

Nash-Gleichgewichte in Netzwerkverbindungsspielen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Bobo Nick

Oktober 2007

Erstgutachter: Prof. Dr. Ulrik Brandes
Zweitgutachter: Prof. Dr. Walter Baur
Betreuer: Dr. Martin Hofer

Die abgebildeten Graphen wurden mit dem JavaTM Graph Editor - yEd - erzeugt.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Konstanz, 29.10.2007

Bobo Nick

Danksagung

Ich danke hiermit allen Personen, die mich auf dem Weg zur Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt und begleitet haben, insbesondere

- Dr. Martin Hofer, für viele anregende Gespräche und Diskussionen,
- Prof. Dr. Ulrik Brandes, für die Motivation zur Theoretischen Informatik und das Erstgutachten dieser Arbeit,
- Prof. Dr. Walter Baur, für die Motivation zur Mathematik und das Zweitgutachten dieser Arbeit,
- Julia Vogt und Johannes Kern, für das Korrekturlesen und ihre Ermutigungen,
- meiner Familie und meinen Freunden, für die emotionale Unterstützung.

Überblick

Wir umreißen in dieser Arbeit die fachübergreifende Vielfalt an Netzwerkverbindungsspielen in der gegenwärtigen Forschung.

Unser Fokus liegt auf einem im Jahr 2003 von Fabrikant et al. [13] eingeführten Spiel, in dem egoistisch agierende Akteure untereinander Verbindungen und schließlich ein zusammenhängendes Netzwerk errichten. Wir fassen die Ergebnisse über Nash-Gleichgewichte in diesem Spiel und den dadurch implizierten Effizienzverlust von dezentralen Lösungen gegenüber einer zentralen Optimierung zusammen.

Anschließend erweitern wir das Spiel derart, dass nun auch nicht-zusammenhängende Netzwerke entstehen können. Wir zeigen, unter welchen Bedingungen solche Netzwerke möglich sind und wie sie den maximalen Effizienzverlust, den sogenannten *Price of Anarchy*, beeinflussen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Graphentheorie	3
2.2	Komplexitätstheorie	5
2.3	Spieltheorie	6
2.4	Der Price of Anarchy	9
3	Das Network Creation Game	11
3.1	Definition	11
3.2	Nash-Gleichgewichte im NCG	14
3.3	Der Price of Anarchy im NCG	21
3.4	Varianten des NCG	30
4	Das Strafterm-Verbindungsspiel	33
4.1	Zentralitäten	33
4.2	Definition des Strafterm-Verbindungsspieles	41
4.3	Nash-Gleichgewichte im SV	43
4.3.1	Komponenten nicht-zusammenhängender Gleichgewichte	44
4.3.2	Strafkosten nicht-zusammenhängender Gleichgewichte	55
4.4	Der Price of Anarchy im SV	60
4.4.1	Soziale Optima	60
4.4.2	Bereich der zusammenhängenden Nash-Gleichgewichte	64
4.4.3	Bereiche mit nicht-zusammenhängenden Gleichgewichten	65
4.4.4	Übersicht	71
5	Diskussion themenverwandter Forschung	73
6	Zusammenfassung und Ausblick	81
	Literaturverzeichnis	83

1 Einleitung

Die Errichtung und die Analyse von Netzwerken ist ein interdisziplinäres Forschungsgebiet der gegenwärtigen Wissenschaft. Netzwerke beschreiben Elemente und Verbindungen bzw. Interaktionen zwischen diesen Elementen. Prominente Beispiele für komplexe Netzwerke sind das Internet, das Streckennetz der Deutschen Bahn und soziale Netzwerke, wie etwa Onlinecommunitys: Glasfaserkabel verbinden Router, Schienen verbinden Bahnhöfe, Hyperlinks verbinden Userprofile. Das entsprechende abstrakte mathematische Konzept ist der Graph, bestehend aus Kanten zwischen Knoten.

Je nach Zielsetzung lassen sich sehr unterschiedliche Gesichtspunkte eines Netzwerkes analysieren, für unsere Beispiele etwa:

- Wie viele Meter Glasfaserkabel wurden verlegt?
- Wie schnell komme ich von Frankfurt nach Berlin?
- Wer hat besonders viele Freunde?

Im Allgemeinen ist zu unterscheiden, ob die Topologie eines Netzes von einer zentralen Autorität erdacht wurde oder ob ein Netzwerk aus dem Zutun mehrerer dezentral agierender Individuen hervorgeht. Das Streckennetz der Deutschen Bahn ist ein Beispiel für einen zentral koordinierten Netzbau. Entscheidungen über den (Aus-)Bau oder Abriss von Schienen werden getroffen, um geeignete Optimierungskriterien für das gesamte Netz bestmöglich zu erfüllen. Im Gegensatz dazu entscheidet jeder User einer Onlinecommunity individuell, mit welchen anderen Usern er eine direkte Verbindung eingeht. Die Struktur des entstehenden Netzwerkes ergibt sich also aus den nicht-zentral gesteuerten Entscheidungen verschiedener Akteure. Dabei lassen sich interessante Artefakte beobachten. Für soziale Netzwerke etwa ist es typisch, dass jeder soziale Akteur mit fast jedem anderen Akteur über eine überraschend kurze Kette von Zwischenschritten verbunden ist, obwohl die Dichte des sozialen Netzwerkes extrem gering ist. Diese Tatsache wird allgemein als das *Kleine-Welt-Phänomen*[21] bezeichnet.

Die Betrachtung mehrerer selbstständig agierender Akteure führt aus mathematischer Sicht auf einen spieltheoretischen Ansatz. Der Prozess einer dezentralen Netzbildung kann durch Netzwerkverbindungsspiele untersucht werden. Fächerübergreifend existieren zahlreiche Modelle und Variationen von Netzwerkverbindungsspielen. Je nach Anwendung repräsentieren die Spieler Menschen, Organisationen, Länder oder ähnliche konkurrierende Parteien. Ein kleiner Überblick wird in Kapitel 5 gegeben.

Im Mittelpunkt unseres Interesses steht ein im Jahr 2003 von Fabrikant, Luthra, Maneva, Papadimitriou und Shenker eingeführtes Netzwerkverbindungsspiel[13]. In diesem einfachen Modell sind die Spieler Knoten, welche untereinander Kanten bauen und dadurch einen Graphen errichten. Die Spieler entscheiden dabei zeitgleich, zu welchen anderen Knoten sie eine Kante wünschen und zahlen für jede eingefügte Kante einen vordefinierten Preis. Zusätzlich wird in dem entstandenen Graphen die Positionierung jedes Spielers bewertet. Fabrikant et al. summieren dazu die Anzahl der Zwischenschritte auf, die ein Spieler mindestens benötigt, um alle anderen Knoten zu erreichen. Dies sind die Entfernungskosten eines Spielers. Ziel eines jeden Spielers ist es nun, die Summe seiner Bau- und Entfernungskosten zu minimieren. Jeder Spieler versucht also durch eine geeignete Strategie den Netzbau so zu beeinflussen, dass er seinen eigenen Nutzen maximiert.

Die Spieltheorie bezeichnet eine solche Situation als nicht-kooperatives Spiel und bietet zur Lösung das Konzept des Nash-Gleichgewichtes[24]. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, bei der kein Spieler seinen Nutzen verbessern kann, wenn nur er seine Strategie ändert. Jedes Nash-Gleichgewicht ist in diesem Sinne ein stabiler Zustand. Somit können wir jeden Graphen, der durch ein Nash-Gleichgewicht zustande kommt, als mögliches Ergebnis eines Netzwerkverbindungsspiels ansehen. Ein Nash-Gleichgewicht stellt im Allgemeinen jedoch keinesfalls eine optimale Lösung für die Gesamtheit der Beteiligten dar. Sehr interessant ist deshalb die Frage nach dem Effizienzverlust durch die dezentrale Netzwerkplanung gegenüber einer zentralen Optimierung. Motiviert wurde diese Analyse im Jahr 1998 von Christos Papadimitriou und Elias Koutsoupias durch die Einführung des *Price of Anarchy*[17, 25]. Dieser ist definiert als das Kostenverhältnis des ungünstigsten Nash-Gleichgewichtes zur günstigsten zentralen Netzwerkoptimierung. Der *Price of Anarchy* ist also eine obere Grenze für den Effizienzverlust, der durch eine dezentrale Netzwerkplanung entsteht. Die untere Grenze dieses Effizienzverlustes, also das Verhältnis des günstigsten Nash-Gleichgewichtes zur optimalen Lösung, wird als *Price of Stability* bezeichnet. Das Netzwerkverbindungsspiel von Fabrikant et al. hat einen konstanten *Price of Stability*. Ein von der Spielerzahl unabhängiger *Price of Anarchy* konnte dagegen bisher nur für spezielle Kantenpreise nachgewiesen werden. Die größte Schwierigkeit besteht dabei in einer ausreichend genauen Charakterisierung der Nash-Gleichgewichte.

Wir werden in dieser Arbeit die Ergebnisse über Nash-Gleichgewichte und den *Price of Anarchy* im Netzwerkverbindungsspiel von Fabrikant et al. zusammenfassen und Variationsmöglichkeiten des Modells vorstellen. Insbesondere führen wir mit der Strafterm-Closeness eine auf nicht-zusammenhängende Graphen erweiterte Bewertungsmöglichkeit für die Position eines Knotens in einem Netzwerk ein und übertragen diese auf das bisherige Modell. Unser größtes Interesse gilt schließlich den dadurch möglich werdenden nicht-zusammenhängenden Nash-Gleichgewichten und ihrer Bedeutung für den *Price of Anarchy*.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel führen wir die im Anschluss verwendeten Begriffe ein.

2.1 Graphentheorie

Definition. Ein (gewöhnlicher) **Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$, bestehend aus einer endlichen Menge V von Knoten und einer Menge E von Kanten. In **ungerichteten** Graphen beschreibt eine Kante eine zweielementige Teilmenge $\{v, w\}$ von V , in **gerichteten** Graphen definiert eine Kante ein geordnetes Paar $(v, w) \in V \times V$.

Tritt eine bestimmte Kante mehrfach auf, so sprechen wir von einem **Multigraphen**.

Die **Dichte** eines (gewöhnlichen) Graphen ist das Verhältnis der Anzahl tatsächlich vorhandener Kanten zur Anzahl möglicher Kanten.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen **isomorph**, $G \simeq_\phi G'$, falls eine Bijektion $\phi : V \rightarrow V'$ existiert, mit $\{v, w\} \in E \Leftrightarrow \{\phi(v), \phi(w)\} \in E'$ bzw. $(v, w) \in E \Leftrightarrow (\phi(v), \phi(w)) \in E'$.

Die grafische Darstellung eines Graphen kann auf vielfältige Weise geschehen. Wir verwenden in dieser Arbeit die **Standardrepräsentation**. Knoten werden stets durch Punkte dargestellt. Eine gerichtete Kante (v, w) wird durch einen Pfeil vom **Startknoten** v zum **Zielknoten** w , eine ungerichtete Kante $\{v, w\}$ durch eine Linie zwischen v und w repräsentiert.

Zwei Knoten heißen **adjazent**, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Die beiden Knoten, die durch eine Kante verbunden werden, heißen **inzident** zu dieser Kante. Ebenso ist eine Kante inzident zu den beiden Knoten, die sie verbindet.

Ein (ungerichteter) **Weg** der Länge k zwischen zwei Knoten v und w ist ein Graph $P_k = (V, E)$ mit $V = \{v = v_1, v_2, \dots, v_{k+1} = w\}$ und $E = \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_k, v_{k+1}\}\}$, wobei $|E| = k$. Entsprechend ist ein **Kreis** C_k ein Weg der Länge k von v nach v . Die Kante eines Kreises der Länge 1 bezeichnen wir als **Schleife**. Ein Graph heißt **schlicht**, wenn er keine Schleife enthält. Einen Graphen ohne enthaltenen Kreis bezeichnen wir als **Baum(graphen)**.

Die **Länge eines kürzesten Weges** zwischen zwei Knoten v und w in einem Graphen G wird **Distanz** oder **Entfernung** von v nach w genannt und mit $d_G(v, w)$ bezeichnet. Die **Exzentrizität** eines Knotens v ist seine maximale Distanz zu einem anderen Knoten. Der **Durchmesser** $diam(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ entspricht dem Maximum der Exzentrizitäten der Knoten $v \in V$, also der größten auftretenden Entfernung.

Der kürzeste Weg zwischen zwei Knoten $u, w \in V$ lässt sich über eine **Breitensuche** mit Startpunkt u bestimmen. Eine Breitensuche mit Startpunkt u lässt sich durch einen **Breitensuchbaum** mit **Wurzel** u darstellen (vgl. Algorithmus 1). Die Entfernung der Wurzel zu einem Knoten w entspricht der (Baum-)Ebene von w . Den größten Index einer nicht-leeren Ebene bezeichnen wir als **Tiefe** eines Baumes. Die Tiefe eines Baumes entspricht also der Exzentrizität der Wurzel des Baumes.

Algorithmus 1 : Breitensuchbaum mit Wurzel u

Eingabe : Graph $G = (V, E)$, Startknoten u

Ausgabe : Breitensuchbaum von u

Markiere u mit $Ebene(u) = 0$ und füge u am Ende einer Warteschlange Q ein

Füge u in den Breitensuchbaum ein

while Q ist nicht leer **do**

 Entferne am Anfang der Warteschlange Q den Knoten v

foreach noch nicht markierte Kante $e = \{v, w\}$ **do**

 Markiere die Kante e

if w ist noch nicht markiert **then**

 Markiere w mit $Ebene(w) = Ebene(v) + 1$

 Füge w am Ende der Warteschlange Q ein

 Füge w und die Kante $e = (v, w)$ in den Breitensuchbaum ein

Ein gerichteter Graph heißt **stark zusammenhängend**, falls er für jedes Knotenpaar $v, w \in V$ einen gerichteten Weg von v nach w und einen gerichteten Weg von w nach v enthält. Ein ungerichteter Graph, für den zwischen jedem Knotenpaar ein ungerichteter Weg existiert, heißt (schwach) **zusammenhängend** (kurz: zshgd.). Ein nicht-zshgd. Graph ist in mehrere inklusionsmaximale (Zusammenhangs-) **Komponenten** $\mathcal{K} = (K, E|_K)$, bestehend aus verbundenen Knoten K und den von ihnen errichteten Kanten $E|_K$, unterteilt.

In einem Graphen $G = (V, E)$ enthält die Menge $N_k(v) := \{w \in V \mid d_G(v, w) \leq k\}$ alle Knoten w , für die ein Weg zwischen v und w der Länge $\leq k$ existiert. Wir bezeichnen $N_k(v)$ als k -Nachbarschaft von v . Wir definieren die **kleinste k -Nachbarschaft** in G als $N_k := \min_{v \in V} \{|N_k(v)|\}$.

Der **Grad** eines Knotens ist die Anzahl seiner inzidenten Kanten. In einem gerichteten Graphen entspricht der Eingangsgrad $deg^-(v)$ eines Knotens v der Anzahl an Kanten mit Zielknoten v . Entsprechend ist der Ausgangsgrad $deg^+(v)$ die Anzahl an Kanten mit Startknoten v .

Ein zshgd. (ungerichteter) Graph mit n Knoten und allen möglichen $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten wird **vollständiger Graph** genannt und mit K_n bezeichnet. Eine Teilmenge der Knotenmenge, in der alle Knoten durch eine Kante direkt verbunden sind, bezeichnen wir als **Clique**. Ein (ungerichteter) Graph, in dem $n - 1$ Knoten durch jeweils eine Kante mit einem ausgezeichneten Mittelpunkt-Knoten verbunden sind und in dem ansonsten keine Kanten existieren, wird **Sterngraph** genannt und von uns mit Z_n bezeichnet.

2.2 Komplexitätstheorie

Das asymptotische Wachstumsverhalten einer Funktion kann mit Hilfe der folgenden Notation beschrieben werden.

Definition. Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(g) & :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n) \\ f \in \Omega(g) & :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n) \\ f \in \Theta(g) & :\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g) \\ f \in o(g) & :\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : f(n) < c \cdot g(n) \\ f \in \omega(g) & :\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : f(n) > c \cdot g(n) \end{aligned}$$

Ein Algorithmus läuft in polynomialer Zeit, falls er $n^{\mathcal{O}(1)}$ Berechnungsschritte in Abhängigkeit der Eingabegröße n benötigt.

Ein Entscheidungsproblem, zu dem ein Algorithmus angegeben werden kann, der für jede mögliche Eingabe in polynomialer Laufzeit eine Lösung dieser Ausprägung (Instanz) des Problems berechnet, liegt in der Komplexitätsklasse \mathcal{P} . Ein Entscheidungsproblem liegt in der Komplexitätsklasse \mathcal{NP} (**n**icht-**d**eterministisch **p**olynomial), falls jeder Lösungsvorschlag, der das Entscheidungsproblem bejaht, in polynomialer Laufzeit verifiziert werden kann. Somit gilt $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$. Noch nicht bewiesen werden konnte $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Ein Entscheidungsproblem Π wird als \mathcal{NP} -**schwer** bezeichnet, falls jedes Problem der Klasse \mathcal{NP} polynomial auf Π reduziert werden kann, d.h. ein polynomialer Algorithmus für die Lösung von Π würde polynomiale Algorithmen für alle Probleme aus \mathcal{NP} und somit $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ implizieren. Jedes Optimierungsproblem entspricht einem Entscheidungsproblem der Form: „Kann die Zielfunktion einen höheren/niedrigeren Wert annehmen als einen vorgegebenen Wert k ?“. Dementsprechend gilt ein Optimierungsproblem als \mathcal{NP} -schwer, falls das zugehörige Entscheidungsproblem \mathcal{NP} -schwer ist.

Eine ausführliche Darstellung der Komplexitätstheorie findet sich in [14].

Notation. Wir bezeichnen mit \log den binären Logarithmus.

2.3 Spieltheorie

Definition. Ein **Spiel** in Normalform besteht aus einem Tripel

$$\Gamma = (I, \{S_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I}),$$

wobei gilt:

I ist eine nicht-leere Menge von Spielern,

S_i ist die Menge der (reinen) Strategien von Spieler i ,

$u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Nutzenfunktion von Spieler i , definiert über der Menge aller möglichen Strategiekombinationen $S = S_1 \times \dots \times S_{|I|}$.

In einem **nicht-kooperativen** Spiel handelt jeder Spieler strikt nach seinem eigenen Nutzen. Bindende Absprachen zwischen Spielern sind im Gegensatz zum **kooperativen** Spiel ausgeschlossen. Ein Spiel heißt **endlich**, wenn die Anzahl der Spieler und ihre Strategiemengen endlich sind.

Definition. Sei $\Gamma = (I, \{S_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I})$ ein Spiel in Normalform. Eine Strategie $s_i \in S_i$ wird **dominiert** von einer Strategie $\hat{s}_i \in S_i, s_i \neq \hat{s}_i$, falls

$$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_{|I|}) < u_i(s_1, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_{|I|})$$

für alle beliebigen Strategiewahlen $s_j \in S_j, j \neq i$.

Ein rationaler Spieler wird sich nie für eine **dominierte** Strategie entscheiden.

Definition. Sei $\Gamma = (I, \{S_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I})$ ein Spiel in Normalform. Ein (reines) **Nash-Gleichgewicht** ist eine Kombination von (reinen) Strategien $s_1 \in S_1, \dots, s_{|I|} \in S_{|I|}$, so dass

$$\forall 1 \leq i \leq |I| \forall s'_i \in S_i : u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_{|I|}) \geq u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_{|I|}) .$$

In einem Nash-Gleichgewicht hat also kein Spieler einen Vorteil, wenn er einseitig von seiner Strategie abweicht! Wir sprechen von einem **starken** Nash-Gleichgewicht, wenn

$$\forall 1 \leq i \leq |I| \forall s'_i \in S_i : u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_{|I|}) > u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_{|I|}) .$$

Andernfalls ist das Nash-Gleichgewicht **schwach**. Ein schwaches Nash-Gleichgewicht wird als **transient** bezeichnet, wenn eine Folge von einseitigen Strategieänderungen existiert, die den Wert der Nutzenfunktion des wechselnden Spielers jeweils nicht verändert und schließlich auf eine Strategiekombination führt, die kein Nash-Gleichgewicht darstellt.

Offensichtlich kann ein Nash-Gleichgewicht keine dominierte Strategie enthalten.

Bemerkung. Analog lassen sich dominierte Strategien und Nash-Gleichgewichte auch über **Kostenfunktionen** definieren, d.h. der Spieler versucht den ihm zugewiesenen Wert zu minimieren anstatt zu maximieren. Es ist im Allgemeinen daher übersichtlicher mit positiven Kostenfunktionen als mit negativen Nutzenfunktionen zu arbeiten. So auch im folgenden Beispiel.

Beispiel. Ein klassisches Beispiel der Spieltheorie ist das **Gefangenendilemma**. Zwei Gefangenen A und B wird getrennt voneinander der Prozess gemacht. Beiden ist die Sachlage klar: Sind beide geständig, bekommen sie beide strafmildernd eine mittlere Haftstrafe. Schweigen beide, so müssen beide mangels Beweisen nur eine kurze Haftstrafe befürchten. Bei einem einseitigen Geständnis wird der Geständige freigesprochen, während sein ungeständiger Komplize eine lange Haftstrafe absitzen muss. Der Wert der Kostenfunktion eines Gefangenen entspricht der Länge seiner Haftstrafe (HS) in Abhängigkeit der beiden Aussagen. Die folgende Tabelle fasst das Spiel durch die Darstellung (Haftstrafe von A, Haftstrafe von B) in Abhängigkeit der Strategiewahlen zusammen.

	B gesteht	B schweigt
A gesteht	(mittlere HS, mittlere HS)	(keine HS, lange HS)
A schweigt	(lange HS, keine HS)	(kurze HS, kurze HS)

Für jeden der Spieler wird offensichtlich *Schweigen* durch *Gestehen* dominiert, denn unabhängig von der Strategiewahl des Kontrahenten ist der Wert der Kostenfunktion für *Gestehen* stets geringer als der Wert für *Schweigen*.

Das einzige Nash-Gleichgewicht im Beispiel des Gefangenendilemmas bildet die Strategiekombination *beide gestehen*. Für beide Spieler zusammen betrachtet wäre es aber offensichtlich am besten, wenn *beide schweigen*! Wir sehen also, dass ein Nash-Gleichgewicht im Allgemeinen keinesfalls die Ideallösung im Sinne aller Beteiligten darstellt.

Ein hilfreiches Analyse-Werkzeug hinsichtlich der Nash-Gleichgewichte eines Spieles ist die Verwendung einer Potentialfunktion, die den Anreiz aller Spieler für einseitige Strategieänderungen widerspiegelt. Für die formale Definition extrahieren wir aus einem n -Tupel $s = (s_1, \dots, s_n)$ abkürzend $(n-1)$ -Tupel $s_{-i} := (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Definition. Gegeben sei ein endliches Spiel in Normalform $\Gamma = (I, \{S_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I})$. Γ ist ein **(Ordnungs-)Potentialspiel**, wenn eine Funktion $p : S_1 \times \dots \times S_{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, derart dass $\forall i \in I \forall s_{-i} \in S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_{|I|} \forall s_i, s'_i \in S_i$

$$u_i(s'_i, s_{-i}) - u_i(s_i, s_{-i}) > 0 \Leftrightarrow p(s'_i, s_{-i}) - p(s_i, s_{-i}) > 0.$$

p heißt in diesem Fall **(Ordnungs-)Potential(funktion)** für Γ .

Den Nutzen von Potentialfunktionen verdeutlicht der folgende Satz[22].

Satz 2.3.1. *Jedes endliche Potentialspiel Γ hat ein reines Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Sei p eine Potentialfunktion für Γ . Gegeben sei eine beliebige Strategiekombination $y_0 = (s_1, \dots, s_n)$. Ist y_0 kein reines Nash-Gleichgewicht, so existiert ein Spieler i mit einer alternativen Strategie s'_i , die seine Nutzenfunktion und somit die Potentialfunktion echt wachsen lässt. Dieselbe Argumentation können wir auf die neue Strategiekombination $y_1 = (s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ anwenden. Wegen $p(y_0) < p(y_1) < \dots$ und der Endlichkeit der Strategiemengen folgt die Behauptung. \square

Die Folge y_0, y_1, \dots bezeichnen wir als **Verbesserungspfad**. Der vorangegangene Beweis zeigt:

Lemma 2.3.2. *In einem endlichen Potentialspiel ist jeder Verbesserungspfad endlich.*

Bemerkung. Analog zur Bemerkung von oben gilt auch für Potentialfunktionen, dass sich das Maximierungsziel durch ein Minimierungsziel ersetzen lässt.

Beispiel. Eine Ordnungs-Potentialfunktion p für das Gefangenendilemma ist gegeben durch

$p(\cdot, \cdot)$	B gesteht	B schweigt
A gesteht	0	1
A schweigt	1	2

Aus jeder Strategiekombination führt ein Verbesserungspfad der Länge ≤ 2 auf das globale Minimum der Potentialfunktion. Dies liefert ein reines Nash-Gleichgewicht.

Eine interessante Einführung in die Spieltheorie wird in [20] gegeben.

2.4 Der Price of Anarchy

Definition. Ein Spiel ist ein **Netzwerkverbindungsspiel**, falls durch die Kombination der Strategien der Spieler ein Graph (Netzwerk) definiert wird.

Der *Price of Anarchy* spielt eine zentrale Rolle bei der Analyse von Netzwerkverbindungsspielen. Es handelt sich dabei um ein Maß für den maximalen Effizienzverlust einer dezentralen Netzwerkplanung gegenüber einer zentralen Netzwerkoptimierung.

Die Idee des *Price of Anarchy* geht zurück auf Elias Koutsoupias und Christos Papadimitriou und ihre Arbeit *Worst-Case Equilibria*[17] aus dem Jahr 1998. Vorausgegangene Publikationen über Systeme mit nicht-kooperativ agierenden Akteuren beschäftigten sich mit Bedingungen, unter denen dezentrale Lösungen den Nutzen einer optimalen Lösung erreichen oder approximieren können (vgl. bspw. [18]). Im Mittelpunkt des Interesses stand also stets der Vergleich des allgemeinen Optimums mit der besten dezentralen Lösung. Im Gegensatz dazu fragen Koutsoupias und Papadimitriou nach der ungünstigsten stabilen dezentralen Lösung und den dadurch anfallenden Mehrkosten für das gesamte System. Papadimitriou bezeichnet diesen Kostenzuwachs aufgrund des egoistischen Verhaltens der Spieler ohne zentrale Autorität schließlich als *Price of Anarchy*[25].

Je nach Modell bedarf es eines geeigneten Konzeptes für die Definition von stabilen dezentralen Lösungen eines Netzwerkverbindungsspiels. Da die von uns in Kapitel 3 und Kapitel 4 behandelten Netzwerkverbindungsspiele in die Klasse der nicht-kooperativen Spiele fallen, werden stabile Lösungen durch Nash-Gleichgewichte erreicht. Das teuerste Nash-Gleichgewicht liefert somit die ungünstigste stabile dezentrale Lösung für alle Beteiligten. Die Berechnung geeigneter Nash-Gleichgewichte für Netzwerkverbindungsspiele gestaltet sich allerdings schwierig.

Die Suche nach einer optimalen Lösung für die Allgemeinheit ist wesentlich einfacher, da nach Festlegung von Bewertungskriterien lediglich entsprechend zentral optimiert werden muss. Gegeben sei dazu eine Kostenfunktion, die jeder Strategiekombination eines Netzwerkverbindungsspiels einen positiven Gesamtpreis für das entstehende Netzwerk zuordnet. Damit ist ein Netzwerk umso besser, je weniger Kosten entstehen.

Definition. Sei $\Gamma = (I, \{S_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I})$ ein endliches nicht-kooperatives Netzwerkverbindungsspiel in Normalform mit Kostenfunktion $C : \mathcal{S} := S_1 \times \dots \times S_{|I|} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Wir bezeichnen die Menge der reinen Nash-Gleichgewichte mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$. Der **Price of Anarchy** ρ ist definiert durch das Kostenverhältnis

$$\rho = \frac{\max \{ C(s) \mid s \in \mathcal{N} \}}{\min \{ C(s) \mid s \in \mathcal{S} \}}.$$

3 Das Network Creation Game

Wir betrachten in diesem Kapitel ein von Fabrikant, Luthra, Maneva, Papadimitriou und Shenker im Jahr 2003 eingeführtes Netzwerkverbindungsspiel[13]. Der Definition folgt eine Darstellung des derzeitigen Erkenntnisstandes über Nash-Gleichgewichte und den *Price of Anarchy* für dieses Modell.

3.1 Definition

Idee. Die Intention von Fabrikant et al. war eine stark vereinfachte Modellierung der dezentralen Entstehung eines dem Internet ähnlichen Netzwerkes. Egoistisch agierende Spieler (*Router, Hosts*) bauen Verbindungen (Glasfaserkabel) auf, um untereinander kommunizieren zu können. Der *Price of Anarchy* soll anhand der anfallenden Hardwarekosten für errichtete Kanten und Servicekosten für ungünstige Verbindungen aller Spieler errechnet werden.

Modell. Im *Network Creation Game* (kurz: NCG) agieren n Spieler. Jeder Spieler wird von einem Knoten repräsentiert. Wir bezeichnen diese Knotenmenge mit V . Jeder Spieler $v \in V$ entscheidet, zu welchen Spielern er eine Verbindung errichten möchte. Formal entspricht dies einer Strategie

$$s_v \in S_v = \{(s_{vw})_{w \neq v} \mid s_{vw} \in \{0, 1\}, w \in V\},$$

wobei v für jedes $s_{vw} = 1$ eine ungerichtete Kante $\{v, w\}$ erbaut. Die Strategiekombination $s = (s_1, \dots, s_n)$ lässt sich durch einen gerichteten Graphen $G'(s) = (V, E'(s))$ darstellen, wobei $E'(s) = \{(v, w) \mid v \neq w, s_{vw} = 1\}$ aufzeigt, welcher Knoten welche Verbindung erwünscht. Da die Knoten ungerichtete Kanten errichten, entspricht das entstehende Netzwerk dem von $G'(s)$ implizierten ungerichteten Multigraphen $G(s)$.

