H \quad (407)$$

mit:

-  $\varrho_S, p_S$  : singulären Dichte- und Druckverteilungen im Zentrum und

- $\varrho_H$  : der Dichteverteilung für die homogene Kugel.

1. Zunächst zur Außenlösung der Differentialgleichung:

Durch die Vereinfachungen aufgrund des rapiden Verschwindens der Higgsanteile erwartet man eine Lösung der Form der linearen Vakuumlösung der Feldgleichung (388).

Also

$$\nu'_a = \frac{A}{r^2} e^{-r/l} \left(1 + \frac{r}{l}\right) + \frac{B}{r^2}. \quad (408)$$

$A$  ergibt sich weitgehend aus den Anschlußbedingungen für die Higgsfeldgleichung im linearisierten Modell. Dazu kommt aber noch ein Term dazu<sup>60</sup>:

$$A = \frac{2MG}{R^3} l^2 \left[ R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l} \right] + A_S, \quad (409)$$

$A_S$  sieht man sofort aus den Higgsfeldwerten (403) und (402) (nachdem  $C_1$  und  $C_2$  durch Gln. (276) und (401) bestimmt wurden):

$$A_S = \frac{2M_S G}{R^3} \left( \frac{1}{3} - a \right). \quad (410)$$

Der Term kommt aus der angenommenen singulären Masse. Nur  $B$  ist an dieser Stelle unbekannt, da die Materiegleichung (392) wohl im teilweise linearisierten Modell verändert wurde, zum ersten durch die Nichtlinearisierung des  $\xi$ -Feldes, aber auch durch die Hinzunahme einer singulären Masse im Zentrum der massiven Kugel (was aber im Endeffekt gleichbedeutend ist, da, wie schon gesehen, sonstige nichtlineare Terme außer der  $M_S$ -Anteil in  $\xi$  vernachlässigbar sind, da  $M_S$  nur durch das Higgsfeld an der Materie koppelt, wie man unten sieht).

2. Die inhomogene Differentialgleichung (406) für den Innenraum der Kugel wird mit der Greenfunktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (411)$$

gelöst. Man erhält so für das Potential  $\tilde{\Phi}$  folgende Integraldarstellung:<sup>61</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = & -2GM_S \left( \frac{2}{3} + a \right) \int \frac{\delta(\vec{x}')}{(1 + \xi(|\vec{x}'|)) |\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' - \\ & - \frac{4G}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \varrho_H(r') \frac{r'^2 dr' \sin d\vartheta' d\vartheta' d\varphi'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos\vartheta' + r'^2}} + \\ & + \frac{1}{8\pi l^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \xi_i(r') \frac{r'^2 dr' \sin d\vartheta' d\vartheta' d\varphi'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos\vartheta' + r'^2}} + \\ & + \frac{1}{8\pi l^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \xi_a(r') \frac{r'^2 dr' \sin d\vartheta' d\vartheta' d\varphi'}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos\vartheta' + r'^2}}. \end{aligned} \quad (412)$$

<sup>60</sup>Durch die Renormierung folgt  $A \rightarrow +A_S$  mit  $A = A_{linear}$ . Dasselbe gilt für die anderen Integrationskonstanten der Felder.

<sup>61</sup>In Polarkoordinaten ist  $|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos\vartheta' + r'^2}$  und für das Volumenelement  $d^3 x' = r'^2 dr' \sin d\vartheta' d\varphi'$ .

Das erste Integral in der vorigen Gleichung führt auf

$$\int \frac{\delta(\vec{x}')}{(1 + \xi(|\vec{x}'|)|\vec{x} - \vec{x}'|)} d^3 x' \sim \int \frac{\delta(\vec{x}')}{(1 + \frac{B}{|\vec{x}'|})|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = 0, \quad (413)$$

als Folge davon, daß das Higgsfeld  $\xi$  für  $r$  gegen Null unendlich groß wird. Das bedeutet, daß die Zentralmasse keinen unmittelbaren Beitrag zum Potential beisteuert! Nur indirekt über das  $\xi$ -Feld geht die Zentralmasse in das Potential ein, allerdings so, daß dieses nicht singular wird.

Man sieht, daß die Lösung aus dem linearisierten Modell weitgehend benutzt werden kann. Nur der singuläre Massenanteil des Higgsfeldes ist noch zu berücksichtigen.

### 5.7.2 Das teilweise linearisierte statische Linienelement einer homogenen Kugel mit Extremmasse und Quelle des Higgssteilchens

Nach voriger Betrachtung muß man die Effekte der singulären Masse nur über das Higgsfeld berücksichtigt werden. Sie wechselwirkt nur darüber mit der Metrik.

Die Gleichung (388) läßt sich also integrieren.

Der singuläre Anteil von  $\nu'_i$  ist dabei

$$\nu'_{iS} = \frac{2M_S G}{3r} (1 - 3a) e^{-r/l} \left(1 + \frac{r}{l}\right). \quad (414)$$

Somit lautet die Lösung von Gl. (388)

Innen ( $r \leq R$ ):

$$\begin{aligned} \nu'_i = \frac{2MG}{R} \left\{ \frac{r}{R^2} - \left( \frac{1}{R} + \frac{l}{R^2} \right) \frac{l^2}{r^2} \left( \sinh \frac{r}{l} - \frac{r}{l} \cosh \frac{r}{l} \right) - \right. \\ \left. - \left( a - \frac{1}{3} \right) \frac{M_S}{M} \frac{1}{r} \left[ e^{-r/l} \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) - \frac{R}{r} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (415)$$

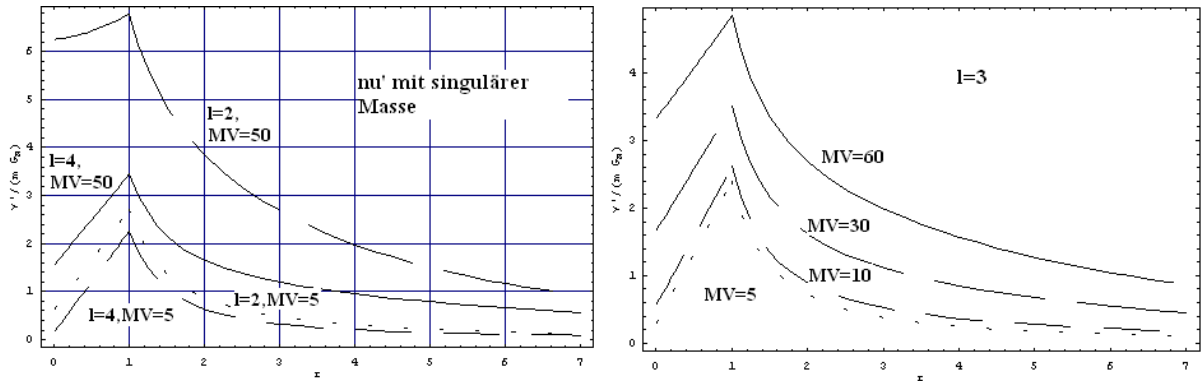
Außen ( $r > R$ ):

$$\begin{aligned} \nu'_a = \frac{2MG}{R} \frac{R}{r^2} \left\{ 1 + \frac{l^2}{R^2} \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) \left[ \left( 1 + \frac{l}{R} \right) (1 - e^{-R/l}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{l}{R} e^{-R/l} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) - \left( a - \frac{1}{3} \right) \frac{M_S}{M} \left[ e^{-r/l} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) - 1 \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (416)$$

mit der Integrationskonstante

$$B = 2MG \left[ 1 + \frac{l^2}{R^2} \frac{R+l}{R} (1 - e^{-R/l}) \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) - \left( a - \frac{1}{3} \right) \frac{M_S}{M} \right], \quad (417)$$

analog ausgerechnet wie im linearen Fall.



15:  $\nu'$  pro Masse  $M$  mit singulärer Masse  $M_S$ ,  $a = 1$  und Einheitsradius  $R = 1$ . Höhere Werte für höhere Massenverhältnisse und niedrige Reichweiten  $l$ .

Ersichtlich bleibt, daß  $\nu'$ , im Gegensatz zum  $\xi$ -Feld, infolge des Verschwindens der effektiven Gravitationszahl im Zentrum, im gesamten Definitionsbereich endlich ist, sodaß die Linearisierung retrospektiv gerechtfertigt ist.

$\nu'$  wird für hohe Massenverhältnisse  $M_S/M$  größer, wobei Kurven mit kurzer HIGGS-Reichweite, d.h. hoher Higgsmasse, am höchsten liegen.

Die Ableitung des räumlichen Metrikkoeffizienten  $\lambda$  kann analog wie in der ganz-linearisierten Theorie hergeleitet werden. Dabei gilt gemäß Gln. (388) und (389) für nichtrelativistische Teilchen:

$$\lambda' = \frac{r\xi''}{1+\xi} - \nu' + \frac{8\pi G}{(1+\xi)}\varrho r. \quad (418)$$

$\nu'$  ist gegeben. Die  $\lambda'$ -Gleichung läßt sich außerdem noch vereinfachen, da  $1 + \frac{\xi}{c^2} \approx 1$  ist. So wird  $\lambda$  zu

$$\lambda = \int \lambda' dr = \int \lambda'_{linear} dr + \int \lambda'_{sing.} dr \quad (419)$$

$$= \int 8\pi G \varrho r dr + \int \xi''_{linear} r dr + \int \xi''_{sing.} r dr - \int (\nu'_{linear} + \nu'_{sing.}) dr. \quad (420)$$

Es gilt innen ( $r \leq R$ ):

$$\xi_i(r) = 2MG \left\{ \frac{l^2}{R^3} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} + \frac{l}{r} \right) e^{-R/l} \sinh \frac{r}{l} \right] + \frac{1}{3} (1 - 3a) \frac{M_S e^{-r/l}}{M} \right\}. \quad (421)$$

Der singuläre  $M_S$ -Anteil von  $\xi_i$  dominiert dessen Dynamik, sodaß hohe Massenverhältnisse (im Falle  $a > 1/3$ )  $\xi$  erniedrigen, wobei höhere Beträge (negativ) zu hohen  $l$ -Werten gehören.

Für  $\nu$  im Innenraum ( $r \leq R$ ) gilt nach Integration von  $\nu'_i$ , analog zur Gl. (308)

$$\nu_i(r) = \frac{MG}{R^3} \left[ r^2 + 2(R+l) \frac{l^2}{r} \sinh \frac{r}{l} \right] + \frac{2M_S G}{r} \left( a - \frac{1}{3} \right) (e^{-r/l} + 1) + D, \quad (422)$$

mit der Integrationskonstante  $D$ .

Für  $\lambda_i$  gilt analog zur Gl. (303)

$$\lambda_i(r) = - \frac{2MG}{R^3} \left[ l(R+l) e^{-R/l} \cosh \frac{r}{l} + \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - 2e^{-R/l}) \sinh \frac{r}{l} + 4l^2 \right] + \lambda_{i\,sing.} + \tilde{E} \quad (423)$$

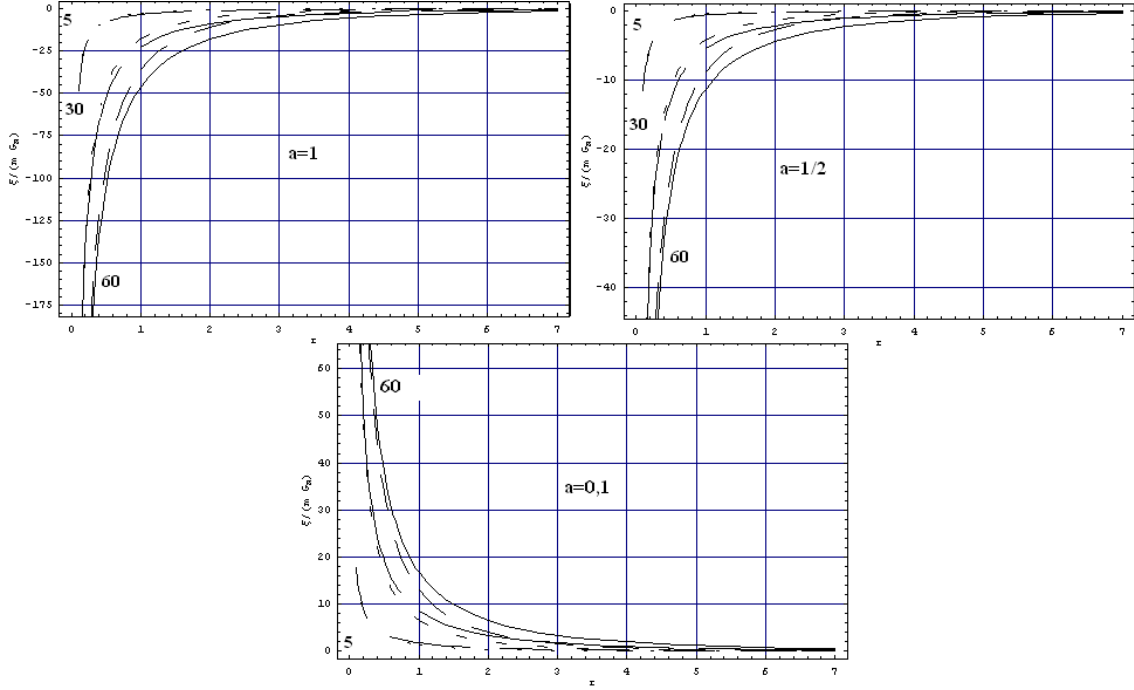
$$\begin{aligned} &= - \frac{2MG}{R^3} \left[ l(R+l) e^{-R/l} \cosh \frac{r}{l} + \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - 2e^{-R/l}) \sinh \frac{r}{l} + 4l^2 \right] - \\ &\quad - \frac{2M_S G}{3l^2} (-1 + 3a) e^{-r/l} \left( -l - \frac{2l^2}{r} \right) - 2M_S G \left( a - \frac{1}{3} \right) \left[ \frac{1}{r} e^{-r/l} + \frac{1}{r} \right] + E \\ &= - \frac{2MG}{R^3} \left[ l(R+l) e^{-R/l} \cosh \frac{r}{l} + \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - 2e^{-R/l}) \sinh \frac{r}{l} + 4l^2 \right] - \\ &\quad - \frac{2M_S G}{r} \left( a - \frac{1}{3} \right) (e^{-r/l} + 1 + \frac{r}{l} e^{-r/l}) + E, \end{aligned} \quad (424)$$

mit der Integrationskonstante  $E$ .  $\tilde{E}$  soll der nichtsinguläre Anteil von  $E$  sein.  $E$  ist die Integrationskonstante.

Außen ( $r > R$ ) gilt

$$\xi_a(r) = \frac{2MG}{r} e^{-r/l} \left[ \frac{l^2}{R^3} \left( R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l} \right) + \frac{1}{3} (1 - 3a) \frac{M_S}{M} \right]. \quad (425)$$

Es gilt für den zeitlichen Koeffizienten der Metrik im Außenraum (wie in Gl. (297))



16:  $\xi$ -Feld pro Masse  $M$  mit singularer Masse  $M_S$  und Normierung auf dem Radius  $R$ , mit  $M_S/M = MV = 5, 30, 60$  ( $l = 2, 4$ ). Die Reichweite  $l$  spielt im Vergleich zur singularen Masse eine unerhebliche Rolle in der Dynamik, wobei höhere Beträge des Feldes zu höheren Reichweiten  $l$  gehören. Für  $a \leq 1/3$  koppelt das  $\xi$ -Feld antigravitativ.

$$\nu_a = \nu_{a \text{ linear}} - \frac{A_S}{r} e^{-r/l} - \frac{B_S}{r}. \quad (426)$$

Dabei sind  $A_S$  und  $B_S$  die Anteile der Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  gehörend zu der singularen Masse im Zentrum (neu aus der Annahme  $C_2 \neq 0$  in (276)). Also:

$$\nu_a(r) = \frac{2MG}{R^3} \left[ l^2 \left( \frac{l}{r} \sinh \frac{R}{l} - \frac{R}{r} \cosh \frac{R}{l} \right) e^{-r/l} - \frac{R^3}{r} - \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - e^{-R/l}) \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) \right] + \frac{2M_S G}{r} \left( a - \frac{1}{3} \right) (e^{-r/l} + 1). \quad (427)$$

Außerdem gilt, wie linear:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \lambda_{a \text{ linear}} + \lambda_{a \text{ sing.}} \\ &= \lambda_{a \text{ linear}} - \frac{A_S}{r} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) e^{-r/l} + \frac{B_S}{r}. \end{aligned} \quad (428)$$

Also (wie (298))

$$\begin{aligned}\lambda_a = & -\frac{2MG}{R^3 r} l^2 [R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l}] (1 + \frac{r}{l}) e^{-r/l} + \\ & + \frac{2MG}{r} [1 + \frac{l^2}{R^2} \frac{R+l}{R} (1 - e^{-R/l}) (\frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l})] + \\ & + \frac{2G}{3r} (1 - 3a) M_S (1 + \frac{r}{l}) e^{-r/l} - \frac{2M_S G}{r} (a - \frac{1}{3}).\end{aligned}\quad (429)$$

Aus den Anschlußbedingungen an  $\lambda$  und  $\nu$  folgt, wie im linearen Fall:

$$\begin{aligned}E = & \frac{2MG}{R^3} (R^2 + 2l^2) + \frac{2MG}{R^3} l (R+l) (1 - e^{-R/l}) \cosh \frac{R}{l}, \\ = & \tilde{E}.\end{aligned}\quad (430)$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt, analog wie im linearen Fall:

$$D = -3 \frac{MG}{R} - 2 \frac{MG}{R^3} l^2 [(1 + \frac{R}{l}) \cosh \frac{R}{l} - \frac{R}{l} e^{-R/l} \cosh \frac{R}{l}] - 2 \frac{MG}{R^3} l^2 e^{-R/l} \sinh \frac{R}{l}.\quad (431)$$

Somit sind die zeitlichen Metrikkoeffizienten:

Innen ( $r < R$ ):

$$\begin{aligned}\nu_i = & \frac{MG}{R^3} [r^2 + 2(R+l) \frac{l^2}{r} \sinh \frac{r}{l}] + \frac{2M_S G}{r} (a - \frac{1}{3}) (e^{-r/l} + 1) - \\ & - 3 \frac{MG}{R} - 2 \frac{MG}{R^3} l^2 [(1 + \frac{R}{l}) \cosh \frac{R}{l} - \frac{R}{l} e^{-R/l} \cosh \frac{R}{l}] - 2 \frac{MG}{R^3} l^2 e^{-R/l} \sinh \frac{R}{l}.\end{aligned}\quad (432)$$

Außen ( $r \geq R$ ):

$$\begin{aligned}\nu_a = & \frac{2MG}{R^3} [l^2 (\frac{l}{r} \sinh \frac{R}{l} - \frac{R}{r} \cosh \frac{R}{l}) e^{-r/l} - \frac{R^3}{r} - \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - e^{-R/l}) (\frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \\ & - \sinh \frac{R}{l})] + \frac{2M_S G}{r} (a - \frac{1}{3}) (e^{-r/l} + 1).\end{aligned}\quad (433)$$

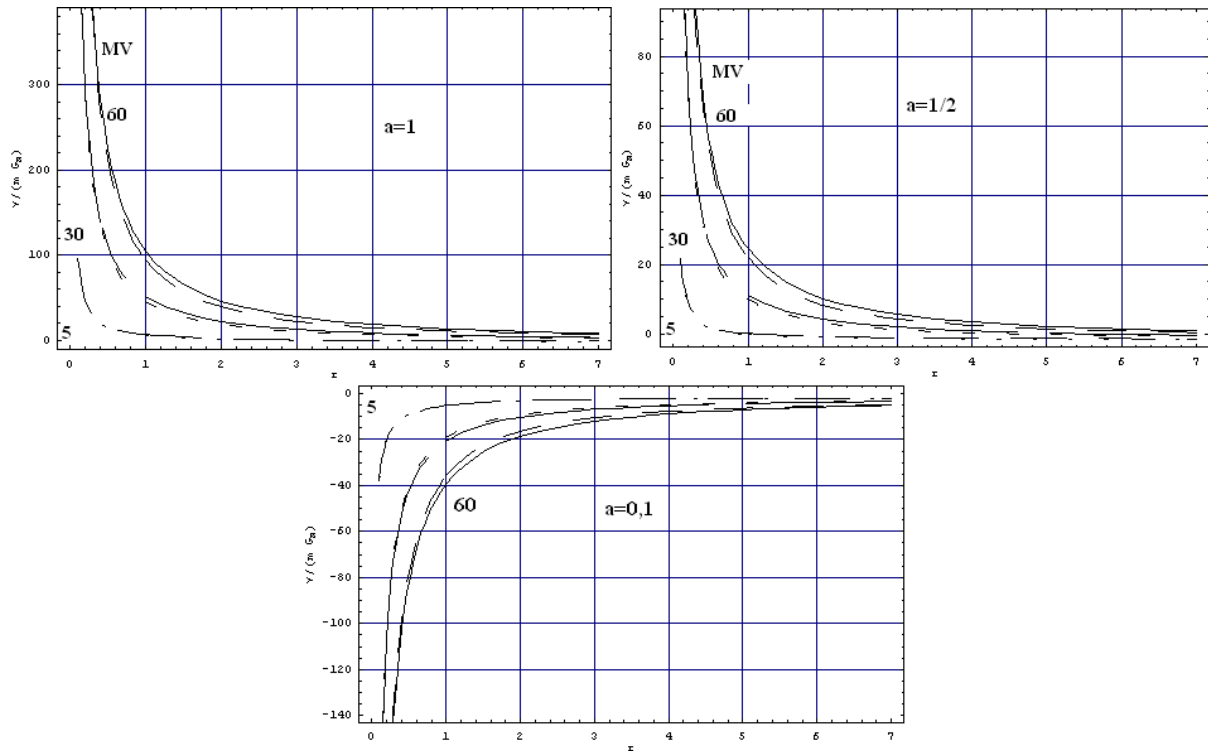
Für den räumlichen Koeffizient gilt:

Innen ( $r < R$ ):

$$\begin{aligned}\lambda_i(r) = & -\frac{2MG}{R^3} [l(R+l) e^{-R/l} \cosh \frac{r}{l} + \frac{l^2}{r} (R+l) (1 - 2e^{-R/l}) \sinh \frac{r}{l} + 4l^2] - \\ & - \frac{2M_S G}{r} (a - \frac{1}{3}) (e^{-r/l} + 1 + \frac{r}{l} e^{-r/l}) + \\ & + \frac{2MG}{R^3} (R^2 + 2l^2) + \frac{2MG}{R^3} l (R+l) (1 - e^{-R/l}) \cosh \frac{R}{l}.\end{aligned}\quad (434)$$

Außen ( $r \geq R$ ):

$$\begin{aligned}\lambda_a(r) = & -\frac{2MG}{R^3 r} l^2 [R \cosh \frac{R}{l} - l \sinh \frac{R}{l}] (1 + \frac{r}{l}) e^{-r/l} + \\ & + \frac{2MG}{r} [1 + \frac{l^2}{R^2} \frac{R+l}{R} (1 - e^{-R/l}) (\frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l})] + \\ & + \frac{2G}{3r} (1 - 3a) M_S (1 + \frac{r}{l}) e^{-r/l} - \frac{2M_S G}{r} (a - \frac{1}{3}).\end{aligned}\quad (435)$$



17: Auf  $R$  normierter  $\nu$ -Koeffizient der Metrik pro Masse  $M$  mit singularer Masse  $M_S$  und  $l = 2, 4$  ( $M_S/M = MV = 5, 30, 60$ ). Wesentlich für die Dynamik ist das Massenverhältnis. Höhere Kurven entsprechen größerer Reichweiten  $l$ , auch normiert auf  $R$ .

- Diskussion der Koeffizienten:

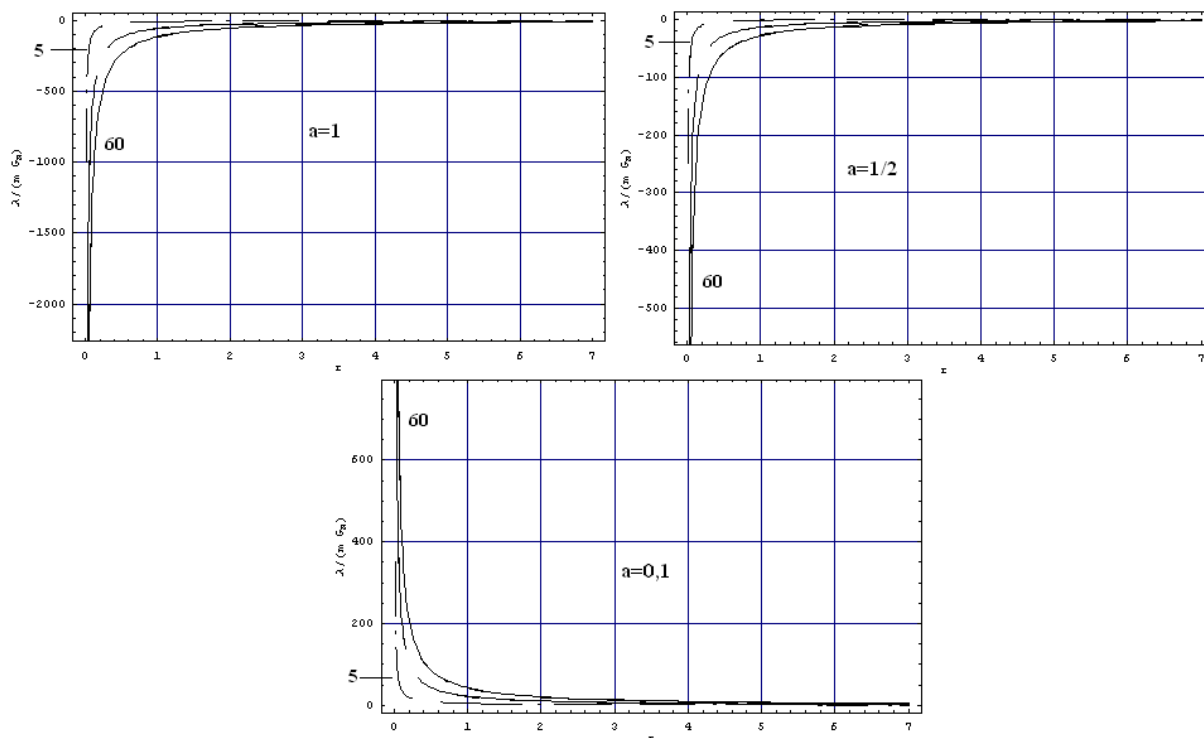
1.  $\xi$ -Feld:

Das  $\xi$ -Feld (mit  $a > 1/3$ ), anders als ohne singuläre Masse, ist negativ (und singular), mit einer steileren Kurve, je steifer die Materie ist. Und auch, wenn auch weniger, je kleiner die Massenverhältnisse  $M_S/M$  sind. Höhere Kurven erhält man für große Massenverhältnisse.

Das  $\xi$ -Feld strebt für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null an und ist für steife singuläre Materie negativ (niedrigere Werte für große Reichweiten  $l$ ). Der Betrag ist niedriger, je weniger steif die singuläre Materie ist, bis  $\xi$  für  $a = 1/3$  (Strahlung), so wie im linearen Fall ohne Druck wird (dann gelten die Ergebnisse der homogenen Kugel). Singuläre Strahlungsmaterie koppelt nicht und trägt zum  $\xi$ -Feld nicht bei. Niedrigere (also vom Betrag her höhere) Werte erhält man für hohe Reichweiten  $l$ , niedriger, wenn  $M_S/M$  größer ist, und wenn  $a$  größer wird. Werte  $a < 1/3$  führen zu antigravitativen Kopplungen des Higgsfeldes und möglichen ungebundene Zuständen.

2. Koeffizient  $\nu$ :

Im Gegensatz zum linearen Fall, ist  $\nu$  für singuläre steife Materie positiv und für nicht zu kleinen Reichweiten  $l$  und genügend große  $a$ -Werte immer konvex fallend, aber auch den Wert Null anstrebend. Er fällt rasch im Innenraum, schneller für größere Massenverhältnisse  $M_S/M$  und steifere Materie, d.h. unter anderem, daß die Kurven höherer Massenverhältnisse höher liegen als die niedriger. Für weniger steife Materie  $a < 1/3$  (und antisteife) sind negative Bereiche möglich, insbesondere für große Higgsmassen und kleine Massenverhältnisse. Das ist z.B. im Falle



18: Auf  $R$  normiertes Feld  $\lambda$  pro Masse  $M$  mit  $M_S/M = MV = 5, 30, 60$  ( $l = 2, 4$ , normiert auf  $R$ ). Die singuläre Masse  $M_S$  dominiert die Dynamik, wobei bei gleichem Massenverhältnis höhere Reichweiten  $l$  Höhere Beträge hervorrufen.

$a = 0,5$  nur für  $l = 0,5$  der Fall, mit  $M_S/M = 10$ . Das ist der Fall, wenn der  $M_S$ -Term in  $\nu$  nicht mehr dominiert und die lineare Form von  $\nu$  wieder zutrifft<sup>62</sup>. Im Außenraum ist das Verhalten ähnlich, nur treffen sich die Kurven gleicher Massenverhältnisse  $M_S/M$ , sodaß für relativ große Abstände  $r$  die Reichweite  $l$  unwichtig wird (i.A. spielt sie eine untergeordnete Rolle gegenüber  $M_S$ ). Diese Massenverhältniskurven liegen niedriger, je weniger steif die Materie ist.

### 3. Koeffizient $\lambda$ :

Gekoppelt an die singuläre Zentralmasse wird  $\lambda$  negativ, solange  $a > 1/3$  gilt. Im Innen ist  $\lambda$  singulär bei  $r = 0$ . Das Potential wächst rasch von  $\lambda \rightarrow -\infty$  und nähert sich asymptotisch für  $r \rightarrow \infty$  der Null an. Die Werte werden betragsmäßig größer, je steifer Zentralmaterie und je größer das Massenverhältnis ist. Im Außenraum wächst das Potential weiter gegen Null. Höhere  $|\lambda|$ -Werte gehören zu höheren  $l$ -Werten.

### 4. Allgemein kann gesagt werden, daß der singuläre $M_S$ -Anteil aus dem Higgsfeld die Dynamik der Komponenten dominiert, ja solange $M_S \neq 0$ und $a \neq 1/3$ . Im besprochenen Fall bewirkt $a > 1/3$ ein extra gravitatives Verhalten, das als Dunkle Materie interpretiert werden kann (siehe Rotationskurven unter 6.2.3); $a < 1/3$ führt zu Schwächungen der Bindung und somit in manchen Fällen zu ungebundenen Zuständen.

<sup>62</sup>Linear wird es ja mit  $a = 1/3$  (Strahlungfall), mit kleineren  $a$ -Werten kriegt man  $\nu$  für ein bindendes Verhalten und nicht mehr für flache Rotationskurven, wo das Higgsfeld antibindend wirkt

## 6 Die Rotationsgeschwindigkeit in statischer sphärischer Symmetrie

Die Rotationsgeschwindigkeit freier Teilchen in zentraler Symmetrie wird untersucht. Die Rotationskurven (Tangentialgeschwindigkeiten) spiraler Galaxien werden gemäß den linearen Lösungen der HSTT bestimmt. Die nötigen Massenverhältnisse und Polytropen-Amplituden werden für die Erklärung flacher Rotationskurven untersucht, sowie die Massenverhältnisse für ungebundene Zustände.

### 6.1 Die Geodätengleichung und die Tangentialgeschwindigkeit

Nach den Prinzipien der relativistischen Mechanik ist die Bewegung freier Teilchen gegeben durch die Geodätengleichung mit  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ :

$$u^\mu{}_{|\nu} u^\nu = 0 \iff u^\mu{}_{|\nu} u^\nu = -\Gamma_{\alpha\nu}^\mu u^\alpha u^\nu = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}. \quad (436)$$

Das kann man umschreiben in

$$u^m{}_{|\nu} u^\nu = -(\Gamma_{00}^m u^0 u^0 + 2\Gamma_{0n}^m u^0 u^n + \Gamma_{nl}^m u^n u^l) \quad (437)$$

mit  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$  und  $l, m, n = 1, \dots, 3$ .

Ausgeschrieben folgt mit  $x^\mu = (t, r, \vartheta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} &= -\Gamma_{00}^0 u^0 u^0 - 2\Gamma_{01}^0 u^0 u^1 - \Gamma_{11}^0 u^1 u^1 - \underbrace{\Gamma_{22}^0 u^2 u^2} - \underbrace{\Gamma_{33}^0 u^3 u^3}, \\ \frac{d^2 r}{ds^2} &= -2\Gamma_{01}^1 u^0 u^1 - \Gamma_{00}^1 u^0 u^0 - \Gamma_{11}^1 u^1 u^1 - \Gamma_{22}^1 u^2 u^2 - \Gamma_{33}^1 u^3 u^3, \\ \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} &= -\Gamma_{02}^2 u^0 u^2 - 2\Gamma_{12}^2 u^1 u^2 - \Gamma_{33}^2 u^3 u^3, \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} &= -2\Gamma_{03}^3 u^0 u^3 - 2\Gamma_{13}^3 u^1 u^3 - 2\Gamma_{23}^3 u^2 u^3. \end{aligned} \quad (438)$$

Die Faktoren mit  $\underline{\quad}$  verschwinden im statischen Fall, die mit  $\underbrace{\quad}$  verschwinden mit Krümmungskoodinaten.

In Krümmungskoodinaten lauten die Gleichungen in (436) explizit (im statischen Fall):

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = \nu' u^0 u^1, \quad (439)$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} (u^0)^2 - \frac{\lambda'}{2} (u^1)^2. \quad (440)$$

$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2}$  und  $\frac{d^2 \varphi}{ds^2}$  verschwinden nach (103). Für  $u^\mu$  gilt (104) und (106).

Betrachtet wird eine Bewegung in der Äquatorialebene  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  für die ideale Flüssigkeit. Daraus folgt aus (438) (siehe [85]):

$$v^{tan} = v^\varphi = \sqrt{\frac{r\nu'e^\nu}{2e^\nu}} = \sqrt{\frac{r\nu'}{2}} \equiv v. \quad (441)$$

Hieraus kann  $v^{tan}$  aus dem Potential  $\nu$  bestimmt werden.

Aus der Gleichheit der Schwerkraft und der Gravitationskraft ergibt sich die Tangentialgeschwindigkeit in seiner anschaulichsten Form. Es gilt:<sup>63</sup>

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}. \quad (442)$$

Es gilt  $\nu = 2\Phi$ , sodaß (442) direkt zu (441) führt.

