Dual-Phase-Lag Thermoelastizität

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
am Fachbereich Mathematik und Statistik der
Universität Konstanz

Olaf Weinmann
Fachbereich Mathematik und Statistik
Universität Konstanz
78457 Konstanz

Konstanz, Oktober 2009.

Datum der mündlichen Prüfung: 15.12.2009

Referenten: Prof. Dr. Reinhard Racke
(Universität Konstanz)
Prof. Dr. Robert Denk
(Universität Konstanz)

Danksagung

Bei meinem Werdegang am Fachbereich Mathematik und Statistik an der Universität Konstanz wurde ich von vielen begleitet, bei denen ich mich auf diesem Weg herzlich bedanken möchte.

Besonders meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Reinhard Racke möchte ich für die Heranführung an das interessante Promotionsthema, für die wissenschaftliche Freiheit bei der Bearbeitung sowie für die vielen Anregungen und Diskussionen danken, die diese Arbeit erst möglich gemacht haben. Die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre an seinem Lehrstuhl werde ich stets in allerbester Erinnerung behalten.

Herrn Prof. Dr. Robert Denk danke ich für die freundschaftliche Zusammenarbeit, für die vielen hilfreichen Gespräche und für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Genauso möchte ich mich bei meinen Kollegen und Freunden Mario Kaip, Thilo Moseler und Jürgen Saal für ihre Unterstützung und die gute Zusammenarbeit bei unseren Tätigkeiten am Fachbereich bedanken.

Mein allergrößter Dank gilt allerdings meiner Familie und hier insbesondere meinen lieben Eltern Ingrid und Hans Weinmann, die mir dieses Studium nicht nur finanziell ermöglichten, sondern mich auch sonst in jeder erdenklichen Weise tatkräftig unterstützt haben. Ohne Euren Zuspruch und die vielen aufbauenden Worte wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

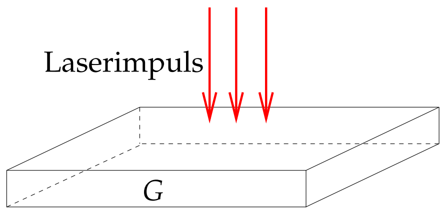
VIELEN DANK!

Konstanz, im Herbst 2009 — Olaf Weinmann

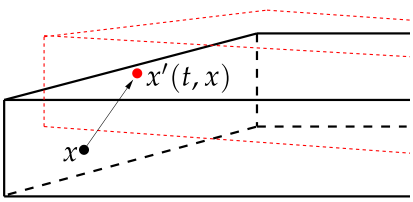
Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eigenschaften thermoelastischer Materialien sind in vielen Bereichen der Industrie von großem Interesse. Insbesondere deshalb sind die temperaturabhängigen wie auch die elastischen Eigenschaften solcher Materialien Gegenstand aktueller physikalischer und damit auch mathematischer Forschungen. Zum Beispiel ist es möglich, mit kleinen Partikeln verschmutzte Siliziumwafer mit Hilfe von Laserimpulsen zu reinigen. Durch die Laserbestrahlung beziehungsweise



die dadurch entstehende Ausbreitung von Wärme, wird die Oberfläche des Wafers in Schwingung versetzt und so ein Reinigungseffekt erzielt. Nähere Informationen dazu findet man etwa in [11], [13], [22] und in [27]. Mathematisch modelliert werden solche Situationen mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen, genauer mit Hilfe von *Thermoelastizitätsgleichungen*. Diese Gleichungen beschreiben die Temperatur sowie das elastische Verhalten von wärmeleitenden, elastischen Medien. Hierbei wird der betrachtete Materialkörper G als eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ aufgefasst. Die Deformation des Körpers durch auftretende Kräfte wird durch einen von der Zeit t und vom Ort x abhängigen Verschiebungsvektor $U(t,x)$ beschrieben. Ebenso wird die Temperaturdifferenz zu einer festen Referenztemperatur T_{ref} zum Zeitpunkt t am Ort x durch eine Funktion $\theta(t,x)$ beschrieben. Ist also bei fest vorgegebenem $x \in G$ die tatsächliche Position bzw. die tatsächliche Temperatur zum Zeitpunkt t durch $x'(t,x)$ bzw. durch $T(t,x)$ beschrieben, so gelten die folgenden Identitäten:



$$\begin{aligned} x + U(t,x) &= x'(t,x), \\ T_{ref} + \theta(t,x) &= T(t,x). \end{aligned}$$

Physikalische Untersuchungen haben nun ergeben, dass die Gleichungen der *klassischen* Thermoelastizität

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\Gamma\theta = \rho b, \tag{1}$$

$$\delta\theta_t - \operatorname{div} K\nabla\theta + \Gamma'\mathcal{D}U_t = r \tag{2}$$

ein sinnvolles Modell für das Verhalten der Funktionen U und θ darstellen. Hierbei fällt auf, dass diese linearen Gleichungen aus einer Elastizitätsgleichung und einer Wärmeleitungsgleichung bestehen, welche über gewisse Kopplungsterme miteinander verbunden sind. In dieser Situation wird also eine hyperbolische Gleichung mit einer parabolischen Gleichung gekoppelt und es

entsteht ein hyperbolisch-parabolisches System. Den auftretenden Koeffizienten kommen dabei die folgenden physikalischen Bedeutungen zu: Bei der 3×3-Matrix K handelt es sich um den Wärmeleitfähigkeitstensor, die 3×3-Matrix ρ ist eine Massendichtematrix und der skalare Koeffizient δ beschreibt die spezifische Wärme. Die 6×6-Matrix $\mathcal{S}$ beinhaltet die Elastizitätsmoduln und der 6-dimensionale Vektor Γ beinhaltet die Einträge des Spannungstemperaturtensors. Die externen Kräfte b beziehungsweise r beschreiben die Volumenkraft beziehungsweise die Wärmezufuhr.
Natürliche Fragestellungen, welche beim Studium dieser Gleichungen auftreten, sind einerseits Fragen nach Wohlgestelltheit bei verschiedenen Randbedingungen und unterschiedlichen Eigenschaften der auftretenden Koeffizienten, ebenso wie Fragen zur Langzeitdynamik der Lösungen. Etwa in [6] werden diese Fragen im linearen und nicht-linearen Fall für verschiedene Randbedingungen diskutiert.
Ein wesentlicher Nachteil dieses klassischen Modells ist die Tatsache, dass bei der Modellierung der Temperatur das Phänomen der *unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit* auftritt. Dieses hat seinen Ursprung im Gesetz von Fourier, welches den Wärmefluss q durch

$$q = -K\nabla\theta \tag{3}$$

beschreibt. Schreibt man die Gleichung (2) in der Form:

$$\delta\theta_t + \operatorname{div} q + \Gamma'\mathcal{D}U_t = 0, \tag{4}$$

so ist ersichtlich, wie das Fouriersche Gesetz eingeht. Ein Modell für den Wärmefluss, welches dieses Problem der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit behebt, ist das Gesetz von Cattaneo:

$$\tau_q q_t + q = -K\nabla\theta, \quad \tau_q > 0. \tag{5}$$

Betrachtet man also die Gleichungen (1), (4) und (5), so stellt man fest, dass sich die Wärme wellenartig ausbreitet. Man spricht hier von dem so genannten *second sound* Effekt. Thermoelastizitätsgleichungen, bei welchen dieses Gesetz von Cattaneo eingesetzt wurde, wurden ebenfalls ausführlich diskutiert. Es ergibt sich wie im klassischen Fall, dass Wohlgestelltheit als auch exponentielle Stabilität der Lösungen bei verschiedenen Randbedingungen vorliegt. Näheres hierzu findet man zum Beispiel in [3], [12], [17] und [19]. Hierbei werden allerdings nur konstante Koeffizienten betrachtet. Die genannten Fragestellungen im *orts-* bzw. *zeitabhängigen*, eindimensionalen Fall werden in den jüngeren Arbeiten [28] bzw. [29] aufgegriffen. Allgemein sind solche zeitabhängigen Probleme schwer zu behandeln. Während im Fall von konstanten Koeffizienten die Halbgruppentheorie ein ausreichendes Hilfsmittel zum Nachweis der Wohlgestelltheit darstellt, sind im zeitabhängigen Fall kompliziertere Methoden notwendig. Eine Möglichkeit ist die Verwendung einer verallgemeinerten Halbgruppentheorie, welche von Tosio Kato in [8] und [9] eingeführt wird. Hierbei ist eine wesentliche Voraussetzung, dass der Definitionsbereich des verwendeten Evolutionsoperators konstant ist. Dies führt besonders bei gemischten (zum Beispiel: Dirichlet-Neumann-) Randbedingungen zu starken Schwierigkeiten. Zudem führen Gewichtungen des Standardskalarprodukts im entsprechenden zu Grunde liegenden Hilbertraum zu einem zeitabhängigen Hilbertraum, welcher ebenfalls kontrolliert werden muss.
Im **ersten Kapitel** wollen wir kurz auf Notationen, kleinere technische Resultate und wichtige Resultate der Halbgruppentheorie sowie auf Resultate der Theorie von Kato eingehen.

Wir werden uns im **zweiten Kapitel** der Frage nach Wohlgestelltheit des zeitabhängigen Problems (1), (4) und (5) mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen zuwenden. Unter Verwendung einer passenden Transformation der Form

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{A}\mathcal{V} + \mathcal{F}$$

wird es uns gelingen, eine positive Antwort auf die Frage nach Wohlgestelltheit zu geben. Das verwendete System erster Ordung wird hierbei die Vorteile des Systems für die klassischen Gleichungen im dreidimensionalen Fall mit konstanten Koeffizienten mit den Vorteilen des Systems in [29] für den eindimensionalen Fall mit zeitabhängigen Koeffizienten zusammenführen. Im einzelnen bedeutet das, dass alle in den Randbedingungen vorkommenden Koeffizienten bereits so in dem Vektor $\mathcal{V}$ vorkommen, dass ein konstanter Definitionsbereich ermöglicht wird.
Ein weiteres Modell für den Wärmefluss stellt die folgende Gleichung dar:

$$\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + q = -K\nabla\theta - K\tau_\theta\nabla\theta_t, \quad \tau_q > 0,\ \tau_\theta > 0. \tag{6}$$

Die Gleichungen (1), (4) und (6) stellen also wiederum ein thermoelastisches Modell dar, für welches in [16] wiederum Wohlgestelltheit wie auch exponentielle Stabilität von Lösungen im Fall von konstanten Koeffizienten gezeigt wird. Wesentlich ist bei dem Nachweis der exponentiellen Stabilität die Bedingung

$$\tau_\theta > \frac{\tau_q}{2}. \tag{7}$$

Die Gleichungen (3), (5) und (6) können nun als unterschiedliche Taylor-Approximationen der Gleichung

$$q(t + \tau_q, \cdot) = -K\nabla\theta(t + \tau_\theta, \cdot) \tag{8}$$

aufgefasst werden. Diese Gleichung bildet die Grundlage einer Dual-Phase-Lag - Theorie, welche von Tzou [25], [26] eingefürt wird. Die positiven Wohlgestelltheits- und Stabilitätsresultate motivieren nun die Frage nach Wohlgestelltheit und Stabilität, wenn man die Gleichungen (1), (4) und

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau_q^k}{k!} \partial_t^k q + K \sum_{k=0}^{m} \frac{\tau_\theta^k}{k!} \partial_t^k \nabla\theta = 0 \tag{9}$$

betrachtet. Hierbei zeigen Untersuchungen in [4], dass für $n - m > 2$ keine Wohlgestelltheit zu erwarten ist. Allerdings ist für die verbleibenden Fälle nichts bekannt.
Wir werden uns im **dritten Kapitel** dem Fall $m = n - 1$ zuwenden und ein Wohlgestelltheitsresultat für beliebiges $n \geq 2$ beweisen. Hierbei werden die Koeffizenten der Gleichungen (1), (4) als orts- und zeitabhängig angenommen. Allerdings wird die Zeitunabhängigkeit der Koeffizienten der dritten Gleichung notwendig sein. Neben den bereits genannten Schwierigkeiten, welche durch die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten auftreten, bereitet hier die Tatsache Probleme, dass sich mit unterschiedlichem n auch die Struktur der dritten Differentialgleichung ändert. Trotzdem aber wird es uns möglich sein, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine Transformation in ein System erster Ordnung anzugeben, welche jeweils einen Evolutionsoperator liefert, der eine gut

zu behandelnde Struktur hat. Damit wird es uns ermöglicht, die Wohlgestelltheit des entstandenen Systems für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Zudem werden wir zeigen, dass im räumlich eindimensionalen Fall mit $n = 2$ höhere Regularität der Lösungen vorliegt, sofern man glattere Koeffizienten wählt. Betrachten wir für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und $m = n - 1$ die Gleichungen (1), (4) und (9) mit gewissen Anfangsbedingungen und Dirichlet-Randbedingungen, so können wir der zugehörigen Lösung einen Energieterm zuordnen. Eine natürliche Fragestellung ist nun, wie sich diese Energie im Vergleich zu der Energie verhält, die der Lösung (U^0, θ^0) des klassischen Systems zugeordnet wird. Für den Fall $n = 1$ wird in [17] bzw. [18] eine Abschätzung von der Form

$$\mathrm{d}E(t) \leq C\tau_q^2 \int_0^t \left\|\nabla\theta_t^0(s)\right\|^2 \mathrm{d}s$$

bewiesen, wobei $\mathrm{d}E(t)$ die Energie der Differenzen der zu vergleichenden Lösungen darstellt. Hiermit wird unter Verwendung der exponentiellen Stabilität der Lösungen für das klassische Problem eine Abschätzung von der Form

$$\mathrm{d}E(t) \leq C\tau_q^2$$

bewiesen. Hierbei ist nachteilig, dass die auftretende Konstante $C > 0$ nicht explizit gegeben ist. In [5] wird diese Problematik aufgegriffen und eine Abschätzung von der Form

$$\mathrm{d}E(t) \leq C(t)\tau_q^2$$

bewiesen. Die hierbei auftretende Funktion $t \longmapsto C(t)$ wird explizit angegeben. Stabilitätsresultate der Lösungen gehen nicht in den Beweis ein.
Im **vierten Kapitel** werden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Lösung zu (1), (4) und (9) (mit entsprechenden Anfangs- und Dirichlet-Randbedingungen) einen Energieterm zuordnen und diesen mit dem Energieterm vergleichen, welcher in der klassischen Situation vorliegt. Hierbei werden wir im Fall $n = 2$ die Resultate von Irmscher [5] übertragen können. Dies wird mit Hilfe eines dissipativen Systems erster Ordnung ermöglicht. Im Einzelnen beweisen wir eine Abschätzung von der Form:

$$\mathrm{d}E_j^\tau(t) \leq \frac{3\tau_q^4}{4}\varepsilon_{j+2}^0(t) + \frac{3\tau_q^2}{2}\varepsilon_{j+1}^0(t) + \frac{3\tau_\theta^2}{2}\varepsilon_{j+1}^0(t) + \mathrm{d}E_j^\tau(0).$$

Für die Definition der Energieterme $\mathrm{d}E_j^\tau(t)$ und der Terme $\varepsilon_k^0(t)$ sei auf das Lemma 4.3 und die Definition 4.6 verwiesen. Im Fall $n > 2$ werden wir Abschätzungen dieser Energieterme für kleine Zeiten $t > 0$ beweisen.
Abschließend wenden wir uns im **fünften Kapitel** dem nichtlinearen thermoelastischen Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(u_x, \theta, q)u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x &= \alpha_1(u_x, \theta)qq_x, \\ \theta_t + g(u_x, \theta, q)q_x + d(u_x, \theta, q)u_{tx} &= \alpha_2(u_x, \theta)qq_t, \\ \frac{\tau_q^2}{2}q_{tt} + \tau_q q_t + q &= -k\theta_x - k\tau_\theta\theta_{tx} \end{aligned} \tag{10}$$

mit gewissen Anfangsbedingungen und Dirichlet-Randbedingungen zu. Hier werden wir beweisen, dass global existierende Lösungen exponentiell stabil sind. Der Beweis dieses Resultats

zeigt zudem, dass man unter Verwendung eines (noch zu beweisenden) lokalen Existenzsatzes auf die Existenz einer globalen Lösung schließen kann. In [12] werden die ersten beiden Gleichungen zusammen mit dem Gesetz von Cattaneo behandelt und wir werden uns an den hier zur Anwendung gebrachten Strategien orientieren. Es kommen dabei Techniken zur Kontrolle von Randtermen zum Einsatz, welche unter anderem auf [14] und [20] zurückgehen. Es wird sich allerdings in unserer Situation herausstellen, dass aufgrund der veränderten Struktur gegenüber der Situation mit dem Gesetz von Cattaneo neue Methoden zur Abschätzung verschiedener (Rest-)Terme notwendig werden. Zum Beispiel kann man unter Verwendung des Gesetzes von Cattaneo eine Abschätzung für die L^2-Norm des Termes θ_{xx} beweisen. Die Gleichung (10) wird uns wiederum eine Möglichkeit geben, die Norm dieses Terms zu behandeln, jedoch wird hier technisch gesehen mehr Aufwand benötigt.
Wir werden schließlich alle Teilabschätzungen zusammenfassen und damit eine lokale Abschätzung für die Energie der Lösung beweisen. Eine *Kleinheitsbedingung* an die Anfangswerte wird uns die Fortsetzung der lokalen Abschätzung auf die positive Zeitachse ermöglichen und dies wiederum wird unseren Beweis vervollständigen.

Kapitel 1

Notationen und technische Resultate

In diesem Abschnitt führen wir zunächst grundlegende Begriffe ein und stellen verschiedene Resultate vor, die im weiteren Verlauf dieser Dissertation mehrfach zum Einsatz kommen werden. Hervorzuheben ist hierbei die Kornsche Ungleichung, welche bereits bei Existenzresultaten der klassischen Thermoelastizität eine wichtige Rolle spielt. Daraufhin gehen wir kurz auf wesentliche Resultate der Halbgruppentheorie und schließlich auf Resultate der Theorie von Kato ein. Die Theorie von Kato ist bei der Behandlung von *zeitabhängigen* Evolutionsgleichungen ein wichtiges Hilfsmittel.

1.1 Notationen

Soweit nicht anders erwähnt, bezeichnet n immer eine natürliche Zahl. Die klassischen Lebesgueschen Räume bezeichnen wir wie üblich mit $L^p = L^p(\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $1 \leq p \leq \infty$. Entsprechend bezeichnen wir die klassischen Sobolev Räume mit $H^{j,p} = H^{j,p}(\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Im Fall $p = 2$ schreiben wir $H^{j,p}(\Omega) = H^{j,2}(\Omega) = H^j(\Omega)$. Die entsprechenden Normen werden mit $\|\cdot\|_p$ bzw. $\|\cdot\|_{H^{j,p}}$ oder $\|\cdot\|_{H^j}$ bezeichnet. Ist eine Norm mit keinem bezeichnenden Index versehen, so handelt es sich um die L^2-Norm. Wir unterscheiden bei der Bezeichnung der Normen nicht zwischen der $H^{j,2}$ bzw. der $(H^{j,2})^n$-Norm.

1.2 Randregularität und die Ungleichung von Korn

Zur Beschreibung der Regularität des Randes eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$ sind unter anderem die sogenannten Kegeleigenschaften gebräuchlich. Bevor wir darauf eingehen, was darunter zu verstehen ist, erinnern wir an den Begriff einer *lokal endlichen Überdeckung*:

Definition 1.1 (Lokal endliche offene Überdeckung) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$. Eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von G heißt lokal endlich, falls*

$$\exists \varepsilon > 0 : \#\{U_i : U_i \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset, i \in I\} < \infty$$

gilt.

Wir unterscheiden nun zwischen der *einfachen* und der *strikten* Kegeleigenschaft:

Definition 1.2 (Einfache Kegeleigenschaft) *Ein Gebiet G hat die einfache Kegeleigenschaft, falls ein Kegel C existiert, so dass zu jedem Punkt $x \in G$ ein Kegel $C_x \subset G$ mit Spitze in x existiert, welcher kongruent zu C ist.*

Definition 1.3 (Strikte Kegeleigenschaft) *Ein Gebiet G hat die strikte Kegeleigenschaft, falls zu ∂G eine lokal endliche offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ und zugehörige Kegel $(C_i)_{i \in I}$ mit Spitze im Ursprung existieren, so dass*

$$x + C_i \subset G$$

für alle $x \in G \cap O_i$ gilt.

Wie schon erwähnt, spielt die Kornsche Ungleichung bereits bei der Untersuchung der Wohlgestelltheit der klassischen Thermoelastizität im $\mathbb{R}^3$ eine wichtige Rolle. Auch hier wird diese Ungleichung im Rahmen von Existenzresultaten eine wichtige Rolle spielen. Im Einzelnen werden wir mit Hilfe dieser Ungleichung Resultate für den Definitionsbereich unseres jeweiligen Evolutionsoperators beweisen.

Satz 1.4 (Kornsche Ungleichung) *Es sei G ein beschränktes Gebiet mit der strikten Kegeleigenschaft. Dann existiert eine Konstante $p > 0$ so dass für alle $U \in H^1(G)$ die Ungleichung*

$$\|\mathcal{D}U\|^2 + \|U\|^2 \geq p\|U\|_{H^1}^2$$

gilt.

Für die Bedeutung des *verallgemeinerten* Gradienten $\mathcal{D}$ sei auf (2.9) verwiesen.

1.3 Halbgruppentheorie

Mit Hilfe der Halbgruppentheorie ist es möglich, die Existenz einer eindeutigen Lösung von bestimmten Anfangsrandwertproblemen im Bereich der partiellen Differentialgleichungen nachzuweisen. In diesem Abschnitt wollen wir nicht auf Definitionen der verschiedenen Halbgruppenbegriffe eingehen, trotzdem aber einige Ergebnisse vorstellen, die wir dann im Folgenden zur Anwendung bringen werden. Die vorgestellten Resultate werden hier nicht bewiesen. Beweise findet man etwa in [15]. Bevor wir den ersten Satz formulieren, definieren wir den Begriff der Dissipativität im Fall eines Operators $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$, wobei X ein Hilbertraum ist:

Definition 1.5 *Sei X ein Hilbertraum. Ein linearer Operator $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ heisst dissipativ, falls für alle $x \in D(A)$ die Ungleichung*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$$

erfüllt ist.

Der folgende Satz gibt nähere Auskunft darüber, wann ein Operator der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe ist. Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes von *Lumer-Phillips*.

Satz 1.6 (Lumer-Phillips) *Es sei X ein Hilbertraum und $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ ein dicht definierter, linearer Operator.*

(*i*) *Falls A dissipativ ist und ein $\lambda_0 > 0$ existiert, so dass $\mathcal{R}(\lambda_0 Id - A) = X$ gilt, so ist A der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf X.*

(*ii*) *Falls A der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf X ist, so gilt $\mathcal{R}(\lambda Id - A) = X$ für alle $\lambda > 0$ und A ist dissipativ.*

Dieses Ergebnis ist die Grundlage des folgenden Korollars, welches bei unseren Existenzresultaten zum Einsatz kommen soll.

Korollar 1.7 *Es sei X ein Hilbertraum und $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. Falls A und der Hilbertraum-adjungierte Operator A^* dissipativ sind, so ist A der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf X.*

Es ist nun möglich einen Zusammenhang zwischen der Theorie von Halbgruppen linearer Operatoren und der Lösbarkeit von Systemen von partiellen Differentialgleichungen herzustellen. Der folgende Satz gibt nähere Auskunft über diese Zusammenhänge.

Satz 1.8 *Es sei X ein Hilbertraum und $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ ein Operator. Erzeugt A die $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$, dann existiert zu $u_0 \in D(A)$ eine eindeutige Lösung*

$$u \in \mathcal{C}^1([0,\infty), X) \cap \mathcal{C}^0([0,\infty), D(A))$$

des Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0. \tag{1.1}$$

1.4 Die Theorie von Kato

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es unter gewissen Voraussetzungen die Lösbarkeit eines Problems der folgenden Form zu sichern:

$$V_t(t) + A(t)V(t) = F(t), \quad V(0) = V_0.$$

Auf Grundlage des vorigen Abschnitts können wir erwarten, dass wir uns mit Familien von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern beschäftigen müssen. Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist der Begriff der *Stabilität* einer Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern. Nähere Informationen dazu gibt uns die

Definition 1.9 *Es sei X ein Banachraum und $T > 0$. Eine Familie $(A(t))_{t\in[0,T]}$ von Generatoren von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppen auf X heißt stabil, falls reelle Konstanten $M \geq 1$ und ω existieren, so dass*

$$\rho(A(t)) \supset (\omega, \infty)$$

und

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda : A(t_j)) \right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-k} \quad \text{für } \lambda > \omega \tag{1.2}$$

für jede endliche Folge $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2, ...$ gilt. Die Konstanten M und ω werden auch Stabilitätskonstanten genannt.

Zu bemerken ist, dass das Produkt (1.2) zeitlich geordnet ist, das bedeutet, dass Faktoren mit größerem t_j links von solchen mit kleinerem t_j stehen. Das folgende Lemma wurde von Kato in [9] vorgestellt und gibt uns weitere Informationen zum Stabilitätsverhalten von Familien von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern.

Lemma 1.10 *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und für $t \in [0, T]$ seien $\|\cdot\|_t$ weitere, zu $\|\cdot\|$ äquivalente Normen auf X, welche die folgende Eigenschaft haben*

$$\exists c > 0 \forall s, t \in [0, T] \forall x \neq 0 : \frac{\|x\|_t}{\|x\|_s} \leq e^{c|t-s|}.$$

Ferner sei $X_t := (X, \|\cdot\|_t)$ und $A(t) : D(A(t)) \subset X_t \longrightarrow X_t$ für $t \in [0, T]$ der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf X_t. Dann ist die Familie $(A(t))_{t\in[0,T]}$ stabil in $(X, \|\cdot\|)$ und stabil in $(X, \|\cdot\|_t)$ für jedes $t \in [0, T]$.

Zu erwähnen ist hier, dass dieses Lemma bei den in den folgenden Kapiteln vorgestellten Existenzresultaten absolut wesentlich ist. Interessant ist auch der Fall, dass wir von einer Familie von Operatoren $(A(t))_{t\in[0,T]}$ bereits wissen, dass sie stabil ist, nun aber Aussagen über die Familie $(A(t) + B(t))_{t\in[0,T]}$ machen wollen, wobei hier $(B(t))_{t\in[0,T]}$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren ist. Eine wichtige Aussage darüber macht der folgende

Satz 1.11 *Es sei $(A(t))_{t\in[0,T]}$ eine stabile Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern mit den Stabilitätskonstanten M und ω. Sei $(B(t))_{t\in[0,T]}$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren auf X. Falls $\|B(t)\| \leq K$ für $0 \leq t \leq T$ gilt, dann ist auch $(A(t) + B(t))_{t\in[0,T]}$ eine stabile Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern mit Stabilitätskonstanten M und $\omega + KM$.*

Einen Beweis zu diesem Satz findet man in [15]. Die Existenzresultate im Rahmen der Theorie von Kato verwenden den Begriff des *CD-Systems*. Was darunter zu verstehen ist, fassen wir in der folgenden Definition zusammen.

Definition 1.12 *Es seien X_0 und Y_1 $(Y_1 \subset X_0)$ reelle Banachräume mit den entsprechenden Normen $\|\cdot\|_{X_0}$ und $\|\cdot\|_{Y_1}$. Das Tripel $((A(t))_{t\in[0,T]}; X_0, Y_1)$, wird CD-System genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- (i) *$A = (A(t))_{t\in[0,T]}$ ist eine stabile Familie von (negativen) $\mathcal{C}_0$- Halbgruppenerzeugern auf X_0, mit Stabilitätskonstanten M und β,*
- (ii) *der Definitionsbereich $D(A(t)) = Y_1$ von $A(t)$ ist unabhängig von t,*
- (iii) *$A \in \mathrm{Lip}([0, T]; L(Y_1, X_0))$.*

Damit haben wir alle Begriffe zur Verfügung, die wir benötigen um den ersten Existenzsatz zu formulieren.

Satz 1.13 *Es seien X_0 und Y_1 reelle separable Hilberträume. Weiter sei $(A; X_0, Y_1)$ ein CD-System und es gelte $V^0 \in Y_1$ sowie $F \in \mathrm{Lip}([0, T], X_0)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung*

$$V \in \mathcal{C}^0([0, T], Y_1) \cap \mathcal{C}^1([0, T], X_0), \quad V(0) = V^0$$

zu dem Anfangswertproblem

$$V_t(t) + A(t)V(t) = F(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad V(0) = V^0. \tag{1.3}$$

Einen Beweis zu diesem Satz findet man in [9]. Im Hinblick darauf, dass wir später auch an höherer Regularität der in Satz 1.13 vorgestellten Lösung interessiert sind, führen wir die folgenden *Ketten* von Banachräumen ein. Es seien X_j und Y_j für $0 \leq j \leq s-1$ reelle Banachräume mit der folgenden Struktur

$$\begin{array}{ccccccccc} X_0 & \supset & X_1 & \supset & X_2 & \supset & \cdots & \supset & X_{s-1} \\ X_0 = Y_0 & \supset & Y_1 & \supset & Y_2 & \supset & \cdots & \supset & Y_{s-1} \end{array}$$

hierbei seien alle Inklusionen stetig und dicht. Weiter sei für $s \geq 2$ der Raum Y_1 ein abgeschlossener Unterraum von X_1 und es gelte $Y_j = Y_1 \cap X_j$ für $1 \leq j \leq s-1$. Wir führen die folgenden Annahmen ein:

(L1) (Stabilität): $((A(t))_{t\in[0,T]}; X_0, Y_1)$ ist ein CD-System mit den Stabilitätskonstanten M und β.

(L2) (Glattheit):

$$\partial_t^r A \in \operatorname{Lip}([0,T], L(Y_{j+r+1}; X_j)), \quad 0 \leq j \leq s-r-1,$$

für $0 \leq r \leq s-1$. Das impliziert $\partial_t^{r+1} A \in L^\infty([0,T], L(Y_{j+r+1}; X_j))$ für den selben Bereich von r und j.

(L3) (Elliptizität): Für alle $t \in [0,T]$ und $0 \leq j \leq s-1$

$$\phi \in Y_1, \;\; A(t)\phi \in X_j \Longrightarrow \phi \in Y_{j+1}, \;\; \|\phi\|_{Y_{j+1}} \leq K\left(\|A(t)\phi\|_{X_j} + \|\phi\|_{X_0}\right),$$

wobei $K > 0$ eine Konstante ist.

(L4) (Regularität der Inhomogenität): Es gelte

$$\partial_t^k F \in C^0([0,T], X_{s-1-k}) \tag{1.4}$$

für $k = 0, 1, ..., s-1$ und weiter

$$\partial_t^s F \in L^1([0,T], X_0). \tag{1.5}$$

(A1) (Kompatibilitätsbedingung) Es sei $V^0 \in Y_s$, und weiter gelte

$$V^r := \partial_t^{r-1} F(0) - \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (\partial_t^k A)(0) V^{r-1-k} \in Y_{s-r}, \quad 1 \leq r \leq s. \tag{1.6}$$

Der folgende Satz macht nun eine Aussage über höhere Regularitäten:

Satz 1.14 *Es seinen X_0 und Y_1 reelle separable Hilberträume. Die Bedingungen* (L1) *-* (L4) *mögen gelten. Falls $V^0 \in Y_s$, dann gilt für die von Satz 1.13 beschriebene Lösung des Problems* (1.3)

$$\partial_t^k V \in C^0([0,T], Y_{s-k}), \quad k = 0, ..., s-1$$

genau dann, wenn V^0 und F die Bedingung (A1) *erfüllen.*

Der obige Satz wird in [6] bewiesen.

Kapitel 2

Das Gesetz von Cattaneo und Dirichlet-Neumann-Randbedingungen

2.1 Einführung

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit dem Rand ∂G. Dieser soll in die Teilbereiche Γ_1 und Γ_2 zerlegt sein. Es gelte also:

$$\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad \text{und} \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

Hierbei heben wir hervor, dass $\Gamma_1 = \emptyset$, beziehungsweise $\Gamma_2 = \emptyset$ nicht ausgeschlossen werden. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit der Wohlgestelltheit des folgenden thermoelastischen Systems: Gesucht sind Funktionen $U = U(t,x)$, $\theta = \theta(t,x)$ und $q = q(t,x)$ $((t,x) \in [0,\infty) \times G)$, welche hinreichend regulär sind und die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\beta\Gamma\theta &= f_1, & (2.1)\\ \theta_t + \gamma \mathrm{div}\, q + \delta \mathrm{div}\, U_t &= f_2, & (2.2)\\ \tau_0 q_t + q + K\nabla\theta &= f_3, & (2.3) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$U(0,\cdot) = U_0, \quad U_t(0,\cdot) = U_1, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0 \qquad (2.4)$$

und den gemischten Dirichlet - Neumann - Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{N}}'\mathcal{S}\mathcal{D}U - \vec{\mathcal{N}}'\beta\Gamma\theta|_{\Gamma_2} &= 0, & (2.5)\\ q \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} &= 0, & (2.6)\\ u|_{\Gamma_1} &= 0, & (2.7)\\ \theta|_{\Gamma_1} &= 0 & (2.8) \end{aligned}$$

unter gewissen Voraussetzungen an das Gebiet bzw. dessen Rand, die Koeffizienten und die Koeffizientenmatrizen erfüllen. Der Vektor $\vec{n} := (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ ist die nach außen gerichtete Normale auf ∂G und der Vektor Γ ist durch $\Gamma := (1,1,1,0,0,0)'$ definiert.

Der *verallgemeinerte Gradient* $\mathcal{D}$ und zugehörige Normale $\vec{\mathcal{N}}$ sind durch

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\mathcal{N}} := \begin{pmatrix} \vec{n}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{n}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{n}_3 \\ 0 & \vec{n}_3 & \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 & 0 & \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 & \vec{n}_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

definiert.
Gleichungen von dieser Form werden im räumlich eindimensionalen Fall mit zeitabhängigen Koeffizienten in [29] behandelt. Im Einzelnen wurde hier mit einem $L > 0$ das Problem

$$u_{tt} - au_{xx} + b\theta_x = f_1, \tag{2.10}$$

$$\theta_t + gq_x + du_{tx} = f_2, \tag{2.11}$$

$$\tau_0 q_t + q + k\theta_x = f_3, \tag{2.12}$$

(wobei hier $t \geq 0$ und $x \in (0, L)$ gelte) mit den Anfangsbedingungen

$$u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0 \tag{2.13}$$

und den Randbedingungen

$$au_x(t,0) + b\theta(t,0) = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad \theta(t,L) = 0, \quad q(t,0) = 0, \quad (t \geq 0). \tag{2.14}$$

betrachtet. In [28] wird die Wohlgestelltheit des Problems (2.10) $-$ (2.14) mit Hilfe einer geeigneten Transformation in ein System erster Ordnung bewiesen. Die Transformation wird dabei so vorgenommen, dass es möglich ist den zu dem entstehenden Evolutionsoperator gehörigen Definitionsbereich zeitunabhängig zu wählen. Außerdem wird darauf geachtet, dass die dabei auftretenden Störterme möglichst „gutartig" sind. Da wir uns später unter anderem an diesen Ideen orientieren wollen, gehen wir kurz auf diese Transformation ein:

Ist (u, θ, q) eine Lösung von (2.10) $-$ (2.14), so gilt für

$$V \equiv V(t,x) := \begin{pmatrix} \frac{a}{b}u_x \\ u_t \\ \theta \\ \frac{g}{d}q \end{pmatrix}(t,x), \quad V_0 \equiv V_0(x) := \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)(0,x)u_{0,x}(x) \\ u_1(x) \\ \theta_0(x) \\ \left(\frac{g}{d}\right)(0,x)q_0(x) \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$V_t + AV = 0, \quad V(0) = V_0, \tag{2.15}$$

wobei $A \equiv A(t,x)$ die Gestalt $A = Q^{-1}(N_0 + N_1)$ hat. Dabei sind Q, N_0 und N_1 für $(t,x) \in [0,\infty) \times G$ wie folgt definiert:

$$N_0 \equiv N_0(t,x) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{a}{b}\right)_t \frac{b^2}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{a}{b}\right)_x \frac{b}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{g}{d}\right)_x \frac{d}{g} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{g}{d}\right)_t \frac{d^2\tau}{g^2 k} \end{pmatrix}(t,x),$$

$$Q^{-1} \equiv Q^{-1}(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{gk}{d\tau} \end{pmatrix}(t,x), \quad N_1 \equiv N_1(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x & 0 & 0 \\ -\partial_x & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_x & \frac{d}{gk} \end{pmatrix}(t,x).$$

Die Randbedingungen können nun aufgrund der speziellen Beschaffenheit des Vektors V leicht mit Hilfe von (zeitunabhängigen) Sobolevräumen verallgemeinert werden. Schließlich wird mit Hilfe der Theorie von Kato auf eine Lösung geschlossen.
Die Wohlgestelltheit der klassischen Thermoelastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} \rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\Gamma\theta &= \rho b, \\ \delta\theta_t - \operatorname{div}\,(K\nabla\theta) + \Gamma'\mathcal{D}U_t &= r, \end{aligned}$$

mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen wird in [6] im zeitunabhängigen, dreidimensionalen Fall ebenfalls mit einer geschickten Transformation und Resultaten der Halbgruppentheorie gezeigt. Mit einer Lösung (U,θ) und

$$V := \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U \\ U_t \\ \theta \end{pmatrix}, \; Q := \begin{pmatrix} \mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \; N := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D} & 0 \\ -\mathcal{D}' & 0 & \mathcal{D}'\Gamma \\ 0 & \Gamma'\mathcal{D} & -\operatorname{div}\,(K\nabla\cdot) \end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{F} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \frac{r}{\delta} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$V_t + Q^{-1}NV = \mathcal{F}.$$

Wir führen nun beide Vorgehensweisen zusammen und erarbeiten daraus eine Strategie um die Wohlgestelltheit des Problems (2.1) – (2.8) zu beweisen. Zunächst aber definieren wir Sobolevräume, welche es uns später erlauben werden, die Randbedingungen zu verallgemeinern.

2.2 Sobolevräume und Skalarprodukt

In diesem Abschnitt definieren wir Sobolevräume, welche zur verallgemeinerten Formulierung der Randbedingungen (2.5) – (2.8) hilfreich sein werden. Außerdem werden einige Eigenschaften dieser Sobolevräume aufgezeigt, welche in spätere Argumentationen eingehen werden. Wir benötigen zunächst die folgenden „verallgemeinerten" Testfunktionen:

$$\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) := \left\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G) : \exists G' \subset G \text{ offen}, \Gamma_1 \subset \overline{G'}, \varphi|_{G'} = 0\right\}.$$

Bevor wir mit Hilfe dieser verallgemeinerten Testfunktionen zu jeder Randbedingung von (2.5) – (2.8) einen passenden Sobolevraum definieren, führen wir einen Grundraum ein, welcher ebenfalls von Nutzen sein wird:

$$W^1_{\mathcal{D}}(G) := \left\{u \in \left(L^2(G)\right)^3 : \mathcal{D}u \in \left(L^2(G)\right)^6\right\}.$$

Mit Hilfe des Raumes

$$\begin{aligned} W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G) := \Big\{ & u \in \left(L^2(G)\right)^6 : \mathcal{D}'u \in \left(L^2(G)\right)^3, \\ & \forall\varphi \in \left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)\right)^3 : \int_G (\mathcal{D}'u)\varphi \mathrm{d}x = -\int_G u\mathcal{D}\varphi \mathrm{d}x \Big\} \end{aligned}$$

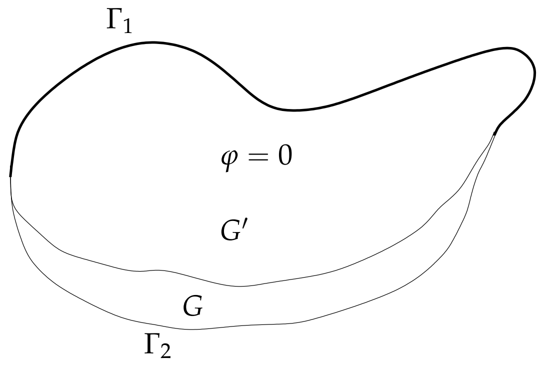


Abbildung 2.1: Verallgemeinerte Testfunktionen.

wird die Randbedingung (2.5) verallgemeinert. Der Raum

$$W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) := \left\{ u \in W^1_{\mathcal{D}}(G) : \forall \varphi \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G) : \int_G (\mathcal{D}u)\varphi \mathrm{d}x = -\int_G u\mathcal{D}'\varphi \mathrm{d}x \right\}$$

wird zur Verallgemeinerung der Randbedingung (2.7) notwendig werden. Die Randbedingung (2.6) wird mit Hilfe des Raumes

$$\begin{aligned} W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G) := \Big\{ u \in \left(L^2(G)\right)^3 &: \mathrm{div}\ u \in L^2(G), \\ &\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G) : \int_G (\mathrm{div}\ u)\varphi \mathrm{d}x = -\int_G u \nabla \varphi \mathrm{d}x \Big\} \end{aligned}$$

beschrieben. Schließlich wird die verbleibende Randbedingung (2.8) mit Hilfe des Raumes

$$W^1_{\Gamma_1}(G) := \left\{ u \in H^1(G) : \forall \varphi \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G) : \int_G (\nabla u)\varphi \mathrm{d}x = -\int_G u \mathrm{div}\ \varphi \mathrm{d}x \right\}$$

verallgemeinert. Ein rein technisches Hilfsmittel ist nun, dass der Raum

$$H^1_{\Gamma_1}(G) := \overline{\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$$

mit dem vorigen übereinstimmt. Wir zeigen im Folgenden einige Zusammenhänge und Eigenschaften der obigen Räume auf. Insbesondere ergibt sich, dass sämtliche der genannten Räume Hilberträume bezüglich entsprechender Skalarprodukte sind. Weiter lassen Resultate von Racke in [6] bereits vermuten, dass die Gleichheit $W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) = \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ erfüllt ist. Dies wird sich auch tatsächlich als richtig erweisen.

Lemma 2.1 *$W^1_{\mathcal{D}}(G)$ ist bezüglich der Abbildungsvorschrift $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} := \langle \cdot, \cdot \rangle + \langle \mathcal{D}\cdot, \mathcal{D}\cdot \rangle$ ein Hilbertraum.*

Beweis: Offensichtlich ist, dass es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ um ein Skalarprodukt auf $W^1_{\mathcal{D}}(G)$ handelt. Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit $\| \cdot \|_{\mathcal{D}}$. Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^1_{\mathcal{D}}(G)$. Nach Konstruktion des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ ist sofort ersichtlich, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in

$\left(L^2(G)\right)^3$ und $(\mathcal{D}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\left(L^2(G)\right)^6$ ist. Wegen der Vollständigkeit von $L^2(G)$ existieren also ein $u \in \left(L^2(G)\right)^3$ und ein $v \in \left(L^2(G)\right)^6$ mit $\|u_n - u\| \to 0$ und $\|\mathcal{D}u_n - v\| \to 0$ für $n \to \infty$. Sei nun $\varphi \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^6$ beliebig gewählt. Wir erhalten:

$$\int_G u\mathcal{D}'\varphi \mathrm{d}x = \left\langle u, \mathcal{D}'\overline{\varphi}\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle u_n, \mathcal{D}'\overline{\varphi}\right\rangle = -\lim_{n\to\infty} \left\langle \mathcal{D}u_n, \overline{\varphi}\right\rangle = -\lim_{n\to\infty} \left\langle v, \overline{\varphi}\right\rangle = -\int_G v\varphi \mathrm{d}x.$$

Letzteres bedeutet aber, dass $\mathcal{D}u = v \in \left(L^2(G)\right)^6$ gilt. Insgesamt ist also $u \in W^1_{\mathcal{D}}(G)$ und es gilt $\|u - u_n\|_{\mathcal{D}} \to 0$ für $n \to \infty$ und das war zu zeigen. □

Lemma 2.2 *$W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$ ist bezüglich der Abbildungsvorschrift $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}'} := \langle \cdot, \cdot \rangle + \langle \mathcal{D}' \cdot, \mathcal{D}' \cdot \rangle$ ein Hilbertraum.*

Beweis: Klar ist, dass es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}'}$ um ein Skalarprodukt auf $W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$ handelt. Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{\mathcal{D}'}$. Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$. Offenbar ist dann $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $\left(L^2(G)\right)^6$ und $(\mathcal{D}'u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\left(L^2(G)\right)^3$. Da $\left(L^2(G)\right)^6$ bzw. $\left(L^2(G)\right)^3$ jeweils vollständig sind, existiert ein $u \in \left(L^2(G)\right)^6$ bzw. ein $v \in \left(L^2(G)\right)^3$ mit $\|u_n - u\| \to 0$ bzw. $\|\mathcal{D}'u_n - v\| \to 0$ für $n \to \infty$. Für eine beliebige Testfunktion $\varphi \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^3$ gilt nun

$$\langle u, \mathcal{D}\varphi \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} u_n, \mathcal{D}\varphi \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \mathcal{D}\varphi \rangle = -\lim_{n\to\infty} \left\langle \mathcal{D}'u_n, \varphi \right\rangle = -\langle v, \varphi \rangle .$$

Das bedeutet aber $\mathcal{D}'u = v \in \left(L^2(G)\right)^3$. Ferner gilt für $\varphi \in \left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)\right)^3$:

$$\int_G \left(\mathcal{D}'u\right) \varphi \mathrm{d}x = \left\langle \mathcal{D}'u, \overline{\varphi}\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \mathcal{D}'u_n, \overline{\varphi}\right\rangle = -\lim_{n\to\infty} \left\langle u_n, \mathcal{D}\overline{\varphi}\right\rangle = -\left\langle u, \mathcal{D}\overline{\varphi}\right\rangle = \int_G u\mathcal{D}\varphi \mathrm{d}x$$

und somit ist $u \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$. Natürlich gilt nach Definition des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}'}$ und der Beschaffenheit von u auch $\|u_n - u\|_{\mathcal{D}'} \to 0$ für $n \to \infty$ und damit ist alles gezeigt. □

Lemma 2.3 *$W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$ ist bezüglich der Abbildungsvorschrift $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{div}} := \langle \cdot, \cdot \rangle + \langle \mathrm{div}\, \cdot, \mathrm{div}\, \cdot \rangle$ ein Hilbertraum.*

Beweis: Es ist wieder offensichtlich, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{div}}$ ein Skalarprodukt ist. Die zugehörige Norm wird mit $\|\cdot\|_{\mathrm{div}}$ bezeichnet. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$. Offenbar ist dann $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\left(L^2(G)\right)^3$ und $(\mathrm{div}\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^2(G)$. Es existieren demnach ein $u \in \left(L^2(G)\right)^3$ bzw. ein $v \in L^2(G)$ mit $\|u_n - u\| \to 0$ bzw. $\|\mathrm{div}\, u_n - v\| \to 0$ für $n \to \infty$. Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$ beliebig gewählt, so erhalten wir

$$\langle u, \nabla\varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \nabla\varphi \rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{div}\, u_n, \varphi \rangle = -\langle v, \varphi \rangle$$

und also ist $\mathrm{div}\, u = v \in L^2(G)$. Ferner gilt für alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)$:

$$\int_G (\mathrm{div}\, u)\, \varphi \mathrm{d}x = \langle \mathrm{div}\, u, \overline{\varphi} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathrm{div}\, u_n, \overline{\varphi} \rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \nabla\overline{\varphi} \rangle = -\int_G u\nabla\varphi \mathrm{d}x$$

und somit ist $u \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$. Natürlich gilt auch $\|u - u_n\|_{\mathrm{div}} \to 0$ für $n \to \infty$ und damit ist alles gezeigt. □

Lemma 2.4 *(i)* *$W^1_{\Gamma_1}(G)$ ist bezüglich des Standard H^1-Skalarprodukts ein Hilbertraum.*

(ii) *Es gilt die Gleichheit $W^1_{\Gamma_1}(G) = H^1_{\Gamma_1}(G)$.*

(iii) *Erfüllt das Gebiet G die strikte Kegeleigenschaft und ist $\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$ versehen, so ist $\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^1_{\mathcal{D}}(G)$.*

Beweis:

(i) Zuerst beweisen wir, dass $W^1_{\Gamma_1}(G)$ ein Hilbertraum bezüglich des W^1-Skalarprodukts ist: Wir beweisen nur die Vollständigkeit: Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^1_{\Gamma_1}(G)$. Wegen $W^1_{\Gamma_1}(G) \subset W^1(G)$ existiert ein $u \in W^1(G)$ mit $\|u_n - u\|_{H^1} \to 0$ für $n \to \infty$. Für beliebiges $\varphi \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$ gilt nun aber

$$\begin{aligned}\int_G (\nabla u)\varphi \mathrm{d}x &= \langle \nabla u, \overline{\varphi}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \nabla u_n, \overline{\varphi}\rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \mathrm{div}\ \overline{\varphi}\rangle \\ &= -\left\langle \lim_{n\to\infty} u_n, \mathrm{div}\ \overline{\varphi}\right\rangle = -\langle u, \mathrm{div}\ \overline{\varphi}\rangle = -\int_G u \mathrm{div}\ \varphi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Da $\varphi \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$ beliebig gewählt war, folgt $u \in W^1_{\Gamma_1}(G)$.

(ii) Den Beweis dieser Aussage gliedern wir in mehrere Schritte:

(a) Wir beweisen die Inklusion $H^1_{\Gamma_1}(G) \subset W^1_{\Gamma_1}(G)$: Hierzu sei $u \in H^1_{\Gamma_1}(G)$ beliebig gewählt. Nach Definition von $H^1_{\Gamma_1}(G)$ finden wir eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)$ mit $\|u_n - u\|_{H^1} \to 0$ für $n \to \infty$. Es folgt für beliebiges $\varphi \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$:

$$\begin{aligned}\int_G (\nabla u)\varphi \mathrm{d}x &= \langle \nabla u, \overline{\varphi}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \nabla u_n, \overline{\varphi}\rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \mathrm{div}\ \overline{\varphi}\rangle \\ &= -\langle u, \mathrm{div}\ \overline{\varphi}\rangle = -\int_G u \mathrm{div}\ \varphi \mathrm{d}x\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

(b) Schließlich beweisen wir $H^1_{\Gamma_1}(G) = W^1_{\Gamma_1}(G)$: Der Projektionssatz liefert uns (denn $H^1_{\Gamma_1}(G) \subset W^1_{\Gamma_1}(G)$ ist abgeschlossen), dass die folgende Identität richtig ist:

$$H^1_{\Gamma_1}(G) \oplus \left(H^1_{\Gamma_1}(G)\right)^\perp = W^1_{\Gamma_1}(G).$$

Wir wählen $u \in \left(H^1_{\Gamma_1}(G)\right)^\perp$. Insbesondere folgt für alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(G)$:

$$\langle u, \varphi\rangle + \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = 0 \ \text{ bzw. } \ \langle u, \varphi\rangle = -\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle\,,$$

das heißt es existiert $\mathrm{div}\ (\nabla u) = u \in L^2(G)$. Es gilt also für alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)$ die Gleichheit $\langle \mathrm{div}\ \nabla u, \varphi\rangle + \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = 0$ und somit ist $\nabla u \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$. Wir erhalten (man beachte, dass $u \in W^1_{\Gamma_1}(G)$ gilt)

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \langle \mathrm{div}\ \nabla u, u\rangle = -\langle \nabla u, \nabla u\rangle = -\|\nabla u\|^2,$$

also $\|u\| = 0$ und damit $u = 0$. Letzteres bedeutet aber, dass $\left(H^1_{\Gamma_1}(G)\right)^{\perp} = \{0\}$ gilt und somit ist die Behauptung bewiesen.

(iii) Zunächst erkennen wir, dass

$$\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 \subset W^1_{\mathcal{D}}(G)$$

gilt. Wir beweisen die Abgeschlossenheit. Sei also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ mit der Eigenschaft, dass ein $u \in W^1_{\mathcal{D}}(G)$ mit $\|u_n - u\|_{\mathcal{D}} \to 0$ für $n \to \infty$ existiert. Damit ist also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ eine Cauchyfolge. Wegen Satz 1.4 und der daraus resultierenden Äquivalenz von $\|\cdot\|_{(H^1(G))^3}$ und der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ auf $\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\left(\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3, \|\cdot\|_{(H^1(G))^3}\right)$. Hierbei handelt es sich aber nach Teil (i) um einen Hilbertraum. Demnach existiert also ein $v \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ mit $\|u_n - v\|_{(H^1(G))^3} \to 0$ für $n \to \infty$. Wiederum wegen der Äquivalenz der besagten Normen erhalten wir $\|u_n - v\|_{\mathcal{D}} \to 0$ für $n \to \infty$. Letzteres liefert aber sofort $u = v$.