Für das Modell werden zusätzlich zwei Arten von Kosten eingeführt:

Baukosten. Für jede errichtete Kante wird dem entsprechenden Spieler ein vorher festgelegter Kantenpreis $\alpha > 0$ berechnet. Damit ergeben sich die Baukosten eines Spieler $v \in V$ durch

$$b_v(s) = \alpha \cdot |\{s_{vw} = 1\}|.$$

Entfernungskosten. Jeder Spieler v erhält (Service-)Kosten für seine Distanzen zu den anderen Knoten im entstandenen Netzwerk. Damit ergeben sich die Entfernungskosten eines Spieler $v \in V$ durch

$$d_v(s) = \sum_{w \in V} d_{G(s)}(v, w),$$

wobei $d_{G(s)}(v, w)$ die Länge des kürzesten Weges von v nach w in $G(s)$ bezeichnet. Existiert keine Verbindung von v nach w so ist $d_{G(s)}(v, w) := \infty$.

Damit betragen die **Kosten für einen Spieler** v unter der Strategiekombination s

$$c_v(s) = b_v(s) + d_v(s) = \alpha \cdot |\{s_{vw} = 1\}| + \sum_{w \in V} d_{G(s)}(v, w).$$

Als **soziale Kosten** bezeichnen wir die Gesamtkosten des entstandenen Netzwerkes:

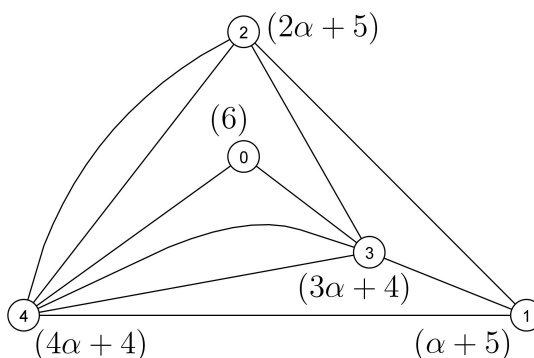
$$C(s) = \sum_{v \in V} c_v(s).$$

Für jede Strategiekombination \hat{s} mit minimalen sozialen Kosten

$$C(\hat{s}) = \min\{C(s) \mid s \in S_1 \times \dots \times S_n\},$$

bezeichnen wir den daraus resultierenden Graphen $G(\hat{s})$ als **soziales Optimum**.

Beispiel. Sei $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jeder Spieler i baue genau i Kanten, und zwar jeweils eine zu den Spielern $(i+1) \bmod 5, \dots, (2i) \bmod 5$. Dadurch entsteht das folgende Netzwerk:



Der Wert in Klammern entspricht den Kosten des Spielers.

Abbildung 3.1: Ungerichteter Multigraph als Ergebnis der Strategiewahlen im NCG

Das im Beispiel entstandene Netzwerk enthält Mehrfachkanten. Wenn ein Spieler eine Mehrfachkante entfernt, spart er Baukosten $\alpha > 0$ und seine Entfernungskosten bleiben unverändert. Das entstandene Netzwerk ist also kein Nash-Gleichgewicht. Das Entfernen einer Mehrfachkante lässt auch die Entfernungskosten der anderen Spieler unverändert. Deshalb ist das entstandene Netzwerk auch kein soziales Optimum.

Ein nicht-zusammenhängender Graph kann ebenfalls weder ein Nash-Gleichgewicht noch ein soziales Optimum repräsentieren, weil eine nicht-existente Verbindung von v nach w Kosten von $d_{G(s)}(v, w) := \infty$ impliziert. Sowohl aus der Sicht der betroffenen Spieler als auch aus der Sicht der Allgemeinheit lohnt sich also die Errichtung der Kante $\{v, w\}$. Wir halten im Hinblick auf den folgenden Abschnitt fest:

Lemma 3.1.1. *Jedes soziale Optimum und jedes Nash-Gleichgewicht im NCG ergibt einen zusammenhängenden Graphen ohne Mehrfachkanten.*

Korollar 3.1.2. *Der Price of Anarchy im NCG ist höchstens linear in der Spielerzahl.*

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der ein soziales Optimum oder Nash-Gleichgewicht für n Spieler repräsentiert. Nach Lemma 3.1.1 gilt $n - 1 \leq |E| \leq n(n - 1)/2 \leq n(n - 1)$ und für zwei beliebige Knoten $v, w \in V$ ist $1 \leq d_G(v, w) \leq n - 1$. Damit ist der *Price of Anarchy* beschränkt durch

$$\frac{n(n - 1)\alpha + n(n - 1) \cdot (n - 1)}{(n - 1)\alpha + n(n - 1) \cdot 1} < \frac{n\alpha + n^2}{\alpha + n} = n.$$

□

Anmerkungen. Wenn keine Missverständnisse entstehen können, werden wir in dieser Arbeit wie allgemein üblich vereinfachte Bezeichnungen verwenden. Bezeichnen wir einen Graphen G als Nash-Gleichgewicht oder als Gleichgewichtsgraphen, so ist damit gemeint, dass die $G = G(s)$ implizierende Strategiekombination s ein Nash-Gleichgewicht darstellt. Ebenso steht $C(G)$ genau genommen für $C(s)$ mit $G = G(s)$. Wir werden zur besseren Übersicht dort, wo es möglich ist, auf die Variable der Strategiekombination verzichten.

Bei den nachfolgenden Analysen bezeichnen wir eine Kante zwischen zwei Knoten $v, w \in V$ in der Regel durch (v, w) , also in der gerichteten Variante, um zu verdeutlichen, dass wir die Errichtung durch Spieler v ins Auge fassen. In den entstehenden Netzwerken sind natürlich alle Kanten ungerichtet.

Im Folgenden steht $n := |V| \in \mathbb{N}$ stets für die Anzahl der Spieler und $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ für den Preis zur Errichtung einer Kante.

Notation. Mit Δc_v bezeichnen wir die Veränderung des Wertes der Kostenfunktion c_v eines Spielers v bei einer angegebenen einseitigen Strategieabweichung von v .

3.2 Nash-Gleichgewichte im NCG

Es sei darauf hingewiesen, dass das Konzept des Nash-Gleichgewichtes als Lösung eines dezentralen Systems im Allgemeinen einige Schwierigkeiten verursacht. Zum einen ergeben sich Lösungen rein deklarativ, also ohne den Hinweis darauf, *wie* sie zustande kommen. Zum anderen ist das Ergebnis ggf. nicht-deterministisch, weil wir bei mehreren Lösungen keine Aussage darüber machen können, welches Nash-Gleichgewicht angenommen wird. Letzteres ist für die Bestimmung des *Price of Anarchy* allerdings auch nicht nötig.

Es stellt sich nun die Frage, ob im NCG überhaupt Nash-Gleichgewichte existieren und wie wir diese finden können. Ein naheliegender Ansatz zum Auffinden eines Nash-Gleichgewichtes wäre eine sukzessive einseitige Strategieverbesserung für einen beliebigen Ausgangspunkt (ggf. nicht-terminierend!):

Algorithmus 2 : Nash-Gleichgewicht via bester Strategiewahlen

```

s ← beliebige Strategiekombination
while s ist kein Nash-Gleichgewicht do
  wähle einen zufälligen Knoten v
  berechne die bestmögliche Strategiewahl von v
  aktualisiere s

```

Der folgende Satz zeigt jedoch die Komplexität dieser algorithmischen Lösungsfindung für Nash-Gleichgewichte im NCG.

Satz 3.2.1. (Fabrikant et al.)[13]

Das Problem „Berechne bei gegebener Strategiekombination im NCG die beste Strategiewahl für einen Spieler“ ist \mathcal{NP} -schwer.

Beweis. Wir transformieren polynomial vom \mathcal{NP} -schweren *Dominating Set Problem*. Dabei wird für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ eine minimale Knotenmenge $W \subset V$ gesucht, so dass jeder Knoten $v \in V$ in W enthalten oder zu einem Knoten $w \in W$ adjazent ist.

Wir betrachten die Problem-Instanz, dass $1 < \alpha < 2$ und eine Strategiekombination s gegeben ist, so dass für einen Spieler $v \in V$ bisher gilt: $d_{G(s)}(v, w) = \infty$ für alle $w \in W$.

Für die beste Strategiewahl s_v^* von v und die dadurch neu entstehende Strategiekombination s^* ergeben sich zwei Bedingungen:

$\alpha < 2$ impliziert $\forall w \in W : d_{G(s^*)}(v, w) \leq 2$, denn bei einer größeren Entfernung bringt ein Kantenbau $\{v, w\}$ eine Kostenersparnis von mindestens $3 - 1 > \alpha$.

$\alpha > 1$ impliziert $|\{s_{vw}^* = 1\}| \rightarrow \min$, weil eine überflüssige Kante eine Ersparnis von höchstens $2 - 1 < \alpha$ liefert.

Damit entspricht die Strategiesuche von v dem *Dominating Set Problem*. □

Anmerkung zu Satz 3.2.1. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass das NCG nur durch die Anzahl der Spieler und den festen Kantenpreis α gegeben ist. Bei einer Repräsentation des Spieles analog zur Tabelle im Beispiel des Gefangenendilemmas entspräche die Eingabegröße einer Problem Instanz $(2^{n-1})^n =: \eta$, da jeder der n Spieler 2^{n-1} Strategiemöglichkeiten besitzt. Die Suche einer besten Strategieantwort wäre in diesem Fall durch eine einfache Iteration über die entsprechenden Tabelleneinträge in $\mathcal{O}(2^{n-1}) \subset \mathcal{O}(\eta)$ Berechnungsschritten und somit in polynomialer Laufzeit möglich.

Aufgrund der Komplexität einer iterativen Lösungsfindung wäre es wünschenswert, etwa auf Ergebnisse über Nash-Gleichgewichte in Potentialspielen zurückgreifen zu können (vgl. Kapitel 2). Wir konnten jedoch nachweisen:

Satz 3.2.2. *Das NCG ist kein Potentialspiel.*

Beweis. Sei $\alpha > 3$ beliebig. Wir geben ein Gegenbeispiel an. Wähle dazu eine natürliche Zahl $k \geq 1$ so, dass $k < \alpha < \frac{3}{2}k$. Die Knoten v_1, v_2, v_3, v_4 seien nun jeweils der Mittelpunkt eines k -Sternes und zusätzlich untereinander verbunden als gerichteter Kreis der Länge 4 mit einer Abkürzung.

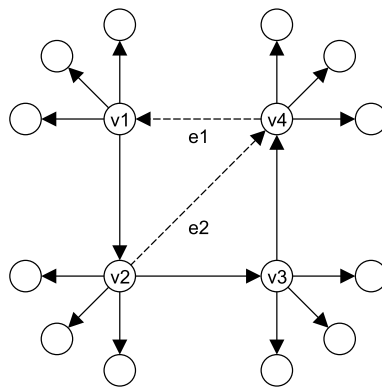


Abbildung 3.2: Gegenbeispiel für $k = 4$ und $4 < \alpha < 6$

Folgende Sequenz von Strategieverbesserungen führt zu einem isomorphen Graphen:

- (i) Knoten v_4 entfernt die Kante e_1 .
 $\Rightarrow \Delta c_{v_4} = -\alpha + k < 0$
- (ii) Knoten v_2 entfernt die Kante e_2 .
 $\Rightarrow \Delta c_{v_2} = -\alpha + k < 0$
- (iii) Knoten v_4 errichtet die Kante e_1 und die (umgekehrte) Kante e_2 .
 $\Rightarrow \Delta c_{v_4} = +2\alpha - 3k < 0$

Da sich diese Sequenz beliebig oft wiederholen lässt, erhalten wir einen unendlichen Verbesserungspfad. Mit Lemma 2.3.2 folgt die Behauptung. \square

Auf der Suche nach Nash-Gleichgewichten im NCG bedarf es dementsprechend neuer Ansätze. Wir zeigen im Folgenden auf, welche Charakterisierungen für Nash-Gleichgewichte im NCG bisher erreicht wurden und welche Hilfsmittel dafür benötigt werden. Grundsätzlich argumentieren wir dabei stets aus der Sicht eines Spielers und fragen:

- Welche Kanten müssen in einem Nash-Gleichgewicht existieren?
- Welche Kanten können in einem Nash-Gleichgewicht nicht existieren?

Zunächst halten wir die globale Existenz von Nash-Gleichgewichten im NCG fest[13].

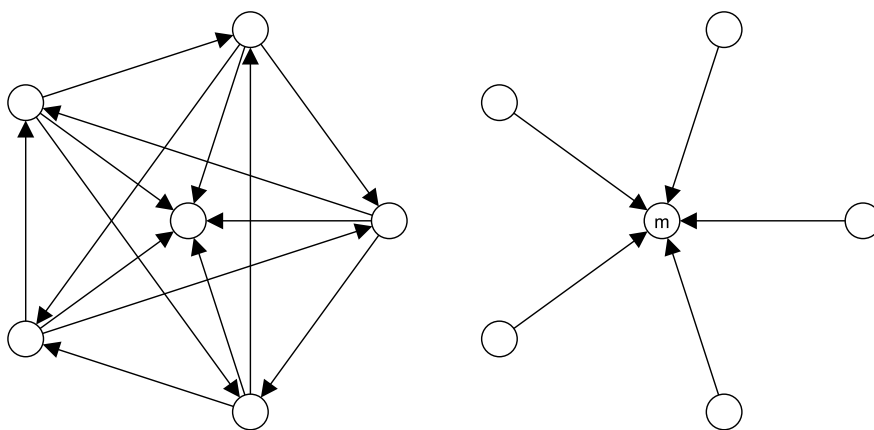
Satz 3.2.3. *Im NCG existiert für jede beliebige Spielerzahl $n \in \mathbb{N}$ und einen Kantenpreis $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ mindestens ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Sei $\alpha < 1$. Betrachte den vollständigen Graphen K_n und einen beliebigen Knoten v . Wenn v eine beliebige Anzahl $t > 0$ seiner Kanten entfernt und somit t direkte Verbindungen bestenfalls durch Verbindungen der Länge 2 ersetzt, steigen seine Entfernungskosten mindestens um t . Damit gilt $\Delta c_v \geq -t\alpha + t > 0$ für jede beliebige Strategieänderung und K_n ist folglich ein (starkes) Nash-Gleichgewicht.

Sei $\alpha \geq 1$. Betrachte den Sterngraphen Z_n in dem alle Kanten zum Mittelpunkt-Knoten m gebaut wurden. Ein Strategiewechsel kommt also höchstens für einen Knoten $v \neq m$ in Frage. Da v keine eingehenden Kanten besitzt, ist v von jedem Knoten, zu dem v keine Kante errichtet, mindestens 2 entfernt und es gilt

$$c_v \geq \alpha \cdot t + t + 2(n - 1 - t) = t \cdot (\alpha - 1) + 2(n - 1)$$

für eine beliebige Anzahl $t \geq 1$ an selbst errichteten Kanten. Damit ist dann aber $\alpha + 1 + 2(n - 2) = \alpha - 1 + 2(n - 1) \leq c_v$ und somit existiert keine bessere Strategie, als sich direkt mit dem Mittelpunkt m zu verbinden. \square



(a) Vollständiger Graph ($\alpha < 1$)

(b) Sterngraph ($\alpha \geq 1$)

Abbildung 3.3: Strategiekombinationen für Nash-Gleichgewichte mit 6 Spielern

Für $\alpha < 1$ ist K_n das einzige mögliche Nash-Gleichgewicht, da sich der Kantenbau für eine direkte Verbindung immer lohnt. Für $\alpha \geq 1$ existieren dagegen noch andere Nash-Gleichgewichte als der Sterngraph, wie die folgende Abbildung zeigt.

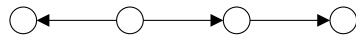


Abbildung 3.4: Strategiekombination für Nash-Gleichgewicht mit 4 Spielern und $\alpha \geq 2$

Die angegebene Strategiekombination liefert einen Baumgraphen. Der Sterngraph ist ebenfalls ein Baumgraph. Es lassen sich noch weitere Baumgraphen angeben, die ein Nash-Gleichgewicht definieren.

Definition. Ein Baumgraph $T_{k,d}$ gehört zu der Familie der vollständigen k -nären Bäume der Tiefe d , wenn jeder Knoten aus einer Baumebene $0 \leq i \leq d - 1$ exakt k mit ihm verbundene Nachfolger in der Ebene $i + 1$ besitzt und die Knoten aus der Ebene d ohne Nachfolger sind.

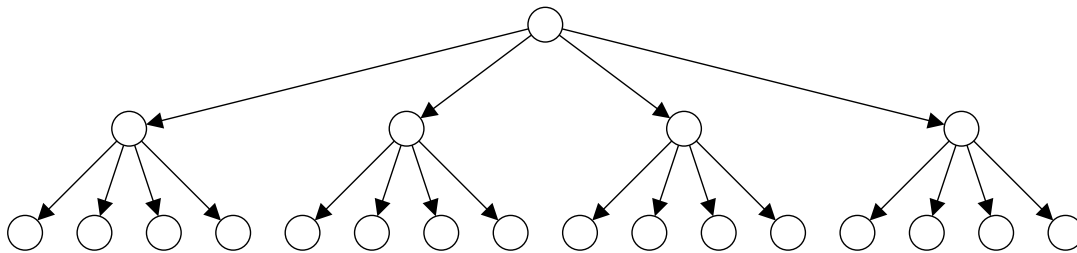


Abbildung 3.5: Beispiel $T_{4,2}$. Nash-Gleichgewicht für $\alpha = 21$.

Fabrikant et al.[13] haben bewiesen, dass für $k \geq 4$ und $d \geq 2$ jeder Graph $T_{k,d} = (V, E)$ aus der Familie der vollständigen k -nären Bäume der Tiefe d , in dem allen Kanten von Vorgängern zu Nachfolgern gebaut wurden, ein Nash-Gleichgewicht für $\alpha = (d - 1)|V|$ repräsentiert. Dabei wird durch geschickte Fallunterscheidungen gezeigt, dass sich eine weitere Kante nicht rentieren kann und die bestehenden Kanten durch keine besseren Kanten ersetzt werden können. Wir verzichten hier auf den Beweis aus [13], weil dieser uns keine neuen Konzepte liefert und halten in diesem Zusammenhang lediglich fest:

Lemma 3.2.4. Die Entfernungskostensparnis für einen Knoten durch den Bau mehrerer Kanten ist nie größer als die Summe der Entfernungskostensparnisse der einzelnen Kanten.

Beweis. Eine Entfernungskostensparnis für einen Knoten v durch den Bau weiterer Kanten ergibt sich durch neue echt kürzere Weg. Jeder dieser Wege läuft über exakt eine der von v neu errichteten Kanten und verwendet ansonsten nur bereits bestehende Kanten. \square

Baumgraphen spielen eine wichtige Rolle für potentielle dezentrale Lösungen. Aufgrund von Lemma 3.1.1 repräsentieren alle dezentral entstandenen Baumgraphen Lösungen mit minimaler Kantenmenge. Für steigende Kantenpreise scheint es umso wahrscheinlicher, dass kein Knoten an dem Bau weiterer Kanten interessiert ist und stattdessen höchstens bestehende Kanten umgelegt werden. Fabrikant et al.[13] äußerten daher die **Baumvermutung**, dass ab einem bestimmten konstanten Kantenpreis α , unabhängig von der Anzahl der Spieler, nur noch Baumgraphen als Nash-Gleichgewichte auftreten.

Im Jahr 2006 konnten Albers et al.[1] jedoch eine neue Klasse von Nicht-Baumgraphen bestimmen, welche für jedes beliebige α_0 einen Graphen enthält, der ein Nash-Gleichgewicht für ein $\alpha > \alpha_0$ darstellt. Damit war die *Baumvermutung* widerlegt. In der neuen Klasse von Albers et al. werden **Graphen aus endlichen affinen Ebenen** konstruiert. Wir werden uns im Abschnitt 4.3.1 ausführlich mit der Konstruktion und Bewertung dieser Graphen beschäftigen.

Albers et al. konnten außerdem zeigen, dass tatsächlich eine Grenze für den Kantenpreis existiert, ab der nur noch Baumgraphen Nash-Gleichgewichte repräsentieren können. Allerdings ist diese Grenze abhängig von der Anzahl der Spieler:

Satz 3.2.5. (Albers et al.)[1]

Für $\alpha \geq 12n \log n$ ist jedes Nash-Gleichgewicht im NCG ein Baumgraph.

Wir wollen im Folgenden den Beweis dieses Satzes lediglich skizzieren, da wir weiterhin hauptsächlich an neuen Konzepten interessiert sind und die zusätzlich verwendeten Abschätzungen rein technischer Natur sind.

Ausgangspunkt für die Herleitung des obigen Satzes sowie einiger anderer Resultate ist eine Erweiterung des Breitensuchbaumes (vgl. Abschnitt 2.1). Betrachten wir dazu einen beliebigen Graphen $G = (V, E)$. Für einen beliebigen Knoten $u \in V$ lässt sich mit Algorithmus 1 ein Breitensuchbaum $\hat{T}(u)$ konstruieren. Jeder Knoten ist dadurch einer eindeutigen Baumebene zugeordnet. Wir bezeichnen die für $\hat{T}(u)$ verwendeten Kanten als Baumkanten. Nun fügen wir zusätzlich die restlichen Nicht-Baumkanten wieder ein, womit wir letztendlich eine geschichtete Version des Graphen G mit ausgezeichneten Baumkanten erhalten. Albers et al. bezeichnen diese spezielle Version des Graphen als **Shortest Path Tree** $T(u)$.

Der zweite entscheidende Ansatz ist die Betrachtung der Länge des kleinsten in G enthaltenen Kreises, bezeichnet durch $girth(G)$. Die minimale Kreislänge eines Gleichgewichtsgraphen lässt sich durch die Kantenbaukosten abschätzen:

Lemma 3.2.6. Sei G ein Nash-Gleichgewicht im NCG und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ konstant. Es gilt für Kantenpreise $\alpha \geq cn \log n$, dass $girth(G) \geq c \log n$.

Beweis. Angenommen G enthält einen Kreis der Länge $l < c \log n$. Ohne eine Kreiskante $e = (v, w)$ verlängert sich der kürzeste Weg von v zu einem beliebigen Knoten maximal um $l - 1$. Damit ergibt sich für v durch Wegnahme von e

$$\Delta c_v < -\alpha + l \cdot n < -\alpha + cn \log n \leq 0.$$

Damit kann G aber kein Nash-Gleichgewicht im NCG repräsentieren. \square

Für $\alpha \geq 12n \log n$ hat somit jeder in einem Nash-Gleichgewicht enthaltene Kreis eine Länge $\geq 12 \log n$. Für ein Nash-Gleichgewicht G mit $\text{girth}(G) \geq 12 \log n$ lässt sich nun zeigen, dass $\text{diam}(G) < 6 \log n$ gilt, womit G überhaupt keinen Kreis enthalten kann. Für diesen Schritt wird der *Shortest Path Tree* benötigt:

Angenommen es existiert ein Knoten u mit einer Exzentrizität $\geq 6 \log n$. Damit enthält jeder *Shortest Path Tree* $T(u)$ aber mindestens einen Knoten in der Baumebene $\lceil 6 \log n \rceil$, der sogenannten Randebene. Für einen Graphen G mit $\text{girth}(G) \geq 12 \log n$ lässt sich die Annahme der Existenz eines Knotens in der Randebene zu dem Widerspruch führen, dass sich dann alle n Knoten in der Randebene befinden müssten. Dies ist der technische Teil, den wir an dieser Stelle nicht ausführen werden. Wir halten aber fest:

Korollar 3.2.7. *Ein (Baum-)Nash-Gleichgewicht G für $\alpha \geq 12n \log n$ hat einen Durchmesser $\text{diam}(G) \leq \lceil 6 \log n \rceil - 1 < 6 \log n$.*

Für den Bereich $1 \leq \alpha < 12n \log n$ lässt sich keine eindeutige Graphenklasse angeben, der alle Nash-Gleichgewichte angehören, wie die folgenden Beispiele zeigen. (Wir werden diese Beispiele erst in Abschnitt 4.3.1 genauer analysieren.)

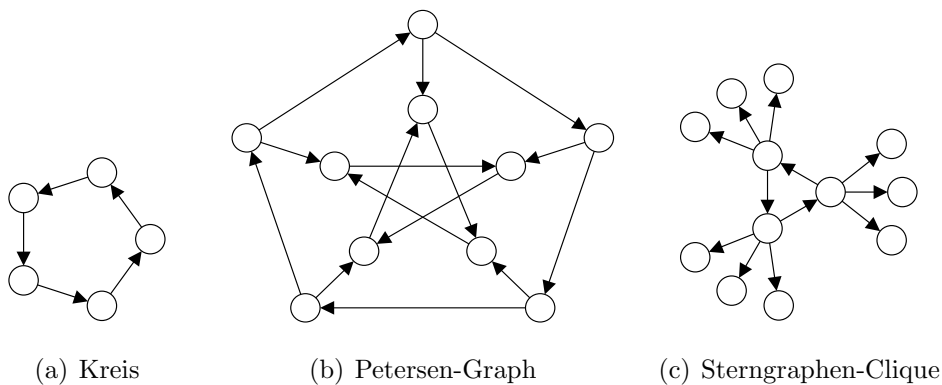


Abbildung 3.6: Nash-Gleichgewichte für $\alpha = 4$

Stattdessen müssen wir uns mit Charakterisierungen ähnlich denen des letzten Korollars begnügen:

Lemma 3.2.8. *In jedem Nash-Gleichgewicht G des NCG gilt $\text{diam}(G) \leq \sqrt{4\alpha + 1}$.*

Beweis. Betrachte einen beliebigen Knoten v . Sei l die Exzentrizität von v und w ein Knoten mit $d_G(v, w) = l$. Betrachte einen kürzesten Weg $v = u_l, u_{l-1}, \dots, u_0 = w$.



Durch den Bau einer Kante $e = (v, w)$ ergibt sich für v eine Entfernungseinsparung von $(l - i) - (1 + i) = l - 1 - 2i$ zu jedem Knoten u_i mit $i \leq \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$. Damit sich der Kantenbau nicht lohnt, muss gelten

$$\alpha - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} (l - 1 - 2i) = \alpha - (l - 1) \left(\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} i \geq 0.$$

Für l gerade bedeutet dies $\alpha \geq (l - 1) \frac{l}{2} - \frac{l-2}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$ und somit $l \leq 2\sqrt{\alpha}$.

Für l ungerade gilt $\alpha \geq (l - 1) \frac{l+1}{2} - \frac{l-1}{2} \cdot \frac{l+1}{2} = \frac{l^2-1}{4}$ und somit $l \leq \sqrt{4\alpha + 1}$. \square

Eine weitere Eigenschaft von Gleichgewichtsgraphen im NCG konnte kürzlich von Demaine et al.[12] angegeben werden:

Lemma 3.2.9. (Demaine et al.)[12]

Für ein Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$ im NCG bei einem Kantenpreis $\alpha \geq 1$ gilt $|N_2(u)| > \frac{n}{2\alpha}$ für jeden Knoten $u \in V$.

Beweis. Für einen beliebigen Knoten $u \in V$ sei $|N_2(u)| \leq \frac{n}{2}$, denn andernfalls gilt bereits $|N_2(u)| > \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2\alpha}$. Wir betrachten einen Breitensuchbaum $T(u)$ mit Wurzel u . Die Knoten aus Ebene 2 fassen wir in der Menge $W := \{w \in V \mid d_G(u, w) = 2\}$ zusammen. Jeder Knoten aus einer Ebene i mit $i \geq 2$ wird nun dem Knoten aus W zugeordnet, der in $T(u)$ sein Vorgänger ist. Jedem Knoten $v \in W$ können dabei maximal α Knoten zugeordnet werden. Andernfalls würde u von einem Kantenbau (u, v) echt profitieren, weil sich sein Abstand zu jedem v zugeordneten Knoten um mindestens 1 verringert. Es werden insgesamt $|V \setminus N_2(u) \cup W| > \frac{n}{2}$ Knoten zugeordnet und somit muss gelten $|W| > \frac{n/2}{\alpha} = \frac{n}{2\alpha}$. \square

Charakterisierungen wie Lemma 3.2.8 und Lemma 3.2.9 helfen zwar nur bedingt für eine konkrete (bildliche) Vorstellung eines Gleichgewichtsgraphen, sind aber umso nützlicher in der Beschränkung des *Price of Anarchy*, wie wir im folgenden Kapitel zeigen werden.

3.3 Der Price of Anarchy im NCG

Vier Veröffentlichungen beschäftigten sich bisher mit dem *Price of Anarchy* im NCG.

Fabrikant et al. [13] bewiesen nach der Einführung des NCG, dass der *Price of Anarchy* für $\alpha \leq 2$ und $\alpha \geq n^2$ konstant ist und im restlichen Bereich in $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha})$ liegt.

Lin [19] erweiterte den Bereich eines konstanten *Price of Anarchy* auf $\alpha \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ und $\alpha \geq c \cdot n^{3/2}$ für eine Konstante $c > 0$.

Albers et al. [1] konnten unabhängig davon ebenfalls einen konstanten *Price of Anarchy* für $\alpha \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ angeben. Zusätzlich wurde ein konstanter *Price of Anarchy* für den größeren Bereich $\alpha \geq 12n \log n$ nachgewiesen, was Lin bereits als möglich erachtet hatte. Außerdem konnte die generelle obere Schranke für den *Price of Anarchy* auf $15 \left(1 + \left(\min\left\{\frac{\alpha^2}{n}, \frac{n^2}{\alpha}\right\}\right)^{1/3}\right) \in \mathcal{O}(n^{1/3})$ verbessert werden.

Demaine et al. [12] gaben kürzlich mit $2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})}$ die erste allgemeine $o(n^\epsilon)$ Schranke für den *Price of Anarchy* an. Für jedes beliebige $\epsilon > 0$ konnte außerdem eine konstante Schranke für $\alpha \in \mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$ nachgewiesen werden, womit der Bereich für einen potentiellen nicht-konstanten *Price of Anarchy* deutlich eingeschränkt werden konnte.

Folgende Grafik fasst die derzeit besten bekannten Schranken für den *Price of Anarchy* im NCG in Abhängigkeit des Kantenpreises α zusammen.

