Surreale Zahlen

Bachelorarbeit

vorgelegt von

Moritz Schick

an der

Universität Konstanz

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Sektion
Fachbereich Mathematik und Statistik

Gutachterin: Frau Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Konstanz, 2019

SURREALE ZAHLEN

MORITZ SCHICK

Zusammenfassung. In dieser Arbeit wird die Klasse **No** der surrealen Zahlen eingeführt. Es werden außerdem eine Addition $+$, eine Multiplikation $\cdot$ und eine lineare Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ auf **No** definiert. Anschließend wird gezeigt, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, \leq_{\text{lex}} \rangle$ einen angeordneten Körper bildet. Ziel ist es zu zeigen, dass dieser angeordnete Körper sogar reell abgeschlossen ist und sowohl die reellen Zahlen, als auch die echte Klasse der Ordinalzahlen enthält. Außerdem wird die Addition der surrealen Zahlen als Zeichenfolgen von $\oplus$ und $\ominus$ untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Klasse der surrealen Zahlen **No** wurde erstmals Anfang der 1970er von J.H. Conway in seinen Vorlesungen in Cambridge und am California Institute of Technology behandelt und 1974 von D.E. Knuth in seinem Buch *'Surreal Numbers'* beschrieben. Dieses hat Knuth nur auf Basis einer mittäglichen Unterhaltung mit Conway verfasst und sollte dazu dienen, Studenten Kreativität und Selbstständigkeit anhand eines zu diesem Zeitpunkt weitestgehend unerforschten Themas beizubringen. Conway selbst bezeichnete die surrealen Zahlen bis zu diesem Zeitpunkt nur allgemein als 'Zahlen'. Ihm gefiel die Bezeichnung Knuths jedoch so gut, dass er diese übernahm und sie sich etablieren konnte. Das Wort 'surreal' stammt aus dem Französischen und bedeutet etwa 'traumhaft' oder 'unwirklich'. Es wird auch durch die Kunstbewegung 'Surrealismus' der 1920er geprägt. Conway selbst publizierte ein Buch *'On Numbers and Games'* (1976), in welchem er sich für die Analyse von Strategiespielen – unter anderem dem chinesischen Brettspiel *Go* – interessierte. Dazu konstruierte er die surrealen Zahlen auf ähnliche Weise wie sich die reellen Zahlen durch Dedekindsche Schnitte konstruieren lassen. Zu Beginn der 1980er waren die surrealen Zahlen jedoch noch immer relativ unerforscht. Dies veranlasste H. Gonshor dazu, das Buch *'An Introduction to the Theory of Surreal Numbers'* (1982) zu schreiben. Damit wollte er dem Thema zu mehr Popularität verhelfen. Er führte die surrealen Zahlen anders als Conway als konkrete Zeichenfolgen der beiden Symbole $\oplus$ und $\ominus$ ein. Auf dieselbe Weise werden die surrealen Zahlen in Kapitel 3 definiert.

Auch heute wird noch auf dem Gebiet der surrealen Zahlen geforscht. Dies zeigt beispielsweise der Mini-Workshop [7] (2016) aus Oberwolfach. Ziel dieser Arbeit ist es, die Klasse der surrealen Zahlen **No** von Grund auf einzuführen und deren Arithmetik umfassend zu untersuchen. Dabei wird die gesamte Konstruktion von **No** und der entsprechenden Arithmetik nur auf Basis einiger mengentheoretischer Grundlagen entwickeln. Diese sind etwa in [3] und [12] zu finden. Dem Leser soll es dadurch möglich sein, auch ohne Vorkenntnisse über surreale Zahlen einen Einblick in diese faszinierende Theorie zu gewinnen.

Die Klasse der surrealen Zahlen **No** ist sehr interessant, da sie sowohl die reellen- als auch die Ordinalzahlen enthält und Arithmetik besitzt. In Abschnitt 2 werden einige Begriffe wiederholt, die für das Studium der surrealen Zahlen **No** notwendig sind. Dazu gehören grundlegende Eigenschaften von Ordnungen sowie der Begriff der *Ordinalzahlen.* Außerdem ist die *transfinite Induktion* auf Ordinalzahlen ein wichtiges Werkzeug bei späteren Beweisen.

In Abschnitt 3 werden die surrealen Zahlen wie in [8] als Folgen von $\oplus$ und $\ominus$ mit einer Ordinalzahl als Index eingeführt. Zudem wird eine *lexikographische Ordnung* $\leq_{\text{lex}}$ auf **No** definiert und gezeigt, dass diese linear ist. Es gibt außerdem noch eine weitere Darstellung von **No** als Paar von Mengen $\{A \mid B\}$. Diese wird in [4] zur Definition von **No** herangezogen. Schließlich wird gezeigt, dass man aus jedem solchen *Schnitt* wieder eine surreale Zahl erhalten kann.

Im vierten Abschnitt wird das Verständnis der Darstellung surrealer Zahlen als Schnitte vertieft. Da diese Darstellung nicht eindeutig ist, wird eine *kanonische Darstellung* eingeführt. Außerdem wird das Konzept der *Kofinalität* vorgestellt. Dies ist eines der wichtigsten Werkzeuge, um verschiedene Darstellungen von surrealen Zahlen als Schnitte $\{A \mid B\}$ ineinander zu überführen. In der gesamten Arbeit wird dies sehr oft bei Beweisen verwendet werden.

Abschnitt 5 beschäftigt sich mit der Arithmetik auf **No**. Dabei wird die *Addition* $+$ eingeführt und nachgewiesen, dass $\langle \mathbf{No}, +, \leq_{\text{lex}} \rangle$ eine abelsche Gruppe bildet. Die Addition verwendet dabei die Darstellung der surrealen Zahlen als Schnitte. Auf gleiche Weise lässt sich auch die Multiplikation einführen. Schließlich wird gezeigt, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, 0, 1, \leq_{\text{lex}} \rangle$ einen angeordneten Körper bildet.

Im sechsten Abschnitt wird gezeigt, wie sich die reellen Zahlen in **No** einbetten lassen. Dabei werden zunächst die *dyadischen Brüche* auf kanonische Weise als Zeichenfolgen von $\oplus$ und $\ominus$ beschrieben. Betrachtet man nun eine bestimmte Teilmengen von **No**, so lässt sich nachweisen, dass diese alle axiomatischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ wie in [13, Def. 1.44] erfüllt. Des Weiteren wird eine Charakterisierung der reellen Zahlen als Zeichenfolgen von $\oplus$ und $\ominus$ gegeben. Insbesondere lässt sich Frage 16 aus [7] beantworten, wie sich die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Zeichenfolgen darstellen lassen.

In Abschnitt 7 werden die Ordinalzahlen auf einfache Weise in **No** eingebettet. Des Weiteren wird gezeigt, wie sich etwa $\omega - 1, \frac{1}{2}\omega$ oder $\frac{1}{\omega}$ darstellen lassen. Die Existenz dieser Zahlen ist eine direkte Konsequenz aus den Körpereigenschaften von **No**.

In Abschnitt 8 wird die *Conway-Normalform* eingeführt. Mit ihr lässt sich jede surreale Zahl als Potenzreihe in ω schreiben. Am Ende des Abschnitts wird noch bewiesen, dass die surreale Arithmetik äquivalent zu der üblichen auf Potenzreihen ist. Dies macht es möglich, sich von den bisherigen Darstellungen der surrealen Zahlen zu lösen und stattdessen lediglich Potenzreihen in ω zu betrachten.

Im neunten Abschnitt wird gezeigt, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, 0, 1, \leq_{\text{lex}} \rangle$ als angeordneter Körper reell abgeschlossen ist. Hierzu werden die zuvor gewonnenen Erkenntnisse über die Conway-Normalform verwendet.

Abschnitt 10 beschäftigt sich mit einem Teil der offenen Frage 2 aus [7], wie sich die Operation $+$ auf surrealen Zahlen als Zeichenfolgen von $\oplus$ und $\ominus$ definieren lassen. Aus Abschnitt 6 ist bereits bekannt, dass dyadische Brüche zu Folgen endlicher Länge korrespondieren. Dies macht es sehr einfach solche Folgen zu addieren. Für beliebige reelle Zahlen in Folgenschreibweise lassen sich dann entsprechende Verfahren angeben, um deren Summe in Folgenschreibweise zu berechnen. Ziel ist es am Ende, beliebige Summen der Form $\pm\alpha \pm r$ für $\alpha \in \mathbf{On}, r \in \mathbb{R}$ zu berechnen.

Der gesamten Arbeit liegt eine Axiomatisierung über NBG (*Neumann-Bernays-Gödel* Mengenlehre zusammen mit dem Auswahlaxiom) zu Grunde. Dies ermöglicht es unter anderem, Verknüpfungen auf der echten Klasse der surrealen Zahlen zu definieren.

2. Vorbereitung

Dieser Abschnitt zielt darauf hin, Ordinalzahlen und transfinite Induktion einzuführen. Es wird dabei lediglich ein Überblick über für diese Arbeit wichtige Resultate geben. Eine ausführliche Einführung der Ordinalzahlen ist zu finden in [12, Chapter 3]. Für die weiteren Kapitel werden umfassende Kenntnisse über Ordinalzahlen vorausgesetzt.

2.i. **Relationen und Wohlordnungen.** Bevor wir die Ordinalzahlen einführen, müssen wir einige Begriffe bezüglich Relationen und Ordnungen ins Gedächtnis rufen. Dabei werden wir unter anderem klären, was man unter einer *Wohlordnung* versteht.

Die nachfolgenden Definitionen sollten weitgehend bekannt sein. Es wurde hier die Notation aus [5, Kapitel VII.1] übernommen.

Definition 2.1. Sei X eine Menge. Eine **Relation** R auf der Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Sind $(x, y) \in R$, so schreiben wir auch xRy. Die Relation heißt weiterhin

(1) **reflexiv** $:\Leftrightarrow \forall x \in X(xRx)$,
(2) **symmetrisch** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X(xRy \Rightarrow yRx)$,
(3) **antisymmetrisch** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$,
(4) **transitiv** $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$,
(5) **total** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X(xRy \vee yRx)$.

Eine **Äquivalenzrelation** auf X ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf X. Eine **Halbordnung** (oder **partielle Ordnung**) auf X ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf X. Eine **lineare Ordnung** (oder **Totalordnung**) ist eine Halbordnung, welche zusätzlich noch total ist.

Seien $x, y \in X$ beliebig. Wir schreiben für eine Halbordnung R auch $\leq_R$ oder, wenn es zu keinem Missverständnis kommen kann, auch $x \leq y$. D.h. es ist genau dann $x \leq y$, wenn xRy. Außerdem definieren wir

$$x < y :\Leftrightarrow (x \leq y \wedge x \neq y).$$

Beispiele 2.2. Beispiele für Äquivalenzrelationen sind:

(a) Ähnlichkeit von Matrizen auf $M_n(\mathbb{K})$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist.
(b) Assoziiertheit von Ringelementen $a, b \in R$, wobei R ein Ring ist.
(c) Isomorphie von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

Die natürliche Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ ist eine lineare Ordnung, also insbesondere auch eine Halbordnung. Teilbarkeit auf $\mathbb{N}$ ist eine Halbordnung aber keine lineare Ordnung. Sei X eine Menge. Dann definiert $\subseteq$ eine Halbordnung auf $\mathscr{P}(X)$. Es ist $\subseteq$ genau dann eine lineare Ordnung, wenn $|X| < 2$.

Bemerkung 2.3. Für eine Menge X mit einer Relation R schreiben wir auch kurz (X, R). Ist beispielsweise X eine Menge und R eine Halbordnung auf X, so sagen wir (X, R) ist eine Halbordnung.

Definition 2.4. Sei X eine Menge, $\leq$ eine Halbordnung auf X und $Y \subseteq X$. Ein $y \in Y$ heißt **minimales Element**, wenn es kein $\tilde{y} \in Y$ mit $\tilde{y} < y$ gibt. Ein $x \in X$ heißt **untere Schranke** von Y, falls für alle $y \in Y$ bereits $x \leq y$ gilt. Bemerke, dass eine untere Schranke von Y selbst kein Element von Y sein muss. Ist $x \in X$ eine untere Schranke von Y, welche in Y enthalten ist, so heißt x **kleinstes Element** von Y. Analog wird **maximales Element**, **obere Schranke** und **größtes Element** von Y definiert. Leicht sieht man, dass kleinste und größte Elemente bezüglich einer Halbordnung eindeutig bestimmt sind.

Definition 2.5. Eine lineare Ordnung $(X, \leq)$ heißt **Wohlordnung**, falls jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes Element besitzt.

Beispiele 2.6. (a) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine Wohlordnung.
(b) Bereits $(\mathbb{Z}, \leq)$ mit der natürlichen Ordnung $\leq$ ist keine Wohlordnung. Betrachte hierfür z.B. die Menge der geraden Zahlen $\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \neq \emptyset$. Offensichtlich besitzt diese kein kleinstes Element bezüglich $\leq$.
(c) Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Menge. Dann definiert

$$x_i \leq x_j :\Leftrightarrow i \leq j$$

eine Wohlordnung auf X.

2.ii. **Ordinalzahlen.** Als nächstes wird ein Ausschnitt einiger Resultate aus der Theorie der Ordinalzahlen gegeben. Für eine umfassende Einführung der Ordinalzahlen wird verwiesen auf [3, §3] und [12, Chapter 3].

Definition 2.7. Sei $W = (A, <)$ eine Wohlordnung und $V = (B, <|_{B\times B})$ ein (**echtes**)**Anfangsstück** von W, d.h.

(1) $B \subseteq A \quad (B \subsetneq A)$,
(2) für alle $b_1, b_2 \in B, a \in A$ gilt
$$b_1 < a < b_2 \Rightarrow a \in B,$$
(3) V enthält das kleinste Element von W.

Statt $V = (B, <|_{B\times B})$ schreiben wir auch $V = (B, <)$. Außerdem nennen wir für $a \in A$ die Menge $X_a := \{a' \in A : a' < a\}$ das **von** a **erzeugte Anfangsstück** oder a**-Segment** von W.

Definition 2.8. Eine Wohlordnung $(X, <)$ heißt **Ordinalzahl**, falls für alle $a \in X$ bereits $a = X_a$ gilt. Wir schreiben **On** für die (echte) Klasse der Ordinalzahlen.

Die Tatsache, dass **On** keine Menge, sondern eine echte Klasse darstellt, werden wir in Satz 2.23 zeigen. Als Symbole für Ordinalzahlen werden in der Regel kleine griechische Buchstaben α, β, γ etc. verwendet. Ist $\alpha \in \mathbf{On}$, so ist $\alpha = (X, <)$ für eine Wohlordnung $(X, <)$. Wir schreiben dann auch $x \in \alpha$ für $x \in X$.

Definition 2.9. Eine Menge X heißt

$$\textbf{transitiv} :\Leftrightarrow \forall x \in X \forall y \in x (y \in X).$$

Leicht sieht man: X ist transitiv $\Leftrightarrow \forall x \in X(x \subseteq X)$.

Das folgende Lemma liefert eine äquivalente Charakterisierung von Ordinalzahlen. Diese ist sehr wichtig für die Konstruktion der surrealen Zahlen.

Lemma 2.10. *Sei X eine Menge. Es gilt genau dann $X \in$ **On**, falls X transitiv und durch $\in$ wohlgeordnet ist.*

Beweis. Nachzulesen in [3, §3.1]. □

Beispiele 2.11. (a) Folgende Mengen sind jeweils Ordinalzahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ 1 &:= \{\emptyset\} = \{0\} \\ 2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0,1\} \\ 3 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0,1,2\} \\ &\vdots \\ k &:= k-1 \cup \{k-1\} \quad (k \in \mathbb{N}) \\ &\vdots \\ \omega &:= \mathbb{N} \\ \omega + 1 &:= \omega \cup \{\omega\} = \mathbb{N} \cup \{\omega\} \end{aligned}$$

(b) $X = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ ist eine transitive Menge, aber nicht wohlgeordnet, da die Elemente $\{\{\emptyset\}\}, \emptyset$ nicht durch $\in$ vergleichbar sind. Somit ist X keine Ordinalzahl.

Definition 2.12. Sind $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$, so schreiben wir

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &:\Leftrightarrow \exists x \in \beta(\alpha = \beta_x) \\ &\overset{2.8}{\Leftrightarrow} \exists x \in \beta(\alpha = x) \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \beta \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass $\langle \mathbf{On}, \leq \rangle$ alle Eigenschaften einer Wohlordnung erfüllt, wobei **On** aber keine Menge ist, wie wir in Satz 2.23 sehen werden. Zudem gilt $\beta = \{\alpha \in \mathbf{On} : \alpha < \beta\}$.

Außerdem lässt sich eine Partition der Ordinalzahlen angeben.

Definition 2.13. Sei $\alpha \in \mathbf{On}$ eine Ordinalzahl. Dann heißt α **Nachfolgerzahl** (engl.: *sucessor ordinal*) falls ein $\beta \in \mathbf{On}$ mit $\alpha = \beta + 1$ existiert. Ist α keine Nachfolgerzahl, so heißt α **Limeszahl** (engl.: *limit ordinal*).

Bemerkung 2.14. Es ist also $\alpha \in \mathbf{On}$ genau dann eine Limeszahl, wenn gilt:

$$\forall \beta < \alpha(\beta + 1 < \alpha).$$

Beispiel 2.15. Jede endliche Ordinalzahl ist eine Nachfolgerzahl. Folgende Ordinalzahlen sind Limeszahlen: $0, \omega, \omega + \omega, \omega \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, \omega \cdot \omega$.

2.iii. **Transfinite Induktion.** Wir sind bereits mit der Induktion auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ vertraut. Man kann sich nun fragen, weshalb Induktionsbeweise entlang der natürlichen Zahlen funktionieren. Die Gründe hierfür sind:

(1) $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element $0 \in \mathbb{N}$
(2) $\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet
(3) Jede natürliche Zahl x ungleich Null ist Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl, das heißt: $x = n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$

Dieses Prinzip lässt sich nun auch auf Ordinalzahlen verallgemeinern.

Proposition 2.16 (Prinzip der transfiniten Induktion)**.** *Für alle* $\alpha \in \mathbf{On}$ *sei* $\mathscr{P}(\alpha)$ *eine Aussage, welche entweder den Wahrheitswert 'wahr' oder 'falsch' annimmt. Wir schreiben hierfür* $\mathscr{P}(\alpha) = w$ *oder* $\mathscr{P}(\alpha) = f$*.*

Sei nun $\alpha \in \mathbf{On}$ *beliebig. Angenommen, für alle Ordinalzahlen* $\beta < \alpha$ *gelte* $\mathscr{P}(\beta) = w$*. Können wir nun zeigen, dass auch* $\mathscr{P}(\alpha) = w$ *gilt, so erhalten wir für alle Ordinalzahlen* $\gamma \in \mathbf{On}$ *die Identität* $\mathscr{P}(\gamma) = w$*.*

Beweis. Angenommen, es existiert eine Ordinalzahl $\beta \in \mathbf{On}$ mit $\mathscr{P}(\beta) = f$. Dann muss es auch ein $\gamma < \beta$ geben, für welches $\mathscr{P}(\gamma) = f$ gilt. Denn wenn nicht, würde nach Voraussetzung bereits $\mathscr{P}(\beta) = w$ gelten.

Sei A die Menge aller Ordinalzahlen kleiner β mit $\mathscr{P}(\beta) = f$. Wegen $\gamma \in A$ gilt $A \neq \emptyset$. Außerdem ist nach Definition 2.12 $A \subseteq \beta$. Da β eine Wohlordnung ist, existiert ein kleinstes Element $\beta_0 \in A$ von A. Das heißt es existiert eine kleinste Ordinalzahl β_0 mit der Eigenschaft $\mathscr{P}(\beta_0) = f$.

Nach Konstruktion gilt dann für alle $\gamma < \beta_0$ bereits $\mathscr{P}(\gamma) = w$. Nach Voraussetzung ist dann aber auch $\mathscr{P}(\beta_0) = w$. Dies ist ein Widerspruch zu $\mathscr{P}(\beta_0) = f$. Insgesamt folgt die Behauptung. $\square$

Die transfinite Induktion lässt sich auch wie folgt definieren.

Proposition 2.17 (Prinzip der transfiniten Induktion)**.** *Wie in Proposition 2.16 sei* $\mathscr{P}(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \mathbf{On}$ *eine Aussage, welche entweder den Wahrheitswert 'wahr' oder 'falsch' annimmt. Wir schreiben erneut* $\mathscr{P}(\alpha) = w$ *oder* $\mathscr{P}(\alpha) = f$*. Angenommen:*

(i) $\mathscr{P}(0) = w$,
(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{On}((\mathscr{P}(\alpha) = w) \Rightarrow (\mathscr{P}(\alpha + 1) = w))$,
(iii) für jede Limeszahl $\lambda \in \mathbf{On}$ *gelte:*

$$(\forall \alpha < \lambda(\mathscr{P}(\alpha) = w)) \Rightarrow (P(\lambda) = w).$$

Dann gilt für alle Ordinalzahlen $\gamma \in \mathbf{On}$ *die Identität* $\mathscr{P}(\gamma) = w$*.*

Beweis. Nachzulesen in [12, Proposition 3.31]. $\square$

Die folgende Proposition lässt sich mittels transfiniter Induktion beweisen.

Proposition 2.18. *Jede Ordinalzahl* α *kann eindeutig geschrieben werden als* $\alpha = \alpha' + n$ *für eine Limeszahl* α *und ein* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Beweis. Nachzulesen in [12, Proposition 3.33]. $\square$

2.iv. **Cantor-Normalform.**

Satz 2.19 (Cantor-Normalform)**.** *Sei* α *eine beliebige Ordinalzahl. Dann kann* α *eindeutig als*

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

geschrieben werden mit Ordinalzahlen $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$ *und* $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$*. Wir bezeichnen diese Darstellung als* ***Cantor-Normalform*** *von* α *und die Ordinalzahl* α_k *als den* ***Grad*** *von* α*.*

Beweis. Nachzulesen in [12, Theorem 3.46] $\square$

Wir wissen nun, dass wir Ordinalzahlen stets als Polynome in ω ausdrücken können. Für die nachfolgenden Definitionen ist es wichtig, mit Addition und Multiplikation auf **On**, wie sie in [12, Chapter 3] eingeführt wird, vertraut zu sein. Dann lassen sich mit den entsprechenden Verknüpfungen auf Polynomen auch eine natürliche Addition bzw. Multiplikation auf den Ordinalzahlen als Polynome in ω definieren.

Definition 2.20. Seien α, β Ordinalzahlen mit jeweiligen Cantor-Normalformen $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k, \beta = \omega^{\beta_1} m_1 + \ldots + \omega^{\beta_l} m_l$.

Wir erhalten die **natürliche Summe** $\alpha \oplus_{\text{nat}} \beta$ von α und β, indem wir die beiden Summanden als Polynome in ω addieren. Das heißt, wir fassen die jeweiligen Cantor-Normalformen zu einer zusammen und addieren dabei die Koeffizienten vor gleichen ω-Potenzen.

Definition 2.21. Seien α, β Ordinalzahlen mit jeweiligen Cantor-Normalformen $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k, \beta = \omega^{\beta_1} m_1 + \ldots + \omega^{\beta_l} m_l$.

Das **natürliche Produkt** $\alpha \odot_{\text{nat}}$ aus α und β ist definiert als das Produkt der beiden Summanden als Polynome in ω. Dabei definieren wir das Produkt zweier Terme wie folgt:

$$\omega^{\alpha_i} n_i \odot_{\text{nat}} \omega^{\beta_j} := \omega^{\alpha_i \oplus_{\text{nat}} \beta_j} \cdot (n_i \cdot m_j).$$

Bemerkung 2.22. Die natürlichen Operatoren sind nicht nur assoziativ, sondern auch kommutativ, und die 0 bzw. 1 ist das neutrale Element der natürlichen Addition bzw. Multiplikation.

2.v. **Die Ordinalzahlen als echte Klasse.** Nun lässt sich zeigen, dass **On** eine echte Klasse bildet. Wir gehen dabei von den Zermelo–Fraenkel-Mengenaxiomen aus, wie sie zum Beispiel in [3, §2] zu finden sind.

Satz 2.23. *Die Ordinalzahlen* **On** *bilden eine echte Klasse.*

Beweis. Angenommen, **On** sei eine Menge. Wir haben gesehen, dass **On** wohlgeordnet werden kann. Somit ist der Ordnungstyp von **On** selbst wieder eine Ordinalzahl. Es müsste also **On** $\in$ **On** gelten. Dies ist ein Widerspruch, da nach Definition 2.12 Ordinalzahlen gleich der Menge aller kleineren Ordinalzahlen sind und sich insbesondere nicht selbst enthalten. □

3. Einführung

Da wir nun wissen, was man unter Ordinalzahlen versteht, lassen sich die surrealen Zahlen einführen.

Definition 3.1. Eine **surreale Zahl** a ist eine Funktion

$$a : \alpha \to \{\oplus, \ominus\} \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbf{On}\,.$$

Wir bezeichnen mit $\ell(a) = \alpha$ die **Länge** von a. Somit ist a eine wohlgeordnete Folge von $\oplus$ und $\ominus$ der Länge α. Weiter schreiben wir **No** für die (echte) Klasse der surrealen Zahlen. Es handelt sich bei **No** um eine echte Klasse, da wir **On** als Teilklasse von **No** auffassen können. Dies werden wir in Kapitel 7 sehen.

Satz 3.2. *Die surrealen Zahlen* **No** *bilden eine echte Klasse.*

Beweis. Angenommen, **No** sei eine Menge. Sei $0 < \kappa \in \mathbf{On}$ eine beliebige Kardinalzahl. Dann finden wir mindestens $\kappa + 1$- viele surreale Zahlen $\kappa \to \{\oplus, \ominus\}$ der Länge κ. Damit gilt $\mathrm{card}(\mathbf{No}) > \kappa$. Da $0 < \kappa \in \mathbf{On}$ eine beliebige Kardinalzahl war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.3. Betrachte die Ordinalzahl $\alpha = 4 \in \mathbf{On}$. Definiere a wie folgt:

$$\begin{aligned}&a : \{0, 1, 2, 3\} \to \{\oplus, \ominus\},\\ &a(0) = \oplus, a(1) = \ominus, a(2) = \oplus, a(3) = \oplus.\end{aligned}$$

Notation: Wir schreiben $\alpha = \oplus \ominus \oplus \oplus$. Außerdem setzen wir $a(\beta) = \bigcirc$, falls $\beta \notin \alpha$. Dadurch wird der Definitionsbereich von a erweitert.

Definition 3.4. Wir definieren eine lexikographische Ordung $\leq_{\text{lex}}$ auf **No** wie folgt: Setze

$$\ominus <_{\text{lex}} \bigcirc <_{\text{lex}} \oplus.$$

Seien nun a, b surreale Zahlen und β die erste Ordinalzahl, in welcher sich a und b unterscheiden, d.h. $\beta = \inf\{\gamma \in \mathbf{On} \mid a(\gamma) \neq b(\gamma)\}$. Dann ist

$$a <_{\text{lex}} b :\Leftrightarrow a(\beta) <_{\text{lex}} b(\beta). \tag{1}$$

Wir bemerken zudem: Falls $\{\gamma \in \mathbf{On} \mid a(\gamma) \neq b(\gamma)\} = \emptyset$ und damit $\beta = \inf \emptyset$ gilt, so ist $a = b$. Wir schreiben auch $a \leq_{\text{lex}} b$, wenn $a <_{\text{lex}} b$ oder $a = b$ gilt.

Lemma 3.5. *Die Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ aus* (1) *definiert eine lineare Ordnung auf* **No**.

Beweis. Seien a, b, c beliebige surreale Zahlen.

(i) Reflexivität: Wegen $a = a$ ist $a \leq_{\text{lex}} a$.
(ii) Antisymmetrie: Gilt $a \leq_{\text{lex}} b$ und $b \leq_{\text{lex}} a$, so muss bereits $a = b$ belten.
(iii) Transitivität: Ohne Einschränkung gelte $a \neq b$ und $b \neq c$. Sei β_1 die erste Ordinalzahl, bei der sich a und b unterscheiden, und β_2 die erste Ordinalzahl, bei der sich b und c unterscheiden. Falls $\beta_1 = \beta_2$ gilt, so ist auch $a(\beta_1) <_{\text{lex}} c(\beta_1)$ und β_1 ist die erste Ordinalzahl, in der sich a und c unterscheiden. Gelte also $\beta_1 \neq \beta_2$ und ohne Einschränkung $\beta_1 < \beta_2$. Nach Definition von β_2 ist dann $c(\beta) = b(\beta) = a(\beta)$ für alle $\beta < \beta_1$ und $c(\beta_1) = b(\beta_1) >_{\text{lex}} a(\beta_1)$. Es folgt in beiden Fällen $a <_{\text{lex}} c$ und damit die Behauptung.
(iv) Totalität: Dies folgt aus der Tatsache, dass für $a \neq b$ das Infimum $\inf\{\gamma \in \mathbf{On} \mid a(\gamma) \neq b(\gamma)\}$ aus Definition 3.4 existiert.

□

Für die Arithmetik der surrealen Zahlen benötigen wir noch eine weitere Ordnung.

Definition 3.6. Wir definieren eine Halbordnung **Einfachheit** (engl.: *simplicity*) $\leq_s$ auf **No** wie folgt: Seien $a, b \in \mathbf{No}$. Dann ist

$$a \leq_s b :\Leftrightarrow a \text{ ist Anfangsstück von } b. \tag{2}$$

Gilt $a \leq_s b$, so sagen wir auch a ist **simpler** als b.

Beispiele 3.7. Wir geben einige Beispiele für die beiden Ordnungen (1) und (2):

(a) $\oplus \ominus \ominus <_{\text{lex}} \oplus \ominus <_{\text{lex}} \oplus \ominus \oplus$,

(b) $\oplus\ominus <_s \oplus\ominus\oplus$,
(c) $\oplus\ominus <_s \oplus\ominus\ominus$ aber $\oplus\ominus >_{\text{lex}} \oplus\ominus\ominus$,
(d) $\ominus <_{\text{lex}} \oplus$ aber $\ominus \not\leq_s \oplus$ und $\oplus \not\leq_s \ominus$,
(e) $\bigcirc \leq_s a$ für alle $a \in \mathbf{No}$.

Nun werden wir eine weitere Darstellung der surrealen Zahlen einführen. Dabei stellen wir ein $a \in \mathbf{No}$ als geordnetes Paar von Mengen surrealer Zahlen dar und schreiben dafür auch $a = \{A_L \mid A_R\}$. Die Idee ist dabei ähnlich zu der Charakterisierung reeller Zahlen über Dedekindsche Schnitte, wie sie zum Beispiel in [12, Chapter 2] zu finden ist.

Notation 3.8. Seien $A, B \subset \mathbf{No}$ Mengen surrealer Zahlen und $c \in \mathbf{No}$. Wir schreiben

(1) $A <_{\text{lex}} B :\Leftrightarrow \forall a \in A \forall b \in B (a <_{\text{lex}} b)$,
(2) $A <_{\text{lex}} c :\Leftrightarrow \forall a \in A (a <_{\text{lex}} c)$,
(3) $c <_{\text{lex}} B :\Leftrightarrow \forall b \in B (c <_{\text{lex}} b)$.

Satz 3.9. *Sei F eine nichtleere konvexe Klasse surrealer Zahlen, d.h. sind $a_1, a_2 \in F, b \in \mathbf{No}$ mit $a_1 <_{\text{lex}} b <_{\text{lex}} a_2$, so ist auch $b \in F$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte, simpelste Zahl $x \in F$. Das heißt für jede Zahl $y \in F$ gilt $x \leq_s y$.*

Beweis. Ist F einelementig, so ist die Behauptung klar. Nehmen wir also $\#F \geq 2$ an. Sei α die kleinste Ordinalzahl so, dass $a, b \in F$ mit $a(\alpha) \neq b(\alpha)$ existieren. Diese existiert, da **On** wohlgeordnet ist. Ohne Einschränkung können wir außerdem $a(\alpha) <_{\text{lex}} b(\alpha)$ annehmen, d.h. es ist $a <_{\text{lex}} b$.

Sei d das gemeinsame Anfangsstück von a, b mit Länge α. Wir wollen zunächst $d \in F$ zeigen. Gilt $d = a$ oder $d = b$, so ist dies klar. Wenn nicht, so ist $a(\alpha) = \ominus, b(\alpha) = \oplus$. Da d das gemeinsame Anfangsstück ist und $d(\alpha) = \bigcirc$ gilt, folgt $a <_{\text{lex}} d <_{\text{lex}} b$. Wegen der Konvexität von F erhalten wir schließlich $d \in F$.

Nun bleibt noch zu zeigen: $d \leq_s x$ für alle $x \in F$.

Sei $x \in F$ beliebig. Angenommen, $d \not\leq_s x$. Dann muss aber ein $\beta < \alpha$ existieren mit $d(\beta) \neq x(\beta)$ im Widerspruch zu Minimalität von α.

Nun müssen wir noch die Eindeutigkeit zeigen. Sei $e \in F$ eine weitere simpelste Zahl in F. Dann gilt sowohl $d \leq_s e$ als auch $e \leq_s d$. Es folgt direkt $d = e$, was zu zeigen war. □

Satz 3.10. *Seien $A, B \subset \mathbf{No}$ Mengen surrealer Zahlen mit $A <_{\text{lex}} B$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte simpelste Zahl $x \in \mathbf{No}$ mit $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$. Das heißt für jede Zahl $y \in \mathbf{No}$ mit $A <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} B$ gilt $x \leq_s y$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass es ein Element $x \in \mathbf{No}$ gibt mit $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$. Denn dann ist $F := \{y \in \mathbf{No} : A <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} B\}$ eine nichtleere Klasse, welche offensichtlich konvex ist. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus Satz 3.9. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Ist $A = B = \emptyset$, so können wir $x = \bigcirc$ wählen.

Fall 2: Sei $A \neq \emptyset, B = \emptyset$. Setze $\lambda := \cup_{a \in A} \ell(a)$. Als Vereinigung einer Menge von Ordinalzahlen ist λ wieder eine Ordinalzahl. Wir betrachten nun

$\lambda^+ := \lambda \cup \{\lambda\} \in \mathbf{On}$. Für $a \in A$ beliebig ist $\ell(a) \in \lambda^+$ und damit $\ell(a) < \lambda^+$. Dann gilt für $x := \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{\text{Länge } \lambda^+}$ offensichtlich $A <_{\text{lex}} x$, wie gewünscht.

Fall 3: Der Fall $A = \emptyset, B \neq \emptyset$ verläuft analog zu Fall 2 mit $x = \ominus \cdots \ominus$ statt $x = \oplus \cdots \oplus$ und $\lambda = \cup_{b \in B} \ell(b)$.

Fall 4: Gelte nun $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Sei α die kleinste Ordinalzahl mit

$$\forall a \in A \forall b \in B \exists \beta < \alpha (a(\beta) \neq b(\beta)). \tag{3}$$

Um zu zeigen, dass α existiert, reicht es zu zeigen, dass ein $\alpha \in \mathbf{On}$ existiert, für das (3) gilt. Die Existenz folgt dann, da $\mathbf{On}$ wohlgeordnet ist. Wähle wie in Fall 2 $\lambda = \cup_{a \in A} \ell(a)$ und $\lambda^+ = \lambda \cup \{\lambda\} \in \mathbf{On}$. Seien $a \in A, b \in B$ beliebig. Wegen $a <_{\text{lex}} b$ existiert ein kleinstes $\gamma \in \mathbf{On}$ mit $a(\gamma) <_{\text{lex}} b(\gamma)$. Dann muss bereits $\gamma \leq \lambda$ gelten und damit $\gamma < \gamma^+$. Das heißt λ^+ erfüllt die Eigenschaft (3).

Fall 4.1: Seien α eine Limeszahl und $\beta < \alpha$ beliebig. Dann ist auch $\beta + 1 < \alpha$. Wegen der Minimalität von α gilt dann

$$\exists a \in A \exists b \in B \forall \gamma < \beta + 1 (a(\gamma) = b(\gamma)). \tag{4}$$

Wir definieren eine Zahl $x : \alpha \to \{\oplus, \ominus\}$ wie folgt: Für $\beta < \alpha$ sei $(a, b) \in A \times B$ ein Paar, welches (3) erfüllt, d.h. für alle $\gamma \leq \beta$ gilt $a(\gamma) = b(\gamma)$. Wir setzen dann $x(\beta) := a(\beta) = b(\beta)$. Wir müssen zeigen, dass x wohldefiniert ist.

Seien dazu $\beta < \alpha$ und $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ zwei Paare mit $a_1 \neq a_2$ und $b_1 \neq b_2$, welche (4) erfüllen. Sei γ die kleinste Ordinalzahl, in der sich a_1, a_2 unterscheiden, d.h. für die gilt $a_1(\gamma) \neq a_2(\gamma)$. Ohne Einschränkung gilt $a_1(\gamma) <_{\text{lex}} a_2(\gamma)$. Angenommen, $\gamma \leq \beta$. Dann ist γ auch die kleinste Ordinalzahl, in der sich b_1 und a_2 unterscheiden, denn für alle $\delta \leq \beta$ gilt $b_1(\delta) = a_1(\delta)$. Damit ist aber $b_1(\gamma) = a_1(\gamma) <_{\text{lex}} a_2(\gamma)$ und somit $b_1 <_{\text{lex}} a_2$ im Widerspruch zu $A <_{\text{lex}} B$. Damit ist x wohldefiniert.

Sei a ein beliebiges Element von A, welches x nicht als Anfangsstück hat, und γ die kleinste Ordinalzahl, in welcher sich a und x unterscheiden. Wegen $\gamma + 1 < \alpha$, finden wir nach (4) Elemente $a' \in A, b \in B$ mit $a'(\delta) = b(\delta)$ für alle $\delta < \gamma + 1$. Nach Konstruktion von x gilt außerdem $x(\delta) = a'(\delta) = b(\delta)$ für alle $\delta < \gamma + 1$. Damit ist γ auch die kleinste Ordinalzahl, in der sich a und b unterscheiden. Es folgt $a(\gamma) <_{\text{lex}} b(\gamma) = x(\gamma)$.

Analog können wir zeigen, dass für alle $b \in B$, welche x nicht als Anfangsstück haben, gilt $x <_{\text{lex}} b$. Wenn weder ein Element von A, noch ein Element von B die Zahl x als Anfangsstück hat, so sind wir damit bereits fertig.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} A' &:= \{a \in A : x \text{ ist Anfangsstück von } a\}, \\ B' &:= \{b \in B : x \text{ ist Anfangsstück von b}\}. \end{aligned}$$

Wegen der Minimalität von α in (3) kann es außerdem höchstens in einer der beiden Mengen ein Element geben, welches x als Anfangsstück hat.

Angenommen, A besitzt ein solches Element. Dann ist $A' \neq \emptyset, B' = \emptyset$ und wir erhalten aus Fall 2 ein Element y mit $A' <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} B'$. Für alle

$a \in A'$ gilt dann $a <_{\text{lex}} xy$, wobei xy die Anneinanderreihung der Zeichenfolgen x und y sei. Wir haben außerdem bereits gesehen, dass für Elemente $a \in A, b \in B$, welche x nicht als Anfangsstück haben, die Ungleichungen $a <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} b$ gelten. Es ist dann auch $a <_{\text{lex}} xy <_{\text{lex}} b$ und wegen $B' = \emptyset$ gilt insbesondere für alle $b \in B$ die Ungleichung $xy <_{\text{lex}} b$. Somit leistet die Zahl xy das Gewünschte.

Wenn anderenfalls B ein Element besitzt, welches x als Anfangsstück hat, können wir it Fall 3 analog argumentieren.

Fall 4.2: Sei $\alpha = \beta + 1$ eine Nachfolgerzahl. Nach der Wahl von α in (3) existieren $(a,b) \in A \times B$ mit $a(\gamma) = b(\gamma)$ für alle $\gamma < \beta$ aber $a(\beta) \neq b(\beta)$.

Wir setzen $x : \alpha \to \{\oplus, \ominus\}, x(\gamma) = a(\gamma) = b(\gamma)$ $(\gamma < \beta)$. Wie in Fall 4.1 sehen wir, dass x unabhängig von der Wahl von (a,b) ist. Ebenfalls wie in Fall 4.1 lässt sich einsehen, dass für alle $a \in A, b \in B$, welche nicht x als Anfangsstück haben, die Ungleichungen $a <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} b$ gelten. Wir definieren erneut

$$\begin{aligned} A' &: = \{a \in A : x \text{ ist Anfangsstück von } a\}, \\ B' &: = \{b \in B : x \text{ ist Anfangsstück von } b\}. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $A', B' \neq \emptyset$, sowie $A' <_{\text{lex}} B'$ gilt. Es kann aber die leere Folge $\bigcirc$ in einer der beiden Mengen enthalten sein. Nach Definition von α gilt außerdem $a'(0) <_{\text{lex}} b'(0)$ für alle $a' \in A', b' \in B'$.

Ist $\bigcirc \notin A', \bigcirc \notin B'$, so ist $A' <_{\text{lex}} \bigcirc <_{\text{lex}} B'$ und damit $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$. Nun nehmen wir $\bigcirc \in A'$ an. Es folgt $b'(0) = \oplus$ für alle $b' \in B'$. Setze

$$B'' = \{b'' : \exists b' \in B'(b' = \oplus b'')\} = \{b'' : \exists b \in B(b = x \oplus b'')\}.$$

Mit Fall 3 erhalten wir eine Zahl y mit $y <_{\text{lex}} B''$. Dann gilt $A' <_{\text{lex}} \oplus y <_{\text{lex}} B'$ und damit $A <_{\text{lex}} x \oplus y <_{\text{lex}} B$, wie gewünscht.

Falls $\bigcirc \in B'$, so erhalten wir analog eine Zahl y mit $A' <_{\text{lex}} \ominus y <_{\text{lex}} B'$ und damit $A <_{\text{lex}} x \ominus y <_{\text{lex}} B$.

Insgesamt erhalten wir die Behauptung. □

Definition 3.11. Seien $A, B \subset \mathbf{No}$ Mengen surrealer Zahlen, sodass gilt $A <_{\text{lex}} B$. Dann schreiben wir

$$c = \{A \mid B\}$$

für die nach Satz 3.10 existierende und eindeutig bestimmte simpelste surreale Zahl c mit $A <_{\text{lex}} c <_{\text{lex}} B$. Wir sagen dann auch, dass c der **Schnitt** von A und B ist.

Korollar 3.12. *Seien $A, B \subset \mathbf{No}$ mit $A <_{\text{lex}} B$ und $x = \{A \mid B\}$. Dann ist x von minimaler Länge mit der Eigenschaft $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$.*

Beweis. Sei $y \in \mathbf{No}$ beliebig mit $A <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} B$. Sei d das gemeinsame Anfangsstück von x und y. Dann gilt sicherlich $A <_{\text{lex}} d <_{\text{lex}} B$ und $d \leq_s x$. Nach Satz 3.10 muss dann bereits $d = x$ gelten und damit insbesondere $\ell(x) \leq \ell(y)$. Da y beliebig war, folgt die Behauptung. □

Notation 3.13. Seien I, J Indexmengen und $A = \{a_i : i \in I\}, B = \{b_j : j \in j\}$ Mengen surrealer Zahlen mit $A <_{\text{lex}} B$. Wir schreiben dann für die nach Satz 3.10 eindeutig bestimmte surreale Zahl $\{A \mid B\}$:

$$\{a_i; i \in I \mid b_j : j \in J\} := \{A \mid B\} = \{\{a_i : i \in I\} \mid \{b_j : j \in J\}\}.$$

Das heißt wir lassen die inneren Mengenklammern zur Vereinfachung weg. Ist beispielsweise $A = \{\ominus\}, B = \{\oplus\}$, so schreiben wir $\{A \mid B\} = \{\ominus \mid \oplus\}$.