□

Korollar 2.5 *Es gelten die folgenden Identitäten:*

$$W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G) = \Big\{u \in \left(L^2(G)\right)^6 : \mathcal{D}'u \in \left(L^2(G)\right)^3, \forall\varphi \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 :$$
$$\int_G (\mathcal{D}'u)\varphi \mathrm{d}x = -\int_G u\mathcal{D}\varphi \mathrm{d}x\Big\},$$
$$W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G) = \Big\{u \in \left(L^2(G)\right)^3 : \mathrm{div}\, u \in L^2(G), \forall\varphi \in W^1_{\Gamma_1}(G) : \int_G (\mathrm{div}\, u)\varphi \mathrm{d}x = -\int_G u\nabla\varphi \mathrm{d}x\Big\}.$$

Beweis:

(i) Wir setzen

$$Z := \Big\{u \in \left(L^2(G)\right)^6 : \mathcal{D}'u \in \left(L^2(G)\right)^3, \forall\varphi \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 : \int_G \mathcal{D}'u\varphi \mathrm{d}x = -\int_G u\mathcal{D}\varphi \mathrm{d}x\Big\}$$

und beweisen, dass $Z = W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$ gilt. Die Inklusion „$\subset$" ist dabei offensichtlich. Um die verbleibende Inklusion zu zeigen, wählen wir ein $u \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$ beliebig. Ist dann $\varphi \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$, so existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)\right)^3$ mit $\|\varphi - \varphi_n\|_{H^1} \to 0$ für $n \to \infty$. Wir erhalten:

$$\int_G (\mathcal{D}'u)\varphi \mathrm{d}x = \left\langle \mathcal{D}'u, \overline{\varphi}\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \mathcal{D}'u, \overline{\varphi_n}\right\rangle = -\lim_{n\to\infty} \left\langle u, \mathcal{D}\overline{\varphi_n}\right\rangle = -\left\langle u, \mathcal{D}\overline{\varphi}\right\rangle = -\int_G u\mathcal{D}\varphi \mathrm{d}x.$$

Letzteres bedeutet $u \in Z$ und die Gleichheit ist gezeigt.

(ii) Wir setzen

$$Z := \left\{ u \in \left(L^2(G)\right)^3 : \text{div } u \in L^2(G), \forall \varphi \in W^1_{\Gamma_1}(G) : \int_G \varphi \text{div } u \mathrm{d}x = -\int_G \nabla \varphi u \mathrm{d}x \right\}$$

und beweisen, dass $Z = W^1_{\Gamma_2,\text{div}}(G)$ gilt. Die Inklusion „$\subset$" ist wieder offensichtlich. Um die verbleibende Inklusion zu zeigen, wählen wir ein $u \in W^1_{\Gamma_2,\text{div}}(G)$ beliebig. Ist dann $\varphi \in W^1_{\Gamma_1}(G)$, so existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)$ mit $\|\varphi - \varphi_n\|_{H^1} \to 0$ für $n \to \infty$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\int_G (\text{div } u)\varphi \mathrm{d}x &= \langle \text{div } u, \overline{\varphi} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \text{div } u, \overline{\varphi_n} \rangle \\ &= -\lim_{n\to\infty} \langle u, \nabla \overline{\varphi_n} \rangle = -\langle u, \nabla \overline{\varphi} \rangle = -\int_G u \nabla \varphi \mathrm{d}x\end{aligned}$$

und damit ist alles gezeigt. □

Lemma 2.6 *$W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$ ist ein Hilbertraum bezüglich der Abbildungsvorschrift $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} := \langle \cdot, \cdot \rangle + \langle \mathcal{D}\cdot, \mathcal{D}\cdot \rangle$. Erfüllt G die strikte Kegeleigenschaft, so gilt $W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) = \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$.*

Beweis:

(i) Wir beweisen zuerst, dass es sich bei $W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$ um einen Hilbertraum handelt. Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$. Natürlich ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $W^1_{\mathcal{D}}(G)$, was wiederum die Existenz eines $u \in W^1_{\mathcal{D}}(G)$ sichert, für welches $\|u_n - u\|_{\mathcal{D}} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Zu beweisen ist also nur $u \in W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$. Es gilt für beliebiges $\varphi \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$:

$$\int_G u\mathcal{D}'\varphi \mathrm{d}x = \left\langle u, \mathcal{D}'\overline{\varphi} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle u_n, \mathcal{D}'\overline{\varphi} \right\rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{D}u_n, \overline{\varphi} \rangle = -\langle \mathcal{D}u, \overline{\varphi} \rangle = -\int_G \mathcal{D}u\varphi \mathrm{d}x.$$

Damit ist aber $u \in W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$.

(ii) Nun zeigen wir die Richtigkeit der Inklusion

$$\left\{ u \in \left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G)\right)^3, \|u\|_{(H^1(G))^3} < \infty \right\} \subset W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) :$$

Ist $u \in \left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ mit $\|u\|_{(H^1(G))^3} < \infty$ beliebig gewählt, so existiert offensichtlich der verallgemeinerte Gradient $\mathcal{D}u \in \left(L^2(G)\right)^6$. Ist nun weiter $\varphi \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$, so gilt $\int_G u\mathcal{D}'\varphi \mathrm{d}x = -\int_G \varphi \mathcal{D}u \mathrm{d}x$ nach Definition von $W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$. Dies zeigt aber (ii).

(iii) Mit Hilfe von (ii) zeigen wir nun die Inklusion $\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 \subset W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$. Zunächst erkennen wir, dass wegen den jeweiligen Definitionen der Räume sowie Lemma 2.4 die Inklusionen

$$\left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)\right)^3 \subset \left(H^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 = \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 \subset \left(H^1(G)\right)^3 \subset W^1_{\mathcal{D}}(G)$$

sowie

$$\left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G)\cap H^1(G)\right)^3 \subset W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) \subset W^1_{\mathcal{D}}(G)$$

richtig sind. Wegen der Abgeschlossenheit von $W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$ und $\left(H^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ in $W^1_{\mathcal{D}}(G)$ erhalten wir weiter:

$$\overline{\left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G)\cap H^1(G)\right)^3}^{\|\cdot\|_{\mathcal{D}}} \subset \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 \subset W^1_{\mathcal{D}}(G)$$

sowie

$$\overline{\left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G)\cap H^1(G)\right)^3}^{\|\cdot\|_{\mathcal{D}}} \subset W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) \subset W^1_{\mathcal{D}}(G).$$

Schließlich ergibt sich wegen der Äquivalenz der beiden Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ und $\|\cdot\|_{(H^1(G))^3}$ auf $\left(H^1(G)\right)^3$ die Gleichheit:

$$\overline{\left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G)\cap H^1(G)\right)^3}^{\|\cdot\|_{\mathcal{D}}} = \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3,$$

welche aber die Behauptung beweist.

(*iv*) Nach dem Beweis von (*iii*) ist klar, dass $\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 \subset W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$ abgeschlossen ist.

(*v*) Wir beweisen nun $\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 = W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$: Nach dem Projektionssatz gilt

$$W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) = \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3 \oplus_{\mathcal{D}} \left(\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3\right)^\perp.$$

Wir wählen $V \in \left(\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3\right)^\perp$ beliebig. Dann gilt für alle $\Phi \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$

$$\langle \mathcal{D}V, \mathcal{D}\Phi\rangle = -\langle V, \Phi\rangle.$$

Wegen $\left(\mathcal{C}^\infty_0(G)\right)^3 \subset \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ existiert also $\mathcal{D}'\mathcal{D}V = V \in \left(L^2(G)\right)^3$ im schwachen Sinn. Damit ist $\mathcal{D}V \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$. Wir erhalten

$$\|V\|^2 = \left\langle V, \mathcal{D}'\mathcal{D}V\right\rangle = -\langle \mathcal{D}V, \mathcal{D}V\rangle$$

und somit $V = 0$.

$\square$

2.3 Wohlgestelltheit

Gegenstand dieses Abschnitts ist eine Transformation der Differentialgleichungen (2.1) – (2.3) mit den Anfangsbedingungen (2.4) und den Randbedingungen (2.5) – (2.8) in ein System erster Ordnung von der Form

$$\mathcal{V}_t + \mathcal{A}(t)\mathcal{V} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0. \tag{2.16}$$

Der Vektor $\mathcal{V}$ wird dabei so gewählt, dass sämtliche in den Randbedingungen vorkommenden Koeffizienten in einer solchen Weise darin auftreten, dass es uns ermöglicht wird, einen Definitionsbereich des Operators $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ zu finden, welcher die Randbedingungen (2.5) – (2.8) verallgemeinert, nicht aber von der Zeit t abhängt. Dies wiederum erlaubt es uns später auf die Theorie von Kato zurückzugreifen, welche uns dann die Existenz einer eindeutigen Lösung sichert. Zunächst aber geben wir an, welche Regularitätsforderungen an das Gebiet Ω beziehungsweise an unsere Koeffizienten hinreichend für unsere Ergebnisse sind.

2.3.1 Voraussetzungen

Das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ sei beschränkt und erfülle die strikte Kegeleigenschaft. Die reelle Konstante $\tau_0 > 0$ sei positiv. Die in (2.1) – (2.3) auftretenden Koeffizienten mögen die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

(i) Es gelte $\mathcal{S} \in \mathcal{C}^2\left([0,\infty), (L^\infty(\Omega))^{6\times 6}\right)$. Ferner sei $\mathcal{S}(t)$ für jedes $t \in [0,\infty)$ symmetrisch und invertierbar. Die zugehörige Inverse sei mit $\mathcal{S}(t)^{-1}$ bezeichnet. Die dadurch gegebene Funktion $\mathcal{S}^{-1}$ möge $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), (L^\infty(\Omega))^{6\times 6}\right)$ erfüllen. Zudem existiere eine Konstante $C_\mathcal{S} > 0$ so dass für alle $V \in \left(L^2(\Omega)\right)^6$ und alle $t \in [0,\infty)$

$$C_\mathcal{S}\|V\|^2 \le \left\langle V, S(t)^{-1}V\right\rangle$$

gilt.

(ii) Es gelte $K \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), (L^\infty(\Omega))^{3\times 3}\right)$. Ferner sei $K(t)$ für jedes $t \in [0,\infty)$ symmetrisch und invertierbar. Die zugehörige Inverse sei mit $K(t)^{-1}$ bezeichnet. Die dadurch gegebene Funktion K^{-1} möge $K^{-1} \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), (L^\infty(\Omega))^{3\times 3}\right)$ erfüllen. Zudem existiere eine Konstante $C_K > 0$ so dass für alle $V \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ und alle $t \in [0,\infty)$

$$C_K\|V\|^2 \le \left\langle V, K(t)^{-1}V\right\rangle$$

gilt.

(iii) Es gelte $\rho \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), (L^\infty(\Omega))^{3\times 3}\right)$. Ferner sei $\rho(t)$ für jedes $t \in [0,\infty)$ symmetrisch und invertierbar. Die zugehörige Inverse sei mit $\rho(t)^{-1}$ bezeichnet. Die dadurch gegebene Funktion ρ^{-1} möge $\rho^{-1} \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), (L^\infty(\Omega))^{3\times 3}\right)$ erfüllen. Zudem existiere eine Konstante $C_\rho > 0$ so dass für alle $V \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ und alle $t \in [0,\infty)$

$$C_\rho\|V\|^2 \le \langle V, \rho(t)V\rangle$$

gilt.

(iv) Es gelte

$$\begin{aligned}\beta &\in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), H^3(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^2\left([0,\infty), L^\infty(\Omega)\right),\\ \gamma &\in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), H^3(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^2\left([0,\infty), L^\infty(\Omega)\right),\\ \delta &\in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), H^3(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^2\left([0,\infty), L^\infty(\Omega)\right).\end{aligned}$$

Ferner existieren von $t \in [0,\infty)$ unabhängige Konstanten C^β, C^γ und $C^\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned}C^\beta &< \beta(t),\\ C^\gamma &< \gamma(t),\\ C^\delta &< \delta(t)\end{aligned}$$

fast überall gilt.

2.3.2 Transformation in ein System erster Ordnung

Wir geben nun einen Differentialoperator $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ an, welcher (zunächst formal), das Problem (2.1) – (2.4) in die Form (2.16) überführt. Hierfür definieren wir eine Gewichtsmatrix $\mathcal{Q}$, eine Störmatrix $\mathcal{N}_1$ sowie einen passenden Differentialoperator $\mathcal{N}_0$ durch:

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} \beta\mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\beta}\rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}\end{pmatrix}, \ \mathcal{N}_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D} & 0 & 0\\ -\mathcal{D}' & 0 & \mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0\\ 0 & (\Gamma'\mathcal{D}) & 0 & (\Gamma'\mathcal{D})\\ 0 & 0 & \mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_1 := \begin{pmatrix} -\beta\mathcal{S}^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t\beta\mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 & 0\\ \mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta & 0 & \frac{1}{\beta}\mathcal{D}'(\beta\Gamma) & 0\\ 0 & 0 & 0 & (-\Gamma'\mathcal{D})\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta}{\gamma}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau_0\delta^2}{\gamma^2}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t K^{-1}\end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Für f_1, f_2, f_3 und hinreichend reguläre Funktionen U, θ und q (später gehen wir genauer auf die Regularität ein), welche die Differentialgleichungen (2.1) – (2.3) sowie die Anfangsbedingungen (2.4) erfüllen, definieren wir

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 0\\ \rho^{-1}f_1\\ f_2\\ \frac{\gamma}{\tau_0\delta}f_3\end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U\\ U_t\\ \theta\\ \frac{\gamma}{\delta}q\end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad \mathcal{V}^0 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta(0,\cdot)}\mathcal{S}(0,\cdot)\mathcal{D}U_0\\ U_1\\ \theta_0\\ \frac{\gamma(0,\cdot)}{\delta(0,\cdot)}q_0\end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Bevor wir unser erstes Resultat formulieren, stellen wir eine spezielle Produktregel für den verallgemeinerten Gradienten $\mathcal{D}$ bzw. dessen Transponierte $\mathcal{D}'$ zur Verfügung. Diese kann durch direktes Nachrechnen verifiziert werden. Darauf sei aber verzichtet.

Lemma 2.7 *Es sei* $V = (V_1, ..., V_6)' \in L^2(G)^6$ *mit* $\mathcal{D}'V \in \left(L^2(G)\right)^3$ *und* $W = (W_1, W_2, W_3)' \in \left(L^2(G)\right)^3$ *mit* $\mathcal{D}W \in \left(L^2(G)\right)^6$*. Weiter seien* $\beta \in H^3(G)$, $\theta \in H^1(G)$ *und* $\Gamma := (1,1,1,0,0,0)'$*. Dann gelten:*

(*i*) $\mathcal{D}'(\beta V) = \mathcal{D}'(\beta \operatorname{Id})V + \beta \mathcal{D}'V$,

(*ii*) $\mathcal{D}'(\Gamma\beta\theta) = \beta\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \theta\mathcal{D}'(\Gamma\beta)$,

(*iii*) $\mathcal{D}(\beta W) = \mathcal{D}(\beta \operatorname{Id})W + \beta\mathcal{D}W$.

Satz 2.8 *Die Funktionen*

$$\begin{aligned}
U &\in \mathcal{C}^2\left([0,T], \left(L^2(G)\right)^3\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T], W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)\right),\\
\theta &\in \mathcal{C}^1\left([0,T], L^2(G)\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0,T], W^1_{\Gamma_1}(G)\right),\\
q &\in \mathcal{C}^1\left([0,T], \left(L^2(G)\right)^3\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0,T], W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)\right)
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U - \Gamma\theta \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}}(G)$ *seien so gewählt, dass* (U, θ, q) *eine Lösung zu* (2.1)- (2.4) *ist. Die Vektoren* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{V}^0$ *seien wie in* (2.18) *definiert. Dann erfüllt* $\mathcal{V}$ *das Anfangswertproblem*

$$\mathcal{V}_t + \mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_1)\mathcal{V} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{V}(0,\cdot) = \mathcal{V}^0(\cdot). \tag{2.19}$$

Beweis: Der Beweis wird durch elementares Nachrechnen erbracht. Zunächst ergibt sich durch Ausmultiplizieren der Matrizen bzw. des Differentialoperators:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{-1}\cdot\mathcal{N}_0\cdot\mathcal{V} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D} & 0 & 0\\ -\beta\rho^{-1}\mathcal{D}' & 0 & \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0\\ 0 & \delta(\Gamma'\mathcal{D}) & 0 & \delta(\Gamma'\mathcal{D})\\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & \frac{1}{\tau_0}\operatorname{Id}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U\\ U_t\\ \theta\\ \frac{\gamma}{\delta}q\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U_t\\ -\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U\right) + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta)\\ \delta(\Gamma'\mathcal{D})U_t + \delta(\Gamma'\mathcal{D})\left(\frac{\gamma}{\delta}q\right)\\ \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}q\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{2.20}$$

Wir berechnen weiter:

$$\mathcal{Q}^{-1}\cdot\mathcal{N}_1\cdot\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t\beta\mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 & 0\\ \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\operatorname{Id}\right)\beta & 0 & \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta\left(-\Gamma'\mathcal{D}\right)\left(\frac{\gamma}{\delta}\operatorname{Id}\right)\frac{\delta}{\gamma}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t\operatorname{Id}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U\\ U_t\\ \theta\\ \frac{\gamma}{\delta}q\end{pmatrix} \tag{2.21}$$

$$= \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t\mathcal{D}U\\ \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\operatorname{Id}\right)\mathcal{S}\mathcal{D}U + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)\theta\\ \delta\left(-\Gamma'\mathcal{D}\right)\left(\frac{\gamma}{\delta}\operatorname{Id}\right)q\\ -\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t q\end{pmatrix}.$$

Schließlich ergibt sich durch komponentenweises Differenzieren:

$$\mathcal{V}_t = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \mathcal{D}U + \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U_t \\ U_{tt} \\ \theta_t \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t q + \frac{\gamma}{\delta} q_t \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_t + \mathcal{Q}^{-1}\left(\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_1\right)\mathcal{V} = \mathcal{V}_t + \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_0\mathcal{V} + \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_1\mathcal{V} \\ = &\begin{pmatrix} 0 \\ U_{tt} - \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U\right) + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\mathcal{S}\mathcal{D}U + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)\theta \\ \theta_t + \delta(\Gamma'\mathcal{D})U_t + \delta(\Gamma'\mathcal{D})\left(\frac{\gamma}{\delta}q\right) + \delta\left(-\Gamma'\mathcal{D}\right)\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)q \\ \frac{\gamma}{\delta}q_t + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.7 ergibt sich

$$\beta\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U\right) = \beta\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U$$

sowie

$$\beta\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \mathcal{D}'(\beta\Gamma)\theta = \mathcal{D}'(\Gamma\beta\theta)$$

und

$$\delta\left(\Gamma'\mathcal{D}\right)\left(\frac{\gamma}{\delta}q\right) = \delta\left(\Gamma'\mathcal{D}\right)\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)q + \gamma\left(\Gamma'\mathcal{D}\right)q.$$

Damit erhalten wir

$$\mathcal{V}_t + \mathcal{Q}^{-1}\left(\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{tt} - \rho^{-1}\mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma\theta) \\ \theta_t + \delta(\Gamma'\mathcal{D})U_t + \gamma(\Gamma'\mathcal{D})q \\ \frac{\gamma}{\delta}q_t + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^{-1}f_1 \\ f_2 \\ \frac{\gamma}{\tau_0\delta}f_3 \end{pmatrix}$$

und das war zu zeigen. □

Natürlich ist ebenfalls von Interesse, ob einer Lösung $\mathcal{V}$ von (2.19) eine Lösung (U, θ, q) zu (2.1) - (2.8) zugeordnet werden kann. Nähere Informationen dazu gibt das folgende Lemma. Zunächst definieren wir jedoch

$$\begin{aligned} D := \Big\{ &(V^1, V^2, V^3, V^4)' \in \left(L^2(G)\right)^6 \times \left(L^2(G)\right)^3 \times L^2(G) \times \left(L^2(G)\right)^3 : \\ &V^1 - \Gamma V^3 \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G), V^2 \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3, V^3 \in W^1_{\Gamma_1}(G), V^4 \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G) \Big\}. \end{aligned}$$

Lemma 2.9 *Ist $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^0([0,T], D) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2(G))$ eine Lösung zu (2.19) und gilt $u_0 \in \mathcal{W}^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$, so haben die Funktionen*

$$\begin{aligned} U(t) &:= U_0 + \int_0^t V_2(s)\mathrm{d}s, \\ \theta(t) &:= V_3(t), \\ q &:= \frac{\delta}{\gamma}V_4 \end{aligned}$$

die folgenden Regularitäten

$$U \in \mathcal{C}^2\left([0,T],\left(L^2(G)\right)^3\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T],W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)\right),$$
$$\theta \in \mathcal{C}^1\left([0,T],L^2(G)\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0,T],W^1_{\Gamma_1}(G)\right),$$
$$q \in \mathcal{C}^1\left([0,T],\left(L^2(G)\right)^3\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0,T],W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)\right)$$

mit $\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U - \Gamma\theta \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$. *Ferner bilden* U, θ, *und* q *eine Lösung zu* (2.1) - (2.8).

Beweis: Wir schreiben den Vektor $\mathcal{V}$ in der Form $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)'$. Zunächst erhalten wir dann

$$V_2 \in \mathcal{C}^0\left([0,T],\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T],L^2(G)\right),$$
$$V_3 \in \mathcal{C}^0\left([0,T],W^1_{\Gamma_1}(G)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T],L^2(G)\right),$$
$$V_4 \in \mathcal{C}^0\left([0,T],W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T],L^2(G)\right).$$

Ferner ergibt sich: $V_1 - \Gamma V_3 \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$ für jedes $t \in [0,T]$. Ersichtlich ist also bereits, dass θ und q die gewünschte Regularität haben. Betrachten wir nun U, so ist ersichtlich, dass

$$U \in \mathcal{C}^1\left([0,T],\left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3\right)$$

also insbesondere $U \in \mathcal{C}^1(([0,T],L^2(G))$ gilt. Hiermit folgern wir aber unter Verwendung der Regularität von V_2, dass

$$U \in \mathcal{C}^2\left([0,T],L^2(G)\right)$$

gilt. Wir müssen nun noch zeigen, dass die so definierten Funktionen die gewünschten Differentialgleichungen erfüllen. Hierzu zunächst zwei Rechnungen:

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_0\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2 \\ -\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'V_1 + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma V_3) \\ \delta(\Gamma'\mathcal{D})V_2 + \delta(\Gamma'\mathcal{D})V_4 \\ \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \frac{1}{\tau_0}V_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_1\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta\mathcal{S}^{-1}V_1 \\ \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta V_1 + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)V_3 \\ \delta(-\Gamma'\mathcal{D})\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta}{\gamma}V_4 \\ -\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t V_4 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung dieser Rechnungen erhalten wir die Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

$$V_{1,t} - \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2 - \left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta\mathcal{S}^{-1}V_1 = 0, \tag{2.22}$$

$$V_{2,t} - \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'V_1 + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta V_1 + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)V_3 = \rho^{-1}f_1, \tag{2.23}$$

$$V_{3,t} + \delta(\Gamma'\mathcal{D})V_2 + \delta(\Gamma'\mathcal{D})V_4 + \delta(-\Gamma'\mathcal{D})\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta}{\gamma}V_4 = f_2, \tag{2.24}$$

$$V_{4,t} + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \frac{1}{\tau_0}V_4 - \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t V_4 = \frac{\gamma}{\tau_0\delta}f_3. \tag{2.25}$$

Wir untersuchen zuerst die Gleichung (2.22). Es gilt:

$$\begin{aligned}
& V_{1,t} - \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2 - \left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta\mathcal{S}^{-1}V_1 = 0 \\
\iff & V_{1,t} - \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2 + \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\left(\beta\mathcal{S}^{-1}\right)_t V_1 = 0 \\
\iff & \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\left(\beta\mathcal{S}^{-1}V_1\right)_t - \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2 = 0 \\
\iff & \left(\beta\mathcal{S}^{-1}V_1\right)_t = \mathcal{D}V_2
\end{aligned}$$

und wir erhalten durch Integration und unter Berücksichtigung der Gestalt von U die Identität:

$$V_1 = \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U. \tag{2.26}$$

Setzen wir nun die Gleichung (2.26) in die Gleichung (2.23) ein, so erhalten wir

$$U_{tt} - \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left[\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}U\right] + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\mathcal{S}\mathcal{D}U + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)\theta = \rho^{-1}f_1$$

und es ergibt sich daraus mit Lemma 2.7:

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\beta\Gamma\theta = f_1,$$

also die erste Differentialgleichung. Betrachten wir nun (2.24) und setzen entsprechend ein, so erhalten wir:

$$\theta_t + \delta\mathrm{div}\; U_t + \delta(\Gamma'\mathcal{D})\left[\frac{\gamma}{\delta}q\right] - \delta(\Gamma'\mathcal{D})\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)q = f_2,$$

was unter Verwendung von Lemma 2.7 die Differentialgleichung

$$\theta_t + \delta\mathrm{div}\; u_t + \gamma\mathrm{div}\; q = f_2,$$

liefert. Schließlich betrachten wir die Gleichung (2.25) und erhalten:

$$\left[\frac{\gamma}{\delta}q\right]_t + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}q - \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t q = \frac{\gamma}{\tau_0\delta}f_3,$$

was wiederum mit

$$\frac{\gamma}{\delta}q_t + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma\theta) + \frac{\gamma}{\tau_0\delta}q = \frac{\gamma}{\tau_0\delta}f_3,$$

bzw. mit

$$\tau_0 q_t + q + K\nabla\theta = f_3$$

gleichbedeutend ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

2.3.3 Existenz einer Lösung

Wir versehen nun

$$\mathcal{H} := \left(L^2(G)\right)^6 \times \left(L^2(G)\right)^3 \times L^2(G) \times \left(L^2(G)\right)^3 \tag{2.27}$$

für festes $t \in [0,T]$ mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$, welches für $U, V \in \mathcal{H}$ durch $\langle U, V \rangle_t := \langle U, \mathcal{Q}V \rangle_{(L^2(G))^{13}}$ definiert ist. Die diesem Skalarprodukt zugeordnete Norm sei mit $\|\cdot\|_t$ bezeichnet. Zu bemerken ist, dass die Norm $\|\cdot\|_t$ aufgrund der Voraussetzungen an die Koeffizienten zur Standard-L^2-Norm gleichmäßig äquivalent ist. Den so entstandenen Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_t$.

Wir wählen nun $t \in [0,T]$ beliebig aber fest und definieren damit die folgenden, von t abhängigen, Operatoren:

$$\mathcal{A}_0(t) \colon D(\mathcal{A}_0(t)) \subset \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathcal{H}_t \tag{2.28}$$

sei für $\mathcal{V} \in D(\mathcal{A}_0(t))$ durch

$$\mathcal{A}_0(t)\mathcal{V} := \mathcal{Q}^{-1}(t)\mathcal{N}_0(t)\mathcal{V} \tag{2.29}$$

definiert. Hierbei ist:

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_0(t)) := \Big\{ &(V^1, V^2, V^3, V^4)' \in \left(L^2(G)\right)^6 \times \left(L^2(G)\right)^3 \times L^2(G) \times \left(L^2(G)\right)^3 : \\ &V^1 - \Gamma V^3 \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G), V^2 \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3, V^3 \in W^1_{\Gamma_1}(G), V^4 \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G) \Big\}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Weiter definieren wir den Operator

$$\mathcal{A}_1(t) \colon \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathcal{H}_t$$

für $\mathcal{V} \in \mathcal{H}_t$ durch:

$$\mathcal{A}_1(t)\mathcal{V} := \mathcal{Q}^{-1}(t)\mathcal{N}_1(t)\mathcal{V}.$$

Mit Hilfe dieser Operatoren definieren wir nun den Operator

$$\mathcal{A}(t) \colon D(\mathcal{A}(t)) \subset \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathcal{H}_t \tag{2.31}$$

für

$$\mathcal{V} \in D(\mathcal{A}(t)) := D(\mathcal{A}_0(t)) \tag{2.32}$$

durch

$$\mathcal{A}(t)\mathcal{V} := \mathcal{A}_0(t)\mathcal{V} + \mathcal{A}_1(t)\mathcal{V}. \tag{2.33}$$

Zu beachten ist, dass $\mathcal{A}(t)$ zwar von t abhängig ist, nicht aber $D(\mathcal{A}(t))$. Wir beweisen nun, dass $\mathcal{A}_0(t)$ für fest gewähltes $t \in [0,T]$ dicht definiert und abgeschlossen ist. Ausserdem zeigen wir, dass der Operator $-\mathcal{A}_0(t)$ dissipativ ist. Schließlich beweisen wir, dass sich der Definitionsbereich des adjungierten Operators $\mathcal{A}_0^*(t)$ nicht von $D(\mathcal{A}(t)) = D(\mathcal{A}_0(t))$ unterscheidet. Zusammen erlauben uns diese Eigenschaften darauf zu schließen, dass $-\mathcal{A}_0(t)$ der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{H}_t$ ist. Wir verwenden im Folgenden für einen Vektor $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$ die naheliegende Schreibweise $\mathcal{V} = (V^1, V^2, V^3, V^4)'$, wobei die V^i für $i = 1, .., 4$ durch die Aufteilung (2.27) bestimmt sind. Ferner schreiben wir im Folgenden $D(\mathcal{A})$ für $D(\mathcal{A}(t))$.

Lemma 2.10 *Es sei $t \in [0, T]$ fest gewählt. Der in* (2.28), (2.29) *und* (2.30) *definierte Operator $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(t)$ ist abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{V}_n \to \mathcal{V} \in \mathcal{H}_t$ für $n \to \infty$ und $\mathcal{A}_0\mathcal{V}_n \longrightarrow \mathcal{W} \in \mathcal{H}_t$ für $n \to \infty$. Zu beweisen ist nun $\mathcal{V} \in D(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}_0\mathcal{V} = \mathcal{W}$. Aus $\mathcal{A}_0\mathcal{V}_n \to \mathcal{W}$ für $n \to \infty$ folgt insbesondere für alle $\Phi \in \mathcal{H}_t$:

$$\begin{aligned}
&\left\langle -\mathcal{D}V_n^2, \Phi^1 \right\rangle + \left\langle -\mathcal{D}'V_n^1 + \mathcal{D}'(\Gamma V_n^3), \Phi^2 \right\rangle + \left\langle (\Gamma'\mathcal{D})V_n^2 + (\Gamma'\mathcal{D})V_n^4, \Phi^3 \right\rangle && (2.34)\\
&\quad + \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma V_n^3) + \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_n^4, \Phi^4 \right\rangle \\
&= \langle \mathcal{N}_0\mathcal{V}_n, \Phi \rangle = \left\langle \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_0\mathcal{V}_n, \mathcal{Q}\Phi \right\rangle = \langle \mathcal{A}_0\mathcal{V}_n, \Phi \rangle_t \\
&\to \langle \mathcal{W}, \Phi \rangle_t = \left\langle W^1, \beta\mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \right\rangle + \left\langle W^2, \frac{1}{\beta}\rho\Phi^2 \right\rangle + \left\langle W^3, \frac{1}{\delta}\Phi^3 \right\rangle + \left\langle W^4, \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}\Phi^4 \right\rangle && (2.35)
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.
Wir gliedern den weiteren Beweis in mehrere Schritte:

(i) Wir wählen $\Phi^1 \in \left(L^2(G)\right)^6$ beliebig und setzen damit $\Phi := (\Phi^1, 0, 0, 0)'$. Aus (2.35) folgt dann

$$\left\langle -\mathcal{D}V_n^2, \Phi^1 \right\rangle \to \left\langle W^1, \beta\mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{2.36}$$

Ist speziell $\Phi^1 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^6$, so geht (2.36) in

$$\left\langle V_n^2, \mathcal{D}'\Phi^1 \right\rangle \to \left\langle W^1, \beta\mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Dies bedeutet aber $\left\langle V^2, \mathcal{D}'\Phi^1 \right\rangle = \left\langle W^1, \beta\mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \right\rangle$ und somit $\mathcal{D}V^2 \in \left(L^2(G)\right)^6$ mit $-\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V^2 = W^1$. Wir wählen nun $\Phi^1 \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$ beliebig. Dann gilt wegen Korollar 2.5 wiederum $\left\langle V^2, \mathcal{D}'\Phi^1 \right\rangle = -\left\langle \mathcal{D}V^2, \Phi^1 \right\rangle$ und also ist $V^2 \in W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$. Nach Lemma 2.6 ist dies aber gleichbedeutend mit $V^2 \in \left(W^1_{\Gamma_1}(G)\right)^3$ und das war zu zeigen.

(ii) Wir wählen $\Phi^3 \in L^2(G)$ und setzen damit $\Phi := (0, 0, \Phi^3, 0)'$. Aus (2.35) folgt dann

$$\left\langle (\Gamma'\mathcal{D})V_n^2 + (\Gamma'\mathcal{D})V_n^4, \Phi^3 \right\rangle \to \left\langle W^3, \frac{1}{\delta}\Phi^3 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{2.37}$$

Ist speziell $\Phi^3 \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$, so geht (2.37) in

$$\left\langle (\Gamma'\mathcal{D})V_n^2, \Phi^3 \right\rangle - \left\langle V_n^4, \mathcal{D}'\Gamma\Phi^3 \right\rangle \to \left\langle W^3, \frac{1}{\delta}\Phi^3 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Dies bedeutet aber $\left\langle (\Gamma'\mathcal{D})V^2, \Phi^3 \right\rangle - \left\langle V^4, \mathcal{D}'\Gamma\Phi^3 \right\rangle = \left\langle W^3, \frac{1}{\delta}\Phi^3 \right\rangle$. Damit existiert die Ableitung $(\Gamma'\mathcal{D})V^4$ im schwachen Sinn und es gilt $(\Gamma'\mathcal{D})V^4 = \frac{1}{\delta}W^3 - (\Gamma'\mathcal{D})V^2$. Wählen wir $\Phi^3 \in \mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)$, so folgt $V^4 \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$ mit der analogen Argumentation.

(*iii*) Wir wählen $\Phi^4 \in \left(L^2(G)\right)^3$ und setzen damit $\Phi := (0,0,0,\Phi^4)'$. Aus (2.35) folgt dann

$$\left\langle \mathcal{D}'(\Gamma V_n^3) + \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_n^4, \Phi^4 \right\rangle \to \left\langle W^4, \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}\Phi^4 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{2.38}$$

Ist speziell $\Phi^4 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^3$, so geht (2.38) in

$$-\left\langle V_n^3, \Gamma'\mathcal{D}\Phi^4 \right\rangle + \left\langle \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_n^4, \Phi^4 \right\rangle \to \left\langle W^4, \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}\Phi^4 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Dies bedeutet aber $-\left\langle V^3, \Gamma'\mathcal{D}\Phi^4 \right\rangle + \left\langle \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V^4, \Phi^4 \right\rangle = \left\langle W^4, \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}\Phi^4 \right\rangle$. Damit existiert $\mathcal{D}'\Gamma V^3$ im schwachen Sinn und es gilt $\mathcal{D}'\Gamma V^3 = \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}W^4 - \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V^4$. Wählen wir $\Phi^4 \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$, so folgt wiederum analog $V^3 \in W^1_{\Gamma_1}(G)$.

(*iv*) Wir wählen $\Phi^2 \in \left(L^2(G)\right)^3$ und setzen damit $\Phi := (0,\Phi^2,0,0)'$. Aus (2.35) folgt dann

$$\left\langle -\mathcal{D}'V_n^1 + \mathcal{D}'\Gamma V_n^3, \Phi^2 \right\rangle \to \left\langle W^2, \frac{1}{\beta}\rho\Phi^2 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{2.39}$$

Ist speziell $\Phi^2 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^3$, so geht (2.39) in

$$\left\langle V_n^1 - \Gamma V_n^3, \mathcal{D}\Phi^2 \right\rangle \to \left\langle W^2, \frac{1}{\beta}\rho\Phi^2 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Dies bedeutet aber $\left\langle V^1 - \Gamma V^3, \mathcal{D}\Phi^2 \right\rangle = \left\langle W^2, \frac{1}{\beta}\rho\Phi^2 \right\rangle$. Damit existiert $\mathcal{D}'(V^1 - \Gamma V^3)$ im schwachen Sinn und es gilt $\mathcal{D}'(V^1 - \Gamma V^3) = -\frac{1}{\beta}\rho W^2$. Wählen wir $\Phi^2 \in \left(\mathcal{C}^\infty_{\Gamma_1}(G) \cap H^1(G)\right)^3$, so folgt $V^1 - \Gamma V^3 \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}}(G)$

und damit ist alles gezeigt. □

Lemma 2.11 *Es sei $t \in [0,T]$ fest gewählt. Weiter sei $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(t)$ wie in (2.28), (2.29) und (2.30) definiert. Dann gilt $D(\mathcal{A}_0(t)) = D((\mathcal{A}_0^*(t))$ und*

$$(\mathcal{A}_0^*)(t) = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} & 0 & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & -\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0 \\ 0 & -(\Gamma'\mathcal{D}) & 0 & -(\Gamma'\mathcal{D}) \\ 0 & 0 & -\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & \frac{\delta}{\gamma}K^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Beweis: Der Operator $\mathcal{A}_0(t)$ ist für festes $t \in [0,T]$ dicht definiert. Wir betrachten ein beliebiges $W \in D(\mathcal{A}_0^*(t))$. Dann existiert ein $F \in \mathcal{H}_t$ so dass

$$\langle \mathcal{A}_0\Phi, W \rangle_t = \langle \Phi, F \rangle_t$$

für alle $\Phi \in D(\mathcal{A}_0(t))$ gilt. Letzteres ist wegen

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_0\Phi, W\rangle_t &= \langle -\mathcal{D}\Phi_2, W_1\rangle + \left\langle -\mathcal{D}'\Phi_1 + \mathcal{D}'(\Gamma\Phi_3), W_2\right\rangle \\ &\quad + \left\langle (\Gamma'\mathcal{D})\Phi_2 + (\Gamma'\mathcal{D})\Phi_4, W_3\right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma\Phi_3) + \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}\Phi_4, W_4\right\rangle\end{aligned}$$

und

$$\langle \Phi, F\rangle_t = \left\langle \Phi_1, \beta\mathcal{S}^{-1}F_1\right\rangle + \left\langle \Phi_2, \frac{1}{\beta}\rho F_2\right\rangle + \left\langle \Phi_3, \frac{1}{\delta}F_3\right\rangle + \left\langle \Phi_4, \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}F_4\right\rangle$$

gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}&\langle -\mathcal{D}\Phi_2, W_1\rangle + \left\langle -\mathcal{D}'\Phi_1 + \mathcal{D}'(\Gamma\Phi_3), W_2\right\rangle + \left\langle (\Gamma'\mathcal{D})\Phi_2 + (\Gamma'\mathcal{D})\Phi_4, W_3\right\rangle \qquad (2.41)\\ &+ \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma\Phi_3) + \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}\Phi_4, W_4\right\rangle \\ =& \left\langle \Phi_1, \beta\mathcal{S}^{-1}F_1\right\rangle + \left\langle \Phi_2, \frac{1}{\beta}\rho F_2\right\rangle + \left\langle \Phi_3, \frac{1}{\delta}F_3\right\rangle + \left\langle \Phi_4, \frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}F_4\right\rangle. \qquad (2.42)\end{aligned}$$

(i) Wir wählen $\Phi_1 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^6$ und setzen damit $\Phi := (\Phi_1, 0, 0, 0)$. Aus (2.42) folgt dann

$$-\left\langle \mathcal{D}'\Phi_1, W_2\right\rangle = \left\langle \Phi_1, \beta S^{-1}F_1\right\rangle.$$

Das bedeutet, dass $\mathcal{D}W_2 = \beta\mathcal{S}^{-1}F_1 \in (L^2(G))^6$ existiert. Wählen wir $\Phi_1 \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G)$ beliebig und setzen wiederum $\Phi := (\Phi_1, 0, 0, 0)$, so folgt wiederum aus (2.42), dass

$$-\left\langle \mathcal{D}'\Phi_1, W_2\right\rangle = \langle \Phi_1, \mathcal{D}W_2\rangle$$

gilt. Zusammenfassend haben wir also

$$W_2 \in W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G) \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}W_2$$

erhalten.

(ii) Wir wählen $\Phi_2 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^3$ und setzen damit $\Phi := (0, \Phi_2, 0, 0)$. Aus (2.42) folgt dann

$$\langle -\mathcal{D}\Phi_2, W_1\rangle + \left\langle \Gamma'\mathcal{D}\Phi_2, W_3\right\rangle = \left\langle \Phi_2, \frac{1}{\beta}\rho F_2\right\rangle.$$

Dies wiederum ist gleichbedeutend mit

$$-\langle \mathcal{D}\Phi_2, W_1 - \Gamma W_3\rangle = \left\langle \Phi_2, \frac{1}{\beta}\rho F_2\right\rangle.$$

Letzteres bedeutet aber, dass $\mathcal{D}'(W_1 - \Gamma W_3) = \frac{1}{\beta}\rho F_2 \in (L^2(G))^3$ existiert. Wählen wir $\Phi_2 \in W^1_{\Gamma_1,\mathcal{D}}(G)$ und setzen damit wiederum $\Phi := (0, \Phi_2, 0, 0)$, dann ergibt sich wiederum aus (2.42), dass

$$\langle \mathcal{D}\Phi_2, W_1 - \Gamma W_3\rangle = -\left\langle \Phi_2, \mathcal{D}'(W_1 - \Gamma W_3)\right\rangle$$

gilt. Zusammenfassend haben wir also

$$W_1 - \Gamma W_3 \in W^1_{\Gamma_2,\mathcal{D}'}(G) \quad \text{und} \quad F_2 = \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(W_1 - \Gamma W_3)$$

erhalten.

(iii) Wir wählen $\Phi_3 \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$ und setzen damit $\Phi := (0, 0, \Phi_3, 0)$. Aus (2.42) folgt dann

$$\left\langle (\mathcal{D}'\Gamma)\Phi_3, W_2 \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma\Phi_3), W_4 \right\rangle = \left\langle \Phi_3, \frac{1}{\delta} F_3 \right\rangle.$$

Obiges ist nun mit

$$\left\langle \mathcal{D}'\Gamma\Phi_3, W_4 \right\rangle = \left\langle \Phi_3, \Gamma'\mathcal{D}W_2 \right\rangle + \left\langle \Phi_3, \frac{1}{\delta} F_3 \right\rangle$$

äquivalent. Dies bedeutet aber, dass $(\Gamma'\mathcal{D})W_4 = -\Gamma'\mathcal{D}W_2 - \frac{1}{\delta}F_3 \in L^2(G)$ existiert. Wählen wir $\Phi_3 \in W^1_{\Gamma_1}(G)$ und setzen damit $\Phi := (\Gamma\Phi_3, 0, \Phi_3, 0)$, so ergibt sich aus (2.42):

$$\begin{aligned} & \left\langle -\mathcal{D}'\Gamma\Phi_3 + \mathcal{D}'\Gamma\Phi_3, W_2 \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'\Gamma\Phi_3, W_4 \right\rangle = \left\langle \Gamma\Phi_3, \beta\mathcal{S}^{-1}F_1 \right\rangle + \left\langle \Phi_3, \frac{1}{\delta} F_3 \right\rangle \\ \Longleftrightarrow \quad & \left\langle \mathcal{D}'\Gamma\Phi_3, W_4 \right\rangle = \left\langle \Phi_3, \Gamma'\mathcal{D}W_2 \right\rangle + \left\langle \Phi_3, \frac{1}{\delta} F_3 \right\rangle \\ \Longleftrightarrow \quad & \left\langle \mathcal{D}'\Gamma\Phi_3, W_4 \right\rangle = -\left\langle \Phi_3, (\Gamma'\mathcal{D})W_4 \right\rangle. \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir also

$$W_4 \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G) \quad \text{und} \quad F_3 = -\delta(\Gamma'\mathcal{D})W_4 - \delta\Gamma'\mathcal{D}W_2$$

erhalten.

(iv) Wir wählen $\Phi_4 \in (\mathcal{C}_0^\infty(G))^3$ und setzen damit $\Phi := (0, 0, 0, \Phi_4)$. Aus (2.42) folgt dann sofort

$$\left\langle \Gamma'\mathcal{D}\Phi_4, W_3 \right\rangle + \left\langle \frac{\delta}{\gamma} K^{-1}\Phi_4, W_4 \right\rangle = \left\langle \Phi_4, \frac{\tau_0\delta}{\gamma} K^{-1} F_4 \right\rangle.$$

Dies bedeutet aber, dass $\mathcal{D}'\Gamma W_3 = -\frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}F_4 + \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}W_4 \in (L^2(G))^3$ gilt. Wählen wir schließlich $\Phi_4 \in W^1_{\Gamma_2,\mathrm{div}}(G)$, so ergibt sich wiederum aus (2.42):

$$\left\langle \Gamma'\mathcal{D}\Phi_4, W_3 \right\rangle = -\left\langle \Phi_4, \mathcal{D}'\Gamma\Phi_4 \right\rangle.$$

Zusammenfassend haben wir also

$$W_3 \in W^1_{\Gamma_1}(G) \quad \text{und} \quad F_4 = -\frac{\gamma}{\tau_0\delta} K\mathcal{D}'\Gamma W_3 + \frac{1}{\tau_0} W_4$$

erhalten.

Die Schritte (i), (ii), (iii) und (iv) beweisen nun $D(\mathcal{A}_0^*(t)) \subset D(\mathcal{A}_0(t))$. Die verbleibende Inklusion ist aber leicht einzusehen. □

Lemma 2.12 *Es sei $t \in [0,T]$ fest und $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(t)$ wie in (2.28), (2.29) und (2.30) definiert. Dann ist $-\mathcal{A}_0$ dissipativ.*

Beweis: Es sei $V \in D(\mathcal{A}_0)$ beliebig gewählt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_0 V, V\rangle_t &= -\langle \mathcal{D}V_2, V_1\rangle + \left\langle -\mathcal{D}'V_1 + \mathcal{D}'(\Gamma V_3), V_2\right\rangle \\
&\quad + \left\langle (\Gamma'\mathcal{D})V_2 + (\Gamma'\mathcal{D})V_4, V_3\right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_4, V_4\right\rangle \\
&= -\langle \mathcal{D}V_2, V_1\rangle + \langle V_1 - \Gamma V_3, \mathcal{D}V_2\rangle + \left\langle \Gamma'\mathcal{D}V_2, V_3\right\rangle \\
&\quad + \left\langle (\Gamma'\mathcal{D})V_4, V_3\right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'\Gamma V_3, V_4\right\rangle + \left\langle \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_4, V_4\right\rangle \\
&= -\langle \mathcal{D}V_2, V_1\rangle + \overline{\langle \mathcal{D}V_2, V_1\rangle} - \langle \Gamma V_3, \mathcal{D}V_2\rangle + \overline{\langle \Gamma V_3, \mathcal{D}V_2\rangle} \\
&\quad - \left\langle V_4, \mathcal{D}'\Gamma V_3\right\rangle + \overline{\left\langle V_4, \mathcal{D}'\Gamma V_3\right\rangle} + \left\langle \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_4, V_4\right\rangle \\
&= -2\mathrm{Im}\,\langle \mathcal{D}V_2, V_1\rangle - 2\mathrm{Im}\,\langle \Gamma V_3, \mathcal{D}V_2\rangle - 2\mathrm{Im}\left\langle V_4, \mathcal{D}'\Gamma V_3\right\rangle + \left\langle \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_4, V_4\right\rangle.
\end{aligned}$$

Somit ist also $\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}_0 V, V\rangle_t = \left\langle \frac{\delta}{\gamma}K^{-1}V_4, V_4\right\rangle > 0$ und das bedeutet, dass der Operator $-\mathcal{A}_0$ dissipativ ist. □

Unter Verwendung der Lemmata 2.10 - 2.12 können wir nun unseren ersten Satz beweisen, welcher für die Existenz einer Lösung für unser Problem (2.1) - (2.8) eine wesentliche Rolle spielen wird.

Satz 2.13 *Es sei $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(t)$ wie in (2.28), (2.29) und (2.30) definiert.*

(i) *Für jedes feste $t \in [0,T]$ ist der Operator $-\mathcal{A}_0(t)$ der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{H}_t$.*

(ii) *Die Familie $(-\mathcal{A}_0(t))_{t\in[0,T]}$ ist eine stabile Famile von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern auf dem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

Beweis:

(i) Sei $t \in [0,T]$ fest. Offensichtlich ist $\mathcal{A}_0(t)$ dicht definiert. Nach Lemma 2.10 ist der Operator $\mathcal{A}_0(t)$ abgeschlossen. Nach Lemma 2.12 ist der Operator $-\mathcal{A}_0(t)$ dissipativ. Sofort ergibt sich aus Lemma 2.11, dass auch $-\mathcal{A}_0^*(t)$ dissipativ ist. Damit ist $\mathcal{A}_0(t)$ nach Korollar 1.7 der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Kontraktionshalbgruppe auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_t$.

(ii) Es sei $V \in \mathcal{H}$ mit $V \neq 0$. Wir betrachten die Funktion

$$f_V : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \ln(\|V\|_t^2).$$

Wegen $V \neq 0$ ist diese wohldefiniert und stetig differenzierbar. Weiter gilt

$$f_V'(t) = \left(\ln\left(\|V\|_t^2\right)\right)' = 2\frac{1}{\|V\|_t}\left(\|V\|_t\right)' \leq C.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir nun

$$|\ln(\|V\|_t) - \ln(\|V\|_s| = |f_V(t) - f_V(s)| = \left|f_V'(\xi)\right| |t-s| \leq C|t-s|.$$

Dies bedeutet aber

$$\frac{\|V\|_t}{\|V\|_s} \leq e^{C|t-s|}$$

und somit folgt mit Hilfe von Lemma 1.10, dass die Familie $(-\mathcal{A}_0(t))_{t\in[0,T]}$ eine stabile Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern auf dem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist.