1	$< \frac{4}{3}$	< 4	< 6	$\Theta(1)$	$2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})}$	$< 1 + \frac{6n \log n}{\alpha}$
$\alpha = 0$	1	2	$\sqrt[3]{n/2}$	$\sqrt{n/2}$	$\mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$	$12n \log n$

Abbildung 3.7: Der *Price of Anarchy* im NCG

Wir werden diese Ergebnisse nun im Einzelnen herleiten. Nach Lemma 3.1.1 ist jedes soziale Optimum und jedes Nash-Gleichgewicht im NCG ein zshgd. Graph $G = (V, E)$ ohne Multikanten. Alle Knoten, die nicht direkt miteinander verbunden sind, haben mindestens einen Abstand von 2. Damit ergibt sich eine **untere Schranke für die sozialen Kosten**[13]:

Lemma 3.3.1. *Für jedes soziale Optimum und jedes Nash-Gleichgewicht im NCG ist*

$$\begin{aligned}
 C(G(V, E)) &\geq \overbrace{\alpha|E|}^{\text{Baukosten}} + \overbrace{2|E|}^{\text{direkte Verbindungen}} + 2 \overbrace{(n(n-1) - 2|E|)}^{\text{restliche Verbindungen}} \\
 &= 2n(n-1) + (\alpha - 2)|E|.
 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt für jeden Graphen mit einem Durchmesser ≤ 2 .

Für $\alpha < 2$ erhalten wir somit für jede Spielerzahl n den günstigsten Graphen im NCG, indem wir die Kantenmenge maximieren. Damit ist der vollständige Graph K_n das soziale Optimum. Für $\alpha \geq 2$ dagegen ist ein Graph mit minimaler Anzahl an Kanten und einem Durchmesser ≤ 2 die günstigste Variante, also der Sterngraph Z_n .

Für $\alpha < 1$ haben wir bereits erwähnt, dass K_n das einzige Nash-Gleichgewicht darstellt. Damit ist der *Price of Anarchy* 1.

Für $1 \leq \alpha < 2$ hat jedes Nash-Gleichgewicht einen Durchmesser ≤ 2 , denn bei einer Distanz $d_G(v, w) \geq 3$ führt der Bau der Kante (v, w) auf $\Delta c_v \leq \alpha - (d_G(v, w) - 1) < 0$. Somit entsprechen die sozialen Kosten jedes Nash-Gleichgewichtes der unteren Schranke aus Lemma 3.3.1. Im ungünstigsten Fall ist also $|E|$ minimal. Diese Eigenschaft erfüllt der Sterngraph Z_n , den wir für $\alpha \geq 1$ bereits als Nash-Gleichgewicht identifiziert haben. Damit beträgt der *Price of Anarchy*

$$\begin{aligned} \frac{C(Z_n)}{C(K_n)} &= \frac{\overbrace{\alpha(n-1)}^{\text{Baukosten}} + \overbrace{2(n-1)}^{\text{direkte Verbindungen}} + 2 \overbrace{(n(n-1) - 2(n-1))}^{\text{restliche Verbindungen}}}{\underbrace{\frac{\alpha}{2}n(n-1)}_{\text{Baukosten}} + \underbrace{n(n-1)}_{\text{Entfernungskosten}}} \\ &= \frac{\alpha + 2 + 2n - 4}{\frac{\alpha}{2}n + n} = \frac{2\alpha - 4 + 4n}{(\alpha + 2)n} \\ &= \frac{4}{\alpha + 2} - \frac{4 - 2\alpha}{(\alpha + 2)n} < \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Für $\alpha \geq 12n \log n$ ist nach Satz 3.2.5 jedes Nash-Gleichgewicht $T = (V, E)$ ein Baum. Außerdem wissen wir aus Korollar 3.2.7, dass $d_T(v, w) < 6 \log n$ für alle $v, w \in V$. Die sozialen Kosten für den Sterngraphen Z_n entsprechen $\alpha(n-1) + 2(n-1)^2$. Damit lässt sich der *Price of Anarchy* ρ abschätzen durch

$$\rho < \frac{\overbrace{\alpha(n-1)}^{\text{Baukosten}} + \overbrace{n(n-1) \cdot 6 \log n}^{\text{Verbindungskosten}}}{\alpha(n-1) + 2(n-1)^2} < 1 + \frac{6n \log n}{\alpha} \leq \frac{3}{2}.$$

Bevor wir uns den Ergebnissen von Demaine et al.[12] zuwenden können, benötigen wir noch ein wichtiges Zwischenergebnis von Albers et al.[1]:

Lemma 3.3.2. *Die Gesamtkosten eines beliebigen Nash-Gleichgewichtes $G = (V, E)$ im NCG sind für beliebiges $u \in V$ beschränkt durch $C(G) \leq 2\alpha(n-1) + n \cdot d_u + (n-1)^2$.*

Beweis. Sei $T(u)$ ein *Shortest Path Tree* mit Wurzel u . Für jeden Knoten $v \in V$ sei E_v die Anzahl der von ihm errichteten Baumkanten in $T(u)$. Somit gilt $c_u = E_u \cdot \alpha + d_u$. Betrachte für einen beliebigen Knoten $v \neq u$ den folgenden Strategiewechsel:

- v entfernt alle von ihm errichteten Nicht-Baumkanten aus $T(u)$.
- v baut eine neue Kante (v, u) zur Wurzel von $T(u)$.

Die neuen Kantenbaukosten von v betragen $E_v + 1$. Weil v nur Nicht-Baumkanten entfernt, wird d_u durch die Strategieänderung von v nicht größer. Da v nun mit u direkt verbunden ist, können die Entfernungskosten von v nicht größer sein als $d_u + (n - 1)$. Weil G ein Nash-Gleichgewicht repräsentiert und sich der Strategiewechsel somit nicht lohnen darf, gilt offensichtlich für die Kosten von v in G

$$c_v \leq \alpha(E_v + 1) + d_u + (n - 1). \quad (3.1)$$

Die sozialen Kosten von G lassen sich jetzt abschätzen durch

$$\begin{aligned} C(G) &= \sum_{v \neq u} c_v + c_u \\ &\leq \alpha \sum_{v \in V} E_v + \alpha(n - 1) + (n - 1)d_u + (n - 1)^2 + d_u. \end{aligned}$$

□

Eine leichte Abwandlung des vorangegangenen Beweises führt auf ein weiteres interessantes Resultat[1], welches wir an dieser Stelle festhalten möchten. Wähle dazu einen Knoten $u \in V$ eines Nash-Gleichgewichtes $G = (V, E)$ mit $d_u = \min_{v \in V} d_v$. Sei nun zusätzlich zu den obigen Bezeichnungen E'_v die Anzahl der von $v \in V$ errichteten Nicht-Baumkanten im *Shortest Path Tree* $T(u)$. Damit gilt $c_v = \alpha(E_v + E'_v) + d_v$ und mit Gleichung 3.1 folgt wegen der Minimalität von d_u

$$E'_v \leq 1 + \frac{n - 1}{\alpha} \quad \text{für alle } v \neq u.$$

Spieler u baut keine Nicht-Baumkanten. Insgesamt werden von den Spielern $n - 1$ Baumkanten errichtet. Die sozialen Kantenbaukosten betragen demnach

$$\beta = \alpha \cdot \left(\sum_{v \neq u} (E'_v + E_v) + E_u \right) \leq \alpha(n - 1) + \alpha(n - 1) + (n - 1)^2.$$

Da sich die Kosten für den Sterngraphen insgesamt auf $\alpha(n - 1) + 2(n - 1)^2 > \frac{1}{2} \cdot \beta$ belaufen, können wir festhalten:

Satz 3.3.3. *In einem Nash-Gleichgewicht im NCG sind die sozialen Kantenbaukosten maximal doppelt so hoch wie die Gesamtkosten des Sterngraphen. Ein nicht-konstanter Price of Anarchy kann daher nur aus hohen Entfernungskosten entstehen.*

Kommen wir nun wieder zur Herleitung der besten bekannten Schranken des *Price of Anarchy* im NCG. Demaine et al.[12] verwenden zunächst Lemma 3.3.2, um für $\alpha \geq 2$ den Effizienzverlust eines dezentral entstandenen Netzwerkes gegenüber der optimalen Lösung durch die Tiefe eines Breitensuchbaumes abzuschätzen:

Lemma 3.3.4. *Existiert ein Breitensuchbaum der Tiefe d für ein Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$ im NCG, so gilt*

$$\frac{C(G)}{C(Z_n)} < d + 1.$$

Beweis. Sei $T(u)$ ein Breitensuchbaum der Tiefe d mit Wurzel $u \in V$. Offensichtlich ist damit $d_u \leq (n-1)d$. Mit Lemma 3.3.2 lässt sich also für $n > 1$ das Kostenverhältnis von G und Z_n abschätzen durch

$$\frac{C(G)}{C(Z_n)} \leq \frac{2\alpha(n-1) + nd_u + (n-1)^2}{\alpha(n-1) + 2(n-1)^2} < \frac{2\alpha + n(d+1)}{\alpha + 2(n-1)} \leq d + 1.$$

□

Zusammen mit der in Lemma 3.2.9 aufgezeigten Eigenschaft für Nash-Gleichgewichte im NCG folgen nun schnell die konstanten Schranken für $\alpha < \sqrt{\frac{n}{2}}$.

Satz 3.3.5. *(Demaine et al.)[12]*

Für $2 \leq \alpha < \sqrt{\frac{n}{2}}$ ist der Price of Anarchy im NCG kleiner als 6.

Beweis. Gegeben sei ein Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$.

Angenommen es existieren $v, w \in V$ mit $d_G(v, w) \geq 6$. Dann verringert der Bau der Kante (v, w) die Entfernung von v zu allen Knoten aus $N_2(w)$ um mindestens 1. Da G ein Nash-Gleichgewicht repräsentiert, gilt daher $|N_2(w)| \leq \alpha$. Zusammen mit Lemma 3.2.9 folgt im Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha > \frac{n}{2\alpha}$.

Damit hat jeder Breitensuchbaum eines Nash-Gleichgewichtes für $2 \leq \alpha < \sqrt{\frac{n}{2}}$ eine Tiefe ≤ 5 und mit Lemma 3.3.4 folgt die Behauptung. □

Satz 3.3.6. *(Demaine et al.)[12]*

Für $2 \leq \alpha < \sqrt[3]{\frac{n}{2}}$ ist der Price of Anarchy im NCG kleiner als 4.

Beweis. Gegeben sei ein beliebiges Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$. Wähle einen Knoten $v \in V$ mit maximalem Grad γ in G . Für jedes $w \in V$ ist dann $|N_2(w)| \leq \gamma^2 + 1$ und mit Lemma 3.2.9 folgt $\gamma^2 + 1 > \frac{n}{2\alpha}$. Nach Voraussetzung ist $\alpha < \sqrt[3]{\frac{n}{2}}$ und somit $n > 2\alpha^3$. Damit folgt $\gamma^2 + 1 > \alpha^2$, also insbesondere $\gamma > \alpha - 1$.

Angenommen es existiert ein $u \in V$ mit $d_G(v, u) \geq 4$. Der Bau der Kante (u, v) würde die Entfernung von u zu jedem Knoten aus $N_1(v)$ um mindestens 1 verringern. Da G ein Nash-Gleichgewicht repräsentiert, erhalten wir im Widerspruch zu $\gamma > \alpha - 1$, dass $|N_1(v)| = \gamma + 1 \leq \alpha$.

Damit hat jeder Breitensuchbaum mit Wurzel v eine Tiefe ≤ 3 und da G beliebig gewählt wurde, folgt mit Lemma 3.3.4 die Behauptung. □

Die weiteren Resultate von Demaine et al. sind etwas aufwendiger herzuleiten. Zunächst wollen wir bei festem $\epsilon > 0$ für $\alpha \in \mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$ eine konstante Schranke des *Price of Anarchy* im NCG herleiten. Der Beweis erfolgt, indem für einen Knoten u und $d \in \mathbb{N}$ $|N_d(u)| = n$ nachgewiesen wird und somit die Tiefe eines Breitensuchbaumes $T(u)$ durch d beschränkt ist. Zuvor benötigen wir jedoch einige Zwischenergebnisse, die uns von Abschätzungen für $|N_k(u)|$ auf Abschätzungen für $|N_l(u)|$ mit bestimmten $l > k$ schließen lassen.

Lemma 3.3.7. *Für jeden Knoten $u \in V$ eines Nash-Gleichgewichtes $G = (V, E)$ im NCG mit $|N_k(u)| > \frac{n}{2}$ gilt $|N_{\lceil 2k+2\alpha/n \rceil}(u)| \geq n$.*

Beweis. Wir beweisen die Kontraposition.

Sei also $|N_{\lceil 2k+2\alpha/n \rceil}(u)| < n$. Damit existiert ein $v \in V$ mit

$$d_G(u, v) \geq \lceil 2k + 2\alpha/n \rceil + 1 \geq 2k + 1 + \frac{2\alpha}{n}.$$

Für alle Knoten $w \in N_k(u)$ folgt wegen $d_G(u, w) + d_G(w, v) \geq d_G(u, v)$

$$d_G(w, v) \geq d_G(u, v) - d_G(u, w) \geq k + 1 + \frac{2\alpha}{n}.$$

Errichtet Spieler v die Kante (v, u) , so ergibt sich demnach für v zu jedem $w \in N_k(u)$ eine Kostenersparnis von mindestens $2\alpha/n$. Dies bedeutet

$$\Delta c_v \leq \alpha - |N_k(u)| \frac{2\alpha}{n}.$$

G ist ein Gleichgewichtsgraph, somit ist $\alpha \geq |N_k(u)| \frac{2\alpha}{n}$, also $|N_k(u)| \leq \frac{n}{2}$. □

Korollar 3.3.8. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $G = (V, E)$ ein Nash-Gleichgewicht im NCG für $\alpha \leq \frac{n}{2}$. Dann gilt für jeden Knoten $u \in V$ mit $|N_k(u)| > \frac{n}{2}$, dass $|N_{2k+1}(u)| = n$.*

Es genügt demnach zu einem beliebigen Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$ für $\alpha \leq n/2$ einen Knoten $v^* \in V$ zu finden, dessen k -Nachbarschaft hinreichend groß ist, um die Tiefe eines Breitensuchbaumes $T(v^*)$ und somit den Effizienzverlust von G zu beschränken. Mit dem folgenden Lemma lässt sich ein solcher Knoten iterativ bestimmen.

Lemma 3.3.9. *Sei $k \in \mathbb{N}, Y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $G = (V, E)$ ein Nash-Gleichgewicht im NCG. Es gilt:*

$$\forall v \in V : |N_k(v)| \geq Y \Rightarrow \left(\exists v^* \in V : |N_{2k+3}(v^*)| > \frac{n}{2} \right) \vee \left(\forall v \in V : |N_{3k+3}(v)| > Y \frac{n}{\alpha} \right)$$

Beweis. Existiert ein $v^* \in V$ mit $|N_{2k+3}(v^*)| > \frac{n}{2}$, so ist nichts mehr zu zeigen. Es gelte also $|N_{2k+3}(v)| \leq \frac{n}{2}$ für alle $v \in V$. Betrachten wir nun einen beliebigen Knoten $u \in V$ und verwenden den folgenden Algorithmus:

Algorithmus 3 : Basispunkte von B

Eingabe : $B := \{v \in V \mid d_G(u, v) = 2k + 3\}$

Ausgabe : Basispunkte b_1, \dots, b_l und Knotenmengen B_1, \dots, B_l

$R \leftarrow B$

$i \leftarrow 0$

while $R \neq \emptyset$ **do**

$i \leftarrow i + 1$

$b_i \leftarrow v \in R$ beliebig

$B_i \leftarrow \{b_i\}$

$R \leftarrow R - \{b_i\}$

forall $w \in R$ mit $d_G(b_i, w) \leq 2k$ **do**

$B_i \leftarrow B_i \cup \{w\}$

$R \leftarrow R - \{w\}$

Zwischenbehauptung: $l > \frac{n}{\alpha}$.

Beweis. Betrachte einen Breitensuchbaum mit Wurzel u . Wir definieren die Knotenmengen A_1, \dots, A_l wie folgt: Jeder Knoten v aus einer Ebene $> 2k + 3$ hat einen eindeutigen Vorgänger w in der Ebene $2k + 3$. Nach Algorithmus 3 gilt $w \in B_i$ für ein $1 \leq i \leq l$. Wir ordnen v nun in die Menge A_i ein. Wenn dementsprechend alle Knoten aus den Ebenen $> 2k + 3$ den Mengen A_1, \dots, A_l zugeordnet werden, erhalten wir

$$V \setminus N_{2k+3} = \bigsqcup_{i=1}^l A_i.$$

Da $|N_{2k+3}(u)| \leq \frac{n}{2}$, folgt

$$\sum_{i=1}^l |A_i| \geq \frac{n}{2}. \quad (3.2)$$

Betrachte nun einen Graphen G^* , der aus G hervorgeht, wenn Knoten u zusätzlich eine Kante (u, b_i) errichtet. Offensichtlich gilt damit $d_{G^*}(u, w) \leq 2k + 1$ für alle Knoten $w \in B_i$. Damit bringt die neue Kante (u, b_i) für u eine Entfernungseinsparung von mindestens 2 zu jedem Knoten aus $B_i \cup A_i$. Da sich dieser Strategiewechsel nicht lohnen darf, muss also insbesondere $\alpha - 2|A_i| > 0$ gelten. Somit erhalten wir

$$|A_i| < \frac{\alpha}{2}. \quad (3.3)$$

Die beiden Gleichungen 3.2 und 3.3 liefern uns die Zwischenbehauptung. □

Nach der Anwendung von Algorithmus 3 gilt für zwei verschiedene Mittelpunkte b_i, b_j offensichtlich, dass $N_k(b_i) \cap N_k(b_j) = \emptyset$. Somit gilt nach unserer Voraussetzung

$$\left| \bigcup_{i=1}^l N_k(b_i) \right| = \sum_{i=1}^l |N_k(b_i)| \geq lY.$$

Wegen $d_G(u, b_i) = 2k + 3$ gilt $N_k(b_i) \subsetneq N_{3k+3}(u)$ für alle $1 \leq i \leq l$ und wir erhalten

$$|N_{3k+3}(u)| > \left| \bigcup_{i=1}^l N_k(b_i) \right| \geq lY > Y \frac{n}{\alpha}.$$

□

Mit diesen Hilfsmitteln lässt sich nun eine konstante Schranke des *Price of Anarchy* für $\alpha \in \mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$ nachweisen: Der folgende Satz verwendet eine rekursive Folge von Abständen, um mit Hilfe von Lemma 3.3.9 einen Knoten v^* mit hinreichend großer k -Nachbarschaft zu finden. Dabei wird die Konstante Y jeweils größtmöglich gewählt. Die Rekursionsauflösung wird zeigen, dass damit $k \in \mathcal{O}(1)$ gilt, was für jedes Nash-Gleichgewicht einen konstanten Effizienzverlust impliziert.

Satz 3.3.10. (*Demaine et al.*)^[12]

Sei $\epsilon \geq \frac{1}{\log n}$ fest und $1 \leq \alpha < n^{1-\epsilon}$ beliebig. Dann gilt:

Der *Price of Anarchy* im NCG ist kleiner als $14 \cdot 3^{\lceil 1/\epsilon \rceil - 1} + 8$.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Gleichgewichtsgraph und $X := \frac{n}{\alpha} > n^\epsilon$.

Wir definieren eine rekursive Folge (a_i) durch $a_1 = 2$ und $a_i = 3a_{i-1} + 3$ für $i > 1$.

Es gilt $|N_k(u)| \geq N_k$ für alle $u \in V$ und mit Lemma 3.3.9 folgt für alle $i \geq 1$ durch die Wahl von $k = a_i$ und $Y = N_{a_i}$, dass

$$\left(\exists v^* \in V : |N_{2a_i+3}(v^*)| > \frac{n}{2} \right) \vee \left(\forall v \in V : |N_{a_{i+1}}(v)| > \frac{n}{\alpha} N_{a_i} = X N_{a_i} \right).$$

Sei j der kleinste Index, für den ein $v^* \in V$ existiert mit $|N_{2a_j+3}(v^*)| > \frac{n}{2}$.

Nach Lemma 3.2.9 ist $N_{a_1}(u) = N_2(u) > \frac{n}{2\alpha} = \frac{X}{2}$. Damit ergibt sich rekursiv

$$n \geq N_{a_i} > \frac{X^i}{2} \text{ für alle } i \leq j. \quad (3.4)$$

Insbesondere gilt $X^j < 2n$ und wegen

$$X^{\frac{1}{\epsilon}+1} = \left(\frac{n}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\epsilon}+1} > \left(n^\epsilon \right)^{\frac{1}{\epsilon}+1} = n \cdot n^\epsilon \geq n \cdot n^{1/\log n} = n \cdot n^{\log 2 / \log n} = n \cdot n^{\log_n 2} = 2n$$

erhalten wir $j \leq \lceil 1/\epsilon \rceil$. Damit gilt $|N_{2a_{\lceil 1/\epsilon \rceil}+3}(v^*)| \geq |N_{2a_j+3}(v^*)| > \frac{n}{2}$. Wir können nun Korollar 3.3.8 anwenden, da $\alpha < n^{1-\epsilon} = n/n^\epsilon \leq n/n^{\log 2 / \log n} = n/2$, und erhalten $|N_{4a_{\lceil 1/\epsilon \rceil}+7}(v^*)| = n$. Damit haben wir die Tiefe eines Breitensuchbaumes $T(v^*)$ auf

$4a_{\lceil 1/\epsilon \rceil} + 7$ beschränkt und der *Price of Anarchy* ist nach Lemma 3.3.4 kleiner als $4a_{\lceil 1/\epsilon \rceil} + 8$. Wir müssen nur noch die Rekursionsgleichung auflösen. Eine Induktion über i zeigt $a_i = \frac{7}{6}3^i - \frac{3}{2} < \frac{7}{6}3^i$. Induktionsanfang: $a_1 = 2 = \frac{7}{6}3^1 - \frac{3}{2}$. Induktionsschritt:

$$a_{i+1} = 3a_i + 3 = 3\left(\frac{7}{6}3^i - \frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{7}{6}3^{i+1} - \frac{3}{2}.$$

Der *Price of Anarchy* ist also kleiner als $4 \cdot \frac{7}{6}3^{\lceil 1/\epsilon \rceil} + 8 = 14 \cdot 3^{\lceil 1/\epsilon \rceil - 1} + 8$. \square

Beispiel. Der *Price of Anarchy* im NCG für $1 \leq \alpha < \sqrt[3]{n^2}$ ist konstant.

Wir wählen dafür $\epsilon = 1/3$. Damit ist $\epsilon \geq 1/\log n$ für alle $n \geq 8$. Satz 3.3.10 liefert uns einen *Price of Anarchy* $< 14 \cdot 3^{\lceil 1/\epsilon \rceil - 1} + 8 = 134$ für alle $n \geq 8$. Für $n < 8$ ist der *Price of Anarchy* nach Lemma 3.1.2 kleiner als $8 < 134$.

Analog ist der *Price of Anarchy* im NCG konstant für $1 \leq \alpha < \sqrt[10]{n^9}$. Wir wählen dazu $\epsilon = 0,1$ und erhalten einen *Price of Anarchy* $< 14 \cdot 3^9 + 8 < 275570$.

Satz 3.3.10 liefert also einen konstanten *Price of Anarchy* für einen großen Bereich möglicher Kantenkosten, jedoch ist diese Schranke im Vergleich zu den zuvor angegebenen konstanten Schranken extrem hoch. Insbesondere gilt dies für sehr kleine ϵ .

Die von Demaine et al. angegebene generelle obere Schranke für $\alpha < 12n \log n$ ergibt sich analog. Zunächst folgern wir aus Lemma 3.3.7:

Korollar 3.3.11. *Sei $G = (V, E)$ ein Nash-Gleichgewicht im NCG für $\alpha \leq 12n \log n$. Für jeden Knoten $u \in V$ mit $|N_k(u)| > \frac{n}{2}$ gilt $|N_{\lceil 2k+24 \log n \rceil}(u)| = n$.*

Wir benötigen noch das folgende Zwischenresultat.

Lemma 3.3.12. *Sei $G = (V, E)$ ein Nash-Gleichgewicht im NCG. Es gilt:*

$$\forall v \in V : |N_k(v)| \geq Y \Rightarrow \left(\exists v^* \in V : |N_{4k+1}(v^*)| > \frac{n}{2} \right) \vee \left(\forall v \in V : |N_{5k+1}(v)| > Y \cdot k \cdot \frac{n}{\alpha} \right)$$

Beweis. Der Beweis erfolgt völlig analog zum Beweis von Lemma 3.3.9.

Wir bestimmen mit Algorithmus 3 die Basispunkte von

$$B := \{v \in V \mid d_G(u, v) = 4k + 1\}.$$

Die Mengen A_i werden anschließend mit den Knoten aus den Ebenen $> 4k + 1$ gefüllt. Die Entfernungseinsparung von u zu jedem Knoten aus A_i durch eine neue Kante (u, b_i) beträgt dann mindestens $2k$. Damit ergibt sich analog zu oben $l > k \frac{n}{\alpha}$ und letztendlich

$$|N_{5k+1}(u)| > \left| \bigcup_{i=1}^l N_k(b_i) \right| \geq lY > Yk \frac{n}{\alpha}.$$

\square

Damit lässt sich eine allgemeine $o(n^\epsilon)$ Schranke für den *Price of Anarchy* angeben:

Satz 3.3.13. (Demaine et al.)[12]

Für $1 \leq \alpha < 12n \log n$ liegt der Price of Anarchy im NCG in $\mathcal{O}(5^{\sqrt{\log n}} \log n)$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.3.10.

Wir setzen $X := 12 \log n > \frac{\alpha}{n}$. Da jeder Gleichgewichtsgraph zusammenhängend ist, folgt $N_X = N_{\lfloor X \rfloor} > X$ für $X < n$, also $n \geq 75$. Für $n < 75$ ist der Price of Anarchy < 75 . Sei im Folgenden $n \geq 75$. Wir definieren eine rekursive Folge (a_i) durch $a_0 = X$ und $a_i = 5a_{i-1} + 1$ für $i > 0$. Induktiv folgt, dass $a_i = X5^i + \sum_{k=0}^{i-1} 5^k \geq X5^i$. Der Induktionsanfang ist trivial. Induktionsschritt:

$$a_{i+1} = 5a_i + 1 = 5\left(X5^i + \sum_{k=0}^{i-1} 5^k\right) + 1 = X5^{i+1} + \left(1 + \sum_{k=0}^{i-1} 5 \cdot 5^k\right) = X5^{i+1} + \sum_{k=0}^i 5^k.$$

Da $|N_{a_i}(v)| \geq N_{a_i}$ für alle $v \in V$, gilt nach Lemma 3.3.12, dass $|N_{4a_{i+1}}(v^*)| > \frac{n}{2}$ für ein $v^* \in V$ oder $|N_{a_{i+1}}(v)| > N_{a_i} \cdot a_i \cdot \frac{n}{\alpha}$ für alle $v \in V$. Sei j der kleinste Index, so dass $|N_{4a_{j+1}}(v^*)| > \frac{n}{2}$ für ein $v^* \in V$. Damit gilt

$$N_{a_{i+1}} > N_{a_i} a_i \frac{n}{\alpha} > N_{a_i} a_i \frac{1}{X} \geq 5^i N_{a_i} \text{ für alle } i < j$$

und wir erhalten

$$n \geq N_{a_j} > 5^{j-1} N_{a_{j-1}} > \dots > 5^{\sum_{i=0}^{j-1} i} N_{a_0} > 5^{\sum_{i=0}^{j-1} i} X > 5^{\frac{(j-1)j}{2}}.$$

Somit gilt die Bedingung

$$\frac{(j-1)j}{2} < \log_5 n.$$

Entweder ist $j < 1$ oder es gilt $(j-1)^2 \leq j(j-1) < 2 \log_5 n$ und demnach

$$j < 1 + \sqrt{2 \log_5 n} = 1 + \sqrt{2 \frac{\log n}{\log 5}} < 1 + \sqrt{\log n}.$$

In jedem Fall ist $j \leq \lceil \sqrt{\log n} \rceil$. Damit gilt $|N_{4a_{\lceil \sqrt{\log n} \rceil + 1}}(v^*)| > |N_{4a_{j+1}}(v^*)| > \frac{n}{2}$. Mit Korollar 3.3.11 können wir nun die Tiefe eines Breitensuchbaumes $T(v^*)$ auf $2(4a_{\lceil \sqrt{\log n} \rceil} + 1) + 24 \log n$ beschränken. Es ist

$$a_{\lceil \sqrt{\log n} \rceil} = X5^{\lceil \sqrt{\log n} \rceil} + \sum_{k=0}^{\lceil \sqrt{\log n} \rceil - 1} 5^k = X5^{\lceil \sqrt{\log n} \rceil} + \frac{1 - 5^{\lceil \sqrt{\log n} \rceil}}{1 - 5} < (X + 1)5^{\lceil \sqrt{\log n} \rceil}.$$

Damit ist der Price of Anarchy nach Lemma 3.3.4 kleiner als

$$8(X + 1)5^{\lceil \sqrt{\log n} \rceil} + 24 \log n + 3 \in \mathcal{O}(5^{\sqrt{\log n}} \log n).$$

□

Bemerkung. Es ist $5^{\sqrt{\log n}} \log n = 5^{\sqrt{\log n} + \log_5 \log n} \in 5^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})}$ und

$$5^{\sqrt{\log n}} = 2^{\log 5^{\sqrt{\log n}}} = 2^{\sqrt{\log n} \cdot \log 5}.$$

Somit liegt die angegebene allgemeine Schranke für den *Price of Anarchy* im NCG letztendlich in $2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})}$. Für ein beliebiges festes $\epsilon > 0$ gilt außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{\log n}}}{n^\epsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{\log n} - \epsilon \log n} = 0.$$

Somit liegt die angegebene allgemeine Schranke in $o(n^\epsilon)$.

3.4 Varianten des NCG

Das NCG von Fabrikant et al.[13] lässt sich auf vielfache Art und Weise erweitern und variieren. Corbo und Parkes[10] betrachten beispielsweise mit ihrem *Bilateral Connection Game* eine Variation des NCG, in dem eine Kante nur dann errichtet wird, wenn beide betroffenen Knoten diese Verbindung wünschen. Eine Strategiekombination $s = (s_1, \dots, s_n)$ liefert also einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit

$$E = \{\{v, w\} \mid v \neq w, s_{vw} = 1 \wedge s_{wv} = 1\}.$$

Im bilateralen Spiel teilen sich die Knoten v, w die Kosten für eine Kante $e = \{v, w\}$. Theoretisch muss ein Knoten auch dann $\frac{\alpha}{2}$ bezahlen, wenn eine von ihm angestrebte Kante aufgrund der Blockade seines Partners nicht zustande kommt. Analog zu unserer Argumentation über Mehrfachkanten im NCG können solche unnötigen Kosten allerdings für sinnvolle Lösungen im Vorhinein ausgeschlossen und deshalb vernachlässigt werden. Mit dem Konzept des gewöhnlichen Nash-Gleichgewichtes wäre der leere Graph mit unendlichen sozialen Kosten eine dezentrale Lösung, weil kein Knoten durch einen einseitigen Strategiewechsel eine Kante errichten kann. Da eine Kante $\{v, w\}$ nur dann entsteht, wenn sich die Knoten v und w auf diese Kante einigen, benötigen wir ein neues Konzept für sinnvolle stabile dezentrale Lösungen. Corbo und Parkes[10] betrachten deshalb *paarweise Nash-Gleichgewichte*, bei denen sich keine Koalition aus exakt zwei Spielern durch eine gemeinsame Strategieänderung beidseitig verbessern kann.

