Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Dissipative Timoshenko Systeme mit *second sound* Effekt

Diplomarbeit

Vorgelegt von
Michael Pokojovy

Betreuer: **Prof. Dr. Reinhard Racke**

Konstanz 2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung: Timoshenko Systeme

Timoshenko[1] Systeme beschreiben sowohl das elastische Verhalten als auch die mechanischen Drehungen elastischer, wärmeleitender Balken, insbesondere die Wechselwirkung zwischen Spannungen und Temperaturunterschieden. Unter einem Balken versteht man einen mehrdimensionalen elastischen Festkörper, dessen Verhalten sich aufgrund der Länge nach gemessener Charakteristiken des Körpers beschreiben lässt.

Das klassische Timoshenko System im $\mathbb{R}^1$ bildet eine Kopplung zweier hyperbolischer Gleichungen und einer parabolischen Gleichung. Das System hat die folgende Gestalt

$$\rho_1\varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{1.2}$$

$$\rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \psi_{tx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L) \tag{1.3}$$

samt Anfangs- und Randbedingungen. Die von $(t,x)\in(0,\infty)\times(0,L)$ abhängigen unbekannten Funktionen φ, ψ und θ modellieren die Vertikalverschiebung eines Balkens mit der Referenzkonfiguration $(0,L)\subset\mathbb{R}$, seinen Drehungswinkel und die Temperaturdifferenz entsprechend. Alle Konstanten seien positiv und die Funktion σ genüge

$$\sigma_{\varphi_x}(0,0) = \sigma_\psi(0,0) = k,$$
$$\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(0,0) = \sigma_{\varphi_x\psi}(0,0) = \sigma_{\psi\psi}(0,0) = 0.$$

Ein einfaches Beispiel der Nichtlinearität ist durch

$$\sigma(r,s) = k\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + ks$$

gegeben und stellt den nichtlinearen Teil der Gleichung dar, die eine schwingende Saite beschreibt. Das linearisierte System besteht dann aus (1.2), (1.3) und

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0. \tag{1.4}$$

[1]Stephan Timoshenko, 23.12.1878-29.05.1972

Das System besitzt einen dissipativen Mechanismus — ein Dämpfungseffekt wegen der Wärmeleitung. Trotz schwacher Dissipation haben R. Racke und J.E. Muñoz Rivera in [7] die globale Lösbarkeit und exponentielle Stabilität des linearen und nichtlinearen Systems (aber für kleine Anfangsdaten) unter folgender Voraussetzung an die Koeffizienten bewiesen:

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \tag{1.5}$$

Dies bedeutet physikalisch, dass die mit (1.4) bzw. (1.2) assoziierten Wellengeschwindigkeiten gleich sind.

Für $\gamma = 0$ ist das System (1.4), (1.2) rein hyperbolisch. Die Energie bleibt also erhalten, d.h. sie kann überhaupt nicht abfallen. Man erwartet überdies, dass sich Singularitäten in endlicher Zeit wegen des typischen hyperbolischen Verhaltens des Systems entwickeln (vgl. den Beweis für die nichtlineare Wellengleichung in [6]).

Ersetzt man den Term $\gamma\theta_x$ in (1.2) durch eine Kontrollfunktion $\bar{b}(x)\psi_t$, $\bar{b} > 0$, so hat Soufyane in [13] bewiesen, dass das linearisierte System (1.4), (1.2) genau dann exponentiell stabil ist, wenn (1.5) gilt.

Eine schwächere Dissipation, indem man den Term $\gamma\theta_x$ durch einen *memory*-Term

$$\int_0^t g(t-s)\psi_{xx} ds$$

ersetzt, wurde in [1] untersucht. Die exponentielle Stabilität ergibt sich wieder für Kernfunktionen g exponentiellen Typs genau dann, wenn (1.5) erfüllt ist.

Die klassischen Timoshenko Systeme haben aber einen physikalischen Nachteil, die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärme. Dieses bekannte Paradoxon wird durch die Verwendung des Fourier-Gesetzes der Wärmeleitung

$$q + \kappa\theta_x = 0$$

verursacht, wobei q den Wärmefluss bezeichnen möge.

Aus dem Energieerhaltungsgesetz

$$\rho_3\theta_t + q_x = 0$$

ergibt sich dann

$$\rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} = 0.$$

Dies lässt sich aber beheben, indem man statt des Fourier[2]-Gesetzes das Cattaneo-Gesetz verwendet

$$\tau_0 q_t + q + \kappa\theta_x = 0,$$

[2]Jean Baptiste Joseph Fourier, 21.03.1768-16.05.1830

woraus sich

$$\rho_3\theta_t + q_x = 0,$$
$$\tau_0 q_t + q + \kappa\theta_x = 0$$

ergibt.

Das Cattaneo-Gesetz modelliert die Wärmeleitung als Wärme-Impulse, die sich mit endlicher Geschwindigkeit durch das Medium verbreiten. τ_0 ist dabei ein kleiner Parameter, der diese Geschwindigkeit bestimmt. Solche Systeme heißen Systeme mit *second sound* oder mit hyperbolischer Wärmeleitung. Man beachte, dass es sich für $\tau_0 = 0$ um das Fourier-Gesetz handelt.

In dieser Arbeit wollen wir die Timoshenko Systeme mit *second sound* in $\mathbb{R}^1$ untersuchen. Wir möchten die Existenz einer globalen klassischen Lösung im linearen Fall und im nichtlinearen Fall (aber für kleine Anfangsdaten) beweisen und die exponentielle Stabilität der dazu gehörigen Energie nachweisen. Nach [4] sind schwach dissipative Timoshenko Systeme mit *second sound* erstaunlicherweise nicht stabil (im Unterschied zu Thermoelastizitätsgleichungen mit *second sound*), deshalb benötigen wir eine stärkere Dissipation (vgl. [8]). Daher betrachten wir statt (1.1) eine gedämpfte Wellengleichung

$$\rho_1\varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu\varphi_t = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L) \tag{1.6}$$

für $\mu > 0$.

Im Kapitel 2 geben wir eine Halbgruppenformulierung des gedämpften Timoshenko Problems mit *second sound* Effekt für die Randbedingungen

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty)$$

und mit Hilfe der Halbgruppentheorie (s. [9], [11]) bekommen die globale Lösung mit entsprechender Regularität im nichtlinearen Fall. Die Motivation für den zweiten Teil des Kapitels 2 war die Fragestellung, ob die zugehörige Lösung exponentiell stabil ist. Der Beweis der exponentiellen Stabilität in diesem Fall beruht auf der Lyapunovschen[3] Methode.

Im Kapitel 3 machen wir die selben Aussagen für andere Randbedingungen

$$\varphi_x(t,0) = \varphi_x(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty)$$

und präsentieren eine lineare Halbgruppenformulierung, die wir im Kapitel 4 beim Beweis exponentieller Stabilität im Nichtlinearen ausnutzen werden.

Im Kapitel 4 wenden wir uns dem nichtlinearen dissipativen Timoshenko System mit *second sound* zum Datensatz aus Kapitel 3 zu. Wir beweisen zunächst einen lokalen Existenzsatz für lineares System mit zeit- und ortsabhängigen Koeffizienten, der als ein Hilfsmittel im nichtlinearen Fall dienen soll. Dabei verwenden wir die Energiemethode nach

[3] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 6.06.1857-3.11.1918

Slemrod [12], die eine Abwandlung der klassischen Methode von Courant, Friedrichs und Lewy (s. [3]) ist. Die Verwendung dieses Resultats und des Banachschen Fixpunktprinzips zeigt dann die Existenz einer lokalen eindeutigen glatten Lösung. Die letzte Aussage dieses Kapitels über exponentielle Stabilität der globalen Lösung bekommen wir mithilfe der Energie- und Perturbationsargumente, die man früher für rein thermoelastische Systeme in [5] und für nichtlineare Cauchy Probleme in [10] verwendet hat.

Zu guter Letzt diskutieren wir über die wichtigsten numerischen Aspekte der Timoshenko Systeme. Wir diskretisieren das System mit Finiten Differenzen Methode und untersuchen die numerische Konsistenz, Stabilität und Konvergenz des entstandenen Verfahrens. Unter anderem zeigen wir, dass unser implizites Verfahren konvergent ist. Es gilt zu bemerken, dass unser diskretes Schema auch für schwach dissipative (d.h. mit $\mu = 0$) Timoshenko Systeme mit *second sound* und klassische Timoshenko Systeme ($\tau_0 = 0$), sowie für klassische Thermoelastizitätsgleichungen für $k = \mu = \tau_0 = 0$ funktioniert. Schließlich präsentieren wir praktische Resultate, indem wir das Timoshenko Problem zu vorgegebenen Daten numerisch lösen und die Energie der Lösung berechnen.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Prof. Dr. Reinhard Racke für seine Betreuung und freundliche Unterstützung während der Anfertigung dieser Diplomarbeit herzlichst bedanken.

Kapitel 2

Lineares Timoshenko System mit *second sound* — $\varphi = \psi = q = 0$

In diesem Kapitel wollen wir die globale Lösbarkeit und exponentielle Stabilität des linearen Timoshenko Systems mit *second sound* untersuchen. Wir betrachten das System partieller Differentialgleichungen

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu\varphi_t = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{2.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{2.2}$$

$$\rho_3\theta_t + \kappa q_x + \gamma\psi_{tx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{2.3}$$

$$\tau_0 q_t + q + \kappa\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L) \tag{2.4}$$

zuzüglich Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0 \\ &\varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1 \quad \text{in } (0,L) \end{aligned} \tag{2.5}$$

und Randbedingungen

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty). \tag{2.6}$$

Die Konstanten $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma, \kappa, \mu, b, k, \tau_0$ seien positiv.

2.1 Existenz der eindeutigen globalen Lösung

Unsere erste Aufgabe in diesem Kapitel ist es, die Wohlgestelltheit von (2.1)—(2.6) und die globale Existenz der zugehörigen Lösung nachzuweisen. Dazu schreiben wir das Problem

(2.1)—(2.6) in ein System erster in t Ordnung um, um schließlich die Halbgruppentheorie darauf anzuwenden. Zu einer Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ seien $V(t)$ und V_0 durch

$$V := \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \psi_x \\ \psi_t \\ \varphi_x + \psi \\ \theta \\ q \end{pmatrix}, \quad V(0,\cdot) \equiv V_0 := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \partial_x \psi_0 \\ \psi_1 \\ \partial_x \varphi_0 + \psi_0 \\ \theta_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Es seien

$$Q := \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_0 \end{pmatrix},$$

$$N := \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & k\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\partial_x & 0 & -k & -\gamma\partial_x & 0 \\ k\partial_x & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma\partial_x & 0 & 0 & -\kappa\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa\partial_x & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei A formal durch $A := Q^{-1}N$ definiert.

Dann genügt V der Evolutionsgleichung

$$V_t(t) = AV(t), \quad V(0) = V_0. \tag{2.7}$$

Sei der Hilbertraum[1] $\mathcal{H} := \left(L^2((0,L))\right)^6$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle V, W \rangle_{\mathcal{H}} := \langle V, QW \rangle_{L^2((0,L))^6}.$$

versehen.

Für den Differentialoperator A gilt

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset \mathcal{H} &\to \mathcal{H}, \\ V &\mapsto AV = Q^{-1}NV, \end{aligned}$$

[1] David Hilbert, 23.01.1862-14.02.1943

wobei

$$V \in D(A) := \Big\{ V = (V^1, V^2, V^3, V^4, V^5, V^6) \in \mathcal{H} \,|\, V^1, V^3, V^6 \in H_0^1((0,L)), \\ V^2, V^4, V^5 \in H^1((0,L)) \Big\}.$$

Es gilt damit

$$V_t(t) = AV(t), \quad V(0) = V_0. \tag{2.8}$$

Und umgekehrt: genügt V für gegebenes V_0 dem System, so lösen

$$\begin{aligned} \varphi(t,\cdot) &:= \varphi_0(\cdot) + \int_0^t V^1(s,\cdot)ds, \\ \psi(t,\cdot) &:= \psi_0(\cdot) + \int_0^t V^3(s,\cdot)ds, \\ \theta(t,\cdot) &:= V^5(t,\cdot), \\ q(t,\cdot) &:= V^6(t,\cdot) \end{aligned}$$

das Problem (2.1)—(2.6).

Demnach sind die beiden Formulierungen in den gewählten Räumen äquivalent. Wir wollen nun zeigen, dass A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe erzeugt, um danach die Lösungstheorie für $V_0 \in D(A)$ zu verwenden.

Lemma 2.1 *Der Operator A besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ *und A ist abgeschlossen,*

(ii) *A ist dissipativ,*

(iii) $D(A) = D(A^*)$.

Beweis:

(i) Offenbar ist $(C_0^\infty((0,L)))^6$ eine dichte Teilmenge von $D(A)$. Mithin ist $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Sei $(V_n)_n \subset D(A)$ mit

$$\begin{aligned} V_n &\to V \in \mathcal{H}, \\ AV_n &\to F \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

d.h. für alle $\Phi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle AV_n, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} \overset{n\to\infty}{\to} \langle F, \Phi\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Zu zeigen ist $V \in D(A)$ und $AV = W$.

Wir untersuchen die folgenden Fälle:

1. Sei $\Phi = (0, \Phi^2, 0, 0, 0, 0)'$. Ist $\Phi^2 \in H^1((0, L))$, so folgt

$$\begin{aligned} b^{-1}b\langle \partial_x V_n^3, \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))} &\overset{n\to\infty}{\to} \langle F^2, \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow \\ -\langle V_n^3, \partial_x \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))} &\overset{n\to\infty}{\to} \langle F^2, \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))}. \end{aligned}$$

   Unter Verwendung von

$$-\langle V_n^3, \partial_x \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))} \overset{n\to\infty}{\to} -\langle V^3, \partial_x \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))}$$

   resultiert

$$-\langle V^3, \partial_x \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))} = \langle F^2, \Phi^2\rangle_{L^2((0,L))} \quad \forall \Phi^2 \in H^1((0, L)),$$

   d.h. $V^3 \in H_0^1((0, L))$ und $(AV)_2 = \partial_x V^3 = F^2$.

2. Sei $\Phi = (0, 0, 0, \Phi^4, 0, 0)'$ mit $\Phi^4 \in H^1((0, L))$. Dann ist

$$\begin{aligned} k^{-1}k\langle \partial_x V_n^1, \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))} + k^{-1}k\langle V_n^3, \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))} &\overset{n\to\infty}{\to} \langle F^4, \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow \\ -\langle V_n^1, \partial_x \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))} + \langle V_n^3, \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))} &\overset{n\to\infty}{\to} \langle F^4, \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))}. \end{aligned}$$

   Dies impliziert

$$-\langle V^1, \partial_x \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))} + \langle V^3, \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))} = \langle F^4, \Phi^4\rangle_{L^2((0,L))}.$$

   Daher $V^1 \in H_0^1((0, L))$ und $(AV)_4 = \partial_x V^1 + V^3 = F^4$.

3. Sei $\Phi = (0, 0, 0, 0, \Phi^5, 0)'$. Ist $\Phi^5 \in H^1((0, L))$, so gilt

$$\begin{aligned} -\rho_3^{-1}\gamma\langle \partial_x V_n^3, \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))} - \rho_3^{-1}\kappa\langle \partial_x V_n^6, \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))} &\overset{n\to\infty}{\to} \langle F^5, \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow \\ \rho_3^{-1}\gamma\langle V_n^3, \partial_x \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))} + \rho_3^{-1}\kappa\langle V_n^6, \partial_x \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))} &\overset{n\to\infty}{\to} \langle F^5, \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))}. \end{aligned}$$

   Somit ergibt sich für alle $\Phi^5 \in H^1((0, L))$

$$\gamma\langle V^3, \partial_x \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))} + \kappa\langle V^6, \partial_x \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))} = \rho_3\langle F^5, \Phi^5\rangle_{L^2((0,L))},$$

   d.h. $V^6 \in H_0^1((0, L))$ und $(AV)_5 = \rho_3^{-1}\left(-\gamma\partial_x V^3 - \kappa\partial_x V^6\right) = F^5$.

4. Für $\Phi = (0,0,0,0,0,\Phi^6)'$, $\Phi^6 \in C_0^\infty((0,L))$ gilt

$$-\tau_0^{-1}\kappa\langle\partial_x V_n^5, \Phi^6\rangle_{L^2((0,L))} - \tau_0^{-1}\langle V_n^6, \Phi^6\rangle_{L^2((0,L))} \overset{n\to\infty}{\to} \langle F^6, \Phi^6\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow$$
$$\tau_0^{-1}\kappa\langle V_n^5, \partial_x\Phi^6\rangle_{L^2((0,L))} - \tau_0^{-1}\langle V_n^6, \Phi^6\rangle_{L^2((0,L))} \overset{n\to\infty}{\to} \langle F^6, \Phi^6\rangle_{L^2((0,L))}.$$

   Dies liefert

$$\tau_0^{-1}\kappa\langle V^5, \partial_x\Phi^6\rangle_{L^2((0,L))} - \tau_0^{-1}\langle V^6, \Phi^6\rangle_{L^2((0,L))} = \langle F^6, \Phi^6\rangle_{L^2((0,L))}$$

   für alle $\Phi^6 \in C_0^\infty((0,L))$, d.h. $V^5 \in H^1((0,L))$ und

$$(AV)_6 = \tau_0^{-1}\left(-\kappa\partial_x V^5 - V^6\right) = F^6.$$

5. Zu $\Phi = (\Phi^1,0,0,0,0,0)$, $\Phi^1 \in C_0^\infty((0,L))$ ergibt sich

$$-\rho_1^{-1}\mu\langle V_n^1, \Phi^1\rangle_{L^2((0,L))} + \rho_1^{-1}k\langle\partial_x V_n^4, \Phi^1\rangle_{L^2((0,L))} \overset{n\to\infty}{\to} \langle F^1, \Phi^1\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow$$
$$-\rho_1^{-1}\mu\langle V_n^1, \Phi^1\rangle_{L^2((0,L))} - \rho_1^{-1}k\langle V_n^4, \partial_x\Phi^1\rangle_{L^2((0,L))} \overset{n\to\infty}{\to} \langle F^1, \Phi^1\rangle_{L^2((0,L))}.$$

   Daraus folgert man für alle $\Phi^1 \in C^\infty((0,L))$

$$-\rho_1^{-1}\mu\langle V^1, \Phi^1\rangle_{L^2((0,L))} - \rho_1^{-1}k\langle V^4, \partial_x\Phi^1\rangle_{L^2((0,L))} = \langle F^1, \Phi^1\rangle_{L^2((0,L))},$$

   d.h. $V^4 \in H^1((0,L))$ und $(AV)_1 = \rho_1^{-1}\left(-\mu V^1 + k\partial V^4\right) = F^1$.

6. Schließlich wählen wir $\Phi = (0,0,\Phi^3,0,0,0)$, $\Phi^3 \in C_0^\infty((0,L))$ und erhalten

$$\rho_2^{-1}b\langle\partial_x V_n^2, \Phi^3\rangle_{L^2((0,L))} - \rho_2^{-1}\langle kV_n^4 + \gamma\partial_x V_n^5, \Phi^3\rangle_{L^2((0,L))} \overset{n\to\infty}{\to} \langle F^3, \Phi^3\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow$$
$$-\rho_2^{-1}b\langle V_n^2, \partial_x\Phi^3\rangle_{L^2((0,L))} - \rho_2^{-1}\langle kV_n^4 + \gamma\partial_x V_n^5, \Phi^3\rangle_{L^2((0,L))} \overset{n\to\infty}{\to} \langle F^3, \Phi^3\rangle_{L^2((0,L))}.$$

   Somit gilt

$$-\rho_2^{-1}b\langle V^2, \partial_x\Phi^3\rangle_{L^2((0,L))} - \rho_2^{-1}\langle kV^4 + \gamma\partial_x V^5, \Phi^3\rangle_{L^2((0,L))} = \langle F^3, \Phi^3\rangle_{L^2((0,L))}$$

   für alle $\Phi^3 \in C_0^\infty((0,L))$.
   Daher $V^2 \in H^1((0,L))$ und $(AV)_3 = \rho_2^{-1}\left(b\partial_x V^2 - kV^4 - \gamma\partial_x V^5\right) = F^3$.

Damit folgt $V \in D(A)$ und $AV = F$, d.h. A ist abgeschlossen.

(ii) Es gilt für alle $V \in D(A)$

$$\begin{aligned}\Re\langle AV, V\rangle_{\mathcal{H}} &= k\int_0^L (V_x^4 V^1 + V_x^1 V^4)dx + b\int_0^L (V_x^3 V^2 + V_x^2 V^3)dx \\ &\quad - k\int_0^L (V^4 V^3 - V^3 V^4)dx - \gamma\int_0^L (V_x^5 V^3 + V_x^3 V^5)dx \\ &\quad - \kappa\int_0^L (V_x^6 V^5 + V_x^5 V^6)dx - \int_0^L (V^6)^2 dx \\ &= -\mu\|V^1\|_{L^2((0,L))} - \|V^6\|^2_{L^2((0,L))} \le 0.\end{aligned}$$

Somit ist der Operator A dissipativ.

(iii) Zu zeigen ist nun $D(A) = D(A^*)$.

Wir behaupten, der zu A adjungierte Operator A^* hat die Gestalt

$$A^* = Q^{-2} \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & -k\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b\partial_x & 0 & k & \gamma\partial_x & 0 \\ -k\partial_x & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\partial_x & 0 & 0 & \kappa\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa\partial_x & -1 \end{pmatrix} Q.$$

Es gilt

$$D(A^*) = \{W \in \mathcal{H} \,|\, \exists F \in \mathcal{H} \quad \forall \Phi \in D(A) : \langle A\Phi, W\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi, F\rangle_{\mathcal{H}}\}.$$

1. Wir wählen $\Phi = (0, \Phi^2, 0, 0, 0, 0)$, $\Phi^2 \in H^1((0,L))$. So ist $\Phi \in D(A)$.
   Somit gilt
   $$\rho_2 b^{-1} b \langle \partial_x \Phi^2, W^3\rangle_{L^2((0,L))} = b\langle \Phi^2, F^2\rangle_{L^2((0,L))}.$$
   Dies ergibt $W^3 \in H_0^1((0,L))$ und
   $$(A^*W)_2 = -b^{-1}\rho_2 \partial_x W^3 = F^2.$$

2. Wähle $\Phi = (0, 0, 0, 0, \Phi^5, 0) \in D(A)$, $\Phi^5 \in H^1((0,L))$.
   Dies ergibt
   $$\begin{aligned} -\rho_2\rho_3^{-1}\gamma\langle \partial_x\Phi^5, W^3\rangle_{L^2((0,L))} - \tau_0\rho_3^{-1}\kappa\langle \partial_x \Phi^5, W^6\rangle_{L^2((0,L))} &= \rho_3\langle \Phi^5, F^5\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow \\ \rho_2\rho_3^{-1}\gamma\langle \Phi^5, \partial_x W^3\rangle_{L^2((0,L))} - \tau_0\rho_3^{-1}\kappa\langle \partial_x \Phi^5, W^6\rangle_{L^2((0,L))} &= \rho_3\langle \Phi^5, F^5\rangle_{L^2((0,L))}. \end{aligned}$$
   Ergo $W^6 \in H_0^1((0,L))$ und
   $$(A^*W)_5 = \rho_3^{-2}(\rho_2\gamma\partial_x W^3 + \tau_0\kappa\partial_x W^6) = F^5.$$

3. Zu $\Phi = (0, 0, 0, 0, 0, \Phi^6) \in D(A)$, $\Phi^6 \in C_0^\infty((0,L))$ erhalten wir
   $$\begin{aligned} -\rho_3\tau_0^{-1}\kappa\langle \partial_x\Phi^6, W^5\rangle_{L^2((0,L))} - \tau_0\tau_0^{-1}\langle \Phi^6, W^6\rangle_{L^2((0,L))} &= \tau_0\langle \Phi^6, F^6\rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow \\ \rho_3\tau_0^{-1}\kappa\langle \Phi^6, \partial_x W^5\rangle_{L^2((0,L))} - \langle \Phi^6, W^6\rangle_{L^2((0,L))} &= \tau_0\langle \Phi^6, F^6\rangle_{L^2((0,L))}. \end{aligned}$$
   Wir folgern damit $W^5 \in H^1((0,L))$ und
   $$(A^*W)_6 = \tau_0^{-2}(\rho_3\kappa\partial_x W^5 - \tau_0 W^6) = F^6.$$

4. Sei $\Phi = (0, 0, 0, \Phi^4, 0, 0) \in D(A)$, $\Phi^4 \in H^1((0, L))$.
   Ferner gilt
   $$\rho_1 k^{-1} k \langle \partial_x \Phi^4, W^1 \rangle_{L^2((0,L))} - \rho_2 k^{-1} k \langle \Phi^4, W^3 \rangle_{L^2((0,L))} = k \langle \Phi^4, F^4 \rangle_{L^2((0,L))},$$
   d.h. $W^1 \in H_0^1((0, L))$ und
   $$(A^* W)_4 = k^{-1}(-\rho_1 \partial_x W^1 - \rho_2 W^3) = F^4.$$
5. Wir wählen $\Phi = (\Phi^1, 0, 0, 0, 0, 0) \in D(A)$, $\Phi^1 \in C_0^\infty((0, L))$.
   Es ist
   $$\begin{aligned} -\rho_1 \rho_1^{-1} \mu \langle \Phi^1, W^1 \rangle_{L^2((0,L))} + k \rho_1^{-1} k \langle \partial_x \Phi^1, W^4 \rangle_{L^2((0,L))} &= \rho_1 \langle \Phi^1, F^1 \rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow \\ -\mu \langle \Phi^1, W^1 \rangle_{L^2((0,L))} - k^2 \rho_1^{-1} \langle \Phi^1, \partial_x W^4 \rangle_{L^2((0,L))} &= \rho_1 \langle \Phi^1, F^1 \rangle_{L^2((0,L))}, \end{aligned}$$
   d.h. $W^4 \in H^1((0, L))$ und
   $$(A^* W)_1 = \rho_1^{-2}(-\rho_1 \mu W^1 - k^2 \partial_x W^4) = F^1.$$
6. Schließlich wähle $\Phi = (0, 0, \Phi^3, 0, 0, 0) \in D(A)$, $\Phi^3 \in C_0^\infty((0, L))$.
   Dies liefert
   $$\begin{aligned} b \rho_2^{-1} b \langle \partial_x \Phi^3, W^2 \rangle_{L^2((0,L))} &+ k \rho_2^{-1} k \langle \Phi^3, W^4 \rangle_{L^2((0,L))} \\ &- \rho_3 \rho_2^{-1} \gamma \langle \partial_x \Phi^3, W^5 \rangle_{L^2((0,L))} = \rho_2 \langle \Phi^3, F^3 \rangle_{L^2((0,L))} \Rightarrow \\ -b \rho_2^{-1} b \langle \Phi^3, \partial_x W^2 \rangle_{L^2((0,L))} &+ k \rho_2^{-1} k \langle \Phi^3, W^4 \rangle_{L^2((0,L))} \\ &+ \rho_3 \rho_2^{-1} \gamma \langle \Phi^3, \partial_x W^5 \rangle_{L^2((0,L))} = \rho_2 \langle \Phi^3, F^3 \rangle_{L^2((0,L))}. \end{aligned}$$
   Daher $W^2 \in H^1((0, L))$ und
   $$(A^* W)_3 = \rho_2^{-2}(-b^2 \partial_x W^2 + k^2 W^4 + \rho_3 \gamma \partial_x W^5) = F^3.$$

Insgesamt haben wir bewiesen, dass $D(A^*) \subset D(A)$. Analog zeigt man $D(A) \subset D(A^*)$.