Mit (441) und (442) wird endgültig klar, daß es sich beim Potential in (406) exakt um das Gravitationspotential  $\Phi$  handelt, da mit

$$\Phi' = \frac{v^2}{r}$$

folgt

$$\Delta\Phi = \Phi'' + \frac{2}{r}\Phi' = -\frac{v^2}{r^2} + \frac{2v^2}{r^2} = \frac{v^2}{r^2}. \quad (443)$$

Mit (441) folgt die in Abschnitt 5.7 definierende Formel von  $\Delta\tilde{\Phi} = \Delta\Phi$  vor Gl. (406):

$$\Delta\Phi = \frac{(r^2\nu')'}{2r^2}. \quad (444)$$

---

<sup>63</sup>Daraus kann in der NEWTONschen Näherung die Geschwindigkeit ausgerechnet werden, mit dem Gravitationspotential der Form  $\Phi = \Phi_N + \Phi_H$ .  $\Phi$  erhält man aus der Störung  $h_{00}$  mit  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

## 6.2 Die Rotationskurven

### 6.2.1 Die Rotationskurven im linearen Modell homogener Dichteverteilung

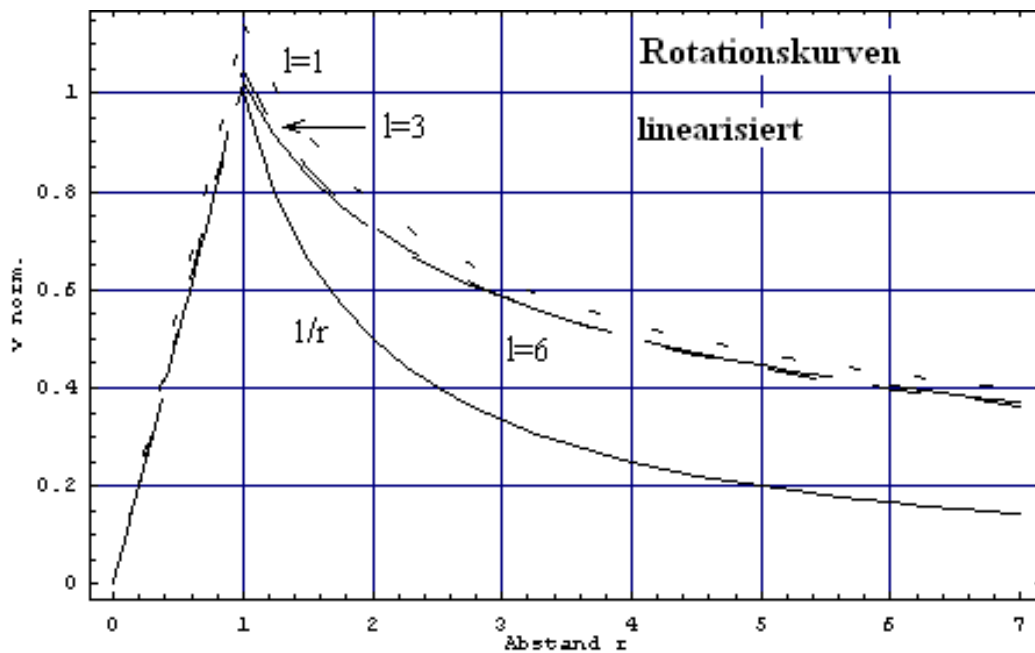
Im linearisierten Modell der HSTT mit konstanter Dichteverteilung ergeben sich in [103] verflachte Rotationskurven im Falle von nicht-erzeugbarer Higgsteilchen (d.h. ohne Quelle) (siehe Abschnitt 5.3). Dabei benutzt H. SCHOOR die Hochdrehimpulsnäherung für den Higgsfeld (s. [103]). Also ist es möglich, bei der Betrachtung nur gravitativ koppelnder Higgsteilchen, Rotationskurven zu bekommen, die den empirischen ähnlich sind, sodaß die Higgsteilchen nach dem SM zur Lösung des Dunkle-Materie-Problems beitragen können, indem die Dynamik durch das Higgsfeld so verändert wird, daß die Rotationskurven flach bleiben<sup>64</sup>. Im Falle des Higgsteilchens mit Kopplung (wie hier hauptsächlich behandelt), geht man von dem zeitlichen Potential  $\nu$  (vgl. (297) und (308)) und Gl. (441) aus. Somit, aus Abschnitten 5.4 und 5.5 lautet die Geschwindigkeit:

Innen ( $r \leq R$ ):

$$v_i^2 = \frac{MG}{R^3} \left[ r^2 - (R+l) \left( \frac{l^2}{r} \right) \left( \sinh \frac{r}{l} - \frac{r}{l} \cosh \frac{r}{l} \right) \right]. \quad (445)$$

Außen ( $r > R$ ):

$$v_a^2 = \frac{MG}{r} \left\{ 1 + \left( \frac{l}{R} \right)^2 \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) \left[ \left( 1 + \frac{l}{R} \right) \left( 1 - e^{-R/l} \right) + \frac{l}{R} e^{-r/l} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) \right] \right\}. \quad (446)$$



19: Tangentialgeschwindigkeit in linearer Näherung normiert auf  $(\sqrt{MG_N/R^3})$ , und Normierung auf  $R$ . Länger gestrichelte Linien gehören zu größeren Reichweiten  $l$ .

<sup>64</sup>Eine nähere Betrachtung des Modells mit quellenlosem Higgsteilchen steht außerhalb der Ziele dieser Arbeit und wird der Vollständigkeit halber erwähnt.

- Vergleich mit NEWTONscher Näherung:

Wie man sieht, ist der Verlauf der Rotationskurven NEWTONsch. Nur, die Geschwindigkeiten liegen in der hiesigen Näherung höher als die NEWTONsche Geschwindigkeit. Die Kurven liegen sogar merklich höher.

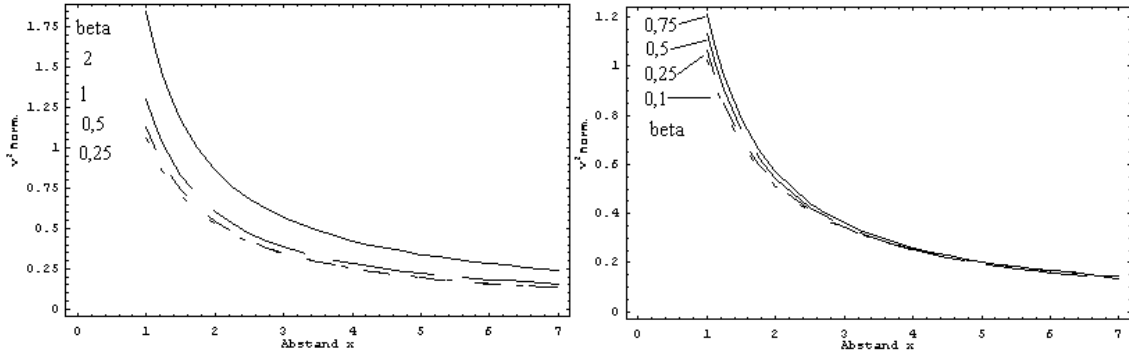
Auch ist zu erkennen, daß die Rotationsgeschwindigkeiten am höchsten sind, wenn die HIGGS-Reichweite  $l$  am niedrigsten ist. Ein Verhalten, das plausibel erscheint, da hohe  $l$  kleine Higgsmassen  $M$  des Higgsteilchen bedeuten. Also sollte man erwarten, daß die Rotationskurven NEWTONscher werden, wenn die Masse verschwindend klein wird.

Setzt man an dieser Stelle

$$\beta := \frac{R}{l}, \quad x := \frac{r}{R} (\geq 1), \quad \beta x = \frac{r}{l} \quad (447)$$

in die die Tangentialgeschwindigkeit ein, so wird die nichtgenäherte Lösung im Außenraum  $r > R$  (unter Betrachtung von  $c$ ) zu

$$\frac{v_a^2}{c^2} = \frac{3}{4} \frac{MG_N}{Rc^2} \frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta^2} (\beta \cosh \beta - \sinh \beta) \left[ \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta}) + \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} (1 + \beta x) \right] \right\}. \quad (448)$$



20:  $v^2$  normiert auf  $(MG_N/R)$  mit  $\beta = \frac{R}{l}$ , für  $r \geq R$  mit Kugelradius  $R$ .

Mit  $\beta \ll 1$  gilt für die geschweifte Klammer in Gl. (448) (bis 2. Ordnung in  $\beta$ ):

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} \beta \left[ \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 x^2\right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{3} \beta \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 x^2\right) \right] \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \beta + \frac{1}{2} \beta^2\right) \right] + \frac{1}{6} \beta^2 x^2 \cong \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \beta^2 x^2. \end{aligned} \quad (449)$$

Also gilt im Extremfall großer Reichweiten  $l$  ( $l \gg R$ ):

$$v \sim \frac{1}{x} + \beta^2 x. \quad (450)$$

Der erste Anteil ist NEWTONsch, während der zweite schwach (da  $\beta$  klein vorausgesetzt wird), verflachend wirkt. Dieser wirkt stärker (also nach kleineren Abständen), je

größer  $\beta$  gewählt werden kann.

Der  $\beta^2 x$ -Anteil wirkt dem Abfall entgegen der Kurve, während der  $1/x$ -Anteil (für  $\beta \ll 1$ ) NEWTONSches wirkt. Wie man aus den Bildern sieht, hat die Tangentialgeschwindigkeit innerhalb der linearen Näherung der Higgs Skalar-Tensortheorie im wesentlichen NEWTONSches Verhalten, obwohl eine höhere Geschwindigkeit als in der ART herauskommt. Es ergibt sich eine Erhöhung der Kurven bei fallenden  $l$ -Werten, aber eine Verflachung findet wegen der  $e^{-\beta x} = e^{-r/l}$ -Anteile der Geschwindigkeit nicht statt. Innerhalb der obigen Näherung  $\beta \ll 1$  wären zu große  $\beta$ -Werte, die eine Wiedererhöhung der Rotationskurven mit sich bringen würden, verboten.

- Fazit: Also ergeben sich innerhalb der linearen Näherung für statische homogene Kugeln verschwindender Druckanteile in der HSTT mit wechselwirkender Higgsteilchen für nichtrelativistische Teilchen keine flachen Rotationskurven.

### 6.2.2 Die Rotationskurven für die linearisierte polytrope $\gamma = 2$ -Kugel ohne Kern

Im linearisierten Modell einer polytropen Kugel ohne Kern (Abschnitt 5.6) mit Polytropenexponent  $\gamma = 2$  lautet mit Hilfe von Gl. (441) die Tangentialgeschwindigkeit

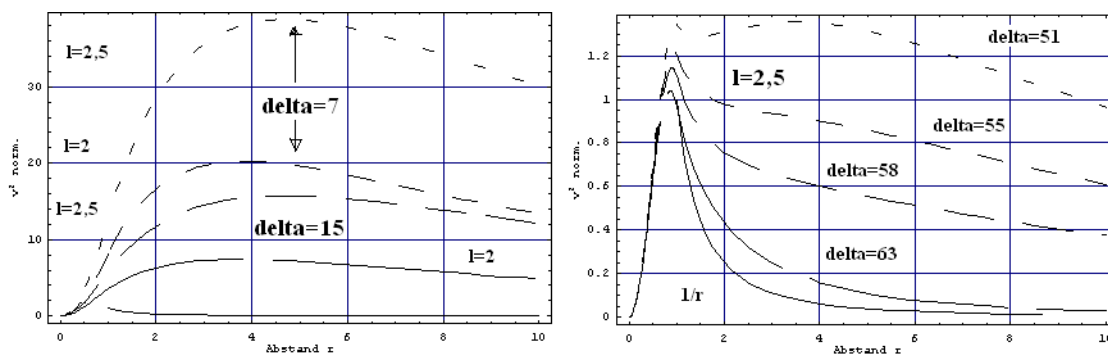
Innen ( $r \leq R$ ):

$$v_i^2 = \frac{MG}{2R} B^* \left[ \frac{z}{R^2} e^{-R/l} - 1 \right] \left[ \frac{\tilde{A}}{r} \sin\left(k \frac{r}{l}\right) + \frac{\tilde{C}}{r} \sinh\left(\kappa \frac{r}{l}\right) - \tilde{A} \frac{k}{l} \cosh\left(k \frac{r}{l}\right) - \tilde{C} \frac{\kappa}{l} \cosh\left(\kappa \frac{r}{l}\right) \right], \quad (451)$$

Außen ( $r > R$ ):

$$v_a^2 = \frac{MG}{2R} B^* \left[ -\frac{R}{r} - \frac{z}{R^2} e^{-r/l} \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) \right]. \quad (452)$$

Hieraus erhält man Rotationskurven nach Wahl von  $\alpha$  oder  $\delta$  und  $l$  durch  $\delta = \frac{8\pi G}{3\alpha} l^2$  und anschließender Festlegung von  $k(\delta)$  und  $\kappa(\delta)$  und der Integrationskonstanten. Man erhält gewölbte Peaks bei  $r_f \approx 2 \cdot l$ , und zwar höher für niedrigere  $\delta$ -Werte. Dieses Verhalten entsteht durch die nicht abrupte Änderung der Dichteverteilung am Kugelrand  $r = R$ , sodaß die Stetigkeit von  $v''$  gegeben ist. Für  $\delta$  entsprechend  $\alpha = 1$  (mit Normierung auf dem Radius  $R$ ) ergibt sich noch ein Maximum bei  $r \approx 1$ . Für niedrigere  $\alpha$ -Werte als 1 fallen die Rotationskurven nach dem ersten Peak ab. Sie werden NEWTONSsch. Die zu  $\alpha = 1$  gehörige

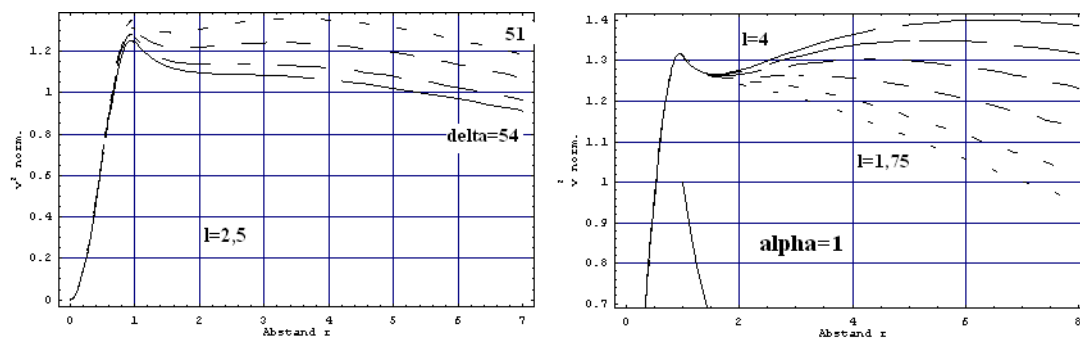


21: Normierte Rotationskurven für niedrige  $\delta$ -Werte. Für höhere  $\delta$  werden die Rotationskurven NEWTONSsch. Für die Normierung siehe vorher.

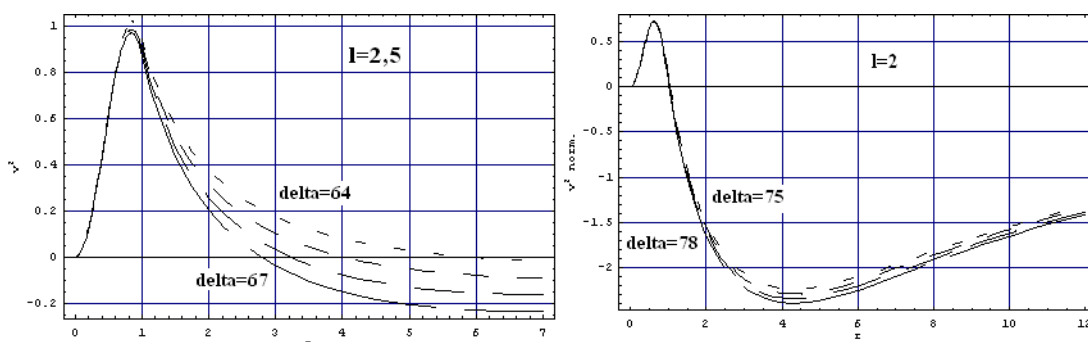
$\delta$ -Werte lauten:

|          |       |       |       |       |        |        |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $l$      | 1,75  | 2     | 2,5   | 3     | 3,5    | 4      |
| $\delta$ | 25,65 | 33,51 | 52,36 | 75,40 | 102,63 | 134,04 |

$\alpha = 1$  ist der kritische Wert, oberhalb dessen flache Rotationskurven entstehen. Für höhere  $\delta$ -Werte (niedrigere Polytropenamplituden) wirkt die veränderte polytrope Dichteverteilung nicht mehr stark genug um die Dynamik der Kugel so zu verändern, daß die Rotationskurven flach bleiben. Mit etwas höheren Polytropenamplituden  $\alpha$  werden die Kurven zu hoch. Das steht im Einklang mit der Interpretation der physikalischen Bedeutung von  $\alpha$  als ein Parameter, der zum Gleichgewicht zwischen Anziehungs- und Repulsionskräften führen soll (siehe Abschnitt 5.6.1). Größere Polytropenamplituden führen zu höheren Bindungszuständen, sodaß höhere Tangentialgeschwindigkeiten möglich sind. Dabei verflachen die Kurven höherer Reichweiten  $l$  bei größeren Abständen  $r_f \approx 2 \cdot l$ . Zu niedrige  $\alpha$ -Werte ergeben Kurven unterhalb der NEWTONSchen Kurven. Ungebundene Zustände (für  $r > R$ ) ergeben sich bei  $\alpha \approx 0,8$ . Für  $\alpha \lesssim 0,8$  werden die Geschwindigkeitsquadrate negativ, also wirkt der polytrope Druck durch die veränderte Dichteverteilung nicht bindend genug. Die Kopplung wird



22: Normierte Rotationskurven für  $\alpha \approx 1$  ( $\delta = 51, 52, 53, 54$ ) mit  $l = 2, 5$  und für  $\alpha = 1$  für verschiedene Reichweiten  $l = 1, 75, l = 2, l = 2, 5, l = 3, l = 4$  (auf  $R$  normiert).



23: Normierte Rotationskurven für  $\alpha \lesssim 0, 8$  für  $\delta = 64, 65, 66, 67$  und  $l = 2, 5$  und  $\delta = 75, 76, 77, 78$  mit  $l = 2$  (auf  $R$  normiert).

antibündend, wie man an dem  $\xi$ -Feld im Abschnitt 5.6.1 sehen kann.

Ungebundene Zustände ergeben sich unterhalb von  $\alpha = 0, 8$ ; zugehörige Parameter sind:

|          |       |       |       |       |        |        |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $l$      | 1,75  | 2     | 2,5   | 3     | 3,5    | 4      |
| $\delta$ | 32,07 | 41,89 | 65,45 | 94,25 | 128,28 | 167,55 |

### 6.2.3 Die Rotationskurven im teilweise linearisierten Modell der homogenen Kugel mit singulärer Zentralmasse

- Rotationsgeschwindigkeit mit singulären Zentralmassen:

Das Quadrat der Tangentialgeschwindigkeit nach Gl. (441) aus Abschnitt 5.7, mit einer singulären Zentralmasse  $M_S$  in einer homogenen Kugel konstanter Dichteverteilung im nichtrelativistischen Fall  $p \ll \rho c^2$ , lautet:

im Innenraum ( $r \leq R$ ):

$$v_i^2 = \frac{MG}{R} \left\{ \frac{r^2}{R^2} - \frac{l^2}{R^2} \left( \frac{R}{r} + \frac{l}{r} \right) \left( \sinh \frac{r}{l} - \frac{r}{l} \cosh \frac{r}{l} \right) - \left( a - \frac{1}{3} \right) \frac{M_S}{M} \left[ e^{-r/l} \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) - \frac{R}{r} \right] \right\} \quad (453)$$

$$= v_{iH} + v_{iS},$$

im Außenraum ( $r > R$ ):

$$v_a^2 = \frac{MG}{R} \left\{ \frac{R}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{l}{R} \right)^2 \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) \left[ \left( 1 + \frac{l}{R} \right) (1 - e^{-R/l}) + \frac{l}{R} e^{-r/l} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) \right] - \frac{M_S}{M} \left( a - \frac{1}{3} \right) \left[ \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) e^{-r/l} - \frac{R}{r} \right] \right\} \quad (454)$$

$$= v_{aH} + v_{aS}. \quad (455)$$

Die Geschwindigkeit besteht aus einem ‘‘homogenen’’ Anteil  $v_H$  und einem herrührend aus der ‘‘singulären’’ Masse  $v_S$ . Für eine Diskussion des Ergebnisses kann man die Diskussion des linearisierten Modells der homogenen Kugel als Grundlage nehmen, da sie genau für den  $v_{aH}$ -Anteil gilt.

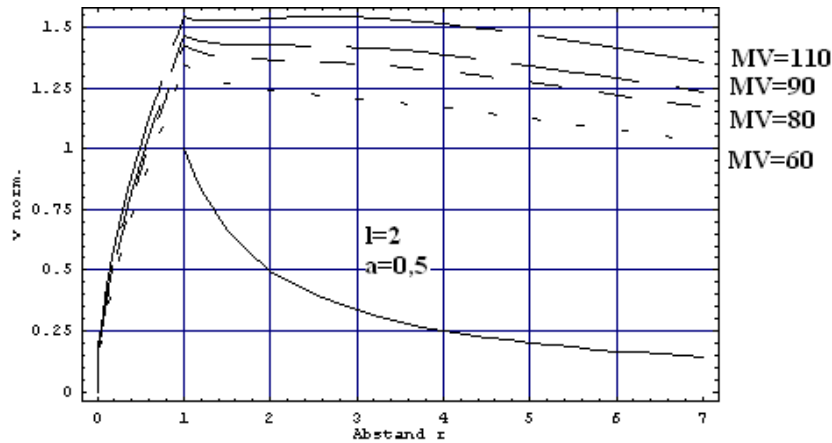
Die Kopplungskonstante des YUKAWA-Terms muß für eine Abflachung der Rotationskurven negativ sein. Das kann sie aber (im Falle  $M_S \neq 0$ ) nur, wenn  $a > 1/3$  gilt, also für steife Materie (siehe die Untersuchung der Massenverhältnissen für ungebundene Zustände unter Abschnitt 6.3<sup>65</sup>). Das ist der Fall für ein isotropes Strahlungsfeld oder für steife Materie (‘stiff matter’) ( $a = 1$ ).

Der ‘‘singuläre’’ Term der Tangentialgeschwindigkeit bewirkt, daß hohe  $l$ -Werte zu niedrigeren Rotationsgeschwindigkeiten führen. Das heißt, der ‘‘singuläre’’ Term erhöht den Werten mehr, je kleiner die HIGGS-Reichweite  $l$  als Parameter gewählt werden kann. Für höhere  $l$ -Werte stehen die Kurven immer näher aneinander und näher an denjenigen nach der ART, insbesondere für niedrige Massenverhältnisse  $M_S/M$ .

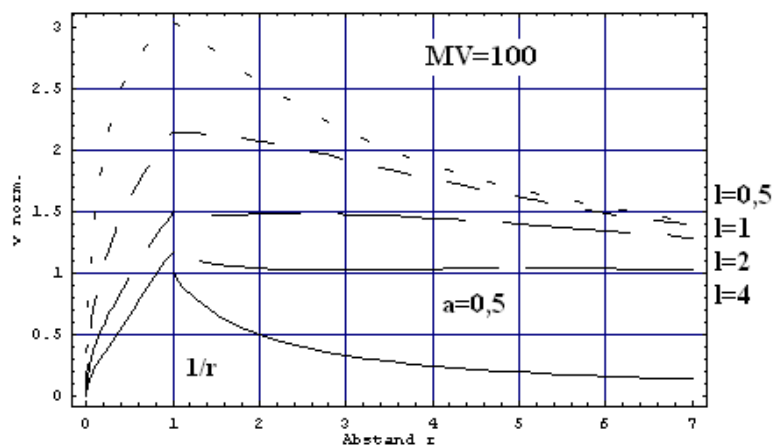
Für  $a = 0,5$  und  $l = 2$  ist ein Massenverhältnis größer als 70 nötig um verflachte Rotationskurven zu erreichen. Im Falle eines Massenverhältnisses von 100 erhält man verflachte Rotationskurven nur mit einer Reichweite von  $l = 2$  bis  $l = 4$ . Das heißt, daß die Reichweite ungefähr gleich dem Galaxiendurchmesser sein sollte.

Für  $a = 1$  führen mit  $l = 2$  bereits Massenverhältnissen größer oder gleich 20 zu verflachten Rotationskurven. Für  $a = 1$  und  $M_S/M = 20$  zeigt sich die beste Abflachung

<sup>65</sup>Den Grund dafür sieht man schon in der Higgsfeldgleichung  $\xi'' + \frac{2}{r}\xi' - \frac{1}{l^2}\xi = -\frac{8\pi G}{3}(\rho - 3p)$ . Somit wirkt  $p \simeq a\rho$  mit  $a < 1/3$  bindend. Man kann auch sehen, daß ein nichtverschwindender nichtsingulärer Druck zu einer Änderung der gravitativen Kopplung führen kann. Auch im Falle der polytropen Kugel mit  $\gamma = 2$  ergibt sich diese Änderung der Kopplung.



24: Normierte Rotationsgeschwindigkeit der homogenen Kugel mit Reichweite  $l = 2$  und  $a = 0,5$  und verschiedenen Massenverhältnissen  $M_S/M = MV$ .

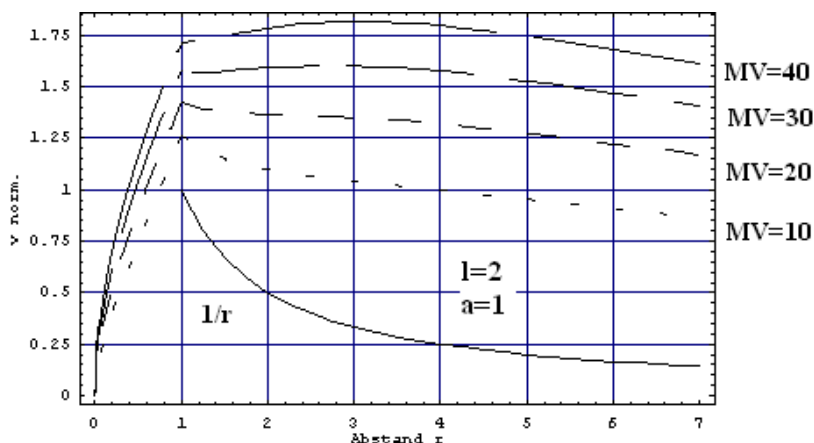


25: Normierte Rotationsgeschwindigkeit der homogenen Kugel mit Massenverhältnis  $M_S/M = MV = 100$  und verschiedenen Reichweiten  $l$ .

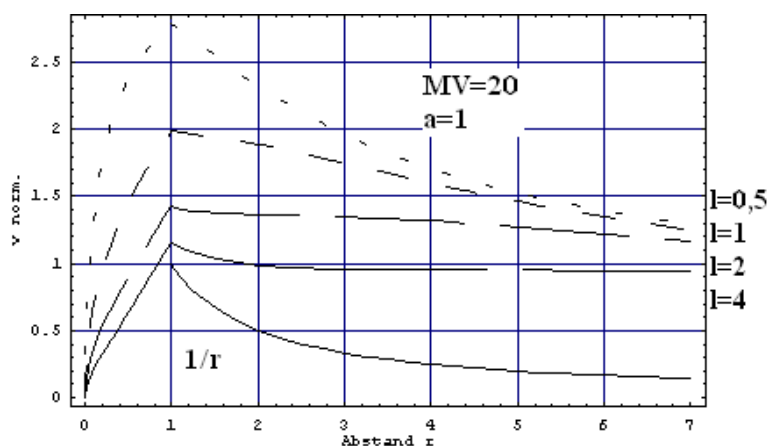
bei  $l \approx 2$  bis 4. Dabei scheint eine Reichweite von  $l = 2,5$  bis  $l = 3$  am besten zu sein, mit  $20 \lesssim M_S/M \lesssim 25$ .

- Zusammenfassend: Die singuläre Kopplung:  
Für den Fall einer singulären Masse gilt also:

- Der  $M_S$ -Anteil hebt den Wert der Rotationsgeschwindigkeit an, solange  $a > 1/3$  gilt.
- Das Higgsfeld wirkt in kurzen Abständen zusätzlich bindend. Diese Bindung ist abhängig von der Steifheit der Materie.
- Massen- und Reichweiten-Verhältnisse:  
Die innere Rotationskurven ( $r \leq R$ ) besitzen, wie auch NEWTONsch, die empirische Form. Außen ( $r > R$ ) kriegt man flache Rotationskurven nur bei bestimmten  $R/l$ -Werten und Massenkoeffizienten  $M_S/M$ . Diese Massenverhältnisse sind für



26: Normierte Rotationsgeschwindigkeit der homogenen Kugel mit Reichweite  $l = 2$  und  $a = 1$  und verschiedenen Massenverhältnisse  $M_S/M = MV$ .



27: Normierte Rotationsgeschwindigkeit der homogenen Kugel und  $a = 1$  und Massenverhältnisse  $M_S/M = MV = 20$  für verschiedene Reichweiten  $l$ .

höhere  $l$ -Werte kleiner wählbar, mit Druckparameter  $a = 0,5$  von der Größenordnung

$$\frac{M_S}{M} = 60 - 100, \quad a = 0,5, \quad (456)$$

insbesondere für Werte  $R/l = 0,5$  ( $R/l = 1$  ist z.B. dort schon zu klein).

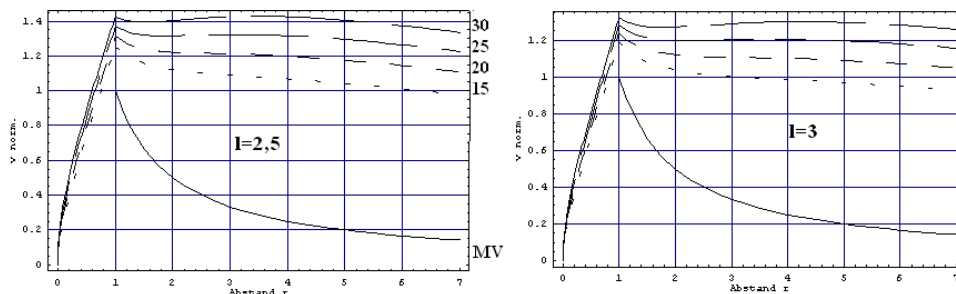
Mit  $a = 1$  und immer noch insbesondere mit  $R/l = 0,5$  (oder  $R/l = 1/3$ ), läßt sich der zur flachen Rotationskurve nötige Massenquotient erniedrigen, und zwar auf

$$\frac{M_S}{M} = 10 - 40, \quad a = 1. \quad (457)$$

Die genaue Daten kann man durch Anfitzen an die experimentellen Daten angeben.

– Extreme Zentralmassen und die Spiralgalaxien:

Extreme Zentralmassen von 10 bis 40 Galaxiemassen  $M$  entsprechen stark konzentrierten Massenanhäufungen im Zentrum der Galaxien die mehrere Ordnungen



28: Normierte Rotationsgeschwindigkeiten für  $15 \leq M_S/M \leq 30$  und  $l = 2, 5$  und  $l = 3$  mit  $a = 1$ .

der Galaxiemasse  $M$  besitzen. Solche Massenanhäufungen können sehr kleine Bereiche innerhalb der “Galaxienkugel” sein. Die Vorstellung solcher ist nicht abwegig, schon allein da Untersuchungen an galaktischen Zentren zeigen, daß im Galaxienkern ungewöhnlich große Massen konzentriert sind. In der elliptischen Galaxie M 87 sind Anzeichen für ein Zentralobjekt von  $10^9$  Sonnenmassen gefunden worden. Auch im Andromeda-Nebel mehren sich Hinweise auf ein kompaktes Zentrum [56]. Auch aus dem Zentrum der Milchstraße kriegt man Anzeichen auf solche Massen, deren Natur noch unklar ist, aber bis jetzt so aussehen, als ob sie Schwarze Löcher, Neutronensterne oder Braune Zwerge wären, da sie relativ zu der Masse nur geringe Lichtausstrahlung besitzen. Die nötigen Massen innerhalb des homogenen Modells in der HSTT sind aber ungewöhnlich hoch im Vergleich zu der Vorstellung in der NEWTONschen und EINSTEINschen Mechanik (und sind nach dem polytropen Modell -also bei Verdichtung der gewöhnlichen Galaxienmasse ins Zentrum- (Abschn. 5.6 und 6.2.2) von nicht so großer Relevanz in der Dynamik, da verflachte Rotationskurven ohne Annahme extremer Massenverhältnisse im Galaxienkern möglich sind).

Die Masse, als Quelle des Higgsfeldes, wirkt nicht direkt durch das Gravitationspotential  $\nu$ , da  $\xi$  als reziproke Gravitationszahl  $G^{-1}$  die gravitative Kopplung, d.h.  $G$  im Galaxienzentrum verschwinden läßt. Somit wirkt das Higgsfeld auf einer Weise, die auch zu der MOND- und FLAG- Vorstellung führt ( $G$  kleiner bei großen Kräften, d.h. hohe Beschleunigungen, bzw. es entsteht eine antigravitative Wechselwirkung, die  $G$  schwächt).

Die Vorstellung nötiger großer Massenquotienten im Zentrum der Galaxien anstatt Prozente der Galaxienmassen um flache Rotationskurven beschreiben zu können ist innerhalb der HSTT vertretbar und verständlicher als Bruchteile solcher extremer Masse. Diese wirkt nach außen nur sehr schwach und wirkt dadurch in der NEWTONschen Mechanik als ob sie vom Betrag her viel kleiner wäre. Außerdem beschreibt dieses Galaxienverhalten mit sehr großen Massen  $M_S > M_{Galaxie}$  im Zentrum denselben Verhalten wie in dem Sonnensystem zu sehen ist: die Sonne ist um dieselbe Größenordnung wie hier massiver als sein umgebendes “Halo” aus Planeten, Meteoriten u.s.w.

