Universität Konstanz

von Neumann-Algebren
– Vorlesungsskript –

Helmut J. Heiming

Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik
Nr. 34, April 1997

ISSN 1430–3558

von Neumann-Algebren

Helmut J. Heiming
Universität Konstanz
Fakultät für Mathematik und Informatik

Skript zur Vorlesung im Wintersemester 1996/97

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skript ist begleitend zu einer zweistündigen Vorlesung enstanden, die ich im Wintersemester 1996/97 an der Universität Konstanz gehalten habe. Diese Vorlesung war eine Fortsetzung einer ebenfalls von mir gehaltenen einführenden Vorlesung in die Theorie der Banachalgebren und insbesondere auch der C*-Algebren.

Schwerpunkt in dieser Vorlesung sind C*-Unteralgebren der Operatorenalgebra auf einem Hilbertraum, die bezüglich Topologien abgeschlossen sind, die schwächer als die durch die Operatornorm induzierte Topologie sind. Diese topologische Abgeschlossenheit spiegelt sich in einer algebraischen Abgeschlossenheit im Sinne der Bikommutatorbildung und einer operatortheoretischen im Sinne der Existenz von Spektralscharen wider. Die hier gewählte Darstellung betont gerade den letzten Aspekt, um zu zeigen, daß von Neumann-Algebren die natürliche „Beschränkung auf das Wesentliche“ sind, wenn man die Spektraltheorie einzelner oder auch Gruppen von linearen Operatoren studieren will. Dementsprechend stehen dann auch Konstruktionen im Projektionenverband einer von Neumann-Algebra im Mittelpunkt der Darstellung.

Als Skript zu einer Vorlesung stellt diese Darstellung keinen Anspruch auf Originalität der präsentierten Ergebnisse; diese lassen sich in den verschiedenen, im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen auffinden. Es handelt sich vielmehr um eine mit einem „roten Faden“ versehenen Sammlung von Themen aus diesem mittlerweile doch weitverzweigten Gebiet der Funktionalanalysis.

Konstanz, den 25. April 1997
Helmut J. Heiming

KAPITEL 1

Operatoralgebren

1. C*-Algebren — Zusammenfassung der grundlegenden Eigenschaften und Begriffe

Dieser erste Abschnitt stellt noch einmal die grundlegenden Eigenschaften und Sätze für C*-Algebren zusammen. Die Beweise findet man leicht in der einschlägigen Literatur bzw. im Skript zur Vorlesung „Banachalgebren“ (Konstanz, SS96).
Im gesamten vorliegenden Text wird als Grundkörper der Körper der komplexen Zahlen **C** angenommen. Desweiteren sei durchweg vorausgesetzt, daß, wenn es nicht explizit gefordert wird, die auftretenden Algebren nicht nur das Nullelement enthalten.

Definition. Eine Banachalgebra $[\mathcal{A}, \| \, \|]$ mit Involution

$$^*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, x \mapsto x^*$$

heißt *C*-Algebra*, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt,

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \,. \tag{1.1}$$

Bemerkung. Im allgemeinen ist nicht gefordert, daß $\mathcal{A}$ ein Einselement enthält. Aber es ist jedoch immer möglich, eine C*-Algebra $\mathcal{A}$ ohne Eins isometrisch in eine C*-Algebra $\mathcal{A}[e]$ mit Einselement e einzubetten, daß $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}[e]$ ein maximales Ideal wird.

1.1. Darstellungen.
Elementar aber denoch grundlegend für die Theorie der C*-Algebren sind gewisse Algebren stetiger Funktionen.

Beispiel 1.1. Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist mit punktweiser komplexer Konjugation als Involution $[C_0(\Omega), \| \, \|_\infty]$, der Raum der auf Ω stetigen, *im Unendlichen verschwindenden*[1] Funktionen, eine kommutative C*-Algebra.
Ist Ω sogar kompakt, dann ist $C_0(\Omega) = C(K)$ der Raum aller stetigen Funktionen auf Ω. Man erhält so eine C*-Algebra mit Eins.

Theorem 1.1 (Gel'fand). *Sei $[\mathcal{A}, \| \, \|]$ eine kommutative C*-Algebra und sei $\Sigma(\mathcal{A})$ ihr* Strukturraum *(i.e. die Menge der multiplikativen Funktionale $\omega \neq 0$ auf $\mathcal{A}$). Ein isometrischer C*-Isomorphismus ist durch die* Gel'fandtransformation

$$\hat{}\colon \mathcal{A} \to C_0(\Omega), x \mapsto \hat{x}$$

$(\hat{x}(\omega) = \omega(x))$ *gegeben.*

Bemerkungen.

- Kommutative C*-Algebren sind also im wesentlichen als Algebren stetiger Funktionen auf einem lokalkompakten Hausdorffraum gegeben.
- Eine kommutative C*-Algebra hat genau dann eine Eins, wenn ihr Strukturraum kompakt ist.

[1] Ein $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ verschwindet im Unendlichen, wenn die Menge $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ für jedes $\epsilon > 0$ kompakt ist.

Ein wichtiger Beitrag zur Theorie wird durch die folgende Charakterisierung stetiger Linearformen auf einer kommutativen C*-Algebra geleistet.

RIESZSCHER DARSTELLUNGSSATZ. *Der Dualraum von $C_0(\Omega)$ ist zum Raum der beschränkten, regulären Borelmaße auf Ω isometrisch isomorph. Dieser Isomorphismus wird durch die Beziehung*

$$\phi(f) = \int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in C_0(\Omega))$$

vermittelt; hierbei ist ϕ das durch das Maß μ induzierte Funktional auf $C_0(\Omega)$.

Ein weiteres wichtiges Beispiel für eine C*-Algebra wird nun gegeben.

BEISPIEL 1.2. Sei H ein Hilbertraum. Die Algebra $[\mathcal{B}(H), \|\,\|]$ der stetigen linearen Operatoren $u\colon H \to H$ wird durch die *Adjungiertenbildung* $u \mapsto u^*$, die durch die Beziehung

$$\langle u\zeta\,,\,\eta\rangle = \langle \zeta\,,\,u^*\eta\rangle \quad (\zeta, \eta \in H) \tag{1.2}$$

gegeben ist, eine C*-Algebra.

Beachtet man, daß natürlich auch eine normabgeschlossene, unter der Involution invariante Unteralgebra einer C*-Algebra wieder eine C*-Algebra ist, so erhellt das nun angegebene Theorem die wichtige Rolle, die die Algebren $\mathcal{B}$(H) spielen. Man kann sich nämlich bei der Untersuchung von C*-Algebren auf den Fall von C*-Unteralgebren einer Algebra $\mathcal{B}$(H) beschränken. Und so werden wir dann auch weiter vorgehen.

THEOREM 1.2 (Gel'fand-Naimark-Segal). *Zu jederC*-Algebra $\mathcal{A}$ gibt es einen Hilbertraum H, einen Einheitsvektor $\zeta \in H$ und einen isometrischen C*-Homomorphismus $\Pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ derart, daß*

$$\{\,\Pi(x)\zeta + \lambda\zeta \;:\; x \in \mathcal{A},\; \lambda \in \mathbf{C}\,\} \tag{1.3}$$

dicht in H ist.

BEMERKUNGEN.

- Wenn $\mathcal{A}$ eine Eins hat, reduziert sich die in (1.3) angegebene Menge auf $\Pi(\mathcal{A})\zeta \subset H$, i.e. die *Bahn von ζ unter $\mathcal{A}$.*
- Allgemein bezeichnet man ein Paar (Π, H), das aus einem Hilbertraum H und einem C*-Homomorphismus $\Pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ besteht, als *Darstellung* der C*-Algebra $\mathcal{A}$. Eine Darstellung mit injektivem, somit isometrischem Π wird *treu* genannt. Gibt es zu einer Darstellung (Π, H) von $\mathcal{A}$ einen Vektor $\zeta \in H$, daß die entsprechend zu (1.3) gebildete Menge dicht in H ist, so liegt eine *zyklische* Darstellung mit *zyklischem Vektor* ζ vor. Theorem 1.2 besagt also:
  Jede C-Algebra besitzt eine treue, zyklische Darstellung.*

1.2. Normale Elemente und ihr Spektrum. Durch ihr Verhalten in Bezug auf die Involution einer C*-Algebra sind einige ihrer Elemente ausgezeichnet. Hier seien zunächst die wichtigsten Typen wiederholt und durch ihr Spektrum klassifiziert.

DEFINITION. Ein Element x der C*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *normal*, wenn $xx^* = x^*x$. Es heißt *selbstadjungiert*, wenn $x = x^*$. Mit $\mathcal{A}_n$ bzw. mit $\mathcal{A}_h$ werden die Mengen der normalen bzw. selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{A}$ bezeichnet.

BEMERKUNGEN.

- In einer kommutativen C*-Algebra sind natürlich alle Elemente normal. Die selbstadjungierten Elemente von $C_0(\Omega)$ sind gerade die reellwertigen Funktionen.

- Selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ sind solche Operatoren u, für die
$$\langle u\zeta\,,\eta\rangle = \langle \zeta\,, u\eta\rangle \quad (\zeta,\eta\in H).$$

DEFINITION. Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra mit Eins und $x\in\mathcal{A}$. Die *Resolventenmenge* von x ist
$$\rho(x) := \rho_{\mathcal{A}}(x) := \{\,\lambda\in\mathbf{C} \,:\, \lambda - x \text{ invertierbar}\,\}\,.$$
Das *Spektrum* von x ist
$$\sigma(x) := \sigma_{\mathcal{A}}(x) := \mathbf{C}\setminus\rho(x).$$
Ist $\mathcal{A}$ ohne Eins, so sei das Spektrum von $x\in\mathcal{A}$ gegeben durch
$$\sigma(x) := \sigma_{\mathcal{A}}(x) := \sigma_{\mathcal{A}[e]}(x)\setminus\{\,0\,\}\,.$$
Der *Spektralradius* von x ist
$$r(x) := \sup\{\,|\lambda| \,:\, \lambda\in\sigma(x)\,\} \quad (\sup\emptyset := 0).$$

BEMERKUNG. Man beachte, daß im Fall einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ ohne Eins für jedes ihrer Elemente x gilt: $0\in\sigma_{\mathcal{A}[e]}(x)$.

Zusammenfassend ergibt sich für das Spektrum eines Elements einer C*-Algebra:

THEOREM 1.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra und $x\in\mathcal{A}$. Dann gilt:*

(i) *Hat $\mathcal{A}$ eine Eins, dann ist $\sigma(x)$ eine nichtleere, kompakte Teilmenge von $\mathbf{C}$. Sonst ist $\sigma(x)$ beschränkt und lokalkompakt.*

(ii) *Ist x Element einer C*-Unteralgebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ und haben beide Algebren dieselbe Eins, dann ist $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

(iii) *Für den Spektralradius von x gilt:*
$$r(x) = \inf_{n\in\mathbf{N}} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}\,.$$
Ist x normal, dann ist $r(x) = \|x\|$.

Eine wesentliche Eigenschaft normaler Elemente einer C*-Algebra ist, daß sie eine kommutative C*-Unteralgebra erzeugen und so einen *stetigen Funktionalkalkül* zulassen.

THEOREM 1.4. *Ist $x\neq 0$ ein normales Element der C*-Algebra $\mathcal{A}$, dann gibt es eine C*-Isometrie $\Phi_x\colon C_0(\sigma(x))\to\mathcal{A}$, $f\mapsto f(x)$, daß gilt:*

(i) $\Phi_x(\lambda\mapsto\lambda) = x$.

(ii) *$\Phi_x(C_0(\sigma(x)))$ ist die kleinste (kommutative) C*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die x, x^* und ggfs. die Eins von $\mathcal{A}$ enthält.*

(iii) *Für $f\in C_0(\sigma(x))$ ist $\sigma_{f(x)} = f(\sigma(x))$.*

Wenn man beachtet, daß für $f\in C_0(\Omega)$ gerade $\sigma(f) = f(\Omega)$ ist, so ergibt sich leicht die folgende Charakterisierung selbstadjungierter Elemente einer C*-Algebra.

LEMMA 1.5. *Sei x ein normales Element der C*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann ist x genau dann selbstadjungiert, wenn es reelles Spektrum hat.*

DEFINITION. Ein selbstadjungiertes Element einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ mit nichtnegativem Spektrum heißt *positiv*. Man schreibt $\mathcal{A}_+$ für die Menge der positiven Elemente von $\mathcal{A}$.

LEMMA 1.6. *Ein Element x einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ ist genau dann positiv, wenn es eine Darstellung $x = y^*y$ mit einem geeigneten $y\in\mathcal{A}$ hat.*

BEMERKUNG. Die Menge $\mathcal{A}_+$ induziert eine Ordnungsstruktur auf $\mathcal{A}_h$.

2. Normale Operatoren

In diesem Abschnitt wird der Funktionalkalkül für normale Operatoren auf einem Hilbertraum auf eine die Menge der auf dem Spektrum des Operators stetigen Funktionen umfassende Klasse erweitert. Im folgenden sei nun H ein Hilbertraum.

2.1. Starke und schwache Operatortopologie. Neben der *Normtopologie*[2], die mit τ_n bezeichnet werde und für die eine Umgebungsbasis[3] des Nulloperators durch Mengen der Form

$$\{\, u \in \mathcal{B}(H) \,:\, \|u\| < \epsilon \,\} \quad (\epsilon > 0) \tag{1.4}$$

gegeben ist, gibt es noch zwei weitere, für die Operatortheorie natürliche, lokalkonvexe Topologien.

Definition. Eine Umgebungsbasis des Nulloperators für die *starke Operatortopologie* τ_s auf $\mathcal{B}$(H) wird durch Mengen der Form

$$\left\{ u \in \mathcal{B}(H) \,:\, \max_{k=1,\dots,n} \|u\zeta_k\| < \epsilon \right\} \tag{1.5}$$

$(n \in \mathbf{N}; \zeta_1, \dots, \zeta_n \in H; \epsilon > 0)$ beschrieben.
Mengen der Gestalt

$$\left\{ u \in \mathcal{B}(H) \,:\, \max_{k=1,\dots,n} |\langle u\zeta_k \,,\, \eta_k\rangle| < \epsilon \right\} \tag{1.6}$$

$(n \in \mathbf{N}; \zeta_1, \dots, \zeta_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in H; \epsilon > 0)$ bilden eine Umgebungsbasis des Nulloperators für die *schwache Operatortopologie* τ_w auf $\mathcal{B}$(H).

Bemerkung. Die starke Operatortopologie entspricht der „Topologie der punktweisen Konvergenz“ für Abbildungen auf H, versehen mit der Normtopologie. Die schwache Operatortopologie ist dementsprechend die „Topologie der schwachen punktweisen Konvergenz“, d.h. der punktweisen Konvergenz auf H, versehen mit seiner schwachen Topologie.

Diese Operatortopologien stehen in einer einfachen Relation zueinander. Desweiteren stellt man fest, daß in der schwachen Operatortopologie stetige Linearformen auf $\mathcal{B}$(H) im wesentlichen bereits durch die Definition erfaßt sind.

Lemma 1.7.

(i) *Sei $\phi \colon \mathcal{B}(H) \to \mathbf{C}$ ein τ_w-stetige Linearform. Dann gibt es Vektoren $\zeta_1, \dots, \zeta_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in H$, daß*

$$\forall u \in \mathcal{B}(H) : \phi(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u\zeta_i \,,\, \eta_i\rangle \,.$$

(ii) *Die schwache Operatortopologie ist die gröbste und die Normtopologie ist die feinste dieser Topologien,*

$$\tau_w \subset \tau_s \subset \tau_n. \tag{1.7}$$

Bemerkung. Man überzeugt sich leicht davon, daß in (1.7) Gleichheit an einer Stelle genau dann auftritt, wenn H endlichdimensional ist.

---

[2]„Topologie“ steht hier und im folgenden für das System der offen Mengen; in diesem speziellen Fall also für das System der normoffenen Mengen

[3]Für Vektorraumtopologien reicht es eine Umgebungsbasis des Nullvektors anzugeben; Umgebungbasen für andere Vektoren ergeben sich dann durch Translation

Beweis von Lemma 1.7. (i): Die τ_w-Stetigkeit von ϕ sichert die Existenz von Vektoren $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in H$ und ein $\epsilon > 0$, daß

$$\text{(a)} \qquad \forall u \in \mathcal{B}(H) : \max_{1 \leq i \leq n} |\langle u\zeta_i , \eta_i \rangle| < \epsilon \implies |\phi(u)| < 1.$$

Setzt man $\phi_i(u) := \langle u\zeta_i , \eta_i \rangle$, so erhält man τ_w-stetige Linearformen. Man schließt leicht aus (a), daß $\bigcap \ker \phi_i \subset \ker \phi$, und damit, daß $\phi \in \operatorname{span}(\phi_1, \ldots \phi_n)$.
(ii): Die Inklusionskette ist unmittelbar aus den Definitionen der entsprechenden Nullumgebungsbasen ersichtlich.

□

Nachfolgend sind einige elementare Eigenschaften und Beziehungen dieser Operatortopologien zusammengefaßt.
Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge hat. Für einen Hilbertraum ist Separabilität etwa dadurch gekennzeichnet, daß er eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt. Diese Art Hilbertraum tritt auch in der Anwendung vornehmlich auf. Im folgenden werden wir zeigen, daß, falls H separabel ist, für beschränkte Teilmengen von $\mathcal{B}$(H) die schwachen Topologien metrisierbar sind. Der Nutzen hiervon liegt vor allem darin, daß man sich bei Grenzwertbildungen auf Folgen zurückziehen kann.

Lemma 1.8. *Sei H ein separabler Hilbertraum und $A \subset \mathcal{B}(H)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{B}(H)$. Dann sind die Einschränkungen der starken und der schwachen Operatortopologie auf A metrisierbar.*

Beweis. Sei $W := \{ \xi_k \in H : k \in \mathbf{N} \}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von H und sei $M := \sup \{ \|u\| : u \in A \}$.
Sind nun $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in H$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann findet man $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n \in W$ so, daß

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|\zeta_k - \zeta'_k\| < \frac{\epsilon}{4M}.$$

Damit wird für beliebiges $u \in A$

$$\left\{ v \in A : \max_{1 \leq k \leq n} \|(v-u)\zeta'_k\| < \epsilon/2 \right\} \subset \left\{ v \in A : \max_{1 \leq k \leq n} \|(v-u)\zeta_k\| < \epsilon \right\}.$$

D.h. W induziert dieselbe starke Operatortopologie auf A wie H. Diese von W auf diese Weise induzierte Topologie wird aber auch durch die Metrik

$$d(u,v) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|(u-v)\xi_k\|}{1 + \|(u-v)\xi_k\|} \quad (u, v \in A)$$

gegeben.
Zu $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \in H$ und $\epsilon > 0$ findet man $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n, \eta'_1, \ldots, \eta'_n \in W$ so, daß zunächst

$$\|\zeta_k - \zeta'_k\| < \frac{\epsilon}{6M\,\|\eta_k\| + 1}$$

und dann

$$\|\eta_k - \eta'_k\| < \frac{\epsilon}{6M\,\|\zeta'_k\| + 1}$$

für $1 \leq k \leq n$. Für beliebiges $u \in A$ ergibt sich dann wieder

$$\left\{ v \in A : \max_{1 \leq k \leq n} |\langle (v-u)\zeta'_k , \eta'_k \rangle| < \epsilon/3 \right\}$$
$$\subset \left\{ v \in A : \max_{1 \leq k \leq n} |\langle (v-u)\zeta_k , \eta_k \rangle| < \epsilon \right\}.$$

Also induziert W auch dieselbe schwache Operatortopologie auf A wie H. Die entsprechende Metrik ist hier etwa durch

$$d(u,v) := \sum_{k,l=1}^{\infty} 2^{-(k+l)} \frac{|\langle (u-v)\xi_k\,,\,\xi_l\rangle|}{1+|\langle (u-v)\xi_k\,,\,\xi_l\rangle|} \quad (u,v\in A)$$

gegeben. □

Die schwachen Topologien sind (nach Konstruktion) verträglich mit der Vektorraumstruktur von $\mathcal{B}(\mathrm{H})$, d.h., die Vektoraddition und die skalare Multiplikation sind stetig. Anders sieht es bei der Stetigkeit der Involution $u \mapsto u^*$ und der Multiplikation aus.

Lemma 1.9. *Sei $u_0 \in \mathcal{B}(H)$ und sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{B}(H)$.*

(i) *Die Abbildungen $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$, $u \mapsto uu_0, u_0u$ sind τ_s- und τ_w-stetig.*
(ii) *Die Abbildung $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$, $u \mapsto u^*$ ist τ_w-stetig.*
(iii) *Die Abbildung $A \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$, $(u,v) \mapsto uv$ ist τ_s-stetig.*
(iv) *Die Abbildung $\mathcal{B}(H)_n \to \mathcal{B}(H)_n$, $u \mapsto u^*$ ist τ_s-stetig.*

Beweis. (i): Dies folgt direkt aus den Beziehungen

$$\|(uu_0 - vu_0)\zeta\| = \|(u-v)u_0\zeta\| \qquad \|(u_0u - u_0v)\zeta\| \le \|u_0\|\,\|(u-v)\zeta\|$$
$$\langle (uu_0 - vu_0)\zeta\,,\,\eta\rangle = \langle (u-v)u_0\zeta\,,\,\eta\rangle \qquad \langle (u_0u - u_0v)\zeta\,,\,\eta\rangle = \langle (u-v)\zeta\,,\,u_0^*\eta\rangle$$

für beliebige $\zeta, \eta \in H$.
(ii): Es gilt $\langle u^*\zeta\,,\,\eta\rangle = \langle \zeta\,,\,u\eta\rangle$ für $\zeta, \eta \in H$. Dies zeigt die τ_w-Stetigkeit der Involution.
(iii): Hier muß man zum Beweis die Ungleichung

$$\|(u_0v_0 - uv)\zeta\| \le \|(u_0 - u)v_0\zeta\| + \sup_{u\in A}\|u\|\,\|(v_0 - v)\zeta\|$$

heranziehen, die für beliebige (u_0, v_0), $(u,v) \in A \times \mathcal{B}(H)$ und beliebiges $\zeta \in H$ gilt.
(iv): Ist $u\colon H \to H$ normal und $\zeta \in H$ beliebig, so gilt

$$\|u^*\zeta\|^2 = \langle u^*\zeta\,,\,u^*\zeta\rangle = \langle uu^*\zeta\,,\,\zeta\rangle = \langle u^*u\zeta\,,\,\zeta\rangle = \langle u\zeta\,,\,u\zeta\rangle = \|u\zeta\|^2\,.$$

□

Die in Lemma 1.9 ausgelassenen Fälle werden nun erläutert.

Beispiel 1.3. Sei $H = \ell_2$ der Raum der quadratsummierbaren Folgen $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$. Dies ist ein separabler Hilbertraum. Durch $v(\alpha_n) := (\alpha_{n+1})$ wird eine lineare Abbildung $v\colon H \to H$ definiert. Deren Adjungierte v^* ist durch $(\beta_n) := v^*(\alpha_n)$ mit $\beta_1 = 0$ und $\beta_{n+1} = \alpha_n$ für $n \ge 1$ gegeben. Es gilt weiterhin daß $vv^* = \mathrm{id}$ und damit $v^k(v^*)^k = \mathrm{id}$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Außerdem ist $\|v\| = \|v^*\| = 1$ und entsprechend für die Potenzen dieser Operatoren.
Die nun folgenden Betrachtungen finden in der Einheitskugel von $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ statt. Diese ist nach Lemma 1.8 metrisierbar in den schwachen Topologien. D.h., es reicht, Folgenstetigkeit zu untersuchen.
Für $\zeta := (\alpha_n)$ berechnet man, daß

$$\left\|v^k\zeta\right\| = \Big(\sum_{n=k}^{\infty}|\alpha_n|^2\Big)^{1/2} \to 0 \text{ und } \left\|(v^*)^k\zeta\right\| = \|\zeta\|\,.$$

Damit gilt $v^k \to 0$ aber $(v^*)^k \not\to 0$ in der starken Operatortopologie. Dies zeigt, daß die Involution nicht τ_s-stetig ist.
Da (v^k) in der starken Operatortopologie eine Nullfolge bildet, ist sie und damit auch die Folge $((v^*)^k)$ dies auch bezüglich der schwachen Operatortopologie. Aber

die konstante Folge $(v^k(v^*)^k)$ ist natürlich keine Nullfolge. Also ist die Multiplikation selbst dann nicht τ_w-stetig, wenn man sich mit beiden Faktoren auf beschränkte Mengen zurückzieht.
Um zu zeigen, daß die Multiplikation auch nicht τ_s-stetig ist, muß etwas weiter ausgeholt werden. Insbesondere muß die Einheitskugel verlassen werden und man muß zu Filter- oder Netzkonvergenz übergehen.
Sei $\mathbf{U}$ eine Nullumgebungsbasis für τ_s. Setzt man $I := \mathbf{N} \times \mathbf{U}$ und definiert für $\iota := (n_\iota, U_\iota)$ sowie $\kappa := (n_\kappa, U_\kappa)$ aus I

$$\iota \prec \kappa : \Longleftrightarrow \; n_\iota \leq n_\kappa \text{ und } U_\kappa \subset U_\iota ,$$

so erhält man eine gerichtete Menge $[I, \prec]$. Sei nun $\iota \in I$ gewählt. Wie bereits gesehen, ist (v^k) eine τ_s-Nullfolge, also gibt es ein $K \in \mathbf{N}$ so, daß $v^K \in n_\iota^{-1} U_\iota$. Setzt man jetzt

$$u_\iota := n_\iota v^K \text{ und } w_\iota := n_\iota^{-1} (v^*)^K),$$

so ergibt sich aus dem bisherigen, daß $u_\iota w_\iota = \mathrm{id}$. Die Konstruktion gewährleistet, daß zum einen

$$\tau_s\text{-}\lim_{\iota \in I} u_\iota = 0 \text{ und } \tau_n\text{-}\lim_{\iota \in I} w_\iota = 0,$$

und zum anderen τ_s-$\lim_{\iota \in I} u_\iota w_\iota = \mathrm{id} \neq 0$. D.h., die Multiplikation ist nicht τ_s-stetig. Dieses Beispiel zeigt auch, daß selbst die Zusatzannahme, die rechten Faktoren entstammten einer normbeschränkten Menge, keine τ_s-Stetigkeit liefert.

LEMMA 1.10.