Bemerkung 3.14. Einige Bemerkungen zu Satz 3.10:

(a) Satz 3.10 lässt sich auch konstruktiver beweisen. Ein solcher Beweis lässt sich in [8, Theorem 2.1] finden. Anhand der nachfolgenden Beispiele werden wir die dort gegebene Konstruktion verdeutlichen.
(b) Wir sehen sofort, dass $0 := \{\emptyset \mid \emptyset\} = \bigcirc$ die leere Folge ist.
(c) Es ist für beliebige $\alpha \in \mathbf{On}$, d.h. sowohl für Limes- als auch für Nachfolgerzahlen:

$$\{\underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{\alpha\text{-mal}} \mid \emptyset\} = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{(\alpha+1)\text{-mal}} \quad \text{und} \quad \{\emptyset \mid \underbrace{\ominus \cdots \ominus}_{\alpha\text{-mal}}\} = \underbrace{\ominus \cdots \ominus}_{(\alpha+1)\text{-mal}}.$$

(d) Insbesondere ist $\{0 \mid \emptyset\} = \oplus, \{\emptyset \mid 0\} = \ominus$.
(e) Betrachte nun $A = \{\oplus \oplus \ominus\}, B = \{\oplus \oplus \oplus\}$. Wir suchen $\{A \mid B\}$. Dazu nehmen wir zunächst das gemeinsame Anfangsstück $c = \oplus\oplus$ und betrachten die Endstücke der Elemente in A und B bezüglich c:

$$A' = \{\ominus\}, B' = \{\oplus\}.$$

Es gilt $\bigcirc = \{\ominus \mid \oplus\}$ und wir erhalten

$$\{\oplus \oplus \ominus \mid \oplus \oplus \oplus\} = \oplus \oplus.$$

(f) Nun betrachten wir $A = \{\oplus \oplus \ominus\}, B = \{\oplus\oplus\}$. Analog zu (e) setzen wir $c = \oplus\oplus$. Diesmal erhalten wir für die Endstücke der Elemente von A und B bezüglich c:

$$A' = \{\ominus\}, B' = \{\bigcirc\}.$$

Alle Elemente in A' beginnen mit $\ominus$. Wegen $\bigcirc \in B', \bigcirc \notin A'$ erhalten wir schließlich $\{A' \mid B'\} = \{\ominus \mid \bigcirc\} = \ominus\oplus$ und insgesamt folgt

$$\{\oplus \oplus \ominus \mid \oplus\oplus\} = \oplus \oplus \ominus \oplus.$$

(g) Sind A, B Mengen für welche $a_{\max} := \max\{a \in A\}, b_{\min} := \min\{b \in B\}$ existiert, so gilt die Gleichung $\{A \mid B\} = \{a_{\max} \mid v_{\min}\}$. Insbesondere existieren $a_{\max}$ und $b_{\min}$, wenn A, B endlich sind. In der Situation von (e) gilt etwa:

$$\{\oplus \oplus \ominus \mid \oplus \oplus \oplus\} = \oplus\oplus = \{\oplus \oplus \ominus\ominus, \oplus \oplus \ominus \mid \oplus \oplus \oplus, \oplus \oplus \oplus\oplus\}.$$

Das heißt die Darstellung einer surrealen Zahl als Schnitt zweier Mengen surrealer Zahlen wie in Definition 3.11 ist nicht eindeutig.
(h) Falls A, B Mengen sind, für welche $a_{\max} := \max\{a \in A\}, b_{\min} := \min\{b \in B\}$ nicht mehr existieren, so können wir den Schnitt $\{A \mid B\}$ nicht mehr so einfach angeben. Auf diese Fälle werden wir zum Teil in Kapitel 6 und 7 eingehen.

Bemerkung 3.15. Die Charakterisierung aus Definition 3.11 liefert ein konstruktives Verfahren, um die surrealen Zahlen zu erhalten. Zu Beginn kennen wir noch keine Elemente von **No**. Das heißt wir können nur $A = \emptyset = B$ wählen und setzen

$$0 := \{\emptyset \mid \emptyset\} \in \mathbf{No}\,.$$

Nun steht uns die „neue“ Zahl 0 zur Verfügung. Wir können somit zwei weitere Zahlen erschaffen:

$$-1 := \{\emptyset \mid 0\}, 1 := \{0 \mid \emptyset\}.$$

Hierbei bemerken wir auch, dass die Konstruktion von $\{0 \mid 0\}$ nach Definition 3.11 unzulässig ist. In Kapitel 5 werden wir sehen, dass die Bezeichnungen $0, 1, -1$ sinnvoll gewählt sind. So ist $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ das neutrale Element der Addition aus Definition 5.1. Analog verhält sich $1 = \{0 \mid \emptyset\}$ bezüglich der Multiplikation.

Auf diese Weise können wir aus vorhandenen Zahlen immer neue Zahlen erschaffen. Eine solche Konstruktion von **No** lässt sich beispielsweise finden in [9].

4. Kanonische Darstellung und Kofinalität

Wir haben bereits gesehen, dass die Darstellung surrealer Zahlen als Schnitte nicht eindeutig ist. Es liegt also nahe eine *kanonische* Darstellung zu definieren.

Dazu müssen wir noch etwas Vorarbeit leisten. Nach Konvention besteht die leere Folg $\bigcirc$ sowohl nur aus $\oplus$, als auch nur aus $\ominus$. Damit erhalten wir zwei Lemmata.

Lemma 4.1. *Sei A eine Menge surrealer Zahlen. Dann besteht $\{A \mid \emptyset\}$ nur aus $\oplus$.*

Beweis. Sei $x := \{A \mid \emptyset\}$. Angenommen, x enthalte ein $\ominus$. Sei $\alpha \in \mathbf{On}$ minimal mit der Eigenschaft $x(\alpha) = \ominus$. Sei y das Anfangsstück von x mit Länge α. Dann gilt $y >_{\text{lex}} x >_{\text{lex}} A$ und $y <_s x$ im Widerspruch zur Minimalität von x bezüglich der Einfahheit. □

Lemma 4.2. *Sei B eine Menge surrealer Zahlen. Dann besteht $\{\emptyset \mid B\}$ nur aus $\ominus$.*

Beweis. Analog zu Lemma 4.1. □

Satz 4.3. *Seien $A <_{\text{lex}} B$ Mengen surrealer Zahlen und $\alpha \in \mathbf{On}$ minimal mit der Eigenschaft*

$$\forall y \in \mathbf{No}\,(y \in A \cup B \Rightarrow \ell(y) < \alpha)\,.$$

Dann ist $\ell(\{A \mid B\}) \leq \alpha$.

Beweis. Angenommen, die Aussage gelte nicht. Für α wie in der Behauptung, x das Anfangsstück von $\{A \mid B\}$ mit Länge α gilt dann ebenfalls $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$ im Widerspruch zur Minimalität von $\ell(\{A \mid B\})$ aus Korollar 3.12. □

Satz 4.4. *Sei $x \in \mathbf{No}$ mit $\ell(x) = \alpha \in \mathbf{On}$. Dann existieren Mengen $X_L <_{\text{lex}} X_R$ surrealer Zahlen, sodass alle Elemente in $X_L \cup X_R$ eine Länge kleiner α haben und $x = \{X_L \mid X_R\}$ gilt.*

Beweis. Wähle $X_L = \{y : \ell(y) < \alpha, y <_{\text{lex}} x\}, X_R = \{y : \ell(y) < \alpha, y >_{\text{lex}} x\}$. Dann ist sicherlich $X_L <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} X_R$ und jedes Element mit einer Länge kleiner als α liegt nach Definition in einer der beiden Mengen X_L, X_R. Somit folgt $x = \{X_L \mid X_R\}$. □

Definition 4.5. Seien A, B, A', B' Mengen surrealer Zahlen. Wir sagen (A', B') ist **kofinal** in (A, B), falls gilt

(1) $\forall a \in A \exists a' \in A'(a' \geq_{\text{lex}} a)$ und
(2) $\forall b \in B \exists b' \in B'(b' \leq_{\text{lex}} b)$.

Sind $x, y \in \mathbf{No}$ mit $x = \{A \mid B\}, y = \{C \in D\}$, so sagen wir x ist **kofinal** in y, wenn (A, B) kofinal in (A', B') ist.

Bemerkung 4.6. Es ist klar, dass die Relation „ist kofinal in“ reflexiv und transitiv ist. Sie ist jedoch nicht antisymmetrisch. Außerdem gilt, falls $A \subset A', B \subset B'$, trivialerweise, dass (A', B') kofinal in (A, B) ist.

Theorem 4.7 (Kofinalitäts-Theorem 1)**.** *Seien $A <_{\text{lex}} B, A' <_{\text{lex}} B'$ Mengen surrealer Zahlen mit $x = \{A \mid B\}$ und $A' <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B'$. Ist (A', B') kofinal in (A, B), so ist $x = \{A' \mid B'\}$.*

Beweis. Es ist klar, dass $\{A' \mid B'\}$ wohldefiniert ist. Angenommen es existiert y mit $A' <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} B'$ und $\ell(y) < \ell(x)$. Da (A', B') kofinal in (A, B) ist, folgt $A <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} B$ im Widerspruch zur Minimalität von $\ell(a)$. Damit ist $x = \{A' \mid B'\}$. □

Theorem 4.8 (Kofinalitäts-Theorem 2)**.** *Seien $A <_{\text{lex}} B, A' <_{\text{lex}} B'$ Mengen surrealer Zahlen, sodass (A, B) und (A', B') beidseitig kofinal sind. Dann gilt $\{A \mid B\} = \{A' \mid B'\}$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\{x : A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B\} = \{x : A' <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B'\}$ gilt, denn dann sind auch die Elemente minimaler Länge, welche zwischen A und B bzw. A' und B' liegen, identisch.

„$\supseteq$“: Seien $a \in A, b \in B, x \in \{x : A' <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B'\}$ beliebig. Da (A, B) kofinal in (A', B') ist, existieren $a' \in A', b' \in B'$ mit $x >_{\text{lex}} a' \geq_{\text{lex}} a, x <_{\text{lex}} b' \leq_{\text{lex}} b$. Es folgt $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$.

„$\subseteq$“: Lässt sich analog zeigen, wobei die andere Kofinalität verwendet wird.

Insgesamt folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.9. Theorem 4.7 und 4.8 sind äußert nützlich, um Identitäten zu zeigen. Wir werden sie unter anderem in Kapitel 6 benutzen, wenn wir zeigen, dass die surrealen Zahlen den uns bekannten angeordneten Körper $\mathbb{R}$ umfassen.

Satz 4.10 (Kanonische Darstellung)**.** *Sei $x \in \mathbf{No}$ beliebig. Setze*

$$X_L = \{y \in \mathbf{No} : y \leq_s x, y <_{\text{lex}} x\},$$
$$X_R = \{y \in \mathbf{No} : y \leq_s x, x <_{\text{lex}} y\}.$$

Dann gilt

$$x = \{X_L \mid X_R\}.$$

*Wir bezeichnen dies als die **kanonische Darstellung** von x.*

Beweis. Nach Definition gilt bereits $X_L <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} X_R$. Nach Satz 4.4 können wir zudem $x = \{A \mid B\}$ so schreiben, dass alle Elemente in $A \cup B$ eine Länge kleiner $\ell(x)$ haben.

Zu zeigen ist: (X_L, X_R) ist kofinal in (A, B).

Seien $a \in A$ beliebig und y das gemeinsame Anfangsstück von a und x. Wegen $\ell(a) < \ell(x)$ gilt $y \leq_s x$. Außerdem ist $a \leq_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} x$, denn $\ell(a)$ ist die kleinste Ordinalzahl, in der sich a und x unterscheiden. Für diese gilt $a(\ell(y)) <_{\text{lex}} x(\ell(y))$. Somit ist $a(\ell(y)) \leq_{\text{lex}} \bigcirc$ sowie $x(\ell(y)) >_{\text{lex}} \bigcirc$. Beachte hierbei, dass $x(\ell(y)) = \bigcirc$ aufgrund von $\ell(x) > \ell(a)$ nicht gelten kann. Damit folgt $a(\ell(y)) \leq_{\text{lex}} y(\ell(y)) <_{\text{lex}} x(\ell(y))$. Insgesamt ist $y \in X_L$ und $a \leq_{\text{lex}} y$. Die andere Kofinalitäts-Eigenschaft zeigt man analog und wir erhalten damit die Behauptung aus Kofinalitäts-Theorem 1. $\square$

Wir haben also zum einen Satz 3.10, welcher besagt, dass sich jeder Schnitt $\{A \mid B\}$ von Mengen surrealer Zahlen $A <_{\text{lex}} B$ auf eindeutige Weise als wohlgeordnete Folge von $\oplus$ und $\ominus$ schreiben lässt. Zum anderen besagt Satz 4.10, dass zu jeder wohlgeordneten Folge auch eine Darstellung als Schnitt existiert.

Bemerkung 4.11. Sei $x = \{X_L \mid X_R\}$ in kanonischer Darstellung wie in Satz 4.10. Leicht sieht man

$$X_L = \{y \in \mathbf{No} : y \leq_s x \text{ und } x(\beta) = \oplus \text{ für } \ell(y) = \beta\},$$
$$X_R = \{y \in \mathbf{No} : y \leq_s x \text{ und } x(\beta) = \ominus \text{ für } \ell(y) = \beta\}.$$

Beispiel 4.12. Sei $x = \oplus \oplus \ominus \oplus \ominus \ominus \oplus$. Dann ist

$$X_L = \{\bigcirc, \oplus, \oplus \oplus \ominus, \oplus \oplus \ominus \oplus \ominus\ominus\},$$
$$X_R = \{\oplus\oplus, \oplus \oplus \ominus\oplus, \oplus \oplus \ominus \oplus \ominus\}.$$

Die Mengen X_L, X_R bilden also Folgen, welche x von unten bzw. oben approximieren.

Bemerkung 4.13. Sei $x = \{X_L \mid X_R\}$ in kanonischer Darstellung so, dass X_L und X_R endliche Mengen sind. Dann existieren

$$x_{L_{\max}} := \max\{x_L : x_L \in X_L\}, \quad x_{R_{\min}} := \min\{x_R : x_R \in X_R\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass dann auch gilt

$$x = \{x_{L_{\max}} \mid x_{R_{\min}}\}.$$

Im Fall von Beispiel 4.12 erhalten wir somit

$$x = \{\oplus \oplus \ominus \oplus \ominus\ominus \mid \oplus \oplus \ominus \oplus \ominus\}.$$

Der letzte Satz dieses Abschnitts liefert eine Aussage, inwieweit eine beliebige Darstellung $x = \{A \mid B\}$ mit der kanonischen $x = \{X_L \mid X\}$ zusammenhängt.

Satz 4.14 (Umgekehrtes Kofinalitäts-Theorem)**.** *Sei $x = \{X_L \mid X_R\}$ die kanonische Darstellung von $x \in \mathbf{No}$ und $x = \{A \mid B\}$ eine weitere, beliebige Darstellung. Dann ist (A, B) kofinal in (X_L, X_R).*

Beweis. Erneut zeigen wir nur die erste Eigenschaft aus Definition 4.5. Die zweite lässt sich analog zeigen. Sei $x_L \in X_L$ beliebig. Da x von minimaler Länge mit der Eigenschaft $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$ ist und $\ell(x_L) < \ell(x)$ gilt, kann

$A <_{\text{lex}} x_L$ nicht gelten. Beachte hierbei, dass $x_L <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$ stets gilt. Somit existiert $a \in A$ mit $a \geq_{\text{lex}} x_L$, was zu zeigen war. $\square$

5. Arithmetik der surrealen Zahlen

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt eine kanonische Darstellung eingeführt haben, können wir nun untersuchen, wie sich Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf den surrealen Zahlen definieren lassen. Ziel ist es am Ende dieses Abschnittes zu zeigen, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ mit diesen Verknüpfungen einen angeordneten Körper bildet.

In den Kapiteln 6 und 7 werden wir noch erkennen, dass die surrealen Zahlen sowohl die reellen, als auch die Ordinalzahlen enthalten. In diesem Zusammenhang werden wir auch analysieren, inwiefern sich die neuen Operatoren mit den uns Bekannten auf $\mathbb{R}$ bzw. **On** decken.

Zu erwähnen ist außerdem, dass die zugrunde liegende Klasse **No** keine Menge, sondern eine echte Klasse bildet. Dies wird ebenfalls ein Resultat in Kapitel 7 sein, wenn wir zeigen, dass **No** bereits die echte Klasse **On** enthält.

5.i. **Addition.** Wir definieren die Addition induktiv nach der Summe der Längen der einzelnen Summanden.

Seien zunächst $x = \{X_L \mid X_R\}, y = \{Y_L \mid Y_R\} \in \mathbf{No}$ stets in kanonischer Darstellung.

Definition 5.1. Die *Summe* von x und y ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x + y &= \{(X_L + y) \cup (x + Y_L) \mid (X_R + y) \cup (x + Y_R)\} \\ &=: \{X_L + y, x + Y_L \mid X_R + y, x + Y_R\}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei wir für eine Menge $A \subset \mathbf{No}$ und ein Element $b \in \mathbf{No}$ schreiben:

(1) $A + b = \{a + b : a \in A\}$,
(2) $b + A = \{b + a : a \in A\}$.

Satz 5.2. *Seien x, y wie in 5.1. Dann ist $x + y$ stets wohldefiniert und es gilt $x + y = y + x$, d.h. die Summe ist auch kommutativ. Außerdem gilt für alle $z \in \mathbf{No}$*

$$y <_{\text{lex}} z \Rightarrow x + y <_{\text{lex}} x + z \text{ und } y + x <_{\text{lex}} z + x. \tag{6}$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung mittels transfiniter Induktion wie in Proposition 2.16. Seien $x = \{X_L \mid X_R\}, y = \{Y_L \mid Y_R\} \in \mathbf{No}$ die kanonischen Darstellungen. Setze $l := \ell(x) + \ell(y)$. Sei $\alpha \in \mathbf{On}$ beliebig.

Angenommen die Behauptung gelte für alle Paare (x, y) mit $l < \alpha$. Wir müssen zeigen, dass sie auch für (x, y) mit $l = \alpha$ gilt. Es ist

$$x + y = \{\underbrace{X_L + y, x + Y_L}_{=:Z_l} \mid \underbrace{X_R + y, x + Y_R}_{=:Z_R}\}.$$

Für die Wohldefiniertheit ist zu zeigen $Z_L <_{\text{lex}} Z_R$. Da x, y in kanonischer Darstellung vorliegen, ist nach Induktionshypothese und Eigenschaft (6) $X_L + y <_{\text{lex}} X_R + y$ sowie $X_L + y <_{\text{lex}} X_L + Y_R <_{\text{lex}} x + Y_R$. Somit ist insgesamt $X_L + y <_{\text{lex}} Z_R$. Analog sieht man $x + Y_L <_{\text{lex}} Z_R$. Insgesamt folgt $Z_L <_{\text{lex}} Z_R$, wodurch die Wohldefiniertheit der Addition gezeigt ist.

Mit der Induktionshypothese folgt außerdem direkt die Kommutativität, denn es gilt

$$\begin{aligned} x+y &= \{X_L+y, x+Y_L \mid X_R+y, x+Y_R\} \\ &= \{y+X_L, Y_L+x \mid y+X_R, Y_R+x\} \\ &= \{Y_L+x, y+X_L \mid Y_R+x, y+X_R\} = y+x. \end{aligned}$$

Mit der Kommutativität reicht es in (6) nur die erste Ungleichung zu zeigen.

Sei nun $z \in \mathbf{No}$ beliebig mit kanonischer Darstellung $z = \{Z_L \mid Z_R\}$. Es gelte außerdem $l(x) + l(z) \leq \alpha$. Angenommen, es gilt $y <_{\text{lex}} z$.

Fall 1: Sei weder y noch z ein Anfangsstück der jeweils anderen Zahl. Sei d das gemeinsame Anfangsstück von y und z. Dann ist nach Annahme $\ell(d) < \ell(y), \ell(d) < \ell(z)$ sowie $y <_{\text{lex}} d <_{\text{lex}} z$. Somit ist nach Induktionshypothese $x + y <_{\text{lex}} x + d <_{\text{lex}} x + z$.

Fall 2: Sei y ein Anfangsstück von z, d.h. es gilt $y <_s z$. Wegen $y <_{\text{lex}} z$ und da y, z in kanonischer Darstellung sind, folgt $y \in Z_L$. Aus der schon gezeigten Wohldefiniertheit von $x + z$ erhalten wir

$$x + Z_L <_{\text{lex}} x + z <_{\text{lex}} x + Z_R.$$

Somit ist $x + y <_{\text{lex}} x + z$.

Fall 3: Wenn z ein Anfangsstück von y ist, erhalten wir entsprechend $z \in Y_R$. Ebenfalls mit der Wohldefiniertheit der Addition folgt $x + y <_{\text{lex}} x + Y_R$ und damit $x + y <_{\text{lex}} x + z$. □

Bemerkung 5.3. Der Beweis zur Kommutativität der Addition ist ein Beispiel für eine sehr einfache transfinite Induktion, bei der die Aussage tatsächlich direkt aus der Induktionshypothese folgt. Es werden noch einige weitere Aussagen kommen, welche sich mit der gleichen Vorgehensweise lösen lassen. Aus diesem Grund wird die Induktion in solchen Fällen nicht ausgeführt.

Bisher können wir nur Addition von Zahlen in kanonischer Darstellung durchführen. Der nachfolgende Satz besagt aber, dass die Summe unabhängig von der Darstellung der Summanden ist.

Satz 5.4 (Allgemeingültigkeit der Addition). *Seien $x = \{A \mid B\}, y = \{C \mid D\}$ beliebige Darstellungen von x und y. Dann gilt:*

$$x + y = \{A + y, x + C \mid B + y, x + D\}.$$

Insbesondere ist $x + y$ unabhängig von der Darstellung von x und y.

Beweis. Wir wollen die Behauptung unter Verwendung von Kofinalitäts-Theorem 1 zeigen. Seien $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ beliebig. Dann gilt $a <_{\text{lex}} x, c <_{\text{lex}} y, x <_{\text{lex}} b, y <_{\text{lex}} d$. Mit Satz 5.2 erhalten wir

$$x + c <_{\text{lex}} x + y <_{\text{lex}} x + d \quad \text{und} \quad a + y <_{\text{lex}} x + y <_{\text{lex}} b + y.$$

Betrachte nun ein beliebiges Element aus der linken Menge von $x + y$. Ohne Einschränkung habe dieses die Form $x_L + y$. Nach dem Umgekehrten Kofinalitäts-Theorem ist $\{A \mid B\}$ kofinal in $\{X_L \mid X_R\}$. Es existiert also ein $a \in A$, sodass $a \geq_{\text{lex}} x_L$ gilt.

Wieder mit Satz 5.2 folgt $a+y \geq_{\text{lex}} x_L+y$. Analog zeigen wir die Aussage für die Elemente der rechten Menge. Insgesamt erhalten wir, dass $\{A+y, x+C \mid B+y, x+D\}$ kofinal in $\{X_L+y, x+Y_L \mid X_R+y, x+Y_R\}$ ist.

Mit Kofinalitäts-Theorem 1 folgt $\{A+y, x+C \mid B+y, x+D\} = x+y$. Daraus erhalten wir die Behauptung. □

Satz 5.5. *Es ist* $\langle \mathbf{No}, + \rangle$ *eine abelsche Gruppe.*

Beweis. (i) Kommutativität wurde bereits in Satz 5.2 gezeigt.

(ii) Assoziativität: Für $x, y, z \in \mathbf{No}$ lässt sich per Induktion nach $\ell := \ell(x)+\ell(y)+\ell(z)$ beweisen, dass $x+(y+z) = (x+y)+z$ gilt.

(iii) Neutrales Element: Die leere Folge ist durch $0_{\mathbf{No}} := \bigcirc = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ gegeben. Da diese als linke und rechte Menge jeweils die leere Menge hat, folgt aus der Definition 5.1 der Addition direkt, dass $x + 0_{\mathbf{No}} = x = 0_{\mathbf{No}} + x$ für alle $x \in \mathbf{No}$ gilt.

(iv) Inverse Elemente: Sei $x \in \mathbf{No}$ mit kanonischer Darstellung $x = \{X_L \mid X_R\}$. Sei $\alpha = \ell(x)$. Definiere $-x \in \mathbf{No}$ als die Zahl von Länge $\alpha = \ell(x)$, welche durch Umkehrung aller Zeichen in x entsteht:

$$-x : \alpha \to \{\oplus, \ominus\}, -x(\beta) = \begin{cases} \ominus, & \text{falls } x(\beta) = \oplus \\ \oplus, & \text{falls } x(\beta) = \ominus \end{cases} \quad (\beta < \alpha).$$

Wir zeigen durch Induktion nach α, dass $x + (-x) = 0_{\mathbf{No}} = \bigcirc$ gilt.

Aus der Definition von $-x$ erkennen wir: y ist genau dann ein Anfangsstück von x, wenn $-y$ ein Anfangsstück von $-x$ ist. Wir können mit der Induktionshypothese die kanonische Darstellung von $-x$ schreiben als

$$-x = \{-X_R \mid -X_L\}, \text{ wobei } \begin{aligned} -X_R &= \{-x_R : x_R \in X_R\}, \\ -X_L &= \{-x_L : x_L \in X_L\}. \end{aligned}$$

Beachte, dass aufgrund der lexikographischen Ordnung $-X_R <_{\text{lex}} -x <_{\text{lex}} -X_L$ ist. Damit ist $-x \in \mathbf{No}$ wohldefiniert. Nun gilt

$$x + (-x) = \{\underbrace{X_L + (-x), x + (-X_R)}_{=:A} \mid \underbrace{X_R + (-x), x + (-X_L)}_{=:B}\}.$$

Seien $x_L \in X_L, x_R \in X_R$ beliebig. Um $A <_{\text{lex}} 0$ zu erhalten, müssen wir $x_L + (-x) <_{\text{lex}} 0, x + (-x_R) <_{\text{lex}} 0$ zeigen. Nach Satz 5.2 wissen wir, dass Addition ordnungserhaltend ist. Aus den Darstellungen von x und $-x$ sowie der Induktionshypothese folgt

$$x_L + (-x) <_{\text{lex}} x_L + (-x_L) = 0, x + (-x_R) <_{\text{lex}} x_R + (-x_R) = 0.$$

Mit gleicher Argumentation bekommen wir $0 <_{\text{lex}} B$. Schließlich ist $A <_{\text{lex}} 0_{\mathbf{No}} <_{\text{lex}} B$. Da $0_{\mathbf{No}} <_s y$ für alle $y \in \mathbf{No} \setminus \{0\}$, folgt

$$x + (-x) = \{A \mid B\} = 0_{\mathbf{No}} = \bigcirc.$$

Somit ist $\langle \mathbf{No}, + \rangle$ eine abelsche Gruppe. □

Beispiele 5.6. (a) Aus dem Beweis von Satz 5.5 erhalten wir sofort

$$1 + (-1) \overset{3.15}{=} \oplus + \ominus = \bigcirc.$$

(b) Wir bestimmen $\oplus + \ominus\ominus$. Mit Hilfe der kanonischen Darstellung aus Satz 4.10 und Bemerkung 4.11 erhalten wir

$$\begin{aligned}\oplus + \ominus\ominus &= \{\bigcirc \mid \emptyset\} + \{\emptyset \mid \bigcirc, \ominus\} \overset{4.13}{=} \{\bigcirc \mid \emptyset\} + \{\emptyset \mid \ominus\}\\ &= \{\bigcirc + \ominus\ominus \mid \oplus + \ominus\} = \{\ominus\ominus \mid \bigcirc\} = \ominus.\end{aligned}$$

(c) Betrachte $x = \oplus\ominus$, $y = \ominus$. Wir erhalten nach Bemerkung 4.11 für die kanonischen Darstellungen von x und y

$$x = \{\bigcirc \mid \oplus\}, \quad y = \{\emptyset \mid \bigcirc\}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}x + y &= \{\bigcirc + \ominus \mid \oplus + \ominus, \oplus\ominus + \bigcirc\}\\ &= \{\ominus \mid \bigcirc, \oplus\ominus\} \overset{4.13}{=} \{\ominus \mid \bigcirc\} = \ominus\oplus.\end{aligned}$$

5.ii. **Multiplikation.** Wir definieren die Multiplikation wie auch die Addition zunächst für surreale Zahlen in kanonischer Darstellung. Anschließend zeigen wir, dass diese unabhängig von der Darstellung ist.

Seien also $x = \{X_L | X_R\}, y = \{Y_L | Y_R\}$ in kanonischer Darstellung.

Bemerkung 5.7. Bei der Definition der Multiplikation könnte man intuitiv an $xy = \{X_L y, xY_L \mid X_R y, xY_r\}$ denken. Dabei ergeben sich aber sofort zwei Probleme. Zum einen ist dieser Ansatz teilweise falsch, beispielsweise wenn mehrere der Faktoren negativ sind. Zum anderen können wir bei einer induktiven Definition von stärkeren Annahmen ausgehen.

So wissen wir nach Induktion zum Beispiel $x - X_L >_{\text{lex}} 0, y - Y_L >_{\text{lex}} 0$. Daraus können wir schließen $(x - X_L)(y - Y_L) >_{\text{lex}} 0$. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir $xy >_{\text{lex}} X_L y + xY_L - X_L Y_L$.

Analog bekommen wir die Ungleichungen $(x - X_R)(y - Y_R) >_{\text{lex}} 0, (x - X_L)(y - Y_R) <_{\text{lex}} 0$ und $(x - X_R)(y - Y_L) <_{\text{lex}} 0$. Diese liefern uns durch Ausmultiplizieren $xy >_{\text{lex}} X_R y + xY_R - X_R Y_R, xy <_{\text{lex}} X_L y + xY_R - X_L Y_R$ und $xy <_{\text{lex}} X_R y + xY_L - X_R Y_L$. Diese Idee führt zu nachfolgender Definition.

Definition 5.8. Das *Produkt* von x und y ist gegeben durch

$$\begin{aligned}xy := x \cdot y :=\{&X_L y + xY_L - X_L Y_L, X_R y + xY_R - X_R Y_R \mid\\ &X_L y + xY_R - X_L Y_R, X_R y + xY_L - X_R Y_L\} =: \{(xy)_L \mid (xy)_R\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Beispiel 5.9. Definition 5.8 ist deutlich komplizierter als die der Summe. Es lohnt sich anhand einiger Beispiele mit der Vorschrift vertraut zu werden.

(a) Sei $x = \{X_L \mid X_R\} \in \mathbf{No}$ beliebig. Dann sehen wir sofort $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$, denn es gilt

$$\begin{aligned}x \cdot 0 = \{&\underbrace{X_L \cdot 0 + x \cdot 0_L - X_L \cdot 0_L, X_R \cdot 0 + x \cdot 0_R - X_R \cdot 0_R}_{=:A} \mid\\ &\underbrace{X_L \cdot 0 + x \cdot 0_R - X_L \cdot 0_R, X_R \cdot 0 + x \cdot 0_L - X_R \cdot 0_L}_{=:B}\}.\end{aligned}$$

Da $0_L = \emptyset = 0_R$ gilt und in jedem der Summanden von A bzw. B ein 0_L oder 0_R vorkommt, folgt bereits $A = \emptyset = B$ und damit $x \cdot 0 = \{\emptyset \mid \emptyset\} = 0$. Analog sehen wir, dass $0 \cdot x = 0$ gilt.

(b) Es ist $-1 = \{\emptyset \mid 0\}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(-1)\cdot(-1) &= \{\emptyset\cdot(-1)+(-1)\cdot\emptyset-\emptyset\cdot\emptyset, 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0-0\cdot 0 \mid \\ &\qquad \emptyset\cdot(-1)+(-1)\cdot 0-\emptyset\cdot 0, 0\cdot(-1)+(-1)\cdot\emptyset-0\cdot\emptyset\} \\ &= \{0 \mid \emptyset\} = 1,\end{aligned}$$

wobei (a) verwendet wurde.

Satz 5.10. *Das Produkt $x \cdot y$ aus Definition 5.8 ist stets wohldefiniert und es gilt $x \cdot y = y \cdot x$, d.h. es ist auch kommutativ. Seien außerdem $a, b \in \mathbf{No}$ beliebig und ebenfalls in kanonischer Darstellung. Dann gilt*

$$x >_{\text{lex}} y \text{ und } a >_{\text{lex}} b \Rightarrow xa - ya >_{\text{lex}} xb - yb. \tag{8}$$

Beweis. Induktion nach der Summe der Längen der einzelnen Faktoren. Sei hierzu $\alpha \in \mathbf{On}$ beliebig. Angenommen, die Behauptung gelte für alle $x, y, a, b \in \mathbf{No}$ mit $\ell(x)+\ell(y), \ell(x)+\ell(a), \ell(y)+\ell(a), \ell(x)+\ell(b), \ell(y)+\ell(b) < \alpha$. Wir müssen zeigen, dass die Behauptung auch gilt, wenn die Summen der Längen gleich α ist.

Zunächst führen wir zwei Notationen ein. So schreiben wir $\mathscr{P}(x, y, a, b)$, falls für $x, y, a, b \in \mathbf{No}$ die Ungleichung auf der rechten Seite von (8) gilt. Außerdem setzen wir $f(x_0, y_0) = x_0 y + x y_0 - x_0 y_0$ für $x_0 \in X_L \cup X_R, y_0 \in Y_L \cup Y_R$ aus der kanonischen Darstellung.

Offensichtlich ist $\mathscr{P}$ transitiv in den letzten beiden Komponenten, d.h. aus $\mathscr{P}(x, y, a, b_1)$ und $\mathscr{P}(x, y, b_1, b_2)$ folgt $\mathscr{P}(x, y, a, b_2)$. Durch Umstellen sehen wir außerdem

$$\mathscr{P}(x, y, a, b) \Leftrightarrow yb - ya >_{\text{lex}} xb - xa.$$

Damit ist $\mathscr{P}$ auch transitiv in den ersten beiden Komponenten.

Wir untersuchen nun die Funktion $f(x_0, y_0)$ auf Monotonie in den beiden Komponenten. Seien zunächst $x_0 \in X_L \cup X_R, y_0^1, y_0^2 \in Y_L \cup Y_R$ beliebig. Es gilt

$$f(x_0, y_0^2) - f(x_0, y_0^1) = (xy_0^2 - x_0 y_0^2) - (xy_0^1 - x_0 y_0^1).$$

Damit ist genau dann $f(x_0, y_0^2) - f(x_0, y_0^1) >_{\text{lex}} 0$, wenn $\mathscr{P}(x, x_0, y_0^2, y_0^1)$. Nach Induktionshypothese erhalten wir aus $x >_{\text{lex}} x_0, y_0^2 >_{\text{lex}} y_0^1$ bereits $\mathscr{P}(x, x_0, y_0^2, y_0^1)$. Schließlich ist $f(x_0, y_0)$ monoton wachsend in y_0 für $x_0 <_{\text{lex}} x$.

Falls $x_0 >_{\text{lex}} x, y_0^1 >_{\text{lex}} y_0^2$, so können wir schreiben

$$\begin{aligned}&f(x_0 y_0^2) - f(x_0, y_0^1) = (x_0 y_0^1 - xy_0^1) - (x_0 y_0^2 - xy_0^2) >_{\text{lex}} 0 \\ \Leftrightarrow &\mathscr{P}(x_0, x, y_0^1, y_0^2).\end{aligned}$$

Nach Induktionshypothese folgt wegen $x_0 >_{\text{lex}} x, y_0^1 >_{\text{lex}} y_0^2$, dass $f(x_0, y_0)$ monoton fallend in y_0 für $x_0 >_{\text{lex}} x$ ist. Analog ist $f(x_0, y_0)$ monoton wachsend in x_0, falls $y_0 <_{\text{lex}} y$, und monoton fallend in x_0, falls $y_0 >_{\text{lex}} y$.

Nun lässt sich die Wohldefiniertheit von $x \cdot y$ zeigen. Dazu müssen wir einige Ungleichungen zeigen. Seien etwa $x_L^1, x_L^2 \in X_L, y_L \in Y_L, y_R \in Y_R$ beliebig. Zu zeigen ist $f(x_L^1, y_L) <_{\text{lex}} f(x_L^2, y_R)$.

Setze $x_L := \max\{x_L^1, x_L^2\}$. Dann ist $x_L^1, x_L^2 \leq_{\text{lex}} x_L$ und $y_L <_{\text{lex}} y_R$. Aus den Monotonie-Eigenschaften folgt

$$f(x_L^1, y_L) \leq_{\text{lex}} f(x_L, y_L) <_{\text{lex}} f(x_L, y_R) \leq_{\text{lex}} f(x_L^2, y_R),$$

wie gewünscht. Damit ist $f(X_L, Y_L) <_{\text{lex}} f(X_L, Y_R)$. Nach Definition von f entspricht das gerade $X_L y + x Y_L - X_L Y_L <_{\text{lex}} X_L y + x Y_R - X_L Y_R$.

Seien nun $x_L \in X_L, y_L^1, y_L^2 \in Y_L, x_R \in X_R$ beliebig. Nun setzen wir $y_L := \max\{y_L^1, y_L^2\}$ Erneut erhalten wir aus den Monotonie-Eigenschaften

$$f(x_L, y_L^1) \leq_{\text{lex}} f(x_L, y_L) <_{\text{lex}} f(x_R, y_L) \leq_{\text{lex}} f(x_R, y_L^1).$$

Damit ist $f(X_L, Y_L) <_{\text{lex}} f(X_R, Y_L)$. Nach Definition von f entspricht das gerade $X_L y + x Y_L - X_L Y_L <_{\text{lex}} X_R y + x Y_L - X_R Y_L$. Insgesamt haben wir nun $X_L y + x Y_L - X_L Y_L <_{\text{lex}} (xy)_L$ gezeigt.

Die weiteren Ungleichungen $f(X_R, Y_R) <_{\text{lex}} f(X_R, Y_L), f(X_R, Y_R) <_{\text{lex}} f(X_L, Y_R)$ erhalten wir ebenfalls aus der Monotonie. Diese liefern uns $X_R y + x Y_R - X_R Y_R <_{\text{lex}} (xy)_R$ und damit insgesamt $(xy)_L <_{\text{lex}} (xy)_R$. Damit haben wir die Wohldefiniertheit gezeigt.

Aus der Induktionshypothese und der Kommutativität der Addition folgt außerdem direkt die Kommutativität der Multiplikation.

Wir zeigen nun Eigenschaft (8). Wir nehmen also $x >_{\text{lex}} y$ und $a >_{\text{lex}} b$ an und wollen $\mathscr{P}(x, y, a, b)$ zeigen. Dazu führen wir eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Angenommen, in jedem der Paare $(x, y), (a, b)$ ist jeweils ein Element ein echtes Anfangsstück des jeweils anderen. Wir betrachten den Fall, dass $y <_s x, b <_s a$ gilt. Da wir bereits wissen, dass $x \cdot a$ wohldefiniert ist, folgen für alle $x_L \in X_L, x_R \in X_R, a_L \in A_L, a_R \in A_R$ die Ungleichungen

$$f(x_L, a_L) <_{\text{lex}} xa, f(x_R, a_R) <_{\text{lex}} xa, f(x_L, a_R) >_{\text{lex}} xa, f(x_R, a_L) >_{\text{lex}} xa.$$

Somit erhalten wir

$$0 <_{\text{lex}} xa - f(x_L, a_L) = (xa - x_L a) - (x a_L - x_L a_L) \Rightarrow \mathscr{P}(x, x_L, a, a_L).$$

Analog bekommen wir $\mathscr{P}(x_R, x, a_R, a), \mathscr{P}(x, x_L, a_R, a)$ und $\mathscr{P}(x_R, x, a, a_L)$. Wegen $y <_s x, b <_s a, x >_{\text{lex}} y, a >_{\text{lex}} b$ ist $y \in X_L, b \in A_L$. Aus $\mathscr{P}(x, x_L, a, a_L)$ folgt dann $\mathscr{P}(x, y, a, b)$, wie gewünscht.

Falls $x <_s y, b <_s a$ gilt, so ist $x \in Y_R, b \in A_L$. Wir betrachten dann das Produkt $y \cdot a$ und bekommen $\mathscr{P}(y_R, y, a, a_L)$. Damit ist auch in diesem Fall $\mathscr{P}(x, y, a, b)$. Die anderen Fälle verlaufen analog.

Fall 2: Angenommen, in (x, y) ist kein Element ein Anfangsstück des Anderen aber in (a, b) gilt $a <_s b$ oder $b <_s a$. Sei d das gemeinsame Anfangsstück von x, y. Wegen $x >_{\text{lex}} y$ ist $x >_{\text{lex}} d >_{\text{lex}} y$ und es gilt $d <_s x, d <_s y$. Aus Fall 1 folgen $\mathscr{P}(x, d, a, b)$ und $\mathscr{P}(d, y, a, b)$. Aus der Transitivität in den ersten beiden Komponenten folgt $\mathscr{P}(x, y, a, b)$.

Fall 3: Nun sei weder a, noch b ein Anfangsstück der jeweils anderen Zahl. An (x, y) stellen wir keine weitere Bedingung. Sei e das gemeinsame Anfangsstück von a und b. Aus Fall 1 und 2 folgt dann $\mathscr{P}(x, y, a, e)$ und

$\mathscr{P}(x, y, e, b)$. Nun erhalten wir aus der Transitivität in den letzten beiden Komponenten $\mathscr{P}(x, y, a, b)$.

Schließlich haben wir (8) gezeigt und damit insgesamt die Behauptung. □

Auch bei der Multiplikation lässt sich zeigen, dass das Produkt unabhängig von der Darstellung der Faktoren ist.

Satz 5.11 (Allgemeingültigkeit der Multiplikation). *Seien $x = \{A, B\}, y = \{C, D\}$ beliebige Darstellungen von x und y. Dann gilt*

$$xy = \{Ay + xC - AC, By + xD - BD \mid Ay + Dx - AD, BY + Cx - BC\}.$$

Insbesondere ist xy unabhängig von der Darstellung von x und y.

Beweis. Dieser Beweis verläuft ähnlich zum Satz über die Gleichheit der Addition 5.4. Er wird hier nicht ausgeführt, ist aber nachzulesen in [8, Theorem 3.5] □

Da die Existenz multiplikativer Inverser etwas schwieriger zu zeigen ist, zeigen wir zunächst, dass **No** mit den entsprechenden Verknüpfungen zu einem kommutativen Ring wird.

Satz 5.12. $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ *bildet einen kommutativen, nullteilerfreien Ring mit* $1_{\mathbf{No}} = \oplus = \{\bigcirc \mid \emptyset\}$.

Beweis. In Satz 5.5 haben wir bereits gesehen, dass $\langle \mathbf{No}, + \rangle$ eine abelsche Gruppe bildet. Es bleiben also noch die entsprechenden Eigenschaften der Multiplikation und die Distributivität zu zeigen. Aus Satz 5.10 wissen wir bereits, dass $\cdot$ kommutativ ist.

Seien $x, y, z \in \mathbf{No}$ beliebig. Wir werden bei der Distributivität und Assoziativität nur einen Term aus der Definition des Produkts in (7) betrachten. Mit den restlichen Termen verfährt man analog.

<u>Distributivität:</u> Induktion nach $\ell := \ell(x) + \ell(y) + \ell(z)$. Seien $(x + y) \cdot z = \{A \mid B\}, xz + yz = \{F \mid G\}$ wobei wir die Mengen $A, B, F, G \subset \mathbf{No}$ aus den kanonischen Darstellungen von x, y, z und den Definitionen 5.1 bzw. 5.8 der Summe bzw. des Produktes erhalten. Ein typisches Element aus $A \cup B$ ist von der Form

$$(x + y)_0 z + (x + y) z_0 - (x + y)_0 z_0, \tag{9}$$

wobei $(x + y)_0$ von der Form $x_0 + y$ oder $x + y_0$ ist. Dabei sind $x_0 \in X_L \cup X_R, y_0 \in Y_L \cup Y_R, z_0 \in Z_L \cup Z_R$. Ohne Einschränkung betrachten wir $(x + y)_0$ von der Form $x_0 + y$. Dann erhalten wir durch Einsetzen in (9) und Induktionshypothese:

$$(x_0 + y)z + (x + y)z_0 + (x_0 + y)z_0 = x_0 z + x z_0 - x_0 z_0 + yz =: c.$$

Wir bemerken außerdem, dass genau dann $c \in A$ gilt, wenn x_0 und z_0 auf der gleichen Seite ihrer jeweiligen kanonischen Darstellung liegen, d.h. wenn $x_0 \in X_L$ und $z_0 \in Z_L$ oder wenn $x_0 \in X_R$ und $z_0 \in Z_R$.