□

Eine direkte Folgerung aus Satz 2.13 und Satz 1.11 ist das

Korollar 2.14 *Die Familie $(-\mathcal{A}(t))_{t\in[0,T]}$ ist eine stabile Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern auf dem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

Aufgrund der Abgeschlossenheit des Operators $\mathcal{A}$ ist klar, dass der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ versehen mit der Graphennorm ein Hilbertraum ist. Zu beachten ist aber, dass wir es damit wiederum mit einem „zeitabhängigen“ Hilbertraum zu tun haben. Wir wollen nun ein neues Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{D(\mathcal{A})}$ auf $D(\mathcal{A})$ definieren, welches nicht von der Zeit abhängt, aber die Eigenschaft besitzt, dass die zugehörige Norm $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$ mit der Graphennorm auf $D(\mathcal{A})$ äquivalent ist. Zu diesem Zwecke sei für $W, W' \in W^1_{\mathcal{D}}(G)$ das Skalarprodukt $\langle W, W'\rangle_{\mathcal{D}}$ durch $\langle W, W'\rangle_{\mathcal{D}} := \langle W, W'\rangle + \langle \mathcal{D}W, \mathcal{D}W'\rangle$ definiert. Analog seien die Skalarprodukte $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}'}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{div}}$ auf den entsprechenden Räumen definiert. Unter Verwendung dieser Skalarprodukte definieren wir nun für $U, V \in D(\mathcal{A})$:

$$\langle U, V\rangle_{D(\mathcal{A})} := \langle U_1, V_1\rangle_{\mathcal{D}'} + \langle U_2, V_2\rangle_{\mathcal{D}} + \langle U_3, V_3\rangle_{H^1} + \langle U_4, V_4\rangle_{\text{div}} .$$

Letzteres ist nun ein Skalarprodukt auf $D(\mathcal{A})$, welches nicht von der Zeit abhängt. Es gilt aber auch wie gewünscht das

Lemma 2.15 *Der in* (2.32) *definierte Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{D(\mathcal{A})}$ ist ein Hilbertraum. Ferner ist die Norm $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$ mit der Graphennorm auf $D(\mathcal{A})$ äquivalent.*

Beweis: Wir beweisen nur, dass die Graphennorm $\|\cdot\|_G$ äquivalent zu $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$ ist. Es gilt $\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_0 + \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_1$. Nach (2.20) und (2.21) haben wir

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D} & 0 & 0 \\ -\beta\rho^{-1}\mathcal{D}' & 0 & \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0 \\ 0 & \delta(\Gamma'\mathcal{D}) & 0 & \delta(\Gamma'\mathcal{D}) \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & \frac{1}{\tau_0}\,\mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta\mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta & 0 & \rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\beta\Gamma\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta\left(-\Gamma'\mathcal{D}\right)\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta}{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t\mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

Ist nun $V \in D(\mathcal{A})$, so erhalten wir

$$\mathcal{A}V = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta\mathcal{S}^{-1}V_1 - \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2 \\ \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta V_1 - \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'V^1 + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)V^3 \\ \delta(\Gamma'\mathcal{D})V_2 - \Gamma'\mathcal{D}\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta^2}{\gamma}V_4 + \delta(\Gamma'\mathcal{D})V_4 \\ \frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \frac{1}{\tau_0}V_4 - \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t V_4 \end{pmatrix}.$$

Die Graphennorm hat nun die Gestalt $\|V\|_G^2 = \|V\|_t^2 + \|\mathcal{A}V\|_t^2$. Sei $V \in D(\mathcal{A})$ beliebig gewählt. Es ist $\|V\|_{D(\mathcal{A})}^2 = \|V\|^2 + \|\mathcal{D}'V_1\|^2 + \|\mathcal{D}V_2\|^2 + \|\nabla V_3\|^2 + \|\mathrm{div}\ V_4\|^2$. Demnach sind die letzten vier Terme abzuschätzen. In den folgenden Abschätzungen wird der Einfachheit halber eine von t unabhängige Konstante $C > 0$ verwendet, die von Zeile zu Zeile verschieden sein kann. Wir beginnen mit $\mathcal{D}V_2$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}V_2\|^2 &= \left\|\beta\mathcal{S}^{-1}\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2\right\|^2 \le C\left\|-\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t\beta\mathcal{S}^{-1}V_1 - \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2\right\|^2 + C\left\|\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t\beta\mathcal{S}^{-1}V_1\right\|^2 \\ &\le C\|\mathcal{A}V\|^2 + C\|V\|^2 \le C\|V\|_G^2.\end{aligned}$$

Als nächstes behandeln wir ∇V_3:

$$\begin{aligned}\|\nabla V_3\|^2 = \|\mathcal{D}'\Gamma V_3\|^2 &= \left\|\frac{\tau_0\delta}{\gamma}K^{-1}\frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'\Gamma V_3\right\|^2 \\ &\le C\left\|\frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'\Gamma V_3 + \frac{1}{\tau_0}V_4 - \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t V_4\right\|^2 + C\left\|\frac{1}{\tau_0}V_4 - \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t V_4\right\|^2 \\ &\le C\|\mathcal{A}V\|^2 + C\|V\|^2 \le C\|V\|_G^2.\end{aligned}$$

Damit behandeln wir nun $\mathcal{D}'V_1$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}'V_1\|^2 &= \left\|\frac{1}{\beta}\rho\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'V_1\right\|^2 \\ &\le C\left\|\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta V^1 - \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'V^1 + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\Gamma V_3 + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)V_3\right\|^2 \\ &\quad + C\left\|\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta V^1 + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)V_3\right\|^2 \\ &\le C\|\mathcal{A}V\|^2 + C\|V\|^2 \le C\|V\|_G^2.\end{aligned}$$

Schließlich schätzen wir div V_4 ab:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{div}\ V_4\|^2 &= \left\|\frac{1}{\delta}\delta(\Gamma'\mathcal{D})V_4\right\|^2 \le C\left\|\delta(\Gamma'\mathcal{D})V_2 - \Gamma'\mathcal{D}\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta^2}{\gamma}V_4 + \delta\Gamma'\mathcal{D}V_4\right\|^2 \\ &\quad + C\left\|\delta\Gamma'\mathcal{D}V_2 - \Gamma'\mathcal{D}\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta^2}{\gamma}V_4\right\|^2 \\ &\le C\|\mathcal{A}V\|^2 + C\|V\|^2 \le C\|V\|_G^2.\end{aligned}$$

Demnach existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $V \in D(\mathcal{A})$ und alle $t \in [0, T]$ die Abschätzung

$$\|V\|^2_{D(\mathcal{A})} \leq C\|V\|^2_G$$

besteht. Um die Äquivalenz der beiden Normen zu beweisen, benötigen wir noch eine Abschätzung von $\|V\|_{D(\mathcal{A})}$ nach unten. Wegen der Äquivalenz von $\|\cdot\|_t$ und $\|\cdot\|$ erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|V\|^2_G &= \|V\|^2_t + \|\mathcal{A}V\|^2_t \leq C\|V\| + C\|\mathcal{A}V\|^2 \\
&\leq C\|V_1\|^2 + C\|V_2\|^2 + C\|V_3\|^2 + C\|V_4\|^2 + C\left\|\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta S^{-1}V_1 + \frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2\right\|^2 \\
&\quad + C\left\|\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta V_1 - \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'V_1 + \beta\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma V_3) + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)V_3\right\|^2 \\
&\quad + C\left\|\delta\Gamma'\mathcal{D}V_2 - \Gamma'\mathcal{D}\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta^2}{\gamma}V_4 + \delta\Gamma'\mathcal{D}V_4\right\|^2 \\
&\quad + C\left\|\frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'\Gamma V^3 + \frac{1}{\tau_0}V_4 - \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t V_4\right\|^2 \\
&\leq C\|V_1\|^2 + C\|V_2\|^2 + C\|V_3\|^2 + C\|V_4\|^2 + 2C\left\|\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta S^{-1}V_1\right\|^2 + 2C\left\|\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\mathcal{D}V_2\right\|^2 \\
&\quad + 8C\left\|\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta V_1\right\|^2 + 8C\left\|\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'V_1\right\|^2 + 8C\left\|\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\Gamma V_3\right\|^2 \\
&\quad + 8C\left\|\rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)V_3\right\|^2 + 8C\left\|\delta\Gamma'\mathcal{D}V_2\right\|^2 + 8C\left\|\Gamma'\mathcal{D}\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta^2}{\gamma}V_4\right\|^2 + 8C\left\|\delta\Gamma'\mathcal{D}V_4\right\|^2 \\
&\quad + 8C\left\|\frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\mathcal{D}'\Gamma V^3\right\|^2 + 8C\left\|\frac{1}{\tau_0}V_4\right\|^2 + 8C\left\|\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t V_4\right\|^2 \\
&\leq C\|V\|^2_{D(\mathcal{A})}.
\end{aligned}$$

Dies vervollständigt unseren Beweis. □

Lemma 2.16 *Es sei $\mathcal{A}$ wie in* (2.31), (2.33) *und* (2.32) *definiert. Dann gilt*

$$\partial_t\mathcal{A} \in L^\infty\left([0, T]; L\left(D(\mathcal{A}), L^2(G)\right)\right).$$

Beweis: Wir beweisen die Existenz einer Konstanten $C > 0$, so dass

$$\forall t \in [0, T]\ \forall V \in D(\mathcal{A}):\ \|(\partial_t\mathcal{A})(t)V\| \leq C\|V\|_{D(\mathcal{A})}.$$

Es ist für ein beliebiges $V \in D(\mathcal{A})$:

$$(\partial_t\mathcal{A})(t)V = \begin{pmatrix} -\left[\left(\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right)_t \beta\mathcal{S}^{-1}\right]_t V_1 - \left[\frac{1}{\beta}\mathcal{S}\right]_t \mathcal{D}V_2 \\ \left[\beta\rho^{-1}\mathcal{D}'\left(\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Id}\right)\beta\right]_t V_1 - \left[\beta\rho^{-1}\right]_t\mathcal{D}'V^1 + \left[\beta\rho^{-1}\right]_t\mathcal{D}'\Gamma V_3 + \left[\rho^{-1}\mathcal{D}'(\beta\Gamma)\right]_t V^3 \\ \left[\delta\Gamma'\right]_t\mathcal{D}V_2 - \left[\Gamma'\mathcal{D}\left(\frac{\gamma}{\delta}\,\mathrm{Id}\right)\frac{\delta^2}{\gamma}\right]_t V_4 + \left[\delta\Gamma'\right]_t\mathcal{D}V_4 \\ \left[\frac{\gamma}{\tau_0\delta}K\right]_t\mathcal{D}'\Gamma V_3 + \frac{1}{\tau_0}V_4 + \left[\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_t\right]_t V_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Regularität der Koeffizienten erhalten wir damit sofort eine Abschätzung der besagten Form. □

Fassen wir die vorigen Resultate zusammen, so liefert uns Satz 1.13 den folgenden

Satz 2.17 *Der Operator* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ *sei wie in* (2.31), (2.33) *und* (2.32) *definiert. Weiter gelte* $\mathcal{V}^0 \in D(\mathcal{A})$ *und* $\mathcal{F} \in \mathrm{Lip}([0,T],\mathcal{H})$*, wobei* $\mathcal{V}_0$ *und* $\mathcal{F}$ *wie in* (2.18) *definiert sind. Die Koeffizienten mögen die Regularitätsforderungen* (i) - (iv) *in Abschnitt* 2.3.1 *erfüllen. Dann existiert eine eindeutige Lösung* $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^0([0,T],D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0,T],\mathcal{H})$ *von*

$$\mathcal{V}_t - \mathcal{A}(t)\mathcal{V} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}^0.$$

Entsprechend Lemma 2.9 können wir damit auf eine Lösung von (2.1) - (2.8) schließen.

Kapitel 3

Formale Taylor-Entwicklungen und Dirichlet-Randbedingungen

3.1 Einführung

Um das in diesem Abschnitt behandelte thermoelastische Modell zu motivieren, betrachten wir noch einmal die Gleichungen der klassischen Thermoelastizität und schreiben diese zunächst in der folgenden Form:

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\Gamma\theta = \rho b, \tag{3.1}$$

$$\delta\theta_t + \operatorname{div} q + \Gamma'\mathcal{D}U_t = r, \tag{3.2}$$

$$q + K\nabla\theta = 0. \tag{3.3}$$

Hierbei ist ersichtlich, in welcher Weise das Fouriersche Gesetz wirkt. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, führt diese Art der Modellierung des Wärmeflusses zu dem Phänomen der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Obwohl dieses Phänomen keinesfalls durch einen natürlichen Vorgang motiviert werden kann, beschreiben Lösungen dieses Systems natürliche Vorgänge für die Anwendungen hinreichend genau. Trotzdem ist die Forschung bestrebt, bessere Modelle zu entwickeln, bei welchen keine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit auftritt. In diesem Zusammenhang wurde das Fouriersche Gesetz (3.3) durch das Gesetz von Cattaneo

$$\tau_q q_t + q + K\nabla\theta = 0 \tag{3.4}$$

oder auch durch

$$\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + q + K\nabla\theta + K\tau_\theta\nabla\theta_t = 0 \tag{3.5}$$

ersetzt. In beiden Fällen liegt keine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit vor. Es hat sich nun ergeben, dass sich (natürlich unter entsprechenden Voraussetzungen) die für die klassische Thermoelastizität bekannten Resultate auf die modifizierte Situation übertragen. Die Gleichungen (3.3), (3.4) und (3.5) können nun jeweils als Spezialfall einer formalen Taylorentwicklung der linken und/oder rechten Seite der Gleichung

$$q(x, t + \tau_q) = -K\nabla\theta(x, t + \tau_\theta), \tag{3.6}$$

welche die Grundlage einer von Tzou [25], [26] eingeführten Dual-Phase-Lag Theorie bildet, aufgefasst werden. Eine wichtige Fragestellung in diesem Zusammenhang ist nun, welche Taylorentwicklungen der beiden Seiten von (3.6) zu einem wohlgestellten Problem führen. Genauer stellt sich die Frage für welche natürlichen Zahlen n und m die Gleichungen (3.1) und (3.2) sowie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau_q^k}{k!} \partial_t^k q + K \sum_{k=0}^{m} \frac{\tau_\theta^k}{k!} \partial_t^k \nabla\theta = 0$$

ein wohlgestelltes System bilden. Hierbei zeigten Untersuchungen in [4], dass bei obigem System im Fall $n - m > 2$ keine Wohlgestelltheit zu erwarten ist. Wir geben nun eine positive Antwort auf die Frage nach Wohlgestelltheit in der Situation $m = n - 1$. Wir betrachten also das System

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\Gamma\theta = \rho b, \tag{3.7}$$

$$\delta\theta_t + \operatorname{div} q + \Gamma'\mathcal{D}U_t = r, \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau_q^k}{k!} \partial_t^k q + K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_\theta^k}{k!} \partial_t^k \nabla\theta = 0, \tag{3.9}$$

für die gesuchten Funktionen $U = U(t,x)$, $\theta = \theta(t,x)$ und $q = q(t,x)$. Hierbei ist $x \in G$ und $t \geq 0$, wobei G ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ darstellt.
Über die Wohlgestelltheit dieser Gleichungen (hinzu kommen natürlich Anfangs- und Randbedingungen) ist für $n \geq 3$ nichts bekannt. Wir wenden uns dieser Frage zu, wobei wir die Gleichungen (3.7) - (3.9) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} U(0,\cdot) &= U_0, \quad U_t(0,\cdot) = U_1, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \\ (\partial_t^k q)(0,\cdot) &= q_k, \ (k = 0,\ldots,n-1), \end{aligned} \tag{3.10}$$

und den Randbedingungen

$$U(t,x) = 0, \quad \theta(t,x) = 0 \quad \text{für } (t,x) \in [0,\infty) \times \partial G \tag{3.11}$$

behandeln werden. Dabei werden wir wieder orts- und zeitabhängige Koeffizienten zulassen, gehen allerdings davon aus, dass die Koeffizienten der Gleichung (3.9) nicht von der Zeit abhängen. Diese Forderung wird sich bei unserer Wahl des Systems erster Ordnung als notwendig erweisen. Für dieses System erster Ordnung wiederum beweisen wir, dass eine Lösung existiert. Für den Spezialfall $n = 2$ und $G = (0, L) \subset \mathbb{R}$ zeigen wir dann, dass die Lösung unter Zusatzvoraussetzungen an die Koeffizienten höhere Regularität hat. Fortfolgend sei $T > 0$ beliebig aber fest gewählt.

3.2 Sobolevräume und Skalarprodukt

Wie im vorigen Kapitel definieren wir zunächst Sobolevräume, welche uns später das Verallgemeinern der Randbedingungen erlauben werden:

$$\begin{aligned}
W^1_{\mathcal{D}}(G) &:= \left\{u \in \left(L^2(G)\right)^3 : \mathcal{D}u \in \left(L^2(G)\right)^6\right\},\\
W^1_{\mathcal{D}'}(G) &:= \left\{u \in \left(L^2(G)\right)^6 : \mathcal{D}'u \in \left(L^2(G)\right)^3\right\},\\
W^1_{0,\mathcal{D}}(G) &:= \left\{u \in W^1_{\mathcal{D}}(G) : \forall F \in W^1_{\mathcal{D}'}(G) : \langle \mathcal{D}u, F\rangle = -\left\langle u, \mathcal{D}'F\right\rangle\right\},\\
W^1_{\mathrm{div}}(G) &:= \left\{u \in \left(L^2(G)\right)^3 : \mathrm{div}\, u \in L^2(G)\right\}.
\end{aligned}$$

Für Elemente $u, v \in W^1_{\mathcal{D}}(G)$ definieren wir die Bilinearform

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{D}} := \langle u, v\rangle + \langle \mathcal{D}u, \mathcal{D}v\rangle .$$

Für $u, v \in W^1_{\mathcal{D}'}(G)$ definieren wir

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{D}'} := \langle u, v\rangle + \left\langle \mathcal{D}'u, \mathcal{D}'v\right\rangle$$

und für $u, v \in W^1_{\mathrm{div}}(G)$ definieren wir

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{div}} := \langle u, v\rangle + \langle \mathrm{div}\, u, \mathrm{div}\, v\rangle .$$

Lemma 3.1 *Erfüllt G die strikte Kegeleigenschaft, so sind die folgenden Aussagen richtig:*

(i) $W^1_{\mathcal{D}}(G)$ *und* $W^1_{0,\mathcal{D}}(G)$ *sind Hilberträume bezüglich* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$.

(ii) $W^1_{\mathcal{D}'}(G)$ *ist ein Hilbertraum bezüglich* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}'}$.

(iii) $W^1_{\mathrm{div}}(G)$ *ist ein Hilbertraum bezüglich* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{div}}$.

(iv) *Es gilt* $W^1_{0,\mathcal{D}}(G) = \left(W^1_0(G)\right)^3$.

Beweise zu den vorgestellten Resultaten findet man in [6].

3.3 Wohlgestelltheit

Wir wenden uns der Frage nach der Wohlgestelltheit des Problems (3.7) - (3.11) für festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ zu. Tatsächlich wird sich zeigen, dass das genannte System in einem verallgemeinerten Sinn wohlgestellt ist. Um dies zu beweisen transformieren wir die genannten Gleichungen zunächst auf ein System erster Ordnung, welches uns später einen Evolutionsoperator auf einem entsprechenden Definitionsbereich liefern wird. Dieser Evolutionsoperator wird dabei einige strukturelle Eigenschaften besitzen, welche es uns erlauben werden, mit Hilfe von Halbgruppentheorie bzw. der Theorie von Kato auf (verallgemeinerte) Lösungen zu schließen. Der Einfachheit halber gehen wir bei der Transformation auf ein System erster Ordnung von glatten Koeffizienten aus.

3.3.1 Transformation in ein System erster Ordnung

Um ein System erster Ordnung zu finden, gehen wir zunächst von der Existenz von glatten Lösungen aus. Für eine Lösung (U, θ, q) zu unserem Problem (3.7) – (3.11) definieren wir

$$V^{1,1} := \begin{pmatrix} \mathcal{SD}U \\ U_t \\ \theta \\ q \end{pmatrix}, \quad V^{2,1} := \left(\sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} \partial_t^{l-k} q + K \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \partial_t^{l-1-k} \nabla\theta \right)_{1 \le l \le n-1},$$

$$V^{1,2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V^{2,2} := \left(-\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^l} \cdot \frac{(n-1)!}{n!(n-1-l)!} q \right)_{1 \le l \le n-1}.$$

Ferner definieren wir vier Teilmatrizen $N^{1,1}$, $N^{1,2}$, $N^{2,1}$ sowie $N^{2,2}$ mit deren Hilfe wir später unseren gesuchten (Differential-) Operator definieren werden. Bereits hier sei hervorgehoben, dass nur sechs Einträge innerhalb der Matrix $N^{1,1}$ Differentialoperatoren darstellen. Die Einträge der verbleibenden Matrizen werden Multiplikationsoperatoren darstellen. Im Wesentlichen werden wir uns also mit $N^{1,1}$ beschäftigen. Es seien

$$N^{1,1} := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} & 0 & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & -\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0 \\ 0 & -\Gamma'\mathcal{D} & 0 & -\operatorname{div} \\ 0 & 0 & -\nabla & -\left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n} \right) K^{-1} \end{pmatrix}, \quad N^{2,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1,4}^{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & N_{2,4}^{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & N_{n-1,4}^{2,1} \end{pmatrix},$$

$$N^{1,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}} K^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{2,2} := \begin{pmatrix} N_{1,1}^{2,2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ N_{2,1}^{2,2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ N_{n-1,1}^{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei seien die skalaren Einträge $N_{l,4}^{2,1}$ für $1 \le l \le n-2$ durch

$$N_{l,4}^{2,1} := \frac{1}{(n-1-l)!} \left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^l} - \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{l+1}} \right) - \left(\frac{\tau_q^{n-1-l}}{(n-1-l)!} - \frac{1}{n(n-2-l)!} \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{l+1}} \right),$$

sowie durch

$$N_{n-1,4}^{2,1} := \left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n} \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n} \right) - 1$$

definiert. Schließlich gelte

$$N_{l,1}^{2,2} := -\frac{(n-1)!}{(n-l-1)!\tau_\theta^l}$$

für $1 \leq l \leq n-1$. Mit Hilfe der oben definierten Matrizen $N^{i,j}$ und den Vektoren $V^{i,j}$, $i,j \in \{1,2\}$ definieren wir nun

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} V^{1,1} \\ V^{2,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{1,2} \\ V^{2,2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{N} := \begin{pmatrix} N^{1,1} & N^{1,2} \\ N^{2,1} & N^{2,2} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Ferner definieren wir nun eine Gewichtsmatrix $\mathcal{Q}$ durch

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} Q^{1,1} & Q^{1,2} \\ Q^{2,1} & Q^{2,2} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

wobei hier

$$Q^{1,1} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{n-1}}\frac{1}{n}K^{-1} \end{pmatrix}, \qquad Q_{2,2} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie $Q^{1,2} := 0$ und $Q^{2,1} := 0$ gelten soll. Diese Matrix wird es uns später erlauben, das Skalarprodukt des benötigten Grundraumes zu beschreiben. Schließlich definieren wir die Inhomogenität $\mathcal{F}$ sowie eine technisch bedingt notwendige Störmatrix $\mathcal{B}$ durch

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}_t\mathcal{S}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \frac{r}{\delta} \\ 0 \\ (0)_{1\leq l\leq n-2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Wir gehen nun auf den Zusammenhang von glatten Lösungen mit den oben definierten Vektoren und Matrizen ein. Genaueres liefert das

Lemma 3.2 *Es sei $T > 0$. Weiter seien Funktionen*

$$U \in \mathcal{C}^2\left([0,T], \left(L^2(G)\right)^3\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T], W^1_{0,\mathcal{D}}(G)\right),$$
$$\theta \in \mathcal{C}^{n-1}\left([0,T], H^1(G)\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0,T], H^1_0(G)\right),$$
$$q \in \mathcal{C}^n\left([0,T], \left(L^2(G)\right)^3\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0,T], W^1_{\mathrm{div}}(G)\right)$$

mit $\mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U \in \left(L^2(G)\right)^3$ gegeben, welche (3.7) – (3.11) erfüllen. Ferner seien die Vektoren $\mathcal{V}$ und $\mathcal{F}$ sowie die Matrizen $\mathcal{Q}$, $\mathcal{N}$ und $\mathcal{B}$ wie in (3.12), (3.13) und (3.14) definiert. Dann gilt

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{N}+\mathcal{B})\mathcal{V} + \mathcal{F}.$$

Beweis: Aufgrund der Regularität der Matrix $\mathcal{S}$ und $U \in \mathcal{C}^1\left([0,T], W^1_{0,\mathcal{D}}(G)\right)$ können wir sofort

$$V_t^{1,1} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_t\mathcal{D}U + \mathcal{S}\mathcal{D}U_t \\ U_{tt} \\ \theta_t \\ q_t \end{pmatrix}$$

berechnen. Entsprechend erhalten wir:

$$N^{1,1}(V^{1,1} + V^{1,2}) = N^{1,1}V^{1,1} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}U_t \\ \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U - \mathcal{D}'(\Gamma\theta) \\ -\Gamma'\mathcal{D}U_t - \operatorname{div} q \\ -\nabla\theta - \left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right)K^{-1}q \end{pmatrix}.$$

Zu beachten ist, dass es sich bei den folgenden Rechnungen nur um Multiplikationen von Matrizen und Vektoren handelt. Innerhalb der Matrizen treten keine Differentialoperatoren auf. Es gilt

$$N^{1,2}(V^{2,1} + V^{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}K^{-1}\left(\frac{\tau_q^n}{n!}q_t + \frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!}q\right) + \nabla\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\cdot\frac{n-1}{n}K^{-1}q \end{pmatrix}.$$

Ferner gelten die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} N^{2,1}(V^{1,1} + V^{1,2}) = N^{2,1}V^{1,1} &= \left(N^{2,1}_{l,4}q\right)_{1\le l\le n-1}, \\ N^{2,2}V^{2,1} &= \left(\left(N^{2,2}_{l,1}V^{2,1}_1 + V^{2,1}_{l+1}\right)_{1\le l\le n-2}, N^{2,2}_{n-1,1}V^{2,1}_1\right) \end{aligned}$$

und

$$N^{2,2}V^{2,2} = \left(\left(N^{2,2}_{l,1}V^{2,2}_1 + V^{2,2}_{l+1}\right)_{1\le l\le n-2}, N^{2,2}_{n-1,1}V^{2,2}_1\right).$$

Fassen wir diese Rechnungen zusammen, so erhalten wir:

$$\mathcal{N}\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}U_t \\ \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U - \mathcal{D}'\Gamma\theta \\ -\Gamma'\mathcal{D}U_t - \operatorname{div} q \\ \frac{(n-1)!}{n!}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{n-1}}K^{-1}q_t \\ \left(N^{2,1}_{l,4}q + N^{2,2}_{l,1}V^{2,1}_1 + V^{2,1}_{l+1} + N^{2,2}_{l,1}V^{2,2}_1 + V^{2,2}_{l+1}\right)_{1\le l\le n-2} \\ N^{2,1}_{n-1,4}q + N^{2,2}_{n-1,1}V^{2,1}_1 + N^{2,2}_{n-1,1}V^{2,2}_1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nun die einzelnen Vektoreinträge explizit. Sei dazu $l \in \{1, ..., n-2\}$ beliebig gewählt. Wir erhalten nach einer nicht schwierigen aber aufwändigen Rechnung:

$$\begin{aligned}
&N_{l,4}^{2,1} q + N_{l,1}^{2,2} V_1^{2,1} + V_{l+1}^{2,1} + N_{l,1}^{2,2} V_1^{2,2} + V_{l+1}^{2,2} \\
&= \partial_t \left[\sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} \partial_t^{l-k} q + K \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \partial_t^{l-k-1} \nabla\theta \right] + \partial_t \left[-\frac{\tau_q^n}{n!} \frac{(n-1)!}{(n-l-1)! \tau_\theta^l} q \right] \\
&= \partial_t V_l^{2,1} + \partial_t V_l^{2,2}.
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$N_{n-1,4}^{2,1} q + N_{n-1,1}^{2,2} V_1^{2,1} + N_{n-1,1}^{2,2} V_1^{2,2} = -\frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}} \frac{\tau_q^n}{n!} q_t - q - K\nabla\theta = \partial_t V_{n-1}^{2,2} - q - K\nabla\theta.$$

Insgesamt haben wir also das Folgende erhalten:

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}\mathcal{V} + \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V} + \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t + \mathcal{S}_t\mathcal{D}U \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U - \rho^{-1}\mathcal{D}'\Gamma\theta + b \\ -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_t - \frac{1}{\delta}\operatorname{div} q + \frac{r}{\delta} \\ q_t \\ (\partial_t V_l^{2,1} + \partial_t V_l^{2,2})_{1\le l\le n-2} \\ \partial_t V_{n-1}^{2,2} - q - K\nabla\theta \end{pmatrix},$$

und somit folgt die Behauptung mit Hilfe der Differentialgleichungen (3.7) – (3.9). □

Betrachten wir den in (3.12) definierten Vektor $\mathcal{V}$, so erkennen wir, dass die Vektoreinträge V_k mit $k \ge 5$ aus Linearkombinationen von q und $\nabla\theta$ sowie deren Zeitableitungen bestehen. Dementsprechend ist es notwendig, eine passende Anfangsbedingung für das zugehörige Evolutionssystem zu konstruieren. Wir geben einen Anfangsvektor $\mathcal{V}_0$ an und zeigen später, dass dieser die einzelnen Anfangsbedingungen auf das System erster Ordnung überträgt. Dies erfordert einigen Rechenaufwand, da zunächst nicht klar ist, wie $\partial_t^k \nabla\theta$ an der Stelle $t = 0$ beschrieben werden soll. Tatsächlich ist diese Beschreibung aber mit Hilfe der Differentialgleichungen möglich. Wir definieren den Vektor $\mathcal{V}_0$ durch

$$\mathcal{V}_0 := \begin{pmatrix} V_0^{1,1} \\ V_0^{2,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_0^{1,2} \\ V_0^{2,2} \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

wobei die $V_0^{i,j}$ für $i, j \in \{1, 2\}$ durch

$$V_0^{1,1} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_0 \\ U_1 \\ \theta_0 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad V_0^{1,2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_0^{2,2} := \left(-\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^l} \cdot \frac{(n-1)!}{n!(n-1-l)!} q_0 \right)_{1\le l\le n-1}$$

und

$$V_0^{2,1} := \left(\sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} q_{l-k} + K \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \nabla\theta_{l-1-k} \right)_{1\le l\le n-1}$$

definiert sind. Für $n \geq 3$ sind die auftretenden θ_k, $1 \leq k \leq n-2$ durch

$$\theta_1(\cdot) = \left(\frac{r}{\delta}\right)(0,\cdot) - \frac{1}{\delta}(0,\cdot)\left(\operatorname{div} q_0\right)(\cdot) - \frac{1}{\delta}(0,\cdot)\Gamma'(0,\cdot)\left(\mathcal{D}U_1\right)(\cdot), \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(\cdot) = &\left(\frac{r}{\delta}\right)_t(0,\cdot) - \left(\frac{1}{\delta}\right)_t(0,\cdot)\left(\operatorname{div} q_0\right)(\cdot) - \frac{1}{\delta}(0,\cdot)\left(\operatorname{div} q_1\right)(\cdot)\\ &- \left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)_t(0,\cdot)\left(\mathcal{D}U_1\right)(\cdot) - \left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)(0,\cdot)\left(\mathcal{D}U_2\right)(\cdot),\end{aligned} \tag{3.17}$$

bzw. im Fall $n \geq 5$ allgemein für $3 \leq k \leq n-2$ durch

$$\begin{aligned}\theta_k(\cdot) = &\left(\partial_t^{k-1}\frac{r}{\delta}\right)(0,\cdot) - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left(\partial_t^{k-1-j}\frac{1}{\delta}\right)(0,\cdot)\left(\operatorname{div} q_j\right)(\cdot)\\ &- \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left(\partial_t^{k-1-j}\left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)\right)(0,\cdot)\left(\mathcal{D}U_{j+1}\right)(\cdot),\end{aligned} \tag{3.18}$$

definiert. Die in der Definition der θ_k auftretenden U_k, $0 \leq k \leq n-2$ sind für $k = 0, 1$ bereits durch die Anfangsbedingungen vorgegeben. Für $k = 2$ sei U_k durch

$$U_2(\cdot) := \rho^{-1}(0,\cdot)\mathcal{D}'\mathcal{S}(0,\cdot)\mathcal{D}U_0(\cdot) - \rho^{-1}(0,\cdot)\mathcal{D}'\Gamma(0,\cdot)\theta_0(\cdot) + b(0,\cdot)$$

definiert. Die verbleibenden U_k, $3 \leq k \leq n-2$ seien im Fall $n \geq 5$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}U_k = \;&\partial_t^{k-2}b + \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\left(\partial_t^{k-2-j}\rho^{-1}\right)\mathcal{D}'\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\left(\partial_t^{j-l}\mathcal{S}\right)\mathcal{D}U_l\\ &- \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\left(\partial_t^{k-2-j}\rho^{-1}\right)\mathcal{D}'\left[\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}\left(\partial_t^{j-l}\Gamma\right)\left(\partial_t^{l-1}\left(\frac{r}{\delta}\right)\right.\right.\\ &\left.\left.- \sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial_t^{l-1-m}\frac{1}{\delta}\operatorname{div} q_m - \sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial_t^{l-1-m}\left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)\mathcal{D}U_{m+1}\right) + \left(\partial_t^j\Gamma\right)\theta\right]\end{aligned} \tag{3.19}$$

definiert. Damit wir unser nächstes Resultat formulieren können, setzen wir

$$\mathcal{H} := \left(L^2(G)\right)^{3n+10} = \left(L^2(G)\right)^6 \times \left(L^2(G)\right)^3 \times L^2(G) \times \left(L^2(G)\right)^3 \times \cdots \times \left(L^2(G)\right)^3$$

und $D := W^1_{\mathcal{D}'}(G) \times W^1_{0,\mathcal{D}}(G) \times W^1_0(G) \times W^1_{\operatorname{div}}(G) \times \left(L^2(G)\right)^{3(n-1)}$.

Lemma 3.3 *Es sei $t \in [0,T]$ fest gewählt. Ist $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^n([0,T],\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^{n-1}([0,T],D)$ eine Lösung von*

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{Q}^{-1}\left(\mathcal{N} + \mathcal{B}\right)\mathcal{V} + \mathcal{F}, \qquad \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0, \tag{3.20}$$

so ist der durch die Vorschriften

$$U(t) := U_0 + \int_0^t V_2(s)\mathrm{d}s, \quad \theta(t) := V_3(t), \quad q(t) := V_4(t)$$

definierte Vektor (U,θ,q) eine Lösung zu (3.7) – (3.11).

Beweis: Auf den Nachweis der Richtigkeit der ersten beiden Differentialgleichungen sei verzichtet. Dies rechnet man leicht nach. Zunächst befassen wir uns mit der dritten Differentialgleichung. Wir betrachten eine Lösung $\mathcal{V} = (V^k)_{1\leq k\leq n+3}$ zu (3.20) mit der beschriebenen Regularität und berechnen zuerst $\mathcal{N}\mathcal{V}$. Es gilt (das rechnet man leicht nach)

$$\mathcal{N}\mathcal{V} \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \mathcal{D}V^2 \\ \mathcal{D}'V^1 - \mathcal{D}'\Gamma V^3 \\ -\Gamma'\mathcal{D}V^2 - \text{div } V^4 \\ -\nabla V^3 - \left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right) K^{-1}V^4 + \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}} K^{-1}V^5 \\ (N_{l,4}^{2,1}V^4 + N_{l,1}^{2,2}V^5 + V^{5+l})_{1\leq l\leq n-2} \\ N_{n-1,4}^{2,1}V^4 + N_{n-1,1}^{2,2}V^5 \end{array} \right)$$

und also erhalten wir

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}\mathcal{V} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{S}\mathcal{D}V^2 \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'V^1 - \rho^{-1}\mathcal{D}'\Gamma V^3 \\ -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}V^2 - \frac{1}{\delta}\text{div } V^4 \\ -\frac{n\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n} K\nabla V^3 - \frac{n\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n}\left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right) V^4 + \frac{n!}{\tau_q^n} V^5 \\ (N_{l,4}^{2,1}V^4 + N_{l,1}^{2,2}V^5 + V^{5+l})_{1\leq l\leq n-2} \\ N_{n-1,4}^{2,1}V^4 + N_{n-1,1}^{2,2}V^5 \end{array} \right). \tag{3.21}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung ergibt sich, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} V_t^4 &= -n\frac{\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n} K\nabla V^3 - n\frac{1}{\tau_q}V^4 + \frac{(n-1)}{\tau_\theta}V^4 + \frac{n!}{\tau_q^n}V^5, \\ V_t^{l+4} &= N_{l,4}^{2,1}V^4 + N_{l,1}^{2,2}V^5 + V^{l+5}, \quad (1 \leq l \leq n-2), \\ V_t^{n+3} &= N_{n-1,4}^{2,1}V^4 + N_{n-1,1}^{2,2}V^5. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgen aber unmittelbar:

$$V^5 = \frac{\tau_q^n}{n!}V_t^4 + \frac{\tau_\theta^{n-1}}{(n-1)!}K\nabla V^3 + \frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!}V^4 - \frac{(n-1)\tau_q^n}{n!\tau_\theta}V_4, \tag{3.22}$$

$$V^{5+l} = V_t^{l+4} - N_{l,4}^{2,1}V^4 - N_{l,1}^{2,2}V^5, \quad (1 \leq l \leq n-2), \tag{3.23}$$

$$V_t^{n+3} = N_{n-1,4}^{2,1}V^4 + N_{n-1,1}^{2,2}V^5. \tag{3.24}$$

Die Gleichung (3.23) läßt uns nun vermuten, dass für $1 \leq l \leq n-2$ die Identität

$$V^{l+5} = \partial_t^l V^5 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,4}^{2,1}\partial_t^{l-k}V^4 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,1}^{2,2}\partial_t^{l-k}V^5 \tag{3.25}$$

richtig ist. Dies wollen wir mit Hilfe von vollständiger Induktion beweisen.

IA: Nach Voraussetzung ist $V^6 = \partial_t V^5 - N_{1,4}^{2,1}V^4 - N_{1,1}^{2,2}V^5$ richtig.

IS: Es gilt $V^{l+1+5} = V_t^{l+1+4} - N_{l+1,4}^{2,1} V^4 - N_{l+1,1}^{2,2} V^5$. Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung erhalten wir also

$$\begin{aligned}
V^{(l+1)+5} &= \partial_t \left[\partial_t^l V^5 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,4}^{2,1} \partial_t^{l-k} V^4 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,1}^{2,2} \partial_t^{l-k} V^5 \right] - N_{l+1,4}^{2,1} V^4 - N_{l+1,1}^{2,2} V^5 \\
&= \partial_t^{l+1} V^5 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,4}^{2,1} \partial_t^{(l+1)-k} V^4 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,1}^{2,2} \partial_t^{(l+1)-k} V^5 - N_{l+1,4}^{2,1} V^4 - N_{l+1,1}^{2,2} V^5 \\
&= \partial_t^{(l+1)} V^5 - \sum_{k=1}^{l+1} N_{k,4}^{2,1} \partial_t^{(l+1)-k} V^4 - \sum_{k=1}^{l+1} N_{k,1}^{2,2} \partial_t^{(l+1)-k} V^5.
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichung (3.22) ergibt sich aus (3.25) für $1 \leq l \leq n-2$ die folgende Identität:

$$\begin{aligned}
V^{l+5} &= \frac{\tau_q^n}{n!} \partial_t^{l+1} V^4 + \frac{\tau_\theta^{n-1}}{(n-1)!} K \partial_t^l (\nabla V^3) + \frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!} \partial_t^l V^4 - \frac{\tau_q^n (n-1)}{\tau_\theta n!} \partial_t^l V^4 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,4}^{2,1} \partial_t^{l-k} V^4 \\
&\quad - \sum_{k=1}^{l} N_{k,1}^{2,2} \left[\frac{\tau_q^n}{n!} \partial_t^{l-k+1} V^4 + \frac{\tau_\theta^{n-1}}{(n-1)!} K \partial_t^{l-k} (\nabla V^3) + \frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!} \partial_t^{l-k} V^4 - \frac{\tau_q^n (n-1)}{\tau_\theta n!} \partial_t^{l-k} V^4 \right] \\
&= \frac{\tau_q^n}{n!} \partial_t^{l+1} V^4 + \frac{\tau_\theta^{n-1}}{(n-1)!} K \partial_t^l (\nabla V^3) + \frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!} \partial_t^l V^4 - \frac{\tau_q^n (n-1)}{\tau_\theta n!} \partial_t^l V^4 - \sum_{k=1}^{l} N_{k,4}^{2,1} \partial_t^{l-k} V^4 \\
&\quad - \sum_{k=1}^{l} N_{k,1}^{2,2} \left[\frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{(n-1)}{\tau_\theta} \frac{\tau_q^n}{n!} \right] \partial_t^{l-k} V^4 + \sum_{k=1}^{l} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} K \partial_t^{l-k} (\nabla V^3) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-2)! \tau_\theta^{k+1}} \frac{\tau_q^n}{n!} \partial_t^{l-k} V^4 \\
&= \sum_{k=0}^{l+1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} \partial_t^{l+1-k} V^4 + \sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} K \partial_t^{l-k} (\nabla V^3) - \frac{\tau_q^n}{n!} \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{l+1} (n-1-(l+1))} V^4.
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir noch die Richtigkeit der Gleichung (3.22), so erhalten wir

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ (V^{l+4})_{1 \leq l \leq n-1} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

wobei

$$V^{l+4} = \sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} \partial_t^{l-k} V^4 + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} K \partial_t^{l-k-1} (\nabla V^3) - \frac{\tau_q^n}{n!} (n-1)! \frac{1}{\tau_\theta^l (n-l-1)!} V^4$$

für $1 \leq l \leq n-1$ gilt. Betrachten wir nun die Gleichung (3.24) und setzen das obige Resultat für

$l = n-1$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\partial_t^{n-k}V^4 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!}K\partial_t^{n-1-k}(\nabla V^3) - \frac{\tau_q^n}{n!\tau_\theta^{n-1}}(n-1)!V_t^4 \\
= \;& (n-1)!\frac{1}{\tau_\theta^{n-1}}\left(\frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{(n-1)\tau_q^n}{\tau_\theta n!}\right)V^4 - V^4 + \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}\frac{\tau_q^n}{n!}(n-1)\frac{1}{\tau_\theta}V^4 \\
&-\frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}\left[\frac{\tau_q^n}{n!}\partial_t V^4 + \frac{\tau_q^{n-1}}{(n-1)!}V^4 + \frac{\tau_\theta^{n-1}}{(n-1)!}K\nabla V^3\right] \\
= \;& -\frac{\tau_q^n}{n!}\frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}\partial_t V^4 - V^4 - K\nabla V^3.
\end{aligned}$$

Aus letzterer Gleichheit folgt nun unmittelbar

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\partial_t^{n-k}V^4 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!}K\partial_t^{n-1-k}(\nabla V^3) = 0.$$

Damit wissen wir, dass die oben definierten Funktionen U, θ, q die Differentialgleichungen (3.7) - (3.9) erfüllen. Klar ist, dass die Funktionen U, θ, q die Randbedingungen (3.11) erfüllen. Etwas komplizierter ist der Nachweis, dass die genannten Funktionen auch die Anfangsbedingungen (3.10) erfüllen. Hierzu zunächst einige Vorüberlegungen: Der Einfachheit halber lassen wir in den folgenden Rechnungen die Argumente weg. Für $3 \leq k \leq n-2$ gilt:

$$\theta_t = \frac{r}{\delta} - \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\, q - \frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_t, \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{tt} &= \left(\frac{r}{\delta}\right)_t - \left(\frac{1}{\delta}\mathrm{div}\, q\right)_t - \left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_t\right)_t \\
&= \left(\frac{r}{\delta}\right)_t - \left(\frac{1}{\delta}\right)_t \mathrm{div}\, q - \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\, q_t - \left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)_t \mathcal{D}U_t - \frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_{tt},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t^k\theta\right) &= \partial_t^{k-1}\left(\frac{r}{\delta}\right) - \partial_t^{k-1}\left(\frac{1}{\delta}\mathrm{div}\, q\right) - \partial_t^{k-1}\left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_t\right), \\
&= \partial_t^{k-1}\left(\frac{r}{\delta}\right) - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left(\partial_t^{k-1-j}\frac{1}{\delta}\right)\mathrm{div}\, \partial_t^j q \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\partial_t^{k-1-j}\left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)\mathcal{D}\left(\partial_t^{j+1}U\right).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Weiter ergibt sich für die Zeitableitungen von U:

$$
\begin{aligned}
\partial_t^k U &= \partial_t^{k-2} b + \partial_t^{k-2}\left(\rho^{-1}\mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U\right) - \partial_t^{k-2}\left(\rho^{-1}\mathcal{D}'\Gamma\theta\right) \\
&= \partial_t^{k-2} b + \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\partial_t^{k-2-j}\left(\rho^{-1}\right)\partial_t^j\left(\mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U\right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\partial_t^{k-2-j}\left(\rho^{-1}\right)\partial_t^j\left(\mathcal{D}'\Gamma\theta\right) \\
&= \partial_t^{k-2} b + \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\partial_t^{k-2-j}\left(\rho^{-1}\right)\mathcal{D}'\partial_t^j\left(\mathcal{S}\mathcal{D}U\right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\partial_t^{k-2-j}\left(\rho^{-1}\right)\mathcal{D}'\partial_t^j\left(\Gamma\theta\right) \\
&= \partial_t^{k-2} b + \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\partial_t^{k-2-j}\left(\rho^{-1}\right)\mathcal{D}'\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(\partial_t^{j-l}\mathcal{S})\mathcal{D}\partial_t^l U \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\partial_t^{k-2-j}\left(\rho^{-1}\right)\mathcal{D}'\Bigg[\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}(\partial_t^{j-l}\Gamma)\left(\partial_t^{l-1}\left(\frac{r}{\delta}\right)\right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial_t^{l-1-m}\frac{1}{\delta}\operatorname{div}\partial_t^m q - \sum_{m=0}^{l-1}\binom{l-1}{m}\partial_t^{l-1-m}\left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)\mathcal{D}\partial_t^{m+1}U\right) + (\partial_t^j\Gamma)\theta\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Unter Verwendung dieser Rechnungen, wollen wir nun aus $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0$ folgern, dass die Anfangsbedingungen (3.11) erfüllt sind. Zunächst gilt natürlich

$$U(0) = U_0, \quad U_t(0) = U_1, \quad \text{und} \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Zu beweisen verbleibt also nur, dass

$$\left(\partial_t^k q\right)(0) = q_k$$

für $k = 0, ..., n-1$ gilt. Letzteres beweisen wir mit Hilfe von vollständiger Induktion.

IA: Nach Definition des Vektors $\mathcal{V}$ sowie des Vektors $\mathcal{V}_0$ gilt $q(0) = q_0$.

IV: Wir nehmen an, dass $(\partial_t^k q)(0) = q_k$, $k = 0, ..., l$ für ein $l < n-1$ gilt.

IS: Wir beweisen, unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung, dass $(\partial_t^{l+1}q)(0) = q_{l+1}$ gilt. Mit Hilfe von (3.15), der Gleichung (3.26) sowie der Tatsache, dass $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0$ gilt erhalten wir zunächst:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l+1}\frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\left(\partial_t^{l+1-k}q\right)(0,\cdot) + \sum_{k=0}^{l}\frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!}K\left(\partial_t^{l-k}\nabla\theta\right)(0,\cdot) \\
&-\frac{\tau_q^n}{n!}(n-1)!\frac{1}{\tau_\theta^{l+1}(n-l-2)!}q(0,\cdot) \\
= \;& \sum_{k=0}^{l+1}\frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}q_{l+1-k}(\cdot) + \sum_{k=0}^{l}\frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!}K\nabla\theta_{l-k}(\cdot) - \frac{\tau_q^n}{n!}(n-1)!\frac{1}{\tau_\theta^{l+1}(n-l-2)!}q_0(\cdot).
\end{aligned}
$$

Wegen $q(0,\cdot) = q_0(\cdot)$ folgt daraus unmittelbar

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l+1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} \left(\partial_t^{l+1-k} q\right)(0,\cdot) + \sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} K \left(\partial_t^{l-k} \nabla\theta\right)(0,\cdot) \\
= \; &\sum_{k=0}^{l+1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} q_{l+1-k} + \sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} K \nabla\theta_{l-k}(\cdot).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Können wir nun zeigen, dass die Gleichheit

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} K \left(\partial_t^{l-k} \nabla\theta\right)(0,\cdot) = \sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_\theta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} K \nabla\theta_{l-k} \tag{3.32}$$

richtig ist, so ist die Aussage bewiesen, denn aus der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{l+1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} \left(\partial_t^{l+1-k} q\right)(0,\cdot) = \sum_{k=1}^{l+1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!} q_{l+1-k}(\cdot)$$

und der Induktionsvoraussetzung folgt direkt

$$\left(\partial_t^{l+1} q\right)(0,\cdot) = q_{l+1}(\cdot).$$

Um die Gleichung (3.32) zu beweisen, zeigen wir, dass für $0 \le k \le l$ die Identität

$$\left(\partial_t^k \theta\right)(0,\cdot) = \theta_k(\cdot)$$

gilt. Ist hierbei $k = 1$ bzw. $k = 2$, so folgt dies unmittelbar aus den Gleichungen (3.16) und (3.27) bzw. (3.17) und (3.28). Interessant ist also der Fall $3 \le k \le l$. Betrachten wir (3.18) und (3.29), so ist also zu beweisen, dass

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t^{k-1} \frac{r}{\delta}\right)(0,\cdot) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\partial_t^{k-1-j} \frac{1}{\delta}\right)(0,\cdot)\operatorname{div} q_j(\cdot) \\
&- \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\partial_t^{k-1-j} (\Gamma' \mathcal{D})\right)(0,\cdot) U_{j+1}(\cdot) \\
= \; &\left(\partial_t^{k-1} \frac{r}{\delta}\right)(0,\cdot) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\partial_t^{k-1-j} \frac{1}{\delta}\right)(0,\cdot)\operatorname{div} \left(\partial_t^j q\right)(0,\cdot) \\
&- \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\partial_t^{k-1-j} (\Gamma' \mathcal{D})\right)(0,\cdot) \left(\partial_t^{j+1} U\right)(0,\cdot)
\end{aligned}$$

für $3 \le k \le l$ richtig ist. Wegen der Induktionsvoraussetzung genügt es also zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\partial_t^{k-1-j} (\Gamma' \mathcal{D})\right)(0,\cdot) U_{j+1}(\cdot) \\
= \; &\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\partial_t^{k-1-j} (\Gamma' \mathcal{D})\right)(0,\cdot) \left(\partial_t^{j+1} U\right)(0,\cdot)
\end{aligned}$$

für $3 \leq k \leq l$ richtig ist. Und also genügt es zu zeigen, dass

$$\left(\partial_t^j U\right)(0,\cdot) = U_j(\cdot)$$

für $j = 1, ..., l$ erfüllt ist. Die U_j sind nun aber über die selbe Rekursionsformel definiert, deren Richtigkeit wir für die $\partial_t^j U$ bewiesen haben. Die Startwerte für diese Rekursionen stimmen überein und somit folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung.

□

Wir sind nun in diesem Abschnitt der Einfachheit halber von glatten Daten ausgegangen. Natürlich aber ist es möglich, die benötigte Regularität bei festem $n \in \mathbb{N}$ explizit anzugeben. So ist zum Beispiel im Fall $n = 2$ für die genannten Resultate keine Forderung notwendig, welche über die Voraussetzungen $(V1)$ - $(V5)$ im kommenden Abschnitt hinausgeht. Im Fall $n = 2$ erkennt man wegen (3.16), dass

$$\left(\frac{r}{\delta}\right)(0,\cdot) - \frac{1}{\delta}(0,\cdot)\left(\operatorname{div} q_0\right)(\cdot) - \frac{1}{\delta}(0,\cdot)\Gamma'(0,\cdot)\left(\mathcal{D}U_1\right)(\cdot) \in H^1(G)$$

erfüllt sein muss. Dem entnimmt man zusätzliche Forderungen. Entsprechend entnimmt man der Rekursionsformel (3.18) die benötigte Regularität für höhere Entwicklungen.

3.3.2 Existenz einer Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir basierend auf den Lemmata 3.2 und 3.3 einen Lösungsbegriff definieren, welcher den „klassischen" Begriff einer Lösung zu (3.7) - (3.11) verallgemeinert. Mit Hilfe der Theorie von Kato zeigen wir dann, dass tatsächlich eine Lösung dieser allgemeineren Form existiert. Zuvor allerdings geben wir Forderungen an die Koeffizienten und die Geometrie des Gebietes an, welche für unsere folgenden Resultate hinreichend sind.

Es sei G ein beschränktes Gebiet dessen Rand die strikte Kegeleigenschaft erfülle. Die reellen Konstanten τ_θ und τ_q seien positiv. Weiter machen wir die folgenden Voraussetzungen an die Koeffizienten:

$(V1)$ Es gelte $\mathcal{S} \in \mathcal{C}^2\left([0,\infty), \left(L^\infty(G)\right)^{6\times 6}\right)$. Ferner sei $\mathcal{S}(t)$ für jedes $t \in [0,\infty)$ symmetrisch und invertierbar. Die zugehörige Inverse sei mit $\mathcal{S}(t)^{-1}$ bezeichnet. Die dadurch gegebene Funktion $\mathcal{S}^{-1}$ möge $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty), \left(L^\infty(G)\right)^{6\times 6}\right)$ erfüllen. Zudem existiere eine Konstante $C_\mathcal{S} > 0$, so dass für alle $V \in \left(L^2(G)\right)^6$ und alle $t \in [0,\infty)$

$$C_\mathcal{S}\|V\|^2 \leq \left\langle V, S^{-1}V\right\rangle$$

gilt.

$(V2)$ Es gelte $K \in \left(L^\infty(G)\right)^{3\times 3}$. Ferner sei die Matrix K symmetrisch und invertierbar. Die zugehörige Inverse sei mit $K(t)^{-1}$ bezeichnet. Die dadurch gegebene Funktion K^{-1} möge $K^{-1} \in \left(L^\infty(G)\right)^{3\times 3}$ erfüllen. Zudem existiere eine Konstante C_K, so dass für alle $V \in \left(L^2(G)\right)^3$

$$C_K\|V\|^2 \leq \left\langle V, K^{-1}V\right\rangle$$

gilt.

$(V3)$ Es gelte $\rho \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty),(L^\infty(G))^{3\times 3}\right)$. Weiter sei $\rho(t)$ für jedes $t \in [0,\infty)$ symmetrisch und invertierbar. Die zugehörige Inverse sei mit $\rho(t)^{-1}$ bezeichnet. Die dadurch gegebene Funktion ρ^{-1} möge $\rho^{-1} \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty),(L^\infty(G))^{3\times 3}\right)$. erfüllen Zudem existiere eine Konstante $C_\rho > 0$, so dass für alle $V \in \left(L^2(G)\right)^3$ und alle $t \in [0,\infty)$

$$C_\rho \|V\|^2 \leq \langle V, \rho(t)V\rangle$$

gilt.

$(V4)$ Es sei $\delta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), L^\infty(G))$ und es existiere eine Konstante $C_\delta > 0$ so dass $C_\delta \leq \delta(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$ gelte.

$(V5)$ Es sei $\Gamma \in \mathcal{C}^1\left([0,\infty),\left(H^3(G)\right)^6\right)$.

Unter Verwendung der in (3.13) definierten Matrix $\mathcal{Q}$ definieren wir für festes t und beliebige $U, V \in \left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ das gewichtete Skalarprodukt

$$\langle U, V\rangle_t := \langle U, \mathcal{Q}V\rangle$$

und bezeichnen den entstehenden Hilbertraum $\left(\left(L^2(G)\right)^{3n+10}, \langle\cdot,\cdot\rangle_t\right)$ mit $\mathcal{H}_t$. Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_t$. Um im weiteren Verlauf die Schreibweise zu vereinfachen, schreiben wir

$$\mathcal{H} = \left(L^2(G)\right)^{3n+10} = \left(L^2(G)\right)^6 \times \left(L^2(G)\right)^3 \times L^2(G) \times \left(L^2(G)\right)^3 \times \underbrace{\left(L^2(G)\right)^3 \times ... \times \left(L^2(G)\right)^3}_{n-1-mal}$$

und verstehen $V = (V^1, V^2, V^3, V^4, (V^{4+k})_{1\leq k\leq n-1}) \in \left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ entsprechend. Wir definieren nun

$$D(\mathcal{N}) := W^1_{\mathcal{D}'}(G) \times W^1_{0,\mathcal{D}}(G) \times W^1_0(G) \times W^1_{\mathrm{div}}(G) \times \left(\left(L^2(G)\right)^3\right)^{n-1}$$

und damit

$$D(\mathcal{A}) := D(\mathcal{A}(t)) := D(\mathcal{N}). \tag{3.33}$$

Schließlich sei für festes $t \in [0,T]$ der Operator $\mathcal{A}(t)\colon D(\mathcal{A}(t)) \subset \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathcal{H}_t$ für $V \in D(\mathcal{A}(t))$ durch

$$\mathcal{A}(t)V := \mathcal{Q}^{-1}(t)(\mathcal{N}(t) + \mathcal{B}(t))V \tag{3.34}$$

definiert.