(i) *Sei $K \subset \mathcal{B}(H)$ konvex, dann gilt:*

$$\overline{K}^{\tau_s} = \overline{K}^{\tau_w} .$$

(ii) *Die Einheitskugel von $\mathcal{B}(H)$ ist τ_w-kompakt.*

BEWEIS. (i): Hat man eine Menge A in einem topologischen Vektorraum $[V, \tau]$ gegeben, so ergibt sich der τ-Abschluß zu

$$\overline{A}^{\tau} = \bigcap \{ A + U \, : \, U \subset V \ \tau\text{-Nullumgebung} \} , \tag{1.8}$$

d.h., als Durchschnitt aller offenen Mengen, die A enthalten. Damit ist klar, daß

$$\overline{K}^{\tau_s} \subset \overline{K}^{\tau_w}$$

(vgl. (1.7)). Sei nun angenommen, daß $u \in \overline{K}^{\tau_w}$ und $\zeta \in H$. Dann ist $u\zeta$ im schwachen Abschluß der konvexen Menge $K\zeta \subset H$, und somit auch im Normabschluß dieser Menge (Satz von Hahn-Banach!). Man folgert nun leicht, daß u in $\overline{K}^{\tau_s}$ liegen muß.
(ii): Sei $B := \{ x \in \mathcal{B}(H) \, : \, \|x\| \leq 1 \}$. Dann ist

$$B \to \prod_{\zeta, \eta \in H} \{ \lambda \in \mathbf{C} \, : \, |\lambda| \leq 1 \} , u \mapsto (\langle u\zeta \, , \eta \rangle)$$

eine injektive Abbildung mit abgeschlossenem Bild, wenn man den Zielbereich mit der Produkttopologie versieht. Dieser wird so zu einem kompakten Hausdorffraum. Die Abbildung ist auch stetig und offen bezüglich der schwachen Operatortopologie. Mit dem Bild von B ist dann auch B selbst — in der schwachen Operatortopologie — kompakt. □

2.2. Selbstadjungierte Operatoren. Zum einen ist die Menge der selbstadjungierten Operatoren $\mathcal{B}(H)_h$ auf dem Hilbertraum H ein reeller Unterraum von $\mathcal{B}$(H), zum anderen wird durch die positiven Operatoren $\mathcal{B}(H)_+$ eine Ordnungsstruktur auf $\mathcal{B}(H)_h$ induziert. Diese wird durch die Bedingung

$$u \leq v \iff \forall \zeta \in H : \langle u\zeta \, , \zeta \rangle \leq \langle v\zeta \, , \zeta \rangle \tag{1.9}$$

$(u, v \in \mathcal{B}(H))$ beschrieben. Diese Beziehung ergibt sich leicht aus der schon für allgemeine C*-Algebren gegebene Charakterisierung positiver Elemente, Lemma 1.6.

LEMMA 1.11. *Die Mengen $\mathcal{B}(H)_h$ und $\mathcal{B}(H)_+$ sind τ_w-, und somit auch τ_s- und τ_n-abgeschlossen.*

BEWEIS. Genauso wie durch (1.9) wird auch durch

$$\forall \zeta, \eta \in H : \langle u\zeta \, , \eta \rangle = \langle \zeta \, , u\eta \rangle$$

eine in τ_w abgeschlossene Menge beschrieben. Diese ist jeweils genau $\mathcal{B}(H)_+$ bzw. $\mathcal{B}(H)_h$. □

DEFINITION. Eine Teilmenge I von $\mathcal{B}(H)_h$ heißt *steigend (fallend)*, falls

$$\forall u, v \in I \exists w \in I : u, v \leq w \ (u, v \geq w).$$

Sie heißt *nach oben (unten) beschränkt*, falls es ein $v \in \mathcal{B}(H)_h$ gibt, daß

$$\forall u \in I : u \leq v \ (u \geq v).$$

Man nennt dann v eine *obere (untere) Schranke* von I.
Ist τ eine der Operatortopologien, $v \in \mathcal{B}(H)_h$ und $I \subset \mathcal{B}(H)_h$ steigend (fallend), so sagt man, *I steigt (fällt) gegen v in τ*, falls $v \geq I$ $(v \leq I)$ und es zu jeder τ-Umgebung U von v ein $w \in I$ gibt, daß

$$\forall u \in I : u \geq w \ (u \leq w) \implies u \in U.$$

BEMERKUNG. Eine Menge $I \subset \mathcal{B}(H)_h$ steigt gegen $v \in \mathcal{B}(H)_h$ in einer Operatortopologie τ genau dann, wenn v eine obere Schranke von I ist und außerdem in ihrem τ-Abschluß liegt.

Die nächste Beobachtung zeigt, daß eine mögliche Konfusion der unterschiedlichen Beschränktheitsbegriffe, nämlich Beschränktheit in der Norm und in der Ordnung, nicht gegeben ist; sie sind einander äquivalent.

LEMMA 1.12. *Eine Menge $I \subset \mathcal{B}(H)_h$ ist genau dann normbeschränkt, wenn sie eine obere und eine untere Schranke hat.*

BEWEIS. Ist I normbeschränkt durch $M > 0$, so sind $-M \cdot \mathrm{id}$ und $M \cdot \mathrm{id}$ jeweils eine untere bzw. obere Schranke für I.
Sind andererseits a und b untere bzw. obere Schranke für I, so ist I durch das Maximum der Normen von a und b beschränkt. □

LEMMA 1.13. *Sei $I \subset \mathcal{B}(H)_h$ steigend und sei $K := \mathrm{conv}\, I$, die konvexe Hülle von I. Dann gilt:*

(i) *Steigt I gegen $v \in \mathcal{B}(H)$ in einer der Operatortopologien, so ist v eindeutig.*
(ii) *$K \subset \mathcal{B}(H)_h$ ist steigend.*
(iii) *Mit I ist auch K nach oben beschränkt, und umgekehrt. Insbesondere haben beide Mengen dieselben oberen Schranken.*
(iv) *Sei $v \in \mathcal{B}(H)$ und τ eine der Operatortopologien. Dann steigt I gegen v in τ, wenn dies für K der Fall ist.*

BEWEIS. (i): Möge I gegen v und v' mit $v \neq v'$ steigen. Die zugrunde liegende Operatortologie ist hausdorffsch, d.h., es gibt disjunkte Umgebungen U und U' von v bzw. v'. Man bestimme jetzt w und w' in I so, daß für alle $u \in I$ gilt,

$$u \geq w \implies u \in U \qquad u \geq w' \implies u \in U'.$$

Da I steigt, gibt es ein $u \in I$ mit $w, w' \leq u$, was aber unmittelbar zum Widerspruch $u \in U \cap U'$ führt.
(ii): Da $\mathcal{B}(H)_h$ konvex ist, gilt zunächst einmal $K \subset \mathcal{B}(H)_h$. Seien $u := \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ und $v := \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$ Elemente von $K = \operatorname{conv} I$. Dann gibt es ein $w \in I \subset K$, daß $u_i, v_j \leq w$. Damit wird aber auch $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i w = w$ und entsprechend $v \leq w$.
(iii): Da $I \subset K$ ist, ist mit K auch I nach oben beschränkt und jede obere Schranke von K ist auch eine obere Schranke von I. Hat man andererseits eine obere Schranke v von I gegeben, so erhält man für $u := \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in K$, daß

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i v = v.$$

Also ist v auch eine obere Schranke von K.
(iv): Steige K in τ gegen v und sei U eine τ-Umgebung von v. Nun gibt es ein $w \in K$, daß für alle $u \in K$ mit $u \geq w$ gilt, $u \in U$. Möge w die Darstellung $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ haben. Dann gibt es ein $w' \in I$, daß $w_1, \ldots, w_n \leq w'$. Hat man nun $u \in I$ mit $u \geq w'$ gegeben, so ist auch $u \geq w$, was $u \in U$ nach sich zieht. Dies zeigt, daß I in τ gegen v steigt. □

THEOREM 1.14. *Sei $I \subset \mathcal{B}(H)_h$ steigend und nach oben beschränkt. Dann steigt I gegen ein $v \in \mathcal{B}(H)_h$ in τ_w.*

BEWEIS. Setze für $a \in I$ die Menge $I_a := \{ u \in I : u \geq a \}$. Da I steigt, folgt sofort, daß jede obere Schranke von I_a auch eine obere Schranke von I ist, und umgekehrt. Ebenso leicht ist einzusehen, daß I genau gegen ein $v \in \mathcal{B}(H)_h$ in τ_w steigt, wenn dies bereits für I_a richtig ist. Man kann also ohne Einschränkung annehmen, daß I auch nach unten beschränkt ist. Weiter erschließt man direkt aus den Definitionen, daß auch $\overline{I}^{\tau_w}$ nach oben und unten durch dieselben Schranken wie I selbst beschränkt ist. Werden jetzt noch Lemma 1.12 sowie Lemma 1.10 berücksichtigt, dann kann angenommen werden, daß $\overline{I}^{\tau_w}$ eine τ_w-kompakte Menge ist.
Da I steigt, ist der Durchschnitt endlich vieler Mengen I_a nicht leer. Dasselbe gilt natürlich dann auch für deren Abschlüsse $\overline{I}_a^{\tau_w} \subset \overline{I}^{\tau_w}$. Die τ_w-Kompaktheit von $\overline{I}^{\tau_w}$ ergibt nun

$$\bigcap_{a \in I} \overline{I}_a^{\tau_w} \neq \emptyset.$$

Sei $v \in \overline{I}^{\tau_w}$ Element dieses Durchschnitts. Dann bleibt zu zeigen, daß dieses v eine obere Schranke von I ist. Seien dazu $a \in I$, $\epsilon > 0$ sowie $\zeta, \eta \in H$ beliebig gewählt. Da $v \in \overline{I}_a^{\tau_w}$ ist, gibt es ein $u \in I_a$, daß $|\langle (v-u)\zeta\, , \eta \rangle| < \epsilon$. Damit ergibt sich

$$\langle (a-v)\zeta\, , \eta \rangle = \langle (a-u)\zeta\, , \eta \rangle + \langle (u-v)\zeta\, , \eta \rangle \leq 0 + |\langle (u-v)\zeta\, , \eta \rangle| \leq \epsilon.$$

Hiermit folgt, daß v eine obere Schranke von I ist. □

Dieses Resultat kann aber noch verschärft werden:

KOROLLAR 1.15. *Sei $I \subset \mathcal{B}(H)_h$ steigend und nach oben beschränkt. Dann steigt I gegen ein $v \in \mathcal{B}(H)_h$ in τ_s.*

BEWEIS. Nach Lemma 1.13(iv) reicht es zu zeigen, daß $K := \operatorname{conv} I$ gegen ein $v \in \mathcal{B}(H)_h$ in τ_s steigt. Theorem 1.14 zeigt, daß dies zunächst in τ_w richtig ist. Nun stimmen nach Lemma 1.10(i) die Abschlüsse von K in τ_w und τ_s überein. Also steigt K und somit auch I gegen v in τ_s. □

2.3. Spektraldarstellung. Nun sei K ein kompakter Hausdorffraum und es gebe eine C*-Isometrie

$$\Phi \colon C(K) \to \mathcal{B}(H), f \mapsto \Phi f. \tag{1.10}$$

Sind nun ζ und η beliebige Vektoren in H, dann erhält man durch

$$\phi_{\zeta,\eta} \colon C(K) \to \mathbf{C}, f \mapsto \langle \Phi f \zeta\ , \eta \rangle \tag{1.11}$$

eine stetige Linearform auf $C(K)$. Der RIESZSCHE DARSTELLUNGSSATZ liefert nun ein reguläres Borelmaß $\mu_{\zeta,\eta}$ auf K, das

$$\langle \Phi f \zeta\ , \eta \rangle = \phi_{\zeta,\eta}(f) = \int_K f\, d\mu_{\zeta,\eta} \tag{1.12}$$

für alle $f \in C(K)$ erfüllt. Man leitet nun leicht die folgenden Eigenschaften der Abbildung $(\zeta, \eta) \mapsto \mu_{\zeta,\eta}$ aus den obigen Beziehungen her.

LEMMA 1.16. *Seien ζ und η beliebige Vektoren in H.*

(i) $H \times H \to C(K)^*$, $(\zeta,\eta) \mapsto \mu_{\zeta,\eta}$ *ist bilinear.*
(ii) $|\mu_{\zeta,\eta}|(K) = \|\mu_{\zeta,\eta}\| \le \|\zeta\|\,\|\eta\|$.
(iii) $\mu_{\zeta,\zeta}$ *ist ein positives Borelmaß und* $\mu_{\zeta,\zeta}(K) = \|\zeta\|^2$.

Um den stetigen Funktionalkalkül für normale Operatoren fortzusetzen, ist es notwendig, die durch den Rieszschen Darstellungssatz gesicherte Äquivalenz von stetigen linearen Funktionalen ϕ auf $C(K)$ und regulären Borelmaßen μ, gegeben durch die Beziehung

$$\phi(f) = \int_K f\, d\mu \qquad (f \in C(K)),$$

etwas genauer „unter die Lupe“ zu nehmen.

DEFINITION. Sei K ein kompakter Haussdorffraum. Die *positiven beschränkten Borelfunktionen auf K* sind

$$\mathcal{B}^\infty(K)_+ := \left\{ \sup_{f\in I} f \ : \ I \subset C(K)_+ \quad \sup_{f \in I} \|f\|_\infty < \infty \right\}$$

und die *beschränkten Borelfunktionen auf K* sind

$$\mathcal{B}^\infty(K) := \{\, f \colon K \to \mathbf{C} \ : \ (\Re f)_\pm, (\Im f)_\pm \in \mathcal{B}^\infty(K)_+ \,\}\,.$$

LEMMA 1.17. *Mit den punktweisen Operationen ist $[\,\mathcal{B}^\infty(K), \|\ \|_\infty\,]$ eine kommutative C*-Algebra.*

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{B}^\infty(K)$ eine abgeschlossene und unter der punktweisen Konjugation invariante Unteralgebra von $\ell^\infty(K)$ ist. Die algebraischen Eigenschaften sind hierbei für $\mathcal{B}^\infty(K)$ offensichtlich. Da Real- und Imaginärteilbildung sowie die Zerlegung in positiven und negativen Anteil einer beschränkten Funktion stetige Operationen auf $[\,\ell^\infty, \|\ \|_\infty\,]$ sind, bleibt somit nur die Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}^\infty(K)_+$ nachzuweisen. Sei also g eine beschränkte Funktion im Abschluß von $\mathcal{B}^\infty(K)_+$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $h_\epsilon \in \mathcal{B}^\infty(K)_+$, daß $\|g - h_\epsilon\|_\infty < \epsilon$. Damit gibt es $I_\epsilon \subset C(K)_+$, daß $h_\epsilon = \sup_{f \in I_\epsilon} f$. Setze

$$I := \bigcup_{\epsilon > 0} \{\, (f - \epsilon) \vee 0 \ : \ f \in I_\epsilon \,\} \subset C(K)_+.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $g = \sup_{f\in I} f$. Man überzeugt sich sofort davon ,daß $g \geq f$ für $f \in I$. Hat man jetzt $\omega \in K$ und $\epsilon > 0$ gegeben, so findet man ein $f \in I_\epsilon$, daß $f(\omega) > h_\epsilon(\omega) - \epsilon$. Hiermit folgt dann aber sofort, daß $(f(\omega)-\epsilon)\vee 0 \geq g(\omega) - 2\epsilon$. □

Genauso, wie man in der klassischen reellen Analysis, Funktionale von $C(K)$ auf $\mathcal{B}^\infty(K)$ und damit zu regulären Borelmaßen auf K fortsetzt, wird jetzt der stetige Funktionalkalkül für normale Operatoren zu einem *beschränkten Borel-Funktionalkalkül* erweitert.

THEOREM 1.18. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum. Sei $\Phi\colon C(K) \to \mathcal{B}(H)$ ein isometrischer C^*-Homomorphismus. Dann gibt es einen isometrischen C^*-Homomorphismus $\Psi\colon \mathcal{B}^\infty(K) \to \mathcal{B}(H)$, mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Ψ setzt Φ fort,*

(ii) *Für alle $\zeta, \eta \in H$ und alle $f \in \mathcal{B}^\infty(K)$ ist*

$$\langle \Psi(f)\zeta\ ,\ \eta\rangle = \int_K f\, d\mu_{\zeta,\eta},$$

(iii) *Das Bild von Ψ ist im τ_s-Abschluß (der τ_w-Abschluß) des Bildes von Φ enthalten.*

BEWEIS. Wenn es erst einmal gelungen ist, die Existenz einer algebraischen Fortsetzung von Φ nachzuweisen, so ist diese automatisch stetig (vgl. etwa Lemma 4.1.10, Skript SS96). Im ersten Schritt kann man mittels Theorem 1.14 bzw. Korollar 1.15 Φ von $C(K)_+$ zu Ψ auf $\mathcal{B}^\infty(K)_+$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist additiv und vertauscht mit der Multiplikation mit positiven Skalaren. Hat man nun $a, b \in \mathcal{B}^\infty(K)_+$ gegeben, so gilt nach Konstruktion, daß

$$a = \sup\{\, f \in C(K)_+\ :\ f \leq a\,\}, \qquad b = \sup\{\, g \in C(K)_+\ :\ g \leq b\,\},$$

und damit

$$\Psi a = \sup\{\, \Phi f \in C(K)_+\ :\ f \leq a\,\}, \qquad \Psi b = \sup\{\, \Phi g \in C(K)_+\ :\ g \leq b\,\}.$$

Die beiden letzten Mengen sind in $\mathcal{B}$(H) beschränkt. Darum ist nach Lemma 1.9(iii) die Multiplikation τ_s-stetig, d.h. es ist auch $\Psi(ab) = \Psi a \cdot \Psi b$. Setzt man jetzt für $f := (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4) \in \mathcal{B}^\infty(K)$, mit nicht negativen f_1, f_2, f_3 undf_4,

$$\Psi f := (\Psi f_1 - \Psi f_2) + i(\Psi f_3 - \Psi f_4),$$

so erhält man die gesuchte Fortsetzung von Φ, die selbstverständlich auch die Eigenschaften (ii) und (iii) hat. □

Hat man nun speziell einen normalen Operator $u \in \mathcal{B}(H)$ gegeben, so stellt sich der beschränkte Borel-Funktionalkalkül hierfür wie folgt dar. Dieses Theorem ist eine direkte Folgerung aus Theorem 1.18 und Theorem 1.4.

THEOREM 1.19. *Sei $u \in \mathcal{B}(H)$ ein normaler Operator. Dann gibt es eine C^*-Isometrie $\Psi\colon \mathcal{B}^\infty(\sigma(u)) \to \mathcal{B}(H)$, derart, daß gilt:*

(i) *Ψ setzt den stetigen Funktionalkalkül fort. Es ist $\Psi(\mathrm{id}_{\sigma(u)}) = u$.*

(ii) *Für alle $\zeta, \eta \in H$ und alle $f \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(u))$ ist*

$$\langle \Psi(f)\zeta\ ,\ \eta\rangle = \int_{\sigma(u)} f\, d\mu_{\zeta,\eta}.$$

(iii) *Das Bild von Ψ ist im τ_s-Abschluß der von u erzeugten C^*-Algebra enthalten.*

BEMERKUNG. Bezeichnet Σ das System der Borelmengen von $\sigma(u)$, so wird durch

$$E\colon \Sigma \to [\mathcal{B}(H), \tau_s], A \mapsto \Psi(1_A)$$

ein projektionenwertiges Maß definiert, das *Spektralmaß* von u. Man schreibt für die C*-Isometrie $\Psi\colon \mathcal{B}^\infty(\sigma(u)) \to \mathcal{B}(H)$ dann meist

$$\int_{\sigma(u)} f(\lambda)\, dE(\lambda) := \Psi(f)$$

für $f \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(u))$. Die Darstellung Ψ nennt man auch *Spektraldarstellung von u.*

3. von Neumann-Algebren

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß die für die Anwendung eminent wichtige Spektraldarstellung eines normalen Operators ihr Bild im starken Abschluß der vom Operator erzeugten C*-Algebra hat. Jetzt werden wir uns mit C*-Unteralgebren von $\mathcal{B}$(H) beschäftigen, die in der starken Operatortopologie abgeschlossen sind.

DEFINITION. Eine in der starken Operatortopologie abgeschlossene C*-Unteralgebra $\mathcal{M}$ von $\mathcal{B}$(H) mit $\mathrm{id}_H \in \mathcal{M}$ heißt *von Neumann-Algebra.*

BEMERKUNG. Die Forderung $\mathrm{id}_H \in \mathcal{M}$ ist rein technischer Natur. Sie gewährleistet mehr oder minder, daß der zugrunde liegende Hilbertraum „nicht zu groß" ist. Wir werden später bei intrinsischen, darstellungsfreien Charakterisierungen von von Neumann-Algebren[4] feststellen, daß immer eine Eins in einer solchen von Neumann-Algebra vorhanden ist. Diese Eins ist natürlich eine Orthogonalprojektion, deren Bild schon ausreicht, um die von Neumann-Algebra darzustellen, und für das diese Eins die Identität ist.

3.1. Stark abgeschlossene Unteralgebren. Die natürliche Methode, stark abgeschlossene Unteralgebren von $\mathcal{B}$(H) zu gewinnen, ist sicher, mit einer Unteralgebra zu starten und dann deren starken Abschluß zu bilden. Dazu muß man sich aber davon überzeugen, daß man wieder eine Unteralgebra erhält, denn die starke und die schwache Operatortopologie machen bekanntlich Probleme bei der Stetigkeit der Multipliaktion und der Involution.

LEMMA 1.20. *Seien $\mathcal{M}$ eine Unteralgebra und K eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{B}(H)$. Dann gilt:*

(i) *Ist K invariant unter der Involution, dann ist auch $\overline{K}^{\tau_s}$ invariant unter der Involution.*
(ii) *Der τ_s-Abschluß von $\mathcal{M}$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$.*
(iii) *Ist $\mathcal{M}$ eine C*-Algebra, die id_H enthält, dann ist $\overline{\mathcal{M}}^{\tau_s}$ eine von Neumann-Algebra.*

BEWEIS. (i): Nach Lemma 1.10(i) ist $\overline{K}^{\tau_s} = \overline{K}^{\tau_w}$. Lemma 1.9(ii) besagt, daß die Involution in der schwachen Operatortopologie stetig ist, also ist mit K auch $\overline{K}^{\tau_w}$ invariant unter der Involution.
(ii): Sei zunächst $u_0 \in \mathcal{M}$, dann sind für beliebiges $u \in \overline{\mathcal{M}}^{\tau_s}$ nach Lemma 1.9(i) auch $uu_0, u_0u \in \overline{\mathcal{M}}^{\tau_s}$. Damit folgt aber, daß auch das Produkt uv beliebiger $u, v \in \overline{\mathcal{M}}^{\tau_s}$ in $\overline{\mathcal{M}}^{\tau_s}$ fällt.
(iii): Dies ist jetzt nur noch eine Zusammenfassung von (i) und (ii). □

Um diese abstrakten Begriffe ein wenig „mit leben zu füllen", seien hier zwei Beispiele angegeben.

BEISPIEL 1.4. Sei $H := \ell_2$ und $\ell_\infty \subset \mathcal{B}(H)$ aufgefaßt als C*-Algebra der Diagonaloperatoren, d.h., einer Nullfolge $\alpha := (\alpha_k)$ werde der Operator $D_\alpha\colon H \to H$, $(\beta_k) \mapsto (\alpha_k\beta_k)$ zugeordnet. Andererseits ist für jeden Diagonaloperator D die Folge

[4]Man wird eine C*-Algebra, die eine treue Darstellung als von Neumann-Algebra hat, ebenfalls von Neumann-Algebra nennen

$(\langle De_n\,,\,e_n\rangle)$ beschränkt. Hierbei bezeichnet e_n den kanonischen n-ten Einheitsvektor in H. Man kann die Menge der Diagonaloperatoren auch beschreiben als

$$\ell_\infty = \bigcap_{k\neq n} \{\, u \in \mathcal{B}(H) \;:\; \langle ue_k\,,\,e_n\rangle = 0 \,\}\,.$$

Dies ist eine in der schwachen und wegen ihrer Konvexität auch in der starken Operatortopologie abgeschlossene Menge. Faßt man c_0 entsprechend als C*-Algebra der Diagonaloperatoren, in deren Diagonale Nullfolgen stehen auf, so ist sicher der starke Abschluß von c_0 in ℓ_∞ enthalten. Hat man andererseits eine beschränkte Folge $\alpha = (\alpha_k)$ gegeben, so sind die Folgen $\gamma_n := (\gamma_{nk})$ mit

$$\gamma_{nk} = \begin{cases} \alpha_k & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

in c_0 und es gilt $\|\gamma_n\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty$. Ist nun $\zeta = (\beta_k) \in \ell_2$ gegeben, so erhält man

$$\|(D_\alpha - D_{\gamma_n})\zeta\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k\beta_k|^2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also liegt α im starken Abschluß von c_0. Zusammengefaßt heißt dies, $\overline{c_0}^{\tau_s} = \ell_\infty$.

Beispiel 1.5. Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und sei $\mathcal{K}(H)$ die C*-Algebra der kompakten Operatoren[5]. Desweiteren sei $(e_\kappa)_{\kappa\in I}$ eine Orthonormalbasis von H. Hat man einen Vektor $\zeta \in H$ und $\epsilon > 0$ gegeben, so findet man eine endliche Teilmenge I_ϵ von I, daß

$$\left\| \zeta - \sum_{\kappa\in I_\epsilon} \langle \zeta\,,\,e_\kappa\rangle\, e_\kappa \right\| \leq \epsilon.$$

Definiert man $p_\epsilon\colon H \to H$ durch $p_\epsilon\eta := \sum_{\kappa\in I_\epsilon} \langle \eta\,,\,e_\kappa\rangle\, e_\kappa$, dann erhält man für beliebiges $u \in \mathcal{B}(H)$, daß

$$\|(u - up_\epsilon)\zeta\| \leq \|u\|\,\epsilon.$$

Der Operator up_ϵ hat endlichen Rang, ist also ein Element von $\mathcal{K}(H)$. Man kann somit schließen, daß sich jeder Operator aus $\mathcal{B}$(H) in der starken Operatortopologie durch kompakte Operatoren approximieren läßt. D.h., man hat $\overline{\mathcal{K}(H)}^{\tau_s} = \mathcal{B}(H)$.

Bemerkung. In beiden obigen Beispielen hatte die C*-Algebra, deren starken Abschluß wir gebildet haben, keine Eins. In beiden Fällen ist es jedoch leicht, eine *approximierende Einheit* (vgl. Skript SS96, Abschnitt 4.5) anzugeben. Im Fall c_0 etwa die Menge der Folgen, die endlich viele Folgenglieder mit dem Wert 1 und die restlichen Folgenglieder mit dem Wert 0 haben und im Fall $\mathcal{K}(H)$ die Menge aller „Projektionen auf endlich viele Koordinaten“. Der starke Grenzwert dieser approximierenden Einheiten ergibt sich dann jeweils zu id_H.
Wenn man sich daran erinnert, daß jede C*-Algebra eine approximierende Einheit hat, so ist mit dem bisher gezeigten leicht einzusehen, daß jede von Neumann-Algebra ein Einselement hat, das sich gerade als Limes dieser approximierenden Einheit in der starken Operatortopologie ergibt.

[5]Ein Operator $u\colon H \to H$ heißt kompakt, wenn er die Einheitskugel in eine kompakte Menge hinein abbildet

3.2. Kommutatoren. Dieser Abschnitt dient zur Vorbereitung einer rein algebraischen Charakterisierung von von Neumann-Algebren. Diese alternativen Beschreibungen, topologischer Abschluß auf der einen Seite und „algebraischer Abschluß" auf der anderen Seite, machen einen großen Teil der Faszination der Theorie der von Neumann-Algebren aus.

DEFINITION. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathcal{B}(H)$. Der *Kommutator* von A ist die Menge

$$A' := \{ x \in \mathcal{B}(H) \,:\, \forall y \in A : xy = yx \},$$

der *Bikommutator* von A ist die Menge

$$A'' := (A')'.$$

Als erstes sollen ein paar Rechenregeln für die Kommutatorbildung festgehalten werden.

LEMMA 1.21. *Seien A und B nichtleere Teilmengen von $\mathcal{B}(H)$. Dann gilt:*
(i) $A \subset B \implies B' \subset A'$.
(ii) $A \subset A''$.
(iii) $(A')'' = (A'')' = A'$.

BEWEIS. (i) und (ii) sind offensichtlich.
(iii): Nach (ii) sind $A \subset A''$ und $A' \subset (A')''$. Damit gilt nach (i), daß

$$(A'')' \subset A' \subset (A')'' = ((A')')' = (A'')'.$$

Dies ergibt die Behauptung. □

Auch hier sollen die Begriffe durch zwei einfache Beispiele erläutert werden.