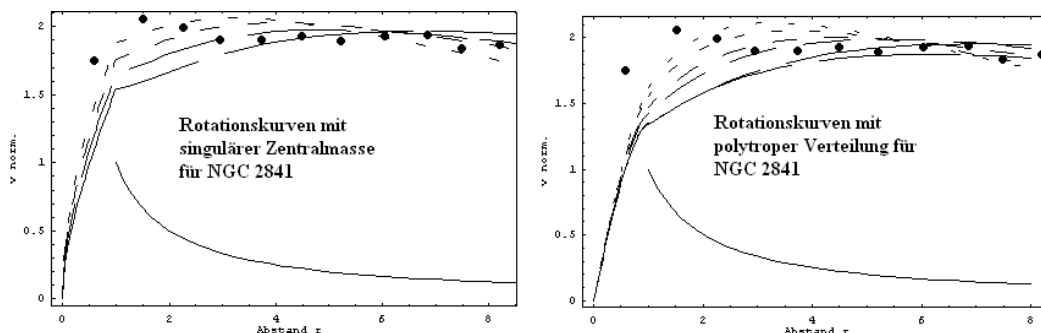
### 6.2.4 Die Rotationskurven und Vergleich mit empirischen Daten

Die Rotationskurven der vorigen Kapitel werden an die experimentelle Daten angepaßt<sup>66</sup>. Genommen werden die Rotationskurven aus 6.2.2 und 6.2.3. Die experimentellen Punkten werden normiert auf die theoretische NEWTONsche Kurve, die am höchsten bei  $r = R$  liegt und dann wie  $1/r$  abfällt. Danach werden die Parameter des jeweiligen Modells angepaßt um die empirische Kurve zu realisieren. Dadurch werden die physikalischen Parameter bestimmt<sup>67</sup>:

1. Rotationskurven und empirische Daten im homogenen Modell und polytropen Modell ohne Kern:

- Spiralgalaxie NGC 2841:

Aus den Kurven erkennt man eine angemessene Anpassung an den experimentel-



29: Normierte Rotationskurven mit singularer Masse  $M_S$  steifer Materie  $a = 1$  und Polytropenindex  $\gamma = 2$  verglichen mit den experimentellen Punkten aus [56] für die Galaxie NGC 2841. Die durchgestrichene Linie entspricht der NEWTONschen Geschwindigkeit. Länger gestrichelte Linien entsprechen längeren Reichweiten  $l$  (homogen:  $l = 2, l = 2,5, l = 3, l = 4$ . Polytrop:  $l = 1,75, l = 2, l = 2,5, l = 3, l = 3,5, l = 4$ ).

len Daten, besonders bei Reichweiten  $2 \leq l < 4$ . Benutzt wurden die Daten (im homogenen Fall):

|         |    |     |    |     |
|---------|----|-----|----|-----|
| $l$     | 2  | 2,5 | 3  | 4   |
| $M_S/M$ | 53 | 65  | 75 | 100 |

und für die Kurven polytroper Dichteverteilung:

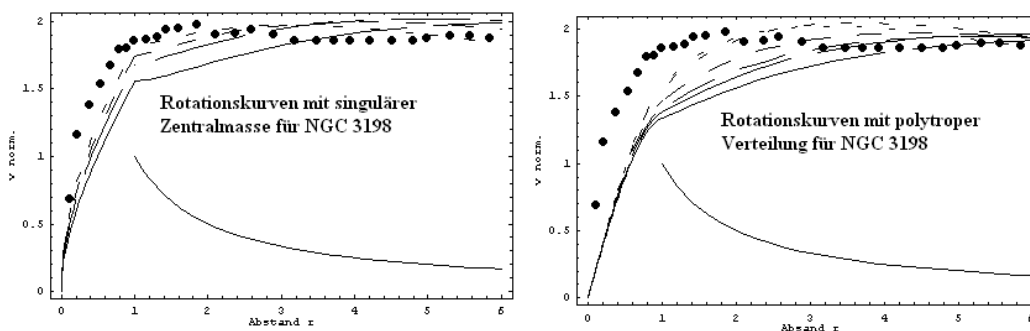
|          |      |      |      |       |     |     |
|----------|------|------|------|-------|-----|-----|
| $l$      | 1,75 | 2    | 2,5  | 3     | 3,5 | 4   |
| $\delta$ | 15   | 20,9 | 30,5 | 53,95 | 80  | 104 |

Beide Modelle zeigen im Bereich der Kugeloberfläche niedrige Geschwindigkeitswerte im Vergleich zu den experimentellen, die auch durch hohe Massen  $M$  nicht kompensiert werden können, da sonst die Tangentialgeschwindigkeit im Außenraum zu hoch liegen. Dabei liegen die Werte des Modells mit singularer Zentralmasse merklich höher als im polytropen Fall ohne Kern. Im polytropen Fall gehören alle  $\delta$ -Werte zu einer Polytropenamplitude  $\alpha \gtrsim 1$ , und zwar  $\alpha \approx 1,5$  (mit Normierung auf dem Radius  $R$ ). Also etwas oberhalb des kritischen Wertes  $\alpha = 1$ , aber noch innerhalb des erwarteten Bereiches für  $\alpha$ .

<sup>66</sup>Der Radius  $R$  wird dabei als konstant für die verschiedenen Galaxien angenommen. Die Varianz von  $R$  für die verschiedenen Galaxien widerspiegelt sich in einer verschiedenen Reichweite  $l$ , die für den Abgleich mit den experimentellen Daten nötig ist.

<sup>67</sup>Dabei behält man die Normierung auf  $R$ .

- Spiralgalaxie NGC 3198:



30: Normierte Rotationskurven mit singulärer Masse  $M_S$ , bzw. polytrop mit  $\gamma = 2$  verglichen mit den experimentellen Punkten aus [31] für die Galaxie NGC 3198. Die durchgezogene Linie entspricht der NEWTONSchen Geschwindigkeit. Länger gestrichelt entspricht höhere Reichweiten  $l$  (homogen:  $l = 2, l = 2, 5, l = 3, l = 4$ . Polytrop:  $l = 01, 75, l = 2, l = 2, 5, l = 3, l = 3, 5, l = 4$ ).

Aus den Kurven erkennt man eine angemessene Anpassung an die experimentellen Daten. Benutzt wurden die Daten (im homogenen Fall):

|         |    |     |    |     |
|---------|----|-----|----|-----|
| $l$     | 2  | 2,5 | 3  | 4   |
| $M_S/M$ | 48 | 63  | 78 | 103 |

und für die Kurven polytroper Dichteverteilung:

|          |       |    |     |    |       |     |
|----------|-------|----|-----|----|-------|-----|
| $l$      | 1,75  | 2  | 2,5 | 3  | 3,5   | 4   |
| $\delta$ | 15,75 | 21 | 36  | 55 | 77,25 | 106 |

Durch singuläre Zentralmassen erreicht man Werte der Tangentialgeschwindigkeit, die im Bereich der experimentellen Daten liegen, auch nahe der Kugeloberfläche  $r = R$ . Polytrop ist das nahe  $r = R$  nicht der Fall, wobei die experimentellen Punkte für  $r \geq 2R$  mit der gegebenen Reichweite  $l = 2, 5$  bis  $l = 3$  richtig wiedergegeben werden. Die zu  $\delta$  zugehörigen Polytropenamplituden  $\alpha$  liegen alle bei  $\alpha \approx 1, 5$ .

- Spiralgalaxie NGC 6314:

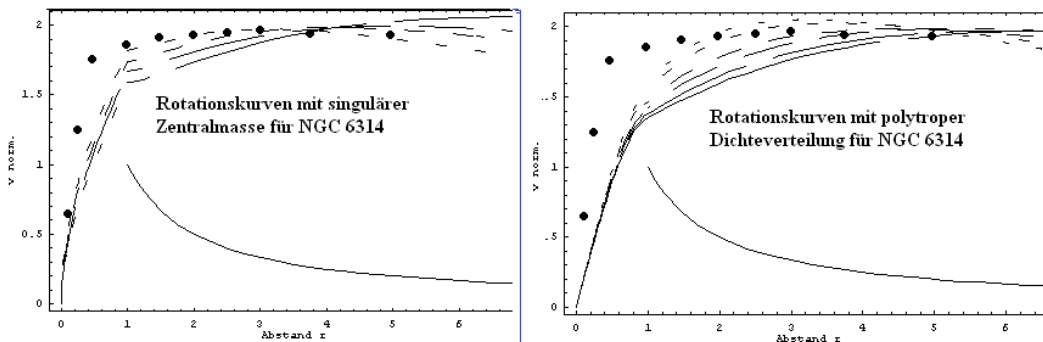
Aus den Kurven erkennt man eine angemessene Anpassung an die experimentellen Daten, besonders bei Reichweiten  $2 \leq l \leq 3$ . Benutzt wurden die Daten (für die homogene Dichteverteilung):

|         |    |     |    |     |
|---------|----|-----|----|-----|
| $l$     | 2  | 2,5 | 3  | 4   |
| $M_S/M$ | 48 | 62  | 76 | 110 |

und für die Kurven polytroper Dichteverteilung:

|          |      |      |      |    |       |     |
|----------|------|------|------|----|-------|-----|
| $l$      | 1,75 | 2    | 2,5  | 3  | 3,5   | 4   |
| $\delta$ | 15,5 | 21,2 | 35,8 | 54 | 77,25 | 104 |

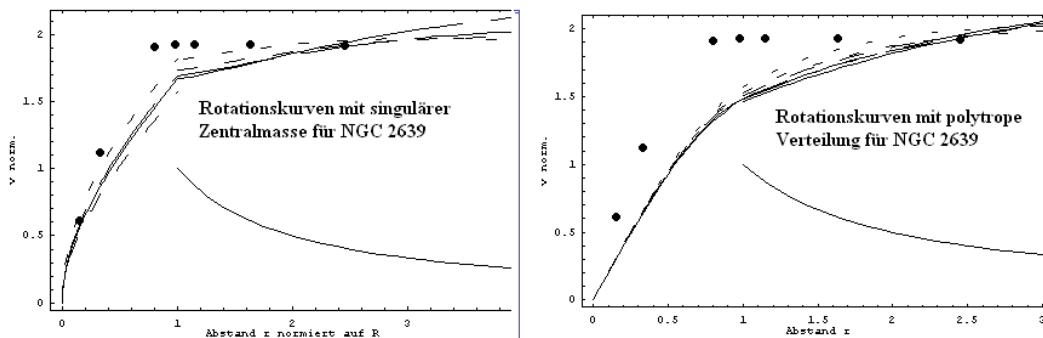
Durch singuläre Zentralmassen erreicht man Werte der Tangentialgeschwindigkeit, die im Bereich der experimentellen Daten liegen, auch nahe der Kugeloberfläche  $r = R$ . Polytrop ist das nahe  $r = R$  nicht der Fall, wobei die experimentellen Punkte für  $r \geq 2R$  mit der Reichweite  $l = 2$  bis  $l = 3$  richtig wiedergegeben werden. Für das Modell singulärer Zentralmasse ergibt sich die beste Anpassung mit  $l = 2$ .



31: Normierte Rotationskurven mit Einheitsradius mit singulärer Masse  $M_S$ , bzw. polytrop mit  $\gamma = 2$  verglichen mit den experimentellen Punkten aus [31] für die Galaxie NGC 6314. Die durchgezogene Linie entspricht der NEWTONSchen Geschwindigkeit. Länger gestrichelte Linien entsprechen höheren Reichweiten  $l$ .

Die zu  $\delta$  zugehörige Polytropenamplituden  $\alpha$  im Modell polytroper Dichteverteilung ohne Kern liegen alle bei  $\alpha \approx 1,5$ .

• Spiralgalaxie NGC 2639:



32: Normierte Rotationskurven mit mit singulärer Masse  $M_S$ , bzw. polytrop mit  $\gamma = 2$  verglichen mit den experimentellen Punkten aus [31] für die Galaxie NGC 6314. Die durchgezogene Linie entspricht der NEWTONSchen Geschwindigkeit. Länger gestrichelte Linien entsprechen höheren Reichweiten  $l$  (homogen:  $l = 2, l = 2,5, l = 3, l = 4$ . Polytrop:  $l = 1,75, l = 2, l = 2,5, l = 3, l = 3,5, l = 4$ ).

Es gilt für den homogenen Fall:

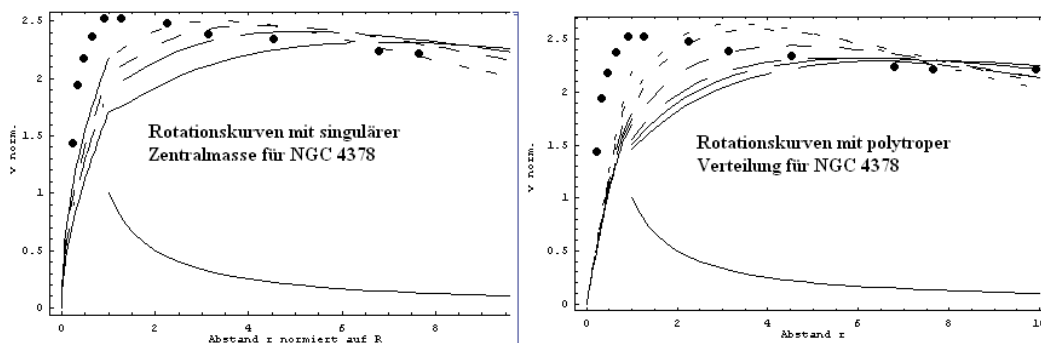
|         |    |     |    |     |
|---------|----|-----|----|-----|
| $l$     | 2  | 2,5 | 3  | 4   |
| $M_S/M$ | 48 | 62  | 80 | 130 |

und für die Kurven polytroper Dichteverteilung:

|          |       |      |       |      |     |    |
|----------|-------|------|-------|------|-----|----|
| $l$      | 1,75  | 2    | 2,5   | 3    | 3,5 | 4  |
| $\delta$ | 15,75 | 21,5 | 42,25 | 50,5 | 69  | 92 |

Im homogenen Modell mit singulärer Zentralmasse erreicht man eine angemessene Anpassung der Kurven an die experimentellen Daten mit  $l = 2$ . Im polytrophen Fall erreicht man das nicht, wobei die Kurven bei längeren Abständen den reellen ähneln könnten. Man sieht, wie die Kurven niedriger Reichweite  $l$  abfallen, sodaß eine Verflachung der Rotationskurven nach längeren Distanzen vorkommen könnte.

- Spiralgalaxie NGC 4378:  
Die Daten lauten für die singuläre Zentralmasse im Modell der homogen verteilten



33: Normierte Rotationskurven mit singulärer Masse  $M_S$ , bzw. polytrop mit  $\gamma = 2$  verglichen mit den experimentellen Punkten aus [31] für die Galaxie NGC 6314. Die durchgezogene Linie entspricht der NEWTONschen Geschwindigkeit. Länger gestrichelte Linien entsprechen höheren Reichweiten  $l$  (homogen:  $l = 2, l = 2, 5, l = 3, l = 4$ . Polytrop:  $l = 1, 75, l = 2, l = 2, 5, l = 3, l = 3, 5, l = 4$ ).

Dichte der Kugen:

|         |    |     |     |     |
|---------|----|-----|-----|-----|
| $l$     | 2  | 2,5 | 3   | 4   |
| $M_S/M$ | 80 | 98  | 113 | 140 |

und für die Kurven polytroper Dichteverteilung:

|          |      |    |     |      |     |    |
|----------|------|----|-----|------|-----|----|
| $l$      | 1,75 | 2  | 2,5 | 3    | 3,5 | 4  |
| $\delta$ | 11,4 | 16 | 29  | 46,8 | 67  | 92 |

Im Falle der singulären Zentralmasse ergibt sich die beste Anpassung an die experimentellen Daten mit einer Reichweite von  $l = 2$  bis  $l = 2, 5$ . Dabei liegen die Werte nahe der Kugeloberfläche relativ niedrig. Im polytropen Fall ergibt sich die beste Anpassung mit  $l = 2, 5$ , wobei die Werte nahe der Oberfläche noch niedriger liegen als im homogenen Fall mit singulärer Zentralmasse.

## 2. Fazit:

Man erkennt eine Verflachung in den Rotationskurven gegenüber den theoretischen NEWTON-Kurven. Diese Verflachung entsteht durch die zusätzliche gravitative Kopplung mit dem Higgsfeld, hervorgerufen durch den Druck oder die dadurch veränderte Dichteverteilung. Das  $\xi$ -Feld bewirkt eine Erhöhung der Tangentialgeschwindigkeiten, auch außerhalb ( $r > R$ ) der sphärischen Massenverteilung. Dem Anstieg der Rotationskurven folgt ein relativ flacher Bereich, der der Anpassung an die experimentellen Daten nach für eine  $\gamma = 2$ -polytrope Dichteverteilung entsteht. Eine Wiedergabe der Beobachtung erfolgt schon früher mit einem Peak an der Kugeloberfläche, wenn man von einer homogenen Kugel mit einer singulären Zentralmasse ausgeht. Die Verflachung mit dem besten Fit an die experimentellen Daten geschieht im  $\gamma = 2$ -polytropen Modell ohne Kern mit einer Polytropenamplitude  $\alpha \approx 1, 5$ . Dabei zeigen sich die besten Daten für eine Reichweite des Higgsfeldes i.A. zwischen  $l = 2, 5$  bis  $l = 3$ . Die nötigen Massenverhältnissen zwischen Zentralmasse und Galaxiemasse liegen im "homogenen" Fall zwischen  $M_S/M = 60$  und  $M_S/M = 80$ , außer bei NGC 4378 mit  $M_S/M = 80$  für  $l = 2$ . Diese Massenverhältnisse sind innerhalb der HSTT tragbar, da

$M_S$  nur indirekt über das Higgsfeld koppelt und antigravitative Wechselwirkungen im inneren der homogenen Kugel solche im Außenraum  $r > R$  nur schwach bemerkbar machen (siehe Diskussion über die Zentralmasse in Abschnitt 6.2.3). Somit scheinen die Kurven im homogenen Modell den empirischen Daten recht gut wiederzugeben, obwohl eine so hohe Verdichtung der Masse nicht nötig ist, Grund wieso eine  $\gamma = 2$ -polytrope Verdichtung der Galaxienmasse auch zu guten Ergebnissen führt.

### 6.3 Betrachtung ungebundener Zustände für die homogene Kugel

Bei einer homogenen massiven Kugel mit einer singulären Zentralmasse ergeben sich nach Kapiteln 5.7 und 6.2.3 negative Geschwindigkeitsquadrate, wenn  $a < 1/3$  gilt (eine unsteife (Staub)/antisteife Zentralmasse). Diese entsprechen ungebundenen Zuständen. Die Zustände werden für gewisse Distanzen wieder gebunden: die Grenze zwischen reellen und imaginären Geschwindigkeiten ist sehr abhängig von den Parametern der Masse und Reichweite  $l$  des Higgsfeldes, wie auch vom Druckparameter  $a$ . Diese Parameter werden untersucht, indem die Massenverhältnisse und Parameter gesucht werden, die nötig sind, damit ungebundene Zustände entstehen. Das heißt, das gravitative Verhalten des Higgsfeldes für unsteife Materie wird diskutiert. Dabei werden auch die nötigen Massenverhältnisse verglichen, die sich in [54] und der hiesigen Arbeit ergeben.

Es gilt

$$v = v_H + v_S \quad (458)$$

mit

$$v_H^2 = \frac{G}{R} M f_1, \quad v_S^2 = -\frac{G}{R} M_S f_2 = -\frac{G}{R} (a - \frac{1}{3}) M_S \tilde{f}_2. \quad (459)$$

Das heißt innerhalb Näherung in [54] (Index  $G$ ), damit ein negatives Geschwindigkeitsquadrat überhaupt möglich ist:

Innen ( $r \leq R$ ):

$$\begin{aligned} M f_{1G} &= M \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( 1 + \frac{l}{R} \right) \frac{l}{R} e^{-R/l} \left( \cosh \frac{r}{l} - \frac{l}{r} \sinh \frac{r}{l} \right) \right] \\ &< M_S \left( a - \frac{1}{3} \right) \left[ e^{-r/l} \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) - \frac{R}{r} \right] = M_S f_{2G}, \end{aligned} \quad (460)$$

Außen ( $r > R$ ):

$$\begin{aligned} M f_{1G} &= M \left[ \frac{R}{r} + \left( \frac{l}{R} \right)^3 \left( \frac{R}{l} \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right) \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) e^{-r/l} \right] \\ &< M_S \left( a - \frac{1}{3} \right) \left[ \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) e^{-r/l} - \frac{R}{r} \right] = M_S f_2. \end{aligned} \quad (461)$$

Innerhalb der hiesigen linearen Näherung:

Innen ( $r \leq R$ ):

$$\begin{aligned} M f_1 &= M \left[ \frac{R^2}{r^2} - \frac{l^2}{R^2} \left( \frac{R}{r} + \frac{l}{r} \right) \left( \sinh \frac{r}{l} - \frac{r}{l} \cosh \frac{r}{l} \right) \right] \\ &< M_S \left( a - \frac{1}{3} \right) \left[ e^{-r/l} \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) - \frac{R}{r} \right] = M_S f_2, \end{aligned} \quad (462)$$

Außen ( $r > R$ ):

$$\begin{aligned} M f_1 &= M \left[ \frac{R}{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{l}{R} \right]^2 \cosh \frac{R}{l} - \sinh \frac{R}{l} \right] \left( \left( 1 + \frac{l}{R} \right) (1 - e^{-R/l}) + \frac{l}{R} e^{-r/l} \left( 1 + \frac{r}{l} \right) \right) \\ &< M_S \left( a - \frac{1}{3} \right) \left[ \left( \frac{R}{r} + \frac{R}{l} \right) e^{-r/l} - \frac{R}{r} \right] = M_S f_2. \end{aligned} \quad (463)$$

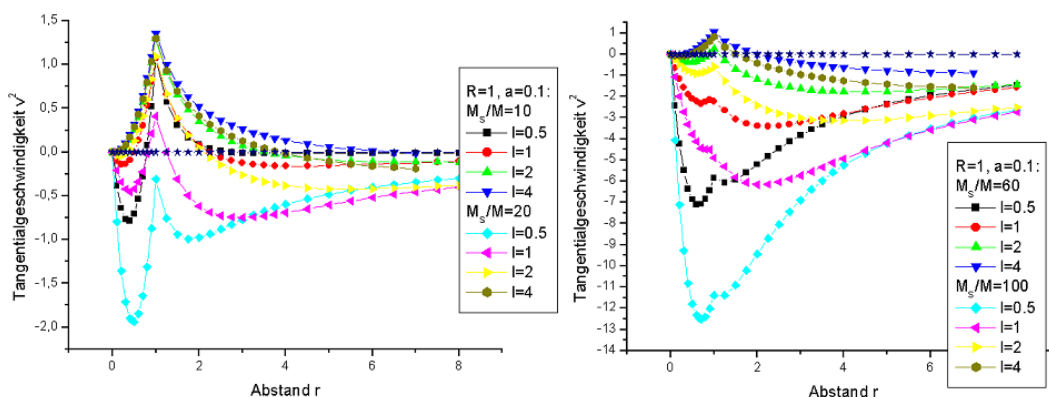
Es gilt:

- $M \geq 0$

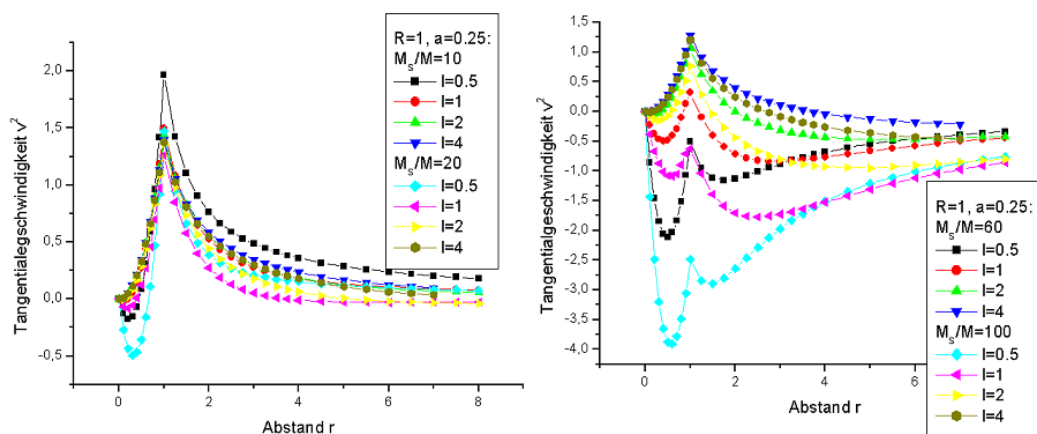
- $M_S \geq 0$
- Nötig:  $f_2 > f_1$ !

Eine verschwindende singuläre Masse  $M_S = 0$  führt immer zu reellen Geschwindigkeiten. Also ist  $M_S \neq 0$  notwendig, obwohl nicht hinreichend. Es gilt  $0 \leq f_1 < 1$  und  $f_2 < 0$  für  $a > 1/3$ . Mit  $a \rightarrow 0$  strebt  $f_2$  ein Grenzwert an, der kleiner wird, je größer die Reichweite  $l$  gewählt werden kann.  $f_2$  erreicht dann ein Maximum nahe  $r = R$  und sein Wert wird kleiner für größer werdendes  $r$ , strebt aber seinerseits einen Grenzwert zu. Für gleichbleibenden  $a$ -Werte wird  $f_2$  größer, je kleiner  $l$  wird. Im unendlichen  $r \rightarrow \infty$  wird  $l$  unwichtig und nur  $a$  (und die Masse) wird für die ungebundenen Zustände von Bedeutung. Nahe des massiven Körpers sind die maximalen Werte von  $f_2$  höher, je kleiner  $l$  ist. Für sehr kleine  $a$ -Werte wird  $f_2$  größer, scheint aber einen Grenzwert bei  $f_2 \approx 0,33$  zu besitzen. Die Lage Maxima bewegt sich leicht in  $r$ -Richtung mit zunehmendem  $l$ . Die Maxima findet man immer um  $r \approx R$ , unabhängig von  $a$ .

Die nötigen Massenverhältnisse kann man durch



34: Tangentialgeschwindigkeit mit  $a = 0,1$  und verschiedene Massenverhältnisse  $M_S/M$  und Reichweiten  $l$ . Höhere Massenverhältnisse und niedrige Reichweiten  $l$  führen zu mehr ungebundene Zustände.

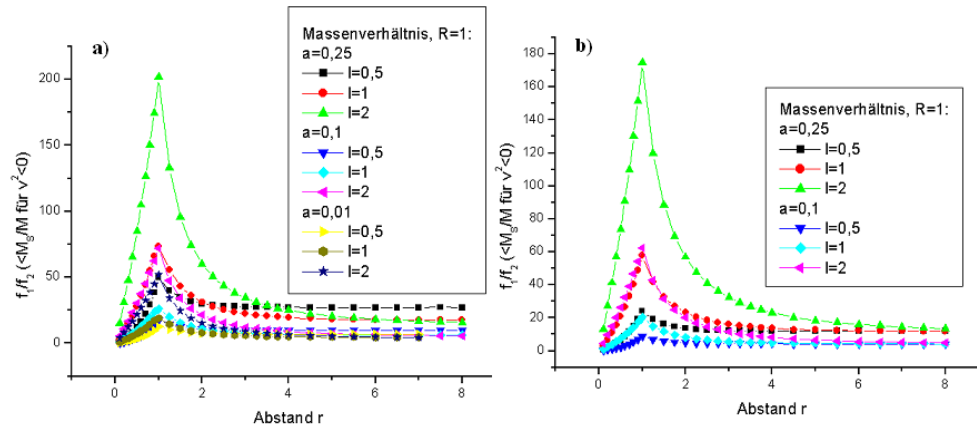


35: Tangentialgeschwindigkeit mit  $a = 0,25$  und verschiedene Massenverhältnisse  $M_S/M$  und Reichweiten  $l$ . Höhere Massenverhältnisse und niedrige Reichweiten  $l$  führen zu mehr ungebundene Zustände.

$$\frac{f_1}{f_2} < \frac{M_S}{M} \quad (v^2 < 0) \quad (464)$$

abschätzen. Für kleine  $f_1$  und hohe  $f_2$  sind solche Zustände möglicher, und für größere singuläre Massen  $M_S$  im Vergleich zu der Masse  $M$ . Also sind kleine  $a$ -Werte am besten geeignet oder kleine  $l$ -Werte. Sonst bleibt  $f_1$  nahezu  $1/r$ -fallend (für große  $r$ . In der Ferne fast unabhängig von  $l$ ). Die Werte (bei nicht zu großen Abständen  $r$ ) sind größer (in [54] kleiner), je kleiner  $l$  ist. Bei großen (in [54] kleinen)  $l$ -Werten werden die  $f_1$ -Werte immer ähnlicher.

Die nötigen Massenverhältnissen liegen am höchsten an der Kugeloberfläche. Hohe Higgs-



36:  $f_1/f_2$  für  $a = 0,25$ . Ungebundene Zustände ergeben sich oberhalb der Kurve. a) ergibt sich aus der hierigen Näherung, b) nach [54].

massen ermöglichen auch mehrere ungebundene Zustände.

Es folgt eine Tabelle mit den ungefähren, auf  $R$  normierten  $r$ -Werten, bei denen das Geschwindigkeitsquadrat negativ wird, sowohl hier wie nach den Ergebnissen in [54]. Es sind die  $r$ -Intervalle, in denen  $v^2$  negativ wird (es handelt sich dabei um  $v^2/(GMR^3)$  mit  $G = \frac{3}{4}G_N$ ). In  $[x; y]$  stehen die Intervalle, in denen  $v^2$  negativ wird:<sup>68</sup>

<sup>68</sup>Hier mit Betrachtung bis  $r = 8R$ .

|      | $a$  | $M_S/M$ | $l$ | $r$ -Intervale        |
|------|------|---------|-----|-----------------------|
|      | 0,25 | 10      | 0,5 | [0,1; 0,4]            |
| [54] |      |         |     | [0,2; 0,6]            |
|      |      |         | 1,0 | -                     |
| [54] |      |         |     | [0,1; 0,2]            |
|      |      |         | 2,0 | -                     |
| [54] |      |         |     | -                     |
|      | 0,25 | 20      | 0,5 | [0,1; 0,5]            |
| [54] |      |         |     | [0,1; 0,9], [1,25; 8] |
|      |      |         | 1,0 | [0,1; 0,3], [3,75; 8] |
| [54] |      |         |     | [0,1; 0,4], [1,75; 8] |
|      |      |         | 2,0 | [0,1], [5,5; 8]       |
| [54] |      |         |     | [0,1], [5; 8]         |
|      |      |         | 4,0 | -                     |
| [54] |      |         |     | -                     |
|      | 0,25 | 60      | 0,5 | -                     |
| [54] |      |         |     | -                     |
|      |      |         | 1,0 | [0,1; 0,8], [1,25; 8] |
| [54] |      |         |     | [0;8]                 |
|      |      |         | 2,0 | [0,1; 0,4], [2,25; 8] |
| [54] |      |         |     | [0,1; 0,4], [2, 8]    |
|      |      |         | 4,0 | [0,1], [3,75; 8]      |
| [54] |      |         |     | [0,1], [3,75, 8]      |
|      | 0,25 | 100     | 0,5 | [0;8]                 |
| [54] |      |         |     | [0;8]                 |
|      |      |         | 1,0 | [0;8]                 |
| [54] |      |         |     | [0;8]                 |
|      |      |         | 2,0 | [0,1; 0,5], [1,5; 8]  |
| [54] |      |         |     | [0,1; 0,6], [1,5; 8]  |
|      |      |         | 4,0 | [[0,1], [2,75; 8]     |
| [54] |      |         |     | [0,1], [3; 8]         |

|      | $a$ | $M_S/M$ | $l$ | $r$ -Intervale        |
|------|-----|---------|-----|-----------------------|
|      | 0,1 | 10      | 0,5 | [0,1; 0,7], [2,75; 8] |
| [54] |     |         |     | [0;8]                 |
|      |     |         | 1,0 | [0,1; 0,4], [2,25; 8] |
| [54] |     |         |     | [0,1; 0,2], [3,5; 8]  |
|      |     |         | 2,0 | [0,1], [3,75; 8]      |
| [54] |     |         |     | [0,1; 0,2], [3,5; 8]  |
|      |     |         | 4,0 | [6,5; 8]              |
| [54] |     |         |     | [0,1; 0,3], [3,5; 8]  |
|      | 0,1 | 20      | 0,5 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0;8]                 |
|      |     |         | 1,0 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0,1; 0,9], [1,25; 8] |
|      |     |         | 2,0 | [0,1; 0,3], [2,25; 8] |
| [54] |     |         |     | [0,1; 0,3], [2,25; 8] |
|      |     |         | 4,0 | [5; 8]                |
| [54] |     |         |     | [0,1], [4,5; 8]       |
|      | 0,1 | 60      | 0,5 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0;8]                 |
|      |     |         | 1,0 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0;8]                 |
|      |     |         | 2,0 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0,1; 0,9], [1,25; 8] |
|      |     |         | 4,0 | [0,1], [3,75; 8]      |
| [54] |     |         |     | [0,1; 0,3], [2,25; 8] |
|      | 0,1 | 100     | 0,5 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0;8]                 |
|      |     |         | 1,0 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0;8]                 |
|      |     |         | 2,0 | [0;8]                 |
| [54] |     |         |     | [0,2; 0,4], [2,5; 8]  |
|      |     |         | 4,0 | [0,1; 0,4], [1,75; 8] |
| [54] |     |         |     | [0,1], [4,5; 8]       |

Die nötigen Massenverhältnisse für ungebundene Zustände sind für hohe  $l$ -Werte und für größere  $a$ -Werte höher. Sie sind am größten für  $r \approx R$  und für  $r \rightarrow 0$  streben sie verschwindende Werte an, da die Geschwindigkeit im Zentrum Null ist.