Definition 3.4 *Ist* $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^0([0,T], D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T],\left(L^2(G)\right)^{3n+10}\right)$ *eine Lösung zu*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t &= \mathcal{A}\mathcal{V} + \mathcal{F}, \\ \mathcal{V}(0) &= \mathcal{V}_0 \end{aligned}$$

für ein gegebenes $\mathcal{V}_0 \in D(\mathcal{A})$*, welches die Gestalt* (3.15) *hat, so sprechen wir von einer verallgemeinerten Lösung zu* (3.7) - (3.11).

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Gestalt von $\mathcal{V}_0 \in D(\mathcal{A})$ in die folgenden Argumentationen nicht eingeht.

Lemma 3.5 *Die von $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ induzierte Norm $\| \cdot \|_t$ auf $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ ist mit der üblichen $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ - Norm gleichmäßig äquivalent, d.h. es existieren reelle Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass*

$$\forall t \in [0,T]\ \forall V \in \left(L^2(G)\right)^{3n+10}: \quad C_1\|V\| \leq \|V\|_t \leq C_2\|V\|$$

gilt.

Beweis: Die Existenz von Konstanten C_1 und C_2 mit der obigen Eigenschaft ist wegen den Forderungen an die in Q vorkommenden Teilmatrizen klar. $\square$

Unser nächstes Ziel ist es, zu beweisen, dass die Operatorfamilie $(\mathcal{A}(t))_{t\in[0,T]}$ eine stabile Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern auf $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ ist. Um dies zu beweisen gehen wir in mehreren Schritten vor. Zunächst schreiben wir den Operator $\mathcal{A}(t)$ für $t \in [0,T]$ in der Form

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t).$$

Der Operator $\mathcal{A}_1(t)$ wird dabei für jedes $t \in [0,T]$ gewisse Symmetrieeigenschaften erfüllen, welche es uns ermöglichen, darauf zu schließen, dass $(\mathcal{A}_1(t))_{t\in[0,T]}$ eine stabile Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern ist. Der Operator $\mathcal{A}_2(t)$ wird für $t \in [0,T]$ ein beschränkter Operator auf $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ sein und damit ergibt sich schließlich, dass auch $(\mathcal{A}(t))_{t\in[0,T]}$ eine stabile Familie von Halbgruppenerzeugern ist.

Wir definieren für festes $t \in [0,T]$

$$D(\mathcal{A}_1(t)) := D(\mathcal{A}(t)) \tag{3.35}$$

und damit den Operator $\mathcal{A}_1(t)\colon D(\mathcal{A}_1(t)) \subset \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathcal{H}_t$ für $V \in D(\mathcal{A}_1(t))$ durch

$$\mathcal{A}_1(t)V := \mathcal{Q}^{-1} \cdot \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \mathcal{D} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & -\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\Gamma'\mathcal{D} & 0 & -\operatorname{div} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\nabla & -\operatorname{Id} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) V. \tag{3.36}$$

Lemma 3.6 *Es sei $t \in [0,T]$ fest. Der in* (3.35) *und* (3.36) *definierte Operator $\mathcal{A}_1(t)$ ist abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(\mathcal{A}_1(t))$ mit $\|V_n - V\|_t \to 0$ und $\|\mathcal{A}_1(t)V_n - W\|_t \to 0$ für $n \to \infty$. Wir beweisen nun, dass $V \in D(\mathcal{A}_1(t))$ und $\mathcal{A}_1(t)V = W$ gilt. Wegen $\mathcal{A}_1(t)V_n \to W$ für $n \to \infty$ und der Stetigkeit des Skalarprodukts in $\mathcal{H}_t$ gilt insbesondere für alle $\Phi \in \mathcal{H}_t$

$$\langle \mathcal{A}_1(t)V_n, \Phi \rangle_t \to \langle W, \Phi \rangle_t \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Letzteres ist mit

$$\left\langle \mathcal{D}V_n^2, \Phi^1 \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'V_n^1 - \mathcal{D}'\Gamma V_n^3, \Phi^2 \right\rangle + \left\langle -\Gamma'\mathcal{D}V_n^2 - \text{div } V_n^4, \Phi^3 \right\rangle + \left\langle -\nabla V_n^3 - V_n^4, \Phi^4 \right\rangle$$
$$\to \left\langle W^1, \mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \right\rangle + \left\langle W^2, \rho\Phi^2 \right\rangle + \left\langle W^3, \delta\Phi^3 \right\rangle + \left\langle W^4, \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{n-1}} \frac{1}{n} K^{-1}\Phi^4 \right\rangle + \sum_{k=5}^{n+3} \left\langle W^k, \Phi^k \right\rangle \tag{3.37}$$

für $n \to \infty$ äquivalent. Wir gehen nun in mehreren Schritten vor:

(i) Wir wählen $\Phi^1 \in \left(L^2(G)\right)^6$ beliebig und setzen damit $\Phi := (\Phi^1, 0, ..., 0)$, dann geht (3.37) in

$$\left\langle \mathcal{D}V_n^2, \Phi^1 \right\rangle \to \left\langle W^1, \mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Ist speziell $\Phi^1 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^6$, so erhalten wir damit:

$$-\left\langle V_n^2, \mathcal{D}'\Phi^1 \right\rangle \to \left\langle W^1, \mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

also mit der Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$-\left\langle V^2, \mathcal{D}'\Phi^1 \right\rangle = \left\langle \mathcal{S}^{-1}W^1, \Phi^1 \right\rangle.$$

Letzteres bedeutet aber $\mathcal{D}V^2 \in \left(L^2(G)\right)^6$ und $\mathcal{S}\mathcal{D}V^2 = W^1$. Wählen wir nun $\Phi^1 \in \left(L^2(G)\right)^6$ mit $\mathcal{D}'\Phi^1 \in \left(L^2(G)\right)^3$ beliebig, so erhalten wir mit der selben Argumentation wie eben $-\left\langle V^2, \mathcal{D}'\Phi^1 \right\rangle = \left\langle \mathcal{S}^{-1}W^1, \Phi^1 \right\rangle$ und also ist $V^2 \in W^1_{0,\mathcal{D}}(G)$.

(ii) Wir wählen $\Phi^3 \in L^2(G)$ beliebig und setzen damit $\Phi := (0, 0, \Phi^3, 0, ..., 0)$, dann geht (3.37) in

$$\left\langle -\Gamma'\mathcal{D}V_n^2 - \text{div } V_n^4, \Phi^3 \right\rangle \to \left\langle W^3, \delta\Phi^3 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Ist speziell $\Phi^3 \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$, so erhalten wir also:

$$\left\langle -\Gamma'\mathcal{D}V_n^2, \Phi^3 \right\rangle + \left\langle V_n^4, \nabla\Phi^3 \right\rangle \to \left\langle W^3, \delta\Phi^3 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

was wiederum unter Verwendung der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\left\langle -\Gamma'\mathcal{D}V^2, \Phi^3 \right\rangle + \left\langle V^4, \nabla\Phi^3 \right\rangle = \left\langle \delta W^3, \Phi^3 \right\rangle$$

liefert. Dies bedeutet aber div $V^4 \in L^2(G)$ und $W^3 = -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}V^2 - \frac{1}{\delta}\text{div } V^4$.

(iii) Wir wählen nun $\Phi^4 \in \left(L^2(G)\right)^3$ und setzen damit $\Phi := (0, 0, 0, \Phi_4, 0, ..., 0)$, dann geht (3.37) in

$$\left\langle -\nabla V_n^3 - V_n^4, \Phi^4 \right\rangle \to \left\langle W^4, \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{n-1}} \frac{1}{n} K^{-1}\Phi^4 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Wählen wir nun speziell $\Phi^4 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^3$, so ergibt sich

$$\left\langle V_n^3, \text{div } \Phi^4 \right\rangle - \left\langle V_n^4, \Phi^4 \right\rangle \to \left\langle W^4, \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{n-1}} \frac{1}{n} K^{-1}\Phi^4 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

also

$$\left\langle V^3, \operatorname{div} \Phi^4 \right\rangle - \left\langle V^4, \Phi^4 \right\rangle = \left\langle W^4, \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{n-1}} \frac{1}{n} K^{-1} \Phi^4 \right\rangle.$$

Wir erhalten also $\nabla V^3 \in \left(L^2(G)\right)^3$ und $W_4 = -n\frac{\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n} K \nabla V^3 - n\frac{\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n} K V_4$. Mit der üblichen Argumentation sieht man aber auch sofort ein, dass $V^3 \in W_0^1(G)$ gilt.

(*iv*) Wir wählen $\Phi^2 \in \left(L^2(G)\right)^3$ beliebig und setzen damit $\Phi := (0, \Phi^2, 0, ..., 0)$. Damit geht (3.37) in

$$\left\langle \mathcal{D}' V_n^1 - \mathcal{D}' \Gamma V_n^3, \Phi^2 \right\rangle \to \left\langle W^2, \rho \Phi^2 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

über. Wählen wir speziell $\Phi^2 \in \left(\mathcal{C}_0^\infty(G)\right)^3$, so erhalten wir

$$-\left\langle V_n^1, \mathcal{D}\Phi^2 \right\rangle - \left\langle \mathcal{D}' \Gamma V_n^3, \Phi^2 \right\rangle \to \left\langle W^2, \rho \Phi^2 \right\rangle \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

also

$$-\left\langle V^1, \mathcal{D}\Phi^2 \right\rangle - \left\langle \mathcal{D}' \Gamma V^3, \Phi^2 \right\rangle = \left\langle W^2, \rho \Phi^2 \right\rangle.$$

Damit ergibt sich schließlich $\mathcal{D}' V^1 \in \left(L^2(G)\right)^6$ mit $W^2 = \rho^{-1} \mathcal{D}' V_1 - \rho^{-1} \mathcal{D}' \Gamma V^3$.

Betrachten wir mit der selben Strategie die verbleibenden Terme in (3.37), so ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 3.7 *Es sei $t \in [0, T]$ fest. Der in* (3.35) *und* (3.36) *definierte Operator $\mathcal{A}_1(t)$ ist dicht definiert, es gilt $D(\mathcal{A}_1(t)) = D(\mathcal{A}_1^*(t))$ und für $V \in D(\mathcal{A}_1^*(t))$ ist*

$$\mathcal{A}_1^*(t) V = \mathcal{Q}^{-1} \cdot \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -\mathcal{D} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathcal{D}' & 0 & \mathcal{D}'(\Gamma \cdot) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma' \mathcal{D} & 0 & \operatorname{div} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nabla & -\operatorname{Id} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) V.$$

Beweis: Es ist offensichtlich, dass der in (3.35) und (3.36) definierte Operator dicht definiert ist. Es sei $W \in D(\mathcal{A}_1^*(t))$. Dann gibt es ein $F \in \mathcal{H}_t$, so dass für alle $\Phi \in D(\mathcal{A}_1(t))$ gilt:

$$\langle \mathcal{A}_1(t)\Phi, W \rangle_t = \langle \Phi, F \rangle_t.$$

Letzteres ist nun gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{D}\Phi^2, W^1 \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'\Phi^1 - \mathcal{D}'\Gamma\Phi^3, W^2 \right\rangle \\ &+ \left\langle -\Gamma'\mathcal{D}\Phi^2 - \operatorname{div} \Phi^4, W^3 \right\rangle + \left\langle -\nabla\Phi^3 - \Phi^4, W^4 \right\rangle \\ = &\left\langle \Phi^1, \mathcal{S}^{-1} F^1 \right\rangle + \left\langle \Phi^2, \rho F^2 \right\rangle + \left\langle \Phi^3, \delta F^3 \right\rangle + \left\langle \Phi^4, \frac{\tau_q^n}{n \tau_\theta^{n-1}} K^{-1} F^4 \right\rangle + \sum_{k=5}^{n+3} \left\langle \Phi^k, F^k \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Wir gehen nun in mehreren Schritten vor:

(i) Wir wählen $\Phi^1 \in \left(C_0^\infty(G)\right)^6$ und setzen damit $\Phi := (\Phi^1, 0, ..., 0)$. Dann geht (3.38) in

$$\left\langle \mathcal{D}'\Phi^1, W^2 \right\rangle = \left\langle \Phi^1, \mathcal{S}^{-1}F^1 \right\rangle$$

über. Dies bedeutet nun aber nichts anderes als $W^2 \in W^1_{\mathcal{D}}(G)$ mit

$$\mathcal{D}W^2 = -\mathcal{S}^{-1}F^1 \quad \text{bzw.} \quad F^1 = -\mathcal{S}\mathcal{D}W^2.$$

Wählen wir nun $\Phi^1 \in W^1_{\mathcal{D}'}(G)$, so erhalten wir mit der selben Argumentation wie oben $W^2 \in W^1_{0,\mathcal{D}}(G)$.

(ii) Wir wählen $\Phi^3 \in C_0^\infty(G)$ und setzen damit $\Phi := (0, 0, \Phi^3, 0, ..., 0)$. Dann geht (3.38) in

$$\langle -\mathcal{D}'\Gamma\Phi^3, W^2 \rangle - \left\langle \nabla\Phi^3, W^4 \right\rangle = \langle \Phi^3, \delta F^3 \rangle$$

bzw. in

$$-\left\langle \nabla\Phi^3, W^4 \right\rangle = \langle \Phi^3, \delta F^3 - \Gamma'\mathcal{D}W^2 \rangle$$

über. Dies bedeutet aber $W^4 \in W^1_{\text{div}}(G)$ mit

$$\text{div } W^4 = \delta F^3 - \Gamma'\mathcal{D}W^2 \quad \text{bzw.} \quad F^3 = \frac{1}{\delta}\text{div } W^4 + \frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}W^2.$$

(iii) Wir wählen $\Phi^4 \in \left(C_0^\infty(G)\right)^3$ und setzen damit $\Phi := (0, 0, 0, \Phi^4, 0, ..., 0)$. Dann geht (3.38) in

$$\left\langle -\text{div } \Phi^4, W^3 \right\rangle - \left\langle \Phi^4, W^4 \right\rangle = \left\langle \Phi^4, \frac{\tau_q^n}{n\tau_\theta^{n-1}} K^{-1}F^4 \right\rangle$$

bzw. in

$$-\left\langle \text{div } \Phi^4, W^3 \right\rangle = \left\langle \Phi^4, \frac{\tau_q^n}{n\tau_\theta^{n-1}} K^{-1}F^4 + W^4 \right\rangle$$

über. Damit erhalten wir also $W^3 \in H^1(G)$ mit

$$\nabla W^3 = \frac{\tau_q^n}{n\tau_\theta^{n-1}} K^{-1}F^4 + W^4 \quad \text{bzw.} \quad F^4 = \frac{n\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n} K\nabla W^3 - \frac{n\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n} KW^4.$$

Wählen wir $\Phi^4 \in \left(L^2(G)\right)^6$ mit div $\Phi^4 \in L^2(G)$, so ergibt sich mit derselben Argumentation $W^3 \in W^1_0(G)$.

(iv) Wir wählen $\Phi^2 \in (C_0^\infty(G))^3$ und setzen damit $\Phi := (0, \Phi^2, 0, ..., 0)$. Dann geht (3.38) in

$$\langle -\Gamma'\mathcal{D}\Phi^2, W^3 \rangle + \left\langle \mathcal{D}\Phi^2, W^1 \right\rangle = \langle \Phi^2, \rho F^2 \rangle$$

bzw. in

$$\left\langle \mathcal{D}\Phi^2, W^1 \right\rangle = \langle \Phi^2, \rho F^2 - \mathcal{D}'(\Gamma W^3) \rangle$$

über. Wir erhalten also $W^1 \in W^1_{\mathcal{D}'}(G)$ und

$$\mathcal{D}'W^1 = -\rho F^2 + \mathcal{D}'\Gamma W^3 \quad \text{bzw.} \quad F^2 = -\rho^{-1}\mathcal{D}'W^1 + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma W^3).$$

Diese Argumentation liefert uns nun $D(\mathcal{A}_1^*(t)) \subset D(\mathcal{A}_1(t))$. Die verbleibende Inklusion ist einfach einzusehen. $\square$

Lemma 3.8 *Es sei $t \in [0, T]$ fest. Der in* (3.35) *und* (3.36) *definierte Operator $\mathcal{A}_1(t)$ ist dissipativ.*

Beweis: Dies rechnen wir direkt nach. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_1(t)V, V\rangle_t &= \left\langle \mathcal{D}V^2, V^1 \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'V^1, V^2 \right\rangle - \langle \mathcal{D}'\Gamma V^3, V^2\rangle - \langle \Gamma'\mathcal{D}V^2, V^3\rangle \\
&\quad - \left\langle \operatorname{div} V^4, V^3 \right\rangle - \left\langle \nabla V^3, V^4 \right\rangle - \left\langle V^4, V^4 \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{D}V^2, V^1 \right\rangle - \left\langle V^1, \mathcal{D}V^2 \right\rangle - \langle \mathcal{D}'\Gamma V^3, V^2\rangle + \langle V^2, \mathcal{D}'\Gamma V^3\rangle \\
&\quad - \left\langle \operatorname{div} V^4, V^3 \right\rangle + \left\langle V^3, \operatorname{div} V^4 \right\rangle - \left\langle V^4, V^4 \right\rangle .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir aber

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}_1(t)V, V\rangle = -\left\langle V^4, V^4 \right\rangle ,$$

also ist $\mathcal{A}_1(t)$ für festes $t \in [0, T]$ dissipativ. $\square$

Korollar 3.9 *Es sei $t \in [0, T]$ fest. Der in* (3.35) *und* (3.36) *definierte Operator $\mathcal{A}_1(t)$ ist der Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{H}_t$.*

Beweis: Nach Lemma 3.7 und Lemma 3.8 ist der dicht definierte Operator $\mathcal{A}_1(t)$ wie auch der Operator $\mathcal{A}_1^*(t)$ dissipativ. Nach Lemma 3.6 ist der Operator $\mathcal{A}_1(t)$ abgeschlossen. Somit folgt aus Korollar 1.7, dass der Operator $\mathcal{A}_1(t)$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{H}_t$ erzeugt. $\square$

Wir wollen nun beweisen, dass es sich bei der Familie $(\mathcal{A}_1(t))_{t\in[0,T]}$ um eine stabile Familie von C_0-Halbgruppenerzeugern auf $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ handelt. Zu beachten ist, dass wir bis zu diesem Zeitpunkt nur wissen, dass $\mathcal{A}_1(t)$ der Erzeuger einer C_0- Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{H}_t$ ist.

Lemma 3.10 *Die Operatorfamilie $(\mathcal{A}_1(t))_{t\in[0,T]}$ ist eine stabile Familie von C_0-Halbgruppenerzeugern auf dem Hilbertraum $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$.*

Beweis: Es sei $0 \neq V \in \left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ beliebig gewählt. Wir betrachten die Funktion

$$f_V \colon [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \ln(\|V\|_t^2).$$

Wegen $V \neq 0$ ist die Funktion f_V wohldefiniert und wegen den Regularitätsforderungen an die Koeffizienten ist f_V differenzierbar. Wir erhalten

$$\left|f_V'(t)\right| = \left|\frac{1}{\|V\|_t^2}\left(\|V\|_t^2\right)'\right| = \frac{1}{\|V\|_t^2}\left|\left\langle V, \mathcal{Q}'V\right\rangle\right| \leq C$$

für eine entsprechend gewählte positive reelle Konstante C. Unter Verwendung des Mittelwertsatzes erhalten wir nun für $s < t$:

$$\ln(\|V\|_t^2) - \ln(\|V\|_s^2) \leq C|t - s|$$

und also
$$\frac{\|V\|_t^2}{\|V\|_s^2} \leq e^{C|t-s|}.$$
Damit können wir unter Verwendung von Lemma 1.10 auf die Behauptung schließen. $\square$

Es gilt nun
$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \Big(\mathcal{Q}^{-1}(t)(\mathcal{N}(t) + \mathcal{B}(t)) - \mathcal{A}_1(t)\Big) \tag{3.39}$$
und wir definieren $\mathcal{A}_2(t) := \mathcal{Q}^{-1}(t)(\mathcal{N}(t) + \mathcal{B}(t)) - \mathcal{A}_1(t)$. Offensichtlich handelt es sich bei $\mathcal{A}_2(t)$ um einen auf $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$ definierten Operator, welcher aufgrund der Forderungen an die Koeffizienten beschränkt ist. Damit liefert uns Satz 1.11 das folgende

Korollar 3.11 *Die Operatorfamilie $(\mathcal{A}(t))_{t\in[0,T]}$ ist eine stabile Familie von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppenerzeugern auf dem Hilbertraum $\left(L^2(G)\right)^{3n+10}$.*

Wir definieren die Norm $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$ für $V \in D(\mathcal{A}(t))$ durch
$$\|V\|_{D(\mathcal{A})} := \left(\|V\|^2 + \|\mathcal{L}V\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.40}$$
Hierbei sei $\mathcal{L}$ für $V \in D(\mathcal{A}(t))$ durch
$$\mathcal{L}V = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -\mathcal{D} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathcal{D}' & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{div} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nabla & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) V$$
definiert.

Lemma 3.12 *Die Graphennorm $\|\cdot\|_G$ auf $D(\mathcal{A}(t))$ ist mit der Norm $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$ gleichmäßig äquivalent, d.h. es existieren reelle Konstanten $K_1, K_2 > 0$, so dass*
$$\forall t \in [0,T]\ \forall V \in D(\mathcal{A}(t)):\ K_1\|V\|_{D(\mathcal{A})} \leq \|V\|_G \leq K_2\|V\|_{D(\mathcal{A})}$$
gilt.

Beweis: Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen, stellen wir zwei Abschätzungen zur Verfügung, die uns die Arbeit im Folgenden erleichtern werden. Es seien $\zeta_i \in \mathcal{C}^0([0,T], H^2(G))$ für $i = 1, ..., 6$. Damit definieren wir den Vektor $\zeta := (\zeta_1, ..., \zeta_6)$. Es gilt dann für alle $V^2 \in W^1_{0,\mathcal{D}}(G)$
$$\left\|\zeta\mathcal{D}V^2\right\| \quad \leq \quad C_1 \left\|\mathcal{D}V^2\right\| \tag{3.41}$$
wobei die Konstante C_1 unabhängig von t gewählt werden kann. Ist $\zeta_i \in \mathcal{C}^0([0,T], H^3(G))$ für $i = 1, ..., 6$, so gilt für alle $V^3 \in W^1_0(G)$:
$$\left\|\mathcal{D}'\zeta V^3\right\|^2 \quad \leq \quad C_2\|V^3\|^2 + C_3\|\nabla V^3\|^2. \tag{3.42}$$

Auch hier sei bemerkt, dass wir die beiden Konstanten C_2 und C_3 unabhängig von t wählen können. Es sei $t \in [0,T]$ beliebig gewählt und $V \in D(\mathcal{A}(t))$. Es gilt mit einer Konstanten $C > 0$, welche wieder von Zeile zu Zeile ihren Wert ändern kann:

$$\begin{aligned}
\|V\|_G^2 &= \|V\|_t^2 + \|\mathcal{A}_1(t)V + \mathcal{A}_2(t)V\|_t^2 \\
&\leq C\|V\|^2 + C\|\mathcal{A}_1(t)V\|^2 \\
&\leq C\|V\|^2 + C\left\|\mathcal{S}\mathcal{D}V^2\right\|^2 + C\left\|\rho^{-1}\mathcal{D}'V^1 - \rho^{-1}\mathcal{D}'\Gamma V^3\right\|^2 \\
&\quad + C\left\|\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}V^2 + \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\ V^4\right\|^2 + \frac{n\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n}C\left\|K\nabla V^3 + KV^4\right\|^2 \\
&\leq C\|V\|^2 + C\left\|\mathcal{D}V^2\right\|^2 + C\left\|\mathcal{D}'V^1\right\|^2 + C\left\|\mathcal{D}'\Gamma V^3\right\|^2 \\
&\quad + C\left\|\Gamma'\mathcal{D}V^2\right\|^2 + C\left\|\mathrm{div}\ V^4\right\|^2 + \frac{n\tau_\theta^{n-1}}{\tau_q^n}C\left\|\nabla V^3 + V^4\right\|^2.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir aber unter Verwendung von (3.41) und (3.42) die Existenz einer Konstanten K_2 mit

$$\|V\|_G \leq K_2\|V\|_{D(\mathcal{A})}.$$

Bei der verbleibenden Abschätzung gehen wir nun in mehreren Schritten vor. Im ersten Schritt schätzen wir den Term $\mathcal{D}V^2$ ab. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{D}V^2\right\|^2 &\leq 2\left\|\mathcal{S}^{-1}\left(\mathcal{S}\mathcal{D}V^2 + \mathcal{S}_t S^{-1}V^1\right)\right\|^2 + 2\left\|S^{-1}\mathcal{S}_t S^{-1}V^1\right\|^2 \\
&\leq C\|\mathcal{A}(t)V\|^2 + C\|V\|^2.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Term div V^4:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{div}\ V^4\right\|^2 &\leq 2\left\|\delta\left(\frac{1}{\delta}\mathrm{div}\ V^4 + \frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}V^2\right)\right\|^2 + 2\left\|\Gamma'\mathcal{D}V^2\right\|^2 \\
&\leq C\|\mathcal{A}(t)V\|^2 + C\|V\|^2.
\end{aligned}$$

Die verbleibenden Terme schätzt man auf analoge Weise ab. Demnach ergibt sich wiederum die Existenz einer Konstanten K_1 mit

$$K_1\|V\|_{D(\mathcal{A})} \leq \|V\|_G.$$

□

Ferner haben wir

Lemma 3.13 *Es gilt* $\mathcal{A} \in \mathrm{Lip}([0,T], L(D(\mathcal{A}), \left(L^2(G)\right)^{3n+10}))$.

Beweis: Wir beweisen im folgenden, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\|\partial_t\mathcal{A}(t)V\|^2 \leq C\|V\|_{D(\mathcal{A})}^2.$$

Mit Hilfe von

$$\partial_t \mathcal{A} = \begin{pmatrix} (S_t S^{-1})_t & \mathcal{S}_t \mathcal{D} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (\rho^{-1})_t \mathcal{D}' & 0 & -(\rho^{-1})_t \mathcal{D}'(\Gamma \cdot) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma_t \cdot) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{\delta}\Gamma')_t \mathcal{D} & 0 & (-\frac{1}{\delta})_t \mathrm{div} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich (wir verwenden wieder universelle Konstanten, deuten aber jeweils an, von den Schranken welcher Funktion sie abhängen):

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathcal{A} V\|^2 &= \| \left(\mathcal{S}_t \mathcal{S}^{-1}\right)_t V^1 + \mathcal{S}_t \mathcal{D} V^2 \|^2 + \|(\rho^{-1})_t \mathcal{D}' V^1 - (\rho^{-1})_t \mathcal{D}'(\Gamma V^3) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma_t V^3)\|^2 \\
&\quad + \left\| - \left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)_t \mathcal{D} V^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)_t \mathrm{div}\ V^4 \right\|^2 \\
&\le \| \left(\mathcal{S}_t \mathcal{S}^{-1}\right)_t V^1 + \mathcal{S}_t \mathcal{D} V^2 \|^2 + 2\|(\rho^{-1})_t \mathcal{D}' V^1\|^2 + 2\|(-\rho^{-1})_t \mathcal{D}'(\Gamma V^3) + \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma_t V^3)\|^2 \\
&\quad + 2\left\| \left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)_t \mathcal{D} V^2 \right\|^2 + 2\left\| \left(\frac{1}{\delta}\right)_t \mathrm{div}\ V^4 \right\|^2 \\
&\le C(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}_{tt}, \mathcal{S}^{-1}, \mathcal{S}_t^{-1})\|V^1\|^2 + C(\mathcal{S}_t)\|\mathcal{D} V^2\|^2 + 2C((\rho^{-1})_t)\|\mathcal{D}' V^1\|^2 \\
&\quad + 4\|(-\rho^{-1})_t \mathcal{D}'(\Gamma V^3)\|^2 + 4\|\rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma_t V^3)\|^2 \\
&\quad + 2\left\| \left(\frac{1}{\delta}\Gamma'\right)_t \mathcal{D} V^2 \right\|^2 + 2C\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)_t\right)\|\mathrm{div}\ V^4\|^2 \\
&\le C(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}_{tt}, \mathcal{S}^{-1}, \mathcal{S}_t^{-1})\|V^1\|^2 + C(\mathcal{S}_t)\|\mathcal{D} V^2\|^2 + 2C((\rho^{-1})_t)\|\mathcal{D}' V^1\|^2 \\
&\quad + C((-\rho^{-1})_t)\|\mathcal{D}'(\Gamma V^3)\|^2 + 4C(\rho^{-1})\|\mathcal{D}'(\Gamma_t V^3)\|^2 \\
&\quad + 2C\left(\delta, \left(\frac{1}{\delta}\right)_t, \Gamma, \Gamma_t\right)\|\mathcal{D} V^2\|^2 + 2C\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)_t\right)\|\mathrm{div}\ V^4\|^2 \\
&\le C\|V\|^2_{D(\mathcal{A})}.
\end{aligned}$$

Zu bemerken ist hier, dass die letzte Ungleichung erneut auf den Abschätzungen (3.41) und (3.42) basiert. Desweiteren ist die Konstante C unabhängig von t wählbar. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Fassen wir die bisherigen Resultate zusammen, so ergibt sich das

Lemma 3.14 *Es sei $T > 0$. Gelten die Voraussetzungen $(V1)$ - $(V5)$, so bildet das Tripel*

$$\left((\mathcal{A}(t))_{t\in[0,T]}, X_0, Y_1\right),$$

mit

$$X_0 \equiv \left(\left(L^2(G)\right)^{3n+10}, \quad \|\cdot\|_{L^2}\right)$$

und

$$Y_1 \equiv \big(D(\mathcal{A}(t)), \quad \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}\big)$$

ein CD-System.

Insgesamt erhalten wir unter Verwendung von Satz 1.13 nun den folgenden Existenzsatz:

Satz 3.15 *Der Operator $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ sei wie in (3.33) und (3.34) definiert. Weiter gelte $\mathcal{V}_0 \in D(\mathcal{A})$ und $\mathcal{F} \in \mathrm{Lip}([0,T], \big(L^2(G)\big)^{3n+10})$, wobei $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{F}$ wie in (3.14) und (3.15) definiert sind. Die auftretenden Koeffizienten mögen die Voraussetzungen $(V1)$ - $(V5)$ erfüllen. Dann existiert zu dem Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t &= \mathcal{A}\mathcal{V} + \mathcal{F}, \\ \mathcal{V}(0) &= \mathcal{V}_0, \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung

$$\mathcal{V} \in \mathcal{C}^0([0,T], D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T], \big(L^2(G)\big)^{3n+10}\right).$$

3.4 Der Spezialfall $n = 2$

In diesem Abschnitt wollen wir den Fall $n = 2$ des im vorigen Abschnitt vorgestellten Problems genauer betrachten. Hierbei werden wir uns auf den räumlich eindimensionalen Fall beschränken, es sei also $G := (0, L)$ für ein $L > 0$. In diesem Fall reduzieren sich die Gleichungen (3.7) - (3.9) zu

$$\rho u_{tt} - \partial_x(s\partial_x u) + \partial_x(\gamma\theta) = \rho b, \tag{3.43}$$

$$\delta\theta_t + q_x + \gamma u_{tx} = r, \tag{3.44}$$

$$\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + q = -\kappa\tau_\theta\theta_{tx} - \kappa\theta_x. \tag{3.45}$$

Die Anfangsbedingungen (3.10) gehen in

$$\begin{aligned} &u(0,\cdot) = u_0, && \theta(0,\cdot) = \theta_0, && q_t(0,\cdot) = q_1, \\ &u_t(0,\cdot) = u_1, && q(0,\cdot) = q_0, && \end{aligned} \tag{3.46}$$

über. Die Randbedingungen (3.11) haben die Gestalt:

$$u(t,0) = u(t,L) = \theta(t,0) = \theta(t,L) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.47}$$

Es wird uns nun möglich sein unter Zusatzvoraussetzungen, neben der verallgemeinerten Lösung eine Lösung von der Form

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}^3([0,T], L^2(G)) \cap \mathcal{C}^2([0,T], W_0^1(G)), \\ \theta &\in \mathcal{C}^2([0,T], L^2(G)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], W_0^1(G)), \\ q &\in \mathcal{C}^2([0,T], L^2(G)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], W^1(G)), \end{aligned}$$

mit $\partial_x(s\partial_x u) \in L^2(G)$ zu erhalten. Die im vorigen Abschnitt vorgestellten Vektoren $\mathcal{V}$ und $\mathcal{F}$ sowie die Matrizen $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{B}$ reduzieren sich zu:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} su_x \\ u_t \\ \theta \\ q \\ \frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + \kappa\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_0 = \begin{pmatrix} s(0,\cdot)u_{0,x} \\ u_1 \\ \theta_0 \\ q_0 \\ \frac{\tau_q^2}{2}q_1 + \tau_q q_0 + \kappa\tau_\theta\theta_{0,x} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\partial_x(\gamma\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\partial_x & 0 & -\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x & -\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)\frac{1}{\kappa} & \frac{1}{\kappa\tau_\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2} - 1 & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \frac{r}{\delta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_q^2}{2\kappa\tau_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s}s_t\frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der in (3.33) definierte Definitionsbereich hat in dieser Situation die Gestalt

$$D(\mathcal{A}) := W^1(G) \times W_0^1(G) \times W_0^1(G) \times W^1(G) \times L^2(G)$$

und die in (3.40) definierte Norm geht in die für diesen Raum kanonische Norm über.
Für $V \in D(\mathcal{A})$ ist

$$\mathcal{A}V := \mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{N} + \mathcal{B})V.$$

Bevor wir mit den ersten Resultaten beginnen, formulieren wir hinreichende Forderungen an die Koeffizienten:

$(F1)$ Es gelte $s \in \mathcal{C}^2([0,\infty), H^1(G)) \cap \mathcal{C}^3([0,\infty), L^\infty(G))$. Ferner existiere eine Konstante $C_s > 0$ mit $s(t) > C_s$ für $t \geq 0$.

$(F2)$ Es gelte $\rho \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^1(G)) \cap \mathcal{C}^2([0,\infty), L^\infty(G))$ Ferner existiere eine Konstante $C_\rho > 0$ mit $\rho(t) > C_\rho$ für $t \geq 0$.

$(F3)$ Es gelte $\delta \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^1(G)) \cap \mathcal{C}^2([0,\infty), L^\infty(G))$ Ferner existiere eine Konstante $C_\delta > 0$ mit $\delta(t) > C_\delta$.

$(F4)$ Es gelte $\kappa \in H^1(G)$. Ferner existiere eine Konstante $C_\kappa > 0$ mit $\kappa > C_\kappa$.

$(F5)$ $\gamma \in H^1(G)$.

Wir erhalten zuerst den

Satz 3.16 *Es sei* $\mathcal{V}_0 \in D(\mathcal{A})$ *und* $\mathcal{F} \in \mathrm{Lip}\left([0,T], \left(L^2(G)\right)^5\right)$. *Unter den Voraussetzungen* $(F1)$ - $(F5)$ *existiert eine eindeutige Lösung*

$$\mathcal{V} \in \mathcal{C}^0\left([0,T], W^1(G) \times W_0^1(G) \times W_0^1(G) \times W^1(G) \times L^2(G)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T], \left(L^2(G)\right)^5\right)$$

zu

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{A}\mathcal{V} + \mathcal{F}, \quad \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0.$$

Beweis: Analog zu Satz 3.15. □

Zu bemerken ist, dass bereits geringere Forderungen als $(F1)$ - $(F5)$ für den obigen Satz ausreichend sind. Im Hinblick auf unser angestrebtes Resultat wollen wir diese aber nicht gesondert angeben.

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
X_0 &:= \left(L^2(G)\right)^5, & Y_0 &:= X_0, \\
X_1 &:= W^1(G) \times W^1(G) \times W^1(G) \times W^1(G) \times L^2(G), & Y_1 &:= D(\mathcal{A}(t)) \cap X_1 = D(\mathcal{A}(t)), \\
X_2 &:= \left\{V \in X_1 : \mathcal{L}_\gamma V \in X_1\right\}, & Y_2 &:= D(\mathcal{A}(t)) \cap X_2.
\end{aligned}$$

Hierbei ist für $V \in X_1$:

$$\mathcal{L}_\gamma V := \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\partial_x(\gamma\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\partial_x & 0 & -\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x & -\frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right) & \frac{2}{\tau_q^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right) - 1 & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix} V.$$

Die Räume X_0, X_1, Y_0 und Y_1 seien mit den jeweils kanonischen Skalarprodukten ausgestattet. Ferner sei das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_2}$ für $V, W \in X_2$ durch

$$\langle V, W\rangle_{X_2} := \langle V, W\rangle_{X_1} + \left\langle \mathcal{L}_\gamma V, \mathcal{L}_\gamma W\right\rangle_{X_1}$$

definiert. Man sieht nun leicht ein, dass es sich bei allen Räumen um Hilberträume handelt. Damit können wir unseren ersten Satz beweisen.

Satz 3.17 *Für alle* $t \in [0,T]$ *und alle* $0 \le j \le 1$ *gilt:*

$$\left(\Phi \in Y_1 \wedge \mathcal{A}(t)\Phi \in X_j\right) \Longrightarrow \Phi \in Y_{j+1}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|\Phi\|_{Y_{j+1}} \le K\left(\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_j} + \|\Phi\|_{X_0}\right). \tag{3.48}$$

Beweis: Wir gliedern den Beweis in zwei Schritte.

(i) Wir wenden uns als erstes dem Fall $j = 0$ zu. Ist $\Phi \in Y_1$ und $\mathcal{A}(t)\Phi \in X_0$, so folgt trivialerweise, dass $\Phi \in Y_1$ gilt. Wir wenden uns der Abschätzung (3.48) zu. Es gilt nach Definition der Norm auf Y_1:

$$\|\Phi\|_{Y_1}^2 = \|\Phi^1\|_{H^1}^2 + \|\Phi^2\|_{H^1}^2 + \|\Phi^3\|_{H^1}^2 + \|\Phi^4\|_{H^1}^2 + \|\Phi^5\|_{L^2}^2.$$

Weiter berechnen wir

$$\mathcal{A}(t)\Phi = \begin{pmatrix} \frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2 \\ \frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3) \\ -\gamma\frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4 \\ -\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3 - \frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 + \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5 \\ \frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 - \Phi^4 - \frac{1}{\tau_\theta}\Phi^5 \end{pmatrix}$$

und sehen damit ein, dass

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0}^2 = &\left\|\frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2\right\|^2 + \left\|\frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|^2 + \left\|-\gamma\frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|^2 \\ &+ \left\|-\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3 - \frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 + \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5\right\|^2 \\ &+ \left\|\frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 - \Phi^4 - \frac{1}{\tau_\theta}\Phi^5\right\|^2\end{aligned}$$

gilt. Wir müssen nun die L^2-Norm der Terme $\partial_x\Phi^1$, $\partial_x\Phi^2$, $\partial_x\Phi^3$ und $\partial_x\Phi^4$ abschätzen. Dies erledigen wir in vier Schritten:

- Wir schätzen als erstes $\|\partial_x\Phi^2\|$ ab. Es gilt:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\Phi^2\right\|^2 &= \left\|\frac{s}{s}\partial_x\Phi^2\right\|^2 \le C\left\|s\partial_x\Phi^2\right\|^2 = C\left\|-\frac{s_t}{s}\Phi^1 + \frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2\right\|^2 \\ &\le C\left\|\frac{s_t}{s}\Phi^1\right\|^2 + C\left\|\frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2\right\|^2 \le C\left\|\Phi^1\right\|^2 + C\left\|\frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2\right\|^2 \\ &\le C\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0}^2 + C\|\Phi\|_{X_0}^2.\end{aligned}$$

- Wir schätzen nun den Term $\|\partial_x\Phi^4\|$ ab. Es gilt:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\Phi^4\right\| &= \left\|-\frac{\delta}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|^2 \le C\left\|-\frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|^2 = C\left\|\frac{\gamma}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{\gamma}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|^2 \\ &\le C\left\|\frac{\gamma}{\delta}\partial_x\Phi^2\right\|^2 + C\left\|-\frac{\gamma}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|^2 \le C\left\|\partial_x\Phi^2\right\|^2 + C\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0}^2 \\ &\le C\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0}^2 + C\|\Phi\|_{X_0}^2.\end{aligned}$$

- Nun betrachten wir $\|\partial_x \Phi^3\|$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x \Phi^3\right\|^2 &\leq C\left\|\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3\right\|^2 \leq \left\|-\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3 - \frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 + \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5\right\|^2 \\ &\quad + C\left\|\frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 - \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5\right\|^2 \\ &\leq C\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0}^2 + C\|\Phi\|_{X_0}^2.\end{aligned}$$

- Abschließend betrachten wir $\|\partial_x \Phi^1\|$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x \Phi^1\right\| &= \left\|\frac{\rho}{\rho}\partial_x\Phi^1\right\|^2 \leq C\left\|\frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1\right\|^2 = C\left\|\frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3) + \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|^2 \\ &\leq C\left\|\frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|^2 + C\left\|\frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|^2 \\ &\leq C\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0}^2 + C\|\Phi\|_{X_0}^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun insgesamt

$$\|\Phi\|_{Y_1}^2 \leq C\left(\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0}^2 + \|\Phi\|_{X_0}^2\right)$$

und also (3.48).

(ii) Wir wenden uns nun dem Fall $j=1$ zu. Es sei $\Phi \in Y_1$ und $\mathcal{A}(t)\Phi \in X_1$. Letzteres bedeutet

$$\begin{pmatrix} \frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2 \\ \frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3) \\ -\gamma\frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4 \\ -\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3 - \frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 + \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5 \\ \frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 - \Phi^4 - \frac{1}{\tau_\theta}\Phi^5 \end{pmatrix} \in X_1.$$

Zeigen müssen wir, dass

$$\begin{pmatrix} \partial_x\Phi^2 \\ \partial_x\Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3) \\ -\gamma\partial_x\Phi^2 - \partial_x\Phi^4 \\ -\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3 - \frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 + \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5 \\ \left(\frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right) - 1\right)\Phi^4 - \frac{1}{\tau_\theta}\Phi^5 \end{pmatrix} \in X_1$$

gilt. Also genügt es die folgenden Elementbeziehungen zu beweisen:

$$\begin{aligned}\partial_x\Phi^2 &\in H^1(G), \\ \partial_x\Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3) &\in H^1(G), \\ -\gamma\partial_x\Phi^2 - \partial_x\Phi^4 &\in H^1(G).\end{aligned}$$

Dies erledigen wir in den folgenden drei Schritten:

- Wir wissen, dass $\frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2 \in H^1(G)$ gilt. Wegen $\Phi \in Y_1$ wissen wir auch, dass $\Phi^1 \in H^1(G)$ richtig ist. Aufgrund der Regularität von s_t bzw. $\frac{1}{s}$ wissen wir damit, dass wir von $\frac{s_t}{s}\Phi^1 \in H^1(G)$ ausgehen dürfen. Somit ist aber $s\partial_x\Phi^2 \in H^1(G)$. Wiederum wegen der Regularität von s bzw. $\frac{1}{s}$ schließen wir damit, dass $\partial_x\Phi^2 \in H^1(G)$ gilt.
- Wir wissen, dass $\frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3) \in H^1(G)$ gilt. Unter Verwendung der Regularität von ρ schließen wir damit sofort $\partial_x\Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3) \in H^1(G)$.
- Abschließend ergibt sich sofort aus $-\gamma\frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4 \in H^1(G)$ und der Regularität von δ, dass auch $-\gamma\partial_x\Phi^2 - \partial_x\Phi^4 \in H^1(G)$ gilt.

Wir beweisen nun die Richtigkeit der Abschätzung (3.48). Zuerst gilt wieder nach Definition:

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{Y_2}^2 = {} & \left\|\Phi^1\right\|_{H^1}^2 + \|\Phi^2\|_{H^1}^2 + \|\Phi^3\|_{H^1}^2 + \left\|\Phi^4\right\|_{H^1}^2 + \|\Phi^5\|_{L^2}^2 \\
& \|\partial_x\Phi^2\|_{H^1}^2 + \left\|\partial_x\Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|_{H^1}^2 + \left\|-\gamma\partial_x\Phi^2 - \partial_x\Phi^4\right\|_{H^1}^2 \\
& + \left\|-\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3 - \frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 + \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5\right\|_{H^1}^2 \\
& + \left\|\left(\frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right) - 1\right)\Phi^4 - \frac{1}{\tau_\theta}\Phi^5\right\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_1}^2 = {} & \left\|\frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2\right\|_{H^1}^2 + \left\|\frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|_{H^1}^2 + \left\|-\gamma\frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|_{H^1}^2 \\
& + \left\|-\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x\Phi^3 - \frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 + \frac{2}{\tau_q^2}\Phi^5\right\|_{H^1}^2 \\
& + \left\|\frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\Phi^4 - \Phi^4 - \frac{1}{\tau_\theta}\Phi^5\right\|^2 .
\end{aligned}$$

Wegen den Abschätzungen im Fall $j = 0$ und $\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_0} \leq \|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_1}$ sind nur die H^1-Normen der Terme $\partial_x\Phi^2$, $\partial_x\Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3)$ und $-\gamma\partial_x\Phi^2 - \partial_x\Phi^4$ abzuschätzen. Wir gehen in drei Schritten vor und verwenden wieder eine universelle Konstante $C > 0$, welche von Zeile zu Zeile ihren Wert ändern kann.

- Wir müssen $\|\partial_x\Phi^2\|_{H^1}$ abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\Phi^2\|_{H^1} &= \left\|\frac{s}{s}\partial_x\Phi^2\right\|_{H^1}^2 \leq C\left\|s\partial_x\Phi^2\right\|_{H^1}^2 = C\left\|-\frac{s_t}{s}\Phi^1 + \frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2\right\|_{H^1}^2 \\
&\leq C\left\|\frac{s_t}{s}\Phi^1 + s\partial_x\Phi^2\right\|_{H^1}^2 + C\left\|\frac{s_t}{s}\Phi^1\right\|_{H^1}^2 \\
&\leq C\|\mathcal{A}(t)\Phi\|_{X_1}^2 + C\|\Phi\|_{X_0}^2 .
\end{aligned}$$

- Nun betrachten wir $\|\partial_x\Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3)\|_{H^1}$. Es ergibt sich:

$$\left\|\partial_x\Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|_{H^1}^2 = \left\|\frac{\rho}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{\rho}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|_{H^1}^2 \leq C\left\|\frac{1}{\rho}\partial_x\Phi^1 - \frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\Phi^3)\right\|_{H^1}^2.$$

- Abschließend betrachten wir $\|-\gamma\partial_x\Phi^2 - \partial_x\Phi^4\|_{H^1}$ und erhalten

$$\left\|-\gamma\partial_x\Phi^2 - \partial_x\Phi^4\right\|_{H^1}^2 = \left\|-\frac{\delta\gamma}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{\delta}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|_{H^1}^2 \leq C\left\|-\frac{\gamma}{\delta}\partial_x\Phi^2 - \frac{1}{\delta}\partial_x\Phi^4\right\|_{H^1}^2.$$

Damit ist die Abschätzung gezeigt. □
Schließlich beweisen wir den

Satz 3.18 *Für $0 \leq r \leq 1$ gilt*

$$\partial_t^r\mathcal{A} \in \mathrm{Lip}\left([0,T], L(Y_{j+r+1}; X_j)\right), \quad (0 \leq j \leq 2-r-1).$$

Beweis: Es gilt

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{s_t}{s} & s\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho}\partial_x & 0 & -\frac{1}{\rho}\partial_x(\gamma\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{\delta}\partial_x & 0 & -\frac{1}{\delta}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\tau_\theta}{\tau_q^2}\kappa\partial_x & -\frac{2}{\tau_q^2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right) & \frac{2}{\tau_q^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right) - 1 & -\frac{1}{\tau_\theta} \end{pmatrix}$$

und somit für $k \geq 1$

$$\partial_t^k\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} (\partial_t^k\frac{s_t}{s}) & (\partial_t^k s)\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ \left(\partial_t^k\frac{1}{\rho}\right)\partial_x & 0 & -\left(\partial_t^k\frac{1}{\rho}\right)\partial_x(\gamma\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\partial_t^k\frac{\gamma}{\delta}\right)\partial_x & 0 & -\left(\partial_t^k\frac{1}{\delta}\right)\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir gliedern den Beweis nun in die folgenden Schritte:

(i) Bereits gezeigt wurde im Fall $r = j = 0$, dass $\mathcal{A} \in \mathrm{Lip}\left([0,T], L(Y_1; X_0)\right)$ gilt.

(ii) Wir betrachten den Fall $r = 0$, $j = 1$, also

$$\partial_t\mathcal{A} \in L^\infty\left([0,T], L(Y_2; X_1)\right).$$

Hierzu beweisen wir, dass eine von t unabhängige Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\|\partial_t\mathcal{A}(t)V\|_{X_1} \leq C\|V\|_{Y_2}$$

erfüllt ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathcal{A}(t)V\|_{X_1}^2 &= \left\| \left(\frac{s_t}{s}\right)_t \Phi^1 + s_t \partial_x \Phi^2 \right\|_{H^1}^2 + \left\| \left(\frac{1}{\rho}\right)_t \partial_x \Phi^1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)_t \partial_x(\gamma\Phi^3) \right\|_{H^1}^2 \\
&\quad + \left\| -\gamma \left(\frac{1}{\delta}\right)_t \partial_x \Phi^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)_t \partial_x \Phi^4 \right\|_{H^1}^2 \\
&\leq 2 \left\| \left(\frac{s_t}{s}\right)_t \Phi^1 \right\|_{H^1}^2 + 2 \left\| s_t \partial_x \Phi^2 \right\|_{H^1}^2 + C \left\| \partial_x \Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3) \right\|_{H^1}^2 \\
&\quad + C \left\| -\gamma \partial_x \Phi^2 - \partial_x \Phi^4 \right\|_{H^1}^2 \\
&\leq C \left\| \Phi^1 \right\|_{H^1}^2 + C \left\| \partial_x \Phi^2 \right\|_{H^1}^2 + C \left\| \partial_x \Phi^1 - \partial_x(\gamma\Phi^3) \right\|_{H^1}^2 \\
&\quad + C \left\| -\gamma \partial_x \Phi^2 - \partial_x \Phi^4 \right\|_{H^1}^2 \\
&\leq C \|V\|_{Y_2}^2 .
\end{aligned}$$

(iii) Schließlich beweisen wir den Fall $r = 1$, $j = 0$, also:

$$\partial_t^2 \mathcal{A} \in L^\infty \left([0, T], L(Y_2; X_0)\right).$$

Hierzu beweisen wir, dass eine von t unabhängige Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\|\partial_t^2 \mathcal{A}(t)V\|_{X_0} \leq C\|V\|_{Y_2}$$

für alle $V \in Y_2$ gilt. Wir können hier folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t^2 \mathcal{A}(t)V\|^2 \\
&\leq \left\| \left(\frac{s_t}{s}\right)_{tt} V^1 + s_{tt} \partial_x V^2 \right\|^2 + \left\| \left(\frac{1}{\rho}\right)_{tt} \partial_x V^1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)_{tt} \partial_x(\gamma V^3) \right\|^2 \\
&\quad + \left\| \left(\frac{1}{\delta}\right)_{tt} \gamma \partial_x V^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)_{tt} \partial_x V^4 \right\|^2 \\
&\leq 2C\|V^1\|^2 + C\|\partial_x V^2\|^2 + C\|\partial_x V^1 - \partial_x(\gamma V^3)\|^2 \\
&\quad + C\|\gamma \partial_x V^2 - \partial_x V^4\|^2 \\
&\leq C\left(\|V\|^2 + \|\mathcal{L}_\gamma V\|^2\right).
\end{aligned}$$

Und damit ist auch die Richtigkeit dieser Abschätzung bewiesen.

□

Damit können wir nun den Satz über höhere Regularität formulieren:

Satz 3.19 *Es gelten die Voraussetzungen* $(F1)$ - $(F5)$. *Ferner mögen* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{V}_0$ *die in* (1.4), (1.5) *und* (1.6) *formulierten Bedingungen* $(L4)$ *und* $(A1)$ *erfüllen. Dann gilt für die Lösung* $\mathcal{V}$ *aus Satz* 3.16*:*

$$\mathcal{V} \in \mathcal{C}^1\left([0, T], W^1(G) \times W_0^1(G) \times W_0^1(G) \times W^1(G) \times L^2(G)\right) \cap C^2\left([0, T], \left(L^2(G)\right)^5\right).$$

Daraus folgt nun aber unmittelbar der

Satz 3.20 *Es gelten die Voraussetzungen* $(F1)$ - $(F5)$*. Ferner mögen* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{V}_0$ *die in* (1.4), (1.5) *und* (1.6) *formulierten Bedingungen* $(L4)$ *und* $(A1)$ *erfüllen. Dann existiert eine eindeutige Lösung* (u, θ, q) *zu* (3.43) - (3.47) *und es gilt:*

$$\begin{aligned}
u &\in \mathcal{C}^3([0,T], L^2(G)) \cap \mathcal{C}^2([0,T], W_0^1(G)), \\
\theta &\in \mathcal{C}^2([0,T], L^2(G)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], W_0^1(G)), \\
q &\in \mathcal{C}^2([0,T], L^2(G)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], W^1(G)),
\end{aligned}$$

sowie $\partial_x(s\partial_x u) \in L^2(G)$.