BEISPIEL 1.6. Es ist klar, daß $(\mathbf{C} \cdot \mathrm{id}_H)' = \mathcal{B}(H)$. Interessanter ist schon die Beziehung

$$\mathcal{B}(H)' = \mathbf{C} \cdot \mathrm{id}_H \,. \tag{1.13}$$

Sei dazu $x \in \mathcal{B}(H)'$ angenommen. Seien $\eta, \zeta \in H$ beliebige Vektoren und es sei $y \in \mathcal{B}(H)$ gegeben durch $y\xi := \langle \xi \,,\, \eta \rangle \,\zeta$. Dann folgt aus $xy = yx$, daß

$$\forall \xi, \eta, \zeta \in H : \langle \xi \,,\, \eta \rangle \, x\zeta = xy\xi = yx\xi = \langle x\xi \,,\, \eta \rangle \,\zeta.$$

Nimmt man also $\xi = \eta \neq 0$ an, so ergibt sich

$$\forall \zeta \in H : \langle \xi \,,\, \xi \rangle \, x\zeta = \langle x\xi \,,\, \xi \rangle \,\zeta,$$

also $x \in \mathbf{C} \cdot \mathrm{id}_H$.
Analysiert man diesen Schluß noch einmal genauer, so erkennt man, daß sogar

$$\{ u \in \mathcal{B}(H) \,:\, \mathrm{Rang}(u) = 1 \}' = \mathbf{C} \cdot \mathrm{id}_H$$

und weiter

$$\mathcal{K}(H)' = \mathbf{C} \cdot \mathrm{id}_H \text{ und } \mathcal{K}(H)'' = \mathcal{B}(H). \tag{1.14}$$

BEISPIEL 1.7. Nun soll der Kommutator von c_0 bzw. ℓ_∞, aufgefaßt als Diagonaloperatoren auf ℓ_2 bestimmt werden. Da beides kommutative C*-Algebra sind und $c_0 \subset \ell_\infty$ ist, ist klar, daß $\ell_\infty \subset {\ell_\infty}' \subset {c_0}'$ ist.
Sei $u \in {c_0}'$ und sei $n \in \mathbf{N}$. Setze für $\zeta \in \ell_2$, $x\zeta := \langle \zeta \,,\, e_n \rangle \, e_n$. Dann ist $x \in c_0$ und aus der Beziehung $ux = xu$ folgt

$$\langle e_k \,,\, e_n \rangle \, ue_n = uxe_n = xue_n = \langle ue_k \,,\, e_n \rangle \, e_n.$$

Hiermit folgt, daß u ein Diagonaloperator und somit ein Element von ℓ_∞ ist (vgl. Beispiel 1.4). Es ergibt sich also

$${c_0}' = {\ell_\infty}' = \ell_\infty \text{ und } {c_0}'' = {\ell_\infty}'' = \ell_\infty.$$

LEMMA 1.22. *Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{B}(H)$.*

(i) *A' ist eine in der starken (schwachen) Operatortopologie abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$.*

(ii) *Ist A invariant unter der Involution, so ist A' eine von Neumann-Algebra.*

BEWEIS. (i): Es ist elementar, daß A' eine Unteralgebra von $\mathcal{B}$(H) ist. Schreibt man A' in der Form

$$A' = \bigcap_{x \in A} \{ y \in \mathcal{B}(H) \, : \, xy = yx \} ,$$

so ergibt die Stetigkeit der Rechts- bzw. Linksmultiplikation in den Operatortopologien (vgl. Lemma 1.9(i)), daß A' in der jeweiligen Topologie dann auch abgeschlossen ist.
(ii): Hier bleibt allein zu zeigen, daß A' auch invariant unter der Involution ist. Seien $x \in A$ und $y \in A'$ beliebig. Dann gilt:

$$y^* x = (x^* y)^* = (y x^*)^* = x y^* .$$

Damit gilt auch $y^* \in A'$. □

BEMERKUNG. Mit der Bikommutatorbildung ist somit eine algebraische Möglichkeit gegeben, zu einer Teilmenge von $\mathcal{B}$(H) eine „einhüllende" von Neumann-Algebra zu bestimmen. „Einhüllend" deshalb, weil die Abbildung $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}''$ idempotent ist. Jetzt stellt sich natürlich die Frage nach der Optimalität dieses „algebraischen Abschlusses". Dieser Frage wird im folgenden weiter nachgegangen.

3.3. Dichtheitssätze. Bis hierher wurden zwei Methoden vorgestellt, zu einer C*-Algebra$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$, von der wir stets annehmen werden, daß $\mathrm{id}_H \in \mathcal{A}$, eine „einhüllende" von Neumann-Algebra zu bilden. Zum einen kann man zu starken Abschluß und zum anderen zum Bikommutator übergehen. Berücksichtigt man Lemma 1.22 so ergibt sich unmittelbar

$$\overline{\mathcal{A}}^{\tau_s} \subset \mathcal{A}''. \tag{1.15}$$

THEOREM 1.23 (von Neumann). *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$ mit* $\mathrm{id}_H \in \mathcal{A}$. *Dann ist $\mathcal{A}$ τ_s-dicht in $\mathcal{A}''$.*

BEWEIS. Sei $\zeta \in H$ gegeben. Es sei $K \subset H$ der Normabschluß von $\mathcal{A}\zeta \subset H$ und es sei $p \in \mathcal{B}(H)$ die Orthogonalprojektion von H auf K. Da $\mathrm{id}_H \in \mathcal{A}$ ist, gilt $\zeta \in K$ und somit $p\zeta = \zeta$. Weiterhin gilt für beliebiges $x \in A$, daß $p(x\zeta) = x\zeta$. Also ergibt sich für jedes $\eta := u\zeta \in \mathcal{A}\zeta$, daß

$$px\eta = p((xu)\zeta) = (xu)\zeta = x(u\zeta) = x\eta \quad (x \in \mathcal{A}).$$

Hieraus schließt man mittels Stetigkeit, daß

$$\forall x \in \mathcal{A} \forall \eta \in K : px\eta = x\eta.$$

Hat man also ein $\xi \in H$ gegeben, so ist $p\xi \in K$ und damit $pxp\xi = xp\xi$ für $x \in \mathcal{A}$. Man erhält also

$$\forall x \in \mathcal{A} : pxp = xp.$$

Da mit x auch x^* in $\mathcal{A}$ ist, schließt man weiter, daß

$$\forall x \in \mathcal{A} : px = (x^* p)^* = (px^* p)^* = pxp = xp$$

und somit $p \in \mathcal{A}'$. Ist jetzt $u \in \mathcal{A}''$, dann ist $pu = up$ und damit

$$u\zeta = up\zeta = pu\zeta \in K.$$

Man kommt somit zu dem Schluß, daß

$$\forall \epsilon > 0 \forall \zeta \in H \forall u \in \mathcal{A}'' \exists v \in \mathcal{A} : \|(u - v)\zeta\| < \epsilon. \tag{*}$$

Nun sei $n \in \mathbf{N}$ gegeben. Durch

$$\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H^n), u \mapsto ((\zeta_1, \dots, \zeta_n) \mapsto (u\zeta_1, \dots, u\zeta_n) \tag{1.16}$$

wird eine treue Darstellung von $\mathcal{B}$(H) definiert. Faßt man die Elemente von $\mathcal{B}(H^n)$ als $n \times n$-Matrizen (w_{ij}) mit Einträgen $w_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ auf, so entspricht $\Phi(\mathcal{B}(H))$ den Diagonalmatrizen mit konstanter Diagonale. Die üblichen Rechenregeln für Matrizen ergeben

$$\Phi(\mathcal{A})' = \{ (w_{ij}) \in \mathcal{B}(H^n) \ : \ w_{ij} \in \mathcal{A}' \},$$

so daß man direkt schließt, $\Phi(\mathcal{A}'') \subset \Phi(\mathcal{A})''$. Übertragen auf die Situation, daß H^n der zu Grunde liegende Hilbertraum[6] ist, lautet (*) nun

$$\forall \epsilon > 0 \forall \zeta \in H^n \forall u \in \Phi\mathcal{A}'' \exists v \in \mathcal{A} : \|(u - \Phi v)\zeta\| < \epsilon. \tag{**}$$

Hat man jetzt $\zeta_1, \dots ,\zeta_n \in H$ sowie $u \in \mathcal{A}''$ vorliegen, so leitet man sofort aus (**) ab[7], daß

$$\forall \epsilon > 0 \forall u \in \mathcal{A}'' \exists v \in \mathcal{A} : \max_{1 \le k \le n} \|(u - v)\zeta_k\| < \epsilon.$$

Insgesamt folgt hiermit, daß $\mathcal{A}''$ der starke Abschluß von $\mathcal{A}$ ist. □

KOROLLAR 1.24. *Für eine C^*-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(H)$, die id_H enthält, gilt*

$$(\mathcal{A}'')_h = \overline{\mathcal{A}_h}^{\tau_s}$$

BEWEIS. Es ist

$$(\mathcal{A}'')_h = \mathcal{A}'' \cap \mathcal{B}(H)_h = \overline{\mathcal{A}}^{\tau_s} \cap \mathcal{B}(H)_h = \overline{\mathcal{A}}^{\tau_w} \cap \mathcal{B}(H)_h = \overline{\mathcal{A}_h}^{\tau_w} = \overline{\mathcal{A}_h}^{\tau_s}.$$

□

LEMMA 1.25. *Sei $A \subset \mathcal{B}(H)_n$ beschränkt und sei $f \in C_0(\mathbf{C})$. Dann ist die Abbildung*

$$f\colon [\, A, \tau_s \,] \to [\, \mathcal{B}(H)_n, \tau_s \,], u \mapsto f(u)$$

stetig.

BEWEIS. Sei $M > 0$ eine Schranke von A. Dann gilt für alle $u \in A$, daß

$$\sigma(u) \subset D := \{ \lambda \in \mathbf{C} \ : \ |\lambda| \le M \}.$$

Es reicht also die Aussage für $f \in C(D)$ zu zeigen. Nach Lemma 1.9 sind die Multiplikation und die Involution τ_s-stetige Abbildungen auf A. Ist also f ein Polynom in λ (und $\overline{\lambda}$), so ist die Behauptung des Lemmas gesichert.
Sei f beliebig, sei $\epsilon > 0$ sowie $\zeta \in H$. Der Weierstraßsche Approximationssatz sichert ein Polynom p mit $\|f - p\|_\infty < \epsilon$. Hat man nun $u \in A$ gegeben, so findet man $\zeta_1, \dots , \zeta_n \in H$ und $\delta > 0$, daß für $v \in A$ gilt:

$$\max_{1 \le k \le n} \|(u - v)\zeta_k\| < \delta \implies \|(p(u) - p(v))\zeta\| < \epsilon.$$

Für solche v errechnet man weiter, daß

$$\begin{aligned} \|(f(u) - f(v))\zeta\| \le \|(f(u) - p(u))\zeta\| + \|(p(u) - p(v))\zeta\| + \|(p(v) - p(v))\zeta\| \\ \le 2\,\|f - p\|_\infty \|\zeta\| + \epsilon \le (1 + 2\,\|\zeta\|)\epsilon, \end{aligned}$$

was die τ_s-Stetigkeit der Abbildung f impliziert. □

---

[6]Das Skalarprodukt auf H^n ist $\langle (\zeta_k)\,,(\eta_k)\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \zeta_k\,, \eta_k\rangle$

[7]Die Norm in H^n ist durch $\|(\zeta_k)\| = (\sum_{k=1}^n \|\zeta_k\|^2)^{1/2}$ gegeben

Bemerkung. Wesentlich im Beweis von Lemma 1.25 ist, daß die Vereinigung der Spektren der Operatoren in A beschränkt ist und man eine auf den Abschluß dieser Vereinigung stetige Funktion gegeben hat. Man kann jede auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbf{C}$ stetige Funktion zu einer Funktion aus $C_0(\mathbf{C})$ fortsetzen. Diese Vorgehensweise wird man in den meisten Anwendungen dieses Lemmas antreffen.

Lemma 1.26. *Sei $f \in C_0(\mathbf{R})$ reellwertig, dann ist*

$$f\colon [\mathcal{B}(H)_h, \tau_s] \to [\mathcal{B}(H)_h, \tau_s], x \mapsto f(x)$$

stetig.

Beweis. Sei $U \subset \mathcal{B}(H)_n$ die Menge der unitären Operatoren. Desweiteren sei $g(\lambda) := f(-i(\lambda+1)(\lambda-1))$ für $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$ und $g(1) := 0$. Weil $f \in C_0(\mathbf{R})$ ist, ist g eine stetige Funktion auf dem Einheitskreis. Lemma 1.25 und die ihm folgende Bemerkung sichern, daß

$$g\colon [U, \tau_s] \to [\mathcal{B}(H)_h, \tau_s], u \mapsto g(u)$$

stetig ist.
Nun sei $u(t) := (t-i)/(t+i)$ für reelles t. Sind $x, x_0 \in \mathcal{B}(H)$ so berechnet man

$$(x + i\,\mathrm{id}_H)(u(x) - u(x_0))(x_0 + i\,\mathrm{id}_H) = 2i(x - x_0)$$

und damit für $\zeta \in H$,

$$\begin{aligned}\|(u(x) - u(x_0))\zeta\| &\leq 2\left\|(x + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}(u(x) - u(x_0))(x_0 + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}\zeta\right\| \\ &\leq 2\left\|(u(x) - u(x_0))(x_0 + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}\zeta\right\|.\end{aligned}$$

Dies zeigt die τ_s-Stetigkeit von u. Da $f = g \circ u$ ist, ergibt sich auch die τ_s-Stetigkeit von f. □

Theorem 1.27 (Kaplanski). *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$ mit $\mathrm{id}_H \in \mathcal{A}$. Weiter seien $B := \{u \in \mathcal{A} : \|u\| \leq 1\}$ und $\bar{B} := \{u \in \mathcal{A}'' : \|u\| \leq 1\}$. Dann gilt*

(i) $\overline{B \cap \mathcal{B}(H)_h}^{\tau_s} = \bar{B} \cap \mathcal{B}(H)_h$.
(ii) $\overline{B}^{\tau_s} = \bar{B}$.

Beweis. (i): Sei $x \in \bar{B} \cap \mathcal{B}(H)_h$ und seien $x_\alpha \in \mathcal{A}_h$ ($\alpha \in I$ mit $\lim x_\alpha = x$. Sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gegeben durch $f(t) = t$ für $|t| \leq 1$ und $f(t) = t^{-1}$ für $|t| > 1$. Nach Lemma 1.26 gilt dann auch $\lim f(x_\alpha) = f(x)$. Da $\sigma(x) \subset [-1, 1]$ und $\|f\|_\infty \leq 1$ ist, ergibt sich $f(x) = x$ und $\|f(x_\alpha)\| \leq 1$. Dies liefert insgesamt (i).
(ii): Faßt man $\mathcal{B}(H^2)$ als Algebra der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{B}$(H) auf, so ergeben sich die Operatortopologien als Produkttopologien; d.h., man testet die entsprechenden Konvergenzen komponentenweise. Demzufolge ist der starke Operatorabschluß $\bar{\mathcal{A}}_2$ in $\mathcal{B}(H^2)$ der Algebra $\mathcal{A}_2$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{A}$ gleich der Algebra der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{A}''$.
Hat man nun $x \in \bar{B}$ gegeben, so ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein selbstadjungiertes Element der Einheitskugel von $\bar{\mathcal{A}}_2$ und damit nach (i) im starken Abschluß der Einheitskugel von $\mathcal{A}_2$. Da die Projektion auf eine Komponente eine Kontraktion ist, ist also x im starken Abschluß von B. □

Wir hatten bereits im Theorem 1.19 gesehen, daß von Neumann-Algebren sehr viele Projektionen enthalten. Nun werden wir zeigen, daß diese Projektionen bereits ausreichen, um einen normdichten Teilraum einer von Neumann-Algebra aufzuspannen.

LEMMA 1.28. *Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Desweiteren sei $x \in \mathcal{M}_+$ mit $\|x\| \leq 1$. Dann gibt es eine Folge von Projektionen $(p_n) \subset \mathcal{M}$ mit*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n.$$

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß eine Folge von Projektionen $(p_n) \subset \mathcal{M}$ mit

$$(*) \qquad 0 \leq x - \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} p_n \leq 2^{-N} \operatorname{id}_H \qquad (N \in \mathbf{N})$$

existiert. Dies wird aber sofort gesichert sein, wenn man zu jedem $y \in \mathcal{M}_+$ mit $\|y\| \leq 1$ eine Projektion $q \in \mathcal{M}$ findet, daß

$$(**) \qquad 0 \leq y - q \leq \tfrac{1}{2} \operatorname{id}.$$

Hat man dann nämlich für ein $N \geq 0$ Projektionen $p_1, \ldots, p_N$ gefunden, daß (*) erfüllt wird, so bestimme man zu $y := 2^N(x - \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} p_n)$ die Projektion $p_{N+1} := q$, daß (**) erfüllt ist.
Sei nun y wie angegeben. Dann ist $\sigma(y) \subset [0,1]$. Sei χ die Borelfunktion auf $[0,1]$, die durch

$$\chi(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

gegeben ist. Der Borel-Funktionalkalkül sichert, daß $q := \chi(y)$ eine Projektion in $\mathcal{M}$ ist. Da für $t \in [0,1]$ stets $0 \leq t - \chi(t) \leq \frac{1}{2}$ ist, ist (**) gezeigt. □

DEFINITION. Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra. Die Menge aller Projektionen werde mit

$$\mathcal{P}(A) := \{ p \in \mathcal{A}_h : p^2 = p \}$$

bezeichnet.

$$\mathcal{U}(A) := \{ u \in \mathcal{A} : u^* u = 1_{\mathcal{A}} = u u^* \}$$

stehe für die Menge der unitären Elemente von $\mathcal{A}$.

THEOREM 1.29. *Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Dann gilt:*

(i) *$\mathcal{M}$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.*
(ii) *$\mathcal{M}$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathcal{U}(\mathcal{M})$.*

BEWEIS. (i) ist eine direkte Konsequenz von Lemma 1.28, Man zerlege ein beliebiges $z \in \mathcal{M}$ in Real- und Imaginäteil, $z = x + iy$ und stelle dann $\frac{1}{2}(\operatorname{id}_H + \|x\|^{-1} x)$ bzw. $\frac{1}{2}(\operatorname{id}_H \mathit{ilbertraum} + \|y\|^{-1} y)$ gemäß Lemma 1.28 dar.
Ist $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, so ist $u := \operatorname{id}_H - 2p$ unitär und es gilt $p = \frac{1}{2}(\operatorname{id}_H - u)$. Damit ist $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ in der linearen Hülle von $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ und (ii) ist gezeigt. □

4. Polarzerlegung und Bilder linearer Operatoren

In diesem Abschnitt wird noch einmal auf Standardkonstruktionen für lineare Operatoren eingegangen und gezeigt, daß diese Konstruktionen nicht aus einer den Operator enthaltenden von Neumann-Algebra herausführen.

4.1. Polarzerlegung. Während die Zerlegung einer komplexen Zahl (Funktionen) in ihren Real- und ihren Imaginärteil mehr der additiven Struktur eines Problems gerecht wird und dort zu einer Vereinfachung führt, stellt die Polarzerlegung $z = re^{i\theta}$ eine Möglichkeit dar, ein Problem mit verstärkt multiplikativen Charakter in den Griff zu bekommen. Sinnvoll ist die Polarzerlegung allerdings nur für invertierbare komplexe Zahlen, da ein Logarithmus gebildet werden muß. Entsprechend schwierig wird dies für Funktionen und Operatoren.

DEFINITION. Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Ein Operator $u \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ heißt *partielle Isometrie*, falls

$$\forall \zeta \in (\ker u)^{\perp} : \|u\zeta\| = \|\zeta\| \tag{1.17}$$

LEMMA 1.30. *Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $u \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Es sind äquivalent:*

(i) $u = uu^*u$,
(ii) u^*u *ist eine Projektion.*
(iii) uu^* *ist eine Projektion.*
(iv) u *ist eine partielle Isometrie.*
(v) u^* *ist eine partielle Isometrie.*

BEWEIS. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Selbstverständlich ist u^*u selbstadjungiert und man berechnet

$$(u^*u)^2 = u^*(uu^*u) = u.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $\zeta \in H_1$, dann ist

$$\|u\zeta\|^2 = \langle u\zeta\ , u\zeta\rangle = \langle u^*u\zeta\ , \zeta\rangle = \|u^*u\zeta\|^2 ,$$

also ist $u(\mathrm{id}_{H_1} - u^*u) = 0$.
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Aus Symmetriegründen ist nur eine Richtung zu zeigen. Auch hier ist uu^* selbstadjungiert. Außerdem ist

$$\sigma(uu^*) = \sigma(u^*u) \subset \{\,0, 1\,\} ,$$

so daß der stetige Funktionalkalkül zeigt, daß uu^* eine Projektion ist.
(i) $\Longrightarrow$ (iv): Nach Annahme ist $u^* = u^*uu^*$ und somit

$$(\ker u)^{\perp} = \overline{u^*(H_2)} = u^*u\overline{u^*(H_2)} \subset u^*u(H_1).$$

Andererseits sieht man sofort, daß $u^*u(H_1) \subset (\ker u)^{\perp}$ ist. D.h., daß u^*u die orthogonale Projektion auf $(\ker u)^{\perp}$ ist. Hat man nun $\zeta \in (\ker u)^{\perp}$ gegeben, so berechnet man

$$\|u\zeta\|^2 = \langle u\zeta\ , u\zeta\rangle = \langle u^*u\zeta\ , \zeta\rangle = \langle \zeta\ , \zeta\rangle = \|\zeta\|^2 .$$

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Sei p die orthogonale Projektion auf $(\ker u)^{\perp}$, dann ergibt sich für $\zeta \in (\ker u)^{\perp}$,

$$\langle u^*u\zeta\ , \zeta\rangle = \|u\zeta\|^2 = \|\zeta\|^2 = \langle p\zeta\ , \zeta\rangle .$$

Außerdem gilt für $\zeta \in \ker u$, daß auch $u^*u\zeta = 0 = p\zeta$. Für alle $\zeta \in H_1$ ist also

$$\langle u^*u\zeta\ , \zeta\rangle = \langle p\zeta\ , \zeta\rangle$$

und damit $u^*u = p$.
(iv) $\Longleftrightarrow$ (v): Aus Symmetriegründen sind sowohl (v) als auch (iv) zu (i)–(iii) und damit dann auch zueinander äquivalent. □

BEMERKUNG. Wie der Beweis zeigt, gilt insbesondere, daß u^*u die orthogonale Projektion auf $(\ker u)^{\perp}$ ist. Also ist $\mathrm{id}_{H_1} - u^*u$ die orthogonale Projektion auf $\ker u$.

In einer beliebigen C*-Algebra kann jedem Element x mittels stetigen Funktionalkalküls ein Absolutbetrag zugeordnet werden, $|x| = (x^*x)^{1/2}$. Nun wird gezeigt, daß die partiellen Isometrien genau die richtigen Operatoren sind, um bei der Polarzerlegung den Part des Winkelanteils zu übernehmen.

THEOREM 1.31. *Sei $v \in \mathcal{B}(H)$. Dann gibt es genau eine partielle Isometrie $u \in \mathcal{B}(H)$, daß*

$$v = u\,|v| \quad \textit{und} \quad \ker u = \ker v.$$

Außerdem ist $u^*v = |v|$.

BEWEIS. Hat man $\zeta \in H$ gegeben, so ist

$$\||v|\,\zeta\|^2 = \langle |v|\,\zeta\ ,\ |v|\,\zeta\rangle = \langle |v|\,|v|\,\zeta\ ,\ \zeta\rangle = \langle v^*v\zeta\ ,\ \zeta\rangle = \|v\zeta\|^2\,.$$

Also ist die Abbildung

$$u_0\colon\ |v|\,(H) \to v(H), |v|\,\zeta \mapsto v\zeta$$

wohldefiniert und isometrisch. Sie hat damit eine ebenfalls isometrische Fortsetzung auf $\overline{|v|\,(H)}$. Mittels

$$u := \begin{cases} u_0 & \text{auf } \overline{|v|\,(H)}, \\ 0 & \text{auf } \overline{|v|\,(H)}^{\perp} \end{cases}$$

wird ein stetiger Operator $u \in \mathcal{B}(H)$ definiert. Da $\ker u = \overline{|v|\,(H)}^{\perp}$ ist, ist u isometrisch auf $(\ker u)^{\perp}$. Somit ist u eine partielle Isometrie und $v = u\,|v|$. Weiter berechnet man,

$$\langle u^*v\zeta\ ,\ |v|\,\eta\rangle = \langle v\zeta\ ,\ v\eta\rangle = \langle v^*v\zeta\ ,\ \eta\rangle = \langle |v|\,\zeta\ ,\ |v|\,\eta\rangle$$

und damit $\langle u^*v\zeta\ ,\ \eta\rangle = \langle |v|\,\zeta\ ,\ \eta\rangle$ für alle $\eta \in \overline{|v|\,(H)}$ und damit auch für alle $\eta \in H$. Also ist $u^*v = |v|$. Es folgt, daß $\ker|v| = \ker v$ und weiter $\ker u = \ker v$.
Nun sei angenommen, daß $w \in \mathcal{B}(H)$ eine weitere partielle Isometrie ist, für die $v = w\,|v|$ und $\ker w = \ker v$. Dann stimmt w mit u sowohl auf $\overline{|v|\,(H)}$ als auch auf

$$\overline{|v|\,(H)}^{\perp} = \ker v = \ker w = \ker u$$

überein, d.h., es ist $u = w$. □

DEFINITION. Die Darstellung eines Operators $v \in \mathcal{B}(H)$ gemäß Theorem 1.31 bezeichnet man als *Polarzerlegung* von v.

KOROLLAR 1.32. *Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$ eine von Neumann-Algebra. Desweiteren sei $v \in \mathcal{M}$ mit Polarzerlegung $v = u\,|v|$. Dann gilt, $u \in \mathcal{M}$.*

BEWEIS. Sei $w \in \mathcal{M}'$ unitär. Dann ist w^*uw eine partielle Isometrie, es ist $\ker w^*uw = \ker u$ und es ist (beachte: $w \in \mathcal{M}'$ und $|v| \in \mathcal{M}$),

$$w^*uw\,|v| = w^*u\,|v|\,w = w^*vw = w^*wv = v.$$

Die Polarzerlegung ist eindeutig, also wird $w^*uw = u$ und damit $uw = wu$. Die C*-Algebra $\mathcal{M}'$ ist die lineare Hülle ihrer unitären Elemente (Theorem 1.29). Also ist $u \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. □

4.2. Bilder linearer Operatoren. Wie die Bemerkung nach Lemma 1.30 und Korollar 1.31 zeigen, enthält eine von Neumann-Algebra mit einem Operator immer auch die Projektion auf seinen Kern. Eine sicher ebenso wichtige Größe eines Operators ist aber auch sein Bild.

DEFINITION. Sei $u \in \mathcal{B}(H)$. Die orthogonale Projektion $[u] \in \mathcal{B}(H)$ auf $\overline{u(H)}$ heißt *Bildprojektion* von u.