Bei großen auf  $R$ -normierten Abständen  $r$  ab circa 10 sind die für imaginäre Geschwindigkeiten in [54] nötigen Massenverhältnisse  $M_S/M$  fast gleich für  $l = 0, 5, 1$  und  $2$ , und zwar

$$\frac{M_S}{M} \gtrsim 12 \quad (a = \frac{1}{4} \text{ und } r \text{ groß}), \quad (465)$$

$$\frac{M_S}{M} \gtrsim 4,2 \quad (a = 0,1 \text{ und } r \text{ groß}). \quad (466)$$

Nach der hiesigen Näherung ist die Größenordnung dieselbe für große Abstände  $r$  wie nach [54]. An der massiven Kugeloberfläche reichen die nötigen Massenverhältnisse bis zu mindestens ca.  $M_S/M \approx 50$  (24 nach [54]) für  $a = 0,25$  und  $M_S/M \approx 18$  (8 nach [54]) für  $a = 0,1$ . Für den Fall ungebundener Zustände für  $r \leq R$  existiert allerdings auch die ho-

homogene Kugel nicht, im Falle positiver Drucke. Man sieht leicht, daß für antisteife Materie nur sehr kleine Massenquotienten nötig sind um solche ungebundene Zustände im innen der homogenen Kugel zu erreichen.

Es folgen einige der Massenverhältnisse, abhängig von  $l$  und  $a$ , damit das Maximum von  $v^2$  bei  $r = R$  negativ wird:

| $a$  | $l$ | $M_S/M$ | $M_S/M[19]$ |
|------|-----|---------|-------------|
| 0,25 | 0,5 | 50      | 24          |
|      | 1,0 | 73      | 58          |
|      | 2,0 | 202     | 175         |
|      | 4,0 | 655     | 612         |
| 0,10 | 0,5 | 18      | 9           |
|      | 1,0 | 26      | 21          |
|      | 2,0 | 72      | 62          |
|      | 4,0 | 234     | 219         |
| 0,01 | 0,5 | 13      | 6           |
|      | 1,0 | 19      | 15          |
|      | 2,0 | 52      | 45          |
|      | 4,0 | 159     | 158         |

Man sieht, daß die Größenordnung der nötigen Massenverhältnisse nach der hiesigen und GESSNERS [54] Näherung dieselbe ist. Nur sind die Werte nach hiesiger Näherung höher. Für hohen Reichweiten wird der Unterschied aber kleiner.

## 7 Kosmologie und die Friedmann-Robertson-Walker Metrik

*Die Kosmologie wird betrachtet und das Problem der Quintessenz eingeführt. Weitere Probleme der Standard-Kosmologie werden erläutert und die Robertston-Walker-Metrik und kosmologische Modelle eingeführt. Das Friedmann-Modell innerhalb der HSTT wird statisch gelöst und die nichtstatische Lösung durch Perturbation und numerisch bearbeitet, insbesondere im Hinblick auf Inflation und Quintessenz.*

### 7.1 Das Standard-Modell

Die Aufgabe, die Struktur und Entwicklung des gesamten Universums zu ergründen, scheint eine hoffnungslose Angelegenheit zu sein, wenn man bedenkt, daß man nur einen räumlich und zeitlich äußerst kleinen Teil davon direkt beobachten kann, abgesehen davon, daß das Universum nicht von Außen zu betrachten ist. Die einzige Möglichkeit scheint somit darin zu bestehen, einfache Grundannahmen zu machen, deren Implikationen dann mit Hilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie ART oder Verallgemeinerungen davon mit den uns zur Verfügung stehenden beobachtenden Mitteln zu überprüfen.

Trotzdessen ist es bis jetzt gelungen, einiges über das Universum zu verstehen und einige Grundannahmen zu machen, die im **kosmologischen Standardmodell** als KOSMOLOGISCHES PRINZIP (siehe RW-Metrik) zusammengefaßt werden:

- *Homogenität* des Universums: Das Universum ist auf großen Skalen gleichförmig; kein Punkt ist ausgezeichnet (kopernikanisches Prinzip).
- *Isotropie*: Das Universum sieht in jeder Richtung gleich aus.<sup>69</sup>.

Diese Annahmen besagen auch, daß es gefordert wird, daß das Universum wirbelfrei ( $rot\vec{v} = 0$ ) und scherfrei ist. Beide sind ziemlich gut belegt, insbesondere durch die Hintergrundstrahlung und die nahezu konstante Dichte im für uns beobachtbaren Universum, obwohl eine gewisse Anisotropie zu bestehen scheint, mit einer gewissen Abhängigkeit von der Bewegung und Orientierung des Planetensystems [21]. Diese Annahmen rechtfertigen ein analoges Vorgehen wie in der kinetischen Gastheorie, bleiben aber als Postulate, die eine höhere Theorie erklären sollte<sup>70</sup>.

Die moderne Kosmologie geht davon aus, daß das Universum im sog. *Big-Bang* oder Urknall entstand und zunächst aus einem extrem dichten und heißen Plasma relativistischer Teilchen bestand, in dem Quarks, Leptonen und Eichbosonen mitsamt ihren Antiteilchen im thermischen Gleichgewicht waren.

Es kam kurz nach dem Urknall (so die meisten Modellen) (etwa nach  $10^{-35}$  s) zur Expansion (*Inflation*) des Universums, einer im GUTHs ursprünglicher Theorie hohen exponentiellen Aufblähung innerhalb kürzester Zeit, die aus einer nichtverschwindenden kosmologischen Konstante oder Funktion (oder skalarem Feld) resultieren könnte und die das Horizont-Problem erklären könnte, wobei das beobachtbare Universum sich als nur ein äußerst kleiner

<sup>69</sup>Im Endeffekt wird die Homogenität von der Isotropie impliziert.

<sup>70</sup>Versuche, ein isotropes Universum aus einem anisotropen zu bekommen, gab es schon seit langer Zeit. DICKE und PEBBLES versuchten 1965 das zu tun, indem bei einem gewissen Wert Anisotropie, der Heliumüberfluß erniedrigt wird, und die Anisotropie verschwindet bevor es zu den astronomischen Objekten kommt. HOYLE und NARLIKAR gaben andererseits 1966 zu, daß die Isotropie vielleicht gar nicht nötig wäre und daß nur das beobachtbare Universum diese Eigenschaften besitze [108]. Auch könnte das Universum immer homogen und isotrop gewesen sein, was aber eher unnatürlich erscheint [115]. Außerdem muß genau erklärt werden, wie es aus solchen Voraussetzungen zu all den anisotropen Formationen im Universum kam.

Bruchteil des gesamten Weltalls entpuppen könnte [60].<sup>71</sup>

Als die Temperatur abfiel, etwa auf  $10^{13} K$ , ca.  $10^{-5} s$  nach dem Urknall, konnten sich stabile Hadronen bilden, und das Universum bestand praktisch ausschließlich aus Neutrinos, Antineutrinos, Photonen, Elektronen, Positronen, Myonen, Antimyonen und einer kleinen Menge von Protonen und Neutronen im thermischen Gleichgewicht.

Als die Teilchen-Antiteilchen-Paare nicht mehr erzeugt werden konnten (bei Temperaturen um  $5 \cdot 10^{10} K$ ), zerstrahlten sie und die Wechselwirkung der Neutrinos mit anderen Teilchen wurde so klein, daß sie aus dem Gleichgewicht entkoppelten und sich nach etwa 2s praktisch frei entwickelten.

Nach 4s zerstrahlten zu meisten Teilen Elektronen und Positronen in Photonen.

Nach etwa 3 Minuten konnten sich komplizierte stabile Atomkerne bilden, und nach etwa  $4 \cdot 10^5$  Jahren und mit  $T \approx 4000 K$  kam es zur sog. *Rekombination*, d.h. zur Bildung von neutralem Wasserstoff aus Protonen und Elektronen. Da die Photonen danach nicht mehr an freien Elektronen oder Ionen gestreut werden konnten, kam es so zu einer Abkopplung der Photonen; das Universum wurde "durchsichtig". Das All müßte heute also mit einer Schwarzkörperstrahlung von Photonen gefüllt sein, die sich seit der Rekombination frei entwickelten (die Hintergrundstrahlung, vorhergesagt von G. GAMOV 1948 und zufällig entdeckt von A. A. PENZIAS und R. W. WILSON 1965). Dieser Mikrowellenhintergrund ist über den gesamten Himmel praktisch isotrop (bis auf eine relative Abweichung von etwa  $10^{-5}$ ), was mit dem kosmologischen Prinzip wiederum im Einklang steht.

Nach der Rekombination konnten sich kleine Inhomogenitäten zu Galaxien und Sternen entwickeln. Nach etwa  $10^5$  Jahren wurde dann der Energiebeitrag der Baryonen größer als der der Strahlung. Das Universum wurde Staub-dominiert, was es bis heute geblieben ist [114].

| Zeit             | $a[cm]$           | $T[K]$         | $\rho[g/cm^3]$ | Wesentliche Phys. Vorgänge                         |
|------------------|-------------------|----------------|----------------|--|
| $10^{10} J_r$    | $10^{28}$         | 2,7            | $10^{-30}$     | Entstehung der Sterne, Galaxien, Materie dominiert |
| $10^6 J_r$       | $10^{25}$         | $3 \cdot 10^3$ | $10^{-21}$     |  |
|                  |                   |                |                | Zeitalter der Strahlung                            |
| $2 \cdot 10^3 s$ | $10^{20}$         | $3 \cdot 10^8$ | $10^{-2}$      | Kernreaktionen, Entstehung der leichten Elemente   |
| 2s               | $3 \cdot 10^{18}$ | $10^{10}$      | $10^8$         |  |
|                  |                   |                |                | Leptonenpaare in der thermischen Strahlung         |
| $10^{-4} s$      | $3 \cdot 10^{16}$ | $10^{12}$      | $10^{16}$      | Hadronen in der thermischen Strahlung              |
| $10^{-36} s$     |                   | $10^{28}$      |                | Nichterhaltung der Baryonenzahl?                   |
|                  |                   |                |                | Teilchenerzeugung durchs Schwerefeld?              |
| $10^{-44} s$     |                   | $10^{32}$      |                | Quanteneffekte der Gravitation?                    |

Epochen der Kosmologie mit Skalenparameter  $a$  ([104], S.147).

### 7.1.1 Die Quintessenz

Nach dem Urknall-Modell sollte das Universum expandieren, was experimentelle Ergebnisse auch belegen. Trotzdem sollte man erwarten, daß die Expansion durch die Anziehungskraft der massiven Objekte gebremst werden sollte. Ein Problem der modernen Kosmologie besteht dabei, daß man insbesondere an Supernovae des Typs Ia mit Rotverschiebungen  $z \gtrsim 1$

<sup>71</sup>Die so hohe und kurzzeitige Inflation, die es nach der Theorie von GUTH (sog. *Alte* Inflation) gibt, zeigt sich aber im Endeffekt inkompatibel mit der Realität.

eine beschleunigte Expansion des Universums festgestellt hat. Solche Supernovae eignen sich wegen der genau definierten absoluten Helligkeit besonders gut für Entfernungsbestimmungen. Das scheinbare Helligkeits-Entfernungsdiagramm führt dann auf die beschleunigte Expansion (HUBBLE-Plot).

Für eine solche Beschleunigung braucht man eine weitere Kraft, die entgegen der Gravitation wirkt. Diese wird heutzutage **Quintessenz** genannt oder in Analogie zur Dunklen Materie auch **Dunkle Energie**, weil diese Energie antigravitierend wirkt. Es wird oft versucht sie zu erklären als die Energie des Vakuums und/oder als kosmologische Konstante, die ja z.B. in die HSTT antigravitativ wirkt und bei der Symmetriebrechung aus dem Higgspotential folgt (also kein *ad hoc* Konstrukt wie in der ursprünglichen EINSTEINschen Theorie durch Hinzunahme einer additiven kosmologischen Konstante  $\Lambda_0$ ). Allerdings fällt diese kosmologische Konstante zu groß aus und muß reduziert werden (kosmologische Funktion). In dieser Form wäre sie dann auch mit der Dunklen Materie DM gekoppelt, da wie hier auch gezeigt, die Dunkle Materie aus dem Higgspotential folgt. Also könnte man innerhalb einer Untersuchung der Quintessenz zumindest einen Teil der CDM als Folge der antigravitativen Wirkung der kosmologischen Funktion erklären, was man als fehlende Masse beobachten würde, aber auch als Änderung der Dynamik in großen Skalen (FLAG [100, 102]) oder auch in einer Änderung bei bestimmten Beschleunigungsverhältnissen wie in der MOND-Theorie [87, 88] interpretieren könnte.

## 7.2 Die RW-Metrik

Nach dem Standard-Modell wird die Dynamik des Universums durch die FRIEDMANN-Gleichungen beschrieben. Diese sind die Grundgleichungen (isotroper und homogener) kosmologischer Modelle, die Expansion aufweisen und schon aus dem Jahre 1922 stammen, obwohl erst 1929 E. HUBBLE zeigte, daß das Universum gar nicht statisch ist. Sie ergeben sich als nichtstatische Lösungen der (HILBERT-)EINSTEIN-Gleichungen und unterscheiden sich durch räumliche Krümmung und Annahmen über die kosmologische Konstante  $\Lambda$ . Fast alle gehen davon aus, daß das Universum vor etwa 10 Milliarden Jahren aus dem Urknall entstand.[104]<sup>72</sup> Die ROBERTSON-WALKER (RW)- Modelle beruhen auf der sog. (FRIEDMANN-) ROBERTSON-WALKER-Metrik, unter der Annahme der Homogenität und Isotropie des Universums auf großen Skalen (**Kosmologisches Prinzip**) und daß sich die Galaxien im Universum wie Teilchen einer idealen Flüssigkeit bewegen (**WEYL-Postulat**), sodaß das Universum als eine *ideale Flüssigkeit* angesehen wird.

Die ROBERTSON-WALKER-Metrik wird beschrieben durch

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)([1 - kr^2]^{-1}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)), \quad (467)$$

hier mit der Signatur  $(+, -, -, -)$  und dem Raumwinkelement  $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$ . Wählt man  $r = r(\chi; k)$  mit dem Winkel  $\chi$ :

$$r = \begin{cases} \sin\chi & ; k = +1 \\ \chi & ; k = 0 \\ \sinh\chi & ; k = -1 \end{cases},$$

<sup>72</sup>Andere Modelle expandierender Universen, wie das sog. "Steady-state"-Modell, erstmals konzipiert von BONDI und GOLD 1948, benötigen eine kontinuierliche Entstehung neuer Materie, können aber die existierende nichtverschwindende Temperatur der Hintergrundstrahlung nicht erklären [108]. Auch nicht die eines "Kalten Urknalls" von ZEL'DOVICH (1963), die im Gegenteil zur ursprünglichen Urknalltheorie von GAMOW *et al.* keine unendliche sondern eine verschwindende Temperatur für den Anfang des Universums annimmt (und den Heliumüberfluß nicht erklären kann) [108, 115].

so wird

$$dr = \begin{cases} \cos\chi d\chi \\ d\chi \\ \cosh\chi d\chi \end{cases}$$

und

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \begin{cases} d\chi^2 \\ d\chi^2 \\ d\chi^2 \end{cases}.$$

So bekommt man

$$ds^2 = dt^2 - a^2[d\chi^2 + f^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)] \quad (468)$$

mit dem *Skalenfaktor*  $a = a(t)$ <sup>73</sup>, der *Krümmungskonstante*  $k$ <sup>74</sup> und

$$f = f(\chi; k) = \begin{cases} \sin\chi & , k = 1 \\ \chi & , k = 0 \\ \sinh\chi & , k = -1 \end{cases},$$

mit formal  $r = f(\chi)$ .  $a$  ist dabei ein Maß, wie sich die Distanzen mit der Zeit entwickeln und hängt demnach nur von der Zeit, d.h., der isotrope Raum kann im Laufe der Zeit expandieren oder kontrahieren.

### 7.2.1 Die Krümmungskonstante

Die Krümmungskonstante  $k$  beschreibt den Raumtypus der Krümmung des Universums und ist nach geeigneter Skalierung entweder -1, 0 oder 1. Im Fall der Krümmungskonstante  $k = 1$  hat man ein geschlossenes, endliches Universum, für  $k = 0$  ein unendliches, euklidisches flaches Universum, und für  $k = -1$  ein negativ gekrümmtes, hyperbolisches Universum unendlicher Ausdehnung. Im  $k = 1$ - und  $k = -1$ -Fall ist die Bedeutung von  $a(t)$  geometrisch als Krümmungsradius. Für  $k = 0$  hat  $a(t)$  nur eine kinematische Bedeutung wie in der NEWTONschen Kosmologie und kann willkürlich auf  $a(t_0) = 1$  normiert werden.

Die Diskussion über die Raumkrümmung ist keineswegs ausdiskutiert. FLIESSBACH [47] sagt dazu:

*“Bei der Bestimmung einer eventuellen Krümmung unseres dreidimensionalen Raums sind wir in einer ähnlichen Situation wie die Plattkäfer: Wir können die Krümmung (im Prinzip) messen, sie uns aber nicht durch Einbettung in einen vierdimensionalen Raum vorstellen”.*

Die scheinbare Helligkeit  $l = l(D)$  der Galaxien ist für  $k = 0$  reziprok abhängig vom Quadrat des Abstands  $D$  der Galaxie zu dem Beobachter, und die Anzahl  $N(l)$  aller Galaxien mit scheinbarer Helligkeit kleiner als  $l$  wäre abhängig von  $D^3$ , sodaß

$$N(l) \propto l^{-3/2}, \quad \text{für } k = 0,$$

<sup>73</sup>In der Literatur oft auch  $\mathcal{R}$  oder sogar  $R$  oder  $C$ .

<sup>74</sup>Oft  $\varepsilon$ .

wobei  $N(l)$  im Prinzip experimentell ermittelt werden kann. Eine Abweichung des oberen Verhältnisses ließe auf die Krümmung des dreidimensionalen Raums schließen [47].

Problematisch ist, daß solche Messungen nur über einen Teil des Universums Information geben, nämlich das von uns beobachtbare (und nach dem Inflationären Modell wäre dies nur ein kleiner Teil davon). Eine Ausdehnung solcher Information auf den gesamten Kosmos könnte zu weit gehen, insbesondere weil gekrümmte Räume in kleinen Skalen flach aussehen können.<sup>75</sup> Außerdem sind z.B. zum  $N - l$ -Verhältnis (wenn man darüber die Krümmung ermitteln will) zahlreiche Korrekturen anzubringen, da die Verteilung der absoluten Helligkeit von Galaxien, die kosmologische Rotverschiebung und die Evolution des Kosmos ( $\dot{a} \neq 0$ ) berücksichtigt werden sollten [47].

Eine Lösung des Flachheitsproblem wird von GUTH in [60] erklärt, indem er eine Folge perspektivischer Zeichnungen einer sich aufblähenden Kugel illustriert.

*“Eine flache Raumgeometrie im inflationären Szenario läßt sich auf einfache und natürliche Weise erzeugen.[...] Im Modell vom inflationären Universum wird der Weltraum beim raschen Ausdehnen nahezu flach. Er expandiert bis heute gerade so schnell, daß er nicht vorzeitig wieder zusammenstürzt”.*

### 7.2.2 Weitere Probleme der Kosmologie und die Inflation

Eine fertige und vollkommene Theorie der Kosmologie, sollte außer den schon von den Standard-Theorien richtig wiedergegebenen Ergebnissen, noch die Existenz der Dunklen Energie erklären und Antworten auf folgende Probleme geben:

- Das *Horizont-Problem*<sup>76</sup>: Das Universum wächst nach der Standard-Theorie so schnell, daß es zu Gebieten kommt, die nie mit den anderen im Universum wechselgewirkt haben, sodaß es nicht zu einem Gleichgewicht hätte kommen können und die Homogenität des Universums nach dem Standard-Urknall-Modell nur als Zufall gegeben wäre (jedes Gebiet hätte dann beim Urknall die gleichen Eigenschaften bekommen müssen wie die anderen).
- *Flachheitsproblem*: Die Krümmung des Universums ist nach mehreren Ergebnissen ziemlich nah an Null, sodaß dem Anschein nach das Universum fast flach sein könnte. Nur wenn  $k = 0$  und  $\Omega - 1 = \frac{\rho - \rho_c}{\rho_c} \equiv 0$  gilt (mit der sog. kritischen Dichte  $\rho_c$ ) wäre das Universum exakt flach. Das bedürft aber eines Dichte-Parameters der schon sehr früh perfekt eingestellt gewesen wäre, was eigentlich unwahrscheinlich ist [17].
- *Magnetische Monopole*: Die Quantenmechanik und die Eichtheorie sagen die Existenz von Monopolen voraus, die mit einem niedrigen Annihilationsquerschnitt noch heute vorhanden sein sollten. Sie wären z.T. Konsequenzen der Symmetriebrechung, indem während des Phasenübergangs Blasen der neuen Phase entstehen. Auf großen Skalen sind verschiedene Higgsfeldwerte zu erwarten ([20], S.16). Sie sind aber noch nicht nachgewiesen worden.

Die Lösung dieser Probleme bedingt oft Inflation (d.h. daß das Universum früher viel kleiner war als im Standard-Urknall-Modell)<sup>77</sup>. Die erste Erklärung anhand der Inflation ist

<sup>75</sup>Aus einem Gespräch mit Prof. Dr. H. Dehnen.

<sup>76</sup>Unter Horizont versteht man Punkte, die mit Lichtgeschwindigkeit gerade noch erreichbar sind.

<sup>77</sup>Sonst wäre Kontakt der Teilchen in Zeiten vor dem Urknall denkbar.

das Modell von GUTH [60]. Diese sog. *Alte Inflation* ist aber nach [3] ungünstig, da sie u.a. eine zu hohe Homogenität im Universum mit sich tragen würde [43].

Das Prinzip der *Alten Inflation* ist, daß vor dem Phasenübergang, gegeben durch Symmetriebrechung (siehe Abschnitt 3.3), das Universum sehr heiß war mit  $T \gg T_x$ , adiabatisch expandierend mit  $T \sim 1/a$ .  $E_{pot}$  dominiert die Dynamik und das Higgsfeld ist im falschen Vakuum  $\phi = 0$  gefangen, wofür  $p = -\rho = -V(0)$  gilt, also  $\Lambda$  die führende Kraft ist. Es kommt deshalb zu einer exponentiellen Expansion (DESITTER-Epoche), bis das Higgsfeld durch Tunneln in  $\phi = v$  (wahres Vakuum) übergeht. Danach entstehen Blasen mit  $\phi = v$  in einem Meer aus  $\phi = 0$ , was zu einer inhomogenen Verteilung  $\phi(x)$  führt, weil diese Blasen kleiner sind als der HUBBLE-Abstand.

Um das Horizont- und Flachheitsproblem zu beheben, benötigt man eine Erhöhung der Entropie  $\Delta S \sim e^{2N}$  mit  $N \gtrsim 64$  mit einer Phasenübergangstemperatur  $T_x = 10^{17} GeV$ . Für solch eine Entropie-Maximierung wird eine Wiedererwärmung benötigt, was aber innerhalb der *Alten Inflation* nicht richtig funktioniert. ([20], S.34f)

Skalare Felder, deren wechselwirkende Bosonen eine Art YUAKAWAsche 5. Kraft ausüben [6] (sodaß man auch die Symmetriebrechung als Folge solch einer Kraft interpretieren könnte), tragen zur Expansion des Universums bei [83]. Das macht sie zu guten Kandidaten zur Erklärung der Inflation und der beschleunigten Expansion. Es gibt neue Modelle, insbesondere nach JBD-Theorien, die zur sog. *Neuen* oder *Chaotischen Inflation* führen, was von den Bedingungen an das skalare Feld abhängt. Bei diesen ist der Übergang nicht mehr instantan, sondern langsam. Man spricht von "slow rolling down" (langsames Runterrollen) von  $\phi$  in der Potentialkurve, mit  $\dot{\phi} \approx 0$ . Diese bedingen oft kein exponentielles Anwachsen des Universums mehr, da eine längere Inflationsphase aus einem (oft masselosen) Skalarfeld folgen würde (man spricht oft von den sog. *Inflaton* -Teilchen. Das Inflaton-Feld wäre in der HSTT gegeben durch  $\xi$  durch  $V(\phi) \triangleq \Lambda(\phi)$ ).

Die sog. *Neue Inflation* ist ein Phasenübergang 2. Ordnung, mit den Anfangsbedingungen

$$\phi \ll v \rightarrow v \quad (\text{Neue Inflation}), \quad (469)$$

mit einem konstanten Potential  $V(0)$  während der Inflation. Danach oszilliert  $\phi$  um  $\phi = v$  und die Energie in  $V(0)$  zerfällt durch Wiedererwärmung ([20], S.36ff).

Eine weitere Möglichkeit wäre die Existenz verschiedener Regionen im All, die mit unterschiedlichen Skalarwerte die richtige Inflation ergeben, was der Fall der sog. *Chaotischen Inflation* wäre [43]. In diesem Fall gibt es keine Anfangssingularität (Big Bang)<sup>78</sup> und als Anfangsbedingung gilt

$$\phi \gg v \rightarrow v \quad (\text{Chaotische Inflation}), \quad (470)$$

wieder mit langsamen Runterrollen von  $\phi$  im Potential ([20], S.42).

Die induzierte Gravitation ist gut für eine neue Art Inflation, indem die NEWTONSche Gravitationskonstante  $G$  induziert wird (vgl. ZEE [116] oder CEVANTES [20]). Dabei sind die verschiedenen Arten von Inflation weiterhin abhängig von den Anfangsbedingungen [2].<sup>79</sup> Soll außerdem noch das Universum nach der Inflation wiedererhitzen, so sollte es eine Kopplung des skalaren Feldes an die Materie geben [95] (was hier durch die nichtminimale Kopplung gegeben sein könnte).

<sup>78</sup>S. HAWKING und ELLIS zeigten 1968, daß unter bestimmten Bedingungen keine Singularitäten in der EINSTEIN-Theorie vorkommen müssen [64]. Unter der Voraussetzung negativer Drucke im Anfangsuniversum gibt es solche Fälle, wenn diese Drucke in der Wechselwirkung der Elementarteilchen ihre Ursache haben, z.B. durch starke hadronische Wechselwirkungen [25]. Ein DESITTER-Universum besitzt solche Drucke und die Wechselwirkung könnte durch die Anfangsbedingungen des skalaren Feldes realisierbar sein.

<sup>79</sup>In ACCETTAS *et al.* Modell nach ZEE bedingt "slow-over" oder *Neue Inflation*, eine Entwicklung von  $\phi = 0$  zu  $\phi = v$ ; *Chaotische* dagegen  $\phi \gg v$  zu  $\phi = v$ , wie auch innerhalb der HSTT.

In der HIGGS Skalar-Tensortheorie sind auch beide Arten Inflation möglich, wie von J. L. CERVANTES-COTA und H. DEHNEN [18, 19] untersucht wurde. *Neue Inflation* ist aber nur möglich für sehr spezielle Anfangsbedingungen ( $\xi/2 = \chi = -0,1509$ ), mit einer kurzen ersten Kontraktionsphase, nach der eine inflationäre Expansion automatisch folgt (sollten die Anfangsbedingungen nicht ganz zutreffen, so kontrahiert das Universum in eine Singularität, ohne daß es zur Expansion kommen kann). Im  $SU(5)$ -GUT ist die Masse des  $X$ -Bosons sehr groß und diese determiniert einen sehr großen Wert für die Kopplungskonstante der Gravitations-Teilchenphysik. Deswegen ist ein "slow rollover" in der Dynamik des Higgsfeldes nicht möglich in einem neu-inflationären Szenario. Eine *Chaotische Inflation* kriegt [20] problemlos, ohne "fine-tuning".

Die Problematik der Inflation ist eng gekoppelt an die des Horizont-Problems. Eine andere Lösung des Horizontproblems ergibt sich, wenn das Universum nicht mit einer Singularität beginnt, was quantenmechanische Gründe haben könnte. Somit käme es davor schon zur Kommunikation zwischen den jetzt entfernten Regionen des Alls.<sup>80</sup> Die Problematik des Horizonts und der Krümmung und des Flachheitsproblems wird hier unter der FRIEDMANN-ROBERTSON- WALKER-Metrik näher betrachtet, die Inflation insbesondere unter den Allgemeinen Eigenschaften des verallgemeinerten FRW-Modells näher erläutert.

---

<sup>80</sup>Ein Modell in die Richtung ist das sogenannte Prä- Urknall-Szenario von G. VENEZIANO *et al.*, 1991, das die sog. T-Parität (Äquivalenz der kleinen und großen Extradimensionen der Stringtheorie) mit der Zeit-Umkehr-Symmetrie vermischt und eine inflationäre Epoche "vor dem Urknall" (heftiger Übergang zwischen Beschleunigung und Verlangsamung) aufgrund der Zeitumkehr erklärt.[112] Zu untersuchen ist auch, ob es in der Natur nicht eine Maximaltemperatur  $T_{max}$  gibt, bei der es zu neuen Effekte kommen könnte, wie bei dem Phaseübergang chemischer Stoffe. Somit wären die Grundannahmen des Heißen Urknall- Modells zu verbessern. Mit einer HAGEDORN-Temperatur  $T_H = T_{max} \approx 1,9 \cdot 10^{12} K$  hieße es, daß eine weitere Erhöhung der Energie eines Substrats mit  $T_H$  zur Erzeugung weiterer Elementarteilchen führen würde [62]. Diese könnten zu primogänen, u.U. starken Wechselwirkungen beitragen und Anfangssingularitäten vermeiden [25]. Das würde zur Lösung des Horizont-Problems beitragen.

### 7.3 RW-Metrik und verallgemeinerte Friedmanngleichungen

Die FRW-Metrik lautet

$$g_{\mu\nu} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 f^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 f^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \tilde{g}_{ij} \end{pmatrix}$$

mit den zeitunabhängigen 3-dimensionalen Linienelementen  $\tilde{g}_{ij}$ . Sie ist zentralsymmetrisch und isotrop mit  $e^{\mu(t)} = e^{\lambda(t)} = a^2(t)$  (vgl. Gl. (93))<sup>81</sup>.

Die nichtverschwindenden Konnektionskoeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta 0}^{\mu} &= \frac{\dot{a}}{a} \delta^{\lambda}_{\nu} \\ \Gamma_{\beta\nu}^0 &= -\dot{a} a \tilde{g}_{ij}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \tilde{\Gamma}_{22}^1 = -f f_{|\chi}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \frac{f_{|\chi}}{f} \\ &= \Gamma_{13}^3 = \tilde{\Gamma}_{13}^3, \\ \Gamma_{33}^1 &= \tilde{\Gamma}_{33}^1 = \Gamma_{22}^1 \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{33}^2 &= \tilde{\Gamma}_{33}^2 = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \Gamma_{23}^3 &= \tilde{\Gamma}_{23}^3 = \cot \vartheta. \end{aligned} \quad (471)$$

Dabei besagt  $\tilde{\phantom{x}}$ , daß die Größe zeitunabhängig ist. Es gilt  $\tilde{g}_{ij} = 1$  für  $i = j = 1$ ,  $f^2$  für  $i = j = 2$  und  $f^2 \sin^2 \vartheta$  für  $i = j = 3$ .  $_{|\chi}$  entspricht der Ableitung nach der Koordinate  $\chi$ .  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  ist die HUBBLE-Expansionsrate, mit der HUBBLE-Konstante  $H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$  und das sog. HUBBLE-Alter  $T_0 = H_0^{-1}$  mit  $a_0$  und  $\dot{a}_0$  für das heutige Universum.

Die von Null verschiedenen Komponenten des RICCI-Tensors und der RICCI-Skalar sind

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}}{a} = R_0^0, \quad (472)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} - 2k) \tilde{g}_{11} \\ &= -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \Leftrightarrow R_1^1 = 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2}, \end{aligned} \quad (473)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \tilde{g}_{22} \\ &= -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) f^2 \Leftrightarrow R_2^2 = 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2}, \end{aligned} \quad (474)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \tilde{g}_{33} \\ &= -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) f^2 \sin^2 \vartheta \Leftrightarrow R_3^3 = 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2}, \end{aligned} \quad (475)$$

$$R = 6 \frac{\ddot{a}}{a} + 6 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}. \quad (476)$$

<sup>81</sup>Da  $\nu$  nicht von  $r$  abhängt ( $\frac{\partial \nu}{\partial r} = 0$ ), gilt Drehimpulserhaltung und das Universum wird wirbelfrei

Bei der FRW-Metrik ist für den Energie-Impuls- Spannungstensor aufgrund der Homogenität und Isotropie des Linienelements derjenige der idealen Flüssigkeit (102) zu verwenden:<sup>82</sup>

$$T_{\mu\nu} = (\varrho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

mit  $u^\mu = \delta_0^\mu$ .

So erhält man

$$T_{00} = \varrho, \quad T_{ij} = pa^2\tilde{g}_{ij}, \quad (477)$$

$$T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = T_\nu{}^\nu = \varrho - 3p. \quad (478)$$

Für die Zeit-Zeit-Komponente der Feldgleichung (58) erhält man

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi G(1 + \xi)^{-1}(\varrho - \frac{\hat{\Pi}}{3}[\varrho - 3p]) + (1 + \xi)^{-1}(\frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2 + \ddot{\xi}). \quad (479)$$

Für  $\hat{\Pi} = 1$  ist die linke Seite von Gl. (479)

$$(1 + \xi)^{-1}[8\pi G(\frac{2}{3}\varrho + p) + (\frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2 + \ddot{\xi})].$$

Für  $\hat{\Pi} = 0$ :

$$(1 + \xi)^{-1}[8\pi G\varrho + (\frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2 + \ddot{\xi})].$$

Die Higgsfeldgleichung (59) lautet hier

$$\ddot{\xi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \frac{1}{l^2}\xi = \hat{\Pi}\frac{8\pi G}{3}(\varrho - 3p). \quad (480)$$

Setzt man (480) in die Feldgleichung, so bekommt man die **erste verallgemeinerte Friedmanngleichung**:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = (1 + \xi)^{-1}[\frac{8\pi G}{3}\varrho + (\frac{1}{4l^2}\xi^2 - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi})]. \quad (481)$$

Sie ist unabhängig davon, ob  $\hat{\Pi}$  Null oder Eins ist, ist also für beide Formen der HSTT formal gleich.