Weiter sind Elemente aus $F \cup G$ von der Form $(xz)_0 + yz$ oder $xz + (yz)_0$. Nach unserer Annahme an $(x + y)_0$ reicht es Elemente $(xz)_0 + yz$ zu betrachten. Nach Definition der Multiplikation ist

$$(xz)_0 + yz = x_0z + xz_0 - x_0z_0 + yz =: d.$$

Wir erkennen $c = d$ und es gilt ebenfalls genau dann $d \in F$, wenn x_0 und z_0 auf der gleichen Seite ihrer jeweiligen kanonischen Darstellung liegen.

Bei den anderen typischen Elementen erhalten wir ebenfalls Gleichheit und bekommen so insgesamt $A = F, B = G$. Mithin ergibt sich die gewünschte Gleichheit $(x + y)z = xz + yz$.

Da wir aus Satz 5.10 bereits wissen, dass die Multiplikation kommutativ ist, folgt sowohl Links- als auch Rechtsdistributivität.

Assoziativität: Induktion nach $\ell := \ell(x) + \ell(y) + \ell(z)$. Seien $(xy)z = \{A \mid B\}, x(yz) = \{F \mid G\}$, wobei wir die Mengen $A, B, F, G \subset \mathbf{No}$ wie bei der Distributivität aus den kanonischen Darstellungen von x, y, z und der Definition 5.8 des Produkts erhalten. Ein typisches Element aus $A \cup B$ ist der Form

$$\begin{aligned}&(xy)_0z + (xy)z_0 - (xy)_0z_0\\ =&(x_0y + xy_0 - x_0y_0)z + (xy)z_0 - (x_0y + xy_0 - x_0y_0)z_0 =: c.\end{aligned}$$

mit $x_0 \in X_L \cup X_R, y_0 \in Y_L \cup Y_R, z_0 \in Z_L \cup Z_R$. Dabei gilt genau dann $c \in A$, wenn $(xy)_0$ und z_0 auf der gleichen Seite ihrer (kanonischen) Darstellung liegen. D.h. es ist genau dann $c \in A$, wenn eine gerade Anzahl der Elemente x_0, y_0, z_0 auf der rechten Seite ihrer jeweiligen kanonischen Darstellung liegen.

Mit der schon bewiesenen Distributivität erhalten wir

$$c = (x_0y)z + (xy_0)z - (x_0y_0)z + (xy)z_0 - (x_0y)z_0 - (xy_0)z_0 + (x_0y_0)z_0.$$

Entsprechend ist ein typisches Element aus $F \cup G$ von der Form

$$\begin{aligned}&x_0(yz) + x(yz)_0 - x_0(yz)_0\\ =&x_0(yz) + x(y_0z + yz_0 - y_0z_0) - x_0(y_0z + yz_0 - y_0z_0)\\ =&x_0(yz) + x(y_0z) + x(yz_0) - x(y_0z_0) - x_0(y_0z) - x_0(yz_0) + x_0(y_0z_0) =: d,\end{aligned}$$

wobei wir auch hier die Distributivität verwendet haben. Aus der Induktionshypothese folgt die Gleichheit $c = d$. Außerdem erkennen wir, dass für $d \in F$ die gleiche Bedingung wie für $c \in A$ erfüllt sein muss. Es gilt damit genau dann $d \in F$, wenn $c \in A$, und wir bekommen die Identitäten $A = F, B = G$. Insgesamt können wir $(xy)z = x(yz)$ schließen.

Identität: Induktion nach $\ell = \ell(x)$. In Beispiel 5.9 haben wir bereits gesehen, dass $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$ für alle $a \in \mathbf{No}$ gilt. Mit $1 = \{0 \mid \emptyset\}$ folgt nun:

$$\begin{aligned}x \cdot 1 =&\{X_L \cdot 1 + x \cdot 0 - X_L \cdot 0 \mid X_R \cdot 0 + x \cdot 0 - X_R \cdot 0\}\\ \overset{\text{IH}}{=}& \{X_L, X_R\} = x.\end{aligned}$$

Nullteilerfreiheit: Seien zunächst $x >_{\text{lex}} 0, y >_{\text{lex}} 0$. Nach Satz 5.10 gilt:

$$xy - 0 \cdot y >_{\text{lex}} x \cdot 0 - 0 \cdot 0 \Leftrightarrow xy >_{\text{lex}} 0.$$

Sei $a \in \mathbf{No}$ mit $a = \{A_L \mid A_R\} >_{\text{lex}} 0$ beliebig und ohne Einschränkung in kanonischer Darstellung. Da alle Elemente von $A_L \cup A_R$ Anfangsstücke von a sind, folgt $a_0 >_{\text{lex}} 0$ für alle $a_0 \in (A_L \cup A_R)$.

In Satz 5.5 haben wir gesehen:

$$(-1) \cdot a = -a = \{-A_R \mid -A_L\}.$$

Induktiv erhalten wir dann $-a <_{\text{lex}} 0$. Mit einer ähnlichen Überlegung folgt aus $-a <_{\text{lex}} 0$ bereits $a >_{\text{lex}} 0$. Insgesamt erhalten wir

$$a >_{\text{lex}} 0 \Leftrightarrow -a <_{\text{lex}} 0. \tag{10}$$

Seien nun $x, y \in \mathbf{No}$ so, dass eine der beiden Zahlen größer und die andere kleiner als Null ist. Dann folgt aus (10) die Ungleichung $x \cdot y <_{\text{lex}} 0$. Sind beide Zahlen kleiner als Null, so erhalten wir mit $(-1) \cdot (-1) = 1$ die Ungleichung $x \cdot y >_{\text{lex}} 0$. Es folgt die Nullteilerfreiheit und der Satz ist insgesamt bewiesen. □

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ ein angeordneter Körper ist. Dabei fehlt uns lediglich noch die Existenz der Inversen bezüglich der Multiplikation. Die Eigenschaften eines angeordneten Körpers folgen aus den Sätzen 5.2, 5.10 und 5.12.

5.iii. **Division.** Im Folgenden sei $x = \{X_L \mid X_R\} >_{\text{lex}} 0$ eine positive surreale Zahl in kanonischer Darstellung.

Definition 5.13. Wir definieren das multiplikative Inverse $x^{-1} \in \mathbf{No}$ mit $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ induktiv. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $x_j \in (X_L \cup X_R) \backslash \{0\}$. Für eine beliebige Zahl $b \in \mathbf{No}$ definieren wir $b \circ x_j$ als die eindeutige Lösung $X \in \mathbf{No}$ von

$$(x - x_j)b + x_j X = 1.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösung folgt aus der Induktionhypothese, denn durch Umstellen erhalten wir

$$X = x_j^{-1} + (1 - x_j^{-1}x)b$$

und die Induktionshypothese liefert Existenz und Eindeutigkeit von x_j^{-1}. Nun definieren wir induktiv für $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ durch

$$\langle\rangle = 0, \langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \circ x_{n+1}.$$

Setze weiter

$$A := \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle : \#\{x_j : x_j \in X_L\} \text{ ist gerade}\},$$
$$B := \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle : \#\{x_j : x_j \in X_L\} \text{ ist ungerade}\}.$$

Nun wollen wir zeigen, dass

$$x^{-1} = \{A \mid B\}$$

gilt.

Satz 5.14. *Wir verwenden für $x >_{\text{lex}} 0$ die Notationen aus Definiton 5.13. Dann gilt*

$$x^{-1} = \{A \mid B\}.$$

Beweis. Durch strukturelle Induktion nach $\ell(x)$.

Wohldefiniertheit: Wir zeigen zunächst

$$v \in A \Rightarrow xv <_{\text{lex}} 1 \quad \text{und} \quad v \in B \Rightarrow xv >_{\text{lex}} 1. \tag{11}$$

Sei dazu $v \in A\dot{\cup}B$ beliebig. Dann ist v der Form $v = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ mit $x_j \in (X_L \cup X_R)\backslash\{0\}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Wir zeigen (11) durch Induktion nach n. Beachte hierbei, dass wir keine transfinite Induktion, sondern eine auf den natürlichen Zahlen führen. Dem gesamten Beweis liegt allerdings eine transfinite Induktion zugrunde. Um Verwirrung zu vermeiden, werden wir die Verwendung der Induktionshypothese aus (11) bezüglich n mit IH^n kennzeichnen.

$\underline{\text{IA}^n\text{: } n = 0\text{:}}$ Es ist $v = \langle\rangle = 0 \in A$ und $x \cdot 0 = 0 <_{\text{lex}} 1$ wie behauptet.

$\underline{\text{IS}^n\text{:} n \rightsquigarrow n+1\text{:}}$ Sei also $v = \langle x_1, \ldots, x_{n+1} \rangle = \underbrace{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}_{=:w} \circ x_{n+1}$. Nach IH^n gilt die Aussage aus (11) für $w \in A\dot{\cup}B$. Außerdem ist wegen $v = w \circ x_{n+1}$

$$1 = (x - x_{n+1})w + x_{n+1}v = xw - x_{n+1}w + x_{n+1}v, \tag{12}$$

wobei wir die Distributivität verwendet haben. Addieren wir auf beiden Seiten xv und stellen um, so folgt

$$xv = 1 + (x - x_{n+1})(v - w). \tag{13}$$

Aus (12) erhalten wir, dass genau dann $1 >_{\text{lex}} xw$ gilt, wenn $x_{n+1}v >_{\text{lex}} x_{n+1}w$ gilt. Wegen $x >_{\text{lex}} 0$ und $x_{n+1} \in (X_L \cup X_R)\backslash\{0\}$ gilt auch $x_{n+1} >_{\text{lex}} 0$. Nach Induktionshypothese können wir damit die Existenz von x_{n+1}^{-1} annehmen und erhalten die Beziehung:

$$1 >_{\text{lex}} xw \Leftrightarrow v >_{\text{lex}} w. \tag{14}$$

Wir unterscheiden nun vier Fälle für w und x_{n+1}.

Fall 1: Seien $w \in A, x_{n+1} \in X_L$. Dann ist sicherlich $v = w \circ x_{n+1} \in B$. Nach IH^n ist $xw <_{\text{lex}} 1$. Mit (13) und $x_{n+1} <_{\text{lex}} x$ folgt

$$xv = 1 + \underbrace{(x - x_{n+1})}_{>_{\text{lex}} 0} \underbrace{(v - w)}_{\overset{(14)}{>_{\text{lex}}} 0} >_{\text{lex}} 1,$$

wie gewünscht.

Fall 2: Seien $w \in A, x_{n+1} \in X_R$. Dann ist $v = w \circ x_{n+1} \in A$. Nach IH^n ist $xw <_{\text{lex}} 1$. Mit (13) und $x <_{\text{lex}} x_{n+1}$ folgt nun

$$xv = 1 + \underbrace{(x - x_{n+1})}_{<_{\text{lex}} 0} \underbrace{(v - w)}_{\overset{(14)}{>_{\text{lex}}} 0} <_{\text{lex}} 1.$$

Die Fälle $w \in B, x_{n+1} \in X_L$ und $w \in B, x_{n+1} \in X_R$ verlaufen analog, wobei in diesen Fällen $v - w <_{\text{lex}} 0$ gilt. Insgesamt schließt sich die Induktion^n und es folgt die Hilsaussage (11).

Damit ist $y := \{A \mid B\}$ wohldefiniert, denn angenommen, es existieren $a \in A, b \in B$ mit $a >_{\text{lex}} b$. Gleichheit kann nach Definition nicht herrschen. Da $x >_{\text{lex}} 0$ folgt aus der Ordnungseigenschaft von Satz 5.10 die Ungleichung $xa >_{\text{lex}} xb$ im Widerspruch zu der nach (11) geltenden Ungleichung $xa <_{\text{lex}} 1 <_{\text{lex}} xb$.

Wir berechnen nun $x \cdot y = \{(xy)_L \mid (xy)_R\}$. Sei $z \in (xy)_L \cup (xy)_R$ beliebig. Dann ist z der Form $z = x_0 y + x y_0 - x_0 y_0$ mit $x_0 \in X_L \cup X_R, y_0 \in A \cup B$. Da nach Annahme $x >_{\text{lex}} 0$ gilt, ist $0 \in X_L$. Außerdem haben wir schon $\langle\rangle = 0 \in A$ gesehen. Das heißt für $x_0 = 0 = y_0$ ist $0 \in (xy)_L$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Angenommen, es gilt $x_0 = 0 \in X_L$. Dann reduziert sich z auf $z = xy_0$. Aus unserer Hilfsbehauptung (11) wissen wir:

$$y_0 \in A \Rightarrow z = xy_0 <_{\text{lex}} 1, \quad y_0 \in B \Rightarrow z = xy_0 >_{\text{lex}} 1.$$

Außerdem ist nach Definition des Produkts genau dann $z \in (xy)_R$, wenn $y_0 \in B$. Es ergibt sich

$$z \in (xy)_L \Rightarrow z <_{\text{lex}} 1, \quad z \in (xy)_R \Rightarrow z >_{\text{lex}} 1.$$

Fall 2: Gelte nun $x_0 \neq 0$. Insbesondere ist dann $x_0 >_{\text{lex}} 0$. Außerdem ist für alle $y_0 \in A \cup B$ der Ausdruck $y_0 \circ x_0$ wohldefiniert, d.h. $X := y_0 \circ x_0$ erfüllt die Gleichung

$$(x - x_0)y_0 + x_0 X = 1. \tag{15}$$

Nach Definition des Produkts gilt genau dann $z \in (xy)_L$, wenn x_0, y_0 auf derselben Seite ihrer jeweiligen Darstellung liegen, d.h. $x_0 \in X_L$ und $y_0 \in A$ oder $x_0 \in X_R$ und $y_0 \in B$. Wir erkennen damit

$$z \in (xy)_L \Leftrightarrow y_0 \circ x_0 \in B \Leftrightarrow y_0 \circ x_0 >_{\text{lex}} y.$$

Einsetzen in (15) liefert

$$\text{für } z \in (xy)_L : 1 >_{\text{lex}} (x - x_0)y_0 + x_0 y = z,$$
$$\text{für } z \in (xy)_R : 1 <_{\text{lex}} (x - x_0)y_0 + x_0 y = z.$$

In beiden Fällen haben wir nun $z <_{\text{lex}} 1$ für $z \in (xy)_L$ und $1 <_{\text{lex}} z$ für $z \in (xy)_R$. Da wir außerdem bereits $0 \in (xy)_L$ gesehen haben, ist $1 = \oplus$ die simpelste Zahl mit der Eigenschaft $(xy)_L <_{\text{lex}} 1 <_{\text{lex}} (xy)_R$. Mithin gilt $xy = \{(xy)_L \mid (xy)_R\} = \oplus = 1$ beziehungsweise $y = x^{-1}$, was zu zeigen war. $\square$

Die Konstruktion der Multipliaktiven Inversen wird anhand eines Beispiels verdeutlicht.

Beispiel 5.15. Sei $x = \oplus\ominus = \{\bigcirc \mid \oplus\} \in \mathbf{No}$. Für $j \in \mathbb{N}$ seit $x_j \in (X_L \cup X_R)\backslash\{0\}$. Wegen $(X_L \cup X_R)\backslash\{0\} = \{\oplus\}$ ist $x_j = \oplus \in X_R$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Nach Satz 5.14 ist $x^{-1} = \{A \mid B\}$, wobei $A = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : \#\{x_j : x_j \in X_L\} \text{ ist gerade }\}, B = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : \#\{x_j : x_j \in X_L\} \text{ ist ungerade }\}$. Da $x_j = \oplus \in X_R$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $A = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : x_j = \oplus (j = 1, \ldots n)\}, B = \emptyset$.

Nach Definition ist für $n \in \mathbb{N}$ der Ausdruck $\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle$ die eindeutig bestimmte Lösung X von $(x - x_{n+1})\langle x_1, \ldots, x_n\rangle + x_{n+1}X = 1$. Wegen $x_{n+1} = 1$ erhalten wir durch Umstellen $X = 1 + (1-x)\langle x_1, \ldots x_n\rangle$. Weiter ist $1 - x = \oplus - \oplus\ominus = \oplus + \ominus\oplus = \{\bigcirc \mid \emptyset\} + \{\ominus \mid \bigcirc\} = \{\ominus\oplus, \bigcirc \mid \oplus\} = \oplus\ominus$. Somit erhalten wir die Gleichung

$$X = 1 + \oplus\ominus\langle x_1, \ldots, x_n\rangle.$$

Wir zeigen nun durch Induktion nach n, dass $\langle x_1, \ldots x_n \rangle <_{\text{lex}} \oplus\oplus$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$\underline{n = 0, n = 1}$: Für $n = 0$ ist nach Definition $\langle\rangle = 0 = \bigcirc <_{\text{lex}} \oplus\oplus$. Für $n = 1$ ist $\langle x_1 \rangle = 1 + \oplus \ominus \cdot 0 = 1 = \oplus <_{\text{lex}} \oplus\oplus$, wie gewünscht.

$\underline{n - 1 \rightsquigarrow n}$: Es ist $X := \langle x_1, \ldots, x_{n+1} \rangle = 1 + \oplus \ominus \cdot \langle x_1, \ldots x_n \rangle$. Da $\oplus \ominus >_{\text{lex}} \bigcirc$ und nach Induktionshypothese $\langle x_1, \ldots x_n \rangle <_{\text{lex}} \oplus\oplus$ gilt, folgt aus der Ungleichung (6) aus Satz 5.2 bereits $X <_{\text{lex}} 1 + \oplus\ominus \cdot \oplus\oplus$. Weiter gilt $\oplus\ominus \cdot \oplus\oplus = \{\bigcirc \mid \oplus\} \cdot \{\oplus \mid \emptyset\} = \{\oplus \cdot \oplus\ominus \mid \oplus \cdot \oplus\oplus\} = \{\oplus\ominus \mid \oplus\oplus\} = \oplus$. Schließlich erhalten wir die Ungleichung $X <_{\text{lex}} 1 + 1 = \oplus + \oplus = \oplus\oplus$, was zu zeigen war.

Nach Satz 5.14 ist $x^{-1} = \{A \mid B\} = \{A \mid \emptyset\}$. Wir haben eben gezeigt, dass $A <_{\text{lex}} \oplus\oplus$ gilt. Da außerdem $\bigcirc, \oplus \in A$ ist, folgt $x^{-1} = \{A \mid \emptyset\} = \oplus\oplus$.

Nun erhalten wir folgendes bemerkenswertes Resultat:

Satz 5.16. $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ *bildet einen angeordneten Körper.*

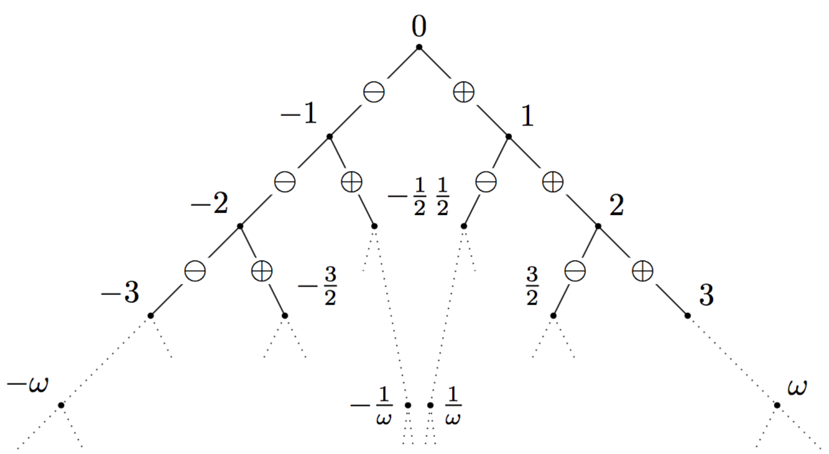
Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 5.12 und 5.14. □

6. Reelle Zahlen in No

Wir wissen aus Kapitel 5 bereits, dass die surrealen Zahlen einen angeordneten Körper bilden. Bisher können wir die Elemente von **No** aber nicht in Verbindung mit Zahlen bringen, die wir bereits aus grundlegender Analysis kennen.

Ziel dieses Abschnitts ist es deshalb, zu zeigen, dass **No** die reellen Zahlen enthält. Dabei deckt sich die uns bekannte Arithmetik auf $\mathbb{R}$ mit der entsprechenden Einschränkung auf **No**. Das heißt $\mathbb{R}$ ist als angeordneter Körper in **No** eingebettet. Am Ende dieses Kapitels wird außerdem [7, Frage 16] beantwortet, wie sich die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Zeichenfolge von $\oplus$ und $\ominus$ schreiben lassen.

Motivation 6.1. Wir werden zunächst zeigen, dass sich die *dyadischen Brüche* durch surreale Zahlen endlicher Länge darstellen lassen. Dazu betrachten wir folgenden Baum:



(Quelle: [10, S. 3322])

Satz 6.2. *Eine positive Zahl $n \in \mathbb{Z}_+$ entspricht der surrealen Zahl* $\underbrace{\oplus\oplus\oplus\cdots}_{n \text{ mal}}$. *Deren additives Inverses $-n \in \mathbb{Z}_-$ ist* $\underbrace{\ominus\ominus\ominus\cdots}_{n \text{ mal}}$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach n. Für $n = 1$ wissen wir die Aussage bereits. Nach Induktionshypothese ist $n + 1 = \underbrace{\oplus\cdots\oplus}_{n \text{ mal}} + \oplus$. Mit Hilfe des Kofinalitäts-Theorems 1 angewandt auf die kanonische Darstellung von n und der Induktionshypothese können wir $n = \{\underbrace{\oplus\cdots\oplus}_{n-1 \text{ mal}} \mid \emptyset\} = \{n-1 \mid \emptyset\}$ schreiben. Weiter ist $1 = \oplus = \{0 \mid \emptyset\}$. Nach Definition der Addition erhalten wir dann $n + 1 = \{n - 1 + 1, n + 0 \mid \emptyset\} = \{n \mid \emptyset\} = \underbrace{\oplus\cdots\oplus}_{n+1 \text{ mal}}$.

Die Darstellung von $-n$ folgt sofort aus der allgemeinen Formel für additive Inverse aus dem Beweis zu Satz 5.5. □

Definition 6.3. Ein **dyadischer Bruch** ist eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ der Form $x = \frac{a}{2^b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen eine surreale Zahl $x \in \mathbf{On}$ ist von **endlicher Länge**, wenn $\ell(x) < \omega$ gilt, d.h. wenn sie der Form $x : n \to \{\oplus, \ominus\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

Wir wissen bereits $\bigcirc = 0, \oplus = 1, \ominus = -1$. Außerdem ist $\oplus\ominus = \{\bigcirc \mid \oplus\} = \{0 \mid 1\}$. Da wir $\{\bigcirc \mid \oplus\}$ als die simpelste surreale Zahl zwischen $\bigcirc$ und $\oplus$ definiert haben, liegt es nahe, $\oplus\ominus = \frac{1}{2}$ anzunehmen. Führen wir diese Überlegung fort, so vermuten wir beispielsweise $\{\bigcirc \mid \oplus\ominus\} = \oplus\ominus\ominus = \frac{1}{4}$. Dieser Gedankengang lässt sich auf beliebige surreale Zahlen endlicher Länge übertragen. Bevor wir zu einem geeigneten Theorem kommen, müssen wir noch ein Hilfslemma beweisen.

Lemma 6.4. *Seien $a, b \in$ **No** beliebig. Gilt $\{2a \mid 2b\} = a + b$, so ist $\{a \mid b\} = \frac{a+b}{2}$.*

Beweis. Sei $\{a \mid b\} = c$. Dann gilt $2c = c+c = \{a+c \mid b+c\}$. Wir zeigen nun durch Anwendung des Kofinalitäts-Theorems 1, dass $\{a + c \mid b + c\} = a + b$ gilt. Wegen $a <_{\text{lex}} c <_{\text{lex}} b$ ist auch $a+c <_{\text{lex}} a+b <_{\text{lex}} b+c$. Des Weiteren gilt $2a = a + a <_{\text{lex}} a + c$ und $b + c <_{\text{lex}} b + b = 2b$. Es ist also $2c$ kofinal in $a + b$. Aus dem Kofinalitäts-Theorem 1 folgt $2c = a + b$ und damit insgesamt die Behauptung. □

Im nächsten Satz werden wir zeigen, dass surreale Zahlen endlicher Länge zu dyadischen Brüchen korrespondieren. Wir können sogar eine Formel angeben, um surreale Zahlen endlicher Länge in dyadische Brüche umzuwandeln.

Satz 6.5. *Sei $x \in$ **No** mit $\ell(x) = m + n$ endlich, wobei m so gewählt ist, dass für alle $i, j < m$ bereits $x(i) = x(j)$ und $x(m) \neq x(0)$ gilt. Das heißt es ist $m = \min\{i \in \{0, \ldots, \ell(x)\} : x(i) \neq x(0)\}$.*

Wir definieren $b(i) \in \mathbb{Q}$ für $i < m + n = \ell(x)$ wie folgt:

$$\text{Für } i < m : b(i) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x(i) = x(0) = \oplus \\ -1 & \text{, falls } x(i) = x(0) = \ominus \end{cases}.$$

$$\text{Für } i \geq m : b(i) = \begin{cases} \frac{1}{2^{i-m+1}} & \text{, falls } x(i) = \oplus \\ -\frac{1}{2^{i-m+1}} & \text{, falls } x(i) = \ominus \end{cases}.$$

Dann gilt

$$x = \sum_{i=0}^{m+n-1} b(i).$$

Insbesondere ist $x = \frac{c}{2^n}$ für ein $c \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $x(0) = \oplus$. Ohne Einschränkung sei $n > 0$, sonst sind wir im Fall von Satz 6.2 und x ist eine ganze Zahl. Wir führen eine Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

<u>$n = 1$:</u> Nach Wahl von m gilt $x(m) = \ominus$ und $x = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{m \text{ mal}} \ominus$. Da wir $x(0) = \oplus$ gefordert haben, ist $m \geq 1$. Mit Satz 6.2 erhalten $2m - 1 = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{2m-1 \text{ mal}} = \{0, \ldots, 2m-2 \mid \emptyset\}$ in kanonischer Darstellung. Mit dem Kofinalitäts-Theorem 1 sehen wir weiter $2m - 1 = \{2m - 2 \mid 2m\}$. Nun lässt sich Lemma 6.4 anwenden mit $a = m - 1, b = m$. Es folgt $\{m - 1 \mid m\} = \frac{m+(m-1)}{2} = m - \frac{1}{2}$.

Erneut nach Satz 6.2 ist $m - 1 = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{m-1 \text{ mal}}, m = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{m \text{ mal}}$, d.h. x ist auch die simpelste Zahl zwischen $m-1$ und m. Damit gilt $x = \{m - 1 \mid m\} = m - \frac{1}{2}$. Da in diesem Fall

$$b(i) = \begin{cases} 1, & i < m \\ -\frac{1}{2}, & i = m \end{cases}$$

gilt, folgt die Behauptung.

<u>$n > 1$:</u> Angenommen, die Behauptung gelte für alle $s \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $s \leq r$, wobei $n = r + 1, r \in \mathbb{N}_{>0}$. Aus Lemma 6.4 sehen wir induktiv sofort

$$\{2a \mid 2b\} = a + b \Rightarrow \left\{ \frac{a}{2^s} \,\middle|\, \frac{b}{2^s} \right\} = \frac{a+b}{2^{s+1}} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{N}_0.$$

Wie im Beweis zu Fall $n = 1$ erhalten wir, dass für $c \in \mathbb{Z}$ die Gleichheit $\{c \mid c + 1\} = c + \frac{1}{2}$ gilt und damit

$$\left\{ \frac{c}{2^s} \,\middle|\, \frac{c+1}{2^s} \right\} = \frac{c}{2^s} + \frac{1}{2^{s+1}} \quad (s \in \mathbb{N}). \tag{16}$$

Sei $y \in \mathbf{No}$ das Anfangsstück von x mit Länge $m + r$. Bemerke hierbei, dass $\ell(x) = m+n = m+r+1$. Dann ist $x = y\oplus$ oder $x = y\ominus$. Wir betrachten im Folgenden nur den Fall $x = y\oplus$, der andere Fall verläuft analog.

Sei $x = \{X_L \mid X_R\}$ die kanonische Darstellung von x. Da x nach Annahme endliche Länge hat, sind die Mengen X_L, X_R ebenfalls endlich. Nach dem Kofinalitäts-Theorem 1 können wir also schreiben:

$$x = \{x^L_{\max} \mid x^R_{\min}\}, \quad x^L_{\max} = \max\{x_L \in X_L\}, \quad x^R_{\min} = \min\{x_R \in X_R\}.$$

Es gilt $x^L_{\max} = y$, denn für alle Anfangsstücke y' von x mit $y' >_{\text{lex}} y$ gilt auch $y' >_{\text{lex}} x$. Wir können nun die Induktionshypothese auf $x^L_{\max}, x^R_{\min}$ anwenden, denn beide Zahlen sind simpler als x. Damit ist $y = x^L_{\max} = \frac{c}{2^r}$ für ein $c \in \mathbb{Z}$.

Zu zeigen ist nun $x^R_{\min} = \frac{c+1}{2^r}$, denn dann gilt nach (16)

$$x = \left\{ x^L_{\max} \middle| x^R_{\min} \right\} = \frac{c}{2^r} + \frac{1}{2^{r+1}}. \tag{17}$$

Um dies zeigen zu können, verwenden wir das Schubfachprinzip: Sei dazu $\mathscr{M}$ die Menge aller surrealer Zahlen mit Länge kleiner gleich $m + r$, welche mit m-vielen $\oplus$ beginnen, gefolgt von einem $\ominus$, d.h. $\underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{m \text{ mal}} \ominus$ ist ein Anfangsstück der Elemente von $\mathscr{M}$. Sicherlich gilt $x^L_{\max} \in \mathscr{M}$ und $\#\mathscr{M} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{r-1} = 2^r - 1$.

Nach Induktionshypothese ist jedes Element in $\mathscr{M}$ der Form $\frac{k}{2^r}$ für eine ganze Zahl k und liegt wegen der lexikographischen Ordnung strikt zwischen $m-1$ und m. Damit muss $k \in \{2^r(m-1)+1, \ldots, 2^r(m-1)+2^r-1\}$ gelten, d.h. es gibt genau $2^r - 1$ viele solcher Elemente. Nach Schubfachprinzip liegt dann jede Zahl der Form $\frac{k}{2^r}$, welche strikt zwischen $m-1$ und m liegt, in $\mathscr{M}$. Es gilt dann $\frac{c+1}{2^r} \in \mathscr{M}$ oder $\frac{c+1}{2^r} = m$. In beiden Fällen ist $\ell(\frac{c+1}{2^r}) \leq m + r$.

Wir zeigen nun $\frac{c+1}{2^r} >_{\text{lex}} x$: Dies folgt unmittelbar aus der lexikographischen Ordnung. Ist $\frac{c+1}{2^r} = m$ so ist die Aussage klar, da x mit m-vielen $\oplus$ beginnt, gefolgt von einem $\ominus$. Ist $\frac{c+1}{2^r} \in \mathscr{M}$, so existiert wegen $\frac{c+1}{2^r} >_{\text{lex}} \frac{c}{2^r} = y$ und $\ell\left(\frac{c+1}{2^r}\right) \leq m + r$ eine kleinste Stelle $j \leq m + r$, an welcher sich $\frac{c+1}{2^r}$ und y unterscheiden. Es gilt dann

$$\left(\frac{c+1}{2^r}\right)(j) >_{\text{lex}} y(j) = x(j). \tag{18}$$

Da wir $x = y\oplus$ angenommen haben, ist j auch minimal mit der Eigenschaft $\left(\frac{c+1}{2^r}\right)(j) >_{\text{lex}} x(j)$ und wir erhalten $\frac{c+1}{2^r} >_{\text{lex}} x$.

Jetzt wollen wir zeigen, dass $\frac{c+1}{2^r}$ auch eine untere Schranke von X_R bildet.

Da $x = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{m \text{ mal}} \ominus z$ für ein $z \in \mathbf{No}$ mit $\ell(z) = r$ ist, erhalten wir aus der Definition von $\mathscr{M}$ sofort $X_R \subseteq \mathscr{M} \cup \{m\}$. Insbesondere ist jedes Element von X_R der Form $\frac{k}{2^r}, k \in \mathbb{Z}$. Beachte hierbei, dass auch $m = \frac{m \cdot 2^r}{2^r}$ gilt. Sicherlich gilt $\frac{c}{2^r} = y <_{\text{lex}} x$ und $x <_{\text{lex}} X_R$. Weiter ist $\frac{c+1}{2^r}$ die kleinste Zahl der Form $\frac{k}{2^r}$, welche größer als $\frac{c}{2^r}$ ist. Aufgrund der Ordnungseigenschaften bildet dann $\frac{c+1}{2^r}$ eine untere Schranke von X_R.

Wir wissen bereits $x = \left\{x^L_{\max} \mid x^R_{\min}\right\}$ und $\frac{c+1}{2^r} >_{\text{lex}} x$. Da $\frac{c+1}{2^r}$ zudem eine untere Schranke von X_R bildet, ist $\frac{c+1}{2^r} \leq_{\text{lex}} x^R_{\min}$. Nach Kofinalitäts-Theorem 1 folgt damit bereits $x = \left\{x^L_{\max} \mid \frac{c+1}{2^r}\right\}$. Wegen $x^L_{\max} = y = \frac{c}{2^r}$ erhalten wir schließlich

$$x = \left\{ \frac{c}{2^r} \middle| \frac{c+1}{2^r} \right\} \overset{(17)}{=} \frac{c}{2^r} + \frac{1}{2^{r+1}} \overset{r+1=n}{=} \frac{c}{2^r} + \frac{1}{2^n}.$$

Nach Induktionshypothese wissen wir $y = \sum_{i=0}^{m+n-2} b(i) = \frac{c}{2^r}$. Somit ist insgesamt

$$x = \frac{c}{2^r} + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=0}^{m+n-2} b(i) + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=0}^{m+n-1} b(i),$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 6.6. Betrachte $x = \oplus\oplus\ominus\ominus\oplus\ominus$. Verwende die Notation aus Satz 6.5. Dann ist $m = 2, n = 4$ und $\ell(x) = 2 + 4 = 6$. Außerdem ist

$$b(0) = b(1) = 1, b(2) = -\frac{1}{2}, b(3) = -\frac{1}{4}, b(4) = \frac{1}{8}, b(5) = -\frac{1}{16}.$$

Somit gilt

$$x = \sum_{i=0}^{5} b(i) = 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{21}{16} = 1,3125.$$

Wir wollen nun in ganz $\mathbb{R}$ übergehen. Dabei gehen wir von der Axiomatisierung der reellen Zahlen wie in [13, Definition 1.44] aus.

Definition 6.7. Die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\ \leq \rangle$ sind eine Menge $\mathbb{R}$ mit zweistelligen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, Konstanten $0, 1$ sowie einer zweistelliger Relation $\leq$ so, dass gilt:

(1) $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\ \leq \rangle$ ist ein **angeordneter Körper**, d.h. ein Körper mit linearer Ordnung $\leq$ so, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
   (i) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
   (ii) $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.
(2) $\mathbb{R}$ ist **vollständig**, d.h. jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein *Supremum* bzw eine *kleinste obere Schranke* in $\mathbb{R}$.

Wir definieren uns nun die reell-surrealen Zahlen in **No** und zeigen anschließend, dass diese die Eigenschaften aus Definition 6.7 erfüllen.

Definition 6.8. Eine **reell-surreale Zahl** x ist eine surreale Zahl $x \in \mathbf{No}$, welche entweder von endlicher Länge ist oder von Länge ω so, dass gilt

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n_1, n_2 > n_0 : (x(n_1) = \oplus \wedge x(n_2) = \ominus)\,. \tag{19}$$

Eigenschaft (19) bedeutet: Falls $\ell(x) = \omega$ nicht endlich ist, so wird die Zeichenfolge von x nicht konstant, d.h. es treten immer wieder sowohl $\oplus$ als auch $\ominus$ auf.

Bemerkung 6.9. Es lässt sich zeigen, dass die *reell-surrealen Zahlen* aus Definition 6.8 einen Körper bilden. Dafür reicht es zu zeigen, dass sie unter Verknüpfung und Inversen abgeschlossen sind.

Betrachten wir eine surreale Zahl $x = \{X_L \mid X_R\}$ in kanonischer Darstellung mit $\ell(x) = \omega$, so ist x eine reell-surreale Zahl mit der Eigenschaft (19), falls $X_L, X_R \neq \emptyset$ gilt und X_L kein Maximum sowie X_R kein Minimum hat. Die Menge X_L hat genau dann ein Maximum, wenn die Zeichenfolge von x ein letztes $\oplus$ hat, d.h. wenn ein $i_0 < \omega$ mit $x(i_0) = \oplus$ und $x(i) = \ominus$ für alle $i_0 < i < \omega$ existiert. Zudem haben alle Elemente in $X_L \cup X_R$ eine Länge kleiner $\ell(x) = \omega$, das heißt sie sind endlich. Die Menge $X_L \cup X_R$ besteht also aus dyadischen Brüchen.

Hiervon lässt sich auch die Umkehrung zeigen.

Lemma 6.10. *Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq$ **No** mit $A <_{\text{lex}} B$ Mengen dyadischer Brüche so, dass A kein Maximum und B kein Minimum besitzt. Dann ist $\{A \mid B\}$ eine reell-surreale Zahl.*

Beweis. Wegen $A <_{\text{lex}} B$ ist klar, dass $\{A \mid B\} \in \mathbf{No}$ wohldefiniert ist. Sei also $x := \{A \mid B\} \in \mathbf{No}$. Nach Satz 4.3 gilt $\ell(x) \leq \omega$. Falls $\ell(x) < \omega$ gilt, folgt bereits die Behauptung. Sei also $\ell(x) = \omega$. Angenommen, es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > n_0$ schon $x(n) = \oplus$ oder $x(n) = \ominus$ gilt, d.h. x wird konstant. Ohne Einschränkung gilt $x(n) = \oplus$ für alle $n > n_0$. Bemerke außerdem, dass der Fall, dass x ausschließlich aus $\oplus$ besteht, ausgeschlossen ist, da $x <_{\text{lex}} B$ gilt und B eine nichtleere Menge dyadischer Brüche ist. Somit können wir $x(n_0) = \ominus$ annehmen.

Sei y das Anfangsstück von x mit Länge n_0. Wegen $x(n_0) = \ominus$ ist dann $y >_{\text{lex}} x$ und somit $y \in X_R$, wobei $x = \{X_L \mid X_R\}$ die kanonische Darstellung von x sei. Nach dem umgekehrten Kofinalitäts-Theorem existiert ein $b \in B$ mit $b \leq_{\text{lex}} y$. Da nach Annahme B kein Minimum enthält, existiert außerdem ein $\tilde{b} \in B$ mit $\tilde{b} <_{\text{lex}} b \leq_{\text{lex}} y$. Weiterhin sind $b, \tilde{b}, y$ alles dyadische Brüche, weshalb wir $m \in \mathbb{N}$ so wählen können, dass

$$x <_{\text{lex}} \tilde{b} \leq_{\text{lex}} y - \frac{1}{2^m} \tag{20}$$

gilt. Nun betrachten wir ein beliebiges Anfangsstück d von x mit Länge $n \in \mathbb{N}$, wobei $n > n_0$. Sicherlich ist $d \in X_L$ und $d = y \ominus \oplus \cdots \oplus$, wobei das letzte $\oplus$ an der Stelle $n - 1$ steht. Nach Satz 6.5 gilt dann

$$d - y = -\frac{1}{2^{n_0-m+1}} + \frac{1}{2^{n_0-m+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-m}} = -\frac{1}{2^{n-m}},$$

wobei $m = \min\{i \in \mathbb{N} : x(i) \neq x(0)\}$. Für hinreichend großes n gilt dann aber

$$d >_{\text{lex}} y - \frac{1}{2^m}.$$

Somit ist $x >_{\text{lex}} d >_{\text{lex}} y - \frac{1}{2^m}$ im Widerspruch zu (20). Die Zahl x wird schließlich als Zeichenfolge nicht konstant und ist damit eine reell-surreale Zahl. ☐

Lemma 6.11. *Sei $x = \{A \mid B\}$ eine surreale Zahl. Angenommen, für alle $a \in A$ existiert ein positiver, dyadischer Bruch r und ein $y \in A$ mit $y \geq_{\text{lex}} a + r$. Weiter seien $A', B' \subset$ **No** mit $A' <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B'$ so, dass für alle positiven dyadischen Brüche r ein $a \in A'$ und $b \in B'$ existieren mit $b - a \leq_{\text{lex}} r$.*

Dann gilt $x = \{A' \mid B'\}$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass (A', B') kofinal in (A, B) ist. Dafür ist zu zeigen:

$$\big(\forall a \in A \exists a' \in A' (a' \geq_{\text{lex}} a)\big) \wedge \big(\forall b \in B \exists b' \in B' (b' \leq_{\text{lex}} b)\big).$$

Wir zeigen im Folgenden nur die erste Aussage, die zweite lässt sich analog beweisen. Sei dazu $a \in A$ beliebig. Nach Voraussetzung existieren dann ein positiver dyadischer Bruch $r > 0$ und ein $y \in A$ mit $x >_{\text{lex}} y \geq_{\text{lex}} a + r$.

Weiterhin existieren $a' \in A'$ und $b' \in B'$ mit $b' - a' \leq_{\text{lex}} r$. Insgesamt erhalten wir

$$x >_{\text{lex}} y \geq_{\text{lex}} a + r \geq_{\text{lex}} a + b' - a' >_{\text{lex}} a + x - a'.$$

Nach Umstellen sehen wir $a' \geq_{\text{lex}} a$, was zu zeigen war. Mit Kofinalitäts-Theorem 1 folgt die Behauptung. □

Lemma 6.12. *Seien $x \neq y \in$ **No** paarweise verschiedene reell-surreale Zahlen. Dann gibt es unendlich viele dyadische Brüche zwischen x und y.*

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $x <_{\text{lex}} y$. Es reicht einen dyadischen Bruch r zu finden mit $x <_{\text{lex}} r <_{\text{lex}} y$, denn dann folgt induktiv die Behauptung.

Fall 1: Sei weder x, noch y ein Anfangsstück der jeweils anderen Zahl. Sei c das gemeinsame Anfangsstück von x und y. Dann ist $\ell(c) < \omega$, d.h. c ist dyadisch, und die Eigenschaft $x <_{\text{lex}} c <_{\text{lex}} y$ folgt direkt aus der lexikographischen Ordnung.

Fall 2: Sei ohne Einschränkung x ein echtes Anfangsstück von y. Falls y dyadisch ist, ist die Behaptung klar, denn dann ist auch x dyadisch und wir können $r = \frac{x+y}{2}$ wählen. Betrachte andererseits die kanonische Darstellung $y = \{Y_L \mid Y_R\}$ von y. Sicherlich ist $x \in Y_L$ und Y_L besitzt kein Maximum, da y reell-surreal ist. Wir finden also in jedem Fall ein dyadisches r mit $x <_{\text{lex}} r <_{\text{lex}} y$.

Es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 6.13. Die Bedingung in Lemma 6.12, dass x und y reell-surreal sind, ist notwendig. Nehme zum Beispiel an, $x \in$ **No** mit $\ell(x) = \omega$ besitze ein letztes $\oplus$, etwa $x(n_0) = \oplus$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $x(n) = \ominus$ für alle $n > n_0$. Sei y das Anfangsstück von x mit Länge $n_0 - 1$, d.h. y stoppt vor dem letzten $\oplus$. Dann existiert kein dyadisches r, welches zwischen x und y liegt.