THEOREM 1.33. *Eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ enthält die Bildprojektionen ihrer Elemente.*

BEWEIS. Sei $v \in \mathcal{M}$. Dann ist $[v] = [|v^*|]$, denn

$$\overline{v(H)}^{\perp} = \ker v^* = \overline{|v^*|\,(H)}^{\perp},$$

wobei sich die letzte Gleichung aus der Polarzerlegung von v^* ergibt. Man kann also ohne Einschränkung annehmen, daß $v \in \mathcal{M}_+$. Ebenso ist es keine Einschränkung, anzunehmen, daß $\|v\| \leq 1$. Setzt man $v_n := u^{2^{-n}}$ für $n \in \mathbf{N}$, so erhält man eine steigende Menge selbstadjungierter Operatoren in der Einheitskugel von $\mathcal{M}$, die nach Korollar 1.15 in der starken Operatortopologie gegen ein $p \in \mathcal{M}_+$ konvergiert. Hat man nun $\zeta \in H$ gegeben, so berechnet man

$$\left\|(p^2 - v_n^2)\zeta\right\| \leq \left\|(p^2 - v_n p)\zeta\right\| + \left\|(v_n p - v_n^2)\zeta\right\| \leq \|(pv_n)p\zeta\| + \|(p - v_n)\zeta\|.$$

Dies zeigt, daß v_n^2 in der starken Operatortopologie gegen p^2 konvergiert. Es ist aber auch $v_n^2 = v_{n-1}$, d.h., es ist $p^2 = p$.
Die Folge (v_n) ist in der von v erzeugten C*-Algebra ohne Eins. Dies impliziert, daß $v_n(H) \subset \overline{v(H)}$ für $n \in \mathbf{N}$ und damit auch $p(H) \subset \overline{v(H)}$. Die stetigen Funktionen

$$\sigma(v) \to \mathbf{R}, t \mapsto t^{1+2^{-n}} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

bilden eine monoton wachsende Folge, die punktweise gegen $t \mapsto t$ konvergiert. Nach dem Satz von Dini ist diese Konvergenz dann auch gleichmäßig. Der stetige Funktionalkalkül ergibt somit

$$v = \lim v^{1+2^{-n}} = \lim vv_n = \lim v_n v.$$

Dies zeigt, $v = vp = pv$ und weiter $\overline{v(H)} \subset p(H)$. Also ist $[v] = p \in \mathcal{M}$. □

KAPITEL 2

Kommutative von Neumann-Algebren

Bekanntlich, und dabei sei auf den Gel'fandschen Darstellungssatz Theorem 1.1 verwiesen, ist jede kommutative C*-Algebra mit Eins isomorph zu einer Funktionenalgebra $C(K)$ mit einem geeigneten kompakten Hausdorffraum K. Im Theorem 1.29 wurde gezeigt, daß jede von Neumann-Algebra sehr viele Projektionen enthält. Hat man jetzt eine kommutative von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ gegeben und für diese mittels der Gel'fandtransformation einen Isomorphismus zu einer Funktionenalgebra $C(K)$ hergestellt, so wird natürlich auch $C(K)$ die lineare Hülle der Projektionen sein. Eine Funktion $p \in C(K)$ ist dann eine Projektion, wenn sie selbstadjungiert ist und die Gleichung $p^2 = p$ erfüllt. Da diese Gleichung punktweise erfüllt ist, gilt somit $p(\omega) \in \{0,1\}$ für $\omega \in K$. Damit kann p nur die charakteristische Funktion einer Teilmenge von K sein, die zugleich offen und abgeschlossen ist. Der Strukturraum $\Sigma(\mathcal{M})$ zerfällt also, wenn $\mathcal{M}$ nicht gerade $\mathbf{C}$ ist, in sehr viele Zusammenhangskomponenten. Wir werden sehen, daß K und damit der Strukturraum von $\mathcal{M}$ extrem unzusammenhängend im folgenden Sinne ist.

Definition. Ein Hausdorffraum Ω heißt *extrem unzusammenhängend*, wenn der Abschluß jeder offenen Menge wieder offen ist.

Theorem 2.1. *Der Strukturraum einer kommutativen von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ ist extrem unzusammenhängend.*

Beweis. Sei Ω eine nichtleere, offene Teilmenge von $\Sigma(\mathcal{M})$. Dann ist ihre charakteristische Funktion χ punktweise das Supremum der Menge

$$A := \{ f \in C(\Sigma(\mathcal{M})) \,:\, 0 \leq f \leq \chi \}.$$

Die entsprechende Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist dann eine steigende und beschränkte Menge in $\mathcal{M}_h$, die damit nach Korollar 1.15 ein Supremum in $\mathcal{M}_h$ besitzt. Also gibt es eine stetige, positive Funktion p auf $\Sigma(\mathcal{M})$, die punktweises Supremum der Menge A ist. Da zu jedem $\omega \in \Omega$ ein $f \in A$ mit $f(\omega) = 1$ existiert, nimmt p auf Ω und dann wegen seiner Stetigkeit auch auf $\overline{\Omega}$ nur den Wert 1 an. Hat man andererseits ein $\omega' \in \Sigma(\mathcal{M}) \setminus \overline{\Omega}$ gegeben, so gibt es eine stetige Funktion g auf $\Sigma(\mathcal{M})$ mit $0 \leq g \leq 1$, $g(\omega') = 0$ und $g(\omega) = 1$ für $\omega \in \overline{\Omega}$. D.h., g ist eine obere Schranke für A, so daß die Ungleichung $p \leq g$ gelten muß. Damit ist p die charakteristische Funktion von $\overline{\Omega}$, das somit eine offene Menge sein muß. □

Bemerkung. So befriedigend das Theorem 2.1 vielleicht vom strukturellen Gesichtspunkt sein mag, so unbefriedigend ist es wohl aus anwendungsorientierter Sicht, denn ein extrem unzusammenhängender kompakter Hausdorffraum ist a priori schwer zu konstruieren bzw. zu beschreiben. Die Eigenschaft „extrem unzusammenhängend" ist noch stärker als die Eigenschaft „total unzusammenhängend". Dabei nennt man einen Hausdorffraum total unzusammenhängend, wenn man zu je zwei verschiedene Punkte des Raums disjunkte Umgebungen findet, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Beispiel 2.1. Versieht man etwa die Menge $D := \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ mit der Produkttopologie zur diskreten Topologie auf $\{0,1\}$, so erhält man *das Beispiel* eines total unzusammenhängenden, kompakten Hausdorffraumes, die *Cantormenge*. Hat man nämlich zwei verschiedene (ϵ_l), $(\delta_l) \in D$ gegeben, so gibt es ein $k \in \mathbf{N}$, daß $\epsilon_k \neq \delta_k$. Setzt man

$$U := \{\, (\gamma_l) \in D \,:\, \gamma_k = \epsilon_k \,\} \text{ und } V := \{\, (\gamma_l) \in D \,:\, \gamma_k = \delta_k \,\}$$

so erhält man disjunkte, offene und abgeschlossene Umgebungen von (ϵ_l) bzw. (δ_l). Die Abbildung $f\colon D \to [0,1]$, $(\epsilon_l) \mapsto \sum_{l=1}^{\infty} \epsilon_l 2^{-l}$ ist stetig. Sei $\Omega := f^{-1}((\,r,1])$ mit einem irrationalem $r \in (\,0,1)$. Dies ist eine offene Teilmenge von D. Hat nun r die dyadische Entwicklung $r = \sum_{l=1}^{\infty} \rho_l 2^{-l}$, so ist $(\epsilon_l) \in \Omega$, falls $\epsilon_1 = \rho_1, \ldots, \epsilon_k = \rho_k$ und $\epsilon_{k+1} > \rho_{k+1}$ für ein $k \in \mathbf{N}$. Da r irrational ist, treten die Werte 0 und 1 in der Folge (ρ_l) jeweils unendlich oft auf. Damit ist für großes $k \in \mathbf{N}$ und $\rho_{k+1} = 0$, die Folge $(\rho_1, \ldots, \rho_k, 1, 0, \ldots)$ nahe bei (ρ_l) und außerdem in Ω, d.h., es ist $(\rho_l) \in \overline{\Omega}$. Ist nun j groß und $\rho_{j+1} = 1$, dann ist $(\rho_1, \ldots, \rho_j, 0, 0, \ldots)$ zwar nahe bei (ρ_l) aber nicht in $\overline{\Omega}$, da kein Element von Ω damit in den ersten $j+1$ Koordinaten übereinstimmt. Hiermit ist aber (ρ_l) nicht im Inneren von $\overline{\Omega}$; also ist $\overline{\Omega}$ nicht offen.

Beispiel 2.1 und Theorem 2.1 zeigen, daß die Interpretation einer kommutativen von Neumann-Algebra als ein Raum $C(K)$ für die Anwendung nicht angemessen ist, da die topologische Struktur des K doch „sehr nebulös“ und deshalb schwer zu handhaben ist.
Mit Blick auf die Anwendbarkeit und, um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, wird im Rest des Kapitels vorausgesetzt, daß H ein separabler Hilbertraum ist (Allerdings wird dies der Deutlichkeit halber stets in die Voraussetzungen der zu beweisenden Aussagen aufgenommen werden). Für diesen Fall können kommutative von Neumann-Algebren als „L^∞-Algebren“ charakterisiert werden.

1. Separabilität

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Feststellungen zum Thema Separabilität im Kontext von C*-Algebren und von Neumann-Algebren zusammengestellt.

LEMMA 2.2. *Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra.*

(i) *$\mathcal{A}$ ist genau dann separabel, wenn $\mathcal{A}$ von einer höchstens abzählbaren Menge als C*-Algebra erzeugt[1] wird.*
(ii) *Ist $\mathcal{A}$ kommutativ, so ist $\mathcal{A}$ genau dann separabel, wenn der Strukturraum $\Sigma(\mathcal{A})$ metrisierbar ist und durch eine abzählbare Folge kompakter Mengen ausgeschöpft werden kann.*

BEWEIS. (i) ist eine einfache Beobachtung.
(ii):
Sei $\mathcal{A}$ als separabel angenommen. Die Topologie auf $\Sigma(\mathcal{A})$ ist die Einschränkung der schwachen* Topologie des Dualraums von $\mathcal{A}$. Ähnlich dem Beweis zu Lemma 1.8, 5, sieht man, daß die abgeschlossene Einheitskugel des Dualraums von $\mathcal{A}$ und damit $\Sigma(\mathcal{A})$ als Teilmenge davon metrisierbar ist.
Ist andererseits $\Sigma(\mathcal{A})$ metrisierbar aber nicht kompakt, so ist auch die Einpunktkompaktifizierung von $\Sigma(\mathcal{A})$, die ja Strukturraum von $\mathcal{A}[e]$ ist, ebenfalls metrisierbar. Da nun $\mathcal{A}$ genau dann separabel ist, wenn dies für $\mathcal{A}[e]$ richtig ist, kann man annehmen, daß $\mathcal{A}$ eine Eins hat bzw. daß $\Sigma(\mathcal{A})$ kompakt ist. Ein kompakter metrischer Raum ist separabel, d.h. es gibt eine dichte Folge $(\omega_n) \subset \Sigma(\mathcal{A})$. Ist d die Metrik auf dem Strukturraum von $\mathcal{A}$, so erhält man durch $f_n(\omega) := d(\omega_n, \omega)$ eine Folge von Funktionen, die die Punkte von $\Sigma(\mathcal{A})$ trennt. Setzt man noch $f_0(\omega) := 1$ so erhält man eine Folge stetiger Funktionen, die nach dem Theorem von Stone und

[1] d.h., die lineare Hülle aller endlichen Produkte mit Faktoren aus der fraglichen Menge bzw. deren Adjungierte liegt dicht in $\mathcal{A}$ (vgl. Skript SS96, 4.3.1)

Weierstraß (vgl. Skript SS96, S. 6) die C*-Algebra $C(\Sigma(\mathcal{A}))$ erzeugt. Nach (i) ist dies und damit auch $\mathcal{A}$ selbst eine separable C*-Algebra. □

LEMMA 2.3. *Sei H ein separabler Hilbertraum. Dann ist die C*-Algebra $\mathcal{K}(H)$ der kompakten Operatoren separabel.*

BEWEIS. Bereits mehrfach wurde gezeigt, daß die Menge der Operatoren mit endlichem Rang dicht in $\mathcal{K}(H)$ liegt (vgl. Beispiel 1.5). Ist nun $(\zeta_n) \subset H$ dicht und $u\colon H \to H$, $u\xi = \langle \xi \, , \eta \rangle \, \zeta$ ein Operator vom Rang 1, dann gibt es zu $\epsilon > 0$ Vektoren ζ_m und ζ_n so, daß

$$\|\zeta - \zeta_m\| < \epsilon \text{ und } \|\eta - \zeta_n\| < \epsilon.$$

Setzt man $v\colon H \to H$, $v\xi = \langle \xi \, , \zeta_n \rangle \, \zeta_m$, dann ergibt elementare Rechnung

$$\|(u - v)\xi\| \leq (2\,\|\zeta\| + \epsilon)\epsilon\,\|\xi\| \qquad (\xi \in H).$$

Dies zeigt, daß die Operatoren vom Rang 1 durch Operatoren der Gestalt v in der Norm approximiert werden können. Hieraus schließt man unmittelbar, daß $\mathcal{K}(H)$ separabel ist. □

BEMERKUNG. Beachtet man, daß $\mathcal{K}(H)' = \mathbf{C} \cdot \mathrm{id}_H$ und somit $\mathcal{K}(H)'' = \mathcal{B}(H)$ ist (vgl. Beispiel 1.6, (1.14)), so ergibt sich mittels des Dichtheitssatzes von Kaplanski, Theorem 1.27, daß die abgeschlossene Einheitskugel von $\mathcal{B}$(H) in der schwachen und der starken Operatortopologie für separables H ebenfalls separabel und somit metrisierbar ist, was ja bereits in Lemma 1.8 gezeigt wurde.

LEMMA 2.4. *Ist $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra auf einem separablen Hilbertraum, so gibt es eine separable C*-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, für die gilt:*

$$\mathcal{A}'' = \mathcal{M} \text{ und } \mathrm{id}_H \in \mathcal{A}.$$

BEWEIS. Die Einheitskugel von $\mathcal{M}$ ist nach Voraussetzung separabel in der starken Operatortopologie. Sei also $E \subset \mathcal{M}$ eine abzählbare dichte Teilmenge hiervon, die noch ohne Einschränkung id_H enthalte. Die von E erzeugte separable C*-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ist dann nach Konstruktion bezüglich der starken Operatortopologie dicht in $\mathcal{M}$, erfüllt also die Behauptung des Satzes. □

2. Maximale kommutative von Neumann-Algebren

Sei im folgenden $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ eine C*-Algebra, die id_H enthält. Ein Vektor $\zeta \in H$ wird *zyklisch* genannt, wenn $\mathcal{A}\zeta$ dicht in H ist.

DEFINITION. Ein Vektor $\zeta \in H$ *trennt die Elemente von* $\mathcal{A}$, wenn für alle $u \in \mathcal{A}$ gilt:

$$u\zeta = 0 \implies u = 0.$$

LEMMA 2.5. *Trennt $\zeta \in H$ die Elemente von $\mathcal{A}'$, so ist ζ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{A}$.*

BEWEIS. Sei $p \in \mathcal{B}(H)$ die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathcal{A}\zeta}$, dann ist $p \in \mathcal{A}'$, denn $\overline{\mathcal{A}\zeta}$ ist invariant unter $\mathcal{A}$. Da $\zeta \in \overline{\mathcal{A}\zeta}$ ist, wird $(\mathrm{id}_H - p)\zeta = 0$. D.h., es ist $p = \mathrm{id}_H$ und somit ist $\mathcal{A}\zeta$ dicht in H. □

DEFINITION. Eine kommutative von Neumann-Algebra heißt *maximal (auf H)*, wenn sie in keiner weiteren kommutativen von Neumann-Algebra auf H enthalten ist.

BEMERKUNG. Eine kommutative von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ ist genau dann maximal, wenn gilt: $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

Beispiel 2.2. Sei μ ein positives reguläres Borelmaß auf dem kompakten Hausdorffraum K. Die Abbildung

$$M\colon L^\infty(K,\mu) \to \mathcal{B}(L^2(K,\mu)), f \mapsto (g \mapsto M_f g := fg)$$

ist eine Darstellung von $L^\infty(K,\mu)$ als *Multiplikationsoperatoren auf* $L^2(K,\mu)$. Man nennt M_f auch Multiplikationsoperator mit *Symbol* f. Sei $\mathcal{M}$ das Bild von M. Eine C*-Unteralgebra von $\mathcal{M}$ ist die Algebra der Multiplikationsoperatoren mit stetigem Symbol

$$\mathcal{A} := \{\, M_f \;:\; f \in C(K)\,\}.$$

Es gilt nun $\mathcal{A}' = \mathcal{M}$. Zum Beweis hiervon sei $u \in \mathcal{A}'$ angenommen. Setze $h := u(1_K) \in L^2(K,\mu)$[2]. Ist nun $f \in C(K)$, dann ergibt sich

$$f \cdot h = M_f h = M_f u(1_K) = u(M_f 1_K) = u(f)$$

und damit, da $C(K)$ dicht in $L^2(K,\mu)$ ist, $gh = u(g)$ μ-f.ü für beliebiges $g \in L^2(K,\mu)$.
Für $n \in \mathbf{N}$ setze

$$E_n := \{\, \omega \in K \;:\; |h(\omega)| > \|u\| + 1/n \,\}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned}\|u\|^2 \|1_{E_n}\|^2 \geq \|u(1_{E_n})\|^2 &= \int_{E_n} |h|^2 \, d\mu \\ &\geq \int_{E_n} (\|u\| + 1/n)^2 \, d\mu = (\|u\| + 1/n)^2 \|1_{E_n}\|^2 .\end{aligned}$$

Hiermit kann E_n aber nur eine μ-Nullmenge sein, d.h. $u \in \mathcal{M}$ und $\|h\|_\infty \leq \|u\|$. Da nun weiter

$$\mathcal{M}' = \mathcal{A}'' \subset \mathcal{M}'' = \mathcal{A}''' = \mathcal{M}$$

ist, ist $\mathcal{M}$ eine maximale kommutative von Neumann-Algebra. Der Vektor 1_K trennt die Elemente von $\mathcal{M}$. Er ist somit zyklisch für $\mathcal{A}$.

Lemma 2.6. *Ist H ein separabler Hilbertraum und ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$ eine kommutative von Neumann-Algebra hierauf, dann gibt es einen Vektor $\zeta \in H$, der die Elemente von $\mathcal{M}$ trennt.*

Beweis. Sei E eine maximale Menge von Einheitsvektoren in H, daß die Räume $\mathcal{M}\zeta$ $(\zeta \in E)$ paarweise orthogonal sind. Die Maximalität von E sichert, daß

$$H = \bigoplus_{\zeta \in E} \overline{\mathcal{M}\zeta}.$$

Da H separabel ist, ist E höchstens abzählbar, also $E = (\zeta_n)$. Sei $\zeta := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\zeta_n$. Ist nun $u \in \mathcal{M}$ mit $u\zeta = 0$, dann ist $u\zeta_n = 0$, denn die Folge $(u\zeta_n)$ besteht aus paarweise orthogonalen Elementen. Hat man jetzt $v \in \mathcal{M}$ gegeben, dann ist $uv\zeta_n = vu\zeta_n = 0$ und somit $u(\mathcal{A}\zeta_n) = \{\,0\,\}$ für alle $n \in \mathbf{N}$, d.h. $u = 0$. □

Theorem 2.7. *Ist $\mathcal{M}$ eine maximale kommutative von Neumann-Algebra auf den separablen Hilbertraum, so hat $\mathcal{M}$ einen zyklischen Vektor.*

Beweis. Nach Lemma 2.6 gibt einen Vektor $\zeta \in H$, der die Element von $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ trennt. Nach Lemma 2.5 ist dann ζ zyklisch für $\mathcal{M}$. □

[2]Dieses h ist bis auf eine μ-Nullmenge bestimmt

THEOREM 2.8. *Sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra auf dem separablen Hilbertraum H. Dann gibt es einen metrisierbaren, kompakten Hausdorffraum K, ein positives, reguläres Borelmaß μ hierauf und einen unitären Operator $U\colon H \to L^2(K,\mu)$ so, daß $U\mathcal{M}U^*$ die von Neumann-Algebra aller Multiplikationsoperatoren auf $L^2(K,\mu)$ ist.*

BEWEIS. Sei $\zeta \in H$ ein gemäß Theorem 2.7 gewählter zyklischer Einheitsvektor für $\mathcal{M}$. Desweiteren sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine gemäß Lemma 2.4 gebildete separable C*-Algebra, die in der starken Operatortopologie dicht in $\mathcal{M}$ ist und id_H enthält. Sei K der Strukturraum von $\mathcal{A}$, der nach Lemma 2.2 metrisierbar ist.
Sei $\gamma\colon \mathcal{A} \to C(K)$ die Gel'fanddarstellung von $\mathcal{A}$. Mittels

$$\tau f := \langle \gamma^{-1}(f)\zeta \,,\, \zeta \rangle \qquad (f \in C(K))$$

wird ein positives lineares Funktional auf $C(K)$ definiert. Der Rieszsche Darstellungssatz liefert ein positives, reguläres Borelmaß μ auf K, daß

$$\tau f = \int_K f\,d\mu \qquad (f \in C(K))$$

ist. Mittels

$$U\colon \mathcal{A}\zeta \to L^2(K,\mu), x\zeta \mapsto \gamma(x)$$

wird ein isometrischer Operator definiert, der sich wegen der Zyklizität von ζ bzgl. $\mathcal{A}$ zu einem unitären Operator, ebenfalls mit U bezeichnet, auf ganz H fortsetzt. Die Abbildung

$$\Phi_U\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(L^2(K,\mu)), x \mapsto UxU^*$$

ist ein in allen Operatortopologien stetiger C*-Isomorphismus. Er vermittelt nach Konstruktion eine C*-Isometrie zwischen $\mathcal{A}$ und den Multiplikationsoperatoren auf $L^2(K,\mu)$ mit stetigem Symbol. Geht man also zu den starken Abschlüssen über (vgl. Beispiel 2.2), so ist Φ_U eine C*-Isometrie zwischen $\mathcal{M}$ und der von Neumann-Algebra aller Multiplikationsoperatoren auf $L^2(K,\mu)$. □

KAPITEL 3

Projektionen

In der bisherigen Darstellung wurde schon mehrfach darauf hingewiesen, daß (orthogonale) Projektionen eine zentrale Rolle in der Theorie der von Neumann-Algebren spielen. In diesem Kapitel soll nun eine Möglichkeit vorgestellt werden, mittels Eigenschaften des Projektionenverbandes, i.e. die Menge der in einer von Neumann-Algebra vorhandenen Projektionen, eine Klassifikation der von Neumann-Algebren zu erzielen.
Im folgenden sei wieder ein Hilbertraum H fixiert. Desweiteren sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$ eine von Neumann-Algebra. Für die Eins id_H von $\mathcal{M}$ bzw. von $\mathcal{B}$(H) werde außerdem von nun an

$$\mathbf{1} := \mathrm{id}_H$$

geschrieben.

1. Murray-von Neumann-Äquivalenz

1.1. Der Projektionenverband. Die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ der Projektionen der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ ist eine beschränkte und in allen Operatortopologien abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{M}_+$. Damit führen insbesondere die Grenzwerte steigender und fallender Mengen nicht aus $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ heraus.
Zunächst soll die Ordnungsstruktur auf $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, die durch die Ordnungssttruktur auf $\mathcal{M}_h$ induziert wird, in einer Form ohne Zuhilfenahme des Spektrums allein durch eine algebraische Relatation charakterisiert werden.

LEMMA 3.1. *Seien p und q Projektionen in der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$, dann gilt,*

$$p \leq q \iff pq = p = qp.$$

BEWEIS. Sei als erstes angenommen, daß $p \leq q$. Ist nun $\zeta \in H$ gegeben, so wird

$$\|p\zeta\|^2 = \langle p\zeta\,,\, p\zeta\rangle = \langle p\zeta\,,\,\zeta\rangle \leq \langle q\zeta\,,\,\zeta\rangle = \langle q\zeta\,,\, q\zeta\rangle = \|q\zeta\|^2$$

und damit $\|p\zeta\| \leq \|q\zeta\|$ für $\zeta \in H$. Dies zeigt, daß der Kern von q im Kern von p enthalten ist. Also ist $p(1-q) = 0$ oder $p = pq$. Außerdem ist

$$qp = (pq)^* = p^* = p.$$

Ist andererseits $p = qp = pq$, so wird für $\zeta \in H$,

$$\|p\zeta\| = \|pq\zeta\| \leq \|q\zeta\|\,.$$

Wie oben sieht man, daß dies $p \leq q$ bedeutet. □

BEMERKUNG. Die in Lemma 3.1 gegebene Charakterisierung der Ordnungsstruktur auf $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ bedeutet, daß $p \leq q$ genau dann, wenn das Bild von p im Bild von q enthalten ist.

Als nächstes wird gezeigt, daß $[\mathcal{P}(\mathcal{M}), \leq]$ ein Verband wird.

Lemma 3.2. *Seien p und q Projektionen in der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$, dann gibt es eindeutig bestimmte Projektionen $p \vee q$ und $p \wedge q$ in $\mathcal{M}$, daß*

$$p, q \leq p \vee q \qquad \textit{und} \qquad \forall r \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : p, q \leq r \implies p \vee q \leq r$$
$$p, q \geq p \wedge q \qquad \textit{und} \qquad \forall r \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : p, q \geq r \implies p \wedge q \geq r$$

Beweis. Sei $s \in \mathcal{B}(H)$ die Projektion auf die Summe der Bilder von p und q. Dann ergibt sich sofort, daß $p, q \leq s$, denn $ps = sp = p$ und $qs = sq = q$. Ist andererseits $r \geq p, q$ dann rechnet man punktweise nach, daß $rs = sr = s$, also $r \geq s$. Die Eindeutigkeit von $p \wedge q := s$ ergibt sich sofort aus den eben gezeigten Eigenschaften. Wenn man sich jetzt noch davon überzeugt, daß $s \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ liegt, so ist man fertig. Ist $u \in \mathcal{U}(\mathcal{M}')$, so gelten die Gleichungen $p = u^*pu$ und $q = u^*qu$. Damit folgt sofort, daß

$$u^*sup = u^*spu = u^*su = u^*psu = pu^*su$$

Damit ist u^*su eine Projektion die größer als p ist. Ebenso sieht man daß u^*su größer als q und damit auch größer als s ist, also $s \leq u^*su$. Hiermit gilt aber auch $usu \leq u(u^*su)u^* = s$, was $u^*su = s$ nach sich zieht. Also vertauscht s mit jedem unitären Element von $\mathcal{M}'$ und ist damit ein Element von $\mathcal{M}$.
Ebenso leicht ist die Existenz von $p \wedge q$ einzusehen. □

Definition. Die zu $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ gebildeten Projektionen $p \vee q$ bzw. $p \wedge q$ bezeichnet man als *Supremum* bzw. *Infimum* von p und q.

Bemerkung. Es ist unmittelbar aus der Konstruktion von $p \vee q$ und $p \wedge q$ ersichtlich, daß die erste Projektion gerade die Projektion auf den Abschluß der Summe der Bilder von p und q und die zweite die Projektion auf den Durchschnitt dieser Bilder ist.