Abschließend wollen wir bemerken, dass diese Vorgehensweise nicht ohne starke Zusatzforderungen an die Koeffizientenmatrizen auf höhere Raumdimensionen übertragen werden kann. Dies ist zum Beispiel in der folgenden Situation ersichtlich: Hat man die Information $\Phi^1 \in W^1_{\mathcal{D}'}(G)$ gegeben, so kann man daraus nicht schließen, dass auch $\mathcal{S}_t\mathcal{S}^{-1}\Phi^1 \in W^1_{\mathcal{D}'}(G)$ gilt. Dies aber ist im räumlich eindimensionalen Fall bei glattem $\mathcal{S}$ richtig und wurde ausgenutzt. Hier wären also starke strukturelle Forderungen an die Matrix $\mathcal{S}$ notwendig.

Kapitel 4

Energetische Vergleiche

4.1 Einführung

Wir wollen in diesem Kapitel für festes $2 \le n \in \mathbb{N}$ die Lösung $(U^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ zu dem Problem (3.7) - (3.11) im homogenen Fall mit der Lösung (U^0, θ^0) des klassischen Problems:

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'(\mathcal{S}\mathcal{D}U) + \mathcal{D}'(\Gamma\theta) = 0, \tag{4.1}$$

$$\delta\theta_t + \operatorname{div} q + \Gamma'\mathcal{D}U_t = 0, \tag{4.2}$$

$$q + \kappa\nabla\theta = 0, \tag{4.3}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$U(0,x) = U_0^0(x), \qquad U_t(0,x) = U_1^0(x), \qquad \theta(0,x) = \theta_0^0(x), \quad (x \in G) \tag{4.4}$$

und den Dirichlet - Randbedingungen

$$U(t,x) = \theta(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \partial G \tag{4.5}$$

vergleichen. Für $n = 1$, das heißt für den Fall, dass es sich bei der dritten Gleichung um das Gesetz von Cattaneo handelt, wird in [17] und [18] mit einer Konstanten $C > 0$ eine Abschätzung von der Form

$$\mathrm{d}E(t) \le C\tau_q^2 \int_0^t \left\|\nabla\theta_t^0(s)\right\|^2 \mathrm{d}s$$

bewiesen, wobei $\mathrm{d}E(t)$ für $t \ge 0$ durch

$$\mathrm{d}E(t) := \frac{1}{2}\left(\left\|U_t^\tau - U_t^0\right\|^2 + \left\|\nabla U^\tau - \nabla U^0\right\|^2 + \left\|\theta^\tau - \theta^0\right\|^2 + \tau_q\left\|q + \kappa\nabla\theta^0\right\|^2\right)$$

definiert ist. Unter Verwendung der exponentiellen Stabilität der Lösung von (4.1) - (4.5) wird schließlich eine Abschätzung von der Form

$$\mathrm{d}E(t) \le C\tau_q^2$$

bewiesen. Nachteilig ist in dieser Situation, dass die Konstante C nicht explizit gegeben ist. Weiterhin ist die zeitliche Entwicklung des Fehlers nicht erkennbar. In [5] werden diese Ergebnisse von Irmscher überarbeitet und es wird eine Abschätzung von der Form

$$\mathrm{d}E(t) \leq C(t)\tau_q^2$$

mit einer explizit gegebenen Funktion $t \longmapsto C(t)$ gezeigt. Die exponentielle Stabilität geht hierbei nicht in die Argumentation ein. Wir wollen nun zuerst Lösungen zu (3.7) - (3.11) für den Fall $n = 2$ mit Lösungen von (4.1) - (4.5) vergleichen. Hierbei ist zu erwähnen, dass bei der Beweistechnik von Irmscher die Dissipativität des betrachteten Systems erster Ordnung wesentlich ist. Wir werden deshalb zunächst aus dem in (3.12) - (3.14) gegebenen System erster Ordnung ein System ableiten, dessen dissipativer Charakter vergleichsweise einfach einzusehen ist. Dies wird es uns ermöglichen, die Resultate von Irmscher zu übertragen. Zu bemerken ist, dass im Fall $n = 2$ die Wohlgestelltheit im Fall von konstanten Koeffizienten bereits bekannt ist. Auch ist bekannt, dass unter der Bedingung

$$\tau_\theta > \frac{\tau_q}{2} \tag{4.6}$$

exponentielle Stabilität der Lösungen vorliegt. Diese Ergebnisse findet man in [16]. Dies läßt nun ahnen, dass (4.6) auch bei dem angestrebten Vergleich eine wesentliche Rolle spielt. Im Einzelnen wird (4.6) schon beim Nachweis der Dissipativität eingehen. Obgleich wir im Fall $n \geq 3$ keinen dissipativen Charakter erkennen können, wird es uns trotzdem möglich sein, Abschätzungen für kleine Zeiten t zu beweisen. Die in diesen Abschätzungen auftretenden Konstanten sind zumindest im Fall $n = 3$ noch physikalisch relevant, in allen Fällen aber von mathematischem Interesse. Bei den nun folgenden Abschätzungen gehen wir von konstanten Koeffizienten aus, welche wie im vorigen Abschnitt gefordert, positiv definit und symmetrisch sind. Zudem soll κ der Einfachheit halber ein Skalar sein. Wir bemerken aber, dass der Fall, in dem κ eine Matrix ist, analog behandelt werden kann.

4.2 Das Gesetz von Fourier und eine Entwicklung zweiter Ordnung

Wir betrachten das folgende Anfangs - Randwertproblem

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'(\mathcal{S}\mathcal{D}U) + \mathcal{D}'(\Gamma\theta) = 0, \tag{4.7}$$

$$\delta\theta_t + \operatorname{div} q + \Gamma'\mathcal{D}U_t = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + q + \kappa\nabla\theta + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t = 0, \tag{4.9}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} U(0,x) &= U_0^\tau(x), & U_t(0,x) &= U_1^\tau(x), & \theta(0,x) &= \theta_0^\tau(x), \\ q(0,x) &= q_0^\tau(x), & q_t(0,x) &= q_1^\tau(x), & &(x \in G) \end{aligned} \tag{4.10}$$

und den Dirichlet - Randbedingungen

$$U(t,x) = \theta(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \partial G. \tag{4.11}$$

Für die weiteren Argumentationen sind einige Resultate für die klassische Thermoelastizität notwendig. Diese wollen wir gleich zu Beginn formulieren. Ist (U^0, θ^0) eine Lösung zu (4.1) - (4.5), so gilt mit

$$\mathcal{V}^0 := \begin{pmatrix} \mathcal{SD}U^0 \\ U_t^0 \\ \theta^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & -\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) \\ 0 & -\Gamma'\mathcal{D} & \operatorname{div}\,(\kappa\nabla\cdot) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}^0 := \begin{pmatrix} \mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\mathcal{V}_t^0 = (\mathcal{Q}^0)^{-1}\mathcal{N}^0\mathcal{V}^0.$$

Definition 4.1 *Wir definieren für $j \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$ den Energieterm $E_j^0(t)$ durch*

$$E_j^0(t) := \frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathcal{V}^0(t), \mathcal{Q}^0\partial_t^{j-1}\mathcal{V}^0(t) \right\rangle.$$

Es ergibt sich nun völlig analog zu dem Resultat in [5] das

Lemma 4.2 *Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_j^0(t) = -\kappa\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta(t,\cdot)\right\|^2.$$

Insbesondere folgen

$$E_{j+1}^0(0) - E_{j+1}^0(t) = \int_0^t \kappa\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t(s,\cdot)\right\|^2 \mathrm{d}s \quad \textit{und} \quad E_{j+1}^0(t) \leq E_{j+1}^0(0).$$

Ebenfalls überträgt sich das

Lemma 4.3 *Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$E_j^0(0) - E_j^0(t) \leq \varepsilon_j^0(t) := \begin{cases} 2t\sqrt{E_j^0(0)E_{j+1}^0(0)} - t^2E_{j+1}^0(0) & : \; 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{E_j^0(0)}{E_{j+1}^0(0)}}, \\ E_j^0(0) & : \; \textit{sonst}. \end{cases}$$

Unser nächstes Ziel ist es, in Analogie zum Beweis des Resultats in [5], die Energie der Differenzen von Lösungen zu (4.1) - (4.5) bzw. (4.7) - (4.11) geeignet abzuschätzen. Wir geben nun auf Basis des Systems (3.12) - (3.14) ein System erster Ordnung für (4.7) - (4.11) an, für welches wir später zeigen werden, dass es einen dissipativen Charakter hat. Für eine Lösung $(U^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ von (4.7) - (4.11) definieren wir

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} \mathcal{SD}U^\tau \\ U_t^\tau \\ \theta^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau \\ \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q^\tau + \sqrt{\kappa\tau_\theta}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q^\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_q^2}{2\kappa}\,\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

und

$$\mathcal{N} := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & -\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma'\mathcal{D} & 0 & -\sqrt{\tau_\theta}\mathrm{div} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\tau_\theta}\nabla & -\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\frac{1}{\kappa}\,\mathrm{Id} & \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\,\mathrm{Id} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2} - 1\right)\mathrm{Id} & -\frac{1}{\tau_\theta}\,\mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieses Vektors $\mathcal{V}$ und der Matrizen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{Q}$ ergibt sich zunächst durch direktes Nachrechnen:

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^\tau \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{S}\mathcal{D}U^\tau) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ -\delta^{-1}\Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau - \delta^{-1}\mathrm{div}\, q^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ -\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau - \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\tau_\theta}}\nabla\theta^\tau - \frac{1}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q^\tau \end{pmatrix}.$$

Ferner ergibt sich für die Zeitableitung des Vektors $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}_t = \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathcal{D}U^\tau)_t \\ U_{tt}^\tau \\ \theta_t^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau + \sqrt{\kappa\tau_\theta}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}U^\tau)_t = \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^\tau,$$

und den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \rho U_{tt}^\tau - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U^\tau + \mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) = 0 &\iff \rho U_{tt}^\tau = \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U^\tau - \mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ &\iff U_{tt}^\tau = \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{S}\mathcal{D}U^\tau) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau), \end{aligned}$$

$$\delta\theta_t^\tau + \mathrm{div}\, q^\tau + \Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau = 0 \iff \delta\theta_t^\tau = -\mathrm{div}\, q^\tau - \Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau \iff \theta_t^\tau = -\delta^{-1}\mathrm{div}\, q^\tau - \delta^{-1}\Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau,$$

sowie

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_q^2}{2}q_{tt}^\tau + \tau_q q_t^\tau + q^\tau + \kappa\nabla\theta^\tau + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t^\tau = 0 \\ \iff\quad & \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{1}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q^\tau + \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\tau_\theta}}\nabla\theta^\tau + \sqrt{\kappa\tau_\theta}\nabla\theta_t^\tau = 0 \\ \iff\quad & \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau + \sqrt{\kappa\tau_\theta}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau = -\frac{1}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q^\tau - \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\tau_\theta}}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich das

Lemma 4.4 *Ist $(U^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ eine Lösung zu $(4.7) - (4.11)$, so gilt mit den oben definierten Matrizen $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$ und dem Vektor $\mathcal{V}$ die Identität:*

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}\mathcal{V}.$$

Wir schreiben im Folgenden abkürzend $\mathcal{A}$ für $\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}$. Wie bereits zu Anfang erwähnt, liegt unsere Zielsetzung darin, die Energie der Differenzen von Lösungen zum ursprünglichen Problem $(4.1) - (4.5)$ und dem Problem $(4.7) - (4.11)$ geeignet abzuschätzen. Zunächst spezifizieren wir also, was genau wir unter den Differenzen der Lösungen verstehen wollen:

Definition 4.5 *Für eine Lösung $(U^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ von $(4.7) - (4.11)$ und eine Lösung (U^0, θ^0) von $(4.1) - (4.5)$ definieren wir die Differenzen $\mathrm{d}U$, $\mathrm{d}\theta$ und $\mathrm{d}q$ folgendermaßen:*

$$\mathrm{d}U := U^\tau - U^0, \qquad \mathrm{d}\theta := \theta^\tau - \theta^0, \qquad \mathrm{d}q := q^\tau + \kappa\nabla\theta^0. \tag{4.13}$$

Wir definieren die Energie nun mit Hilfe eines gewichteten Skalarprodukts. Dies wird es uns später ermöglichen, die Dissipativität schnell zu erhalten. In Analogie zu (4.12) definieren wir:

$$\mathrm{d}\mathcal{V} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}\mathrm{d}U \\ (\mathrm{d}U)_t \\ \mathrm{d}\theta \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}\mathrm{d}q \\ \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_t + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\mathrm{d}q + \kappa\sqrt{\frac{\tau_\theta}{\kappa}}\nabla\mathrm{d}\theta - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\mathrm{d}q \end{pmatrix}$$

und weiter:

Definition 4.6 *Die Energie der Ordnung $j \in \mathbb{N}$ der Differenzen sei für $t \geq 0$ durch*

$$\mathrm{d}E_j^\tau(t) := \frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}(t), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}(t)\right\rangle,$$

definiert.

Damit haben wir alle Begriffe zur Verfügung die wir benötigen, um unser angestrebtes Resultat zu formulieren:

Satz 4.7 (Energetischer Vergleich) *Es sei $j \in \mathbb{N}$ und $\tau_\theta > \frac{\tau_q}{2}$. Für alle $t \geq 0$ gilt*

$$\mathrm{d}E_j^\tau(t) \leq \frac{3\tau_q^4}{4}\varepsilon_{j+2}^0(t) + \frac{3\tau_q^2}{2}\varepsilon_{j+1}^0(t) + \frac{3\tau_\theta^2}{2}\varepsilon_{j+1}^0(t) + \mathrm{d}E_j^\tau(0).$$

Insbesondere folgt mit $U_0^\tau := U_0^0$, $U_1^\tau := U_1^0$, $\theta_0^\tau := \theta_0^0$, $q_0^\tau = -\kappa\nabla\theta_0^0$ und $q_1^\tau = -\kappa\nabla\theta_t^0(0,\cdot)$ im Fall $j = 1$:

$$\mathrm{d}E_1^\tau(t) \leq \frac{3\tau_q^4}{4}\varepsilon_3^0(t) + \frac{3\tau_q^2}{2}\varepsilon_2^0(t) + \frac{3\tau_\theta^2}{2}\varepsilon_2^0(t).$$

Beweis: Wir berechnen zunächst die Zeitableitung dieses Energieterms. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}E_j^\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\left\langle \partial_t^{j}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle + \left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\partial_t^{j}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle \partial_t^{j}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle + \overline{\left\langle \partial_t^{j}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle}\right) = \mathrm{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_t, \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle \\
&= \mathrm{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V} + \partial_t^{j-1}\left(\mathrm{d}\mathcal{V}_t - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}\right), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle \\
&= \mathrm{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}\right), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle \\
&= \mathrm{Re}\left\langle \mathcal{N}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}\right), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Nun berechnen wir die Terme $\mathrm{d}\mathcal{V}_t$ sowie $\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}$ im Detail. Es wird sich hierbei ergeben, dass die Differenz dieser Terme eine sehr einfache Gestalt hat. Auch dies ist nicht verwunderlich, da sich die Probleme (4.1) - (4.5) und (4.7) - (4.11) nur in der jeweils dritten Differentialgleichung unterscheiden. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\mathcal{V}) = &\begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^\tau \\ U_{tt}^\tau \\ \theta_t^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau + \sqrt{\kappa\tau_\theta}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^0 \\ U_{tt}^0 \\ \theta_t^0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 \\ -\frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_{tt}^0 - \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 + \sqrt{\kappa\tau_\theta}\nabla\theta_t^0 + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und weiter

$$
\mathcal{A}(\mathrm{d}\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^\tau \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U^\tau - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ -\delta^{-1}\Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau - \delta^{-1}\mathrm{div}\ q^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ -\frac{1}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q^\tau - \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\tau_\theta}}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}q_t^\tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^0 \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U^0 - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^0) \\ -\delta^{-1}\Gamma'\mathcal{D}U_t^0 + \delta^{-1}\mathrm{div}\ \kappa\nabla\theta^0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 \\ \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\tau_\theta}}\nabla\theta^0 - \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\tau_\theta}}\nabla\theta^0 + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 \end{pmatrix},
$$

also

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\left[\frac{\tau_q^2}{2}\kappa\nabla\theta_{tt}^0 + \tau_q\kappa\nabla\theta_t^0 - \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t^0\right] \end{pmatrix}.
$$

Wir wählen nun

$$\mathcal{W} \in W^1_{\mathcal{D}'}(G) \times W^1_{0,\mathcal{D}}(G) \times W^1_0(G) \times W^1_{\text{div}}(G) \times \left(L^2(G)\right)^3$$

und berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle &= \langle \mathcal{D}\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1\rangle - \overline{\langle \mathcal{D}\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1\rangle} \\
&\quad - \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma\mathcal{W}_3), \mathcal{W}_2\right\rangle + \overline{\langle \mathcal{D}'(\Gamma\mathcal{W}_3), \mathcal{W}_2\rangle} - \langle \sqrt{\tau_\theta}\text{div } \mathcal{W}_4, \mathcal{W}_3\rangle + \overline{\langle \sqrt{\tau_\theta}\text{div } \mathcal{W}_4, \mathcal{W}_3\rangle} \\
&\quad - \left\langle \left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\mathcal{W}_4 - \sqrt{\kappa^{-1}}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_4\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sqrt{\kappa^{-1}}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2} - 1\right)\mathcal{W}_4 - \frac{1}{\tau_\theta}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_5\right\rangle,
\end{aligned}$$

also

$$\text{Re}\,\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle = -\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\|^2 + \sqrt{\kappa^{-1}}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)\text{Re}\left\langle \mathcal{W}^4, \mathcal{W}^5\right\rangle - \frac{1}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2.$$

In der nun folgenden Abschätzung geht gleich zu Beginn ein, dass

$$\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} \geq 0$$

gelten muss. Letzteres ist aber äquivalent zu der Bedingung (4.6). Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{Re}\,\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle &\leq -\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\|^2 + \sqrt{\kappa^{-1}}\frac{1}{\tau_\theta}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\|\mathcal{W}_4\|\|\mathcal{W}_5\| - \frac{1}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 \\
&= -\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\|^2 \\
&\quad + \sqrt{\kappa^{-1}}\sqrt{\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)}\|\mathcal{W}_4\|\sqrt{\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)}\frac{1}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\| - \frac{1}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 \\
&\leq -\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\|^2 + \frac{1}{2}\kappa^{-1}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\|\mathcal{W}_4\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\frac{1}{\tau_\theta^2}\|\mathcal{W}_5\|^2 - \frac{1}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)\frac{1}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 - \frac{1}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\|^2 - \frac{1}{\tau_\theta}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)\right)\|\mathcal{W}_5\|^2.
\end{aligned}$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\tau_q\tau_\theta \le \tau_\theta^2 + \frac{1}{2}\tau_q^2 \quad &\Longrightarrow \quad \tau_q\tau_\theta - \frac{\tau_q^2}{2} \le \tau_\theta^2 \Longrightarrow \frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2} \le 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right) \le \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right) \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{1}{\tau_\theta}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)\right) \le -\frac{1}{2\tau_\theta}
\end{aligned}
$$

können wir

$$
\operatorname{Re}\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle \le -\frac{1}{2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\|^2 - \frac{1}{2\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2
$$

folgern. Unter Verwendung dieser Abschätzungen erhalten wir nun insgesamt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}E_j^\tau) &= \operatorname{Re}\left\langle \mathcal{N}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\left(\mathrm{d}\mathcal{V}_t - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}\right), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle \\
&\le -\frac{1}{2}\left(\tau_q - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\right)\kappa^{-1}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_4\|^2 - \frac{1}{2\tau_\theta}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5\|^2 \\
&\quad + \left\langle \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0 + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0 - \sqrt{\kappa\tau_\theta}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5\right\rangle \\
&\le -\frac{1}{2\tau_\theta}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5\|^2 \\
&\quad + \sqrt{\tau_\theta}\left\|\frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0 + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0 - \sqrt{\kappa\tau_\theta}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\| \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5\| \\
&\le -\frac{1}{2\tau_\theta}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5\|^2 + \frac{1}{2}\tau_\theta\left\|\frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0 + \frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0 - \sqrt{\kappa\tau_\theta}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2\tau_\theta}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5\|^2 \\
&\le \frac{3}{2}\tau_\theta\left(\left\|\frac{\tau_q^2}{2\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\right\|^2 + \left\|\frac{\tau_q}{\sqrt{\kappa\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\|^2 + \left\|\sqrt{\kappa\tau_\theta}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\|^2\right) \\
&\le \frac{3}{4}\tau_q^4\|\sqrt{\kappa}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\|^2 + \frac{3}{2}\tau_q^2\|\sqrt{\kappa}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\|^2 + \frac{3}{2}\tau_\theta^2\|\sqrt{\kappa}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\|^2.
\end{aligned}
$$

Integrieren wir diese Ungleichung, so ergibt sich

$$
\mathrm{d}E_j^\tau(t) \le \int_0^t \frac{3}{4}\tau_q^4\|\sqrt{\kappa}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\|^2 + \frac{3}{2}\tau_q^2\|\sqrt{\kappa}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\|^2 + \frac{3}{2}\tau_\theta^2\|\sqrt{\kappa}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\|^2\mathrm{d}s + \mathrm{d}E_j^\tau(0).
$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Lemma 4.2 und Lemma 4.3. □

4.3 Das Gesetz von Fourier und eine Entwicklung dritter Ordnung

Wir führen nun in q eine Taylorapproximation der Ordnung drei und in θ eine Taylorapproximation der Ordnung zwei durch. Es ergeben sich dann die folgenden Differentialgleichungen:

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'(\Gamma\theta) = 0, \tag{4.15}$$

$$\delta\theta_t + \operatorname{div} q + \Gamma'\mathcal{D}u_t = 0, \tag{4.16}$$

$$\frac{\tau_q^3}{6} q_{ttt} + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + q + \kappa\nabla\theta + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t + \kappa\frac{\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_{tt} = 0, \tag{4.17}$$

wie bisher mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} U(0,x) &= U_0^\tau(x), & U_t(0,x) &= U_1^\tau(x), & \theta(0,x) &= \theta_0^\tau(x), \\ q(0,x) &= q_0^\tau(x), & q_t(0,x) &= q_1^\tau(x), & q_{tt}(0,x) &= q_2^\tau(x), \quad (x \in G) \end{aligned} \tag{4.18}$$

und den Randbedingungen:

$$U(t,x) = \theta(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \partial G. \tag{4.19}$$

Wie im vorigen Abschnitt transformieren wir das obige System (4.15) - (4.17) in ein geeignetes System erster Ordnung. Für eine Lösung $(U^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ von (4.15) - (4.19) definieren wir

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U^\tau \\ U_t^\tau \\ \theta^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}} q^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}} q_t^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}} q^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}} q^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}} q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}} q_t^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}} q^\tau + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_t^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}} q^\tau \end{pmatrix}.$$

Weiter sei

$$\mathcal{N} := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}' & 0 & -\mathcal{D}'(\Gamma\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma'\mathcal{D} & 0 & -\sqrt{\tau_\theta}\operatorname{div} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\tau_\theta}\nabla & -\kappa^{-1}\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta} + \kappa^{-1}\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^2} & 2\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3} - \frac{\tau_q}{\tau_\theta} + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3} & -\frac{2}{\tau_\theta} & \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_q^2}{\sqrt{2}\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\sqrt{2}\tau_\theta^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} \mathcal{S}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir berechnen:

$$\mathcal{NV} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}U_t^\tau \\ \mathcal{D}'(\mathcal{SD}U^\tau) - \mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ -\Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau - \sqrt{\tau_\theta}\mathrm{div}\,\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau\right) \\ NV_4 \\ NV_5 \\ NV_6 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} NV_4 &= -\sqrt{\tau_\theta}\nabla\theta^\tau - \kappa^{-1}\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}\left(1 - \frac{2\tau_q}{3\tau_\theta}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau\right) \\ &\quad + 2\kappa^{-1}\left(\frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau\right) = \kappa^{-1}\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} NV_5 &= \left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3} - \frac{\tau_q}{\tau_\theta} + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau\right) \\ &\quad - \frac{2}{\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}}q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}}q^\tau + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_t^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}q^\tau\right) \\ &= \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_{tt}^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta_t^\tau \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} NV_6 &= \left(\frac{\tau_q^2}{\sqrt{2}\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\sqrt{2}\tau_\theta^3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau\right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}q^\tau\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\tau_\theta}}q^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}q_t^\tau - \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2\tau_\theta}}\nabla\theta^\tau \end{aligned}$$

gilt. Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{NV} = \begin{pmatrix} \mathcal{SD}U_t^\tau \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{SD}U^\tau) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau - \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\; q^\tau \\ \frac{3\tau_\theta}{\tau_q^3}\kappa NV_4 \\ NV_5 \\ NV_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{SD}U_t^\tau \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{SD}U^\tau) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau - \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\; q^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_{tt}^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta_t^\tau \\ -\frac{1}{\sqrt{2\tau_\theta}}q^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}q_t^\tau - \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2\tau_\theta}}\nabla\theta^\tau \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$\mathcal{V}_t = \begin{pmatrix} \mathcal{SD}U_t^\tau \\ U_{tt}^\tau \\ \theta_t^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}} q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}} q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}} q_t^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}} q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}} q_{ttt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}} q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}} q_t^\tau + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_{tt}^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}} q_t^\tau \end{pmatrix}$$

und somit ist wegen den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} U_{tt}^\tau &= \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{SD}U^\tau) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ \iff \rho U_{tt}^\tau &- \mathcal{D}'(\mathcal{SD}U^\tau) + \mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_t^\tau &= -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau - \frac{1}{\delta}\operatorname{div} q^\tau \\ \iff \delta\theta_t^\tau &+ \operatorname{div} q^\tau + \Gamma'\mathcal{D}U_t^\tau = 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}} q_{ttt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}} q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}} q_t^\tau + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_{tt}^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}} q_t^\tau \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\tau_\theta}} q^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}} q_t^\tau - \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}\tau_\theta}\nabla\theta^\tau \\ \iff &\frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}} q_{ttt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}} q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}} q_t^\tau + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_{tt}^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta_t^\tau + \frac{1}{\sqrt{2\tau_\theta}} q^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}\tau_\theta}\nabla\theta^\tau = 0 \\ \iff &\frac{\tau_q^3}{6} q_{ttt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}^\tau + \tau_q q_t^\tau + q^\tau + \kappa\nabla\theta^\tau + \kappa\tau_\theta\nabla\theta_t^\tau + \kappa\frac{\tau_\theta^2}{2}\nabla\theta_{tt}^\tau = 0 \end{aligned}$$

und den Differentialgleichungen (4.7) - (4.9) das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 4.8 *Ist $(U^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ eine Lösung zu (4.15) - (4.19), so gilt mit den oben definierten Matrizen $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$ und dem Vektor $\mathcal{V}$ die Identität*

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{N}\mathcal{V}.$$

Für eine Lösung $(U^\tau, \theta^\tau, q^\tau)$ von (4.15) - (4.17) und eine Lösung (U^0, θ^0) von (4.1) - (4.3) definieren wir unter Verwendung von Definition 4.5:

$$\mathrm{d}\mathcal{V} := \begin{pmatrix} \mathcal{SD}(\mathrm{d}U) \\ (\mathrm{d}U)_t \\ \mathrm{d}\theta \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}\mathrm{d}q \\ \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_t + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}\mathrm{d}q + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla(\mathrm{d}\theta) - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}\mathrm{d}q \\ \frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_{tt} + \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_t + \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}}(\mathrm{d}q) + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla(\mathrm{d}\theta)_t + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla(\mathrm{d}\theta) - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}\mathrm{d}q \end{pmatrix}.$$

Hiermit definieren wir wieder unsere Energie mit Hilfe der

Definition 4.9 *Die Energie der Ordnung $j \in \mathbb{N}$ der Differenzen sei für $t \geq 0$ durch*

$$\mathrm{d}E_j^\tau(t) := \frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}(t), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}(t)\right\rangle$$

definiert.

Es ist nun bereits im letzten Abschnitt aufgefallen, dass die Qualität der Abschätzung im Wesentlichen von der Abschätzbarkeit des Termes $\langle \mathcal{N}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathrm{d}\mathcal{V}\rangle$ abhängt. Um diesen Term geeignet abschätzen zu können, mussten wir im letzten Abschnitt $\frac{\tau_\theta}{\tau_q} > \frac{1}{2}$ voraussetzen. In der aktuellen Situation wird sich allerdings zeigen, dass $\frac{\tau_\theta}{\tau_q} > \frac{2}{3}$ benötigt wird. Wir formulieren nun den

Satz 4.10 (Energetischer Vergleich für kleine Zeiten) *Es sei $j \in \mathbb{N}$ und $\frac{3}{2}\tau_\theta > \tau_q$. Dann gilt für alle $t \geq 0$:*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_j^\tau(t) \leq e^{\frac{C}{\tau_q}t}\mathrm{d}E_j^\tau(0) + e^{\frac{C}{\tau_q}t}\int_0^t \tau_q^6\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{ttt}^0(s)\right\|^2 + \tau_q^4\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0(s)\right\|^2 + \tau_q^2\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\ + e^{\frac{C}{\tau_q}t}\int_0^t \tau_\theta^4\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0(s)\right\|^2 + \tau_\theta^2\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0(s)\right\|^2 \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Die Konstante $C > 0$ ist hierbei durch (4.20) *gegeben.*

Beweis: Wir berechnen zunächst die Zeitableitung dieses Energieterms. Es ergibt sich mit der selben Rechnung wie bei 4.14:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}E_j^\tau) = \mathrm{Re}\left\langle \mathcal{N}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}\right), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} = &\begin{pmatrix} \mathcal{SD}U_t^\tau \\ U_{tt}^\tau \\ \theta_t^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}}q_{ttt}^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}}q_{tt}^\tau + \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}}q_t^\tau + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_{tt}^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta_t^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}q_t^\tau \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \mathcal{SD}U_t^0 \\ U_{tt}^0 \\ \theta_t^0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 \\ -\frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_{tt}^0 - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta_t^0 + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 \\ -\frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_{ttt}^0 - \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_{tt}^0 - \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_{tt}^0 + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta_t^0 + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nun berechnen wir

$$\mathcal{A}(\mathrm{d}\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}(\mathrm{d}U)_t \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{S}\mathcal{D}(\mathrm{d}U)) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma \mathrm{d}\theta) \\ -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}(\mathrm{d}U)_t - \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\ \mathrm{d}q \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_t \\ \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_{tt} - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_t + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_t + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla(\mathrm{d}\theta)_t \\ -\frac{1}{\sqrt{2\tau_\theta}}(\mathrm{d}q) - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}(\mathrm{d}q)_t - \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2\tau_\theta}}\nabla(\mathrm{d}\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^\tau \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{S}\mathcal{D}U^\tau) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^\tau) \\ -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}(U^\tau)_t - \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\ q^\tau \\ \frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau \\ \frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_{tt}^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}q_t^\tau + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta_t^\tau \\ -\frac{1}{\sqrt{2\tau_\theta}}q^\tau - \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}q_t^\tau - \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2\tau_\theta}}\nabla\theta^\tau \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \mathcal{S}\mathcal{D}U_t^0 \\ \rho^{-1}\mathcal{D}'(\mathcal{S}\mathcal{D}u^0) - \rho^{-1}\mathcal{D}'(\Gamma\theta^0) \\ -\frac{1}{\delta}\Gamma'\mathcal{D}u_t^0 + \frac{1}{\delta}\mathrm{div}\ (\kappa\nabla\theta^0) \\ -\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}(\kappa\nabla\theta^0)_t \\ -\frac{\tau_q^3}{6\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\nabla(\theta^0)_{tt} + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{\tau_\theta}}\nabla(\kappa\theta^0)_t - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}\nabla(\kappa\theta^0)_t + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{2}\nabla\theta_t^0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta^0 + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^2\sqrt{2\tau_\theta}}(\kappa\nabla\theta^0)_t - \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2\tau_\theta}}\nabla\theta^0 \end{pmatrix}.$$

Demnach erhalten wir also insgesamt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_{ttt}^0 - \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_{tt}^0 - \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\nabla\theta_t^0 + \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\nabla\theta_{tt}^0 + \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\nabla\theta_t^0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen

$$\mathcal{W} \in W^1_{\mathcal{D}'}(G) \times W^1_{0,\mathcal{D}}(G) \times W^1_0(G) \times W^1_{\mathrm{div}}(G) \times \left(L^2(G)\right)^3 \times \left(L^2(G)\right)^3$$

und gehen wie folgt vor:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle &= \langle \mathcal{D}\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1\rangle + \left\langle \mathcal{D}'\mathcal{W}_1 - \mathcal{D}'(\Gamma\mathcal{W}_3), \mathcal{W}_2\right\rangle + \left\langle -\Gamma'\mathcal{D}\mathcal{W}_2 - \sqrt{\tau_\theta}\mathrm{div}\ \mathcal{W}_4, \mathcal{W}_3\right\rangle \\ &\quad + \left\langle -\sqrt{\tau_\theta}\nabla\mathcal{W}_3 - \kappa^{-1}\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}\mathcal{W}_4 + \kappa^{-1}\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^2}\mathcal{W}_4 + 2\kappa^{-1}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_4\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3} - \frac{\tau_q}{\tau_\theta} + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\mathcal{W}_4 - \frac{2}{\tau_\theta}\mathcal{W}_5 + \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\mathcal{W}_6, \mathcal{W}_5\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left(\frac{\tau_q^2}{\sqrt{2}\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\sqrt{2}\tau_\theta^3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathcal{W}_4 - \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_6\right\rangle .\end{aligned}$$

Durch Umordnen und Zusammenfassen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle &= \langle \mathcal{D}\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1\rangle + \left\langle \mathcal{D}'\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\right\rangle - \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma\mathcal{W}_3), \mathcal{W}_2\right\rangle - \left\langle \Gamma'\mathcal{D}\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3\right\rangle \\ &\quad - \langle \sqrt{\tau_\theta}\mathrm{div}\ \mathcal{W}_4, \mathcal{W}_3\rangle - \langle \sqrt{\tau_\theta}\nabla\mathcal{W}_3, \mathcal{W}_4\rangle - \left\langle \kappa^{-1}\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}\mathcal{W}_4 - \kappa^{-1}\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^2}\mathcal{W}_4, \mathcal{W}_4\right\rangle \\ &\quad + \left\langle 2\kappa^{-1}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_4\right\rangle + \left\langle \left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3} - \frac{\tau_q}{\tau_\theta} + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\mathcal{W}_4, \mathcal{W}_5\right\rangle - \left\langle \frac{2}{\tau_\theta}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_5\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\mathcal{W}_6, \mathcal{W}_5\right\rangle + \left\langle \left(\frac{\tau_q^2}{\sqrt{2}\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\sqrt{2}\tau_\theta^3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathcal{W}_4, \mathcal{W}_6\right\rangle - \left\langle \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_6\right\rangle .\end{aligned}$$

Partielle Integration und eine weitere Umordnung liefern:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle &= \langle \mathcal{D}\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1\rangle - \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{D}\mathcal{W}_2\rangle - \left\langle \mathcal{D}'(\Gamma\mathcal{W}_3), \mathcal{W}_2\right\rangle + \left\langle \mathcal{W}_2, \mathcal{D}'(\Gamma\mathcal{W}_3)\right\rangle \\ &\quad - \langle \sqrt{\tau_\theta}\mathrm{div}\ \mathcal{W}_4, \mathcal{W}_3\rangle + \langle \mathcal{W}_3, \sqrt{\tau_\theta}\mathrm{div}\ \mathcal{W}_4\rangle + \left\langle \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\mathcal{W}_6, \mathcal{W}_5\right\rangle - \left\langle \frac{\sqrt{2}}{\tau_\theta}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_6\right\rangle \\ &\quad - \left(\kappa^{-1}\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta} - \kappa^{-1}\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^2}\right)\|\mathcal{W}_4\|^2 + \left\langle 2\kappa^{-1}\mathcal{W}_5, \mathcal{W}_4\right\rangle - \frac{2}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 \\ &\quad + \left\langle \left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3} - \frac{\tau_q}{\tau_\theta} + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\mathcal{W}_4, \mathcal{W}_5\right\rangle + \left\langle \left(\frac{\tau_q^2}{\sqrt{2}\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\sqrt{2}\tau_\theta^3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathcal{W}_4, \mathcal{W}_6\right\rangle .\end{aligned}$$

Für die folgende Abschätzung setzen wir

$$\frac{3}{2}\tau_\theta > \tau_q$$

voraus. Realteilbildung und die Ungleichung von Cauchy und Schwarz sowie die Dreiecksungleichung liefern:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \mathcal{N}\mathcal{W},\mathcal{W}\rangle \leq{}& -\kappa^{-1}\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^2}\right)\|\mathcal{W}_4\|^2+2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tau_\theta}}\|\mathcal{W}_5\|\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\kappa^{-1}\|\mathcal{W}_4\| \\
&+\left|\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}-\frac{\tau_q}{\tau_\theta}+\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right|\sqrt{\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\|\mathcal{W}_4\|\sqrt[4]{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\|\mathcal{W}_5\|-\frac{2}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 \\
&+\sqrt{\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)}\sqrt{2}\sqrt{\tau_\theta}\sqrt{\kappa^{-1}}\|\mathcal{W}_4\|\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\tau_\theta}}\sqrt{\kappa}\sqrt{\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)}\|\mathcal{W}_6\| \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\|\mathcal{W}_4\|\sqrt[4]{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\|\mathcal{W}_6\| \\
\leq{}& -\kappa^{-1}\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^2}\right)\|\mathcal{W}_4\|^2+\frac{2}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2+\frac{\tau_\theta}{2}\kappa^{-2}\|\mathcal{W}_4\|^2 \\
&+\left|\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}-\frac{\tau_q}{\tau_\theta}+\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\mathcal{W}_4\|^2+\|\mathcal{W}_5\|^2\right)-\frac{2}{\tau_\theta}\|\mathcal{W}_5\|^2 \\
&+\kappa^{-1}\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^2}\right)\|\mathcal{W}_4\|^2+\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\frac{1}{4}\frac{1}{\tau_\theta}\kappa\|\mathcal{W}_6\|^2 \\
&+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\mathcal{W}_4\|^2+\|\mathcal{W}_6\|^2\right) \\
={}& \frac{3\tau_\theta^2}{2\kappa\tau_q^3}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\mathcal{W}_4\|^2\right)+\left|\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}-\frac{\tau_q}{\tau_\theta}+\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\mathcal{W}_4\|^2+\|\mathcal{W}_5\|^2\right) \\
&+\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\frac{1}{4}\frac{1}{\tau_\theta}\kappa\|\mathcal{W}_6\|^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q^3}}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\mathcal{W}_4\|^2+\|\mathcal{W}_6\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun $\mathcal{W} := \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}$, so ergibt sich mit dieser Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left\langle \mathcal{N}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V},\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle \\
&\leq \frac{1}{2\tau_q}\cdot\frac{3\tau_\theta^2}{\kappa\tau_q^2}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_4\|^2\right)+\frac{1}{2\tau_q}\cdot\left|\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}-\frac{\tau_q}{\tau_\theta}+\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right|\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q}}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_4\|^2\right) \\
&\quad+\frac{1}{2\tau_q}\cdot\left|\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}-\frac{\tau_q}{\tau_\theta}+\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right|\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q}}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5\|^2 \\
&\quad+\frac{1}{2\tau_q}\cdot\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2}-\frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\frac{3}{4}\kappa\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\|^2+\frac{1}{2\tau_q}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q}}\left(\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_4\|^2+\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Bedenken wir nun noch, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_j^\tau(t) &= \frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}(t), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}(t)\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_1(t), \mathcal{S}^{-1}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_1(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_2(t), \rho\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_2(t)\right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\langle \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_3(t), \delta\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_3(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta\kappa}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_4(t)\right\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_5(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6(t)\right\|^2
\end{aligned}$$

gilt, so erhalten wir mit

$$C := 6\max\left\{\kappa^2,\ \frac{3\tau_\theta^2}{\kappa\tau_q^2},\ \sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q}}\left|\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3} - \frac{\tau_q}{\tau_\theta} + \frac{\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right|,\ \frac{3}{4}\left(\frac{\tau_q^2}{\tau_\theta^2} - \frac{2\tau_q^3}{3\tau_\theta^3}\right)\kappa,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3\tau_\theta\kappa}{\tau_q}}\right\} \tag{4.20}$$

die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}E_j^\tau) &= \operatorname{Re}\left\langle \mathcal{N}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle \partial_t^{j-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}\right), \mathcal{Q}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle \\
&\le \frac{C}{2\tau_q}\mathrm{d}E_j^\tau + \left\langle -\frac{\tau_q^3}{6\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{ttt}^0, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle - \left\langle \frac{\tau_q^2}{2\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle \\
&\quad - \left\langle \frac{\tau_q}{\sqrt{2\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle + \left\langle \kappa\frac{\tau_\theta\sqrt{\tau_\theta}}{2\sqrt{2}}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \kappa\frac{\sqrt{\tau_\theta}}{\sqrt{2}}\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0, \partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle \\
&\le \frac{C}{2\tau_q}\mathrm{d}E_j^\tau + \left\langle -\sqrt{2}\tau_q^3\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{ttt}^0, \frac{\kappa}{12\sqrt{\tau_\theta}}\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle - \left\langle \sqrt{2}\tau_q^2\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0, \frac{1}{4\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle \\
&\quad - \left\langle \sqrt{2}\tau_q\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0, \frac{1}{2\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle + \left\langle \sqrt{2}\tau_\theta^2\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0, \frac{1}{4\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sqrt{2}\tau_\theta\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0, \frac{1}{2\sqrt{\tau_\theta}}\kappa\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\rangle \\
&\le \frac{C}{2\tau_q}\mathrm{d}E_j^\tau + \tau_q^6\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{ttt}^0\right\|^2 + \frac{\kappa^2}{288\tau_\theta}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\|^2 + \tau_q^4\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\right\|^2 + \frac{\kappa^2}{32\tau_\theta}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\|^2 \\
&\quad + \tau_q^2\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\|^2 + \frac{\kappa^2}{8\tau_\theta}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\|^2 + \tau_\theta^4\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\right\|^2 + \frac{\kappa^2}{32\tau_\theta}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\|^2 \\
&\quad + \tau_\theta^2\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\|^2 + \frac{\kappa^2}{8\tau_\theta}\left\|\partial_t^{j-1}\mathrm{d}\mathcal{V}_6\right\|^2 \\
&\le \frac{C}{\tau_q}\mathrm{d}E_j^\tau + \tau_q^6\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{ttt}^0\right\|^2 + \tau_q^4\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\right\|^2 + \tau_q^2\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\|^2 \\
&\quad + \tau_\theta^4\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\right\|^2 + \tau_\theta^2\left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_t^0\right\|^2.
\end{aligned}$$

Integrieren wir die eben bewiesene Ungleichung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_j^\tau(t) \leq \frac{C}{\tau_q}\mathrm{d}E_j^\tau(0) + \int_0^t \mathrm{d}E_j^\tau(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \tau_q^6 \left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{ttt}^0\right\|^2 + \tau_q^4 \left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\right\|^2 + \tau_q^2 \left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{t}^0\right\|^2 \mathrm{d}s \\ + \int_0^t \tau_\theta^4 \left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{tt}^0\right\|^2 + \tau_\theta^2 \left\|\partial_t^{j-1}\nabla\theta_{t}^0\right\|^2 \mathrm{d}s\end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung aus dem Lemma von Gronwall. □

4.4 Der allgemeine Fall

Wir wollen in diesem Abschnitt einen Energievergleich für den allgemeinen Fall beweisen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns allerdings auf Energien erster Ordnung. Wir bemerken aber, dass der Beweis für Energien der Ordnung $j \in \mathbb{N}$ völlig analog geführt werden kann. Unter Verwendung von (3.12) und Definition 4.5 definieren wir

$$\mathrm{d}\mathcal{V} := \begin{pmatrix}\mathrm{d}V^{1,1} \\ \mathrm{d}V^{2,1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathrm{d}V^{1,2} \\ \mathrm{d}V^{2,2}\end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathrm{d}V^{1,1} := \begin{pmatrix}\mathcal{SD}(\mathrm{d}U) \\ (\mathrm{d}U)_t \\ \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}q\end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}V^{2,1} := \left(\sum_{k=0}^{l} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\partial_t^{l-k}\mathrm{d}q + K\sum_{k=0}^{l-1} \frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\partial_t^{l-1-k}\nabla\mathrm{d}\theta\right)_{1\leq l\leq n-1},$$

$$\mathrm{d}V^{1,2} := \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}V^{2,2} := \left(-\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^l}\cdot\frac{(n-1)!}{n!(n-1-l)!}\mathrm{d}q\right)_{1\leq l\leq n-1}.$$

Analog zu den bisherigen Fällen machen wir die

Definition 4.11 *Die Energie erster Ordnung der Differenzen sei für $t \geq 0$ durch*

$$\mathrm{d}E_1^\tau(t) := \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{d}\mathcal{V}(t), \mathcal{Q}\mathrm{d}\mathcal{V}(t)\right\rangle$$

definiert. Hierbei ist die Matrix $\mathcal{Q}$ durch (3.13) *gegeben.*

Damit können wir unseren Satz formulieren:

Satz 4.12 (Energetischer Vergleich für kleine Zeiten) *Für festes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine positive Konstante $C = C(K^{-1}, \tau_\theta, \tau_q)$, so dass für alle $t \geq 0$ die Ungleichung*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_1^\tau(t) \leq e^{C\frac{nn!}{\tau_q^n}t}\mathrm{d}E_1^\tau(0) + e^{C\frac{nn!}{\tau_q^n}t}\tau_\theta^{n-1}\int_0^t \left\|K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\partial_t^{n-1-k}\nabla\theta_t\right\|^2 \mathrm{d}s \\ + e^{C\frac{nn!}{\tau_q^n}t}\tau_\theta^{n-1}\int_0^t \left\|K\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\partial_t^{n-2-k}\nabla\theta_t\right\|^2 \mathrm{d}s\end{aligned}$$

gilt. Die Konstante C ist dabei nur polynomial von τ_θ, τ_q und $\frac{\tau_q}{\tau_\theta}$ abhängig.

Beweis: Für die Zeitableitung des Energieterms ergibt sich wieder:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}E_1^\tau) = \mathrm{Re}\,\langle \mathcal{N}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathrm{d}\mathcal{V}\rangle + \mathrm{Re}\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\mathrm{d}\mathcal{V}\right\rangle.$$

Wir müssen also den Term $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V}$ genauer betrachten. Es ergibt sich nach einer nicht schwierigen aber umfangreichen Rechnung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (0)_{1\le l\le n-2} \\ K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\partial_t^{n-1-k}\nabla\theta_t - K\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\partial_t^{n-2-k}\nabla\theta_t \end{pmatrix}.$$

Um den Term $\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{N}\mathrm{d}\mathcal{V}, \mathrm{d}\mathcal{V}\rangle$ abzuschätzen, berechnen wir zuerst für beliebiges

$$\mathcal{W} \in W^1_{\mathcal{D}'}(G) \times W^1_{0,\mathcal{D}}(G) \times W^1_0(G) \times W^1_{\mathrm{div}}(G) \times \left(L^2(G)\right)^{3(n-1)}:$$

$$\mathcal{N}\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}W^2 \\ \mathcal{D}'W^1 - \mathcal{D}'(\Gamma W^3) \\ -\Gamma'\mathcal{D}W^2 - \mathrm{div}\,W^4 \\ -\nabla W_3 - \left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right)K^{-1}W^4 + \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}K^{-1}W^5 \\ (N^{2,1}_{l,4}W^4 + N^{2,2}_{l,1}W^5 + W^{5+l})_{1\le l\le n-2} \\ N^{2,1}_{n-1,4}W^4 + N^{2,2}_{n-1,1}W^5 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle = {} & \left\langle \mathcal{D}W^2, W^1\right\rangle + \left\langle \mathcal{D}'W^1, W^2\right\rangle - \left\langle \mathcal{D}'\Gamma W^3, W^2\right\rangle - \left\langle \Gamma'\mathcal{D}W^2, W^3\right\rangle - \left\langle \mathrm{div}\,W^4, W^3\right\rangle \\
& - \left\langle \nabla W^3, W^4\right\rangle - \left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right)\left\langle K^{-1}W^4, W^4\right\rangle + \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}\left\langle K^{-1}W^5, W^4\right\rangle \\
& + \sum_{l=1}^{n-2} N^{2,1}_{l,4}\left\langle W^4, W^{l+4}\right\rangle + \sum_{l=1}^{n-2} N^{2,2}_{l,1}\left\langle W^5, W^{l+4}\right\rangle + \sum_{l=1}^{n-2}\left\langle W^{l+5}, W^{l+4}\right\rangle \\
& + N^{2,1}_{n-1,4}\left\langle W^4, W^{n+3}\right\rangle + N^{2,2}_{n-1,1}\left\langle W^5, W^{n+3}\right\rangle
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle = {} & -\left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}} - \frac{n-1}{n}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right)\mathrm{Re}\left\langle K^{-1}W^4, W^4\right\rangle + \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}\mathrm{Re}\left\langle K^{-1}W^5, W^4\right\rangle \\
& + \sum_{l=1}^{n-2} N^{2,1}_{l,4}\mathrm{Re}\left\langle W^4, W^{l+4}\right\rangle + \sum_{l=1}^{n-2} N^{2,2}_{l,1}\mathrm{Re}\left\langle W^5, W^{l+4}\right\rangle + \sum_{l=1}^{n-2}\mathrm{Re}\left\langle W^{l+5}, W^{l+4}\right\rangle \\
& + N^{2,1}_{n-1,4}\mathrm{Re}\left\langle W^4, W^{n+3}\right\rangle + N^{2,2}_{n-1,1}\mathrm{Re}\left\langle W^5, W^{n+3}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Damit können wir unter Verwendung der Ungleichung von Cauchy und Schwarz folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle\mathcal{N}\mathcal{W},\mathcal{W}\rangle \leq{}& \left|\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}}-\frac{n-1}{n}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right|\left\|K^{-1}W^4\right\|\left\|W^4\right\|+\frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}}\left\|K^{-1}W^5\right\|\left\|W^4\right\| \\ &+\sum_{l=1}^{n-2}\left|N_{l,4}^{2,1}\right|\left\|W^4\right\|\left\|W^{l+4}\right\|+\sum_{l=1}^{n-2}\left|N_{l,1}^{2,2}\right|\|W^5\|\left\|W^{l+4}\right\|+\sum_{l=1}^{n-2}\left\|W^{l+5}\right\|\left\|W^{l+4}\right\| \\ &+\left|N_{n-1,4}^{2,1}\right|\left\|W^4\right\|\|W^{n+3}\|+\left|N_{n-1,1}^{2,2}\right|\|W^5\|\|W^{n+3}\|.\end{aligned}$$

Dies liefert uns:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle\mathcal{N}\mathcal{W},\mathcal{W}\rangle \leq{}& \left|\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^{n-1}}-\frac{n-1}{n}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^n}\right|\left\|K^{-1}W^4\right\|\left\|W^4\right\|+\frac{(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}}\left\|K^{-1}W^5\right\|^2+\frac{(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}}\left\|W^4\right\|^2 \\ &+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,4}^{2,1}\right|}{2}\left\|W^4\right\|^2+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,4}^{2,1}\right|}{2}\left\|W^{l+4}\right\|^2+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,1}^{2,2}\right|}{2}\|W^5\|^2 \\ &+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,1}^{2,2}\right|}{2}\left\|W^{l+4}\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-2}\left\|W^{l+5}\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-2}\left\|W^{l+4}\right\|^2 \\ &+\frac{\left|N_{n-1,4}^{2,1}\right|}{2}\left\|W^4\right\|^2+\frac{\left|N_{n-1,4}^{2,1}\right|}{2}\|W^{n+3}\|^2+\frac{\left|N_{n-1,1}^{2,2}\right|}{2}\|W^5\|^2+\frac{\left|N_{n-1,1}^{2,2}\right|}{2}\|W^{n+3}\|^2.\end{aligned}$$

Und wir erhalten nach einer Umordnung und weiteren Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle\mathcal{N}\mathcal{W},\mathcal{W}\rangle \leq{}& \left(C(K^{-1})\frac{(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}}+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,1}^{2,2}\right|}{2}+\frac{\left|N_{n-1,1}^{2,2}\right|}{2}\right)\|W^5\|^2 \\ &+\left(C(K^{-1})\frac{1}{\tau_\theta^{n-1}}\left(\tau_q^{n-1}+\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta}\right)+\frac{(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}}+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,4}^{2,1}\right|}{2}+\frac{\left|N_{n-1,4}^{2,1}\right|}{2}\right)\left\|W^4\right\|^2 \\ &+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,4}^{2,1}\right|}{2}\left\|W^{l+4}\right\|^2+\sum_{l=1}^{n-2}\frac{\left|N_{l,1}^{2,2}\right|}{2}\left\|W^{l+4}\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-2}\left\|W^{l+5}\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-2}\left\|W^{l+4}\right\|^2 \\ &+\frac{\left|N_{n-1,4}^{2,1}\right|}{2}\|W^{n+3}\|^2+\frac{\left|N_{n-1,1}^{2,2}\right|}{2}\|W^{n+3}\|^2.\end{aligned}$$

Wir schätzen nun die einzelnen Koeffizienten ab. Zunächst gilt für $1 \leq l \leq n-2$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left|N_{l,4}^{2,1}\right| &\leq \frac{1}{(n-1-l)!}\left(\frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^l}+\frac{n-1}{n}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{l+1}}\right)+\left(\frac{\tau_q^{n-1-l}}{(n-1-l)!}+\frac{1}{n(n-2-l)!}\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{l+1}}\right) \\ &\leq \frac{\tau_q^{n-1}}{\tau_\theta^l}+2\frac{\tau_q^n}{\tau_\theta^{l+1}}+\tau_q^{n-1-l} \\ &= \frac{1}{\tau_\theta^{n-1}}\left(\tau_q^{n-1}\tau_\theta^{n-1-l}+2\tau_q^n\tau_\theta^{n-2-l}+\tau_q^{n-1-l}\tau_\theta^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Sofort einzusehen ist, dass auch

$$\left|N_{n-1,4}^{2,1}\right| \leq \frac{1}{\tau_\theta^{n-1}} \left(\tau_q^{n-1} + \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta} + \tau_\theta^{n-1}\right)$$

gilt. Schließlich ergibt sich für $1 \leq l \leq n-1$:

$$\left|N_{l,1}^{2,2}\right| \leq \frac{(n-1)!}{\tau_\theta^{n-1}} \left(\tau_\theta^{n-1-l}\right).$$

Wir definieren nun

$$C_1 := \max_{l=1\dots n-2} \left(\tau_q^{n-1}\tau_\theta^{n-1-l} + 2\tau_q^n\tau_\theta^{n-2-l} + \tau_q^{n-1-l}\tau_\theta^{n-1}\right) + \max_{l=1\dots n-1} \left(\tau_\theta^{n-1-l}\right) + \tau_q^{n-1} + \frac{\tau_q^n}{\tau_\theta} + \tau_\theta^{n-1}.$$

In den Anwendungen sind nun τ_θ und τ_q kleiner als eins. Dies ermöglicht natürlich weitere Abschätzungen der Konstante C_1. Setzen wir die obigen Resultate ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle \leq & \left(C(K^{-1})\frac{(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}} + \frac{n!}{2\tau_\theta^{n-1}}C_1\right) \left\|W^5\right\|^2 \\
& + \left(C(K^{-1})\frac{1}{\tau_\theta^{n-1}}C_1 + \frac{(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}} + \frac{n-1}{2\tau_\theta^{n-1}}C_1\right) \left\|W^4\right\|^2 \\
& + \frac{C_1(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2} \left\|W^{l+4}\right\|^2 + \frac{C_1}{2\tau_\theta^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2} \left\|W^{l+4}\right\|^2 + \frac{C_1}{2\tau_\theta^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2} \left\|W^{l+5}\right\|^2 \\
& + \frac{C_1}{2\tau_\theta^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2} \left\|W^{l+4}\right\|^2 + \frac{C_1}{2\tau_\theta^{n-1}} \left\|W^{n+3}\right\|^2 + \frac{C_1(n-1)!}{2\tau_\theta^{n-1}} \left\|W^{n+3}\right\|^2.
\end{aligned}$$

Mit

$$C := C(K^{-1})\left(\frac{1}{2} + C_1\right) + 4C_1 + \frac{1}{2}$$

liefert das die Abschätzung

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{N}\mathcal{W}, \mathcal{W}\rangle \leq C\frac{n!}{\tau_\theta^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} \left\|W^{l+4}\right\|^2.$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}E_1^\tau) \leq & \left\| K\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\partial_t^{n-1-k}\nabla\theta_t - K\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\partial_t^{n-2-k}\nabla\theta_t \right\| \left\|\mathrm{d}\mathcal{V}_{n+3}\right\| \\
& + C\frac{n!}{\tau_\theta^{n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} \left\|\mathrm{d}\mathcal{V}_{l+4}\right\|^2 \\
\leq & \, \tau_\theta^{n-1} \left\| K\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_q^{n-k}}{(n-k)!}\partial_t^{n-1-k}\nabla\theta_t - K\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\tau_\theta^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\partial_t^{n-2-k}\nabla\theta_t \right\| \\
& + C(K^{-1}, \tau_\theta, \tau_q)\frac{n\cdot n!}{\tau_q^n}\mathrm{d}E_1^\tau,
\end{aligned}$$

wobei die Konstante $C(K^{-1}, \tau_\theta, \tau_q)$ nur polynomial von τ_θ und τ_q abhängt. Damit folgt die Behauptung aus dem Lemma von Gronwall. □

Kapitel 5

Exponentielle Stabilität im nichtlinearen Fall

5.1 Einführung

Es sei $G := (0, L)$. In diesem Kapitel wenden wir uns dem nichtlinearen, thermoelastischen System

$$u_{tt} - a(u_x, \theta, q)u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x = \alpha_1(u_x, \theta)qq_x, \tag{5.1}$$

$$\theta_t + g(u_x, \theta, q)q_x + d(u_x, \theta, q)u_{tx} = \alpha_2(u_x, \theta)qq_t, \tag{5.2}$$

$$\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt} + \tau_q q_t + q = -k\theta_x - k\tau_\theta\theta_{tx} \tag{5.3}$$

(wobei hier $t \geq 0$ und $x \in G$ gelte) mit den Anfangsbedingungen

$$u(0, \cdot) = u_0, \quad u_t(0, \cdot) = u_1, \quad \theta(0, \cdot) = \theta_0, \quad q(0, \cdot) = q_0, \quad q_t(0, \cdot) = q_1, \tag{5.4}$$

sowie den Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, L) = \theta(t, 0) = \theta(t, L) = 0, \quad (t \geq 0) \tag{5.5}$$

zu. Unser Ziel ist es, eine Energieabschätzung für Lösungen dieses Systems zu beweisen. Im Einzelnen beweisen wir, dass Lösungen mit hinreichender Regularität exponentiell stabil sind. In [6] werden die Gleichungen der klassischen, linearen und nicht-linearen Thermoelastizität behandelt. Es stellt sich jeweils heraus, dass exponentielle Stabilität der Lösungen vorliegt. In [17] werden die Gleichungen (5.1), (5.2) zusammen mit dem Gesetz von Cattaneo behandelt. Für den linearen Fall wird bei verschiedenen Randbedingungen die exponentielle Stabilität der Lösungen bewiesen. Im nichtlinearen Fall wird die exponentielle Stabilität ebenfalls bewiesen, allerdings unter der Zusatzvoraussetzung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. In [12] wurde gezeigt, dass auf diese Zusatzvoraussetzung verzichtet werden kann. Unter der Zusatzbedingung

$$\frac{\tau_\theta}{\tau_q} > \frac{1}{2} \tag{5.6}$$

wurde für die Gleichungen (5.1) - (5.3) im linearen Fall mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ die exponentielle Stabilität der Lösungen ebenfalls bewiesen. Näheres hierzu findet man in [16]. Bei den Beweisen der oben genannten Resultate wurden jeweils Energiemethoden und Techniken zur Behandlung von verschiedenen Randtermen eingesetzt, welche unter anderem auf [20] und [14] zurückgehen. Wir orientieren uns hier im Wesentlichen an den Techniken welche in [12] angewandt werden.