Die Raum-Raum-Komponenten der Feldgleichung (58) für die ROBERTSON-WALKER-Metrik führen auf dieselbe Differentialgleichung:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = (1 + \xi)^{-1}[-8\pi G(p + \frac{\hat{\Pi}}{3}[\varrho - 3p]) + (\frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2 + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi})]. \quad (482)$$

Für  $\hat{\Pi} = 1$  ergibt das für die rechte Seite von (482)

$$(1 + \xi)^{-1}[-\frac{8\pi G}{3}\varrho + (\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2)]$$

<sup>82</sup>Im Falle des Higgsmechanismus ohne erzeugbare HIGGS-Teilchen ist wieder statt  $T_{\mu\nu}$  der effektive EIST  $\hat{T}_{\mu\nu}$  zu nehmen.

und für  $\hat{\Pi} = 0$ :

$$(1 + \xi)^{-1}[-8\pi G p + (\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2)].$$

Unter Verwendung der Higgsgleichung erhält man die **zweite verallgemeinerte Friedmanngleichung**:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi G(1 + \xi)^{-1}p - (1 + \xi)^{-1}(\ddot{\xi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} - \frac{3}{4l^2}\xi^2). \quad (483)$$

Man erkennt, daß beide verallgemeinerten Friedmanngleichungen (481) und (483) formal unabhängig davon sind, ob die Higgsteilchen erzeugbar sind oder nicht, d.h. ob das Higgsfeld an der Materie-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  koppelt oder nicht. Sie sind dann sowohl für eine Betrachtung des Standard-Modells als für eine der  $SU(5)$ -GUT gleich. Der wichtige formelle Unterschied liegt in der Higgsfeldgleichung mit (53) oder ohne Quelle (54) (zusammen, siehe (480)), und in der Kontinuitätsgleichung (485).

Die volle Dynamik des Weltalls wird nach der Higgs- Skalar- Tensortheorie durch die beiden verallgemeinerten Friedmanngleichungen und die Gleichung für das Higgsfeld beschrieben. Als Folge der Kontinuitätsgleichung für Energie und Spannung für:

$$\hat{T}^\mu{}_\nu = \frac{\hat{\Pi}}{2} \frac{\xi_{|\mu}}{1 + \xi} \hat{T}, \quad (484)$$

erhält man die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + 3p) = (1 - \frac{\hat{\Pi}}{2})(1 + \xi)^{-1}\dot{\xi}(\rho - 3p), \quad (485)$$

Die Quelle verschwindet im Fall keiner Kopplung des Higgsfeldes an  $\mathcal{L}_M$ .

Diese Kontinuitätsgleichung<sup>83</sup>, zusammen mit einer der beiden verallgemeinerten Friedmanngleichungen und der Higgsfeldgleichung, reicht zur Beschreibung der Dynamik des Universums aus. Zum Beweis dieser Aussage differenziert man die erste Hauptgleichung, Gl. (481), nach der Zeit  $t$ . Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (485) (für erzeugbare Teilchen) und nach Umformungen erhält man:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{32\pi G}{3(1 + \xi)}\frac{\dot{a}}{a}\frac{1}{1 + \xi}(\frac{1}{2l^2}\dot{\xi}\xi - \frac{\ddot{a}}{a}\dot{\xi} + 4\frac{\dot{a}^2}{a^2}\dot{\xi} + \frac{1}{l^2}\frac{\dot{a}}{a}\xi). \quad (486)$$

Addiert man auf der linken und rechten Seite  $3(\dot{a}^2 + k)/a^2$  und setzt auf der linken Seite dafür dreimal die erste Friedmanngleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= -\frac{8\pi G}{3(1 + \xi)}\rho + \frac{1}{1 + \xi}(\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2) + \\ &+ \frac{\dot{\xi}}{1 + \xi}\frac{a}{2\dot{a}}[\frac{1}{l^2}\xi - 2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{16\pi G}{3(1 + \xi)}\rho - \frac{2}{1 + \xi}(\frac{1}{4l^2}\xi^2 - \frac{\dot{a}}{a})]. \end{aligned} \quad (487)$$

Wird nun für  $-8\pi G\rho[3(1 + \xi)]^{-1}$  in der eckigen Klammer die erste Friedmanngleichung (481) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= -\frac{8\pi G}{3(1 + \xi)}\rho + \frac{1}{1 + \xi}(\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \frac{3}{4l^2}\xi^2) + \\ &+ \frac{\dot{\xi}}{1 + \xi}\frac{a}{2\dot{a}}[-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{1}{1 + \xi}(\frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \frac{1}{l^2}\xi + \frac{3}{4l^2}\xi^2)]. \end{aligned} \quad (488)$$

<sup>83</sup>Man sieht, daß die Kontinuitätsgleichung im Fall der Strahlungsdominanz  $p = \nu\rho$  mit  $\nu = 1/3$  für erzeugbare und nicht-erzeugbare Higgsteilchen formal gleich ist.

Also folgt aus der  $\xi$ -Feldgleichung, der ersten verallgemeinerten Friedmanngleichung (481) und der Kontinuitätsgleichung (485) die zweite verallgemeinerte Friedmanngleichung (483).

Addiert man die verallgemeinerten Friedmanngleichungen (481) und (483), so erhält man

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{1}{1 + \xi} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{\xi}{l^2} \right) \xi + (1 - \hat{\Pi}) \frac{8\pi G}{1 + \xi} \left( \frac{\rho}{3} - p \right). \quad (489)$$

Im Falle der Erzeugbarkeit der Higgsteilchen entkoppeln die Gleichungen durch (489) von der Materie. Linearisiert man in  $\xi$  für  $\hat{\Pi} = 1$ , so erhält man für die rechte Seite von Gl. (489):

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} \xi, \quad \hat{\Pi} = 1, \text{ linearisiert.} \quad (490)$$

Somit wird das  $\xi$ -Feld zu ( $|\xi| \ll 1$ )<sup>84</sup>

$$\xi = 2l^2 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right], \quad \hat{\Pi} = 1, \text{ linear.} \quad (491)$$

Somit gilt:

$$\dot{\xi} = 2l^2 \left[ \frac{\dddot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - 2\frac{\dot{a}^3}{a^3} - 2\frac{k\dot{a}}{a^3} \right], \quad (492)$$

$$\ddot{\xi} = 2l^2 \left[ \frac{\overline{\ddot{a}}}{a} + \frac{\ddot{a}^2}{a^2} - 8\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} + 6\frac{\dot{a}^4}{a^4} - 2k\frac{\ddot{a}}{a^3} + 6k\frac{\dot{a}^2}{a^4} \right]. \quad (493)$$

Eingesetzt in die  $\xi$ -Gleichung (480) ergibt das:

$$\begin{aligned} \pi G_N \tilde{A} = & l^2 [a^2 \ddot{\ddot{a}} + a\ddot{a}^2 - 5\dot{a}^2\ddot{a} - 2k\ddot{a} + 3a\dot{a}\ddot{a}] + \\ & + a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2 + ka. \end{aligned} \quad (494)$$

Dabei ist  $G_N = \frac{4}{3}G$ , gültig für  $l \gg r_{\text{Torsionswaage}}$ .

Außerdem gilt  $\rho = \frac{\tilde{A}}{a^3}$ .  $\tilde{A}$  ist konstant und  $p$  wurde vernachlässigt.

Wählt man als Ansatz ein Potenzgesetz

$$a = a_0 t^u, \quad (495)$$

so gilt

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a_0 u t^{u-1}, \quad \ddot{a} = a_0 u(u-1)t^{u-2}, \\ \ddot{\ddot{a}} &= a_0 u(u-1)(u-2)t^{u-3}, \quad \overline{\ddot{a}} = a_0 u(8-1)(u-2)(u-3)t^{u-4}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (494):

$$\begin{aligned} l^2 [ & a_0^3 u(u-1)(u-2)(u-3)t^{3u-4} + a_0^3 u^2(u-1)^2 t^{3u-4} - 5a_0^3 u^2 t^{3u-4} u(-1) + \\ & + 3a_0^3 u t^{3u-4} u(u-1)(u-2) - 2ka_0 u(u-1)t^{u-2}] + \\ & + a_0^3 u(u-1)t^{3u-2} + a_0^3 u^2 t^{3u-2} + ka_0 t^u = \pi G_N \tilde{A}. \end{aligned} \quad (496)$$

Für  $t \rightarrow 0$  überwiegt  $t^{3u-4}$ . Nimmt man nur solche Terme, so erhält man

$$6 - 12u = 0 \quad \implies \quad u = \frac{1}{2}. \quad (497)$$

<sup>84</sup>Dabei ist  $\dot{\cdot} = \frac{\partial}{c\partial t}$ .

Wegen (495) gilt dann

$$a = a_0 t^{1/2} \quad \text{für alle } k. \quad (498)$$

Der Limes  $t \rightarrow 0$  ist aber ausgeschlossen im Hinblick auf (7.3) wegen  $|\xi| \ll 1$ . Für  $t \rightarrow \infty$  überwiegt  $t^{3u-2}$ . Für diese Terme erhält man

$$(2u - 1)u = 0 \quad \implies \quad u = \frac{1}{2}. \quad (499)$$

Also gilt für  $t \rightarrow \infty$  das Potenzgesetz

$$a = a_0 t^{1/2}, \quad (500)$$

was mit  $|\xi| \ll 1$  kompatibel ist.

Wählt man ein dimensionsloses  $a$  nach

$$a := l \cdot f\left(\frac{t}{l}\right), \quad (501)$$

mit

$$' := \frac{\partial}{\partial\left(\frac{t}{l}\right)}, \quad \frac{t}{l} =: x. \quad (502)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{a} &= f', & \ddot{a} &= \frac{1}{l} f'', \\ \ddot{\ddot{a}} &= \frac{1}{l^2} f''', & \ddot{\ddot{\ddot{a}}} &= \frac{1}{l^3} f'''' . \end{aligned}$$

Damit wird die  $\xi$ -Feldgleichung zu

$$f^2 f'''' + f f''^2 - 5 f'^2 f'' - 2k f'' + 3 f f' f''' + f^2 f'' + f f'^2 + k f = \frac{\pi G_N \tilde{A}}{l}. \quad (503)$$

Wählt man

$$\begin{aligned} k &= 0 \quad \text{flaches Universum,} \\ \tilde{A} &= 0 \quad \text{leerer Kosmos,} \end{aligned}$$

mit dem Ansatz

$$f = e^{\lambda x}, \quad (504)$$

so erhält man

$$\lambda^2 = 0 \quad \implies \quad \lambda = 0. \quad (505)$$

Daraus folgt

$$f = 1, \quad \text{mit } k = 0 \text{ und } \tilde{A} = 0. \quad (506)$$

Das beschreibt ein MINKOWSKI-Raum mit  $a = l$ . Also erhält man eine speziellrelativistische Raumzeit, wenn man einen leeren Kosmos annimmt.

Die Annahme  $\tilde{A} = 0$ , die für den leeren Kosmos gilt, entspricht auch einem strahlungsdominierten Universum mit  $\varrho - 3p = 0$ . In dem Fall gilt dasselbe Ergebnis des MINKOWSKI-Raumes. Auch im Falle nicht-erzeugbarer Higgsteilchen gilt das, wenn man Strahlungsdominanz  $p = \frac{1}{3}\varrho$  annimmt, da die Addition der Friedmangleichungen für  $\hat{\Pi} = 0$  dieselbe Form hat wie für  $\hat{\Pi} = 1$ , indem sie auch von der Materie entkoppelt.<sup>85</sup>

Also:

*Eine verschwindende Krümmungskonstante  $k$  in der HSTT mit RW-Metrik führt in einem Anfangs-(strahlungsdominiertem)-Stadium des Universums zu einem MINKOWSKI-Raum, wenn ein Schwingungsansatz gültig ist.*

#### 7.4 Allgemeine Eigenschaften des verallgemeinerten FRW-Modells

Die Masse  $M$  der HIGGS-Teilchen ist im Standardmodell mit Gravitation um ein Faktor  $\sqrt{\frac{4\pi}{3\alpha}} \approx 10^{-17}$  kleiner als im Standardmodell ohne Gravitation, und in  $SU(5)$ -GUT um  $\sqrt{\frac{4\pi}{3\alpha}} \approx 10^{-4}$  kleiner als in die  $SU(5)$ -GUT ohne Gravitation. Diese Masse determiniert die Skala der Symmetriebrechung. Im Falle des Standardmodells ist die Higgsgleichung (14) quellenlos, da die positive Spur  $T$  in (46) gleich groß ist wie die des negativen fermionischen Anteils der Quelle. So sollen nach dem Modell gekoppelt am Standard-Modell mit  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  die Higgsteilchen im frühen Universums vom Rest des Alls entkoppeln und nur gravitativ wechselwirken.

Nach Gl. (485)

$$\dot{\varrho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varrho + p) = \frac{(1 - \hat{\Pi})}{2}(1 + \xi)^{-1}\dot{\xi}(\varrho - 3p) \quad (507)$$

erniedrigt sich die Massendichte des Universums, erhöht sich aber noch im  $\hat{\Pi} = 0$ -Fall über Massenproduktion wegen des HIGGS-Mechanismus. Für  $\hat{\Pi} = 1$  bleibt die Gleichung quellenlos, sodaß der HIGGS-Mechanismus zu keinem Entropieprozeß führt, obwohl das Higgsfeld an der idealen Flüssigkeit (102) über die Higgsgleichung (480) koppelt.[18, 19]

Nimmt man eine barotropische Flüssigkeit an, d.h.  $p = \bar{\nu}\varrho$  mit einer dimensionslosen Konstante  $\bar{\nu}$ , bekommt man durch Integration im Higgsmechanismus ohne Teilchen ( $\hat{\Pi} = 0$ ) [19]:

$$\varrho = \begin{cases} M(1 + \xi)^2 & \text{für } \bar{\nu} = -1 \text{ (Anti-Steife Materie)} \\ \frac{M_{\bar{\nu}}}{a^{3(1+\bar{\nu})}}(1 + \xi)^{\frac{1}{2}(1-3\bar{\nu})} = \frac{M}{a^3}(1 + \xi)^{\frac{1}{2}} & \text{für } \bar{\nu} = 0 \text{ (Staub)} \\ \frac{M}{a^4} & \text{für } \bar{\nu} = 1/3 \text{ (Strahlung)} \end{cases} \quad (508)$$

Dabei ist  $M_{\bar{\nu}}$  die Integrationskonstante.

Im Falle  $\xi = 0$  wird die Dichte zu der Dichte der klassischen Kosmologie (dort gilt  $\dot{\varrho} + 3H(p + \varrho) = 0$ , vgl. (507)):

$$\varrho = \frac{M_{\bar{\nu}}}{a^{3(1+\bar{\nu})}}. \quad (509)$$

<sup>85</sup>Strahlungsdominanz  $p = \frac{1}{3}\varrho$  gilt insbesondere für das frühe Universum, während Staubdominanz  $p = 0$  eher die jetzige Verhältnisse beschreibt.

Im Fall  $p = 0$ , d.h. für  $\bar{v} = 0$ , spricht man oft von “inkohärenter Materie”. Solche setzt nichtrelativistische Teilchen voraus ( $p \ll \rho c^2$ ). Dabei stellt man sich das Universum als eine inkohärente Staubwolke mit den Galaxien aus Staubteilchen vor (vgl. Abschnitt 5). In diesem Fall ist die Massendichte durch Ruhmassen dominiert. Das gilt insbesondere für das heutige Universum.

Der Strahlungsfall ( $p = \frac{\rho c^2}{3}$ ) gilt exakt für elektromagnetische Strahlung und näherungsweise für hochrelativistische Teilchen. Diese Näherung gilt für das frühe Universum [46].

Im Falle des HIGGS-Mechanismus mit Higgsteilchen ( $\hat{\Pi} = 1$ ) gilt dagegen immer formal die klassische Dichte (509)[18]:

$$\rho = \frac{M_\nu}{a^{3(1+\bar{v})}}. \quad (510)$$

Beide Dichten kann man aber mit der Definition eines Operators  $\hat{\mathcal{K}}$  zusammenfassen. Der Operator soll durch folgende Eigenschaft definiert sein:<sup>86</sup>

$$\hat{\mathcal{K}}X = \begin{cases} 1 & \text{falls } \hat{\Pi} = 1 \text{ d.h. } (\mathcal{L}_M \approx \xi) \\ X & \text{falls } \hat{\Pi} = 0 \text{ d.h. } (\mathcal{L}_M \sim \xi) \end{cases}. \quad (511)$$

Dann bekommt man für Gln. (508) und (510):

$$\rho = \frac{M}{a^{3(1+\bar{v})}} \hat{\mathcal{K}}(1 + \xi)^{\frac{1}{2}(1-3\bar{v})}. \quad (512)$$

Im Fall des Staubs und antisteifer Materie bekommt man im Higgsteilchenlosen Fall einen Extra-Faktor aufgrund des Produktionsmechanismus (siehe (507)). Im Strahlungsfall ist die Kontinuitätsgleichung quellenlos, sodaß es zu keiner Entropieproduktion kommt. Die Dichten beider Modelle erhalten die gleiche Form.

Für  $\bar{v} = 0$  (Staub) ist die Masse des Universums  $M(\xi) \approx \rho a^3 = M\sqrt{(1+\xi)}$ , die von Null auf einen Endwert  $M$  ansteigt, falls  $\xi(0) \approx -1/2$  für den Anfangswert des Higgsfeldes gilt (Fall der *Neuen Inflation* [19]). Die Masse fällt aber für  $\xi(0) > 2$  um einen Faktor  $(1 + \xi(0))^{1/2} < 0$  (Fall der *Chaotischen Inflation*).

Die Fälle der Inflation werden von CERVANTES- COTA und H. DEHNEN für den Staubfall in [18, 19] untersucht, im stationären Fall  $\dot{a}_0 = \dot{\chi}_0 = 0$ , mit  $\chi = \frac{\xi}{2}$ . Im Fall der *Neuen Inflation*, wo das Higgsfeld langsam ins stabile Gleichgewicht kommt, vom negativen Higgsfeldwert an, besitzt das Universum eine Anfangssingularität und, insbesondere in der HSTT, wenn das Higgsfeld am Anfang nahe seines metastabilen Gleichgewichts ist, kommt es am Anfang zu einer Kontraktion des Universums anstatt einer Expansion, sodaß man von “Rollover”-Kontraktion spricht. Eine nachfolgende Expansion folgt nur für spezielle Anfangsbedingungen, wie schon unter den Problemen der Kosmologie im Abschnitt 7.2.2 erwähnt.

Im Fall der *Chaotischen Inflation*, wo der Wert des Higgsfeldes positiv  $\phi > v$  ist, kann man davon ausgehen, daß der Higgsterm die Dynamik dominiert und es ergibt sich eine Inflation wie in [82], aber wahrscheinlich in einer niedrigeren Energieskala.

HIGGS-Oszillationen könnten dabei, wie schon erwähnt, zur Lösung der fehlenden kosmologischen Masse beitragen, da sie Dunkle Materie (SIDM) implizieren würden, wobei einige HIGGS-Oszillationen in Baryonen und Leptonen zerfallen könnten, während die die noch bestehen eine Remaneszenz der kosmologischen Funktion wären.

<sup>86</sup>Er ist somit eine Art inverse Operation  $x^{-1}$  mit  $x^{-1} \cdot x = e$ , falls  $x \in \{X : \hat{\Pi} = 1\}$ .

Die Gültigkeit der  $\varrho$ -Erhaltung bedeutet  $T^{00} = \varrho c^2$ -Erhaltung, und somit, wegen  $g \propto a(t)^{6,87}$

$$\varrho_m(t)a(t)^3 = \text{const} = \tilde{A}, \quad (p = 0, \varrho = \varrho_m), \quad (513)$$

was als Massenerhaltung interpretierbar ist, da  $a(t)$  alle physikalischen Längen bestimmt. Für eine strahlungsdominierte Massendichte mit  $\varrho_s$  erhält man

$$\varrho_s(t)a(t)^4 = \text{const} = \tilde{B}, \quad (p = \varrho c^3/3, \varrho = \varrho_s). \quad (514)$$

Also verringert sich bei der Expansion des FRIEDMANN- Universums die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung schneller als die Materiedichte. Der Grund dafür ist, daß die Photonendichte (wie die Baryondichte) wie  $1/a^3$  abnimmt, die Photonen aber außerdem rotverschoben werden und ihre Frequenz  $\nu_f \propto 1/a$  ist.

Das thermische Verhalten der Strahlung ergibt sich aus der Energiedichte  $\varrho \propto T^4$  und wegen  $\varrho \propto 1/a^4$  zu  $T \propto 1/a$ .

Ist ein expandierendes Universum von Strahlung erfüllt, so kühlt es bei der Expansion umgekehrt wie seine Ausdehnung ab.[104]

## 7.5 Statische Lösung der verallgemeinerten Friedmanngleichungen

Wir betrachten den statischen Fall der verallgemeinerten Friedmanngleichungen. Das bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} = \ddot{\xi} = 0, \quad \dot{a} = \ddot{a} = 0 \\ \dot{p} = \dot{\varrho} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (515)$$

Die verallgemeinerten FRIEDMANN-Gleichungen (481) und (483) werden linearisiert zu (der Index  $_{(0)}$  bedeutet hier statisch; der Index  $_0$  bezeichnet den heutigen Zustand):

$$\frac{k}{a_{(0)}^2} = \frac{8\pi G}{3}(1 + \xi_{(0)})^{-1}(\varrho_{(0)m} + \varrho_{(0)s}) + (1 + \xi_{(0)})^{-1} \frac{1}{4l^2} \xi_{(0)}^2 \quad (516)$$

und

$$\frac{k}{a_{(0)}^2} = - \frac{8\pi G}{3}(1 + \xi_{(0)})^{-1} \varrho_{(0)s} + (1 + \xi_{(0)})^{-1} \frac{3}{4l^2} \xi_{(0)}^2 \quad (517)$$

und die statische Higgsgleichung (480)

$$\frac{1}{l^2} \xi_{(0)} = \hat{\Pi} \frac{8\pi G}{3} \varrho_{m(0)}. \quad (518)$$

Also gilt mit beiden FRIEDMANN-Gleichungen:

$$\frac{16\pi G}{3} \varrho_{(0)} - \frac{1}{l^2} \xi_{(0)} - \frac{1}{2l^2} \xi_{(0)}^2 = 0. \quad (519)$$

Somit für  $\varrho = \varrho_s + \varrho_m$ :

$$\varrho_{(0)} = \frac{3}{32\pi G l^2} (2\xi_{(0)} + \xi_{(0)}^2). \quad (520)$$

<sup>87</sup>Die Indizes  $m$  und  $s$  bedeuten Materie- bzw. Strahlungsanteil.

Die Dichte ist nichtnegativ. Somit ergibt sich als Extremfall verschwindenden Druckes der Higgsfeldwert  $\xi_{(0)} = -2$  oder der triviale Fall  $\xi_{(0)} = 0$ . Der erste Wert ist eher unerwünscht<sup>88</sup>. Der zweite entspricht den Wert der HSTT ohne Higgsteilchen oder auch ohne Materiedichte. Wäre der Druck in der HSTT mit Higgsteilchen Null, so ergäbe sich für alle Größen die triviale Lösung. Ohne Higgsteilchen ergibt sich allgemeiner sogar für alle diese Größen immer die triviale Lösung  $\xi = \varrho_{m(0)} = \varrho_{s(0)} = a_{(0)} = k = 0$ <sup>89</sup>, was mit der Eigenschaft zu tun haben soll, daß *bei statischen sphärischen symmetrisch Metriken gilt*

$$\xi \equiv 0. \quad (521)$$

Somit wird im folgenden nur die Theorie mit Higgsteilchen, d.h. mit  $\hat{\Pi} = 1$  untersucht. In dem Fall, daß alle Größen nichtnegativ sind und mindestens eine ungleich Null, ist die Krümmungskonstante

$$k = 1. \quad (522)$$

Untersucht man getrennt die materielle und Strahlungskomponenten der Dichte, so ergibt sich mit der Higgsleichung:

$$\varrho_{s(0)} = \frac{3}{32\pi Gl^2}(\xi_{(0)}^2 - 2\xi_{(0)}). \quad (523)$$

Diese Größe ist Null im trivialen Fall und für  $\xi_{(0)} = 2$ . Also gilt bei völliger Materiedominanz:  $\varrho_{m(0)} = \frac{3}{4\pi Gl^2}$ . Für das Higgsfeld gilt

$$\xi_{(0)} \geq 2. \quad (524)$$

Setzt man die Dichte in die 2. Friedmanngleichungen (483) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{a^2} &= \frac{1}{4} \frac{(\xi_{(0)}^2 - 2\xi_{(0)})}{(1 + \xi_{(0)})} + \frac{3}{4} \frac{\xi_{(0)}^2}{(1 + \xi_{(0)})} \\ &= \frac{\xi_{(0)}}{2} \frac{\xi_{(0)}}{1 + \xi_{(0)}} \\ &\sim \varrho_{s(0)} + \frac{3}{4} \frac{\xi_{(0)}^2}{(1 + \xi_{(0)})}. \end{aligned} \quad (525)$$

Setzt man den Extremwert der völligen Materiedominanz ein, so erhält man<sup>90</sup>

$$a_{(0)}^2 = l^2, \quad (\varrho_{s(0)} = 0). \quad (526)$$

Als allgemeine Lösung ergibt sich auch aus voriger Gleichung:

$$\xi_{(0)}^2 = \xi_{(0)} \left( \frac{2l^2}{a_{(0)}^2} - 1 \right) - \frac{2l^2}{a_{(0)}^2} \quad (527)$$

$$\begin{aligned} \implies \xi_{(0)1|2} &= \frac{2l^2 - a_{(0)}^2}{2a_{(0)}^2} \pm \frac{a_{(0)}^2 + 2l^2}{2a_{(0)}^2} \\ &= 2 \frac{l^2}{a_{(0)}^2} \quad (\text{oder} \quad -\frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (528)$$

<sup>88</sup>Unten sieht man, daß nicht in einem Anfangsstadium des Universums gearbeitet wird, sodaß auch mit einer Neuen Inflation das Higgsfeldwert Wert  $\xi > 0$  hätte genommen haben sollen.

<sup>89</sup>Das wäre so, wie in [106] für statische Higgsfelder in statischen sphärisch-symmetrischen Metriken gezeigt.

<sup>90</sup>Eine weitere Lösung  $\xi_{(0)} = -1$  für  $a^2 = l^2$  ist wegen einer dann entstehenden negativen Materiedichte nicht möglich.

Also gilt allgemein

$$\xi_{(0)} = 2 \frac{l^2}{a_{(0)}^2} \geq 2. \quad (529)$$

Für die Materiedichte ergibt sich somit, mit  $k = 1$

$$\varrho_{m(0)} = \frac{3}{4\pi G} \frac{1}{a_{(0)}^2} \geq 0. \quad (530)$$

Die Strahlungsdichte ist

$$\varrho_{s(0)} = \frac{3}{8\pi G a_{(0)}^2} \left( \frac{l^2}{a_{(0)}^2} - 1 \right). \quad (531)$$

Man merkt, daß der Grenzfall  $\xi_{(0)} = 2 \Rightarrow \varrho_{s(0)} = 0$  beinhaltet ist.

Auch merkt man, daß die Materiedichte abfällt, wenn der Skalenfaktor  $a_{(0)}$  größer wird. Die Strahlungsdichte auch, und zwar schneller (was man auch erwartet).

Im Fall der völligen Materiedominanz gilt, daß der Skalenfaktor  $a_{(0)}$  gleich der Reichweite  $l$  der Higgsteilchen ist. Bei nichtverschwindendem Strahlungsdruck gilt dann

$$l^2 \leq a_{(0)}^2, \quad (532)$$

sodaß das Universum, wie man erwarten kann, i.A. größer ist als die Reichweite der Higgsbosonen.

Völlige Strahlungsdominanz gibt es nicht, solange es Higgsteilchen gibt. Das führte ja dazu, daß es auch keinen Strahlungsdruck gibt, da für  $\xi_{(0)} = 0$  die Gleichung  $\varrho_{m(0)} = -2\varrho_{s(0)}$  gälte. Im  $\hat{\Pi} = 1$ -Fall folgte direkt aus der Higgsgleichung, daß beide Anteile der Dichte verschwinden. Für  $\hat{\Pi} = 0$  wäre ein negativer Druckanteil mathematisch möglich, insbesondere, wenn die Krümmungskonstante nichtverschwindend sein sollte.

Wir betrachten die Kopplung zwischen  $\xi_{(0)}$  und  $a_{(0)}$ , gegeben durch

$$\xi_{(0)} = 2 \frac{l^2}{a_{(0)}^2}.$$

Im Falle der völligen Materiedominanz ergibt sich  $a_{(0)} = l$  und  $\xi = 2$ , also sind die statischen Werte gegeben.

Im Falle, aber, daß der statische Wert der Strahlungsdichte nicht verschwindet, bleiben die Werte beider Größen ungewiß. Nur, daß  $\xi_{(0)} > 2$  und  $l < a_{(0)}$ , ist bekannt. Die Kopplung besagt aber noch, daß bei statischen Bedingungen im Falle eines sehr großen Universums (Skalenparameter sehr groß im Vergleich zur Higgsreichweite  $l$ ), der statische Higgsfeldwert verschwindend klein sein würde. Verschwindendes oder kleines  $a_{(0)} \rightarrow l$  dagegen würde den statischen Higgsfeldwert zum Wert 2 tendieren lassen, da auch die Higgsreichweite  $l$  zu Null gehen müßte.

Für die statischen Werte ergibt sich mit (501)

$$\begin{aligned} a_{(0)} &= l \cdot f(0) \geq l, & \xi_{(0)} &= 2f(0) \geq 2, \\ \varrho_{m(0)} &= \frac{3}{4\pi G} \frac{1}{l^2} f^{-2}(0), \\ \varrho_{s(0)} &= \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{l^2} f^{-2}(0) (f^{-2}(0) - 1). \end{aligned} \quad (533)$$

Für  $p = 0$  gilt  $a_{(0)} = l$ , also  $f(0; p = 0) = 1$ . Allgemein gilt

$$f(0) \geq 1 \quad (= 1 \text{ für } \varrho_s = 0). \quad (534)$$

Betrachten wir jetzt den Zustand, für den die statischen Bedingungen im Universum gelten könnte. Für den Anfangszustand des Universums gilt

$$\varrho_{s(0)} \gg \varrho_{m(0)}. \quad (535)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{(l^2 - a_{(0)}^2)}{8\pi G a_{(0)}^4} &\gg 3 \frac{2a_{(0)}^2}{4\pi G a_{(0)}^2} \\ \implies l &\gg \sqrt{3} a_{(0)}. \end{aligned} \quad (536)$$

Das ist aber nicht gegeben, Nach Gl. (532) ist der Skalenparameter des statischen Zustandes immer größer oder gleich der Reichweite  $l$ , bzw. mit (529) ist der  $\xi$ -Feldwert des stationären Zustandes größer oder gleich 2. Der Widerspruch entsteht schon anhand von Gl. (531):  $\rho_{s(0)}$  muß wegen (532) kleiner als  $\rho_{m(0)}$  sein. Die Voraussetzungen für ein Anfangsuniversum sind im statischen Fall nicht gegeben. Auf jedem Fall wäre  $l \gg a$  ein guter Wert für ein Anfangsstadium des Universums, insbesondere wenn man einen Heißen Urknall erwartet. Das ist aber nicht innerhalb der statischen Rechnung gegeben.

*Das statische Ergebnis gilt also nicht für den Anfangszustand des Universums.*

Der statische Bereich entspricht einem Wendepunktzustand des Universums, in einer Ära vor dem gegenwärtigen Universum.<sup>91</sup> Andere Zustandsabschnitte kriegt man aus kleinen Störungen dieses Systems durch eine Stabilitätsuntersuchung.

---

<sup>91</sup>Also wäre die Annahme  $a_{(0)} = 0$  mit  $\xi_{(0)} = 2$  nicht gut, ja schon, weil man auch keine unendlich große Higgsmasse erwartet.  $a_{(0)} = 0$  wäre nur für das Anfangsstadium des Universums zu erwarten, und streng nur im Falle der Neuen, nicht Chaotischen, Inflation.

## 7.6 Dynamik aus den verallgemeinerten Friedmanngleichungen

### 7.6.1 Stabilitätsuntersuchung der statischen Lösung und nicht-statische Lösungen

Zunächst bringt man durch eine kleine Störung das statische System aus seinem Gleichgewicht. Dabei gilt als Ansatz<sup>92</sup>

$$\left. \begin{aligned} a &= a_{(0)}(1 + \varepsilon), & |\varepsilon| &\ll 1 \\ \xi &= \xi_{(0)}(1 + \delta), & |\delta| &\ll 1 \\ \varrho_m &= \varrho_{m(0)}(1 + \sigma), & |\sigma| &\ll 1 \\ \varrho_s &= \varrho_{s(0)}(1 + \gamma), & |\gamma| &\ll 1 \end{aligned} \right\}. \quad (537)$$

Es gilt für die gestörten Größen

$$a = l(1 + \varepsilon), \quad \varrho_m = \frac{3}{4\pi Gl^2}(1 + \sigma), \quad \xi = 2(1 + \delta). \quad (538)$$

Aus der **Higgs**gleichung folgt

$$\ddot{\delta} + 3\frac{\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{l^2}(\sigma - \delta). \quad (539)$$

Linearisiert gilt dann

$$\ddot{\delta} = \frac{1}{l^2}(\sigma - \delta). \quad (540)$$

Aus dem **Energiesatz**  $\varrho a^3 = \tilde{A} = const$  und aus der ersten linearisierten Friedmanngleichung (481) folgt

$$\sigma + 3\varepsilon = 0. \quad (541)$$

Die Summe der Friedmanngleichungen (489) ergibt

$$\begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}\left[1 + 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}(1 + \delta)\right]a_{(0)}^2 + 2(1 + \varepsilon)\left[-1 + \sigma + 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}(1 + \sigma) + \right. \\ \left. + 2\gamma\left(\frac{l^2}{a_{(0)}^2} - 1\right) - \frac{l^2}{a_{(0)}^2}(2\delta + \delta^2)\right] + 2l^2\dot{\varepsilon}\dot{\delta} + 2l^2\ddot{\delta} = 0. \end{aligned} \quad (542)$$

Linearisiert wird das zu

$$\ddot{\varepsilon}\left(1 + 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right)a_{(0)}^2 - 1 + \varepsilon\left(\frac{l^2}{a_{(0)}^2} - 1\right) + \frac{l^2}{a_{(0)}^2} + \sigma + 2\gamma\left(\frac{l^2}{a_{(0)}^2} - 1\right) - 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\delta + l^2\ddot{\delta} = 0. \quad (543)$$

Aus der zweiten Friedmanngleichung (483) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[2\dot{\varepsilon}(1 + \varepsilon) + \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{a_{(0)}^2}\right]\left[1 + 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}(1 + \delta)\right] = \left[\frac{2}{a_{(0)}^2}\left(1 - \frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right) + \frac{2}{a_{(0)}^2}\gamma\left(1 - \frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right) - 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\dot{\delta} - \right. \\ \left. - 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\frac{\dot{\varepsilon}\dot{\delta}}{1 + \varepsilon} + 3\frac{l^2}{a_{(0)}^4}(1 + \delta)^2\right](1 + \varepsilon)^2. \end{aligned} \quad (544)$$

Linearisiert erhält man

$$\ddot{\varepsilon}\left(2 + 4\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right)a_{(0)}^2 = \left(1 - \frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right) + 2\gamma\left(1 - \frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right) - 2\sigma + 2\delta + 4\frac{l^2}{a_{(0)}^2} + \varepsilon\left(4 + 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right). \quad (545)$$

<sup>92</sup>Genommen wird die Theorie mit erzeugbaren Higgsteilchen  $\hat{\Pi} = 1$ , was  $k = 1$  und ein geschlossenes Univesum impliziert.