Es lassen sich noch viele andere Ansätze motivieren, wie das NCG variiert werden kann. Fabrikant et al.[13] geben bereits mit der Veröffentlichung des NCG einige Ideen für andere Schwerpunkte in der Modellierung an. Folgende Alternativen und Überlegungen scheinen uns insbesondere erwähnenswert:

Gerichtete Version: Die Spieler errichten einen gerichteten Graphen, d.h. eine vom Spieler v eingeführte Kante $e = (v, w)$ kann nur in der Richtung v nach w zur Abstandsermittlung benutzt werden.

Teilweiser Kantenbau: Die Spieler können sich auch entscheiden, nur Teilkosten für den Bau einer Kante zu zahlen. Eine Kante entsteht, wenn die Summe der entsprechenden Teilkosten mindestens α erreicht. Für Gleichgewichte und soziale Optima müssen sich die Teilkosten > 0 dann jeweils exakt zu α aufaddieren.

Anfälligkeit: Im NCG ist der Sterngraph für jedes $\alpha > 2$ Nash-Gleichgewicht und soziales Optimum. In der Anwendung ist die Kommunikation in einem solchen Graphen jedoch sehr anfällig, weil sämtliche Informationen über einen zentralen Knoten laufen. Interessant wäre eine Erweiterung des NCG, welche die Entstehung anfälliger Graphen erschwert.

Datentransfer: Im NCG errechnen sich die Entfernungskosten eines Knotens nur aus der Länge seiner kürzesten Wege zu den anderen Spielern. Es wird also davon ausgegangen, dass sich alle Spieler untereinander gleich viel mitzuteilen haben. Durch eine $(n \times n)$ -Datentransfer-Matrix $A = (a_{ij})$ kann die Wichtigkeit einer schnellen Verbindung zwischen bestimmten Knoten ausgedrückt werden, indem eine entstandene Entfernung $d_G(i, j)$ mit dem Eintrag a_{ij} multipliziert wird und erst anschließend zu den Entfernungskosten summiert wird.

Knotengewichtung: Durch eine Gewichtung ω_i jedes Knotens $i \in V$ lässt sich wiederum die Wichtigkeit gewisser Verbindungen implizieren, indem die Produkte $d_G(i, j) \cdot \omega_i \cdot \omega_j$ zur Bestimmung der Entfernungskosten verwendet werden.

Etappen: Denkbar wäre ein Modell, in dem nicht alle Kanten gleichzeitig entstehen und nicht alle Knoten von Anfang an im Spiel sind, aber jede Etappe ein Nash-Gleichgewicht darstellen muss.

Endliche Kosten: Die Definition von $d_G(v, w) := \infty$ für zwei nicht-verbundene Spieler v, w ist für eine Anwendung des NCG denkbar ungeeignet. In einem realistischeren Modell würden stets endliche Servicekosten anfallen, selbst dann, wenn im entstandenen Netzwerk mehrere nicht-verbundene Knoten existieren. Durch eine geeignete Modifikation ließe sich das Artefakt vermeiden, dass mindestens eine Verbindung zu einem Spieler j , der überhaupt keine Kanten errichtet, erzwungen wird („blackmail by j“ [13], S. 351).

Wir werden uns im folgenden Kapitel ausführlich mit dem letztgenannten Punkt beschäftigen und eine geeignete Variation des NCG vorschlagen und analysieren. Diese Fragestellung wurde bisher in keiner Veröffentlichung bearbeitet.

4 Das Strafterm-Verbindungsspiel

Wir wollen eine sinnvolle Erweiterung des NCG derart angeben, dass kein Netzwerk unendliche Kosten liefert. Offensichtlich benötigen wir dafür eine modifizierte Definition der Entfernungskosten im NCG, mit der auch nicht-zshgd. Netzwerke mit endlichen Kosten bewertet werden können. Wir möchten nun zunächst die Entfernungskosten bzw. Servicekosten eines Knotens im NCG aus einer allgemeineren Sicht betrachten.

4.1 Zentralitäten

Für einen Spieler sollten genau dann geringe Servicekosten entstehen, wenn er eine zentrale Position im entstandenen Netzwerk einnimmt. Im NCG ist ein Knoten umso zentraler, je geringer die durchschnittliche Entfernung zu den anderen Knoten ausfällt. Es sind aber auch viele andere Bewertungen denkbar, wann ein Knoten als zentral angesehen wird. Je nach Anwendung ist beispielsweise die minimale maximale Distanz entscheidender als die durchschnittliche Entfernung. Wir zeigen nun einen Versuch auf, die Idee von Zentralität zu formalisieren (vgl. [6] und [7]).

Ein (Knoten-)Strukturindex ψ für eine unter Bildung von Zusammenhangskomponenten abgeschlossene Graphenklasse soll jedem Knoten eines Graphen $G = (V, E)$ dieser Klasse einen konsistenten nicht-negativen Wert zuordnen, seine **Zentralität**. Dabei soll ψ ausschließlich die Struktur eines Graphen bewerten, d.h.

$$\forall v \in V : G \simeq_{\phi} H \Rightarrow \psi(G)_v = \psi(H)_{\phi(v)}.$$

Wir bezeichnen ψ als einen (schwachen) (Knoten-)Zentralitätsindex für eine unter Hinzunahme von Kanten abgeschlossene Graphenklasse \mathfrak{K} , falls zusätzlich mindestens eine der drei folgenden Zentralitätstyp-Bedingungen für alle $G = (V, E) \in \mathfrak{K}$, $v, w \in V$ und $G^* = G + (v, w)$ erfüllt wird.

Typ $\bullet \rightarrow \circ$ (Zentralität basierend auf Einfluss, Zugang, usw.):

$$\forall u \in V : \psi(G)_v \geq \psi(G)_u \Rightarrow \psi(G^*)_v \geq \psi(G^*)_u$$

Typ $\circ \rightarrow \bullet$ (Zentralität basierend auf Reputation, Erreichbarkeit, usw.):

$$\forall u \in V : \psi(G)_w \geq \psi(G)_u \Rightarrow \psi(G^*)_w \geq \psi(G^*)_u$$

Typ $\bullet \rightarrow \bullet$ (Zentralität basierend auf Kontrolle, Vermittlung, usw.):

$$\forall u \in V : \psi(G)_v + \psi(G)_w \geq \psi(G)_u \Rightarrow \psi(G^*)_v + \psi(G^*)_w \geq \psi(G^*)_u$$

Standard-Closeness

Definition. Die (Standard-) **Closeness** (-Zentralität) $\hat{\psi}$ ist definiert durch

$$\hat{\psi}(G)_v = \frac{1}{\sum_{w \in V} d_G(v, w)}$$

für alle Graphen $G = (V, E)$ aus der Klasse der stark-zshgd. Graphen. Im Sonderfall $\sum_{w \in V} d_G(v, w) = 0$ ist $\hat{\psi}(G)_v := 1$.

Lemma 4.1.1. Die Standard-Closeness erfüllt ausschließlich die Zentralitätstyp-Bedingung $\bullet \rightarrow \circ$.

Beweis. vgl. [6].

Jeder zshgd. ungerichtete Graph kann als stark-zshgd. gerichteter Graph betrachtet werden, indem jede ungerichtete Kante durch zwei entgegengesetzte gerichtete Kanten ersetzt wird. Wir haben gezeigt, dass nicht-zshgd. Graphen im NCG vernachlässigt werden können. Die Entfernungskosten bzw. Servicekosten eines Knotens im NCG entsprechen damit dem Kehrwert seiner Standard-Closeness!

Wir möchten nun eine Verallgemeinerung der Standard-Closeness einführen. Ziel ist eine Erweiterung auf nicht-zshgd. Graphen.

Komponenten-Closeness

Ein erster Versuch besteht darin, die Entfernungssummenberechnung auf die einzelnen Komponenten eines Graphen einzuschränken. Die so ermittelte Summe sollte durch die Anzahl möglicher Verbindungen innerhalb der jeweiligen Komponente normiert werden, da ansonsten jene Knoten die höchste Zentralität erhalten, die nur mit wenigen anderen Knoten verbunden sind, d.h. fehlende Verbindungen implizit belohnt werden.

Definition. Für einen Graphen $G = (V, E)$ sei $K_v := \{w \in V : d_G(v, w) < \infty\}$ die Menge der von $v \in V$ aus erreichbaren Knoten und $k_v := |K_v|$. Die **Komponenten-Closeness** ψ' definieren wir als

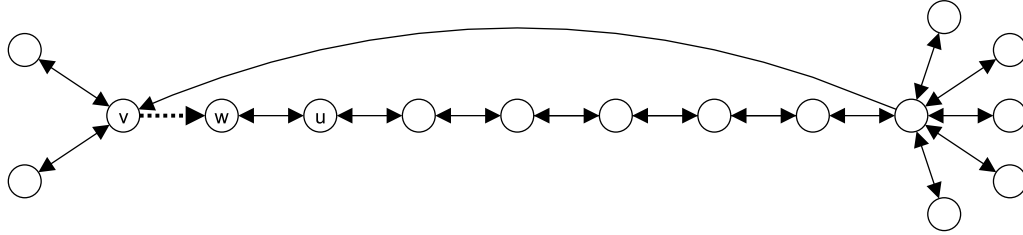
$$\psi'(G)_v := \frac{k_v(k_v - 1)}{\sum_{w \in K_v} d_G(v, w)}$$

Im Sonderfall $\sum_{w \in K_v} d_G(v, w) = 0$ ist $\psi'(G)_v := 1$.

Für einen zshgd. Graphen $G = (V, E)$ entspricht damit die Komponenten-Closeness bis auf den Normierungsfaktor $|V|(|V|-1)$ der Zentralitätsbewertung durch die Standard-Closeness. Allerdings geht durch diese Erweiterung die Zentralitätseigenschaft verloren:

Lemma 4.1.2. *Die Komponenten-Closeness ψ' ist kein Zentralitätsindex.*

Beweis. ψ' ist eine Erweiterung der Standard-Closeness Zentralität. Mit Lemma 4.1.1 gilt also $\psi' \notin \bullet \rightarrow \bullet \cup \circ \rightarrow \bullet$. Des Weiteren gilt $\psi' \notin \bullet \rightarrow \circ$ wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.



Aus der Abbildung lässt sich im Widerspruch zur Definition des Zentralitätstyp $\bullet \rightarrow \circ$ ablesen:

$$\psi'(G)_v = \frac{6}{2} = \frac{240}{80} = \psi'(G)_u = \psi'(G + (v, w))_u > \frac{240}{83} = \psi'(G + (v, w))_v.$$

□

Strafterm-Closeness

Da die Komponenten-Closeness keinen der Zentralitätstypen erfüllt, wählen wir einen anderen Ansatz um die Standard-Closeness auf nicht-zshgd. Graphen zu erweitern: Wir führen für jede nicht vorhandene Verbindung endliche **Strafkosten** der Höhe x ein. Damit ergibt sich für jeden Knoten v zusätzlich zu der Summe seiner (endlichen) Distanzen zu den Knoten aus K_v ein **Strafterm** der Form $x \cdot (n - k_v)$. Wir wählen die Strafkosten > 1 , damit die maximale Zentralität weiterhin genau dann erreicht wird, wenn ein Knoten direkt mit allen anderen Knoten verbunden ist.

Definition. Für einen Graphen $G = (V, E)$ sei $K_v := \{w \in V : d_G(v, w) < \infty\}$ die Menge der von $v \in V$ aus erreichbaren Knoten und $k_v := |K_v|$. Für beliebige Strafkosten $x > 1$ definieren wir die **Strafterm-Closeness** durch

$$\psi(G)_v := \frac{1}{\sum_{w \in K_v} d_G(v, w) + x \cdot (n - k_v)}.$$

Im Sonderfall $\sum_{w \in K_v} d_G(v, w) + x \cdot (n - k_v) = 0$ ist $\psi(G)_v := 1$.

Satz 4.1.3. Für $x \geq \frac{n}{2}$ ist die Strafterm-Closeness ein Zentralitätsindex vom Typ $\bullet \rightarrow \circ$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle $u, v, w \in V$ und $G^* = G + (v, w)$ gilt:

$$\psi(G)_v \geq \psi(G)_u \Rightarrow \psi(G^*)_v \geq \psi(G^*)_u$$

Wir betrachten dazu die vier verschiedenen Fälle, wie die Knoten v und u in G verbunden sein können.

Fall 1: $d_G(v, u) = \infty$ und $d_G(u, v) = \infty$

Es muss gelten $\psi(G^*)_u = \psi(G)_u$. Der Knoten v kann sich höchstens dann verschlechtern, wenn $w \notin K_v$. Schlechtestenfalls bringt die Verbindung mit w keine Abkürzung zu Knoten aus K_v und es gilt mit $K = K_w \setminus K_v$

$$\psi(G^*)_v = \left(\psi(G)_v^{-1} - |K| \cdot x + \sum_{z \in K} (d_G(w, z) + 1) \right)^{-1}.$$

Es ist $1 \leq |K| \leq n - 1$. Mit der unteren Schranke für x gilt

$$-|K| \cdot x + \sum_{z \in K} (d_G(w, z) + 1) \leq \frac{|K|(|K| + 1)}{2} - |K|x = |K| \left(\frac{|K| + 1}{2} - x \right) \leq 0.$$

Damit ist gezeigt $\psi(G^*)_v \geq \psi(G)_v \geq \psi(G^*)_u$.

Die folgende Grafik zeigt, wann die Schranke $x \geq \frac{n}{2}$ zur Erhaltung der Zentralitätsbedingung scharf ist: Ein bisher isolierter Knoten v mit $\psi(G)_v = \psi(G)_u$ verbindet sich durch $e = (v, w)$ mit einer Kette $\{w, \dots, u\}$ bestehend aus allen anderen Knoten.



Abbildung 4.1: Gegenbeispiel für Typ $\bullet \rightarrow \circ$ Zentralität, wenn $x < \frac{n}{2}$

Fall 2: $d_G(v, u) < \infty$ und $d_G(u, v) < \infty$

Es gilt $K_u = K_v$. Neue kürzeste Wege von v und u zu einem bisher noch nicht erreichbaren Knoten $z \in K_w \setminus K_v$ laufen über (v, w) . v verbessert sich also gegenüber u in Bezug auf jeden neuen Knoten jeweils um $d_G(u, v)$. Entsteht durch (v, w) für u ein neuer, echt kürzerer Weg zu einem bereits bekannten Knoten z , so gilt: $d_{G^*}(u, z) = d(u, v) + d_{G^*}(v, z)$. Dann kann sich aber wiederum u nicht gegenüber v verbessern, weil

$$\begin{aligned} [d(v, z) - d_{G^*}(v, z)] - [d(u, z) - d_{G^*}(u, z)] &= d(v, z) - d(u, z) + d(u, v) \\ &= [d(u, v) + d(v, z)] - d(u, z) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Fall 3: $d_G(v, u) < \infty$ und $d_G(u, v) = \infty$

Damit ist $K_u \subset K_v$. Wegen $d_G(u, v) = \infty$ ist $\psi(G^*)_u = \psi(G)_u$. Wird eine neue Kante (v, w) mit $w \in K_v$ eingefügt, so gilt $\psi(G^*)_v \geq \psi(G)_v$, denn K_v bleibt unverändert und die Entfernungssumme von v wird nicht größer.

Wird andererseits eine Kante (v, w) mit $w \notin K_v$ eingefügt, so muss ebenfalls gewährleistet sein, dass sich $\psi(G)_v$ nicht verschlechtert, damit im Fall $\psi(G)_v = \psi(G)_u$ die Zentralitätstyp-Bedingung erfüllt ist. Die Überlegungen im Fall 1 mit nicht-verbundenen Knoten u und v decken dies ab.

Fall 4: $d_G(v, u) = \infty$ und $d_G(u, v) < \infty$

Es gilt $K_v \subset K_u$. Eine neue Kante (v, w) mit $w \in K_v$ bringt keine Verbesserung von u gegenüber v , wie wir bereits in Fall 2 gesehen haben. Sei nun also $w \notin K_v$. Grundsätzlich verschlechtert sich u gegenüber v für jeden neuen Knoten $z \notin K_u$, wie wir bereits in Fall 2 gezeigt haben. Zu Knoten aus $K_u \setminus K_v$ dagegen kann sich u gegenüber v verbessern. Dies geschieht dann, wenn u durch die neue Kante seine Entfernungskosten stark verringert oder v seine Entfernungskosten stark erhöht. Wir geben ein Beispiel an:

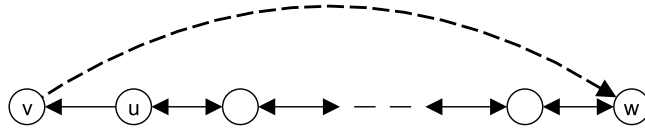


Abbildung 4.2: u kann sich durch die neue Kante (v, w) gegenüber v hinsichtlich w verbessern und v kann sich gegenüber u hinsichtlich u verschlechtern

Damit sich u gegenüber v hinsichtlich einem beliebigen $z \in K_u \setminus K_v$ verbessern bzw. v sich gegenüber u hinsichtlich einem beliebigen $z \in K_u \setminus K_v$ verschlechtern kann, muss gelten:

$$d_G(u, z) - d_{G^*}(u, z) > x - d_{G^*}(v, z)$$

Nehmen wir an, es gelte $d_G(u, z) = d_{G^*}(u, z)$ für alle $z \in K_u \setminus K_v$. Damit hat sich aber u zu keinem $z \in K_u \setminus K_v$ verbessert. Wenn wir alle $z \in K_u \setminus K_v$ zusammen betrachten, so können wir außerdem ausschließen, dass sich v zu diesen insgesamt verschlechtert, wie Fall 1 gezeigt hat. Damit wäre weiterhin $\psi(G^*)_v \geq \psi(G^*)_u$.

Gehen wir also nun davon aus, dass ein $z \in K_u \setminus K_v$ mit $d_G(u, z) > d_{G^*}(u, z)$ existiert. Dies bedeutet, dass $d_{G^*}(u, z) = d_G(u, v) + d_{G^*}(v, z)$ gilt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_G(u, z) - (d_G(u, v) + d_{G^*}(v, z)) &> x - d_{G^*}(v, z) \\ \Rightarrow d_G(u, z) &> x + d_G(u, v) \geq \frac{n}{2} + 1 \end{aligned}$$

Damit sich u gegenüber v verbessern kann, muss demnach ein Knoten $z \in K_u \setminus K_v$ mit $d_G(u, z) > \frac{n}{2} + 1$ existieren.

Zusammen mit dem folgenden Lemma ist der Satz bewiesen. \square

Lemma 4.1.4. *Sei $d_G(v, u) = \infty$ und $d_G(u, v) < \infty$. Existiert ein Knoten $z \in K_u \setminus K_v$ mit $d := d_G(u, z) > \frac{n}{2} + 1$, dann gilt $\psi(G)_u > \psi(G)_v$ für Strafkosten $x \geq \frac{n}{2}$.*

Beweis. Sei $P := \{u, v_1, \dots, v_{d-1}, z\}$ ein kürzester Weg von u nach z . Da $z \notin K_v$ ist, gilt auch für alle v_i , dass $v_i \in K_u \setminus K_v$. Zusammen mit u muss demnach $|K_u \setminus K_v| \geq d+1$ sein. Für beliebige $a, b \in V$ setzen wir $\delta(a) := (\psi(G)_a)^{-1}$, sowie $d_G(a, b) = x$ für $b \notin K_a$ und erhalten

$$\delta(v) = (d+1) \cdot x + \sum_{y \in V \setminus P} d_G(v, y) \geq \frac{(d+1)n}{2} + \sum_{y \in V \setminus P} d_G(v, y)$$

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^d i + \sum_{y \in V \setminus P} d_G(u, y) = \frac{d(d+1)}{2} + \sum_{y \in V \setminus P} d_G(u, y)$$

Es ist $d < n$. Damit $\psi(G)_u \leq \psi(G)_v$ gelten kann, müssen also die Knoten $y \in V \setminus P$ so platziert sein, dass sich $\delta(u)$ gegenüber $\delta(v)$ ausreichend erhöht.

Knoten $y \notin K_u$ schlagen in $\delta(u)$ und $\delta(v)$ gleichermaßen mit x zu Buche.

Für Knoten $y \in K_u \setminus K_v$ mit $d_G(u, y) \leq x$ gilt $d_G(u, y) \leq d_G(v, y)$.

Knoten $y \in K_u \setminus K_v$ mit $d_G(u, y) > x$ können $\delta(u)$ gegenüber $\delta(v)$ erhöhen. Wegen $x \geq n/2$ können die Knoten aus $K_u \setminus K_v$ zusammengenommen die Position von u gegenüber v jedoch nicht verschlechtern: Selbst wenn sich u am Ende einer Kette mit allen Knoten aus $K_u \setminus K_v$ befindet gilt $|K_u \setminus K_v| \cdot x \geq \sum_{i=1}^{|K_u \setminus K_v|} i$.

Damit kann sich insgesamt $\delta(u)$ gegenüber $\delta(v)$ nur durch Knoten aus K_v erhöhen. Die folgende Abbildung verdeutlicht eine für die Erhöhung von $\delta(u)$ gegenüber $\delta(v)$ ideale Platzierung der Knoten aus K_v .

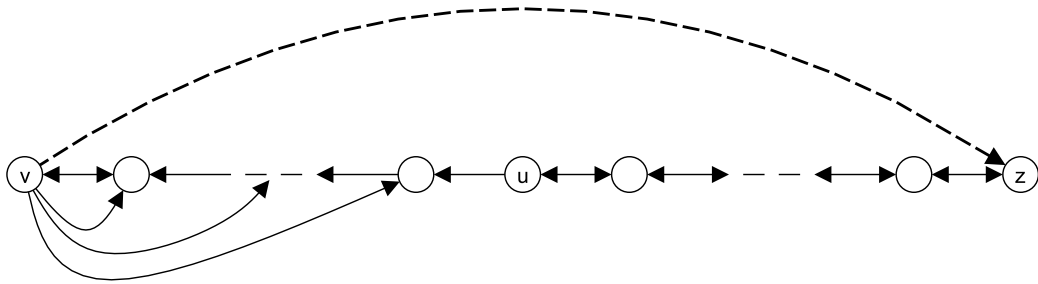


Abbildung 4.3: Dezentralste Position von u gegenüber v

Erläuterung. Wir begründen, warum die Knoten aus K_v nicht ungünstiger für u liegen können. Nach den Vorüberlegungen gilt im für u ungünstigsten Fall $K_v = V \setminus P$. Sei $l := d_G(u, v)$ die Distanz von u nach v . Die Wirkung eines Knotens $y \in K_v$ hinsichtlich der Erhöhung von $\delta(u)$ gegenüber $\delta(v)$ ist beschränkt durch

$$d_G(u, y) - d_G(v, y) \leq (d_G(u, v) + d_G(v, y)) - d_G(v, y) = d_G(u, v) = l.$$

Da $d_G(u, v) = l$, muss aber mindestens ein kürzester Weg $W = \{u = w_0, w_1, \dots, w_l = v\}$ der Länge l existieren. Zu den Knoten $w_i \in W$ mit $1 \leq i \leq l$ hat u einen Abstand von

$$\sum_{w \in W \setminus \{u\}} d_G(u, w) = \frac{l(l+1)}{2}.$$

Im ungünstigsten Fall für u ist außerdem v mit allen Knoten aus $K_v \setminus \{v\}$ direkt verbunden. Damit erhalten wir insgesamt also

$$\sum_{y \in V \setminus P} d_G(u, y) - \sum_{y \in V \setminus P} d_G(v, y) \leq \left(l \cdot (|V \setminus P| - l) + \frac{l(l+1)}{2} \right) - (l-1).$$

Es muss nach Voraussetzung $l \leq n - d - 1$ gelten, und somit entspricht Abbildung 4.3, in der alle Knoten aus $V \setminus P$ zwischen u und v eingeführt wurden, dem schlechtesten Fall für u .

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass trotzdem weiterhin $\delta(u) < \delta(v)$ gilt.

$$\delta(u) = \frac{d(d+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-d-1} i = \frac{d(d+1) + (n-d-1)(n-d)}{2}$$

$$\delta(v) = (d+1) \cdot x + (n-d-2) \geq \frac{(d+1)n + 2(n-d-2)}{2}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\delta(u) - \delta(v)) &\leq d^2 + d + n^2 - dn - n - dn + d^2 + d - (dn + n + 2n - 2d - 4) \\ &= 2d^2 + 4d + n^2 - 3dn - 4n + 4 \\ &= (n-d)(n-2d-4) + 4 < 0 \quad \text{weil } n-1 \geq d > \frac{n}{2} + 1. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Strafterm-Closeness erfüllt keinen der anderen beiden Zentralitätstypen, weil sie eingeschränkt auf zshgd. Graphen die gleichen Zentralitätswerte wie die Standard-Closeness liefert.

Wir wollen noch kurz betrachten, in welchem Bereich die von der Strafterm-Closeness-Zentralität gelieferten Bewertungen der Knoten liegen. Sei dazu $n \geq 2$ die Anzahl der Knoten.

- I. **Zusammenhängende Graphen:** Der maximale Zentralitätswert für einen Knoten v wird genau dann erreicht, wenn v mit allen anderen $n - 1$ Knoten direkt verbunden ist. Der schlechteste Zentralitätswert ergibt sich daraus, dass sich v am Ende einer Kette der n Knoten ohne Abkürzung befindet.

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1} \geq \psi(S)_v \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} i} = \frac{2}{(n-1)n}$$

- II. **Graphen mit mehreren Komponenten:** Der maximale Zentralitätswert eines Knoten v wird genau dann erreicht, wenn v mit allen anderen $n - 2$ Knoten der größtmöglichen Komponente direkt verbunden ist. Die schlechteste Position ist abhängig von den Strafkosten x . Im ungünstigsten Fall ist $x \gg n$ und v von allen Knoten isoliert.

$$\Rightarrow 0 < \psi(G)_v \leq \frac{1}{n-2+x} < \frac{1}{n-1}$$

Interessant ist nun vor allem der Bereich von x , in dem sich die Zentralitätswerte von I und II vermischen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{1}{n-2+x} \geq \frac{2}{(n-1)n}$.

$$\Rightarrow 2n - 4 + 2x \leq n^2 - n$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

Für größere Strafkosten und festes n lassen sich die absoluten Zentralitätswerte der Knoten immer in disjunkte Intervalle I_k einteilen, wobei

$$I_k = [\min\{\psi(G)_v : k_v = k\}, \max\{\psi(G)_v : k_v = k\}].$$

4.2 Definition des Strafterm-Verbindungsspieles

Wir schlagen nun unsere Variante des NCG vor, die auch nicht-zshgd. Graphen stets mit endlichen Kosten bewertetet.

Definition. Das **Strafterm-Verbindungsspiel (SV)** verläuft analog zum NCG. Zusätzlich zur Spielerzahl $n \in \mathbb{N}$ und dem Kantenpreis $\alpha > 0$ seien Strafkosten $x > 1$ gegeben. Existiert in einem Graphen $G = (V, E)$ kein Weg zwischen zwei Knoten $v, w \in V$, so setzen wir $d_G(v, w) = d_G(w, v) = x$.

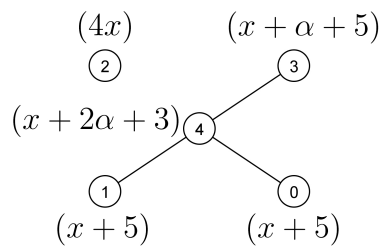
Für einen Graphen $G = (V, E)$ sei $K_v := \{w \in V : d_G(v, w) < \infty\}$ die Menge der von $v \in V$ aus erreichbaren Knoten und $k_v := |K_v|$. Zusätzlich zu den bekannten Bezeichnungen aus dem NCG definieren wir $dist(v) := \sum_{w \in K_v} d_G(v, w)$.

Damit gilt im SV

$$d_v = dist(v) + (n - k_v) \cdot x.$$

Die Entfernungskosten d_v eines Spielers v im SV entsprechen also dem Kehrwert seiner Strafterm-Closeness. Für $x \geq \frac{n}{2}$ entspricht der Kehrwert der Entfernungskosten demnach einer Knotenbewertung vom Zentralitätstyp $\bullet \rightarrow \circ$. Für $x < \frac{n}{2}$ entspricht der Kehrwert der Entfernungskosten dagegen keiner Bewertung gemäß einer der drei definierten Zentralitätstypen.

Beispiel. Sei $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jeder Spieler i baue genau $\max\{0, i - 2\}$ Kanten, und zwar jeweils eine zu den Spielern $(i + 1) \bmod 5, \dots, (2i - 2) \bmod 5$. Dadurch entsteht das folgende Netzwerk:



Der Wert in Klammern entspricht den Kosten des Spielers.

Abbildung 4.4: Nicht-zshgd. Graph als Ergebnis der Strategiewahlen im SV

Der Strategieraum eines Spielers im SV im Vergleich zum NCG hat sich formal nicht geändert. Da nun aber auch nicht-zshgd. Graphen als Nash-Gleichgewichte in Frage kommen, ergibt sich für jeden Spieler eine größere Vielfalt möglicher sinnvoller Strategiewahlen. Anders ausgedrückt, es lassen sich deutlich weniger Strategieänderungen im Vorhinein ausschließen.

Beispiel.



Die abgebildete Strategiekombination liefert im NCG für $\alpha \geq 2$ ein Nash-Gleichgewicht mit 4 Spielern. Im SV dagegen können sich die Kantenwahlen als zu teuer erweisen, wenn die Strafkosten verhältnismäßig gering ausfallen. So ist es für Spieler v_3 beispielsweise günstiger die Verbindung mit Knoten v_4 aufzugeben, wenn $\alpha = x$ festgelegt wurde.