Fortfolgend gehen wir davon aus, dass die Koeffizienten

$$a, b, d, g\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$\alpha_1, \alpha_2\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

jeweils zweimal stetig differenzierbar sind. Ferner seien diese Funktionen und ihre Ableitungen beschränkt. Zudem mögen positive Konstanten C_a, C_b, C_d und C_g existieren, so dass

$$\begin{aligned} C_a &\le a(x_1, x_2, x_3), & C_b &\le b(x_1, x_2, x_3), \\ C_d &\le d(x_1, x_2, x_3), & C_g &\le g(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gelte. k sei eine positive Konstante. τ_q und τ_θ seien ebenfalls positive Konstanten, welche die Bedingung (5.6) erfüllen.

5.2 Wohlgestelltheit

Wir gehen fortfolgend von globalen Lösungen zu (5.1)- (5.5) mit den Regularitäten

$$\begin{aligned} u \in\ & \mathcal{C}^3\left([0,\infty), L^2(G)\right) \cap \mathcal{C}^2\left([0,\infty), H_0^1(G)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,\infty), H_0^1(G) \cap H^2(G)\right) \\ & \cap \mathcal{C}^0\left([0,\infty), H_0^1(G) \cap H^3(G)\right), \\ \theta \in\ & \mathcal{C}^2\left([0,\infty), H_0^1(G)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,\infty), H_0^1(G) \cap H^2(G)\right), \\ q \in\ & \mathcal{C}^3\left([0,\infty), L^2(G)\right) \cap \mathcal{C}^2\left([0,\infty), H^1(G)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,\infty), H^2(G)\right) \end{aligned}$$

aus. Trotzdem jedoch wollen wir einen lokalen Existenzsatz aufgrund von bestehenden Existenzsätzen für ähnliche Probleme motivieren. Zunächst betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(u_x, \theta, q)u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x &= r_1(u_x, \theta, q)q_x, \\ \theta_t + g(u_x, \theta, q)q_x + d(u_x, \theta, q)u_{tx} &= r_2(u_x, \theta, q)q_t, \\ \tau_q(u_x, \theta)q_t + q &= -k(u_x, \theta)\theta_x \end{aligned}$$

mit entsprechenden Anfangs- und Dirichlet-Randbedingungen. In [17] wird hierfür ein lokaler Existenzsatz unter der Bedingung $r_1 = r_2 = 0$ und gewissen Glattheitsbedingungen an die Anfangswerte und die Koeffizienten angegeben. Der Beweis für dieses Resultat verläuft analog zur Situation in der klassischen Thermoelastizität. In [18] wurde das folgende Cauchy-Problem behandelt:

$$\begin{aligned}u_{tt} - a_1(P)u_{xx} + a_2(P)\theta_x + \sigma_1(P)q_x &= 0,\\ \theta_t + a_3(P)u_{tx} + a_4(P)q_x + \sigma_2(P)\theta_x + a_5(P)q &= 0,\\ q_t + a_6(u_x,\theta) + a_7(u_x,\theta)q &= 0,\end{aligned}$$

wobei $P = (u_x, \theta, q)$ gilt. Hinzu kommen natürlich entsprechende Anfangsbedingungen. Es stellt sich heraus, dass dieses System einen strikt hyperbolischen Charakter im Fall $|\sigma_1| << 1$ hat. Damit kann unter Verwendung von Resultaten in [24] auf einen lokalen Existenzsatz geschlossen werden.
Tatsächlich ist es auch in unserem Fall möglich, zu beweisen, dass strikte Hyperbolizität vorliegt. Insgesamt motiviert dies die Annahme, dass wir von einem lokalen Existenzsatz zu unserem Anfangs-Randwertproblem ausgehen dürfen:

Es existiert ein $\delta > 0$, so dass aus

$$\Lambda_0 := \|u_0\|^2_{H^3} + \|u_1\|^2_{H^2} + \|\theta_0\|^2_{H^2} + \|q_0\|^2_{H^2} + \|q_1\|^2_{H^1} < \delta$$

die Existenz einer Lösung

$$\begin{aligned}&u \in C^3\left([0,T], L^2(G)\right) \cap C^2\left([0,T], H^1_0(G)\right) \cap C^1\left([0,T], H^1_0(G)\cap H^2(G)\right)\\ &\qquad \cap C^0\left([0,T], H^1_0(G)\cap H^3(G)\right),\\ &\theta \in C^2\left([0,T], H^1_0(G)\right) \cap C^1\left([0,T], H^1_0(G)\cap H^2(G)\right),\\ &q \in C^3\left([0,T], L^2(G)\right) \cap C^2\left([0,T], H^1(G)\right) \cap C^1\left([0,T], H^2(G)\right)\end{aligned}$$

zu (5.1)- (5.5) *folgt. Hierbei ist T nur von δ abhängig.*

Steht ein solcher Satz zur Verfügung, so beweisen die folgenden Resultate insbesondere die globale Existenz einer eindeutigen Lösung zu (5.1) - (5.5). Deshalb formulieren wir im letzten Abschnitt sämtliche Resultate für ein Zeitintervall $[0, T]$.

5.3 Exponentielle Stabilität

Wir definieren nun für $t \geq 0$ die Energieterme erster, zweiter und dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}E_1(t) &:= \frac{1}{2}\int_G \frac{ad}{gb}u_x^2 + \frac{d}{gb}u_t^2 + \frac{1}{g}\theta^2 + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta}q^2 + \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2 \mathrm{d}x,\\ E_2(t) &:= \frac{1}{2}\int_G \frac{ad}{gb}u_{tx}^2 + \frac{d}{gb}u_{tt}^2 + \frac{1}{g}\theta_t^2 + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta}q_t^2 + \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt} + \tau_q q_t + k\tau_\theta\theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)^2 \mathrm{d}x,\\ E_3(t) &:= \frac{1}{2}\int_G \frac{ad}{gb}u_{ttx}^2 + \frac{d}{gb}u_{ttt}^2 + \frac{1}{g}\theta_{tt}^2 + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta}q_{tt}^2 + \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{ttt} + \tau_q q_{tt} + k\tau_\theta\theta_{ttx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\right)^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von E_1, E_2 und E_3 definieren wir nun die Energie E für $t \geq 0$ durch

$$E(t) := E_1(t) + E_2(t) + E_3(t).$$

5.3.1 Ableitungen der Energieterme

Um die Zeitableitung von E_1 geschickt abschätzen zu können, verwenden wir mehrfach die Differentialgleichungen (5.1) - (5.3). Wir multiplizieren die Gleichung (5.1) mit $\frac{d}{bg}u_t$ und integrieren über G. Dies ergibt:

$$\int_G \frac{d}{bg} u_{tt} u_t \mathrm{d}x - \boxed{\int_G \frac{ad}{bg} u_{xx} u_t \mathrm{d}x} + \int_G \frac{d}{g} \theta_x u_t \mathrm{d}x = \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_x u_t \mathrm{d}x.$$

Partielle Integration des markierten Integralterms bezüglich x ergibt nun:

$$\int_G \frac{d}{bg} u_{tt} u_t \mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{ad}{bg} u_t \right)_x u_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g} \theta_x u_t \mathrm{d}x = \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_x u_t \mathrm{d}x.$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit:

$$\int_G \frac{d}{bg} u_{tt} u_t \mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{ad}{bg} \right)_x u_t u_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{ad}{bg} u_{tx} u_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g} \theta_x u_t \mathrm{d}x = \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_x u_t \mathrm{d}x,$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \int_G \frac{d}{bg} u_t^2 + \frac{ad}{bg} u_x^2 \mathrm{d}x \right] = &- \int_G \left(\frac{ad}{bg} \right)_x u_t u_x \mathrm{d}x - \int_G \frac{d}{g} \theta_x u_t \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_x u_t \mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2} \int_G \left(\frac{d}{bg} \right)_t u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_G \left(\frac{ad}{bg} \right)_t u_x^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.2) mit $\frac{1}{g}\theta$ und integrieren. Dies ergibt:

$$\int_G \frac{1}{g} \theta \theta_t \mathrm{d}x + \int_G \theta q_x \mathrm{d}x + \boxed{\int_G \frac{d}{g} \theta u_{tx} \mathrm{d}x} = \int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_t \theta \mathrm{d}x,$$

bzw. nach partieller Integration des markierten Terms:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \int_G \frac{1}{g} \theta^2 \mathrm{d}x \right] = &- \int_G \theta q_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g} \theta_x u_t \mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{d}{g} \right)_x \theta u_t \mathrm{d}x \\ &+ \int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_t \theta \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_G \left(\frac{1}{g} \right)_t \theta^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Wir multiplizieren nun die Gleichung (5.3) mit $\frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} q_t$ und erhalten nach Integration:

$$\int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta} q_{tt} q_t \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta} q_t^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^2}{2} q_t \theta_{tx} \mathrm{d}x = - \int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} q q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} \theta_x q_t \mathrm{d}x. \tag{5.9}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.3) mit $\frac{\tau_q}{k\tau_\theta}q$ und es ergibt sich nach Integration:

$$\int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta} q_{tt} q \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^2}{k\tau_\theta} q q_t \mathrm{d}x + \int_G \tau_q q \theta_{tx} \mathrm{d}x = -\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} q^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q}{\tau_\theta} q\theta_x \mathrm{d}x. \tag{5.10}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.3) mit θ_x und es ergibt sich nach Integration:

$$\int_G \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}\theta_x \mathrm{d}x + \int_G \tau_q q_t \theta_x \mathrm{d}x + \int_G k\tau_\theta \theta_x \theta_{tx} \mathrm{d}x = -\int_G q\theta_x \mathrm{d}x - \int_G k\theta_x^2 \mathrm{d}x. \tag{5.11}$$

Abschließend multiplizieren wir die Gleichung (5.3) mit $-\frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta^2}q$ und erhalten nach Integration:

$$-\int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^2} q q_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta^2} q q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q\theta_{tx} \mathrm{d}x = \int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta^2} q^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2} q\theta_x \mathrm{d}x. \tag{5.12}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2 \mathrm{d}x\right] \\
&= \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta} q_t q_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta} q_t^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^2}{2} q_t \theta_{tx} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^2} q_t^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta} q q_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^2}{k\tau_\theta} q q_t \mathrm{d}x + \int_G \tau_q q \theta_{tx} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta^2} q q_t \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}\theta_x \mathrm{d}x + \int_G \tau_q q_t \theta_x \mathrm{d}x + \int_G k\tau_\theta \theta_x \theta_{tx} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_t \theta_x \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^2} q q_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta^2} q q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q \theta_{tx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^3} q q_t \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (5.9) - (5.12) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2 \mathrm{d}x\right] \\
&= -\int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} q q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} \theta_x q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^2} q_t^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} q^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q}{\tau_\theta} q\theta_x \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta^2} q q_t \mathrm{d}x - \int_G q\theta_x \mathrm{d}x - \int_G k\theta_x^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_t \theta_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta^2} q^2 \\
&\quad + \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2} q\theta_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^3} q q_t \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Damit können wir unter Verwendung von (5.7), (5.8) und (5.13) wie folgt die Zeitableitung von E_1 bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t) = &-\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q^2\mathrm{d}x - \frac{1}{\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2\mathrm{d}x \\
&+\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)q\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)\mathrm{d}x \\
&-\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_t u_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{gb} q q_x u_t \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{d}{gb}\right)_t u_t^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G\left(\frac{ad}{gb}\right)_t u_x^2\mathrm{d}x \\
&+\int_G \left(\frac{d}{g}\right)_x \theta u_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_t \theta \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G\left(\frac{1}{g}\right)_t \theta^2\mathrm{d}x. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Um die Energie weiter abzuschätzen, stellen wir die folgende Abschätzung zur Verfügung, wobei zu bemerken ist, dass bereits hier $\frac{\tau_\theta}{\tau_q} \geq \frac{1}{2}$ eingeht.

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)q\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)\right| \\
&= \left|\sqrt{\frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)}q\right|\left|\frac{1}{\tau_\theta}\sqrt{\frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q^2 + \frac{1}{2k\tau_\theta^2}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von (5.14) und (5.15) erhalten wir

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t) \leq -\frac{1}{2}\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2\mathrm{d}x + |R_1|, \qquad (5.16)
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
R_1 = &-\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_t u_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{gb} q q_x u_t \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{d}{gb}\right)_t u_t^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G\left(\frac{ad}{gb}\right)_t u_x^2\mathrm{d}x \\
&+\int_G \left(\frac{d}{g}\right)_x \theta u_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_t \theta \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G\left(\frac{1}{g}\right)_t \theta^2\mathrm{d}x. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Damit wäre die Zeitableitung des ersten Energieterms abgeschätzt. Die Zeitableitungen der verbleibenden Enerergieterme sollen nun im Folgenden auf die selbe Weise abgeschätzt werden. Wir differenzieren die Gleichungen (5.1) - (5.3) nach der Zeit und erhalten:

$$u_{ttt} - a u_{txx} - a_t u_{xx} + b\theta_{tx} + b_t\theta_x = \alpha_1 q_t q_x + \alpha_1 q q_{xt} + \alpha_{1,t} q q_x, \qquad (5.18)$$

$$\theta_{tt} + g q_{xt} + g_t q_x + d u_{ttx} + d_t u_{tx} = \alpha_2 q_t^2 + \alpha_2 q q_{tt} + \alpha_{2,t} q_t q, \qquad (5.19)$$

$$\frac{\tau_q^2}{2} q_{ttt} + \tau_q q_{tt} + q_t = -k\theta_{tx} - k\tau_\theta\theta_{ttx}. \qquad (5.20)$$

Wir berechnen die Zeitableitung des Energieterms E_2. Hierzu multiplizieren wir die Gleichung (5.18) mit $\frac{d}{bg}u_{tt}$ und integrieren über G. Dies liefert:

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{d}{bg}u_{tt}u_{ttt}\mathrm{d}x - \boxed{\int_G \frac{ad}{bg}u_{tt}u_{txx}\mathrm{d}x} - \int_G \frac{a_t d}{bg}u_{xx}u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g}\theta_{tx}u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{b_t d}{bg}\theta_x u_{tt}\mathrm{d}x \\ = \quad & \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q_t q_x u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q q_{xt}u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{1,t} d}{bg}q q_x u_{tt}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Partielle Integration des markierten Integralterms liefert:

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{d}{bg}u_{tt}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{ad}{bg}u_{tx}u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_{tt}u_{tx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{a_t d}{bg}u_{xx}u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g}\theta_{tx}u_{tt}\mathrm{d}x \\ = \quad & -\int_G \frac{b_t d}{bg}\theta_x u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q_t q_x u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q q_{xt}u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{1,t} d}{bg}q q_x u_{tt}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{d}{bg}u_{tt}^2 + \frac{ad}{bg}u_{tx}^2\mathrm{d}x\right] = & -\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_{tt}u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{a_t d}{bg}u_{xx}u_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{d}{g}\theta_{tx}u_{tt}\mathrm{d}x \\ & -\int_G \frac{b_t d}{bg}\theta_x u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q_t q_x u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q q_{xt}u_{tt}\mathrm{d}x \\ & + \int_G \frac{\alpha_{1,t} d}{bg}q q_x u_{tt}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{d}{bg}\right)_t u_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_t u_{tx}^2\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.19) mit $\frac{1}{g}\theta_t$ und integrieren über G. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{1}{g}\theta_{tt}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G q_{xt}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{g_t}{g}q_x\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g}u_{ttx}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{d_t}{g}u_{tx}\theta_t\mathrm{d}x \\ = \quad & \int_G \frac{\alpha_2}{g}q_t^2\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2}{g}q q_{tt}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{2,t}}{g}q q_t\theta_t\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{1}{g}\theta_t^2\mathrm{d}x\right] = & -\int_G q_{xt}\theta_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{g_t}{g}q_x\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g}u_{tt}\theta_{tx}\mathrm{d}x \\ & + \int_G \left(\frac{d}{g}\right)_x u_{tt}\theta_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{d_t}{g}u_{tx}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2}{g}q_t^2\theta_t\mathrm{d}x \\ & + \int_G \frac{\alpha_2}{g}q q_{tt}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{2,t}}{g}q q_t\theta_t\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{1}{g}\right)_t \theta_t^2\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Durch das selbe Vorgehen wie bei (5.9) - (5.12) erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt}+\tau_q q_t + k\tau_\theta\theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)^2 \mathrm{d}x\right] \\
&= -\int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} q_t q_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\theta_{tx}q_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^2}q_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}q_t^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q}{\tau_\theta}q_t\theta_{tx}\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta^2}q_t q_{tt}\mathrm{d}x - \int_G q_t\theta_{tx}\mathrm{d}x - \int_G k\theta_{tx}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\theta_{tx}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta^2}q_t^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}q_t\theta_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^3}q_t q_{tt}\mathrm{d}x. \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

Dies liefert uns letztlich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t) = &-\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_t^2\mathrm{d}x - \frac{1}{\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt}+\tau_q q_t + k\tau_\theta\theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)^2 \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta}-\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)q_t\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt}+\tau_q q_t + k\tau_\theta\theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)\mathrm{d}x \\
&- \int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_{tt}u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{a_t d}{bg}u_{xx}u_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{b_t d}{bg}\theta_x u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q_t q_x u_{tt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q q_{xt}u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{1,t} d}{bg}q q_x u_{tt}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{d}{bg}\right)_t u_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_t u_{tx}^2\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{g_t}{g}q_x\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{d}{g}\right)_x u_{tt}\theta_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{d_t}{g}u_{tx}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2}{g}q_t^2\theta_t\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_2}{g}q q_{tt}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{2,t}}{g}q q_t\theta_t\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{1}{g}\right)_t \theta_t^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Eine zu (5.15) analoge Abschätzung liefert uns nun:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t) \leq -\frac{1}{2}\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_t^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt}+\tau_q q_t + k\tau_\theta\theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)^2 \mathrm{d}x + |R_2|, \qquad (5.24)
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
R_2 = &-\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_{tt}u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{a_t d}{bg}u_{xx}u_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{b_t d}{bg}\theta_x u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q_t q_x u_{tt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q q_{xt}u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{1,t} d}{bg}q q_x u_{tt}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{d}{bg}\right)_t u_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_t u_{tx}^2\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{g_t}{g}q_x\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{d}{g}\right)_x u_{tt}\theta_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{d_t}{g}u_{tx}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2}{g}q_t^2\theta_t\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_2}{g}q q_{tt}\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{2,t}}{g}q q_t\theta_t\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{1}{g}\right)_t \theta_t^2\mathrm{d}x. \qquad (5.25)
\end{aligned}
$$

Wir schätzen die Zeitableitung des verbleibenden Terms E_3 ab. Hierzu differenzieren wir zunächst die Gleichungen (5.18) - (5.20) nach der Zeit und erhalten:

$$\begin{aligned}
&u_{tttt} - au_{ttxx} - 2a_t u_{txx} - a_{tt}u_{xx} + b\theta_{ttx} + 2b_t\theta_{tx} + b_{tt}\theta_x \\
&= \alpha_1 q_{tt}q_x + 2\alpha_1 q_t q_{tx} + 2\alpha_{1,t}q_t q_x + \alpha_1 q q_{xtt} + 2\alpha_{1,t}qq_{xt} + \alpha_{1,tt}qq_x, \qquad (5.26)\\
&\theta_{ttt} + 2g_t q_{xt} + gq_{xtt} + g_{tt}q_x + du_{tttx} + 2d_t u_{ttx} + d_{tt}u_{tx} \\
&= 2\alpha_{2,t}q_t^2 + 3\alpha_2 q_t q_{tt} + 2\alpha_{2,t}qq_{tt} + \alpha_2 qq_{ttt} + \alpha_{2,tt}q_t q, \qquad (5.27)\\
0 &= \frac{\tau_q^2}{2}q_{tttt} + \tau_q q_{ttt} + q_{tt} + k\theta_{ttx} + k\tau_\theta\theta_{tttx}. \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

Nun zur Ableitung von E_3. Wir multiplizieren die Gleichung (5.26) mit $\frac{d}{bg}u_{ttt}$ und erhalten nach Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_G \frac{d}{bg}u_{ttt}u_{tttt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{ad}{bg}u_{ttxx}u_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{2a_t d}{bg}u_{txx}u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{a_{tt}d}{bg}u_{xx}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g}\theta_{ttx}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2b_t d}{bg}\theta_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{b_{tt}d}{bg}\theta_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
= &\int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q_{tt}q_x u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 d}{bg}q_t q_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}q_t q_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}qq_{xtt}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}qq_{xt}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{1,tt}d}{bg}qq_x u_{ttt}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{d}{bg}u_{ttt}^2\mathrm{d}x + \frac{ad}{bg}u_{ttx}^2\mathrm{d}x\right] \\
&= -\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_{ttx}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2a_t d}{bg}u_{txx}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{a_{tt}d}{bg}u_{xx}u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_G \frac{d}{g}\theta_{ttx}u_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{2b_t d}{bg}\theta_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{b_{tt}d}{bg}\theta_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}q_{tt}q_x u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 d}{bg}q_t q_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}q_t q_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}qq_{xtt}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}qq_{xt}u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{1,tt}d}{bg}qq_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{d}{bg}\right)_t u_{ttt}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{ad}{bg}\right)_t u_{ttx}^2\mathrm{d}x. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.27) mit $\frac{1}{g}\theta_{tt}$ und erhalten nach Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_G \frac{1}{g}\theta_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2g_t}{g} q_{xt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G q_{xtt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{g_{tt}}{g} q_x\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{d}{g} u_{tttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2d_t}{g} u_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{d_{tt}}{g} u_{tx}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
= &\int_G \frac{2\alpha_{2,t}}{g} q_t^2\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{g} q_t q_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_{2,t}}{g} q q_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{2,tt}}{g} q_t q\theta_{tt}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{1}{g}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\right] = &-\int_G \frac{2g_t}{g} q_{xt}\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G q_{xtt}\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{g_{tt}}{g} q_x\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{d}{g} u_{ttt}\theta_{ttx} \\
&+ \int_G \left(\frac{d}{g}\right)_x u_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{2d_t}{g} u_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{d_{tt}}{g} u_{tx}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_{2,t}}{g} q_t^2\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{3\alpha_2}{g} q_t q_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_{2,t}}{g} q q_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{2,tt}}{g} q_t q\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{1}{g}\right)_t \theta_{tt}^2\mathrm{d}x. \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

Durch das selbe Vorgehen wie bei (5.9) - (5.12) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2} q_{ttt} + \tau_q q_{tt} + k\tau_\theta\theta_{ttx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_{tt}\right)^2 \mathrm{d}x\right] \\
= &-\int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} q_{tt}q_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}\theta_{ttx}q_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^2} q_{ttt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} q_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q}{\tau_\theta} q_{tt}\theta_{ttx}\mathrm{d}x \\
&-\int_G \frac{\tau_q^3}{2k\tau_\theta^2} q_{tt}q_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G q_{tt}\theta_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G k\theta_{ttx}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_{ttt}\theta_{ttx}\mathrm{d}x \\
&+\int_G \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta^2} q_{tt}^2 + \int_G \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2} q_{tt}\theta_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^4}{4k\tau_\theta^3} q_{tt}q_{ttt}\mathrm{d}x. \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Dies liefert uns letztlich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_3(t) = &-\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_{tt}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{ttt}+\tau_q q_{tt}+k\tau_\theta\theta_{ttx}-\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\right)^2\mathrm{d}x \\
&+\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q}{\tau_\theta}-\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta^2}\right)q_{tt}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{ttt}+\tau_q q_{tt}+k\tau_\theta\theta_{ttx}-\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\right)\mathrm{d}x \\
&-\int_G\left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_{ttx}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2a_t d}{bg}u_{txx}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{a_{tt}d}{bg}u_{xx}u_{ttt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{2b_t d}{bg}\theta_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&-\int_G\frac{b_{tt}d}{bg}\theta_x u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_1 d}{bg}q_{tt}q_x u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_1 d}{bg}q_t q_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}q_t q_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&+\int_G\frac{\alpha_1 d}{bg}qq_{xtt}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}qq_{xt}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_{1,tt}d}{bg}qq_x u_{ttt}\mathrm{d}x+\frac12\int_G\left(\frac{d}{bg}\right)_t u_{ttt}^2\mathrm{d}x \\
&+\frac12\int_G\left(\frac{ad}{bg}\right)_t u_{ttx}^2\mathrm{d}x-\int_G\frac{2g_t}{g}q_{xt}\theta_{tt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{g_{tt}}{g}q_x\theta_{tt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{2d_t}{g}u_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&-\int_G\frac{d_{tt}}{g}u_{tx}\theta_{tt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_{2,t}}{g}q_t^2\theta_{tt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{3\alpha_2}{g}q_t q_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_{2,t}}{g}qq_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&+\int_G\frac{\alpha_2}{g}qq_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_{2,tt}}{g}q_t q\theta_{tt}\mathrm{d}x+\frac12\int_G\left(\frac1g\right)_t\theta_{tt}^2\mathrm{d}x+\int_G\left(\frac{d}{g}\right)_x u_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Wiederum liefert eine zu (5.15) analoge Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_3(t) \le &-\frac12\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_{tt}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{ttt}+\tau_q q_{tt}+k\tau_\theta\theta_{ttx}-\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\right)^2\mathrm{d}x \\
&+\boxed{\int_G\frac{\alpha_1 d}{bg}qq_{xtt}u_{ttt}\mathrm{d}x}+|R_3|, \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
R_3 = &-\int_G\left(\frac{ad}{bg}\right)_x u_{ttx}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2a_t d}{bg}u_{txx}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{a_{tt}d}{bg}u_{xx}u_{ttt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{2b_t d}{bg}\theta_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&-\int_G\frac{b_{tt}d}{bg}\theta_x u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_1 d}{bg}q_{tt}q_x u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_1 d}{bg}q_t q_{tx}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}q_t q_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&+\int_G\frac{2\alpha_{1,t}d}{bg}qq_{xt}u_{ttt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_{1,tt}d}{bg}qq_x u_{ttt}\mathrm{d}x+\frac12\int_G\left(\frac{d}{bg}\right)_t u_{ttt}^2\mathrm{d}x \\
&+\frac12\int_G\left(\frac{ad}{bg}\right)_t u_{ttx}^2\mathrm{d}x-\int_G\frac{2g_t}{g}q_{xt}\theta_{tt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{g_{tt}}{g}q_x\theta_{tt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{2d_t}{g}u_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&-\int_G\frac{d_{tt}}{g}u_{tx}\theta_{tt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_{2,t}}{g}q_t^2\theta_{tt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{3\alpha_2}{g}q_t q_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x+\int_G\frac{2\alpha_{2,t}}{g}qq_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&+\boxed{\int_G\frac{\alpha_2}{g}qq_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x}+\int_G\frac{\alpha_{2,tt}}{g}q_t q\theta_{tt}\mathrm{d}x+\frac12\int_G\left(\frac1g\right)_t\theta_{tt}^2\mathrm{d}x+\int_G\left(\frac{d}{g}\right)_x u_{ttt}\theta_{tt}\mathrm{d}x. \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

Betrachtet man nun die Terme $T_1 := \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_{xtt} u_{ttt} \mathrm{d}x$ und $T_2 := \int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_{ttt} \theta_{tt} \mathrm{d}x$, so erkennt man sofort, dass Ableitungen auftauchen, welche nicht unmittelbar kontrolliert werden können. Diese Terme müssen also gesondert behandelt werden. Wir gehen in Abschnitt 5.3.3 im Detail darauf ein.

5.3.2 Energieabschätzungen

Wir betrachten die Gleichung (5.3) und multiplizieren diese mit θ_x. Dies liefert zunächst:

$$\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}\theta_x + \tau_q q_t \theta_x + q\theta_x = -k\theta_x^2 - k\tau_\theta \theta_{tx}\theta_x.$$

Integration und Umstellen der Terme liefert:

$$\int_G k\theta_x^2 \mathrm{d}x = -\int_G \tau_q q_t \theta_x \mathrm{d}x - \int_G q\theta_x \mathrm{d}x - \int_G \frac{\tau_q^2}{2} q_{tt}\theta_x \mathrm{d}x - \int_G k\tau_\theta \theta_{tx}\theta_x \mathrm{d}x.$$

Wir können wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\int_G k\theta_x^2 \mathrm{d}x = &-\int_G \sqrt{\frac{2}{k}} \left(\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + k\tau_\theta \theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_t \right) \sqrt{\frac{k}{2}} \theta_x \mathrm{d}x \\
&- \int_G \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_t \sqrt{\frac{k}{2}} \theta_x \mathrm{d}x - \int_G \sqrt{\frac{2}{k}} q \sqrt{\frac{k}{2}} \theta_x \mathrm{d}x \\
\leq &\int_G \frac{1}{k} \left(\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + k\tau_\theta \theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_t \right)^2 \mathrm{d}x + \frac{k}{4} \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\tau_q^4}{4\tau_\theta^2 k} q_t^2 \mathrm{d}x + \frac{k}{4} \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{k} q^2 \mathrm{d}x + \frac{k}{4} \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung liefert uns nun sofort:

$$\int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x \leq \int_G \frac{4}{k^2} \left(\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + k\tau_\theta \theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_t \right)^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^4}{\tau_\theta^2 k^2} q_t^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{4}{k^2} q^2 \mathrm{d}x. \tag{5.34}$$

Um $\int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x$ abzuschätzen gehen wir analog vor. Wir multiplizieren die Gleichung (5.20) mit θ_{tx} und erhalten mit der selben Argumentation wie oben:

$$\int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x \leq \int_G \frac{4}{k^2} \left(\frac{\tau_q^2}{2} q_{ttt} + \tau_q q_{tt} + k\tau_\theta \theta_{ttx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta} q_{tt} \right)^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\tau_q^4}{\tau_\theta^2 k^2} q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{4}{k^2} q_t^2 \mathrm{d}x. \tag{5.35}$$

Wir multiplizieren (5.1) mit $\frac{1}{a} u_{xx}$ und integrieren. Dies ergibt:

$$\boxed{\int_G \frac{1}{a} u_{tt} u_{xx} \mathrm{d}x} - \int_G u_{xx}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{b}{a} \theta_x u_{xx} \mathrm{d}x = \int_G \frac{\alpha_1}{a} u_{xx} q q_x \mathrm{d}x.$$

Partielle Integration des markierten Terms liefert:

$$-\int_G \left(\frac{1}{a}\right)_x u_{tt}u_x \mathrm{d}x - \int_G \frac{1}{a} u_{ttx}u_x \mathrm{d}x - \int_G u_{xx}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{b}{a}\theta_x u_{xx} \mathrm{d}x = \int_G \frac{\alpha_1}{a} u_{xx} q q_x \mathrm{d}x.$$

Dies ergibt nun:

$$\begin{aligned}\int_G u_{xx}^2 \mathrm{d}x \leq -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{1}{a} u_{tx}u_x \mathrm{d}x\right] + \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_t u_{tx}u_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{a} u_{tx}^2 \mathrm{d}x \\ - \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_x u_{tt}u_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{3b^2}{4a^2}\theta_x^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{3} u_{xx}^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{a} u_{xx} q q_x \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_G u_{xx}^2 \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{1}{a} u_{tx}u_{xx} \mathrm{d}x\right] \leq \int_G \frac{1}{a} u_{tx}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{3b^2}{4a^2}\theta_x^2 \mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_t u_{tx}u_x \mathrm{d}x \\ - \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_x u_{tt}u_x \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{a} q q_x u_{xx} \mathrm{d}x. \qquad (5.36)\end{aligned}$$

Wir multiplizieren (5.2) mit $\frac{3}{ad}u_{tx}$ und erhalten nach Integration:

$$\int_G \frac{3}{a} u_{tx}^2 \mathrm{d}x = \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q q_t u_{tx} \mathrm{d}x - \boxed{\int_G \frac{3}{ad}\theta_t u_{tx} \mathrm{d}x} - \int_G \frac{3g}{ad} q_x u_{tx} \mathrm{d}x.$$

Partielle Integration des markierten Terms liefert:

$$\int_G \frac{3}{a} u_{tx}^2 \mathrm{d}x = \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q q_t u_{tx} \mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x \theta_t u_t \mathrm{d}x + \int_G \frac{3}{ad}\theta_{tx} u_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{3g}{ad} q_x u_{tx} \mathrm{d}x.$$

Letzteres können wir folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}\int_G \frac{3}{a} u_{tx}^2 \mathrm{d}x = \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x \theta_t u_t \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad}\theta_x u_t \mathrm{d}x\right] - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t \theta_x u_t \mathrm{d}x \\ - \int_G \frac{3}{ad}\theta_x u_{tt} \mathrm{d}x - \boxed{\int_G \frac{3g}{ad} q_x u_{tx} \mathrm{d}x} + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q q_t u_{tx} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Partielle Integration des markierten Terms und die Gleichung (5.1) ergeben:

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{3}{a}u_{tx}^2\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad}\theta_x u_t + \frac{3g}{a^2d}qu_{tt} + \frac{3gb}{a^2d}q\theta_x - \frac{3g\alpha_1}{a^2d}q^2q_x\mathrm{d}x\right] \\
&\quad + \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x \theta_t u_t\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t \theta_x u_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\sqrt{6}}{d}\theta_x \frac{1}{\sqrt{6}}u_{xx}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{3b}{ad}\theta_x^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad}qq_x\theta_x\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_x u_{tx}q\mathrm{d}x \\
&\quad - \left[\frac{3g}{ad}qu_{tx}\right]_0^L - \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_t u_{xx}q\mathrm{d}x - \int_G \frac{1}{\sqrt{6}}u_{xx}\frac{3\sqrt{6}g}{ad}q_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad}qq_tu_{tx}\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad}\theta_x u_t + \frac{3g}{a^2d}qu_{tt} + \frac{3gb}{a^2d}q\theta_x - \frac{3g\alpha_1}{a^2d}q^2q_x\mathrm{d}x\right] \\
&\quad + \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x \theta_t u_t\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t \theta_x u_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{27}{d^2}\theta_x^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{12}u_{xx}^2\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{3b}{ad}\theta_x^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad}qq_x\theta_x\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_x u_{tx}q\mathrm{d}x - \left[\frac{3g}{ad}qu_{tx}\right]_0^L \\
&\quad - \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_t u_{xx}q\mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{12}u_{xx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{27g^2}{a^2d^2}q_t^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad}qq_tu_{tx}\mathrm{d}x. \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

In der obigen Abschätzung tritt nun ein Randterm auf, bei welchem zunächst nicht klar ist, wie er abgeschätzt werden soll. Dieser Term wird im nächsten Abschnitt gesondert behandelt. Zunächst aber kombinieren wir (5.36) und (5.37) und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\int_G \frac{2}{a}u_{tx}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G u_{xx}^2\mathrm{d}x \\
&- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad}\theta_x u_t + \frac{3g}{a^2d}qu_{tt} + \frac{3gb}{a^2d}q\theta_x - \frac{3g\alpha_1}{a^2d}q^2q_x - \frac{1}{a}u_{tx}u_{xx}\mathrm{d}x\right] \\
\leq &\int_G \left(\frac{27}{d^2} + \frac{3b}{ad} + \frac{3b^2}{4a^2}\right)\theta_x^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{27g^2}{a^2d^2}q_t^2\mathrm{d}x - \left[\frac{3g}{ad}qu_{tx}\right]_0^L + |R_4|, \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
R_4 = &\int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x \theta_t u_t\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t \theta_x u_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad}qq_x\theta_x\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_x u_{tx}q\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_t u_{xx}q\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad}qq_tu_{tx}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_t u_{tx}u_x\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_x u_{tt}u_x\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{a}qq_xu_{xx}\mathrm{d}x. \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.18) mit $\frac{1}{a}u_{txx}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\int_G \frac{1}{a}u_{ttt}u_{txx}\mathrm{d}x - \int_G u_{txx}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{a_t}{a}u_{xx}u_{txx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{b}{a}\theta_{tx}u_{txx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{b_t}{a}\theta_x u_{txx}\mathrm{d}x \\
= &\int_G \frac{\alpha_1}{a}q_tq_xu_{txx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1}{a}qq_{xt}u_{txx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_{1,t}}{a}qq_xu_{txx}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

bzw:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_G u_{txx}^2 \mathrm{d}x \leq &-\int_G \left(\frac{1}{a}\right)_x u_{ttt}u_{tx}\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{1}{a}u_{ttx}u_{tx}\mathrm{d}x\right] + \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_t u_{ttx}u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{a}u_{ttx}^2\mathrm{d}x \\ &- \int_G \frac{a_t}{a}u_{xx}u_{txx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{a}q_t q_x u_{txx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{a}q q_{xt} u_{txx}\mathrm{d}x \\ &- \int_G \frac{\alpha_{1,t}}{a} q q_x u_{txx}\mathrm{d}x, + \int_G \frac{3b^2}{4a^2}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{b_t}{a}\theta_x u_{txx}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.19) mit $\frac{3}{ad}u_{ttx}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}&\int_G \frac{3}{ad}\theta_{tt}u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3g}{ad}q_{xt}u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3g_t}{ad}q_x u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3}{a}u_{ttx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{3d_t}{ad}u_{tx}u_{ttx}\mathrm{d}x \\ = &\int_G \frac{3\alpha_2}{ad}q_t^2 u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q q_{tt} u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_{2,t}}{ad} q_t q u_{ttx}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

bzw:

$$\begin{aligned}\int_G \frac{3}{a}u_{ttx}^2\mathrm{d}x = &-\int_G \frac{3}{ad}\theta_{tt}u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3g}{ad}q_{xt}u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3g_t}{ad}q_x u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3d_t}{ad}u_{tx}u_{ttx}\mathrm{d}x \\ &+ \int_G \frac{3\alpha_2}{ad}q_t^2 u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q q_{tt} u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_{2,t}}{ad} q_t q u_{ttx}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Wir multiplizieren (5.18) mit $\frac{3}{ad}\theta_{xt}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}&\boxed{\int_G \frac{3}{ad}u_{ttt}\theta_{xt}\mathrm{d}x} - \int_G \frac{3}{d}u_{txx}\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3a_t}{ad}u_{xx}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b}{ad}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b_t}{ad}\theta_x\theta_{xt}\mathrm{d}x \\ = &\int_G \frac{3\alpha_1}{ad}q_t q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q q_{xt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_{1,t}}{ad} q q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Umschreiben des markierten Terms liefert uns:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad}u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x\right] - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x - \boxed{\int_G \frac{3}{ad}u_{tt}\theta_{xtt}\mathrm{d}x} \\ &- \int_G \frac{3}{d}u_{txx}\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3a_t}{ad}u_{xx}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b}{ad}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b_t}{ad}\theta_x\theta_{xt}\mathrm{d}x \\ = &\int_G \frac{3\alpha_1}{ad}q_t q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q q_{xt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_{1,t}}{ad} q q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Partielle Integration des markierten Terms liefert uns:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad}u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x\right] - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x u_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3}{ad}u_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\ &- \int_G \frac{3}{d}u_{txx}\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3a_t}{ad}u_{xx}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b}{ad}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b_t}{ad}\theta_x\theta_{xt}\mathrm{d}x \\ = &\int_G \frac{3\alpha_1}{ad}q_t q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q q_{xt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_{1,t}}{ad} q q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

bzw.

$$-\int_G \frac{3}{ad} u_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad} u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x\right] - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x u_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x$$
$$- \int_G \frac{3}{d} u_{txx}\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3a_t}{ad} u_{xx}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b}{ad}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b_t}{ad}\theta_x\theta_{xt}\mathrm{d}x$$
$$- \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q_t q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q q_{xt}\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_{1,t}}{ad} q q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x. \tag{5.42}$$

Partielle Integration liefert:

$$-\int_G \frac{3g}{ad} u_{ttx} q_{xt}\mathrm{d}x = -\left[\frac{3g}{ad} q_t u_{ttx}\right]_{\partial G} + \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_x u_{ttx} q_t\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3g}{ad} u_{txx} q_t\mathrm{d}x\right]$$
$$- \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_t u_{txx} q_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{3g}{ad} u_{txx} q_{tt}\mathrm{d}x, \tag{5.43}$$

wobei hier ein weiterer Randterm entstanden ist, welcher ebenfalls im nächsten Abschnitt behandelt werden soll. Sofort sieht man ein, dass

$$-\int_G \frac{3}{d}\theta_{tx} u_{xxt}\mathrm{d}x \le \frac{1}{12}\int_G u_{txx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{27}{d^2}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x \tag{5.44}$$

und

$$-\int_G \frac{3g}{ad} u_{xxt} q_{tt}\mathrm{d}x \le \frac{1}{12}\int_G u_{txx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{27g^2}{a^2d^2} q_{tt}^2\mathrm{d}x \tag{5.45}$$

gilt. Wir kombinieren nun (5.41) - (5.45). Dies liefert uns:

$$\int_G \frac{3}{a} u_{ttx}^2\mathrm{d}x \le \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \frac{3}{ad} u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \frac{3g}{ad} u_{txx} q_t\mathrm{d}x - \left[\frac{3g}{ad} q_t u_{ttx}\right]_{\partial G} + \frac{1}{6}\int_G u_{txx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{27}{d^2}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x$$
$$+ \int_G \frac{3b}{ad}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{27g^2}{a^2d^2} q_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x u_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x$$
$$- \int_G \frac{3a_t}{ad} u_{xx}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b_t}{ad}\theta_x\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q_t q_x\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q q_{xt}\theta_{xt}\mathrm{d}x$$
$$- \int_G \frac{3\alpha_{1,t}}{ad} q q_x\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_x u_{ttx} q_t\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_t u_{txx} q_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{3g_t}{ad} q_x u_{ttx}\mathrm{d}x$$
$$- \int_G \frac{3d_t}{ad} u_{tx} u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q_t^2 u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q q_{tt} u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_{2,t}}{ad} q_t q u_{ttx}\mathrm{d}x. \tag{5.46}$$

Nun kombinieren wir (5.40) und (5.46) und erhalten:

$$\int_G \frac{2}{a} u_{ttx}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G u_{txx}^2\mathrm{d}x$$
$$\le \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{3}{ad} u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3g}{ad} u_{txx} q_t\mathrm{d}x - \int_G \frac{1}{a} u_{ttx} u_{tx}\mathrm{d}x\right] - \left[\frac{3g}{ad} q_t u_{ttx}\right]_{\partial G}$$
$$+ \int_G \frac{27}{d^2}\theta_{tx}^2 + \frac{3b^2}{4a^2}\theta_{tx}^2 + \frac{3b}{ad}\theta_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{27g^2}{a^2d^2} q_{tt}^2 + |R_5|, \tag{5.47}$$

wobei

$$\begin{aligned}
R_5 = &- \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_t u_{tt}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3}{ad}\right)_x u_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{3a_t}{ad} u_{xx}\theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3b_t}{ad}\theta_x\theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q_t q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1}{ad} q q_{xt}\theta_{xt}\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{3\alpha_{1,t}}{ad} q q_x \theta_{xt}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_x u_{ttx} q_t \mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{3g}{ad}\right)_t u_{txx} q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{3g_t}{ad} q_x u_{ttx}\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{3d_t}{ad} u_{tx} u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q_t^2 u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_2}{ad} q q_{tt} u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_{2,t}}{ad} q_t q u_{ttx}\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{a_t}{a} u_{xx} u_{txx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{a} q_t q_x u_{txx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{a} q q_{xt} u_{txx}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_t u_{ttx} u_{tx}\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{\alpha_{1,t}}{a} q q_x u_{txx}\mathrm{d}x, + \int_G \frac{b_t}{a}\theta_x u_{txx}\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{1}{a}\right)_x u_{ttt} u_{tx}\mathrm{d}x. \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren(5.1) mit u_{tt} und erhalten:

$$\int_G u_{tt}^2 \mathrm{d}x = \int_G \sqrt{2} a u_{xx} \frac{1}{\sqrt{2}} u_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \sqrt{2} b\theta_x \frac{1}{\sqrt{2}} u_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_x u_{tt}\mathrm{d}x.$$

Damit ergibt sich:

$$\int_G u_{tt}^2 \mathrm{d}x \le \int_G a^2 u_{xx}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{4} u_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G b^2\theta_x^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{4} u_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_x u_{tt}\mathrm{d}x.$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit:

$$\int_G u_{tt}^2 \mathrm{d}x \le 2\int_G a^2 u_{xx}^2 \mathrm{d}x + 2\int_G b^2\theta_x^2 \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_1 q q_x u_{tt}\mathrm{d}x.$$

Mit Hilfe der Poincaréschen Ungleichung erhalten wir nun mit einer entsprechenden Konstanten $c > 0$

$$\int_G (u_{tt}^2 + u_t^2 + \theta^2)\mathrm{d}x \le 2\int_G a^2 u_{xx}^2 \mathrm{d}x + \int_G (2b^2 + c)\theta_x^2 \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_1 q q_x u_{tt}\mathrm{d}x + c\int_G u_{tx}^2 \mathrm{d}x. \qquad (5.49)$$

Wir multiplizieren (5.18) mit u_{ttt} und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_G u_{ttt}^2 \mathrm{d}x = &\int_G \sqrt{2} a u_{txx} \frac{1}{\sqrt{2}} u_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G \sqrt{2} b\theta_{tx} \frac{1}{\sqrt{2}} u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G a_t u_{xx} u_{ttt}\mathrm{d}x - \int_G b_t\theta_x u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \alpha_1 q_t q_x u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_{xt} u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_{1,t} q q_x u_{ttt}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich wie vorher:

$$\begin{aligned}
\int_G u_{ttt}^2 \mathrm{d}x \le &\int_G a^2 u_{txx}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{4} u_{ttt}^2 \mathrm{d}x + \int_G b^2\theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{1}{4} u_{ttt}^2 \mathrm{d}x + \int_G a_t u_{xx} u_{ttt}\mathrm{d}x \\
&- \int_G b_t\theta_x u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q_t q_x u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_{xt} u_{ttt}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_{1,t} q q_x u_{ttt}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit:

$$\int_G u_{ttt}^2 \mathrm{d}x \le 2\int_G a^2 u_{txx}^2 \mathrm{d}x + 2\int_G b^2\theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + 2\int_G a_t u_{xx} u_{ttt} \mathrm{d}x - 2\int_G b_t \theta_x u_{ttt} \mathrm{d}x$$
$$+ 2\int_G \alpha_1 q_t q_x u_{ttt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_1 q q_{xt} u_{ttt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_{1,t} q q_x u_{ttt} \mathrm{d}x.$$

