Universität Konstanz

Degenerationsordnung und Trägerfunktional bilinearer Abbildungen

Peter Bürgisser

Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik
Nr. 46, November 1997

ISSN 1430–3558

Degenerationsordnung und Trägerfunktional bilinearer Abbildungen [1]

Peter Bürgisser

Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Konstanz

[1] Dissertation, Universität Konstanz, Juni 1990

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden drei Fragen aus dem Gebiet der Komplexitäts- und Deformationstheorie bilinearer Abbildungen untersucht. Sie finden ihre Motivation in einem systematischen Studium des Degenerationsbegriffs bei bilinearen Abbildungen sowie in der Untersuchung seiner asymptotischen Entsprechung, der asymptotischen Degeneration, welche auf die Theorie der Spektren bilinearer Abbildungen führt. (Wir verweisen auf die ausführliche Darstellung dieses Themenkreises in [10], [11] und [12].)

Während der ganzen Arbeit bezeichne K einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Wir studieren bilineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Eine Abbildung d heisst Degeneration einer Abbildung f, wenn, grob gesprochen, d mit beliebiger Genauigkeit durch isomorphe Kopien von f approximiert werden kann. Um dies zu präzisieren, nehmen wir zunächst an, dass d und f beide Abbildungen $U \times V \longrightarrow W$ sind. Die Gruppe $\mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ operiert auf dem Raum der bilinearen Abbildungen $h \colon U \times V \longrightarrow W$ via $(\alpha, \beta, \gamma)h := \gamma h(\alpha^{-1}-, \beta^{-1}-)$. d heisst Degeneration von f, wenn d im Zariski-Abschluss der Bahn von f ist. Im allgemeinen heisst d Degeneration von f, wenn d und f durch äquivalente Abbildungen, definiert auf dem gleichen Tripel von Räumen, ersetzt werden können, so dass die Forderung der obigen Definition erfüllt ist. (d und h heissen äquivalent, wenn es Nullabbildungen d_1, h_1 gibt, so dass $d \oplus d_1$ und $h \oplus h_1$ isomorph sind.) Die Menge $\mathcal{B}^+$ der Äquivalenzklassen bilinearer Abbildungen lässt sich als positiver Kegel eines Ringes $\mathcal{B}$ deuten, wobei die Ringoperationen durch die Bildung der direkten Summe und des Tensorproduktes induziert werden. Die Degenerationsordnung $\trianglelefteq$ definiert dann eine Partialordnung auf $\mathcal{B}^+$. $\trianglelefteq$ kann man zur sogenannten asymptotischen Degenerationsordnung $\lesssim$ verfeinern, welche nur noch asymptotisch relevante Information beschreibt. Die Präordung $\lesssim$ lässt sich verträglich mit der Ringstruktur auf ganz $\mathcal{B}$ ausdehnen; dies erlaubt es, die Strukturtheorie von Stone-Kadison-Dubois ins Spiel zu bringen. Wir zeigen in Abschnitt 4, dass die Degenerationsordnung $\trianglelefteq$ eine solche Ausdehnung nicht zulässt.

Fundamental ist die Beschreibung von $\lesssim$ mit Hilfe von Spektren: Jeder Menge $\mathcal{F}$ bilinearer Abbildungen können wir (im wesentlichen eindeutig) einen kompakten topologischen Raum Δ zusammen mit einer Abbildung φ von $\mathcal{F}$ in den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf Δ zuordnen. Die asymptotische Degeneration wird dann durch die punktweise Ordnung der stetigen Funktionen auf Δ beschrieben:

$$\forall d, f \in \mathcal{F} \ (d \lesssim f \Longleftrightarrow \varphi(d) \leq \varphi(f) \text{ punktweise auf } \Delta) \ .$$

(Δ, φ) heisst asymptotisches Spektrum von $\mathcal{F}$. Zum Beispiel ist das asymptotische Spektrum Δ_c der Menge der Multiplikationen quadratischer Matrizen das Intervall $\Delta_c = [4, 2^\omega]$ zusammen mit der Zuordnung

$$\text{Multiplikation } h\text{-reihiger Matrizen} \longmapsto x^{\log h} \ ,$$

wobei ω den Exponenten der Matrixmultiplikation bezeichnet. Also ist $\omega > 2$ genau dann, wenn Δ_c mehr als einen Punkt enthält. Die Kenntnis von Spektralpunkten liefert ausserdem notwendige Bedingungen für das Bestehen von Degenerationen $d \trianglelefteq f$.