Daraus folgt $D(A) = D(A^*)$.

□

Das Lemma 2.1 ermöglicht es, den Satz von Hille[2] und Yosida[3] auf A anzuwenden. Damit folgern wir

[2]Carl Einar Hille, 28.06.1894 - 12.02.1980

[3]Kôsaku Yosida, 7.02.1909 - 20.06.1980

Satz 2.2 *Der Operator A erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ mit*

$$\begin{aligned} T(t) : \mathcal{H} &\to D(A), \\ V &\mapsto e^{tA}V \end{aligned}$$

für $t \geq 0$.

Zu $V^0 \in D(A)$ existiert eine eindeutige globale Lösung

$$V \in C^1([0,\infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0,\infty), D(A))$$

zu (2.7). V lässt sich wie folgt darstellen

$$V(t) = T(t)V^0.$$

Der Satz 2.2 impliziert nun, dass es eine eindeutige globale Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ zu (2.1)—(2.6) gibt, die entsprechende Regularität besitzt.

Bemerkung: Die Evolutionsgleichung (2.7) lässt sich als ein gedämpftes System schreiben

$$W_t = AW_x + BW, \tag{2.9}$$

wobei

$$W := (\varphi_t, \psi_x, \psi_t, \varphi_x + \psi, \theta, q)',$$

$$A := \operatorname{diag}(\rho_1, b, \rho_2, k, \rho_3, \tau_0)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix},$$

$$B := \operatorname{diag}(\rho_1, b, \rho_2, k, \rho_3, \tau_0)^{-1} \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung von $\det(A - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ergibt

$$\det(A - \lambda) = \frac{(\lambda^4 \rho_2 \rho_3 \tau_0 - \lambda^2(\rho_2 \kappa^2 + \gamma^2 \tau_0 + b\rho_3 \tau_0) + b\kappa^2)\,(\lambda^2 \rho_1 - k)}{\rho_1 \rho_3 \tau_0 \;\rho_2}.$$

Damit bekommen wir sechs Eigenwerte von A

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\rho_1 k}}{\rho_1},$$
$$\lambda_{3,4,5,6} = \pm \sqrt{\frac{\rho_2 \kappa^2 + \gamma^2 \tau_0 + b\rho_3 \tau_0 \pm \sqrt{\left(\rho_2 \kappa^2 + \gamma^2 \tau_0 + b\rho_3 \tau_0\right)^2 - 4\rho_2 \rho_3 \tau_0 b \kappa^2}}{2\rho_2 \rho_3 \tau}}.$$

Die Eigenwerte λ_k, $k = 0, \ldots, 6$ sind reell positiv und verschieden, denn

$$\left(\rho_2 \kappa^2 + \gamma^2 \tau_0 + b\rho_3 \tau_0\right)^2 > \left(\rho_2 \kappa^2 + b\rho_3 \tau_0\right)^2 \geq 4\rho_2 \rho_3 \tau_0 b \kappa^2,$$

wobei die letzte Abschätzung aus

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad a, b > 0$$

trivialerweise folgt.

Demnach ist das System (2.9) streng hyperbolisch im Hauptteil $W_t = AW_x$ mit einem Dämpfungsterm BW.

2.2 Exponentielle Stabilität

Für eine Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ zu (2.1)—(2.6) betrachten wir die zugehörige Energie

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi)^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau_0 q^2\right)(t, x) dx \\ &\equiv E(t; \varphi, \psi, \theta, q). \end{aligned}$$

Man erkennt leicht

$$E(t) := \frac{1}{2} \|V(t)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Um die exponentielle Stabilität der Energie zu zeigen, verwenden wir die Lyapunovsche Methode, d.h. wir konstruieren ein Lyapunov-Funktional $\mathcal{L}$, welches

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t \geq 0$$

für positive Konstanten β_1, β_2 und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{L}(t) \leq -\alpha \mathcal{L}(t), \quad t \geq 0$$

für ein $\alpha > 0$ genügt. Eine sorgfältige Wahl der Multiplikatoren und der Reihenfolge von Abschätzungen bei der Energiemethode wird uns das gewünschte Ergebnis leisten.

Multiplikation in $L^2((0,L))$ von (2.1) mit φ_t, (2.2) mit ψ_t, (2.3) mit θ und (2.4) mit q und partielle Integration ergeben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = -\mu \int_0^L \varphi_t^2 dx - \int_0^L q^2 dx. \tag{2.10}$$

Es sei w als die Lösung zu

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(L) = 0$$

definiert und sei

$$I_1 := \int_0^L \left(\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t w - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \psi q \right) dx.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L \rho_2 \psi_t \psi dx &= \rho_2 \int_0^L \left(\psi_t^2 + \psi_{tt} \psi \right) dx \\
&= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx - \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx \\
&= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L \psi^2 dx - k \int_0^L \varphi_x \psi dx - \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L \rho_1 \varphi_t w dx &= \rho_1 \int_0^L (\varphi_{tt} w + \varphi_t w_t) dx \\
&= k \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x w dx - \mu \int_0^L \varphi_t w dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx \\
&= -k \int_0^L \varphi \psi_x dx + k \int_0^L w_x^2 dx - \mu \int_0^L \varphi_t w dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L -\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \psi q dx &= -\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_0^L \psi_t q dx + \frac{\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi (q + \kappa \theta_x) dx \\
&= -\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_0^L \psi_t q dx + \frac{\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi q dx + \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_1 = \rho_2 &\int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 - k \int_0^L \psi^2 dx + k \int_0^L w_x^2 dx \\
&- \mu \int_0^L \varphi_t w dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_0^L \psi_t q dx + \frac{\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi q dx.
\end{aligned}$$

Für die weiteren Abschätzungen benötigen wir den

Hilfssatz 2.3 *Löst w die Differentialgleichung*

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(L) = 0, \tag{2.11}$$

so gilt

$$\int_0^L w_x^2 dx \leq \int_0^L \psi^2 dx.$$

Beweis: Offenbar ist

$$w(x) = -\int_0^x \psi(x) ds + \overline{\psi} x, \quad \overline{\psi} = \frac{1}{L}\int_0^L \psi(x) dx \tag{2.12}$$

die Lösung von (2.11). Unter Benutzung dieser Darstellung erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^L w_x^2 dx &= \int_0^L (-\psi(x) + \overline{\psi})^2 dx = \int_0^L (\psi^2(x) - 2\overline{\psi}\psi(x) + \overline{\psi}^2) dx \\ &= \int_0^L \psi^2(x) dx - 2\overline{\psi} \underbrace{\int_0^L \psi(x) dx}_{=L\overline{\psi}} + L\overline{\psi}^2 = \int_0^L \psi^2(x) dx - L\overline{\psi}^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Bemerkung 2.4 *Es gilt für ψ die erste Poincarésche*[4] *Ungleichung*

$$\int_0^L \psi^2 dx \leq c \int_0^L \psi_x^2 dx \tag{2.13}$$

mit der Konstanten $c = \frac{L^2}{\pi^2} > 0$.

Unter Benutzung von (2.12) und (2.13) folgern wir für beliebiges $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_1 = \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 - k \int_0^L \psi^2 dx + \underbrace{k \int_0^L w_x^2 dx}_{\leq k \int_0^L \psi^2 dx} \\ \underbrace{-\mu \int_0^L \varphi_t w dx}_{\leq \frac{\mu}{2} \int_0^L \varepsilon_1 w^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\varphi_t^2 dx} \underbrace{+\rho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx}_{\leq \frac{\rho_1}{2} \int_0^L \varepsilon_1 w_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\varphi_t^2 dx} \underbrace{-\frac{\gamma\tau_0}{\kappa} \int_0^L \psi_t q dx}_{\leq \frac{\gamma\tau_0}{2\kappa} \int_0^L \varepsilon_1 \psi_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} q^2 dx} \underbrace{+\frac{\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi q dx}_{\leq \frac{\gamma}{2\kappa} \int_0^L \varepsilon_1 \psi^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} q^2 dx}\end{aligned}$$

[4] Jules Henri Poincaré, 29.04.1854-17.07.1912

$$
\begin{aligned}
&\leq -\left[b - \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\mu c^2 + \frac{\gamma c}{\kappa}\right)\right]\int_0^L \psi_x^2 dx + \left[\rho_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\rho_1 c + \frac{\gamma \tau_0}{\kappa}\right)\right]\int_0^L \psi_t^2 dx \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon_1}(\mu + \rho_1)\int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left(\frac{\gamma\tau_0}{\kappa} + \frac{\gamma}{\kappa}\right)\int_0^L q^2 dx. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Zum nachstehend definierten Funktional

$$
I_2 := \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx
$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_2 &= \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}\varphi dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\
&= \int_0^L k(\varphi_x + \psi)_x \varphi dx - \mu \int_0^L \varphi_t \varphi dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\
&= k\int_0^L \varphi_{xx}\varphi dx + k\int_0^L \psi_x \varphi dx - \mu\int_0^L \varphi_t\varphi dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\
&= -k\int_0^L \varphi_x^2 dx + k\int_0^L \psi_x\varphi dx - \mu\int_0^L \varphi_t\varphi dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t^2 dx.
\end{aligned}
$$

Dies lässt sich wie folgt abschätzen

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_2 &= -k\int_0^L \varphi_x^2 dx + \underbrace{k\int_0^L \psi_x \varphi dx}_{\leq \frac{k}{2}\int_0^L \varepsilon_2\varphi^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\psi_x^2 dx} \underbrace{-\mu\int_0^L \varphi_t\varphi dx}_{\leq \frac{\mu}{2}\int_0^L \varepsilon_2\varphi^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\varphi_t^2 dx} + \rho_1\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
&\leq -\left(k - \frac{\varepsilon_2 c}{2}(k+\mu)\right)\int_0^L \varphi_x^2 dx + \frac{k}{2\varepsilon_2}\int_0^L \psi_x^2 dx + \left(\frac{\mu}{2\varepsilon_2} + \rho_1\right)\int_0^L \varphi_t^2 dx. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Es sei für $N_1 > 0$

$$
I_3 := N_1 I_1 + I_2.
$$

So gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_3 \leq &-\left[N_1\left(b - \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\mu c^2 + \frac{\gamma c}{\kappa}\right)\right) - \frac{k}{2\varepsilon_2}\right]\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&-\left(k - \frac{\varepsilon_2 c}{2}(k+\mu)\right)\int_0^L \varphi_x^2 dx \\
&+ N_1\left[\rho_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\rho_1 c + \frac{\gamma\tau_0}{\kappa}\right)\right]\int_0^L \psi_t^2 dx \\
&+ \left[N_1 \frac{1}{2\varepsilon_1}(\mu + \rho_1) + \left(\frac{\mu}{2\varepsilon_2} + \rho_1\right)\right]\int_0^L \varphi_t^2 dx + N_1\frac{1}{2\varepsilon_1}\left(\frac{\gamma\tau_0}{\kappa} + \frac{\gamma}{\kappa}\right)\int_0^L q^2 dx. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Wir setzen

$$\overline{\theta}(t,x) := \theta(t,x) - \frac{1}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx.$$

Aus (2.3) schließen wir dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \theta(t,x)dx = \int_0^L \theta_t(t,x)dx = -\frac{\kappa}{\rho_3}q|_0^L - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\gamma}{\rho_3}\psi|_0^L = 0.$$

Mithin ist

$$\int_0^L \overline{\theta}(t,x)dx = 0$$

für alle $t \geq 0$, was ermöglicht es uns, die zweite Poincarésche Ungleichung auf $\overline{\theta}$ anzuwenden. Andererseits erfüllt $(\varphi, \psi, \overline{\theta}, q)$ die selben Differentialgleichungen (2.1)—(2.4) und Randbedingungen (2.6) wie $(\varphi, \psi, \theta, q)$ — jedoch unterscheidet sich im allgemeinen die Anfangsbedingung $\overline{\theta}(0,x)$ von $\theta(0,x)$. Im folgenden betrachten wir $(\varphi, \psi, \overline{\theta}, q)$ und die damit assoziierte Energie

$$\overline{E}(t) \equiv E(t, \varphi, \psi, \overline{\theta}, q)$$

anstelle $(\varphi, \psi, \theta, q)$, aber der Einfachheit halber verwenden wir die Schreibweise θ statt $\overline{\theta}$ bzw. E statt $\overline{E}$.

Setzen wir

$$I_4(t) := \rho_2\rho_3 \int_0^L \left(\int_0^x \theta(t,y)dy\right) \psi_t(t,x)dx,$$

so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_4 &= \int_0^L \left(\int_0^x \rho_3\theta_t dy\right)\rho_2\psi_t dx + \int_0^L \left(\int_0^x \rho_3\theta dy\right)\rho_2\psi_{tt}dx \\
&= -\int_0^L \left(\int_0^x \kappa q_x + \gamma\psi_{tx}dy\right)\rho_2\psi_t dx \\
&+ \int_0^L \left(\int_0^x \rho_3\theta dy\right)(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \gamma\theta_x)dx \\
&= -\gamma\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx - \rho_2\kappa\int_0^L q\psi_t dx - b\rho_3\int_0^L \theta\psi_x dx \\
&+ k\rho_3\int_0^L \theta\varphi dx - k\rho_3\int_0^L \left(\int_0^x \theta dy\right)\psi dx + \gamma\rho_3\int_0^L \theta^2 dx.
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_4 = -\gamma\rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx \underbrace{-\rho_2\kappa \int_0^L q\psi_t dx}_{\leq \frac{\rho_2\kappa}{2}\int_0^L \varepsilon_4\psi_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_4}q^2 dx} \underbrace{-b\rho_3 \int_0^L \theta\psi_x dx}_{\leq \frac{b\rho_3}{2}\int_0^L \varepsilon_4'\psi_x^2 + \frac{1}{\varepsilon_4'}\theta^2 dx}$$

$$\underbrace{+k\rho_3 \int_0^L \theta\varphi dx}_{\leq \frac{k\rho_3}{2}\int_0^L \varepsilon_4'\varphi^2 + \frac{1}{\varepsilon_4'}\theta^2 dx} \underbrace{-k\rho_3 \int_0^L \left(\int_0^x \theta dy\right)\psi dx}_{\leq \frac{k\rho_3}{2}\int_0^L \varepsilon_4'\psi^2 + \frac{1}{\varepsilon_4'}\left(\int_0^x \theta dy\right)^2 dx} + \gamma\rho_3 \int_0^L \theta^2 dx$$

Wir folgern damit für positive $\varepsilon_4, \varepsilon_4'$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_4 \leq & \left[-\gamma\rho_2 + \frac{\varepsilon_4\rho_2\kappa}{2}\right] \int_0^L \psi_t^2 dx + \left(\frac{\varepsilon_4'\rho_3}{2}(b+kc)\right) \int_0^L \psi_x^2 dx \\ & + \frac{\varepsilon_4' k\rho_3 c}{2} \int_0^L \varphi_x^2 dx + \left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'}(b+k+kc)\right) \int_0^L \theta^2 dx \\ & + \frac{\rho_2\kappa}{2\varepsilon_4} \int_0^L q^2 dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Definiert man nun

$$I_5(t) := -\tau_0\rho_3 \int_0^L q(t,x) \left(\int_0^x \theta(t,y) dy\right) dx,$$

so gilt für $\varepsilon_5, \varepsilon_5' > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_5(t) &= -\rho_3 \int_0^L \tau_0 q_t \left(\int_0^x \theta dy\right) dx - \tau_0 \int_0^L q \left(\int_0^x \rho_3\theta_t dy\right) dx \\ &= -\rho_3 \int_0^L (-q - \kappa\theta_x) \left(\int_0^x \theta dy\right) dx - \tau_0 \int_0^L q \left(\int_0^x -\kappa q_x - \gamma\psi_{tx} dy\right) dx \\ &= \rho_3 \int_0^L q \left(\int_0^x \theta dy\right) dx + \rho_3\kappa \int_0^L \theta_x \left(\int_0^x \theta dy\right) dx \\ &+ \tau_0\kappa \int_0^L q \left(\int_0^x q_x dy\right) dx + \tau_0\gamma \int_0^L q \left(\int_0^x \psi_{tx} dy\right) dx \\ &= \underbrace{\rho_3 \int_0^L q \left(\int_0^x \theta dy\right) dx}_{\leq \frac{\rho_3}{2}\int_0^L \varepsilon_5\left(\int_0^x \theta^2 dy\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_5}q^2 dx} - \rho_3\kappa \int_0^L \theta^2 dx + \tau_0\kappa \int_0^L q^2 dx + \underbrace{\tau_0\gamma \int_0^L q\psi_t dx}_{\leq \frac{\tau_0\gamma}{2}\int_0^L \varepsilon_5'\psi_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_5'}q^2 dx}\end{aligned}$$

$$\leq \left(-\rho_3\kappa + \frac{\varepsilon_5\rho_3 c}{2}\right)\int_0^L \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_5'\tau_0\gamma}{2}\int_0^L \psi_t^2 dx + \left(\tau_0\kappa + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'}\right)\int_0^L q^2 dx. \quad (2.18)$$

Es sei zu $N, N_4, N_5 > 0$ das Lyapunov-Funktional $\mathcal{L}(t)$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}(t) := NE + I_3 + N_4 I_4 + N_5 I_5,$$

Unter Berücksichtigung von (2.16), (2.17) und (2.18) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) \leq &-C_{\psi_x}\int_0^L \psi_x^2 dx - C_{\varphi_x}\int_0^L \varphi_x^2 dx - C_{\psi_t}\int_0^L \psi_t^2 dx \\ &- C_\theta \int_0^L \theta^2 dx - C_{\varphi_t}\int_0^L \varphi_t^2 dx - C_q\int_0^L q^2 dx,\end{aligned} \quad (2.19)$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_{\psi_x} &= \left[N_1\left(b - \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\mu c^2 + \frac{\gamma c}{\kappa}\right)\right) - \frac{k}{2\varepsilon_2} - N_4\frac{\varepsilon_4'}{2}\rho_3(b+kc)\right],\\
C_{\varphi_x} &= \left[\left(k - \frac{\varepsilon_2}{2}c(k+\mu)\right) - N_4\frac{\varepsilon_4'}{2}k\rho_3 c\right],\\
C_{\psi_t} &= \left[N_4\left(\gamma\rho_2 - \frac{\varepsilon_4\rho_2\kappa}{2}\right) - N_1\left(\rho_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\rho_1 c + \frac{\gamma\tau_0}{\kappa}\right)\right) - N_5\frac{\varepsilon_5'\tau_0\gamma}{2}\right],\\
C_\theta &= \left[N_5\left(\rho_3\kappa - \frac{\varepsilon_5\rho_3 c}{2}\right) - N_4\left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'}(b+k+kc)\right)\right],\\
C_{\varphi_t} &= \left[N\mu - N_1\frac{1}{2\varepsilon_1}(\mu+\rho_1) - \left(\frac{\mu}{2\varepsilon_2} + \rho_1\right)\right],\\
C_q &= \left[N - N_1\frac{1}{2\varepsilon_1}\left(\frac{\gamma\tau_0}{\kappa} + \frac{\gamma}{\kappa}\right) - N_4\frac{\rho_2\kappa}{2\varepsilon_4} - N_5\left(\tau_0\kappa + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'}\right)\right].
\end{aligned}$$

Wir wählen nun hinreichend kleine ε_1, ε_2, ε_4, ε_4', ε_5, ε_6 und hinreichend große N_1, N_4, N_5, N. Die Reihenfolge ist ε_1, ε_2, ε_4, ε_5, N_1, N_4, ε_4', N_5, ε_5', N. Es ist also

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &< \frac{2b\kappa}{\mu\kappa c^2 + \gamma c}, \quad \varepsilon_2 < \frac{2k}{c(k+\mu)},\\
\varepsilon_4 &< \frac{2\gamma}{\kappa}, \quad \varepsilon_5 < \frac{2\kappa}{c},\\
N_1 &> \frac{k}{2\varepsilon_2\left(b - \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\mu c^2 + \frac{\gamma c}{\kappa}\right)\right)},\\
N_4 &> \frac{N_1\left(\rho_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\rho_1 c + \frac{\gamma\tau_0}{\kappa}\right)\right)}{\gamma\rho_2 - \frac{\varepsilon_4\rho_2\kappa}{2}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_4' &< \min\left\{\frac{2N_1\left(b - \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\mu c^2 + \frac{\gamma c}{\kappa}\right)\right)}{N_4\rho_3(b+kc)}, \frac{2\left(k - \frac{\varepsilon_2}{2}c(k+\mu)\right)}{N_4 k\rho_3 c}\right\}, \\
N_5 &> \frac{N_4\left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'}(b+k+kc)\right)}{\rho_3\kappa - \frac{\varepsilon_5\rho_3 c}{2}}, \\
\varepsilon_5' &< \frac{2\left(N_4\left(\gamma\rho_2 - \frac{\varepsilon_4\rho_2\kappa}{2}\right) - N_1\left(\rho_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\rho_1 c + \frac{\gamma\tau_0}{\kappa}\right)\right)\right)}{N_5\tau_0\gamma} \\
N &> \max\left\{\frac{N_1\frac{1}{2\varepsilon_1}(\mu+\rho_1) + \left(\frac{\mu}{2\varepsilon_2} + \rho_1\right)}{\mu},\right. \\
&\qquad \left. N_1\frac{1}{2\varepsilon_1}\left(\frac{\gamma\tau_0}{\kappa} + \frac{\gamma}{\kappa}\right) + N_4\frac{\rho_2\kappa}{2\varepsilon_4} + N_5\left(\tau_0\kappa + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Sind die Konstanten so gewählt, werden alle Terme in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t)$ negativ.

Wir wollen nun $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t)$ gegen $-d_2E(t)$ für ein $d_2 > 0$ abschätzen.

Setze $C := \frac{1}{2}\min\{C_{\psi_x}, C_{\varphi_x}\}$. Die Ungleichung (2.19) liefert

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) &\leq -(C + (C_{\psi_x} - C))\int_0^L \psi_x^2 dx - (C + (C_{\varphi_x} - C))\int_0^L \varphi_x^2 dx \\
&\quad - C_{\psi_t}\int_0^L \psi_t^2 dx - C_\theta\int_0^L \theta^2 dx - C_{\varphi_t}\int_0^L \varphi_t^2 dx - C_q\int_0^L q^2 dx \\
&\leq \underbrace{-C\int_0^L \psi_x^2 dx}_{\leq -\frac{C}{c}\int_0^L \psi^2 dx} - C\int_0^L \varphi_x^2 dx - (C_{\psi_x} - C)\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&\quad - C_{\psi_t}\int_0^L \psi_t^2 dx - C_\theta\int_0^L \theta^2 dx - C_{\varphi_t}\int_0^L \varphi_t^2 dx - C_q\int_0^L q^2 dx \\
&\leq -\min\left\{C, \frac{C}{c}\right\}\int_0^L \underbrace{\left(\varphi_x^2 + \psi^2\right)}_{\geq\frac{1}{2}(\varphi_x+\psi)^2} dx - (C_{\psi_x} - C)\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&\quad - C_{\psi_t}\int_0^L \psi_t^2 dx - C_\theta\int_0^L \theta^2 dx - C_{\varphi_t}\int_0^L \varphi_t^2 dx - C_q\int_0^L q^2 dx \\
&\leq -C_{\varphi_t}\int_0^L \varphi_t^2 dx - C_{\psi_t}\int_0^L \psi_t^2 dx - (C_{\psi_x} - C)\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&\quad - \frac{\min\left\{C, \frac{C}{c}\right\}}{2}\int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - C_\theta\int_0^L \theta^2 dx - C_q\int_0^L q^2 dx \\
&\leq -d_1\int_0^L \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \theta^2 + q^2 dx
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

mit

$$d_1 := \min\left\{C_{\varphi_t}, C_{\psi_t}, (C_{\psi_x} - C), \frac{\min\left\{C, \frac{C}{c}\right\}}{2}, C_\theta, C_q\right\}. \tag{2.21}$$

Daraus folgt aber

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) \leq -d_2 E(t),$$

wobei

$$d_2 := \frac{2d_1}{\max\{\rho_1, \rho_2, b, k, \rho_3, \tau_0\}}.$$

Wir betrachten $H(t) := I_3 + N_4 I_4 + N_5 I_5$. Wir müssen zeigen

$$|H(t)| \leq CE(t), \quad C > 0.$$

Hilfssatz 2.5 *Es gilt die Abschätzung*

$$\int_0^L \varphi^2 dx \leq 2c \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2c^2 \int_0^L \psi_x^2.$$

Beweis: Trivialerweise folgert man für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}0 &\leq (a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 = 2(a^2 + 2ab + b^2) + 2b^2 - a^2 \\ &= 2(a+b)^2 + 2b^2 - a^2,\end{aligned}$$

d.h. $a^2 \leq 2(a+b)^2 + 2b^2$.