Daraus folgt wieder unter Verwendung der Poincaréschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int_G (u_{ttt}^2 + u_{tt}^2 + \theta_t^2) \mathrm{d}x \le{}& 2\int_G a^2 u_{txx}^2 \mathrm{d}x + \int_G (2b^2 + c)\theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + c\int_G u_{ttx}^2 \mathrm{d}x + 2\int_G a_t u_{xx} u_{ttt} \mathrm{d}x \\ & - 2\int_G b_t \theta_x u_{ttt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_1 q_t q_x u_{ttt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_1 q q_{xt} u_{ttt} \mathrm{d}x \\ & + 2\int_G \alpha_{1,t} q q_x u_{ttt} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Eine Kombination von (5.49) und (5.50) liefert:

$$\begin{aligned}\int_G (u_{ttt}^2 + u_{tt}^2 + u_t^2 + \theta^2 + \theta_t^2) \mathrm{d}x \le{}& 2\int_G a^2 \left(u_{txx}^2 + u_{xx}^2\right) \mathrm{d}x + \int_G (2b^2 + c)\left(\theta_{tx}^2 + \theta_x^2\right) \mathrm{d}x \\ & + c\int_G u_{ttx}^2 \mathrm{d}x + c\int_G u_{tx}^2 \mathrm{d}x + R_6, \end{aligned} \tag{5.51}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_6 = {}& 2\int_G a_t u_{xx} u_{ttt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_1 q q_x u_{tt} \mathrm{d}x - 2\int_G b_t \theta_x u_{ttt} \mathrm{d}x \\ & + 2\int_G \alpha_1 q_t q_x u_{ttt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_1 q q_{xt} u_{ttt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_{1,t} q q_x u_{ttt} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.1) mit u und erhalten:

$$-\int_G a u_{xx} u \mathrm{d}x = -\int_G u_{tt} u \mathrm{d}x - \int_G b\theta_x u \mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_x u \mathrm{d}x,$$

bzw:

$$\int_G a_x u_x u \mathrm{d}x + \int_G a u_x^2 \mathrm{d}x = -\int_G u_{tt} u \mathrm{d}x - \int_G b\theta_x u \mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_x u \mathrm{d}x.$$

Ist der Koeffizient a durch die Konstante $c_a > 0$ nach unten beschränkt, so erhalten wir mit einer gewissen positiven Konstanten C:

$$\int_G u_x^2 \mathrm{d}x \le C\int_G u_{tt}^2 + \theta_x^2 \mathrm{d}x + R_7, \tag{5.53}$$

wobei

$$R_7 = \frac{2}{c_a}\int_G \alpha_1 q q_x u \mathrm{d}x - \frac{2}{c_a}\int_G a_x u_x u \mathrm{d}x. \tag{5.54}$$

Wir multiplizieren (5.2) mit θ_t. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_G \theta_t^2 \mathrm{d}x \leq \int_G g_x q \theta_t \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G g q \theta_x \mathrm{d}x\right] - \int_G g_t q \theta_x \mathrm{d}x \\ + \frac{1}{2}\int_G g^2 q_t^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G d^2 u_{tx}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \theta_t^2 \mathrm{d}x + \int_G \alpha_2 q q_t \theta_t \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\int_G \theta_t^2 \mathrm{d}x \leq 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G g q \theta_x \mathrm{d}x\right] + \int_G g^2 q_t^2 \mathrm{d}x + \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x + \int_G d^2 u_{tx}^2 \mathrm{d}x \\ + 2\int_G g_x q \theta_t \mathrm{d}x - 2\int_G g_t q \theta_x \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_2 q q_t \theta_t \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.19) mit θ_{tt} und erhalten:

$$\begin{aligned}\int_G \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \leq \int_G g_x \theta_{tt} q_t \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G g \theta_{tx} q_t \mathrm{d}x\right] - \int_G g_t \theta_{tx} q_t \mathrm{d}x \\ + \frac{1}{2}\int_G g^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G d^2 u_{ttx}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \\ - \int_G g_t q_x \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G d_t u_{tx} \theta_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \alpha_2 q_t^2 \theta_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \alpha_2 q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \alpha_{2,t} q_t q \theta_{tt} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\int_G \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \leq 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G g \theta_{tx} q_t \mathrm{d}x\right] + \int_G g^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + \int_G d^2 u_{ttx}^2 \mathrm{d}x \\ - 2\int_G g_t \theta_{tx} q_t \mathrm{d}x + 2\int_G g_x \theta_{tt} q_t \mathrm{d}x - 2\int_G g_t q_x \theta_{tt} \mathrm{d}x - 2\int_G d_t u_{tx} \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ + 2\int_G \alpha_2 q_t^2 \theta_{tt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_2 q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_{2,t} q_t q \theta_{tt} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Eine Kombination von (5.55) und (5.56) liefert uns nun:

$$\begin{aligned}\int_G \theta_t^2 + \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \leq 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G g \theta_{tx} q_t \mathrm{d}x + \int_G g q \theta_x \mathrm{d}x\right] + \int_G g^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x \\ + \int_G d^2 u_{ttx}^2 \mathrm{d}x + \int_G g^2 q_t^2 \mathrm{d}x + \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x + \int_G d^2 u_{tx}^2 \mathrm{d}x + R_8, \end{aligned} \tag{5.57}$$

wobei

$$\begin{aligned}R_8 = -2\int_G g_t \theta_{tx} q_t \mathrm{d}x + 2\int_G g_x \theta_{tt} q_t \mathrm{d}x - 2\int_G g_t q_x \theta_{tt} \mathrm{d}x - 2\int_G d_t u_{tx} \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ + 2\int_G \alpha_2 q_t^2 \theta_{tt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_2 q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_{2,t} q_t q \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ + 2\int_G g_x q \theta_t \mathrm{d}x - 2\int_G g_t q \theta_x \mathrm{d}x + 2\int_G \alpha_2 q q_t \theta_t \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.58}$$

5.3.3 Problematische Terme bei der Ableitung der Energieterme

In diesem Abschnitt behandeln wir die beiden problematischen Terme, welche bei der Zeitableitung von E_3 in (5.32) und (5.33) auftreten. Es wird sich herausstellen, dass der Restterm T_2 durch Einsetzen der dritten Differentialgleichung und mit Hilfe von partieller Integration in Terme umwandeln läßt, welche einfach abzuschätzen sind. Allerdings werden bei der Behandlung des Terms T_1 gewisse Randterme auftreten. Diese Randterme werden später unter anderem unter Verwendung einer Kleinheitsbedingung an Terme niederer Ordnung abgeschätzt. Zunächst ergibt sich mit Hilfe von (5.20)

$$\begin{aligned}\int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_{ttt} \theta_{tt} \mathrm{d}x = &- \int_G \frac{2\alpha_2}{g\tau_q} q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_2}{g\tau_q^2} q q_t \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ &- \int_G \frac{2\alpha_2 k}{g\tau_q^2} q \theta_{tx} \theta_{tt} \mathrm{d}x - \boxed{\int_G \frac{2\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q \theta_{ttx} \theta_{tt} \mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Hier verbleibt nun nur noch der markierte Term zu behandeln. Wir gehen folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned} - \int_G \frac{2\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q \theta_{ttx} \theta_{tt} \mathrm{d}x &= \int_G \left(\frac{2\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q \theta_{tt} \right)_x \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ &= \int_G \left(\frac{2\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} \right)_x q \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q_x \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q \theta_{ttx} \theta_{tt} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$- \int_G \frac{2\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q \theta_{ttx} \theta_{tt} \mathrm{d}x = \int_G \left(\frac{\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} \right)_x q \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q_x \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x. \tag{5.60}$$

Fassen wir (5.59) und (5.60) zusammen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_G \frac{\alpha_2}{g} q q_{ttt} \theta_{tt} \mathrm{d}x = &- \int_G \frac{2\alpha_2}{g\tau_q} q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_2}{g\tau_q^2} q q_t \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_2 k}{g\tau_q^2} q \theta_{tx} \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ &+ \int_G \left(\frac{\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} \right)_x q \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_2 k\tau_\theta}{g\tau_q^2} q_x \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Wir wenden uns dem verbleibenden problematischen Term zu. Zunächst erhalten wir mit Hilfe einer partiellen Integration:

$$\int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_{xtt} u_{ttt} \mathrm{d}x = - \int_G \left(\frac{\alpha_1 d}{bg} \right)_x q u_{ttt} q_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q_x u_{ttt} q_{tt} \mathrm{d}x - \boxed{\int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q u_{tttx} q_{tt} \mathrm{d}x}. \tag{5.62}$$

Offenbar ist nun der markierte Term zu behandeln. Hierzu multiplizieren wir die Gleichung

(5.27) mit $\frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt}$ und erhalten nach Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt} \theta_{ttt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 g_t}{bg} q q_{tt} q_{xt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1}{b} q q_{tt} q_{ttx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 g_{tt}}{bg} q q_x q_{tt} \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_{tt} u_{tttx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 d_t}{bg} q q_{tt} u_{ttx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d_{tt}}{bg} q q_{tt} u_{tx} \mathrm{d}x \\
= &\int_G \frac{2\alpha_1 \alpha_{2,t}}{bg} q q_t^2 q_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_1 \alpha_2}{bg} q q_t q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 \alpha_{2,t}}{bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_1 \alpha_2}{bg} q^2 q_{tt} q_{ttt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 \alpha_{2,tt}}{bg} q^2 q_t q_{tt} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x \right] - \int_G \left(\frac{\alpha_1}{bg} \right)_t q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{bg} q_t q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{ttt} \theta_{tt} \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{2\alpha_1 g_t}{bg} q q_{tt} q_{xt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1}{b} q q_{tt} q_{ttx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 g_{tt}}{bg} q q_x q_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_{tt} u_{tttx} \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{2\alpha_1 d_t}{bg} q q_{tt} u_{ttx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d_{tt}}{bg} q q_{tt} u_{tx} \mathrm{d}x \\
= &\int_G \frac{2\alpha_1 \alpha_{2,t}}{bg} q q_t^2 q_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{3\alpha_1 \alpha_2}{bg} q q_t q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 \alpha_{2,t}}{bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_G \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x \right] \\
&- \int_G \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{2bg} \right)_t q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1 \alpha_2}{bg} q q_t q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 \alpha_{2,tt}}{bg} q^2 q_t q_{tt} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
-\int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q q_{tt} u_{tttx} \mathrm{d}x = &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt} \theta_{tt} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x \right] - \int_G \left(\frac{\alpha_1}{bg} \right)_t q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{bg} q_t q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x \\
&- \boxed{\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{ttt} \theta_{tt} \mathrm{d}x} + \int_G \frac{2\alpha_1 g_t}{bg} q q_{tt} q_{xt} \mathrm{d}x + \boxed{\int_G \frac{\alpha_1}{b} q q_{tt} q_{ttx} \mathrm{d}x} \\
&+ \int_G \frac{\alpha_1 g_{tt}}{bg} q q_x q_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 d_t}{bg} q q_{tt} u_{ttx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d_{tt}}{bg} q q_{tt} u_{tx} \mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{2\alpha_1 \alpha_{2,t}}{bg} q q_t^2 q_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1 \alpha_2}{bg} q q_t q_{tt}^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_1 \alpha_{2,t}}{bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{2bg} \right)_t q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 \alpha_2}{bg} q q_t q_{tt}^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1 \alpha_{2,tt}}{bg} q^2 q_t q_{tt} \mathrm{d}x. \qquad (5.63)
\end{aligned}$$

Demnach sind noch die beiden markierten Terme abzuschätzen.

$$\begin{aligned}
-\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{ttt} \theta_{tt} \mathrm{d}x = &\int_G \frac{2\alpha_1}{bg\tau_q} q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1}{bg\tau_q^2} q q_t \theta_{tt} \mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{2k\alpha_1}{bg\tau_q^2} q \theta_{tx} \theta_{tt} \mathrm{d}x + \boxed{\int_G \frac{2\alpha_1 k \tau_\theta}{bg\tau_q^2} q \theta_{ttx} \theta_{tt} \mathrm{d}x}. \qquad (5.64)
\end{aligned}$$

Weiter ergibt sich:

$$\int_G \frac{2\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2} q\theta_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x = -\int_G \left(\frac{2\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2}\right)_x q\theta_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2} q_x\theta_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2} q\theta_{tt}\theta_{ttx},$$

bzw.

$$\int_G \frac{2\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2} q\theta_{ttx}\theta_{tt}\mathrm{d}x = -\int_G \left(\frac{\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2}\right)_x q\theta_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2} q_x\theta_{tt}^2\mathrm{d}x. \tag{5.65}$$

Schließlich berechnen wir mit Hilfe von partieller Integration:

$$\int_G \frac{\alpha_1}{b} qq_{tt}q_{xtt}\mathrm{d}x = -\int_G \left(\frac{\alpha_1}{b}\right)_x qq_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{b} q_x q_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{b} qq_{ttx}q_{tt}\mathrm{d}x + \left[\frac{\alpha_1}{b} qq_{tt}^2\right]_0^L,$$

bzw.

$$\int_G \frac{\alpha_1}{b} qq_{tt}q_{xtt}\mathrm{d}x = -\int_G \left(\frac{\alpha_1}{2b}\right)_x qq_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{2b} q_x q_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{b} qq_{tt}^2\right]_0^L. \tag{5.66}$$

Wir kombinieren nun (5.62) - (5.66) und erhalten:

$$\int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} qq_{xtt}u_{ttt}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{b} qq_{tt}^2\right]_0^L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg} qq_{tt}\theta_{tt} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2\mathrm{d}x\right] + \widetilde{R_3}, \tag{5.67}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\widetilde{R_3} = &-\int_G \left(\frac{\alpha_1 d}{bg}\right)_x qu_{ttt}q_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1 d}{bg} q_x u_{ttt}q_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{\alpha_1}{bg}\right)_t qq_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{bg} q_t q_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{2\alpha_1}{bg\tau_q} qq_{tt}\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1}{bg\tau_q^2} qq_t\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2k\alpha_1}{bg\tau_q^2} q\theta_{tx}\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2}\right)_x q\theta_{tt}^2\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{\alpha_1 k\tau_\theta}{bg\tau_q^2} q_x\theta_{tt}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 g_t}{bg} qq_{tt}q_{xt}\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{\alpha_1}{2b}\right)_x qq_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{2b} q_x q_{tt}^2\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{\alpha_1 g_{tt}}{bg} qq_x q_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1 d_t}{bg} qq_{tt}u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d_{tt}}{bg} qq_{tt}u_{tx}\mathrm{d}x \\
&- \int_G \frac{2\alpha_1\alpha_{2,t}}{bg} qq_t^2 q_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{3\alpha_1\alpha_2}{bg} qq_t q_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_1\alpha_{2,t}}{bg} q^2 q_{tt}^2\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg}\right)_t q^2 q_{tt}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{bg} qq_t q_{tt}^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1\alpha_{2,tt}}{bg} q^2 q_t q_{tt}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Hier ist nun ersichtlich, dass der auftretende Randterm $\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{b} qq_{tt}^2\right]_0^L$ weiter abgeschätzt werden muss. Dies wird unter anderem im folgenden Abschnitt erledigt.

5.3.4 Abschätzungen verschiedener Randterme

Wir wenden uns in diesem Abschnitt der Behandlung der Randterme zu, welche in den Abschätzungen (5.37), (5.43) und (5.66) entstanden sind. Hierbei orientieren wir uns an den Techniken, welche in [12] bzw. in [17] angewendet wurden. Zunächst ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left|\left[\frac{3g}{ad}qu_{tx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| &\le \left|\frac{3g}{ad\sqrt{2a\varepsilon}}q\sqrt{2a\varepsilon}u_{tx}\right|(L)+\left|\frac{3g}{ad\sqrt{2a\varepsilon}}q\sqrt{2a\varepsilon}u_{tx}\right|(0)\\ &\le \left(\frac{9g^2}{4a^3d^2\varepsilon}q^2\right)(L)+\left(\frac{9g^2}{4a^3d^2\varepsilon}q^2\right)(0)+\left(\varepsilon au_{tx}^2\right)(L)+\left(\varepsilon au_{tx}^2\right)(0)\\ &\le \frac{C_1}{\varepsilon}\left(q^2(L)+q^2(0)\right)+\left(\varepsilon au_{tx}^2\right)(L)+\left(\varepsilon au_{tx}^2\right)(0). \end{aligned} \tag{5.69}$$

Hierbei ist C_1 eine positive Konstante, welche nur von den Koeffizienten a, d und g abhängig ist. Unter Verwendung der Einbettung von $W^{1,1}(G)$ in $L^\infty(G)$ ergibt sich die Abschätzung

$$|q(x)|^2 \le \int_G \left(q^2+(q^2)_x\right)\mathrm{d}x$$

für alle $x\in\overline{G}$. Damit können wir aber wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}|q(x)|^2 &\le \int_G \left(q^2+2|qq_x|\right)\mathrm{d}x \le \int_G q^2+2\left|\frac{1}{\varepsilon}q\varepsilon q_x\right|\mathrm{d}x \le \int_G q^2+\frac{1}{\varepsilon^2}q^2+\varepsilon^2q_x^2\mathrm{d}x\\ &= \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int_G q_x^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Damit folgern wir unter Verwendung der Gleichung (5.2):

$$\begin{aligned}\frac{C_1}{\varepsilon}\left(q^2(L)+q^2(0)\right) &\le \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+2C_1\varepsilon\int_G q_x^2\mathrm{d}x\\ &\le \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+2C_1\varepsilon\int_G\left(-\frac{1}{g}\theta_tq_x-\frac{d}{g}u_{tx}q_x+\frac{\alpha_2}{g}qq_tq_x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.70}$$

Unter Verwendung der Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_G \frac{1}{g}\theta_tq_x+\frac{d}{g}u_{tx}q_x\mathrm{d}x &= \int_G \frac{3\sqrt{2}}{adg}\theta_t\frac{ad}{3\sqrt{2}}q_x+\frac{3\sqrt{2}}{ag}u_{tx}\frac{ad}{3\sqrt{2}}q_x\mathrm{d}x\\ &\le \int_G\frac{9}{a^2d^2g^2}\theta_t^2\mathrm{d}x+\int_G\frac{a^2d^2}{36}q_x^2\mathrm{d}x+\int_G\frac{9}{a^2g^2}u_{tx}^2\mathrm{d}x+\int_G\frac{a^2d^2}{36}q_x^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.71}$$

und (5.69) sowie (5.70) erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\left[\frac{3g}{ad}qu_{tx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| &\le \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+2C_1\varepsilon\int_G\frac{\alpha_2}{g}qq_tq_x\mathrm{d}x+\int_G\frac{18C_1\varepsilon}{a^2d^2g^2}\theta_t^2\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_G\frac{C_1\varepsilon a^2d^2}{9}q_x^2\mathrm{d}x+\int_G\frac{18C_1\varepsilon}{a^2g^2}u_{tx}^2\mathrm{d}x+\left(\varepsilon au_{tx}^2\right)(L)+\left(\varepsilon au_{tx}^2\right)(0).\end{aligned} \tag{5.72}$$

Mit den selben Techniken wie oben erhalten wir die Abschätzungen

$$\left|\left[\frac{3g}{ad}q_tu_{ttx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| \le \frac{C_1}{\varepsilon}\left(q_t^2(L)+q_t^2(0)\right)+\left(\varepsilon au_{ttx}^2\right)(L)+\left(\varepsilon au_{ttx}^2\right)(0) \tag{5.73}$$

und mit Hilfe der Gleichung (5.19) ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned}
\frac{C_1}{\varepsilon}\left(q_t^2(L)+q_t^2(0)\right) &\le \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q_t^2 \mathrm{d}x + 2C_1\varepsilon\int_G q_{tx}^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q_t^2 \mathrm{d}x - 2C_1\varepsilon\int_G \frac{1}{g}\theta_{tt}q_{tx}\mathrm{d}x - 2C_1\varepsilon\int_G \frac{d}{g}u_{ttx}q_{tx}\mathrm{d}x \\
&\quad + 2C_1\varepsilon\int_G\left(-\frac{g_t}{g}q_x - \frac{d_t}{g}u_{tx} + \frac{\alpha_2}{g}q_t^2 + \frac{\alpha_2}{g}qq_{tt} + \frac{\alpha_{2,t}}{g}q_t q\right)q_{tx}\mathrm{d}x. \qquad (5.74)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{1}{g}\theta_{tt}q_{tx} + \frac{d}{g}u_{ttx}q_{tx}\mathrm{d}x &= \int_G \frac{3\sqrt{2}}{adg}\theta_{tt}\frac{ad}{3\sqrt{2}}q_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{3\sqrt{2}}{ag}u_{ttx}\frac{ad}{3\sqrt{2}}q_{tx}\mathrm{d}x \\
&\le \int_G \frac{9}{a^2d^2g^2}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{a^2d^2}{36}q_{tx}^2\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{9}{a^2g^2}u_{ttx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{a^2d^2}{36}q_{tx}^2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

und (5.73) sowie (5.74) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|\left[\frac{3g}{ad}q_t u_{ttx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| &\le \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q_t^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2d^2g^2}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2g^2}u_{ttx}^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{C_1\varepsilon a^2d^2}{9}q_{tx}^2\mathrm{d}x \\
&\quad + 2C_1\varepsilon\int_G\left(-\frac{g_t}{g}q_x - \frac{d_t}{g}u_{tx} + \frac{\alpha_2}{g}q_t^2 + \frac{\alpha_2}{g}qq_{tt} + \frac{\alpha_{2,t}}{g}q_t q\right)q_{tx}\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\varepsilon a u_{ttx}^2\right)(L) + \left(\varepsilon a u_{ttx}^2\right)(0). \qquad (5.75)
\end{aligned}$$

Addition der Gleichungen (5.72) und (5.75) liefert nun:

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\frac{3g}{ad}q_t u_{ttx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| + \left|\left[\frac{3g}{ad}q u_{tx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| \\
&\le \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2 + q_t^2\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2d^2g^2}\left(\theta_t^2+\theta_{tt}^2\right)\mathrm{d}x + \int_G \frac{C_1\varepsilon a^2d^2}{9}\left(q_x^2+q_{tx}^2\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2g^2}\left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x + 2C_1\varepsilon\int_G \frac{\alpha_2}{g}qq_tq_x\mathrm{d}x \\
&\quad + 2C_1\varepsilon\int_G\left(-\frac{g_t}{g}q_x - \frac{d_t}{g}u_{tx} + \frac{\alpha_2}{g}q_t^2 + \frac{\alpha_2}{g}qq_{tt} + \frac{\alpha_{2,t}}{g}q_t q\right)q_{tx}\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\varepsilon a u_{tx}^2\right)(L) + \left(\varepsilon a u_{tx}^2\right)(0) + \left(\varepsilon a u_{ttx}^2\right)(L) + \left(\varepsilon a u_{ttx}^2\right)(0). \qquad (5.76)
\end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichung (5.2) mit q_x liefert uns

$$q_x^2 \le \frac{2}{g^2}\theta_t^2 + \frac{2d^2}{g^2}u_{tx}^2 + \frac{2\alpha_2}{g}qq_tq_x.$$

Entsprechend liefert die Multiplikation der Gleichung (5.19) mit q_{tx}:

$$q_{tx}^2 \leq \frac{2}{g^2}\theta_{tt}^2 + \frac{2d^2}{g^2}u_{ttx}^2 - \frac{2g_t}{g}q_x q_{tx} - \frac{2d_t}{g}u_{tx}q_{tx} + \frac{2\alpha_2}{g}q_t^2 q_{tx} + \frac{2\alpha_2}{g}qq_{tt}q_{tx} + \frac{2\alpha_{2,t}}{g}q_t q q_{tx}.$$

Setzen wir die letzteren beiden Ungleichungen in (5.76) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\frac{3g}{ad}q_t u_{ttx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| + \left|\left[\frac{3g}{ad}qu_{tx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| \\
&\leq \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2 + q_t^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2d^2g^2}\left(\theta_t^2+\theta_{tt}^2\right)\mathrm{d}x + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2g^2}\left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_G \frac{2C_1\varepsilon a^2d^2}{9}\left(\frac{1}{g^2}\theta_t^2 + \frac{d^2}{g^2}u_{tx}^2\right)\mathrm{d}x + \int_G \frac{2C_1\varepsilon a^2d^2}{9}\left(\frac{1}{g^2}\theta_{tt}^2 + \frac{d^2}{g^2}u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\varepsilon a u_{tx}^2\right)(L) + \left(\varepsilon a u_{tx}^2\right)(0) + \left(\varepsilon a u_{ttx}^2\right)(L) + \left(\varepsilon a u_{ttx}^2\right)(0) + R_9,
\end{aligned} \tag{5.77}$$

wobei

$$\begin{aligned}
R_9 = &\int_G \frac{2C_1\varepsilon a^2d^2}{9}\left(-\frac{g_t}{g}q_x q_{tx} - \frac{d_t}{g}u_{tx}q_{tx} + \frac{\alpha_2}{g}q_t^2 q_{tx}\right. \\
&\left. + \frac{\alpha_2}{g}qq_{tt}q_{tx} + \frac{\alpha_{2,t}}{g}q_t q q_{tx}\right)\mathrm{d}x + \int_G \frac{2C_1\varepsilon a^2d^2\alpha_2}{9g}qq_t q_x \mathrm{d}x \\
&+ 2C_1\varepsilon\int_G \frac{\alpha_2}{g}qq_t q_x \mathrm{d}x \\
&+ 2C_1\varepsilon\int_G\left(-\frac{g_t}{g}q_x - \frac{d_t}{g}u_{tx} + \frac{\alpha_2}{g}q_t^2 + \frac{\alpha_2}{g}qq_{tt} + \frac{\alpha_{2,t}}{g}q_t q\right)q_{tx}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.18) mit ϕu_{tx}, wobei $\phi(x) = L - 2x$ und integrieren. Dies liefert zunächst:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G u_{tt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\right] - \int_G u_{tt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G a u_{txx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G b\theta_{tx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x \\
&= \int_G a_t u_{xx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x - \int_G b_t\theta_x\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q_t q_x\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_{1,t}qq_x\phi u_{tx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Partielle Integration ergibt nun:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G u_{tt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\right] + \frac{L}{2}\left((au_{tx})(L) + (au_{tx})(0)\right) = \int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x + \int_G au_{tx}^2\mathrm{d}x - \int_G b\theta_{tx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x + R_{10}, \tag{5.79}$$

wobei

$$\begin{aligned}
R_{10} = &-\int_G \frac{1}{2}a_x\phi u_{tx}^2\mathrm{d}x + \int_G a_t u_{xx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x - \int_G b_t\theta_x\phi u_{tx}\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \alpha_1 q_t q_x\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_1 q q_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \alpha_{1,t}qq_x\phi u_{tx}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Wir multiplizieren (5.26) mit ϕu_{ttx} und erhalten zunächst:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\right]-\int_G u_{ttt}\phi u_{tttx}\mathrm{d}x-\int_G a u_{ttxx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G b\theta_{ttx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\\
=&\int_G a_{tt}u_{xx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G 2a_t u_{txx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x-\int_G 2b_t\theta_{tx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x-\int_G b_{tt}\theta_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\\
&+\int_G \alpha_1 q_{tt}q_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G 2\alpha_1 q_t q_{tx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G 2\alpha_{1,t}q_t q_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G \alpha_1 q q_{xtt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\\
&+\int_G 2\alpha_{1,t}q q_{xt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G \phi\alpha_{1,tt}q q_x u_{ttx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Partielle Integration liefert uns nun:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x-\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x+\frac{L}{2}\left((au_{ttx}^2)(L)+(au_{ttx}^2)(0)\right)\\
&-\int_G au_{ttx}^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G a_x u_{ttx}^2\phi\mathrm{d}x+\int_G b\theta_{ttx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x-\boxed{\int_G \alpha_1 q q_{xtt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x}\\
=&\int_G a_{tt}u_{xx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G 2a_t u_{txx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x-\int_G 2b_t\theta_{tx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x-\int_G b_{tt}\theta_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\\
&+\int_G \alpha_1 q_{tt}q_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G 2\alpha_1 q_t q_{tx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G 2\alpha_{1,t}q_t q_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\\
&+\int_G 2\alpha_{1,t}q q_{xt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\int_G \phi\alpha_{1,tt}q q_x u_{ttx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

Wir behandeln nun den markierten Term. Mit Hilfe von Gleichung (5.19) erhalten wir zunächst:

$$
\begin{aligned}
&-\int_G \alpha_1 q q_{xtt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\\
=&\boxed{\int_G \frac{\alpha_1}{d}q q_{xtt}\phi\theta_{tt}\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1 g}{d}q q_{xt}^2\phi\mathrm{d}x\right]-\frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1 g}{d}q_t q_{xt}^2\phi\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_G\left(\frac{\alpha_1 g}{d}\right)_t q q_{xt}^2\phi\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{\alpha_1 g_t}{d}q q_{xt}\phi q_x\mathrm{d}x\right]-\int_G\left(\frac{\alpha_1 g_t}{d}\right)_t q q_{xt}\phi q_x\mathrm{d}x\\
&-\int_G \frac{\alpha_1 g_t}{d}q_t q_{xt}\phi q_x\mathrm{d}x-\int_G \frac{\alpha_1 g_t}{d}q q_{xt}^2\phi\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{\alpha_1 d_t}{d}q q_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\right]\\
&-\int_G\left(\frac{\alpha_1 d_t}{d}\right)_t q q_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x-\int_G \frac{\alpha_1 d_t}{d}q_t q_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x-\int_G \frac{\alpha_1 d_t}{d}q q_{xt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x\\
&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q q_{xt}\phi q_t^2\mathrm{d}x\right]+\int_G\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}\right)_t q q_{xt}\phi q_t^2\mathrm{d}x+\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q_t q_{xt}\phi q_t^2\mathrm{d}x\\
&+2\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q q_{xt}\phi q_t q_{tt}\mathrm{d}x-\boxed{\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q q_{xtt}\phi q q_{tt}\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}q q_{xt}\phi q_t q\mathrm{d}x\right]\\
&+\int_G\left(\frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}\right)_t q^2 q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x+2\int_G \frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}q q_{xt}\phi q_t^2\mathrm{d}x+\int_G \frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}q^2 q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{5.82}
$$

Der erste der beiden markierten Terme wird wie folgt behandelt:

$$\begin{aligned}\int_G \frac{\alpha_1}{d} qq_{xtt}\phi\theta_{tt}\mathrm{d}x =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} qq_{tt}^2\phi\mathrm{d}x\right] - \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\right)_t qq_{tt}^2\phi\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_t q_{tt}^2\phi\mathrm{d}x\\
&+ \int_G \frac{\alpha_1\tau_q}{dk\tau_\theta} qq_{tt}^2\phi\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1}{dk\tau_\theta} qq_{tt}\phi q_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1}{d\tau_\theta} qq_{tt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\\
&- \int_G \left(\frac{\alpha_1}{d}\right)_x qq_{tt}\phi\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{d} q_x q_{tt}\phi\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{2\alpha_1}{d} q\theta_{tt}q_{tt}\mathrm{d}x. \qquad (5.83)\end{aligned}$$

Der zweite markierte Term wird folgendermaßen behandelt:

$$\begin{aligned}-\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{xtt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x =& L\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + L\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0) + \int_G \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}\right)_x q^2 q_{tt}^2\phi\mathrm{d}x\\
&+ 2\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} qq_x q_{tt}^2\phi\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{ttx}\phi q_{tt}\mathrm{d}x - 2\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Und dies ist gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned}-\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{xtt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x =& \frac{L}{2}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + \frac{L}{2}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0) + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}\right)_x q^2 q_{tt}^2\phi\mathrm{d}x\\
&+ \int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} qq_x q_{tt}^2\phi\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\mathrm{d}x. \qquad (5.84)\end{aligned}$$

Wir fassen nun (5.81) - (5.84) zusammen und erhalten schließlich:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1 g}{d} qq_{xt}^2\phi\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 g_t}{d} qq_{xt}\phi q_x\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d_t}{d} qq_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\right]\\
&- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} qq_{xt}\phi q_t^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d} qq_{xt}\phi q_t q\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} qq_{tt}^2\phi\mathrm{d}x\right]\\
&+ \frac{L}{2}\left((au_{ttx}^2)(L) + (au_{ttx}^2)(0)\right) + \frac{L}{2}\left(\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0)\right)\\
&- \int_G au_{ttx}^2\mathrm{d}x + \int_G b\theta_{ttx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x\\
=\ & R_{11}, \qquad (5.85)\end{aligned}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
R_{11} = {} & \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\right)_t qq_{tt}^2\phi \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_t q_{tt}^2\phi \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1\tau_q}{dk\tau_\theta} qq_{tt}^2\phi \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1}{dk\tau_\theta} qq_{tt}\phi q_t \mathrm{d}x \\
& - \int_G \frac{\alpha_1}{d\tau_\theta} qq_{tt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{\alpha_1}{d}\right)_x qq_{tt}\phi\theta_{tt}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1}{d} q_x q_{tt}\phi\theta_{tt}\mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_1}{d} q\theta_{tt}q_{tt}\mathrm{d}x \\
& + \frac{1}{2}\int_G \frac{\alpha_1 g}{d} q_t q_{xt}^2\phi \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{\alpha_1 g}{d}\right)_t qq_{xt}^2\phi\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{\alpha_1 g_t}{d}\right)_t qq_{xt}\phi q_x \mathrm{d}x \\
& + \int_G \frac{\alpha_1 g_t}{d} q_t q_{xt}\phi q_x \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 g_t}{d} qq_{xt}^2\phi \mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{\alpha_1 d_t}{d}\right)_t qq_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1 d_t}{d} q_t q_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x \\
& + \int_G \frac{\alpha_1 d_t}{d} qq_{xt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}\right)_t qq_{xtt}\phi q_t^2\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q_t q_{xt}\phi q_t^2 \mathrm{d}x \\
& - 2\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} qq_{xt}\phi q_t q_{tt}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}\right)_x q^2 q_{tt}^2\phi\mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} qq_x q_{tt}^2\phi \mathrm{d}x + \int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& - \int_G \left(\frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}\right)_t q^2 q_{xt}\phi q_t \mathrm{d}x - 2\int_G \frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d} qq_{xt}\phi q_t^2 \mathrm{d}x - \int_G \frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d} q^2 q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x \\
& + \int_G a_{tt}u_{xx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G 2a_t u_{txx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G 2b_t\theta_{tx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G b_{tt}\theta_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x \\
& + \int_G \alpha_1 q_{tt}q_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G 2\alpha_1 q_t q_{tx}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G 2\alpha_{1,t}q_t q_x\phi u_{ttx}\mathrm{d}x \\
& + \int_G 2\alpha_{1,t} qq_{xt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G \phi\alpha_{1,tt}qq_x u_{ttx}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_G a_x u_{ttx}^2\phi\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.86}
$$

Wir multiplizieren die Gleichung (5.19) mit $-\frac{b}{d}\phi\theta_{ttx}$ und erhalten nach einer partiellen Integration:

$$
\begin{aligned}
& - \int_G \frac{b}{d}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{L}{2}\left((\frac{b}{d}\theta_{tt}^2)(L) + (\frac{b}{d}\theta_{tt}^2)(0)\right) \\
& - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{bg}{d} q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\right] + \boxed{\int_G \frac{bg}{d} q_{xtt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x} - \int_G bu_{ttx}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x \\
= {} & -\frac{1}{2}\int_G \left(\frac{b}{d}\right)_x \phi\theta_{tt}^2\mathrm{d}x + \int_G d_t u_{tx}\frac{b}{d}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x + \int_G g_t q_x \frac{b}{d}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \alpha_2 q_t^2 \frac{b}{d}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x \\
& - \boxed{\int_G \alpha_2 qq_{tt}\frac{b}{d}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x} - \int_G \alpha_{2,t}q_t q\frac{b}{d}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{bg}{d}\right)_t q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{5.87}
$$

In der letzteren Abschätzung tauchen nun zwei Terme auf, die zu behandeln sind. Wir betrachten zunächst den ersteren. Die Gleichung (5.3) liefert uns zunächst:

$$
k\tau_\theta\theta_{tx} = -k\theta_x - q - \tau_q q_t - \frac{\tau_q^2}{2}q_{tt},
$$

bzw.

$$
\theta_{tx} = -\frac{1}{\tau_\theta}\theta_x - \frac{1}{k\tau_\theta}q - \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}q_t - \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta}q_{tt}.
$$

Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\int_G \frac{bg}{d} q_{xtt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x = &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_x\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{bg}{d\tau_\theta}\right)_t q_{xt}\phi\theta_x\mathrm{d}x + \int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x \\
&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{bg}{dk\tau_\theta}\right)_t q_{xt}\phi q\mathrm{d}x + \int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x \\
&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}\right)_t q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x \\
&-\boxed{\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{xtt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x}.
\end{aligned}
\tag{5.88}
$$

Der markierte Term wird nun folgendermaßen behandelt:

$$
\begin{aligned}
-\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{xtt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x = &-\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\phi q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\phi q_{tt}^2\right)(0) + \int_G \left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\right)_x \phi q_{tt}^2\mathrm{d}x \\
&+\int_G q_{tt}\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\phi q_{ttx}\mathrm{d}x - 2\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Letzteres ist gleichbedeutend mit:

$$
\begin{aligned}
-\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{xtt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x = &\frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(L) + \frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(0) + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\right)_x \phi q_{tt}^2\mathrm{d}x \\
&-\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{5.89}
$$

Fassen wir (5.88) und (5.89) zusammen, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\int_G \frac{bg}{d} q_{xtt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x = &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_x + \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q + \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x\right] \\
&+\int_G \left(\frac{bg}{d\tau_\theta}\right)_t q_{xt}\phi\theta_x\mathrm{d}x + \int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{bg}{dk\tau_\theta}\right)_t q_{xt}\phi q\mathrm{d}x \\
&+\int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}\right)_t q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x + \int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x \\
&+\frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(L) + \frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(0) + \frac{1}{2}\int_G \left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}\right)_x \phi q_{tt}^2\mathrm{d}x \\
&-\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{5.90}
$$

Den verbleibenden, problematischen Term behandeln wir folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\int_G \frac{\alpha_2 b}{d} q q_{tt}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x = &-\int_G \frac{2\alpha_2 b}{d\tau_q} q q_t\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{2\alpha_2 b}{d\tau_q^2} q^2\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x \\
&-\int_G \frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2} q\theta_x\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x - \int_G \frac{2k\tau_\theta\alpha_2 b}{d\tau_q^2} q\theta_{tx}\phi\theta_{ttx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Partielle Integration der ersten beiden Integralterme, sowie Umformungen der zweiten beiden Terme liefert:

$$\begin{aligned}\int_G \frac{\alpha_2 b}{d} q q_{tt} \phi \theta_{ttx} \mathrm{d}x = & \int_G \left(\frac{2\alpha_2 b}{d\tau_q} q q_t \phi \right)_x \theta_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \left(\frac{2\alpha_2 b}{d\tau_q^2} q^2 \phi \right)_x \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ & - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_G \frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2} q\theta_x \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x \right] + \int_G \left(\frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2} q\theta_x \right)_t \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x \\ & - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \int_G \frac{2k\tau_\theta \alpha_2 b}{d\tau_q^2} q\phi \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x \right] + \frac{1}{2} \int_G \left(\frac{2k\tau_\theta \alpha_2 b}{d\tau_q^2} q \right)_t \phi \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.91}$$

Wir kombinieren nun (5.87), (5.90) und (5.91). Dies ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[- \int_G \frac{bg}{d} q_{xt} \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x - \int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt} \phi \theta_x \mathrm{d}x - \int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt} \phi q \mathrm{d}x - \int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt} \phi q_t \mathrm{d}x \right] \\ & - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_G \frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2} q\theta_x \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_G \frac{2k\tau_\theta \alpha_2 b}{d\tau_q^2} q\phi \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x \right] + \frac{L}{2} \left((\frac{b}{d} \theta_{tt}^2)(L) + (\frac{b}{d} \theta_{tt}^2)(0) \right) \\ & + \frac{L}{2} \left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(L) + \frac{L}{2} \left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(0) - \int_G \frac{b}{d} \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt} \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x \\ & + \int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt} \phi q_t \mathrm{d}x + \int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt} \phi q_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \mathrm{d}x. - \int_G bu_{ttx} \phi \theta_{ttx} \mathrm{d}x \\ = {} & R_{12}, \end{aligned} \tag{5.92}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_{12} = & - \int_G \left(\frac{bg}{d\tau_\theta} \right)_t q_{xt} \phi \theta_x \mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{bg}{dk\tau_\theta} \right)_t q_{xt} \phi q \mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} \right)_t q_{xt} \phi q_t \mathrm{d}x \\ & - \frac{1}{2} \int_G \left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} \right)_x \phi q_{tt}^2 \mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{2\alpha_2 b}{d\tau_q} q q_t \phi \right)_x \theta_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{2\alpha_2 b}{d\tau_q^2} q^2 \phi \right)_x \theta_{tt} \mathrm{d}x \\ & - \int_G \left(\frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2} q\theta_x \right)_t \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_G \left(\frac{2k\tau_\theta \alpha_2 b}{d\tau_q^2} q \right)_t \phi \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_G \left(\frac{b}{d} \right)_x \phi \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \\ & + \int_G d_t u_{tx} \frac{b}{d} \phi \theta_{ttx} \mathrm{d}x + \int_G g_t q_x \frac{b}{d} \phi \theta_{ttx} \mathrm{d}x - \int_G \alpha_2 q_t^2 \frac{b}{d} \phi \theta_{ttx} \mathrm{d}x \\ & - \int_G \alpha_{2,t} q_t q \frac{b}{d} \phi \theta_{ttx} \mathrm{d}x - \int_G \left(\frac{bg}{d} \right)_t q_{xt} \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.93}$$

Nun kombinieren wir (5.85) mit (5.92). Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg[\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G\frac{\alpha_1 g}{d}qq_{xt}^2\phi\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_1 g_t}{d}qq_{xt}\phi q_x\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_1 d_t}{d}qq_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\\
&-\int_G\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}qq_{xt}\phi q_t^2\mathrm{d}x-\int_G\frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}qq_{xt}\phi q_t q\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G\frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}qq_{tt}^2\phi\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg}{d}q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\\
&-\int_G\frac{bg}{d\tau_\theta}q_{xt}\phi\theta_x\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x-\int_G\frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2}q\theta_x\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_G\frac{2k\tau_\theta\alpha_2 b}{d\tau_q^2}q\phi\theta_{tx}^2\mathrm{d}x\Bigg]\\
&+\frac{L}{2}\left((\frac{b}{d}\theta_{tt}^2)(L)+(\frac{b}{d}\theta_{tt}^2)(0)\right)+\frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\frac{L}{2}\left((au_{ttx}^2)(L)+(au_{ttx}^2)(0)\right)+\frac{L}{2}\left(\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)\right)\\
&+\int_G\frac{bg}{d\tau_\theta}q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x+\int_G\frac{bg}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x+\int_G\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\mathrm{d}x.\\
&-\int_G au_{ttx}^2\mathrm{d}x-\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x-\int_G\frac{b}{d}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
=\;& R_{11}+R_{12}.
\end{aligned}\tag{5.94}$$

Wir kombinieren nun (5.79) mit (5.94)

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg[\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G\frac{\alpha_1 g}{d}qq_{xt}^2\phi\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_1 g_t}{d}qq_{xt}\phi q_x\mathrm{d}x+\int_G\frac{\alpha_1 d_t}{d}qq_{xt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\\
&-\int_G\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}qq_{xt}\phi q_t^2\mathrm{d}x-\int_G\frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}qq_{xt}\phi q_t q\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G\frac{\alpha_1\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}qq_{tt}^2\phi\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg}{d}q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\\
&-\int_G\frac{bg}{d\tau_\theta}q_{xt}\phi\theta_x\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x-\int_G\frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2}q\theta_x\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_G\frac{2k\tau_\theta\alpha_2 b}{d\tau_q^2}q\phi\theta_{tx}^2\mathrm{d}x+\int_G u_{tt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\Bigg]+\frac{L}{2}\left((au_{tx})(L)+(au_{tx})(0)\right)\\
&+\frac{L}{2}\left((\frac{b}{d}\theta_{tt}^2)(L)+(\frac{b}{d}\theta_{tt}^2)(0)\right)+\frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\frac{L}{2}\left(\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\frac{L}{2}\left((au_{ttx}^2)(L)+(au_{ttx}^2)(0)\right)+\frac{L}{2}\left(\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)\right)\\
&+\int_G\frac{bg}{d\tau_\theta}q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x+\int_G\frac{bg}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x+\int_G\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x-\int_G\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\mathrm{d}x.\\
&-\int_G au_{ttx}^2\mathrm{d}x-\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x-\int_G\frac{b}{d}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x-\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x-\int_G au_{tx}^2\mathrm{d}x+\int_G b\theta_{tx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\\
=\;& R_{10}+R_{11}+R_{12}.
\end{aligned}$$

Umstellen der Terme, vernachlässigen verschiedener quadratischer Terme und Multiplikation mit $\frac{2\varepsilon}{L}$ liefert uns:

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon a u_{tx})(L) + (\varepsilon a u_{tx})(0) + (\varepsilon a u_{ttx}^2)(L) + (\varepsilon a u_{ttx}^2)(0) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(0) \\
&+ \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0) \\
\leq & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx} + \frac{\alpha_1 g}{2d} q q_{xt}^2 \phi + \frac{\alpha_1 g_t}{d} q q_{xt}\phi q_x + \frac{\alpha_1 d_t}{d} q q_{xt}\phi u_{tx} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q q_{xt}\phi q_t^2 \right.\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d} q q_{xt}\phi q_t q + \frac{\alpha_1 \tau_q^2}{4dk\tau_\theta} q q_{tt}^2 \phi - \frac{bg}{d} q_{xt}\phi\theta_{tx} - \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_x - \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q - \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t \\
&\left.-\frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2} q\theta_x\phi\theta_{tx} - \frac{k\tau_\theta\alpha_2 b}{d\tau_q^2} q\phi\theta_{tx}^2 + u_{tt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\right] \\
&- \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\mathrm{d}x. \\
&+ \frac{2\varepsilon}{L}\int_G a u_{ttx}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b}{d}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G a u_{tx}^2\mathrm{d}x \\
&- \frac{2\varepsilon}{L}\int_G b\theta_{tx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}R_{10} + \frac{2\varepsilon}{L}R_{11} + \frac{2\varepsilon}{L}R_{12}.
\end{aligned} \tag{5.95}
$$

Kombinieren wir nun (5.77) mit (5.95), so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[\frac{3g}{ad} q_t u_{ttx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| + \left|\left[\frac{3g}{ad} q u_{tx}\right]_{x=0}^{x=L}\right| + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(0) \\
&+ \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0) \\
\leq & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx} + \frac{\alpha_1 g}{2d} q q_{xt}^2 \phi + \frac{\alpha_1 g_t}{d} q q_{xt}\phi q_x + \frac{\alpha_1 d_t}{d} q q_{xt}\phi u_{tx} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{d} q q_{xt}\phi q_t^2 \right.\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d} q q_{xt}\phi q_t q + \frac{\alpha_1 \tau_q^2}{4dk\tau_\theta} q q_{tt}^2 \phi - \frac{bg}{d} q_{xt}\phi\theta_{tx} - \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_x - \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q - \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t \\
&\left.-\frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2} q\theta_x\phi\theta_{tx} - \frac{k\tau_\theta\alpha_2 b}{d\tau_q^2} q\phi\theta_{tx}^2 + u_{tt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x\right] \\
&+ \frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2 + q_t^2\mathrm{d}x + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2d^2g^2}\left(\theta_t^2 + \theta_{tt}^2\right)\mathrm{d}x + \int_G \frac{18C_1\varepsilon}{a^2g^2}\left(u_{tx}^2 + u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x \\
&+ \int_G \frac{2C_1\varepsilon a^2 d^2}{9}\left(\frac{1}{g^2}\theta_t^2 + \frac{d^2}{g^2}u_{tx}^2\right)\mathrm{d}x + \int_G \frac{2C_1\varepsilon a^2 d^2}{9}\left(\frac{1}{g^2}\theta_{tt}^2 + \frac{d^2}{g^2}u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x \\
&- \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg}{d\tau_\theta} q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\mathrm{d}x. \\
&+ \frac{2\varepsilon}{L}\int_G a u_{ttx}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b}{d}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G a u_{tx}^2\mathrm{d}x \\
&- \frac{2\varepsilon}{L}\int_G b\theta_{tx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x + R_9 + \frac{2\varepsilon}{L}R_{10} + \frac{2\varepsilon}{L}R_{11} + \frac{2\varepsilon}{L}R_{12}.
\end{aligned} \tag{5.96}
$$

5.3.5 Zusammenfassung der Teilabschätzungen

Wir kombinieren nun (5.38), (5.47) und (5.96). Dies liefert:

$$\begin{aligned}
&\int_G \frac{2}{a}\left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G\left(u_{xx}^2+u_{txx}^2\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_1(t)\\
\leq{}&+\frac{2C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_G q^2+q_t^2\mathrm{d}x+\int_G\frac{18C_1\varepsilon}{a^2d^2g^2}\left(\theta_t^2+\theta_{tt}^2\right)\mathrm{d}x+\int_G\frac{18C_1\varepsilon}{a^2g^2}\left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x\\
&+\int_G\frac{2C_1\varepsilon a^2d^2}{9}\left(\frac{1}{g^2}\theta_t^2+\frac{d^2}{g^2}u_{tx}^2\right)\mathrm{d}x+\int_G\frac{2C_1\varepsilon a^2d^2}{9}\left(\frac{1}{g^2}\theta_{tt}^2+\frac{d^2}{g^2}u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x\\
&-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{bg}{d\tau_\theta}q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{bg}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_t\mathrm{d}x-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_{tt}\mathrm{d}x+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\mathrm{d}x.\\
&+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G au_{ttx}^2\mathrm{d}x+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{b}{d}\theta_{tt}^2\mathrm{d}x+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G au_{tx}^2\mathrm{d}x\\
&-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G b\theta_{tx}\phi u_{tx}\mathrm{d}x+\int_G\left(\frac{27}{d^2}+\frac{3b}{ad}+\frac{3b^2}{4a^2}\right)\left(\theta_x^2+\theta_{tx}^2\right)\mathrm{d}x+\int_G\frac{27g^2}{a^2d^2}\left(q_t^2+q_{tt}^2\right)\mathrm{d}x\\
&+R_4+R_5+R_9+\frac{2\varepsilon}{L}R_{10}+\frac{2\varepsilon}{L}R_{11}+\frac{2\varepsilon}{L}R_{12},
\end{aligned}\tag{5.97}$$

wobei

$$\begin{aligned}
G_1(t)={}&\frac{2\varepsilon}{L}\int_G u_{ttt}\phi u_{ttx}+\frac{\alpha_1 g}{2d}qq_{xt}^2\phi+\frac{\alpha_1 g_t}{d}qq_{xt}\phi q_x+\frac{\alpha_1 d_t}{d}qq_{xt}\phi u_{tx}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{d}qq_{xt}\phi q_t^2\\
&-\frac{\alpha_1\alpha_{2,t}}{d}qq_{xt}\phi q_tq+\frac{\alpha_1\tau_q^2}{4dk\tau_\theta}qq_{tt}^2\phi-\frac{bg}{d}q_{xt}\phi\theta_{tx}-\frac{bg}{d\tau_\theta}q_{xt}\phi\theta_x-\frac{bg}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q-\frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta}q_{xt}\phi q_t\\
&-\frac{2\alpha_2 bk}{d\tau_q^2}q\theta_x\phi\theta_{tx}-\frac{k\tau_\theta\alpha_2 b}{d\tau_q^2}q\phi\theta_{tx}^2+u_{tt}\phi u_{tx}\mathrm{d}x-\int_G\frac{3}{ad}\theta_xu_t-\frac{3g}{a^2d}qu_{tt}\\
&-\frac{3gb}{a^2d}q\theta_x+\frac{3g\alpha_1}{a^2d}q^2q_x+\frac{1}{a}u_{tx}u_{xx}-\frac{3}{ad}u_{tt}\theta_{xt}-\frac{3g}{ad}u_{txx}q_t+\frac{1}{a}u_{ttx}u_{tx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{5.98}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{bg}{d\tau_\theta}q_{xt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x={}&\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{b}{d\tau_\theta}\theta_{tt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{b}{\tau_\theta}u_{ttx}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{bg_t}{d\tau_\theta}q_x\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\\
&+\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{bd_t}{d\tau_\theta}u_{tx}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{b\alpha_2}{d\tau_\theta}qq_{tt}\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{b\alpha_2}{d\tau_\theta}q_t^2\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x\\
&-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G\frac{b\alpha_{2,t}}{d\tau_\theta}qq_t\phi\theta_{tx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ebenfalls berechnet man

$$
\begin{aligned}
-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_t \mathrm{d}x = {} & \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b}{dk\tau_\theta}\theta_{tt}\phi q_t \mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b}{k\tau_\theta} u_{ttx}\phi q_t \mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg_t}{dk\tau_\theta} q_x \phi q_t \mathrm{d}x \\
& + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bd_t}{dk\tau_\theta} u_{tx}\phi q_t \mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\alpha_2}{dk\tau_\theta} q_t^2 \phi q_t \mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\alpha_2}{dk\tau_\theta} q q_{tt}\phi q_t \mathrm{d}x \\
& - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\alpha_{2,t}}{dk\tau_\theta} q q_t^2 \phi \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

wie auch

$$
\begin{aligned}
-\frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg\tau_q}{dk\tau_\theta} q_{xt}\phi q_{tt} \mathrm{d}x = {} & \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\tau_q}{dk\tau_\theta}\theta_{tt}\phi q_{tt} \mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\tau_q}{k\tau_\theta} u_{ttx}\phi q_{tt} \mathrm{d}x + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bg_t\tau_q}{dk\tau_\theta} q_x \phi q_{tt} \mathrm{d}x \\
& + \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{bd_t\tau_q}{dk\tau_\theta} u_{tx}\phi q_{tt} \mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\alpha_2\tau_q}{dk\tau_\theta} q_t^2 \phi q_{tt} \mathrm{d}x - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\alpha_2\tau_q}{dk\tau_\theta} q q_{tt}^2 \phi \mathrm{d}x \\
& - \frac{2\varepsilon}{L}\int_G \frac{b\alpha_{2,t}\tau_q}{dk\tau_\theta} q q_t q_{tt} \phi \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
R_{13} := {} & \int_G \frac{bg_t}{d\tau_\theta} q_x \phi \theta_{tx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{bd_t}{d\tau_\theta} u_{tx}\phi\theta_{tx} \mathrm{d}x - \int_G \frac{b\alpha_2}{d\tau_\theta} q q_{tt}\phi\theta_{tx} \mathrm{d}x \\
& - \int_G \frac{b\alpha_2}{d\tau_\theta} q_t^2 \phi\theta_{tx} \mathrm{d}x - \int_G \frac{b\alpha_{2,t}}{d\tau_\theta} q q_t \phi\theta_{tx} \mathrm{d}x + \int_G \frac{bg_t}{dk\tau_\theta} q_x \phi q_t \mathrm{d}x \\
& + \int_G \frac{bd_t}{dk\tau_\theta} u_{tx}\phi q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{b\alpha_2}{dk\tau_\theta} q_t^2 \phi q_t \mathrm{d}x - \int_G \frac{b\alpha_2}{dk\tau_\theta} q q_{tt}\phi q_t \mathrm{d}x \\
& - \int_G \frac{b\alpha_{2,t}}{dk\tau_\theta} q q_t^2 \phi \mathrm{d}x + \int_G \frac{bg_t\tau_q}{dk\tau_\theta} q_x \phi q_{tt} \mathrm{d}x + \int_G \frac{bd_t\tau_q}{dk\tau_\theta} u_{tx}\phi q_{tt} \mathrm{d}x \\
& - \int_G \frac{b\alpha_2\tau_q}{dk\tau_\theta} q_t^2 \phi q_{tt} \mathrm{d}x - \int_G \frac{b\alpha_2\tau_q}{dk\tau_\theta} q q_{tt}^2 \phi \mathrm{d}x - \int_G \frac{b\alpha_{2,t}\tau_q}{dk\tau_\theta} q q_t q_{tt}\phi \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

erhalten wir somit aus (5.97) eine Abschätzung von der Form:

$$
\begin{aligned}
& K_1 \int_G \left(u_{tx}^2 + u_{ttx}^2\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_G u_{xx}^2 + u_{txx}^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(0) \\
& + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G_1(t) \\
\leq {} & K_2 \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x + K_3(1+\varepsilon)\int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_4 \int_G \theta_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_5 \int_G \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + K_6\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q^2 \mathrm{d}x + K_7\left(\varepsilon + 1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q_t^2 \mathrm{d}x + K_8(1+\varepsilon)\int_G q_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon K_9 \int_G u_{tx}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_{10}\int_G u_{tt}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_{11}\int_G u_{ttx}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_{12}\int_G u_{ttt}^2 \mathrm{d}x \\
& + |R_4| + |R_5| + |R_9| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|. \qquad (5.99)
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren (5.57) mit δ und kombinieren die entstehende Abschätzung mit (5.99). Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
& K_1 \int_G \left(u_{tx}^2 + u_{ttx}^2\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_G u_{xx}^2 + u_{txx}^2 \mathrm{d}x + \delta \int_G \theta_t^2 + \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(0) + \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G_2(t) \\
\leq\; & K_2'(1+\delta) \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x + K_3'(1+\varepsilon+\delta) \int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_4 \int_G \theta_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_5 \int_G \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + K_6 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^3}\right) \int_G q^2 \mathrm{d}x + K_7' \left(\delta + \varepsilon + 1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^3}\right) \int_G q_t^2 \mathrm{d}x + K_8'(1+\varepsilon+\delta) \int_G q_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + \boxed{(\varepsilon+\delta) K_9' \int_G u_{tx}^2 \mathrm{d}x} + \varepsilon K_{10} \int_G u_{tt}^2 \mathrm{d}x + \boxed{(\varepsilon+\delta) K_{11}' \int_G u_{ttx}^2 \mathrm{d}x} + \varepsilon K_{12} \int_G u_{ttt}^2 \mathrm{d}x \\
& + |R_4| + |R_5| + \delta |R_8| + |R_9| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{10}| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{11}| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{12}| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{13}|,
\end{aligned}
\tag{5.100}
$$

wobei

$$
G_2(t) = G_1(t) - 2\delta \int_G g \theta_{tx} q_t \mathrm{d}x - 2\delta \int_G g q \theta_x \mathrm{d}x \tag{5.101}
$$

gilt. Betrachten wir die beiden markierten Terme, so ist ersichtlich, dass wir eine Abschätzung von der folgenden Form erhalten, sofern wir δ hinreichend klein wählen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{K_1}{2} \int_G \left(u_{tx}^2 + u_{ttx}^2\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_G u_{xx}^2 + u_{txx}^2 \mathrm{d}x + \delta \int_G \theta_t^2 + \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2\right)(0) + \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon \alpha_1 \alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2\right)(0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G_2(t) \\
\leq\; & K_2'(1+\delta) \int_G \theta_x^2 \mathrm{d}x + K_3'(1+\varepsilon+\delta) \int_G \theta_{tx}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_4 \int_G \theta_t^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_5 \int_G \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + K_6 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^3}\right) \int_G q^2 \mathrm{d}x + K_7' \left(\delta + \varepsilon + 1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^3}\right) \int_G q_t^2 \mathrm{d}x + K_8'(1+\varepsilon+\delta) \int_G q_{tt}^2 \mathrm{d}x \\
& + \varepsilon K_9' \int_G u_{tx}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_{10} \int_G u_{tt}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_{11}' \int_G u_{ttx}^2 \mathrm{d}x + \varepsilon K_{12} \int_G u_{ttt}^2 \mathrm{d}x \\
& + |R_4| + |R_5| + \delta |R_8| + |R_9| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{10}| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{11}| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{12}| + \frac{2\varepsilon}{L} |R_{13}|.
\end{aligned}
\tag{5.102}
$$

Nun multiplizieren wir (5.51) mit γ und kombinieren die entstehende Abschätzung mit (5.102).