Lemma 6.14. *Seien $x = \{X_L \mid X_R\} \in$ **No** reell-surreal, in kanonischer Darstellung mit $\ell(x) = \omega$, d.h. x ist nicht dyadisch, und $r > 0$ ein beliebiger, positiver, dyadischer Bruch.*

Dann existieren $x_L \in X_L$ und $x_R \in X_R$ mit $x_R - x_L \leq_{\text{lex}} r$, d.h. die Elemente aus X_L und X_R haben einen beliebig kleinen, reellen Abstand.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da x kein letztes $\oplus$ und kein letztes $\ominus$ hat, existieren stets $x_L \in X_L, x_R \in X_R$, welche an den ersten n Stellen übereinstimmen. Wie im Beweis zu Lemma 6.10 erhalten wir

$$x_R - x_L \leq \frac{1}{2^{n-m+1}} + \frac{1}{2^{n-m+2}} + \ldots \leq \frac{1}{2^{n-m}}$$

mit $m = \min\{i \in \mathbb{N} : x(i) \neq x(0)\}$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

6.i. **Abgeschlossenheit.** Um zu zeigen, dass die reell-surrealen Zahlen aus Definition 6.8 mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus Definition 6.7 übereinstimmen, brauchen wir den nachfolgenden Satz

Satz 6.15. *Die reell-surrealen Zahlen aus Definition 6.8 bilden einen angeordneten Körper.*

Beweis. Aus Satz 5.16 wissen wir bereits, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ ein angeordneter Körper ist. Es bleibt also nur die Abgeschlossenheit der reellen Zahlen unter Verknüpfungen und Inversen zu zeigen.

Seien im Folgenden $x, y \in \mathbf{No}$ reell-surreale Zahlen mit kanonischen Darstellungen $x = \{X_L \mid X_R\}, y = \{Y_L \mid Y_R\}$.

Addition: Sind x, y beide dyadisch, so auch ihre Summe $x+y$. Wir nehmen nun an, x sei dyadisch und y nicht. Zeige nun

$$x + y = \{x + Y_L \mid x + Y_R\} \tag{21}$$

unter Verwendung des Kofinalitäts-Theorem 1. Dafür reicht es zu zeigen:

$$\begin{aligned} &(\forall (x_L + y) \in X_L + y \exists (x + y_L) \in x + Y_L (x + y_L \geq_{\text{lex}} x_L + y)) \\ \wedge &(\forall (x_R + y) \in X_R + y \exists (x + y_R) \in x + Y_R (x + y_R \leq_{\text{lex}} x_R + y)) \,. \end{aligned}$$

Sei $x_L + y \in X_L + y$ beliebig. Wir zeigen: Es existiert $x + y_L \in x + Y_L$ mit $x_L + y \leq_{\text{lex}} x + y_L$.

Da x, x_L dyadisch sind und $x >_{\text{lex}} x_L$ gilt, ist $x - x_L >_{\text{lex}} 0$ ein positiver, dyadischer Bruch. Nach Lemma 6.14 finden wir $y_L \in Y_L$ und $y_R \in Y_R$ mit $y_R - y_L \leq_{\text{lex}} x - x_L$. Somit gilt

$$y - y_L \leq_{\text{lex}} y_R - y_L \leq_{\text{lex}} x - x_L \Leftrightarrow x + y_L \geq_{\text{lex}} x_L + y,$$

was zu zeigen war. Die andere Kofinalitäts-Eigenschaft erhalten wir analog. Es gilt damit (21). Wir wissen außerdem, dass $(x + Y_L) \cup (x + Y_R)$ nur dyadische Brüche enthält. Da y reell-surreal ist, existiert in $x + Y_L$ kein Maximum und in $x+Y_R$ kein Minimum. Beachte, dass wir dabei verwenden, dass Addition ordnungserhaltend ist. Nach Lemma 6.10 ist schließlich $x + y$ eine reell-surreale Zahl.

Nun müssen wir noch den Fall betrachten, dass weder x, noch y dyadisch sind. Wir wissen:

$$x + y = \{X_L + y, x + Y_L \mid X_R + y, x + Y_R\}.$$

Da x, y reell-surreal sind, hat die linke Menge kein Maximum und die rechte kein Minimum. Außerdem enthalten die Mengen X_L, X_R, Y_L, Y_R nur dyadische Brüche, weshalb $x + y$ die erste Eigenschaft aus Lemma 6.11 erfüllt.

Setze nun $A' = X_L + Y_L, B' = X_R + Y_R$. Es gilt $A' <_{\text{lex}} x + y <_{\text{lex}} B'$ und, da x, y nicht dyadisch sind, haben X_L, X_R sowie Y_L, Y_R nach Lemma 6.14 einen beliebig kleinen reellen Abstand. Somit erfüllen A', B' auch die zweite Eigenschaft aus Lemma 6.11 und es ist $x + y = \{A' \mid B'\}$. Erneut können wir aus Lemma 6.10 schließen, dass $x + y$ reell-surreal ist.

Außerdem gilt direkt nach der jeweiligen Definition, dass das neutrale Element 0 sowie additive Inverse von reell-surrealen Zahlen wieder reell-surreal sind.

Multiplikation: ohne Einschränkung können wir $x, y >_{\text{lex}} 0$ annehmen. Wir wissen:

$$\begin{aligned} xy = \{&X_L y + x Y_L - X_L Y_L, X_R y + x Y_R - X_R Y_R \mid \\ &X_L y + x Y_R - X_L Y_R, X_R y + x Y_L - X_R Y_L\}. \end{aligned}$$

Sind x, y dyadisch, so erhalten wir induktiv, dass auch xy dyadisch ist. Seien nun $x \in \mathbf{No}$ reell-surral, aber nicht dyadisch und $y \in \mathbf{No}$ reell-surreal beliebig. Ein beliebiges Element aus der Darstellung von xy ist der Form $c = xy - (x - x_0)(y - y_0)$ mit $x_0 \in X_L \cup X_R, y_0 \in Y_L \cup Y_R$. Da x reell-surreal ist, können wir ein $x_0^1 \in X_L \cup X_R$ wählen, welches auf der gleichen Seite von x liegt wie x_0, aber näher an x liegt als x_0, denn X_L hat kein Maximum und X_R kein Minimum. Setze $c_1 := xy - (x - x_0^1)(y - y_0)$. Sind c, c_1 beide auf der linken Seite von xy, so gilt

$$c_1 - c = (x_0^1 - x_0) \cdot (y - y_0) = \left|x_0^1 - x_0\right| \cdot |y - y_0| .$$

Sei $r >_{\text{lex}} 0$ reell-surreal beliebig. Mit Lemma 6.12 erhalten wir einen dyadischen Bruch $0 <_{\text{lex}} d <_{\text{lex}} r$. Entsprechend bekommen wir für reell-surreale $r_1, r_2 >_{\text{lex}} 0$ zwei positive dyadische Brüche $d_1, d_2 >_{\text{lex}} 0$ mit $d_1 d_2 <_{\text{lex}} r_1 r_2$. Zudem ist $d_1 d_2$ ebenfalls dyadisch. Mit $r_1 = \left|x_0^1 - x_0\right|, r_2 = |y - y_0|$ gilt $c_1 \geq_{\text{lex}} c + d_1 d_2$ und schließlich die erste Eigenschaft aus Lemma 6.11.

Nun wollen wir uns geeignete Mengen definieren, um mit Lemma 6.11 die Behauptung zu erhalten. Definiere hierzu

$$A' := \{x_1 y_1 : x_1, y_1 \text{ sind dyadisch und } 0 \leq_{\text{lex}} x_1 <_{\text{lex}} x, 0 \leq_{\text{lex}} y_1 <_{\text{lex}} y\},$$
$$B' := \{x_1 y_1 : x_1, y_1 \text{ sind dyadisch und } x <_{\text{lex}} x_1, y <_{\text{lex}} y_1\}.$$

Zeige, dass A', B' die zweite Eigenschaft aus Lemma 6.11 erfüllen. Es ist klar, dass $A' <_{\text{lex}} xy <_{\text{lex}} B'$ gilt. Sei nun $r >_{\text{lex}} 0$ beliebig. Zu zeigen: $\exists a \in A' \exists b \in B' (b - a \leq_{\text{lex}} r)$.

Da x reell-surreal aber nicht dyadisch ist, existieren nach Lemma 6.14 Zahlen $x_L \in X_L, x_R \in X_R$ mit $x_R - x_L \leq_{\text{lex}} r$. Außerdem finden wir $y_1, y_2 \in \mathbf{No}$ dyadisch mit $0 \leq_{\text{lex}} y_1 <_{\text{lex}} y, y <_{\text{lex}} y_2$ und $y_2 - y_1 \leq_{\text{lex}} r$. Dann ist $x_L y_1 \in A', x_R y_2 \in B'$.

Weiterhin gibt es Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ so, dass $X_R <_{\text{lex}} c_1, Y_R <_{\text{lex}} c_2$, denn: Da x reell ist mit $x >_{\text{lex}} 0$, existiert $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq \oplus\} > 0$. Sicherlich ist dann $x_0 <_{\text{lex}} n_0 + 1 =: c_1$ für alle $x_0 \in X_L \cup X_R$. Zur Erinnerung: Nach Satz 6.5 ist $n_0 + 1 = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{n_0 + 1 \text{ mal}}$. Für $Y_R <_{\text{lex}} c_2$ verfahre analog. Mit $c := \max\{c_1, c_2\} \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} x_R y_2 - x_L y_1 &= x_R y_2 - x_R y_1 + x_R y_1 - x_L y_1 \\ &= (y_2 - y_1) x_R + (x_R - x_L) y_1 <_{\text{lex}} r x_R + r y \leq_{\text{lex}} 2rc. \end{aligned}$$

Damit gilt auch die zweite Eigenschaft aus Lemma 6.11 und wir bekommen $x = \{A' \mid B'\}$. Mit Lemma 6.10 folgt erneut, dass xy reell-surreal ist. Somit sind die reell-surrealen Zahlen unter Multiplikation abgeschlossen.

Division: ohne Einschränkung betrachten wir $x >_{\text{lex}} 0$. Definiere

$$A := \{d : d \text{ ist dyadisch}, dx <_{\text{lex}} 1\}, B := \{d : d \text{ ist dyadisch}, dx >_{\text{lex}} 1\}.$$

Sicherlich gilt $A, B \neq \emptyset, A <_{\text{lex}} B$ und $0 \in A$. Zeige: A hat kein Maximum.

Sei $d \in A$ beliebig, d.h. es gilt $dx <_{\text{lex}} 1$ bzw. $1 - dx >_{\text{lex}} 0$. Nach Lemma 6.12 existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 - dx >_{\text{lex}} \frac{1}{2^m}$. Außerdem können wir ein $n \in \mathbb{N}$ finden mit $x <_{\text{lex}} 2^n$. Dabei verwenden wir, dass wie im Beweis zur

Abgeschlossenheit der Multiplikation eine Konstante c_1 so existiert, dass $X_R <_{\text{lex}} c_1$ gilt. Damit ist

$$\frac{1}{2^{n+m}}x <_{\text{lex}} \frac{1}{2^m} <_{\text{lex}} 1 - dx \Leftrightarrow 1 >_{\text{lex}} \left(d + \frac{1}{2^{n+m}}\right) x,$$

d.h. es ist $\left(d + \frac{1}{2^{n+m}}\right) \in A$, was zu zeigen war. Ebenso gilt, dass B kein Minimum hat.

Mit Lemma 6.10 erhalten wir, dass $z := \{A \mid B\}$ eine reell-surreale Zahl ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit der Multiplikation folgt, dass xz reell-surreal ist.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wollen zeigen: Es existiert $b \in B$ mit

$$bx \leq_{\text{lex}} 1 + \frac{1}{2^m}. \tag{22}$$

Wähle erneut $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x <_{\text{lex}} 2^n$. Setze $P := \{l \in \mathbb{N} : \left(\frac{l}{2^{n+m}}\right) x >_{\text{lex}} 1\}$. Als nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt P ein kleinstes Element k, für welches gilt $\frac{k}{2^{n+m}} \in B$ und

$$\left(\frac{k-1}{2^{n+m}}\right) x \leq_{\text{lex}} 1 \Rightarrow \frac{k}{2^{n+m}}x \leq_{\text{lex}} 1 + \frac{1}{2^{n+m}}x \overset{x \leq_{\text{lex}} 2^n}{\leq_{\text{lex}}} 1 + \frac{1}{2^m}.$$

Es folgt (22). Analog finden wir ein $a \in A$ mit $ax \geq_{\text{lex}} 1 - \frac{1}{2^m}$. Mit $b = \frac{k}{2^{n+m}}$ und $a <_{\text{lex}} z <_{\text{lex}} b$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2^m} &\leq_{\text{lex}} ax <_{\text{lex}} zx <_{\text{lex}} bx \leq_{\text{lex}} 1 + \frac{1}{2^m} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2^m} &<_{\text{lex}} zx - 1 <_{\text{lex}} \frac{1}{2^m}. \end{aligned}$$

Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt $|zx - 1| <_{\text{lex}} r$ für alle dyadischen Brüche $r >_{\text{lex}} 0$. Wäre nun $zx \neq 1$, so hätten wir zwei verschiedene reell-surreale Zahlen gefunden, zwischen welchen kein dyadischer Bruch liegt. Dies steht im Widerspruch zu Lemma 6.12. Somit ist $zx = 1$ mit z reell-surreal, d.h. die reell-surrealen Zahlen sind auch abgeschlossen unter multiplikativen Inversen.

Insgesamt erhalten wir die Behautung. □

Die reell-surrealen Zahlen aus Definition 6.8 bilden also einen Körper K, welcher die dyadischen Brüche enthält. Mithin gilt $\mathbb{Q} \subset K$. Um schließen zu können, dass K mit der uns bekannten Definition 6.7 von $\mathbb{R}$ übereinstimmt, müssen wir noch Vollständigkeit zeigen.

Satz 6.16. *Der Körper $K \subset$ **No** der reell-surrealen Zahlen aus Definition 6.8 ist vollständig, d.h. jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $H \subset K$ der reell-surralen Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke, welche ebenfalls reell-surreal ist.*

Beweis. Sei $\emptyset \neq H \subset K$ beliebig und nach oben beschränkt. Sei B die Menge aller dyadischen oberen Schranken von H und A die Menge aller anderen dyadischen Brüche. Nach Voraussetzung sind A, B nichtleer und nach Lemma 6.12 besitzt A kein Maximum, denn: Sei $a \in A$ beliebig. Dann existiert ein $h \in H$ mit $a <_{\text{lex}} h$. Nach Lemma 6.12 finden wir dann eine dyadische Zahl a_1 mit $a <_{\text{lex}} a_1 <_{\text{lex}} h$, d.h. es ist auch $a_1 \in A$.

Besitzt B ein Minimum, so sind wir bereits fertig. Hierbei verwenden wir wieder Lemma 6.12, welches sicherstellt, dass eine kleinste obere Schranke bezüglich der dyadischen Brüche auch eine kleinste obere Schranke bezüglich aller reell-surrealen Zahlen ist.

Wenn andererseits B kein Minimum besitzt, ist $x := \{A \mid B\}$ nach Lemma 6.10 rell-durreal. Zeige nun: x ist eine kleinste obere Schranke von H.

<u>x ist obere Schranke:</u> Angenommen, es existiert $y \in H$ mit $x <_{\text{lex}} y$. Nach Lemma 6.12 existiert $d \in K$ dyadisch mit $x <_{\text{lex}} d <_{\text{lex}} y$. Wegen $d <_{\text{lex}} y$ ist aber $d \in A$ und damit gilt $d <_{\text{lex}} x$ im Widerspruch zu $x <_{\text{lex}} d$. Somit wissen wir bereits, dass x eine obere Schranke ist.

<u>x ist kleinste obere Schranke:</u> Sei y eine beliebige, reell-surreale, obere Schranke von H. Angenommen, $y <_{\text{lex}} x$. Dann finden wir ein dyadisches $d \in K$ mit $y <_{\text{lex}} d <_{\text{lex}} x$. Damit gilt $d \in B$ im Widerspruch zu $x <_{\text{lex}} B$.

Damit ist x eine kleinste obere Schranke von H, was zu zeigen war. □

Schließlich haben wir in dem Körper K der reell-surrealen Zahlen alle definierenden Eigenschaften der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus Definition 6.7 nachgewiesen. Das heißt wir können tatsächlich $\mathbb{R}$ als Teilklasse der surrealen Zahlen auffassen. Wir wissen nun beispielsweise, dass Multiplikation mit reellen Zahlen eine wohldefinierte Operation auf **No** ist. Außerdem können wir von der Existenz beliebiger irrationaler Zahlen wie zum Beispiel π oder e ausgehen. Wir halten dieses erstaunliche Resultat in dem nachfolgenden Satz fest:

Satz 6.17. *Die reell-surrealen Zahlen aus Definition 6.8 bilden einen angeordneten Körper K so, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Menge in K eine kleinste obere Schranke besitzt. Insbesondere gilt $K \cong \mathbb{R}$.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 6.15 und 6.16. □

Satz 6.17 liefert eine Isomorphie $K \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, wobei K der Körper der reell-surrealen Zahlen ist. Da der Isomorphismus eindeutig ist, sehen wir die Isomorphie auch als Gleichheit $K = \mathbb{R}$ an.

Wir wollen uns nun anschauen, wie sich allgemeine reelle Zahlen in **No** darstellen lassen. Bezüglich dyadischen Brüchen liefert uns Satz 6.5 bereits eine Antwort. Was ist nun aber mit anderen, komplizierteren reellen Zahlen wie zum Beispiel $\frac{1}{3}, \pi$ oder e? Wir können dabei die Darstellung für dyadische Brüche aus Satz 6.5 auch auf reell-surreale Zahlen unendlicher Länge verallgemeinern.

Betrachte beliebige reelle, aber nicht dyadische Zahlen. Es reicht dabei, $x \in \mathbb{R}_{>0}$ zu betrachten, da wir additive Inverse durch Umdrehen der Zeichenfolge erhalten. Dazu wird eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit $e_i \in \{-1, 1\}$ wie folgt definiert:

$$e_0 = -1,\ e_{i+1} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lceil x \rceil + \sum_{j=0}^{i} e_j \frac{1}{2^j} < x \\ -1, & \text{falls } \lceil x \rceil + \sum_{j=0}^{i} e_j \frac{1}{2^j} > x \end{cases}.$$

Der Fall $\lceil x \rceil + \sum_{j=0}^{i} e_j \frac{1}{2^j} = x$ kann nicht auftreten, da x nach Annahme nicht dyadisch ist. Nach Konstruktion von $(e_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ gilt

$$\left| x - \lceil x \rceil + \sum_{j=0}^{i} e_j \frac{1}{2^j} \right| \leq \frac{1}{2^i} \tag{23}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt $x = \lceil x \rceil + \sum_{j=0}^{\infty} e_j \frac{1}{2^j}$. Außerdem lässt sich erkennen, dass die Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ nicht konstant wird. Betrachte nun folgende surreale Zahl:

$$y : \omega \to \{\oplus, \ominus\},\ y(0) = \ldots = y(\lceil x \rceil - 1) = \oplus,$$

$$y(\lceil x \rceil + i) = \begin{cases} \oplus, & \text{falls } e_i = 1 \\ \ominus, & \text{falls } e_i = -1 \end{cases} \quad \text{für alle } i < \omega.$$

Sei $y = \{Y_L \mid Y_R\}$ die kanonische Darstellung von y. Da die Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ nicht konstant wird, ist y reell. Aus Satz 6.5 folgt, dass die Elemente aus $Y_L \cup Y_R$ genau die Zahlen der Form $\lceil x \rceil + \sum_{j=0}^{i} e_j \frac{1}{2^j}$ sind. Aus der Ungleichung (23) folgt außerdem, dass die Elemente aus $Y_L \cup Y_R$ die Zahl x mit beliebig kleinem, reellen Abstand approximieren. Somit erhalten wir aus Lemma 6.12 die Gleichheit $y = x$, wie gewünscht.

Nun schauen wir uns ein konkretes Beispiel an.

Beispiel 6.18. Betrachte $x = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 1 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \mp \ldots. \end{aligned}$$

Dann ist die Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$e_0 = \oplus, e_1 = \ominus, e_i = \begin{cases} \ominus, & \text{für } i \equiv 0 \mod 2 \\ \oplus, & \text{für } i \equiv 1 \mod 2 \end{cases}.$$

Wir erhalten also die Identität $x = \oplus \ominus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \cdots$.

Bemerkung 6.19. Nun lässt sich Frage 16 aus [7] beantworten, wie sich die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Zeichenfolge von $\oplus$ und $\ominus$ in **No** darstellen lassen. Es ist bekannt, dass eine reelle Zahl genau dann rational ist, wenn ihre g-adische Entwicklung endlich oder periodisch ist, wobei $g \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ beliebig gewählt werden kann. Dies lässt sich etwa in [2][Kapitel 5.§1.] nachlesen.

Für $g = 2$ erhalten wir, dass eine reelle Zahl genau dann rational ist, wenn ihre 2-adische Entwicklung endlich oder periodisch ist. Unter einer 2-adischen Entwicklung von $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ versteht man eine Darstellung $x = \sum_{i=-k}^{\infty} c_i 2^{-i}$ für gewisse $k \in \mathbb{N}_0$ und $c_i \in \{0, 1\}$.

Damit lässt sich argumentieren, dass $\mathbb{Q}$ genau die Menge derjenigen $x \in$ **No** ist so, dass $\ell(x) < \omega$ endlich ist oder $\ell(x) = \omega$ gilt und x periodisch ist, wobei dann in der Periode mindestens ein $\oplus$ und ein $\ominus$ vorkommen. Sei hierfür $\mathscr{M}$ die Menge dieser surrealen Zahlen.

Sei $x \in \mathbb{Q}$ beliebig mit 2-adischer Darstellung $x = \sum_{i=-k}^{\infty} c_i 2^{-i}, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_i \in \{0, 1\}$. Dann kann man diese Darstellung umschreiben zu $x = \lceil x \rceil + \sum_{i=1}^{\infty} d_i 2^{-i}$ mit $d_i \in \{-1, 1\}$ so, dass für alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$ genau dann $d_i = 0$ gilt, wenn $d_{i+n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Hierbei nutzt man, dass für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $l \leq k$ die Gleichheit $2^{-k} = 2^{-l} + \sum_{i=l+1}^{k} -2^{-i}$ gilt. Damit lässt sich nämlich eine Teilfolge $(c_l, \dots, c_{k-1}, c_k) = (0, \dots, 0, 1)$ der c_i's zu $(1, -1, \dots, -1) =: (d_l, d_{l+1}, \dots, d_k)$ umschreiben $(k, l \in \mathbb{N}_0, l \leq k)$. Die Zahl x ist als Zeichenfolge gegeben durch:

$$x : \omega \to \{\oplus, \ominus\},\ x(0) = \ldots = x(\lceil x \rceil - 1) = \oplus,$$

$$x(i) = \begin{cases} \oplus, & \text{für } d_{i-\lceil x \rceil+1} = 1 \\ \ominus, & \text{für } d_{i-\lceil x \rceil+1} = -1 \\ \bigcirc, & \text{für } d_{i-\lceil x \rceil+1} = 0 \end{cases} \quad (\lceil x \rceil - 1 < i < \omega).$$

Damit ist klar, dass die Zeichenfolge endlich ist, falls die 2-adische Entwicklung endlich ist. Wir nehmen daher an, die 2-adische Entwicklung ist periodisch. Existiert ein $i \in \mathbb{Z}$ mit $c_{i+n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so können wir unter Verwendung der geometrischen Reihe x auch in endlicher 2-adischer Darstellung schreiben. Sonst kommen in der Periode der c_i's sowohl 0 als auch 1 vor. Aus obiger Umformung ist klar, dass dann auch die Folge der d_i's periodisch ist und die Periode sowohl 1 als auch -1 enthält. Es folgt $x \in \mathscr{M}$.

Ist andererseits $x \in \mathscr{M}$, so erhalten wir durch analoge Umformung eine endliche oder periodische 2-adische Darstellung. Es folgt $x \in \mathbb{Q}$.

Damit ist $\mathbb{Q} = \mathscr{M}$, womit Frage 16 aus [7] beantwortet ist, da durch $\mathscr{M}$ eine Darstellung der rationalen Zahlen als Zeichenfolge gegeben ist.

7. Ordinalzahlen in No

Nachdem wir in Kapitel 6 bereits gezeigt haben, dass die surrealen Zahlen den Körper $\mathbb{R}$ enthalten, ist es das Ziel dieses Kapitels, zu zeigen, dass die Ordinalzahlen **On** eine Teilklasse von **No** bilden. Wir wissen bereits, dass wir eine natürliche Zahl n mit einer Folge von n-vielen $\oplus$ interpretieren können. Somit haben wir bereits eine Darstellung für endliche Ordinalzahlen gefunden. Es liegt nahe, dann auch eine beliebige Ordinalzahl α mit einer α-Folge von $\oplus$ zu identifizieren. Dies führt zu nachfolgender Definition.

Definition 7.1. Sei α eine beliebige Ordinalzahl. Dann bezeichnen wir die surreale Zahl $a_\alpha : \alpha \to \{\oplus, \ominus\}, \alpha_\alpha(\beta) = \oplus$ für alle $\beta < \alpha$, als die zu α gehörige **ordinal-surreale Zahl**, d.h. es ist $\ell(a_\alpha) = \alpha$ und a_α besteht genau aus α-vielen $\oplus$.

Proposition 7.2. *Seien α, β beliebige Ordinalzahlen. Es gelten:*

(i) $\alpha < \beta \Leftrightarrow a_\alpha <_{\text{lex}} a_\beta$.

(ii) Die kanonische Darstellung von a_α ist $a_\alpha = \{a_\beta : \beta < \alpha \mid \emptyset\}$.

(iii) Ist H eine Menge von Ordinalzahlen, $a_H := \{a_\alpha : \alpha \in H\}$, so gilt $\{a_H \mid \emptyset\} = a_\alpha$, wobei α die kleinste Ordinalzahl ist mit $\alpha > H$. Hat H ein Maximum β, so ist $\alpha = \beta + 1$. Wenn nicht, so ist α die kleinste obere Schranke von H.

Beweis. (i) folgt direkt aus der lexikographischen Ordnung. (ii) erhalten wir aus der Definition der kanonischen Darstellung, da jedes Anfangsstück von a_α kleiner a_α ist. (iii) folgt aus (i) und der Definition von Schnitten von Mengen surrealer Zahlen. □

Definition 7.3. In der Situation von Proposition 7.2(iii) bezeichnen wir a_α auch als **Nachfolger** von H und schreiben $a_\alpha = \mathrm{seq}(H)$ (engl. „sequent").

Die Abbildung $\mathbf{On} \to \mathbf{No}, \alpha \mapsto a_\alpha$ stellt somit einen Ordnungsisomorphismus dar. Unter diesem bleiben nach Proposition 7.2(ii) auch die jeweiligen kanonischen Darstellungen erhalten. Somit können wir eine Ordinalzahl α auch mit ihrer entsprechenden ordinal-surrealen Zahl a_α identifizieren. Wir schreiben daher auch $\alpha \equiv a_\alpha$. Es bleibt noch zu untersuchen, welche Rolle die surreale Addition und Multiplikation der ordinal-surrealen Zahlen auf den Ordinalzahlen einnimmt.

Wir führen noch eine vereinfachende Notation ein.

Definition 7.4. Seien $A, A' \subset \mathbf{On}$ Mengen von Ordinalzahlen. Dann heißt A' **kofinal** in A, falls gilt:

$$\forall a \in A \exists a' \in A'(a' \geq a).$$

Auch in diesem Fall lässt sich ein Kofinalitäts-Theorem formulieren.

Theorem 7.5 (Ordinales Kofinalitäts-Theorem). *Sei α eine Ordinalzahl mit $\alpha = \{A \mid \emptyset\}$ und A' eine Menge von Ordinalzahlen mit $A' < \alpha$. Ist A' kofinal in A, so gilt $x = \{A' \mid \emptyset\}$.*

Beweis. Dies folgt aus dem Kofinalitäts-Theorem 1 für surreale Zahlen. □

Nun wenden wir uns der Aritmetik zu.

Satz 7.6. *Für beliebige Ordinalzahlen α, β gilt $\alpha + \beta = \alpha \oplus_{\mathrm{nat}} \beta$, d.h. die surreale Summe von α und β ist gleich ihrer natürlichen Summe.*

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $\alpha + \beta$. Sei $H := \{\delta + \beta : \delta < \alpha\} \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$. Dann gilt nach Proposition 7.2(iii) und der Definition der surrealen Addition $\alpha + \beta = \mathrm{seq}(H) = \{H \mid \emptyset\}$. Nach Induktionshypothese gilt $H = \{\delta \oplus_{\mathrm{nat}} \beta : \delta < \alpha\} \cup \{\alpha \oplus_{\mathrm{nat}} \gamma : \gamma < \beta\}$.

Sei nun $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} n_i$ mit Ordinalzahlen $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k$ und $n_i \in \mathbb{N}_{>0}$ die Cantor-Normalform von α. Definiere $\lambda := \alpha_k, \alpha' := \sum_{i=0}^{k-1} \omega^{\alpha_i} n_i + \omega^{\alpha_k}(n_k - 1)$. Sei weiter $\beta = \sum_{i=1}^{l} \omega^{\beta_i} n_i$ die Cantor-Normalform von β. Setze $\mu := \beta_l$ sowie $\beta' = \sum_{i=0}^{l-1} \omega^{\beta_i} n_i + \omega^{\beta_l}(n_l - 1)$.

Dann ist die Menge $\{(\alpha' + \delta) \oplus_{\mathrm{nat}} \beta : \delta < \omega^\lambda\}$ kofinal in $\{\delta \oplus_{\mathrm{nat}} \beta : \delta < \alpha\}$. Betrachte hierzu ein Element $\delta_0 \oplus_{\mathrm{nat}} \beta$ mit $\delta_0 < \alpha$. Dann lässt sich δ_0 abschätzen durch:

$$\delta_0 \leq_{\mathrm{lex}} \sum_{i=1}^{k'-1} \omega^{\alpha_i} n_i + \omega^{\alpha_{k'}}(n_{k'} - 1) + \delta' \text{ für ein } k' \in \{1, \ldots, k\} \text{ und } \delta' < \omega^{\alpha_{k'}}.$$

Für $k' = k$ erhalten wir $\delta_0 \leq_{\mathrm{lex}} \alpha' + \delta'$ und damit $\delta_0 \oplus_{\mathrm{nat}} \beta \leq_{\mathrm{lex}} (\alpha' + \delta') \oplus_{\mathrm{nat}} \beta \in \{(\alpha' + \delta) \oplus_{\mathrm{nat}} \beta : \delta < \omega^\lambda\}$. Für $k' < k$ ist $\delta_0 <_{\mathrm{lex}} \alpha'$ und damit $\delta_0 \oplus_{\mathrm{nat}} \beta < (\alpha' + 0) \oplus_{\mathrm{nat}} \beta \in \{(\alpha' + \delta) \oplus_{\mathrm{nat}} \beta : \delta < \omega^\lambda\}$.

Analog erhalten wir, dass $\{\alpha \oplus_{\text{nat}} (\beta' + \gamma) : \gamma < \omega^\mu\}$ kofinal in $\{\alpha \oplus_{\text{nat}} \gamma : \gamma < \beta\}$ ist. Damit gilt nach dem ordinalen Kofinalitäts-Theorem:

$$\alpha + \beta = \{H \mid \emptyset\} = \{(\alpha' + \delta) \oplus_{\text{nat}} \beta, \alpha \oplus_{\text{nat}} (\beta' + \gamma) : \delta < \omega^\lambda, \gamma < \omega^\mu \mid \emptyset\}.$$

Ohne Einschränkung gelte nun $\lambda \geq \mu$. Dann erhalten wir erneut aus dem ordinalen Kofinalitäts-Theorem:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta = \{H \mid \emptyset\} &= \{\alpha \oplus_{\text{nat}} (\beta' + \gamma) : \gamma < \omega^\mu \mid \emptyset\} \\ &= \operatorname{seq}(\{\alpha \oplus_{\text{nat}} (\beta' + \gamma) : \gamma < \omega^\mu\}) = \alpha \oplus_{\text{nat}} \beta,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Nun kommen wir zur Multiplikation.

Satz 7.7. *Seien α, β beliebige Ordinalzahlen. Dann gilt $\alpha \cdot \beta = \alpha \odot_{\text{nat}} \beta$, d.h. das surreale Produkt von α und β ist gleich ihrem natürlichen Produkt.*

Beweis. Wir führen eine Induktion $\alpha + \beta$. Wir wissen bereits: Mit Hilfe der Cantor-Normalform 2.19 kann jede Ordinalzahl als $\sum_{i=1}^k \omega^{\lambda_i} n_i$ mit Ordinalzahlen $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ und $n_i \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Indem wir alle Summanden mit $n_i > 1$ aufteilen, können wir dies auch als $\sum_{i=1}^l \omega^{\lambda_i}$ schreiben, wobei wir jetzt nur noch $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ fordern können. Dies ist eine natürliche Summe und damit nach Satz 7.6 auch eine surreale Summe.

Seien nun $\alpha = \sum_{i=1}^k \omega^{\lambda_i}, \beta = \sum_{j=1}^l \omega^{\mu_j}$ die entsprechenden Normalformen. Da **No** ein Körper ist, gilt mit der Distributivität:

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i,j} \omega^{\lambda_i} \cdot \omega^{\mu_j}.$$

Beachte hierbei, dass wir auf beiden Seiten surreale Multiplikation haben. Ist α oder β keine Potenz von ω, so können wir auf die einzelnen Summanden die Induktionshypothese anwenden. Mit der Distributivität der natürlichen Addition und Multiplikation folgt dann:

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i,j} \omega^{\lambda_i} \odot_{\text{nat}} \omega^{\mu_j} = \alpha \odot_{\text{nat}} \beta.$$

Seien nun α, β Potenzen von ω, etwa $\alpha = \omega^\lambda, \beta = \omega^\mu$. Nach Proposition 7.2(ii) und der Definition des (surrealen) Produkts ist

$$\alpha \cdot \beta = \{\alpha_L \omega^\mu + \omega^\lambda \beta_L - \alpha_L \beta_L \mid \emptyset\} \text{ mit } \alpha_L < \omega^\lambda, \beta_L < \omega^\mu.$$

Da die rechte Seite leer ist, besteht das Produkt $\alpha \cdot \beta$ nach Lemma 4.1 nur aus $\oplus$ und ist damit eine Ordinalzahl.

Betrachte nun ein beliebiges Element $\alpha_L \omega^\mu + \omega^\lambda \beta_L - \alpha_L \beta_L \in (\alpha\beta)_L$ mit $\alpha_L < \omega^\lambda, \beta_L < \omega^\mu$. Sicherlich ist $\alpha_L \omega^\mu + \omega^\lambda \beta_L - \alpha_L \beta_L \leq_{\text{lex}} \alpha_L \omega^\mu + \omega^\lambda \beta_L$. Auf der rechten Seite dieser Ungleichung können wir die Induktionshypothese anwenden und erhalten

$$\alpha_L \omega^\mu + \omega^\lambda \beta_L - \alpha_L \beta_L \leq_{\text{lex}} \alpha_L \odot_{\text{nat}} \omega^\mu + \omega^\lambda \odot_{\text{nat}} \beta_L <_{\text{lex}} \omega^{\lambda \oplus_{\text{nat}} \mu},$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 7.6 verwendet haben. Da wir ein beliebiges Element aus $(\alpha\beta)_L$ betrachtet haben, ist $\ell(\alpha\beta) \leq \omega^{\lambda \oplus_{\text{nat}} \mu}$. Da $\alpha\beta$ eine Ordinalzahl ist, gilt $\ell(\alpha\beta) = \alpha\beta$. Es folgt schließlich

$$\alpha\beta = \ell(\alpha\beta) \leq_{\text{lex}} \omega^{\lambda \oplus_{\text{nat}} \mu}.$$

Seien andererseits $\lambda' < \lambda$ und $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann ist

$$\alpha\beta >_{\text{lex}} (\omega^{\lambda'} n) \cdot \omega^{\mu} \overset{\text{IH}}{=} (\omega^{\lambda'} n) \odot_{\text{nat}} \omega^{\mu} = \omega^{\lambda' \oplus_{\text{nat}} \mu} n.$$

Analog gilt für $\mu' < \mu, n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $\alpha\beta >_{\text{lex}} \omega^{\lambda \oplus_{\text{nat}} \mu'} n$. Damit ist

$$\alpha\beta \geq_{\text{lex}} \operatorname{seq}\left(\left\{\omega^{\lambda' \oplus_{\text{nat}} \mu} n\right\} \cup \left\{\omega^{\lambda \oplus_{\text{nat}} \mu'} n\right\}\right) = \omega^{\operatorname{seq}(\{\lambda' \oplus_{\text{nat}} \mu, \lambda \oplus_{\text{nat}} \mu'\})} = \omega^{\lambda \oplus_{\text{nat}} \mu}$$

mit $\lambda' < \lambda, \mu' < \mu, n \in \mathbb{N}_0$, wobei wir die letzte Gleichung bereits im Beweis von Satz 7.6 gezeigt haben. Insgesamt folgt die gewünschte Gleichheit $\alpha\beta = \omega^{k \oplus_{\text{nat}} l} = \alpha \odot_{\text{nat}} \beta$. □

Bemerkung 7.8. Aus den Sätzen 7.6 und 7.7 wissen wir nun, dass wir nicht mehr zwischen den Zeichen $+$ und $\cdot$ für surreale Addition und Multiplikation bzw. $\oplus_{\text{nat}}$ und $\odot_{\text{nat}}$ für die entsprechenden natürlichen Operatoren unterscheiden müssen.

Wir haben also bewiesen, dass die surrealen Zahlen einen Körper bilden, welcher nicht nur die reellen- sondern auch die Ordinalzahlen enthält. Dadurch sind beispielsweise $x \cdot \omega$ oder $x + \omega$ mit $x \in \mathbb{R}$ wohldefinierte Operationen auf **No**. Wir erhalten in **No** also unter Anderem Elemente wie $\frac{1}{2}\omega$ oder $\omega - 1$. Im Folgenden werden wir uns mit der Darstellung solcher Elemente beschäftigen.

Beispiele 7.9. (a) Als erstes betrachten wir die Zahl $\omega - 1 = \omega + (-1)$. Wir wissen: $\omega = \{\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \mid \emptyset\}, -1 = \{\emptyset \mid 0\}$. Nach Definition der Summe ist dann

$$\omega - 1 = \omega + (-1) = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq -1} \mid \omega\} = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \omega\} = \underbrace{\oplus \oplus \cdots}_{\omega\text{-viele}} \ominus,$$

d.h. $\omega - 1$ ist eine Folge der Länge $\omega + 1$, welche aus ω-vielen $\oplus$, gefolgt von einem $\ominus$ besteht. Leicht sieht man, dass dann $(\omega - 1) + 1 = \omega$ gilt, wie es auch die Körpereigenschaften verlangen. Wir bemerken außerdem, dass $\{\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \mid \omega\}$ bereits die kanonische Darstellung von $\omega - 1$ ist.

(b) Wir zeigen nun induktiv: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\omega - m = \underbrace{\oplus \oplus \cdots}_{\omega\text{-viele}} \underbrace{\ominus \ominus \cdots}_{m\text{-viele}}$.

Den Fall $m = 1$ haben wir bereits in (a) behandelt. Sei nun $m > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega - m = \omega + (-m) &= \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \emptyset\} + \{\emptyset \mid -n : 0 \leq n < m\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_{\geq -m} \mid \omega - n : 0 \leq n < m\} \end{aligned}$$

Mit dem Kofinalitäts-Theorem 1 erhalten wir

$$\omega - m = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \omega - (m-1)\} \overset{\text{IH}}{=} \underbrace{\oplus \oplus \cdots}_{\omega\text{-viele}} \underbrace{\ominus \ominus \cdots}_{m\text{-viele}},$$

wie behauptet. Auch bei den weiteren Beispielen werden wir sehr häufig das Kofinalitäts-Theorem 1 verwenden.

(c) Allgemeiner gilt für eine beliebige Limeszahl λ: Für alle $m \in \mathbb{N}$ entspricht $\lambda - m$ der Folge von λ-vielen $\oplus$ mit m-vielen $\ominus$ am Ende.

Achtung: Für Nachfolgerzahlen gilt dies offensichtlich nicht. So ist beispielsweise $(\omega + 1) - 1 = \omega$ die Folge von ω-vielen $\oplus$ und nicht die Folge von$(\omega + 1)$-vielen $\oplus$ gefolgt von einem $\ominus$.

(d) Als nächstes kann man sich fragen, wie die Zahl $\underbrace{\oplus\oplus\cdots}_{\omega\text{-viele}}\underbrace{\ominus\ominus\cdots}_{\omega\text{-viele}}$ zu interpretieren ist. Offensichtlich kann sie nicht $\omega - \omega$ sein. Man erkennt, dass sie sowohl größer als jede natürliche Zahl n, als auch kleiner als alle $\omega - m, m \in \mathbb{N}$ ist. Ähnlich, wie wir zu Beginn von Kapitel 6 $\{\bigcirc \mid \oplus\} = \frac{1}{2}$ angenommen haben, können wir vermuten, dass die gesuchte Zahl $\frac{1}{2}\omega$ ist. Es gilt nämlich $\omega >_{\text{lex}} 2n$ und $\omega + (\omega - 2m) >_{\text{lex}} \omega$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Durch Umstellen und Zusammenfassen erhalten wir $\frac{1}{2}\omega >_{\text{lex}} n$ und $\omega - m >_{\text{lex}} \frac{1}{2}\omega$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Diese Hypothese wollen wir nun überprüfen. Wir wissen: $\frac{1}{2} = \oplus\ominus = \{\bigcirc \mid \oplus\}$. Nach Definition des Produktes ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\omega &= \left\{\frac{1}{2}n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \middle| \omega + \frac{1}{2}n - n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{2}n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \middle| \omega - \frac{1}{2}n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\} \\
&\overset{4.7}{=} \{n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,|\omega - n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\
&= \underbrace{\oplus\oplus\cdots}_{\omega\text{-viele}}\underbrace{\ominus\ominus\cdots}_{\omega\text{-viele}},
\end{aligned}$$

wie gewünscht.

(e) Wir bestimmen nun $\omega + \frac{1}{2}$. Mit Hilfe der kanonischen Darstellungen der beiden Summanden gilt:

$$\begin{aligned}
\omega + \frac{1}{2} &= \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \emptyset\} + \{0 \mid 1\} \\
&= \left\{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \omega \,|\omega + 1\right\} \\
&\overset{4.7}{=} \{\omega \mid \omega + 1\} = \underbrace{\oplus\oplus\cdots}_{\omega\text{-viele}}\oplus\ominus\,.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass dies vergleichbar zu Teil (b) der Aneinanderreihung der jeweiligen Folgen von ω und $\frac{1}{2}$ entspricht. Dies lässt sich auf $\omega + r$ für $r \in \mathbb{R}$ beliebig übertragen. Noch allgemeiner gilt dies wie in (c) für alle $\lambda + r$ mit λ einer Limeszahl und $r \in \mathbb{R}$ beliebig.