Unter Verwendung der Poincaréschen Ungleichung auf φ und ψ erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^L \varphi^2 dx &\leq c \int_0^L \varphi_x^2 dx \leq 2c \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2c \int_0^L \psi^2 \\ &\leq 2c \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2c^2 \int_0^L \psi_x^2.\end{aligned} \tag{2.22}$$

□

Es gilt

$$\begin{aligned}|H(t)| &= |N_1 I_1 + I_2 + N_4 I_4 + N_5 I_5| \leq N_1 |I_1| + |I_2| + N_4 |N_4| + N_5 |I_5| \\ &= N_1 \left| \int_0^L \left(\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t w - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \psi q\right) dx \right| + \rho_1 \left| \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right| \\ &+ N_4 \rho_2 \rho_3 \left| \int_0^L \left(\int_0^x \theta(t,x) dy\right) \psi_t(t,x) dx \right| + N_5 \tau_0 \rho_3 \left| \int_0^L q \left(\int_0^x \theta dy\right) dx \right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq N_1\Bigg(\frac{\rho_2}{2}\int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 c}{2}\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\rho_1}{2}\int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1 c^2}{2}\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&+ \frac{\gamma\tau_0 c}{2\kappa}\int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\gamma\tau_0}{2\kappa}\int_0^L q^2 dx\Bigg) + \frac{\rho_1}{2}\left(\int_0^L \varphi_t^2 dx + \int_0^L \varphi^2 dx\right) \\
&+ \frac{\rho_2\rho_3 N_4}{2}\left(c\int_0^L \theta^2 dx + \int_0^L \psi_t^2 dx\right) + \frac{\tau_0\rho_3 N_5}{2}\left(\int_0^L q^2 dx + c\int_0^L \theta^2 dx\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.22)}{\leq} \hat{C}_{\varphi_t}\int_0^L \varphi_t^2 + \hat{C}_{\psi_t}\int_0^L \psi_t^2 dx + \hat{C}_{\varphi_x}\int_0^L \psi_x^2 dx \\
&+ \hat{C}_{\varphi_x+\psi}\int_0^L (\varphi_x+\psi)^2 dx + \hat{C}_\theta \int_0^L \theta^2 dx + \hat{C}_q\int_0^L q^2 dx,
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_{\varphi_t} &:= \frac{1}{2}\left(N_1\rho_1 + \rho_1\right), \\
\hat{C}_{\psi_t} &:= \frac{1}{2}\left(N_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 N_4\right), \\
\hat{C}_{\psi_x} &:= \frac{1}{2}\left(N_1\rho_2 c + N_1\rho_1 c^2 + \frac{N_1\tau_0 c}{\kappa} + 2\rho_1 c^2\right), \\
\hat{C}_{\varphi_x+\psi} &:= \rho_1 c, \\
\hat{C}_\theta &:= \frac{1}{2}\left(N_4\rho_2\rho_3 c + N_5\rho_3\tau_0 c\right), \\
\hat{C}_q &:= \frac{1}{2}\left(\frac{N_1\gamma\tau_0}{\kappa} + N_5\rho_3\tau_0\right).
\end{aligned}
$$

Mit (2.23) ergibt sich

$$|H(t)| \leq \hat{C}E(t)$$

mit

$$\hat{C} := \frac{\max\left\{\hat{C}_{\varphi_t}, \hat{C}_{\psi_t}, \hat{C}_{\psi_x}, \hat{C}_{\varphi_x+\psi}, \hat{C}_\theta, \hat{C}_q\right\}}{\min\left\{\rho_1, \rho_2, b, k, \rho_3, \tau_0\right\}}.$$

Wir wählen nun ein $\hat{N} > \max\{N, \hat{C}\}$ und setzen

$$\mathcal{L}(t) := \hat{N}E + H(t) = \hat{N}E + I_3 + N_4 I_4 + N_5 I_5. \tag{2.24}$$

Einerseits folgt dann

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t) \tag{2.25}$$

für $\beta_1 := \hat{N} - \hat{C} > 0$, $\beta_2 := \hat{N} + \hat{C} > 0$, andererseits gilt aber

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(t) \leq -d_2 E(t) \leq -\frac{d_2}{\beta_2}\mathcal{L}(t),$$

damit schließt man mithilfe des Gronwallschen[5] Lemmas

$$\mathcal{L}(t) \leq e^{-\alpha t}\mathcal{L}(0)$$

für $\alpha := \frac{d_2}{\beta_2}$.

(2.25) impliziert letztendlich

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t}E(0), \quad C := \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 2.6 *Die Anfangsdaten mögen die Bedingung*

$$\varphi_0, \psi_0 \in H^2((0,L)), \quad \varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, q_0 \in H_0^1((0,L)), \quad \theta_0 \in H^1((0,L))$$

erfüllen.

Sei $(\varphi, \psi, \theta, q)$ die Lösung von (2.1)—(2.6) zu diesen Anfangsdaten. Die dazu gehörige Energie

$$\begin{aligned}\overline{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \Bigg(& \rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi)^2 \\ & + \rho_3\left(\theta - \frac{1}{L}\int_0^L \theta_0(y)dy\right)^2 + \tau_0 q^2\Bigg)(t,x)dx\end{aligned}$$

fällt exponentiell ab, d.h. es gibt Konstanten $C > 0$ und $\alpha > 0$, die von Anfangsdaten unabhängig sind, sodass

$$\overline{E}(t) \leq C\overline{E}(0)e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

gilt.

Die Konstanten C und α lassen sich explizit aufgrund der Koeffizienten ρ_1, ρ_2, ρ_3, γ, κ, μ, b, k, τ_0 abschätzen.

[5] Thomas Hakon Gronwall (orig. Grönwall), 16.01.1877-9.05.1932

Kapitel 3

Lineares Timoshenko System mit *second sound* — $\varphi_x = \psi = q = 0$

Wir betrachten in diesem Kapitel das lineare Problem (2.1)—(2.5) mit dem zweiten Satz der Randbedingungen

$$\varphi_x(t,0) = \varphi_x(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty). \tag{3.1}$$

Diese Randbedingungen werden auch im nächsten Kapitel für entsprechendes nichtlineares System betrachtet werden. Um die globale Existenz und Stabilität der Lösung des nichtlinearen Timoshenko Systems beweisen zu können, müssen wir erstmal das zugehörige lineare System auf globale Existenz und exponentielle Stabilität untersuchen.

Erst stellen wir aber eine Voraussetzung an die Anfangsdaten.

Es gelte

$$\int_0^L \varphi_0(x)dx = \int_0^L \varphi_1(x)dx = 0, \tag{3.2}$$

$$\int_0^L \theta_0(x)dx = 0. \tag{3.3}$$

3.1 Existenz der eindeutigen globalen Lösung

Wie früher, geben wir zunächst eine Evolutionsformulierung der Aufgabe (2.1)—(2.5), (3.1). Diesmal wird aber der Operator A der Ordnung 2 in x sein.

Zu $(\varphi, \psi, \theta, q)$ seien $V(t)$ und V_0 durch

$$V := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \\ \theta \\ q \end{pmatrix}, \quad V(0,\cdot) \equiv V_0 := \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \theta_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

gegeben.

Es seien

$$Q := \operatorname{diag}(1, \rho_1, 1, \rho_2, \rho_3, \tau_0).$$

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k\partial_x^2 & -\mu & k\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k\partial_x & 0 & b\partial_x^2 - k & 0 & -\gamma\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\partial_x & 0 & -\kappa\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa\partial_x & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $A := Q^{-1}N$.

Sei der Hilbertraum

$$\mathcal{H} := H_*^1((0,L)) \times L_*^2((0,L)) \times H_0^1((0,L)) \times L^2((0,L)) \times L_*^2((0,L)) \times L^2((0,L))$$

mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle V, W\rangle_{\mathcal{H}} := {} & \rho_1\langle V^2, W^2\rangle_{L^2} + \rho_2\langle V^4, W^4\rangle_{L^2} + b\langle V_x^3, W_x^3\rangle_{L^2} \\ & + k\langle V_x^1 + V^3, W_x^1 + W^3\rangle_{L^2} + \rho_3\langle V^5, W^5\rangle_{L^2} + \tau_0\langle V^6, W^6\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

versehen, wobei

$$\begin{aligned} L_*^2((0,L)) &:= \left\{ w \in L^2((0,L)) \;\middle|\; \int_0^L w(x)dx = 0 \right\}, \\ H_*^1((0,L)) &:= H^1((0,L)) \cap L_*^2((0,L)). \end{aligned}$$

Für den Differentialoperator A gilt

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset \mathcal{H} &\to \mathcal{H}, \\ V &\mapsto AV = Q^{-1}NV, \end{aligned}$$

wobei

$$V \in D(A) := \Big\{ V \in \mathcal{H} \,|\, V^1 \in H^2((0,L)), V^1_x \in H^1_0((0,L)), V^2 \in H^1_*((0,L)) \\ V^3 \in H^2((0,L)), V^4 \in H^1_0((0,L)), \\ V^5 \in H^1((0,L)), V^6 \in H^1_0((0,L)) \Big\}.$$

Es gilt damit

$$V_t(t) = AV(t), \quad V(0) = V_0. \tag{3.5}$$

Hilfssatz 3.1 *Der Operator A bildet nach $\mathcal{H}$ ab.*

Beweis: Sei $V \in D(A)$. Offensichtlich gilt $AV \in (L^2((0,L)))^6$, $(AV)_1 = V^2 \in H^1_*((0,L))$ und $(AV)_3 = V^4 \in H^1((0,L))$.

Ferner ergibt sich

$$\int_0^L (AV)_2 dx = \int_0^L \left(\frac{k}{\rho_1} V^1_{xx} + \frac{k}{\rho_1} V^3_x \right) dx = \frac{k}{\rho_1} V^1_x|_{x=0}^{x=L} + \frac{k}{\rho_1} V^3|_{x=0}^{x=L} = 0,$$
$$\int_0^L (AV)_5 dx = \int_0^L \left(-\frac{\gamma}{\rho_3} V^4_x - \frac{\kappa}{\rho_3} V^6_x \right) dx = V^4|_{x=0}^{x=L} - V^6|_{x=0}^{x=L} = 0,$$

d.h. $(AV)_2, (AV)_5 \in L^2_*((0,L))$.

Damit ist alles bewiesen. □

Der folgende Satz zeigt die Äquivalenz beider Formulierungen unseres Problems.

Satz 3.2 *Das Problem (2.1)—(2.5), (3.1)—(3.3) ist äquivalent mit der Evolutionsgleichung (3.5).*

Beweis:

„⇒“ Sei $(\varphi, \psi, \theta, \theta)$ eine Lösung zu (2.1)—(2.5), (3.1)—(3.3). Definiere V wie oben. So erfüllt V die Gleichung $V_t = AV$.

Mit (3.1), (3.2) und (3.3) schließen wir $V_0 = V|_{t=0} \in D(A)$.

Demnach erfüllt V die Evolutionsgleichung (3.5).

„$\Leftarrow$“ Möge V die Gleichung (3.5) lösen.

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}\varphi(t,\cdot) &:= \varphi_0(\cdot) + \int_0^t V^2(s,\cdot)ds,\\ \psi(t,\cdot) &:= \psi_0(\cdot) + \int_0^t V^4(s,\cdot)ds,\\ \theta(t,\cdot) &:= V^5(t,\cdot),\\ q(t,\cdot) &:= V^6(t,\cdot).\end{aligned}$$

So genügt $(\varphi, \psi, \theta, q)$ dem System (2.1)—(2.5), (3.1).

Die Randbedingungen (3.1) sind erfüllt, da $V(t) \in D(A)$ (nach Satz 3.3).

Die Gültigkeit von (3.2) und (3.3) ist auch klar, denn

$$\begin{aligned}\int_0^L \varphi_0(x)dx &= \int_0^L \underbrace{V_0^1(x)}_{\in H_*^1((0,L))} dx = 0,\\ \int_0^L \varphi_1(x)dx &= \int_0^L \underbrace{V_0^2(x)}_{\in L_*^2((0,L))} dx = 0,\\ \int_0^L \theta_0(x)dx &= \int_0^L \underbrace{V_0^5(x)}_{\in L_*^2((0,L))} dx = 0.\end{aligned}$$

Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

□

Der folgende Satz charakterisiert A als Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe und gibt die Darstellung eindeutiger globaler Lösung unserer Evolutionsgleichung

Satz 3.3 *Der Operator A erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ mit*

$$\begin{aligned}T(t) : \mathcal{H} &\to D(A),\\ V &\mapsto e^{tA}V\end{aligned}$$

für $t \geq 0$.

Zu $V^0 \in D(A)$ existiert eine eindeutige globale Lösung

$$V \in C^1([0,\infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0,\infty), D(A))$$

zu (3.5). V lässt sich wie folgt darstellen

$$V(t) = T(t)V^0.$$

Beweis: Wie im Kapitel 2, kann man zeigen, dass das Lemma 2.1 auch für A mit dem Definitionsbereich $D(A)$ gilt.

Die Behauptung folgt dann direkt aus dem Satz von Hille und Yosida. □

Unter Verwendung der Sätze 3.2 und 3.3 schließen wir die globale eindeutige Lösbarkeit des Problems (2.1)—(2.5), (3.1)—(3.3).

3.2 Exponentielle Stabilität

Unsere nächste Aufgabe ist es, eine Stabilitätsaussage über die Lösung unseres Problems zu gewinnen.

Zu einer Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ von (2.1)—(2.5), (3.1)—(3.3) betrachten wir die zugehörige Energie

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi)^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau_0 q^2 \right)(t, x) dx \\ &\equiv E(t; \varphi, \psi, \theta, q). \end{aligned}$$

Lemma 3.4 *Unter Voraussetzungen (3.2), (3.3) gilt*

$$\int_0^L \varphi(t, x) dx = \int_0^L \varphi_t(t, x) dx \equiv 0, \tag{3.6}$$

$$\int_0^L \theta(t, x) dx \equiv 0. \tag{3.7}$$

Beweis: Setze $g(t) := \int_0^L \varphi(t, x) dx$ und $h(t) := \int_0^L \theta(t, x) dx$.

Aus (2.1) und (3.2) ergibt sich

$$\begin{cases} \rho_1 g''(t) + \mu g'(t) = 0, \\ g(0) = 0, g'(0) = 0. \end{cases}$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung ist lösbar mit

$$g(t) = \int_0^L \varphi(t, x) dx \equiv 0. \tag{3.8}$$

Unter Berücksichtigung von (2.3) und (3.3) erhält man analog aus

$$\rho_3 h'(t) = 0, \quad h(0) = 0$$

die Gleichheit

$$h(t) = \int_0^L \theta(t,x)dx \equiv 0. \tag{3.9}$$

Und das haben wir behauptet. □

Wir bemerken, dass die erste Poincarésche Ungleichung auf ψ, q anwendbar ist, weil $\psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,x) = 0, \quad t \geq 0$ gilt.

(3.6), (3.7) besagen aber

$$\int_0^L \varphi(t,x)dx = \int_0^L \varphi_t(t,x)dx = \int_0^L \theta(t,x)dx = 0, \quad t \geq 0.$$

Demnach lässt sich die zweite Poincarésche Ungleichung auf φ, φ_t und θ anwenden.

Wir definieren nun das Lyapunov-Funktional $\mathcal{L}(t)$ wie in (2.24)

$$\mathcal{L}(t) := \hat{N}E + I_3 + N_4 I_4 + N_5 I_5,$$

wobei die Konstanten $\hat{N}$, N_4 und N_5 im Kapitel 2 bestimmt wurden.

Unter Verwendung der Randbedingungen (3.1) und der Poincaréschen Ungleichung kann man sich leicht vergewissern, dass alle Abschätzung aus Kapitel 2 auch für die Lösung von (2.1)—(2.5), (3.1)—(3.3) gelten, d.h. $\mathcal{L}(t)$ ist wirklich ein Lypunov-Funktional.

Nun können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 3.5 *Die Anfangsdaten mögen die Bedingungen*

$$\varphi_0, \psi_0 \in H^2((0,L)), \quad \varphi_{0,x}, \psi_0, \varphi_{1,x}, \psi_1, q_0 \in H_0^1((0,L)), \quad \theta_0 \in H^1((0,L))$$

erfüllen.

Sei $(\varphi, \psi, \theta, q)$ die Lösung von (2.1)—(2.5), (3.1)—(3.3) zu diesen Anfangsdaten. Die dazu gehörige Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2\right)(t,x)dx$$

fällt exponentiell ab, d.h. es gibt Konstanten $C > 0$ und $\alpha > 0$, die von Anfangsdaten unabhängig sind, derart, dass

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

gilt.

Die Konstanten C und α lassen sich explizit aufgrund der Koeffizienten ρ_1, ρ_2, ρ_3, γ, κ, μ, b, k, τ_0 abschätzen.

3.3 Abschätzungen für hohe Normen

Es ist zu ersehen, dass für die Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ zu (2.1)—(2.5), (3.1)—(3.3) und entsprechendes V

$$E(t) = \frac{1}{2}\|V(t)\|_{\mathcal{H}}^2$$

unabhängig von t gilt.

Der Satz 3.5 impliziert nun die exponentielle Stabilität der Halbgruppe $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$:

$$\exists c_0,\, \alpha > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall V_0 \in \mathcal{H}: \quad \left\|e^{tA}V_0\right\|_{\mathcal{H}} \leq c_0 e^{-\alpha t}\|V_0\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.10}$$

da e^{tA}, $t \geq 0$ auf $\mathcal{H}$ definiert ist und $D(A)$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt.

Für den nichtlinearen Fall benötigen wir Abschätzungen an die hohen Normen von V.

Für $s \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathcal{H}_s := \left(H^s \times H^{s-1} \times H^s \times H^{s-1} \times H^{s-1} \times H^{s-1}\right)((0,L))$$

mit der Norm

$$\begin{aligned}\|V\|_{\mathcal{H}_s}^2 := {} & \|V_1\|_{H^s((0,L))}^2 + \|V_2\|_{H^{s-1}((0,L))}^2 + \|V_3\|_{H^s((0,L))}^2 \\ & + \|V_4\|_{H^{s-1}((0,L))}^2 + \|V_5\|_{H^{s-1}((0,L))}^2 + \|V_6\|_{H^{s-1}((0,L))}^2.\end{aligned}$$

Satz 3.6 *Sei $V_0 \in D(A^{s-1})$. Dann gilt*

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_s} \leq c_s\|V_0\|_{\mathcal{H}_s}e^{-\alpha t}, \tag{3.11}$$

wobei $V(t) = e^{tA}V_0$ und $c_s > 0$.

Beweis: Betrachte den formalen Differentialoperator $B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $D(B^{s-1}) \supset D(A^{s-1})$.

Ferner gilt für alle $V \in D(B^n)$

$$B^n V = \begin{cases} (\partial_x^{n-1}V^2, \partial_x^{n+1}V^1, \partial_x^{n-1}V^4, \partial_x^{n+1}V^3, \partial_x^n V^6, \partial_x^n V^5)\,, & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ (\partial_x^n V^1, \partial_x^n V^2, \partial_x^n V^3, \partial_x^n V^4, \partial_x^n V^5, \partial_x^n V^6)\,, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}.$$

Sei $s-1$ nun ungerade. Für $V \in D(B^{s-1})$ gilt

$$\left(\partial_x^{s-2}V^2, \partial_x^s V^1, \partial_x^{s-2}V^4, \partial_x^s V^3, \partial_x^{s-1}V^6, \partial_x^{s-1}V^5\right) \in \mathcal{H}.$$

Damit kann man $(\partial_x^s V^1, \partial_x^{s-1}V^2, \partial_x^s V^3, \partial_x^{s-1}V^4, \partial_x^{s-1}V^5, \partial_x^{s-1}V^6)$ in der Norm von $(L^2((0,L)))^6$ abschätzen. Demnach ist $V \in H_s$.

Ansonsten sei $s-1$ gerade. Für $V \in D(B^{s-1})$ ergibt sich

$$\left(\partial_x^{s-1}V^1, \partial_x^{s-1}V^2, \partial_x^{s-1}V^3, \partial_x^{s-1}V^4, \partial_x^{s-1}V^5, \partial_x^{s-1}V^6\right) \in \mathcal{H}.$$

Dies bedeutet aber, dass $(\partial_x^s V^1, \partial_x^{s-1}V^2, \partial_x^s V^3, \partial_x^{s-1}V^4, \partial_x^{s-1}V^5, \partial_x^{s-1}V^6) \in (L^2((0,L)))^6$ gilt, d.h. $V \in H_s$.

Wähle ein $V \in D(A^{s-1})$. So ist $V \in \mathcal{H}_s$.

Für alle $k \in \{0, \ldots, s-1\}$ gilt nach (3.11) die Abchätzung

$$\|\partial_x^k V(t)\|_{\mathcal{H}_1} \le c_0 \|\partial_x^k V_0\|_{\mathcal{H}_1} e^{-\alpha t}, \quad \forall t \ge 0,$$

da die $\mathcal{H}_1$-Norm mit der $\mathcal{H}$-Norm äquivalent ist.

Quadrierung und Summation über $k \in \{0, \ldots, s-1\}$ liefert sofort

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_s} \le c_s \|V_0\|_{\mathcal{H}_s} e^{-\alpha t}.$$

mit einer Konstanten $c_s > 0$, die weder von V_0 noch von t abhängt.

Damit ist alles gezeigt. □

Kapitel 4

Nichtlineares Timoshenko System mit ***second sound*** — $\varphi_x = \psi = q = 0$

4.1 Existenz der eindeutigen lokalen Lösung

In diesem Kapitel diskutieren wir über die Lösbarkeit und exponentielle Stabilität nichtlinearer Timoshenko Systeme.

Die Beweismethode der lokalen Existenz ist klassisch: man wendet den Banachschen[1] Fixpunktsatz auf die Lösungen des entsprechenden linearen Problems an. Hierzu müssen wir zunächst das lineare System untersuchen:

$$\rho_1\varphi_{tt} - \hat{\sigma}(t,x)\varphi_{xx} - \check{\sigma}(t,x)\psi_x + \mu\varphi_t = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.1}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.2}$$
$$\rho_3\theta_t + \kappa q_x + \gamma\psi_{tx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.3}$$
$$\tau_0 q_t + q + \kappa\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L) \tag{4.4}$$

zuzüglich Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{l} \varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0 \\ \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1 \quad \text{in } (0,L) \end{array} \tag{4.5}$$

und Randbedingungen

$$\varphi_x(t,0) = \varphi_x(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty). \tag{4.6}$$

[1] Stefan Banach, 30.03.1892-31.08.1945

Satz 4.1 *Es gelte für ein* $T > 0$

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}, \check{\sigma} \in C^1([0,T] \times [0,L]),\\ &\hat{\sigma}_{tt}, \hat{\sigma}_{tx}, \hat{\sigma}_{xx}, \check{\sigma}_{tt}, \check{\sigma}_{tx}, \check{\sigma}_{xx} \in L^\infty([0,T], L^2((0,L))).\end{aligned}$$

Überdies sei $\hat{\sigma} \geq s > 0$.

Für die Anfangsdaten gelte

$$\begin{aligned}&\varphi_{0,x} \in H^2((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), \quad \varphi_{1,x} \in H_0^1((0,L)),\\ &\psi_0 \in H^3((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), \quad \psi_1 \in H^2((0,L)) \cap H_0^1((0,L)),\\ &\theta_0 \in H^2((0,L)),\\ &q_0 \in H^2((0,L)) \cap H_0^1((0,L)).\end{aligned}$$

Unter den oben genannten Voraussetzungen besitzt die Anfangsrandwertaufgabe (4.1)—(4.6) eine eindeutige klassische Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ *mit*

$$\begin{aligned}\varphi, \psi &\in C^2(([0,T] \times [0,L]),\\ \theta, q &\in C^1(([0,T] \times [0,L]),\\ \partial^\alpha\varphi, \partial^\alpha\psi &\in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 1 \leq |\alpha| \leq 3,\\ \partial^\alpha\theta, \partial^\alpha q &\in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2,\end{aligned}$$

wobei $\partial^\alpha = \partial_t^{\alpha_1}\partial_x^{\alpha_2}$ *für* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2$.

Beweis: Wir präsentieren hier den Beweis nach Slemrod (s. [12]) unter Verwendung des Faedo[2]-Galerkin[3]-Verfahrens.

Schritt 1: Eine *a priori* Abschätzung.

Wir definieren das Energie-Funktional

$$E(\varphi, \psi, \theta, q; t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho_1\varphi_t^2 + \hat{\sigma}\varphi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2\right)(t,x)dx.$$

Die Multiplikation in $L^2((0,t) \times (0,L))$ von (4.1) mit φ_t, (4.2) mit ψ_t, (4.3) mit θ, (4.4) mit q ergibt

$$0 = \int_0^L \int_0^t \left(\rho_1\varphi_{tt}\varphi_t - \hat{\sigma}\varphi_{xx}\varphi_t - \check{\sigma}\psi_x\varphi_t + \mu\varphi_t^2\right) d\tau dx$$

[2] Alexander Faedo, ?

[3] Boris Grigorjewitsch Galerkin, 20.02.1871-12.07.1945

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^L \int_0^t \Big(\rho_2 \psi_{tt}\psi_t - b\psi_{xx}\psi_t + k(\varphi_x+\psi)\psi_t + \gamma\theta_x\psi_t \\
&\qquad\qquad \rho_3\theta_t\theta + \kappa q_x\theta + \gamma\psi_{tx}\theta + \tau_0 q_t q + q^2 + \kappa\theta_x q \Big) d\tau dx \\
&= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L \left(\rho_1\varphi_t^2 + \hat{\sigma}\varphi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2\right) dx d\tau \\
&+\int_0^L \int_0^t \left(\hat{\sigma}_x\varphi_t\varphi_x - \hat{\sigma}_t\frac{\varphi_x^2}{2} - \check{\sigma}\psi_x\varphi_t + k(\varphi_x+\psi)\psi_t + \mu\varphi_t^2 + q^2 \right) d\tau dx \\
&= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(\varphi,\psi,\theta,q;\tau) d\tau + \int_0^L \int_0^t \left(\mu\varphi_t^2 + q^2\right) d\tau dx \\
&+\int_0^L \int_0^t \left(\hat{\sigma}_x\varphi_t\varphi_x - \hat{\sigma}_t\frac{\varphi_x^2}{2} - \check{\sigma}\varphi_t\psi_x + k(\varphi_x+\psi)\psi_t \right) d\tau dx.
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
&\Big(E(\varphi,\psi,\theta,q;t) - E(\varphi,\psi,\theta,q;0) \Big) + \int_0^t \int_0^L \left(\mu\varphi_t^2 + q^2\right) d\tau dx \\
&\qquad = \int_0^L \int_0^t \left(-\hat{\sigma}_x\varphi_t\varphi_x + \hat{\sigma}_t\frac{\varphi_x^2}{2} + \check{\sigma}\varphi_t\psi_x - k(\varphi_x+\psi)\psi_t \right) d\tau dx. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Wir definieren die „zeitlichen“

$$
\begin{aligned}
E_0(t) &:= E(\varphi,\psi,\theta,q;t), \\
E_1(t) &:= E(\varphi_t,\psi_t,\theta_t,q_t;t), \\
E_2(t) &:= E(\varphi_{tt},\psi_{tt},\theta_{tt},q_{tt};t), \\
\mathcal{E}_1(t) &:= \sum_{k=0}^{2} E_k(t)
\end{aligned}
$$

und die „örtlichen“ Energien

$$
\begin{aligned}
E_3(t) &:= E(\varphi_x,\psi_x,\theta_x,q_x;t), \\
E_4(t) &:= E(\varphi_{tx},\psi_{tx},\theta_{tx},q_{tx};t), \\
\mathcal{E}_2(t) &:= \sum_{k=3}^{4} E_k(t),
\end{aligned}
$$

sowie die gesamte Energie

$$
\mathcal{E}(t) := \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t).
$$

Zunächst produzieren eine Abschätzung für $\mathcal{E}_1(t)$, indem wir einen ähnlichen Ansatz wie in (4.7) benutzen. Danach werden wir diese Abschätzung auf $\mathcal{E}(t)$ mit Hilfe der Differentialgleichungen erweitern.