Mit Gl. (541) wird das zu

$$\ddot{\varepsilon}\left(2 + 4\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right)a_{(0)}^2 = \left(1 - \frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right) + 2\gamma\left(1 - \frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right) - 2\sigma + 2\delta\left(1 + 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right) + \varepsilon\left(4 + 2\frac{l^2}{a_{(0)}^2}\right). \quad (546)$$

Die Ergebnisse für verschwindender Strahlungsdichte ergeben sich somit als Extremfall mit  $a_{(0)} = l$ . Der wird im folgenden untersucht:

- Spezialfall  $a_{(0)} = l \implies \varrho_{s(0)} = 0 \implies \varrho_s = 0$   
Es gilt mit  $p = 0$ :

$$\varrho_{m(0)} = \frac{3}{4\pi G l^2}(1 + \sigma), \quad \xi_{(0)} = 2. \quad (547)$$

Die Summe der FRIEDMANN-Gleichungen (489) ergibt

$$1 + \delta = l^2\left[\frac{\ddot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon} + \frac{\dot{\varepsilon}^2}{(1 + \varepsilon)^2} + \frac{1}{l^2(1 + \varepsilon)^2}\right], \quad (548)$$

was linearisiert zu der Gleichung

$$\delta = l^2\ddot{\varepsilon} - 2\varepsilon \quad (549)$$

wird.<sup>93</sup>

Aus der 2. FRIEDMANN-Gleichung (483) folgt

$$2\frac{\ddot{\varepsilon}}{(1 + \varepsilon)} + \frac{l^2\dot{\varepsilon}^2 + 1}{l^2(1 + \varepsilon)^2} = -\frac{2}{(1 + 2(1 + \varepsilon))}\frac{(1 + \sigma)}{l^2} + \quad (550)$$

$$+ \frac{1}{1 + 2(1 + \delta)}\left[\frac{\dot{\varepsilon}}{(1 + \varepsilon)}2\dot{\delta} + \frac{1}{l^2}2(1 + \delta) + \frac{3}{l^2}(1 + \delta)^2\right].$$

Linear wird das zu

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{l^2}\varepsilon + \frac{1}{3l^2}\sigma - \frac{1}{l^2}\delta = 0. \quad (551)$$

Aus der linearen 2. Friedmanngleichung (483) und der Higgsgleichung (480), zusammen mit der linearisierten Summe der Friedmanngleichungen (489) ergibt sich eine Differentialgleichung 4. Ordnung in der Zeit:

$$l^4\ddot{\varepsilon} - l^2\ddot{\varepsilon} + \varepsilon = 0. \quad (552)$$

Diese lineare Differentialgleichung hängt nicht explizit von  $t$  ab. Deshalb macht man den Ansatz

$$\varepsilon = \tilde{A}e^{\lambda t}, \quad (553)$$

was auf das charakteristische Polynom führt:

$$\lambda^4 - \lambda^2 + 1 = 0, \quad (554)$$

<sup>93</sup>Ginge die Masse der Higgsteilchen ins Unendliche, wäre also die Reichweite  $l = 0$  und damit  $a_{(0)} = 0$ . Das ist unphysikalisch.

Mit

$$\lambda^2 =: \check{x}. \quad (555)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \check{x}^2 - \check{x} + \frac{1}{4} &= -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \\ \Rightarrow (\check{x} - \frac{1}{2})^2 &= -\frac{3}{4}, \end{aligned} \quad (556)$$

mit den Lösungen

$$\check{x} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4}}. \quad (557)$$

Also ist  $\lambda$  eine komplexe Größe der Form

$$\lambda = a + ib, \quad (558)$$

sodaß aus Gln. (555) und (557) folgt:

$$\lambda^2 = a^2 - b^2 + 2iab = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Somit gilt

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2}, \quad 2ab = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Es folgt für  $a$  aus der 2. Gleichung (oben):

$$a = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{3}{4}}. \quad (559)$$

Für  $b$  folgt damit für die 1. Gleichung:

$$-b^4 + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}b^2 \quad \Longrightarrow \quad b^4 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

mit der Anfangsbedingung:

$$(b^2 + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad b^2 + \frac{1}{4} = \pm \frac{1}{2}. \quad (560)$$

Man hat

$$b^2 = \begin{cases} +\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{cases}, \quad (561)$$

wobei die zweite Lösung zu streichen ist, da  $b$  reell vorausgesetzt ist. Also ist der Imaginärteil des Eigenwerts des charakteristischen Polynoms:

$$b = \pm \frac{1}{2}. \quad (562)$$

Der Realteil ist dann gemäß (559) zusammen mit dem Imaginärteil:

$$\begin{cases} a_1 = +\sqrt{\frac{3}{4}}, & b_1 = +\frac{1}{2}, \\ a_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}, & b_2 = -\frac{1}{2}, \\ a_3 = -\sqrt{\frac{3}{4}}, & b_3 = +\frac{1}{2}, \\ a_4 = +\sqrt{\frac{3}{4}}, & b_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Somit sind die partikulären Lösungen der Differentialgleichung (552):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = A_1 e^{+\sqrt{\frac{3}{4}l}t} e^{+i\frac{1}{2}l}t, \\ \varepsilon_2 = A_2 e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} e^{-i\frac{1}{2}l}t, \\ \varepsilon_3 = A_3 e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} e^{+i\frac{1}{2}l}t, \\ \varepsilon_4 = A_4 e^{+\sqrt{\frac{3}{4}l}t} e^{-i\frac{1}{2}l}t. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung ist die Superposition aller partikulären Lösungen in reellwertiger Darstellung:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) + B e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) + \\ &+ C e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) + D e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) \\ &= -\frac{1}{3}\sigma, \end{aligned} \quad (563)$$

letzteres gemäß Gl. (541).

Für die Zeitableitung der Störung  $\varepsilon$  des Skalenfaktors gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \sqrt{\frac{3}{4}l} A e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) + \frac{1}{2} A e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) + \\ &+ \sqrt{\frac{3}{4}l} B e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) - \frac{1}{2} B e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) - \\ &- \sqrt{\frac{3}{4}l} C e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) + \frac{1}{2} C e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) - \\ &- \sqrt{\frac{3}{4}l} D e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) - \frac{1}{2} D e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right). \end{aligned} \quad (564)$$

und

$$\begin{aligned} l^2 \ddot{\varepsilon} &= \frac{1}{2} A e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) + \sqrt{\frac{3}{4}l} A e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) + \\ &+ \frac{1}{2} B e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) - \sqrt{\frac{3}{4}l} B e^{\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) + \end{aligned} \quad (565)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} C e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right) + \sqrt{\frac{3}{4}l} C e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) + \\ &+ \frac{1}{2} D e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \cos\left(\frac{1}{2}l t\right) + \sqrt{\frac{3}{4}l} D e^{-\sqrt{\frac{3}{4}l}t} \sin\left(\frac{1}{2}l t\right). \end{aligned} \quad (566)$$

Mit  $\delta = l^2 \ddot{\varepsilon} - 2\varepsilon$  nach (549) folgt für den Störfaktor des Higgsfeldes:

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{3}{2}Ae\sqrt{\frac{3}{4}i} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \sqrt{\frac{3}{4}}Ae\sqrt{\frac{3}{4}i} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \\ & -\frac{3}{2}Be\sqrt{\frac{3}{4}i} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \sqrt{\frac{3}{4}}Be\sqrt{\frac{3}{4}i} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - \\ & -\frac{3}{2}Ce^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - \sqrt{\frac{3}{4}}Ce^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \\ & -\frac{3}{2}De^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \sqrt{\frac{3}{4}}De^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right), \end{aligned} \quad (567)$$

oder umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \delta = & Ae\sqrt{\frac{3}{4}i} \left(-\frac{3}{2} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \sqrt{\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \\ & + Be\sqrt{\frac{3}{4}i} \left(-\frac{3}{2} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \sqrt{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \\ & + Ce^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \left(-\frac{3}{2} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - \sqrt{\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \\ & + De^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \left(-\frac{3}{2} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \sqrt{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right). \end{aligned} \quad (568)$$

Hiermit sind alle 3 Störungen  $\varepsilon$ ,  $\delta$  und  $\sigma$  gemäß Gln. (563) und (568) bestimmt.  
Die Zeitableitung von (568) lautet für nachfolgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} = & -\frac{2}{l}Ae\sqrt{\frac{3}{4}i} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - \\ & -\frac{2}{l}\sqrt{\frac{3}{4}}Be\sqrt{\frac{3}{4}i} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \\ & +\frac{2}{l}\sqrt{\frac{3}{4}}Ce^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \\ & +\frac{2}{l}\sqrt{\frac{3}{4}}De^{-\sqrt{\frac{3}{4}i}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right). \end{aligned} \quad (569)$$

- Anfangsbedingungen für  $p = 0$ :  
Als Anfangsbedingungen wählen wir

$$\begin{aligned} \underline{t = 0} : \quad \varepsilon = 0, \quad \dot{\varepsilon} = w, \\ \delta = 0, \quad \dot{\delta} = 0. \end{aligned} \quad (570)$$

Das bedeutet eine gewisse Anfangsstörung der ‘‘Skalengeschwindigkeit’’  $\dot{a}$ .

Aus  $\varepsilon = 0$  folgt gemäß (563):  $B + D = 0$ .

Aus  $\delta = 0$  folgt gemäß (568):  $\sqrt{\frac{3}{4}}A - \frac{3}{2}B - \sqrt{\frac{3}{4}}C - \frac{3}{2}D = 0$ .

Mit  $\dot{\delta} = 0$  folgt gemäß (569):  $-B + D = 0$ .

Also zusammen

$$B = 0, \quad D = 0, \quad A = C. \quad (571)$$

$\dot{\varepsilon} = w$  führt gemäß Gl. (564) zu

$$A = lw. \quad (572)$$

Also gälte  $A = C = 0$  im Falle, daß es keine Anfangsstörung für  $\dot{a}$  gäbe.

• Lösung mit Anfangsbedingungen:

Obige Integrationskonstanten eingesetzt in die Lösungen (568) und (563) führen zu:

$$\varepsilon = 2lw \sin\left(\frac{1}{2}\frac{t}{l}\right) \cosh\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{t}{l}\right), \quad (573)$$

$$\delta = lw\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}\frac{t}{l}\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{t}{l}\right) - 3\sin\left(\frac{1}{2}\frac{t}{l}\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{t}{l}\right)\right), \quad (574)$$

$$\sigma = -6lw \sin\left(\frac{1}{2}\frac{t}{l}\right) \cosh\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{t}{l}\right). \quad (575)$$

Für  $t \rightarrow 0$  gilt für den Skalenfaktor:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2lw\left(\frac{1}{2}\frac{t}{l} - \frac{1}{6}\frac{1}{8}\frac{t^3}{l^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{t^2}{l^2}\right) \\ &= lw\left(\frac{1}{2}\frac{t}{l} + \frac{1}{3}\frac{t^3}{l^3}\right) = -\frac{1}{3}\sigma, \end{aligned} \quad (576)$$

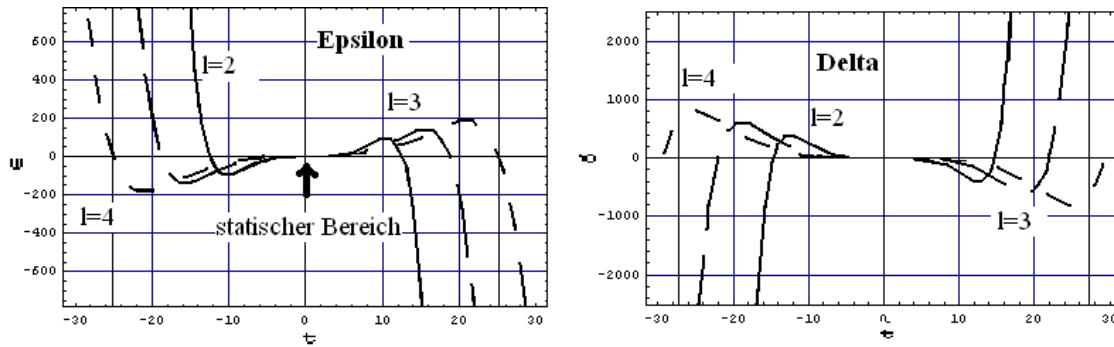
und für das Higgsfeld

$$\begin{aligned} \delta &= lw\left(\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{t^2}{l^2}\right]\left[\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{t}{l} + \frac{1}{6}\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{t^3}{l^3}\right] - \right. \\ &\quad \left. - 3\left[\frac{1}{2}\frac{t}{l} - \frac{1}{6}\frac{1}{8}\frac{t^3}{l^3}\right]\left[1 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{t^2}{l^2}\right]\right) \\ &= -\frac{1}{2}lw\frac{t^3}{l^3}. \end{aligned} \quad (577)$$

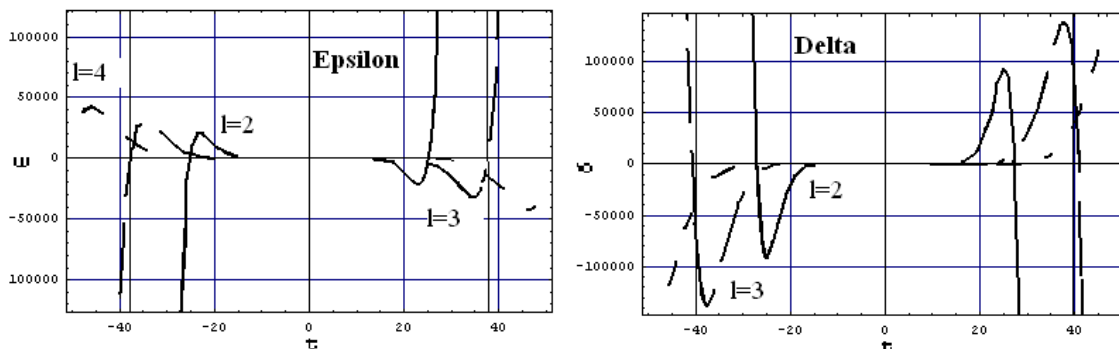
Setzt man die dimensionslose Koordinate  $x = \frac{t}{l}$  ein, so werden Gln. (577) und (576) mit  $\varepsilon'(0) = \tilde{w} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}|_0$

$$\delta = \tilde{w}\left(x + \frac{1}{3}x^3\right), \quad \varepsilon = -\frac{1}{2}\tilde{w}x^3. \quad (x \rightarrow 0) \quad (578)$$

Mit der Integrationskonstante zu  $A = \tilde{w} = wl$ . Unter Betrachtung dimensionsloser Koordinaten  $x = t/l$  verschwindet die Reichweite  $l$  aus den Lösungen der Störungen (563) und (568) (Skaleninvarianz). Man kann auf  $l$  normieren, ohne daß der Verlauf der Lösungen geändert wird. Im folgenden wird der Verlauf der Störungen  $\delta$  und  $\varepsilon$  ( $\triangleq \sigma$ ) dargestellt gemäß den Resultaten (568) und (563) untersucht. Hauptsächlich wird die einheitslose Koordinate  $x$  benutzt, da die Lösungen skaleninvariant sind und sowohl durch  $l$  und  $w$  geteilt werden kann ohne Änderungen der Dynamik hervorzurufen. Der Verlauf mit  $t$  und verschiedenen Reichweiten  $l$  folgt nur um das Verhalten der Kurven



37: Verlauf der Störung  $\varepsilon$  des Skalenfaktors  $a(t)$  und der Störung  $\delta$  des  $\xi$ -Feldes normiert auf  $wl$  als Funktion von  $t = xl$  in  $10^5 LJ$  mit Reichweiten  $l = 2R$ ,  $l = 3R$  und  $l = 4R$  normiert auf  $R$ .



38: Verlauf der Störung  $\varepsilon$  des Skalenfaktors  $a(t)$  und der Störung  $\delta$  des  $\xi$ -Feldes normiert auf  $wl$  als Funktion von  $x = tl$  in  $10^5 LJ$  mit Reichweiten  $l = 2R$ ,  $l = 3R$  und  $l = 4R$  normiert auf  $R$ .

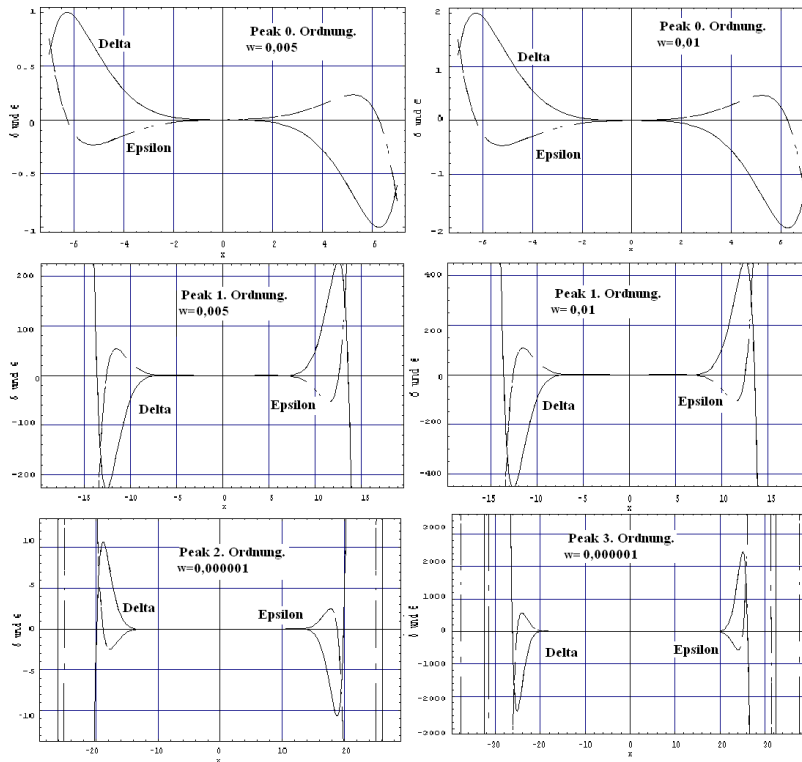
in Abhängigkeit davon zu betrachten und zwar auf  $w$  normiert, weil der Verlauf der linearisierten Störungen unabhängig davon ist.

Die Peakwerte bewegen sich nach “Außen” für höhere  $l$ -Werte. Die Peaks steigen dabei an. Sie sind so viel größer als die vorige Peaks, daß die näher an dem statischen Bereich nicht mehr erkennbar sind.

Die Peaks der  $\delta$ -Störung des  $\xi$ -Feldes liegen höher als die der  $\varepsilon$ -Störung des Skalenfaktors.

Man erkennt folgendes:

1. Wendepunkt bei  $t = 0$  liegt nicht beim Urknall.
2. Anfangssingularität, d.h.  $\varepsilon = -1$  bei speziellen Anfangsbedingungen nicht vorhanden.
3. Der Verlauf des Higgsfeldes und des Skalenfaktors sind nicht streng periodisch. Es gibt aber ein “atmendes”, “pulsierendes” Universum.
4. Die Peaks sind größer, je höher die Ordnung des Peaks, d.h. je weiter weg sie vom statischen Bereich liegen.
5. Die Extrema des Skalenfaktors und des Higgsfeldes sind zueinander fast um  $180^\circ$



39: Störungen  $\epsilon$ , bzw.  $\delta$  für verschiedene Peak-Ordnungen.

verschoben.  $\epsilon$  eilt dabei  $\delta$  hinterher.

6. Es besteht bezüglich des Wendepunktes fast ein punktsymmetrischer Verlauf der Skalenfaktor-Störung  $\epsilon$  und der des  $\xi$ -Feldwertes  $\delta$ .

Die Näherung ergibt sich für ein Universum, dessen Strahlung im wesentlichen unwichtig ist.

Das gegebene Universum steigt inflationär zu einer statischen Era, gefolgt von einer neuen starken Expansion und Deflation des Kosmos.

Nennen wir  $\hat{\epsilon}_i$  den Extrema von  $\epsilon$  an der Stelle  $x_i = (\frac{t}{l})_i$ ; die Extrema  $i$ -ter Ordnung. Für die ersten 12 Ordnungen der Peaks gilt:

| $i$ | $\hat{x}_i$       | $\hat{\varepsilon}_i \cdot w^{-1}$ | $=: \alpha_i \cdot 10^{2i}$ |
|-----|-------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| 0   | 5,25 $\approx$ 6  | 4,75                               | $47,5 \cdot 10^0$           |
| 1   | 11,5 $\approx$ 12 | 11 000                             | $110 \cdot 10^2$            |
| 2   | 17 $\approx$ 18   | $2,5 \cdot 10^6$                   | $250 \cdot 10^4$            |
| 3   | 26 $\approx$ 24   | $5,7 \cdot 10^8$                   | $570 \cdot 10^6$            |
| 4   | 30                | $13 \cdot 10^{10}$                 | $1300 \cdot 10^8$           |
| 5   | 36                | $3 \cdot 10^{13}$                  | $3000 \cdot 10^{10}$        |
| 6   | 45 $\approx$ 42   | $7 \cdot 10^{15}$                  | $7000 \cdot 10^{12}$        |
| 7   | 50 $\approx$ 48   | $1,6 \cdot 10^{18}$                | $16000 \cdot 10^{14}$       |
| 8   | 56 $\approx$ 54   | $3,8 \cdot 10^{20}$                | $38000 \cdot 10^{16}$       |
| 9   | 62 $\approx$ 60   | $0,8 \cdot 10^{22}$                | $80000 \cdot 10^{18}$       |
| 10  | 68 $\approx$ 66   | $2 \cdot 10^{25}$                  | $200000 \cdot 10^{20}$      |
| 11  | 74 $\approx$ 72   | $4,7 \cdot 10^{27}$                | $470000 \cdot 10^{22}$      |
| 12  | 78                | $11 \cdot 10^{28}$                 | $1100000 \cdot 10^{24}$     |

$\alpha_i$  wird durch die Tabelle definiert. Sie dient zur Betrachtung des Verhaltens von den Maxima  $\hat{\varepsilon}_i$ . Es gilt

$$\hat{\varepsilon}_i = -(2 + \Delta) \cdot \hat{\varepsilon}_{i-1} \cdot 10^{2i}. \quad (579)$$

$$= w \cdot \alpha_i \cdot 10^{2i} \quad (580)$$

$$(581)$$

Für  $\Delta := \left(\frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\varepsilon}_{i-1}} - 2\right) \cdot 10^{-2}$  gilt:

| $i$      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10  | 11   | 12   | MV   |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|
| $\Delta$ | 0,32 | 0,27 | 0,28 | 0,28 | 0,31 | 0,33 | 0,29 | 0,38 | 0,11 | 0,5 | 0,35 | 0,34 | 0,31 |

Somit gilt

$$\hat{\varepsilon}_i \approx 47,5 \cdot w \cdot (-2,31)^i \cdot 10^{2i}, \quad (582)$$

$$\text{mit } \alpha_0 = \hat{\varepsilon}_0 \cdot w^{-1} = 47,5.$$

und mit dem Mittelwert  $MV = 0,31$  von  $\Delta$ .

Für  $\alpha_i$  folgt dann mit den gegebenen Parametern

$$\alpha_i \approx 47,5 \cdot (-2,31)^i \cdot 10^{2i}. \quad (583)$$

Somit geben die Ordnung  $i$  und die Amplitude der Störung niedriger Ordnung die Höhe der  $i$ -Störung. Iterativ ist die Höhe des Peaks gegeben durch die Amplitude Nullter Ordnung und der Ordnung selber. Die Amplitude Nullter Ordnung ist  $\alpha_0$ .

$\alpha_i$  und  $\Delta$  kommen bei der numerischen Betrachtung in 7.6.3 auch vor. Somit werden später die Parameter verglichen.

### 7.6.2 Fazit des linearen Modells: Inflation und atmendes Universum

- Diskussion der linearen Lösung:

Nach dem linearen Modell soll der heutige Zustand des Universums (relativ) nahe des Wendepunktes sein. Es handelt sich um einen Bereich moderater aber beschleunigter Expansion. Diese Epoche geht dem Modell nach, eine Epoche rascher Expansion, die ein inflationäres Universum beschreiben sollte voraus. Somit sollte das Flachheits- und Horizont-Problem prinzipiell lösbar sein. Dabei übernimmt das  $\xi$ -Feld die Rolle der "Führungskraft" für die Inflation in Form der kosmologischen Funktion  $\Lambda(\xi) \triangleq V(\xi)$ , die besonders im Anfangsstadium des Universums eine besondere Rolle in der Dynamik spielt und im heutigen nur wenig von Null verschieden ist. Sie sollte im "Zukunftsstadium" wieder die Dynamik dominieren, bevor es zur neuen Kontraktion des Universums kommt, gefolgt von einer neuen Expansion.

Die Maxima der Störung  $\delta$  des  $\xi$ -Feldes und der Störung  $\varepsilon$  des  $a$ -Parameters sind fast um 180% verschoben (wobei  $\varepsilon$   $\delta$  naheilt), sodaß die Energie für die "Atmung" des Universums dem Higgsfeld entzogen wird. Dieses stellt dann den Grundbaustein der *Quintessenz* dar als skalares Feld für die Inflation.

Die Inflation folgt immer einer Deflation, ist also, wenn  $w$  physikalisch gewählt wird, eine *Chaotische Inflation*. Das Universum besitzt ein *nichtsinguläres Anfangsstadium* mit einem differenzierbaren Skalenparameter  $a$  beim (entschärften) Urknall. Also kann von Vorstadien des Universums gesprochen werden und von einem "Big-Crunch" vor dem Urknall mit einem pulsierenden Universum (zur Lösung des Horizont-Problems wird auch dadurch Rechnung getragen). Für solch eine Inflation braucht man nach [20] kein "Fine-Tuning" des  $\xi$ -Feldes im Anfangsstadium. Das *Higgsfeld* sorgt als *Inflaton-Feld* für die richtige Aufblähung ohne große Probleme, sodaß die *Chaotische Inflation* trotz teilweise unbekannter Anfangsstörung am Wendepunktstadium natürlich erscheint.

Im Falle, daß die Anfangsstörung so wählbar ist, daß  $a$  im Anfangsstadium verschwindet, so folgt trotzdem ein atmendes Universum, obwohl das nichtdifferenzierbare Verhalten von  $a$  am Urknall nicht sauber Vorstadien zuließe. Trotzdem könnte es sich um *Neue Inflation* handeln, wobei als Rollover-Kontraktion die Kontraktionsphase des Peaks  $\hat{\varepsilon}$  voriger Ordnung zu nehmen wäre. Wenn das so ist, dann hat sich  $\xi$  von allein eingestellt, da kein "Fine-Tuning" für  $\xi$  nötig ist, damit die Kontraktion nicht zu einer Singularität führt. Gegen eine *Neue Inflation* spricht aber, daß diese Kontraktionsphase nach einem Bereich  $\varepsilon = 0$  passieren soll und eher auf die Oszillation von  $\Lambda$  (d.h.  $V(\xi)$ ) schließen läßt, die für die Atmung des Universums zuständig wäre und auch für die Wiedererhitzung nach dem Urknall, indem ein Teil der Oszillation in Baryonen zerfallen könnte [20]. Außerdem soll das Higgsfeld die Dynamik insbesondere im Fall der chaotischen Inflation dominieren. Dafür spricht auch der hohe Wert des  $\xi$ -Feldes im Anfangsstadium des Universums. Die hohen  $\delta$ -Störungen des  $\xi$ -Feldes bei  $a = 0$  die sich hier ergeben sind nicht vereinbar mit der *Neuen Inflation*.

Eine genauere Aussage, insbesondere der Größenordnungen, kann anhand einer strengen Rechnung gegeben werden. Das benötigt eine numerische Lösung des in der HSTT verallgemeinerten FRIEDMANN- Modells.

### 7.6.3 Numerische Lösung des verallgemeinerten Friedmann-Modells

Die Störung  $\varepsilon$  kann mit der Zeit groß gegen eins werden, sodaß das linearisierte Modell versagt. Auch die Störungswerte von  $\xi$  könnten zu hohe Werte annehmen, insbesondere weil  $\delta$  in der linearen Näherung höhere  $i$ -Extrema besitzt als  $\varepsilon$ , sodaß  $\delta$  schon im Anfangsstadium einen Wert  $\delta > 1$  annehmen wird (was wiederum für chaotische Inflation nach dem linearen Modell spricht).

- Die strengen Gleichungen und Anfangsbedingungen für die Störung sind:  
Die Differentialgleichung für  $\delta$

$$\ddot{\delta} + 3\frac{\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} + \frac{\delta}{l^2} = \frac{1}{l^2}\sigma, \quad (584)$$

und der Energiesatz

$$(1+\sigma)(1+3\delta\varepsilon) = 1 \implies \sigma = -\frac{3\varepsilon}{1+3\varepsilon}. \quad (585)$$

Für das Higgsfeld gilt

$$\delta = l^2\left[\frac{\ddot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} + \frac{\dot{\varepsilon}^2}{(1+\varepsilon)^2}\right] - 2\varepsilon. \quad (586)$$

Also gemäß Gln. (584) und (585) sowie Gl. (586):

$$l^2\ddot{\delta} + 3l^2\frac{\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} + \delta + \frac{3\varepsilon}{1+3\varepsilon} = 0, \quad (587)$$

$$l^2\frac{\ddot{\varepsilon}}{1+\varepsilon} + l^2\frac{\dot{\varepsilon}^2}{(1+\varepsilon)^2} - \delta - 2\varepsilon = 0. \quad (588)$$

Mit der Substitution

$$x := c\frac{t}{l}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = '$$

kann man die strengen Gleichungen (587) und (588) umschreiben in<sup>94</sup>:

$$\delta'' + 3\frac{\delta'\varepsilon'}{1+\varepsilon} + \delta + \frac{3\varepsilon}{1+3\varepsilon} = 0, \quad (589)$$

$$\frac{\varepsilon''}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon'^2}{(1+\varepsilon)^2} - 2\varepsilon - \delta = 0. \quad (590)$$

Als Anfangsbedingungen für  $t = 0$  wählen wir, wie im linearisierten Fall:

$$\varepsilon = \delta = 0, \quad \varepsilon' = w, \quad \delta' = 0. \quad (591)$$

Somit können die Differentialgleichungen gelöst werden. Die Ergebnissen sind in den nachfolgenden Figuren dargestellt. Die nicht-linearen Termen in (587) und (588) zerstören die Skaleninvarianz der linearisierten Gleichung, sodaß die Lösungen jetzt von  $w$  nicht-linear abhängen.

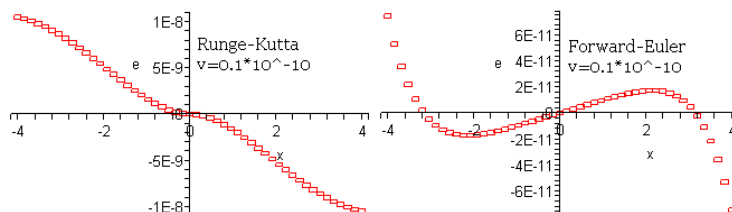
<sup>94</sup>Durch Linearisierung ergeben sie die vorherigen Gleichungen wieder.

- Genauigkeit der Kurven und  $w$ -Abhängigkeit:

Eine Untersuchung der  $\varepsilon$ -Kurven zeigt, daß insbesondere die Peaks höherer Ordnung nicht immer die Form behalten wie die niedriger (auch nicht wie im linearen Fall), wenn die Störung  $w$  geändert wird. Manche Peaks verschwinden sogar, wenn  $w$  durchlaufen wird. Die Punktsymmetrie, die im linearen Fall gilt, verschwindet bei der Behandlung höherer Ordnung der Peaks. In solchen Fällen treten auch Singularitäten, wohl weil die Genauigkeitsskala des Programms übertreten wird.<sup>95</sup>

Das nicht-punktsymmetrische Verhalten ergibt sich wegen Nichtlinearitäten die die Skaleninvarianz der Lösungen der Differentialgleichungen (587) und (588) zerstören. Bei kleiner werdenden  $w$ -Werten ändert sich die Lage der Peaks. Innere Peaks bleiben bei höher werdender Ordnung auf der gleichen Stelle und die Kurve wird fast punktsymmetrisch (äußere Peaks ausgeschlossen, die aber das punktsymmetrische Verhalten erhalten, wenn sie zu inneren Peaks werden, d.h. wenn man die Anfangsbedingungen so ändert, daß man Peaks weiter weg von  $t = 0$  betrachten kann).

Gründe für solch ein Verhalten lassen sich auch durch die Iteration verstehen. Das kann damit gestützt werden, daß mit verschiedenen Verfahren die Ergebnisse nicht identisch sind. Hier z.B. mit RUNGE-KUTTA-FEHLBERG- und mit Forward-EULER- Verfahren:



40: Numerische Lösung mit RUNGE-KUTTA-FEHLBERG- und Forward- EULER-Verfahren..

Ob beide Verfahren gleiche Ergebnisse liefern, hängt von der Wahl von  $w$  ab. Sonst ist es leicht, daß die Verfahren, insbesondere das RUNGE-KUTTA-FEHLBERG, die Peaks nicht mehr richtig wiedergeben und oft singuläre Ergebnisse liefern (die Iteration bricht zusammen), was man besonders bei einer Wahl zu großer  $w$ -Werte findet.

Das extrem nicht-punktsymmetrische Verhalten äußerer Peaks ist eine Folge der nicht-linearen Terme der Differentialgleichungen (587) und (588) und im linearisierten Fall garantieren diese Punktsymmetrie<sup>96</sup>. Da aber  $\varepsilon < -1$  für den Urknall unphysikalisch erscheint, ist bei höheren Ordnungen der Peaks  $w$  klein zu wählen, wodurch sie ein Verhalten bekommen der ähnlich ist wie im linearisierten Fall.