(f) Da **No** ein Körper ist, hat jede Ordinalzahl ungleich Null auch ein multiplikatives Inverses. Es muss also auch ein Element $\frac{1}{\omega}$ existieren. Wir wollen uns intuitiv überlegen, welche Folge ein geeigneter Kandidat für $\frac{1}{\omega}$ sein könnte. Die Zahl $\frac{1}{\omega}$ sollte infinitesimal und positiv sein, d.h. sie sollte größer Null, aber kleiner als jede beliebige, positive, reelle Zahl sein. Da ω die am einfachsten konstruierte unendlich große Zahl ist, liegt es außerdem nahe, dass auch $\frac{1}{\omega}$ möglichst einfach konstruiert ist. Ein geeigneter Kandidat für $\frac{1}{\omega}$ ist damit $\varepsilon := \oplus\underbrace{\ominus\ominus\cdots}_{\omega\text{-viele}}$. Nach unseren Überlegungen muss nämlich $\frac{1}{\omega}$ an der ersten Stelle ein $\oplus$ haben, damit die Zahl größer als Null ist, und sie soll infinitesimal sein. Wir wollen nun überprüfen, ob wir mit unserer Vermutung richtig liegen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\varepsilon \cdot \omega &= \left\{ 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \cdot \{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \emptyset \} \\
&\overset{4.7}{=} \left\{ 0 \,\middle|\, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\} \cdot \{ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \emptyset \} \\
&= \left\{ 0\omega + \varepsilon m - 0m : m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \frac{1}{n}\omega + \varepsilon m - \frac{1}{n} m : n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \neq 0 \right\} \\
&= \left\{ \varepsilon m : m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \frac{1}{n}\omega + \varepsilon m - \frac{1}{n} m : n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \neq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Leicht sieht man, dass 1 zwischen $(\varepsilon\omega)_L$ und $(\varepsilon\omega)_R$ liegt, denn die linke Menge enthält nur infinitesimale und die rechte Menge nur unendlich große Zahlen. Da $0 = \bigcirc$ offensichtlich nicht zwischen den beiden Mengen liegt, gibt es auch keine simplere Zahl als 1, welche diese Eigenschaft erfüllt. Mithin gilt $\varepsilon\omega = 1$.

(g) Als nächstes untersuchen wir $r + \varepsilon$ für beliebiges $r \in \mathbb{R}$. Sei zunächst r dyadisch. Wir erinnern uns daran, dass wir für $x = \{X_L \mid X_R\}$ mit endlichen Mengen X_L, X_R statt X_L auch das maximale Element von X_L und statt X_R das minimale Element von X_R betrachten können. Das heißt wir können $r = \{s \mid t\}$ mit s, t ebenfalls dyadisch schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned}
r + \varepsilon &= \{s \mid t\} + \left\{ 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \\
&= \left\{ s + \varepsilon, r + 0 \,\middle|\, t + \varepsilon, r + \left(\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \\
&= \left\{ r \,\middle|\, r + \left(\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} = \{ r \mid B \},
\end{aligned}$$

wobei B die Menge aller dyadischen Brüche größer r sei. Somit ist $r + \varepsilon$ die Aneinanderreihung von r und ε. Bemerke, dass r eine endliche Länge und ε Länge ω hat. Das heißt, die Aneinanderreihung ist ebenfalls von Länge ω. An dieser Stelle erinnern wir nochmals an Definition 6.8 der reell-surrealen Zahlen. Dies waren die dyadischen Brüche sowie die Zahlen von Länge ω, welche nicht konstant werden. Nun können wir auch eine Aussage über beliebige Zahlen der Länge ω treffen. Mit dem eben Gezeigten und der Definition additiver Inverser sind solche Folgen entweder eine reelle Zahl r, $\pm\omega$ oder $\pm(d + \varepsilon)$ für ein dyadisches d.

8. Conway-Normalform

In Kapitel 7 haben wir gesehen, dass **No** die echte Klasse der Ordinalzahlen enthält. Ziel dieses Kapitels ist es, die Cantor-Normalform von Ordinalzahlen aus Satz 2.19 auf surreale Zahlen auszuweiten. Wir werden zeigen, dass sich jede surreale Zahl als Potenzreihe in ω darstellen lässt. Dazu müssen wir aber zunächst den Ausdruck ω^x für surreale Zahlen $x \in$ **No** definieren.

8.i. **ω-Exponentiation.** Als erstes definieren wir eine Äquivalenzrelation auf den positiven surrealen Zahlen.

Definition 8.1. Seien $x, y >_{\text{lex}} 0$ positive, surreale Zahlen. Dann definieren wir

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(nx \geq_{\text{lex}} y \wedge ny \geq_{\text{lex}} x).$$

In diesem Fall sagen wir, dass x und y **dieselbe Größenordnung** haben.

Lemma 8.2. *Die Relation $\sim$ aus Definition 8.1 definiert eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen als **Größenordnungen**.*

Beweis. Reflexivität: Wähle $n = 1$. Symmetrie ist klar. Transitivität: Seien $x, y, z >_{\text{lex}} 0$ positive, surreale Zahlen mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $nx \geq_{\text{lex}} y, ny \geq_{\text{lex}} x, my \geq_{\text{lex}} z, mz \geq_{\text{lex}} y$. Es gilt dann für $nm \in \mathbb{N}$:

$$(nm)x \geq_{\text{lex}} my \geq_{\text{lex}} z, \quad (nm)z \geq_{\text{lex}} ny \geq_{\text{lex}} x,$$

was zu zeigen war. □

Definition 8.3. Seien $x, y >_{\text{lex}} 0$ positive, surreale Zahlen. Dann setzen wir

$$x \gg y :\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}(ny \leq_{\text{lex}} x).$$

In diesem Fall sagen wir, dass x eine **höhere Größenordnung** als y hat. Es tritt außerdem genau einer der folgenden Fälle ein: $x \gg y, x \ll y, x \sim y$.

Beispiele 8.4. (a) Für beliebige reelle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $r \sim s$. In diesem Fall können wir $n = \left\lceil \max\left\{\frac{r}{s}, \frac{s}{r}\right\}\right\rceil \in \mathbb{N}$ wählen, denn dann gilt

$$n \cdot r \geq \frac{s}{r} r = s, \quad n \cdot s \geq \frac{r}{s} s = r.$$

(b) Für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gilt $r_1\omega + s_1 \sim r_2\omega + s_2$. Wähle hierzu $n = \left\lceil \max\left\{\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_1}\right\}\right\rceil + \left\lceil \max\left\{\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}\right\}\right\rceil \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} n \cdot (r_1\omega + s_1) &= (n \cdot r_1)\omega + ns_1 \geq_{\text{lex}} \left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) r_1\omega + ns_1 \\ &= r_2\omega + \underbrace{(\omega + ns_1)}_{>_{\text{lex}} s_2} \geq_{\text{lex}} r_2\omega + s_2. \end{aligned}$$

Analog lässt sich $n(r_2\omega + s_2) \geq_{\text{lex}} r_1\omega + s_1$ zeigen und wir erhalten insgesamt $r_1\omega + s_1 \sim r_2\omega + s_2$.

Proposition 8.5. *Seien $x, y, z >_{\text{lex}} 0$ positive surreale Zahlen. Dann gilt*

(i) $x \ll y \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}(nx \ll y)$.
(ii) $x \ll z$ *und* $y \ll z \Rightarrow x + y \ll z$.
(iii) $x \sim y$ *und* $x <_{\text{lex}} z <_{\text{lex}} y \Rightarrow x \sim z$, *d.h. die Äquivalenzklassen sind konvex.*

Beweis. (i) Angenommen, es gilt $x \ll y$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $m(nx) = (mn)x \leq_{\text{lex}} y$ und damit $nx \ll y$.
(ii) Angenommen, es gilt $x \ll z$ und $y \ll z$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $2n(x+y) = (2n)x+(2n)y \leq_{\text{lex}} z+z = 2z$ und damit auch $n(x+y) \leq_{\text{lex}} z$, was $x + y \ll z$ zeigt.

(iii) Angenommen, es gilt $x \sim y$ und $x <_{\text{lex}} z <_{\text{lex}} y$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx \geq_{\text{lex}} y$ und $ny \geq_{\text{lex}} x$. Somit ist auch $nx \geq_{\text{lex}} y \geq_{\text{lex}} z$, $nz \geq_{\text{lex}} ny \geq_{\text{lex}} x$. Es folgt $x \sim z$.

□

Wir können außerdem kanonische Vertreter der Äquivalenzklassen der Größenordnungen finden. Dazu hilft uns der nachfolgende Satz.

Satz 8.6. *Sei $a >_{\text{lex}} 0$ eine beliebige, positive surreale Zahl. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes x minimaler Länge mit $x \sim a$.*

Beweis. Sei X die Klasse aller x mit $x \sim a$. Wegen $a \in X$ ist offensichtlich $X \neq \emptyset$. Sei $L := \{\ell(x) : x \in X\}$ die Klasse der Längen der Elemente von X. Da die Ordinalzahlen wohlgeordnet sind, folgt bereits die Existenz eines x mit minimaler Länge und $x \sim a$. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen

Seien nun y ein weiteres Element minimaler Länge mit $y \sim a$ und d das gemeinsame Anfangsstück von x und y. Dann muss wegen der Transitivität von $\sim$ auch $x \sim y$ gelten. Außerdem ist $x \leq_{\text{lex}} d \leq_{\text{lex}} y$ oder $y \leq_{\text{lex}} d \leq_{\text{lex}} x$. Wegen der Konvexität der Äquivalenzklassen aus Proposition 8.5 folgt dann bereits $d \sim x$ und wegen der Transitivität schließlich $d \sim a$. Aufgrund der Minimalität von $\ell(x)$ und $\ell(y)$ ist $x = d = y$, was zu zeigen war. □

Nun können wir zur Definiton von Ausdrücken der Form ω^x übergehen. Wie auch im Falle der Addition und Multiplikation machen wir dies induktiv. Zunächst gehen wir über die kanonische Darstellung von x.

Definition 8.7. Sei x eine beliebige surreale Zahl mit kanonischer Darstellung $x = \{X_L \mid X_R\}$. Dann ist

$$\omega^x := \{0, r\omega^{x_L} : r \in \mathbb{R}_{>0}, x_L \in X_L \mid s\omega^{x_R} : s \in \mathbb{R}_{>0}, x_R \in X_R\}.$$

Satz 8.8. *Sei $x = \{X_L \mid X_R\}$ eine beliebige surreale Zahl. Dann ist ω^x stets wohldefiniert und größer Null. Außerdem gilt für alle y*

$$x <_{\text{lex}} y \Rightarrow \omega^x \ll \omega^y.$$

Beweis. Durch Induktion nach $\ell(x)$.

Seien $x_L \in X_L, x_R \in X_R$ beliebig. Nach Induktionshypothese gilt dann $\omega^{x_L} \ll \omega^{x_R}$ sowie $\omega^{x_L}, \omega^{x_R} >_{\text{lex}} 0$, d.h. für alle natürlichen Zahlen n ist $n\omega^{x_L} <_{\text{lex}} \omega^{x_R}$. Somit gilt auch für alle $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ die Ungleichung $r\omega^{x_L} <_{\text{lex}} s\omega^{x_R}$, was die Wohldefiniertheit von ω^x und $\omega^x >_{\text{lex}} 0$ zeigt.

Sei nun y eine weitere beliebige surreale Zahl, d das gemeinsame Anfangsstück von x, y und $x <_{\text{lex}} y$. Ist $x = d <_{\text{lex}} y$, so ist nach Konstruktion $(n\omega^d) \in (\omega^y)_L$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, d.h. $\omega^x = \omega^d \ll \omega^y$. Im Fall $d = y$ verfahren wir analog.

Ist $x <_{\text{lex}} d <_{\text{lex}} y$, so ist $d \in X_R, d \in Y_L$. Also gilt $\omega^x <_{\text{lex}} \frac{1}{n}\omega^d$ und $n\omega^d <_{\text{lex}} \omega^y$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Insbesondere ist $n^2\omega^x <_{\text{lex}} n\omega^d <_{\text{lex}} \omega^y$, was $\omega^x \ll \omega^y$ zeigt. Insgesamt erhalten wir die Behauptung □

Satz 8.9 (Allgemeingültigkeit der ω-Exponentiation)**.** *Sei $x = \{A \mid B\}$ eine surreale Zahl in beliebiger Darstellung. Dann gilt*

$$\omega^x = \{0, r\omega^a : r \in \mathbb{R}_{>0}, a \in A \mid s\omega^b : s \in \mathbb{R}_{>0}, b \in B\}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich zur Allgemeingültigkeit der Addition aus Satz 5.4. Nachzulesen in [8, S. 56]. □

Notation 8.10. Sei $z = \{A \mid B\} \in \mathbf{No}$ eine surreale Zahl mit beliebiger Darstellung. Ab jetzt schreiben wir auch $z = \{a \mid b\}$ $(a \in A, b \in B)$. Ist etwa $x = \{X_L \mid X_R\} \in \mathbf{No}$, so schreiben wir für ω^x wie in Definition 8.7 nun auch $\omega^x = \{0, r\omega^{x_L} \mid s\omega^{x_R}\}$ $(r, s \in \mathbb{R}_{>0}, x_L \in X_L, x_R \in X_R)$.

Satz 8.11. *Eine surreale Zahl hat genau dann die Form ω^x für ein $x \in \mathbf{No}$, wenn sie der nach Satz 8.6 existierende und eindeutig bestimmte Vertreter minimaler Länge einer Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ : Wir betrachten eine Zahl der Form ω^x mit $x \in \mathbf{No}$, sowie eine weitere Zahl a derselben Größenordnung, d.h. es gilt $a \sim \omega^x$. Wir wissen:

$$\omega^x = \{0, r\omega^{x_L} \mid s\omega^{x_R}\} \ (r, s \in \mathbb{R}_{>0}, x_L \in X_L, x_R \in X_R).$$

Außerdem existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na \geq_{\text{lex}} \omega^x$ und $n\omega^x \geq_{\text{lex}} a$. Dann gilt für a und für alle $r, s \in \mathbb{R}_{>0}, x_L \in X_L, x_R \in X_R$

$$(nr)\omega^{x_L} <_{\text{lex}} \omega^x \leq_{\text{lex}} na, \ a \leq_{\text{lex}} n\omega^x <_{\text{lex}} n \cdot \frac{s}{n} \cdot \omega^{x_R}.$$

Wir erhalten $\omega^{x_L} <_{\text{lex}} a <_{\text{lex}} s\omega^{x_R}$, was $(\omega^x)_L <_{\text{lex}} a <_{\text{lex}} (\omega^x)_R$ zeigt. Damit muss $\omega^x \leq_s a$ gelten. Insbesondere ist $\ell(\omega^x) \leq \ell(a)$, was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$“ : Wir zeigen: Jede positive surreaale Zahl a ist äquivalent zu einer Zahl der Form ω^b. Da wir aus Satz 8.8 bereits $b <_{\text{lex}} c \Rightarrow \omega^b \ll \omega^c$ wissen, ist insbesondere für alle $c \neq b$ auch $\omega^b \not\sim \omega^c$. Das heißt das Element ω^b ist eindeutig, falls es existiert.

Sei $a = \{A_L \mid A_R\}$ die kanonische Darstellung von a. Wir führen eine Induktion nach $\ell(a)$.

Nach Induktionshypothese ist jedes Element aus $(A_L \cup A_R) \setminus \{0\}$ äquivalent zu einem Element der Form ω^x. Beachte hierbei, dass alle Elemente aus $(A_L \cup A_R) \setminus \{0\}$ größer Null sind, da das erste Zeichen von a ein $\oplus$ sein muss. Setze

$$F := \{y \in \mathbf{No} : \exists a_L \in A_L(a_L \sim \omega^y)\}, G := \{y \in \mathbf{No} : \exists a_R \in A_R(a_R \sim \omega^y)\}.$$

Angenommen, es gilt $F \cap G \neq \emptyset, y \in F \cap G, a_L \in A_L, a_R \in A_R$ mit $a_L \sim \omega^y$ und $a_R \sim \omega^y$. Aufgrund der Eigenschaften der Äquvalenzrelation ist dann auch $a_L \sim a_R$. Wegen $a_L <_{\text{lex}} a <_{\text{lex}} a_R$ folgt aus der Konvexität der Äquivalenzklassen aus Proposition 8.5 bereits $a \sim a_L \sim \omega^y$, wie gewünscht.

Sei also nun $F \cap G = \emptyset$. Wir zeigen zunächst $F <_{\text{lex}} G$. Seien dazu $y \in F, z \in G$ beliebig sowie $a_L \in A_L, a_R \in A_R$ mit $a_L \sim \omega^y, a_R \sim \omega^z$. Angenommen, es gilt $y \geq_{\text{lex}} z$. Da wir $F \cap G = \emptyset$ vorausgesetzt haben, kann auch keine Gleichheit gelten, d.h. es ist $y >_{\text{lex}} z$ und nach Proposition 8.5 gilt $\omega^z \ll \omega^y$.

Wegen $a_R \sim \omega^z, a_L \sim \omega^y$ existieren $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$na_R \geq_{\text{lex}} \omega^z, n\omega^z \geq_{\text{lex}} a_R, ma_L \geq_{\text{lex}} \omega^y, m\omega^y \geq_{\text{lex}} a_L.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $\omega^z \ll \omega^y$ gilt:

$$kma_R \leq_{\text{lex}} kmn\omega^z \leq_{\text{lex}} \omega^y \leq_{\text{lex}} ma_L$$

Wir erhalten $ka_R \leq_{\text{lex}} a_L$. Für $k = 1$ ist insbesondere $a_R \leq_{\text{lex}} a_L$ im Widerspruch zur Wohldefiniertheit von a. Somit muss $y <_{\text{lex}} z$ gelten und damit ist $F <_{\text{lex}} G$. Schließlich ist $x := \{F \mid G\}$ wohldefiniert.

Wir betrachten im Folgenden drei Fälle.

<u>Fall 1:</u> Angenommen, es existieren $r \in \mathbb{R}_{>0}, y \in F$ mit $r\omega^y \geq_{\text{lex}} a$. Sei $a_L \in A_L$ mit $a_L \sim \omega^y$. Dann ist $a_L <_{\text{lex}} a \leq_{\text{lex}} r\omega^y$. Aus Proposition 8.5 folgt aus $\omega^y \sim r\omega^y$ mit der Konvexität der Äquivalenzklassen schließlich $a \sim \omega^y$.

<u>Fall 2:</u> Angenommen, es existieren $s \in \mathbb{R}_{>0}, z \in G$ mit $s\omega^z \leq_{\text{lex}} a$. Sei $a_R \in A_R$ mit $a_R \sim \omega^z$. Dann ist $s\omega^z \leq_{\text{lex}} a <_{\text{lex}} a_R$. Analog zu Fall 1 folgt $a \sim \omega^z$.

<u>Fall 3:</u> Angenommen, weder Fall 1, noch Fall 2 treten ein. Dann ist für alle $s, r \in \mathbb{R}_{>0}, y \in F, z \in G$

$$r\omega^y <_{\text{lex}} a <_{\text{lex}} s\omega^z.$$

Nach dem Satz über die Allgemeingültigkeit der Exponentiation 8.9 gilt $\omega^x = \{r\omega^F \mid s\omega^G\}$ $(r, s \in \mathbb{R}_{>0})$. Wir zeigen mittels Kofinalitäts-Theorem 1, dass $\{r\omega^F \mid s\omega^G\} = \{A_L \mid A_R\} = a$ gilt. Zu zeigen ist

$$\forall a_L \in A_L \exists r\omega^y (r\omega^y \geq_{\text{lex}} a_L) \text{ und } \forall a_R \in A_R \exists s\omega^z (s\omega^z \leq_{\text{lex}} a_R)$$

mit Elementen $r, s \in \mathbb{R}_{>0}, y \in F, z \in G$.

Sei $a_L \in A_L$ beliebig, ohne Einschränkung gelte $a_L \neq 0$, denn sonst ist die Aussage klar. Dann existiert nach Induktionshypothese ein $y \in F$ mit $a_L \sim \omega^y$, d.h. es existiert insbesondere $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $n\omega^y \geq_{\text{lex}} a$, was zu zeigen war. Analog existiert für $a_R \in A_R$ ein $z \in G, m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\omega^z \leq_{\text{lex}} ma_R$. Durch Umstellen erhalten wir $\frac{1}{m}\omega^z \leq_{\text{lex}} a_R$.

Mit Kofinalitäts-Theorem 1 folgt schließlich $\omega^x = a$.

In jedem Fall gilt $a \sim \omega^x$ für ein x. Aus der Implikation „ $\Rightarrow$ “ wissen wir bereits, dass ein Element der Form ω^x Vertreter minimaler Länge einer Größenordnung ist. Ist also a ein beliebiger Vertreter minimaler Länge, so folgt aus $a \sim \omega^x$ bereits $\ell(a) = \ell(\omega^x)$. Aus der Eindeutigkeit dieses Vertreters aus Satz 8.6 erhalten wir schließlich $a = \omega^x$, was zu zeigen war. □

Die folgende Proposition liefert einige Eigenschaften der Exponentiation.

Proposition 8.12. *Für die Abbildung* $\mathbf{No} \to \mathbf{No}, x \mapsto \omega^x$ *gilt:*

(i) $\omega^0 = 1$
(ii) Für alle surreale Zahlen $x, y \in \mathbf{No}$ *ist* $\omega^x \cdot \omega^y = \omega^{x+y}$.
(iii) Für alle surrealen Zahlen $x \in \mathbf{No}$ *ist* $\omega^x \cdot \omega^{-x} = 1$.

Beweis. (i) Nach Definition 8.7 gilt $\omega^0 = \{0 \mid \emptyset\} = 1$.
(ii) Die Identität lässt sich leicht induktiv nachrechnen. Nachzulesen in [8, Theorem 5.4].
(iii) Dies ist eine direkte Folgerung aus (i) und (ii).

□

8.ii. **Normalform.** Bevor wir zeigen, dass sich jede surreale Zahl als Potenzreihe in ω schreiben lässt, müssen wir zunächst Ausdrücke der Form $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ definieren. Falls α eine natürliche Zahl ist, so ist mit Definition

8.7 von ω^x induktiv klar, wie die Potenzreihe zu verstehen ist. Dies legt nahe, auch für beliebige Ordinalzahlen den Ausdruck induktiv zu definieren, wobei Limeszahlen separat betrachtet werden müssen.

Definition 8.13. Sei $(x_i)_{i<\alpha}, \alpha \in \mathbf{On}$ eine streng monoton fallende Folge surrealer Zahlen, d.h. es gilt $\beta_1 < \beta_2 < \alpha \Rightarrow x_{\beta_1} >_{\text{lex}} x_{\beta_2}$. Sei außerdem $(r_i)_{i<\alpha} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine Folge reeller Zahlen ungleich Null. Dann definieren wir den Ausdruck $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ induktiv nach α wir folgt:

(1) Ist $\alpha = \beta + 1$ eine Nachfolgerzahl, so ist

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i := \left(\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i \right) + \omega^{x_\alpha} r_\alpha.$$

(2) Sei α eine Limeszahl. Für $\alpha = 0$ erhalten wir eine leere Summe $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i := 0$. Für $\alpha \neq 0$ definieren wir

$$A = \left\{ \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} s_i : \beta < \alpha, s_i = r_i (i < \beta), s_\beta = r_\beta - \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \right\},$$

$$B = \left\{ \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} s_i : \beta < \alpha, s_i = r_i (i < \beta), s_\beta = r_\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \right\},$$

wobei jeweils $\beta < \alpha$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig sind. Wir setzen dann

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i := \{A \mid B\},$$

wobei wir in Satz 8.15 noch zeigen werden, dass $A <_{\text{lex}} B$ gilt, d.h. dass $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ tatsächlich wohldefiniert ist.

Definition 8.14. Wir definieren zudem eine **gradlexikographische Ordnung** auf den Potenzreihen aus Definition 8.13. Seien dazu $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$, $y = \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j$ Potenzreihen in ω wie in Definition 8.13. Sei γ die kleinste Ordinalzahl so, dass $(x_\gamma, r_\gamma) \neq (y_\gamma, s_\gamma)$ gilt. Dann definieren wir

$x >_{\text{deg}} y :\Leftrightarrow$ Es gilt eine der folgenden Bedingungen:

- $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$ und
  $((x_\gamma >_{\text{lex}} y_\gamma$ und $r_\gamma > 0)$ oder $(x_\gamma = y_\gamma$ und $r_\gamma > s_\gamma))$,
- $\gamma = \alpha$ und $s_\gamma < 0$,
- $\gamma = \beta$ und $r_\gamma > 0$.

Gilt $x >_{\text{deg}} y$, so sagen wir auch: x hat einen **höheren Grad** als y.

Satz 8.15. *Seien $(x_i)_{i<\alpha}$ eine streng monoton fallende, surreale Folge, α eine Ordinalzahl und $(r_i)_{i<\alpha} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist der Ausdruck $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ stets wohldefiniert. Die gradlexikographische Ordnung $>_{\text{deg}}$ aus Definition 8.14 ist äquivalent zu der uns bekannten Ordnung $>_{\text{lex}}$.*

Außerdem gilt für alle $\beta < \alpha$:

$$\left| \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i \right| \ll \omega^{x_\gamma} \quad (\gamma < \beta). \tag{24}$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach α. Dabei zeigen wir zunächst die Wohldefiniertheit und Eigenschaft (24).

Fall 1: Sei $\alpha = \beta + 1$ eine Nachfolgerzahl. Wegen $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\beta} r_\beta$ folgt in diesem Fall die Wohldefiniertheit direkt aus der Induktionshypothese.

Wir zeigen Eigenschaft (24). Seien dazu $\gamma < \alpha, \delta < \gamma$ beliebig. Es gilt

$$\left|\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i<\gamma} \omega^{x_i} r_i\right| = \left|\omega^{x_\beta} r_\beta + \left(\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i<\gamma} \omega^{x_i} r_i\right)\right|.$$

Ist $\gamma = \beta$ so erhalten wir lediglich den Ausdruck $|\omega^{x_\beta} r_\beta|$. Da die Folge $(x_i)_i$ absteigend ist, wissen wir dann aus Satz 8.8 schon, dass $\omega^{x_\beta} r_\beta \ll \omega^{x_\delta}$ gilt. Ist $\gamma \neq \beta$, so können wir die Dreiecksungleichung verwenden:

$$\left|\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i<\gamma} \omega^{x_i} r_i\right| \leq_{\text{lex}} \underbrace{|\omega^{x_\beta} r_\beta|}_{\ll \omega^{x_\delta}} + \underbrace{\left|\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i<\gamma} \omega^{x_i} r_i\right|}_{\ll \omega^{x_\delta} \text{ nach IH}} \ll \omega^{x_\delta},$$

wobei wir Proposition 8.5(ii) verwendet haben.

Fall 2: Sei α eine Limeszahl. Dann ist $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \{A \mid B\}$ mit Mengen $A, B \subset \mathbf{No}$ wie in Definition 8.13. Wir sehen direkt aus der Definition $A <_{\text{deg}} B$. Nach Induktionshypothese ist für alle Elemente in $A \cup B$ die Ordnung gegeben durch $>_{\text{lex}}$. Somit gilt $A <_{\text{lex}} B$ und es folgt die Wohldefiniertheit.

Wir prüfen nun Eigenschaft (24). Seien $\beta < \alpha$ und $\gamma < \beta$. Es ist $\sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\gamma}\varepsilon \in A, \sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\gamma}\varepsilon \in B$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, d.h. es gilt

$$\sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\gamma}\varepsilon <_{\text{lex}} \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i <_{\text{lex}} \sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\gamma}\varepsilon.$$

Da α eine Limeszahl ist, gilt $\beta + 1 < \alpha$. Aufgrund der gradlexikographischen Ordnung erhalten wir aus $\gamma < \beta < \alpha$ mit der Induktionshypothese auch

$$\sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\gamma}\varepsilon <_{\text{lex}} \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i <_{\text{lex}} \sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\gamma}\varepsilon.$$

Somit ist $\left|\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i\right| <_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma}(2\varepsilon)$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, gilt sicherlich $\left|\sum_{i\leq\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i\right| \ll \omega^{x_\gamma}$, was Eigenschaft (24) zeigt.

Wir kommen nun zur Äquivalenz der Ordnungen.

Fall 1: Dazu betrachten wir zunächst Potenzreihen gleicher Länge α, etwa $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i, y = \sum_{j<\alpha} \omega^{y_j} s_j$. Zu zeigen ist

$$x >_{\text{deg}} y \Leftrightarrow x >_{\text{lex}} y.$$

„$\Rightarrow$“ : Gelte $x >_{\text{deg}} y$ und sei γ die kleinste Ordinalzahl mit $(x_\gamma, r_\gamma) \neq (y_\gamma, s_\gamma)$. Dann gilt entweder $x_\gamma >_{\text{lex}} y_\gamma$ und $r_\gamma > 0$ oder $x_\gamma = y_\gamma$ und $r_\gamma > s_\gamma$.

Fall 1.1: Sei $\alpha = \beta + 1$ eine Nachfolgerzahl. Ist $\gamma = \beta$, so gilt mit Satz 8.8 die Ungleichung $\omega^{x_\beta} r_\beta >_{\text{lex}} \omega^{y_\beta} s_\beta$. Da Addition ordnungserhaltend ist, folgt $x >_{\text{lex}} y$.

Sei nun $\gamma < \beta$. Falls $x_\gamma = y_\gamma$, so folgt mit $r_\gamma > s_\gamma$ direkt

$$\omega^{x_\gamma} r_\gamma - \omega^{y_\gamma} s_\gamma = \omega^{x_\gamma} \underbrace{(r_\gamma - s_\gamma)}_{>0}.$$

Ist $x_\gamma >_{\text{lex}} y_\gamma$, so gilt mit $r_\gamma > 0$ nach Satz 8.8 die Ungleichung $\omega^{y_\gamma} \leq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} \frac{r_\gamma}{2|s_\gamma|}$ und damit

$$\omega^{x_\gamma} r_\gamma - \omega^{y_\gamma} s_\gamma \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} r_\gamma - \omega^{y_\gamma} |s_\gamma| \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} \underbrace{\left(r_\gamma - |s_\gamma| \frac{r_\gamma}{2\,|s_\gamma|} \right)}_{>0}.$$

In beiden Fällen ist also $\omega^{x_\gamma} r_\gamma - \omega^{y_\gamma} s_\gamma \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t$ für ein $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und damit

$$\sum_{i<\gamma+1} \omega^{x_i} r_i - \sum_{j<\gamma+1} \omega^{y_j} s_j = \omega^{x_\gamma} r_\gamma - \omega^{y_\gamma} s_\gamma \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t. \tag{25}$$

Nach Induktionshypothese gilt (24) für $\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i, \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j$. Insbesondere können wir schließen:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i<\gamma+1} \omega^{x_i} r_i \right| \ll \omega^{x_\gamma}, \quad & \left| \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j - \sum_{j<\gamma+1} \omega^{y_j} s_j \right| \ll \omega^{y_\gamma} \\ \Rightarrow & \left| \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j - \sum_{j<\gamma+1} \omega^{y_j} s_j \right| \ll \omega^{x_\gamma}, \end{aligned} \tag{26}$$

wobei wir $x_\gamma \geq_{\text{lex}} y_\gamma$ verwendet haben. Nach Definition von $\ll$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i - \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j &\overset{(25)}{\geq_{\text{lex}}} \omega^{x_\gamma} t + \left(\sum_{\gamma<i<\beta} \omega^{x_i} r_i - \sum_{\gamma<j<\beta} \omega^{y_j} s_j \right) \\ &\geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t + \left(- \left| \sum_{\gamma<i<\beta} \omega^{x_i} r_i \right| - \left| \sum_{\gamma<j<\beta} \omega^{y_j} s_j \right| \right) \\ &\overset{(26)}{\geq_{\text{lex}}} \omega^{x_\gamma} t + \left(-\omega^{x_\gamma} \frac{t}{3} - \omega^{x_\gamma} \frac{t}{3} \right) = \omega^{x_\gamma} \frac{t}{3}, \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i - \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t'$ für ein $t' \in \mathbb{R}_{>0}$. Erneut bekommen wir aus $y_\gamma >_{\text{lex}} y_\beta, x_\gamma >_{\text{lex}} x_\beta$ mit Satz 8.8 die Größenordnungen $\omega^{y_\beta} \ll \omega^{y_\gamma} \leq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma}, \omega^{x_\beta} \ll \omega^{x_\gamma}$ und damit

$$x - y = \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\beta} r_\beta - \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j - \omega^{y_\gamma} s_\gamma \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t'' >_{\text{lex}} 0$$

für ein $t'' \in \mathbb{R}_{>0}$. Umstellen liefert $x >_{\text{lex}} y$, was zu zeigen war.

Fall 1.2: Sei α eine Limeszahl. Wir können ähnlich wie in Fall 1.1 verfahren, wo α eine Nachfolgerzahl ist. Es ist ebenfalls $\sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i - \sum_{j\leq\gamma} \omega^{y_j} s_j$

$\geq_{\text{lex}} \omega^{x^\gamma} t$ für ein $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Da wir bereits Eigenschaft (24) gezeigt haben, wissen wir

$$\left|\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i\right| \ll \omega^{x_\gamma}, \quad \left|\sum_{j<\alpha} \omega^{y_j} s_j - \sum_{j\leq\gamma} \omega^{y_j} s_j\right| \ll \omega^{x_\gamma},$$

wobei wir bei der zweiten Relation erneut verwendet haben, dass $\omega^{y_\gamma} \leq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma}$ gilt. Wir erhalten $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{j<\alpha} \omega^{y_j} s_j \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t' >_{\text{lex}} 0$ für ein $t' \in \mathbb{R}_{>0}$. Durch Umstellen bekommen wir schließlich $x >_{\text{lex}} y$, wie gewünscht.

Die Richtung „ $\Leftarrow$ “ haben wir damit auch schon gezeigt. Gelte hierzu $x >_{\text{lex}} y$. Angenommen, es gilt $x \leq_{\text{deg}} y$. Dann folgt mit der Richtung „$\Rightarrow$“ aber $x \leq_{\text{lex}} y$ im Widerspruch zu $x >_{\text{lex}} y$. Somit muss schon $x >_{\text{deg}} y$ gelten. Beachte, dass wir hierbei die Totalität von $>_{\text{deg}}$ verwendet haben.

Fall 2: Nun betrachten wir den Fall, dass nur eine der beiden Potenzreihen Länge α hat, etwa $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i, y = \sum_{j<\alpha'} \omega^{y_j} s_j$. Wir stellen keine weiteren Anforderungen an α oder α', unterscheiden aber, ob α oder α' größer als die jeweils andere Ordinalzahl ist. Wir zeigen wieder $x >_{\text{deg}} y \Leftrightarrow x >_{\text{lex}} y$, wobei es auch hier reicht die Richtung „$\Rightarrow$“ zu zeigen.

Gelte also $x >_{\text{deg}} y$ und sei γ die kleinste Ordinalzahl mit $(x_\gamma, r_\gamma) \neq (y_\gamma, s_\gamma)$.

Fall 2.1: Gelte $\alpha < \alpha'$. Dann gilt entweder $\gamma < \alpha, x_\gamma >_{\text{lex}} y_\gamma, r_\gamma > 0$ oder $\gamma < \alpha, x_\gamma = y_\gamma, r_\gamma > s_\gamma$ oder $\gamma = \alpha, s_\gamma < 0$. Definiere für beliebiges $\beta < \alpha'$ den Ausdruck $y|_\beta := \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j$.

Falls $\gamma < \alpha$ gilt, so ist $x >_{\text{deg}} y|_\alpha$ und mit Fall 1 erhalten wir $x >_{\text{lex}} y|_\alpha$, sowie $x - y|_\alpha \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t$ für ein $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Des Weiteren gilt $|y - y|_\alpha| \overset{(24)}{\ll} \omega^{y_\gamma} \leq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma}$. Daraus erhalten wir

$$x - y = x - y|_\alpha + y|_\alpha - y \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} t - |y - y|_\alpha| \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} \left(t - \frac{t}{2}\right) >_{\text{lex}} 0.$$

Falls $\gamma = \alpha$ gilt, so ist $x = y|_\alpha$ und damit

$$\begin{aligned} x - y = y|_\alpha - y = \omega^{y_\alpha}(-s_\alpha) - (y - y|_{\alpha+1}) &\geq_{\text{lex}} \omega^{y_\alpha}(-s_\alpha) - |y - y|_{\alpha+1}| \\ &\overset{(24)}{\geq_{\text{lex}}} \omega^{y_\alpha}(-s_\alpha) - \omega^{y_\alpha}\left(-\frac{s_\alpha}{2}\right) >_{\text{lex}} 0. \end{aligned}$$

Beachte hierbei, dass $s_\gamma < 0$ gilt. In beiden Fällen ist$x >_{\text{lex}} y$.

Fall 2.2 Gelte nun $\alpha > \alpha'$. Dann gilt entweder $\gamma < \alpha', x_\gamma >_{\text{lex}} y_\gamma, r_\gamma > 0$ oder $\gamma < \alpha', x_\gamma = y_\gamma, r_\gamma > s_\gamma$ oder $\gamma = \alpha', r_\gamma > 0$.

Ist $\gamma < \alpha'$, so setze $x|_{\alpha'} := \sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i$. Mit Fall 1 erhalten wir aus $x|_{\alpha'} >_{\text{deg}} y$ die Ungleichung $x|_{\alpha'} >_{\text{lex}} y$ sowie ein $t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x|_{\alpha'} - y \geq \omega^{x_\gamma} t$. Außerdem erhalten wir erneut mit (24) $|x - x|_{\alpha'}| \ll \omega^{x_\gamma}$ und damit

$$x - y = x - x|_{\alpha'} + x|_{\alpha'} - y \geq_{\text{lex}} - |x - x|_{\alpha'}| + (x|_{\alpha'} - y) \geq_{\text{lex}} \omega^{x_\gamma} \left(-\frac{t}{2} + t\right) >_{\text{lex}} 0.$$

Ist $\gamma = \alpha'$, so ist $r_{\alpha'} > 0$ und damit

$$\begin{aligned} x = y + \sum_{\alpha' \leq i < \alpha} \omega^{x_i} r_i &\geq_{\text{lex}} y + \omega^{x_{\alpha'}} r_{\alpha'} - \left| x - \sum_{i < \alpha'+1} \omega^{x_i} r_i \right| \\ &\overset{(24)}{\geq_{\text{lex}}} y + \omega^{x_{\alpha'}} \underbrace{\left(r_{\alpha'} - \frac{r_{\alpha'}}{2} \right)}_{>_{\text{lex}} 0} >_{\text{lex}} y. \end{aligned}$$

Wir haben nun endgültig die Äquivalenz der Ordnungen und schließlich den Satz bewiesen. □

Mit Hilfe von Satz 8.15 können wir nun die Existenz und Eindeutigkeit der Conway-Normalform für surreale Zahlen ungleich Null beweisen.

Satz 8.16 (Conway-Normalform)**.** *Jede surreale Zahl $x \neq 0$ kann eindeutig geschrieben werden als $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ mit einer Ordinalzahl α, einer streng monoton fallenden Folge $(x_i)_{i<\alpha}$ surrealer Zahlen und einer reellen Folge $(r_i)_{i<\alpha} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$.*

Beweis. Wir müssen Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung zeigen.

Eindeutigkeit: Dies folgt direkt aus Satz 8.15. Angenommen, es existieren unterschiedliche Darstellungen $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i, x = \sum_{i<\alpha'} \omega^{y_i} s_i$ von x. Ohne Einschränkung können wir $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i <_{\text{deg}} \sum_{i<\alpha'} \omega^{y_i} s_i$ annehmen. Aus Satz 8.15 folgt dann aber $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i <_{\text{lex}} \sum_{i<\alpha'} \omega^{y_i} s_i = x$, was nicht möglich ist. Daraus folgt die Eindeutigkeit einer Darstellung, falls eine solche existiert.

Existenz: Sei $x \neq 0$ eine beliebige surreale Zahl ungleich Null. Nach den Sätzen 8.6 und 8.11 existiert eine Zahl y mit $|x| \sim \omega^y$. Sei nun $F := \{r \in \mathbb{R} : r\omega^y \leq_{\text{lex}} x\}$. Wegen $|x| \sim \omega^y$ finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\,|x| \geq_{\text{lex}} \omega^y, n\omega^y \geq_{\text{lex}} |x|$.

Falls $x >_{\text{lex}} 0$ gilt, so erhalten wir $\frac{1}{n}\omega^y \leq_{\text{lex}} x, n\omega^y \geq_{\text{lex}} x$, d.h. es gilt $\frac{1}{n} \in F$ und F ist durch n nach oben beschränkt.

Falls $x <_{\text{lex}} 0$ gilt, so erhalten wir $-\frac{1}{n}\omega^y \geq_{\text{lex}} x, -n\omega^y \leq_{\text{lex}} x$, d.h. es gilt $-n \in F$ und F ist durch $-\frac{1}{n}$ nach oben beschränkt.

In beiden Fällen erhalten wir, dass F nichtleer und nach oben beschränkt ist. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert schließlich eine kleinste obere Schranke $r_0 \in \mathbb{R}$ von F. Mithin gilt $(r_0 + \varepsilon)\omega^y >_{\text{lex}} x, (r_0 - \varepsilon)\omega^y <_{\text{lex}} x$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Umstellen liefert $x - r_0\omega^y <_{\text{lex}} \varepsilon\omega^y, r_0\omega^y - x <_{\text{lex}} \varepsilon\omega^y$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir

$$|x - r_0\omega^y| \ll \omega^y. \tag{27}$$

Mit $|x| \sim \omega^y$ folgt schließlich $r_0 \neq 0$. Zudem ist klar, dass r_0 eindeutig ist. Zur Abkürzung definieren wir $A(x) := \omega^y r_0$ $(x \neq 0)$.

Nun definieren wir induktiv eine Folge $(x_i, r_i)_i$ mit surrealen Zahlen x_i und $r_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: Sei α eine beliebige Ordinalzahl. Angenommen, (x_i, r_i) sei definiert für alle $i < \alpha$. Falls $x - \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i \neq 0$ gilt, definieren wir (x_α, r_α)

durch

$$A\left(x-\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right)=\omega^{x_\alpha}r_\alpha.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Elemente r_i in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ liegen. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass eine Ordinalzahl α existiert mit $r_\alpha = 0$. Wir müssen aber zunächst zeigen, dass die Folge $(x_i)_i$ streng monoton fallend ist, damit die Potenzreihe $\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i$ und dadurch auch der Ausdruck (x_α, r_α) überhaupt wohldefiniert sind. Sei dazu α eine beliebige Ordinalzahl, für welche gilt $x-\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\neq 0$.

Fall 1: Sei $\alpha=\beta+1$ eine Nachfolgerzahl. Dann ist $A\left(x-\sum_{i<\beta}\omega^{x_i}r_i\right)=\omega^{x_\beta}r_\beta$. Mit der induktiven Definition folgt

$$\omega^{x_\alpha}r_\alpha=A\left(\left(x-\sum_{i<\beta}\omega^{x_i}r_i\right)-\omega^{x_\beta}r_\beta\right)\overset{(27)}{\ll}\omega^{x_\beta}.$$

Damit gilt auch $\omega^{x_\alpha}\ll\omega^{x_\beta}$ und mit Satz 8.8 folgt $x_\alpha <_{\text{lex}} x_\beta$, wie gewünscht.

Fall 2: Sei nun α eine Limeszahl und $\beta<\alpha$ beliebig. Nach Definition von $A(\cdot)$ ist $A(z)\sim|z|$ für alle $z\neq 0$. Damit erhalten wir:

$$\left|x-\sum_{i<\beta+1}\omega^{x_i}r_i\right|\sim A\left(x-\sum_{i<\beta+1}\omega^{x_i}r_i\right)=\omega^{\beta+1}r_{\beta+1}\ll\omega^{x_\beta},$$

wobei wir im letzten Schritt die Induktionshypothese und Satz 8.8 verwendet haben. Mit Eigenschaft (24) aus Satz 8.15 gilt zudem

$$\left|\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i-\sum_{i<\beta+1}\omega^{x_i}r_i\right|\ll\omega^{x_\beta}.$$

Mit der Dreiecksungleichung und Proposition 8.5 erhalten wir

$$\left|x-\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right|\ll\omega^{x_\beta}.$$

Eingesetzt in die induktive Definition bekommen wir

$$\omega^{x_\alpha}r_\alpha=A\left(x-\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right)\sim\left|x-\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right|\ll\omega^{x_\beta}\Rightarrow\omega^{x_\alpha}\ll\omega^{x_\beta}.$$

Wie in Fall 1 folgt dann $x_\alpha <_{\text{lex}} x_\beta$. Da die Folge der x_i nun absteigend ist, ist der Ausdruck $\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i$ wohldefiniert.

Nun nehmen wir an, für alle Ordinalzahlen α gelte $x-\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\neq 0$, d.h. der Index der Folge (x_i, r_i) durchläuft alle Ordinalzahlen. Wir wollen einen Widerspruch herbeiführen. Zunächst zeigen wir, dass für alle α die Ungleichung

$$\ell\left(\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right)\geq\alpha \tag{28}$$

gilt. Wir betrachten die Funktion $f(\alpha) := \ell\left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right)$, welche nach unserer Annahme auf ganz **On** definiert ist und nach **On** abbildet.