Lemma 3.3. *Sei $P \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ beliebig, dann existieren $\sup P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ und $\inf P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, wobei $\inf \emptyset := \mathbf{1}$ und $\sup \emptyset := 0$ gesetzt werde. Es gilt*

$$\inf P = \mathbf{1} - \sup \{ 1 - p \, : \, p \in P \} .$$

Beweis. Die Behauptung folgt für endliche Mengen sofort per Induktion aus Lemma 3.2. Ist P nicht endlich, so nehme man noch sämtliche Suprema bzw. Infima endlicher Teilmengen hinzu, um eine Menge zu erhalten, die dann in der starken Operatortopologie gegen das Supremum bzw. das Infimum von P steigt bzw. fällt (s.Korollar 1.15). □

1.2. Äquivalenz von Projektionen. Alle Hilberträume besitzen eine Orthonormalbasis, deren Kardinalität Isometrieklassen von Hilberträumen vollständig charakterisiert. Diese Kardinalität bezeichnet man als *Hilbertraumdimension.* Es liegt also nahe, Projektionen durch die Dimension ihres Bildes zu klassifizieren. Hierdurch geht jedoch die Information über die von Neumann-Algebra, in der sich die in Frage stehenden Projektionen befinden, verloren. Zieht man allerdings in Betracht, daß die Hilbertraumdimension die Isometrieklasse bestimmt, so kann man den Ansatz verfeinern, wenn man die Äquivalenz zweier Projektionen bezüglich einer von Neumann-Algebra durch die Existenz in der von Neumann-Algebra einer Isometrie zwischen deren Bildern definiert.

Definition. Seien p und q Projektionen in der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$. Sie heißen *äquivalent (bezüglich $\mathcal{M}$)*, wenn es eine partielle Isometrie $u \in \mathcal{M}$ gibt, deren Kern mit dem Kern von p und deren Bild mit dem Bild von q übereinstimmt,

$$p \sim q :\iff p \underset{\mathcal{M}}{\sim} q :\iff p = u^*u \text{ und } q = uu^*.$$

Man nennt p und q *orthogonal zueinander*, wenn ihr Produkt verschwindet,

$$p \perp q :\Longleftrightarrow pq = 0.$$

Hat man eine Familie $p \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ paarweise orthogonaler Projektionen gegeben, so sei

$$\sum_{p \in P} p := \sup P. \tag{3.1}$$

BEMERKUNG. Die Notation (3.1) ist gerechtfertigt, da bei endlichem P die Summe gerade die Projektion auf die Summe der Bilder der einzelnen Projektionen ist.

LEMMA 3.4. *Sei I eine nichtleere Menge und seien $(p_i)_{i\in I}$, $(q_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit jeweils paarweise orthogonalen Projektionen. Desweiteren gelte $p_i \sim q_i$. Dann gilt auch*

$$\sum_{i\in I} p_i \sim \sum_{i \in I} q_i.$$

BEWEIS. Seien $(u_i)_{i\in I} \subset \mathcal{M}$ partielle Isometrien mit $p_i = u_i^* u_i$ und $q_i = u_i u_i^*$. Dann exisistiert in der starken Opratortopologie $u := \sum_{i\in I} u_i$ und es gilt $u^* := \sum_{i \in I} u_i^*$, denn die Bilder der einzelnen u_i bzw. u_i^* sind paarweise orthogonal. Man überprüft dann, daß punktweise

$$u^*u = \big(\sum_{i\in I} u_i^*\big)\big(\sum_{i\in I} u_i\big) = \sum_{i,j\in I} \delta_{i,j} u_i^* u_j = \sum_{i\in I} p_i$$

und entsprechend $uu^* = \sum_{i\in I} q_i$ richtig ist. □

LEMMA 3.5. *Seien p, q, p_1 und $q_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $p \sim q_1 \leq q$ und $q \sim p_1 \leq p$. Dann gilt $p \sim q$.*

BEWEIS. Seien $u, v \in \mathcal{M}$ partielle Isometrien mit

$$p = u^*u,\ q_1 = uu^*, \quad q = v^*v,\ p_1 = vv^*.$$

Induktiv seien

$$p_{n+1} := vq_nv^*, \quad q_{n+1} := up_nu^* \qquad (n \in \mathbf{N})$$

gesetzt. Die Konstruktion sichert, daß

$$\begin{aligned} p \geq p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq p_{n+1} \geq \ldots && (n \in \mathbf{N}) \\ q \geq q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n \geq q_{n+1} \geq \ldots && (n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

Desweiteren rechnet man aus, daß

$$\begin{aligned} p_{n+1}^2 &= vq_nv^*vq_nv^* = vq_nqq_nv^* = vq_n^2v^* && (n \in \mathbf{N}) \\ q_{n+1}^2 &= up_nu^*up_nu^* = up_npp_nu^* = up_n^2u^* && (n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

Damit ergibt eine Induktion, daß alle p_n und q_n Projektionen sind. Nun setze man noch $p_0 := p$, $q_0 := q$ sowie

$$p_\infty := \inf_{n\in\mathbf{N}} p_n = \lim_{n\in\mathbf{N}} p_n \text{ und } q_\infty := \inf_{n\in\mathbf{N}} q_n = \lim_{n\in\mathbf{N}} q_n,$$

dann ergibt sich

$$p = \sum_{n=0}^{\infty}(p_n - p_{n+1}) + p_\infty, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty}(q_n - q_{n+1}) + q_\infty.$$

Nach Konstruktion ergibt sich

$$\begin{gathered} u(p_n - p_{n+1})u^* = q_{n+1} - q_{n+2}, \quad v(q_n - q_{n+1})v^* = p_{n+1} - p_{n+2}, \\ up_\infty u^* = q_\infty \text{ und } vq_\infty v^* = p_\infty. \end{gathered} \tag{*}$$

Beachtet man weiter, daß beispielsweise

$$p_\infty = p_\infty p p_\infty = (up_\infty)^*(up_\infty)$$

und

$$q_\infty = up_\infty u^* = (up_\infty)(up_\infty)^*$$

also $p_\infty \sim q_\infty$ gilt, so erschließt man aus (*), daß auch

$$p_{2n} - p_{2n+1} \sim q_{2n+1} - q_{2n+2}$$
$$p_{2n+1} - p_{2n+2} \sim q_{2n} - q_{2n+1}$$

und hiermit

$$p = \sum_{n=0}^{\infty}(p_{2n} - p_{2n+1}) + \sum_{n=0}^{\infty}(p_{2n+1} - p_{2n+2}) + p_\infty$$
$$\sim \sum_{n=0}^{\infty}(q_{2n+1} - q_{2n+2}) + \sum_{n=0}^{\infty}(q_{2n} - q_{2n+1}) + q_\infty = q$$

und das war zu zeigen. □

DEFINITION. In Anbetracht von Lemma 3.5 werde im Falle, daß $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ äquivalent zu einer Projektion $q_1 \leq q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ ist,

$$p \precsim q \text{ bzw. } p \underset{\mathcal{M}}{\precsim} q$$

geschrieben. Entsprechend werden Symbole wie $\succsim$, $\underset{\mathcal{M}}{\succsim}$, $\prec$, $\ldots$ verwendet.

BEMERKUNG. Mit dieser Notation lautet Lemma 3.5 also

$$p \underset{\mathcal{M}}{\precsim} q \underset{\mathcal{M}}{\precsim} p \implies p \sim q \tag{3.2}$$

für $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

BEISPIEL 3.1. Sei $H := \ell_2$. Desweiteren seien $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(H))$ gegeben durch

$$p((\alpha_n)) := (\alpha_1, 0, \alpha_3, \ldots, 0, \alpha_{2n+1}, 0, \ldots)$$
$$q((\alpha_n)) := (0, 0, \alpha_3, 0, 0, \alpha_6, \ldots, 0, 0, \alpha_{3n}, 0, 0, \ldots)$$

für $(\alpha_n) \in \ell_2$. Desweiteren sei $u \in \mathcal{B}(H)$ durch

$$u((\alpha_n)) := (0, 0, \alpha_1, 0, 0, \alpha_3, 0, 0, \alpha_5, 0, 0, \ldots)$$

für $(\alpha_n) \in \ell_2$ festgesetzt. Man berechnet leicht, daß

$$u^*((\alpha_n)) = (\alpha_3, 0, \alpha_6, 0, \alpha_9, 0, \ldots).$$

Es gilt also $p = u^*u$ und $q = uu^*$, d.h. $p \underset{\mathcal{B}(H)}{\sim} q$.

Die Projektionen p und q sind aber auch in der von Neumann-Algebra ℓ_∞ enthalten. Allerdings gibt es in ℓ_∞ keine partielle Isometrie, die das Bild von p in das Bild von q überführt, d.h. es ist $p \underset{\ell_\infty}{\not\sim} q$.

BEMERKUNG. Beispiel 3.1 legt nahe, und man überzeugt sich auch leicht davon, daß zwei Projektionen in einer kommutativen von Neumann-Algebra nur dann äquivalent sind, wenn sie bereits gleich sind. Dies folgt nämlich daraus, daß Projektionen in einer kommutativen von Neumann-Algebra (in jeder kommutativen C*-Algebra) charakteristischen Funktionen offener und zugleich abgeschlossener Mengen sind. Demzufolge ist eine partielle Isometrie in einer kommutativen von Neumann-Algebra eine Funktion, die nur Werte annimmt, die entweder den Betrag 1 oder den Betrag 0 haben.

1.3. Trägerprojektionen. In Theorem 1.31 und in Korollar 1.32 wurde gezeigt, daß zu jedem Element x einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ die Polarzerlegung $x = u\,|x|$, $\ker u = \ker x$ innerhalb von $\mathcal{M}$ durchgeführt werden kann. Hierbei ist u eine Isometrie von $(\ker x)^\perp = \overline{x^*(H)}$ auf das Bild von x. Durch uu^* ist damit gerade die Bildprojektion $[x]$ (vgl. Theorem 1.33 von x gegeben. Eine unmittelbare Konsequenz hiervon ist die Äquivalenz der beiden Bildprojektionen

$$[x] \underset{\mathcal{M}}{\sim} [x^*]. \tag{3.3}$$

DEFINITION. Die Bildprojektionen $[x]$ und $[x^*]$ bezeichnet man auch als *linken* bzw. *rechten Träger* von x und schreibt

$$\mathrm{s}_l(x) := [x] \quad \text{und} \quad \mathrm{s}_r(x) := [x^*].$$

BEMERKUNG. Es folgt unmittelbar aus der Definition, daß

$$\mathrm{s}_l(x) = \mathrm{s}_r(x^*) \quad \text{und} \quad \mathrm{s}_r(x) = \mathrm{s}_l(x^*) \tag{3.4}$$

Dem linken bzw. rechten Träger eines Elements einer von Neumann-Algebra kann man auch folgendermaßen im Projektionenverband auszeichnen.

LEMMA 3.6. *Sei x Element der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{s}_l(x) = \min\{\, p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \;:\; px = x \,\}$$
$$\mathrm{s}_r(x) = \min\{\, p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \;:\; xp = x \,\}.$$

BEWEIS. Der linke Träger $\mathrm{s}_l(x)$ erfüllt als Projektion auf den Abschluß des Bildes von x sicher die Gleichung $\mathrm{s}_l(x)x = x$. Andereseits folgt für jede beliebige Projektion $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mit $px = x$, daß $x(H) \subset p(H)$ und damit auch daß $\mathrm{s}_l(x)(H) \subset p(H)$. Dies heißt aber nichts anderes als $\mathrm{s}_l(x) \le p$. Mit (3.4) folgt dann auch die Behauptung für $\mathrm{s}_r(x)$. □

LEMMA 3.7. *Für jedes Paar von Projektionen $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ gilt:*

$$(p \vee q) - p \sim q - (p \wedge q)$$

BEWEIS. Es ist

$$(q(\mathbf{1}-p))(H)^\perp = \ker(\mathbf{1}-p)q = \ker q \oplus p(H) \cap q(H)$$

und damit

$$\mathrm{s}_l(q(\mathbf{1}-p)) = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - q + p \wedge q) = q - p \wedge q.$$

Entsprechend sieht man, daß $\mathrm{s}_r(q(\mathbf{1}-p)) = p \vee q - p$ ist. Mit (3.3) folgt die Behauptung. □

DEFINITION. Man bezeichnet den Durchschnitt $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ als *Zentrum* der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ und schreibt dafür $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Eine von Neumann-Algebra mit trivialem Zentrum $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$ heißt *Faktor*.

BEMERKUNG. Es ist klar, daß $\mathcal{Z}(\mathcal{M}') = \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ eine kommutative von Neumann-Algebra ist.

DEFINITION. Eine Projektion $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ wird *zentrale Projektion* genannt. Hat man $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ gegeben, so bezeichnet man

$$\mathrm{z}(p) := \min\{\, q \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})) \;:\; p \le q \,\}$$

als *zentralen Träger von p*.
Gilt für zwei Projektionen $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, daß $\mathrm{z}(p)\,\mathrm{z}(q) = 0$ ist, so nennt man sie *zentral orthogonal*.

BEISPIEL 3.2. Sei $H := L^2[0,1]$ und sei

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \; : \; f_{11}, \ldots, f_{22}, g \in L^\infty[0,1] \right\}$$

Dann ist

$$\mathcal{M}' = \left\{ \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \; : \; f, g \in L^\infty[0,1] \right\}$$

und somit $\mathcal{Z}(\mathcal{M})\mathcal{M} \cup \mathcal{M}' = \mathcal{M}'$. Der zentrale Träger der Projektion

$$p := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}1_{[0,\frac{1}{2}]}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 1_{[0,\frac{1}{2}]} \end{pmatrix}$$

ergibt sich zu $\mathrm{z}(p) = 1_{[0,\frac{1}{2}]} I_{3\times 3}$.

Das Bild des zentralen Trägers einer Projektion in einer von Neumann-Algebra kann folgendermaßen charakterisiert werden.

LEMMA 3.8. *Sei $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Dann ist $\mathrm{z}(p)$ die orthogonale Projektion auf*

$$\overline{\mathcal{M}pH}.$$

BEWEIS. Sei q die orthogonale Projektion auf $H_0 := \overline{\mathcal{M}pH}$. Dann gilt für $x \in \mathcal{M}$, daß $xH_0 \subset H_0$, also $qxq = xq$. Damit ergibt sich aber sofort, daß

$$qx = (x^*q)^* = (qx^*q)^* = qxq = xq,$$

d.h. $q \in \mathcal{M}'$. Hat man $y \in \mathcal{M}'$ gegeben, dann gilt auch hierfür, daß $yH_0 \subset H_0$ und damit $qy = yq$. Zusammenfassend erhält man, daß q eine Projektion im Zentrum von $\mathcal{M}$ ist. Da $\mathbf{1} \in \mathcal{M}$, schließt man noch $qp = p$ und somit $q \geq \mathrm{z}(p)$.
Ist $x \in \mathcal{M}$, dann gilt $x\,\mathrm{z}(p) = \mathrm{z}(p)x$. Also läßt x das Bild von $\mathrm{z}(p)$ invariant. Mit anderen Worten, es ist

$$q(H) = H_0 = \overline{\mathcal{M}pH} \subset \mathrm{z}(p)(H)$$

und somit $q \leq \mathrm{z}(p)$. □

LEMMA 3.9. *Für zwei Projektionen p und q in der von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *p und q sind zentral orthogonal*
(ii) *$p\mathcal{M}q = \{0\}$*
(iii) *Für alle Projektionen p_1 und q_1 in $\mathcal{M}$ gilt*

$$p \geq p_1 \sim q_1 \leq q \implies p_1 = 0 = q_1$$

BEWEIS. „(iii) $\implies$ (ii)“: Gibt es ein $x \in \mathcal{M}$ mit $y := pxq \neq 0$, so ist $py = y = yq$, d.h. nach Lemma 3.6 für den linken und den rechten Träger von y,

$$p \geq \mathrm{s}_l(y) \sim \mathrm{s}_r(y) \leq q \quad \text{und} \quad \mathrm{s}_l(y) \neq 0 \neq \mathrm{s}_r(y).$$

„(ii) $\implies$ (i)“: Seien $x, y \in \mathcal{M}$ und $\zeta, \eta \in H$ beliebig, dann gilt

$$\langle xq\zeta \,, yp\eta \rangle = \langle py^*xq\zeta \,, \eta \rangle = 0.$$

Damit sind die Räume $\overline{\mathcal{M}pH}$ und $\overline{\mathcal{M}qH}$ zueinander orthogonal. Lemma 3.8 sichert, daß damit $\mathrm{z}(p)\,\mathrm{z}(q) = 0$.

„(i) $\implies$ (iii)“: Seien $p_1 \leq p$ und $q_1 \leq q$ äquivalente Projektionen, d.h. es gelte $p_1 = uu^*$ und $q_1 = u^*u$ mit einer partiellen Isometrie $u \in \mathcal{M}$. Nach Konstruktion ist p_1 die Bildprojektion von u und q_1 die Bildprojektion von u^*, also gilt:

$$\begin{aligned} p_1 = uu^* = (p_1 u)(q_1 u^*) &= (\mathrm{z}(p) p_1 u)(\mathrm{z}(q) q_1 u^*) \\ &= (\mathrm{z}(p) u)(\mathrm{z}(q) u^*) = u\, \mathrm{z}(p)\, \mathrm{z}(q) u^* = 0 \end{aligned}$$

und hiermit auch $q_1 = 0$. ☐

Bemerkung. Es gilt zwar, daß zentral orthogonale Projektionen stets auch orthogonal zueinander sind, aber zueinander orthogonale Projektionen brauchen nicht zentral orthogonal zueinander zu sein. Etwa in der Algebra der (2×2)-Matrizen sind die Koordinatenprojektionen zueinander orthogonal, besitzen jedoch denselben zentralen Träger, nämlich die Einheitsmatrix.

Theorem 3.10. *Für jedes Paar von Projektionen p und q in einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ gibt es eine zentrale Projektion z, daß*

$$zp \precsim zq \quad \textit{und} \quad (\mathbf{1} - z)p \succsim (\mathbf{1} - z)q.$$

Ist insbesondere $\mathcal{M}$ ein Faktor, dann gilt genau eine der folgenden Relationen

$$p \prec q \qquad p \sim q \qquad p \succ q$$

Beweis. Seien $(p_i)_{i\in I}$ $(q_i)_{i\in I}$ maximale Familien paarweise orthogonaler Projektionen in $\mathcal{M}$ mit

$$p \geq p_i \sim q_i \leq q \qquad (i \in I).$$

Setze $p_0 := \sum_{i\in I} p_i$ und $q_0 := \sum_{i \in I} q_i$. Dann gilt nach Lemma 3.4, $p_0 \sim q_0$. Die Maximalität der Familien sichert, daß es keine von 0 verschiedenen Projektionen $r \leq p - p_0$ und $s \leq q - q_0$ gibt, die äquivalent sind. Nach Lemma 3.9 sind also $p - p_0$ und $q - q_0$ zentral orthogonal. Es gibt somit eine zentrale Projektion z, daß

$$p - p_0 \leq z \qquad q - q_0 \leq \mathbf{1} - z.$$

Mit anderen Worten, es ist $(q - q_0)z = 0$ und $(p - p_0)z = p - p_0$; also

$$\begin{gathered} qz = q_0 z \sim p_0 z \leq pz \\ p(\mathbf{1} - z) = p_0(\mathbf{1} - z) \sim q_0(\mathbf{1} - z) \leq q(\mathbf{1} - z), \end{gathered}$$

wobei von der Tatsache Gebrauch gemacht wurde, daß mit $r \sim s$ auch stets $zr \sim zs$ für jede zentrale Projektion z und beliebige Projektionen r und s gilt. ☐

2. Klassifikation der von Neumann-Algebren

Die Murray-von Neumann-Äquivalenz von Projektionen liefert bei $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ gerade die Projektionen mit selbem Rang als Äquivalenzklassen. Insbesondere hat man eine lineare Ordnung auf diesen Äquivalenzklassen vermöge der Relation $\precsim$ gegeben.

Ist die von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ ein Faktor, wie dies ja (vgl. Beispiel 1.6, Seite 14) für $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ der Fall ist, dann ist $\precsim$ immernoch eine lineare Ordnung auf den Äquivalenzklassen von Projektionen. Man kann hier — und auch im allgemeinen Fall — diese Äquivalenzklassen als allgemeinen Rang auffassen. Diese Vorstellung steht Pate für die folgenden Begriffsbildungen.

DEFINITION. Eine Projektion p in einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ heißt *endlich*, wenn für jede Projektion $q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ gilt:

$$p \geq q \sim p \implies p = q. \tag{3.5}$$

Ansonsten heißt sie *unendlich*.
Eine Projektion $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ heißt *rein unendlich*, wenn keine Projektion $0 \neq q \leq p$ endlich ist.
Gilt für eine Projektion $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, daß für jede zentrale Projektion z mit $zp \neq 0$ die Projektion zp unendlich ist, so heißt p *wesentlich unendlich*.
Eine von Neumann-Algebra wird *endlich, unendlich, rein bzw. wesentlich unendlich* genannt, wenn dies die Eigenschaft der $\mathbf{1} \in \mathcal{M}$ ist.

BEMERKUNG. Ist p eine Projektion in einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$, dann ist die Abbildung

$$\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(p(H)), x \mapsto pxp\big|_{p(H)}$$

eine lineare, i.a. jedoch nicht multiplikative, surjektive und in allen Operatortopologien stetige Abbildung. $p\mathcal{M}p$ ist, wie man sich leicht überzeugt, wieder eine von Neumann-Algebra auf dem Hilbertraum $p(H)$.
Entsprechendes gilt, wenn p eine Projektion in $\mathcal{M}'$ ist. Allerdings ist hier die Abbildung

$$\mathcal{M} \to \mathcal{B}(p(H)), x \mapsto pxp\big|_{p(H)}$$

sogar ein C*-Homomorphismus; nämlich die Reduktion der Darstellung von $\mathcal{M}$ auf den invarianten Teilraum pH.

DEFINITION. Eine Projektion $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ heißt *minimal*, wenn

$$p\mathcal{M}p = \mathbf{C} \cdot \mathrm{id}_{pH}$$

ist. Sie heißt *abelsch*, wenn $p\mathcal{M}p$ kommutativ ist.

BEMERKUNG. Jede minimale Projektion ist abelsch und jede abelsche Projektion ist endlich.

DEFINITION. Eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ heißt *vom Typ* I, wenn jede zentrale Projektion verschieden von 0 eine ebenfalls von 0 verschiedene abelsche Projektion majorisiert.
Gibt es keine von 0 verschiedene endliche Projektion in $\mathcal{M}$, ist also $\mathcal{M}$ rein unendlich, so nennt man $\mathcal{M}$ *vom Typ* III.
Enthält $\mathcal{M}$ keine von 0 verschiedene abelsche Projektion und majorisiert jede zentrale, von 0 verschiedene Projektion eine von 0 verschiedene, endliche Projektion, so nennt man $\mathcal{M}$ *vom Typ* II.
Eine endliche von Neumann-Algebra vom Typ II wird *vom Typ* II_1 genannt. Ist sie vom Typ II und hat sie keine von 0 verschiedene, endliche zentrale Projektion, so heißt sie *vom Typ* II_∞.

2.1. Typzerlegung. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß sich jede von Neumann-Algebra in die direkte Summe aus von Neumann-Algebren der oben angegebenen Typen eindeutig zerlegen läßt.

LEMMA 3.11. *Die Summe zentral orthogonaler abelscher (bzw. endlicher) Projektionen* $(p_i) \subset \mathcal{M}$ *ist wieder abelsch (bzw. endlich).*

BEWEIS. Sei $p := \sum p_i$ und sei $z_i := \mathrm{z}(p_i)$. Dann gilt, daß $p_i = z_i p$ und somit[1]

$$p\mathcal{M}p = \bigoplus p_i \mathcal{M} p_i.$$

Hiermit ist mit allen $p_i\mathcal{M}p_i$ auch $p\mathcal{M}p$ abelsch.
Ist $p \sim q \leq p$, dann ist

$$p_i \geq q_i := z_i q \sim z_i p = p_i$$

und wegen der Endlichkeit von p_i, ergibt sich $p_i = q_i$ und so $p = q$. Damit ist auch p endlich. □

THEOREM 3.12. *Jede von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ ist eindeutig in die direkte Summe aus von Neumann-Algebren vom Typ* I, *Typ* II_1, *Typ* II_∞ *und Typ* III. *zerlegbar. Desweiteren läßt sich jede Projektion p in $\mathcal{M}$ eindeutig als Summe zentral orthogonaler Projektionen p_1 und p_2 schreiben, von denen p_1 endlich und p_2 wesentlich unendlich ist.*

BEWEIS. Sei $(p_i) \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ eine maximale Familie zentral orthogonaler, abelscher Projektionen und sei $p := \sum p_i$. Nach Lemma 3.11 ist dann auch p abelsch. Setzte $z_{\mathrm{I}} := \mathrm{z}(p)$. Ist $0 \neq z \leq z_{\mathrm{I}}$ eine zentrale Projektion, dann ist $0 \neq zp \leq z$ eine abelsche Projektion. Also ist $\mathcal{M}z_{\mathrm{I}}$ eine von Neumann-Algebra vom Typ I.
Nach Konstruktion gibt es keine nichttriviale abelsche Projektion in $\mathcal{M}(1 - z_{\mathrm{I}})$, so daß $\mathcal{M}(1-z_{\mathrm{I}})$ keinen nichttrivialen abelschen Summanden hat. Sei $(q_j) \subset \mathcal{M}(1-z_{\mathrm{I}})$ eine maximale Familie zentral orthogonaler endlicher Projektionen und sei $q := \sum q_j$. Dann ist ebenfalls nach Lemma 3.11 auch q endlich. Sei $z_{\mathrm{II}} := \mathrm{z}(q)$. Nach dem bisher gezeigten hat dann $\mathcal{M}z_{\mathrm{II}}$ keine nichttrivialen abelschen Projektionen. Außerdem majorisiert jede zentrale Projektion $z \neq 0$ in $\mathcal{M}z_{\mathrm{II}}$ die endliche Projektion $0 \neq zq$. Damit ist $\mathcal{M}z_{\mathrm{II}}$ vom Typ II.
Die Maximalität von (q_j) sichert, daß $z_{\mathrm{III}} := 1-(z_{\mathrm{I}}+z_{\mathrm{II}})$ keine nichttriviale endliche Projektion majorisiert. Somit ist $\mathcal{M}z_{\mathrm{III}}$ vom Typ III.
Bis hierher haben wir also die direkte Zerlegung

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}z_{\mathrm{I}} \oplus \mathcal{M}z_{\mathrm{II}} \oplus \mathcal{M}z_{\mathrm{III}}$$

erreicht. Sei (z_k) eine maximale Familie zentraler, endlicher Projektion in $\mathcal{M}z_{\mathrm{II}}$. Setzt man $z_{\mathrm{II}_1} := \sum z_k$ und $z_{\mathrm{II}_\infty} := z_{\mathrm{II}} - z_{\mathrm{II}_1}$, so ergibt sich, daß $\mathcal{M}z_{\mathrm{II}_1}$ vom Typ II_1 und $\mathcal{M}z_{\mathrm{II}_\infty}$ vom Typ II_∞ ist. Dies ergibt die Zerlegung

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}z_{\mathrm{I}} \oplus \mathcal{M}z_{\mathrm{II}_1} \oplus \mathcal{M}z_{\mathrm{II}_\infty} \oplus \mathcal{M}z_{\mathrm{III}}.$$

Sei jetzt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathrm{I}} \oplus \mathcal{M}_{\mathrm{II}_1} \oplus \mathcal{M}_{\mathrm{II}_\infty} \oplus \mathcal{M}_{\mathrm{III}}$ eine andere direkte Zerlegung von $\mathcal{M}$ in die entsprechenden Typen. Die Einselemente der von Neumann-Algebren $\mathcal{M}_{\mathrm{I}}, \dots ,$ $\mathcal{M}_{\mathrm{III}}$ seien mit $z'_{\mathrm{I}}, \dots , z'_{\mathrm{III}}$ bezeichnet. Dieses sind zentrale, paarweise orthogonale Projektion in $\mathcal{M}$ und es gilt, $\mathcal{M}_{\mathrm{I}} = \mathcal{M}z'_{\mathrm{I}}, \dots , \mathcal{M}_{\mathrm{III}} = \mathcal{M}z'_{\mathrm{III}}$. Da $1 - z_{\mathrm{I}}$ keine nichttrivialen abelschen Projektionen majorisiert und $z'_{\mathrm{I}}(1 - z_{\mathrm{I}})$ eine zentrale Projektion in $\mathcal{M}_{\mathrm{I}}$ ist, folgt $z'_{\mathrm{I}}(1 - z_{\mathrm{I}}) = 0$ und somit $z'_{\mathrm{I}} \leq z_{\mathrm{I}}$. Aus Symmetriegründen folgt dann auch $z_{\mathrm{I}} \leq z'_{\mathrm{I}}$ und hiermit die Gleichheit dieser Projektionen. Mit entsprechenden Argumenten erschließt man die Gleichheit der anderen korrespondieren Projektionenpaare. Dies zeigt die Eindeutigkeit der Typzerlegung.
Sei $0 \neq p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ gegeben. Indem man zu $p\mathcal{M}p$ übergeht, kann man annehmen, daß $p = 1$ ist. Sei p_1 die Summe einer maximalen Familie paarweise orthogonaler, zentraler und endlicher Projektionen. Dann ist auch p_1 zentral und orthogonal und $p_2 := 1 - p_1$ ist wesentlich unendlich. Die Eindeutigkeit dieser Zerlegung ergibt sich wie oben. □

[1] Die hier auftauchende direkte Summe ist im ℓ_∞-Sinne zu verstehen. Faßt man pH als direkte Summe der p_iH auf, dann entspricht dies gerade der Darstellung von $p\mathcal{M}p$ als *Diagonalmatrix* mit Einträgen aus $p_i\mathcal{M}p_i$

KOROLLAR 3.13. *Ein Faktor ist entweder vom Typ* I, *vom Typ* II_1, *vom* II_∞ *oder vom Typ* III.