Durch die Einführung des neuen Parameters der Strafkosten und der potentiellen Möglichkeit auf nicht-zshgd. dezentrale Lösungen und nicht-zshgd. soziale Optima ist der *Price of Anarchy* nicht mehr ohne Weiteres schlechtestenfalls linear in der Spielerzahl. Für eine dezentrale Lösung wäre es denkbar, dass für feste $q, r, s \in \mathbb{N}$ jeder Spieler durchschnittlich n/q Schritte von einem anderen Knoten entfernt ist, n/r Kanten errichtet hat und mit n/s anderen Knoten nicht verbunden ist. Damit lägen die Gesamtkosten eines Spielers in $\Omega(n \cdot (\alpha + x + n))$. Sind im Vergleich dazu in einem sozialen Optimum die Kosten von jedem Knoten unabhängig von einem der Parameter α oder x , so könnte der *Price of Anarchy* durch entsprechende Wahl des Parameters beliebig stark wachsen!

Wir werden in den folgenden Abschnitten untersuchen, welche Nash-Gleichgewichte im SV entstehen und was dies für den *Price of Anarchy* im Vergleich zum NCG bedeutet. Insbesondere interessieren uns dabei die nicht-zshgd. Lösungen.

4.3 Nash-Gleichgewichte im SV

Der Beweis von Satz 3.2.1 überträgt sich für hinreichend große Strafkosten x auf das SV. Die Berechnung von Nash-Gleichgewichten durch beste Strategieantworten ist also auch im SV nicht effizient durchführbar. Es liegt zudem weiterhin kein Potentialspiel vor, da unser Gegenbeispiel aus Satz 3.2.2 auch im SV gültig ist. Wir können jedoch wieder die globale Existenz von Nash-Gleichgewichten nachweisen:

Satz 4.3.1. *Im SV existiert für jede Spielerzahl $n \in \mathbb{N}$, jeden Kanten-Preis $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle Strafkosten $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mindestens ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Sei $\alpha \geq x - 1$. Betrachte den trivialen Graphen $G = (V, \emptyset)$ mit leerer Kantenmenge. Für einen beliebigen Knoten $v \in V$ kann ein Strategiewechsel also nur darin bestehen, sich mit $0 < t < n$ Knoten direkt zu verbinden. Damit gilt aber $\Delta c_v = -tx + t(\alpha + 1) \geq 0$ für jeden Strategiewechsel, und somit ist der Graph mit leerer Kantenmenge ein Nash-Gleichgewicht.

Sei $1 \leq \alpha < x - 1$. Betrachte den Sterngraphen, in dem alle Kanten vom Mittelpunkt-Knoten m errichtet wurden. Jede Strategieänderung für m besteht darin $0 < t < n$ Kanten zu entfernen und sich dadurch von den entsprechenden Knoten zu trennen. Damit gilt aber $\Delta c_m = tx - t(\alpha + 1) > 0$ für jeden Strategiewechsel von m . Für einen Knoten $v \neq m$ besteht jede Strategieänderung darin, sich mit $0 < t < n - 1$ weiteren Knoten direkt zu verbinden. Damit ist $\Delta c_v = t\alpha - t \cdot 1 \geq 0$ und der Sterngraph, in dem alle Kanten vom Mittelpunkt-Knoten errichtet wurden, ein Nash-Gleichgewicht. Sei $\alpha < x - 1$ und $\alpha < 1$. Sei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Menge der Spieler. Betrachte einen vollständigen Graphen K_n , in dem jede Kante $e = (v_i, v_j)$ von Spieler v_k mit $k = \min\{i, j\}$ errichtet wurde. Aufgrund der Strategiewahl von v_1 führt jede Strategieänderung eines Spielers $v_i \neq v_1$ weiterhin auf einen zshgd. Graphen. Da $\alpha < 1$, existiert für v_i keine bessere Strategie, weil jedes Entfernen einer Kante zu einem Entfernungskostenzuwachs von mindestens $1 > \alpha$ führt. Dasselbe Argument gilt für jede Strategieänderung von Spieler v_1 , die auf einen zshgd. Graphen führt. Die einzige Strategieänderung von v_1 , die auf einen nicht-zshgd. Graphen führen kann, besteht darin, alle Kanten zu entfernen. Andernfalls ist v_1 weiterhin mit einem Knoten $v_i \neq v_1$ verbunden, welcher wiederum mit allen anderen Knoten verbunden ist. Entfernt v_1 alle Kanten, so erhalten wir $\Delta c_{v_1} = (n - 1)x - (n - 1)(\alpha + 1) > 0$. Damit ist der angegebene vollständige Graph K_n ein Nash-Gleichgewicht. \square

Generell können wir für das Bestimmen von Nash-Gleichgewichten im SV die Ergebnisse über Nash-Gleichgewichte im NCG implizit benutzen. Betrachten wir dazu eine beliebige Strategiekombination, die bei n Spielern für einen Kantenpreis α und Strafkosten x ein Nash-Gleichgewicht im SV liefert. Der entstandene Graph $G = (V, E)$ besteht aus (ggf. mehreren) (Zusammenhangs-)Komponenten $\mathcal{K}_1 = (K_1, E|_{K_1}), \dots, \mathcal{K}_r = (K_r, E|_{K_r})$ mit $V = K_1 \uplus \dots \uplus K_r$ und $r \geq 1$. Jede durch K_i induzierte Komponente \mathcal{K}_i lässt sich als selbstständiger Graph für $k_i := |K_i|$ Spieler im NCG betrachten. Da G ein Nash-Gleichgewicht im SV darstellt, gilt insbesondere für jede Komponente \mathcal{K}_i ,

dass sich kein Knoten $v \in K_i$ durch den Bau oder das Entfernen von Kanten zu Knoten aus K_i verbessern kann. Damit ist der Graph \mathcal{K}_i für α ein Nash-Gleichgewicht im NCG bei $k_i \leq n$ Spielern. Wir halten fest:

Lemma 4.3.2. *Sei $G = (V, E)$ für $\alpha > 0$ und $x > 1$ ein Nash-Gleichgewicht im SV mit Komponenten $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$. Dann repräsentiert jede Komponente \mathcal{K}_i , $1 \leq i \leq r$ für α ein Nash-Gleichgewicht im NCG.*

Korollar 4.3.3. *Die notwendigen Bedingungen für Nash-Gleichgewichte im NCG bei k Spielern und einem Kantenpreis α stellen bei gleichem Kantenpreis notwendige Bedingungen für alle Komponenten mit k Knoten eines Nash-Gleichgewichtes im SV dar.*

Hinreichende Bedingungen für Nash-Gleichgewichte im NCG übertragen sich dagegen nicht ohne Weiteres, weil ein Spieler im SV zusätzlich eine Auflösung seiner Komponente und eine Verbindung mit anderen Komponenten ins Auge fassen kann. Insbesondere muss also nicht jeder Gleichgewichtsgraph des NCG als Komponente eines Gleichgewichtsgraphen im SV auftreten. Im folgenden Abschnitt werden wir nun untersuchen, welche Graphen unter welchen Bedingungen als Komponenten eines Gleichgewichtsgraphen in Frage kommen.

4.3.1 Komponenten nicht-zusammenhängender Gleichgewichte

Analog zum Beweis von Satz 4.3.1 ergibt sich zunächst:

Lemma 4.3.4. *Für $0 < \alpha < x - 1$ gibt es kein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein nicht-zshgd. Graph und $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Wir betrachten jene Komponente $\mathcal{K} = (K, E|_K)$ von G , in der v liegt und definieren $t := |V| - |K|$. Errichtet nun v zu jedem Knoten $w \notin K$ eine Kante, so gilt

$$\Delta_{c_v} = t \cdot \alpha + t \cdot 1 - t \cdot x = t \cdot (\alpha - (x - 1)) < 0 .$$

Damit kann sich sogar *jeder* Knoten eines nicht-zshgd. Graphen durch einen einseitigen Strategiewechsel verbessern. \square

Wir untersuchen im Folgenden also den Bereich $\alpha \geq x - 1$. Der Beweis von Satz 4.3.1 hat gezeigt:

Lemma 4.3.5. *Für $\alpha \geq x - 1$ ist der triviale Graph $G = (V, \emptyset)$ ein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht.*

Wir bezeichnen den Graphen mit leerer Kantenmenge im Folgenden als *triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht*. Es stellt sich nun die Frage, ob auch ein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht existieren kann. Es gilt also insbesondere eine geeignete nicht-triviale Komponente zu finden.

Nach Lemma 4.3.2 induziert jede Komponente $\mathcal{K} = (K, E|_K)$ eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes im SV für identische Kantenbaukosten α ein zshgd. Nash-Gleichgewicht im NCG bei $|K|$ Spielern. Wir prüfen daher zuerst, ob jene Graphen, die im NCG als Nash-Gleichgewichte nachgewiesen werden konnten, mögliche Komponenten eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes im SV darstellen. Jedes der bisher nachgewiesenen Nash-Gleichgewichte im NCG gehört zu einer der folgenden vier Graphenklassen, die wir nacheinander untersuchen wollen.

- Cliques (Vollständige Graphen)
- Clique von Sterngraphen
- Baumgraphen (inkl. Sterngraphen)
- Affine-Ebene-Graphen (inkl. Petersen-Graph)

Bemerkung. Wenn wir im Folgenden von Baumkomponenten etc. sprechen, sind immer *nicht-triviale* Komponenten, also Komponenten mit mehr als einem (*isolierten*) Knoten gemeint.

Cliques

Definition. Eine **Paar-Komponente** besteht aus zwei Knoten und einer Kante.

Lemma 4.3.6. Für $\alpha > 1$ existiert kein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht, welches eine Paar-Komponente enthält.

Beweis: Damit sich eine Paar-Komponente nicht auflöst, muss $-\alpha - 1 + x \geq 0$ gelten. Zusammen mit der allgemeinen Schranke von $\alpha \geq x - 1$ für nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte folgt also $\alpha = x - 1$. Damit lohnt sich aber für einen Knoten v von außerhalb einer Paar-Komponente \mathcal{K} ein Kantenbau zu einem der Knoten aus \mathcal{K} , denn dies bedeutet für v einen Kostenunterschied von $\alpha + 1 + 2 - 2x = -\alpha + 1 < 0$. \square

Eine Clique \mathcal{K} mit $k > 2$ Knoten kann ebenfalls nur dann in einem nicht-zshgd. Gleichgewicht auftreten, wenn $\alpha \leq 1$ gilt. Andernfalls existiert ein Knoten in \mathcal{K} , der eine Kante mit Kosten $\alpha > 1$ entfernen kann, wobei sich seine Entfernungskosten um lediglich 1 erhöhen.

Aufgrund der allgemeinen unteren Schranke von $\alpha \geq x - 1$ für nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte können wir damit den folgenden Satz formulieren.

Satz 4.3.7. Für $x > 2$ bildet keine Komponente eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes eine Clique.

Clique von Sterngraphen

Definition. (Albers et al.)[1]

Eine (k, l) -Clique von Sterngraphen besteht aus einer Clique mit k Knoten, wobei jeder Knoten der Clique der Mittelpunkt eines Sterngraphen mit insgesamt l Knoten ist.

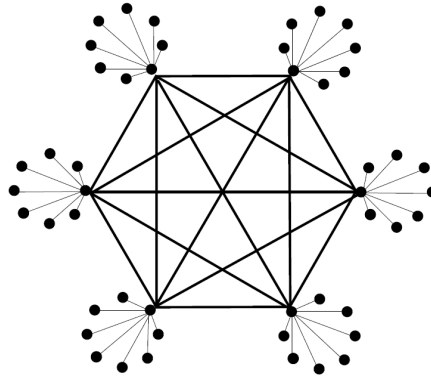


Abbildung 4.5: Eine (6,8)-Clique von Sterngraphen. (Quelle: [1])

Lemma 4.3.8. (Albers et al. 2006)[1]

Sei G eine (k,l) -Clique von Sterngraphen, in der alle Kanten von den Knoten der Clique errichtet wurden. Dann ist G ein Nash-Gleichgewicht im NCG für $\alpha = l$.

Beweis. vgl. [1] □

Für $k < 3$ ist eine (k,l) -Clique von Sterngraphen insbesondere ein Baum und wird von uns deshalb erst im nächsten Abschnitt behandelt.

Satz 4.3.9. Sei $G = (V, E)$ eine (k,l) -Clique von Sterngraphen, in der alle Kanten von den Knoten der Clique errichtet wurden. Für $k \geq 3$ und $l = \alpha$ kann G nur dann Komponente eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes im SV sein, wenn $\alpha = 1$ und $x = 2$ gilt.

Beweis. Wir müssen zusätzlich zu Lemma 4.3.8 noch ein mögliches Aufspalten der Komponente und eine Verbindung von außerhalb in die Komponente ins Auge fassen. Für $k \geq 3$ lassen sich die Kanten in der Clique offensichtlich so auslegen, dass die Clique nicht einseitig aufgelöst werden kann. Da auch alle Sternkanten von den Knoten der Clique gebaut werden, muss aber wiederum $-\alpha - 1 + x \geq 0$ und zusammen mit der allgemeinen Schranke $\alpha = x - 1$ gelten.

Eine mögliche Verbindung von außen wäre eine Kante zu einem beliebigen Knoten v der Clique. Daher muss gelten

$$\alpha - (kl)x + \sum_{w \in V} (d_G(v, w) + 1) = \alpha - klx + (2kl - k - l) + kl \geq 0.$$

Es ist $l = \alpha = x - 1$. Wir erhalten also als Bedingung

$$0 \leq l - kl(l + 1) + 2kl - k - l + kl = -k(l^2 - 2l + 1) = -k(l - 1)^2.$$

Somit muss $\alpha = l = 1$ und $x = \alpha + 1 = 2$ gelten. □

Baumgraphen

Satz 4.3.10. *In einem nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$ im SV für Strafkosten $x > 2$ wurde zu jedem nicht-isolierten Knoten mindestens eine eingehende Kante errichtet.*

Beweis. Angenommen es existiert ein nicht-isolierter Knoten v , der alle inzidenten Kanten selber errichtet hat. Sei t die Anzahl der von ihm errichteten Kanten. Damit sich v nicht von der ihn enthaltenden Komponente isoliert, d.h. alle seine Kanten entfernt, muss gelten

$$-t \cdot \alpha - \text{dist}(v) + (k_v - 1) \cdot x \geq 0.$$

Betrachten wir nun die Menge $W := \{w \in V : (v, w) \in E\}$ jener Knoten, mit denen sich v verbunden hat. Wenn sich ein Knoten u von außerhalb mit allen Knoten $w \in W$ verbindet, ergeben sich für u die gleichen Entfernungen zu allen Knoten $w \in W$. Zu v ergibt sich ein Abstand von 2. Da sich dies nicht lohnen darf, muss gelten

$$t \cdot \alpha + \text{dist}(v) + 2 - k_v \cdot x \geq 0.$$

In der Summe ergeben die beiden Ungleichungen $x \leq 2$. □

Korollar 4.3.11. *Für $x > 2$ stellt keine Komponente eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes einen Baum dar.*

Beweis. In jedem Baum $G = (V, E)$ gibt es einen Knoten, der sämtliche inzidenten Kanten selber bauen musste. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass $|E| = |V| - 1$ und jede gerichtete Kante genau einen Zielknoten besitzt. □

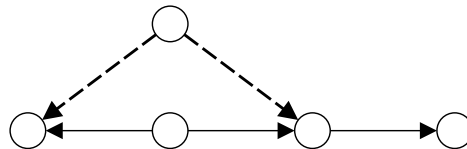


Abbildung 4.6: Verbindung von außerhalb einer Komponente mit allen Nachbarn eines Knotens, der alle inzidenten Kanten selber errichtet hat

Satz 4.3.12. *In einem Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$ im SV für einen Kantenpreis $\alpha > (k - 1)(x - 2) + 1$ wurde zu jedem Knoten in einer Komponente mit $k > 1$ Knoten mindestens eine eingehende Kante errichtet.*

Beweis. Angenommen es existiert ein nicht-isolierter Knoten v mit $k_v = k$, der alle $1 \leq t \leq k - 1$ inzidenten Kanten selber errichtet hat. Damit v nicht alle inzidenten Kanten entfernt, muss gelten

$$-t \cdot \alpha - \text{dist}(v) + (k - 1) \cdot x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \frac{k - 1}{t} \cdot x - \frac{\text{dist}(v)}{t}.$$

Zu jedem nicht direkt verbundenen Knoten hat v mindestens einen Abstand von 2. Somit ist

$$\text{dist}(v) \geq 2 \cdot (k - 1 - t) + t = 2(k - 1) - t.$$

Zusammengenommen muss also gelten

$$\alpha \leq \frac{k - 1}{t} \cdot x - \left(2 \cdot \frac{k - 1}{t} - 1\right) \leq (k - 1)(x - 2) + 1$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Korollar 4.3.13. Für $\alpha > 1$ existiert kein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht im SV, in dem ein nicht-isolierter Knoten ohne eingehende Kante existiert.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt zusammen mit Satz 4.3.10. \square

Korollar 4.3.14. Für $\alpha > 1$ existiert kein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht im SV, welches eine Baumkomponente enthält.

Affine-Ebene-Graphen

Wir definieren eine Familie von Graphen, die erstmals 2006 von Albers et al.[1] betrachtet wurde. Sei dazu p eine Primzahl, $q = p^b$ mit $b \in \mathbb{N}$ eine Primpotenz und \mathbb{F}_q der bis auf Isomorphie eindeutige endliche Körper mit q Elementen. Wir betrachten die Punktmenge $P = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ und die Geradenmenge $\mathfrak{L} = \{p_1 + \mathbb{F}_q \cdot p_2 \mid p_1, p_2 \in P, p_2 \neq (0, 0)\}$. Zwei Geraden $l_1, l_2 \in \mathfrak{L}$ sind parallel, $l_1 \parallel l_2$, genau dann, wenn ihre Punktmengen disjunkt oder identisch sind. Das Paar (P, \mathfrak{L}) bildet eine affine Ebene, d.h. es gilt:

- Für zwei beliebige Punkte existiert genau eine Gerade, die beide Punkte enthält. (*Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden*)
- Zu jedem Punkt $p \in P$ und jeder Geraden $l_1 \in \mathfrak{L}$ existiert genau eine Gerade $l_2 \in \mathfrak{L}$ mit $l_1 \parallel l_2$ und $p \in l_2$. (*Parallelenaxiom*)
- Es existieren drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen. (*Reichhaltigkeit*)

Die affine Ebene enthält q^2 Punkte. Jedes Punktepaar definiert eine Gerade, welche jeweils q Elemente enthält. Es gibt also insgesamt

$$\binom{q^2}{2} / \binom{q}{2} = \frac{q^2!}{2!(q^2 - 2)!} \cdot \frac{2!(q - 2)!}{q!} = \frac{q^2(q^2 - 1)}{q(q - 1)} = q(q + 1)$$

paarweise verschiedene Geraden. Die Beziehung *parallel* definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge \mathfrak{L} der Geraden. \mathfrak{L} teilt sich damit auf in $q + 1$ Äquivalenzklassen mit jeweils q parallelen Geraden.

Definition. Der Graph $G_q = (V, E)$ sei definiert durch $V = P \cup \mathfrak{L}$ und der folgenden Kantenmenge:

- Ein Punkt und eine Gerade sind genau dann verbunden, wenn der Punkt in der Geraden enthalten ist:

$$\forall p \in P \forall l \in \mathfrak{L} : \{p, l\} \in E \Leftrightarrow p \in l$$

- Geraden sind genau dann verbunden, wenn sie parallel und verschieden sind:

$$\forall l_1, l_2 \in \mathfrak{L} : \{l_1, l_2\} \in E \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2, l_1 \neq l_2$$

- Punkte sind nicht miteinander verbunden:

$$\forall p_1, p_2 \in P : \{p_1, p_2\} \notin E$$

G_q enthält also weder Multikanten noch Schleifen. $|V| = q^2 + q(q + 1) = 2q^2 + q$ und

$$|E| = q \cdot q(q + 1) + \frac{q(q - 1)}{2} \cdot (q + 1) = \frac{3q^3 + 2q^2 - q}{2}.$$

Der Graph G_q ist so eng verbunden, dass $\text{diam}(G_q) = 2$ gilt. Es gilt überdies, dass G_q geodätisch ist, d.h. sämtliche kürzeste Wege sind eindeutig:

- Alle Punkte haben einen Abstand von 2 über die gemeinsame Gerade.
- Ein Punkt p ist mit seinen Geraden direkt verbunden. Jede andere Gerade g erreicht er am schnellsten über die entsprechende Parallele $h \parallel g$ mit $p \in h$.
- Eine Gerade l ist mit ihren Parallelen und ihren Punkten direkt verbunden. Jede andere Gerade erreicht l am schnellsten über den gemeinsamen Schnittpunkt. Jeden anderen Punkt erreicht l über die entsprechende Parallele.

Diese Überlegungen liefern uns die **Entfernungskosten im NCG**:

Gerade-Knoten $v \in \mathfrak{L} \subset V$: $d_v = 1 \cdot (q + (q - 1)) + 2 \cdot ((q^2 - q) + (q(q + 1) - q)) = 4q^2 - 1$

Punkt-Knoten $v \in P \subset V$: $d_v = 1 \cdot (q + 1) + 2 \cdot ((q^2 - 1) + (q(q + 1) - (q + 1))) = 4q^2 + q - 3$

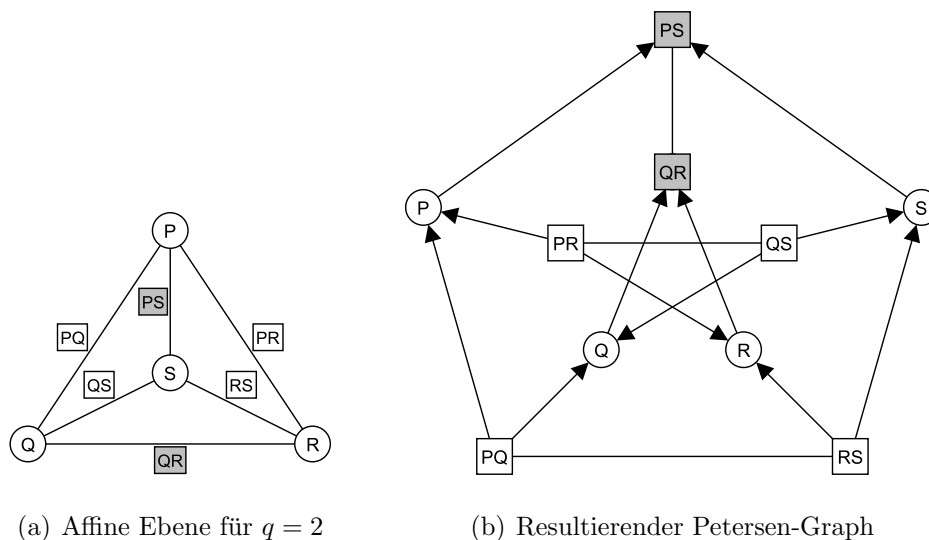
Ob ein Graph ein Nash-Gleichgewicht darstellt, ist insbesondere von der Orientierung der Kanten abhängig, wobei die Orientierung lediglich angibt, von welchem Knoten die entsprechende Kante gebaut wurde. Wir geben im Folgenden eine geeignete Orientierung an.

Die Äquivalenzklassen der Geraden bilden jeweils vollständige Teilgraphen. Die Kanten in diesen Teilgraphen lassen sich so orientieren, dass für den Eingangsgrad $\deg^-(l)$ und den Ausgangsgrad $\deg^+(l)$ jeder Geraden l im Teilgraph gilt:

$$|\deg^-(l) - \deg^+(l)| = 0 \text{ (} q \text{ ungerade) bzw. } |\deg^-(l) - \deg^+(l)| = 1 \text{ (} q \text{ gerade).}$$

Dies folgt per Induktion über die Anzahl der Knoten: Für ein oder zwei Knoten ist die Aussage richtig. War die Anzahl der Knoten bisher gerade, so werden die Kanten des neuen Knotens so orientiert, dass sie die Differenz zwischen \deg^- und \deg^+ bei allen alten Knoten ausgleichen. Für den neuen Knoten sind \deg^- und \deg^+ gleich, weil ansonsten die Summen aller Ausgangs- und aller Eingangsgrade nicht mehr identisch wären. War die Anzahl der Knoten bisher ungerade, so wird beispielsweise die abgerundete Hälfte der neuen Kanten zum neuen Knoten hin und die aufgerundete Hälfte der neuen Kanten vom neuen Knoten weg orientiert. Damit haben alle Knoten eine Differenz von 1 zwischen Eingangs- und Ausgangsgrad.

Für die Kanten zwischen Punkten und Geraden wählen wir zunächst für jede der $q + 1$ Äquivalenzklassen paralleler Geraden einen Repräsentanten $l^i, 0 \leq i \leq q$. Alle Kanten zwischen den Geraden aus $[l^q] = \{l_0^q, \dots, l_{q-1}^q\}$ und ihren Punkten werden von den Punkten gebaut. Jede Gerade $l \in [l^i], 0 \leq i \leq q - 1$ baut nun zwei Kanten, und zwar jeweils eine zu den Schnittpunkten $l \cap l_i^q$ und $l \cap l_{i+1(\text{mod } q)}^q$. Die restlichen Kanten werden schließlich von den Punkten gebaut.

(a) Affine Ebene für $q = 2$

(b) Resultierender Petersen-Graph

Abbildung 4.7: Konstruktion eines Affine-Ebene-Graphen für $q = 2$

Lemma 4.3.15. *Durch die angegebene Orientierung gilt für $q > 2$, dass kein Strategiewechsel zu einem Zerfallen des Graphen G_q in mehrere Komponenten führt.*

Beweis. Schlechtestenfalls entfernt ein Knoten v sämtliche von ihm gebaute Kanten. Der Knoten selbst kann sich dadurch aber nicht isolieren, denn für $q > 2$ hat jede Gerade mindestens eine eingehende Kante durch eine parallele Gerade und da es mehr als eine Äquivalenzklasse gibt, hat auch jeder Punkt eine eingehende Kante. Wir zeigen nun, dass v sogar mit sämtlichen Knoten verbunden bleibt und der Graph somit weiterhin zshgd. ist.

Sei v ein Punkt. Nach Wegnahme aller seiner Kanten ist v weiterhin mit einer Geraden l verbunden. Diese Gerade ist mit allen ihren Parallelen verbunden. Dadurch sind alle Punkte und somit auch alle Geraden erreichbar.

Sei v eine Gerade. Nach Wegnahme aller seiner Kanten ist v weiterhin mit einer und somit allen Parallelen verbunden. Diese sind mit allen Punkten außer jenen auf v verbunden. Jeder dieser Punkte ist aber über eine durch ihn laufende Gerade einer anderen Äquivalenzklasse und den Schnittpunkt mit einer Parallelen von v ebenfalls erreichbar. Damit sind alle Punkte und alle Geraden erreichbar. \square

Wir wollen nun zeigen, dass es nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte gibt, in denen G_q als Komponente vorkommt. Wir wissen bereits, dass sich die Komponente nicht auflösen kann. Außerdem gilt:

Satz 4.3.16. *(Albers et. al 2006)[1]*

Sei $q > 12$. Dann ist der Graph G_q ein starkes Nash-Gleichgewicht für $1 < \alpha < q + 1$.

Beweis. vgl. [1] \square

Es bleibt für uns also nur noch zu zeigen:

Satz 4.3.17. *Sei $q > 2$. Für $1 < \alpha < q + 1$ und $x \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4q+2}$ möchte sich kein Knoten v einer anderen Komponente mit $G_q = (V_q, E_q)$ verbinden.*

Beweis. Wir zeigen jeweils die beste Verbindung, die v mit t Kanten zu Knoten aus G_q erreichen kann.

Für $t = 1$ profitiert v am meisten von einer Kante zu einer Geraden, da solche Knoten für $q > 2$ am zentralsten sind.

Indem sich v mit G_q verbindet hat er einen Abstand von maximal 3 zu allen Knoten aus G_q . Wir betrachten nun, welche Verbesserungen durch weitere Kanten auftreten können, unter der Annahme, dass mindestens eine Verbindung e mit einer Geraden l eingegangen wird, d.h. wir betrachten $G_q^* = (V_q \cup \{v\}, E_q \cup \{e\})$ und weitere Kanten (v, \cdot) hinsichtlich ihres Nutzens für v . Insbesondere ist v also bisher noch nicht direkt mit einem Punkt-Knoten verbunden.

Notation. \nparallel steht für nicht-parallel und SP für Schnittpunkt. Um einen kürzesten Weg $W = \{w_0, w_1, \dots, w_t\}$ anzugeben, verwenden wir die Darstellung $w_0-w_1-\dots-w_t$. *Erinnerung.* Es gibt $q + 1$ verschiedene Äquivalenzklassen mit jeweils q Geraden, die jeweils q Punkte enthalten.

Verbindung mit einem Punkt p , der nicht auf l liegt. v spart 2 bzgl. p (vorher: $v-l-||l-p$, nun: $v-p$). Außerdem liegt v um 1 näher an allen Geraden $h \nparallel l$ mit $p \in h$ (vorher $v-l-SP-h$, nun $v-p-h$). Für $h||l$ mit $p \in h$ findet keine Einsparung statt, da bereits vorher $v-l-h$ galt. Weitere Einsparungen sind nicht möglich, weil p zu allen anderen Knoten einen Abstand von 2 hat. Generell bringt eine Verbindung zu einem Punkt, der auf keiner der mit v verbundenen Geraden liegt, also eine Verbesserung von $\max. 2 + (q + 1) - i$, wobei i die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen der bereits mit v verbundenen Geraden angibt. Unter der Annahme, dass v eine Verbindung zu mindestens einer Geraden eingeht, haben wir also eine maximale Einsparung von $q + 2$.

Verbindung mit einem Punkt p , der auf l liegt. Dadurch spart v nur 1 an Entfernungskosten bzgl. p . Außerdem spart v max. q -mal jeweils 1 an Entfernung bzgl. allen Geraden, die p enthalten (vorher $v-l-p-h$, nun $v-p-h$). Ist v bereits mit mehr als einer Geraden verbunden, kann die Einsparung noch schlechter sein, da ggf. eine Entfernung von ≤ 2 zu h bereits vorher galt ($v-h$ oder $v-||h-h$). Von allen anderen Knoten ist p für eine Verbesserung zu weit entfernt. Maximal bringt eine Verbindung zu einem Punkt, der auf einer bereits mit v verbundenen Geraden liegt, eine Einsparung von $q + 1$.

Verbindung mit einer Geraden $h||l$. Bzgl. h verbessert sich v um 1. Zu den Parallelen von h hat v bereits einen Abstand von 2. Eine Verbesserung kann letztendlich nur noch bzgl. Punkten $p \in h$ stattfinden, die in keiner mit v verbundenen Geraden enthalten sind. Somit spart eine solche Verbindung nie mehr als $q + 1$.