Es ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
&\frac{K_1}{2}\int_G \left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G u_{xx}^2+u_{txx}^2\mathrm{d}x+\delta\int_G \theta_t^2+\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\gamma\int_G (u_{ttt}^2+u_{tt}^2+u_t^2+\theta^2+\theta_t^2)\mathrm{d}x+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t)\\
\leq{}& K_2''(1+\delta+\gamma)\int_G\theta_x^2\mathrm{d}x+K_3''(1+\varepsilon+\delta+\gamma)\int_G\theta_{tx}^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_4\int_G\theta_t^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_5\int_G\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+K_6\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+K_7'\left(\delta+\varepsilon+1+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q_t^2\mathrm{d}x+K_8'(1+\varepsilon+\delta)\int_G q_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\boxed{(\varepsilon+\gamma)K_9''\int_G u_{tx}^2\mathrm{d}x}+\varepsilon K_{10}\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x+\boxed{(\varepsilon+\gamma)\,K_{11}''\int_G u_{ttx}^2\mathrm{d}x}+\varepsilon K_{12}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x\\
&+\boxed{\gamma K_{13}\int_G\left(u_{txx}^2+u_{xx}^2\right)\mathrm{d}x}+|R_4|+|R_5|+\gamma|R_6|+\delta|R_8|+|R_9|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}|\\
&+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|.
\end{aligned}
\tag{5.103}
$$

Betrachten wir wieder die markierten Terme und wählen γ hinreichend klein, so erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{K_1}{4}\int_G \left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_G u_{xx}^2+u_{txx}^2\mathrm{d}x+\delta\int_G \theta_t^2+\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\gamma\int_G (u_{ttt}^2+u_{tt}^2+u_t^2+\theta^2+\theta_t^2)\mathrm{d}x+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t)\\
\leq{}& K_2''(1+\delta+\gamma)\int_G\theta_x^2\mathrm{d}x+K_3''(1+\varepsilon+\delta+\gamma)\int_G\theta_{tx}^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_4\int_G\theta_t^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_5\int_G\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+K_6\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+K_7'\left(\delta+\varepsilon+1+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q_t^2\mathrm{d}x+K_8'(1+\varepsilon+\delta)\int_G q_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon K_9''\int_G u_{tx}^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_{10}\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_{11}''\int_G u_{ttx}^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_{12}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x\\
&+|R_4|+|R_5|+\gamma|R_6|+\delta|R_8|+|R_9|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|.
\end{aligned}
\tag{5.104}
$$

Schließlich multiplizieren wir (5.53) mit μ und erhalten unter Verwendung von (5.104):

$$\begin{aligned}
&\frac{K_1}{4}\int_G \left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_G u_{xx}^2+u_{txx}^2\mathrm{d}x+\delta\int_G \theta_t^2+\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\gamma\int_G (u_{ttt}^2+u_{tt}^2+u_t^2+\theta^2+\theta_t^2)\mathrm{d}x+\mu\int_G u_x^2\mathrm{d}x+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t)\\
\leq{}& K_2'''(1+\delta+\gamma+\mu)\int_G\theta_x^2\mathrm{d}x+K_3''(1+\varepsilon+\delta+\gamma)\int_G\theta_{tx}^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_4\int_G\theta_t^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_5\int_G\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+K_6\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+K_7'\left(\delta+\varepsilon+1+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q_t^2\mathrm{d}x+K_8'(1+\varepsilon+\delta)\int_G q_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\varepsilon K_9''\int_G u_{tx}^2\mathrm{d}x+\boxed{(\varepsilon+\mu)\,K_{10}'\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x}+\varepsilon K_{11}''\int_G u_{ttx}^2\mathrm{d}x+\varepsilon K_{12}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x\\
&+|R_4|+|R_5|+\gamma|R_6|+\mu|R_7|+\delta|R_8|+|R_9|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|. \qquad (5.105)
\end{aligned}$$

Wir betrachten den markierten Term, wählen μ hinreichend klein und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\frac{K_1}{4}\int_G \left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_G u_{xx}^2+u_{txx}^2\mathrm{d}x+\delta\int_G \theta_t^2+\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\frac{\gamma}{2}\int_G (u_{ttt}^2+u_{tt}^2+u_t^2+\theta^2+\theta_t^2)\mathrm{d}x+\mu\int_G u_x^2\mathrm{d}x+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon b g\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t)\\
\leq{}& K_2'''(1+\delta+\gamma+\mu)\int_G\theta_x^2\mathrm{d}x+K_3''(1+\varepsilon+\delta+\gamma)\int_G\theta_{tx}^2\mathrm{d}x+\boxed{\varepsilon K_4\int_G\theta_t^2\mathrm{d}x}+\boxed{\varepsilon K_5\int_G\theta_{tt}^2\mathrm{d}x}\\
&+K_6\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+K_7'\left(\delta+\varepsilon+1+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q_t^2\mathrm{d}x+K_8'(1+\varepsilon+\delta)\int_G q_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\boxed{\varepsilon K_9''\int_G u_{tx}^2\mathrm{d}x}+\boxed{\varepsilon K_{10}'\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x}+\boxed{\varepsilon K_{11}''\int_G u_{ttx}^2\mathrm{d}x}+\boxed{\varepsilon K_{12}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x}\\
&+|R_4|+|R_5|+\gamma|R_6|+\mu|R_7|+\delta|R_8|+|R_9|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|. \qquad (5.106)
\end{aligned}$$

Abschließend betrachten wir die markierten Terme, wählen ε hinreichend klein und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\frac{K_1}{8}\int_G \left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int_G u_{xx}^2+u_{txx}^2\mathrm{d}x+\frac{\delta}{2}\int_G \theta_t^2+\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\frac{\gamma}{4}\int_G (u_{ttt}^2+u_{tt}^2+u_t^2+\theta^2+\theta_t^2)\mathrm{d}x+\mu\int_G u_x^2\mathrm{d}x+\left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t)\\
\le\ & K_2'''(1+\delta+\gamma+\mu)\int_G \theta_x^2\mathrm{d}x+K_3'(1+\varepsilon+\delta+\gamma)\int_G \theta_{tx}^2\mathrm{d}x\\
&+K_6\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q^2\mathrm{d}x+K_7'\left(\delta+\varepsilon+1+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\int_G q_t^2\mathrm{d}x+K_8'(1+\varepsilon+\delta)\int_G q_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+|R_4|+|R_5|+\gamma|R_6|+\mu|R_7|+\delta|R_8|+|R_9|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|. \quad (5.107)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abschätzungen (5.34) und (5.35) folgern wir nun die Existenz einer Konstanten K_{13}, so dass die folgende Abschätzung besteht:

$$\begin{aligned}
&\frac{K_1}{8}\int_G \left(u_{tx}^2+u_{ttx}^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int_G u_{xx}^2+u_{txx}^2\mathrm{d}x+\frac{\delta}{2}\int_G \theta_t^2+\theta_{tt}^2\mathrm{d}x\\
&+\frac{\gamma}{4}\int_G (u_{ttt}^2+u_{tt}^2+u_t^2+\theta^2+\theta_t^2)\mathrm{d}x+\mu\int_G u_x^2\mathrm{d}x+\left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\\
&+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L)+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t)\\
\le\ & K_{13}\int_G\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt}+\tau_q q_t+k\tau_\theta\theta_{tx}-\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)^2\mathrm{d}x+K_{13}\int_G q_t^2\mathrm{d}x+K_{13}\int_G q^2\mathrm{d}x\\
&+K_{13}\int_G\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{ttt}+\tau_q q_{tt}+k\tau_\theta\theta_{ttx}-\frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\right)^2\mathrm{d}x+K_{13}\int_G q_{tt}^2\mathrm{d}x+K_{13}\int_G q_t^2\mathrm{d}x\\
&+|R_4|+|R_5|+\gamma|R_6|+\mu|R_7|+\delta|R_8|+|R_9|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}|+\frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|. \quad (5.108)
\end{aligned}$$

5.3.6 Definition und Eigenschaften des Lyapunov - Funktionals

Wir definieren nun wie zu Anfang beschrieben ein Lyapunov-Funktional, welches uns später die gewünschte Energieabschätzung für $E(t)$ liefern wird.

Definition 5.1 *Für beliebiges $t \geq 0$ definieren wir:*

$$F(t) := \frac{1}{\nu} E(t) - \frac{1}{\nu} \left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt} \theta_{tt} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x \right] + G_2(t)$$

wobei G_2 durch (5.101) *gegeben ist.*

Bemerkt sei, dass die beiden Terme, welche zu G_2 hinzuaddiert werden, zur Behandlung der problematischen (Rest-) Terme T_1 und T_2 verwendet werden. Eine rein technische Bedeutung kommt den folgenden Definitionen der Terme $\alpha(t)$ und Λ_0 zu. Wir benötigen diese mehrfach, um Abschätzungen, sowie eine „Kleinheitsbedingung" umsetzen zu können. Es sei:

$$\alpha(t) := \sup_{0 \leq x \leq L} \left(|\theta| + |q| + |u| + |\theta_x| + |\theta_t| + |q_t| + |q_x| + |u_t| + |u_x| + |u_{tx}| + |u_{xx}| + |u_{tt}| \right), \tag{5.109}$$

$$\Lambda_0 := \|u_0\|_{H^3}^2 + \|u_1\|_{H^2}^2 + \|\theta_0\|_{H^2}^2 + \|q_0\|_{H^2}^2 + \|q_1\|_{H^1}^2. \tag{5.110}$$

Wir stellen als erstes Zusammenhänge zwischen α und E her. Zuerst schätzen wir alle in α vorkommenden Terme abgesehen von θ_x ab.

Lemma 5.2 *Es existieren Konstanten $K_\alpha, K'_\alpha > 0$, so dass die Abschätzungen*

$$\sup_{0 \leq x \leq L} \left(|\theta| + |q| + |u| + |\theta_t| + |q_t| + |q_x| + |u_t| + |u_x| + |u_{tx}| + |u_{tt}| \right)(t) \leq K_\alpha \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{8} \alpha(t)^k \right) E(t)}$$

und

$$\sup_{x \in G} |u_{xx}|(t) \leq K'_\alpha \left(\sup_{x \in G} |u_{tt}(t)| + \sup_{x \in G} |q(t) q_x(t)| + \sup_{x \in G} |\theta_x(t)| \right)$$

in jedem Intervall $[0, T]$ gelten, in welchem die Lösung zu (5.1) - (5.5) *existiert.*

Wir bemerken, dass der Beweis zu diesem Lemma mit Standardargumentationen erbracht werden kann. Trotzdem erweist sich die Gesamtheit der einzelnen Rechnungen als sehr umfangreich. Einen vollständigen Beweis erbringen wir für das folgende

Lemma 5.3 *Es existiert eine Konstante $K''_\alpha > 0$ so dass*

$$\|\theta_x(t)\|_{H^1} \leq \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + K''_\alpha \|q_t(0)\|_{H^1} + K''_\alpha \left(\sup_{t \in [0,T]} \|q_t(t)\|_{H^1} + \sup_{t \in [0,T]} \|q(t)\|_{H^1} \right)$$

in jedem Intervall $[0, T]$ gilt, in welchem die Lösung zu (5.1) - (5.5) *existiert.*

Beweis: Für die Funktionen θ und q gilt:

$$\frac{\tau_q^2}{2} q_{tt} + \tau_q q_t + q = -k\theta_x - k\tau_\theta \theta_{tx}$$

bzw.

$$-\frac{\tau_q^2}{2k} q_{tt} - \frac{\tau_q}{k} q_t - \frac{1}{k} q = \theta_x + \tau_\theta \theta_{tx}$$

Definieren wir damit für $t \in [0, T]$ die Funktion f durch

$$f(t) := -\frac{\tau_q^2}{2k} q_{tt} - \frac{\tau_q}{k} q_t - \frac{1}{k} q,$$

so gilt $f \in \mathcal{C}^0\left([0,T], H^1(G)\right)$ aufgrund der Regularität von q, q_t und q_{tt}. Ferner erfüllt $\theta_x \in \mathcal{C}^1\left([0,T], H^1(G)\right)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_\theta v_t + v = f(t) \\ v(0) = \theta_{0,x} \end{array} \right\}. \tag{5.111}$$

Wir definieren nun für $t \in [0, T]$ die Funktion $w \colon [0, T] \longrightarrow H^1(G)$ durch

$$w(t) := e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \theta_{0,x} + \frac{1}{\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} f(s) \mathrm{d}s.$$

und erkennen, dass w eine Lösung zu (5.111) darstellt. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Differentialgleichung (5.111) erhalten wir damit für θ_x die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\theta_x(t) &= e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \theta_{0,x} + \frac{1}{\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} f(s) \mathrm{d}s \\
&= e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \theta_{0,x} - \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_{tt}(s) \mathrm{d}s - \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \mathrm{d}s - \frac{1}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q(s) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_{tt}(s) \mathrm{d}s &= -e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t \frac{1}{\tau_\theta} e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \mathrm{d}s + e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \left[e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \right]_0^t \\
&= -e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t \frac{1}{\tau_\theta} e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \mathrm{d}s + q_t(t) - e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} q_t(0).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für θ_x die Darstellung:

$$\begin{aligned}
\theta_x(t) = {} & e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \theta_{0,x} - \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} \left(-e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t \frac{1}{\tau_\theta} e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \mathrm{d}s + q_t(t) - e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} q_t(0) \right) \\
& - \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \mathrm{d}s - \frac{1}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q(s) \mathrm{d}s \\
= {} & e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \theta_{0,x} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t \frac{1}{\tau_\theta} e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \mathrm{d}s - \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q_t(s) \mathrm{d}s \\
& - \frac{1}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta} s} q(s) \mathrm{d}s - \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} q_t(t) + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta} t} q_t(0).
\end{aligned}$$

Letzteres bedeutet nun insbesondere:

$$
\begin{aligned}
\|\theta_x(t)\|_{H^1} &\leq \left\| e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t}\theta_{0,x}\right\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \left\| \int_0^t \frac{1}{\tau_\theta} e^{\frac{1}{\tau_\theta}s} q_t(s)\mathrm{d}s \right\|_{H^1} + \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \left\| \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta}s} q_t(s)\mathrm{d}s \right\|_{H^1} \\
&\quad + \frac{1}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \left\| \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta}s} q(s)\mathrm{d}s \right\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} \|q_t(t)\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \|q_t(0)\|_{H^1} \\
&\leq e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \int_0^t \frac{1}{\tau_\theta} e^{\frac{1}{\tau_\theta}s} \|q_t(s)\|_{H^1} \mathrm{d}s + \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta}s} \|q_t(s)\|_{H^1} \mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta}s} \|q(s)\|_{H^1} \mathrm{d}s + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} \|q_t(t)\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \|q_t(0)\|_{H^1} \\
&\leq e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta^2} \sup_{t\in[0,T]} \|q_t(t)\|_{H^1} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta}s}\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{\tau_q}{k\tau_\theta} \sup_{t\in[0,T]} \|q_t(t)\|_{H^1} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta}s}\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{k\tau_\theta} \sup_{t\in[0,T]} \|q(t)\|_{H^1} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \int_0^t e^{\frac{1}{\tau_\theta}s}\mathrm{d}s + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} \|q_t(t)\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \|q_t(0)\|_{H^1} \\
&\leq \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{k\tau_\theta} \sup_{t\in[0,T]} \|q_t(t)\|_{H^1} + \frac{2\tau_q}{k} \sup_{t\in[0,T]} \|q_t(t)\|_{H^1} + \frac{2}{k} \sup_{t\in[0,T]} \|q(t)\|_{H^1} \\
&\quad + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} \|q_t(t)\|_{H^1} + \frac{\tau_q^2}{2k\tau_\theta} e^{-\frac{1}{\tau_\theta}t} \|q_t(0)\|_{H^1} \\
&\leq \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + C\|q_t(0)\|_{H^1} + C \sup_{t\in[0,T]} \|q_t(t)\|_{H^1} + C \sup_{t\in[0,T]} \|q(t)\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen Λ_0 und $E(0)$ her.

Lemma 5.4 *Es existiert eine Konstante $C_{\Lambda_0} > 0$, so dass*

$$E(0) \leq C_{\Lambda_0} \sum_{k=1}^{8} \Lambda_0^k$$

gilt.

Der Beweis zu diesem Lemma ist wiederum technisch einfach aber umfangreich. Es stellt sich nun heraus, dass die Terme $E(t)$ und $F(t)$ unter gewissen Voraussetzungen äquivalent sind. Um dies einzusehen beweisen wir zunächst das folgende

Lemma 5.5 *Es existieren positive Konstanten C_1, C_2 und C_3, so dass die Abschätzungen*

$$F(t) \leq \left(\frac{1}{\nu} + \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu} + C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right)\right) E(t)$$

und

$$F(t) \geq \left(\frac{1}{\nu} - \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu} - C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right)\right) E(t)$$

in jedem Intervall $[0, T]$ *gelten, in welchem die Lösung zu* (5.1) - (5.5) *existiert.*

Beweis: Um die Behauptung zu beweisen, schätzen wir zunächst die folgenden Integralterme ab. Es gilt:

$$\left|\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt} \theta_{tt} \mathrm{d}x\right| \leq C_1'\alpha(t)\left(\int_G q_{tt}^2 \mathrm{d}x + \int_G \theta_{tt}^2 \mathrm{d}x\right) \leq C_1\alpha(t)E(t)$$

und

$$\left|\int_G \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x\right| \leq C_2'\alpha^2(t)\int_G q_{tt}^2 \mathrm{d}x \leq C_2\alpha^2(t)E(t).$$

Ferner existiert eine Konstante $C_3 > 0$, so dass

$$|G_2(t)| \leq C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) E(t)$$

gilt. Auf diese Rechnung sei hier verzichtet. Diese Ergebnisse liefern uns zunächst:

$$\begin{aligned} F(t) &\leq \frac{1}{\nu}E(t) + \frac{1}{\nu}\left|\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt}\theta_{tt} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x\right| + |G_2(t)| \\ &\leq \left(\frac{1}{\nu} + \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu} + C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right)\right) E(t). \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich

$$\begin{aligned} & |G_2(t)| \leq C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) E(t) \\ \Longrightarrow\; & -G_2(t) \leq C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) E(t) \\ \Longrightarrow\; & -C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) E(t) \leq G_2(t) \\ \Longrightarrow\; & \frac{1}{\nu}E(t) - C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) E(t) \leq \frac{1}{\nu}E(t) + G_2(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu}\left|\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt}\theta_{tt} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x\right| \leq \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu}E(t) \\ \Longrightarrow\; & \frac{1}{\nu}\left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt}\theta_{tt} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x\right] \leq \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu}E(t) \\ \Longrightarrow\; & -\frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu}E(t) \leq -\frac{1}{\nu}\left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt}\theta_{tt} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x\right], \end{aligned}$$

also insgesamt:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\nu} - \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu} - C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right)\right)E(t) \\
&\leq \frac{1}{\nu}E(t) - \frac{1}{\nu}\left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg} q q_{tt}\theta_{tt} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg} q^2 q_{tt}^2 \mathrm{d}x\right] + G_2(t) = F(t)
\end{aligned}
$$

und damit ist alles gezeigt. □

Korollar 5.6 (Äquivalenz von E und F) *Es existieren Konstanten C_E, $C^E > 0$, $\nu^* > 0$ und $1 \geq \alpha^* > 0$, so dass aus $\nu < \nu^*$ und $\alpha(t) \leq \alpha^*$ in einem beliebigen Existenzintervall $[0, T]$ der Lösung zu (5.1) - (5.5) folgt, dass*

$$
C_E E(t) \leq F(t) \leq C^E\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)E(t), \quad t \in [0, T].
$$

gilt.

Beweis: Wir wählen $T > 0$. Ausgehend von Lemma 5.5 wählen wir $\nu^* := \frac{1}{12C_3}$ und $\alpha^* := \min\left\{\frac{1}{4(C_1+C_2)}, 1\right\}$. Wir berechnen dann

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu} - \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu} - C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) \\
&= \frac{1}{\nu} - \frac{\alpha(t)(C_1 + \alpha(t)C_2)}{\nu} - C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) \\
&\geq \frac{1}{\nu} - \frac{\alpha(t)(C_1 + C_2)}{\nu} - 6C_3 \geq \frac{1}{\nu} - \frac{1}{4\nu} - 6C_3 = \frac{3}{4\nu} - 6C_3 > 3C_3.
\end{aligned}
$$

und setzen damit $C_E := 3C_3$. Weiter berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu} + \frac{C_1\alpha(t) + C_2\alpha^2(t)}{\nu} + C_3\left(1 + \alpha(t) + \alpha^2(t) + \alpha^3(t) + \alpha^4(t) + \alpha^5(t)\right) \\
&\leq \frac{1}{\nu} + \frac{C_1 + C_2}{\nu} + 6C_3.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun $C^E := \max\{1 + C_1 + C_2, 6C_3\}$, so folgt unmittelbar die Behauptung. □

Lemma 5.7 (Abschätzung der Ableitung von F) *Es existieren Konstanten $K_{15} > 0$ und $\nu^{**} > 0$, so dass für jedes feste $\nu \leq \nu^{**}$ die Existenz eines $\alpha^{**} > 0$ folgt, so dass aus $\alpha(t) \leq \alpha^{**}$ in einem beliebigen Existenzintervall $[0, T]$ der Lösung von (5.1) - (5.5) die Abschätzung*

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \leq -K_{15}E(t) &+ \frac{1}{\nu}|R_1| + \frac{1}{\nu}|R_2| + \frac{1}{\nu}|R_3| + \frac{1}{\nu}\widetilde{R_3} + \sum_{k=4}^{9}|R_k| \\
&+ \frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|
\end{aligned}
$$

für alle $t \in [0, T]$ folgt.

Beweis: Um die Zeitableitung von F abzuschätzen, verwenden wir zunächst die Ableitungen von E_1, E_2 und E_3 welche in (5.16), (5.24) und (5.32) berechnet wurden. Daraufhin schätzen wir die entstehende Zeitableitung von G_2 und die weiteren Ableitungsterme mit Hilfe der Abschätzungen (5.67) und (5.108) ab. Zunächst aber die Ableitung der Energieterme:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \leq & -\frac{1}{2\nu}\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2\nu\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2\mathrm{d}x \\
& -\frac{1}{2\nu}\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_t^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2\nu\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt} + \tau_q q_t + k\tau_\theta\theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)^2\mathrm{d}x \\
& -\frac{1}{2\nu}\int_G \frac{\tau_q}{k\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right)q_{tt}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2\nu\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{ttt} + \tau_q q_{tt} + k\tau_\theta\theta_{ttx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\right)^2\mathrm{d}x \\
& +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_2(t) + \frac{1}{\nu}\int_G \frac{\alpha_1 d}{bg}qq_{xtt}u_{ttt}\mathrm{d}x - \frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_G \frac{\alpha_1}{bg}qq_{tt}\theta_{tt} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2bg}q^2q_{tt}^2\mathrm{d}x\right] \\
& +\frac{1}{\nu}|R_1| + \frac{1}{\nu}|R_2| + \frac{1}{\nu}|R_3|.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun die oben genannten Abschätzungen ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \leq & -\left[\frac{\tau_q}{2k\nu\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right) - K_{13}\right]\int_G q^2\mathrm{d}x - \left[\frac{\tau_q}{2k\nu\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right) - K_{13}\right]\int_G q_t^2\mathrm{d}x \\
& -\left[\frac{\tau_q}{2k\nu\tau_\theta}\left(1-\frac{\tau_q}{2\tau_\theta}\right) - K_{13}\right]\int_G q_{tt}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2\nu\tau_\theta}\int_G \frac{1}{k\tau_\theta}\left(\frac{\tau_q^2}{2}q_t + \tau_q q + k\tau_\theta\theta_x - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q\right)^2\mathrm{d}x \\
& -\left[\frac{1}{2k\nu\tau_\theta^2} - K_{13}\right]\int_G \left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt} + \tau_q q_t + k\tau_\theta\theta_{tx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_t\right)^2\mathrm{d}x \\
& -\left[\frac{1}{2k\nu\tau_\theta^2} - K_{13}\right]\int_G \left(\frac{\tau_q^2}{2}q_{ttt} + \tau_q q_{tt} + k\tau_\theta\theta_{ttx} - \frac{\tau_q^2}{2\tau_\theta}q_{tt}\right)^2\mathrm{d}x \\
& -\frac{K_1}{8}\int_G u_{tx}^2\mathrm{d}x - \frac{K_1}{8}\int_G u_{ttx}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int_G u_{xx}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int_G u_{txx}^2\mathrm{d}x - \frac{\delta}{2}\int_G \theta_t^2\mathrm{d}x - \frac{\delta}{2}\int_G \theta_{tt}^2\mathrm{d}x \\
& -\frac{\gamma}{4}\int_G u_{ttt}^2\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{4}\int_G u_{tt}^2\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{4}\int_G u_t^2\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{4}\int_G \theta^2\mathrm{d}x - \frac{\gamma}{4}\int_G \theta_t^2\mathrm{d}x - \mu\int_G u_x^2\mathrm{d}x \\
& -\left\{\left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon bg\tau_q^2}{2dk\tau_\theta}q_{tt}^2\right)(0)\right. \\
& \quad \left. +\left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(L) + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d}q^2q_{tt}^2\right)(0) - \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\alpha_1}{b}qq_{tt}^2\right]_0^L\right\} \\
& +\frac{1}{\nu}|R_1| + \frac{1}{\nu}|R_2| + \frac{1}{\nu}|R_3| + \frac{1}{\nu}\widetilde{R_3} + |R_4| + |R_5| + \gamma|R_6| + \mu|R_7| \\
& +\delta|R_8| + |R_9| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|.
\end{aligned}$$

Hier ist nun sofort ersichtlich, dass die Terme innerhalb der eckigen Klammern positiv werden, sofern wir ν hinreichend klein wählen. Wir erhalten also die Existenz einer Konstanten K_{15}, so dass:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \leq -K_{15}E(t) - \left\{ \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(L) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(0) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right)(L) + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right)(0) - \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\alpha_1}{b} q q_{tt}^2 \right]_0^L \right\}$$
$$+ \frac{1}{\nu}|R_1| + \frac{1}{\nu}|R_2| + \frac{1}{\nu}|R_3| + \frac{1}{\nu}\widetilde{R_3} + |R_4| + |R_5| + \gamma|R_6| + \mu|R_7|$$
$$+ \delta|R_8| + |R_9| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|$$

gilt.Um den Beweis zu vervollständigen müssen wir uns also noch mit der geschweiften Klammer befassen. Wir erhalten mit gewissen positiven Konstanten K_{15}', K_{15}'' und K_{15}''':

$$- \left\{ \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(L) + \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(0) + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right)(L) + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right)(0) - \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\alpha_1}{b} q q_{tt}^2 \right]_0^L \right\}$$
$$= - \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(L) - \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(0) - \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right)(L) - \left(\frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right)(0) + \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\alpha_1}{b} q q_{tt}^2 \right]_0^L$$
$$\leq - \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(L) - \left(\frac{\varepsilon b g \tau_q^2}{2dk\tau_\theta} q_{tt}^2 \right)(0) + \left| \frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right|(L) + \left| \frac{\varepsilon\alpha_1\alpha_2}{d} q^2 q_{tt}^2 \right|(0) + \frac{1}{2\nu}\left| \left[\frac{\alpha_1}{b} q q_{tt}^2 \right]_0^L \right|$$
$$\leq -K_{15}' q_{tt}^2(L) - K_{15}' q_{tt}^2(0) + K_{15}''\alpha^2(t) q_{tt}^2(L) + K_{15}''\alpha^2(t) q_{tt}^2(0) + \frac{K_{15}'''}{\nu}\alpha(t) q_{tt}^2(L) + \frac{K_{15}'''}{\nu}\alpha(t) q_{tt}^2(0)$$
$$\leq 0,$$

sofern $\alpha(t)$ hinreichend klein ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Lemma 5.8 (Abschätzung der Restterme) *Es existiert eine Konstante $K_{16} > 0$, so dass*

$$R(t) := \frac{1}{\nu}|R_1| + \frac{1}{\nu}|R_2| + \frac{1}{\nu}|R_3| + \frac{1}{\nu}\widetilde{R_3} + \sum_{k=4}^{9}|R_k| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{10}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{11}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{12}| + \frac{2\varepsilon}{L}|R_{13}|$$
$$\leq K_{16}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\left(\sum_{k=1}^{7}\alpha^k(t)\right)E(t)$$

in jedem beliebigen Existenzintervall $[0, T]$ der Lösung zu (5.1) - (5.5) gilt.

Beweis: Die Details der Abschätzungen sollen hier nicht ausgeführt werden. Wir geben hier nur an, welche Potenzen von $\alpha(t)$ zur Abschätzung notwendig sind:

Restterm	Abschätzung
R_1	$C_1\alpha(t)E(t)$
R_2	$C_2\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)E(t)$
R_3	$C_3\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)+\alpha^4(t)\right)E(t)$
$\widetilde{R_3}$	$\tilde{C_3}\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)+\alpha^4(t)+\alpha^5(t)+\alpha^6(t)\right)E(t)$
R_4	$C_4\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)E(t)$
R_5	$C_5\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)+\alpha^4(t)+\alpha^5(t)+\alpha^6(t)\right)E(t)$
R_6	$C_6\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)E(t)$
R_7	$C_7\alpha(t)E(t)$
R_8	$C_8\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)\right)E(t)$
R_9	$C_9\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)+\alpha^4(t)+\alpha^5(t)+\alpha^6(t)\right)E(t)$
R_{10}	$C_{10}\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)\right)E(t)$
R_{11}	$C_{11}\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)+\alpha^4(t)+\alpha^5(t)+\alpha^6(t)+\alpha^7(t)\right)E(t)$
R_{12}	$C_{12}\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)+\alpha^3(t)+\alpha^4(t)+\alpha^5(t)+\alpha^6(t)+\alpha^7(t)\right)E(t)$
R_{13}	$C_{13}\left(\alpha(t)+\alpha^2(t)\right)E(t)$

Wir bemerken, dass der Nachweis der Einzelnen Aussagen in der obigen Tabelle umfangreich, jedoch nicht als schwierig einzustufen ist. □

Satz 5.9 *Es existieren positive, reelle Konstanten ν,δ und d_0, so dass*

$$F(t) \leq F(0)e^{-d_0 t}$$

für $t \geq 0$ gilt, sofern $\Lambda_0 < \delta$ erfüllt ist.

Beweis: Wir gliedern den Beweis in mehrere Schritte. In den Schritten (i) - (iv) beweisen wir, dass die besagte Aussage aufgrund der vorigen Lemmata in einem gewissen Intervall $[0,\hat{T}]$ richtig ist. Daraufhin beweisen wir in (v), dass die Argumentation ausgehend von der rechten Intervallgrenze zu einem größeren Intervall führt. Schließlich zeigen wir in (vi), dass dieses Verfahren zur globalen exponentiellen Stabilität führt.

(i) Mit Hilfe von Korollar 5.6 folgern wir zunächst die Existenz von Konstanten $\nu^* > 0$ und $1 \geq \alpha^* > 0$, so dass aus $\nu < \nu^*$ und $\alpha(t) \leq \alpha^*$ in einem Intervall $[0,T^*]$ die Abschätzung

$$C_E E(t) \leq F(t) \leq C^E\left(1+\frac{1}{\nu}\right)E(t), \quad t\in[0,T^*] \tag{5.112}$$

erfüllt ist. Wir sehen also die Existenz einer Konstanten $\Lambda_0^* > 0$ ein, so dass aus $\nu < \nu^*$ und $\Lambda_0 < \Lambda_0^*$ zunächst $\alpha(0) < \alpha^*$ und damit die Richtigkeit von (5.112) für ein hinreichend kleines $T^* > 0$ folgt.

(ii) Mit Hilfe von Lemma 5.7 folgern wir die Existenz von Konstanten $0 < \nu^{**} < \nu^*$ und $1 \geq \alpha^{**} > 0$, so dass für $\nu = \nu^{**}$ (fortfolgend sei ν so gewählt) und $\alpha(t) \leq \alpha^{**}$ in einem gewissen Intervall $[0,T^{**}]$ die Existenz einer Konstanten $K^{15} > 0$ folgt, so dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) \leq -K_{15}E(t) + R(t), \quad t\in[0,T^{**}] \tag{5.113}$$

folgt. Wie in (i) sehen wir also ein, dass ein $\Lambda_0^{**} > 0$ existiert, so dass aus $\Lambda_0 < \Lambda_0^{**}$ die Richtigkeit von (5.113) für ein hinreichend kleines $T^{**} > 0$ folgt.

(iii) Mit Hilfe von Lemma 5.8 folgern wir die Existenz einer Konstanten $1 \geq \alpha^{***} > 0$, so dass aus $\alpha(t) \leq \alpha^{***}$ in einem gewissen Intervall $[0, T^{***}]$ die Abschätzung

$$R(t) < \frac{1}{2} K_{15} E(t), \quad t \in [0, T^{***}] \tag{5.114}$$

folgt. Dies wiederum sichert uns die Existenz einer Konstanten $\Lambda_0^{***} > 0$, so dass aus $\Lambda_0 < \Lambda_0^{***}$ die Richtigkeit von (5.114) für hinreichend kleines T^{***} folgt.

(iv) Sind die Abschätzungen $\Lambda_0 < \min\{\Lambda_0^{*}, \Lambda_0^{**}, \Lambda_0^{***}\}$ sowie $\hat{T} < \min\{T^{*}, T^{**}, T^{***}\}$ erfüllt, so ergibt sich nach (i), (ii) und (iii) mit einem passenden, positiven d_0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) \leq -d_0 F(t), \quad t \in [0, \hat{T}],$$

woraus mit Hilfe des Lemmas von Gronwall die Ungleichung

$$F(t) \leq e^{-d_0 t} F(0), \quad t \in [0, \hat{T}] \tag{5.115}$$

folgt. Ferner gilt für $t \in [0, \hat{T}]$:

$$\alpha(t) \leq \alpha_0 := \min\{\alpha^{*}, \alpha^{**}, \alpha^{***}\}. \tag{5.116}$$

(v) Es sei ein beliebiges Intervall $[0, T]$ gegeben, in welchem (5.116) und damit insbesondere (5.115) und (5.112) gelten. Wir beweisen, dass $\alpha(T) < \alpha_0$ gilt, sofern Λ_0 einmalig hinreichend klein gewählt wird. Zunächst wissen wir wegen Lemma 5.2, dass eine von T unabhängige Konstante $K_\alpha > 0$ mit

$$\sup_{0 \leq x \leq L} (|\theta| + |q| + |u| + |\theta_t| + |q_t| + |q_x| + |u_t| + |u_x| + |u_{tx}| + |u_{tt}|) \leq K_\alpha \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{8} \alpha(t)^k \right) E(t)}$$

(man beachte, dass die Terme θ_x und u_{xx} noch nicht vorkommen) existiert. Wegen (5.116) können wir die auftretende Summe gegen 9 abschätzen, wegen (5.112) können wir $E(t)$ gegen $\frac{1}{C_E} F(t)$ abschätzen und wegen (5.115) gilt $F(t) < F(0)$, also insgesamt:

$$\sup_{0 \leq x \leq L} (|\theta| + |q| + |u| + |\theta_t| + |q_t| + |q_x| + |u_t| + |u_x| + |u_{tx}| + |u_{tt}|) \leq \frac{3K_\alpha}{\sqrt{C_E}} \sqrt{F(0)}. \tag{5.117}$$

Nach Lemma 5.3 existiert eine weitere, von T unabhängige Konstante $K''_\alpha > 0$, so dass

$$\|\theta_x(t)\|_{H^1} \leq \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + K''_\alpha \|q_t(0)\|_{H^1} + K''_\alpha \left(\sup_{t \in [0,T]} \|q_t(t)\|_{H^1} + \sup_{t \in [0,T]} \|q(t)\|_{H^1} \right) \tag{5.118}$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt. Nun existieren aber von T unabhängige Konstanten $K_{18} > 0$ und $K_{19} > 0$, so dass

$$\|q_t(t)\|_{H^1}^2 \leq K_{18} E(t)$$

und

$$\|q(t)\|_{H^1}^2 \leq K_{19} E(t)$$

gilt. Damit folgt aber aus (5.112) und (5.115):

$$\|q_t(t)\|_{H^1}^2 \leq K_{18} E(t) \leq \frac{K_{18}}{C_E} F(t) < \frac{K_{18}}{C_E} F(0)$$

und

$$\|q(t)\|_{H^1}^2 \leq K_{19} E(t) \leq \frac{K_{19}}{C_E} F(t) < \frac{K_{19}}{C_E} F(0).$$

Setzen wir diese beiden Ungleichungen in (5.118) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|\theta_x(t)\|_{H^1} &\leq \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + K''_\alpha \sqrt{\frac{K_{18}}{C_E} F(0)} + K''_\alpha \left(\sup_{t \in [0,T]} \sqrt{\frac{K_{18}}{C_E} F(0)} + \sup_{t \in [0,T]} \sqrt{\frac{K_{19}}{C_E} F(0)} \right) \\ &\leq \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + 2K''_\alpha \sqrt{\frac{K_{18}}{C_E} F(0)} + \sqrt{\frac{K_{19}}{C_E} F(0)}. \end{aligned} \tag{5.119}$$

Schließlich liefert uns wiederum Lemma 5.2 die Existenz einer von T unabhängigen Konstanten $K'_\alpha > 0$, so dass

$$\sup_{x \in G} |u_{xx}|(t) \leq K'_\alpha \left(\sup_{x \in G} |u_{tt}(t)| + \sup_{x \in G} |q(t) q_x(t)| + \sup_{x \in G} |\theta_x(t)| \right)$$

für $t \in [0, T]$ gilt. Setzen wir (5.117) und (5.119) ein, so erhalten wir

$$\sup_{x \in G} |u_{xx}|(t) \leq K'_\alpha \left(\frac{3K_\alpha}{\sqrt{C_E}} \sqrt{F(0)} + \frac{9K_\alpha^2}{C_E} F(0) + \|\theta_{0,x}\|_{H^1} + 2K''_\alpha \sqrt{\frac{K_{18}}{C_E} F(0)} + \sqrt{\frac{K_{19}}{C_E} F(0)} \right).$$

Damit wissen wir, dass $\alpha(T) < \alpha_0$ gilt, sofern nur $F(0)$ und $\|\theta_{0,x}\|_{H^1}$ hinreichend klein sind. Dies wiederum folgt aber sofort, sofern wir Λ_0 hinreichend klein wählen.

(vi) Ist nun ein beliebiges Intervall $[0, T)$ gegeben, in welchem (5.116) und damit insbesondere (5.115) und (5.112) gelten, so können wir mit Hilfe der Stetigkeit von E, F und α darauf schließen, dass (5.116), (5.115) und (5.112) auch in $[0, T]$ stimmen. Damit verfahren wir weiter wie in Schritt (v).

Damit ist die Behauptung bewiesen. □
Dies beweist insbesondere den

Satz 5.10 *Es existiert ein $\delta > 0$, so dass die Energie $E(t)$ exponentiell abklingt, sofern $\Lambda_0 < \delta$ gilt.*

Zusammenfassung

- Wir wenden uns zunächst der Frage nach Wohlgestelltheit des zeitabhängigen Problems

$$\begin{aligned} \rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\Gamma\theta &= \rho b, \\ \delta\theta_t - \operatorname{div} K\nabla\theta + \Gamma'\mathcal{D}U_t &= r, \\ \tau_q q_t + q &= -K\nabla\theta, \quad \tau_q > 0, \end{aligned}$$

  mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen zu. Unter Verwendung einer passenden Transformation der Form

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{A}\mathcal{V} + \mathcal{F}$$

  gelingt es uns, eine positive Antwort auf die Frage nach Wohlgestelltheit zu geben. Das verwendete System erster Ordung führt hierbei die Vorteile des Systems für die klassischen Gleichungen im dreidimensionalen Fall mit konstanten Koeffizienten mit den Vorteilen des Systems in [29] für den eindimensionalen Fall mit zeitabhängigen Koeffizienten zusammen.

- Dann wenden wir uns der Frage nach Wohlgestelltheit der Gleichungen

$$\rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\Gamma\theta = \rho b, \tag{6.1}$$
$$\delta\theta_t - \operatorname{div} K\nabla\theta + \Gamma'\mathcal{D}U_t = r, \tag{6.2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau_q^k}{k!}\partial_t^k q + K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_\theta^k}{k!}\partial_t^k \nabla\theta = 0,$$

  mit entsprechenden Anfangsbedingungen und Dirichlet-Randbedingungen zu. Hierbei werden die Koeffizenten der Gleichungen (6.1), (6.2) als orts- und zeitabhängig angenommen. Allerdings wird die Zeitunabhängigkeit der Koeffizienten der dritten Gleichung notwendig sein. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist es uns möglich, eine Transformation in ein System erster Ordnung anzugeben, welche jeweils einen Evolutionsoperator liefert, der eine gut zu behandelnde Struktur hat.

- Darauf werden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Lösung zu

$$\begin{aligned} \rho U_{tt} - \mathcal{D}'\mathcal{S}\mathcal{D}U + \mathcal{D}'\Gamma\theta &= \rho b, \\ \delta\theta_t - \operatorname{div} K\nabla\theta + \Gamma'\mathcal{D}U_t &= r, \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\tau_q^k}{k!}\partial_t^k q + K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_\theta^k}{k!}\partial_t^k \nabla\theta &= 0, \end{aligned}$$

(mit entsprechenden Anfangs- und Dirichlet-Randbedingungen) einen Energieterm zuordnen und diesen mit dem Energieterm vergleichen, welcher im Fall der klassischen Thermoelastizität vorliegt. Im Fall $n > 2$ werden wir Abschätzungen dieser Energieterme für kleine Zeiten $t > 0$ beweisen.

- Abschließend wenden wir uns dem nichtlinearen thermoelastischen Problem

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - a(u_x, \theta, q)u_{xx} + b(u_x, \theta, q)\theta_x &= \alpha_1(u_x, \theta)qq_x, \\
\theta_t + g(u_x, \theta, q)q_x + d(u_x, \theta, q)u_{tx} &= \alpha_2(u_x, \theta)qq_t, \\
\frac{\tau_q^2}{2}q_{tt} + \tau_q q_t + q &= -k\theta_x - k\tau_\theta\theta_{tx}
\end{aligned}
$$

  mit gewissen Anfangsbedingungen und Dirichlet-Randbedingungen zu. Hier werden wir beweisen, dass global existierende Lösungen exponentiell stabil sind.

Literaturverzeichnis

[1] Adams, Robert A., Fournier, J.F. *Sobolev Spaces (Second Edition)*, 2003 Academic Press, Amsterdam, Boston, Heidelberg, etc.

[2] Carlson, D.E. *Linear Thermoelasticity*, Handbuch Der Physik, 1972 Springer-Verlag, Berlin.

[3] Chandrasekharaiah D.S. *Hyperbolic Thermoelasticity: A Review Of Recent Literature*, Applied Mechanics Reviews, 1998; 51:705 - 729.

[4] Dreher, M., Quintanilla, R., Racke, R. *Ill-Posed Problems In Thermomechanics* Applied Mathematics Letters, 2009; 22:1374-1379.

[5] Irmscher, T., *Aspekte Hyperbolischer Thermoelastizität*, 2006 Hartung-Gorre Verlag, Konstanz.

[6] Jiang, S., Racke, R. *Evolution Equations In Thermoelasticity*, 2000 Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.

[7] Jiang, S., Muñoz Rivera, J.E., Racke, R. *Asymptotic Stability And Global Existence In Thermoelasticity With Symmetry*, Quart. Appl. Math., 1998; 56:259-275.

[8] Kato, T. *Abstract Differential Equations And Nonlinear Mixed Problems*, 1985 Fermi Lectures, Scuola Normale Sup., Pisa.

[9] Kato, T. *Linear Evolution Equations Of „Hyperbolic" Type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1970; 17:241-258.

[10] Lord, H.W., Shulman, Y. *A Generalized Dynamical Theory Of Thermoelasticity*, Journal Of The Mechanics And Physics Of Solids, 1967; 15:299-309.

[11] Luk'yanchuk, B. (Hrsg.): *Laser Cleaning*, 2002 World Scientific, Singapore.

[12] Messaoudi, S. A., Said-Houari, B. *Exponential Stability In One-Dimensional Non-Linear Thermoelasticity With Second Sound*, Math. Meth. Appl. Sci., 2005; 28:205-232.

[13] Mosbacher, M., Dobler, V., Münzer, H-J., Zimmermann, J., Solis, J., Boneberg, J., Leiderer P. *Optical Field Enhancement Effcts In Laser Assisted Particle Removal*, Applied Physics, 1991; 72:41-44.

[14] Muñoz Rivera J.E. *Energy Decay Rates In Linear Thermoelasticity*, Funkcialaj Ekvaciog, 1992; 35:19-30.

[15] Pazy, A. *Semigroups Of Linear Operators And Applications To Partial Differential Equations*, 1983 Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

[16] Quintanilla, R., Racke, R. *Qualitative Aspects In Dual-Phase-Lag Thermoelasticity*, J. Appl. Math., 2006; 66:977-1001.

[17] Racke, R. *Thermoelasticity With Second Sound - Exponential Stability In Linear And Non-Linear 1-d*, Math. Meth. Appl. Sci., 2002; 25:409-441.

[18] Racke, R. *Asymptotic Behavior Of Solutions In Linear 2- Or 3-d Thermoelasticity With Second Sound*, Quart. Appl. Math., 2003; 61:315-328.

[19] Racke, R. *Nonlinear Well-Posedness And Rates Of Decay In Thermoelasticity With Second Sound*, Journal Of Hyperbolic Differential Equations, 2005; 5:25-43.

[20] Racke, R., Shibata Y, Zheng S. *Global Solvability And Exponential Stability In One-Dimensional Nonlinear Thermoelasticity*, Quarterly Of Applied Mathematics, 1993; 51:751-763.

[21] Sabir Öncü, T., Bryant Moodie, T. *On The Constitutive Relations For Second Sound In Elastic Solids*, Archives For Rational Mechanics And Analysis, 1992; 121:87-99.

[22] Spicer, J.B., Hurley D.H. *Epicentral And Near Epicenter Surface Displacements On Pulsed Laser Irradiated Metallic Surfaces*, Applied Physics Letters, 1996; 86:3561-3563.

[23] Tamma K.K., Namburu R.R. *Computational Approaches With Applications To Non-Classical And Classical Thermomechanical Problems*, Applied Mechanics Reviews, 1997; 50:514-551.

[24] Taylor, M. E. *Pseudodifferential Operators And Nonlinear PDE*, 1991 Birkhäuser, Boston.

[25] Tzou, D. Y. *A Unified Approach For Heat Conduction From Macro To Micro-Scales*, J. Heat Transfer, 1995, 117:8-16.

[26] Tzou, D. Y. *The Generalized Lagging Response In Small-Scale And High-Rate Heating*, Int. J. Heat Mass Transfer, 1995; 38:3231-3240.

[27] Wang, X., Xu X. *Thermoelastic Wave Induced By Pulsed Laser Heating*, Applied Physics A, 2001; 73:107-114.

[28] Weinmann, O. *Hyperbolische Thermoelastizitätsgleichungen - Stabilität von Lösungen bei variablen Koeffizienten*, diploma thesis, University of Konstanz, 2006.

[29] Weinmann, O. *The Equations Of Thermoelasticity With Time-Dependent Coefficients* J. Math. Anal. Appl., 2009; 350:81-99.