Hiermit ist die Klassifikation der von Neumann-Algebren durch ihren Projektionenverband abgeschlossen. Während von Neumann-Algebren vom Typ I leicht zu finden sind, nämlich etwa $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ oder jede kommutative von Neumann-Algebra, ist es nicht ganz offensichtlich Beispiele für die anderen Typen zu finden. Dazu muß etwas weiter ausgeholt werden, was im nächsten Kapitel geschehen soll.

KAPITEL 4

Tensorprodukte

Eine der fundamentalen Konstruktionen aus *alten* C*-Algebren *neue* zu bilden ist das Tensorprodukt. Hierbei besteht die Hauptaufgabe darin, das algebraische Tensorprodukt in geeigneter Weise mit einer C*-Norm zu versehen.
Sind H und K Vektorräume so werde mit $H \otimes K$ deren algebraisches Tensorprodukt bezeichnet. Dies ist durch folgende universelle Eigenschaft gekennzeichnet:

TENSORPRODUKT. *Die bilineare Abbildung* $\otimes\colon H \times K \to H \otimes K$, $(\zeta, \eta) \mapsto \zeta \otimes \eta$ *ist dergestalt, daß es zu jeder bilinearen Abbildung* $\phi\colon H \times K \to L$ *in einen weiteren Vektorraum genau eine lineare Abbildung* $\tilde{\phi}\colon H \otimes K \to L$ *gibt, daß*

$$\forall (\zeta, \eta) \in H \times K : \phi(\zeta, \eta) = \tilde{\phi}(\zeta \otimes \eta) \tag{4.1}$$

BEMERKUNG. Eine Möglichkeit $H \otimes K$ zu realisieren, ist durch den Raum der linearen Abbildungen vom algebraischen Dual von H nach K, und $(\zeta \otimes \eta)(f) := f(\zeta)\eta$ gegeben. Hat man es mit topologischen Vektorräumen zu tun und ist nur an stetigen bilinearen bzw. linearen Abbildungen interessiert, so kann man sich auf den topologischen Dualraum H^* und stetige lineare Operatoren mit endlichem Rang beschränken.

Sind nun lineare Funktionale $\rho\colon H \to \mathbf{C}$ und $\sigma\colon K \to \mathbf{C}$ gegeben, so gibt es genau ein lineares Funktional $\rho \otimes \sigma\colon H \otimes K \to \mathbf{C}$, daß gilt:

$$(\rho \otimes \sigma)(\zeta \otimes \eta) = \rho(\zeta) \cdot \sigma(\eta) \qquad ((\zeta, \eta) \in H \times K) \tag{4.2}$$

Die Elemente von $H \otimes K$ lassen sich als $\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \otimes \eta_k$ mit $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in H$ und $\eta_0, \ldots, \eta_n \in K$ darstellen. Man schließt leicht aus (4.2), daß diese Darstellung unabhängig von den Repräsentanten ist.
Sind H' und K' weitere Vektorräume und sind $u\colon H \to H'$ sowie $v\colon K \to K'$ lineare Abbildungen, so gibt es genau eine lineare Abbildung $u \otimes v\colon H \otimes K \to H' \otimes K'$, daß

$$(u \otimes v)(\zeta \otimes \eta) = (u\zeta) \otimes (v\eta) \qquad ((\zeta, \eta) \in H \times K) \tag{4.3}$$

1. Tensorprodukte von Hilberträumen

Sind H und K normierte Räume, dann gibt es im allgemeinen viele Kandidaten für eine Norm auf $H \otimes K$, die in sinnvoller Beziehung zu den Normen auf H und K steht. In der Tat sorgt diese Vielfalt für die Schwierigkeiten in diesem Teil der Funktionalanalysis. Dies werden wir später bei den Tensorprodukten von C*-Algebren sehen.

1.1. Die Hilberttensornorm. Solange es sich bei H und K um Hilberträume handelt, ist die Situation einfach: In der Kategorie der Hilberträume gibt es nur ein Tensorprodukt.

THEOREM 4.1. *Seien H und K Hilberträume. Dann gibt es genau ein inneres Produkt* $\langle\ ,\ \rangle$ *auf* $H \otimes K$, *daß*

$$\langle \zeta \otimes \eta\ ,\ \zeta' \otimes \eta' \rangle = \langle \zeta\ ,\ \zeta' \rangle \, \langle \eta\ ,\ \eta' \rangle \qquad (\zeta, \zeta' \in H, \eta, \eta' \in K)$$

Beweis. Sind ρ und σ konjugiert lineare Abbildungen von H bzw. K nach $\mathbf{C}$, so gibt es genau eine konjugiert lineare Abbildung $\rho \otimes \sigma$ von $H \otimes K$ nach $\mathbf{C}$, daß $(\rho \otimes \sigma)(\zeta \otimes \eta) = \rho(\zeta)\sigma(\eta)$ für $\zeta \in H$ und $\eta \in K$ (Beachte, daß $\overline{\rho}$ und $\overline{\sigma}$ linear sind, und setze $\rho \otimes \sigma := \overline{\overline{\rho} \otimes \overline{\sigma}}$).
Ist ζ Element eines Hilbertraumes, so definiere ρ_ζ als das konjugiert lineare Funktional, daß durch $\rho_\zeta(\eta) := \langle \zeta \, , \eta \rangle$ gegeben ist.
Sei X der Vektorraum der konjugiert linearen Funktionale auf $H \otimes K$. Die Abbildung

$$H \times K \to X, (\zeta, \eta) \mapsto \rho_\zeta \otimes \rho_\eta$$

ist bilinear. Es gibt somit eine lineare Abbildung $M \colon H \otimes K \to X$, daß $M(\zeta \otimes \eta) = \rho_\zeta \otimes \rho_\eta$ für alle $\zeta \in H$ und $\eta \in K$. Die Abbildung

$$\langle \, , \, \rangle : (H \otimes K)^2 \to \mathbf{C}, (z, z') \mapsto M(z)(z')$$

ist eine Sesquilinearform auf $H \otimes K$, für die gilt,

$$\langle \zeta \otimes \eta \, , \zeta' \otimes \eta' \rangle = \langle \zeta \, , \zeta' \rangle \langle \eta \, , \eta' \rangle \qquad (\zeta, \zeta' \in H, \eta, \eta' \in K)$$

Es ist klar, daß dies die einzige solche Sesquilinearform ist.
Ist $\xi = \sum_{k=1}^n \zeta_k \otimes \eta_k \in H \otimes K$, dann kann man ggfs. durch Darstellung der η_k bezüglich einer Orthonormalbasis ihrer linearen Hülle erreichen, daß (η_k) eine Orthonormalsystem ist. Damit berechnet man,

$$\langle \xi \, , \xi \rangle = \sum_{k,l=1}^n \langle \zeta_k \otimes \eta_k \, , \zeta_l \otimes \eta_l \rangle = \sum_{k,l=1}^n \langle \zeta_k \, , \zeta_l \rangle \langle \eta_k \, , \eta_l \rangle = \sum_{k=1}^n \|\zeta_k\|^2 \geq 0.$$

Dies zeigt, daß $\langle \, , \, \rangle$ positiv definit und somit ein inneres Produkt auf $H \otimes K$ ist. □

Definition. Sind H und K Hilberträume, dann sei $H \otimes K$ stets mit dem in Theorem 4.1 angegebenen inneren Produkt versehen. Die Hilbertraumvervollständigung von $H \otimes K$ wird mit

$$H \hat{\otimes} K$$

bezeichnet und *Hilbertraumtensorprodukt* genannt.

Bemerkungen. Seien H und K Hilberträume.

- Für $\zeta \in H$ und $\eta \in K$ ist stets $\|\zeta \otimes \eta\| = \|\zeta\| \, \|\eta\|$.
- Sind $E \subset H$ und $F \subset K$ Orthonormalbasen, dann ist

  $$E \otimes F := \{ \, \zeta \otimes \eta \, : \, \zeta \in E, \eta \in F \, \}$$

  eine Orthonormalbasis von $H \hat{\otimes} K$.
- Sind $H' \subset H$ und $K' \subset K$ abgeschlossene Unterräume, dann ist die Einbettung $H' \otimes K' \to H \hat{\otimes} K$ isometrisch und setzt sich so isometrisch zu einer Einbettung $H' \hat{\otimes} K' \to H \hat{\otimes} K$ fort; d.h. man kann $H' \hat{\otimes} K'$ als abeschlossenen Unterraum von $H \hat{\otimes} K$ auffassen.

Lemma 4.2. *Seien H und K Hilberträume und $u \in \mathcal{B}(H)$ sowie $v \in \mathcal{B}(K)$. Dann gibt es genau einen Operator $u \hat{\otimes} v \in \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K)$, daß*

$$(u \hat{\otimes} v)(\zeta \otimes \eta) = u(\zeta) \otimes v(\eta) \qquad (\zeta \in H, \eta \in K)$$

Außerdem ist $\left\|u \hat{\otimes} v\right\| = \|u\| \, \|v\|$.

Beweis. Die Abbildung $(u, v) \mapsto u \otimes v$ ist bilinear. Um zu zeigen, daß $u \otimes v \colon H \otimes K \to H \otimes K$ stetig ist, genügt es also anzunehmen, daß u und v unitär sind, denn die unitären Elemente erzeugen die C*-Algebren $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ bzw. $\mathcal{B}(\mathrm{K})$. Ist

$\xi = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \otimes \eta_k \in H \otimes K$ mit paarweise orthogonalen $\eta_1, \ldots, \eta_n \in K$, so ergibt sich

$$\|(u \otimes v)(\xi)\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} u(\zeta_k) \otimes v(\eta_k) \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|u(\zeta_k) \otimes v(\eta_k)\|^2$$

denn $v(\eta_1), \ldots, v(\eta_n)$ sind paarweise orthogonal

$$= \sum_{k=0}^{n} \|u(\zeta_k)\|^2 \|v(\eta_k)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|\zeta_k\|^2 \|\eta_k\|^2 = \|\xi\|^2$$

Demzufolge ist $\|u \otimes v\| = 1$. Also ist für alle Operatoren u und v auf H bzw. K die lineare Abbildung $u \otimes v$ beschränkt auf $H \otimes K$ und hat so eine eindeutige, stetige Fortsetzung $u \hat{\otimes} v$ auf $H \hat{\otimes} K$.
Man überzeugt sich leicht davon, daß die Abbildungen

$$\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K), \qquad u \mapsto u \hat{\otimes} \mathrm{id}_K$$

und

$$\mathcal{B}(K) \to \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K), \qquad v \mapsto \mathrm{id}_H \hat{\otimes} v$$

injektive C*-Homomorphismen und als solche isometrisch sind (vgl. Skript SS96, Lemma 4.1.10, Seite 48). Somit ist

$$\left\|u \hat{\otimes} v\right\| = \left\|(u \hat{\otimes} \mathrm{id}_K)(\mathrm{id}_H \hat{\otimes} v)\right\| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Ist $0 < \epsilon < 1$, dann gibt es Einheitsvektoren $\zeta \in H$ und $\eta \in K$, daß $\|u\zeta\| \geq (1-\epsilon)\|u\|$ und $\|v\eta\| \geq (1-\epsilon)\|v\|$. Hieraus ergibt sich

$$\|u \otimes v\| \geq \|(u \otimes v)(\zeta \otimes \eta)\| = \|u\zeta\| \, \|v\eta\| \geq (1-\epsilon)^2 \|u\| \, \|v\| \,,$$

und somit für $\epsilon \to 0$, $\|u \otimes v\| \geq \|u\| \, \|v\|$. □

BEMERKUNGEN. Seien H und K Hilberträume.

- Sind $u, u' \in BH$ und $v, v' \in \mathcal{B}(K)$, dann gilt,
$$(u \hat{\otimes} v)(u' \hat{\otimes} v') = (uu') \hat{\otimes} (vv') \text{ und } (u \hat{\otimes} v)^* = u^* \hat{\otimes} v^*$$
- Sind $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{B}(H)$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{B}(K)$, so folgt aus der linearen Unabhängigkeit der v_k's und dem Bestehen der Gleichung $\sum_{k=1}^{n} u_k \hat{\otimes} v_k = 0$, daß schon $u_1 =, \ldots, = u_n = 0$.

LEMMA 4.3. *Seien H und K Hilberträume und $E \subset K$ sei eine Orthonormalbasis. Dann ist $H \hat{\otimes} K$ unitär äquivalent zur direkten Produkt*[1]*:*

$$\bigoplus_E H := \left\{ (\zeta_\eta) \in H^E \; : \; \sum_{\eta \in E} \|\zeta_\eta\|^2 < \infty \right\}.$$

[1] Die Norm für $\bigoplus_E H$ ist natürlich durch $\|(\zeta_\eta\| := \left(\sum_{\eta \in E} \|\zeta_\eta\|^2\right)^{1/2}$ und das Skalarprodukt ist durch $\left\langle (\zeta_\eta) \, , (\zeta'_\eta) \right\rangle := \sum_{\eta \in E} \left\langle \zeta_\eta \, , \zeta'_\eta \right\rangle$ gegeben

Beweis. Sei $u_\eta \colon H \to H \hat{\otimes} K$, $\zeta \mapsto \zeta \otimes \eta$ für $\eta \in E$. Dann ist u_η eine partielle Isometrie. Ihr Bild sei H_η, ein abgeschlossener Teilraum von $H \hat{\otimes} K$. Für $\eta \neq \eta'$ sind H_η und $H_{\eta'}$ zueinander orthogonal. Außerdem ist die direkte Summe der H_η $(\eta \in E)$ dicht in $H \hat{\otimes} K$. Da außerdem durch $u((\zeta_\eta)) := \sum u_\eta \zeta_\eta$ ein isometrischer Operator von $\bigoplus_E H$ auf die direkte Summe der H_η gegeben ist, muß dieser Operator u die gesuchte unitäre Äquivalenz sein. □

1.2. Hilbert-Schmidt-Operatoren. Im folgenden soll das abstrakte Hilbertraumtensorprodukt als *Operatorenideal* charakterisiert werden. Ausgangspunkt ist dabei die in der Einleitung über eine mögliche Realisierung des algebraischen Tensorprodukts als Vektorraum gewisser linearer Abbildungen mit endlichem Rang.

Definition. Seien H und K Hilberträume. Mit $\mathcal{F}(H,K)$ werde der Vektorraum der stetigen linearen Operatoren mit endlichem Rang bezeichnet.
Zum Hilbertraum $[H, \langle\ ,\ \rangle]$ bilde man den neuen Hilbertraum $[\bar{H}, \langle\ ,\ \rangle]$, der als Menge mit H übereinstimmt, aber die Skalarmultiplikation $(\alpha, \zeta) \mapsto \overline{\alpha}\zeta$ und das Skalarprodukt $\langle \zeta\ , \eta \rangle := \langle \eta\ , \zeta \rangle$ hat.

Bemerkung. Der Rieszschen Darstellungssatze für lineare Funktionale auf dem Hilbertraum H zeigt, daß durch $\bar{\zeta}\zeta := \langle \zeta\ , \bar{\zeta} \rangle$ für $\zeta \in H$ und $\bar{\zeta} \in \bar{H}$ eine Dualitätsbeziehung zwischen diesen Hilberträumen vermittelt wird. Der Raum $[\bar{H}, \langle\ ,\ \rangle]$ wird als ***konjugiert zu*** H bezeichnet. Man kann ihn mit dem Raum der stetigen linearen Funktionale auf H, identifizieren. Beachte, daß die formale Identität von H nach $\bar{H}$, die mittels $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$ gekennzeichnet werde, eine konjugiert lineare Isometrie ist. Weiterhin ergibt sich bei Iteration dieser Identifikation $\bar{\bar{H}} = H$.

Lemma 4.4. *Es gibt genau eine lineare Bijektion $\Phi \colon H \otimes K \to \mathcal{F}(\bar{H}, K)$, so daß für alle $n \in \mathbf{N}$, alle $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in H$ und alle $\eta_1, \ldots, \eta_n \in K$ gilt,*

$$\Phi(\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \otimes \eta_k)(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \langle \zeta_k\ , \xi \rangle\, \eta_k \qquad (\xi \in \bar{H})$$

Beweis. Sei $\chi := \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \otimes \eta_k \in H \otimes K$ gegeben und setze

$$\Phi(\chi)(\xi) := \sum_{k=1}^{n} \langle \zeta_k\ , \xi \rangle\, \eta_k \qquad (\xi \in \bar{H}).$$

Es ist hier im wesentlichen zu zeigen, daß Φ wohldefiniert ist. Sei also $\chi = 0$. Für beliebiges $\xi \in \bar{H}$ und beliebiges η_l ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} \langle \zeta_k\ , \xi \rangle \langle \eta_k\ , \eta_l \rangle = \langle \chi\ , \xi \otimes \eta_l \rangle = 0.$$

Damit ist $\Phi(\chi)(\xi)$ sopwohl in der linearen Hülle der η_k's als auch senkrecht dazu — eine Eigenschaft, die nur der Nullvektor besitzt. Hiermit kann auch $\Phi(\chi)$ nur der Nulloperator sein.
Die Abbildung Φ ist injektiv. Ist nämlich $\Phi(\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \otimes \eta_k) = 0$ mit ohne Einschränkung orthonormalen η_k's, so schließt man sofort, daß $\zeta_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ und somit $\chi = 0$.
Ist $u \in \mathcal{F}(\bar{H}, K)$ gegeben, so wähle $(\eta_k)_{k=1}^{n}$ eine Orthonormalbasis des Bildes von u setzt man dann $\zeta_k := u^*\eta_k$, so gilt $\Phi(\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \otimes \eta_k) = u$. □

Korollar 4.5. *Die Vektorräume $\bar{H} \otimes K$ und $\mathcal{F}(H,K)$ sind linear isomorph. Dieser Isomorphismus ist durch*

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}_k \otimes \eta_k \mapsto (\xi \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle \xi\ , \bar{\zeta}_k \rangle\, \eta_k)$$

gegeben.

BEMERKUNG. Ist der lineare Operator $u \in \mathcal{F}(H,K)$ durch $u = \sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}_k \otimes \eta_k$ gegeben, so hat $u^* \in \mathcal{F}(K,H)$ gerade die Darstellung

$$u^* = \sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k \otimes \zeta_k, \tag{4.4}$$

wie man durch unmittelbares Einsetzen überprüft.

Im folgenden soll die Norm, die durch die Hilbertraumtensornorm von $\bar{H} \otimes K$ auf $\mathcal{F}(H,K)$ induziert wird, genauer beschrieben werden. Wie das nächste Beispiel zeigt, ist sie nämlich nicht zur Operatornorm äquivalent.

BEISPIEL 4.1. Sei $H := K := \ell_2$. Dann ist für $n \in \mathbf{N}$ die Tensornorm von $\chi_n := \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k \otimes e_k$ gerade $\sqrt{n}$, während sich die Operatornorm des zugehörigen Operators, die Projektion auf die ersten n Komponenten, zu 1 ergibt.

LEMMA 4.6. *Sei $\phi\colon H \times K \to \mathbf{C}$ ein stetiges bilineares Funktional auf den Hilberträumen H und K. Desweiteren seien $E, E' \subset H$ und $F, F' \subset K$ Orthonormalbasen. Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{\zeta \in E \\ \eta \in F}} |\phi(\zeta,\eta)|^2 = \sum_{\substack{\zeta' \in E' \\ \eta' \in F'}} |\phi(\zeta',\eta')|^2$$

($\in [0,\infty]$).

BEWEIS. Es ist klar, daß man aus Symmetriegründen nur „$\geq$“ zeigen muß. Desweiteren kann man annehmen, daß die linke Seite endlich ist. Nun hat jedes $\zeta' \in E'$ und $\eta' \in F'$ eine Entwicklung nach E bzw. F,

$$\zeta' = \sum_{\zeta \in E} \langle \zeta' \,, \zeta \rangle \, \zeta, \;\; \eta' = \sum_{\eta \in F} \langle \eta' \,, \eta \rangle \, \eta$$

Setzt man diese Entwicklung in den Term der rechten Seite ein, so überzeugt man sich nach einigen elementaren Umformungen von der Richtigkeit der in Frage stehenden Ungleichung. □

KOROLLAR 4.7. *Sei $u \in \mathcal{B}(H,K)$, dann gilt für alle Orthonormalbasen $E, E' \subset H$ und $F, F' \subset K$,*

$$\sum_{\substack{\zeta \in E \\ \eta \in F}} |\langle u\zeta \,, \eta \rangle|^2 = \sum_{\substack{\zeta' \in E' \\ \eta' \in F'}} |\langle u\zeta' \,, \eta' \rangle|^2$$

BEWEIS. Durch

$$\phi_u(\xi,\chi) := \langle u\xi \,, \chi \rangle \qquad (\xi \in H, \chi \in K) \tag{4.5}$$

wird ein bilineares, stetiges Funktional auf $H \times \bar{K}$ definiert, auf das man Lemma 4.6 anwenden kann, um die Behauptung zu erhalten. □

DEFINITION. Ein Operator $u \in \mathcal{B}(H,K)$ heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*, und man schreibt: $u \in \mathcal{S}_2(H)$, wenn für ein (jedes) Paar von Orthonormalbasen $E \subset H$, $F \subset K$,

$$\|u\|_2 := \Big(\sum_{\substack{\zeta \in E \\ \eta \in F}} |\langle u\zeta \,, \eta \rangle|^2\Big)^{1/2} < \infty.$$

Man überprüft nun leicht durch Einsetzen der Definition:

THEOREM 4.8. *Sind H und K Hilberträume, so ist $[\mathcal{S}_2(H,K), \| \|_2]$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u , v \rangle = \sum_{\substack{\zeta \in E \\ \eta \in F}} \langle u\zeta , \eta \rangle \langle \eta , v\zeta \rangle .$$

Hierbei sind $E \subset H$ und $F \subset K$ irgendwelche Orthonormalbasen.

BEMERKUNG. Es ist klar, daß die Operatoren mit endlichem Rang in $\mathcal{S}_2(H,K)$ dicht liegen. Denn unmittelbar aus der Definition der Hilbert-Schmidt-Norm folgt, daß jeder Hilbert-Schmidt-Operator u sich beliebig gut durch Operatoren der Gestalt

$$u_{E_0}(\xi) := \sum_{\zeta \in E_0} \langle \xi , \zeta \rangle \, u(\zeta)$$

approximieren läßt, wobei E_0 über die endlichen Teilmengen von E variiert.

Ebenso ist nun die folgende Beschreibung des Hilbertraumtensorprodukts leicht einzusehen.

THEOREM 4.9. *Es gibt genau einen unitären Operator U zwischen dem Hilbertraumtensorprodukt $H \hat{\otimes} K$ und den Hilbert-Schmidt-Operatoren $\mathcal{S}_2(\bar{H}, K)$, daß für alle $\zeta \in H$ und alle $\eta \in K$,*

$$U(\zeta \otimes \eta) = (\xi \mapsto \langle \zeta , \xi \rangle \, \eta).$$

BEWEIS. Die Abbildung $U\colon H \otimes K \to \mathcal{S}_2(\bar{H}, K)$, die durch $U(\zeta \otimes \eta) = (\xi \mapsto \langle \zeta , \xi \rangle \, \eta)$ gegeben ist, ist wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, daß sie unitär ist. Dazu muß nach Theorem 4.1 nur gezeigt werden, daß

$$\langle U(\zeta \otimes \eta) , U(\zeta' \otimes \eta') \rangle = \langle \zeta' , \zeta \rangle \langle \eta , \eta' \rangle$$

ist (Beachte, daß für $\bar{H}$ das Skalarprodukt zu bilden ist). Seien $E \subset \bar{H}$ und $F \subset K$ Orthonormalbasen. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\langle U(\zeta \otimes \eta) , U(\zeta' \otimes \eta') \rangle &= \sum_{\xi \in E} \sum_{\chi \in F} \langle U(\zeta \otimes \eta)\xi , \chi \rangle \langle \chi , U(\zeta' \otimes \eta')\xi \rangle \\
&= \sum_{\xi \in E} \sum_{\chi \in F} \langle \langle \zeta , \xi \rangle \, \eta , \chi \rangle \langle \chi , \langle \zeta' , \xi \rangle \, \eta' \rangle \\
&= \sum_{\xi \in E} \sum_{\chi \in F} \langle \zeta' , \langle \zeta , \xi \rangle \, \xi \rangle \langle \langle \eta , \chi \rangle \, \chi , \eta' \rangle \\
&= \left\langle \zeta' , \sum_{\xi \in E} \langle \zeta , \xi \rangle \, \xi \right\rangle \left\langle \sum_{\chi \in F} \langle \eta , \chi \rangle \, \chi , \eta' \right\rangle \\
&= \langle \zeta' , \zeta \rangle \langle \eta , \eta' \rangle
\end{aligned}$$

Damit ist U ein unitärer Operator, der sich auf die Vervollständigung der entsprechenden Räume unitär fortsetzt. ☐

2. Tensorprodukte von C*-Algebren

Hat man Algebren A und B gegeben, dann gibt es auf $A \otimes B$ genau eine Multiplikation so, daß

(4.6) $$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \qquad (a, a' \in A, b, b' \in B)$$

Besitzen die Algebren außerdem noch eine Involution, so gibt es auch eine eindeutig bestimmte Involution auf $A \otimes B$, daß

(4.7) $$(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^* \qquad (a \in A, b \in B)$$

Diese Feststellungen (4.7) und (4.6) lassen sich durch leichte Rechnung bestätigen. Im folgenden soll nun untersucht werden, ob das so gewonnene Tensorprodukt für C*-Algebren sich durch eine geeignete Norm und Vervollständigung zu einer C*-Algebra machen läßt und wie sich darin die Eigenschaften der vorliegenden C*-Algebren widerspiegeln.