Verbindung mit einer Geraden h aus einer anderen Äquivalenzklasse als l . Die Einsparung von v bzgl. h beträgt 2 (vorher $v-l-SP-h$ nun $v-h$). Außerdem liegt v nun um 1 näher an allen Punkten $p \in h$, abgesehen vom SP mit l (vorher $v-l-||l-p$ nun $v-h-p$). Dies bringt eine Einsparung von $q - 1$. Ganz allgemein beträgt diese Einsparung $q - i$, wobei i die Anzahl der *verschiedenen* Schnittpunkte von h mit bereits mit v direkt verbundenen Geraden angibt. Zusätzlich (und das ist der entscheidende Vorteil!) bekommt v noch eine Einsparung von 1 bzgl. allen $q - 1$ Parallelen von h , weil h aus einer neuen Äquivalenzklasse stammt (vorher $v-l-SP-||h$ nun $v-h-||h$). Wir weisen nochmals darauf hin, dass sich v noch nicht mit einem Punkt verbunden hat! Generell beträgt die Einsparung von v durch eine Verbindung zu einer Geraden, die zu keiner mit v bereits verbundenen Geraden parallel ist, also $2 + (q - i) + (q - 1) = 2q + 1 - i$, wobei i für die Anzahl der *verschiedenen* Schnittpunkte von h mit bereits mit v direkt verbundenen Geraden steht.

Wenn sich v nun kontinuierlich immer wieder mit solchen Geraden aus einer anderen Äquivalenzklasse verbindet, die alle *denselben* Schnittpunkt mit der zuerst gewählten Geraden haben, beträgt die Einsparung für jede weitere Kante jeweils $2q + 1 - 1 = 2q$. Für $q > 2$ ist dies die größtmögliche Einsparung, weil $q + 2 < 2q$. Insbesondere gilt aber auch $2q > q + 1 > \alpha$, womit sich jede weitere Verbindung zu einer neuen

Äquivalenzklasse für v lohnt. Die beste Strategie für v unter der Voraussetzung, dass v eine Verbindung mit mindestens einer Geraden eingeht, bringt somit eine Kostensparnis von

$$\Delta c_v = \alpha \cdot t + m + (4q^2 - 1) - m \cdot x - (t - 1) \cdot 2q, \quad (4.1)$$

wobei $m := |V_q| = q^2 + q \cdot (q + 1)$ die Anzahl der Knoten von G_q und t die Anzahl der errichteten Kanten ist. Im besten Fall für v gilt $t = q + 1$, denn danach ist v mit jeweils einer Geraden aus jeder Äquivalenzklasse verbunden und kann seine Entfernungskosten nicht mehr verringern:

- Eine Verbindung zu einer Geraden aus einer neuen Äquivalenzklasse ist nicht mehr möglich.
- Zu jeder anderen Gerade l hat v einen Abstand von $2(v - ||l - l)$.
- Zu jedem Punkt p hat v einen Abstand von 2. Betrachte dazu die Gerade, die von p und dem Mega-Schnittpunkt, der durch die Strategie entsteht, aufgespannt wird. Mit dieser Geraden ist v nach Konstruktion bereits verbunden.

Eine weitere Verbesserung ist für $\alpha > 1$ also nicht möglich. Wir können die zusätzlichen Entfernungskosten von v durch die $q + 1$ neuen Kanten nach den letzten Überlegungen auch direkt mit $1 \cdot (q + 1) + 2 \cdot (q(q + 1) - (q + 1)) + 2 \cdot q^2 = 4q^2 + q - 1$ angeben. Zurück zu Gleichung 4.1. Da G_q eine Komponente eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes darstellen soll, muss $\Delta c_v \geq 0$ gelten. Somit folgt

$$mx \leq \alpha \cdot (q + 1) + m + (4q^2 - 1) - q \cdot 2q = \alpha(q + 1) + m + 2q^2 - 1.$$

Da $\alpha < q + 1$ vorausgesetzt war, sind die Strafkosten damit beschränkt durch

$$x \leq 1 + \frac{q + 1}{m} \alpha + \frac{2q^2 - 1}{m} < 1 + \frac{(q + 1)^2 + 2q^2 - 1}{m} = 1 + \frac{3q^2 + 2q}{2q^2 + q} = \frac{5}{2} + \frac{1}{4q + 2}.$$

Um unsere Überlegungen zu vervollständigen, müssen wir noch zeigen, dass v in seiner besten Strategie mindestens eine Verbindung zu einer Geraden eingeht. Für eine Kantenanzahl von $t = 1$ haben wir dies schon gezeigt. Für $t > 1$ betragen die minimalen Entfernungskosten von v , wenn nur Verbindungen zu Punkten gebaut werden, $(4q^2 + q - 3) + m$ für die erste Verbindung mit einem Punkt p_1 , abzüglich der Verbesserung durch die nächsten Verbindungen mit Punkten. Durch die Verbindung mit p_1 hat v wiederum einen Abstand ≤ 3 zu allen Knoten aus G_q . Wenn sich v mit weiteren Punkten verbindet, ist deshalb lediglich eine Verbesserung von jeweils 1 bzgl. jenen Geraden möglich, die den entsprechenden weiteren Punkt $p_j, j > 1$ enthalten (vorher: $v - p_1 - ||l - l$, nun: $v - p_j - l$). Von allen anderen Knoten ist p_j zu weit entfernt (Abstand 2). Da jedes Paar von Punkten eine gemeinsame Gerade aufspannt, bringt jede weitere Verbindung zu einem Punkt eine maximale Einsparung von q . Der Spieler v steht, verglichen mit der Strategie von oben, bei gleicher Anzahl gebauter Kanten also immer deutlich schlechter da, wenn er sich nur mit Punkten verbindet. Er müsste also mehr

als $q + 1$ Kanten errichten. Da allerdings nur $q(q + 1)$ verschiedene Geraden existieren, ist eine größere Einsparung als $(q + 1)q$ nicht möglich. Zusammen mit den Ergebnissen von oben wissen wir jetzt sogar, dass sich v in seiner besten Strategie mit keinem einzigen Punkt verbinden wird. \square

Wir wollen abschließend noch den Petersen-Graph, also den Fall $q = 2$ betrachten. Im NCG ist der Petersen-Graph ein Nash-Gleichgewicht für $1 \leq \alpha \leq 4 = q + 2$. Jede Äquivalenzklasse von parallelen Geraden enthält damit nur jeweils 2 Elemente. Mit obiger Orientierung der Kanten gibt es deshalb aus den beiden Äquivalenzklassen $[l^0]$ und $[l^1]$ jeweils eine Gerade, also einen Spieler, ohne eingehende Kante (vgl. die nichtgerichteten Kanten in Abbildung 4.7). Damit ein solcher Spieler den Petersen-Graph nicht auflöst, muss gelten

$$-3\alpha - 15 + 9x \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 3x - 5.$$

Wir zeigen nun, dass auch $\alpha \geq \frac{10}{3}x - \frac{17}{3}$ und somit $x \leq 2$ gelten muss: Eine Kante von außen lohnt sich für $\alpha \leq 10x - 25$. Es lohnen sich auch weitere Kanten von außen, wenn Entfernungskosten von mindestens α pro Kante eingespart werden. Dies ist wegen $\alpha \leq 4$ möglich, wie Abbildung 4.8 zeigt. Die untere Schranke für α ergibt sich aus der Forderung $3\alpha + 17 - 10x \geq 0$.

In Abbildung 4.8 geben wir auch eine alternative Orientierung der Kanten an, die ein Auflösen der Komponente verhindert. Damit können die Strafkosten auch höher ausfallen. Wir erhalten:

$$x \leq \frac{3}{10}\alpha + \frac{17}{10} \leq 2.9$$

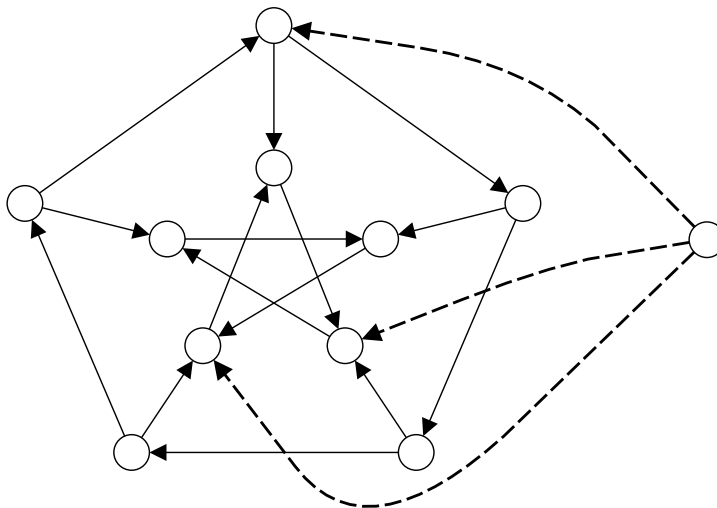


Abbildung 4.8: Spezialfall Petersen-Graph

4.3.2 Strafkosten nicht-zusammenhängender Gleichgewichte

Unsere Untersuchung, wann die bekannten Nash-Gleichgewichte aus dem NCG als nicht-triviale Komponenten eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes im SV auftreten können, ergab stets eine obere Schranke von $x < 3$. Die maximalen Strafkosten für nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte, die wir nachweisen konnten, erreicht folgende Komponente:

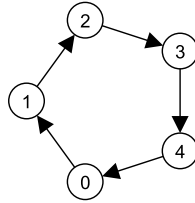


Abbildung 4.9: Strategiekombination für Kreis-Komponente C_5

Erläuterung. Kein Knoten kann die Komponente auflösen. Das Entfernen einer beliebigen Kante bringt dem entsprechenden Spieler einen Entfernungskostenzuwachs von 4. Damit kein Spieler seine Kante entfernt, muss demnach $\alpha \leq 4$ gelten. Der Durchmesser von C_5 ist 2. Damit kein Spieler eine weitere Kante baut muss $\alpha \geq 1$ gelten. Jeder Knoten hat eine Entfernungssumme von 6. Eine Verbindung von einem außenliegenden Knoten v zu einem beliebigen Knoten i aus C_5 lohnt sich also nicht, wenn $\alpha \geq 5x - 11$ gilt. Eine weitere Kante von v nach C_5 ist nicht besser als die Kante $(v, i + 2 \bmod 5)$ und bringt somit eine Kosteneinsparung ≤ 3 . Für $\alpha \geq 3$ gibt es also keine bessere Strategie von außen als die Verbindung mit genau einem Knoten von C_5 . Damit sind die Strafkosten *exakt* beschränkt durch $x \leq \frac{\alpha+11}{5} \leq 3$.

Ein Nash-Gleichgewicht, welches die Komponente C_5 enthält, ist transient, weil ein Spieler i die Kante $(i, (i+1) \bmod 5)$ durch $(i, (i+2) \bmod 5)$ ersetzen kann und sich anschließend Spieler $j := (i-1) \bmod 5$ durch einen Austausch der Kante (j, i) durch $(j, (i+2) \bmod 5)$ verbessern kann. Wir halten fest:

Lemma 4.3.18. *Für $3 \leq \alpha \leq 4$ und $x \leq \frac{\alpha+11}{5} \leq 3$ liefert der gerichtete Kreis mit 5 Knoten eine Strategiekombination im SV für eine mögliche Komponente eines nicht-zshgd. (transienten) Nash-Gleichgewichtes.*

Wir wollen nun eine möglichst niedrige allgemeine obere Schranke für die Strafkosten x in einem nicht-trivialen nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht herleiten. Eine solche Schranke in Abhängigkeit des Kantenpreises α ist nach Lemma 4.3.4 gegeben durch $x \leq \alpha + 1$. Zusammen mit dem nächsten Lemma liefert dies auch eine Schranke in Abhängigkeit der Spielerzahl.

Lemma 4.3.19. *Sei $G = (V, E)$ ein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht und k_{\min} die kleinste Anzahl an Knoten einer nicht-trivialen Komponente von G , dann ist $\alpha < 12k_{\min} \log k_{\min}$.*

Beweis. Betrachte eine Komponente $\mathcal{K} = (K, E|_K)$ von G mit $|K| = k_{\min} > 1$. Angenommen es gilt $\alpha \geq 12k_{\min} \log k_{\min}$. Nach Satz 3.2.5 bildet für k_{\min} Spieler jedes Nash-Gleichgewicht im NCG einen Baumgraphen. Mit Lemma 4.3.2 müsste dann aber insbesondere \mathcal{K} einen Baumgraphen darstellen. Dies steht jedoch wegen $\alpha \geq 12k_{\min} \log k_{\min} > 1$ im Widerspruch zu Korollar 4.3.14. \square

Korollar 4.3.20. Für $\alpha \geq 12(n-1) \log(n-1)$ existiert kein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht.

Wegen der allgemeinen Schranke aus Lemma 4.3.4 gilt außerdem:

Korollar 4.3.21. Für $x \geq 12(n-1) \log(n-1) + 1$ existiert kein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht.

Diese allgemeine Schranke für x lässt sich jedoch noch deutlich verbessern, wie wir im Folgenden beweisen.

Herleitung. Betrachten wir ein beliebiges nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$. Für $x \leq 2$ sind die Strafkosten bereits beschränkt. Es gelte deshalb im Folgenden $x > 2$.

Sei $\mathcal{K} = (K, E|_K)$ eine beliebige nicht-triviale Komponente von G . Nach Korollar 4.3.11 ist \mathcal{K} keine Baumkomponente und enthält somit mindestens einen ungerichteten Kreis. Wir betrachten nun einen minimalen in \mathcal{K} enthaltenen Kreis $\mathcal{U} = (U, E|_U)$ und einen beliebigen Knoten v , der in \mathcal{U} eine Kreiskante $e = (v, w)$ errichtet hat. Da e eine Kreiskante ist, wäre v auch nach dem Entfernen von e weiterhin mit allen Knoten aus K verbunden. Wir definieren nun $G^* := (V, E - \{e\})$. Zusätzlich zu $\text{dist}(v) = \sum_{z \in K} d_G(v, z)$ sei

$$\text{dist}^*(v) := \sum_{z \in K} d_{G^*}(v, z).$$

Da G ein Gleichgewichtsgraph ist und v die Kante e nicht entfernt hat, gilt

$$\alpha \leq \text{dist}^*(v) - \text{dist}(v). \quad (4.2)$$

Da wir den Kreis \mathcal{U} minimal gewählt haben, liefert \mathcal{K} keine echte Abkürzung für \mathcal{U} , d.h. es gilt für zwei beliebige Knoten $a, b \in U$, dass $d_{\mathcal{U}}(a, b) = d_{\mathcal{K}}(a, b)$. Damit existiert in \mathcal{U} ein ausgezeichnete Kreisknoten u , der nach dem Entfernen von $e = (v, w)$ zu allen Knoten aus K den gleichen Abstand wie vorher hat:

Bei einer ungeraden Anzahl an Kreisknoten in \mathcal{U} ist der gesuchte Knoten u jener mit $d_{\mathcal{U}}(u, v) = d_{\mathcal{U}}(u, w)$, d.h. u liegt gegenüber der Kante e und benötigt diese für keinen kürzesten Weg.

Bei einer geraden Anzahl an Kreisknoten in \mathcal{U} ist der gesuchte Knoten u jener, der am weitesten von v entfernt ist, d.h. u benötigt die Kante e nur für kürzeste Wege zu bzw. über v , wobei aber über die andere Kreishälfte ein alternativer kürzester (u, v) -Weg in \mathcal{U} existiert, der die Kante e nicht verwendet.

Damit erhalten wir also

$$d_{G^*}(v, z) \leq d_{G^*}(v, u) + d_{G^*}(u, z) = d_G(v, u) + d_G(u, z) \text{ für alle } z \in K.$$

Mit Gleichung 4.2 können wir α nun für $k := |K|$ abschätzen durch

$$\alpha \leq 2 \cdot \text{diam}(\mathcal{K}) \cdot k - \text{dist}(v). \quad (4.3)$$

Andererseits darf sich im Nash-Gleichgewicht G für keinen Knoten außerhalb der Komponente \mathcal{K} eine direkte Verbindung mit v lohnen, d.h.

$$\alpha + (\text{dist}(v) + k) - kx \geq 0. \quad (4.4)$$

Damit können wir einige wichtige Resultate beweisen.

Satz 4.3.22. *Für $n > 6$ Spieler existiert im SV kein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht G mit Strafkosten $x \geq \frac{n}{2}$.*

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen aus unserer Herleitung. Die Gleichungen 4.2 und 4.4 ergeben zusammen

$$x \leq 1 + \frac{\text{dist}^*(v)}{k}.$$

Die maximal mögliche Entfernungssumme $\text{dist}^*(v)$ enthält der Knoten v genau dann, wenn er sich nach dem Entfernen der Kante $e = (v, w)$ am Ende einer Kette mit allen Knoten seiner Komponente befindet. Somit gilt

$$\text{dist}^*(v) \leq \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2}.$$

Wir haben zu Beginn den Knoten v und die Kreiskante e beliebig gewählt. Damit die gerade hergeleitete Schranke für jede beliebige Kreiskante und den zugehörigen Spieler scharf ist (d.h. unabhängig davon, welche Kreiskante entfernt wird, befindet sich der entsprechende Spieler danach am Ende einer Kette mit allen Knoten aus K), muss die Komponente \mathcal{K} vor dem Entfernen von e einen Kreis darstellen.

Stellt \mathcal{K} keine Kreiskomponente dar, gilt somit $\text{dist}^*(\hat{v}) < \frac{(k-1)k}{2}$ für einen Kreisknoten $\hat{v} \in U$, wenn er die entsprechende Kreiskante in \mathcal{U} entfernt. Wir erhalten

$$x \leq 1 + \frac{\text{dist}^*(\hat{v})}{k} < 1 + \frac{(k-1)k/2}{k} = \frac{k+1}{2} \leq \frac{n}{2}.$$

Andernfalls ist direkt ersichtlich, dass eine Kreiskomponente mit mehr als 5 Knoten in keinem Nash-Gleichgewicht auftreten kann, weil immer ein Knoten eine seiner Kanten im Kreis besser auslegen kann. Ist \mathcal{K} eine Kreiskomponente, so gilt demnach $|\mathcal{K}| \leq 5$ und für $n > 6$ folgt

$$x \leq 1 + \frac{\text{dist}^*(v)}{k} \leq 1 + \frac{(k-1)k/2}{k} = \frac{k+1}{2} \leq 3 < \frac{n}{2}.$$

□

Damit können wir ein entscheidendes Resultat für die Existenz von nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichten im SV hinsichtlich unserer Untersuchungen zur Strafterm-Closeness festhalten:

Korollar 4.3.23. *Bei $n > 6$ Spielern ist im SV unter Einhaltung der Zentralitätsbedingung für den Kehrwert der Entfernungskosten der Graph mit leerer Kantenmenge das einzige nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht.*

Bemerkung. Alle Ausnahmen für $n \leq 6$ lassen sich schnell angeben. Ein Graph bestehend aus einer Paarkomponente und einem singulären Knoten bildet für $\alpha = x - 1$ und $n/2 \leq x \leq 2$ ein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht. Zusätzlich existieren noch 4 nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte für $x = n/2$, die in Abbildung 4.10 dargestellt sind. Für die Kreiskomponenten mit 4 und 5 Spielern muss dabei gelten, dass die zugrunde liegende Strategiekombination einen gerichteten Kreis liefert.

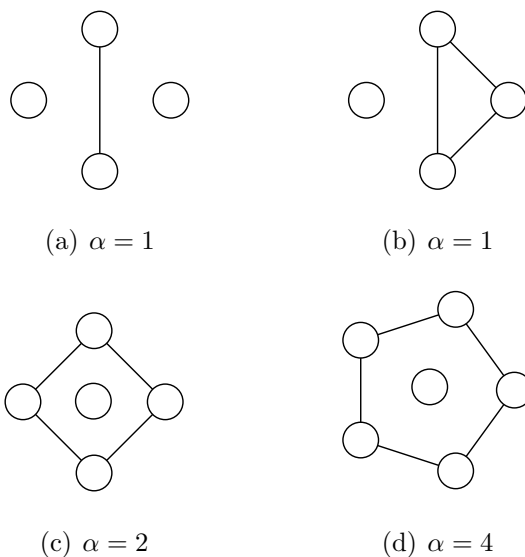


Abbildung 4.10: Nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte für $x = n/2$

Satz 4.3.24. *Für ein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht G im SV sind die Strafkosten $x \leq 2 \cdot \text{diam}(\mathcal{K}) + 1$ für jede nicht-triviale Komponente \mathcal{K} von G .*

Beweis. Zusammengenommen liefern die beiden Gleichungen 4.3 und 4.4 die Behauptung. \square

Korollar 4.3.25. *Sei G ein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht im SV und k_{\min} die kleinste Anzahl an Knoten einer nicht-trivialen Komponente von G . Dann sind die Strafkosten $x < 1 + 14\sqrt{k_{\min} \log k_{\min}} \in \mathcal{O}(\sqrt{n \log n})$.*

Beweis. Nach Lemma 4.3.2 stellt jede Komponente \mathcal{K} von G bei gleichem Kantenpreis α ein Nash-Gleichgewicht im NCG dar. Somit gilt mit Lemma 3.2.8

$$\text{diam}(\mathcal{K}) \leq \sqrt{4\alpha + 1}.$$

Nach Lemma 4.3.19 ist $\alpha < 12k_{\min} \log k_{\min}$ und somit

$$x \leq 2 \cdot \text{diam}(\mathcal{K}) + 1 < 1 + 2\sqrt{1 + 48k_{\min} \log k_{\min}} < 1 + 14\sqrt{k_{\min} \log k_{\min}}.$$

\square

Eine bessere allgemeine obere Schranke für die Höhe der Strafkosten x in einem nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht konnten wir bisher nicht herleiten. Bemerkenswert scheint jedoch die Beobachtung, dass wir keine potentielle Komponente eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes für $x > 3$ nachweisen konnten.

Vermutung 4.3.26. *Es existiert eine Konstante $x_0 > 0$, so dass für $x > x_0$ kein nicht-triviales nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht im SV entstehen kann.*

Diese Vermutung wird insbesondere von Satz 4.3.24 untermauert:

Wegen $x \leq 2 \cdot \text{diam}(\mathcal{K}) + 1$ würde eine Widerlegung unserer Vermutung implizieren, dass im NCG für jedes $d \in \mathbb{N}$ ein Nash-Gleichgewicht \mathcal{K} mit $\text{diam}(\mathcal{K}) > d$ existieren müsste, in dem kein Knoten alle inzidenten Kanten selber errichtet hat, also \mathcal{K} insbesondere keinen Baumgraphen darstellt (vgl. Satz 4.3.10). Da alle bisher gefundenen Nicht-Baum-Nash-Gleichgewichte im NCG einen Durchmesser ≤ 3 aufweisen, halten wir dies für sehr unwahrscheinlich.

Bemerkung. Mit Satz 4.3.24 und Satz 4.3.10 lassen sich die Strafkosten x in nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichten mit Komponenten, die ein bekanntes Nash-Gleichgewicht im NCG darstellen, allgemein (aber unscharf! vgl. Abschnitt 4.3.1) auf $x \leq 7$ beschränken.

4.4 Der Price of Anarchy im SV

Der *Price of Anarchy* im NCG konnte jeweils für bestimmte Intervalle des Kantenpreises α angegeben werden. Für bestimmte Kantenpreise ist der *Price of Anarchy* dann entweder konstant oder abhängig von der Größe des Spieles, d.h. der Anzahl der Spieler $|V| = n$. Mit unserer Einführung der endlichen Strafkosten x erhält jedoch ein weiterer Parameter Einzug ins Spiel. Deshalb betrachten wir nun bestimmte Bereiche in der (x, α) -Ebene und geben dort den *Price of Anarchy* an.

4.4.1 Soziale Optima

Wir möchten zunächst zeigen, dass sich die (x, α) -Ebene in drei Bereiche mit drei verschiedenen Optima aufteilen lässt. Unser Ergebnis entspricht dabei der Intuition, dass *extreme* Graphen die sozialen Optima darstellen:

Im Graphen mit leerer Kantenmenge $G = (V, \emptyset)$ werden die Kantenbaukosten und Entfernungskosten minimiert, was den Strafterm jedoch maximiert. Deshalb bildet $G = (V, \emptyset)$ das soziale Optimum, wenn der Kantenpreis α den Strafkosten x stark überwiegt.

Im vollständigen Graphen K_n wird dagegen der Strafterm minimiert. Allerdings entstehen dabei maximale Kantenbaukosten. Deshalb kann K_n nur dann bei überwiegenden Strafkosten x das soziale Optimum bilden, wenn zusätzlich der Kantenpreis α sehr gering ausfällt.

Der Sterngraph Z_n minimiert ebenfalls den Strafterm, wobei nur die geringsten dafür nötigen Kantenbaukosten sowie die dafür geringst möglichen Entfernungskosten entstehen. Wenn der Kantenpreis α nicht sehr niedrig ausfällt und die Strafkosten x nicht zu stark überwiegen, bildet Z_n deshalb das soziale Optimum.

In nicht-zshgd. Graphen mit nicht-leerer Kantenmenge $E \neq \emptyset$ wird ein Kompromiss zwischen den Strafkosten und der Summe aus Entfernungskosten und Baukosten eingegangen. Ein nicht-zshgd. Graph mit $E \neq \emptyset$ ist deshalb nie günstiger als *alle* Extreme.

Formal ergibt sich dies wie folgt:

Für ein beliebiges Knotenpaar $\{v, w\} \subset V$ eines Graphen $G = (V, E)$ gibt es nur drei mögliche Kostentypen. Die sozialen Kosten für das Knotenpaar $\{v, w\}$ betragen

$$\begin{array}{ll} \boxed{\alpha + 2} & \text{falls eine **direkte** Verbindung zwischen } v \text{ und } w \text{ existiert,} \\ \boxed{2 \cdot d_G(v, w) \geq 4} & \text{falls nur **indirekte** Verbindungen zwischen } v \text{ und } w \text{ existieren,} \\ \boxed{2 \cdot x} & \text{falls überhaupt **keine** Verbindung zwischen } v \text{ und } w \text{ existiert.} \end{array}$$

Bemerkung. Da $\alpha > 0$ und $x > 1$, liefert jedes Knotenpaar soziale Kosten > 2 .

In jedem Graphen werden $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Knotenpaare bewertet. Wir untersuchen die sozialen Kosten anhand folgender Fallunterscheidungen:

Sei $\alpha < 2$. Damit ist $\alpha + 2 < 4 \leq 2 \cdot d_G(v, w)$ für jedes nur indirekt verbundene Knotenpaar $\{v, w\}$. Ein direkt verbundenes Knotenpaar liefert also stets weniger Kosten als ein indirekt verbundenes Knotenpaar.

Gilt zusätzlich $2x < \alpha + 2$, so ist ein überhaupt nicht verbundenes Knotenpaar noch günstiger als ein direkt verbundenes Knotenpaar. Folglich ist der Graph mit leerer Kantenmenge das soziale Optimum.

Gilt dagegen $2x > \alpha + 2$, so sind direkt verbundene Knotenpaare die günstigste Alternative und somit ist der vollständige Graph das soziale Optimum.

Für $2x = \alpha + 2$ sind die sozialen Kosten von direkt verbundenen und überhaupt nicht verbundenen Knotenpaaren gleich. Jeder Graph, dessen Komponenten ausschließlich Cliques bilden, ist damit ein soziales Optimum.

Sei $\alpha = 2$. Im Spezialfall $\alpha = x = 2$ ist jeder Graph G mit $\text{diam}(G) \leq 2$ ein soziales Optimum, denn für die drei Kostentypen gilt $\alpha + 2 = 2x = 4 < 2 \cdot d_G(v, w)$ für $d_G(v, w) > 2$. Für $x < 2$ ist wegen $2x < \alpha + 2 \leq 2 \cdot d_G(v, w)$ für $d_G(v, w) \geq 2$ der Graph mit leerer Kantenmenge das soziale Optimum. Für $x > 2$ sind dagegen direkte Verbindungen und indirekte Verbindungen der Länge 2 am günstigsten. Somit stellt jeder *zshgd.* Graph G mit $\text{diam}(G) \leq 2$ ein soziales Optimum dar.

Sei $\alpha > 2$. Für $x \leq 2$ gilt damit $2x < \alpha + 2$ und $2x \leq 2 \cdot d_G(v, w)$ für $d_G(v, w) \geq 2$. Somit ist der Graph mit leerer Kantenmenge das einzige soziale Optimum.

Betrachten wir nun abschließend den Bereich $\alpha > 2$ und $x > 2$. Hier müssen wir etwas ausführlicher argumentieren:

Sei $\alpha > nx - 2n + 2$ und $x > 2$. Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $E \neq \emptyset$. Sei \mathcal{K} eine beliebige nicht-triviale Komponente von G und $k > 1$ die Anzahl der darin enthaltenen Knoten. Eingeschränkt auf die Knotenpaare in \mathcal{K} liefert \mathcal{K} nach Lemma 3.3.1 soziale Kosten in der Höhe

$$C_{|\mathcal{K}} \geq 2k(k-1) + (\alpha - 2)|E_{|\mathcal{K}}|.$$

Damit G als soziales Optimum in Frage kommen kann, muss deshalb \mathcal{K} eine Sternkomponente darstellen. Andernfalls ersetzen wir \mathcal{K} durch eine Sternkomponente, wodurch die sozialen Kosten $C_{|\mathcal{K}}$ für die Gesamtheit der Knotenpaare aus \mathcal{K} sinken und sich die Kosten bzgl. der anderen Knotenpaare aus G nicht ändern. Wenn wir die Sternkomponente \mathcal{K} auflösen, ändern sich wiederum nur die sozialen Kosten für die Knotenpaare aus \mathcal{K} . Es ist

$$\begin{aligned} C_{|\mathcal{K}} \geq 2k(k-1) + (\alpha - 2)(k-1) &> 2k(k-1) + (nx - 2n)(k-1) \\ &\geq 2k(k-1) + k(x-2)(k-1) \\ &= k(k-1)x \end{aligned}$$

Damit entstehen stets weniger soziale Kosten, wenn eine nicht-triviale Komponente aufgelöst wird. Somit ist der Graph mit leerer Kantenmenge das soziale Optimum.