Wir differenzieren (4.1)—(4.4) nach t und multiplizieren mit φ_{tt}, ψ_{tt}, θ_t und q_t entsprechend. Dann differenzieren wir (4.1)—(4.4) zweimal nach t und multiplizieren mit φ_{ttt}, ψ_{ttt}, θ_{tt} und q_{tt}. Summiert man die auf diese Weise erhaltenen Gleichungen mit (4.7), so bekommt man für $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_1(t) - \mathcal{E}_1(0)) + \int_0^t \int_0^L \mu(\varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2 + \varphi_{ttt}^2) + (q_t^2 + q_{tt}^2 + q_{ttt}^2) dx d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^L \Bigg(-\hat{\sigma}_x \varphi_t \varphi_x + \hat{\sigma}_t \frac{\varphi_x^2}{2} + \hat{\sigma}_t \varphi_{tt} \varphi_{xx} - \hat{\sigma}_x \varphi_{tt} \varphi_{xt} + \hat{\sigma}_t \frac{\varphi_{tx}^2}{2} \\
&\qquad + \hat{\sigma}_{tt} \varphi_{ttt} \varphi_{xx} + 2\hat{\sigma} \varphi_{ttt} \varphi_{xtt} - \hat{\sigma}_x \varphi_{ttt} \varphi_{xxt} + \hat{\sigma}_t \frac{\varphi_{xtt}^2}{2} \Bigg) dx d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^L \Bigg(\check{\sigma} \varphi_t \psi_x + \check{\sigma}_t \varphi_{tt} \psi_x + \check{\sigma} \varphi_{tt} \psi_{tx} \\
&\qquad + \check{\sigma}_{tt} \varphi_{ttt} \psi_x + 2\check{\sigma}_t \varphi_{ttt} \psi_{tx} + \check{\sigma} \varphi_{ttt} \psi_{ttx} \Bigg) dx d\tau \\
&+ k \int_0^t \int_0^L (\varphi_x + \psi)\psi_t + (\varphi_{xt} + \psi_t)\psi_{tt} + (\varphi_{xtt} + \psi_{tt})\psi_{ttt} dx d\tau. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Ferner müssen wir die rechte Seite der Identität (4.8) abschätzen. Im folgenden benutzen wir durchgängig eine generische Konstante C, um die durch Berechnungen entstehenden positiven Konstanten zu bezeichnen, ohne sie von einander zu unterscheiden.

Aus der Voraussetzung $\hat{\sigma} \in C^1([0,T] \times [0,L])$ folgert man

$$\|\hat{\sigma}_x\|_{L^\infty([0,T]\times[0,L])} = \sup_{\substack{0 \le \tau \le T \\ 0 \le x \le L}} |\hat{\sigma}_x(\tau, x)| \le C \qquad (4.9)$$

und damit

$$\left| \int_0^L \int_0^t \hat{\sigma}_x \varphi_t \varphi_x d\tau dx \right| \le C \int_0^L \int_0^t \left(\varphi_t^2 + \varphi_x^2\right) d\tau dx \le C\mathcal{E}(t).$$

Analog kann man alle Terme auf der rechten Seite von (4.8) mit einmal differenzierten oder konstanten Koeffizienten majorieren.

Betrachte nun die Terme mit zweimal differenzierten Koeffizienten, beispielsweise

$$\int_0^L \int_0^t \hat{\sigma}_{tt}\varphi_{ttt}\varphi_{xx} d\tau dx.$$

Weil $\hat{\sigma}_{tt} \in L^\infty([0,T], L^2((0,L)))$, ergibt sich mit der Schwarzschen[4] Ungleichung

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \int_0^L \hat{\sigma}_{tt}\varphi_{ttt}\varphi_{xx} dx d\tau\right| &\leq \int_0^t \left(\int_0^L \hat{\sigma}_{tt} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \varphi_{ttt}^2\varphi_{xx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \left(\int_0^L \varphi_{ttt}^2\varphi_{xx}^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \sup_{0\leq x\leq L} |\varphi_{xx}(\tau,x)| \left(\int_0^L \varphi_{ttt}^2(\tau,x) dx\right)^{\frac{1}{2}} d\tau.\end{aligned}$$

Nach dem Sobolevschen[5] Einbettungssatz gilt

$$\sup_{0\leq x\leq L} |\varphi_{xx}(\tau,x)| \leq C \left(\int_0^L \varphi_{xx}^2(\tau,x) + \varphi_{xxx}^2(\tau,x) dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \int_0^L \hat{\sigma}_{tt}\varphi_{ttt}\varphi_{xx} dx d\tau\right| &\leq C \left(\int_0^t \left(\int_0^L \varphi_{xx}^2(\tau,x) + \varphi_{xxx}^2(\tau,x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \varphi_{ttt}^2(\tau,x) dx\right)^{\frac{1}{2}} d\tau\right) \\ &\leq C \int_0^t \int_0^L (\varphi_{xx}(\tau,x) + \varphi_{xxx}^2(\tau,x) + \varphi_{ttt}^2(\tau,x)) dx d\tau.\end{aligned}$$

Wegen

$$\varphi_{xx} = \frac{\rho_1\varphi_{tt} - \check{\sigma}\psi_x + \mu\varphi_t}{\hat{\sigma}}$$

und $\hat{\sigma} \geq c > 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\varphi_{xxx}^2 \leq C\left(\varphi_{ttx}^2 + \varphi_{tt}^2 + \varphi_{tx}^2 + \varphi_t^2 + \psi_{xx}^2 + \psi_x^2\right), \quad \forall \tau \in [0,t],\, x \in [0,L].$$

Dies impliziert schließlich

$$\left|\int_0^L \int_0^t \hat{\sigma}\varphi_{ttt}\varphi_{xx} d\tau dx\right| \leq C\mathcal{E}(t).$$

[4]Karl Hermann Amandus Schwarz, 25.01.1843-30.11.1921

[5]Sergei L'vovich Sobolev, 6.10.1908-3.01.1989

Alle anderen Terme auf der rechten Seite von (4.8) lassen sich vollkommen analog abschätzen.

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(t) &\leq \mathcal{E}_1(0) + C\int_0^t \mathcal{E}(\tau)d\tau - \int_0^t\int_0^L \mu(\varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2 + \varphi_{ttt}^2) + (q_t^2 + q_{tt}^2 + q_{ttt}^2)dxd\tau \\ &\leq \mathcal{E}_1(0) + C\int_0^t \mathcal{E}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Ferner wollen wir aber beweisen, dass

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0) + C\int_0^t \mathcal{E}(\tau)d\tau$$

gilt.

Dafür reicht es, die Gültigkeit von

$$\mathcal{E}_2(t) \leq C\mathcal{E}_1(t)$$

zu zeigen.

Konkreter müssen wir die Quadrate der L^2-Norm von φ_{xx}, ψ_{xx}, θ_x, q_x, φ_{ttx}, φ_{txx}, ψ_{ttx}, ψ_{txx}, θ_{tx}, q_{tx} gegen $\mathcal{E}_1(t)$ abschätzen.

Alle diesen Terme können wir leicht mithilfe der Differentialgleichungen (4.1)—(4.4) behandeln. Zum Beispiel

$$\begin{aligned}\int_0^L \theta_x^2 dx &= \frac{1}{\kappa^2}\int_0^L (\tau_0 q_t + q)^2 dx \leq \frac{2}{\kappa^2}\int_0^L \tau_0 q_t^2 + q^2 dx \leq C\mathcal{E}_1(t)dx, \\ \int_0^L \varphi_{xx}^2 dx &= \int_0^L \frac{1}{\hat{\sigma}^2}(\rho_1\varphi_{tt} - \hat{\sigma}\psi_x + \mu\varphi_t)^2 dx \leq C\int_0^L (\varphi_{tt}^2 + \psi_x^2 + \varphi_t^2)dx \leq C\mathcal{E}_1(t), \\ \int_0^L \psi_{txx}^2 &= \frac{1}{b^2}\int_0^L (\rho_2\psi_{tt} + k(\varphi_{tx} + \psi_t) + \gamma\theta_{tx})^2 dx \\ &\leq C\int_0^L (\psi_{tt}^2 + \varphi_{tx}^2 + \psi_t^2 + q_{tt}^2 + q_t^2)dx \leq C\mathcal{E}_1(t).\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\mathcal{E}_2(t) \leq C\mathcal{E}_1(t) \tag{4.10}$$

gezeigt, woraus mit der Gronwallschen Ungleichung

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T$$

resultiert.

Demnach ist

$$\mathcal{E}(t) \le C\mathcal{E}(0), \quad 0 \le t \le T.$$

Wir bemerken aber, dass φ_{xxx}, ψ_{xxx}, θ_{xx}, q_{xx} sich ebenfalls aus den Differentialgleichungen (4.1)—(4.4) ausdrücken lassen. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^L q_{xx}^2 dx &= \frac{1}{\kappa^2}\int_0^L (\rho_3\theta_{tx} + \gamma\psi_{txx}^2)dx \le C\int_0^L (\theta_{tx}^2 + \theta_{txx}^2)dx \le C\mathcal{E}(t),\\
\int_0^L \psi_{xxx}^2 dx &= \frac{1}{b^2}\int_0^L (\rho_2\psi_{ttx} + k\varphi_{xx} + k\psi_x + \gamma\theta_{xx})dx\\
&\le C\int_0^L (\psi_{ttx}^2 + \varphi_{xx}^2 + \psi_x^2 + q_{tx}^2 + q_x^2)dx \le C\mathcal{E}(t).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.10) und obigen Abschätzungen schließen wir

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^L \left(\sum_{|\alpha|=1}^{3}\left[(\partial^\alpha\varphi)^2 + (\partial^\alpha\psi)^2\right] + \sum_{|\alpha|=0}^{2}\left[(\partial^\alpha\theta)^2 + (\partial^\alpha q)^2\right]\right)dx \le C\mathcal{E}(0).$$

Schritt 2: Existenz und Eindeutigkeit

Setze

$$\lambda_i := \frac{i\pi}{L}, \quad c_i(x) := \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\lambda_i x, \quad s_i(x) := \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\lambda_i x, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren $(\varphi_m(t), \psi_m(t), \theta_m(t), q_m(t))$ durch

$$\begin{aligned}
\varphi_m(t) &:= \sum_{i=0}^{m}\Phi_{im}(t)c_i(x), \quad \psi_m(t) := \sum_{i=0}^{m}\Psi_{im}(t)s_i(x),\\
\theta_m(t) &:= \sum_{i=0}^{m}\Theta_{im}(t)c_i(x), \quad q_m(t) := \sum_{i=0}^{m}Q_{im}(t)s_i(x),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\Phi_{im}(0) &= \int_0^L \varphi_0(x)c_i(x)dx, \quad \dot{\Phi}_{im}(0) = \int_0^L \varphi_1(x)s_i(x)dx,\\
\Psi_{im}(0) &= \int_0^L \psi_0(x)s_i(x)dx, \quad \dot{\Psi}_{im}(0) = \int_0^L \psi_1(x)c_i(x)dx,\\
\Theta_{im}(0) &= \int_0^L \theta_0(x)c_i(x)dx,\\
Q_{im}(0) &= \int_0^L q_0(x)s_i(x)dx.
\end{aligned}$$

Die Funktionen Φ_{im}, Ψ_{im}, Θ_{im}, Q_{im} genügen also einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\rho_1 \ddot{\Phi}_{jm}(t) = -\sum_{i=0}^{m} \Phi_{im}(t)\lambda_i^2 \langle (k+\hat{\sigma}(t,x))c_i(x), c_j(x)\rangle \tag{4.11}$$

$$+\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Psi_{im} \langle (k+\check{\sigma}(t,x))c_i(x), c_j(x)\rangle - \mu\dot{\Phi}_{jm}(t) \tag{4.12}$$

$$\rho_3 \ddot{\Psi}_{jm}(t) = -b\Psi_{jm}(t)\lambda_j^2 + k(\Phi_{jm}(t)\lambda_j - \Psi_{jm}(t)) + \gamma\Theta_{jm}(t)\lambda_j, \tag{4.13}$$

$$\rho_3 \ddot{\Theta}_{jm}(t) = -\kappa Q_{jm}(t)\lambda_j - \gamma\dot{\Psi}_{jm}(t)\lambda_j, \tag{4.14}$$

$$\tau_0 \ddot{Q}_{jm}(t) = -Q_{jm}(t) + \kappa\Theta_{jm}(t)\lambda_j, \tag{4.15}$$

wobei $0 \le j \le m$ und

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_{L^2((0,L))} = \int_0^L f(x)g(x)dx.$$

Dieses System ist immer eindeutig lösbar und besitzt eine Lösung $(\Phi_{km}, \Psi_{km}, \Theta_{km}, Q_{km})$.

Multipliziert man (4.11) mit $c_j(x)$, (4.13) mit $s_j(x)$, (4.14) mit $c_j(x)$ bzw. (4.15) mit $s_j(x)$ und summiert die jeweiligen Gleichungen über $j = 0, \dots, m$, so erfüllen $\varphi_m(t)$, $\psi_m(t)$, $\theta_m(t)$, $q_m(t)$ die Differentialgleichungen (4.1)—(4.4) sowie die Randbedingungen (4.6).

Nach der Parsevalschen[6] Gleichung muss zusätzlich

$$\begin{aligned}
\|\varphi_m(0) - \varphi_0\|_{L^2((0,L))} &\to 0, \quad m \to \infty,\\
\|\psi_m(0) - \psi_0\|_{L^2((0,L))} &\to 0, \quad m \to \infty,\\
\|\theta_m(0) - \theta_0\|_{L^2((0,L))} &\to 0, \quad m \to \infty,\\
\|q_m(0) - q_0\|_{L^2((0,L))} &\to 0, \quad m \to \infty
\end{aligned}$$

gelten, d.h. die Anfangsbedingungen (4.5) sind ebenfalls fast überall auf $(0, L)$ erfüllt.

Die a priori Abschätzung aus Schritt 1 besagt nun:

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha\varphi, \partial^\alpha\psi &\in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 1 \le |\alpha| \le 3,\\
\partial^\alpha\theta, \partial^\alpha q &\in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 0 \le |\alpha| \le 2.
\end{aligned}$$

Übliche Einbettungssätze in Sobolevräumen zeigen, dass $\{(\varphi_m(t), \psi_m(t), \theta_m(t), q_m(t))\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert eine distributionelle Lösung von (4.1)—(4.6) ist. Dass diese Lösung ebenfalls eine klassische Lösung ist, folgt aus Sobolevscher Ungleichung. Die Eindeutigkeit ist eine direkte Folgerung aus der a priori Abschätzung.

[6] Marc-Antoine Parseval des Chênes 27.04.1755-16.09.1836

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Wir betrachten nun wieder das eigentliche nichtlineare Problem

$$\rho_1\varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu\varphi_t = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.16}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.17}$$
$$\rho_3\theta_t + \kappa q_x + \gamma\psi_{tx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.18}$$
$$\tau_0 q_t + q + \kappa\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,L) \tag{4.19}$$

mit Anfangs-

$$\begin{array}{l} \varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0 \\ \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1 \quad \text{in } (0,L) \end{array} \tag{4.20}$$

und Randbedingungen

$$\varphi_x(t,0) = \varphi_x(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty). \tag{4.21}$$

Satz 4.2 *(Satz über lokale Existenz und Eindeutigkeit)*
Vorgelegt sei die Anfangsrandwertaufgabe (4.16)—(4.21). Es sei $\sigma = \sigma(r,s) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *mit*

$$0 < r_0 \le \sigma_r \le r_1 < \infty \quad (r_0, r_1 > 0), \tag{4.22}$$
$$0 \le |\sigma_s| \le s_0 < \infty \quad (s_0 > 0). \tag{4.23}$$

Die Anfangsdaten mögen

$$\begin{array}{ll} \varphi_{0,x} \in H^2((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), & \varphi_{1,x} \in H_0^1((0,L)), \\ \psi_0 \in H^3((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), & \psi_1 \in H^2((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), \\ \theta_0 \in H^2((0,L)), & \\ q_0 \in H^2((0,L)) \cap H_0^1((0,L)). & \end{array}$$

erfüllen.

Dann besitzt (4.16)—(4.21) eine eindeutige klassische Lösung (φ,ψ,θ,q) *mit*

$$\begin{array}{r} \varphi,\psi \in C^2([0,T)\times[0,L]), \\ \theta, q \in C^1([0,T)\times[0,L]), \end{array}$$

definiert auf einem maximalen Existenzintervall $[0,T)$, $T \le \infty$, *so dass für alle* $t_0 \in [0,T)$

$$\begin{array}{ll} \partial^\alpha\varphi, \partial^\alpha\psi \in L^\infty([0,t_0], L^2((0,L))), & 1 \le |\alpha| \le 3, \\ \partial^\alpha\theta, \partial^\alpha q \in L^\infty([0,t_0], L^2((0,L))), & 0 \le |\alpha| \le 2 \end{array}$$

gilt.

Beweis: *Schritt 1*: Der Raum $X(M,T)$.

Für positive M, T definiere $X(M,T)$ als die Menge der Funktionen $(\varphi, \psi, \theta, q)$ mit

$$\begin{aligned}
&\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0, \\
&\varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1 \quad \text{in } (0,L), \qquad (4.24)\\
&\varphi_x(t,0) = \varphi_x(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

deren verallgemeinerten Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha\varphi, \partial^\alpha\psi &\in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 1 \le |\alpha| \le 3, \\
\partial^\alpha\theta, \partial^\alpha q &\in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 0 \le |\alpha| \le 2
\end{aligned}$$

und

$$\sup_{0\le t\le T} \int_0^L \left(\sum_{|\alpha|=1}^{3} \left[(\partial^\alpha\varphi)^2 + (\partial^\alpha\psi)^2 \right] + \sum_{|\alpha|=0}^{2} \left[(\partial^\alpha\theta)^2 + (\partial^\alpha q)^2 \right] \right) dx \le M^2$$

erfüllen.

Sei $(\bar\varphi, \bar\psi, \bar\theta, \bar q) \in X(M,T)$. Betrachte das lineare Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
&\rho_1\varphi_{tt} - \sigma_r(\bar\varphi_x, \bar\psi)\varphi_{xx} - \sigma_s(\bar\varphi_x, \bar\psi)\psi_x + \mu\varphi_t = 0, && (4.26)\\
&\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0, && (4.27)\\
&\rho_3\theta_t + \kappa q_x + \gamma\psi_{tx} = 0, && (4.28)\\
&\tau_0 q_t + q + \kappa\theta_x = 0 && (4.29)
\end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen (4.20) und Randbedingungen (4.21).

Setzt man

$$\begin{aligned}
\hat\sigma(t,x) &= \sigma_r(\bar\varphi_x, \bar\psi), \\
\check\sigma(t,x) &= \sigma_s(\bar\varphi_x, \bar\psi), \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

so genügen $\hat\sigma$, $\check\sigma$ und die Anfangsdaten den Voraussetzungen des Satzes 4.1 über lokale Existenz und Eindeutigkeit. Demnach besitzt dieses lineare Problem eine eindeutige Lösung .

Wir definieren nun den Operator S, der $(\bar\varphi, \bar\psi, \bar\theta, \bar q) \in X(M,T)$ auf die Lösung von (4.26)—(4.29), (4.20), (4.21) abbildet, d.h.

$$S(\bar\varphi, \bar\psi, \bar\theta, \bar q) = (\varphi, \psi, \theta, q).$$

Schritt 2: Zeige, dass S den Raum $X(M,T)$ nach sich abbildet, falls M hinreichend groß und T hinreichend klein ist.

Zunächst nehmen wir an: $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0 \in C^\infty([0, L])$, $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{q} \in C^\infty([0, T] \times [0, L])$. Unter dieser Voraussetzung kann man zeigen, indem man ähnlich dem Beweis des Satzes 4.1 eine Folge von Energiefunktionalen immer höherer Ordnung konstruiert, dass (4.26)—(4.26), (4.20), (4.21) eine eindeutige C^∞-Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ besitzt. In diesem Fall ist es klar, dass $(\varphi, \psi, \theta, q) \in X(M, T)$ für hinreichend großes M und festes T gilt.

Betrachte die Energieabschätzung (4.8), welche auch für die durch (4.30) definierten Funktionen $\hat{\sigma}(t, x)$, $\check{\sigma}(t, x)$ gilt. Wir schätzen typische Terme auf der rechten Seite von (4.8) ab. Betrachte z.B.

$$-\int_0^t \int_0^L \hat{\sigma}_x \varphi_t \varphi_x dx d\tau,$$

wobei

$$\hat{\sigma}_x(t, x) = \sigma_{rr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xx} + \sigma_{rs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\psi}_x.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L |\hat{\sigma}_x(\tau, x)\varphi_t(\tau, x)\varphi_x(\tau, x)| dx d\tau \leq & \int_0^t \int_0^L |\sigma_{rr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})||\bar{\varphi}_{xx}| \left(\frac{\varphi_t^2 + \varphi_x^2}{2}\right) dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_0^L |\sigma_{rs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})||\bar{\psi}_x| \left(\frac{\varphi_t^2 + \varphi_x^2}{2}\right) dx d\tau. \end{aligned}$$

Da $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{q}) \in X(M, T)$ ist, folgt mit der Sobolevschen Ungleichung

$$\sup_{\substack{0 \leq x \leq L \\ 0 \leq t \leq T}} \left\{ |\bar{\varphi}_x|, |\bar{\varphi}_{xx}|, |\bar{\psi}|, |\bar{\varphi}_{xx}| \right\} \leq CM.$$

Weil σ_{rr}, σ_{rs} stetige Funktionen ihrer Variablen sind, zeigt die obige Abschätzung, dass $|\sigma_{rr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})|$, $|\sigma_{rs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})|$ für $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$ nach oben durch eine Konstante $B(M)$ beschränkt ist. Damit deduzieren wir

$$\int_0^t \int_0^1 |\hat{\sigma}_x(\tau, x)\varphi_t(\tau, x)\varphi_x(\tau, x)| dx d\tau \leq B(M) \int_0^t \int_0^L (\varphi_t^2 + \varphi_x^2) dx d\tau.$$

Da es vorausgesetzt wurde, dass M hinreichend groß ist, so dass $(\varphi, \psi, \theta, q) \in X(M, T)$, folgern wir

$$\int_0^t \int_0^L |\hat{\sigma}_x \varphi_t \varphi_x| dx d\tau \leq B(M) M^2 t. \tag{4.31}$$

Diese Abschätzungsmethode funktioniert für jeden Term auf der rechten Seite von (4.8), der einen der Koeffizienten $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_t$, $\check{\sigma}_x$ oder $\check{\sigma}_t$ enthält.

Um die anderen Terme abschätzen zu können, brauchen wir eine andere Technik. Wir betrachten beispielsweise den Term

$$\int_0^t \int_0^L \hat{\sigma}_{tt}\varphi_{ttt}\varphi_{xx} d\tau dx.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{tt}(t,x) = {} & \sigma_{rrr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xt}^2 + 2\sigma_{rrs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xt}\bar{\psi}_t + \sigma_{rss}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\psi}_t^2 \\ & + \sigma_{rr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xtt} + \sigma_{rs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\psi}_{tt}\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^L |\hat{\sigma}_{tt}\varphi_{ttt}\varphi_{xx}| d\tau dx \leq {} & \sup_{\substack{0\leq x\leq L \\ 0\leq t\leq T}} \frac{1}{2}|\sigma_{rrr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xt}^2| \int_0^t \int_0^L (\varphi_{ttt}^2 + \varphi_{xx}^2) dx d\tau \\ & + \sup_{\substack{0\leq x\leq L \\ 0\leq t\leq T}} |\sigma_{rrs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xt}\bar{\psi}_t| \int_0^t \int_0^L (\varphi_{ttt}^2 + \varphi_{xx}^2) dx d\tau \\ & + \sup_{\substack{0\leq x\leq L \\ 0\leq t\leq T}} \frac{1}{2}|\sigma_{rss}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\psi}_t^2| \int_0^t \int_0^L (\varphi_{ttt}^2 + \varphi_{xx}^2) dx d\tau \\ & + \sup_{\substack{0\leq x\leq L \\ 0\leq t\leq T}} \frac{1}{2}|\sigma_{rr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xtt}| \int_0^t \int_0^L (\varphi_{ttt}^2 + \varphi_{xx}^2) dx d\tau \\ & + \sup_{\substack{0\leq x\leq L \\ 0\leq t\leq T}} \frac{1}{2}|\sigma_{rs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\psi}_{tt}| \int_0^t \int_0^L (\varphi_{ttt}^2 + \varphi_{xx}^2) dx d\tau.\end{aligned}$$

Die Sobolevsche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{0\leq x\leq L \\ 0\leq t\leq T}} \Big\{ & |\sigma_{rrr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xt}^2|, |\sigma_{rrs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xt}\bar{\psi}_t|, |\sigma_{rss}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\psi}_t^2|, \\ & |\sigma_{rr}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\varphi}_{xtt}|, |\sigma_{rs}(\bar{\varphi}_x, \bar{\psi})\bar{\psi}_{tt}|\Big\} \leq B(M),\end{aligned}$$

wobei $B(M)$ eine von M abhängige Konstante bezeichne.

Weil $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{q}), (\varphi, \psi, \theta, q) \in X(M,T)$, erhalten wir

$$\int_0^t \int_0^L |\hat{\sigma}_{tt}\varphi_{ttt}\varphi_{xx}| d\tau dx \leq M^2 B(M) t. \tag{4.32}$$

Diese Methode lässt sich auf alle Terme auf der rechten Seite von (4.8) mit den Koeffizienten $\hat{\sigma}_{tt}$, $\hat{\sigma}_{tx}$, $\hat{\sigma}_{xx}$, $\check{\sigma}_{tt}$, $\check{\sigma}_{tx}$ und $\check{\sigma}_{xx}$ anwenden.