Ist $\alpha < \beta, \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \{A \mid B\}, \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i = \{A' \mid B'\}$ wie in Definition 8.13, so gilt sicherlich $A \subset A', B \subset B'$. Somit ist $A <_{\text{lex}} \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i = \{A' \mid B'\} <_{\text{lex}} B$ und wir erhalten $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i \leq_s \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i$.

Aus der Eindeutigkeit folgt, dass die Summen verschieden sind und schließlich $\ell\left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right) < \ell\left(\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i\right)$. Wir wissen nun, dass f streng monoton wachsend ist. Daher gilt für alle Ordinalzahlen α die Ungleichung $f(\alpha) \geq \alpha$, was zu zeigen war.

Sei nun α eine beliebige Limeszahl und $\sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i \pm \varepsilon\omega^{x_\beta} \in A \cup B$ beliebig. Es ist

$$\left|\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \left(\sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i \pm \varepsilon\omega^{x_\beta}\right)\right| \leq \left|\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i\right| + |\varepsilon\omega^{x_\beta}| \overset{(24)}{\ll} \omega^{x_\gamma}$$

für ein $\gamma < \beta$, wobei wir im letzten Schritt Satz 8.8 und Proposition 8.5(ii) verwendet haben. Wir wissen aus Fall 2 außerdem, dass für alle $\beta < \alpha$ die Größenordnungen $\left|x - \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right| \ll \omega^{x_\beta} \overset{8.8}{\ll} \omega^{x_\gamma}$ gelten.

Somit erfüllt auch x die Ungleichungen $A <_{\text{lex}} x <_{\text{lex}} B$, weshalb $\ell(x) \geq \ell\left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right) \overset{(28)}{\geq} \alpha$ folgt. Dies ist ein Widerspruch, denn damit wäre $\ell(x)$ größer gleich jeder Limeszahl. Es existiert schließlich eine Ordinalzahl α mit $x - \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = 0$, woraus wir durch Umstellen die gewünschte Darstellung erhalten. $\square$

Definition 8.17. Sei x eine beliebige surreale Zahl. Für $x \neq 0$ ist die **Conway-Normalform** oder auch kurz **Normalform** von x die nach Satz 8.16 existierende und eindeutig bestimmte Potenzreihe mit $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$. Für $x = 0$ definieren wir die **Conway-Normalform** durch $x = \sum_{i<0} \omega^0 \cdot 1$.

Nun wollen wir zeigen, dass surreale Addition und Multiplikation mit den entsprechenden, gewöhnlichen Verknüpfungen auf Potenzreihen übereinstimmen. Wenn wir dies gezeigt haben, bekommen wir durch Operation auf den Normalformen eine sehr einfache Arithmetik auf **No**.

8.iii. **Arithmetik der Conway-Normalform.** Nachdem wir die Conway-Normalform eingeführt haben, wollen wir in diesem Abschnitt die surreale Addition und Multiplikation vereinfachen. Wir wollen etwa zeigen, dass wir die Summe zweier Zahlen bestimmen können, indem wir ihre Conway-Normalformen heranziehen und dann die Summe der Potenzreihen auf kanonische Weise bestimmen. Dazu brauchen wir noch etwas Vorbereitung.

Beachte, dass wir im Folgenden stets Notation 8.10 verwenden.

Lemma 8.18. *Es gilt für $x \in \mathbf{No}, r \in \mathbb{R}$ beliebig:*

$$\omega^x r = \{\omega^x(r - \varepsilon) \mid \omega^x(r + \varepsilon)\} \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Beweis. Sei $x = \{X_L \mid X_R\}$ die kanonische Darstellung von x. Wir wissen bereits:

$$\begin{aligned} r &= \{r - \varepsilon \mid r + \varepsilon\} \ (\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}), \\ \omega^x &= \{0, \omega^{x_L} s \mid \omega^{X_R} t\} \ (s, t \in \mathbb{R}_{>0}, x_L \in X_L, x_R \in X_R). \end{aligned}$$

Nach Definition der Multiplikation gilt dann

$$\begin{aligned} \omega^x \cdot r = \{&\omega^x(r-\varepsilon), \omega^{x_L} sr + \omega^x(r-\varepsilon) - \omega^{x_L} s(r-\varepsilon), \\ &\omega^{x_R} tr + \omega^x(r+\varepsilon) - \omega^{x_R} t(r+\varepsilon) \mid \ldots\} \\ &(\varepsilon, s, t \in \mathbb{R}_{>0}, x_L \in X_L, x_R \in X_R), \end{aligned}$$

wobei wir die rechte Menge nicht explizit ausschreiben, da deren Betrachtung analog zum Folgenden verläuft. Seien $\varepsilon, s, t \in \mathbb{R}_{>0}, x_L \in X_L$ und $x_R \in X_R$ beliebig und wähle $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Mit Satz 8.8 erhalten wir die Größenordnungen $\omega^{x_L} \ll \omega^x \ll \omega^{x_R}$ und damit

$$\begin{aligned} &\omega^x(r-\varepsilon) <_{\text{lex}} \omega^x(r-\varepsilon_1), \\ &\omega^{x_L} sr + \omega^x(r-\varepsilon) - \omega^{x_L} s(r-\varepsilon) = \omega^x(r-\varepsilon) + \underbrace{\omega^{x_L} s\varepsilon}_{\leq_{\text{lex}} \omega^x(\varepsilon-\varepsilon_1)} \leq_{\text{lex}} \omega^x(r-\varepsilon_1). \end{aligned}$$

Analog bekommen wir die Ungleichung $\omega^{x_R} tr + \omega^x(r+\varepsilon) - \omega^{x_R} t(r+\varepsilon) \leq_{\text{lex}} \omega^x(r-\varepsilon_1)$. Somit sind die Elemente auf der linken Seite von $\omega^x r$ kleiner gleich $\omega^x(r-\varepsilon_1)$ mit $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Elemente aus der rechten Menge sind entsprechend größer gleich $\omega^x(r+\varepsilon_1)$ $(\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0})$. Außerdem gilt $\omega^x(r-\varepsilon_1) <_{\text{lex}} \omega^x r <_{\text{lex}} \omega^x(r+\varepsilon_1)$ $(\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0})$, woraus wir mittels Kofinalitäts-Theorem 1 die gewünschte Gleichung

$$\omega^x r = \{\omega^x(r-\varepsilon_1) \mid \omega^x(r+\varepsilon_1)\} \quad (\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0})$$

erhalten. □

Das nachfolgende Lemma liefert eine Darstellung von Potenzreihen in ω mit einer Nachfolgerzahl als Indexmenge.

Lemma 8.19. *Seien $\alpha \in \mathbf{On}, (x_i)_{i \leq \alpha}$ eine streng monoton fallende Folge surrealer Zahlen der Länge $\alpha + 1$, $(r_i)_{i \leq \alpha}$ mit $r_i \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ eine Folge reeller Zahlen ungleich Null. Dann gilt:*

$$\sum_{i \leq \alpha} \omega^{x_i} r_i = \left\{ \sum_{i \leq \alpha} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\alpha} \varepsilon \,\middle|\, \sum_{i \leq \alpha} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\alpha} \varepsilon \right\} \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Beweis. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Sei α eine Limeszahl. Es ist $\sum_{i \leq \alpha} \omega^{x_i} r_i = \sum_{i < \alpha} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\alpha} r_\alpha$ und $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \left\{ \sum_{i \leq \beta} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\beta} \varepsilon \,\middle|\, \sum_{i \leq \beta} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\beta} \varepsilon \right\}$ $(\beta < \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})$. Nach Lemma 8.18 wissen wir zudem, dass $\omega^{x_\alpha} r_\alpha = \{\omega^{x_\alpha}(r_\alpha - \varepsilon) \mid \omega^{x_\alpha}(r_\alpha + \varepsilon)\}$ gilt. Somit erhalten wir aus der Definition der Addition

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq \alpha} \omega^{x_i} r_i = &\left\{ \sum_{i \leq \beta} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\beta} \varepsilon + \omega^{x_\alpha} r_\alpha, \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\alpha}(r_\alpha - \varepsilon) \,\middle|\, \cdots \right\} \\ &(\beta < \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}), \end{aligned}$$

wobei wir erneut die rechte Menge nicht ausschreiben, da deren Untersuchung analog verläuft. Offensichtlich gilt $\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_\beta}\varepsilon + \omega^{x_\alpha}r_\alpha <_{\text{deg}} \sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i + \omega^{x_\alpha}(r_\alpha - \varepsilon)$ für $\beta < \alpha$, denn der erste Term ω^y, in dem sich die beiden Ausdrücke unterscheiden, ist bei $y = \beta$. Nach Satz 8.15 über die Gleichheit der Ordnungen folgt dann auch

$$\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_\beta}\varepsilon + \omega^{x_\alpha}r_\alpha <_{\text{lex}} \sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i + \omega^{x_\alpha}(r_\alpha - \varepsilon) = \sum_{i\leq\alpha}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_\alpha}\varepsilon.$$

Nach Kofinalitäts-Theorem 1 können wir die Mengen reduzieren zu

$$\sum_{i\leq\alpha}\omega^{x_i}r_i = \left\{\sum_{i\leq\alpha}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_\alpha}\varepsilon \,\middle|\, \sum_{i\leq\alpha}\omega^{x_i}r_i + \omega^{x_\alpha}\varepsilon\right\}\ (\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}).$$

<u>Fall 2:</u> Nun sei α eine beliebige Ordinalzahl. Wir können $\alpha = \alpha' + n$ mit einer Limeszahl α' und einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben. Wir führen nun eine Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>$n = 0$:</u> Dies wurde bereits in Fall 1 behandelt.

<u>$n \rightsquigarrow n+1$:</u> Es gilt nach Definiton 8.13 für Potenzreihen mit einer Nachfolgerzahl als Länge:

$$\begin{aligned}\sum_{i\leq\alpha'+(n+1)}\omega^{x_i}r_i &= \left(\sum_{i\leq\alpha'+n}\omega^{x_i}r_i\right) + \omega^{x_{\alpha'+(n+1)}}r_{\alpha'+(n+1)}\\ &\overset{\text{IH}}{=} \left\{\sum_{i\leq\alpha'+n}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_{\alpha+n}}\varepsilon \,\middle|\, \sum_{i\leq\alpha'+n}\omega^{x_i}r_i + \omega^{x_{\alpha+n}}\varepsilon\right\}\\ &\quad + \left\{\omega^{x_{\alpha'+(n+1)}}(r_{\alpha'+(n+1)} - \varepsilon) \mid \omega^{x_{\alpha'+(n+1)}}(r_{\alpha'+(n+1)} + \varepsilon)\right\}\end{aligned}$$

mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Nun können wir wie in Fall 1 Kofinalitäts-Theorem 1 verwenden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{i\leq\alpha'+(n+1)}\omega^{x_i}r_i = \Bigg\{&\sum_{i\leq\alpha'+(n+1)}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_{\alpha'+(n+1)}}\varepsilon\\ &\Bigg|\sum_{i\leq\alpha'+(n+1)}\omega^{x_i}r_i + \omega^{x_{\alpha'+(n+1)}}\varepsilon\Bigg\}\ (\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}),\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

□

Bemerkung 8.20. Wollen wir zwei surreale Zahlen x, y als Potenzreihen addieren, so gehen wir intuitiv wie folgt vor. Ist $\omega^z r, r \neq 0$ ein Term, welcher in der Conway-Normalform von x vorkommt, in der von y aber nicht, so ergänzen wir in der Conway-Normalform von y den Term $\omega^z \cdot 0$. Dies machen wir für alle Terme, welche nur in einer der beiden Conway-Normalformen vorkommen. Hierzu ein Beispiel

$$\begin{aligned} x &= 2\omega^4 + \omega^3 - 2\omega^2, & y &= -\omega^3 + 3\omega^2 + 5\\ \rightsquigarrow x &= 2\omega^4 + \omega^3 - 2\omega^2 + 0\omega^0, & y &= 0\omega^4 - \omega^3 + 3\omega^2 + 5\omega^0.\end{aligned}$$

Anschließend bilden wir die Summe der beiden Potenzreihen $x +_{\text{pot}} y$, indem wir die Koeffizienten vor gleichen Termen ω^z addieren:

$$\rightsquigarrow x +_{\text{pot}} y = 2\omega^4 + 0\omega^3 + 1\omega^2 + 5\omega^0.$$

Die Terme ω^z, welche mit Koeffizient Null auftreten, wollen wir anschließend weglassen:

$$\rightsquigarrow x +_{\text{pot}} y = 2\omega^4 + \omega^2 + 5.$$

Hierbei haben wir intuitiv schon verwendet, dass Addition von Termen der Form $\omega^z \cdot 0$ den Wert einer Potenzreihe nicht ändern. Wir müssen jedoch aufpassen, da wir bei unendlichen Summen unter Umständen eine Potenzreihe erhalten, welche anders definiert ist. Betrachte hierzu etwa wieder $x = 2\omega^4 + \omega^3 - 2\omega^2$. Wir machen daraus eine unendliche Potenzreihe:

$$x' = \sum_{i<\omega} \omega^{4-i} r_i = \omega^4 \cdot 2 + \omega^3 \cdot 1 + \omega^2 \cdot (-2) + \omega^1 \cdot 0 + \omega^0 \cdot 0 + \ldots,$$
$$r_0 = 2, r_1 = 1, r_2 = -2, r_i = 0 \text{ für alle } i > 2.$$

Dann ist nach Definition 8.13

$$x' = \left\{ \sum_{i \leq n} \omega^{4-i} r_i - \omega^n \varepsilon \,\middle|\, \sum_{i \leq n} \omega^{4-i} r_i + \omega^n \varepsilon \right\} =: \{A \mid B\} \ (n \in \mathbb{N}_0).$$

Insbesondere bekommen wir in A, B Zahlen, deren Abstand infinitesimal klein zu $x = 2\omega^4 + \omega^3 - 2\omega^2$ ist. Im folgenden Lemma zeigen wir, dass sich dadurch aber der Wert der Potenzreihe nicht ändert.

Lemma 8.21. *Seien $(r_i)_{i<\alpha}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen (d.h. es ist auch $r_i = 0$ zugelassen) der Länge $\alpha \in$ **On** und $(x_i)_{i<\alpha}$ eine streng monoton fallende Folge surrealer Zahlen. Sei $\beta \in$ **On** so, dass $(\lambda_j)_{j<\beta}$ die Folge derjenigen $i < \alpha$ mit $r_i \neq 0$ ist. Seien weiter $y_j \in \mathbf{No}, s_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(j < \beta)$ so gewählt, dass $y_j = x_{\lambda_j}, s_j = r_{\lambda_j}$ $(j < \beta)$ gilt. Dann ist*

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j.$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach α.

Fall 1: Sei $\alpha = \alpha' + 1$ eine Nachfolgerzahl. Sei $\beta' \leq \beta$ so, dass $(\lambda_j)_{j<\beta'}$ die Folge derjenigen $i < \alpha'$ ist mit $r_i \neq 0$. Nach Induktionshypothese gilt dann $\sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i = \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j$.

Falls $\beta' = \beta$ gilt, so folgt die Behauptung, da wir bereits wissen, dass $\omega^{x_{\alpha'}} r_{\alpha'} = \omega^{x_{\alpha'}} \cdot 0 = 0$ das neutrale Element der Addition ist. Ist $\beta' < \beta$, so ist $r_{\alpha'} \neq 0$ und damit $\beta = \beta' + 1$ mit $\lambda_{\beta'} = \alpha'$. Die Behauptung folgt schließlich mit $\omega^{x_{\alpha'}} r_{\alpha'} = \omega^{y_{\beta'}} s_{\beta'}$.

Fall 2: Sei nun α eine Limeszahl. Wir unterscheiden nochmals zwei Fälle.

Fall 2.1: Angenommen, es gilt für alle $\alpha' < \alpha$ mit $r_{\alpha'} \neq 0$, dass ein α'' existiert mit $\alpha' < \alpha'' < \alpha$ und $r_{\alpha''} \neq 0$. Anschaulich bedeutet dieser Fall, dass in der Potenzreihe $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ immer wieder Koeffizienten ungleich Null auftreten. Wir finden zu jedem Koeffizienten, welcher nicht verschwindet, einen noch späteren, welcher ebenfalls nicht den Wert Null annimmt.

Es gilt nach Definition 8.13:

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \left\{ \sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon \,\middle|\, \sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon \right\}$$
$$=: \{A \mid B\} \quad (\alpha' < \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Beachte, dass wir im Folgenden nur die linke Menge A betrachten, für B können wir analog verfahren. Wir wissen aus unserer Annahme insbesondere auch, dass β eine Limeszahl sein muss. Sonst würde ein letzter Koeffizient $r_{\alpha'} \neq 0$ existieren, d.h. $r_{\alpha''} = 0$ für alle $\alpha' < \alpha'' < \alpha$. Somit ist nach Definition 8.13:

$$\sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j = \left\{ \sum_{j\leq\beta'} \omega^{y_j} s_j - \omega^{y_{\beta'}} \varepsilon \,\middle|\, \sum_{j\leq\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{y_{\beta'}} \varepsilon \right\} \ (\beta' < \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}). \tag{29}$$

Sei $\sum_{j\leq\beta'} \omega^{y_j} s_j - \omega^{y_{\beta'}} \varepsilon$ ein beliebiges Element aus der linken Menge von $\sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j$. Sei $\alpha' < \alpha$ mit $\alpha' = \lambda_{\beta'}$. Dann ist $\omega^{x_{\alpha'}} r_{\alpha'} = \omega^{x_{\lambda_{\beta'}}} r_{\lambda_{\beta'}} = \omega^{y_{\beta'}} s_{\beta'}$. Nach Induktionshypothese gilt

$$\begin{aligned}
& & \sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i &= \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j \\
&\Leftrightarrow & \sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_{\alpha'}} r_{\alpha'} &= \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{y_{\beta'}} s_{\beta'} \\
&\overset{y_{\beta'}=x_{\alpha'}}{\Leftrightarrow} & \sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon &= \sum_{j\leq\beta'} \omega^{y_j} s_j - \omega^{y_{\beta'}} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit gilt auch $\sum_{j\leq\beta'} \omega^{y_j} s_j - \omega^{y_{\beta'}} \varepsilon \in A$, wobei A die linke Menge von $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ ist.

Um das Kofinalitäts-Theorem 1 anwenden zu können, müssen wir noch $A <_{\text{lex}} \sum_{i<\beta} \omega^{y_j} s_j <_{\text{lex}} B$ zeigen. Sei hierzu $\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon \in A$ beliebig.

Sei $\beta' \leq \beta$ so, dass $(\lambda_j)_{j<\beta'}$ die Folge derjenigen $i < \alpha'$ ist mit $r_i \neq 0$. Nach Induktionshypothese ist dann

$$\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon = \sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_{\alpha'}} (r_{\alpha'} - \varepsilon) = \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{x_{\alpha'}} (r_{\alpha'} - \varepsilon). \tag{30}$$

Falls $\beta' = \beta$ gilt, so ist $r_{\alpha'} = 0$ und damit

$$\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon \overset{(30)}{=} \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j - \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon = \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j - \omega^{x_{\alpha'}} \varepsilon <_{\text{lex}} \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j.$$

Falls $\beta' < \beta$ gilt, so ist $\beta' + 1 < \beta$ und es gilt entweder $x_{\alpha'} = y_{\beta'}$ (und $r_{\alpha'} = s_{\beta'}$) oder $x_{\alpha'} >_{\text{lex}} y_{\beta'}$ (und $r_{\alpha'} = 0$). Bei Gleichheit können wir $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$\varepsilon_1 < \varepsilon$ wählen und erhalten

$$\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}}\varepsilon \overset{(30)}{=} \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{y_{\beta'}}(s_{\beta'} - \varepsilon)$$
$$<_{\text{lex}} \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{y_{\beta'}}(s_{\beta'} - \varepsilon_1) \overset{(29)}{<_{\text{lex}}} \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j.$$

Falls $x_{\alpha'} >_{\text{lex}} y_{\beta'}$ gilt, so folgt aus Satz 8.8 $\omega^{x_{\alpha'}} \gg \omega^{y_{\beta'}}$. Wir erhalten aus dieser Größenordnung die Ungleichung $\omega^{x_{\alpha'}}\varepsilon >_{\text{lex}} \omega^{y_{\beta'}} \left|\varepsilon_1 - s_{\beta'}\right| \geq_{\text{lex}} \omega^{y_{\beta'}}(\varepsilon_1 - s_{\beta'})$ und schließlich

$$\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}}\varepsilon \overset{(30)}{=} \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{x_{\alpha'}}(-\varepsilon) <_{\text{lex}} \sum_{j<\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{y_{\beta'}}(s_{\beta'} - \varepsilon_1)$$
$$\overset{(29)}{<_{\text{lex}}} \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j.$$

Für B verfahren wir analog und erhalten $A <_{\text{lex}} \sum_{i<\beta} \omega^{y_j} s_j <_{\text{lex}} B$. Da wir nun das Kofinalitäts-Theorem 1 anwenden können, folgt

$$\sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j = \left\{ \sum_{j\leq\beta'} \omega^{y_j} s_j - \omega^{y_{\beta'}}\varepsilon \,\middle|\, \sum_{j\leq\beta'} \omega^{y_j} s_j + \omega^{y_{\beta'}}\varepsilon \right\} = \{A \mid B\} = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i,$$

wie gewünscht.

<u>Fall 2.2:</u> Angenommen, Fall 2.1 tritt nicht ein. Dann existiert $\alpha' < \alpha$ mit $r_{\alpha'} \neq 0$ und $r_{\alpha''} = 0$ für alle $\alpha' < \alpha'' < \alpha$. In diesem Fall finden wir also einen letzten Koeffizienten ungleich Null. Insbesondere gilt, da α eine Limeszahl ist, $\alpha' + n < \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $r_{\alpha'+n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Nach Induktionshypothese gilt

$$\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i = \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j.$$

Es reicht also $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i$ zu zeigen. Nach Lemma 8.19 gilt

$$\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i = \left\{ \sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_{\alpha'}}(r_{\alpha'} - \varepsilon) \,\middle|\, \sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_{\alpha'}}(r_{\alpha'} + \varepsilon) \right\} \tag{31}$$
$$(\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da α eine Nachfolgerzahl ist, gilt $\gamma := \alpha' + 1 < \alpha$ und $\sum_{i\leq\gamma} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\gamma}\varepsilon \in \left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right)_L$. Mit der gradlexikographischen Ordnung und Satz 8.15 folgt $\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i \leq_{\text{lex}} \sum_{i\leq\alpha'+1} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha'}}\varepsilon \in \left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right)_L$.

Wir erkennen damit, dass die Darstellung von $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ kofinal in der von $\sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i$ aus (31) ist. Es folgt die gewünschte Gleichheit $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \sum_{i\leq\alpha'} \omega^{x_i} r_i$ und damit insgesamt die Behauptung. □

Lemma 8.21 ist ein sehr wichtiges Werkzeug für das Rechnen mit Potenzreihen. Es erlaubt uns nun Summanden mit Koeffizient Null hinzuzufügen und so Potenzreihen zu addieren. Dabei ändert die Addition oder Subtraktion solcher Summanden den Wert der Potenzreihe nicht.

Wenn wir aber von der Conway-Normalform einer Zahl sprechen, so meinen wir weiterhin die nach Satz 8.16 existierende und eindeutig bestimmte Darstellung als Potenzreihe in ω mit Koeffizienten ungleich Null.

Nun zeigen wir eine Form des Assoziativgesetzes für Potenzreihen.

Lemma 8.22 (Assoziativgesetz)**.** *Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{On}, (x_i)_{i<\alpha+\beta}$ eine streng monoton fallende Folge surrealer Zahlen und $(r_i)_{i<\alpha+\beta}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt*

$$\sum_{i<\alpha+\beta} \omega^{x_i} r_i = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + \sum_{j<\beta} \omega^{x_{\alpha+j}} r_{\alpha+j}.$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach β.

Fall 1: Falls β eine Nachfolgerzahl ist, so folgt die Aussage direkt aus der Induktionshypothese und dem gewöhnlichen Assoziativgesetz für surreale Zahlen aus Satz 5.5.

Fall 2: Angenommen, β ist eine Limeszahl. Sei $\sum_{j<\beta} \omega^{x_{\alpha+j}} r_{\alpha+j} = \{A \mid B\}$ wie in Definition 8.13 von Potenzreihen in ω. Mittels Kofinalitäts-Theorem 1 können wir

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + \sum_{j<\beta} \omega^{x_{\alpha+j}} r_{\alpha+j} = \left\{ \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + A \,\middle|\, \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + B \right\} \tag{32}$$

schreiben, wobei hier eingeht, dass die Folge $(x_i)_{i<\alpha+\beta}$ streng monoton fallend ist. Außerdem nehmen wir für $\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ entweder die Darstellung aus der Definition 8.13 (falls α eine Limeszahl ist) oder aus Lemma 8.19 (falls α eine Nachfolgerzahl ist).

Ein allgemeiner Term aus der linken Menge von (32) ist

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + \left(\sum_{j\leq\gamma} \omega^{x_{\alpha+j}} r_{\alpha+j} - \omega^{x_{\alpha+\gamma}} \varepsilon \right) \quad (\gamma < \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Mit der Induktionshypothese und dem gewöhnlichen Assoziativgesetz erhalten wir $\sum_{i\leq\alpha+\gamma} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_{\alpha+\gamma}} \varepsilon$. Somit ist (32) kofinal in der Darstellung von $\sum_{i<\alpha+\beta} \omega^{x_i} r_i$ und die Behauptung folgt aus Kofinalitäts-Theorem 1. □

Nun lässt sich die gewünschte Aussage über die Addition zeigen.

Satz 8.23. *Seien $\alpha \in \mathbf{On}, (x_i)_{i<\alpha}$ eine streng monoton fallende Folge surrealer Zahlen und $(r_i)_{i<\alpha}, (s_i)_{i<\alpha}$ mit $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ Folgen reeller Zahlen. Hierbei sind auch Werte $r_i, s_i = 0$ zugelassen. Dann gilt*

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} s_i = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} (r_i + s_i).$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach α.

Fall 1: Sei $\alpha = \beta + 1$ eine Nachfolgerzahl. Es ist dann

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} s_i = \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i + \sum_{i<\beta} \omega^{x_i} s_i + \omega^{x_\beta}(r_\beta + s_\beta),$$

wobei das Distributivgesetz aus Satz 5.12 verwendet wurde. Die Behauptung folgt dann direkt aus der Induktionshypothese und Definition 8.13 von Potenzreihen.

Fall 2: Sei nun α eine Limeszahl. Schreibe $\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i+\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}s_i=\{A\mid B\}$, wobei wir die Mengen A,B auf natürliche Weise aus den Darstellungen der beiden Summanden und der Addition erhalten. Ein allgemeiner Term von A ist der Form

$$\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i+\left(\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}s_i-\omega^{x_\beta}\varepsilon\right)\quad\text{oder}\quad\left(\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i-\omega^{x_\beta}\varepsilon\right)+\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}s_i$$

mit $\beta<\alpha, \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$. Ohne Einschränkung betrachten wir nun ein Element

$$\begin{aligned}&\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i+\left(\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}s_i-\omega^{x_\beta}\varepsilon\right)\\=&\left(\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i+\sum_{\beta<i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right)+\left(\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}s_i-\omega^{x_\beta}\varepsilon\right)\\\overset{\text{IH}}{=}&\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}(r_i+s_i)-\omega^{x_\beta}\varepsilon+\sum_{\beta<i<\alpha}\omega^{x_i}r_i.\end{aligned}$$

Aus Satz 8.15 wissen wir, dass $\sum_{\beta<i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\ll\omega^{x_\beta}$ gilt. Wir betrachten analog Elemente aus B und erhalten, dass (A,B) beidseitig kofinal mit $\left(\left\{\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}(r_i+s_i)-\omega^{x_\beta}\varepsilon\right\},\left\{\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}(r_i+s_i)+\omega^{x_\beta}\varepsilon\right\}\right)$ $(\beta<\alpha$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0})$ ist. Mittels Kofinalitäts-Theorem 1 erhalten wir die gewünschte Gleichung

$$\begin{aligned}\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i+\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}s_i&=\left\{\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}(r_i+s_i)-\omega^{x_\beta}\varepsilon\;\middle|\;\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}(r_i+s_i)+\omega^{x_\beta}\varepsilon\right\}\\&=\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}(r_i+s_i)\ (\beta<\alpha,\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}),\end{aligned}$$

wobei hier noch Lemma 8.21 eingegangen ist. □

Bemerkung 8.24. Es ist sinnvoll, sich deutlich zu machen, weshalb Satz 8.23 schon besagt, dass wir die Summe zweier surrealer Zahlen bekommen, indem wir ihre Conway-Normalformen als Potenzreihen addieren. Seien hierzu $x,y\in\mathbf{No}$ beliebige surreale Zahlen mit entsprechenden Conway-Normalformen $x=\sum_{i<\alpha_x}\omega^{x_i}r_i, y=\sum_{j<\alpha_y}\omega^{y_j}s_j$. Dann gilt $r_i,s_j\neq 0$ für alle i,j.

Seien $\alpha\in\mathbf{On}, (z_i)_{i<\alpha}$ die streng monoton fallende Folge surrealer Zahlen mit Länge α, welche aus den x_i und y_j besteht. Wir setzen

$$a_i=\begin{cases}r_k, & \text{falls ein } k<\alpha_x \text{ existiert mit } z_i=x_k\\ 0, & \text{sonst}\end{cases},$$

$$b_i=\begin{cases}s_l, & \text{falls ein } l<\alpha_y \text{ existiert mit } z_i=y_l\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

Aus Lemma 8.21 folgt dann $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{z_i} a_i, y = \sum_{i<\alpha} \omega^{z_i} b_i$. Mit Satz 8.23 gilt

$$x + y = \sum_{i<\alpha} \omega^{z_i}(a_i + b_i),$$

wie gewünscht. Die Summanden $i < \alpha$ mit $a_i + b_i = 0$ können wir anschließend wieder nach Lemma 8.21 weglassen.

Wir kommen nun zur Multiplikation. Dabei betrachten wir zunächst einen Spezialfall.

Satz 8.25. *Seien $\alpha \in \mathbf{On}, (x_i)_{i<\alpha}$ eine streng monoton fallende Folge surrealer Zahlen, $(r_i)_{i<\alpha}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $y \in \mathbf{No}$ beliebig. Dann gilt:*

$$\omega^y \left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i \right) = \sum_{i<\alpha} \omega^{y+x_i} r_i.$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach α.

Fall 1: Sei $\alpha = \beta + 1$ eine Nachfolgerzahl. Nach dem gewöhnlichen Distributivgesetz aus Satz 5.12 und der induktiven Definition 8.13 der Potenzreihen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\omega^y \left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i \right) &\overset{8.13}{=} \omega^y \cdot \left(\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\beta} r_\beta \right) \\
&\overset{5.12}{=} \omega^y \cdot \left(\sum_{i<\beta} \omega^{x_i} r_i \right) + \omega^y \cdot \omega^{x_\beta} r_\beta \\
&\overset{\text{IH und Prop.8.12}}{=} \sum_{i<\beta} \omega^{y+x_i} r_i + \omega^{y+x_\beta} r_\beta \\
&\overset{8.13}{=} \sum_{i<\alpha} \omega^{y+x_i} r_i.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass wir hierbei verwendet haben, dass surreale Addition ordnungserhaltend ist. Sonst wüssten wir nicht, dass die Folge $(y + x_i)_{i<\alpha}$ streng monoton fallend ist. Diese Eigenschaft brauchen wir, damit der letzte Ausdruck wohldefiniert ist.

Fall 2: Sei nun α eine Limeszahl. Sei $y = \{Y_L \mid Y_R\}$ in kanonischer Darstellung. Wir wissen nach Definition 8.7 und 8.13, dass

$$\begin{aligned}
&\omega^y = \{0, \omega^{y_L} r \mid \omega^{y_R} s\} \quad (r, s \in \mathbb{R}_{>0}, y_L \in Y_L, y_R \in Y_R), \\
&z := \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \left\{ \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\beta} \varepsilon \,\middle|\, \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\beta} \varepsilon \right\} =: \{Z_L \mid Z_R\} \\
&\qquad (\beta < \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})
\end{aligned}$$

gilt. Im Folgenden seien stets $y_L \in Y_L, y_R \in Y_R, z_L \in Z_L, z_R \in Z_R, r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass nach Definition für das

Produkt gilt:

$$\begin{aligned}\omega^y \cdot \left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right) =&\{\omega^y z_L, \omega^y z_L + \omega^{y_L} r(z-z_L), \omega^y z_R + \omega^{y_R} s(z-z_R) \mid \\ &\omega^y z_R, \omega^y z_R + \omega^{y_L} r(z-z_R), \omega^y z_L + \omega^{y_R} s(z-z_L)\} \\ =:&\{A \mid B\}.\end{aligned} \tag{33}$$

Wir wollen durch wiederholte Anwendung von Kofinalitäts-Theorem 1 diese Darstellung vereinfachen, bis die Behauptung folgt.

Wir können zunächst bemerken, dass $z_R - z$ und $z - z_L$ stets der Form $\omega^{x_\beta}\varepsilon + c$ für ein $\beta < \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $c \in \mathbf{No}$ mit $|c| \ll \omega^{x_\beta}$ (nach Eigenschaft (24) aus Satz 8.15) sind. Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig mit $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$. Dann gilt

$$\omega^{x_\beta}\varepsilon_1 <_{\text{lex}} \omega^{x_\beta}\varepsilon <_{\text{lex}} \omega^{x_\beta}\varepsilon_2, \tag{34}$$

d.h. $z_R - z, z - z_L$ liegen stets zwischen $\omega^{x_\beta}\varepsilon_1$ und $\omega^{x_\beta}\varepsilon_2$.

Aus $y_L <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} y_R$ bekommen wir mit Satz 8.8 die Größenordnungen $\omega^{y_L} \ll \omega^y \ll \omega^{y_R}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\omega^{y_R} s(z_R - z) + \underbrace{\omega^{y_L} r(z - z_L)}_{\geq_{\text{lex}} 0 \text{ da } r>0} \overset{(34)}{\geq_{\text{lex}}} &\omega^{y_R} s \omega^{x_\beta}\varepsilon_1 \geq_{\text{lex}} \omega^y(\omega^{x_\beta}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)) \\ &\geq_{\text{lex}} \omega^y(z_R - z_L),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $z_R - z_L = (z_R - z) + (z - z_L) \overset{(34)}{\leq_{\text{lex}}} \omega^{x_\beta}(2\varepsilon_2)$ verwendet haben. Umstellen liefert die Ungleichung

$$\omega^y z_R + \omega^{y_R} s(z - z_R) \leq_{\text{lex}} \omega^y z_L + \omega^{y_L} r(z - z_L).$$

Diese Ungleichung hilft uns das Produkt in (33) zu vereinfachen. Die zweite Ungleichung, die wir dazu brauchen lautet

$$\omega^y z_R + \omega^{y_L} r(z - z_R) \leq_{\text{lex}} \omega^y z_L + \omega^{y_R} s(z - z_L).$$

Diese erhalten wir analog aus

$$\begin{aligned}\omega^{y_R} s(z - z_L) - \omega^{y_L} r(z - z_R) \geq_{\text{lex}} &\omega^{y_R} s(z - z_L) \geq_{\text{lex}} \omega^{y_R} s \omega^{x_\beta}\varepsilon_1 \\ &\geq_{\text{lex}} \omega^y(\omega^{x_\beta}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)) \geq_{\text{lex}} \omega^y(z_R - z_L).\end{aligned}$$

Durch Anwendung von Kofinalitäts-Theorem 1 folgt

$$\begin{aligned}\omega^y \cdot \left(\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i\right) = \{A \mid B\} =&\{\omega^y z_L, \omega^y z_L + \omega^{y_L} r(z - z_L) \mid \\ &\omega^y z_R, \omega^y z_R + \omega^{y_L} r(z - z_R)\} =: \{A' \mid B'\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Dies müssen wir aber noch weiter vereinfachen.

Wir erinnern daran, dass $z_L = \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\beta}\varepsilon, z_R = \sum_{i\leq\beta} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\beta}\varepsilon$ gilt und damit z_L, z_R abhängig von der Wahl von $\beta < \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sind. Zudem sind von ε auch $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ abhängig. Aus diesem Grund seien im Folgenden $\beta < \alpha$ und $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ konstant gewählt.

Seien $z_L^1 = \sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_\beta}\varepsilon_1 \in Z_L, z_R^1 = \sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i + \omega^{x_\beta}\varepsilon_1 \in Z_R$ weitere Elemente bezüglich β. Dann gilt:

$$\omega^y(z_L^1 - z_L) = \omega^y\left(\omega^{x_\beta}(\varepsilon-\varepsilon_1)\right) \overset{\omega^{y_L}\ll\omega^y}{\geq_{\text{lex}}} \omega^{y_L} r\omega^{x_\beta}\varepsilon_2 \overset{(34)}{\geq_{\text{lex}}} \omega^{y_L} r(z-z_L).$$

Umstellen liefert

$$\omega^y z_L^1 \geq_{\text{lex}} \omega^y z_L + \omega^{y_L} r(z-z_L).$$

Analog bekommen wir die zweite Ungleichung

$$\omega^y z_R^1 \leq_{\text{lex}} \omega^y z_R + \omega^{y_L} r(z-z_R).$$

Mit diesen beiden Ungleichungen und dem Kofinalitäts-Theorem 1 angewandt auf die Darstellung von $\omega^y\cdot\left(\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right)$ in (35) erhalten wir schließlich

$$\omega^y\cdot\left(\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right) = \{A' \mid B'\} = \{\omega^y z_L \mid \omega^y z_R\} \quad (z_L\in Z_L, z_R\in Z_R).$$

Nun können wir die Induktionshypothese anwenden

$$\begin{aligned}
\omega^y z &= \{\omega^y z_L \mid \omega^y z_R\} \\
&= \left\{\omega^y\left(\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i - \omega^{x_\beta}\varepsilon\right) \,\middle|\, \omega^y\left(\sum_{i\leq\beta}\omega^{x_i}r_i + \omega^{x_\beta}\varepsilon\right)\right\} \\
&\overset{\text{IH}}{=} \left\{\sum_{i\leq\beta}\omega^{y+x_i}r_i - \omega^{y+x_\beta}\varepsilon \,\middle|\, \sum_{i\leq\beta}\omega^{y+x_i}r_i + \omega^{y+x_\beta}\varepsilon\right\} \\
&= \sum_{i<\alpha}\omega^{y+x_i}r_i,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt direkt nach der Definition der Potenzreihen aus 8.13 folgt. Erneut haben wir hierbei verwendet, dass surreale Addition ordnungserhaltend ist, um schließen zu können, dass $(y+x_i)_{i<\alpha}$ ebenfalls streng monoton fallend ist. Damit ist insgesamt der Satz bewiesen.

□

Nun können wir zur allgemeinen Multiplikation übergehen.

Satz 8.26. *Seien $\alpha,\beta\in\mathbf{On}, (x_i)_{i<\alpha}, (y_j)_{j<\beta}$ streng monoton fallende Folgen surrealer Zahlen sowie $(r_i)_{i<\alpha}, (s_j)_{j<\beta}$ Folgen reeller Zahlen. Dann gilt*

$$\left(\sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i\right)\cdot\left(\sum_{j<\beta}\omega^{y_j}s_j\right) = \sum_{i<\alpha, j<\beta}\omega^{x_i+y_j}r_i s_j, \tag{36}$$

d.h. die gewöhnliche Multiplikation stimmt mit der von Potenzreihen überein.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach α. Setze hierzu $x := \sum_{i<\alpha}\omega^{x_i}r_i, y := \sum_{j<\beta}\omega^{y_j}s_j$. Wir schreiben außerdem $x\cdot_{\text{pot}} y$ für das Produkt von x, y als Potenzreihen.

<u>Fall 1:</u> Sei $\alpha = \alpha' + 1$ eine Nachfolgerzahl. Nach dem Distributivgesetz aus Satz 5.12 gilt

$$x \cdot y = \left(\sum_{i<\alpha'} \omega^{x_i} r_i \right) \cdot y + (\omega^{x_\beta} r_\beta) \cdot y$$

Nach Induktionshypothese und Satz 8.25 erhalten wir

$$x \cdot y = \sum_{i<\alpha', j<\beta} \omega^{x_i+y_j} r_i s_j + \sum_{j<\beta} \omega^{x_\beta+y_j} r_\beta s_j = \sum_{i<\alpha, j<\beta} \omega^{x_i+y_j} r_i s_j,$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 8.23 über die Gleichheit der Addition verwendet haben.

<u>Fall 2:</u> Sei nun α eine Limeszahl. Wir führen eine zweite Induktion nach β. Ohne Einschränkung nehmen wir an β sei ebenfalls eine Limeszahl, sonst verfahre wie in Fall 1. Seien $x = \{X_L \mid X_R\}, y = \{Y_L \mid Y_R\}$ die Darstellungen von x, y wie in Definition 8.13. Seien $x_0 \in X_L \cup X_R, y_0 \in Y_L \cup Y_R$ beliebig. Ist $z := \{Z_L \mid Z_R\} := x \cdot y$, so ist nach Definition der Multiplikation ein Element $z_0 \in Z_L \cup Z_R$ der Form

$$z_0 = x_0 y + x y_0 - x_0 y_0 = xy - (x - x_0)(y - y_0).$$

Nach Induktionshypothese können wir auch schreiben

$$z_0 = x_0 \cdot_{\text{pot}} y + x \cdot_{\text{pot}} y_0 - x_0 \cdot_{\text{pot}} y_0 = x \cdot_{\text{pot}} y - (x - x_0) \cdot_{\text{pot}} (y - y_0).$$

Beachte, dass wir aus Satz 8.23 schon wissen, dass surreale Addition mit der von Potenzreihen übereinstimmt.

Wir wollen das Kofinalitäts-Theorem 1 auf die Darstellung von $z = xy$ anwenden. Es gilt $x - x_0 = \pm\omega^{x_\gamma}\varepsilon_1 + c_1$ mit $\gamma < \alpha, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ und einer surrealen Zahl c_1 mit $|c_1| \ll \omega^{x_\gamma}$. Analog ist $y - y_0 = \pm\omega^{y_\delta}\varepsilon_2 + c_2, \delta < \beta, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}, c_2 \in \mathbf{No}, |c_2| \ll \omega^{y_\delta}$. Es folgt

$$(x - x_0) \cdot_{\text{pot}} (y - y_0) = \pm\omega^{x_\gamma + y_\delta}\varepsilon_1\varepsilon_2 + c_3,$$

wobei $c_3 \in \mathbf{No}$ mit $|c_3| \ll \omega^{x_\gamma + y_\delta}$ gilt. Für das Vorzeichen von $(x - x_0) \cdot_{\text{pot}} (y - y_0)$ gilt

$$\begin{aligned} &(x - x_0) \cdot_{\text{pot}} (y - y_0) = \omega^{x_\gamma + y_\delta}\varepsilon_1\varepsilon_2 + c_3 >_{\text{lex}} 0 \\ \Leftrightarrow &xy - (x - x_0) \cdot_{\text{pot}} (y - y_0) <_{\text{lex}} xy \\ \Leftrightarrow &x_0 \in X_L, y_0 \in Y_L \text{ oder } x_0 \in X_R, y_0 \in Y_R \\ \Leftrightarrow &z_0 \in Z_L. \end{aligned}$$

Durch Anwendung von Kofinalitäts-Theorem 1 wissen wir nun

$$\begin{aligned} z = x \cdot y = &\left\{ x \cdot_{\text{pot}} y - \omega^{x_\gamma + y_\delta}\varepsilon \mid x \cdot_{\text{pot}} y + \omega^{x_\gamma + y_\delta}\varepsilon \right\} \\ &(\gamma < \alpha, \delta < \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}). \end{aligned} \tag{37}$$

Wir schauen uns den Term auf der rechten Seite der Behauptung in (36) an. Erneut unter Zuhilfenahme von Kofinalitäts-Theorem 1 bekommen wir für allgemeine Potenzreihen die Identität:

$$\sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i = \left\{ \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i - \omega^{x_\gamma}\varepsilon \,\middle|\, \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i + \omega^{x_\gamma}\varepsilon \right\} \quad (\gamma < \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Mit dieser Identität erhalten wir für den rechten Term aus (36) die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\sum_{i<\alpha,j<\beta} \omega^{x_i+y_j} r_i s_j \\
&= \left\{ \sum_{i<\alpha,j<\beta} \omega^{x_i+y_j} r_i s_j - \omega^{x_\gamma+y_\delta}\varepsilon \;\middle|\; \sum_{i<\alpha,j<\beta} \omega^{x_i+y_j} r_i s_j + \omega^{x_\gamma+y_\delta}\varepsilon \right\} \\
&= \left\{ x \cdot_{\text{pot}} y - \omega^{x_\gamma+y_\delta}\varepsilon \mid x \cdot_{\text{pot}} y + \omega^{x_\gamma+y_\delta}\varepsilon \right\} \overset{(37)}{=} xy,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Nun wissen wir nicht nur, dass sich jede surreale Zahl als Potenzreihe in ω schreiben lässt, sondern auch, dass sich Addition und Multiplikation durch die jeweiligen Verknüpfungen der entsprechenden Potenzreihen durchführen lassen. Durch diese Darstellung können wir einige bedeutende Resultate über **No** beweisen.