2.1. Die Darstellungsnorm. Die folgende Konstruktion basiert auf einer elementaren Feststellung:

LEMMA 4.10. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren. Desweiteren seien $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ und $\psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ C*-Homomorphismen, deren Bilder elementweise vertauschen, dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus $\phi \otimes \psi\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, daß*

$$(\phi \otimes \psi)(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b).$$

BEWEIS. Die Abbildung $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $(a, b) \mapsto \phi(a)\psi(b)$ ist ein bilinearer $*$-Homomorphismus, dessen Linearisierung $\phi \otimes \psi\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ das gewünschte leistet. □

Hiermit ist es möglich nachzuweisen, daß zumindest eine C*-Norm auf dem Tensorprodukt zweier C*-Algebren existiert.

THEOREM 4.11. *Seien (H, ϕ) und (K, ψ) Darstellungen der C*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K)$, daß*

$$\pi(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b) \qquad (a \in A, b \in B).$$

Sind ϕ und ψ injektiv, dann ist auch π injektiv.

BEWEIS. Die Abbildungen

$$\phi'\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K), a \mapsto \phi(a) \hat{\otimes} \mathrm{id}_K$$

und

$$\psi'\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K), b \mapsto \mathrm{id}_H \hat{\otimes} \psi(b)$$

sind $*$-Homomorphismen. Die Elemente von $\phi'(\mathcal{A})$ und $\psi'(\mathcal{B})$ vertauschen. Also gibt es nach 4.10 genau einen $*$-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K)$, daß

$$\pi(a \otimes b) = \phi'(a)\psi'(b) = \phi(a) \hat{\otimes} \psi(b) \qquad (a \in A, b \in B).$$

Sei nun angenommen, daß die Darstellungen (H, ϕ) und (K, ψ) treu sind und daß $c \in \ker \pi$. Dann hat c eine Darstellung $c = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k$ mit linear unabhängigen b_k. Da ψ injektiv ist, sind auch die $\psi(b_k)$'s linear unabhängig. Aus

$$0 = \pi(c) = \sum_{k=1}^{n} \phi(a_k) \hat{\otimes} \psi(b_k)$$

folgt so $\phi(a_1) =, \ldots, = \phi(a_n) = 0$ und damit, wegen der Injektivität von ϕ, $a_k = 0$. Dies zeigt, daß auch π injektiv ist. □

DEFINITION. Die Abbildung π aus Theorem 4.11 wird mit $\phi \hat{\otimes} \psi$ bezeichnet. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren mit universellen Darstellungen[2] (H, ϕ) und (K, ψ) (vgl. Skript SS96, S. 65, und Theorem 1.2). Sei π der gemäß Theorem 4.11 eindeutig bestimmte injektive $*$-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H \hat{\otimes} K)$ mit $\pi(a \otimes b) = \phi'(a)\psi'(b) = \phi(a) \hat{\otimes} \psi(b)$ für $(a \in A, b \in B)$. Hiermit wird

$$\| \ \|_* : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathbf{R}, c \mapsto \|\pi(c)\|$$

eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, die *Darstellungsnorm* genannt wird. Die C*-Vervollständigung von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezüglich $\| \ \|_*$ wird *Darstellungstensorprodukt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$* genannt und mit $\mathcal{A} \otimes_* \mathcal{B}$ bezeichnet.

[2] das sind die Darstellungen, die sich jeweils als direkte Summe der durch alle reinen Zustände induzierten Darstellungen ergeben

Bemerkung. Für beliebige Elemente a und b von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt:

$$\|a \otimes b\|_* = \|a\| \, \|b\| \tag{4.8}$$

2.2. C*-Normen auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. In der Regel wird es auf dem Tensorprodukt zweier C*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mehr als eine Tensornorm geben, denn jedes Paar treuer Darstellungen induziert C*-Normen auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, die im allgemeinen nicht äquivalent zu sein brauchen (vgl. Skript SS96, S. 64ff., über die Äquivalenz von Darstellungen).

Definition. Sei γ eine C*-Norm auf dem Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ der C*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Die C*-Vervollständigung von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezüglich γ werde mit

$$\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$$

bezeichnet.

Lemma 4.12. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren sowie γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Sind $a' \in \mathcal{A}$ und $b' \in \mathcal{B}$ gegeben, so sind die linearen Abbildungen*

$$\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}, a \mapsto a \otimes b'$$

und

$$\phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}, b \mapsto a' \otimes b$$

stetig.

Beweis. Da es sich hier um lineare Abbildung zwischen Banachräumen handelt, kann zum Nachweis der Stetigkeit der *Satz vom abgeschlossenen Graphen* herangezogen werden. Sei also $(a_n) \subset \mathcal{A}$ eine Nullfolge und $(\phi(a_n))$ konvergiere gegen c in $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$. Man kann ohne Einschränkung annehmen (und ggfs. durch Übergang von a_n zu $a_n{}^* a_n$ und von b' zu $b'^* b'$ erreichen), daß die a_n und b' positiv sind. Dann ist auch c positiv.
Hat man nun ein positives lineares Funktional τ auf $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ gegeben, so ist auch

$$\rho\colon \mathcal{A} \to \mathbf{C}, a \mapsto \tau(a \otimes b')$$

positiv und damit stetig, d.h. es ist $\tau(c) = \lim \tau(a_n \otimes b') = \lim \rho(a_n) = 0$. Da dies für jedes beliebige positive Funktional τ gilt, muß $c = 0$ sein. Somit ist ϕ stetig. Die Stetigkeit von ψ folgt entsprechend. $\square$

Theorem 4.13. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (von Null verschiedene) C*-Algebren und sei γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Ist (H, π) eine nicht ausgeartete Darstellung*[3] *der C*-Algebra $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$, so gibt es eindeutig bestimmte C*-Homomorphismen $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ und $\psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H)$, daß*

$$\pi(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b) = \psi(b)\phi(a) \qquad (a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}).$$

Außerdem sind die Darstellungen (H, ϕ) und (H, ψ) ebenfalls nicht ausgeartet.

Beweis. Sei $H_0 := \pi(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})H$, dann kann jedes $\zeta \in H_0$ geschrieben werden als

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k \otimes b_k)\zeta_k$$

Sei jetzt angenommen, daß zwei solcher Darstellungen für ζ gegeben sind:

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k \otimes b_k)\zeta_k = \sum_{l=1}^{m} \pi(c_l \otimes d_l)\eta_l \tag{4.9}$$

[3] Zu jedem $0 \neq \zeta \in H$ gibt es ein c in $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$, daß $\pi(c)\zeta \neq 0$

Ist $(v_\mu)_{\mu\in M} \subset \mathcal{B}$ eine approximierende Einheit und $a \in \mathcal{A}$, so ergibt sich

$$\pi(a \otimes v_\mu)\zeta = \sum_{k=1}^{n} \pi(aa_k \otimes v_\mu b_k)\zeta_k = \sum_{l=1}^{m} \pi(ac_l \otimes v_\mu d_l)\eta_l$$

und so im Limes unter Berücksichtigung von Lemma 4.12

$$\lim_\mu \pi(a \otimes v_\mu)\zeta = \sum_{k=1}^{n} \pi(aa_k \otimes b_k)\zeta_k = \sum_{l=1}^{m} \pi(ac_l \otimes d_l)\eta_l$$

Somit ist eine Abbildung $\phi(a)\colon H_0 \to H_0$ durch $\phi(a)\zeta := \sum_{k=1}^{n} \pi(aa_k \otimes b_k)\zeta_k$ wohldefiniert, wobei für $\zeta \in H_0$ eine Darstellung gemäß (4.9) gewählt sei. Da $\phi(a)\zeta = \lim_\mu \pi(a \otimes v_\mu)\zeta$ ist, ist $\phi(a)$ linear. Nach Lemma 4.12 gibt es eine Konstante $M(a)$, daß $\|\pi(a \otimes b)\| \le M(a)\,\|b\|$ für $b \in \mathcal{B}$ ist. Somit ist $\|\phi(a)\| \le M(a)$. Da H_0 dicht in H ist ((H, π) ist nicht ausgeartet) kann $\phi(a)$ eindeutig zu einem stetigen linearen Operator auf H fortgesetzt werden, der ebenfalls mit $\phi(a)$ bezeichnet werde. Analog konstruiert man die Abbildung $\psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H)$.
Es ist leicht zu verifizieren, daß ϕ und ψ C*-Homomorphismen sind und daß für $a \in \mathcal{A}$ sowie $b \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\pi(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b) = \psi(b)\phi(a)$$

Sei jetzt angenommen, daß $\phi'\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ und $\psi'\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H)$ weitere C*-Homomorphismen sind, für die

$$\pi(a \otimes b) = \phi'(a)\psi'(b) = \psi'(b)\phi'(a) \qquad (a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B})$$

erfüllt ist. Sei weiter angenommen, es gäbe ein $\zeta \in H$ mit $\phi'(a)\zeta = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Dann muß aber auch für alle $b \in \mathcal{B}$

$$0 = \psi'(b)\phi'(a)\zeta = \pi(a \otimes b)\zeta$$

sein. Hiermit ergibt sich $\pi(c)\zeta = 0$ für $c \in \mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$, d.h. $\zeta = 0$, denn die Darstellung (H, π) ist nicht ausgeartet. Damit sind aber auch die Darstellungen (H, ϕ') sowie (H, ψ') nicht ausgeartet. Entsprechendes gilt dann natürlich auch für die konstruierten Darstellungen (H, ϕ) sowie (H, ψ).
Sind $(u_\lambda) \subset \mathcal{A}$ und $(v_\mu)_{\mu\in M} \subset \mathcal{B}$ approximierende Einheiten, dann konvergieren $(\phi'(u_\lambda))_{\lambda\in L}$ und $(\psi'(v_\mu))_{\mu\in M}$ in der starken Operatortopologie gegen id_H. Somit konvergiert in der starken Operatortopologie $\pi(a \otimes v_\mu)$ sowohl gegen $\phi(a)$ als auch gegen $\phi'(a)$ für $a \in \mathcal{A}$, d.h. $\phi = \phi'$. Entsprechend folgt $\psi = \psi'$. $\square$

Definition. Die in Theorem 4.13 konstruierten, eindeutig bestimmten Darstellungen (H, ϕ) und (H, ψ) werden mit $\pi_\mathcal{A}$ bzw. mit $\pi_\mathcal{B}$ bezeichnet.

Korollar 4.14. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren und sei γ eine C*-Seminorm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann gilt für alle $a \in \mathcal{A}$ und alle $b \in \mathcal{B}$,*

$$\gamma(a \otimes b) \le \|a\|\,\|b\|$$

Beweis. Durch $\delta := \max(\gamma, \|\ \|_*)$ wird eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gegeben. Sei (H, π) die universelle Darstellung von $\mathcal{A} \otimes_\delta \mathcal{B}$. Diese ist treu und nicht ausgeartet, so daß Theorem 4.13 angewendet werden kann. Sind insbesondere $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$ gegeben, dann ist $\pi(a \otimes b) = \pi_\mathcal{A}(a)\pi_\mathcal{B}(b)$. Deshalb wird

$$\delta(a \otimes b) = \|\pi(a \otimes b)\| \le \|\pi_\mathcal{A}(a)\|\,\|\pi_\mathcal{B}(b)\| \le \|a\|\,\|b\|$$

und somit $\gamma(a \otimes b) \le \delta(a \otimes b) \le \|a\|\,\|b\|$. $\square$

Definition. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren und sei Γ die Menge aller C*-Normen auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Ist $\gamma \in \Gamma$ gegeben, so ist für $c = \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$$\gamma(c) \leq \sum_{k=1}^{n} \gamma(a_k \otimes b_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \|a_k\| \, \|b_k\|$$

nach Korollar 4.14. Also existiert für alle $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$$\|c\|_{\max} := \sup \{ \gamma(c) \; : \; \gamma \in \Gamma \} \in [0, \infty)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $\| \; \|_{\max} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty)$ eine C*-Norm ist. Mit $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ werde das *maximale Tensorprodukt von* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$, die Vervollständigung von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezüglich $\| \; \|_{\max}$, bezeichnet.

Theorem 4.15. *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sowie $\mathcal{C}$ C*-Algebren und sei desweiteren angenommen, daß $\phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ und $\psi \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ C*-Homomorphismen sind, deren Bilder elementweise vertauschen. Dann gibt es genau einen C*-Homomorphismus $\pi \colon \mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, daß*

$$\pi(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b) \qquad (a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B})$$

Beweis. Die Eindeutigkeit steht außer Frage. Nach Lemma 4.10 gibt es genau einen C*-Homomorphismus $\pi \colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, der die obige Gleichung erfüllt. Die Abbildung

$$\gamma \colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathbf{R}, c \mapsto \|\pi(c)\|$$

ist eine C*-Seminorm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und somit gilt

$$\gamma \leq \max(\gamma, \| \; \|_*) \leq \| \; \|_{\max}$$

denn $\max(\gamma, \| \; \|_*)$ ist eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. D.h. aber, daß π bezüglich $\| \; \|_{\max}$ stetig ist und somit eine eindeutige Fortsetzung auf $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ zum gesuchten C*-Homorphismus hat. □

2.3. Minimalität der Darstellungsnorm. Im letzten Abschnitt wurde die größte C*-Tensornorm $\| \; \|_{\max}$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ konstruiert und durch eine universelle Eigenschaft in Theorem 4.15 charakterisiert. Eine analoge Charakterisierung als minimale Tensornorm soll jetzt für die Darstellungsnorm hergeleitet werden.
Zunächst sei eine Bemerkung zu approximierenden Einheiten, die im folgenden eine Rolle spielen, vorangestellt.

Lemma 4.16. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren und sei γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann gibt es eine approximierende Einheit $(u_\lambda \otimes v_\lambda)_{\lambda \in L}$ in $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$, wobei $(u_\lambda)_{\lambda \in L} \subset \mathcal{A}$ und $(v_\lambda)_{\lambda \in L} \subset \mathcal{B}$ approximierende Einheiten sind.*

Beweis. Seien $(u_\mu)_{\mu \in M} \subset \mathcal{A}$ und $(v_\mu)_{\nu \in N} \subset \mathcal{B}$ approximierende Einheiten. Setzt man $L := M \times N$ und

$$\lambda := (\mu, \nu) \leq (\mu', \nu') =: \lambda' \iff \mu \leq \mu' \text{ und } \nu \leq \nu'$$

für $\lambda, \lambda' \in L$, $u'_{(\mu,\nu)} := u_\mu$ und $v'_{(\mu,\nu)} := v_\nu$, so ist leicht zu sehen, daß $(u'_\lambda)_{\lambda \in L} \subset \mathcal{A}$, $(v'_\lambda)_{\lambda \in L} \subset \mathcal{B}$ und $(u_\lambda \otimes v_\lambda)_{\lambda \in L} \subset \mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ approximierende Einheiten sind. □

Als nächstes wird eine alternative Beschreibung der Darstellungsnorm mittels positiver Funktionale gegeben.

Lemma 4.17. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren.*

(i) *Seien* $(H_\lambda, \phi_\lambda)_{\lambda \in L}$ *und* $(k_\lambda, \psi_\mu)_{\mu \in M}$ *Darstellungen von* $\mathcal{A}$ *bzw.* $\mathcal{B}$. *Es seien weiter* $(H, \phi) := \bigoplus_{\lambda \in L}(H_\lambda, \phi_\lambda)$ *und* $(K, \psi) := \bigoplus_{\mu \in M}(K_\mu, \psi_\mu)$. *Dann gibt es genau einen unitären Operator*

$$U\colon H \hat{\otimes} K \to \bigoplus_{\lambda \in L, \mu \in M} H_\lambda \hat{\otimes} K_\mu,$$

daß für alle $\zeta = (\zeta_\lambda) \in H$ *und alle* $\eta = (\eta_\mu) \in K$,

$$U(\zeta \otimes \eta) = (\zeta_\lambda \otimes \eta_\mu)_{\lambda \in L, \mu \in M}$$

Für jedes $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *gilt*

$$(\phi \hat{\otimes} \psi)(c) = U^*(\bigoplus_{\lambda,\mu}(\phi_\lambda \hat{\otimes} \psi_\mu)(c))U$$

und

$$\left\|(\phi \hat{\otimes} \psi)(c)\right\| = \sup_{\lambda,\mu} \left\|(\phi_\lambda \hat{\otimes} \psi_\mu)(c)\right\|.$$

(ii) *Für* $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *gilt:*

$$\|c\|_* = \sup\left\{ \left\|(\phi_\tau \hat{\otimes} \psi_\sigma)(c)\right\| \,:\, \tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B}) \right\} \tag{4.10}$$

Hierbei sind $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ *und* $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ *die Mengen aller Zustände auf* $\mathcal{A}$ *bzw.* $\mathcal{B}$ *sowie* ϕ_τ *und* ψ_σ *die vermöge GNS-Konstruktion zu* τ *bzw.* σ *gebildeten Darstellungen von* $\mathcal{A}$ *bzw.* $\mathcal{B}$.

Beweis. (i): Seien $\zeta = (\zeta_\lambda)$, $\zeta' = (\zeta'_\lambda) \in H$ und $\eta = (\eta_\mu)$, $\eta' = (\eta'_\mu) \in K$, dann ist

$$\begin{aligned}\left\langle (\zeta_\lambda \otimes \eta_\mu)\,,\,(\zeta'_\lambda \otimes \eta'_\mu)\right\rangle &= \sum_{\lambda,\mu} \left\langle \zeta_\lambda \otimes \eta_\mu\,,\,\zeta'_\lambda \otimes \eta'_\mu \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda,\mu} \left\langle \zeta_\lambda\,,\,\zeta'_\lambda\right\rangle \left\langle \eta_\mu\,,\,\eta'_\mu\right\rangle = \sum_\lambda \left\langle \zeta_\lambda\,,\,\zeta'_\lambda\right\rangle \sum_\mu \left\langle \eta_\mu\,,\,\eta'_\mu\right\rangle \\ &= \left\langle (\zeta_\lambda)\,,\,(\zeta'_\lambda)\right\rangle \left\langle (\eta_\mu)\,,\,(\eta'_\mu)\right\rangle = \left\langle (\zeta_\lambda) \otimes (\eta_\mu)\,,\,(\zeta'_\lambda) \otimes (\eta'_\mu)\right\rangle\end{aligned}$$

Auf den *Elementartensoren* stimmt also das Skalarprodukt der rechten Seite mit dem der linken Seite überein. Damit ergibt Theorem 4.1 die Existenz des unitären Operators U. Die übrigen Gleichungen folgen damit sofort.
(ii): Die universellen Darstellungen (H, ϕ) und (K, ψ) von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ ergeben sich ja gerade als direkte Summen aller Darstellungen (H_τ, ϕ_τ) bzw. (K_σ, ψ_σ), so daß (i) die Behauptung ergibt. □

Korollar 4.18. *Sind* τ *und* σ *Zustände auf den C*-Algebren* $\mathcal{A}$ *bzw.* $\mathcal{B}$, *so ist* $\tau \otimes \sigma$ *bezüglich der Darstellungsnorm stetig.*

Beweis. Ist $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, so ergibt sich

$$(\tau \otimes \sigma)(c) = \left\langle (\phi_\tau \hat{\otimes} \phi_\sigma)(c)(\zeta_\tau \otimes \zeta_\sigma)\,,\,\zeta_\tau \otimes \zeta_\sigma\right\rangle$$

(Diese Gleichung überprüft man zuerst für Elementartensoren $c = a \otimes b$ und dann leistet (Bi-)Linearität alles weitere ...). Nach Lemma 4.17 gilt $\left\|(\phi_\tau \hat{\otimes} \phi_\sigma)(c)\right\| \leq \|c\|_*$ und hieraus folgt $|\tau \otimes \sigma|(c) \leq \|c\|_*$. Dies ist die Stetigkeit von $\tau \otimes \sigma$ bezüglich $\| \, \|_*$. □

Lemma 4.19. *Seien* τ *und* σ *positive Funktionale auf den C*-Algebren* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$. *Dann ist auch* $\tau \otimes \sigma$ *ein positives Funktional auf* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Beweis. Sei $c := \sum_{k=1}^n a_k \otimes b_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann ist

$$(\tau \otimes \sigma)(c^*c) = \sum_{k,l=1}^n \tau(a_k^* a_l)\sigma(b_k^* b_l)$$

Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ ergibt sich

$$\sum_{k,l=1}^n \sigma(b_k^* b_l)\overline{\lambda}_k \lambda_l = \sigma\left(\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\right)^* \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\right)\right) \geq 0,$$

denn σ ist positive. Also ist $u = (\sigma(b_k^* b_l))$ eine positive $n \times n$-Matrix. Diese hat somit eine Darstellung $u = \sum_{k=1}^n t_k p_k$ mit $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ und Projektionen $p_1, \ldots, p_n$ vom Rang 1. Um also zu zeigen, daß $(\tau \otimes \sigma)(c^*c) \geq 0$ ist, reicht es zu zeigen, daß $\sum_{k,l=1}^n \tau(a_k^* a_l)p_{k,l} \geq 0$ für jede Projektion $p = (p_{k,l})$ vom Rang 1 ist. Jede solche Projektion hat eine Darstellung $p = (\overline{\lambda}_k \lambda_l)$ mit geeigneten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$. Somit ist

$$\sum_{k,l=1}^n \tau(a_k^* a_l)p_{k,l} = \sum_{k,l=1}^n \tau(a_k^* a_l)\overline{\lambda}_k \lambda_l = \tau\left(\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right)^* \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right)\right) \geq 0,$$

denn τ ist positiv. □

Lemma 4.20. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C^*-Algebren und sei γ eine C^*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Sind τ und σ Zustände auf $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ dergestalt, daß $\tau \otimes \sigma$ stetig bzgl. γ ist, so hat $\tau \otimes \sigma$ genau eine Fortsetzung zu einem Zustand $\tau \otimes_\gamma \sigma$ auf $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$.*

Beweis. Da $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ ist, setzt sich $\tau \otimes \sigma$ natürlich zu einem stetigen linearen Funktional ω hierauf fort. Ist nun $c \in \mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ gegeben, so findet man $c_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, daß $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Damit wird

$$\omega(c^*c) = \lim_{n\to\infty} (\tau \otimes \sigma)(c_n^* c_n) \geq 0$$

nach 4.19. Also ist ω positiv.
Gemäß 4.16 kann man für $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ eine approximierende Einheit der Gestalt $(u_\lambda \otimes v_\lambda)_{\lambda \in L}$ finden, wobei $(u_\lambda)_{\lambda\in L} \subset \mathcal{A}$ und $(v_\lambda)_{\lambda\in L} \subset \mathcal{B}$ ebenfalls approximierende Einheiten sind. Hierfür ergibt sich

$$\|\omega\| = \lim_{\lambda\in L} \omega(u_\lambda \otimes v_\lambda) = \lim_{\lambda \in L} \tau(u_\lambda)\sigma(v_\lambda) = \|\tau\|\,\|\sigma\| = 1$$

Also ist ω ein Zustand auf $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$. □

Lemma 4.21. *Seien τ und σ Zustände auf den C^*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Sei $\tau \otimes \sigma$ bezüglich der C^*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ stetig. Dann gibt es einen unitären Operator $U \colon H_\tau \hat{\otimes} H_\sigma \to H_{\tau\otimes_\gamma\sigma}$, daß für alle $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,*

$$\phi_{\tau\otimes_\gamma\sigma}(c) = U(\phi_\tau \hat{\otimes} \phi_\sigma)U^*$$

Beweis. Seien $\omega := \tau \otimes_\gamma \sigma$, $\pi := \phi_\tau \hat{\otimes} \phi_\sigma$ und $\eta := \zeta_\tau \otimes \zeta_\sigma$ in $H_\tau \hat{\otimes} H_\sigma$. Dann gilt für alle $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$$\langle \phi_\omega(c)\zeta_\omega\ ,\ \zeta_\omega\rangle = \langle \pi(c)(\eta)\ ,\ \eta\rangle \tag{4.11}$$

Um dies zu zeigen, reicht es, $c = a \otimes b$ mit $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$ anzunehmen. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}&\langle \phi_\omega(c)\zeta_\omega\ ,\ \zeta_\omega\rangle = \omega(a\otimes b) = \tau(a)\sigma(b)\\ &= \langle \phi_\tau(a)\zeta_\tau\ ,\ \zeta_\tau\rangle\,\langle \phi_\sigma(b)\zeta_\sigma\ ,\ \zeta_\sigma\rangle = \big\langle \phi_\tau \hat{\otimes} \phi_\sigma(\zeta_\tau\otimes\zeta_\sigma)\ ,\ \zeta_\tau\otimes\zeta_\sigma\big\rangle = \langle \pi(c)(\eta)\ ,\ \eta\rangle\,.\end{aligned}$$

Sei $H_0 := \phi_\omega(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\zeta_\omega$ und $K_0 := \pi(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\eta$, dann ist die Abbildung

$$U_0 \colon K_0 \to H_0, \pi(c)\eta \mapsto \phi_\omega(c)\zeta_\omega$$

nach (4.11) wohldefiniert, linear und isometrisch. Somit erlaubt die Dichtheit von H_0 in H_ω sowie von K_0 in $H_\tau \hat{\otimes} H_\sigma$ diese Isometrie zu einem unitären Operator $U \colon H_\tau \hat{\otimes} H_\sigma \to H_{\tau \otimes_\gamma \sigma}$ fortzusetzen. Hierfür überlegt man sich schnell, daß $\phi_\omega(c) = U\pi(c)U^*$ für jedes $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist. □

THEOREM 4.22. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ nichttriviale C*-Algebren sowie $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann ist*

$$\|c\|_*^2 = \sup \left\{ \frac{(\tau \otimes \sigma)(d^* c^* c d)}{(\tau \otimes \sigma)(d^* d)} \;:\; \tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A}),\ \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B}),\ d \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, (\tau \otimes \sigma)(d^* d) > 0 \right\}$$

BEWEIS. Ist ω ein Zustand auf $\mathcal{A} \otimes_* \mathcal{B}$, so ergibt sich

$$\|\phi_\omega(c)\|^2 = \sup \left\{ \frac{\omega(d^* c^* c d)}{\omega(d^* d)} \;:\; d \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \omega(d^* d) > 0 \right\},$$

denn $\|d + N_\omega\|^2 = \omega(d^* d)$ und $\phi_\omega(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\zeta_\omega$ ist dicht in H_ω. Nach Lemma 4.17(4.10) gilt,

$$\|c\|_*^2 = \sup \left\{ \left\| \phi_\tau \hat{\otimes} \psi_\sigma(c^* c) \right\| \;:\; \tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B}) \right\}.$$

Nach Korollar 4.18 sowie Lemma 4.20 und Lemma 4.21 ergibt sich für alle $\tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ und alle $d \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$$\|\phi_{\tau \otimes_* \sigma}(d)\| = \left\| (\phi_\tau \hat{\otimes} \phi_\sigma)(d) \right\|$$

Setzt man diese Gleichungen zusammen, so ergibt sich die Behauptung. □

THEOREM 4.23. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren. Dann ist die Einschränkung auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ der Darstellungsnorm von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[e]$ die Darstellungsnorm von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

BEWEIS. Sei mit γ die Einschränkung auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ der Darstellungsnorm von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[e]$ bezeichnet. Nach Theorem 4.22 gilt dann für $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$$\gamma(c)^2 = \sup \left\{ \frac{(\tau \otimes \sigma)(d^* c^* c d)}{(\tau \otimes \sigma)(d^* d)} \;:\; \tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B}[e]),\ d \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[e], (\tau \otimes \sigma)(d^* d) > 0 \right\}$$

und natürlich auch

$$\|c\|_*^2 = \sup \left\{ \frac{(\tau \otimes \sigma)(d^* c^* c d)}{(\tau \otimes \sigma)(d^* d)} \;:\; \tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A}),\ \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B}),\ d \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, (\tau \otimes \sigma)(d^* d) > 0 \right\}$$