Setzt man (4.31), (4.32) sowie die anderen früher bewiesenen Abschätzungen in (4.8) ein, so ergibt sich

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) + B(M)M^2 t.$$

Unter Berücksichtigung von (4.22) und (4.23), indem wir analog wie beim Beweis des Satzes 4.1 die Terme φ_{xxx}, ψ_{xxx}, θ_{xx}, q_{xx} abschätzen, folgern wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T} \int_0^L \left(\sum_{|\alpha|=1}^{3} \left[(\partial^\alpha \varphi(t,x))^2 + (\partial^\alpha \psi(t,x))^2 \right] + \sum_{|\alpha|=0}^{2} \left[(\partial^\alpha \theta(t,x))^2 + (\partial^\alpha q(t,x))^2 \right] \right) \\
&\leq C \int_0^L \left(\sum_{|\alpha|=1}^{3} \left[(\partial^\alpha \varphi(0,x))^2 + (\partial^\alpha \psi(0,x))^2 \right] + \sum_{|\alpha|=0}^{2} \left[(\partial^\alpha \theta(0,x))^2 + (\partial^\alpha q(0,x))^2 \right] \right) \\
&+ B(M)M^2 t. \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (4.33) lässt sich gegen eine stetig von

$$\|\varphi_0\|_{H^3((0,L))}, \|\psi_0\|_{H^3((0,L))}, \|\varphi_1\|_{H^2((0,L))}, \|\psi_1\|_{H^2((0,L))}, \|\theta_0\|_{H^2((0,L))}, \|q_0\|_{H^2((0,L))}$$

abhängige Funktion abschätzen.

Wegen der Dichtheit von C^∞ in L^2 gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T} \int_0^L \left(\sum_{|\alpha|=1}^{3} \left[(\partial^\alpha \varphi(t,x))^2 + (\partial^\alpha \psi(t,x))^2 \right] \right. \\
&\left. + \sum_{|\alpha|=0}^{2} \left[(\partial^\alpha \theta(t,x))^2 + (\partial^\alpha q(t,x))^2 \right] \right) \leq A(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0) + B(M)M^2 T.
\end{aligned}$$

auch für unsere Lösung zu (4.26)—(4.26), (4.20), (4.21) ohne zusätzliche Regularitätsvoraussetzungen. Dabei ist $A(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)$ eine Konstante. Wähle nun M so groß, dass

$$A(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0) \leq \frac{M^2}{2}$$

gilt, und T so klein, dass $B(M)T \leq \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

Wir ersehen nun, dass $(\varphi, \psi, \theta, q) \in X(M,T)$ ohne zusätzliche Anforderungen an Regularität, d.h. S bildet $X(M,T)$ nach sich, falls T hinreichend klein und M hinreichend groß ist.

Schritt 3: Zeige, dass S eine Kontraktion ist.

Nachdem wir festgelegt haben, dass $S : X(M,T) \to X(M,T)$, kontrollieren wir die restlichen Voraussetzungen, um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können. Wir denken nun daran, dass der Fixpunktsatz verlangt, dass S einen vollständigen metrischen Raum nach sich abbildet. In unserem Fall ist der metrische Raum definiert durch

$$Y = \big\{(\varphi,\psi,\theta,q) \,|\, \varphi_t, \varphi_x, \psi_t, \psi_x, \theta, q \in L^\infty([0,T], L^2((0,L))\big\}$$

mit der Metrik

$$\rho\left((\varphi,\psi,\theta,q),(\bar\varphi,\bar\psi,\bar\theta,\bar q)\right) := \sup_{0\le t\le T} \int_0^L \Big[(\varphi_t - \bar\varphi_t)^2 + (\varphi_x - \bar\varphi_x)^2 + (\psi_t - \bar\psi_t)^2 \\ +(\psi_x - \bar\psi_x)^2 + (\theta - \bar\theta)^2 + (q - \bar q)^2\Big] dx.$$

Offenbar ist $X(M,T) \subset Y$. Zu zeigen ist, dass $X(M,T)$ eine dichte Teilmenge von Y ist. Sei dazu $\{(\varphi_n,\psi_n,\theta_n,q_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X(M,T)$ mit

$$\rho((\varphi_n,\psi_n,\theta_n,q_n),(\varphi,\psi,\theta,q)) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Unter Berücksichtigung von $\{(\varphi_n,\psi_n,\theta_n,q_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X(M,T)$ ergibt sich

$$\sup_{0\le t\le T} \int_0^L \Bigg(\sum_{|\alpha|=1}^{3} \left[(\partial^\alpha \varphi_n(t,x))^2 + (\partial^\alpha \psi_n(t,x))^2\right] \\ + \sum_{|\alpha|=0}^{2} \left[(\partial^\alpha \theta_n(t,x))^2 + (\partial^\alpha q_n(t,x))^2\right] \Bigg) \le M^2.$$

Wir wählen eine Teilfolge von $\{(\varphi_n,\psi_n,\theta_n,q_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, die wir der Einfachheit halber wieder mit $\{(\varphi_n,\psi_n,\theta_n,q_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, so dass

$$\partial^\alpha\varphi, \partial^\alpha\psi \in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 1 \le |\alpha| \le 3, \\ \partial^\alpha\theta, \partial^\alpha q \in L^\infty([0,T], L^2((0,L))), \quad 0 \le |\alpha| \le 2$$

schwach-$*$ in $L^\infty([0,T], L^2((0,L)))$ für $n \to \infty$ konvergieren.

Aufgrund der Semistetigkeit von unten der schwach-$*$-Topologie von $L^\infty([0,T], L^2((0,L)))$ folgern wir, dass die Grenzfunktion $(\varphi^*,\psi^*,\theta^*,q^*) \in X(M,T)$. Andererseits besagt der Sobolevsche Einbettungssatz, dass die ursprüngliche Folge $\{(\varphi_n,\psi_n,\theta_n,q_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y bzgl. ρ konvergente Teilfolge besitzt. Also $\varphi = \varphi^*$, $\psi = \psi^*$, $\theta = \theta^*$, $q = q^*$ und $(\varphi,\psi,\theta,q) \in X(M,T)$, d.h. $X(M,T)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von Y.

Um den Beweis zu beenden, tun wir den letzten Schritt, d.h. wir zeigen, dass S tatsächlich eine Kontraktion von $X(M,T)$ in sich ist, wobei $X(M,T)$ als eine Teilmenge von Y betrachtet wird. Dazu sei

$$(\Phi,\Psi,\Theta,Q),(\bar\Phi,\bar\Psi,\bar\Theta,\bar Q)\in X(M,T)$$

mit

$$S(\Phi,\Psi,\Theta,Q)=(\varphi,\psi,\theta,q),\quad S(\bar\Phi,\bar\Psi,\bar\Theta,\bar Q)=(\bar\varphi,\bar\psi,\bar\theta,\bar q).$$

$\varphi-\bar\varphi,\psi-\bar\psi,\theta-\bar\theta,q-\bar q$ lösen also das System

$$\begin{aligned}
&\rho_1(\varphi-\bar\varphi)_{tt}-\sigma_r(\Phi_x,\Psi)(\varphi-\bar\varphi)_{xx}-\left[\sigma_r(\Phi_x,\Psi)-\sigma_r(\bar\Phi_x,\bar\Psi)\right]\bar\varphi_{xx}\\
&\qquad\qquad-\sigma_s(\Phi_x,\Psi)(\psi-\bar\psi)_x-\left[\sigma_s(\Phi_x,\Psi)-\sigma_s(\bar\Phi_x,\bar\Psi)\right]\bar\psi_x+\mu(\varphi-\bar\varphi)_t=0,\\
&\rho_2(\psi-\bar\psi)_{tt}-b(\psi-\bar\psi)_{xx}+k((\varphi-\bar\varphi)_x+(\psi-\bar\psi))+\gamma(\theta-\bar\theta)_x=0,\\
&\rho_3(\theta-\bar\theta)_t+\kappa(q-\bar q)_x+\gamma(\psi-\bar\psi)_{tx}=0,\\
&\tau_0(q-\bar q)_t+(q-\bar q)+\kappa(\theta-\bar\theta)_x=0.
\end{aligned}\tag{4.34}$$

Setze

$$\begin{array}{rclrcl}
\tilde\varphi &=& \varphi-\bar\varphi, & \tilde\Phi &=& \Phi-\bar\Phi,\\
\tilde\psi &=& \psi-\bar\psi, & \tilde\Psi &=& \Psi-\bar\Psi,\\
\tilde\theta &=& \theta-\bar\theta, & \tilde\Theta &=& \Theta-\bar\Theta,\\
\tilde q &=& q-\bar q, & \tilde Q &=& Q-\bar Q.
\end{array}$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
\chi_1(t,x)&=\begin{cases}\frac{\sigma_r(\Phi_x,\Psi)-\sigma_r(\bar\Phi_x,\Psi)}{\Phi_x-\bar\Phi_x} & \Phi_x\neq\bar\Phi_x\\ \sigma_{rr}(\Phi_x,\Psi) & \Phi_x=\bar\Phi_x\end{cases},\\
\chi_2(t,x)&=\begin{cases}\frac{\sigma_r(\bar\Phi_x,\Psi)-\sigma_r(\bar\Phi_x,\bar\Psi)}{\Psi-\bar\Psi} & \Psi\neq\bar\Psi\\ \sigma_{rs}(\bar\Phi_x,\Psi) & \Psi=\bar\Psi\end{cases},\\
\chi_3(t,x)&=\begin{cases}\frac{\sigma_s(\Phi_x,\Psi)-\sigma_s(\bar\Phi_x,\Psi)}{\Phi_x-\bar\Phi_x} & \Phi_x\neq\bar\Phi_x\\ \sigma_{rs}(\Phi_x,\Psi) & \Phi_x=\bar\Phi_x\end{cases},\\
\chi_4(t,x)&=\begin{cases}\frac{\sigma_s(\bar\Phi_x,\Psi)-\sigma_s(\bar\Phi_x,\bar\Psi)}{\Psi-\bar\Psi} & \Psi\neq\bar\Psi\\ \sigma_{ss}(\bar\Phi_x,\Psi) & \Psi=\bar\Psi\end{cases}.
\end{aligned}$$

Man ersieht leicht, dass $\chi_i(t,x), 1\le i\le 4$ beschränkte stetige Funktionen sind.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\sigma_r(\Phi_x,\Psi)-\sigma_r(\bar\Phi_x,\Psi) &= \sigma_r(\Phi_x,\Psi)-\sigma_r(\bar\Phi_x,\Psi)+\sigma_r(\bar\Phi_x,\Psi)-\sigma_r(\bar\Phi_x,\Psi)\\ &= \chi_1(t)(\Phi_x-\bar\Phi_x)+\chi_2(t)(\Psi-\bar\Psi)=\chi_1(t)\tilde\Phi_x+\chi_2(t)\tilde\Psi,\\ \sigma_s(\Phi_x,\Psi)-\sigma_r(\bar\Phi_x,\Psi) &= \sigma_s(\Phi_x,\Psi)-\sigma_s(\bar\Phi_x,\Psi)+\sigma_s(\bar\Phi_x,\Psi)-\sigma_s(\bar\Phi_x,\Psi)\\ &= \chi_3(t)(\Phi_x-\bar\Phi_x)+\chi_4(t)(\Psi-\bar\Psi)=\chi_3(t)\tilde\Phi_x+\chi_4(t)\tilde\Psi.\end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung kann man (4.35) umschreiben zu

$$\begin{aligned}&\tilde\varphi_{tt}-\sigma_r(\Phi_x,\Psi)\tilde\varphi_{xx}-\chi_1(t,x)\tilde\Phi_x\bar\varphi_{xx}-\chi_2(t,x)\tilde\Psi\bar\varphi_{xx} && (4.35)\\ &\quad-\sigma_s(\Phi_x,\Psi)\tilde\psi_x-\chi_3(t,x)\tilde\Phi_x\bar\psi_x-\chi_4(t,x)\tilde\Psi\bar\psi_x+\mu\tilde\varphi_t=0,\\ &\rho_2\tilde\psi_{tt}-b\tilde\psi_{xx}+k(\tilde\varphi_x+\tilde\psi)+\gamma\tilde\theta_x=0, && (4.36)\\ &\rho_3\tilde\theta_t+\kappa\tilde q_x+\gamma\tilde\psi_{tx}=0, && (4.37)\\ &\tau_0\tilde q_t+\tilde q+\kappa\tilde\theta_x=0, && (4.38)\end{aligned}$$

wobei $\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde\theta,\tilde q$ die Randbedingungen

$$\tilde\varphi_x(t,0)=\tilde\varphi_x(t,L)=\tilde\psi(t,0)=\tilde\psi(t,L)=\tilde q(t,0)=\tilde q(t,L)=0 \quad \text{in } (0,\infty). \tag{4.39}$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}&\tilde\varphi(0,\cdot)=0,\quad \tilde\psi(0,\cdot)=0,\quad \tilde\theta(0,\cdot)=0,\quad \tilde q(0,\cdot)=0\\ &\tilde\varphi_t(0,\cdot)=0,\quad \tilde\psi_t(0,\cdot)=0 \quad \text{in } (0,L)\end{aligned} \tag{4.40}$$

erfüllen.

Wir definieren wie früher das Energie-Funktional

$$E(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde\theta,\tilde q;t):=\frac12\int_0^L\Bigg(\rho_1\varphi_t^2+\sigma_r(\Phi_x,\Psi)\varphi_x^2+\rho_2\psi_t^2+b\psi_x^2+\rho_3\theta^2+\tau_0q^2\Bigg)(t,x)dx.$$

Multiplikation von (4.35) mit $\tilde\varphi_t$, (4.36) mit $\tilde\psi_t$, (4.37) mit $\tilde\varphi$, (4.38) mit $\tilde q$ und partielle Integration liefern uns die Energiegleichheit

$$\begin{aligned}E(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde\theta,\tilde q;t)=\int_0^t\int_0^L\Bigg(&-\partial_x(\sigma_r(\Phi_x,\Psi)\tilde\varphi_x\tilde\varphi_x)+\frac12\partial_t(\sigma_r(\Phi_x,\Psi)\tilde\varphi_x^2)+\sigma_s(\Phi_x,\Psi)\tilde\psi_x\tilde\varphi_t\\ &+\chi_1(t,x)\tilde\Phi_x\bar\varphi_{xx}\tilde\varphi_t+\chi_2(t,x)\tilde\Psi\bar\varphi_{xx}\tilde\varphi_t+\chi_3(t,x)\tilde\Phi_x\bar\psi_x\tilde\varphi_t\\ &+\chi_4(t,x)\tilde\Psi\bar\psi_x\tilde\varphi_t-k(\tilde\varphi_x+\tilde\psi)\tilde\psi_t\Bigg)dxd\tau\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t\int_0^L \mu\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{q}^2 dxd\tau \\
&= \int_0^t\int_0^L \Bigg(- \sigma_{rr}(\Phi_x,\Psi)\Phi_{xx}\tilde{\varphi}_t\tilde{\varphi}_x - \sigma_{rs}(\Phi_x,\Psi)\Psi_x\tilde{\varphi}_t\tilde{\varphi}_x + \sigma_{rr}(\Phi_x,\Psi)\Phi_{xt}\frac{\tilde{\varphi}_x^2}{2} \\
&\qquad + \sigma_{rs}(\Phi_x,\Psi)\Psi_t\frac{\tilde{\varphi}_x^2}{2} + \chi_1(t,x)\tilde{\Phi}_x\bar{\varphi}_{xx}\tilde{\varphi}_t + \chi_2(t,x)\tilde{\Psi}\bar{\varphi}_{xx}\tilde{\varphi}_t \\
&\qquad + \sigma_s(\Phi_x,\Psi)\tilde{\psi}_x\tilde{\varphi}_t + \chi_3(t,x)\tilde{\Phi}_x\bar{\psi}_x\tilde{\varphi}_t + \chi_4(t,x)\tilde{\Psi}\bar{\psi}_x\tilde{\varphi}_t - k(\tilde{\varphi}+\tilde{\psi})\tilde{\psi}_t\Bigg) dxd\tau \\
&-\int_0^t\int_0^L \mu\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{q}^2 dxd\tau. \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

Da (φ,ψ,θ,q), $(\bar{\varphi},\bar{\psi},\bar{\theta},\bar{q})$, (Φ,Ψ,Θ,Q), $(\bar{\Phi},\bar{\Psi},\bar{\Theta},\bar{Q})$ in $X(M,T)$ liegen, impliziert die Sobolevsche Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le L}} \Big\{ |\partial^\alpha\varphi|, |\partial^\alpha\bar{\varphi}|, |\partial^\alpha\Phi|, |\partial^\alpha\bar{\Phi}|, |\partial^\alpha\tilde{\Phi}|, \\
&\qquad |\partial^\alpha\psi|, |\partial^\alpha\bar{\psi}|, |\partial^\alpha\Psi|, |\partial^\alpha\bar{\Psi}|, |\partial^\alpha\tilde{\Psi}| \,:\, 1 \le |\alpha| \le 2 \Big\} \le CM, \\
&\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le L}} \Big\{ |\partial^\alpha\theta|, |\partial^\alpha\bar{\theta}|, |\partial^\alpha\Theta|, |\partial^\alpha\bar{\Theta}|, |\partial^\alpha\tilde{\Theta}|, \\
&\qquad |\partial^\alpha q|, |\partial^\alpha\bar{q}|, |\partial^\alpha Q|, |\partial^\alpha\bar{Q}|, |\partial^\alpha\tilde{Q}| \,:\, 0 \le |\alpha| \le 1 \Big\} \le CM.
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung der Glattheit von σ erhalten wir

$$
\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le L}} \{ |\sigma_s(\Phi_x,\Psi)|, |\sigma_{rs}(\Phi_x,\Psi)|, |\sigma_{ss}(\Phi_x,\Psi)| \} \le B(M),
$$

und daher

$$
\sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le L}} \sum_{i=1}^4 |\chi_i(t,x)| \le B(M).
$$

Wir majorisieren nun alle Terme im ersten Integral auf der rechten Seite von (4.41). Beispielsweise lässt sich der nachstehende Term wie folgt majorisieren

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^t\int_0^L \sigma_{rr}(\Phi_x,\Psi)\Phi_{xx}\tilde{\varphi}_t\tilde{\varphi}_x dxd\tau \right| &\le \sup_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le L}} |\sigma_{rr}(\Phi_x,\Psi)\Phi_{xx}| \int_0^t\int_0^L \left(\frac{\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{\varphi}_x^2}{2} \right) dxd\tau \\
&\le C \cdot B(M) \cdot M \int_0^t\int_0^L \left(\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{\varphi}_x^2 \right) dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Diese Methode funktioniert für alle in $\tilde{\varphi}_t$, $\tilde{\varphi}_x$ quadratischen Terme. Für die Terme mit χ_i brauchen wir einen anderen Ansatz, z.B.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \int_0^L \chi_1(t,x)\tilde{\Phi}_x \bar{\varphi}_{xx}\tilde{\varphi}_t dx d\tau\right| &\leq \int_0^t \left(\int_0^L \tilde{\Phi}_x^2 \chi_1^2(t,x)\bar{\varphi}_{xx}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \tilde{\varphi}_t^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C \cdot T \cdot B(M) M \sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^L \frac{\tilde{\Phi}_x^2}{2} dx\right) \\ &+ \int_0^t \int_0^L \frac{\tilde{\varphi}_t^2}{2} dx d\tau.\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung aller unseren Abschätzungen ergibt

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left(\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}_t^2 + \tilde{\psi}_x^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{q}^2\right) dx \\ &\quad\leq C(M)\cdot T \sup_{0\leq T\leq T}\int_0^L \left(\tilde{\Phi}_t^2 + \tilde{\Phi}_x^2 + \tilde{\Psi}_t^2 + \tilde{\Psi}_x^2 + \tilde{\Theta}^2 + \tilde{Q}^2\right) dx \\ &\quad+ C(M)\int_0^t \int_0^L \left(\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}_t^2 + \tilde{\psi}_x^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{q}^2\right) dx d\tau.\end{aligned}$$

Mit der Gronwallschen Ungleichung schließen wir ferner

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left(\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}_t^2 + \tilde{\psi}_x^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{q}^2\right) dx \\ &\quad\leq \left\{C(M)T \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^L \left(\tilde{\Phi}_t^2 + \tilde{\Phi}_x^2 + \tilde{\Psi}_t^2 + \tilde{\Psi}_x^2 + \tilde{\Theta}^2 + \tilde{Q}^2\right) dx\right\} \exp(C(M)t).\end{aligned}$$

Demnach gilt für $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^L \left(\tilde{\varphi}_t^2 + \tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}_t^2 + \tilde{\psi}_x^2 + \tilde{\theta}^2 + \tilde{q}^2\right) dx \\ &\qquad\leq \lambda \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^L \left(\tilde{\Phi}_t^2 + \tilde{\Phi}_x^2 + \tilde{\Psi}_t^2 + \tilde{\Psi}_x^2 + \tilde{\Theta}^2 + \tilde{Q}^2\right) dx,\end{aligned}$$

falls $T > 0$ hinreichend klein ist. λ bezeichnet dabei eine Konstante mit $0 < \lambda < 1$.

Damit ist die Abbildung $S : X(M,T) \to X(M,T)$ eine Kontraktion, falls M hinreichend groß und T hinreichend klein gewählt sind.

Schritt 4: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes.

Unter Benutzung der von uns bewiesenen Aussagen in Schritten 1, 2, 3 legt der Banachsche Fixpunktsatz fest, dass die Abbildung S einen eindeutigen Fixpunkt in $X(M,T)$

besitzt. Dies impliziert aber, dass (4.26)—(4.26), (4.20), (4.21) eine eindeutige klassische Lösung auf $[0, T]$ hat. Bezeichne mit $[0, T_M)$ das maximale Existenzintervall. Damit ist alles gezeigt. □

Für den Beweis globaler Existenz und exponentieller Stabilität benötigen wir aber höhere Regularität der Lösung. Dafür formulieren wir den nachstehenden Satz und skizzieren dessen Beweis.

Satz 4.3 *(Satz über lokale Existenz und Eindeutigkeit, höhere Regularität)*
Vorgelegt sei die Anfangsrandwertaufgabe (4.16)—(4.21). Es sei $\sigma = \sigma(r,s) \in C^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ mit

$$0 < r_0 \le \sigma_r \le r_1 < \infty \quad (r_0, r_1 > 0), \tag{4.42}$$

$$0 \le |\sigma_s| \le s_0 < \infty \quad (s_0 > 0). \tag{4.43}$$

Die Voraussetzungen des Satzes 4.2 seien erfüllt. Zusätzlich gelte

$$\varphi_{0,xxxx}, \psi_{0,xxxx}, \varphi_{1,xxx}, \psi_{1,xxx}, \theta_{0,xxx}, q_{0,xxx} \in L^2((0,L))$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t^2\varphi(0,\cdot), \partial_t^2\psi(0,\cdot) \in H^2((0,L)), &\quad \partial_t^2\varphi_x(0,\cdot), \partial_t^2\psi(0,\cdot) \in H_0^1((0,L)) \\ \partial_t\theta(0,\cdot), \partial_t q(0,\cdot) \in H^2((0,L)), &\quad \partial_t q(0,\cdot) \in H_0^1((0,L)). \end{aligned}$$

Dann besitzt (4.16)—(4.21) eine eindeutige klassische Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ mit

$$\begin{aligned} \varphi, \psi &\in C^3([0,T) \times [0,L]), \\ \theta, q &\in C^2([0,T) \times [0,L]), \end{aligned}$$

definiert auf einem maximalen Existenzintervall $[0, T)$, $T \le \infty$, so dass für alle $t_0 \in [0, T)$

$$\begin{aligned} \partial^\alpha\varphi, \partial^\alpha\psi &\in L^\infty([0,t_0], L^2((0,L))), \quad 1 \le |\alpha| \le 4, \\ \partial^\alpha\theta, \partial^\alpha q &\in L^\infty([0,t_0], L^2((0,L))), \quad 0 \le |\alpha| \le 3 \end{aligned}$$

gilt. Überdies stimmt dieses Intervall mit dem aus dem Satz 4.2 überein.

Beweis: Für positive M, N, T definiere $Z(M, N, T)$ als die Menge der Funktionen $(\varphi, \psi, \theta, q)$ mit

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0, \\ &\varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1 \quad \text{in } (0,L), \\ &\varphi_x(t,0) = \varphi_x(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \end{aligned}$$

deren verallgemeinerten Ableitungen

$$\sup_{0\le t\le T} \int_0^L \left(\sum_{|\alpha|=1}^{4} \left[(\partial^\alpha \varphi)^2 + (\partial^\alpha \psi)^2 \right] + \sum_{|\alpha|=0}^{3} \left[(\partial^\alpha \theta)^2 + (\partial^\alpha q)^2 \right] \right) dx \le N^2$$

erfüllen.

Wir wählen wieder $(\bar\varphi, \bar\psi, \bar\theta, \bar q) \in Z(M,N,T)$ und versuchen zu zeigen, dass die Lösung von (4.26)—(4.29) auch in $Z(M,N,T)$ liegt. Um dies zu schaffen, erweitern wir unsere bisherige Energie mit drei weiteren Funktionalen

$$\begin{aligned} E_5(t) &:= E(\varphi_{ttt}, \psi_{ttt}, \theta_{ttt}, q_{ttt}; t), \\ E_6(t) &:= E(\varphi_{ttx}, \psi_{ttx}, \theta_{ttx}, q_{ttx}; t), \\ E_7(t) &:= E(\varphi_{txx}, \psi_{txx}, \theta_{txx}, q_{txx}; t). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \sup_{0\le t\le T} \int_0^L \left(\sum_{|\alpha|=1}^{4} \left[(\partial^\alpha \varphi)^2 + (\partial^\alpha \psi)^2 \right] + \sum_{|\alpha|=0}^{3} \left[(\partial^\alpha \theta)^2 + (\partial^\alpha q)^2 \right] \right) dx \\ \le A^*(\varphi_0, \psi_0, \theta_0, q_0, \varphi_1, \psi_1) + B^*(M) T N^2. \end{aligned}$$

Der Term $A^*(\varphi_0, \psi_0, \theta_0, q_0, \varphi_1, \psi_1)$ kann man gegen die L^2-Normen von $\partial^\alpha \varphi_0$, $\partial^\alpha \psi_0$, $\partial^\beta \varphi_1$, $\partial^\beta \psi_1$, $\partial^\beta \theta_0$, $\partial^\beta q_0$ für $|\alpha| = 1,2,3$, $|\beta| = 0,1,2$ und hohe Normen von $\partial_t^2 \varphi(0,\cdot)$, $\partial_t^2 \psi(0,\cdot)$, $\partial_t \theta(0,\cdot)$, $\partial_t q(0,\cdot)$ abschätzen.

Es lässt sich ferner zeigen, dass für hinreichend großes N

$$A^*(\varphi_0, \psi_0, \theta_0, q_0, \varphi_1, \psi_1) \le \frac{N^2}{2}$$

gilt.