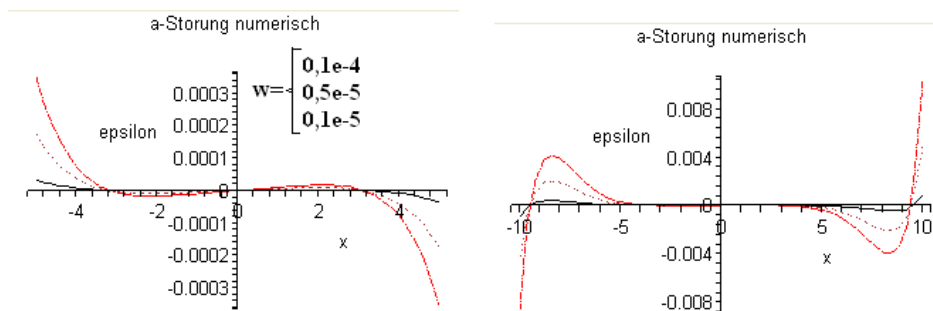
- Verlauf der Kurve:

Die numerische Bestimmung des Verlaufs von der  $\varepsilon$ -Störung des Skalenparameters  $a$  ergibt mit dem Forward-EULER-Verfahren im wesentlichen wiederum die lineare Form. Die Größe der Peaks ist wiederum von den Anfangsbedingungen abhängig.

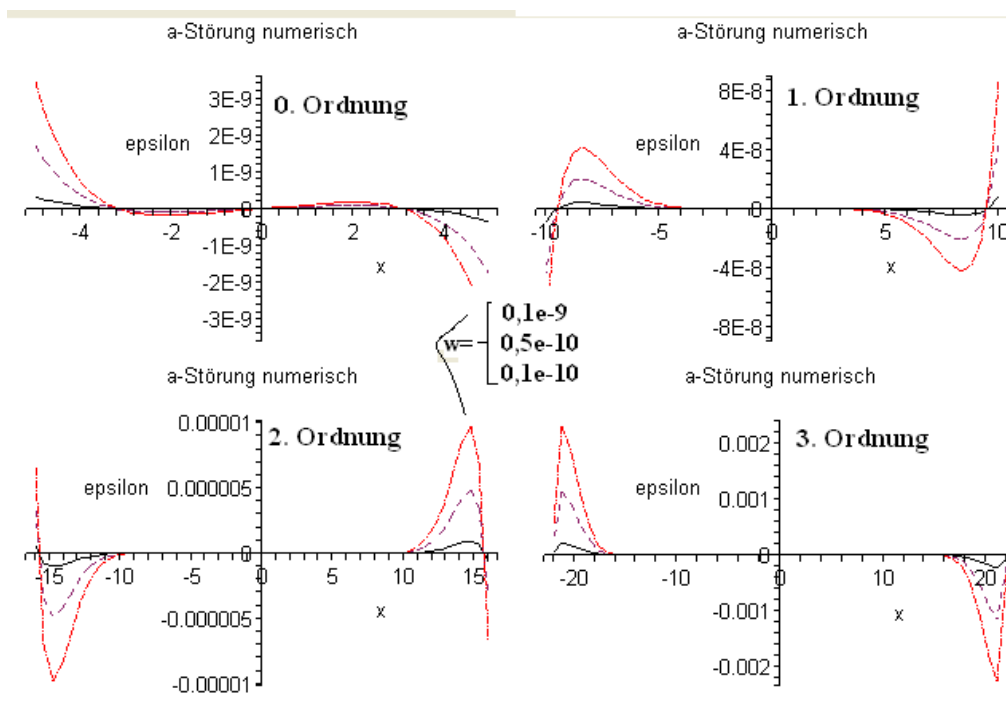
Die folgende Kurven der  $\varepsilon$ -Störung mit  $w$  als Parameter zeigen die Peaks bis in die 5. Ordnung. Die äußere Peaks  $i$ -ter Ordnung sind dabei soviel größer als die  $i - 1$ -ter Ordnung, daß die innere Peaks nicht mehr aufgelöst erscheinen.

<sup>95</sup>Für die numerische Rechnung wird Maple 9.50 benutzt.

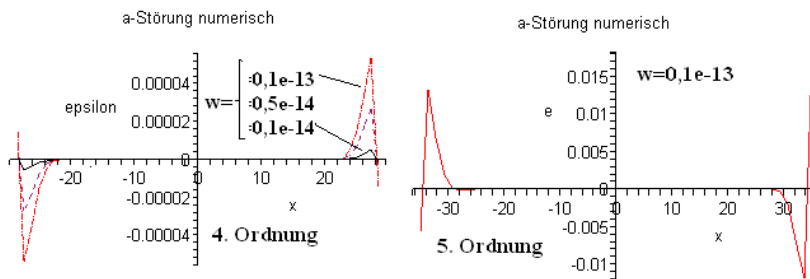
<sup>96</sup>Also Invarianz gegenüber  $x \rightarrow -x$ ,  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ ,  $\delta \rightarrow -\delta$ , was in den linearisierten Gleichungen offensichtlich ist.



41: Verhalten der  $a$ -Störung  $\epsilon$  für verschiedene  $w$ -Werte. Peaks für  $i = 0$  und  $i = 1$ .



42: Verhalten der  $a$ -Störung  $\epsilon$  für verschiedene  $w$ -Werte. "Aufgelöst" sind die Peaks der ersten 4 Ordnungen  $i = 0$  bis 4.



43: Verhalten der  $a$ -Störung  $\varepsilon$  für verschiedene  $w$ -Werte. Peaks für  $i = 4$  und  $i = 5$ .

Man findet für innere Peaks und richtige Wahl des Zeitintervalls für den Plot:

1. Atmendes Universum.
2. Fast puntsymmetrisches Verhalten der Peaks bezüglich des Wendepunktes.
3. Höhere Peaks je höher die Ordnung, d.h. je weiter weg vom quasi-statischen Bereich.
4. Keine Anfangssingularität  $\varepsilon = -1$  für die geeignete Wahl von  $w$ .

Für die Lage der Peaks und deren Wert  $\hat{\varepsilon}_i$  gilt:

| $i$ | $\hat{x}_i$ | $\Delta\hat{x}_i$ | $\hat{\varepsilon}_i \cdot w^{-1}$ | $\alpha_i \cdot 10^{2i}$ | $= \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\varepsilon}_{i-1}} \cdot 10^{-2}$ |
|-----|-------------|-------------------|------------------------------------|--------------------------|---|
| 0   | -2,15       |                   | -1,736                             | $-1,736 \cdot 10^0$      |   |
| 1   | -8,14       | 5,9               | $0,4172 \cdot 10^3$                | $4,172 \cdot 10^2$       | 2,4   |
| 2   | -14,75      | 6,7               | $-0,977 \cdot 10^5$                | $-9,77 \cdot 10^4$       | 2,34  |
| 3   | -21,05      | 6,3               | $0,229 \cdot 10^8$                 | $22,9 \cdot 10^6$        | 2,34  |
| 4   | -27,35      | 6,3               | $-0,536 \cdot 10^{10}$             | $53,6 \cdot 10^8$        | 2,34  |
| 5   | -33,7       | 6,35              | $0,126 \cdot 10^{13}$              | $126 \cdot 10^{10}$      | 2,36  |
|     | MV          | 6,21              |                                    |                          | 2,36  |

Stelle  $\hat{x}_i$  der Peaks und Höhe  $\hat{\varepsilon}_i$  normiert auf  $w$ .  $\Delta\hat{x}_i = \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}$ .

Somit gilt für die Extrema (analog wie im linearisierten Fall)

$$\hat{\varepsilon}_i = w\alpha_i \cdot 10^{2i} \quad (592)$$

$$= -(2 + \Delta)\hat{\varepsilon}_{i-1} \cdot 10^{2i}. \quad (593)$$

Dabei gilt

$$\Delta := \left( \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\varepsilon}_{i-1}} - 2 \right) \cdot 10^{-2} = 0,36. \quad (594)$$

Somit gilt mit  $\hat{\varepsilon}_0 = 1,736$ :

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_0 \cdot (-2,36)^i \cdot 10^{2i}. \quad (595)$$

Den Anfangszustand des Universums sollte man nahe bei  $\varepsilon \geq -1$  finden, d.h., es wird ein dichtes Anfangsstadium des Universums angenommen, aber nur im Ausnahmefall singulär. Das läßt sich durch richtige Wahl des  $w$ -Werts  $\hat{w}_i$  kriegen, was wiederum abhängig ist von der Ordnung  $i$  des Peaks.

Es gilt für die ersten Ordnungen:

| $i$ | $\hat{w}_i$             | $\frac{\hat{w}_i}{\hat{w}_{i-1}} := \beta$ |
|-----|-------------------------|--|
| 0   | $0,58 \cdot 10^0$       | -  |
| 1   | $-2,4 \cdot 10^{-2}$    | -241,7                                     |
| 2   | $10,2 \cdot 10^{-4}$    | -235,3                                     |
| 3   | $-4,367 \cdot 10^{-8}$  | -233,6                                     |
| 4   | $1,866 \cdot 10^{-10}$  | -234,0                                     |
| 5   | $-7,937 \cdot 10^{-13}$ | -235,1                                     |
|     | MV                      | -282,9                                     |

Für die  $w$ -Werte der Minima gilt iterativ:

$$\hat{w}_i = \hat{w}_0 \cdot (-282,9)^{-i} \quad (596)$$

$$\text{mit } \hat{w}_0 = 0,58. \quad (597)$$

$\hat{w}_0$  ist dabei die nötige Störung für Peaks 0-ter Ordnung mit  $\varepsilon \approx -1$  ( $\varepsilon \lesssim 1$ ). Man sieht, daß für Peaks hoher Ordnung eine immer kleinere Störungen zu nehmen sind um physikalische Ergebnisse realisieren zu können, wenn diese Peaks den Anfangsstadium des Universums entsprechen sollen. Somit wird der Verlauf der Kurve ähnlich wie im linearisierten Fall, wobei schon Folgen der Nichtlinearitäten auftauchen.

## 7.7 Vergleich des linearisierten Modells mit der numerischen Lösung

- Diskussion der numerischen Lösung:

Nach der numerischen Lösung sollte der heutige Zustand des Universums, wie im linearisierten Fall, nahe des Wendepunktes liegen, dem eine Ära rascher, inflationsartiger Expansion vorausgeht und dem wiederum eine rasche Expansion folgt.

Allgemein kann gesagt werden:

*Das Universum, ausgehend von den in der HSTT verallgemeinerten FRIEDMANN-Gleichungen, kann als ein verallgemeinertes LEMAÎTRE-Universum beschrieben werden. Das ist ein geschlossenes Universum mit einem quasistationären Bereich und einer DESITTER-Epoche, mit nichtverschwindender Kosmologischer Funktion  $\Lambda(\xi)$ . Dabei handelt es sich um ein atmendes Universum, dessen maximalen Expansionsphasen größer sind für Zeitskalen weiter weg von der quasi-statischen Ära. Dabei bedingt  $\xi$  die Atmung als Inflaton-Feld und Quintessenz.*

Das Wesentliche der linearen Ergebnisse gilt numerisch auch. Gleichmaßen kann geschlossen werden, daß es sich um ein inflationäres Modell handelt.

- Vergleich der Größenordnungen in beiden Modellen:

Für die extremalen Werte der  $a$ -Störung  $\varepsilon$  gilt in den Modellen formal dasselbe Verhalten

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_i &= -(2 + \Delta)\hat{\varepsilon}_{i-1} \cdot 10^{2i} \\ &= w\alpha_i \cdot 10^{2i} \\ &= w\alpha_0 \cdot (-2 + \Delta)^i \cdot 10^{2i}\end{aligned}\tag{598}$$

Die Werte lauten in den beiden Modellen, linear und numerisch:

|            | $\alpha_0$ | $\Delta$ | $\beta$ |
|------------|------------|----------|---------|
| linear:    | 47,5       | 0,31     | -230,26 |
| numerisch: | 1,736      | 0,36     | -282,9  |

Dabei lautet für die Extrema der Modelle und deren  $x$ -Werte:

|   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | MV    |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{\hat{\varepsilon}_{lin}}{\hat{\varepsilon}_{num}}$ | 27,36 | 23,97 | 25,59 | 24,89 | 24,25 | 23,89 | 24,99 |
| $\frac{x_{lin}}{\hat{x}_{num}}$                           | 2,44  | 1,41  | 1,15  | 1,24  | 1,10  | 1,07  | 1,40  |

Also sind die linearen Peaks ca. 25 Mal größer als numerisch. Das ist eine Folge der nicht-linearen Terme der Differentialgleichungen (587) und (588). Die Extrema liegen numerisch näher am Wendepunkt als linear der Fall ist. Trotzdem sind die Gleichungen formal dieselben.

## 8 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit bestand darin, die Folgen der Skalar- Tensortheorie mit Higgsfeld als skalarem Feld HSTT innerhalb der Kosmologie im weiteren Sinne zu überprüfen und klarzustellen, ob die Theorie in der Lage ist, zur Lösung offener Fragen der modernen Kosmologie beizutragen. Das heißt zur Erklärung der Dunklen Materie und flachen Rotationskurven, Quintessenz und Inflation, Schwarzen Löchern und damit oft gekoppelte Probleme wie Horizont und Flachheitsproblem. Das Higgsfeld übermittelt eine zusätzliche gravitative Kopplung, die für bestimmte Parameter sowohl zur Verflachung der Rotationskurven spiraler Galaxien führt, wie auch als Inflaton-Feld zur Inflation in einem atmenden LEMAITRE-Universum. Für Spiralgalaxien werden linearisierte und teilweise linearisierte Modelle homogener und polytroper Dichteverteilungen, mit und ohne massive singuläre Kerne untersucht. Die teilweise linearisierte Skalar-Tensortheorie mit einer Singularität im Zentrum führt nur unter der Voraussetzung, daß sich im Zentrum eine große Masse befindet und der Druck dort einer extremen Zustandsgleichung genügt, zu abgeflachten Rotationskurven. Abflachung ist aber auch möglich für verschwindende Zentralmassen  $\gamma = 2$ -polytroper Galaxien, sodaß die Zentralmasse nicht so wichtig für die Dynamik erscheint und die HSTT unter weniger Einschränkung empirische Ergebnisse wiedergeben kann. Die Masse wirkt hauptsächlich nur durch  $\xi$  durch Änderung der Gravitationszahl  $G$  und im Falle sehr großer Massen für die Dynamik verbergen sie sich durch die Schwächung der gravitativen Kopplung im Galaxienzentrum.

Die Kosmologie im engeren Sinne unter Annahme der ROBERTSON-WALKER-Metrik ergibt in der HSTT ein atmendes LEMAITRE-Universum mit einer chaotischen Inflation ohne Singularität im Anfangsstadium des Universums. Dabei ergibt sich ein nichtverschwindender kosmologischer Term  $\Lambda(\xi)$  als Folge eines hohen  $\xi$ -Feldes, von dem die Inflation ausgeht.

In der Arbeit wurde das Higgsfeld für die Skalar-Tensortheorie gewählt, weil Higgsfelder auf gravitativer und auf YUKAWA-Art koppeln und so die Theorie in natürlicher Weise zu kurzreichweitigen Potentialen für die Gravitation führt, sowie zu einer Variation der Gravitationskonstanten, und zu einer kosmologischen Funktion. Die Bestätigung der flachen Rotationskurven sowie die prinzipiell erscheinende Inflation stellen einen Anfang dar für die empirische Tragfähigkeit dieser Skalar-Tensortheorie. Sie gehorcht außerdem nicht dem BIRKHOFF-Theorem, sodaß die Vakuumlösungen nicht statisch sein müssen, und sie zeigt Analogien zu der ART mit skalaren Feldern, in der streng keine Schwarzen Löcher vorkommen. Die Frage nach der Existenz Schwarzer Löcher bleibt aber über die Analogie hinaus immer noch offen, sowie weitere Konsequenzen des MEISSNER-Effektes (gegeben durch die Higgsfeldgleichung) innerhalb der Galaxien. Es sollte auch noch untersucht werden, welche Bedeutung die kosmologische Funktion für das PRIESTER-Modell haben könnte. Solche Betrachtung ist nicht Bestandteil dieser Arbeit, aber das PRIESTER-Modell wird innerhalb der HSTT im Anhang A skizziert und erläutert.

Allgemein kann die Schlußfolgerung gegeben werden, daß die HSTT wohl zur Lösung moderner Probleme der Kosmologie beitragen kann. . .

## 9 Anhang A: Priester-Modell

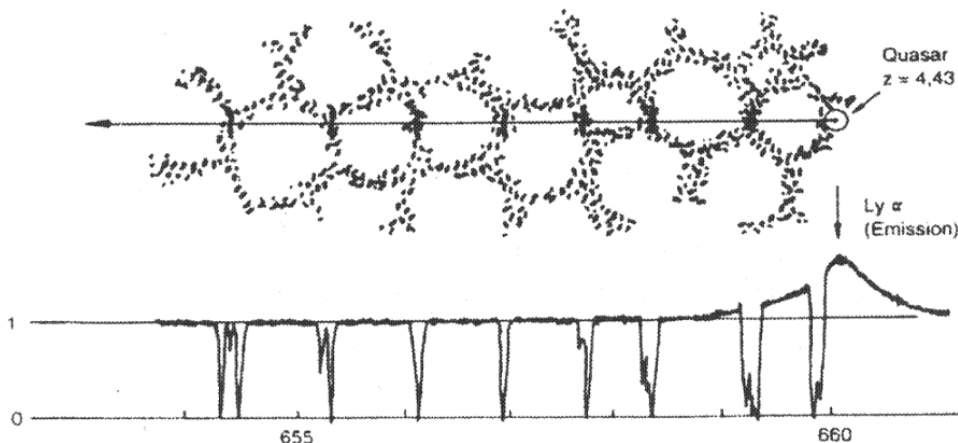
Wie schon mehrmals erwähnt, zeigen die Standardmodelle mehrere Probleme. Weitere davon sind:

- Viele Kugelsternhaufen sind älter als das berechnete Weltalter.
- Die Blasenstruktur, d.h. die lokale Häufung von Materie mit dazwischenliegenden materiefreien Gebieten (sog. Voids) wird nicht berücksichtigt.
- Der Zeitraum der Galaxienentstehung ist zu kurz.

Das berechnete Alter der Sternhaufen und der Zeitraum der Galaxieentstehung haben im weiten Sinne mit der Quintessenz, bzw. mit der Inflation zu tun, da die Lage der Galaxien mit  $\Lambda > 0$  weiter weg ist, als wenn das Universum nach dem Standard-Urknall-Modell expandiert. Die Inflation bewirkt auch eine rasche Expansion, durch die der Zeitraum für die Galaxieentstehung erniedrigt sein kann.

Zur Behebung dieser Probleme kann man das PRIESTER-Modell benutzen, der von einer nichtverschwindenden kosmologischen Konstante ausgeht, also Quintessenz, die ja antigravitativ wirkt und innerhalb der HSTT durch das  $\xi$ -Feldpotential  $V(\xi)$  gegeben ist.

Das PRIESTER-Modell bedient sich den Spektren von Quasaren, die von SANDAGE 1965 entdeckten quasistellare Radioquellen, die bei optischer Betrachtung sternförmig erscheinen, deren Spektren stark rot verschoben sind und die eine starke Radiostrahlung aussenden. Aus diesen erhält man Information über die Struktur des Raumes der Vergangenheit, was zur Annahme führt, daß das Universum voll mit interstellaren Wasserstoff-Wolken in den Galaxien ist, durch die die Strahlung durchläuft, wobei Absorptionslinien entstehen. Die Rotverschiebung steht in direkter Relation zur Entfernung.



44: Quasarspektrum und seine Entstehung. Absorptionslinien an den Blasenoberflächen.[34]

Die Quasar-Spektren sind aus folgenden Teilen zusammengesetzt:

- kontinuierlicher Anteil, hauptsächlich Synchrotronstrahlung.
- Emissionslinien, LYMAN- $\alpha$ -Linien ( $\lambda = 1216\text{\AA}$ ).
- Absorptionslinien, LYMAN- $\alpha$ -Forest (-Wald).

Der LYMAN- $\alpha$ -Forest der  $\alpha$ -Absorptionslinien der Quasaren interpretiert man als eine Konsequenz der Blasenstruktur der Materieverteilung im Universum. Eine Analyse davon kann bei der Determinierung mehrerer kosmologischer Parameter helfen, wenn man annimmt, daß die Blasenstruktur im Raum ruht und homogen ist, und daß die Blasesdurchmesser gleich sind bei einer fixen Zeit und zusammen mit dem Universum expandieren.[36]<sup>97</sup>

Typische Durchmesser der Blasen liegen bei ca.  $30Mpc$  (für  $H = 90km/s$ ). Aus Vergleichen zwischen nahen und fernen Absorptionen lassen sich Schlüsse auf die zukünftige Entwicklung der Strukturen ziehen. Die Modelle ohne kosmologische Konstante sind aber widersprüchlich, da das Universum sonst zu jung ist, um die Blasenstruktur aufgrund von Gravitationsinstabilitäten gebildet zu haben, andererseits ergeben sich für weit entfernte Blasen kleinere Durchmesser (ca.  $6Mpc$ ) als zunächst angenommen. Dies bedeutet, es muß die FRIEDMANN-Gleichung mit  $\Lambda \neq 0$  gelöst werden.[34] Aus den vorigen Kapiteln weiß man, daß die HSTT in natürlicher Weise eine kosmologische Größe analog der kosmologischen Konstante  $\Lambda_0$  impliziert, abhängig von dem Potential des Higgsfeldes, und insbesondere über die Inflation erkennt man im Kapitel 7.6, daß das Universum innerhalb der HSTT ein verallgemeinertes Lemaître-Universum ist. In [18] und [19] führt das Higgspotential  $V(\xi)$  die Dynamik in primogänen Zeiten und schwächt sich zu späteren Zeiten, wobei die Materie dann die Dynamik dominiert. Das erklärt, wieso die kosmologische Größe  $\Lambda$  so klein, aber endlich ist. Also stellt sich die Frage, ob die funktionelle kosmologische "Konstante"  $\Lambda(\xi)$  aus dem Higgspotential der HSTT zur Behebung des Problems gegeben durch das PRIESTER-Modell beitragen kann.

Grundlegende Bezeichnungen für die Analyse sind:

- Distanz Beobachter-Quasar:  $h = ah_k$ ,
- Void-(Blasen-)Durchmesser:  $\Delta h = a\Delta h_k$ ,
- Expansionsrotverschiebung:  $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{a_0}{a} - 1$ .

Für die Rotverschiebungsmessung ist es zweckmässig, den Winkel  $\chi$  zu benutzen. Mit  $ds = 0$  folgt:<sup>98</sup>

$$d\chi = dh_k = -a^{-1}cdt = -c\frac{da}{a}\dot{a} = c\frac{a}{\dot{a}}\frac{dz}{a_0} \quad (599)$$

mit der Rotverschiebungsbeziehung

$$\frac{a_0}{a} = 1 + z. \quad (600)$$

Gleichung (599) ist die Differentialgleichung der Rotverschiebung  $z(\chi)$  mit  $\chi$  als Distanzwinkel. Dabei wird das Licht rückwärts in der Zeit verfolgt, wobei die Vorzeichenkonvention

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{c}{a} \quad (601)$$

benutzt wurde.

Zwischen der Rotverschiebungsdifferenz  $dz$  und der Winkeldifferenz  $d\chi$  gilt die Beziehung:

$$dz = \frac{dz}{d\chi}d\chi. \quad (602)$$

<sup>97</sup>Ursprünglich kritisierte man an dem Modell, daß es nur an wenigen Spektren "angepaßt" war. Heutzutage besitzt man Daten aus vielen Quasaren und die Annahmen des Modells haben sich bewehrt.

<sup>98</sup>Es gilt auch ausgehend aus  $h = a \cdot h_k$ :  $dh = a \cdot dh_k \Rightarrow c = \frac{dh}{dt} = a \frac{dh_k}{dt}$ .

$d\chi$  kann identifiziert werden mit den Rotverschiebungsdifferenzen  $\Delta z$  des LYMAN- $\alpha$ -Waldes, wobei  $d\chi$  den Winkeldurchmesser  $\Delta\chi$  der Blasen entspricht. Dieser ist als konstant angenommen, d.h. unabhängig von  $z$ . Dafür muß  $|\Delta z| \ll z$  gelten [36]. So erhält man durch Erweiterung des Differentials:

$$\frac{dz}{d\chi} = \frac{dz}{da} \frac{da}{dt} \frac{dt}{d\chi} = \frac{dz}{da} \dot{a} \frac{1}{\frac{d\chi}{dt}} \quad (603)$$

und aus der Rotverschiebung

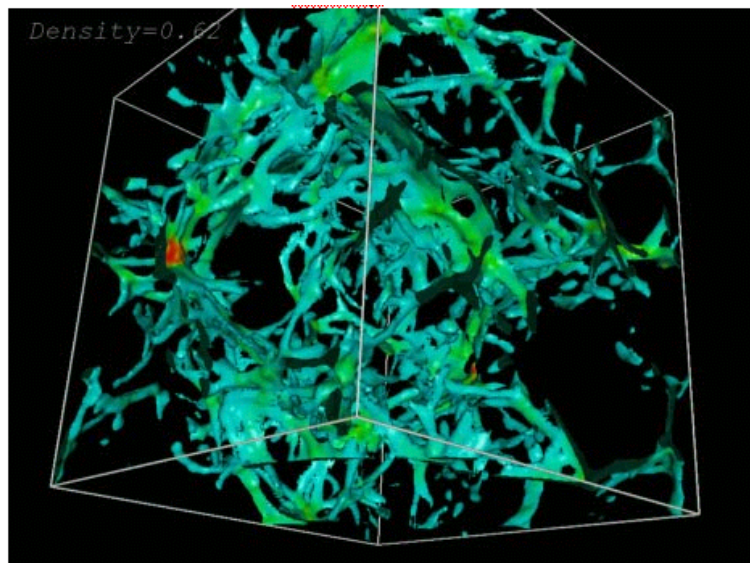
$$\frac{dz}{da} = -\frac{a_0}{a^2} \quad (604)$$

folgt letztlich:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{a_0}{c} \frac{\dot{a}}{a} \Delta\chi, \quad \Delta\chi = \text{const} \\ &= \frac{a_0}{c} H(z) \Delta\chi. \end{aligned} \quad (605)$$

Da  $d\chi$  orts- und zeitunabhängig ist, wächst die Blasengröße ausschließlich mit der Expansion des Raumes. Benötigt wird noch die Form des Skalenfaktors, was hier aus der FRW-Metrik und der verallgemeinerten Friedmanngleichung folgt.

Die EINSTEINSchen Feldgleichungen entsprechen hier den verallgemeinerten Friedmann-



45: Das LYMAN- $\alpha$ -Wald. Von J. Shalf, Y. Zhang (UIUC) et al., GCCC [119].

gleichungen. Dieser Skalenfaktor gilt nach (481) (die Formeln wieder mit  $c = 1$ )

$$\text{1.Friedmann: } \dot{a}^2 = (1 + \xi)^{-1} \left[ \frac{8\pi G}{3} \rho + \left( \frac{1}{4l^2} \xi^2 - \frac{\dot{a}}{a} \dot{\xi} \right) \right] a^2 - k \quad (606)$$

und nach (483)

$$\begin{aligned} \text{2.Friedmann: } \ddot{a} &= \frac{1}{2} (1 + \xi)^{-1} \left[ -8\pi G p - \left( \ddot{\xi} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\xi} - \frac{3}{4l^2} \xi^2 \right) \right] a - \frac{\dot{a}^2 + k}{2a} \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \xi)^{-1} \left[ 8\pi G p + \frac{8\pi G}{3} \rho + \left( \ddot{\xi} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\xi} - \frac{1}{2l^2} \xi^2 \right) \right] a. \end{aligned} \quad (607)$$

Man geht von einem heute Staub-dominierten Universum aus. Also soll die Strahlungsdichte insbesondere für kleine  $z$ , vernachlässigbar sein. Also hat man für das gegenwärtige Universum (Index Null)

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}(1 + \xi)^{-1} \left[ \frac{8\pi G}{3} \varrho_m + \left( \ddot{\xi} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\xi} - \frac{1}{2l^2} \xi^2 \right) \right] a. \quad (608)$$

Materiedominiert gilt die Erhaltungsgröße<sup>99</sup>

$$\varrho_m a^3 = const. \quad (609)$$

$\varrho$  ist weiterhin die materielle Dichteverteilung und  $a$  der Skalenfaktor. Mit Gl. (606) für das gegenwärtige Universum (Index Null) erhält man:

$$a_0^2 = (1 + \xi_0) \frac{\dot{a}_0^2 + kc^2}{\frac{8}{3}\pi G \varrho_{m0} + \frac{1}{4l^2} \xi_0^2 - H_0 \dot{\xi}_0}. \quad (610)$$

Die HUBBLE-Konstante ist  $H := \frac{\dot{a}}{a}$ .

Definieren wir

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &:= (1 + \xi_0)^{-1} \frac{8\pi G}{3} \varrho_{m0} \frac{a_0^2}{\dot{a}_0^2} =: \frac{\varrho_{m0}}{\varrho_c}, & \varrho_c &:= \frac{3}{8} \frac{H_0^2}{\pi G} (1 + \xi_0), \\ \hat{\Omega} &:= (1 + \xi_0)^{-1} \left( \frac{1}{4l^2} \xi_0^2 H_0^{-2} - \dot{\xi}_0 H_0^{-1} \right). \end{aligned} \quad (611)$$

Somit wird Gl. (610) zu

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\dot{a}_0^2 + kc^2}{\hat{\Omega} H_0^2 + \hat{\Omega}_\Lambda H_0^2} \\ &= \frac{a_0^2}{\hat{\Omega} + \hat{\Omega}_\Lambda} + \frac{k}{(\hat{\Omega} + \hat{\Omega}_\Lambda) H_0^2}. \end{aligned} \quad (612)$$

Daraus folgt nach einigen Umrechnungen:

$$a_0^2 = \frac{k}{(\hat{\Omega} + \hat{\Omega}_\Lambda - 1) H_0^2} =: \frac{k}{b H_0^2}. \quad (613)$$

Dabei gilt<sup>100</sup>

$$b := \hat{\Omega} + \hat{\Omega}_\Lambda - 1. \quad (614)$$

Diese Gleichung ist formal wie in [36]. Somit entspricht  $\hat{\Omega}$  den Dichteparameter,  $\hat{\Omega}_\Lambda$  ein Parameter der kosmologischen “Konstanten” und  $\varrho_c$  die kritische Dichte.<sup>101</sup> Man sieht

$$\begin{aligned} b > 0 &\iff k = +1 \\ b = 0 &\iff k = 0 \\ b < 0 &\iff k = -1 \end{aligned} \quad (615)$$

<sup>99</sup>Setzt man die statische Ergebnisse aus de HSTT ein, so folgt  $\Delta z = 0$ ,  $H = 0$  und  $A_{(0)} = 0$ , wie man für eine EINSTEIN-Epoche des Universums erwartet. Die Friedmanngleichungen ergeben auch  $\dot{a} = 0$  und  $\ddot{a} = 0$ . Die Erhaltungsgröße ist  $\frac{3}{4\pi G} l = const.$

<sup>100</sup>Die aus der HSTT statischen Werte eingesetzt  $b_{30} = 2b_{00} = -\frac{1}{3}b_{20} = \frac{2}{3}\Delta^2\chi$ .

<sup>101</sup>Statisch, mit den Ergebnissen aus der linearisierten HSTT, ergibt sich  $a_{(0)} = l^2$ , was gut für die hier definierten Größen spricht. Nur sind die Dichte-Parameter im statischen Fall nicht eindeutig definiert, aber  $\hat{\Omega}H_0$  und  $\hat{\Omega}_\Lambda H_0$  sind statisch gleich  $\frac{2}{3l^2}$  und  $\frac{1}{3l^2}$ , mit  $\frac{hat{\Omega}_0}{\hat{\Omega}_\Lambda} = \frac{b_{30}}{b_{00}} = 2$ .

Unter Benutzung des Erhaltungssatzes (609), (606) und der Rotverschiebung (605) erhält man<sup>102</sup>

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = (1 + \xi)^{-1} \frac{8\pi G}{3} \varrho_0 (1 + z)^3 + \frac{1}{4l^2} \xi^2 (1 + \xi)^{-1} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{\xi} (1 + \xi)^{-1} - \frac{kc^2}{a_0^2} (1 + z)^2. \quad (616)$$

Außer nahe und während der DESITTER-Epochen, während  $\Lambda \sim 10^{-52}$  ist, ist  $\dot{\xi} \approx$  anzunehmen. Somit erhält man

$$b_0 := (1 + \xi)^{-1} \frac{a_0^2}{c^2} \left[ \frac{1}{4l^2} \xi^2 \right] \Delta^2 \chi. \quad (617)$$

$$b_2 := -k \Delta^2 \chi \quad (618)$$

$$b_3 := (1 + \xi)^{-1} a_0^2 \frac{8\pi G}{3} \varrho_0 \Delta^2 \chi. \quad (619)$$

Setzt man die Werte aus der linearisierten HSTT ein, so ergibt sich natürlich  $b > 0$  und damit  $k = 1$ .