Im Spezialfall $\alpha = nx - 2n + 2$ und $x > 2$ lässt sich aus den aufgeführten Ungleichungen ablesen, dass neben dem Graphen mit leerer Kantenmenge auch der Sterngraph Z_n ein soziales Optimum darstellt.

Sei nun $2 < \alpha < nx - 2n + 2$. Wegen $\alpha > 2$ ist der Sterngraph Z_n nach den Ergebnissen zum NCG der günstigste *zshgd.* Graph. Wir zeigen nun, dass es zu jedem *nicht-zshgd.* Graphen $G = (V, E)$ einen echt günstigeren Graphen gibt. Aus der Endlichkeit der Graphenmenge folgt damit, dass es einen echt besseren *zshgd.* Graphen als G gibt. Somit ist Z_n das einzige soziale Optimum.

Zunächst muss analog zu oben jede nicht-triviale Komponente von G einen Sterngraphen darstellen, damit G als soziales Optimum in Frage kommen kann.

G muss eine nicht-triviale Komponente enthalten, weil andererseits G der Graph mit leerer Kantenmenge wäre und wegen

$$n(n-1)x > (n-1)(\alpha + 2n - 2) = (n-1)\alpha + 2(n-1)^2$$

der Sterngraph Z_n echt günstiger als G wäre. Wir betrachten nun zwei Komponenten $\mathcal{K}_1 = (K_1, E|_{K_1})$ und $\mathcal{K}_2 = (K_2, E|_{K_2})$ von G mit $k_1 := |K_1|$, $k_2 := |K_2|$ und $k_1 > 1$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Sowohl die Vereinigung von \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 als auch ihre Auflösung lässt die sozialen Kosten von G nicht kleiner werden.

Sei m der Mittelpunkt-Knoten der Sternkomponente \mathcal{K}_1 . Wenn wir alle Kanten von \mathcal{K}_1 entfernen und stattdessen jeden Knoten aus \mathcal{K}_1 mit dem Mittelpunkt-Knoten bzw. einzigen Knoten von \mathcal{K}_2 verbinden, entstehen folgende Kosten:

- Bzgl. der Knoten aus $V \setminus (K_1 \cup K_2)$ tritt keine Veränderung auf.
- Die Knoten aus K_2 sind untereinander gleich positioniert.
- Wir benötigen eine zusätzliche Kante (vorher $k_1 - 1 + k_2 - 1$, nun $k_1 + k_2 - 1$).
- Jeder Knoten $v \neq m$ aus K_1 ist nun 1 weiter von m entfernt (insg. $+2(k_1 - 1)$).
- Alle Knoten $v \neq m, w \neq m$ aus K_1 sind weiterhin 2 voneinander entfernt.
- Es gilt
$$\sum_{v \in K_1, w \in K_2} d(v, w) + \sum_{v \in K_2, w \in K_1} d(v, w) = 2 \cdot (2 \cdot (k_2 - 1)k_1 + 1 \cdot k_1).$$
- Es werden Strafkosten in Höhe von $2k_1k_2 \cdot x$ gespart.

Insgesamt darf sich die Veränderung nicht lohnen, also muss gelten

$$\alpha + 2(k_1 - 1) + 4(k_2 - 1)k_1 + 2k_1 - 2k_1k_2 \cdot x \geq 0.$$

Damit ergibt sich $\alpha \geq 2 - 4k_1k_2 + 2k_1k_2x$. Nun betrachten wir umgekehrt die Kostenveränderung, die sich ergibt, wenn wir \mathcal{K}_1 vollständig auflösen. Damit sich das Auflösen nicht lohnt, muss gelten

$$\alpha \cdot (k_1 - 1) + 2(k_1 - 1)^2 \leq k_1(k_1 - 1)x.$$

Damit ergibt sich $\alpha \leq k_1x - 2(k_1 - 1)$ und zusammengenommen erhalten wir

$$\begin{aligned} k_1(x - 2) + 2 &\geq 2 - 4k_1k_2 + 2k_1k_2 \cdot x \\ \Rightarrow x - 2 &\geq -4k_2 + 2k_2 \cdot x \\ \Rightarrow 4k_2 - 2 &\geq 2k_2 \cdot x - x \\ \Rightarrow 2 &\geq x \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu unserer Einschränkung auf $x > 2$. (□)

Abbildung 4.11 fasst die Bereiche der sozialen Optima und ihre Kosten zusammen. Anschließend können wir nun beginnen, den *Price of Anarchy* abzuschätzen.

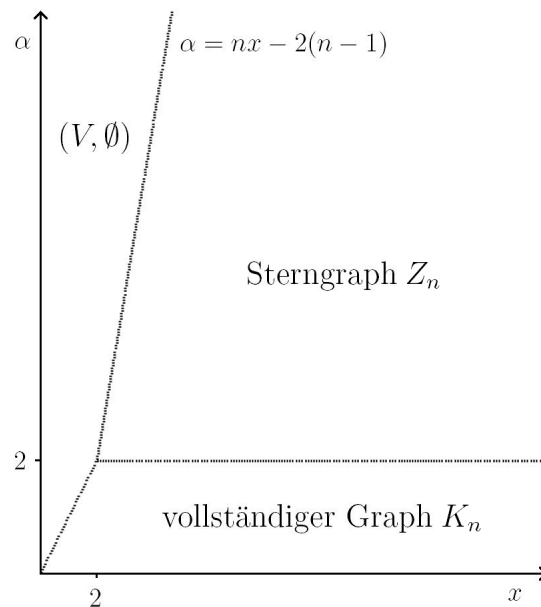


Abbildung 4.11: Soziale Optima im SV

Vollständiger Graph : $C(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \alpha + n(n-1) = (n-1) \cdot \frac{n}{2}(\alpha + 2)$

Sterngraph : $C(Z_n) = (n-1) \cdot \alpha + 2(n-1)^2 = (n-1) \cdot (\alpha + 2(n-1))$

Graph mit leerer Kantenmenge : $C((V, \emptyset)) = (n-1) \cdot (nx)$

4.4.2 Bereich der zusammenhängenden Nash-Gleichgewichte

Nach Lemma 4.3.4 existieren für $\alpha < x - 1$ im SV nur zshgd. Nash-Gleichgewichte. Außerdem folgt aus Lemma 4.3.2, dass jedes zshgd. Nash-Gleichgewicht im SV auch ein Nash-Gleichgewicht im NCG repräsentiert. Der *Price of Anarchy* des SV kann im Bereich $\alpha < x - 1$ also nicht höher sein als dies im NCG bei identischem Kantenpreis α der Fall ist. Wir können mit dem folgenden Satz jedoch auch zeigen, dass umkehrt jedes Nash-Gleichgewicht des NCG für $\alpha < x - 1$ ein Nash-Gleichgewicht im SV repräsentiert. Damit übertragen sich in diesem Bereich, unabhängig von der Höhe der Strafkosten x , alle Schranken aus Abschnitt 3.3 auf das SV und der tatsächliche *Price of Anarchy* der beiden Netzwerkverbindungsspiele ist insbesondere identisch.

Satz 4.4.1. *Im Bereich $\alpha < x - 1$ ist jedes Nash-Gleichgewicht des NCG ein Nash-Gleichgewicht im SV.*

Beweis. Zu gegebener Strategiekombination s bezeichnen wir den Wert der Kostenfunktion eines Spielers v im NCG mit $c_v(s)$ und den entsprechenden Wert im SV mit $c_v^*(s)$. Insbesondere gilt damit für zshgd. Graphen $c_v(s) = c_v^*(s)$.

Angenommen es existiert ein Nash-Gleichgewicht $G(s) = (V, E)$, welches der Behauptung widerspricht. Damit existiert also ein Spieler $v \in V$, der bei gleicher gegebener Strategiekombination s im SV den Wert $c_v^*(s) = c_v(s)$ seiner Kostenfunktion durch einen einseitigen Strategiewechsel von s_v auf s'_v verringern kann. Notwendigerweise liefert die dadurch entstandene neue Strategiekombination s' einen nicht-zshgd. Graphen $G(s')$, denn andernfalls wäre der Strategiewechsel von v auch eine Verbesserung im NCG. Es sei W die Menge aller Knoten, die sich in $G(s')$ nicht mehr in der gleichen Komponente wie v befinden.

Wir betrachten nun einen anschließenden weiteren einseitigen Strategiewechsel von v . Dabei ändert der Spieler v seine Strategie s'_v in s''_v , indem er sich zusätzlich mit allen Knoten aus W direkt verbindet. Die dadurch entstandene Strategiekombination bezeichnen wir mit s'' . Offensichtlich sind alle Knoten im neuen Graphen $G(s'')$ zumindest indirekt mit dem Knoten v verbunden und der Graph ist somit zshgd.

Der erneute Strategiewechsel bringt eine weitere Verbesserung für v , denn nach Voraussetzung ist $\alpha < x - 1$ und somit

$$c_v^*(s'') - c_v^*(s') = \alpha|W| + |W| - |W|x < 0.$$

Nach Konstruktion gilt damit aber

$$c_v(s) = c_v^*(s) > c_v^*(s') > c_v^*(s'') = c_v(s'')$$

und ein direkter einseitiger Strategiewechsel von s_v auf s''_v steht im Widerspruch dazu, dass $G(s)$ ein Nash-Gleichgewicht im NCG repräsentiert. \square

Zusammen mit Lemma 4.3.2 folgt somit:

Korollar 4.4.2. *Im Bereich $\alpha < x - 1$ ist der Price of Anarchy des NCG und des SV identisch.*

4.4.3 Bereiche mit nicht-zusammenhängenden Gleichgewichten

Im Bereich $\alpha \geq x - 1$ existiert nach Lemma 4.3.5 stets zumindest ein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht, nämlich der Graph mit leerer Kantenmenge. Wir werden zeigen, dass der *Price of Anarchy* im SV deshalb deutlich höher ist als im NCG.

Wir wollen unsere Untersuchungen in die drei Bereiche der verschiedenen sozialen Optima aufteilen.

Bereiche mit sozialem Optimum K_n

Im Bereich $\alpha < 2$ und $2x - 2 \geq \alpha \geq x - 1$ repräsentiert der vollständige Graph das soziale Optimum. Es lässt sich aufgrund der Beschränkung von α und x grob direkt abschätzen, dass der *Price of Anarchy* nicht größer als 3 und somit konstant ist. Wir unterteilen den Bereich jedoch noch weiter, um scharfe Schranken angeben zu können. Sei $G = (V, E)$ ein Nash-Gleichgewicht und $\mathcal{K} = (K, E|_K)$ eine beliebige Komponente von G mit $k := |K|$. Für zwei beliebige Knoten $v, w \in K$ ist $d_G(v, w) \leq \alpha + 1$, denn andernfalls bringt das Errichten einer Kante $e = (v, w)$ eine Kostenveränderung $\leq -d_G(v, w) + \alpha + 1 < 0$.

Für $\alpha < 1$ existieren demnach keine indirekt verbundenen Knoten in G und ein direkt verbundenes Knotenpaar liefert nach Voraussetzung soziale Kosten von $\alpha + 2 \leq 2x$. Damit ist der *Price of Anarchy* bestimmt durch

$$\frac{C((V, \emptyset))}{C(K_n)} = \frac{2x}{\alpha + 2} \leq \frac{2\alpha + 2}{\alpha + 2} = 2 - \frac{2}{\alpha + 2} < \frac{4}{3}.$$

Für $1 \leq \alpha < 2$ ist $\text{diam}(\mathcal{K}) \leq 2$ für jede nicht-triviale Komponente \mathcal{K} eines Nash-Gleichgewichtes. Indirekt verbundene Knotenpaare liefern demnach soziale Kosten von $2 \cdot \text{diam}(\mathcal{K}) \leq 4$ und direkt verbundene Knotenpaare Kosten von $\alpha + 2 < 4$.

Gilt zusätzlich $x < 2$, so gilt auch für die sozialen Kosten von nicht-verbundenen Knoten $2x < 4$. Damit ist der *Price of Anarchy* kleiner als

$$\frac{(n(n-1)/2) \cdot 4}{C(K_n)} = \frac{4}{\alpha + 2} \leq \frac{4}{3}.$$

Gilt dagegen $x \geq 2$, so erhalten wir $2x \geq 4 \geq \alpha + 2$ und der *Price of Anarchy* ergibt sich wieder direkt durch

$$\frac{C((V, \emptyset))}{C(K_n)} = \frac{2x}{\alpha + 2} \leq \frac{2\alpha + 2}{\alpha + 2} = 2 - \frac{2}{\alpha + 2} < \frac{3}{2}.$$

Bereiche mit sozialem Optimum Z_n

Im Bereich $\alpha \geq 2$ und $nx - 2(n-1) \geq \alpha \geq x - 1$ ist der Sterngraph Z_n das soziale Optimum. Der Graph mit leerer Kantenmenge impliziert stets eine untere(!) Schranke für den *Price of Anarchy* von

$$\frac{C((V, \emptyset))}{C(Z_n)} = \frac{xn(n-1)}{\alpha(n-1) + 2(n-1)^2} \in \Omega\left(\frac{nx}{\alpha+n}\right).$$

Für $\alpha \in \mathcal{O}(n)$ liegt der *Price of Anarchy* somit in $\Omega(x)$.

Es wäre denkbar, dass der *Price of Anarchy* noch höher ausfällt, falls in einem anderen Nash-Gleichgewicht (ggf. zusätzlich) große Bau- und Entfernungskosten auftreten.

Satz 4.4.3. Für $\alpha \geq 12n \log n$ und $x < \frac{\alpha-1}{n-1} + 2$ existiert kein Nash-Gleichgewicht außer dem Graphen mit leerer Kantenmenge.

Beweis. Nach Korollar 4.3.20 kann außer dem Graphen mit leerer Kantenmenge höchstens ein zshgd. Nash-Gleichgewicht G existieren. Da G dann aber insbesondere auch im NCG ein Nash-Gleichgewicht darstellt und $\alpha \geq 12n \log n$ gilt, muss G ein Baumgraph sein. Mit Satz 4.3.12 folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Für $\alpha \geq 12n \log n$ und $x \geq \frac{\alpha-1}{n-1} + 2$ ist der (zshgd.) Sterngraph, in dem alle Kanten zum Mittelpunkt gebaut wurden, ein Nash-Gleichgewicht.

Für den restlichen Bereich $\alpha \geq 12n \log n$ mit sozialem Optimum Z_n können also neben dem Graphen mit leerer Kantenmenge auch zshgd. Baum-Nash-Gleichgewichte auftreten. Diese liefern nach den Ergebnissen zum NCG jedoch stets weniger als die 1.5-fachen Kosten von Z_n . Der Graph mit leerer Kantenmenge ist also das einzige Nash-Gleichgewicht, welches den *Price of Anarchy* in die Höhe treibt. Wir halten fest

Satz 4.4.4. Für $nx - 2(n-1) \geq \alpha \geq x - 1$ und $\alpha \geq 12n \log n$ ist der *Price of Anarchy*

$$\frac{n(n-1)x}{\alpha(n-1) + 2(n-1)^2} \in \Theta\left(n \frac{x}{\alpha}\right).$$

Bemerkung. Beachte, dass $\Theta(n \frac{x}{\alpha}) \rightarrow \Theta(1)$, wenn sich α seiner oberen Schranke nähert. Insbesondere ist für $\alpha = nx - 2(n-1) > (n-1)x - 2(n-1) + 1$ der *Price of Anarchy* exakt 1, weil das einzige Nash-Gleichgewicht (V, \emptyset) dann zum sozialen Optimum wird. Andererseits folgt $\Theta(n \frac{x}{\alpha}) \rightarrow \Theta(n)$ für $\alpha \rightarrow x - 1$.

Auch für $\alpha < 12n \log n$ lässt sich schnell ein Bereich bestimmen, in dem der Graph mit leerer Kantenmenge den *Price of Anarchy* bestimmt.

Lemma 4.4.5. Für $x \geq 7$ und $2(x-1) \geq \alpha \geq x-1$ ist (V, \emptyset) das ungünstigste Nash-Gleichgewicht.

Beweis. Ein direkt verbundenes Knotenpaar liefert soziale Kosten von $\alpha + 2 \leq 2x$ und für ein indirekt verbundenes Knotenpaar $\{v, w\} \subset V$ in einem Nash-Gleichgewicht $G = (V, E)$ folgt mit Lemma 3.2.8

$$2 \cdot d_G(v, w) \leq 2\sqrt{4\alpha + 1} \leq 2\sqrt{8x - 7} \leq 2x.$$

□

Korollar 4.4.6. Für $2(x - 1) \geq \alpha \geq x - 1$ liegt der Price of Anarchy in

$$\Theta\left(\frac{nx}{\alpha + n}\right).$$

Bemerkung. In diesem Bereich ist $\alpha \in \Theta(x)$. Dies bedeutet für $x \in \mathcal{O}(n)$ einen Price of Anarchy von $\Theta(x)$ und für $x \in \Omega(n)$ einen Price of Anarchy von $\Theta(n)$.

Für den restlichen Bereich, in dem wir nicht direkt ausschließen können, dass noch schlechtere Nash-Gleichgewichte als der triviale Graph existieren, bietet es sich an nach Möglichkeit die Resultate für das NCG auch auf alle zshgd. Knotenmengen im SV anzuwenden. Für zshgd. Nash-Gleichgewichte ist dies trivial, für nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte gilt:

Lemma 4.4.7. Sei $G = (V, E)$ ein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht mit nicht-trivialen Komponenten $\mathcal{K}_1 = (K_1, E|_{K_1}), \dots, \mathcal{K}_r = (K_r, E|_{K_r})$ mit $k_i := |K_i| > 1$ und trivialen Komponenten $\mathcal{K}_{r+1}, \dots, \mathcal{K}_{r+s}$. Für eine beliebige Komponente \mathcal{K} seien $C(\mathcal{K})$ die sozialen Kosten, die durch alle Knotenpaare $\{v, w\}$ aus \mathcal{K} entstehen. Dann gilt:

$$\frac{C(G)}{C(Z_n)} < \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \right\} + \frac{nx}{\alpha + 2(n - 1)}$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$C(G) = 2x \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq r+s} |K_i \times K_j| \right) + \sum_{i=1}^r C(\mathcal{K}_i) \leq xn(n - 1) + \sum_{i=1}^r C(\mathcal{K}_i).$$

Wegen $s + \sum_{i=1}^r k_i = n$ liefert uns die folgende Abschätzung die Behauptung.

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^r C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_n)} &= \sum_{i=1}^r \left(\frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \frac{C(Z_{k_i})}{C(Z_n)} \right) \leq \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \right\} \cdot \sum_{i=1}^r \frac{C(Z_{k_i})}{C(Z_n)} \\ &= \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \right\} \cdot \sum_{i=1}^r \frac{(k_i - 1)\alpha + 2(k_i - 1)^2}{(n - 1)\alpha + 2(n - 1)^2} \\ &= \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \right\} \cdot \frac{\alpha \sum_{i=1}^r (k_i - 1) + 2 \sum_{i=1}^r (k_i - 1)^2}{(n - 1)\alpha + 2(n - 1)^2} < \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \right\} \end{aligned}$$

□

Das Kostenverhältnis $\frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})}$ bei einem Kantenpreis α ist durch den entsprechenden *Price of Anarchy* im NCG beschränkt. Allerdings ist α im Verhältnis zur Spielerzahl k_i ggf. deutlich größer als α im Verhältnis zur Spielerzahl n . Damit können wir nur die allgemeine Schranke von Demaine et al. aus Satz 3.3.13 auf das SV übertragen, weil wir nicht ausschließen können, dass bei n Spielern und einem Kantenpreis von $\alpha \in \mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$ ein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht existiert, welches Komponenten mit $k \leq \alpha < 12k \log k$ Spielern enthält.

Korollar 4.4.8. *Der Price of Anarchy im Bereich des sozialen Optimums Z_n liegt in*

$$2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})} + \mathcal{O}\left(\frac{nx}{\alpha + n}\right).$$

Dies bedeutet für $\alpha \in \mathcal{O}(n)$ ein Wachstum von $2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})} + \mathcal{O}(x)$ und für $\alpha \in \Omega(n)$ ein Wachstum von $2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})} + \mathcal{O}(n\frac{x}{\alpha})$.

Außerdem gilt analog zum NCG:

Lemma 4.4.9. *In jedem Nash-Gleichgewicht im SV sind die Baukosten, die durch die von den Spielern gewählten Kanten verursacht werden, maximal doppelt so hoch wie die Gesamtkosten des Sterngraphen.*

Beweis. Analog zu Satz 3.3.3 sind die sozialen Kantenbaukosten für eine Komponente mit k Spielern beschränkt durch $2\alpha(k-1) + (k-1)^2$. Damit erhalten wir wieder über die Summe der Komponenten Kantenbaukosten $\leq 2\alpha(n-1) + (n-1)^2$, also weniger als die doppelten Kosten des Sterngraphen. \square

Ein asymptotisch nicht-konstanter *Price of Anarchy* im SV entsteht im Bereich des sozialen Optimums Z_n also nur durch hohe Entfernungskosten und Strafterme. Selbst wenn sich ein allgemeiner konstanter *Price of Anarchy* im NCG nachweisen lässt, so entsteht im SV weiterhin für $x \in \omega(\frac{\alpha}{n})$ ein asymptotisch nicht-konstanter Effizienzverlust durch nicht-zshgd. dezentrale Lösungen.

Bemerkung. Wenn sich die Vermutung 4.3.26 verifizieren lässt und somit eine Konstante x_0 existiert, so dass für alle Strafkosten $x > x_0$ kein nicht-triviales Nash-Gleichgewicht existiert, dann ist insbesondere $\frac{nx}{\alpha+n} \in \mathcal{O}(1)$ für alle nicht-trivialen nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte. Ein asymptotisch nicht-konstanter Strafterm ergäbe sich dann nur für den Graphen mit leerer Kantenmenge.

Bereiche mit sozialem Optimum (V, \emptyset)

Im Bereich $\alpha < 2$ und $\alpha > 2x - 2$, sowie im Bereich $\alpha \geq 2$ und $\alpha > nx - 2(n - 1)$ ist der Graph mit leerer Kantenmenge das einzige soziale Optimum.

Für den Bereich $\alpha < 1$ und $\alpha > 2x - 2$ ist jede Komponente eines Nash-Gleichgewichtes eine Clique. Jedes verbundene Knotenpaar liefert also soziale Kosten von $\alpha + 2 > 2x - 2 + 2 = 2x$. Für $n > 2$ lassen sich die Kanten eines vollständigen Graphen so zuteilen, dass kein Knoten den Graphen auflösen kann. Damit ist der vollständige Graph das schlechteste Nash-Gleichgewicht und der *Price of Anarchy*

$$\frac{C(K_n)}{C((V, \emptyset))} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\alpha + n(n-1)}{n(n-1)x} = \frac{\frac{\alpha}{2} + 1}{x} < \frac{3}{2}.$$

Für den Bereich $2 > \alpha \geq 1$ und $\alpha > 2x - 2$ hat jede Komponente einen Durchmesser ≤ 2 . Ein zshgd. Knotenpaar liefert also soziale Kosten von $2 + 2 = 4 > 2x$ oder $2 + \alpha > 2x$. Ein ungünstigstes Nash-Gleichgewicht ist also zshgd., hat einen Durchmesser ≤ 2 und besitzt wegen $2 + 2 > 2 + \alpha$ möglichst wenige Kanten. Kein Nash-Gleichgewicht ist also teurer als der Sterngraph (welcher in diesem Bereich kein Nash-Gleichgewicht darstellt). Somit ist der *Price of Anarchy* beschränkt durch

$$\frac{C(Z_n)}{C((V, \emptyset))} = \frac{\alpha(n-1) + 2(n-1)^2}{n(n-1)x} < 2.$$

Für den Bereich $\alpha \geq 12n \log n$ und $\alpha > nx - 2(n - 1)$ liefert Satz 4.4.3 einen *Price of Anarchy* von 1.

Im restlichen Bereich $2 \leq \alpha < 12n \log n$ und $\alpha > nx - 2(n - 1)$ gilt insbesondere $\alpha > (n - 1)(x - 2) + 1$. Somit wurde nach Satz 4.3.12 zu jedem nicht-singulären Knoten eines Nash-Gleichgewichtes mindestens eine Kante errichtet. Daher können wir bisher lediglich aus affinen Ebenen konstruierte Graphen und den Kreis C_5 als mögliche Komponenten eines Nash-Gleichgewichtes benennen.

C_5 kann nur Teil eines Nash-Gleichgewichtes sein, wenn $\alpha \leq 4$ gilt. Eine aus der affinen Ebene $(\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q, \{p_1 + \mathbb{F}_q \cdot p_2 \mid p_1, p_2 \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q, p_2 \neq (0, 0)\})$ konstruierte Komponente \mathcal{K} mit $k = 2q^2 + q$ Knoten kann nur dann Teil eines Nash-Gleichgewichtes sein, wenn $\alpha \leq q + 1 < \sqrt{k/2} + 1$ ist. Für $\alpha \geq \sqrt{n/2} + 1$ und $n > 18$ können wir damit keine dezentrale Lösung außer dem Graphen mit leerer Kantenmenge angeben.

In jedem potentiellen Nash-Gleichgewicht entsprechen die sozialen Kosten eines nicht verbundenen Knotenpaares den Kosten des Knotenpaares im Optimum. Dies bedeutet jedoch nicht, dass das schlechteste Nash-Gleichgewicht zshgd. sein muss: Ist n beispielsweise so gewählt, dass ein nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht aus genau zwei Komponenten besteht, die aus affinen Ebenen konstruiert wurden, so kann es sein, dass kein ungünstigeres zshgd. Nash-Gleichgewicht existiert.

Formal errechnen sich die sozialen Kosten eines beliebigen nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes $G = (V, E)$ mit nicht-trivialen Komponenten $\mathcal{K}_1 = (K_1, E|_{K_1}), \dots, \mathcal{K}_r = (K_r, E|_{K_r})$ mit $k_i := |K_i| > 1$ und trivialen Komponenten $\mathcal{K}_{r+1}, \dots, \mathcal{K}_{r+s}$ analog zu Lemma 4.4.7 durch

$$C(G) = 2x \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq r+s} |K_i \times K_j| \right) + \sum_{i=1}^r C(\mathcal{K}_i) \leq xn(n-1) + \sum_{i=1}^r C(\mathcal{K}_i).$$

Der Beweis von Lemma 4.4.7 hat gezeigt, dass

$$\frac{\sum_{i=1}^r C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_n)} < \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \right\}.$$

Damit können wir den Effizienzverlust von G abschätzen durch

$$\begin{aligned} \frac{C(G)}{C((V, \emptyset))} &\leq 1 + \frac{\sum_{i=1}^r C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_n)} \cdot \frac{C(Z_n)}{C((V, \emptyset))} \\ &< 1 + \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{C(\mathcal{K}_i)}{C(Z_{k_i})} \right\} \cdot \frac{C(Z_n)}{C((V, \emptyset))} \\ &\in 2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{\alpha + n}{nx}\right). \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \omega(nx)$ ist diese Schranke asymptotisch schlechter als die allgemeine obere Schranke des *Price of Anarchy* im NCG.

Für alle Nash-Gleichgewichte, die wir bisher im Bereich des sozialen Optimums (V, \emptyset) angeben können, gilt nach den Vorüberlegungen $\alpha \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ und somit $\frac{\alpha+n}{nx} \in \mathcal{O}(1)$. Nach den Ergebnissen zum NCG gilt außerdem $\frac{C(\mathcal{K})}{C(Z_k)} \in \mathcal{O}(1)$ für jede Nash-Gleichgewicht-Komponente $\mathcal{K} = (K, E|_K)$ mit $k = |K|$, die einen aus einer affinen Ebene konstruierten Graphen oder C_5 repräsentiert. Damit ist für alle Nash-Gleichgewichte, die wir bisher im Bereich des sozialen Optimums (V, \emptyset) angeben können, der Effizienzverlust konstant.

4.4.4 Übersicht

Die folgende Abbildung fasst den *Price of Anarchy* im SV grafisch zusammen.

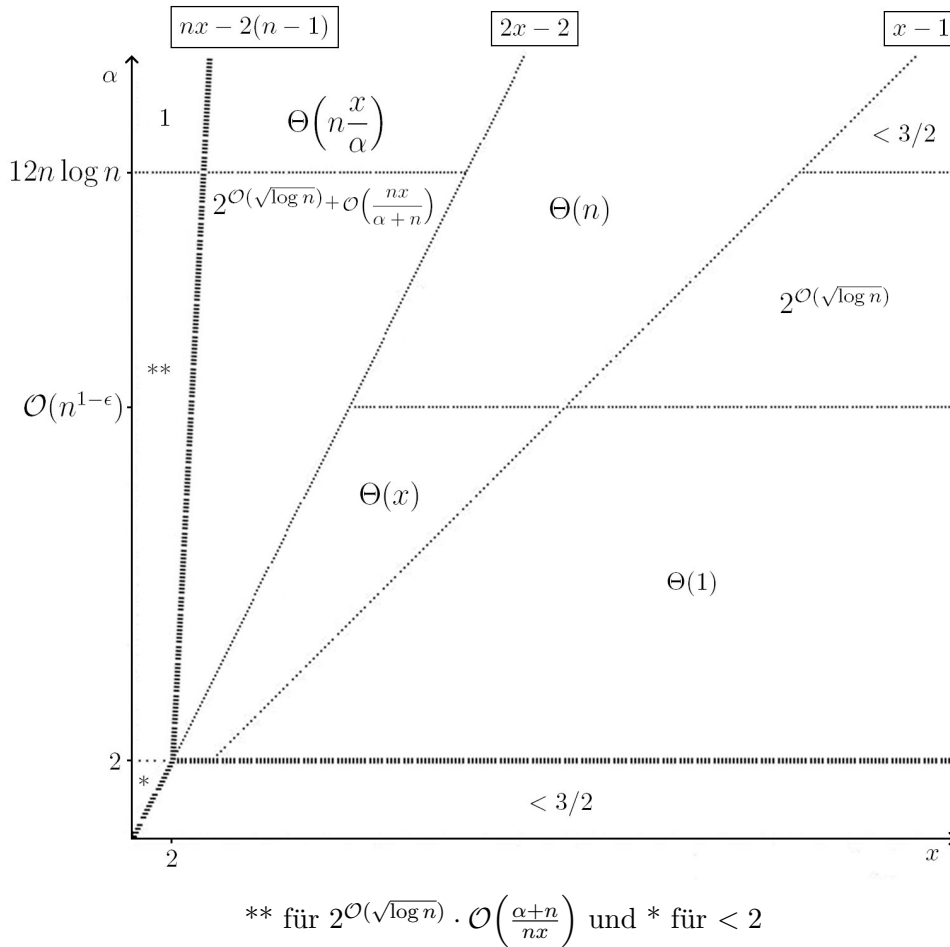


Abbildung 4.12: Der *Price of Anarchy* im SV

Wir möchten abschließend noch kurz auf den *Price of Stability*, also auf das Kostenverhältnis des günstigsten Nash-Gleichgewichtes zum sozialen Optimum, eingehen.