Demnach ist $(\varphi, \psi, \theta, q) \in Z(M,N,T)$, falls $B^*(M)T \le \frac{1}{2}$ gilt, d.h. die Wahl von T hängt nur von M und nicht von N ab.

Analog beweisen wir, dass $S(\bar\varphi, \bar\psi, \bar\theta, \bar q) = (\varphi, \psi, \theta, q)$ eine Kontraktion ist. Wir können eine Kontraktionskonstante $C(M)Te^{C(M)T}$ finden, die nur vom M abhängt, sodass S eine kontrahierende Abbildung von $Z(M,N,T)$ in sich ist, falls T hinreichend klein ist. T ist wieder nur von M abhängig.

Damit hat man die lokale Existenz und Eindeutigkeit gezeigt.

Um die Aussage zu gewinnen, dass das neue Existenzintervall mit dem alten übereinstimmt, argumentieren wir wie folgt.

$[0, T')$ bezeichne das neue maximale Existenzintervall. Ist dieses kleiner als das im Satz 4.3 angegebene Intervall, so sind die Voraussetzungen unseres Satzes an jeder Stelle $t \in [0, T')$ erfüllt. Da das Kontraktionsargument nicht von N, sondern von M und $(\varphi, \psi, \theta, q) \in X(M, T)$ abhängig ist, kann man die Lösung ab t außerhalb von $[0, T')$ glatt fortsetzen. Damit ist die Annahme, dass $[0, T')$ maximal ist, falsch. Dies beendet unsere Beweisskizze. $\square$

Bemerkung 4.4 *Wir vermuten, dass man in Analogie zu Thermoelastizitätsgleichungen auch einen allgemeineren Existenzsatz beweisen kann, indem man unter den gleichen Regularitätsvoraussetzungen wie im Satz 4.2 höhere Lösungsregularität bekommt (vgl. [5]).*

Die Beweismethode geht auf Kato zurück und basiert auf einem abstrakten Begriff des CD-Systems, der aus der Halbgruppentheorie stammt.

Wir geben hier die Formulierung dieses allgemeineren Existenzsatzes.

Voraussetzungen 4.5

1. $\sigma \in C^s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
2. $\sigma_{\varphi_x}(x, y) \geq \kappa_0 > 0$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$,

wobei $s \geq \left[\frac{1}{2}\right] + 3 = 3$ eine beliebige, aber feste natürliche Zahl ist.

Die Anfangsdaten mögen

$$\begin{aligned} \psi_0 \in H^s((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), \quad \varphi_{0,x}, q_0, \psi_1 \in H^{s-1}((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), \\ \varphi_{1,x} \in H^{s-2}((0,L)) \cap H_0^1((0,L)), \quad \theta_0 \in H^{s-1}((0,L)) \end{aligned} \tag{4.45}$$

und die Kompatibilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} &\psi_m \in H^{s-m}((0,L)) \cap H_0^1((0,L)) \quad (2 \leq m \leq s-1), \quad \psi_s \in L^2((0,L)), \\ &\varphi_{m,x} \in H^{s-m-1}((0,L)) \cap H_0^1((0,L)) \quad (2 \leq m \leq s-1), \quad \varphi_s \in L^2((0,L)), \\ &q_m \in H^{s-m}((0,L)) \cap H_0^1((0,L)) \quad (1 \leq m \leq s-2), \quad q_{s-1} \in L^2((0,L)), \\ &\theta_m \in H^{s-m}((0,L)) \quad (1 \leq m \leq s-2), \quad \theta_{s-1} \in L^2((0,L)) \end{aligned} \tag{4.46}$$

erfüllen, wobei

$$\varphi_m(\cdot) = \frac{\partial^m \varphi(0,\cdot)}{\partial t^m}, \quad \psi_m(\cdot) = \frac{\partial^m \psi(0,\cdot)}{\partial t^m}, \quad \theta_m(\cdot) = \frac{\partial^m \theta(0,\cdot)}{\partial t^m}, \quad q_m(\cdot) = \frac{\partial^m q(0,\cdot)}{\partial t^m}$$

sich aufgrund von $\varphi_0, \psi_0, \theta_0, q_0$ aus dem System (4.16)—(4.19) ergeben.

Wir erwarten, dass der folgende Existenzsatz für die Anfangsrandwertaufgabe (4.16)—(4.21) gilt:

Satz 4.6 *Vorausgesetzt seien die Voraussetzungen 4.5 sowie die Bedingungen (4.45), (4.46). Dann besitzt (4.16)—(4.21) für hinreichend kleines* $T > 0$ *eine eindeutige Lösung*

$$\varphi, \psi \in \bigcap_{m=0}^{s} C^m([0,T], H^{s-m}((0,L))),$$
$$\theta, q \in \bigcap_{m=0}^{s-2} C^m([0,T], H^{s-m}((0,L))) \cap C^{s-1}([0,T], L^2((0,L))).$$

4.2 Existenz der eindeutigen globalen Lösung

Wie im Kapitel 3 schreiben wir (4.16)—(4.21) in ein System erster Ordnung für $V = (\varphi_t, \psi_x, \psi_t, \varphi_x + \psi, \theta, q)$ um und erhalten

$$V_t = AV + F(V, V_x), \quad V|_{t=0} = V_0, \tag{4.47}$$

wobei

$$\begin{aligned} F(V, V_x) &= (0, \sigma_x(\varphi_x, \psi) - k(\varphi_x + \psi)_x, 0, 0, 0, 0)' \\ &= (0, \sigma_{\varphi_x}(\varphi_x, \psi)\varphi_{xx} - k\varphi_{xx} + \sigma_\psi(\varphi, \psi)\psi_x - k\psi_x, 0, 0, 0, 0)' \\ &= (0, \sigma_{\varphi_x}(V_x^1, V^3)V_{xx}^3 - kV_{xx}^1 + \sigma_\psi(V_x^1, V_3)V_x^3 - kV_x^3, 0, 0, 0, 0)'. \end{aligned}$$

Für die Nichtlinearität $\sigma \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei

$$\sigma_{\varphi_x}(0,0) = \sigma_\psi(0,0) = k \tag{4.48}$$

und

$$\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(0,0) = \sigma_{\varphi_x\psi}(0,0) = \sigma_{\psi\psi}(0,0) \tag{4.49}$$

vorausgesetzt.

Die Voraussetzung (3.2)

$$\int_0^L \varphi_0(t,x)dx = \int_0^L \varphi_1(t,x)dx = 0$$

impliziert

$$\int_0^L \varphi(t,x)dx \equiv 0.$$

Um das zu beweisen, setze wie bisher $g(t) := \int_0^L \varphi(t,x)dx$.

Die Gleichung (4.16) liefert dann

$$\begin{aligned} &\rho_1 g''(t) + \sigma(\varphi_x(t,x), \psi(t,x))|_{x=0}^{x=L} + \mu g'(t) = 0 \Rightarrow \\ &\rho_1 g''(t) + \sigma(0,0) - \sigma(0,0) + \mu g'(t) = 0 \Rightarrow \\ &\rho_1 g''(t) + \mu g'(t) = 0. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $g(0) = g'(0) = 0$ erhält man die Behauptung.

Überdies gilt

$$F(V, V_x)(t, \cdot) \in \mathcal{H},$$

denn

$$\begin{aligned} &\int_0^L F^1(V, V_x)(t,x)dx = \sigma(\varphi_x(t,x), \psi(t,x))|_{x=0}^{x=L} - k(\varphi_x + \psi)|_{x=0}^{x=L} = 0, \\ &\int_0^L F^2(V, V_x)(t,x)dx = \int_0^L 0\, dx = 0 \end{aligned}$$

und

$$\sigma_{\varphi_x}(\varphi_x, \psi)\varphi_{xx} - k\varphi_{xx} + \sigma_\psi(\varphi, \psi)\psi_x - k\psi_x \in L^2((0,L)),$$

falls $V \in \mathcal{H}_2$.

Ist $V \in \mathcal{H}_3$, so gilt zusätzlich

$$\sigma_{\varphi_x}(\varphi_x, \psi)\varphi_{xx} - k\varphi_{xx} + \sigma_\psi(\varphi, \psi)\psi_x - k\psi_x \in H^1((0,L)),$$

demnach ist

$$F(V, V_x)(t, \cdot) \in D(A). \tag{4.50}$$

Nach dem Duhammelschen Prinzip besitzt dann die lokale Lösung die Darstellung

$$V(t) = e^{tA}V_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}F(V, V_x)(\tau)dr. \tag{4.51}$$

Beim Beweis unseres Satzes wollen wir die Perturbationsmethode verwenden. Wir bemerken, dass diese Methode auch auf nichtlineare Cauchy-Probleme für thermoelastische Systeme anwendbar ist. Man vergleiche z.B. [10].

Wir setzen voraus, dass die Anfangsdaten in der $\mathcal{H}_2$-Norm klein sind, d.h.

$$\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} < \delta.$$

Überdies sei auch die Beschränktheit von V_0 in der $\mathcal{H}_3$-Norm vorausgesetzt, d.h. es gelte

$$\|V_0\|_{\mathcal{H}_3} < \mu$$

für ein $\mu > 1$.

Wegen der Stetigkeit der Lösung existieren Intervalle $[0, T^0]$ und $[0, T^1]$ entsprechend, für die

$$\begin{aligned} \|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} &\leq \delta, \quad \forall t \in [0, T^0], \\ \|V(t)\|_{\mathcal{H}_3} &\leq \mu, \quad \forall t \in [0, T^1] \end{aligned}$$

gilt.

Sei $d > 1$ eine später zu wählende Konstante. Wir definieren positive Zahlen T_M^1 und T_M^0 als die größten Intervalllängen, für welche die lokale Lösung

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq 2c_1\delta, \quad \forall t \in [0, T_M^0]$$

bzw.

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3} \leq d\mu, \quad \forall t \in [0, T_M^1]$$

erfüllt, wobei $c_1 > 0$ die Konstante aus der Ungleichung (3.11)

$$\left\|e^{tA}V_0\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq c_1\|V\|_{\mathcal{H}_2}$$

bezeichne.

Unter diesen Voraussetzungen bekommen wir die nachstehende Abschätzung an die hohen Energien.

Lemma 4.7 *Es gibt positive Konstanten c_2, c_3, die weder von V_0 noch T unabhängig sind, so dass die im Satz 4.3 angegebene lokale Lösung für alle $t \in [0, T_M^1]$ die Ungleichung*

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq c_2\|V_0\|_{\mathcal{H}^3}^2 e^{c_3\sqrt{d\mu}\int_0^t \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} d\tau}$$

erfüllt.

Beweis: Wir schreiben (4.16) um zu

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu\varphi_t = \tilde{b}(\varphi_x, \psi)\varphi_{xx} + \tilde{d}(\varphi_x, \psi)\psi_x \tag{4.52}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\varphi_x, \psi) &:= \sigma_{\varphi_x}(\varphi_x, \psi) - k = \sigma_{\varphi_x}(\varphi_x, \psi) - \sigma_{\varphi_x}(0, 0), \\ \tilde{d}(\varphi_x, \psi) &:= \sigma_\psi(\varphi_x, \psi) - k = \sigma_\psi(\varphi_x, \psi) - \sigma_\psi(0, 0). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Multiplikation von (4.16)—(4.19) in $L^2((0,L))$ mit φ_t, ψ, θ, q entsprechend liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\varphi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2 dx + \int_0^L \mu\varphi_t^2 + q^2 dx \\
&= \int_0^L \tilde{b}(\varphi_x,\psi)\varphi_{xx}\varphi_t + \tilde{d}(\varphi_x,\psi)\psi_x\varphi_t dx \\
&= \int_0^L \tilde{d}(\varphi_x,\psi)\psi_x\varphi_t dx + \tilde{b}(\varphi_x,\psi)\varphi_x\varphi_t|_{x=0}^{x=L} \\
&- \int_0^L \left(\partial_x\tilde{b}(\varphi_x,\psi)\right)\varphi_x\varphi_t dx - \int_0^L \tilde{b}(\varphi_x,\psi)\varphi_x\varphi_{xt}dx \\
&= \int_0^L \tilde{d}(\varphi_x,\psi)\psi_x\varphi_t dx - \int_0^L \left(\partial_x\tilde{b}(\varphi_x,\psi)\right)\varphi_x\varphi_t dx - \int_0^L \tilde{b}(\varphi_x,\psi)\varphi_x\varphi_{xt}dx \\
&\equiv I_1 + I_2 + I_3. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Für die weiteren Abschätzungen benötigen wir die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty([0,L])} &= \left(\|u\|^2_{L^\infty([0,L])}\right)^{1/2} = \left(\|u^2\|_{L^\infty([0,L])}\right)^{1/2} \le c\left(\|u^2\|_{W^{1,2}((0,L))}\right)^{1/2} \\
&\le c\left(\|u\|_{L^2((0,L))}\|u\|_{L^2((0,L))} + 2\langle u, u_x\rangle_{L^2((0,L))}\right)^{1/2} \\
&\le c\left(\|u\|_{L^2((0,L))}\|u\|_{L^2((0,L))} + 2\|u\|_{L^2((0,L))}\|u\|_{H^1((0,L))}\right)^{1/2} \\
&\le c\left(\|u\|_{L^2((0,L))}\|u\|_{H^1((0,L))}\right)^{1/2}. \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit vernachlässigen wir im folgenden die Terme niedrigerer Ordnung (T.n.O.) und schreiben $\tilde{b}(\varphi_x)$ statt $\tilde{b}(\varphi_x,\psi)$ und $\tilde{d}(\varphi_x)$ statt $\tilde{d}(\varphi_x,\psi)$. $\tilde{b}'$ und $\tilde{d}'$ bezeichnen dabei die Ableitung bezüglich der ersten Variablen.

Weil $\tilde{d} \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\tilde{d}(0) = \tilde{d}'(0) = 0$ ist, ergibt sich nach der Taylorschen Formel

$$\tilde{d}(\varphi_x) = \varphi_x^2\tilde{d}''(\theta\varphi_x) = \varphi_x^2\sigma_{\psi\varphi_x\varphi_x}(\vartheta\varphi_x) \qquad (4.56)$$

mit $\vartheta \in (0,1)$.

Mithilfe von (4.55) und (4.56) erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le c\int_0^L |\varphi_x^2\sigma_{\psi\varphi_x\varphi_x}(\vartheta\varphi_x)\psi_x\varphi_t|dx \\
&\le c\|\sigma_{\psi\varphi_x\varphi_x}(\vartheta\varphi_x)\psi_x\|_{L^\infty([0,L])}\|\varphi_x\|_{L^\infty([0,L])}\int_0^L \varphi_x^2 + \varphi_t^2 dx \\
&\le c\|\varphi_x\|^{1/2}_{L^2((0,L))}\|\varphi_x\|^{1/2}_{H^1((0,L))}\int_0^L \varphi_x^2 + \varphi_t^2 dx \\
&\le c\|V\|^{1/2}_{\mathcal{H}_2}\|V\|^{1/2}_{\mathcal{H}_3}\int_0^L \varphi_x^2 + \varphi_t^2 dx, \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

wobei $c > 0$ eine von V^0 und T unabhängige Konstante bezeichne.

I_2 lässt sich ferner wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \frac{1}{2}\left\|\tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xx}\right\|_{L^\infty([0,L])}\int_0^L \varphi_x^2 + \varphi_t^2 dx\\ &\leq c\|\varphi_{xx}\|^{1/2}_{L^2((0,L))}\|\varphi_{xx}\|^{1/2}_{H^1((0,L))}\int_0^L \varphi_x^2 + \varphi_t^2 dx\\ &\leq c\|V\|^{1/2}_{\mathcal{H}_2}\|V\|^{1/2}_{\mathcal{H}_3}\int_0^L \varphi_x^2 + \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Weiter gilt

$$I_3 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \left(\partial_t \tilde{b}(\varphi_x)\right)\varphi_x^2 dx \equiv I_{3,1} + I_{3,2}.$$

Der Term $I_{3,2}$ kann ebenso wie I_2 in (4.58) abgeschätzt werden:

$$|I_{3,2}| \leq c\|V\|^{1/2}_{\mathcal{H}_2}\|V\|^{1/2}_{\mathcal{H}_3}\int_0^L \varphi_x^2 dx. \tag{4.59}$$

Wir integrieren (4.54) über t und erhalten

$$E(t) + \int_0^t\int_0^L \mu\varphi_t^2 + q^2 dx d\tau = \int_0^t I_1(\tau) + I_2(\tau) + I_{3,1}(\tau) + I_{3,2}(\tau) d\tau.$$

Es gilt

$$\int_0^t I_{3,1}(\tau)d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)|_{t=0}\varphi_x^2|_{t=0} dx.$$

Weil $\tilde{b}(\varphi_x)$ stetig ist und $\tilde{b}(0) = 0$ gilt, muss $\left|\tilde{b}(\varphi_x)\right| \leq \varepsilon := \frac{1}{2}\min\left\{k, bc_P^{-1}\right\}$ für hinreichend kleines δ gelten, wobei $c_P := \frac{L^2}{\pi^2}$ die Poincarésche Konstante ist.

Ist $\delta > 0$ so gewählt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L \left(\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_x^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2\right)dx &\leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(\varepsilon\varphi_x^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2\right)dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(2\varepsilon(\varphi_x+\psi)^2 + 2\varepsilon c_P^{-1}\psi_x^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2\right)dx\\ &\leq \frac{3}{2}\int_0^L k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2 dx.\end{aligned}$$

Analog bekommt man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^L \left(\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_x^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2\right) dx &\geq \frac{1}{2}\int_0^L \left(\varepsilon\varphi_x^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2\right) dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^L \left(\varepsilon(\varphi_x^2+\psi)^2 + \varepsilon c_P^{-1}\psi_x^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2\right) dx \\
&\geq \frac{1}{4}\int_0^L k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2 dx.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$c_1 E(t) \leq E(t) + \frac{1}{2}\int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_x^2 dx \leq c_2 E(t)$$

für gewisse Konstanten $c_1, c_2 > 0$.

Demnach ist

$$\begin{aligned}
E(t) &+ \int_0^t \int_0^L \mu\varphi_t^2 + q^2 dx d\tau \\
&\leq c\left(\frac{1}{2}\int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)|_{t=0}\varphi_x^2|_{t=0} dx + \int_0^t I_1(\tau) + I_2(\tau) + I_{3,2}(\tau) d\tau\right). \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

Zusammenfassung von (4.57)—(4.59), (4.60) ergibt schließlich

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq c\|V_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \int_0^t c\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_1}^2 d\tau. \qquad (4.61)$$

Für die Abschätzungen an die höherer Ordnung Ableitungen von V differenzieren wir die Differentialgleichung (4.16) bzgl. t und bekommen mit Vernachlässigung einiger Terme niedrigerer Ordnung

$$\rho_1\varphi_{ttt} - k(\varphi_{xt}+\psi_t)_x + \mu\varphi_{tt} = \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xt}\varphi_{xx} + \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{txx} + T.n.O. \qquad (4.62)$$

Differenzieren der Gleichungen (4.17)—(4.19) nach t und Multiplikation differenzierter Gleichungen mit φ_{tt}, ψ_{tt}, θ_t und q_t in $L^2((0,L))$ ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_{tt}^2 + \rho_2\psi_{tt}^2 + k(\varphi_{xt}+\psi_t)^2 + b\varphi_{xt}^2 + \rho_3\theta_t^2 + \tau_0 q_t^2 dx + \int_0^L \mu\varphi_{tt}^2 + q_t^2 dx \\
= \int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{txx}\varphi_{tt} dx + \int_0^L \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xt}\varphi_{xx}\varphi_{tt} + T.n.O. \\
\equiv I_4 + I_5 + T.n.O. \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

Wir können I_5 wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}|I_5| &\leq c\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty([0,1])} \int_0^L \varphi_{xt}^2 + \varphi_{tt}^2 dx \\ &\leq c\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^L \varphi_{tt}^2 + \varphi_{tx}^2 dx.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$I_4 = -\int_0^L \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xx}\varphi_{tx}\varphi_{tt} dx - \int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{tx}\varphi_{ttx} dx \equiv I_{4,1} + I_{4,2}.$$

$I_{4,1}$ lässt sich genauso wie I_5 abschätzen

$$\begin{aligned}|I_{4,1}| &\leq c\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty([0,1])} \int_0^L \varphi_{tx} + \varphi_{tt} dx \\ &\leq c\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^L \varphi_{tt}^2 + \varphi_{tx}^2.\end{aligned}$$

Somit schließen wir

$$I_{4,2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{tx}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{tx}\varphi_{tx}^2 dx \equiv I_{4,2,1} + I_{4,2,2}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}|I_{4,2,2}| &\leq c\|\varphi_{tx}\|_{L^\infty([0,1])} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx \leq c\|\varphi_{tx}\|_{L^2((0,L))}^{1/2} \|\varphi_{tx}\|_{H^1((0,L))}^{1/2} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx \\ &\leq c\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx.\end{aligned}$$

Den Term $I_{4,2,1}$ können wir ähnlich wie den Term $I_{3,1}$ in (4.60) behandeln. Unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen können wir aber φ_{xx}, ψ_{xx}, θ_x und q_x gegen die Terme im ersten Integral auf der linken Seite von (4.63) abschätzen. Damit bekommen wir insgesamt

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq c\|V_0\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \int_0^t c\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^2 d\tau. \tag{4.64}$$

Differenziert man (4.16) nochmal bzgl. t, so bekommt man mit Vernachlässigung einiger Terme niedrigerer Ordnung

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tttt} - k(\varphi_{xtt} + \psi_{tt})_x + \mu\varphi_{ttt} &= \tilde{b}''(\varphi_x)\varphi_{xt}^2\varphi_{xx} + \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xtt}\varphi_{xx} \\ &\quad + 2\tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xt}\varphi_{xxt} + \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{ttxx} dx + T.n.O.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Schließlich leiten wir (4.17)—(4.19) nochmal nach t ab und multiplizieren alle differenzierten Gleichungen mit φ_{tt}, ψ_{tt}, θ_t bzw. q_t in $L^2((0,L))$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_{ttt}^2 + \rho_2\psi_{ttt}^2 + k(\varphi_{xtt}+\psi_{tt})^2 + b\varphi_{xtt}^2 + \rho_3\theta_{tt}^2 + \tau_0 q_{tt}^2 dx + \int_0^L \mu\varphi_{ttt}^2 + q_{tt}^2 dx\\
&\quad = \tilde{b}''(\varphi_x)\varphi_{xt}^2\varphi_{xx}\varphi_{ttt} + \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xtt}\varphi_{xx}\varphi_{ttt} + 2\tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xt}\varphi_{xxt}\varphi_{ttt} + \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{ttxx}\varphi_{ttt}dx + T.n.O.\\
&\quad = I_6 + I_7 + I_8 + I_9.
\end{aligned}\tag{4.66}$$

Trivialerweise folgert man

$$|I_6| + |I_7| + |I_8| \le c\|V\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|V\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^L \varphi_{xt}^2 + \varphi_{ttt}^2 + \varphi_{xtt}^2 + \varphi_{xxt}^2 dx,$$

indem man den Term I_6 gegen

$$\begin{aligned}
|I_6| &\le c\|\tilde{b}''(\varphi_x)\varphi_{tx}\varphi_{xx}\|_{L^\infty([0,1])}\int_0^L \varphi_{xt}^2 + \varphi_{ttt}^2 dx\\
&\le c\|\varphi_{tx}\|_{L^\infty([0,1])}\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty([0,1])}\int_0^L \varphi_{xt}^2 + \varphi_{ttt}^2 dx\\
&\le c\underbrace{\|\varphi_{tx}\|_{H^1((0,L))}}_{\le\mu}\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty([0,1])}\int_0^L \varphi_{xt}^2 + \varphi_{ttt}^2 dx\\
&\le c\|V\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|V\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^L \varphi_{xt}^2 + \varphi_{ttt}^2 dx
\end{aligned}$$

abschätzt. Andere Terme lassen sich genauso wie früher behandeln.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
I_9 &= -\int_0^L \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xx}\varphi_{ttx}\varphi_{ttt}dx - \int_0^L \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{ttx}\varphi_{ttx}dx\\
&= -\int_0^L \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xx}\varphi_{ttx}\varphi_{ttt}dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{tx}\varphi_{ttx}^2 dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L b(\varphi_x)\varphi_{ttx}^2 dx\\
&= I_{9,1} + I_{9,2} + I_{9,3}.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$|I_{9,1}| + |I_{9,2}| \le c\|V\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|V\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^L \varphi_{ttt}^2 + \varphi_{ttx}^2 dx.$$

Intergiert man die Gleichung (4.66) über t, so kann man den Term $\int_0^t I_{9,3}(\tau)d\tau$ in die Abschätzung genauso inkorporieren, wie das in (4.60) gemacht wurde.

Weil φ_{xxx}, ψ_{xxx}, φ_{xxt}, ψ_{xxt}, θ_{xx}, θ_{tx}, q_{xx}, q_{tx} sich gegen andere Terme abschätzen lassen, bekommen wir letztendlich als Zusammenfassung unserer Abschätzungen

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq c\|V_0\|_{\mathcal{H}_3}^2 + \int_0^t c\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^2 d\tau,$$

was nach dem Gronwallschen Lemma

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq c_2\|V_0\|_{\mathcal{H}_3}^2 \exp\left\{c_3\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3}^2\right\}$$

sofort ergibt.

Nutzt man nun aus, dass

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|V(t)\|_{\mathcal{H}_3} \leq d\mu \quad \forall t \in [0, T_M^1]$$

gilt, so bekommt man

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq c_2\|V_0\|_{\mathcal{H}^3}^2 \exp\left\{c_3\sqrt{d\mu}\int_0^t \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} dr\right\}.$$

für zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$, die weder von V_0 noch von T abhängen.

Damit haben wir alles gezeigt. □

Wir möchten nun eine gewichtete a priori Abschätzung für $\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2}$ beweisen. Unter Verwendung der Darstellung (4.51) und des Satzes 3.5 über die exponentielle Stabilität im Linearen resultiert die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} &\leq \left\|e^{tA}V_0\right\|_{\mathcal{H}_2} + \int_0^t \left\|e^{(t-\tau)A}F(V,V_x)(\tau)\right\|_{\mathcal{H}_2} d\tau \\ &\leq c_1 e^{-\alpha t}\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} + c_1\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\left\|F(V,V_x)\right\|_{\mathcal{H}_2} d\tau. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Da F nach (4.50)

$$F(V,V_x)(\tau) \in D(A) \subset \mathcal{H}_2, \quad \tau \geq 0$$

erfüllt, kann der Satz 3.5 auf $F(V,V_x)$ für $s = 2$ angewendet werden.