Gln. (617) bis (618) eingesetzt in  $\Delta z$  (605) bekommt man die LYMAN- $\alpha$ -Forest-Relation:

$$(\Delta z) = b_0 + b_2 (1 + z)^2 + b_3 (1 + z)^3 \quad (620)$$

mit den dimensionslosen Parametern  $b_0$ ,  $b_2$  und  $b_3$  aus (617), (618) und (619).<sup>103</sup> Diese sind analog wie in [28] mit (mit  $c$  explizit)

$$\acute{a}_0 := \frac{1}{3} \Lambda_0 a_0^2 \Delta^2 \chi, \quad (621)$$

$$\acute{a}_2 := -k \Delta^2 \chi, \quad (622)$$

$$\acute{a}_3 := \frac{8\pi G}{3c^2} \varrho_0 a_0 \Delta^2 \chi. \quad (623)$$

Es gilt (51)

$$V(\xi) = \frac{3\mu^4}{2\lambda} \xi^2 \approx \frac{3}{32l^2 \pi G} \xi^2 \quad (624)$$

und (49)

$$\Lambda(\xi) = 8\pi G \frac{V(\xi)}{1 + \xi}. \quad (625)$$

Es gilt  $\acute{a}_2 = b_2$  und für verschwindende  $\xi$ -Felder gilt  $\acute{a}_0 = b_0 = 0$ ,  $\acute{a}_3 = b_3$ .  $b_0$  in Gl. (617) hängt wie  $\acute{a}_0$  in Gl. (621) vom kosmologischen Term ab:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^2 \left[ \frac{16}{6} \pi G V(\xi) \right] \Delta^2 \chi \\ &= \frac{1}{3} a_0 \Lambda(\xi) \Delta^2 \chi \end{aligned} \quad (626)$$

$$= \acute{a}_0. \quad (627)$$

<sup>102</sup>Die Untersuchung des LYMAN- $\alpha$ -Waldes außerhalb der HSTT, mit nichtverschwindender kosmologischer Konstante führt zu  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho_0 (1 + z)^3 - \frac{kc^2}{a_0^2} (1 + z)^2 + \frac{1}{3} \Lambda_0 c^2$ . [36]

<sup>103</sup>Die aus der HSTT statischen Werte eingesetzt, ergeben  $b_{3(0)} = 2b_{0(0)} = -\frac{1}{3}b_{2(0)} = \frac{2}{3}\Delta^2\chi$ .

Also sind die  $b_i$ -Parameter formal wie in dem PRIESTER-Modell mit kosmologischer Konstante  $\Lambda_0$  anstatt einer Funktion  $\Lambda(\xi)$ .<sup>104</sup> Somit sind auch  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{\Omega}_\Lambda$  auch mit  $\Omega$  und  $\Omega_\Lambda$  in [36] verknüpft (dabei wurde die Annahme gemacht, daß  $\xi \equiv \xi(z) \approx \xi_0$  gilt):

$$\hat{\Omega}_\Lambda = \frac{1}{3} \frac{\Lambda(\xi)}{H_0^2}. \quad (628)$$

Gl. (628) ist formal gleich  $\Omega_\Lambda$  in [36], während  $\hat{\Omega}$  in (611) den Parameter  $\Omega$  entspricht, mit einem Vorfaktor  $\zeta^{-2} = (1 + \xi)^{-1}$ . Allerdings heißt das  $(1 + \frac{\xi}{c^2})^{-1}$ , wenn  $c \neq 1$  gewählt wird, sodaß der Vorfaktor an Gewicht verliert. Nur in DESITTER-Epochen wird  $\zeta^{-1}$  von eins sehr unterschiedlich.

Aus Gl. (616) und (617) bis (619) ergeben für den gegenwärtigen Zustand ( $z = 0$ ):

$$H_0^2 = a_0^{-2} \Delta^{-2} \chi [b_3 + b_2 + b_0] \quad (629)$$

und mit Gl. (609) folgt:

$$\frac{k}{b} = \Delta^{-2} \chi [b_3 + b_2 + b_0]. \quad (630)$$

Aus den dimensionslosen Parametern und  $H_0$  erhält man

$$\hat{\Omega} = \frac{b_3}{b_3 + b_2 + b_0}, \quad \hat{\Omega}_\Lambda = \frac{b_0}{b_3 + b_2 + b_0}, \quad \frac{\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}_\Lambda} = \frac{b_3}{b_0}. \quad (631)$$

Somit erhält man mit Gl. (613):

$$b = \frac{-b_2}{b_3 + b_2 + b_0}. \quad (632)$$

Also kann die Dichte und die Parameter  $\hat{\Omega}$  und  $\hat{\Omega}_\Lambda$  (siehe (611)) ausrechnen ohne die gegenwärtige HUBBLE-Konstante  $H_0$  zu kennen.

Eine beschleunigte Expansion des Universums geschieht, wenn  $\ddot{a} > 0$ . Dafür folgt aus (607) mit (609), (611), (600) und (617) bis (619):

$$(1 + z)^3 < 2\hat{\Omega}_\Lambda/\hat{\Omega} = 2\frac{b_0}{b_3}, \quad (z > 0). \quad (633)$$

Das gegenwärtige Akzellerationsparameter  $q_0$  wird mit (607), (611), (617), (618), (619) und (629) zu:

$$q_0 = \left(\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}\right)_0 = \hat{\Omega}_\Lambda - \frac{1}{2}\Omega = \frac{b_0 - \frac{1}{2}b_3}{b_3 + b_2 + b_0}. \quad (634)$$

Anhand von  $\Delta z(z)$  der LYMAN- $\alpha$ -Wälder mehrerer Quasaren können die Werte von  $b_0$ ,  $b_2$  und  $b_3$  bestimmt werden, wenn man einige lineare algebraische Gleichungen löst, von denen die Werte von  $\varrho_0$ ,  $\Lambda$ ,  $a_0$  und  $\Delta\chi$  folgen. Die HUBBLE-Konstante muß leider angegeben werden (siehe [36]).

Aus  $b_2$  in Gl. (618) folgt das Vorzeichen von  $k$  und der Wert von  $\Delta\chi$ .<sup>105</sup> Mit (629) erhält man damit den gegenwärtigen Abstandsparameter  $a_0$ . Aus  $b_0$  und  $b_3$  folgen die Werte für  $\Lambda$ , bzw. für  $\varrho_0$ . Damit sind auch  $\hat{\Omega}$  und  $\hat{\Omega}_\Lambda$  nach Gl. (631) bestimmt, sowie auch  $b$  in Gl. (615).

<sup>104</sup>Es wird weiterhin die Nomenklatur mit  $b$  benutzt, um die Parameter nicht mit dem Skalenfaktor  $a$  zu verwechseln.

<sup>105</sup>In HSTT gilt  $k = 1$ .

Der gegenwärtige Durchmesser der Blasen ist gegeben durch  $a_0\Delta\chi$ .

Das Alter  $t_0$  des Universums kann bestimmt werden. Aus (616) erhält man zusammen mit (600) und (617) bis (619):

$$dt = a_0\Delta\chi \frac{da/a_0}{[b_3\frac{a_0}{a} + b_2 + b_0(\frac{a}{a_0})^2]^{1/2}}. \quad (635)$$

Substituiert man  $\frac{a}{a_0} =: y$  und eliminiert man  $a_0\Delta\chi$  nach (629), so erhält man

$$t_0 = \frac{\sqrt{b_3 + b_2 + b_0}}{H_0} \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{b_3 y + b_2 y^2 + b_0 y^4}}. \quad (636)$$

## 10 Anhang B: Definitionen und Konventionen

### 10.1 Naturkonstanten und Einheiten

In dieser Arbeit wird im wesentlichen, wenn nicht anderes erwähnt, das GAUSS-System gewählt, d.h. CGS-System mit

$$c = 1, \hbar = 1 \quad (637)$$

Für die fundamentalen Naturkonstanten gilt sonst:

|   |  |
|---|--|
| (reduziertes) PLANCKsches Wirkungsquantum | $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-27} gcm^2/s \text{ (erg} \cdot s)$ |
| Lichtgeschwindigkeit                      | $c = 2,997925 \cdot 10^{10} cm/s$  |
| NEWTONsches Gravitationskonstante         | $G = 6,6732 \cdot 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$                                  |
| BOLTZMANN-Konstante                       | $k_B = 1,38062 \cdot 10^{-16} gcm^2/s^2 K^{-1} \text{ (erg/K)}$                |

Es gilt:

| Größe                           | Symbol                                      | Einheit (cgs)   |
|---------------------------------|---|---|
| Wirkungsquantum                 | $\hbar$                                     | $gcm^2 s^{-1}$  |
| Lichtgeschwindigkeit            | $c$   | $cms^{-1}$  |
| Gravitationskonstante           | $G$   | $cm^3 g^{-1} c^{-2} (\simeq c^3 \hbar^{-1} \cdot cm^2)$         |
| Lagrangedichte                  | $\mathcal{L}$                               | $gcm^{-1} s^{-2} (\simeq \rho c^2)$                             |
| Ableitungen                     | $\partial, D, \dots$                        | $cm^{-1}$   |
| Eichfelder                      | $A$   | $cm^{-1}$   |
| Feldstärke                      | $F$   | $cm^{-2}$   |
| Fermionenfeld                   | $\psi$                                      | $cm^{-1} s^{-1/2} (\simeq c^{1/2} \cdot cm^{-3/2})$             |
| Higgsfeld                       | $\phi, v, \varphi, \sqrt{\xi}, \sqrt{\chi}$ | $cm^{1/2} g^{1/2} s^{-1} (\simeq \sqrt{\hbar c} \cdot cm^{-1})$ |
| Parameter des Higgs potentials: |   |   |
|                                 | $\mu$                                       | $cm^{-1} \simeq Mc/\hbar$                                       |
|                                 | $\lambda$                                   | $s^2 g^{-1} cm^{-3} (\hbar c)^{-1}$                             |

Die Einheiten verschiedener wichtiger Felder und Konstanten

### 10.2 Signatur und Indizes

- Innerhalb dieser Arbeit wird als Signatur der Metrik

$$(+, -, -, -) \quad (638)$$

gewählt, mit den Komponenten (0, 1, 2, 3).

Also für die MINKOWSKI-Metrik:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (639)$$

Demnach laufen die griechischen Indizes, außer wenn ausdrücklich etwas anderes erwähnt, von 0 bis 3.

- Die lateinischen Indizes sind, wenn nichts anderes erwähnt, 1, 2, 3, also nur für den Raum.

- Die EINSTEINSche Summenkonvention gilt i.A., und zwar für Indizes, die je *einmal* in oberer (kontravarianter) und unterer (kovarianter) Stellung auftreten, falls nicht anderes vermerkt.

Beispiel:

$$A_{\mu}{}^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 A_{\mu}{}^{\mu} \quad (640)$$

Dagegen wird *nicht* summiert bei Ausdrücke wie

$$A_{\mu\mu} \quad (641)$$

- Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung wird angegeben durch

$$\hat{S}\psi_{\mu\nu} = \psi_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu\nu} + \psi_{\nu\mu}) \quad (642)$$

bzw.

$$\hat{A}\psi_{\mu\nu} = \psi_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu\nu} - \psi_{\nu\mu}), \quad (643)$$

wobei die Operatoren der Symmetrisierung und Antisymmetrisierung in orthogonale Unterräume  $\mathcal{E}_S$  und  $\mathcal{E}_A$  projizieren, mit  $\hat{S}\hat{A} = 0$ .  $\hat{S}$  und  $\hat{A}$  sind Projektoren, mit

$$\hat{S}^2 = \hat{S}^\dagger = \hat{S}, \quad \hat{A}^2 = \hat{A}^\dagger = \hat{A} \quad (644)$$

### 10.3 Die Ableitung

Für die Ableitung wird für den allgemeinen Fall der “Strich” gewählt, doppelt für die kovariante Ableitung:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x_{\mu}} = \partial_{\mu} \cdot = \cdot |_{\mu} \cdot \quad (645)$$

Die kovariante Ableitung  $D \cdot \equiv \cdot |_{\parallel}$  ist zu wählen, je nachdem, auf was sie wirkt. Allgemein gilt:

$$D_{\mu a}{}^b{}_{\alpha}{}^{\beta} \cdot = \partial_{\mu} \delta_a{}^b \delta_A{}^B \delta_{\alpha}{}^{\beta} \cdot \pm ig A_{\mu a}{}^b{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{A}{}^B \cdot \\ \mp \Gamma_{\mu}{}^{\beta}{}_{\alpha} \delta_a{}^b \delta_A{}^B \cdot \mp \Gamma_{\mu A}{}^B \cdot \quad (646)$$

mit dem oberen Vorzeichen für kovariante und dem unteren für kontravariante Indexstellung.  $\mu$  ist der Index für Vektoren, lateinisch für den Isospin, große Buchstaben für den Spin und  $\alpha$  und  $\beta$  die Koeffizienten der Matrix.

In dieser Arbeit werden die Spin-Freiheitsgrade nicht betrachtet, sodaß  $\Gamma_{\mu A}{}^B$  nicht vorkommt. Im folgenden wird nur die Definition für Isospin-Freiheitsgrade gegeben. Die Indizes werden in dieser Arbeit außer im Falle von  $\mu$  weitgehend weggelassen.

### 10.4 Konnektionen und Krümmungstensoren

Die Konnektionskomponenten lauten<sup>106</sup> in holonomer Basis

$$\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\beta\alpha|\nu} + g_{\alpha\nu|\beta} - g_{\beta\nu|\alpha}) = \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} \quad (647)$$

<sup>106</sup>In CARTAN-Schreibweise [90], mit der 1-Form  $\omega^{\alpha} = \mathbf{d}x^{\alpha}$ :  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \langle \omega^{\alpha}, \nabla_{\gamma} \mathbf{e}_{\beta} \rangle$ .

Sie werden CHRISTOFFEL-Symbole oder -Konnektionskoeffizienten (oft abkürzend nur CHRISTOFFEL-Konnektionen) genannt.

Der RIEMANN-Krümmungstensor lautet nach der RICCI-Identität

$$R^\mu{}_{\sigma\alpha\nu}b^\sigma = -[D_\nu, D_\alpha]b^\mu, \quad (648)$$

Also:

$$R^\mu{}_{\sigma\alpha\nu} = \Gamma^\mu_{\sigma\alpha|\nu} - \Gamma^\mu_{\beta\nu|\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} - \Gamma^\mu_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\sigma\nu}. \quad (649)$$

Den RICCI-Tensor bildet man durch Spur des RIEMANN-Tensors:

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\sigma} = \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\sigma|\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu|\sigma} \quad (650)$$

$$= R_{\mu\nu}, \quad (651)$$

## 10.5 Higgsfelder

Das Higgsfeld ist gegeben durch:

- $\phi$ : skalares Higgsfeld.
- $v = \sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}}$ : Grundzustandswert des Higgsfeldes mit  $\lambda > 0$  und  $\mu^2 < 0$ .
- $\phi_0$ : Grundzustandswert des Higgsfeldes vor Symmetriebrechung.  $\phi_{0a} = vN_a$  (ohne Phasenfaktor).
- $\phi'$ : symmetriebrechender Anregungszustand des Higgsfeldes.  $\phi = v + \phi'$
- $\rho^2 = \phi^\dagger\phi$ : Betragsquadrat des Higgsfeldes nach unitärer Eichung.
- $\phi = \rho N$ : skalares Higgsfeld nach unitärer Eichung.
- $\zeta = \frac{\rho}{v} = 1 + \varphi$ : Auf dem Grundzustand normierten Betrag des Higgsfeldes nach unitärer Eichung mit  $\phi = \rho N$ .
- $\varphi$ : Auf dem Grundzustand normierten Anregungsfeld des Higgsfeldes nach unitärer Eichung: Grundzustand:  $\varphi = 0$ .
- $\xi = \zeta^2 - 1$ : Quadratischer Anregungsfeld mit  $1 + \varphi = \sqrt{1 + \xi}$  nach unitärer Eichung.
- $\chi = \frac{\xi}{2}$ : Halber quadratischer Anregungsfeld des Higgsfeldes nach unitärer Eichung.

Das Higgsfeld vor unitärer Eichung wird in der Arbeit nur prophylaktisch eingeführt. Nach Symmetriebrechung wird immer das unitär geeichte Higgsfeld benutzt, sodaß die Eindeutigkeit beibehalten wird.

## 11 Referenzen

### Literatur

- [1] L. Abbott, “Das Rätsel der kosmologischen Konstanten”; *Spektrum der Wissenschaft: Kosmologie und Teilchenphysik: 70-77* (1990).
- [2] F. Accetta *et al.*, “Induced-Gravity Inflation”; *Phys. Rev. D* **31**(12), 3046-3051 (1985).
- [3] F. Accetta *et al.*, “Extended Inflation with Induced Gravity”; *Phys. Rev. D* **39**(10), 2854-2863 (1989).
- [4] J. Beckenstein, M. Milgrom, “Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian Gravity?”; *Astrophys. Jour.* **286**, 7-14 (1984).
- [5] M. C. Bento, O. Bertolami *et al.*, “Self-interacting Dark Matter and Invisible Decaying Higgs”; *arXivastro-ph/0003350 v1* (2000).
- [6] O. Bertolami, J. Páramos “Astrophysical Constraints on Scalar Field Models”; *ArXiv:astro-ph/0408216 v1* (2004).
- [7] H. Beste, “Versuchsanleitungen zum physikalischen Anfängerpraktikum in der Fakultät für Physik in der Universität Konstanz: Mechanik und Wärmelehre”, Konstanz 1994.
- [8] N. M. Bezares Roder, “Seminar zur Allgemeinen Relativitätstheorie und Gravitationswellen, Thema 4”; <http://qis.ucalgary.ca/pmarzlin/lectures/art03/> (2003).
- [9] N. M. Bezares Roder, “Spontaneous Symmetry Breakdown and Perspective of Higgs Mechanism”, unveröffentlicht (2005).
- [10] J. J. van der Bij, “Can Gravity make the Higgs particle light?”; *arXiv:hep-th/9310064 v1* (1993).
- [11] J. J. van der Bij, “Can Gravity play a role at the electroweak scale?”; *Acta Phys. Pol. B* **25**, 827 (1994), *arXiv:hep-ph/9507389 v1* (1995).
- [12] A. Birkedal-Hansen, J.G. Wacker, “Scalar Dark Matter from Theory Space”; *arXivhep-ph/0306161 v1* (2003).
- [13] K. S. de Boer, “Gravitation und Struktur des Raumes”, Vortrag zum Jahr der Physik unter <http://www.astro.uni-bonn.de/deboer/pdm>; Sternwarte Universität Bonn (Mär. 2000).
- [14] K. S. de Boer, Veröffentlichung zum Jahr der Physik unter <http://www.astro.uni-bonn.de/deboer/pdm/pdmastrograv.html>; Sternwarte Universität Bonn (Mai 2003).
- [15] C. Bøem, P. Fayet, “Scalar Dark Matter Candidates”; *arXiv:hep-ph/0305261 v1* (2003).
- [16] C. Brans, R. Dicke, “Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation”; *Phys. Rev.* **124**(3), 925 (1961).
- [17] P. Brandt, “Seminar Astroteilchenphysik” (2003).
- [18] J. L. Cervantes-Cota, H. Dehnen, “Induced Gravity in the  $SU(5)$  GUT”; *Phys. Rev. D* **51**, 395 (1995).

- [19] J. L. Cervantes-Cota, H. Dehnen, "Induced gravity inflation in the Standard Model of particle physics"; *Nuclear Phys. B* **442**: 391 (1995).
- [20] J. L. Cervantes Cota, "Induced Gravity and Cosmology"; Hartung-Gorre-Verlag, Konstanz Dissertationen 506, Konstanz 1996.
- [21] "Does the Motion of the Solar System Affect the Microwave Sky?"; *Int. J. of High-Energy Physics: CERN Courier* **44**, 10: 7-8 (Dec. 2004)
- [22] S. Cotsakis, "Mathematical Problems in Higher Order Gravity and Cosmology"; *arXiv : gr - qc/9712046 v1* (1997).
- [23] H. Dehnen, "Kann die Allgemeine Relativitätstheorie heute als bestätigt gelten?"; *Phys. Blätter* **9**, 400-407 (1969).
- [24] H. Dehnen, O. Obregón, "General Relativistic Barometric Formulae"; *Astron. and Astrophys.* **12**, 161-164 (1971).
- [25] H. Dehnen, H. Hönl, "The Influence of Strong Interactions on the Early Stages of the Universe"; *Astrophys. and Sp. Sc.* **33**: 49-73 (1975).
- [26] H. Dehnen, H. Frommert, "Scalar Gravity and Higgs Potential"; *Int. J. of Th. Phys.* **29**(4): 361-370 (1990).
- [27] H. Dehnen, H. Frommert, "Higgs-Field Gravity within the Standard Modell"; *Int. J. of Th. Phys.* **30**(7): 985 (1991).
- [28] H. Dehnen, H. Frommert, F. Ghaboussi, "Higgs-Field and a New Scalar-Tensor Theory of Gravity"; *Int. J. of Th. Phys.* **31**(1): 109 (1992).
- [29] H. Dehnen, H. Frommert, "Higgs Mechanismus without Higgs Particle"; *Int. J. of Th. Phys.* **32**(7) (1993).
- [30] H. Dehnen, B. Rose, "Flat Rotation Curves of Spiral Galaxies and the Dark Matter Particles"; *Astrophys. and Sp. Sc.* **207**: 133-144 (1993).
- [31] H. Dehnen, B. Rose, K. Amer, "Dark Matter Particles and The Flat Rotation Curves of Spiral Galaxies"; *Astrophys. and Sp. Sc.* **234**: 69-83 (1995).
- [32] H. Dehnen, E. Hitzer, " $SU(2) \otimes U(1)$  Gauge Gravity"; *Int. J. of Th. Phys.* **34**, 1981 (1995).
- [33] H. Dehnen, "Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen"; Universität Konstanz, Fachbereich Physik, Konstanz 2000.
- [34] H. Dehnen, B. Fauser, "Skriptum zum Seminar Allgemeine Relativitätstheorie" §2: "Newtonsche Kosmologie & Priester-Modell", vorgelegt von Marc Lasch; Universität Konstanz, Fachbereich Physik, Konstanz 2002.
- [35] H. Dehnen, B. Fauser, "Skriptum zum Seminar Allgemeine Relativitätstheorie" §4: "Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universums & Dunkle Materie", vorgelegt von Moritz Bubek; Universität Konstanz, Fachbereich Physik, Konstanz 2002.
- [36] H. Dehnen, "Lyman  $\alpha$ -forests and the Determination of the Cosmological Parameters"; Universität Konstanz, Fachbereich Physik, unveröffentlicht, (2002).
- [37] S. Deiters/Astronews.com, "Dunkle Materie und Energie": Astronews.com: [http : //www.astronews.com/frag/antworten/frage968.html](http://www.astronews.com/frag/antworten/frage968.html) (Sep. 2003).

- [38] J. Dunkel, “On the relationship between MOND and DM”; *arXiv : astro – ph/0401591 v1* (2004).
- [39] D. Ebner, “Energy-Momentum Tensor and Equations of Motion of Glashow-Salam-Weinberg-Theory in Curved Space-Time”; *Fortschr. Phys.* **34**(3): 145-166 (1986).
- [40] H. Eckhard, C. Jekeli, *et al.*, “Tower Gravity Experiment: Evidence for Non-Newtonian Gravity”; *Phys. Rev. Lett.* **60**(45), 2567-2570 (1988).
- [41] J. Einasto, “Dark Matter: Early Considerations”; *arXiv : astro – ph/0401341 v1* (Jan. 2004).
- [42] A. Fäßler, C. Jönsson, “**Die Top Ten der schönsten physikalischen Experimenten**”: H. Dehnen; *Cavendish’s Torsionswaage und die Bedeutung der Gravitationskonstanten*, Rororo Science, Hamburg 2005.
- [43] R. Fakir and W. G. Unruh, “Improvement on Cosmological Chaotic Inflation through Nonminimal Coupling”; *Phys. Rev.* **D41**(6), 1783-1791 (1990).
- [44] J. L. Feng, “Dark Matter Detection in Space”; *arXiv : astro – ph/0405479 v1* (2004).
- [45] E. Fischbach, D. Sudarsky *et al.*, “Reanalysis of the Eötvös Experiment”; *Phys. Rev. Lett.* **56**(1), 3-6 (1986).
- [46] T. Fließbach, “Allgemeine Relativitätstheorie”; B-I Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990.
- [47] T. Fließbach, “Allgemeine Relativitätstheorie” 2. Aufl.; Spektrum Akad. Verl., Ulm 1995.
- [48] S. Flüge, “Lehrbuch der Theoretischen Physik III: Klassische Physik II”, Springer Verl., Würzburg, 1961.
- [49] H. Frommert, “Higgsmechanismus und Gravitation”; Dissertation an der Fakultät für Physik der Universität Konstanz, Konstanz 1991.
- [50] H. Frommert, H. Schoor, “The cosmological background in the Higgs scalar-tensor theory without Higgs particles”; Universität Konstanz, Fachbereich Physik, unveröffentlicht (1996).
- [51] Y. Fujii, “Scalar-tensor theory of gravitation and a spontaneous breakdown of scale invariance”; *Phys. Rev.* **D 9**(4), 874-876 (1974).
- [52] A. Geitner, D. Ketterer, H. Dehnen, “Gravity and Parity Violation”; *Il Nuovo Cimento* **115**, 1357 (2000).
- [53] R. Genzel, “Das Galaktische Zentrum”; *Phys. Blätter 2 Jahrg.* **47**, 103 (1991)
- [54] E. Geßner, “Zur Frage der flachen Rotationskurven von Spiralgalaxien”; Diplomarbeit an der Fakultät für Physik der Universität Konstanz, Konstanz 1991.
- [55] E. Geßner, “Cosmological Constant and the Flat Rotation Curves of Galaxies”; *Astrophys. and Sp. Sc.* **194**: 197-205 (1992).
- [56] E. Geßner, “A New Scalar Tensor Theory for Gravity and the Flat Rotation Curves of Spiral Galaxies”; *Astrophys. ans Sp. Sc.* **196**: 29-43 (1992).
- [57] D. Giulini und N. Straumann, “Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums”; *arXiv : astro – ph/0009368v1* (2000).

- [58] W. Greiner, B. Müller, “Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung” 2. überarb. Aufl.; Verl. Harri Deutsch, Frankfurt a.M. 1995.
- [59] M. Guildry, “Gauge Field Theories: An Introduction with Applications”; John Wiley & Sons, Inc., CDS 1991.
- [60] A. Guth and P. J. Steinhardt, “Das inflationäre Universum”; *Spektrum der Wissenschaft: Kosmologie und Teilchenphysik*, 96-110 (1990).
- [61] S. Hacyan, “Materia Oscura”, *Grupo Reforma: Opinión* (2 Oct. 2003).
- [62] R. Hagedorn, “Hadronic Matter Near the Boiling Point”; *Il Nuovo Cimento* **56A**: 1027 (1968).
- [63] A. Hardell and H. Dehnen, “Exact Solutions of Einstein’s Field Equations for a Massive Point-Particle with Scalar Point-Charge”; *General Relativity and Gravitation* **25**, **11**: 1165-1173 (1993).
- [64] S. Hawking, G. Ellis; *Astrophys. J.* **152**:25 (1968).
- [65] A. Hill, J.J. van der Bij, “Strongly interacting singlet-doublet Higgs model”; *Phys. Rev. D* **36**(11), 3463 (1987).
- [66] P. Jordan, “Schwerkraft und Weltall”; Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2. Aufl., Braunschweig 1955.
- [67] G. M. Kalvius *et al.*, “Physik 4”, R. Oldenburg Verl., München 1977.
- [68] M. Kaplinghat, M. Turner, “How Cold Dark Matter Theory Explains Milgrom’s Law”; *arXiv : astro - ph/0107284 v2* (2001).
- [69] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: I. I. Bigi, A. I. Sanda, N. G. Uraltsev; *Addressing the Mysterious with the Obscure -CP Violation via Higgs Dynamics*, World Scientific, Singapore 1993.
- [70] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: M. S. Chanowitz; *Strong WW Scattering at the SSC and LHC*, World Scientific, Singapore 1993.
- [71] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: S. Dawson; *Producing the Intermediate Mass Higgs Boson*, World Scientific, Singapore 1993.
- [72] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: H. Georgi; *Why I would be very Sad if a Higgs Boson were discovered?*, World Scientific, Singapore 1993.
- [73] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: L. E. Ibáñez, G. G. Ross; *Electroweak Breaking in Supersymmetric Models*, World Scientific, Singapore 1993.
- [74] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: M. Sher; *Constraints on Higgs Boson Properties from the Higgs Potential*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [75] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: N. Turok; *Electroweak Baryogenesis*, World Scientific, Singapore 1993.
- [76] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics**”: M. Veltman; *The Higgs System*, World Scientific, Singapore 1993.
- [77] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics II**”: H. E. Haber; *Higgs Boson Masses and Couplings in the Minimal Supersymmetric Model*, World Scientific, Singapore 1997.

- [78] G. L. Kane, “**Perspectives on Higgs Physics II**”: S. Mrenna; *Discovering a Light Mass Higgs Boson at the Tevatron Collider*, World Scientific, Singapore, 1997.
- [79] M. Kaplinghat, M. Turner, “How Cold Dark Matter Theory Explains Milgrom’s Law”; *arXiv : astro – ph/0107284 v2* (2001).
- [80] L. Kaufmann, “Große Vereinigungstheorie und Supersymmetrie, Proseminar in theoretischer Teilchenphysik” unter [http : //www.itp.phys.ethz.ch/proseminar/partphys03/kaufmann.pdf](http://www.itp.phys.ethz.ch/proseminar/partphys03/kaufmann.pdf); ETH Zürich, (2004).
- [81] A. P Lightman *et al.*, “Problem Book in Relativity and Gravitation”; Princeton University Press, New Jersey 1975.
- [82] D. A. D. Linde, *Phys. Lett.* **129B**, 177 (1983).
- [83] J. E. Madriz A., M. Bellini “Extra force and extra mass from noncompact Kaluza-Klein theory in a cosmological model”; *arXiv : gr – qc/0408054 v1* (2004).
- [84] P. D. Mannheim, “Alternatives to Dark Matter and Dark Energy”; unveröffentlicht (2005).
- [85] T. Matos *et al.*, “Spherical scalar field halo in galaxies”; *Phys. Rev.***D62(061301R)** (2000).
- [86] M. Milgrom, “Does MOND follow from the CDM paradigm?”; *arXiv : astro – ph/01110362 v1* (2001).
- [87] M. Milgrom, “A Modification of the Newtonian Dynamics: Implications for Galaxies”; *Astrophys. J.* **279** 370-283 (1983).
- [88] M. Milgrom, “Isothermal Spheres in the Modified Dynamics”; *Astrophys. J.* **287**, 571-576 (1984).
- [89] M. Milgrom, “The Modified Dynamics- A Status Review”; *arXiv : astro – ph/9810302 v1* (1998).
- [90] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, “Gravitation”; W. H. Freeman and Co., San Francisco 1973.
- [91] R. N. Mohapatra, “Unification and Supersymmetry”; Springer-Verl., New York 1986.
- [92] K. Müller, “Einführung Supersymmetrie”; Universität Zürich, Zürich 2002.
- [93] J. P. Ostriker, P. J. E. Peebles, “A numerical study of the stability of flattened galaxies: or, can cold galaxies survive?”; *Astrophys. Jour.* **186**, 467-480 (1973).
- [94] F. D. Peat, “Superstrings”; Hoffmann und Campe Verl., Hamburg 1989.
- [95] M. D. Pollock, “Primordial Inflation with a Broken-Symmetry Theory of Gravity”; *Nucl. Phys.* **B277** 513-524 (1986).
- [96] R. D. Reasenber, I. I. Shapiro *et al.*, “Viking relativity experiment: Verification of signal retardation by solar gravity”; *Astrophys. J.*,**234**:L219-L221 (Dez. 1979).
- [97] M. J. Rees; *Spektrum der Wissenschaft* **1**, 98 (1991).
- [98] H. Reissner, “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie”; *Annalen der Physik* **50**: 106-119 (1916).

- [99] R. H. Sanders, “Anti-Gravity and Galaxy Rotation Curves”; *Astron. Astrophys.* **136**, L21 (1984).
- [100] R. H. Sanders; “Finite Length-Scale Antigravity and Observations of Mass discrepancies in Galaxies”; *Astron. Astrophys.* **154**, 135 (1986).
- [101] R. H. Sanders, “Mass discrepancies in galaxies: dark matter and alternatives”; *Astron. Astrophys. Rev.* **2**(1), 1-27 (1990).
- [102] J. Scherk, “Antigravity: A Crazy Idea?”; *Phys. Lett.* **88B**(34), 265 (1979).
- [103] H. Schoor, “Rotationssymmetrische Lösungen einer Skaltensortheorie der Gravitation mit Higgsfeld als Skalarfeld”; Diplomarbeit an der Fakultät für Physik der Universität Konstanz, Konstanz 1997.
- [104] R. Sexl, H. K. Urbantke, “Gravitation und Kosmologie”; Spektrum Akademischer Verlag, 5. Aufl., Ulm 2002.
- [105] K. S. Stelle, “Renormalisation of Higher-Derivative Quantum Gravity”; *Phys. Rev.* **D16**(4): 953-969 (1977).
- [106] O. v. Styp Rekowski and H. Frommert, “Solution of the Higgs scalar-tensor theory without Higgs particles for static stars”; *International Journal of Theoretical Physics* **36**,3, *arXiv* : gr – qc/96068v1 (1997).
- [107] J. L. Synge, “Relativity: The General Theory”; North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1966.
- [108] R. J. Tayler, “Astrophysics §1: The Origin of the Elements”; W. A Benjamin, Inc., New York 1969.
- [109] R. Tolman, “Relativity, Thermodynamics and Cosmology” 7. Aufl.; Oxford University Press, London 1966.
- [110] M. Veltman, “Second Threshold in Weak Interactions”; *Acta Phys. Pol.* **B8**, 475 (1977).
- [111] M. Veltman, “Das Higgs-Boson”; *Spektrum der Wissenschaft: Kosmologie und Teilchenphysik*: 78-85 (1990).
- [112] G. Veneziano, “Die Zeit vor dem Urknall”; *Spektrum der Wissenschaft: Die Zeit vor der Zeit*: 30-37 (2004).
- [113] R. Wagoner, “Scalar-Tensor Theory and Gravitational Waves”; *Phys. Rev.* **D1**(812), 3209-3216 (1970).
- [114] F. Wagner, “Lösungen der gekoppelten Einstein-Liouville-Gleichungen und ihre Anwendungen in der Kosmologie”; Diplomarbeit am Institut für theoretische Physik der Georg-August-Universität Göttingen, Göttingen 1994.
- [115] R. M. Wald, “General Relativity”; The University of Chicago Press, Chicago 1984.
- [116] A. Zee, “Broken-Symmetric Theory of Gravity”; *Phys. Rev. Lett.* **42**(7), 417 (1979).
- [117] A. Zee, “Horizon Problem and the Broken-Symmetric Theory of Gravity”; *Phys. Rev. Lett.* **44**(11), 703 (1980).
- [118] “Quintessenz- Die Dunkle Energie”; <http://abenteuer-universum.vol4u.de/quint.html>.

[119] "Astronomy Picture of the Day, Feb. 24; 1998," <http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap980224.html>.