Aus Satz 4.3.12 folgt, dass im Bereich $nx - 2(n - 1) \geq \alpha > (n - 1)x - 2(n - 1) + 1$ und $\alpha \geq 2$ das soziale Optimum Z_n kein Nash-Gleichgewicht darstellt. Der *Price of Stability* ist in diesem Bereich jedoch beschränkt durch das Kostenverhältnis

$$\frac{C((V, \emptyset))}{C(Z_n)} = \frac{xn(n - 1)}{\alpha(n - 1) + 2(n - 1)^2} < \frac{xn}{(n - 1)x + 1} \in \mathcal{O}(1).$$

In den restlichen Bereichen ist das soziale Optimum analog zum NCG stets auch ein Nash-Gleichgewicht, mit Ausnahme von $1 < \alpha < 2$ im Bereich des sozialen Optimums K_n . Dort ist aber der *Price of Anarchy* und somit der *Price of Stability* $< 3/2$. Damit ist wie im NCG der *Price of Stability* im SV stets konstant.

5 Diskussion themenverwandter Forschung

In Abschnitt 3.4 wurde angedeutet, wie sich das *Network Creation Game* von Fabrikant et al.[13] auf vielfache Weise erweitern und variieren lässt. Insbesondere lassen sich analog zu unserem Strafterm-Verbindungsspiel alle denkbaren Zentralitätsmaße zur Bestimmung der Entfernungskosten eines Spielers verwenden. Wir verweisen dafür beispielsweise auf die Stromfluss-Closeness[8]. Wird der Kehrwert dieser Zentralität zur Bestimmung der Entfernungskosten eines Spielers im NCG verwendet, ergeben sich allerdings einige zusätzliche Schwierigkeiten, weil sich die Veränderung der Kostenfunktion eines Spielers bereits bei einfachen Strategiewechseln nicht ohne Weiteres angeben lässt, sondern vielmehr der Wert der Kostenfunktion stets erneut berechnet werden muss. Zudem konnten wir zeigen, dass auch unter Verwendung der Stromfluss-Closeness das NCG kein Potentialspiel ist und somit der Nachweis von Nash-Gleichgewichten erschwert ist.

Neben dem *Price of Anarchy* und dem *Price of Stability* sind weitere Konzepte für die Analyse von Netzwerkverbindungsspielen denkbar. Der *Price of Anarchy* erfasst zwei Eigenschaften eines nicht-kooperativen Spieles: die Selbstsüchtigkeit der Akteure und den Mangel an Koordination zwischen den Spielern. Kürzlich wurde von Andelman, Feldman und Mansour[2] mit dem *Strong Price of Anarchy (SPoA)* eine Methode vorgeschlagen, um die Wirkung der Selbstsüchtigkeit der Akteure von dem Mangel an Koordination zwischen den Spielern zu isolieren. Der *SPoA* berechnet dafür das Kostenverhältnis des schlechtesten *starken Gleichgewichtes* zur günstigsten zentralen Lösung, wobei in einem *starken Gleichgewicht*[3] keine Koalition von beliebig vielen Spielern durch gemeinsame Strategieänderungen die Kostenfunktion jedes an der Koalition beteiligten Spielers verbessern kann.

Offensichtlich ist jedes starke Gleichgewicht auch ein Nash-Gleichgewicht, und somit der *SPoA* eines Spieles maximal so hoch wie der entsprechende *Price of Anarchy*. Falls der *SPoA* und der *Price of Anarchy* ähnliche Werte liefern, lässt sich der Effizienzverlust der dezentralen Lösungen aus der Selbstsüchtigkeit der Spieler ableiten. Andernfalls ist der *SPoA* signifikant niedriger als der *Price of Anarchy* und der Effizienzverlust der dezentralen Lösungen lässt sich durch eine Mediation zwischen den selbstsüchtigen Spielern verringern. Das nötige Maß an Koordination zwischen den Spielern lässt sich über den *k-SPoA* untersuchen, wobei im *k-SPoA* die Größe einer möglichen Koalition von Spielern auf *k* beschränkt ist. Der *2-SPoA* entspricht damit dem Effizienzverlust durch *paarweise Nash-Gleichgewichte*, wie sie von Corbo und Parkes[10] verwendet werden (vgl. Abschnitt 3.4).

Die gegenwärtige Forschung über Netzwerke und Netzwerkverbindungsspiele ist nicht auf die Theoretische Informatik beschränkt.

Netzwerkstrukturen spielen eine wichtige Rolle in vielen ökonomischen Situationen. So lassen sich etwa Handelsabkommen zwischen einzelnen Ländern oder wichtige persönliche Kontakte auf dem Arbeitsmarkt durch Graphen beschreiben. Neben der Untersuchung der Effektivität von vorhandenen Netzwerken spielen in vielen Bereichen richtige Vorhersagen zur Entstehung von Netzwerken und etwaige Steuerungen auf wünschenswertere Resultate eine große Rolle. Nicht zuletzt aufgrund der fundamentalen Bedeutung der Spieltheorie in den Wirtschaftswissenschaften sind auch in diesem Fachgebiet eine Fülle von Netzwerkspielen Gegenstand der aktuellen Forschung.

Eine Übersicht über verschiedene Modelle und Lösungsansätze für Netzwerkspiele in den Wirtschaftswissenschaften wird in [15] gegeben. Ein allgemeines Gerüst für diese Modelle kann wie folgt beschrieben werden:

Jedes Netzwerkspiel besteht aus einer Menge V von Spielern, den Netzwerkknotten, und einer Bewertungsfunktion

$$\mathcal{B} : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathbb{R},$$

die jedem durch die Spieler errichteten Netzwerk aus der Menge \mathcal{G}_n aller potentiellen Netzwerke mit $n := |V|$ Spielern einen Wert zuordnet. Die Menge aller denkbaren Bewertungsfunktionen bezeichnen wir mit \mathfrak{B} .

Eine Bewertungsfunktion gibt keinen Aufschluss darüber, wie sich der Wert eines Netzwerkes auf die Spieler verteilt. Gerade dieses Wissen ist jedoch essentiell für die Entscheidungsfindung in einem Netzwerkverbindungsspiel. Für die Formulierung eines Netzwerkverbindungsspieles benötigen wir deshalb zusätzlich eine Verteilungsregel (*Allocation Rule*)[23] \mathcal{Y} , die den Wert jedes möglichen Netzwerkes vollständig auf die Spieler verteilt und dadurch jedem Spieler seinen Nutzen zuordnet. Formal ist eine *Allocation Rule* eine Abbildung

$$\mathcal{Y} : \mathcal{G}_n \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \sum_{v \in V} \mathcal{Y}_v(G, \mathcal{B}) = \mathcal{B}(G)$$

für alle $G \in \mathcal{G}_n$ und $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$.

Wir möchten an dieser Stelle hervorheben, dass auch das NCG und das SV durch das gerade beschriebene Gerüst erfasst werden. Im NCG und im SV entsprechen die sozialen Kosten, also die Summe der Kosten der Spieler, dem negativen Wert eines Netzwerkes. Die Aufteilung des Wertes eines Netzwerkes auf die Spieler ist offensichtlich. Bewertungsfunktion und *Allocation Rule* beziehen sich in diesem Sinne jeweils auf den gerichteten Graphen, der die Strategiewahlen im NCG bzw. SV widerspiegelt. Anders formuliert entspricht die Menge \mathcal{G}_n aller potentiellen Netzwerke der Klasse der gerichteten Multigraphen.

Allgemein muss die Aufteilung des Netzwerk-Wertes nicht immer, so wie es im NCG und im SV der Fall ist, implizit gegeben sein. Insbesondere können durch die Konstruktion von *Allocation Rules* die Anreize der Spieler für bestimmte Strategien bewusst beeinflusst werden.

Wir geben nun einen Überblick über sechs zu unserer Arbeit besonders verwandte Netzwerkspiele aus den Wirtschaftswissenschaften. In Modell 5 wird ein Beispiel für eine speziell konstruierte *Allocation Rule* angegeben.

Im Unterschied zum NCG und zum SV entsteht in den folgenden Beispielen eine (ungerichtete) Kante genau dann, wenn sich beide beteiligten Knoten auf die Kante einigen. Bilaterale Modelle entsprechen den meisten ökonomischen Situationen, da in der Regel eine Einigung zweier Vertragspartner notwendig ist. Gemäß unseren Bemerkungen zum *Bilateral Connection Game* von Corbo und Parkes[10] (vgl. Abschnitt 3.4) sei daran erinnert, dass sich die Lösungskonzepte für bilaterale Modelle von denen für unilaterale Modelle unterscheiden.

In den folgenden Beispielen bezeichnet wiederum V die Menge der Spieler, E eine durch die Strategiewahlen der Spieler entstandene Kantenmenge und $G = (V, E)$ den zugehörigen Graphen.

Modell 1. *Connections*[16]

Knoten: soziale Akteure

Kanten: soziale Beziehungen

Im Modell *Connections* entstehen Kanten, wenn zwei soziale Akteure eine soziale Beziehung eingehen. Der *wahre* Wert eines Akteurs $j \in V$ für einen Akteur $i \in V$ entspricht $\omega_{ij} \geq 0$. Ein Akteur i hat einen Nutzen $\delta \cdot \omega_{ij}$ von einer direkten Verbindung zu j , wobei $0 < \delta < 1$. Eine indirekte Verbindung der (kürzesten) Länge $d_G(i, j) > 1$ bringt i eine weiter abgeschwächte positive Wirkung der Höhe $\delta^{d_G(i, j)} \cdot \omega_{ij}$. Für nicht-verbundene Akteure, also $d_G(i, j) = \infty$, ergibt sich in diesem Sinne ein Nutzen von 0. Die Errichtung bzw. Unterhaltung einer Kante $\{i, j\}$ mindert den Nutzen von Spieler i um α_{ij} . Die Nutzenfunktion u_i eines Spielers i ist damit gegeben durch

$$u_i(G) = \omega_{ii} + \sum_{j \neq i} \delta^{d_G(i, j)} \omega_{ij} - \sum_{\{i, j\} \in E} \alpha_{ij}.$$

Durch $\alpha_{ij} := \alpha$ für alle $i, j \in V$, sowie $\omega_{ij} := 1$ für $i \neq j$ und $\omega_{ij} := 0$ für $i = j$ ergibt sich das *Modell der symmetrischen Beziehungen*.

Modell 2. Marktaufteilung[5]

Knoten: Firmen

Kanten: Absprachen

Im Modell *Marktaufteilung* entstehen Kanten, wenn zwei Firmen eine Absprache treffen. Jede Firma $i \in V$ wird mit einem eigenen Markt i assoziiert. Eine Absprache zwischen zwei Firmen hat zur Folge, dass die Kontrahenten auf dem gegnerischen Markt nicht verkaufen. Jede Firma drängt auf die Märkte aller Firmen, mit denen keine Absprache existiert. Der Gewinn π_{ij} , den eine Firma i auf dem Markt j erzielen kann, ist abhängig von der Anzahl n_j der Firmen, die auf dem Markt j verkaufen. Die Nutzenfunktion u_i einer Firma i ist damit gegeben durch

$$u_i(G) = \pi_{ii}(n_i) + \sum_{\{i,j\} \notin E} \pi_{ij}(n_j).$$

An die Funktionen π_{ij} werden je nach Kontext unterschiedliche Forderungen gestellt. In den meisten Anwendungen fällt $\pi_{ij}(n_j)$ bei steigender Firmenzahl n_j .

Modell 3. Forschungsprojekte[16]

Knoten: Wissenschaftler

Kanten: Gemeinsame Projekte

Im Modell *Forschungsprojekte* entstehen Kanten, wenn sich zwei Wissenschaftler zu einem gemeinsamen Forschungsprojekt entscheiden. Jeder Wissenschaftler versucht seine Produktivität zu maximieren. Jedem Wissenschaftler steht dafür die gleiche feste Forschungszeit zur Verfügung, normiert auf 1. Jeder Wissenschaftler verteilt seine Zeit gleichmäßig auf alle Projekte, an denen er beteiligt ist. Bei n_i Projekten verwendet Wissenschaftler $i \in V$ somit $1/n_i$ Forschungszeit für jedes seiner Projekte. Die Produktivität, die ein Wissenschaftler durch ein gemeinsames Projekt erreicht, entspricht der Summe $1/n_i + 1/n_j$ der Forschungszeit der beiden beteiligten Wissenschaftler $i, j \in V$, sowie einer positiven Wirkung $1/(n_i n_j)$, die sich aus der Zusammenarbeit der beiden Wissenschaftler ergibt. Im Sonderfall $n_i = 0$ ist die Produktivität eines Wissenschaftlers i gleich 0. Andernfalls ergibt sich die Nutzenfunktion u_i eines Wissenschaftlers i durch

$$u_i(G) = \sum_{\{i,j\} \in E} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i n_j} \right) = 1 + \left(1 + \frac{1}{n_i} \right) \sum_{\{i,j\} \in E} \frac{1}{n_j}.$$

Im Modell *Forschungsprojekte* haben indirekte Verbindungen der Länge 2 einen negativen Effekt auf die Nutzenfunktion, weil die Zeit des Co-Autors auf weitere Projekte verteilt wird. Für die Errichtung von Kanten entstehen implizite Kosten, da sich die positive Wirkung aus der Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftler verringert.

Modell 4. Arbeitsmarkt[9]

Knoten: Arbeitnehmer

Kanten: Kontakte

Das Modell *Arbeitsmarkt* wird über die entscheidende Rolle von persönlichen Kontakten bei der Weitergabe von Jobangeboten motiviert. Eine Kante symbolisiert einen Kontakt zwischen zwei Arbeitnehmern oder genauer die Bereitschaft ein Jobangebot weiterzureichen.

Der Arbeitsmarkt verändert sich durch zwei alternierende Phasen. In der *Hire*-Phase erhalten einige zufällige Arbeitnehmer neue Jobangebote, in der *Fire*-Phase werden Arbeitnehmer zufällig entlassen. Erhält ein Arbeitnehmer ein neues Jobangebot, so kann er dieses annehmen oder an seine Kontakte weiterleiten. An wie viele Kontakte und wie oft ein Angebot insgesamt weitergeleitet werden kann, lässt sich in verschiedenen Varianten definieren. Wichtig ist lediglich, dass sich aus der aktuellen Netzwerksituation für jeden Arbeitnehmer die Wahrscheinlichkeit bestimmen lässt, mit der ihn ein neues Jobangebot erreicht. Die Zufallsvariable X_{it} verfolgt die Höhe des Einkommens von Arbeitnehmer $i \in V$ zum Zeitpunkt t , wobei arbeitslose Arbeitnehmer kein Einkommen erhalten. Dadurch erhalten wir eine wohldefinierte Markoff-Kette, aus der sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Einkommens eines Arbeitnehmers zu jedem zukünftigen Zeitpunkt ergibt.

Damit lässt sich untersuchen, welche Arbeitnehmer ein Interesse am Hinzufügen oder Entfernen von Kontakten haben.

Modell 5. Handel[11]

Knoten: Käufer und Verkäufer

Kanten: Kundenbeziehungen

Im Modell *Handel* gibt es zwei Arten von Knoten: Käufer und Verkäufer. Jeder Verkäufer möchte eine nicht-teilbare, identische Wareneinheit verkaufen, die für ihn selber keinen Wert hat. Jeder Kunde möchte genau eine Wareneinheit erwerben. Ein Handel ist nur möglich, wenn eine Kante zwischen den beiden Knoten existiert, d.h. der Käufer ein zugelassener Kunde des Verkäufers ist. Jedes Netzwerk aus Käufern, Verkäufern und Kundenkanten ist bipartit, d.h. die Knotenmenge lässt sich in zwei disjunkte Mengen (Käufer und Verkäufer) aufteilen, so dass keine Kante zwei Knoten aus der gleichen Menge verbindet.

Der Handel erfolgt durch zwei alternierende Phasen, die jeweils den Zeitpunkt des Spieles um 1 erhöhen. In der Angebot-Phase nennen alle Verkäufer gleichzeitig einen Preis $0 \leq p \leq 1$ für ihre Ware. Daraufhin entscheiden alle Käufer, die eingetragene Kunden sind, gleichzeitig, ob sie ein Angebot annehmen oder alle Angebote ablehnen. In der Nachfrage-Phase schlagen nach dem gleichen Prinzip die Käufer den Verkäufern einen Preis vor. Für den Fall, dass unklar ist, welcher Kunde welche Ware erhält, wird nach einem zuvor definierten Handelsprotokoll entschieden, wodurch die meisten möglichen Warenverkäufe garantiert werden.

Findet zum Zeitpunkt t ein Verkauf zum Preis p statt, so bringt dies dem Verkäufer einen Gewinn von $\delta^t \cdot p$ und dem Käufer einen Nutzen von $\delta^t \cdot (1 - p)$ für ein festes $0 < \delta < 1$. Käufer und Verkäufer sind also daran interessiert möglichst schnell zu handeln. Zwei Knoten, die miteinander gehandelt haben, werden direkt anschließend mitsamt aller inzidenten Kanten aus dem Netzwerk entfernt. Der Handelsprozess setzt sich so lange fort, bis alle Kanten aus dem Netzwerk entfernt wurden. Ein Knoten, der am Ende des Spieles nicht am Handel beteiligt war, hat einen Nutzen von 0.

Es lässt sich nun untersuchen, wie sich die Verhandlungsposition eines Knotens verändert, wenn im Netzwerk Kanten eingefügt oder entfernt werden. Sei dazu der Einfachheit halber $\delta = 1$. Der Wert $\mathcal{B}(G)$ eines Netzwerkes G entspricht damit der Anzahl an verkauften Waren, da sich für jede Transaktion der Gewinn von Käufer und Verkäufer auf 1 addiert. Für die Konstruktion einer *Allocation Rule* \mathcal{Y} kann eine Zerlegungsregel (vgl. *Decomposition Theorem* und *Proposition 4* in [11]) verwendet werden, die gemäß den Regeln von Angebot und Nachfrage die Verhandlungsposition eines Knotens eindeutig als gut ($\mathcal{Y}_v(G, \mathcal{B}) := 1$), schlecht ($\mathcal{Y}_v(G, \mathcal{B}) := 0$) oder normal ($\mathcal{Y}_v(G, \mathcal{B}) := 1/2$) bewertet:

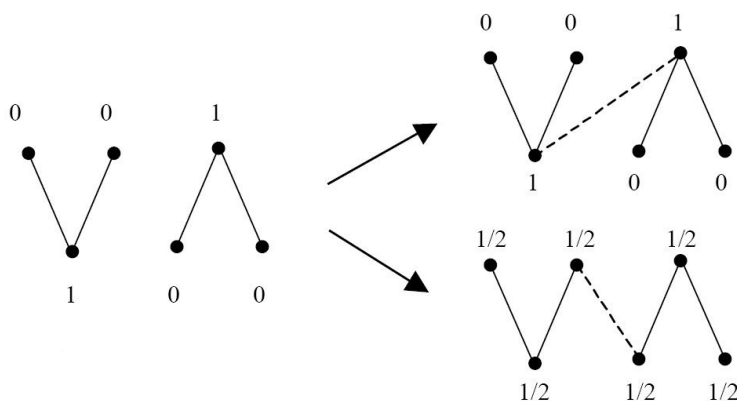


Abbildung 5.1: Veränderung der Bewertung der Verkäufer (oben) und Käufer (unten) gemäß der angegebenen *Allocation Rule* (Quelle: [11])

Als letztes Beispiel möchten wir noch ein Modell präsentieren, in dem der Kantenbau auch unilateral definiert werden kann und welches deshalb besonders stark mit dem NCG und dem SV verwandt ist.

Modell 6. Information[4]

Knoten: beliebiger Akteur

Kanten: Informationswege

Im Modell *Information* besitzt jeder Akteur Informationen, die für ihn und die anderen Spieler wertvoll sind. Jeder Akteur kann seine Informationen verbessern, wenn er die Informationen anderer Spieler kennt. Die Spieler wählen zeitgleich zu welchen Akteuren sie eine Kante errichten möchten und definieren dadurch ein Netzwerk G . Im Fall des *einseitigen Informationsflusses* (Spionage) fließt Information nur in die Richtung des Erbauers einer Kante, im Fall des *beidseitigen Informationsflusses* (Austausch) fließt Information in beide Richtungen. Jeder Spieler errichtet $\lambda_i(G)$ Kanten und erlangt gemäß des Informationsflusses die Informationen von $\kappa_i(G)$ Akteuren. Die Nutzenfunktion eines Spielers i lässt sich nun beliebig definieren durch

$$u_i(G) = \Psi(\kappa_i(G), \lambda_i(G)),$$

wobei $\Psi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine im ersten Argument streng monoton wachsende und im zweiten Argument streng monoton fallende Funktion sei.

Im Spezialfall hat jede Information einen Wert von 1 und jede Kante verursacht Kosten von α . Damit ergibt sich die Nutzenfunktion eines Spielers durch

$$u_i(G) = \kappa_i(G) - \lambda_i(G) \cdot \alpha.$$

Schlussendlich ist es bemerkenswert, dass trotz der Nähe der vorgestellten Spiele zum NCG und zum SV der Fokus bei der Analyse dieser Spiele ein anderer ist, denn das Interesse liegt dort vielmehr auf der Suche nach effizienten stabilen Zuständen, als auf einer Quantifizierung des möglichen Effizienzverlustes.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit beschäftigten wir uns mit den Ergebnissen zum *Network Creation Game* und einer Erweiterung dieses Spieles um endliche Kosten für nicht-zusammenhängende Netzwerke.

Zu Beginn der Arbeit wurde der aktuelle Forschungsstand über Nash-Gleichgewichte und den *Price of Anarchy* im NCG dargestellt. Darüber hinaus konnten wir zeigen, dass das NCG kein Potentialspiel ist.

Anschließend motivierten wir unsere Variante des NCG, das Strafterm-Verbindungsspiel, über das Konzept von Zentralitätsindizes. Für ausreichend große, aber endliche Strafkosten ist unsere Strafterm-Closeness eine im Sinne von [6] konsistente Erweiterung der Standard-Closeness auf nicht-zusammenhängende Graphen.

Die Bewertung der Servicekosten eines Spielers durch die Verwendung der Strafterm-Closeness, also die Einführung von endlichen Strafkosten für nicht-zshgd. Knotenpaare, ermöglicht nicht-zshgd. Lösungen in unserem Netzwerkverbindungsspiel.

Der *Price of Anarchy* des SV hat sich dadurch im Vergleich zum NCG echt erhöht. Die allgemeine Schranke von $o(n^\epsilon)$ für den *Price of Anarchy* im NCG mit n Spielern wird von der dezentralen, nicht-zshgd. Lösung (V, \emptyset) im SV übertroffen. Der *Price of Stability* im SV ist weiterhin konstant.

Für Strafkosten $x > 1$ und einen Kantenpreis $\alpha > 0$ konnten wir außerdem nachweisen:

- Das SV ist eine echte Erweiterung des NCG, da Nash-Gleichgewichte und soziale Optima in den beiden Spielen für $\alpha < x - 1$ übereinstimmen.
- In einem nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht im SV für $\alpha > 1$ wurde zu jedem nicht-isolierten Knoten mindestens eine Kante errichtet. Dieses Ergebnis schränkt die Suche nach möglichen nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichten deutlich ein. Insbesondere spielen Baumkomponenten, trotz der Bedeutung von Baum-Nash-Gleichgewichten im NCG, für nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichte im SV keine Rolle.
- Für jede nicht-triviale Komponente \mathcal{K} eines nicht-zshgd. Nash-Gleichgewichtes gilt $x \leq 2 \cdot \text{diam}(\mathcal{K}) + 1$. Dieses Ergebnis nährt die Vermutung, dass die Strafkosten für jedes nicht-triviale nicht-zshgd. Nash-Gleichgewicht im SV konstant sind, da bisher keine Nicht-Baumkomponenten mit einem Durchmesser > 3 bekannt sind.

In unserer Arbeit bleibt offen, ob im SV auch andere nicht-zshgd. Graphen als (V, \emptyset) im Bereich des sozialen Optimums Z_n den Effizienzverlust von dezentralen Lösungen gegenüber dem NCG asymptotisch erhöhen. Außerdem ist noch unklar, ob im Bereich des sozialen Optimums (V, \emptyset) im SV ein nicht-konstanter Effizienzverlust auftreten kann.

Die Beantwortung dieser Fragen ist eng verbunden mit den zukünftigen Ergebnissen über das NCG. Es wird sich zeigen, ob analog zu den aus affinen Ebenen hervorgegangenen Graphen weitere Familien von Nash-Gleichgewichten im NCG bzw. Nash-Gleichgewichts-Komponenten im SV konstruiert werden können. Die rasante Entwicklung in der Verbesserung für die obere Schranke des *Price of Anarchy* im NCG lässt vermuten, dass in naheliegender Zukunft eine allgemeine konstante Schranke angegeben werden kann.

Zusätzlich bedarf es noch einer ausführlichen Beschäftigung mit den in Abschnitt 3.4 vorgestellten Varianten und Erweiterungen des NCG. Zukünftige Arbeiten sollten nach Möglichkeit das Modell des NCG derart erweitern, dass Artefakte wie unendliche Netzwerkkosten für nicht-zshgd. Graphen vermieden werden. Netzwerkverbindungsspiele können auf diesem Wege für etwaige Anwendungen immer interessanter werden.

Die Intention für das NCG war eine stark vereinfachte Modellierung der dezentralen Entstehung eines dem Internet ähnlichen Netzwerkes. Die Schwierigkeiten, die bereits bei der Analyse des NCG und des SV auftreten, lassen die Komplexität eines Netzwerkverbindungsspieles erahnen, welches in der Theorie die tatsächlich beobachteten charakteristischen Merkmale des Internets voraussagen könnte.

Literaturverzeichnis

- [1] ALBERS, Susanne ; EILTS, Stefan ; EVEN-DAR, Eyal ; MANSOUR, Yishay ; RODITY, Liam: On Nash Equilibria for a Network Creation Game. In: *Proc. of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2006, S. 89–98
- [2] ANDELMAN, Nir ; FELDMAN, Michal ; MANSOUR, Yishay: Strong Price of Anarchy. In: *Proc. of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2007, S. 189–198
- [3] AUMANN, Robert J.: Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games. In: *Contributions to the Theory of Games IV*, 1959, S. 287–324
- [4] BALA, Venkatesh ; GOYAL, Sanjeev: A Noncooperative Model of Network Formation. In: *Econometrica Vol. 68*, 2000, S. 1181–1230
- [5] BELLEFLAMME, Paul ; BLOCH, Francis: Market Sharing Agreements and Collusive Networks. In: *International Economic Review Vol. 45*, 2004, S. 387–411
- [6] BRANDES, Ulrik: *Methoden der Netzwerkanalyse*. Skript zur Vorlesung, 2005
- [7] BRANDES, Ulrik ; ERLEBACH, Thomas ; (HRSG.): *Network Analysis: Methodological Foundations (Lecture Notes in Computer Science Vol. 3418)*. Springer-Verlag, 2005
- [8] BRANDES, Ulrik ; FLEISCHER, Daniel: Centrality Measures Based on Current Flow. In: *Proc. of the 22nd Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, 2005, S. 533–544
- [9] CALVÓ-ARMENGOL, Antoni ; JACKSON, Matthew O.: Networks in Labor Markets: Wage and Employment Dynamics and Inequality. In: *Journal of Economic Theory Vol. 132*, 2007, S. 27–46
- [10] CORBO, Jacomo ; PARKES, David: The Price of Selfish Behavior in Bilateral Network Formation. In: *Proc. of the 24th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, 2005, S. 99–107
- [11] COROMINAS-BOSCH, Margarida: Bargaining in a Network of Buyers and Sellers. In: *Journal of Economic Theory Vol. 115*, 2004, S. 35–77

- [12] DEMAINE, Erik D. ; HAJIAGHAYI, MohammadTaghi ; MAHINI, Hamid ; ZADI-MOGHADDAM, Morteza: The Price of Anarchy in Network Creation Games. In: *Proc. of the 26th Annual ACM SIGACT-SIGOPS Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, 2007, S. 292–298
- [13] FABRIKANT, Alex ; LUTHRA, Ankur ; MANEVA, Elitza ; PAPADIMITRIOU, Christos H. ; SHENKER, Scott: On a Network Creation Game. In: *Proc. of the 22nd Annual Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, 2003, S. 347–351
- [14] GAREY, Michael R. ; JOHNSON, David S.: *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., 1979
- [15] JACKSON, Matthew O.: A Survey of Models of Network Formation: Stability and Efficiency. In: *Group Formation in Economics: Networks, Clubs, and Coalitions*, Cambridge University Press, 2005, S. 11–57
- [16] JACKSON, Matthew O. ; WOLINSKY, Asher: A Strategic Model of Social and Economic Networks. In: *Journal of Economic Theory Vol. 71*, 1996, S. 44–74
- [17] KOUTSOUPIAS, Elias ; PAPADIMITRIOU, Christos: Worst-case Equilibria. In: *Proc. of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, 1999, S. 404–413
- [18] LA, R. ; ANANTHARAM, V.: Optimal Routing Control: Game Theoretic Approach. In: *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1997, S. 2910–2915
- [19] LIN, Henry: *On the Price of Anarchy of a Network Creation Game*. <http://www.eecs.berkeley.edu/~henrylin/NetworkCreation.ps>, 2003
- [20] MENDELSON, Elliot: *Introducing Game Theory and its Applications*. Chapman & Hall/CRC, 2004
- [21] MILGRAM, Stanley: The small-world Problem. In: *Psychology Today Vol. 1*, 1967, S. 60–67
- [22] MONDERER, Dov ; SHAPLEY, Lloyd S.: Potential Games. In: *Games and Economic Behavior Vol. 14*, 1996, S. 124–143
- [23] MYERSON, Roger B.: Graphs and Cooperation in Games. In: *Mathematics of Operations Research Vol. 2*, 1977, S. 225–229
- [24] NASH, John F.: Non-cooperative Games. In: *Annals of Mathematics Vol. 54*, 1951, S. 286–295
- [25] PAPADIMITRIOU, Christos H.: Algorithms, Games, and the Internet. In: *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, 2001, S. 749–753