9. Reelle Abgeschlossenheit

Ziel dieses Kapitels ist es, zu beweisen, dass die surrealen Zahlen einen reell abgeschlossenen Körper bilden. Dabei wird die Conway-Normalform aus Kapitel 8 verwendet. Mit dieser Darstellung lassen sich die technischen Resultate dieses Abschnitts zeigen. Zunächst wird aber der Begriff eines angeordneten, reell abgeschlossenen Körpers eingeführt.

Aus Satz 5.16 ist bereits bekannt, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ ein angeordneter Körper ist. Im Folgenden wird die Charakterisierung angeordneter, reell abgeschlossener Körper aus [11, 5.Vorlesung, Corollary 1.4] verwendet.

Definition 9.1. Sei $(K, <)$ ein angeordneter Körper. Dann heißt K *reell abgeschlossen*, falls er folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) Jedes positive Element $x \in K_{>0}$ besitzt eine Quadratwurzel, d.h. es existiert eine Zahl $y \in K$ mit $y^2 := y \cdot y = x$.
(2) Jedes Polynom $p = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i \in K[X], a_0, \ldots, a_n \in K, a_n \neq 0$ ungeraden Grades n besitzt eine Nullstelle in K, d.h. es existiert ein $z \in K$ mit $p(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$.

Nun wollen wir zeigen, dass der angeordnete Körper $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ die Eigenschaften (1) und (2) aus Definition 9.1 erfüllt. In der Tat können wir sogar eine noch stärkere Aussage zeigen, indem wir beweisen, dass jede positive surreale Zahl $x >_{\text{lex}} 0$ sogar eine n-te Wurzel für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig besitzt.

Satz 9.2. *Seien $x \in \mathbf{No}$ mit $x >_{\text{lex}} 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Dann existiert ein $y \in \mathbf{No}$ mit $y^n = x$, d.h. es gibt eine n-te Wurzel von x in* **No**. *Wir schreiben dann auch $\sqrt[n]{x} = y$.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei also $n > 1$. Sei $x = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ in Conway-Normalform wie in Satz 8.16. Dann ist $x = (\omega^{x_0} r_0) \cdot \left(1 + \sum_{0<i<\alpha} \omega^{y_i} s_i\right)$, wobei $y_i = x_i - x_0, s_i = \frac{r_i}{r_0}$ gilt. Bemerke, dass $(y_i)_{0<i<\alpha}$ ebenfalls streng monoton fallend ist und $s_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ wegen $r_0 \neq 0$ wohldefiniert ist. Da außerdem für alle $i > 0$ die Ungleichung $x_i <_{\text{lex}} x_0$ gilt, erhalten wir für die Folge der y_i die Ungleichung $y_i <_{\text{lex}} 0$ für alle $0 < i < \alpha$.

Durch Nachrechnen sehen wir unter Verwendung von Satz 8.25 sofort, dass $\sqrt[n]{\omega^{x_0} r_0} = \omega^{\frac{x_0}{n}} \cdot \sqrt[n]{r_0}$ gilt. Aufgrund der Kommutativität der Multiplikation reicht es deshalb, die Existenz der n-ten Wurzel von Zahlen x der Form

$$x = 1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$$

zu zeigen, wobei $(x_i)_{i<\alpha} \subset \mathbf{No}$ streng monoton fallend sei mit $x_i <_{\text{lex}} 0$ für alle $i < \alpha$ und $(r_i)_{i<\alpha} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gelte. Dazu werden wir induktiv eine Folge $(y_j, t_j)_{j<\lambda}$ für eine Ordinalzahl $\lambda \in \mathbf{On}$ definieren.

Sei β eine beliebige Ordinalzahl. Angenommen, $\left(1 + \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j\right)^n$ stimmt mit $1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ in allen Termen $\omega^z \varepsilon$ überein, für die $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt und ein $j < \beta$ mit $z \geq_{\text{lex}} y_j$ existiert. Außerdem gelte $y_j < 0$ für alle $j < \beta$.

Falls $\left(1 + \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j\right)^n = 1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ gilt, so setzen wir $\lambda = \beta$. Nehmen wir also an, es gelte

$$\left(1 + \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j\right)^n \neq 1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i.$$

Wir zeigen:

(1.) Es existiert ein $y \in \mathbf{No}$ mit $y < y_j$ für alle $j < \beta$ und ein $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ so, dass in $\left(1 + \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j + \omega^y t\right)^n$ und $1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ alle Terme $\omega^z \varepsilon$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}, z \geq_{\text{lex}} y$ übereinstimmen.

(2.) Falls alle y_j mit $j < \beta$ endliche Linearkombinationen der x_i sind, so auch y.

Falls (1.) und (2.) erfüllt sind, so setzen wir $y_\beta = y, s_\beta = t$.

Sei y der größte Exponent, in dem sich die Koeffizienten der beiden Potenzreihen unterscheiden. Nach Annahme gilt $y <_{\text{lex}} y_j$ für alle $j < \beta$. Seien nun $s \in \mathbb{R}$ der Koeffizient von $\left(1 + \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j\right)^n$ bezüglich ω^y, $r \in \mathbb{R}$ der von $1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$. Dann gilt $s \neq r$, wobei möglich ist, dass einer der beiden Koeffizienten Null ist. Betrachte für $t \in \mathbb{R}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\left(\underbrace{1 + \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j}_{=:A} + \omega^y t\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (\omega^y t)^{n-k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A^k (\omega^y t)^{n-k}\right) + A^n
\end{aligned}$$

Im linken Ausdruck stehen nur Terme der Form $\omega^z \varepsilon$ mit

$$\begin{aligned}
z = (n-k) \cdot y + y_1' + \ldots + y_k' \text{ wobei } & k \in \{0, \ldots, n-1\}, \\
& y_1', \ldots, y_k' \in \{y_j : j < \beta\} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Für diese z gilt

$$z = (n-k)\cdot y + \underbrace{y_1' + \ldots + y_k'}_{\leq_{\text{lex}} 0 \text{ nach Annahme}} \leq_{\text{lex}} \underbrace{(n-k)}_{\geq_{\text{lex}} 1} \cdot \underbrace{y}_{<_{\text{lex}} 0} \leq_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} y_j < 0$$

für alle $j < \beta$.

Dadurch erkennen wir, dass nur im rechten Ausdruck A^n Terme $\omega^z \varepsilon$ mit $z \geq_{\text{lex}} y_j$ für ein $j < \beta$ stehen können. Nach Annahme stimmen schließlich auch $(A + \omega^y t)^n$ und $1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$ in allen Koeffizienten vor ω^z mit $z \geq_{\text{lex}} y_j$ für ein $j < \beta$ überein. Der höchste Exponent, in dem sie unter Umständen nicht übereinstimmen ist ω^y.

Wähle nun $t = \frac{r-s}{n} \neq 0$. Der Koeffizient von $\left(1 + \sum_{j<\beta} \omega^{y_j} s_j + \omega^y t\right)^n$ vor ω^y ist dann $nt + s = r$. Eigenschaft (1.) ist damit erfüllt. Für $\beta = 0$ ist etwa $y = x_0, t = \frac{r_0}{n}$.

Eigenschaft (2.) folgt direkt aus der Konstruktion, denn y ist entweder gleich einem x_i oder eine endliche Summe der y_j.

Wir zeigen nun, dass ein $\lambda \in \mathbf{On}$ existiert mit $\left(1 + \sum_{j<\lambda} \omega^{y_j} s_j\right)^n = 1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i$. Seien L die Menge aller endlichen Linearkombinationen der x_i, K die Klasse der Folgenglieder y_j. Nach (2.) gilt dann induktiv $K \subseteq L$. Damit ist $\operatorname{card}(K) \leq \operatorname{card}(L) =: \mu \in \mathbf{On}$. Somit ist auch $\lambda := \operatorname{card}(K) \in \mathbf{On}$ und es folgt $\left(1 + \sum_{j<\lambda} \omega^{y_j} s_j\right)^n = 1 + \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} r_i.$, wie gewünscht. □

Wir bemerken, dass Satz 9.2 nur Existenz und keine Eindeutigkeit liefert. Wir fassen das Ergebnis des Satzes in einer Definition zusammen.

Definition 9.3. Sei $x \in \mathbf{No}$ mit $x >_{\text{lex}} 0$ und $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ beliebig. Für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Zahl y aus Satz 9.2 mit $y^n = x$ eine **n-te Wurzel** von x. Wir schreiben $y =: \sqrt[n]{x}$. Für $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ setzen wir $\sqrt[n]{x} := (\sqrt[-n]{x})^{-1}$. Bemerke, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist, da $\sqrt[-n]{x} \neq 0$ gilt.

Nun wollen wir Eigenschaft (2) aus Definition 9.1 zeigen. Dazu erinnern wir zunächst an das Lemma von Bézout speziell für Polynomringe.

Lemma 9.4 (Lemma von Bézout)**.** *Seien K ein Körper, $f, g \in K[X]$ teilerfremde Polynome. Dann existieren Polynome $f^*, g^* \in K[X]$ mit*

$$f \cdot f^* + g \cdot g^* = 1.$$

Beweis. Nachzulesen in [1, S. 189]. □

Wir benötigen ein weiteres Hilfslemma.

Lemma 9.5 (Lemma von Hensel)**.** *Sei $f(X) = X^n + \sum_{i=1}^n a_i X^{n-i} \in \mathbf{No}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $\deg(f) = n$ so, dass für alle $i = 1, \ldots n$ die Gleichung $a_i = r_i + d_i$ für ein $r_i \in \mathbb{R}$ und ein infinitesimales $d_i \in \mathbf{No}$ gilt. Das heißt, in der Conway-Normalform von a_i kommen nur Terme $\omega^y r, r \neq 0$ mit $y \leq_{\text{lex}} 0$ vor. Angenommen, es existieren teilerfremde Polynome $P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[X]$ mit $P_0 \cdot Q_0 = X^n + \sum_{i=1}^n r_i X^{n-i} \in \mathbb{R}[X]$.*

Dann existieren auch zwei Polynome $P, Q \in \mathbf{No}[X]$ mit

$$P \cdot Q = X^n + \sum_{i=1}^{n} a_i X^{n-i} = f(X), \deg(P) = \deg(P_0), \deg(Q) = \deg(Q_0).$$

Weiter gilt: Seien $\lambda_i X^i, \lambda_i \in \mathbf{No}, i < \deg(P)$ ein Term von P (bzw. von Q) und $\mu_i X^i, \mu_i \in \mathbb{R}$ der entsprechende Term von P_0 (bzw. von Q_0). Dann stimmen in den Conway-Normalformen von λ_i und μ_i alle Terme $\omega^y \varepsilon$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $y \geq_{\text{lex}} 0$ überein. Insbesondere ist $\lambda_i < r$ für ein $r \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir können jeden Koeffizienten von f in Conway-Normalform – das heißt als Potenzreihe in ω – schreiben und dann das Polynom f anders darstellen als Potenzreihe in ω mit reellen Polynomen als Koeffizienten. Sei etwa

$$f(X) = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} f_i, \quad x_i \in \mathbf{No}, f_i \in \mathbb{R}[X]. \tag{38}$$

Beachte, dass f endlich viele Koeffizienten hat. Da endliche Vereinigungen von Ordinalzahlen wieder Ordinalzahlen sind, finden wir tatsächlich ein $\alpha \in \mathbf{On}$, welches der Darstellung aus (38) genügt. Weiter sei $(x_i)_{i<\alpha}$ ohne Einschränkung streng monoton fallend. Da außerdem jeder Koeffizient von f Summe einer reellen und einer infinitesimalen Zahl ist, können wir $x_0 = 0$ annehmen. Es gilt dann:

$$f_0 = X^n + \sum_{i=1}^{n} r_i X^{n-i}, \deg(f_0) = n, \deg(f_i) \leq n-1 \text{ für alle } i > 0.$$

Wir setzen nun $r := \deg(P_0), s := \deg(Q_0)$. Sicherlich gilt dann $r + s = n$. Nun definieren wir induktiv Folgen $(P_i)_{i<\lambda}, (Q_i)_{i<\lambda} \subset \mathbb{R}[X]$ von reellen Polynomen und $(y_i)_{i<\lambda} \subset \mathbf{No}$ von surrealen Zahlen für eine Ordinalzahl λ.

Sei β eine beliebige Ordinalzahl. Angenommen, $\left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} P_i\right) \cdot \left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} Q_i\right)$ stimmt mit $f(X)$ in allen Koeffizienten vor Termen ω^y, $y \geq_{\text{lex}} y_i$ für ein $i < \beta$ überein, wobei P_i, Q_i für alle $i > 0$ Polynome vom Grad höchstens $r-1, s-1$ seien. Gilt bereits $\left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} P_i\right) \cdot \left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} Q_i\right) = f(X)$, so setzen wir $\lambda = \beta$.

Nehmen wir also an, es gelte $\left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} P_i\right) \cdot \left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} Q_i\right) \neq f(X)$. Wir zeigen: Dann existieren ein $y_\beta \in \mathbf{No}$ und Polynome $P_\beta, Q_\beta \in \mathbb{R}[X]$ so, dass gilt:

(1.) Es ist $y_\beta <_{\text{lex}} y_i$ für alle $i < \beta$, P_β, Q_β haben Grad höchstens $r-1$ bzw. $s-1$ und

$$\left(\sum_{i<\beta+1} \omega^{y_i} P_i\right) \cdot \left(\sum_{i<\beta+1} \omega^{y_i} Q_i\right)$$

stimmt mit $f(X)$ in allen Koeffizienten vor $\omega^y, y \geq_{\text{lex}} y_\beta$ überein.

(2.) Sind alle y_i endliche Summen der x_j für $i < \beta$, so auch y_β.

Sei hierzu y_β der erste Exponent von ω, bei dem die Koeffizienten von $\left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} P_i\right) \cdot \left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} Q_i\right)$ und $f(X)$ nicht übereinstimmen. Nach Annahme gilt dann sofort $y_\beta < y_i$ für alle $i < \beta$. Wir betrachten nun für zunächst beliebige Polynome $G, H \in \mathbb{R}[X]$ das Produkt

$$\left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} P_i + \omega^{y_\beta} G\right) \cdot \left(\sum_{i<\beta} \omega^{y_i} Q_i + \omega^{y_\beta} H\right).$$

Dann stimmt dieses immernoch mit $f(X)$ in allen Koeffizienten vor $\omega^y, y > y_\beta$ überein. Des Weiteren sehen wir, dass der Koeffizient vor ω^{y_β} gleich $P_0 H + G Q_0$ ist.

Nach unserer Bedingung an $P_i, Q_i, i > 0$ sollen G, H Polynome vom Grad höchstens $r-1$ bzw. $s-1$ sein. Damit ist $P_0 H + G Q_0$ ein Polynome vom Grad höchstens $n-1$. Der entsprechende Koeffizient von $f(X)$ ist ein f_i für $i > 0$. Wir wollen also $G, H \in \mathbb{R}[X]$ so wählen, dass $P_0 H + G Q_0 = f_i$ gilt. Aus dem Lemma von Bézout 9.4 folgt bereits die Existenz solcher Polynome $G, H \in \mathbb{R}[X]$, denn P_0, Q_0 sind nach Annahme teilerfremd. Wählen wir nun $P_\beta = G, Q_\beta = H$, so ist Eigenschaft (1.) erfüllt.

Zu Eigenschaft (2.): Es gilt entweder $y_\beta = x_j$ für ein $j < \alpha$ oder y_β ist eine endliche Summe von $y_i, i < \beta$. Damit folgt direkt (2.).

Insbesondere erhalten wir aus (2.) analog zum Beweis von Satz 9.2, dass ein $\lambda \in \mathbf{On}$ existiert mit

$$\underbrace{\left(\sum_{i<\lambda} \omega^{y_i} P_i\right)}_{=:P} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i<\lambda} \omega^{y_i} Q_i\right)}_{=:Q} = \sum_{i<\alpha} \omega^{x_i} f_i = f(X).$$

Wegen $\deg(P_0) = r, \deg(Q_0) = s$ und $\deg(P_i) \le r-1, \deg(Q_i) \le s-1$ können wir P bzw. Q wieder als Polynome in $\mathbf{No}[X]$ vom Grad r bzw. s schreiben. Der letzte Teil der Behauptung über die Conway-Normalform der Koeffizienten folgt ebenfalls direkt aus der Konstruktion, da $y_0 = 0$ sowie $y_i <_{\text{lex}} 0$ für alle $i > 0$ gilt. Insgesamt haben wir damit das Lemma bewiesen. □

Mit dem Lemma von Hensel 9.5 können wir schließlich die reelle Abgeschlossenheit von $\langle \mathbf{No}, +, \cdot, <_{\text{lex}} \rangle$ zeigen. Wir wiederholen hierzu noch ein Resultat aus der Algebra.

Satz 9.6 (Satz von Gauß)**.** *Sei R ein faktorieller Ring. Dann ist auch der Polynomring $R[X]$ faktoriell. Insbesondere ist $R[X]$ faktoriell, wenn R bereits ein Körper ist.*

Beweis. Beispielsweise zu finden in [6, Theorem 5.10]. □

In unserem Fall wissen wir dann auch, dass $\mathbf{No}[X]$ faktoriell ist.

Satz 9.7. *Sei $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^{n-i} \in \mathbf{No}[X]$ ein Polynom ungeraden Grades $\deg(f) = n$. Dann besitzt f eine Nullstelle in $\mathbf{No}$, d.h. es existiert ein $z \in \mathbf{No}$ mit $f(z) := \sum_{i=0}^n a_i z^i = 0$.*

Beweis. Nach Satz von Gauß 9.6 können wir $f = \prod_{i=1}^m f_i$ als Produkt irreduzibler Faktoren $f_i \in \mathbf{No}[X]$ schreiben. Da $\deg(f) = n$ ungerade ist, existiert mindestens ein $i \in \{1, \dots, m\}$ so, dass f_i ebenfalls ungeraden Grades $\deg(f_i)$ ist. Es reicht somit zu zeigen, dass die irreduziblen Polynome ungeraden Grades in $\mathbf{No}[X]$ bereits Grad Eins haben und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass f bereits irreduzibel ist.

Wir wollen unter Anderem durch Substitution weitere Einschränkungen an die Darstellung von f bekommen. Zunächst nehmen wir ohne Einschränkung an, f sei normiert, d.h. es gelte $a_0 = 1$. Substituiere nun $X = Y - \frac{a_1}{n}$. Beachte hierbei, dass $n \neq 0$ gilt. Dann ist das Polynom $f(Y)$ noch immer irreduzibel und es gilt

$$\begin{aligned} f(Y) &= \left(Y - \frac{a_1}{n}\right)^n + a_1\left(Y - \frac{a_1}{n}\right)^{n-1} + r_1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y^{n-k}\left(-\frac{a_1}{n}\right)^k + a_1 Y^{n-1} + r_2 \\ &= Y^n + \underbrace{nY^{n-1}\left(-\frac{a_1}{n}\right) + a_1 Y^{n-1}}_{=0} + r_3 = Y^n + r_3, \end{aligned}$$

wobei $r_1, r_2, r_3 \in \mathbf{No}[X]$ Polynome vom Grad höchstens $n-2$ sind. Durch diese Substitution können wir ohne Einschränkung $f(X) = X^n + \sum_{i=2}^{n} b_i X^{n-i}$ annehmen.

Angenommen, es gilt $f(X) \neq X^n$. Wir wollen unter Zuhilfenahme des Lemmas von Hensel 9.5 einen Widerspruch erreichen. Dazu bedarf es aber noch etwas Vorarbeit.

Betrachte die Conway-Normalform der Koeffizienten von f. Angenommen, $\omega^{x_i} r_i$ sei der Term mit höchstem Exponenten, der in der Conway-Normalform von b_i auftritt, sodass $r_i \neq 0$ gilt. Setze $x = \max_{i=2,\dots,n} \frac{x_i}{i}$. Wir substituieren nun $X = Y\omega^x$ und erhalten

$$f(Y) = (Y\omega^x)^n + \sum_{i=2}^{n} b_i (Y\omega^x)^{n-i} = \omega^{xn} \cdot \underbrace{\left(Y^n + \sum_{i=2}^{n} b_i \omega^{-x\cdot i} Y^{n-i}\right)}_{=:g(Y)}.$$

Das Polynom $g(Y) \in \mathbf{No}[X]$ ist ebenfalls irreduzibel und nach Definition von ω^x ist der erste Term in der Conway-Normalform der Koeffizienten $b_i\omega^{-x\cdot i}$ von $g(Y)$ der Ausdruck $\omega^{x_i} r_i \cdot \omega^{-x\cdot i} = \omega^{x_i - x\cdot i} r_i$. Hierbei gilt $x_i - x \cdot i \leq_{\text{lex}} 0$ mit Gleichheit für mindestens ein i.

Betrachte wie im Lemma von Hensel 9.5 den reellen Teil von g

$$g|_{\mathbb{R}}(Y) := Y^n + \sum_{i=2}^{n} \omega^0 s_i Y^{n-i} \in \mathbb{R}[X], s_i = \begin{cases} r_i, & \text{falls } x_i - x \cdot i = 0 \text{ gilt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{39}$$

mit $s_i \in \mathbb{R}$ und $s_i \neq 0$ für mindestens ein i. Das Polynom $g|_{\mathbb{R}}(Y)$ kann keine zwei irreduziblen Faktoren in $\mathbb{R}[X]$ besitzen, denn sonst wäre $g(Y)$ nach dem Lemma von Hensel 9.5 reduzibel.

Wir betrachten die Zerlegung von $g|_{\mathbb{R}}(Y)$ in $\mathbb{R}[Y]$ in irreduzible Faktoren. Jeder normierte, irreduzible Faktor in $\mathbb{R}[X]$ ist der Form $X - a$ oder $(X - a)^2 + b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Dies lässt sich beispielsweise in [11, 5.Vorlesung, Corollary 3.1] nachlesen. Außerdem können in der Faktorisierung von $g|_{\mathbb{R}}(Y)$

nach dem Lemma von Hensel keine zwei teilerfremde Faktoren auftreten. Damit folgt

$$g|_{\mathbb{R}}(Y) = (Y-a)^n \ (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \quad \text{oder}$$
$$g|_{\mathbb{R}}(Y) = ((Y-a)^2 + b^2)^m \ (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, m \in \mathbb{N}).$$

Da $\deg(g|_{\mathbb{R}}) = \deg(g) = n$ ungerade ist, muss schon $g|_{\mathbb{R}}(Y) = (Y-a)^n$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gelten. Da in (39) der Koeffizient vor Y^{n-1} Null ist, muss $a = 0$ gelten. Das heißt, es ist $g|_{\mathbb{R}}(Y) = Y^n$ im Widerspruch zu (39), da wir $s_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{2, \ldots, n\}$ gefordert haben.

Damit haben wir $f(X) = X^n$ und, da f irreduzibel war, folgt weiter $n = 1$. Offensichtlich hat $f(X) = X$ die Nullstelle $z = 0 \in \mathbf{No}$.

□

Bemerkung 9.8. Aus dem Beweis von Satz 9.7 folgt insbesondere, dass die normierten, irreduziblen Polynome ungeraden Grades in **No** der Form $X - a, a \in \mathbf{No}$ sind.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgendem Resultat, auf welches wir hingearbeitet haben.

Korollar 9.9. *Der angeordnete Körper* $\langle \mathbf{No}, +, \cdot <_{\text{lex}} \rangle$ *ist reell abgeschlossen.*

Beweis. Aus Satz 9.2 folgt, dass jede positive surreale Zahl eine Wurzel besitzt und aus Satz 9.7, dass jedes Polynom ungeraden Grades in $\mathbf{No}[X]$ eine Nullstelle besitzt. Wir haben bereits in Satz 5.16 gesehen, dass $\langle \mathbf{No}, +, \cdot <_{\text{lex}} \rangle$ ein angeordneter Körper ist. Damit haben wir alle Eigenschaften aus Definition 9.1 eines reell abgeschlossenen, angeordneten Körpers gezeigt. □

10. Addition surrealer Zahlen in der Folgenschreibweise

Die Addition zweier surrealer Zahlen $x, y \in \mathbf{No}$ wurde in Kapitel 5 als Operation auf den entsprechenden kanonischen Darstellungen $x = \{X_L \mid X_R\} y = \{Y_L \mid Y_R\}$ eingeführt. Dabei ist $x + y = \{X_L + y, x + Y_L \mid X_R + y, x + Y_R\}$. Das heißt, die Addition ist rekursiv definiert. Dies führt dazu, dass es recht kompliziert ist, konkrete Summen auszurechnen. Im Gegensatz dazu erscheint die Darstellung surrealer Zahlen als Folgen von $\oplus, \ominus$ vergleichsweise einfach zu sein. So ist beispielsweise die Ordnung $<_{\text{lex}}$ auf kanonische Weise auf dieser Darstellung definiert. Auch die Darstellung von Ordinalzahlen als Folgen von $\oplus$ ist sehr einfach. Außerdem lässt sich aus einer Folge x von $\oplus, \ominus$ die kanonische Darstellung $x = \{X_L \mid X_R\}$ sehr viel bestimmen.

Auch in [7, Frage 2] wurde die offene Frage formuliert, wie sich die Operationen $+$ und $\cdot$ auf **No** durch die Folgen von $\oplus$ und $\ominus$ beschreiben lassen. Aus diesen Gründen beschäftigt sich dieses Kapitel mit der Frage, inwiefern sich die Addition auf der Folgenschreibweise definieren lässt.

10.i. Addition reeller Zahlen mit mindestens einem dyadischen Summanden.

Zunächst eine kleine Erinnerung.

Bemerkung 10.1. Die reellen Zahlen bestehen aus den surrealen Zahlen endlicher Länge sowie denjenigen mit Länge ω, welche nicht konstant werden. Aus Satz 6.5 wissen wir, dass surreale Zahlen endlicher Länge zu dyadischen Brüchen korrespondieren, d.h. zu reellen Zahlen der Form $\frac{k}{2^l}$ mit $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}_0$. Der Satz liefert aber noch mehr: Er gibt zudem eine explizite Formel zur Umrechnung dieser Zahlen. Dies macht es möglich, auf einfache Weise surreale Zahlen endlicher Länge zu addieren, wie es das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 10.2. Betrachte etwa die surrealen Zahlen $x = \oplus \ominus \ominus \oplus \ominus, y = \oplus \ominus \ominus$. Mit Satz 6.5 erhalten wir $x = \frac{5}{16}, y = \frac{1}{4}$. Es ist damit $x + y = \frac{9}{16}$. Wieder mit Satz 6.5 folgt schließlich $x + y = \oplus \ominus \oplus \ominus \ominus$.

Man könnte sich zwar überlegen, wie sich die Addition für dyadische Zahlen in Folgenschreibweise formulieren lässt, ohne die Umrechnung in Brüche durchführen zu müssen. Da Satz 6.5 aber eine sehr einfache Charakterisierung der dyadischen Brüche liefert, würde man hieraus keinen Vorteil gewinnen.

Aus diesem Grund betrachten wir nun einen komplizierteren Fall. Wir untersuchen, wie sich ein dyadischer Bruch x und eine reelle, aber nicht dyadische Zahl y addieren lassen. Dazu werden zunächst zwei Algorithmen angegeben, mit denen Summen der Form $e \cdot \frac{1}{2^n} + y$ für $e \in \{-1, 1\}, n \in \mathbb{N}_0$ und eine reelle (nicht dyadische) Zahl $y >_{\text{lex}} 0$ in Folgenschreibeweise bestimmt werden können. Zunächst betrachten wir den Fall für $e = 1$.

Bemerkung 10.3. Zunächst werden einige Anmerkungen an Algorithmus 1 (nachfolgende Seite) gegeben.

Für die Bestimmung von $x + y$ als Folge von $\oplus, \ominus$ werden die beiden Hilfsvariablen z und m verwendet. Zu Beginn ist z die Folge y, d.h. eine surreale Zahl von Länge ω. Die Zahl $m \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die kleinste natürliche Zahl mit $y(m) \neq \oplus = y(0)$. Das heißt, es ist $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Nun wird die Folge z auf geeignete Weise verändert, wobei einige Fallunterscheidungen durchzuführen sind. Es muss jeweils beachtet werden, ob nach Addition $z + \frac{1}{2^n} >_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor$ gilt. Dies ist der Fall, wenn eine der `if`-Bedingungen aus Zeile 4, 14 oder 27 erfüllt ist. Zu begründen ist auch, warum in Zeile 26 ein $i < n + m - 1$ mit $z(i) = \ominus$ existiert. Wir wissen, dass $z(m) = \ominus$ gilt. Da weiter $n \geq 1$ und $z(n + m - 1) = \oplus$ angenommen wurden, muss sogar $n \geq 2$ gelten. Wegen $m < m + 1 \leq n + m - 1$ und $z(m) = \ominus$ folgt dann die Existenz von i.

Am Ende wird die Folge z zurückgegeben.

Der Algorithmus wird anhand einiger Beispiele veranschaulicht. Es ist hierbei stets $m = 1$. Für größeres m verhält sich der Algorithmus analog.

Beispiele 10.4. Am Ende von Kapitel 6 haben wir bereits gesehen, wie sich die reelle Zahl $\frac{1}{3}$ darstellen lässt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots \\ &= \oplus \ominus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \underbrace{\oplus \ominus}_{\text{Periode}} \cdots . \end{aligned}$$

(a) Wir betrachten als erstes $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Zu Beginn setzen wir $z = \frac{1}{3} = \oplus \ominus \ominus \cdots$ und $m = 1$. Es ist weiter $n = 1, z(1) = \ominus, z(2) = \ominus$.

Input: Natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und surreale Zahl $y \in \mathbf{No}$, so dass $y >_{\text{lex}} 0$ reell ist und $\ell(y) = \omega$ gilt, d.h. y ist nicht dyadisch.
Output: Summe $\frac{1}{2^n} + y$ als surreale Zahl in Folgenschreibweise $\frac{1}{2^n} + y : \omega \to \{\oplus, \ominus\}$.

begin
Setze $z : \omega \to \{\oplus, \ominus\}, z(i) = y(i)$ für alle $i < \omega$;
Setze $m = \min\{i < \omega : y(i) \neq \oplus\}$;
if $n = 0$ **then**
Setze $z(k+1) = z(k)$ für alle $k \geq m$;
Setze $z(m) = \oplus$;
else
// Gehe die verschiedenen Fälle für $z(n+m-1)$ durch.
if $z(n+m-1) = \ominus$ **then**
if $z(n+m) = \ominus$ **then**
$z(n+m) = \oplus$;
else
// Dann gilt $z(n+m) = \oplus$. Prüfe, ob $\frac{1}{2^n} + z > \lfloor z \rfloor$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $n+m-1$ die erste Stelle mit $z(n+m-1) = \ominus$ ist.
if $n = 1$ **then**
Setze $z(m) = \oplus, z(k+1) = z(k)$ für alle $k \geq m+2$.
Setze $z(m+1) = z(m+2) = \ominus$.
else
Setze $z(n+m-1) = \oplus, z(n+m) = \ominus$;
end
end
else
// Nun gilt $z(n+m-1) = \oplus$.
if $z(n+m) = \ominus$ **then**
Setze $z(n+m) = \oplus$;
else
Wähle größtes $i < n+m-1$ mit $z(i) = \ominus$;
if $i = m$ **then**
// Dann ist $z + \frac{1}{2^n} >_{\text{lex}} 1$.
Setze $z(i) = \oplus, z(k+1) = z(k)$ für alle $k \geq m+1$;
Setze $z(l) = \ominus$ für alle $l = m+1, \ldots, n+m+1$;
else
Setze $z(i) = \oplus, z(l) = \ominus$ für alle $l = i+1, \ldots, n+m$;
end
end
end
end
return z;
end

Algorithmus 1: Addition eines positiven dyadischen Bruchs und einer positiven, nicht-dyadischen reellen Zahl.

Nach dem Algorithmus setzen wir nun $z(2) = \oplus$. Wir erhalten

$$z = \oplus \ominus \oplus \oplus \ominus \oplus \ominus \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \cdots .$$

Aus Satz 6.5 sehen wir durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} z &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(b) Nun schauen wir uns an, wie sich der Algorithmus bei $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ verhält. Wir setzen $z = \frac{1}{3} = \oplus \ominus \ominus \cdots, m = 1$. Nun ist $n = 2, z(2) = \ominus, z(3) = \oplus$. Außerdem ist 2 offensichtlich nicht die erste Stelle, an welcher z ein $\ominus$ hat. Nach Algorithmus setzen wir also $z(2) = \oplus, z(3) = \ominus$, d.h. wir erhalten

$$\begin{aligned} z &= \oplus \ominus \oplus \ominus \ominus \oplus \ominus \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots \\ &= \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(c) Nun kommen wir zu einem etwas schwierigeren Fall. Wir untersuchen $\frac{1}{2} + \frac{5}{6}$. Bei diesem Fall ist Vorsicht geboten, da die Summe größer als Eins ist. Zunächst setzen wir wie gewohnt $z = \frac{5}{6}, m = 1$, wobei wir die Zeichenfolge von $\frac{5}{6}$ bereits aus (a) kennen. Es ist $n = 1, z(1) = \ominus, z(2) = \oplus$, aber im Gegensatz zu (b) ist 1 die erste Stelle, an welcher z ein $\ominus$ hat. Nun setzen wir $z(1) = \oplus$ und schieben alle weiteren Zeichen $z(k)$ mit $i \geq m + 2 = 3$ um zwei Stellen nach rechts, um anschließend $z(2) = z(3) = \ominus$ einzufügen:

$$\begin{aligned} z &= \oplus \oplus \underbrace{\quad}_{\ominus\ominus \text{ einfügen}} \underbrace{\oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \cdots}_{\to 2 \text{ verschieben}} \\ \rightsquigarrow z &= \oplus \oplus \ominus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \cdots \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(d) Wir betrachten $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}$. Setze $z=\frac{1}{3}, m=1$. Es ist $n=3, z(3)=\oplus, z(4)=\ominus$. Nach Algorithmus müssen wir nur $z(4)=\oplus$ setzen und erhalten:

$$\begin{aligned} z &= \oplus\ominus\ominus\oplus\oplus\oplus\ominus\ \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}}\ \cdots. \\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{256}\pm\dots \\ &= \frac{1}{8}+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{256}\pm\dots\right) \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}. \end{aligned}$$

(e) Wir betrachten $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$. Da $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{13}{12}>1$ gilt, ist bei diesem Fall wieder Vorsicht geboten. Wir setzen $z=\frac{5}{6}, m=1$. Nun ist $n=2, z(2)=\oplus, z(3)=\oplus$ und das größte $i<n+m-1=2$ mit $z(i)=\ominus$ ist $i=1$.

Nach Algorithmus setzen wir nun $z(i)=\oplus$ und schieben die nachfolgenden Zeichen alle um eine Stelle nach rechts. Anschließend setzen wir $z(l)=\ominus$ für $l=2,3,4$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} z &= \oplus\oplus\ominus\ominus\ominus\ominus\oplus\ominus\ \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \\ &= 1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\pm\dots \\ &= \frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\pm\dots\right) \\ &= \frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{13}{12}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(f) Der letzte Fall lässt sich anhand von $\frac{1}{16}+\frac{11}{24}$ einsehen. Die Darstellung von $\frac{11}{24}$ bekommen wir aus (d). Setze $z=\frac{11}{24}, m=1$. Es ist $n=4, z(4)=\oplus, z(5)=\oplus$). Das größte $i<n+m-1=4$ mit $z(i)=\ominus$ ist $i=2$. Wir setzen nun $z(i)=z(2)=\oplus, z(3)=z(4)=z(5)=\ominus$ und erhalten:

$$\begin{aligned} z &= \oplus\ominus\oplus\ominus\ominus\ominus\ominus\ \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}}\ \cdots \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{256}\pm\dots \\ &= \frac{1}{16}+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{256}\pm\dots\right) \\ &= \frac{1}{16}+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{256}\pm\dots\right) \\ &= \frac{1}{16}+\frac{11}{24}=\frac{25}{48}. \end{aligned}$$

Satz 10.5. *Seien $n\in\mathbb{N}_0, y\in\mathbf{No}$, wobei y in Folgenschreibweise gegeben sei. Zudem sei y eine reelle Zahl mit $y>_{\text{lex}}0$ und $\ell(y)=\omega$, d.h. y ist nicht dyadisch. Dann berechnet der Algorithmus 1 nach endlich vielen Schritten die Zeichenfolge $\frac{1}{2^n}+y$ korrekt.*

Beweis. Seien wie in Algorithmus 1 $z : \omega \to \{\oplus, \ominus\}, z(i) = y(i)(i < \omega)$ und $m = \min\{i < \omega : y(i) \neq \oplus\}$. Es werden die einzelnen Fälle des Algorithmus durchgegangen. Dabei muss jeweils gezeigt werden, dass die Änderungen des Algorithmus an den Zeichen von z genau der Addition von $\frac{1}{2^n}$ entsprechen. Hier geht jeweils Satz 6.5 ein. Dieser liefert uns eine Interpretation der Zeichenfolgen als Summanden in Form von dyadischen Brüchen. Sei $\tilde{z}$ die Folge, die durch Änderung des Algorithmus an z hervorgeht. Ist $n = 0$, so folgt die Behauptung direkt aus Satz 6.5. Nehmen wir also $n \geq 1$ an.

Fall 1: Angenommen, es gilt $z(n + m - 1) = \ominus$.

Fall 1.1: Gelte zusätzlich $z(n + m) = \ominus$. Die einzige Änderung an z ist $z(n + m) = \ominus \rightsquigarrow \tilde{z}(n + m) = \oplus$. Wir bemerken, dass weiterhin $\tilde{z}(m) = \ominus$ gelten muss, da die erste Stelle unberührt bleibt. Die weiteren Stellen bleiben ebenfalls unverändert. Nach Satz 6.5 entspricht die Zeichenänderung an der $(n + m)$-ten Stelle von $\ominus$ in $\oplus$ der Addition von $2 \cdot \frac{1}{2^{n+m-m+1}} = \frac{1}{2^n}$, wie gewünscht.

Fall 1.2: Nun nehmen wir $z(n + m) = \oplus$ an. Dieser Fall ist etwas komplizierter, da $\frac{1}{2^n} + z >_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor + 1 = m$ möglich ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $n = 1$ gilt. Das folgt aus Satz 6.5.

Denn falls $n = 1$ gilt, so ist z der Form $z = \oplus \cdots \oplus \overset{m}{\ominus} \overset{m+1}{\oplus} r$ mit $r = z(m + 2)z(m+3)\cdots$ und $\oplus$ an der Stelle von $\cdots$. Damit gilt $z >_{\text{lex}} m + \frac{1}{2} = \lfloor z \rfloor + \frac{1}{2}$. Falls andererseits $n > 1$ gilt, so können wir das Anfangsintervall d von z mit Länge $n + m - 1$ betrachten. Für dieses gelten offensichtlich $d >_{\text{lex}} z$ und $d <_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor + 1$. Weiter ist $d + \frac{1}{2^n}$ eine Summe dyadischer Brüche, für welche $\frac{1}{2^n} + d = d\oplus <_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor + 1$ gilt, wobei $d\oplus$ die Aneinanderreihung von d und $\oplus$ sei. Insgesamt gilt $\frac{1}{2^n} + z <_{\text{lex}} \frac{1}{2^n} + d = d \oplus <_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor + 1$.

Falls nun $n = 1$ gilt, so setzen wir $z(m) = \oplus, z(k + 1) = z(k)$ für alle $k \geq m+2$ und $z(m+1) = z(m+2) = \ominus$. Wir gehen die einzelnen Änderungen durch. Es ist:

$$\begin{aligned} z &= \oplus \cdots \oplus \overset{m}{\ominus} \oplus z(m + 2)z(m + 3)r \quad (\text{bei } \cdots \text{ stehen } \oplus) \\ \rightsquigarrow \tilde{z} &= \oplus \cdots \oplus \overset{m}{\oplus} \ominus \ominus z(m + 2)z(m + 3)r \quad (\text{bei } \cdots \text{ stehen } \oplus), \end{aligned}$$

wobei $r = z(m + 4)z(m + 5)\cdots$ gilt. Mit Satz 6.5 erkennen wir

$$z = m - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{i=m+2}^{\infty} e_i \frac{1}{2^{i-m+1}}, \tilde{z} = m + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \sum_{i=m+3} e_{i-1} \frac{1}{2^{i-m}}$$

$$\text{mit} \quad e_i = \begin{cases} 1, & \text{für } z(i) = \oplus \\ 0, & \text{für } z(i) = \bigcirc \\ -1, & \text{für } z(i) = \ominus \end{cases}$$

Damit erhalten wir insgesamt eine Änderung von $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$, wie gewünscht.

Falls andererseits $n > 1$ gilt, so ist $n + m - 1$ nicht die erste Stelle mit $z(n + m - 1) = \ominus$, denn es ist nach Definition $z(m) = \ominus$. Wir machen die Änderungen $z(n + m - 1) = \ominus \rightsquigarrow \tilde{z}(n + m - 1) = \oplus, z(n + m) = \oplus \rightsquigarrow \tilde{z}(n + m) = \ominus$. Die restlichen Zeichen bleiben gleich. Die erste Änderung entspricht der Addition von $\frac{1}{2^{n-1}}$ und die zweite der Subtraktion von $\frac{1}{2^n}$. Insgesamt ist $\tilde{z} = \frac{1}{2^n} + z$.

<u>Fall 2:</u> Sei nun $z(n+m-1) = \oplus$.

<u>Fall 2.1:</u> Falls $z(n+m) = \ominus$ gilt, so können wir analog wie in Fall 1.1 argumentieren.

<u>Fall 2.2:</u> Gelte nun $z(n+m) = \oplus$. Wir wählen das größte $i < n+m-1$ mit $z(i) = \ominus$. Dieses muss existieren, da nach Definition $z(m) = \ominus$ gilt. Die Schwierigkeit dieses Falles liegt erneut darin, herauszufinden, wann $\frac{1}{2^n} + z >_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor + 1$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $i = m$ gilt.

Falls $i = m$ gilt, so betrachte das Anfangsstück d von z mit Länge $n+m$. Wegen $z(n+m) = \oplus$ gilt $d <_{\text{lex}} z$. Nach Konstruktion ist dann $d(k) = \oplus$ für $k = m+1, \dots \ell(d) - 1$ mit $\ell(d) = n+m$. Mit Satz 6.5 sehen wir dann $\lfloor z \rfloor + 1 = \frac{1}{2^n} + d <_{\text{lex}} \frac{1}{2^n} + z$, wie gewünscht.