Beachtet man, daß jeder Zustand $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem Zustand auf $\mathcal{B}[e]$ hat, so kann man schließen, daß $\gamma(c) \geq \|c\|_*$.
Nun seien (H, ϕ) und (K, ψ) die universellen Darstellungen von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}[e]$. Sei $\psi_{\mathcal{B}}$ die Einschränkung auf $\mathcal{B}$. Ist $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gegeben, so wird $(\phi \otimes \psi)(c) = (\phi \otimes psi_{\mathcal{B}})(c)$. Gemäß Definition der Darstellungsnorm ist $\gamma(c) = \left\| (\phi \hat{\otimes} \psi)(c) \right\|$. Außerdem gilt nach Lemma 4.17(i), $\left\| (\phi \hat{\otimes} \psi_{\mathcal{B}})(c) \right\| \leq \|c\|_*$. Damit folgt $\gamma(c) \leq \|c\|_*$. Insgesamt ergibt das die Gleichheit der beiden Normen. □

LEMMA 4.24. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren. Desweiteren sei angenommen, daß $\mathcal{B}$ keine Eins besitzt. Ist γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, so gibt es genau eine C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[e]$, die γ fortsetzt.*

Beweis. Sei (H,π) eine treue, nicht ausgeartete Darstellung von $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$. Dann bestimme man gemäß Theorem 4.13 C*-Homomorphismen $\pi_\mathcal{A}$ und $\pi_\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}$(H) derart, daß

$$\pi(a\otimes b)=\pi_\mathcal{A}(a)\pi_\mathcal{B}(b)=\pi_\mathcal{B}(b)\pi_\mathcal{A}(a) \tag{4.12}$$

für alle $a\in\mathcal{A}$ und $b\in\mathcal{B}$. Unmittelbar aus (4.12) ergibt sich die Injektivität von $\pi_\mathcal{A}$ und $\pi_\mathcal{B}$. Sei $\pi'_\mathcal{B}\colon\mathcal{B}[e]\to\mathcal{B}(H)$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $\pi_\mathcal{B}$. Man überzeugt sich leicht davon, daß diese ebenfalls injektiv ist. Ebenfalls aus (4.12) folgt, daß die Elemente von $\pi_\mathcal{A}(\mathcal{A})$ mit denen von $\pi_{\mathcal{B}[e]}(\mathcal{B}[e])$ vertauschen. Also gibt es einen C*-Homomorphismus $\pi'\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{B}(H)$, der π fortsetzt. Lemma 4.24 ist somit bewiesen, wenn gezeigt wurde, daß π' injektiv ist, denn in diesem Fall liefert $\|\pi'(\ )\|$ eine C*-Norm auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}[e]$ und für $c\in\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$ gilt ja $\gamma(c)=\|\pi'(c)\|$. Sei $c\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}[e]$ mit $\pi'(c)=0$. Ist $d\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ beliebig, so ist auch $cd\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, denn $\mathcal{B}$ ist ein Ideal in $\mathcal{B}[e]$. Hiermit ist $\pi(cd)=\pi(c)\pi'(d)=0$, und so, wegen der Injektivität von π, $cd=0$ für alle $d\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Sei nun $\theta:=\pi_\mathcal{A}\hat{\otimes}\pi'_\mathcal{B}$, dann ist auch $\theta(c)\theta(d)=0$ für alle $d\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und somit verschwindet $\theta(c)$ auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(H\hat{\otimes}H)$, einem dichten Teilraum von $H\hat{\otimes}H$, d.h. $\theta(c)=0$. Mit $\pi_\mathcal{A}$ und $\pi'_\mathcal{B}$ ist auch θ injektiv (vgl. Theorem 4.11), also ist $c=0$. □

Lemma 4.25. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren. Desweiteren seien u und v unitäre Elemente der C*-Algebren $\mathcal{A}[e]$ bzw. $\mathcal{B}[e]$. Dann ist der eindeutig bestimmte C*-Homomorphismus π auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, der durch*

$$\pi(a\otimes b)=u^*au\otimes v^*bv \qquad (a\in\mathcal{A},b\in\mathcal{B})$$

gegeben ist, eine Isometrie für jede C-Norm γ auf $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$.*

Beweis. Da π als Inverse den durch $\pi'(a\otimes b)=uau^*\otimes vbv^*$ bestimmten C*-Homomorphismus hat, reicht es zu zeigen, daß π eine Kontraktion ist. Sei $(u_\lambda\otimes v_\lambda)\subset\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$ eine gemäß Lemma 4.16 gewählte approximierende Einheit. Setze $w:=u\otimes v$ und $w_\lambda:=u_\lambda\otimes v_\lambda$, dann gilt für alle $c\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, daß $\pi(c)=w^*cw$. Hat man nun $a\in\mathcal{A}$ und $b\in\mathcal{B}$ gegeben, so wird $u^*au=\lim u^*u_\lambda au_\lambda u$ in $\mathcal{A}$ und $v^*bv=\lim v^*v_\lambda bv_\lambda v$ in $\mathcal{B}$. Die Stetigkeit der bilinearen Abbildung $\otimes\colon\mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$, $(a,b)\mapsto a\otimes b$ (s. Korollar 4.14) ergibt,

$$w^*(a\otimes b)w=u^*au\otimes v^*bv=\lim_\lambda u^*u_\lambda au_\lambda u\otimes v^*v_\lambda bv_\lambda v=\lim_\lambda w^*w_\lambda(a\otimes b)w_\lambda w$$

in $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$. Also folgt für alle $c\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, daß $\pi(c)=\lim\pi(w_\lambda cw_\lambda)$ und hiermit,

$$\begin{aligned}\gamma(\pi(c))=\lim_\lambda\gamma(\pi(w_\lambda cw_\lambda))&=\lim_\lambda\gamma(w^*w_\lambda cw_\lambda w)\le\sup_\lambda\gamma(w^*w_\lambda)\gamma(c)\gamma(w_\lambda w)\\&\le\sup_\lambda\|u^*u_\lambda\|\,\|v^*v_\lambda\|\,\gamma(c)\,\|u_\lambda u\|\,\|v_\lambda v\|\le\gamma(c)\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 4.25 bewiesen. □

Definition. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren und γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, so sei $\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ die Menge aller Paare $(\tau,\rho)\in\mathcal{S}_p(\mathcal{A})\times\mathcal{S}_p(\mathcal{B})$ reiner Zustände[4], für die $\tau\otimes\rho$ bezüglich γ stetig ist.

Lemma 4.26. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren und γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ eine in der schwachen* Topologie abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{S}_p(\mathcal{A})\times\mathcal{S}_p(\mathcal{B})$.*
Sind u und v unitäre Elemente in $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ und ist $(\tau,\rho)\in\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$, so ist auch $(\tau_u,\rho_v)\in\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Hierbei sind $\tau_u(a):=\tau(u^*au)$ und $\rho_v(b):=\rho(v^*bv)$ für $a\in\mathcal{A}$ und $b\in\mathcal{B}$ gesetzt.

[4]Ein Zustand auf einer C*-Algebra heißt rein, wenn es keinen echt kleineren Zustand $\neq 0$ auf der C*-Algebra gibt

BEWEIS. Ist $\pi\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ der durch $\pi(a\otimes b)=u^*au\otimes v^*bv$ eindeutig bestimmte Isomorphismus, so folgt aus dessen Stetigkeit und der Stetigkeit von $\tau\otimes\rho$ bezüglich γ, auch die entsprechende Stetigkeit von $\tau_u\otimes\rho_v=\tau\otimes\rho\circ\pi$. Aus Lemma 4.20 ergibt sich, daß $|(\tau\otimes\rho)(c)|\le\gamma(c)$ für $c\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Damit ist es Routine, die Abgeschlossenheit von $\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ in $\mathcal{S}_p(\mathcal{A})\times\mathcal{S}_p(\mathcal{B})$ zu zeigen. □

BEMERKUNG. Ist ω ein Zustand auf $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$, so erhält man auf kanonische Weise Zustände auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, indem man zur GNS-Darstellung $(H_\omega,\pi_\omega,\zeta_\omega)$ übergeht, für die ja gilt: $\omega(c)=\langle\pi_\omega(c)\zeta_\omega\ ,\ \zeta_\omega\rangle$ $(c\in\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B})$ und dann

$$\omega_{\mathcal{A}}(a):=\langle\pi_{\mathcal{A}}(a)\zeta_\omega\ ,\ \zeta_\omega\rangle\ \text{ und }\ \omega_{\mathcal{B}}(b):=\langle\pi_{\mathcal{B}}(b)\zeta_\omega\ ,\ \zeta_\omega\rangle$$

für $a\in\mathcal{A}$ und $b\in\mathcal{B}$ setzt. Sind insbesondere $(u_\lambda)\subset\mathcal{A}$ und $(v_\lambda)\subset\mathcal{B}$ approximierende Einheiten, so gilt

$$\omega_{\mathcal{A}}(a)=\lim_\lambda\omega(a\otimes v_\lambda)\ \text{ und }\ \omega_{\mathcal{B}}(b)=\lim_\lambda\omega(u_\lambda\otimes b)$$

Ist $(\tau,\rho)\in\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ und $\omega=\tau\otimes_\gamma\rho$, dann ist $\omega_{\mathcal{A}}=\tau$ und $\omega_{\mathcal{B}}=\rho$.

LEMMA 4.27. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren, von denen eine kommutativ ist. Sei γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und sei $(\tau,\rho)\in\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Dann ist $\tau\otimes_\gamma\rho$ ein reiner Zustand auf $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{A}$ als kommutativ angenommen. Setze $\omega:=\tau\otimes_\gamma\rho$ und sei $(H,\pi,\zeta):=(H_\omega,\pi_\omega,\zeta_\omega)$ die von ω induzierte zyklische Darstellung. Durch $K:=\overline{\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\zeta}$ wird ein abgeschlossener, unter $\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ invarianter Teilraum von H definiert. Die Abbildung

$$\psi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}(K),a\mapsto\pi_{\mathcal{A}}(a)\big|K$$

ist ein C*-Homomorphismus und der Vektor ζ ist ein zyklischer Einheitsvektor für die Darstellung (K,ψ) von $\mathcal{A}$. Es gilt für die durch τ induzierte, zyklische Darstellung $(H_\tau,\pi_\tau,\zeta_\tau)$ von $\mathcal{A}$, daß

$$\langle\psi(a)\zeta\ ,\ \zeta\rangle=\tau(a)=\langle\pi_\tau(a)\zeta_\tau\ ,\ \zeta_\tau\rangle\quad(a\in\mathcal{A})$$

Somit sind die beiden Darstellungen (K,ψ) und $(H_\tau,\pi_\tau,\zeta_\tau)$ unitär äquivalent. Letztere Darstellung ist irreduzibel, da τ ein reiner Zustand ist. Also ist auch (K,ψ) irreduzibel. Somit ist $\psi(\mathcal{A})'=\mathbf{C}\subset\mathcal{B}(K)$. Da $\mathcal{A}$ kommutativ angenommen wurde, ist $\psi(\mathcal{A})\subset\psi(\mathcal{A})'$. Ist damit $a\in\mathcal{A}$ gegeben, so findet man ein $\lambda\in\mathbf{C}$, daß $\psi(a)=\lambda\,\mathrm{id}_K$. Desweiteren ist

$$\tau(a)=\langle\psi(a)\zeta\ ,\ \zeta\rangle=\langle\lambda\zeta\ ,\ \zeta\rangle=\lambda$$

und somit $\psi(a)=\tau(a)\,\mathrm{id}_K$.
Indem man auf Vektoren der Gestalt $\pi_{\mathcal{A}}(a')\pi_{\mathcal{B}}(b')\zeta$, deren lineare Hülle dicht in H liegt, testet, erhält man aus dem bisher gezeigten, daß $\pi_{\mathcal{A}}(a)\pi_{\mathcal{B}}(b)=\pi_{\mathcal{B}}(b)\pi_{\mathcal{A}}(a)$. Hieraus schließt man weiter, daß $\pi(\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B})=\pi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$. Somit ist ζ ein zyklischer Vektor für $(H,\pi_{\mathcal{B}})$. Auch hier folgt aus

$$\langle\pi_{\mathcal{B}}(b)\zeta\ ,\ \zeta\rangle=\rho(b)=\langle\pi_\rho(b)\zeta_\rho\ ,\ \zeta_\rho\rangle\quad(b\in\mathcal{B})$$

die unitäre Äquivalenz der Darstellungen (H_ρ,π_ρ) und $(H,\pi_{\mathcal{B}})$. Da ρ ein reiner Zustand ist, ist (H_ρ,π_ρ) irreduzibel. Also wird

$$\pi(\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B})'=\pi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})'=\mathbf{C}\,\mathrm{id}_H$$

Damit muß auch (H,π) irreduzibel sein, was zur Folge hat, daß ω ein reiner Zustand ist. □

LEMMA 4.28. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren, γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und ω ein reiner Zustand auf $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$, so daß auch $\omega_{\mathcal{A}}$ ein reiner Zustand ist. Dann ist $(\omega_{\mathcal{A}},\omega_{\mathcal{B}})\in\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ und $\omega=\omega_{\mathcal{A}}\otimes_\gamma\omega_{\mathcal{B}}$.*

Beweis. Setze $(H,\pi,\zeta) := (H_\omega,\pi_\omega,\zeta_\omega)$, $\tau := \omega_{\mathcal{A}}$ und $\rho := \omega_{\mathcal{B}}$. Sei $K := \overline{\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\zeta}$ und sei

$$\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(K), a \mapsto \pi_{\mathcal{A}}(a)\big|K$$

Der Vektor ζ ist zyklisch für die Darstellung (K,ψ). Wie im Beweis zu Lemma 4.27 schließt man, daß damit (K,ψ) irreduzibel ist, da ja τ ein reiner Zustand ist. Sei p die orthogonale Projektion von H auf K. Dann ist $p \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})'$, denn K ist invariant unter $\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. Ist q eine Projektion in $p\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})'p$, dann ist $q(H)$ ein abgeschlossener Teilraum von K, der unter $\psi(\mathcal{A})$ invariant ist. Da (K,ψ) irreduzibel ist, muß somit $q(H)$ der Nullraum oder K selbst sein. Damit ist aber entweder $q = 0$ oder $q = p$. Somit kann die von Neumann-Algebra $p\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})'p$ nur eindimensional sein. Da $\pi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \subset \pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})'$ ist, findet man zu jedem $b \in \mathcal{B}$ ein $\lambda \in \mathbf{C}$, daß $p\pi_{\mathcal{B}}(b)p = \lambda p$ ist. Man schließt nun wieder leicht, daß $\lambda = \rho(b)$ ist. Hat man nun noch $a \in \mathcal{A}$ gegeben, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\omega(a\otimes b) = \langle \pi(a\otimes b)\zeta\ ,\ \zeta\rangle = \langle \pi_{\mathcal{A}}(a)\pi_{\mathcal{B}}(b)p\zeta\ ,\ p\zeta\rangle &= \langle \pi_{\mathcal{A}}(a)p\pi_{\mathcal{B}}(b)p\zeta\ ,\ \zeta\rangle \\ &= \rho(b)\,\langle \pi_{\mathcal{A}}(a)\zeta\ ,\ \zeta\rangle = \rho(b)\tau(a) = (\tau\otimes\rho)(a\otimes b)\end{aligned}$$

Also setzt ω $(\tau\otimes\rho)$ auf $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$ fort, d.h. $\omega = \tau\otimes_\gamma\rho$.
Nach Lemma 4.21 gibt es einen unitären Operator $U\colon H_\tau \hat{\otimes} H_\rho \to H$, daß $\pi(c) = U(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)U^*$ für $c \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ ist. Sei jetzt angenommen, daß ρ kein reiner Zustand ist. Dann gibt es einen nichttrivialen, abgeschlossenen Teilraum L von H_ρ, der unter $\pi_\rho(\mathcal{B})$ invariant ist. Setzt man $L' := H_\tau \hat{\otimes} L$, so erhält man einen nichttrivialen, abgeschlossenen und unter allen $(\pi_\tau\hat{\otimes}\pi_\rho)(c)$ $(c \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ invarianten Teilraum von $H_\tau \hat{\otimes} H_\rho$. Damit ist $L'' := UL'$ ein nichttrivialer, abgeschlossener und unter allen $\pi(c)$ $(c \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ invarianter Teilraum von H. Da L'' dann auch unter $\pi(\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B})$ invariant ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, daß ω ein reiner Zustand ist. Damit ist $(\omega_{\mathcal{A}},\omega_{\mathcal{B}}) \in \mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$. ☐

Theorem 4.29 (Takesaki). *Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative und $\mathcal{B}$ eine beliebige C^*-Algebra, dann stimmen alle C^*-Normen auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ überein.*

Beweis. Sei γ eine C*-Norm auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ und ω ein reiner Zustand auf $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$. Die induzierte zyklische und irreduzible Darstellung werde wieder mit (H,π,ζ) bezeichnet. Desweiteren seien $\tau = \omega_{\mathcal{A}}$ und $\rho := \omega_{\mathcal{B}}$. Man schließt wieder, daß $\pi_{\mathcal{A}}(a) = \tau(a)\mathbf{1}$ ist, denn $\pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \subset \pi(\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B})' = \mathbf{C}$. Hiermit ist aber τ ein multiplikatives Funktional auf $\mathcal{A}$ und somit ein reiner Zustand. Lemma 4.28 ergibt nun, daß auch ρ ein reiner Zustand auf $\mathcal{B}$ sein muß, daß $(\tau,\rho) \in \mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ und daß $\omega = \tau\otimes_\gamma\rho$. Nach Lemma 4.21 ist $\|\pi(c)\| = \big\|(\pi_\tau\hat{\otimes}\pi_\rho)(c)\big\|$ für alle $c \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Damit wird

$$\begin{aligned}\gamma(c) &= \sup\{\,\|\pi_\omega(c)\|\ :\ \omega \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B})\,\} \\ &= \sup\{\,\big\|(\pi_\tau\hat{\otimes}\pi_\rho)(c)\big\|\ :\ (\tau,\rho) \in \mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B})\,\}\end{aligned}$$

Kann also gezeigt werden, daß $\mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathcal{S}_p(\mathcal{A})\times\mathcal{S}_p(\mathcal{A})$ ist, so ist die rechte Seite der Gleichung

$$\gamma(c) = \sup\{\,\big\|(\pi_\tau\hat{\otimes}\pi_\rho)(c)\big\|\ :\ (\tau,\rho) \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A})\times\mathcal{S}_p(\mathcal{B})\,\}$$

unabhängig von γ, was bedeutet, daß die C*-Norm auf $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt ist.
Sei angenommen, daß $S := \mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A},\mathcal{B}) \neq \mathcal{S}_p(\mathcal{A})\times\mathcal{S}_p(\mathcal{B})$. Da nach Lemma 4.26 S eine schwach*-abgeschlossene Teilmenge ist, gibt es schwach*-offene Mengen U und V in $\mathcal{S}_p(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{S}_p(\mathcal{B})$, daß $S\cap(U\times V) = \emptyset$. Ebenfalls unter Berufung auf Lemma 4.26 kann man annehmen, daß U und V unitär invariant sind, d.h. beispielsweise mit σ ist auch $\sigma_u := \sigma(u^*\cdot u)$ in U für beliebiges $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}[e])$. Die

Mengen $S_{\mathcal{A}} := \mathcal{S}_p(\mathcal{A}) \setminus U$ und $S_{\mathcal{B}} := \mathcal{S}_p(\mathcal{B}) \setminus V$ sind schwach*-abgeschlossene, unitär invariante Mengen. Damit sind die abgeschlossenen Ideale $S_{\mathcal{A}}^{\perp}$ und $S_{\mathcal{B}}^{\perp}$ verschieden von Null und enthalten von Null verschiedene, positive Elemente a bzw. b. Ist nun $(\tau, \rho) \in S$, so ist $(\tau \otimes_\gamma \rho)(a \otimes b) = \tau(a)\rho(b) = 0$, denn entweder ist $\tau \notin U$ oder $\rho \notin V$. Es gibt aber einen reinen Zustand ω, daß $\gamma(a \otimes b) = \omega(a \otimes b)$, was nach dem bisher gezeigten

$$\gamma(a \otimes b) = \omega(a \otimes b) = \omega_{\mathcal{A}}(a)\omega_{\mathcal{B}}(b) = 0$$

zur Folge hat. Somit ist $a \otimes b = 0$ und so $a = 0$ oder $b = 0$, ein Widerspruch. □

THEOREM 4.30. *Ist Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra, dann setzt sich die kanonische Abbildung*

$$C_0(\Omega) \otimes \mathcal{A} \to C_0(\Omega; \mathcal{A}), \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes (a_k) \mapsto (\omega \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(\omega) a_k)$$

zu einem C-Isomorphismus von $C_0(\Omega) \otimes_* \mathcal{A}$ und $C_0(\Omega; \mathcal{A})$ fort.*

BEWEIS. Es ist leicht einzusehen, daß diese Abbildung wohldefiniert und injektiv ist. Darum induziert sie eine C*-Norm auf $C_0(\Omega) \otimes \mathcal{A}$, die nach Theorem 4.29 mit der Darstellungsnorm übereinstimmen muß, d.h. die Abbildung ist isometrisch. Hat man $f \in C_0(\Omega; \mathcal{A})$ gegeben, so ist $f(\Omega) \subset \mathcal{A}$ relativ kompakt, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, die Mittelpunkte von ϵ-Kugeln $B_k \subset \mathcal{A}$ bilden, die $f(\Omega)$ überdecken. Ohne Einschränkung kann man $a_0 = 0$ annehmen. Dann ist $(f^{-1}(B_k))_{k=1}^n$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K := \{\omega \in \Omega : \|f(\omega)\| \geq \epsilon\}$. Man findet nun positive $h_1, \ldots, h_n \in C_0(\Omega)$, so daß h_k den Träger in $f^{-1}(B_k)$ hat und auf K gilt $\sum_{k=1}^n h_k(\omega) = 1$ sowie insgesamt $\sum_{k=1}^n h_k(\omega) \leq 1$. Nun überzeugt man sich leicht, daß

$$\sup_{\omega \in \Omega} \left\| f(\omega) - \sum_{k=1}^{n} h_k(\omega) a_k \right\| \leq \epsilon$$

erfüllt ist. Dies zeigt, daß die kanonische Abbildung ein dichtes Bild hat, ihre Fortsetzung also eine surjektive Isometrie ist. □

THEOREM 4.31. *Für beliebige C*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist die Darstellungsnorm die kleinste C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

BEWEIS. Sei γ eine beliebige C*-Norm auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Da nach Theorem 4.23 und Lemma 4.24 sich sowohl γ als auch die Darstellungsnorm eindeutig auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}[e]$ fortsetzen lassen, wobei die Fortsetzung der letzteren wieder die entsprechende Darstellungsnorm ist, kann man annehmen, $\mathcal{B}$ eine Eins besitzt.
Als erstes soll gezeigt werden, daß

$$S := \mathcal{S}_\gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{S}_p(\mathcal{A}) \times \mathcal{S}_p(\mathcal{B})$$

Ist dies nämlich nicht der Fall, so lassen sich wieder unitär invariante, echte Teilmengen $S_{\mathcal{A}}$ und $S_{\mathcal{B}}$ von $\mathcal{S}_p(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{S}_p(\mathcal{B})$ finden, daß

$$S \subset S_{\mathcal{A}} \times \mathcal{S}_p(\mathcal{B}) \cup \mathcal{S}_p(\mathcal{A}) \times S_{\mathcal{B}}$$

In den Idealen $S_{\mathcal{A}}^{\perp}$ und $S_{\mathcal{B}}^{\perp}$ findet man wieder von Null verschiedene, positive Elemente a_0 bzw. b_0. Somit ist wieder für alle $(\tau, \rho) \in S$,

$$(\tau \otimes_\gamma \rho)(a_0 \otimes b_0) = \tau(a_0)\rho(b_0) = 0 \tag{4.13}$$

Sei $\mathcal{C}$ die von b_0 und $\mathbf{1}$ erzeugte C*-Unteralgebra von $\mathcal{B}$. Diese ist kommutativ, also hat $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ nach Theorem 4.29 eine eindeutig bestimmte C*-Norm. Mit anderen Worten: Die Einschränkung von γ stimmt mit der Darstellungsnorm überein. Man kann also $\mathcal{A} \otimes_* \mathcal{C}$ als Unteralgebra von $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ auffassen. Nun wähle man reine

Zustände τ auf $\mathcal{A}$ und ρ auf $\mathcal{C}$, daß $\tau(a_0) = \|a_0\| > 0$ und $\rho(b_0) = \|b_0\| > 0$. Dann kann man gemäß Korollar 4.18 und Lemma 4.27 $\tau \otimes \rho$ zu einem reinen Zustand auf $\mathcal{A} \otimes_* \mathcal{C}$ und von dort zu einem reinen Zustand ω auf $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$ fortsetzen. Für alle $a \in \mathcal{A}$ ist $\omega_{\mathcal{A}}(a) = \omega(a \otimes \mathbf{1})$ und somit $\omega_{\mathcal{A}}(a) = \tau(a)\rho(1) = \tau(a)$. Also ist $\omega_{\mathcal{A}} = \tau$ ein reiner Zustand auf $\mathcal{A}$. Dann ergibt Lemma 4.28, daß $(\omega_{\mathcal{A}}, \omega_{\mathcal{B}}) \in S$ und $\omega = \omega_{\mathcal{A}} \otimes_\gamma \omega_{\mathcal{B}}$ ist. Nach (4.13) ist $\omega(a_0 \otimes b_0) = 0$, aber andererseits ist

$$\omega(a_0 \otimes b_0) = (\tau \otimes \rho)(a_0 \otimes b_0) = \tau(a_0)\rho(b_0) > 0,$$

ein Widerspruch. Es ist damit $S = \mathcal{S}_p(\mathcal{A}) \times \mathcal{S}_p(\mathcal{B})$.
Die Zustände auf einer C*-Algebra sind schwache* Grenzwerte von Netzen konvexer Kombinationen des Nullfunktionals und der reinen Zustände. Unter Berücksichtigung von Lemma 4.20 erschließt man jetzt, daß für sämtliche Zustände τ und ρ auf $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ $\tau \otimes \rho$ stetig bezüglich γ ist.
Sei $\mathcal{D}$ die ggf. um eine Eins erweiterte C*-Algebra $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$, seien τ und ρ Zustände auf $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ und sei ω die Fortsetzung auf $\mathcal{D}$ von $\tau \otimes_\gamma \rho$. Ist $d \in \mathcal{D}$ gegeben, dann ist

$$\omega^d \colon \mathcal{D} \to \mathbf{C}, c \mapsto d^*cd$$

wieder ein positives Funktional. Da $\gamma(c^*c)\mathbf{1} - c^*c \geq 0$ ist, ist auch $\omega^d(\gamma(c^*c)\mathbf{1} - c^*c) \geq 0$. Somit ist $\omega^d(c^*c) \leq \omega^d(\mathbf{1})\gamma(c^*c)$. Ist $\omega(d^*d) > 0$, so ergibt sich

$$\gamma(c)^2 \geq \frac{\omega(d^*c^*cd)}{\omega(d^*d)}$$

Nach Theorem 4.22 ergibt sich $\gamma(c) \geq \|c\|_*$ für alle $c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. 1: Elementary theory.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York — London, 1983.

[2] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Volume II: Advanced theory.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York — London, 1986.

[3] Gerard J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press, Inc., Boston, MA etc., 1990.

[4] Masamichi Takesaki. *Theory of operator algebras I.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

[5] Vorlesungsskript SS 1996 (Heiming) nach einer entsprechenden Vorlage von R. Janz, Konstanz, 1996.