Mit den Voraussetzungen (4.48) und (4.49) an σ (und daher an $\tilde{b}(\varphi_x)$ und $\tilde{d}(\varphi_x)$ können wir die Nichtlinearität folgendermaßen charakterisieren.

Satz 4.8 *Es gibt eine positive Konstante c, sodass für alle $W \in \mathcal{H}_3$ mit $\|W\|_{\mathcal{H}_2} < C < \infty$ die Ungleichung*

$$\|F(W,W_x)\|_{\mathcal{H}_2} \leq c\|W\|_{\mathcal{H}_2}^2\|W\|_{\mathcal{H}_3}$$

gilt.

Beweis: Seien $\varphi := W^1$ und $\psi := W^3$. Dann folgt

$$F(W, W_x) = (0, \tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{xx} + \tilde{d}(\varphi_x)\psi_x, 0, 0, 0, 0)',$$

woraus sich

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{xx}\|_{H^1((0,L))} \leq c\big(&\|\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{xx}\|_{L^2((0,L))} + \|\tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xx}^2\|_{L^2((0,L))} \\ &+ \|\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{xxx}\|_{L^2((0,L))}\big) \end{aligned} \tag{4.68}$$

ergibt.

Da $\tilde{b}(\varphi_x) = \sigma_{\varphi_x}(\varphi_x) - \sigma_{\varphi_x}(0)$ zweimal stetig differenzierbar ist, liefert uns die Taylorsche Formel

$$\tilde{b}(\varphi_x) = \tilde{b}(0) + \tilde{b}'(0)\varphi_x + \varphi_x^2\tilde{b}''(\vartheta\varphi_x) = \varphi_x^2\sigma_{\varphi_x\varphi_x\varphi_x}(\vartheta\varphi_x)$$

für ein $\vartheta \in (0, 1)$.

Ferner ersieht man leicht

$$\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x\varphi_x}(\vartheta\varphi_x)\|_{L^\infty([0,L])} \leq c,$$

falls $\|\varphi_x\|_{L^\infty([0,L])} \leq \|V\|_{\mathcal{H}_2} < C < \infty$, da $\sigma_{\varphi_x\varphi_x\varphi_x}$ stetig.

Weil $\tilde{b}'(0) = 0$ und $\tilde{b}'$ stetig ist, gilt die Ungleichung

$$\|b'(\varphi_x)\|_{L^\infty([0,L])} \leq \|\varphi_x\|_{L^\infty([0,L])}\|b''(\theta\varphi_{xx})\|_{L^\infty([0,L])} \leq c\|\varphi_x\|_{L^\infty([0,L])}.$$

Damit können wir die Terme auf der rechten Seite von (4.68) wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{xx}\|_{L^2((0,L))} &= \|\varphi_x^2\sigma_{\varphi_x\varphi_x\varphi_x}(\vartheta\varphi_x)\varphi_{xx}\|_{L^2((0,L))} \leq c\|\varphi_x^2\varphi_{xx}\|_{L^2((0,L))} \\ &\leq c\|V\|_{\mathcal{H}_2}^2\|V\|_{\mathcal{H}_3}, \\ \|\tilde{b}'(\varphi_x)\varphi_{xx}^2\|_{L^2((0,L))} &\leq c\|\varphi_x\|_{L^\infty([0,L])}\|\varphi_{xx}^2\|_{L^2((0,L))} \leq \|\varphi_x\|_{\mathcal{H}_1}\|\varphi_{xx}^2\|_{L^2((0,L))} \\ &\leq c\|V\|_{\mathcal{H}_2}^2\|V\|_{\mathcal{H}_3}, \\ \|\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{xxx}\|_{L^2((0,L))} &= \|\varphi_x^2\sigma_{\varphi_x\varphi_x\varphi_x}(\vartheta\varphi_x)\varphi_{xxx}\|_{L^2((0,L))} \leq c\|\varphi_x^2\varphi_{xxx}\|_{L^2((0,L))} \\ &\leq c\|V\|_{\mathcal{H}_2}^2\|V\|_{\mathcal{H}_3}. \end{aligned}$$

Somit bekommen wir insgesamt

$$\|\tilde{b}(\varphi_x)\varphi_{xx}\|_{H^1((0,L))} \leq c\|V\|_{\mathcal{H}_2}^2\|V\|_{\mathcal{H}_3}.$$

Da $\tilde{d}(\varphi_x)\psi_x$ sich vollkommen analog abschätzen lässt, haben wir den Satz bewiesen. □

Jetzt können wir die nachstehende a priori Abschätzung beweisen.

Satz 4.9 *Es sei*

$$M_2(t) := \sup_{0\leq\tau\leq t} (e^{\alpha\tau}\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2})$$

für $t \in [0, T_M^1]$ *definiert.*

Dann existieren $M_0 > 0$ *und* $\delta > 0$ *derart, dass*

$$M_2(t) \leq M_0 < \infty$$

gilt, falls $\|V_0\|_{\mathcal{H}_3} < \mu$ *und* $\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} < \delta$,

M *ist dabei von* T_M^1 *und* V_0 *unabhängig.*

Beweis: Nehmen wir an, dass $\|V\|_{\mathcal{H}_2}$ beschränkt ist.

Unter Verwendung des Satzes 4.8 ergibt sich aus (4.67)

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq c_1 e^{-\alpha t}\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} + c\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|V(\tau)\|\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_3} d\tau.$$

Mit Hilfe von Lemma (4.7) geht dies über in

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq c_1\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} e^{-\alpha t} + c\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|V(\tau)\|^2_{\mathcal{H}_2}\|V_0\|_{\mathcal{H}_3} e^{c\sqrt{d\mu}\int_0^\tau \|V(r)\|^{1/2}_{\mathcal{H}_2} dr} d\tau. \tag{4.69}$$

Ist nun $\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \delta$ für ein im folgenden zu bestimmendes $\delta > 0$, so gilt für $t \in [0, \min\{T_m^0, T_m^1\}]$

$$\begin{aligned}
\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} &\leq c_1\delta e^{-\alpha t} + c\delta^{1/2}\mu e^{c\sqrt{d\mu}\int_0^t \|V(\tau)\|^{1/2}_{\mathcal{H}_2} d\tau} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|V(\tau)\|^{3/2}_{\mathcal{H}_2} d\tau \\
&\leq c_1\delta e^{-\alpha t} + c\delta^{1/2}\mu e^{c\sqrt{d\mu}\int_0^t e^{-\alpha\tau/2}e^{\alpha\tau/2}\|V(\tau)\|^{1/2}_{\mathcal{H}_2} d\tau} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}(e^{-\alpha\tau}e^{\alpha\tau}\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2})^{3/2} d\tau \\
&\leq c_1\delta e^{-\alpha t} + c\delta^{1/2}\mu e^{cte^{-\alpha t/2}\sqrt{d\mu}\sqrt{M(t)}} M_2(t)^{3/2}\int_0^t e^{-(\alpha-\tau)}e^{-3\alpha\tau/3} d\tau \\
&\leq c_1\delta e^{-\alpha t} + c\delta^{1/2}\mu e^{\sqrt{d\mu}\sqrt{M(t)}} M_2(t)^{3/2}\int_0^t e^{-(\alpha-\tau)}e^{-3\alpha\tau/3} d\tau,
\end{aligned}$$

woraus sich

$$M_2(t) \leq c_1\delta + c\delta^{1/2}\mu e^{c\sqrt{d\mu}\sqrt{M_2(t)}} M_2(t)^{3/2} \sup_{0\leq t<\infty} e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}e^{-3\alpha\tau/2} d\tau$$

nach der Multiplikation mit $e^{\alpha t}$ offensichtlich ergibt.

Wegen

$$\sup_{0\le t<\infty} e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}e^{-3\alpha\tau/2}d\tau = \sup_{0\le t<\infty} -\frac{2}{5}\frac{e^{-5/2\alpha\tau}}{\alpha}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \le c < \infty$$

folgt

$$M_2(t) \le c_1\delta + c\delta^{1/2}\mu M_2(t)^{3/2}e^{c\sqrt{d\mu}\sqrt{M_2(t)}}.$$

Wir definieren die Funktion

$$f(x) := c_1\delta + c\delta^{1/2}\mu x^{3/2}e^{c\sqrt{d\mu}\sqrt{x}} - x.$$

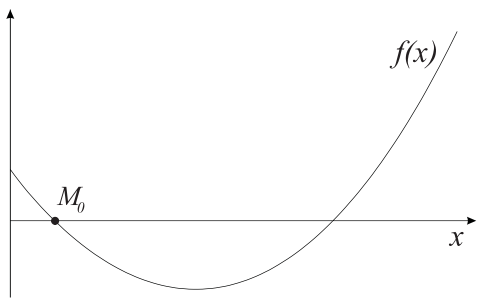


Abbildung: die Funktion f und ihre Nullstelle M_0

Es gilt $f(0) = c_1\delta$ und $f'(0) = -1$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\xi)d\xi = c_1\delta + \int_0^x f'(\xi)d\xi.$$

Für hinreichend kleine x gilt $f'(\xi) \le -\frac{1}{2}$. Dies impliziert aber

$$f(x) \le c_1\delta - \frac{1}{2}x.$$

Wählt man nun $\delta < \delta_1 := \frac{x}{2c_1}$, so ist $f(x) < 0$. Weil f stetig ist und $f(0) > 0$ und $f(x) < 0$ gilt, muss f im Intervall $[0, x]$ eine Nullstelle haben. Sei M_0 die kleinste Nullstelle von f in $[0, x]$. Diese existiert, da $f^{-1}(\{0\}) \cap [0, x]$ kompakt ist.

Wir wählen nun $\delta_2 < \delta_1$ so klein, dass für $M_2(0) = \|V_0\|_{\mathcal{H}_2} < \delta_2$

$$M_2(t) \le M_0$$

erfüllt ist. Dies ist auf Grund der Stetigkeit von $M_2(t)$ möglich.

Damit ist $M_2(t)$ nach oben durch M_0 für alle $t \in [0, \min\{T_M^0, T_M^1\}]$ beschränkt.

Ist $T_M^0 \geq T_M^1$, so ergibt sich sofort die Behauptung für $\delta < \delta_2$ und $M_0(\delta_1) < \infty$.

Sonst müsste $T_M^0 < T_M^1$ gelten. Beachte, dass für hinreichend kleine $\delta_3 > 0$

$$f(2c_1\delta) = c\mu c_1^{3/2} e^{c\sqrt{d\mu}\sqrt{c_1\delta}} \delta^2 - c_1\delta < 0$$

für $\delta < \delta_3$ gilt.

Wähle nun δ_3 so klein, dass die obige Ungleichung gültig ist.

Damit ergibt sich

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3} \leq M_2(t) \leq M_0 < 2c_1\delta$$

für $\delta < \min\{\delta_2, \delta_3\}$.

Dies steht aber im Widerspruch zur Maximalität von T_M^0. Deshalb muss $T_M^0 \geq T_M^1$ gelten, d.h. die Behauptung gilt für $\delta < \min\{\delta_2, \delta_3\}$ und $M_0(\delta_1) < \infty$. □

Jetzt können wir den Satz über globale Existenz und exponentielle Stabilität formulieren und beweisen.

Satz 4.10 *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4.3 erfüllt. Zusätzlich gelte*

$$\int_0^L \varphi_0(x)dx = \int_0^L \varphi_1(x)dx = \int_0^L \theta(x)dx.$$

Sei $\mu > 1$ beliebig, aber fest. Dann gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass falls $\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} < \delta$ und $\|V_1\|_{\mathcal{H}_3} < \mu$ gilt, existiert eine eindeutige globale Lösung $(\varphi, \psi, \theta, q)$ zu (4.16)—(4.21) mit

$$\begin{aligned} \varphi, \psi &\in C^3([0,\infty) \times [0,L]), \\ \theta, q &\in C^2([0,\infty) \times [0,L]). \end{aligned}$$

Überdies existiert eine Konstante $C_0(V_0) > 0$, so dass für alle $t \geq 0$

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq C_0 e^{-\alpha t}$$

mit $\alpha > 0$ aus dem Satz 3.5 gilt.

Beweis: Der Satz 4.3 sichert uns die Existenz einer lokalen Lösung mit der Regularität:

$$\begin{aligned} \varphi, \psi &\in C^3([0,T] \times [0,L]), \\ \theta, q &\in C^2([0,T] \times [0,L]). \end{aligned}$$

Das Lemma 4.7 und der Satz 4.9 besagen ferner

$$\begin{aligned}\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3} &\leq c\|V_0\|_{\mathcal{H}_3} e^{\tilde{c}\sqrt{d\mu}\int_0^t \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} d\tau} \\ &\leq c\|V_0\|_{\mathcal{H}_3} e^{\tilde{c}\sqrt{d\mu M_0}} \leq ce\|V_0\|_{\mathcal{H}_3}, \quad t \leq T_M^1 \leq T,\end{aligned}$$

wobei $\tilde{c} > 0$ und δ so klein gewählt, dass $\tilde{c}\sqrt{d\mu M_0} < 1$ gilt.

Setzen wir nun $d := ce$. So folgt

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_3} \leq d\|V_0\|_{\mathcal{H}_3} < d\mu, \quad t \leq T_M^1 \leq T.$$

Ist $T_M^1 < T$, so bekommen wir einen Widerspruch zur Maximalität von T_M^1. Daher muss $T_M^1 = T$ sein.

Gilt $0 \leq t \leq T$, so folgt aus (4.69)

$$\begin{aligned}\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} &\leq c_1\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} e^{-\alpha t} + c\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \|V_0\|_{\mathcal{H}_3} e^{c\sqrt{d\mu}\int_0^\tau \|V(r)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} dr} d\tau \\ &\leq c\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} + c\int_0^t \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^2 e^{c\sqrt{M_2(t)}} d\tau \\ &\leq c\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} + ce^{c\sqrt{M_2(t)}} M_2(t)\int_0^t \|V(\tau)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau,\end{aligned}$$

woraus sich

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq K\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} \tag{4.70}$$

unter Verwendung des Gronwallschen Lemmas ergibt, wobei

$$K := cM_0 e^{c(\sqrt{M_0}+M_0)}.$$

Wählen wir nun $0 < \delta' < \frac{\delta}{K}$. Dann folgt

$$\|V(T)\|_{\mathcal{H}_2} \leq K\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq K\delta' \leq \delta.$$

Somit existiert eine Fortsetzung von V auf $[T, T + T_1(\delta_1)]$, und mit (4.70) folgt

$$\|V(T + T_1(\delta))\|_{\mathcal{H}_2} \leq K\|V_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \delta,$$

d.h. wir können auf $[T + T_1(\delta_1), T + 2T_1(\delta_1)]$ fortsetzen.

Dabei haben wir (4.70) auf die Lösung unseres Anfangsrandwertproblems zu Anfangsdaten $W_0 := V(T)$ angewendet. Dies ist berechtigt, da $\|W_0\|_{\mathcal{H}_3} < \delta$ und $\|W_0\|_{\mathcal{H}_3} \leq c < \infty$ nach Lemma 4.7.

Sukzessiv erhalten wir somit eine globale Lösung $V = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta, q)$ mit

$$\varphi, \psi \in C^3([0,\infty) \times [0,L]),$$
$$\theta, q \in C^2([0,\infty) \times [0,L]).$$

Speziell gilt für alle $t \in [0,\infty)$

$$M_2(t) \leq M_0 < \infty,$$

weil

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq K\delta' \leq \delta.$$

Daraus resultiert aber

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq M_0 e^{-\alpha t}.$$

Damit haben wir den Satz bewiesen. $\square$

Kapitel 5

Numerische Behandlung von Timoshenko Systemen

In diesem Kapitel wenden wir uns den Finiten Differenzenverfahren zur Behandlung der Timoshenko Systeme zu.

Bei Diskretisierung unseres Problems verwenden wir die Linienmethode. Hierzu transformieren wir dieses in ein System erster Ordnung bezüglich t. Danach erstellen wir eine Semidiskretisierung bezüglich x und schließlich lösen das auf diese Weise erhaltene System gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels eines ϑ-Verfahrens.

5.1 Finite Differenzenverfahren

Das Lösen des Timoshenko Systems mittels Finiter Differenzen bildet das Thema dieses Kapitels. Es werden ein Diskretisierungsschema vorgestellt und Aussagen über dessen Stabilität und Konvergenz bewiesen. Letzteres beinhaltet Fehleraussagen unter Differenzierbarkeitsforderungen an die exakte Lösung.

Wir befassen uns hier mit dem Anfangsrandwertproblem

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu\varphi_t = 0 \quad \text{in } (0,T)\times(0,L), \tag{5.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,T)\times(0,L), \tag{5.2}$$

$$\rho_3\theta_t + \kappa q_x + \gamma\psi_{tx} = 0 \quad \text{in } (0,T)\times(0,L), \tag{5.3}$$

$$\tau_0 q_t + \delta q + \kappa\theta_x = 0 \quad \text{in } (0,T)\times(0,L) \tag{5.4}$$

samt Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \quad q(0,\cdot) = q_0 \\ &\varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1 \quad \text{in } (0,L) \end{aligned} \tag{5.5}$$

und Randbedingungen

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = q(t,0) = q(t,L) = 0 \quad \text{in } (0,T). \tag{5.6}$$

Man erkennt leicht aus der Gleichung (5.4), das für θ die Neumannsche Randbedingung

$$\theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) \quad \text{in } (0,T) \tag{5.7}$$

gilt.

Zur Diskretisierung definieren wir äquidistante Raum-

$$\begin{aligned}
\Omega_h &:= \{ih \,|\, i = 0,\ldots,n\}, \quad h := \frac{L}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\
\bar{\Omega}_h &:= \{ih \,|\, i = 1,\ldots,n-1\}
\end{aligned}$$

und Zeitgitter

$$Z_\tau := \{j\tau \,|\, j = 0,\ldots,m\}, \quad \tau := \frac{T}{m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren Einschränkungen jeweiliger Funktionen auf das Gitter Ω_h durch

$$\begin{aligned}
\varphi_i(t) &= \varphi(t,ih), \\
\Phi_i(t) &= \varphi_t(t,ih), \\
\psi_i(t) &= \psi(t,ih), \\
\Psi_i(t) &= \psi_t(t,ih), \\
\theta_i(t) &= \theta(t,ih), \\
q_i(t) &= q(t,ih).
\end{aligned}$$

Auf dem Gitter diskretisieren wir die räumlichen Ableitungen unbekannter Funktionen mittels Zentraldifferenzenformeln. Für $f : \Omega_h \to \mathbb{R}$ definieren wir räumliche numerische Ableitungen für $i \in \Omega_h$ durch

$$\begin{aligned}
\partial_x f_i &:= \frac{f_{i+1} - f_i}{h}, \\
\bar{\partial}_x f_i &:= \frac{f_i - f_{i-1}}{h}, \\
\left(\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2}\right) f_i &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \\
\partial_{xx} f_i &:= \bar{\partial}_x \partial_x f_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.1 *Im folgenden nehmen wir durchgängig $f_i = 0$, $i \notin \Omega_h$ für alle auftretenden Funktionen an.*

Daraus resultiert ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für $i \in \bar{\Omega}_h$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_i'(t) - \Phi_i(t) = 0,\\
&\rho_1 \Phi_i'(t) - k\left[\bar{\partial}_x \partial_x \varphi_i(t) + \left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2}\right)\psi_i(t)\right] + \mu \Phi_i(t) = 0,\\
&\psi_i'(t) - \Psi_i(t) = 0,\\
&\rho_2 \Psi_i'(t) - b\bar{\partial}_x \partial_x \psi_i(t) + k\left[\left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2}\right)\varphi_i(t) + \psi_i(t)\right] + \gamma\left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2}\right)\theta_i(t) = 0,\\
&\rho_3 \theta_i'(t) + \kappa\left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2}\right) q_i(t) + \gamma\left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2}\right)\Psi_i(t) = 0,\\
&\tau_0 q_i'(t) + \delta q_i(t) + \kappa\left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2}\right)\theta_i(t) = 0.
\end{aligned}
$$

Die Werte $\varphi_i(t), \Psi_i(t), \psi_i(t), \Psi_i(t), \theta_i(t), q_i(t)$ für $i \in \{0, n\}$ ergeben sich aus den Randbedingungen (2.6), (5.7) gemäß

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_0(t) = 0, & \varphi_n(t) = 0,\\
\Phi_0(t) = 0, & \Phi_n(t) = 0,\\
\psi_0(t) = 0, & \psi_n(t) = 0,\\
\Psi_0(t) = 0, & \Psi_n(t) = 0,\\
\theta_0(t) = \theta_1(t), & \theta_n(t) = \theta_{n-1}(t),\\
q_0(t) = 0, & q_n(t) = 0,
\end{array}
$$

wobei die Darstellung von $\theta_0(t)$, $\theta_n(t)$ aus der Taylorschen[1] Formel

$$
\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \theta_0(t) + h\,\underbrace{\partial_x \theta_0(t)}_{=0} + O(h^2),\\
\theta_{n-1}(t) &= \theta_n(t) - h\,\underbrace{\partial_x \theta_n(t)}_{=0} + O(h^2).
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

hergeleitet wurde.

Setzt man nun

$$u_i(t) = (\varphi_i(t), \Psi_i(t), \psi_i(t), \Psi_i(t), \theta_i(t), q_i(t))',$$

[1]Brook Taylor, 18.09.1685-29.01.1731

so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&D_0 u_1'(t) + (A_0 + A_l) u_1(t) + A_1 u_2(t),\\
&D_0 u_i'(t) + A_{-1} u_{i-1}(t) + A_0 u_i(t) + A_1 u_{i+1}(t), \quad 2 \le i \le n-2,\\
&D_0 u_{n-1}'(t) + A_{-1} u_{n-2}(t) + (A_0 + A_r) u_{n-1}(t).
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
&D_0 = \operatorname{diag}(1, \rho_1, 1, \rho_2, \rho_3, \tau_0),\\
&A_{-1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{k}{h^2} & 0 & \frac{k}{2h} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{k}{2h} & 0 & -\frac{b}{h^2} & 0 & -\frac{\gamma}{2h} & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2h} & 0 & -\frac{\kappa}{2h}\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2h} & 0
\end{pmatrix}, \
A_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{k}{h^2} & 0 & -\frac{k}{2h} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{k}{2h} & 0 & -\frac{b}{h^2} & 0 & \frac{\gamma}{2h} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{2h} & 0 & \frac{\kappa}{2h}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{2h} & 0
\end{pmatrix},\\
&A_0 = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{2k}{h^2} & \mu & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{2b}{h^2} + k & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta
\end{pmatrix}, \
A_l = -A_r = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2h} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2h} & 0
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ferner definieren wir

$$
u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_{n-1}(t) \end{pmatrix}.
$$

Mit dieser Notation geht (5.9) über in

$$
u'(t) = -Au(t), \tag{5.10}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
&A := D^{-1} \begin{pmatrix}
(A_l + A_0) & A_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
A_{-1} & A_0 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & A_{-1} & A_0 & A_1 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & A_{-1} & A_0 & A_1 & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & A_{-1} & A_0 & A_1\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & A_{-1} & (A_0 + A_r)
\end{pmatrix},\\
&D := \operatorname{diag}(D_0, \dots, D_0).
\end{aligned}
$$

Das Problem (5.10) wollen wir nun in der Zeit mittels eines ϑ-Verfahrens diskretisieren.

Sei die Restriktion von $u(t)$ auf das Gitter Z_τ durch

$$u^j(t) = u(\tau j), \quad j \in Z_\tau$$

gegeben.

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (2.5) ergibt sich

$$u^0 := \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \dots \\ u_{n-1}(0) \end{pmatrix}$$

mit $u_i(0) = (\varphi_0(ih), \varphi_1(ih), \psi_0(ih), \psi_1(ih), \theta_0(ih), q_0(ih))'$, $1 \leq i \leq n-1$.

Zu einem $\vartheta \in [0,1]$ lautet damit das ϑ-Verfahren

$$u^{j+1} = u^j - \tau\vartheta A u^{j+1} - \tau(1-\vartheta)Au^j, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

woraus sich

$$(\mathrm{Id} + \tau\vartheta A)u^{j+1} = (\mathrm{Id} - \tau(1-\vartheta)A)u^j, \quad j = 0, \dots, m-1 \tag{5.11}$$

ergibt.

5.2 Lokaler Diskretisierungsfehler und Ordnung

Wir untersuchen den Approximationsfehler (globalen Fehler) der durch (5.11) erhaltenen diskreten Approximation

$$u = (u^0, u^1, \dots, u^{m-1}, u^m) \in ((\mathbb{R}^6)^{\Omega_h})^{Z_\tau}$$

also der Lösung des so definierten Systems von linearen Differenzengleichungen.

Bemerkung 5.2 *A^B bezeichnet dabei die Menge aller Abbildungen von B nach A.*

Wir transformieren das iterative Verfahren (5.11) in ein Gleichungssystem. Setzt man

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}^{Z_\tau} &\to \mathcal{H}^{Z_\tau} \\ u &\mapsto \Bigg(u(0) - u^0, \frac{u(\tau(j+1)) - u(\tau j)}{\tau} \\ &\qquad + \vartheta A u(\tau(j+1)) + (1-\vartheta)Au(\tau j), \quad j = 1, \dots, m \Bigg), \end{aligned}$$

so ist (5.11) mit dem Gleichungssystem

$$T(u) = 0$$

äquivalent. $\mathcal{H} \subset ((\mathbb{R}^6)^{\Omega_h})$ sei dabei ein Banachraum.

Sei $\bar{u}$ die wahre Lösung von (5.1)—(5.6) restringiert auf das Gitter $Z_k \times \Omega_h$.

Definition 5.3 *Zu einer Norm* $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ *auf* $\mathcal{H} \subset (\mathbb{R}^6)^{\Omega_h}$ *heißt* $\|T(\bar{u})\|_{\mathcal{H},\infty}$ *gegeben durch*

$$\|T(\bar{u})\|_{\mathcal{H},\infty} = \max\left\{ \|u(0) - u^0\|_{\mathcal{H}}, \left\| \frac{u(\tau(j+1)) - u(\tau j)}{\tau} + \vartheta A u(\tau(j+1)) + (1-\vartheta) A u(\tau j) \right\|_{\mathcal{H}}, \quad j = 1, \ldots, m \right\} \tag{5.12}$$

der Konsistenzfehler.