Falls $i > m$ gilt, so betrachte das Anfangsstück d von z mit Länge i. Wegen $z(i) = \ominus$ ist $d >_{\text{lex}} z$. Aus $z \leq_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor + 1$ und $i > m$ erhalten wir $d \leq_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor + 1$ und $\lfloor z \rfloor + 1 >_{\text{lex}} d\oplus = d + \frac{1}{2^{i-m+1}} \overset{i<n+m-1}{>_{\text{lex}}} d + \frac{1}{2^n} >_{\text{lex}} \frac{1}{2^j} + z$.

Falls nun $i = m$ gilt, so ist

$$z = \oplus \cdots \oplus \underbrace{\overset{m}{\ominus} \oplus \cdots \overset{n+m-1}{\oplus} \overset{n+m}{\oplus}}_{n+1} z(n+m+1) z(n+m+2) r$$

$$z_j = \oplus \oplus \cdots \oplus \underbrace{\overset{m+1}{\ominus} \ominus \cdots \overset{n+m}{\ominus} \overset{n+m+1}{\ominus}}_{n+1} z(n+m+1) z(n+m+2) r$$

wobei r der Rest der Zeichenfolge $r = z(n+m+3)z(n+m+4)\cdots$ sei. Mit gleicher Argumentation wie in Fall 1.2 erhalten wir aus Satz 6.5 für den Wert der Änderung $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.

Falls $i > m$ gilt, so können wir analog argumentieren. In beiden Fällen erhalten wir $\tilde{z} = \frac{1}{2^n} + z$, wie gewünscht.

Da die Endlichkeit klar ist, haben wir insgesamt den Satz bewiesen. $\square$

Als nächstes betrachten wir Summen der Form $-\frac{1}{2^n} + y$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und eine relle Zahl $y \in \mathbf{No}$ mit $y >_{\text{lex}} 0$ und $\ell(y) = \omega$ in Folgenschreibweise.

Bemerkung 10.6. Seien n, y wie in Algorithmus 2 (nachfolgende Seite). Es wird auf ähnliche Weise wie in Algorithmus 1 vorgegangen. Gestartet wird erneut mit der Zeichenfolge $z = y$ und $m = \min\{i < \omega : y(i) \neq \oplus = y(0)\}$. Anschließend wird die Zeichenfolge z auf geeignete Weise verändert.

Der Unterschied zu Algorithmus 1 besteht darin, dass beachtet werden muss, ob die Ungleichung $-\frac{1}{2^n} + y <_{\text{lex}} \lfloor y \rfloor$ gilt. Dies ist der Fall, wenn eine der `if`-Bedingungen aus Zeile 4 oder 24 erfüllt ist. Wegen $n \geq 1, m \geq 1$ und $z(0) = \oplus$ ist auch klar, dass in Zeile 23 ein maximales $i < n+m-1$ mit $z(i) = \oplus$ existiert.

Am Ende wird wieder die Folge z zurückgegeben.

Input: Natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und surreale Zahl $y \in \mathbf{No}$, so dass $y >_{\text{lex}} 0$ reell ist und $\ell(y) = \omega$ gilt, d.h. y ist nicht dyadisch.
Output: Summe $-\frac{1}{2^n} + y$ als surreale Zahl in Folgenschreibweise $-\frac{1}{2^n} + y : \omega \to \{\oplus, \ominus\}$.

```
begin
    Setze z : ω → {⊕, ⊖}, z(i) = y(i) (i < ω);
    Setze m = min{i < ω : y(i) ≠ ⊕};
    if n = 0 then
        if m = 1 then
            Setze z(0) = ⊖, z(1) = ⊕;
        else
            Setze z(k) = z(k + 1) für alle k ≥ m − 1;
        end
    else
        if  z(n + m − 1) = ⊕ then
            if  z(n + m) = ⊕ then
                z(n + m) = ⊖;
            else
                // Nun gilt z(n + m) = ⊖.
                Setze z(n + m − 1) = ⊖, z(n + m) = ⊕;
            end
        else
            // Nun gilt z(n + m − 1) = ⊖.
            if z(n + m) = ⊕ then
                Setze z(n + m) = ⊖;
            else
                Wähle größtes i < n + m − 1 mit z(i) = ⊕;
                if i = m − 1 then
                    if m=1 then
                        Setze z(i) = ⊖, z(ℓ) = ⊕ für alle l = m, . . . , m + n;
                    else
                        Setze z(i) = ⊖, z(k) = z(k + 1) für alle k ≥ n + m;
                        Setze z(ℓ) = ⊕ für ℓ = m, . . . , n + m − 1;
                    end
                else
                    // Nun gilt i > m − 1.
                    Setze z(i) = ⊖, z(ℓ) = ⊕ für alle ℓ = i + 1, . . . , n + m;
                end
                Setze
            end
        end
    end
    return z;
end
```

Algorithmus 2: Addition eines negativen dyadischen Bruchs und einer positiven, nicht-dyadischen reelle Zahl.

Satz 10.7. *Seien $n \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbf{No}$, wobei y in Folgenschreibweise gegeben sei. Zudem sei y eine reelle Zahl mit $y >_{\text{lex}} 0$ und $\ell(y) = \omega$, d.h. y ist nicht dyadisch. Dann berechnet der Algorithmus 2 nach endlich vielen Schritten die Zeichenfolge $-\frac{1}{2^n} + y$ korrekt.*

Beweis. Der interessanteste Fall ist gegeben, wenn $n > 0$ und $z(n+m-1) = z(n+m) = \ominus$ gelten. Alle anderen Fälle verlaufen wie im Beweis zu Satz 10.5. Seien also $n > 0$ und $z(n+m-1) = z(n+m) = \ominus$. Nun kann der Fall $-\frac{1}{2^n} + z <_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor = m-1$ auftreten. Dies ist genau dann der Fall, wenn $z(i) = \ominus$ für alle $m \leq i < n+m-1$ gilt, d.h. wenn $i = m-1$ das größte Element $i \leq n+m$ mit $z(i) = \oplus$ ist.

Falls $z(i) = \ominus$ für alle $m \leq i \leq n+m$ gilt, so ist klar, dass $-\frac{1}{2^n} + z <_{\text{lex}} \lfloor z \rfloor = m-1$ gilt. Dies folgt aus Satz 6.5. Wir nehmen also an, es existiert ein $\ell \in \{m, \dots, n+m-2\}$ mit $z(\ell) = \oplus$. Sei d das Anfangsstück von z mit Länge ℓ. Dann gilt sicherlich $d <_{\text{lex}} z$ und mit Satz 6.5 erhalten wir $\lfloor z \rfloor = m-1 <_{\text{lex}} d\ominus = -\frac{1}{2^{l-m+1}} \overset{l<n+m-1}{<_{\text{lex}}} -\frac{1}{2^n} + d <_{\text{lex}} -\frac{1}{2^n} + z$, wie gewünscht.

Wähle also das größte $i < n+m-1$ mit $z(i) = \oplus$. Sei $\tilde{z}$ die Zeichenfolge, welche durch Änderung des Algorithmus an z hervorgeht. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1.1: Es gelte $i = m-1$ und $m = 1$. Mit dem Algorithmus folgt

$$z = \oplus \overset{m}{\ominus} \cdots \ominus \overset{n+m}{\ominus} r \rightsquigarrow \tilde{z} = \ominus \overset{m}{\oplus} \cdots \oplus \overset{n+m}{\oplus} r,$$

wobei $r = z(n+m+1)z(n+m+2)\cdots$ gilt. Mit Satz 6.5 erhalten wir

$$z = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} + s \rightsquigarrow \tilde{z} = -1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} + s$$

$$\text{mit } s = \sum_{i=n+m+1}^{\infty} e_i \frac{1}{2^{i-m+1}}, \; e_i = \begin{cases} 1, & \text{für } z(i) = \oplus \\ -1, & \text{für } z(i) = \ominus \end{cases}.$$

Damit ist $\tilde{z} - z = -2 + \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = -\frac{1}{2^n}$, wie gewünscht.

Fall 1.2: Gelte nun $i = m-1$ und $m > 1$. Nach dem Algorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= \oplus \cdots \oplus \oplus \overset{m}{\ominus} \cdots \ominus \overset{n+m-1}{\ominus} \overset{n+m}{\ominus} r \\ \rightsquigarrow \tilde{z} &= \oplus \cdots \oplus \ominus \overset{m}{\oplus} \cdots \oplus \overset{n+m-1}{\oplus} r, \end{aligned}$$

wobei $r = z(n+m+1)z(n+m+1)\cdots$ gilt. Mit Satz 6.5 erhalten wir

$$z = m - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} + s \rightsquigarrow \tilde{z} = m - 1 - \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{2^i} + s,$$

mit s wie in Fall 1.1. Es folgt $\tilde{z} - z = -\frac{1}{2^n}$, wie gewünscht.

Fall 2: Es gelte $i > m-1$. Sei d das Anfangsstück von z von Länge i. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= d \overset{i}{\oplus} \ominus \cdots \ominus \overset{n+m-1}{\ominus} \overset{n+m}{\ominus} r \\ \rightsquigarrow \tilde{z} &= d \overset{i}{\ominus} \oplus \cdots \oplus \overset{n+m-1}{\oplus} \overset{n+m}{\oplus} r, \end{aligned}$$

wobei $r = z(n+m+1)z(n+m+1)\cdots$ gilt. Erneut erhalten wir aus Satz 6.5 die Gleichheit $\tilde{z} = -\frac{1}{2^n} + z$.

Damit ist die Korrektheit gezeigt. Da die Endlichkeit klar ist, ist der Satz insgesamt bewiesen. □

Wir geben ein Beispiel für n, y an in dem Fall, wie er im Beweis zu Satz 10.7 behandelt wurde.

Beispiel 10.8. Gegeben werden zwei Beispiele zur Umsetzung von Algorithmus 2. Aus Beispiel 10.4(e) wissen wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} &= \oplus \ominus \ominus \ominus \ominus \oplus \ominus \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \pm \dots . \end{aligned}$$

(a) Wir betrachten $-\frac{1}{16} + \frac{1}{12}$. Zunächst setzen wir $z = \frac{1}{12} = \oplus \ominus \ominus, m = 1$. Es ist $n = 4, z(4) = \ominus, z(5) = \oplus$. Damit ist die `if`-Bedingung aus Zeile 13 erfüllt. Aus dem Algorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= \oplus \ominus \ominus \ominus \ominus \ominus \ominus \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} \pm \dots \\ &= -\frac{1}{16} + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} \pm \dots\right) \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(b) Nun betrachten wir $-\frac{1}{8} + \frac{1}{12}$. Erneut setzen wir $z = \frac{1}{12}, m = 1$. Es ist nun aber $n = 3, z(3) = z(4) = \ominus$ und $z(i) = \ominus$ für alle $0 < i < 3$. Damit ist die `if`-Bedingung aus Zeile 17 erfüllt. Aus dem Algorithmus folgt

$$\begin{aligned} z &= \ominus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \ominus \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \\ &= \underbrace{-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}_{=-\frac{1}{16}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} \pm \dots \\ &= -\frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} \pm \dots\right) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(c) Nun betrachten wir $-\frac{1}{8}+\frac{13}{12}$. Es ist $z=\frac{13}{12}=\oplus\oplus\ominus\ominus\ominus\ominus\oplus\ominus\ \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}}$ sowie $m=2$. Weiter ist $n=3, z(4)=z(5)=\ominus$, d.h. es ist die `else`-Bedingung aus Zeile 20 erfüllt. Nach Algorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= \oplus\oplus\ominus\ominus\ominus\ominus\oplus\ominus\ \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \\ \rightsquigarrow \tilde{z} &= \oplus\ominus\oplus\oplus\oplus\oplus\ominus\ \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\pm\dots \\ &= -\frac{1}{8}+\Big(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\pm\dots, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Bemerkung 10.9. Mit den Algorithmen 1 und 2 lassen sich nun beliebige Summen $e\cdot\frac{1}{2^n}+y$ mit $e\in\{-1,1\}, n\in\mathbb{N}_0$ und $y\in\mathbf{No}$ reell bestimmen. Ist $\ell(y)<\omega$, so ist y dyadisch und wir können die Darstellung aus Satz 6.5 verwenden. Anderenfalls wird Algorithmus 1 oder 2 verwendet. Zu erwähnen ist, dass unter Umständen die Regel für additive Inverse anzuwenden ist. Ist beispielsweise $e=-1, y<_{\text{lex}}0$, so berechnen wir zunächst mit Algorithmus 1 die Summe $\tilde{z}=\frac{1}{2^n}+(-y)$. Anschließend werden durch $z=-\tilde{z}$ alle Zeichen in $\tilde{z}$ umgedreht. Analog bestimmen wir für $e=1, y<_{\text{lex}}0$ mit Algorithmus 2 die Summe $\tilde{z}=-\frac{1}{2^n}+(-y)$ und setzen $z=-\tilde{z}$.

Nun führen wir noch die Algorithmen 1 und 2 zusammen. Ziel ist es, eine dyadische Zahl x und eine reelle Zahl y, welche jeweils in Folgenschreibweise gegeben sind, addieren zu können. Betrachte hierzu Algorithmus 3 auf der nächsten Seite.

Satz 10.10. *Seien x, y relle Zahlen, x dyadisch und $y>_{\text{lex}}0$ nicht dyadisch. Dann berechnet Algorithmus 3 nach endlich vielen Schritten die Summ $x+y$ korrekt.*

Beweis. Sei $m=\min\{i<\omega : x(i)\neq x(0)\}$. Mit Satz 6.5 erhalten wir $x=\operatorname{sgn}(x)\cdot m+\sum_{i=m+2}^{\ell(x)-1} e_i\cdot\frac{1}{2^{i-m+1}}$ mit $e_i=\begin{cases}1, & \text{für } x(i)=\oplus\\ -1, & \text{für } x(i)=\ominus\end{cases}$. Die Behauptung folgt dann bereits aus den Sätzen 10.5 und 10.7 über die Korrektheit der Algorithmen 1 und 2. $\square$

Input: Surreale Zahlen x, y in Folgenschreibweise, wobei x dyadisch und $y >_{\text{lex}} 0$ reell, aber nicht dyadisch seien.
Output: Summe $x + y$ als surreale Zahl in Folgenschreibweise $x + y : \omega \to \{\oplus, \ominus\}$.

```
begin
    Setze z = y, m = min{i < ω : x(i) ≠ x(0)};
    for i = 1, ..., m do
        if x(0) = ⊕ then
            Bestimme z = 1 + z mit Algorithmus 1 bzw. 2;
        end
        if x(0) = ⊖ then
            Bestimme z = −1 + z mit Algorithmus 2 bzw. 1;
        end
    end
    for i = m, ..., ℓ(x) − 1 do
        if x(i) = ⊕ then
            if z >_lex 0 then
                Bestimme z = 1/2^(i−m+1) + z mit Algorithmus 1;
            else
                Bestimme z = −1/2^(i−m+1) + (−z) mit Algorithmus 2;
                Setze z = −z;
            end
        else
            if z >_lex 0 then
                Bestimme z = −1/2^(i−m+1) + z mit Algorithmus 2;
            else
                Bestimme z = 1/2^(i−m+1) + (−z) mit Algorithmus 1;
                Setze z = −z;
            end
        end
    end
    return z;
end
```

Algorithmus 3: Addition eines positiven oder negativen dyadischen Bruchs und einer positiven reellen Zahl, Version 1.

Algorithmus 3 lässt sich noch etwas verbessern, sodass die Algorithmen 1 und 2 – je nach gegebenem x und y – weniger oft aufgerufen werden müssen. Dies wird in Algorithmus 4 realisiert.

```
   Input: Surreale Zahlen x, y in Folgenschreibweise, wobei x dyadisch und
          y >_lex 0 reell aber nicht dyadisch seien.
   Output: Summe x + y als surreale Zahl in Folgenschreibweise
           x + y : ω → {⊕, ⊖}.
1  begin
2  |  Setze z = y, m = min{i < ω : x(i) ≠ x(0)};
3  |  for i = 1, ..., m − 1 do
4  |  |  if x(0) = ⊕ then
5  |  |  |  Bestimme z = 1 + z mit Algorithmus 1 bzw. 2;
6  |  |  end
7  |  |  if x(0) = ⊖ then
8  |  |  |  Bestimme z = −1 + z mit Algorithmus 2 bzw. 1;
9  |  |  end
10 |  end
11 |  if x >_lex 0 then
12 |  |  Setze ℓ = m, r = min{i < ω : i > ℓ, x(i) ≠ ⊖};
13 |  |  while ℓ < ℓ(x) do
14 |  |  |  Bestimme z = 1/2^(r−m) + y mit Algorithmus 1;
15 |  |  |  Setze ℓ = r, r = min{i < ω : i > ℓ, x(i) ≠ ⊖};
16 |  |  end
17 |  else
18 |  |  // Nun gilt x <_lex 0
19 |  |  Setze ℓ = m, r = min{i < ω : i > ℓ, x(i) ≠ ⊕};
20 |  |  while ℓ < ℓ(x) do
21 |  |  |  Bestimme z = −1/2^(r−m) + y mit Algorithmus 2;
22 |  |  |  Setze ℓ = r, r = min{i < ω : i > ℓ, x(i) ≠ ⊕};
23 |  |  end
24 |  end
25 |  return z;
26 end
```

Algorithmus 4: Addition eines positiven oder negativen dyadischen Bruchs und einer positiven reellen Zahlen, Version 2.

Satz 10.11. *Seien x, y relle Zahlen, x dyadisch und $y >_{\text{lex}} 0$ nicht dyadisch. Dann berechnet Algorithmus 4 nach endlich vielen Schritten die Summe $x+y$ korrekt.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $x >_{\text{lex}} 0$. Der Fall $x <_{\text{lex}} 0$ verläuft analog. Sei $m = \min\{i < \omega : x(i) \neq x(0)\}$, Sei (ℓ_j, r_j) das Paar (ℓ, r), welches man nach dem j-ten Durchlauf der `while`-Schleife in Zeile 13 erhält für $j = 0, \ldots, s$ und ein $s \in \mathbb{N}$. Dann gelten $\ell_s = \ell(x)$ und $\ell_{j+1} = r_j$ für alle $j = 0, \ldots, s-1$. Wir zeigen durch Induktion nach j, dass $m-1+\sum_{i=0}^{j} \frac{1}{2^{r_i - m}} = a_j$ gilt, wobei a_j das Anfangsstück von x mit Länge r_j sei.

<ins>$j = 0$</ins>: Klar, denn es gilt $a_1 = \oplus \cdots \oplus \overset{m}{\ominus} \cdots \overset{r_0 - 1}{\ominus}$. Mit Satz 6.5 folgt $a_0 = m - \sum\limits_{i=1}^{r_0 - m} \frac{1}{2^i} = m - 1 + \frac{1}{2^{r_0 - m}}$.

$\underline{j > 0}$: Es ist

$$
\begin{aligned}
a_j &= \oplus \cdots \oplus \overset{m}{\ominus} x(m+1) \cdots x(r_j - 1) \\
&= \oplus \cdots \oplus \overset{m}{\ominus} x(m+1) \cdots x(r_{j-1} - 1) x(r_{j-1}) x(r_{j-1} + 1) \cdots x(r_j - 1)
\end{aligned}
$$

Nach Definition von (l_j, r_j) ist $x(r_{j-1}) = \oplus, x(r_{j-1} + 1) = \ldots = x(r_j - 1) = \ominus$. Mit der Induktionshypothese und Satz 6.5 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
a_j &= m - 1 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{r_i - m}} + \frac{1}{2^{r_{j-1} - m}} - \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j - 1} \frac{1}{2^{i-m+1}} \\
&= m - 1 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{r_i - m}} + \frac{1}{2^{r_j - m}} = m - 1 + \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{2^{r_i - m}},
\end{aligned}
$$

was zu zeigen war. □

10.ii. **Verallgemeinerung auf beliebige reelle Zahlen.** Mit den Algorithmen 3 bzw. 4 lassen sich außerdem Summen und Differenzen beliebiger reeller Zahlen berechnen, wenn auf die Endlichkeit der Laufzeit verzichtet wird. Allerdings ist es beispielsweise bei einer irrationalen Zahlen $z \in \mathbb{R}$ ohnehin nicht möglich, die Folgendarstellung von z komplett anzugeben, da diese nicht periodisch ist, wie wir in Kapitel 6 gesehen haben. Auch hier müssen wir jedes neue Folgenglied explizit berechnen.

Wenn $x \in \mathbb{R}$ nicht dyadisch ist, bedeutet das, dass in der Darstellung von x immer wieder $\oplus$ und $\ominus$ auftreten und $\ell(x) = \omega$ gilt. Damit ist Algorithmus 3 offensichtlich nicht endlich. Auch Algorithmus 4 ist nicht endlich, da ℓ, r stets natürliche Zahlen sind. Daher gilt stets $\ell < \ell(x)$. Man kann die Algorithmen aber nach einer bestimmen Anzahl j an Durchläufen stoppen, um eine reelle Annäherung z_j an $x + y$ zu bekommen. Für beliebiges $r \in \mathbb{R}_{>0}$ finden wir dabei einen Durchlauf j so, dass $|z_j - (x+y)| < \varepsilon$ gilt. Es gibt aber einen Nachteil der Approximationen z_j. Diese können nicht so gewählt werden, dass man den Beginn der Folge $x + y$ schon sicher kennt. Betrachte etwa folgendes Beispiel. Seien $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$. Bestimme die Summe $x + y$ mit Algorithmus 4, wobei bereits bekannt ist, dass $x + y = \oplus$ gilt. Es ist

$$
\begin{aligned}
x &= \oplus \ominus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \underbrace{\oplus \ominus}_{\text{Periode}} \cdots \\
y &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \pm \ldots. \\
&= \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus \underbrace{\oplus \ominus}_{\text{Periode}} \cdots.
\end{aligned}
$$

Damit ist $x >_{\text{lex}} 0$ und $m = \min\{i < \omega : x(i) \neq \oplus = x(0)\} = 1$. Seien $(\ell_j, r_j)(j \in \mathbb{N})$ das Paar (ℓ, r), welches wir nach dem j-ten Durchlauf der `while`-Schleife in Zeile 13 von Algorithmus 4 erhalten. Sei z_j das z, welches wir ebenfalls nach dem j-ten Durchlauf der `while`-Schleife in Zeile 13 von Algorithmus 4 erhalten.

Induktiv lässt sich $\ell_j = 2j+1, r_j = 2(j+1)+1$ zeigen. Es wird nun in Zeile 14 jeweils Algorithmus 1 mit $n_j = r_j - m$ aufgerufen. Es folgt schließlich

$$z_j = \oplus \ominus \oplus \cdots \overset{2(j+1)}{\oplus} \overset{2(j+1)+1}{\oplus} \oplus \ominus r \quad (\text{bei } \cdots \text{ stehen } \oplus),$$

wobei $r = \oplus\ominus \underbrace{\oplus\ominus}_{\text{Periode}} \cdots$ gilt. Damit gilt zwar $z_j \to 1$ $(j \to \infty)$ als reelle Folge, aber $z_j \neq \oplus = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Betrachtet man jedoch die Zeichenfolge der z_j, so nähert diese sich der surrealen Zahl $\oplus \ominus \underbrace{\oplus \oplus \cdots}_{\omega} = 1 - \frac{1}{\omega} \notin \mathbb{R}$ an. Damit ist gemeint, dass für alle $i \in \mathbb{N}_{>1}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m \geq n$ die Gleichheit $z_m(i) = \oplus$ gilt. Beachte, dass wir jedoch keine Konvergenz von Folgen surrealer Zahlen definiert haben.

10.iii. **Verallgemeinerung auf Ordinalzahlen.** Zunächst eine Erinnerung.

Lemma 10.12. *Sei $x = e \cdot \alpha + a \in \mathbf{No}$ mit einer Limeszahl $\alpha \in \mathbf{On}$ sowie $a \in \mathbb{R}, e \in \{-1, 1\}$. Dann ist x die Zeichenfolge*

$$x = \begin{cases} \oplus \cdots \oplus a, & \textit{falls } e = 1 \\ \ominus \cdots \ominus a, & \textit{falls } e = -1 \end{cases}$$

mit α-vielen $\oplus$ bzw. $\ominus$ am Anfang. Das heißt x ist die Aneinanderreihung der Zeichenfolgen $e \cdot \alpha$ und a.

Beweis. Für $e = 1$ wurde die Behauptung bereits in Beispiel 7.9 gesehen. Für $e = -1$ folgt die Behauptung schließlich aus Satz 5.5. □

Mit Hilfe der Algorithmen 3 bzw. 4 lassen sich sogar Summen von beliebigen reellen und Ordinalzahlen bestimmen. Sind x, y beides Ordinalzahlen, so lassen sich beliebige Summen und Differenzen auf kanonische Weise bilden, da wir bereits wissen, dass surreale Addition der natürlichen Addition auf Ordinalzahlen entspricht. So ist beispielsweise $\omega^2 + \omega$ die Folge von $(\omega^2 + \omega)$-vielen $\oplus$. Nun betrachten wir den Fall, dass genau eine der beiden Zahlen x, y eine Ordinalzahl ist. Sei etwa $x = \lambda + n$ für eine Limeszahl $\lambda \in \mathbf{On}$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist nach Lemma 10.12

$$x + y = \lambda + n + y = \lambda + (n + y) \overset{10.12}{=} \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{\lambda}(n + y),$$

wobei $n + y$ eine Summe einer reellen und einer insbesondere dyadischen Zahl ist, welche wir bereits bestimmen können. Analog erhalten wir die Folgendarstellung von $-x + y$. Um beliebige Summen von Ordinalzahlen zu bestimmen, brauchen wir noch den nachfolgenden Satz.

Seien nämlich $x = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} n_i, y = \sum_{i=1}^{l} \omega^{\beta_i} m_i \in \mathbf{On}$ beliebige Ordinalzahlen in Cantor-Normalform, d.h. es gelten $k, l \in \mathbb{N}, n_i, m_i \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_i)_{i=1}^{k}, (\beta_i)_{i=1}^{l} \subset \mathbf{On}$ sind streng monoton fallend. Wollen wir $x + y$ bestimmen, so können wir dies bereits, da die Summe wieder eine Ordinalzahl ist. Bestimmen wir aber $x + (-y)$ oder $(-x) + y$, so erhalten wir jeweils eine endliche Potenzreihe, in der auch Terme $\omega^{\lambda}(-n)$ für ein $\lambda \in \mathbf{On}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ auftreten können. Damit ist die Summe keine Ordinalzahl mehr.

Mit dem nachfolgenden Satz können wir in diesem Fall trotzdem die zugehörige Zeichenfolge angeben.

Satz 10.13. *Seien $n \in \mathbb{N}, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ beliebig und $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbf{On}$ eine beliebige, streng monoton fallende Folge von Ordinalzahlen. Für $i = 1, \dots, n$ seien*

$$x_i : \omega^{\alpha_i} |m_i| \to \{\oplus, \ominus\}, x_i(\beta) = \begin{cases} \oplus, & \text{falls } m_i > 0 \\ \ominus, & \text{sonst} \end{cases} (\beta \in \mathbf{On}, \beta < \omega^{\alpha_i} |m_i|)$$

surreale Zahlen. Sei $x = x_1 \cdots x_n$ die Aneinanderreihung der x_i. Dann gilt

$$x = \sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha_i} m_i. \tag{40}$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $\alpha := \ell(x) \in \mathbf{On}$. Hierzu sei $\alpha \in \mathbf{On}$ beliebig und wir nehmen an, die Behauptung gelte für alle Ordinalzahlen kleiner als α. Sei $\tilde{x} := x_1 \cdots x_{n-1}$. Nach Induktionshypothese gilt dann $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{\alpha_i} m_i$. Es reicht außerdem die Behauptung für $m_1 > 0$ zu zeigen. Der allgemeine Fall folgt dann aus der Formel für additive Inverse aus Satz 5.5. Sei $i_0 := \max_{i=1,\dots,n} \{i : m_i > 0\}$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

<u>Fall 1:</u> Angenommen, es existiert ein $j \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $m_j < 0$. Setze in diesem Fall $j_0 := \max_{i=1,\dots,n} \{i : m_i < 0\}$.

<u>Fall 1.1:</u> Gelte zusätzlich $m_n > 0$. Dann ist $\omega^{\alpha_n} m_n = \{\beta \in \mathbf{On}, \beta < \omega^{\alpha_n} m_n \mid \emptyset\} \in \mathbf{On}$. Mit der Induktionshypothese und Kofinalitäts-Theorem 1 können wir statt der kanonischen Darstellung für $\tilde{x}$ schreiben:

$$\tilde{x} = \left\{ \sum_{i=1}^{i_0-1} \omega^{\alpha_i} m_i + \omega^{\alpha_{i_0}} (m_{i_0} - 1) + \gamma \,\middle|\, \sum_{i=1}^{j_0-1} \omega^{\alpha_i} m_i + \omega^{\alpha_{j_0}} (m_{j_0} + 1) + \delta \right\}$$
$$(\gamma, \delta \in \mathbf{On}, \gamma < \omega^{\alpha_{i_0}}, \delta < \omega^{\alpha_{j_0}}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha_i} m_i &= \tilde{x} + \omega^{\alpha_n} m_n \\
&= \Bigg\{ \sum_{i=1}^{i_0-1} \omega^{\alpha_i} m_i + \omega^{\alpha_{i_0}} (m_{i_0} - 1) + \gamma + \omega^{\alpha_n} m_n, \tilde{x} + \beta \,\Bigg|\, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{j_0-1} \omega^{\alpha_i} m_i + \omega^{\alpha_{j_0}} (m_{j_0} + 1) - \delta + \omega^{\alpha_n} m_n \Bigg\} \\
&\qquad (\beta, \gamma, \delta \in \mathbf{On}, \beta < \omega^{\alpha_n} m_n, \gamma < \omega^{\alpha_{i_0}}, \delta < \omega^{\alpha_{j_0}}).
\end{aligned}$$

Da die Ordnung auf den Potenzreihen nach Satz 8.15 durch die gradlexikographische Ordnung gegeben ist, können wir mit Kofinalitäts-Theorem 1 auch

$$\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i = \left\{\tilde{x}+\beta \,\middle|\, \sum_{i=1}^{j_0-1}\omega^{\alpha_i}m_i+\omega^{\alpha_{j_0}}(m_{j_0}+1)-\delta+\omega^{\alpha_n}m_n\right\}$$
$$(\beta,\delta\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_n}m_n,\delta<\omega^{\alpha_{j_0}}).$$

schreiben. Durch erneute Anwendung von Kofinalitäts-Theorem 1 können wir in der rechten Menge auch den Summanden $\omega^{\alpha_n}m_n$ weglassen und erhalten schließlich:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i = \left\{\tilde{x}+\beta \,\middle|\, \sum_{i=1}^{j_0-1}\omega^{\alpha_i}m_i+\omega^{\alpha_{j_0}}(m_{j_0}+1)-\delta\right\} \tag{41}$$
$$(\beta,\delta\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_n}m_n,\delta<\omega^{\alpha_{j_0}}).$$

Aus der Induktionshypothese erhalten wir Darstellungen der Elemente aus der linken und rechten Menge von $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i$ in (41). Leicht sieht man aus diesen Darstelungen, dass x die simpelste Zahl ist, welche zwischen den beiden Mengen liegt. Damit folgt die Behauptung in diesem Fall.

Fall 1.2: Nun gelte $m_n<0$. In diesem Fall ist $\omega^{\alpha_n}m_n=\{\emptyset\mid-\beta\}$ $(\beta\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_n}|m_n|)$. Wir können dieselbe Darstellung von $\tilde{x}$ wie in Fall 1.1 verwenden und erhalten analog wie in Fall 1.1 durch wiederholte Anwendung von Kofinalitäts-Theorem 1:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i = \left\{\sum_{i=1}^{j_0-1}\omega^{\alpha_i}m_i+\omega^{\alpha_{i_0}}(m_{i_0}-1)+\gamma \,\middle|\, \tilde{x}-\beta\right\}$$
$$(\beta,\gamma\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_n}m_n,\gamma<\omega^{\alpha_{i_0}}).$$

Erneut erhalten wir aus der Induktionshypothese Darstellungen der Elemente aus der linken und rechten Menge von $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i$. Auch hier erkennt man daraus, dass x die simpelste Zahl ist, welche zwischen den beiden Mengen liegt.

Fall 2: Nun gelte $m_j>0$ für alle $j=1,\dots,n-1$. Gilt auch $m_n>0$, so ist x eine Ordinalzahl und die Behauptung folgt dann bereits aus der Darstellung von Ordinalzahlen aus Kapitel 7. Gelte nun $m_n<0$. Wie in Fall 1.2 ist $\omega^{\alpha_n}m_n=\{\emptyset\mid-\beta\}$ $(\beta\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_n}|m_n|)$. Außerdem ist $\tilde{x}\in\mathbf{On}$, d.h. es ist $\tilde{x}=\{\gamma\mid\emptyset\}$ $(\gamma\in\mathbf{On},\gamma<\tilde{x})$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i=\tilde{x}+\omega^{\alpha_n}m_n=\{\gamma+\omega^{\alpha_n}m_n\mid\tilde{x}-\beta\}$$
$$(\beta,\gamma\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_n}m_n,\gamma<\tilde{x}).$$

Da $m_n<0$ gilt, können wir nach Kofinalitäts-Theorem 1 auch

$$\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i=\{\gamma\mid\tilde{x}-\beta\}\ \ (\beta,\gamma\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_n}|m_n|,\gamma<\tilde{x})$$

schreiben. Wie in Fall 1 folgt auch hier die Behauptung und wir haben den Satz insgesamt bewiesen. □

Bemerkung 10.14. Satz 10.13 liefert uns eine Möglichkeit zur Darstellung von Zahlen $\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i$ für $n\in\mathbb{N}, m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}$ und eine streng monoton fallende Folge von Ordinalzahlen $(\alpha_i)_{i=1}^n\subset\mathbf{On}$. So ist beispielsweise

$$\omega^2-\omega = x:\omega^2+\omega\to\{\oplus,\ominus\}, x(\beta)=\begin{cases}\oplus, & \text{für } \beta<\omega^2\\ \ominus, & \text{für } \omega^2\le\beta<\omega^2+\omega\end{cases},$$

d.h. es ist $\omega^2-\omega=\underbrace{\oplus\cdots}_{\omega^2}\underbrace{\ominus\cdots}_{\omega}$.

Satz 10.15. *Seien $n\in\mathbb{N}, m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und $(\alpha_i)_{i=1}^n$ eine streng monoton fallende Folge von Ordinalzahlen mit $\alpha_n>0$. Für $i=1,\dots,n$ seien*

$$x_i:\omega^{\alpha_i}|m_i|\to\{\oplus,\ominus\}, x_i(\beta)=\begin{cases}\oplus, & \textit{falls } m_i>0\\ \ominus, & \textit{sonst}\end{cases}\quad(\beta\in\mathbf{On},\beta<\omega^{\alpha_i}|m_i|)$$

surreale Zahlen. Sei weiter $r\in\mathbb{R}$ dyadisch und $x=x_1\cdots x_n r$ die Aneinanderreihung der jeweiligen Zeichenfolgen. Dann gilt $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i+r$.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 10.13 führen wir eine Induktion nach $\ell(x)$. Beachte, dass für $\ell(r)\in\{0,1\}$ die Behauptung bereits aus Satz 10.13 folgt. Somit können wir ohne Einschränkung $\ell(r)>1$ annehmen. Ohne Einschränkung können wir weiter $r>0$ annehmen, denn sonst folgt die Behauptung aus der Formel für additive Inverse aus Satz 5.5. Beachte, dass wir nicht $x>_{\text{lex}}0$ fordern.

Sei $s\le_s r$ das Anfangsstück von r mit Länge $\ell(s)=\ell(r)-1$. Beachte hierbei, dass $\ell(r)\in\mathbb{N}_{>1}$ gilt. Nach der Formel aus Satz 6.5 über surreale Zahlen endlicher Länge ist $r=s+e\frac{1}{2^m}$ für gewisse $e\in -1,1, m\in\mathbb{N}_0$. Zudem ist genau dann $e=1$, wenn $r=s\oplus$ gilt. Sei weiter $\tilde{x}$ das Anfangsstück von x mit Länge $\ell(\tilde{x})=\ell(x)-1$. Beachte hierbei, dass $\ell(x)=\lambda+\ell(r)$ für eine Limeszahl $\lambda\in\mathbf{On}$ gilt. Das heißt insbesondere ist $\ell(x)$ eine Nachfolgerzahl.

Nach Induktionshypothese wissen wir, dass $\tilde{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i+s$ gilt. Nun führen wir eine Fallunterscheidung durch.

<u>Fall 1:</u> Gelte zusätzlich $e=1$, d.h. es ist $r=s\oplus$. Dann ist $e\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^m}=\{\bigcirc\mid A\}$ wobei $A=\{a=\oplus\ominus\cdots\ominus\mid\ell(a)=1,\dots,m\}$ eine Menge dyadischer Brüche ist.

Falls $A=\emptyset$ gilt, so ist $m=0$. Nach der Wahl von s und der Formel für surreale Zahlen endlicher Länge aus Satz 6.5 wissen wir dann bereits, dass r nur aus $\oplus$ besteht. Die Behauptung folgt dann direkt aus dem vorherigen Satz, denn es ist $r\in\mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i+r=\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i+\omega^0 r$.

Gelte also $A\neq\emptyset$. Insbesondere ist A endlich. Setze $a_{\min}:=\min\limits_{a\in A}\{a\}$. Nach Kofinalitäts-Theorem 1 gilt $e\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^m}=\{\bigcirc\mid a_{\min}\}$. Genauer gilt $a_{\min}=\frac{1}{2^{m-1}}$. Beachte, dass $m>0$ wegen $A\neq\emptyset$ gilt. Wir erhalten schließlich

$$\sum_{i=1}^{n}\omega^{\alpha_i}m_i+r=\tilde{x}+e\frac{1}{2^m}=\left\{\tilde{x}_L+\frac{1}{2^m},\tilde{x}+\bigcirc\,\middle|\,\tilde{x}_R+\frac{1}{2^m},\tilde{x}+a_{\min}\right\}.$$

Analog zum Beweis von Satz 10.13, können wir mit Kofinalitäts-Theorem 1 schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha_i} m_i + r = \{\tilde{x} \mid \tilde{x} + a_{\min}\} = \left\{ \tilde{x} \,\middle|\, \tilde{x} + \frac{1}{2^{m-1}} \right\}.$$

Da $m > 0$ gilt, muss ein $j \in \mathbb{N}$ existieren mit $r(j) = \ominus$. Mit der Induktionshypothese und Satz 6.5 ist $\tilde{x} + \frac{1}{2^{m-1}} = x_1 \cdots x_n t$ wobei $t \leq_s r$ so gewählt ist, dass $\ell(t)$ minimal mit der Eigenschaft $r(\ell(t)) = \ominus$ ist.

Wegen $x_1 \cdots x_n t \leq_s \tilde{x}$ gilt schließlich $\sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha_i} m_i + r = \left\{ \tilde{x} \,\middle|\, \tilde{x} + \frac{1}{2^{m-1}} \right\} = \{\tilde{x} \mid x_1 \cdots x_n t\} = \tilde{x}\oplus$, wie gewünscht.

Fall 2: Falls andererseits $e = -1$ und $r = s\ominus$ gilt, so können wir analog argumentieren und erhalten insgesamt die Behauptung. □

Bemerkung 10.16. Satz 10.15 liefert eine Darstellung von surrealen Zahlen der Form $\alpha - \beta \pm r$ mit Limeszahlen $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ und $r \in \mathbb{R}$ dyadisch. Beachte, dass man eine Potenzreihe $\sum_{i=1}^{n} \omega^{\alpha_i} m_i$ mit α_i, m_i, n wie in Satz 10.15 mit Hilfe der Cantor-Normalform immer als Summe $\alpha - \beta$ für Limeszahlen $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ schreiben kann.

Der Satz lässt sich aber auch auf beliebige $r \in \mathbb{R}$ ausweiten. Sei hierzu $r = \{r_L \mid r_R\} \in \mathbb{R}$ beliebig, nicht dyadisch und in kanonischer Darstellung. Seien weiter $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ Limeszahlen. Da wegen der gradlexikographischen Ordnung aus Satz 8.15 die Ungleichungen $(\alpha - \beta)_L + r \leq_{\text{lex}} (\alpha - \beta) + r_L$ und $(\alpha - \beta)_R + r \geq_{\text{lex}} (\alpha - \beta) + r_R$ gelten, erhalten wir mit Kofinalitäts-Theorem 1:

$$(\alpha - \beta) + r = \{(\alpha - \beta) + r_L \mid (\alpha - \beta) + r_R\}.$$

Satz 10.15 liefert eine Darstellung der Elemente aus der linken und rechten Menge. Nach Definition des Schnittes der beiden Mengen ist dann bereits $(\alpha - \beta) + r$ die Aneinanderreihung der Zeichenfolgen $\alpha - \beta$ und r.

Bisher konnten wir nur Zahlen der Form $\pm\lambda \pm r$ mit $\lambda \in \mathbf{On}, r \in \mathbb{R}$ darstellen. Das Problem war, dass wir dann Zahlen wie $x = \omega^2 + \frac{1}{2}, y = -\omega + \frac{1}{3}$ in Folgenschreibweise nicht mehr addieren konnten, da wir keine Darstellung für $\omega^2 - \omega$ hatten. Durch Satz 10.15 haben wir dieses Problem gelöst.

Seien nun allgemein $x = \alpha + r, y = \beta + s$ mit Limeszahlen $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ und $r, s \in \mathbb{R}$ in Folgenschreibweise gegeben. Wir gehen davon aus, dass wir daraus die Zahlen α, β in Cantor Normalform ablesen bzw. bestimmen können. Seien weiter $e_1, e_2 \in \{-1, 1\}$ gegeben. Gesucht ist die Folgendarstellung von $e_1(\alpha + r) + e_2(\beta + s)$. Dazu bestimmen wir zunächst $e_1\alpha + e_2\beta$ durch Addition der jeweiligen Conway-Normalformen. Anschließend verwenden wir die Algorithmen 3 bzw. 4 für die Addition $r + s$ der reellen Zahlen r, s in Folgenschreibweise. Mit Satz 10.13 erhalten wir eine Darstellung von $\gamma := e_1\alpha + e_2\beta$. Mit Satz 10.15 ist schließlich $e_1(\alpha + r) + e_2(\beta + s)$ die Aneinanderreihung von γ und $r + s$.

Insgesamt lässt sich sagen, dass Satz 10.15 eine Beschreibung der durch $\mathbb{R} \cup \mathbf{On}$ induzierten, abelschen (additiven) Gruppe als surreale Zahlen in Zeichenfolgen liefert.

Literatur

[1] A. Beutelspacher: *Lineare Algebra*, Springer Spektrum, 2014.
[2] P. Bundschuh: *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer, 2008.
[3] M. Carl: Mitschriebe zur Vorlesung *Mengenlehre*, Universität Konstanz, SoSe 2016.
[4] J. H. Conway: *On Numbers and Games*, CRC Press, 2001.
[5] A. Fehm: Skript zur Vorlesung *Lineare Algebra II*, Universität Konstanz, SoSe 2015.
[6] A. Fehm: Skript zur Vorlesung *Algebra*, Universität Konstanz, WiSe 2015/2016.
[7] L. Galeotti (Schriftführer): Report No. 60/2016, *Mini-Workshop: Surreal Numbers, Surreal Analysis, Hahn Fields and Derivations*, DOI: 10.4171/OWR/2016/60
[8] A. Gonshor: *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, Cambridge University Press, 1986.
[9] D. E. Knuth: *Insel der Zahlen*, Vieweg, 1979.
[10] M. Matusinski: *Introduction to Surreal Numbers*, Report No. 60/2016, DOI: 10.4171/OWR/2016/60
[11] S. Kuhlmann: Skript zur Vorlesung *Reelle Algebraische Geometrie I*, Universität Konstanz, WiSe 2014/2015.
[12] J. G. Rosenstein: *Linear Orderings*, Academic Press, 1982.
[13] O. Schnürer: Skript zur Vorlesung *Analysis I*, Universität Konstanz, WiSe 2014.