Man führt die diskreten Hilberträume $L^2(\Omega_h)$ und $H_0^1(\Omega_h)$ ein, wobei

$$L^2(\Omega_h) = \left\{ f, g : \Omega_h \to \mathbb{R} \,|\, \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega_h)} = h \sum_{i=0}^{n} f_i g_i \right\},$$

$$H_0^1(\Omega_h) = \left\{ f, g \in L^2(\Omega_h) \,|\, f_i = g_i = 0,\ i \in \{0, n\},\ \langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega_h)} = \langle \partial_x f, \partial_x g \rangle_{L^2(\Omega_h)} = h \sum_{i=0}^{n-1} \partial_x f_i \, \partial_x g_i \right\}.$$

Nun versehen wir den Raum $\mathcal{H} := H_0^1(\Omega_h) \times L^2(\Omega_h) \times H_0^1(\Omega_h) \times L^2(\Omega_h) \times L^2(\Omega_h) \times L^2(\Omega_h)$ mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, indem wir

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathcal{H}} := {} & \rho_1 \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_{L^2(\Omega_h)} + \rho_2 \langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{L^2(\Omega_h)} + b \langle \partial_x \varphi_1, \partial_x \varphi_2 \rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& + k \left\langle \left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2} \right) \varphi_1, \psi_2 \right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + k \left\langle \psi_1, \left(\frac{\bar{\partial}_x + \partial_x}{2} \right) \varphi_2 \right\rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& + k \, \langle \partial_x \varphi_1, \partial_x \varphi_2 \rangle_{L^2(\Omega_h)} + k \, \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& + \rho_3 \langle \theta_1, \theta_2 \rangle_{L^2(\Omega_h)} + \tau_0 \langle q_1, q_2 \rangle_{L^2(\Omega_h)}
\end{aligned}$$

für $u_k = (\varphi_k, \Phi_k, \psi_k, \Psi_k, \theta_k, q_k) \in \mathcal{H}$, $k \in \{1, 2\}$ setzen.

Lemma 5.4 $\mathcal{H}$ *ist ein Hilbertraum.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $L^2(\Omega_h)$ und $H_0^1(\Omega_h)$ Hilberträume sind.

Offenbar sind die Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega_h)}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega_h)}$ bilinear und symmetrisch. Nachzuweisen ist ihre positive Definitheit.

Sei $u \in L^2(\Omega_h)$. So ist $\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega_h)} \geq 0$. Gilt nun $\langle u,u\rangle_{L^2(\Omega_h)} = 0$ für ein $u \in L^2(\Omega_h)$, so folgt $u_i = 0$, $i \in \Omega_h$, d.h. $u = 0$.

Analog ergibt sich $\langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega_h)} \geq 0$. Falls $\langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega_h)} = 0$ für ein $u \in H_0^1(\Omega_h)$ ist, so bekommt man $u_{i+1} - u_i = 0$, $i \in \bar{\Omega}_h$, daher $u_i = u_n = u_0 = 0$, $i \in \bar{\Omega}_h$, d.h. $u = 0$.

Die Vollständigkeit beider Räume folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^{\Omega_h}$.

Mit unseren Vorüberlegungen ist die Bilinearität und Symmetrie von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ offensichtlich.

Zu zeigen bleibt, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ positiv definit ist. Wir betrachten

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle_{\mathcal{H}} :=\ & \rho_1\langle\Phi,\Phi\rangle_{L^2(\Omega_h)} + \rho_2\langle\Psi,\Psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} + b\langle\partial_x\varphi,\partial_x\varphi\rangle_{L^2(\Omega_h)}\\ & + k\left\langle\partial_x\varphi,\partial_x\varphi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + 2k\left\langle\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\varphi,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + k\left\langle\psi,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)}\\ & + \rho_3\langle\theta,\theta\rangle_{L^2(\Omega_h)} + \tau_0\langle q,q\rangle_{L^2(\Omega_h)}.\end{aligned}$$

Eine große Abhilfe beim restlichen Beweis schafft der Differenzenkalkül (s. z.B. [2]), der in Analogie zur kontinuierlichen partiellen Integration partielle Summation darstellt.

Zu $u, v \in L^2(\Omega_h)$ gilt also

$$\langle\partial_x u, v\rangle_{L^2(\Omega_h)} = -\langle u, \bar{\partial}_x v\rangle_{L^2(\Omega_h)}, \tag{5.13}$$

falls u oder v in $H_0^1(\Omega_h)$ ist.

Da ∂_x und $\bar{\partial}_x$ kommutieren, gilt auch

$$\langle\partial_x u, \partial_x v\rangle_{L^2(\Omega_h)} = \langle\bar{\partial}_x u, \bar{\partial}_x v\rangle_{L^2(\Omega_h)}.$$

Setze

$$S := k\left\langle\partial_x\varphi,\partial_x\varphi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + 2k\left\langle\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\varphi,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + k\left\langle\psi,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)}.$$

Der Differenzenkalkül ermöglicht es uns, den Ausdruck S wir folgt abzuschätzen

$$\begin{aligned}S =\ & \frac{k}{2}\left\langle\partial_x\varphi,\partial_x\varphi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + \frac{k}{2}\left\langle\bar{\partial}_x\varphi,\bar{\partial}_x\varphi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)}\\ & + k\left\langle\partial_x\varphi,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + k\left\langle\bar{\partial}_x\varphi,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} + k\left\langle\psi,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)}\\ =\ & \frac{k}{2}\langle\partial_x\varphi+\psi,\partial_x\varphi+\psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} + \frac{k}{2}\langle\bar{\partial}_x\varphi+\psi,\bar{\partial}_x\varphi+\psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} \geq 0.\end{aligned}$$

Damit bekommt man

$$\langle u, u\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Sei nun $u \in \mathcal{H}$ mit $\langle u, u\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Sofort ergibt sich

$$\Phi = \Psi = \varphi = \theta = q = 0.$$

Überdies gilt $S = 0$. Daher

$$\frac{k}{2}\langle \partial_x\varphi + \psi, \partial_x\varphi + \psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} + \frac{k}{2}\langle \bar{\partial}_x\varphi + \psi, \bar{\partial}_x\varphi + \psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} = k\langle \psi, \psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} = 0.$$

Demnach ist $\psi = 0$. Folglich ist $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$.

Unter Berücksichtigung der Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^6)^{\Omega_h}$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung: Man erkennt leicht, dass T den Raum $\mathcal{H}^{Z_\tau}$ in sich abbildet, da die „Randbedingungen“ auf jedem Zeitlevel erfüllt sind.

Definition 5.5 *Es sei*

$$C^{n_1,n_2}([0,T]\times[0,L]) := \left\{ f \mid \partial_t^{k_1}\partial_x^{k_2} f \in C([0,T]\times[0,L]),\ k_i = 0,\ldots,n_i,\ i = 1,2 \right\}.$$

Der folgende Satz charakterisiert die Konsistenz des Verfahrens (5.11):

Satz 5.6 *Sei $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{q})$ die Lösung zu (5.1)—(5.6) mit der Regularität*

$$\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in C^{3,4}([0,T]\times[0,L]), \quad \bar{\theta}, \bar{q} \in C^{2,3}([0,T]\times[0,L]).$$

Dann gilt

$$\|T(\bar{u})\|_{\mathcal{H},\infty} = O(h^2) + O(\tau) \quad \textit{für } h, \tau \to 0,$$

wobei $\bar{u} = (\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_t, \bar{\psi}, \bar{\psi}_t, \bar{\theta}, \bar{q})$ die Restriktion jeweiliger Funktionen auf das Gitter $T_\tau \times \Omega_h$ bezeichnet.

Gilt zusätzlich $\vartheta = \frac{1}{2}$ und

$$\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in C^{4,4}([0,T]\times[0,L]), \quad \bar{\theta}, \bar{q} \in C^{3,3}([0,T]\times[0,L]),$$

so folgt

$$\|T(\bar{u})\|_{\mathcal{H},\infty} = O(h^2) + O(\tau^2) \quad \textit{für } h, \tau \to 0.$$

Beweis: Die Taylorsche Formel liefert

$$\frac{f(t+\tau,x)-f(t,x)}{\tau}=\begin{cases} f_t(t,x)+O(\tau), & f_{tt}\in C([0,T]\times[0,L]) \\ f_t(t,x)+\frac{1}{2}\tau f_{tt}(t,x)+O(\tau^2), & f_{ttt}\in C([0,T]\times[0,L]) \end{cases}.$$

Gilt $f_{xxxx}\in C([0,T]\times[0,L])$ für ein f, so ergibt sich

$$\frac{f(t,x+h)-f(t,x-h)}{2h}=\frac{2hf_x(t,x)+O(h^3)}{2h}=f_x(t,x)+O(h^2),$$
$$\frac{f(t,x+h)-2f(t,x)+f(t,x-h)}{h^2}=\frac{2\frac{h^2}{2}f_{xx}(t,x)+O(h^4)}{h^2}=f_{xx}(t,x)+O(h^2).$$

Mit (5.8) folgt

$$\bar\theta(t,0)=\bar\theta(t,h)+O(h^2),\quad \bar\theta(t,L-h)=\bar\theta(t,L)+O(h^2).$$

Da für entsprechende Komponenten von $\bar u$ die obigen Aussagen wegen der vorausgesetzten Regularität gelten, ergibt sich für $(t,x)\in Z_\tau\times\Omega_h$

$$\frac{\bar u(t+\tau,x)-\bar u(t,x)}{\tau}=\begin{cases} \bar u_t(t,x)+O(\tau), & \bar u_{tt}\in C([0,T]\times[0,L],\mathbb{R}^6) \\ \bar u_t(t,x)+\frac{1}{2}\tau\bar u_{tt}(t,x)+O(\tau^2), & \bar u_{ttt}\in C([0,T]\times[0,L],\mathbb{R}^6) \end{cases}$$

$$(A\bar u)(t,x)=D_0^{-1}\begin{pmatrix} -\bar\varphi_t \\ -k(\bar\varphi_{xx}+\bar\psi_x)+\mu\bar\varphi_t+O(h^2) \\ -\bar\psi_t \\ -b\bar\psi_{xx}+k(\bar\varphi_x+\bar\psi)+\gamma\bar\theta_x+O(h^2) \\ \kappa\bar q_x+\gamma\bar\psi_{tx}+O(h^2) \\ \delta\bar q+\kappa\bar\theta_x+O(h^2) \end{pmatrix}(t,x).$$

Die Taylorsche Formel liefert

$$\begin{aligned} &\vartheta(A\bar u)(t+\tau,x)+(1-\vartheta)(A\bar u)(t,x) \\ &\quad=\begin{cases} (A\bar u)(t,x)+O(\tau), & \bar u_{tt}\in C([0,T]\times[0,L],\,\mathbb{R}^6), \\ (A\bar u)(t,x)+\frac{\tau}{2}(A\bar u_t)(t,x)+O(\tau^2), & \vartheta=\frac{1}{2},\bar u_{ttt}\in C([0,T]\times[0,L],\,\mathbb{R}^6). \end{cases} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (5.10) bekommt man

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\bar u(t+\tau,\cdot)-\bar u(t,\cdot)}{\tau}+\vartheta A\bar u(t+\tau,\cdot)+(1-\vartheta)A\bar u(t+\tau,\cdot)\right\|_{\mathcal H} \\ &=\begin{cases} \|\bar u_t(t,\cdot)+(A\bar u)(t,x)+O(\tau)\|_{\mathcal H}, & \vartheta\neq\frac{1}{2}, \\ \|\left(\bar u_t(t,\cdot)+(A\bar u)(t,x)\right)+\left(\bar u_t(t,\cdot)+(A\bar u)(t,x)\right)_t+O(\tau^2)\|_{\mathcal H}, & \vartheta=\frac{1}{2} \end{cases} \\ &=\begin{cases} O(\tau)+O(h^2), & \vartheta\neq\frac{1}{2}, \\ O(\tau^2)+O(h^2), & \vartheta=\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Da die letzte Identität für alle $t \in Z_\tau$ gilt, heißt es

$$\|T(\bar{u})\|_{\mathcal{H},\infty} = \begin{cases} O(\tau) + O(h^2), & \vartheta \neq \frac{1}{2}, \\ O(\tau^2) + O(h^2), & \vartheta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Damit ist das Verfahren konsistent der Ordnung 2 in x und der Ordnung 1 in t, falls $\vartheta \neq \frac{1}{2}$, und der Ordnung 2 in t und x, falls $\vartheta = \frac{1}{2}$. Die wahre Lösung muss dabei hinreichend glatt sein. □

5.3 Stabilität und Konvergenz

Bei einem zeitabhängigen Problem verstehen wird unter Stabilität, dass Störungen mit wachsendem t sich nur in beschränkter Weise auswirken. Für ein h-abhängiges semidiskretes System (also eigentlich eine Familie von Systemen, wie z.B. in unserer Situation) wird verlangt, dass die entsprechenden Abschätzungen von Störungseffekten unabhängig von h für $h \to 0$ gelten sollen.

Bei numerischer Integration eindimensionaler Systeme hyperbolischer Gleichungen der Gestalt

$$u_t + Au_x = 0$$

mittels eines expliziten Verfahrens, ist es für dessen Stabilität notwendig, dass das Courant[2]-Friedrichs[3]-Lewy[4]-Kriterium erfüllt wird, d.h. für eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ gelte

$$\frac{\tau}{h}\|A\| \leq 1.$$

Da $\tau_0 \ll 1$ vorausgesetzt ist und $\|A(\tau_0)\| \to \infty$ für $\tau_0 \to 0$ gilt, würde dies aber eine starke Einschränkung auf den Zeitschritt τ bedeuten. Diese empirischen Überlegungen besagen, dass wir auf explizite Verfahren verzichten müssen. Als Belohnung werden wir ein von τ_0 unabhängiges stabiles Verfahren bekommen.

Definition 5.7 *Ein Modell $T(u) = 0$ heißt stabil bzgl. h und τ, falls es ein von h und τ unabhängiges $c > 0$ gibt mit*

$$\|u - v\|_{\mathcal{H},\infty} \leq c\|T(u) - T(v)\|_{\mathcal{H},\infty}$$

für alle $u, v \in \mathcal{H}^{Z_\tau}$, falls $h \leq h_1$, $\tau \leq \tau_1(h)$.

Unbedingt stabil heißt das Modell, falls τ_1 von h unabhängig ist.

[2]Richard Courant, 8.01.1888-27.01.1972
[3]Kurt Otto Friedrichs, 28.09.1901-31.12.1982
[4]Hans Lewy, 20.10.1904-23.08.1988

Satz 5.8 *Für alle $\vartheta \in [0,1]$ ist $Id + \tau\vartheta A$ invertierbart, d.h. das Verfahren (5.11) ist durchführbar.*

Unbedingt stabil ist das Verfahren für $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Beweis: Wir werden hier die im Lemma 5.2 bewiesene Aussage ausnutzen, dass $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum (und somit auch ein Banachraum) ist. Wir betrachten dabei die durch das Skalarprodukt erzeugte Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ auf $\mathcal{H}$.

Wir zeigen nun, dass $-A$ dissipativ ist, d.h. für alle $u \in \mathcal{H}$

$$\langle Au, u\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

ist.

Sei $u \in \mathcal{H}$. So gilt für $i \in \bar{\Omega}_h$

$$(Au)_i = D_0^{-1} \begin{pmatrix} -\Phi_i \\ -k\left[\bar{\partial}_x\partial_x\varphi_i + \left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\psi_i\right] + \mu\Phi_i \\ -\Psi_i \\ -b\bar{\partial}_x\partial_x\psi_i + k\left[\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\varphi_i + \psi_i\right] + \gamma\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\theta_i \\ \kappa\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)q_i + \gamma\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\Psi_i \\ \delta q_i + \kappa\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\theta_i \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der diskreten Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle_{\mathcal{H}} = {} & \langle -k\left[\bar{\partial}_x\partial_x\varphi + \left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\psi\right] + \mu\Phi, \Phi\rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& + \langle -b\bar{\partial}_x\partial_x\psi + k\left[\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\varphi + \psi\right] + \gamma\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\theta, \Psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& - b\langle\partial_x\Psi, \partial_x\psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} - k\left\langle\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\Phi, \psi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& - k\left\langle\Psi, \left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\varphi\right\rangle_{L^2(\Omega_h)} - k\langle\partial_x\Phi, \partial_x\varphi\rangle_{L^2(\Omega_h)} - k\langle\Psi, \psi\rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& + \langle\kappa\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)q + \gamma\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\Psi, \theta\rangle_{L^2(\Omega_h)} \\
& + \langle\delta q + \kappa\left(\frac{\bar{\partial}_x+\partial_x}{2}\right)\theta, q\rangle_{L^2(\Omega_h)} = \mu\|\Phi\|_{L^2(\Omega_h)} + \delta\|q\|_{L^2(\Omega_h)} \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Ferner gilt

$$\langle(\mathrm{Id} + \tau\vartheta A)v, v\rangle_{\mathcal{H}} \geq \|v\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.15}$$

Mithin ist der kleinste im Betrag Eigenwert von $\mathrm{Id} + \tau\vartheta A$ größer oder gleich 1. Die Matrix $\mathrm{Id} + \tau\vartheta A$ ist also invertierbar.

Zu einem $\vartheta \in [0, 1]$ betrachte

$$\begin{aligned} H_1 &:= \frac{1}{\tau}\mathrm{Id} + \vartheta A, \\ H_2 &:= \frac{1}{\tau}\mathrm{Id} - (1 - \vartheta)A. \end{aligned}$$

Die Iteration (5.11) schreibt sich dann zu

$$H_1 u^{j+1} = H_2 u^j, \quad j = 0, \ldots, m - 1.$$

Wir betrachten den Fall $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Wegen

$$\langle H_1 v, v\rangle_{\mathcal{H}} \geq \frac{1}{\tau}$$

folgt sofort

$$\|H_1^{-1}\| \leq \tau.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} H_1^{-1}H_2 &= \left(\frac{1}{\tau}\mathrm{Id} + A\right)^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\mathrm{Id} - (1 - \vartheta)A\right) = \mathrm{Id} - \left(\frac{1}{\tau}\mathrm{Id} + \vartheta A\right)^{-1} A \\ &= \mathrm{Id} - \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{1}{\tau}\mathrm{Id} + \vartheta A\right)^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\mathrm{Id} + \vartheta A - \frac{1}{\tau}\mathrm{Id}\right) \\ &= \mathrm{Id} - \frac{1}{\vartheta}\left(\mathrm{Id} - \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau} + \vartheta A\right)\right)^{-1} = \mathrm{Id} - \frac{1}{\vartheta}\left(\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} + \tau\vartheta A)^{-1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)\mathrm{Id} + (\mathrm{Id} + \tau\vartheta A)^{-1}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (5.15) und $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ erhalten wir

$$\|H_1^{-1}H_2\| \leq 2 - \frac{1}{\vartheta} \leq 1.$$

Und folglich gilt

$$\|(H_1^{-1}H_2)^m\| \leq 1.$$

Die Stabilität folgt nun aus dem in der Numerik bekannten Stabilitätslemma mit $c_1 = c_2 = 1$. □

Lemma 5.9 *Seien $H_1(\tau), H_2(\tau) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, die von $\tau \in (0, T]$ abhängen. Sei eine Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ auf $\mathcal{H}$ gegeben. $H_1(\tau)$ sei invertierbar mit*

$$\|H_1(\tau)^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq c_1 \tau \quad \forall \tau \in (0, T].$$

Ferner existiere eine Konstante $c_2 > 0$ mit

$$\|(H_1^{-1} H_2)^m(\tau)\|_{\mathcal{H}} \leq c_2.$$

Dann gilt für T die Stabilitätsungleichung

$$\|u - v\|_{\mathcal{H},\infty} \leq c_2(1 + c_1 T)\|T(u) - T(v)\|_{\mathcal{H},\infty} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^{Z_\tau}.$$

Bemerkung 5.10 *Numerische Experimente zeigen, dass die unbedingte Stabilität im allgemeinen nur für $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ vorhanden ist.*

Definition 5.11 *Das Modell $T(u) = 0$ heißt konvergent der Ordnung p_1 bzgl. t und p_2 bzgl. x für ein W, falls es zu jeder Lösung $\bar{u} \in W$ der Anfangsrandwertaufgabe (5.1)—(5.6) Konstanten $\hat{h}, \hat{\tau} > 0$ gibt, sodass das Gleichungssystem $T(u) = 0$ für $0 < h < h_1$, $0 < \tau < \tau_1(h)$ eine Lösung u besitzt mit*

$$\|\bar{u} - u\|_{\mathcal{H},\infty} = O(\tau^{p_1} + h^{p_2}).$$

Satz 5.12 *Das Problem (5.1)—(5.4) möge eine Lösung $\bar{u} = (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{q})$ mit der Regularität*

$$\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in C^{3,4}([0, T] \times [0, L]), \quad \bar{\theta}, \bar{q} \in C^{2,3}([0, T] \times [0, L]).$$

besitzen.

Dann ist das Verfahren (5.11) zu $\vartheta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ für $\hat{h} = L$ und $\hat{\tau} = T$ konvergent der Ordnung 1 bzgl. t und der Ordnung 2 bzgl. x.

Ist $\vartheta = \frac{1}{2}$ und gilt zusätzlich

$$\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in C^{4,4}([0, T] \times [0, L]), \quad \bar{\theta}, \bar{q} \in C^{3,3}([0, T] \times [0, L]).$$

so ist das Verfahren konvergent der Ordnung 2 bzgl. t und x.

Beweis: Nach dem Satz 5.8 ist das Gleichungssystem $T(u) = 0$ lösbar. Sei u seine Lösung.

Die Sätze 5.6 und 5.8 implizieren

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - u\|_{\mathcal{H},\infty} &\leq c\|T(\bar{u}) - T(u)\|_{\mathcal{H},\infty} = c\|T(\bar{u})\|_{\mathcal{H},\infty} + c\|T(u)\|_{\mathcal{H},\infty} \\ &= c\|T(\bar{u})\|_{\mathcal{H},\infty} = \begin{cases} O(\tau) + O(h^2), & \vartheta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ O(\tau^2) + O(h^2), & \vartheta = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

5.4 Numerische Ergebnisse

Im diesem Abschnitt präsentieren wir die numerisch berechnete Energie der Lösung zum folgenden Datensatz. Unter der Energie zu einer numerischen Lösung $u = (u^0, u^1, \ldots, u^m)$ verstehen wir die Abbildung $E_\tau : Z_\tau \to \mathbb{R}, \quad j \mapsto \frac{1}{2}\|u^j\|^2_{\mathcal{H}}$.

Wir betrachten die Anfangsrandwertaufgabe (5.1)—(5.6) auf $[0, 8] \times [0, \pi]$ zu den Anfangsdaten

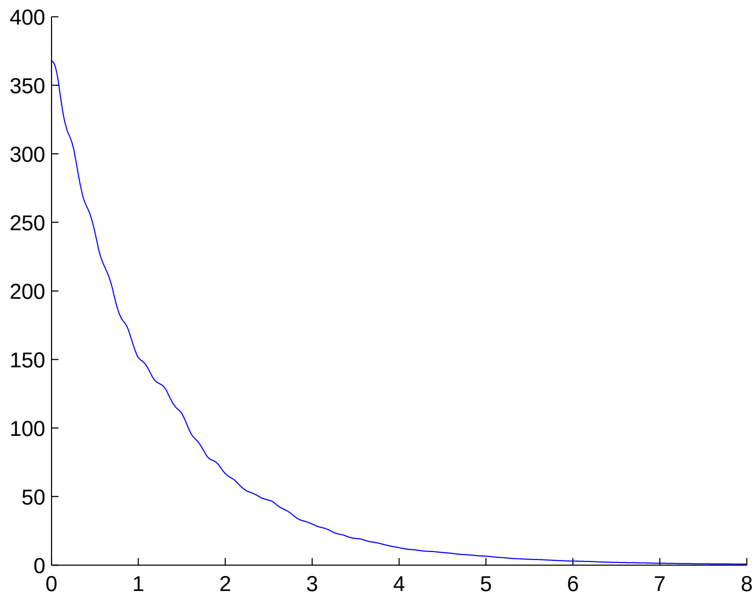
$$\begin{aligned}
&\varphi(0, x) = 2\sin(x) + \sin(5x) - x\left(x - \frac{\pi}{3}\right)(x - \pi), \quad \varphi_t(0, x) = \sin(x) + 3\sin(2x),\\
&\psi(0, x) = -\sin(x), \quad \psi_t(0, x) = -\sin(x),\\
&\theta(0, x) = \sin(x), \quad q(0, x) = \cos(x).
\end{aligned}$$

Die Konstanten sind wie folgt angesetzt

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= 1, & b &= 10,\\
\rho_2 &= 0.5, & \mu &= 1,\\
\rho_3 &= 1, & \gamma &= 2,\\
\tau_0 &= 10^{-10}, & \delta &= 1,\\
k &= 20, & \kappa &= 4.
\end{aligned}$$

Es werden $h = \frac{\pi}{1000}$ und $\tau = \frac{8}{2000}$ als den Raum- bzw. Zeitschritt gewählt.

Die folgende Abbildung stellt die Energie der numerischen Lösung für $\vartheta = \frac{1}{2}$ dar.



Literaturverzeichnis

[1] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, Jaime E. Muñoz Rivera, Reinhard Racke: Energy decay for Timoshenko systems of memory type, J. Differential Equations 194 (2003) 82-115

[2] Winfried Auzinger: Numerik Partieller Differentialgleichungen, Vorlesungsskriptum, Technische Universität Wien (2003)

[3] Richard Courant, Kurt Otto Friedrichs, Hans Lewy: Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann. 100 (1928), 32-74

[4] Hugo Danilo Fernández Sare, Reinhard Racke: On the stability of damped Timoshenko systems — Cattaneo versus Fourier law (in Vorbereitung)

[5] Song Jiang, Reinhard Racke: Evolution Equations in Thermoelasticity, Chapman & Hall/CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 112 (2000)

[6] R.C. MacCamy, V.J. Mizel: Existence and nonexistence in the large of solutions of quasilinear wave equations, Arch. Rational Mech. Anal. 25, (1967) 299-320

[7] Jaime E. Muñoz Rivera, Reinhard Racke: Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems — global existence and exponential stability, J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), 248-278

[8] Jaime E. Muñoz Rivera, Reinhard Racke: Global stability for damped Timoshenko systems, Discr. Cont. Dyn. Systems, Vol. 9, Num. 6, (November 2003)

[9] A. Pazy: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer Verlag, (1983)

[10] Reinhard Racke: Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Initial Value Problems, Aspects of Math., Vol. E19, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1992)

[11] Reinhard Racke: Thermoelasticity with second sound — Exponential stability in linear and nonlinear 1-d, Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002), 409-441

[12] M. Slemrod: Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 76 (1981), 97-133

[13] A. Soufyane: Stabilisation de la poutre de Timoshenko, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I 328 (1999), 731-734

[14] Dirk Werner: Funktionalanalysis, 4. überarbeitete Auflage, Springer Verlag, Berlin (2002)