In [12] werden für gewisse Klassen bilinearer Abbildungen explizit Spektralpunkte konstruiert. Dabei spielen die sogenannten unteren und oberen Trägerfunktionale $\zeta_\theta, \zeta^\theta \colon \mathcal{B}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ eine wichtige Rolle. In Abschnitt 2 beweisen wir, dass eine allgemeine bilineare Abbildung n-dimensionaler Räume unter dem unteren Trägerfunktional ζ_θ den Wert $n^{1-\min \theta_i + o(1)}$ für $n \to \infty$ hat.

In [12] wird gezeigt, dass ζ^θ additiv ist, für ζ^θ wird jedoch nur Superadditivität nachgewiesen. Wir zeigen in Abschnitt 3, dass das untere Trägerfunktional ζ_θ tatsächlich nicht additiv ist.

Ausgangspunkt für die in Abschnitt 5 untersuchte Frage ist der Schluss

$$d \trianglelefteq f,\ f \trianglelefteq d \Longrightarrow d \simeq f$$

für K-bilineare Abbildungen $d, f \colon U \times V \longrightarrow W$. Die Räume U, V, W seien mit k-Strukturen versehen, wo k ein Unterkörper von K ist. Für über k definierte bilineare Abbildungen $U \times V \longrightarrow W$ definieren wir k-Isomorphie $\simeq_k$ und k-Degeneration $\trianglelefteq_k$, wobei wir uns bei der Definition der letzteren von einer rein algebraischen Beschreibung der Degeneration $\trianglelefteq$ leiten lassen (vergleiche mit [10, Thm. 5.8]). Wir fragen uns nun, ob die bezüglich k relativierte Version des obigen Schlusses ($d \trianglelefteq_k f,\ f \trianglelefteq_k d \Rightarrow d \simeq_k f$), beziehungsweise eine stärkere Aussage

$$d \trianglelefteq_k f,\ d \simeq f \Longrightarrow d \simeq_k f \tag{1.1}$$

für über k definierte Abbildungen Gültigkeit hat. Wir nennen (1.1) die starke Partialordnungseigenschaft (SPE). In Abschnitt 5 wird diese Frage in einem allgemeineren Kontext gestellt, nämlich für über k definierte rationale Darstellungen eines Produktes G von vollen linearen Gruppen auf einem Vektorraum mit k-Struktur. Wir zeigen, dass (SPE) stets erfüllt ist, wenn der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen, reell abgeschlossen oder ein p-adischer Zahlkörper ist. Ausserdem können wir beweisen, dass (SPE) für beliebige Grundkörper k gilt, wenn die Gruppe G ein Torus ist. Bei der Operation von Gl_n auf den quadratischen Formen weisen wir (SPE) für endliche Grundkörper und für den Körper der rationalen Zahlen nach. In der Situation bilinearer Abbildungen gelingt uns der Beweis des Schlusses (1.1) nur in speziellen Fällen. Da uns kein Beispiel bekannt ist, wo (SPE) verletzt wäre, ist es durchaus denkbar, dass die starke Partialordnungseigenschaft allgemein gültig ist.

2 Der typische Wert des unteren Trägerfunktionals

Die Gruppe $G := \mathrm{GL}_n(K)^3$ operiert (rational) auf $K^{n\times n\times n} = K^n \otimes K^n \otimes K^n$ vermöge

$$((\alpha,\beta,\gamma),t) \longmapsto (\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)t \ .$$

Sei $\theta \in \Theta := \{\theta \in \mathbb{R}^3 : \theta_1,\theta_2,\theta_3 \geq 0,\ \theta_1+\theta_2+\theta_3 = 1\}$. Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\{1,\dots,n\}^3$ definieren wir

$$H_\theta(P) := \sum_{i=1}^{3} \theta_i H(P_i) \ ,$$

wobei P_i die i-te Marginalverteilung von P und H die Entropiefunktion bezeichnet (gebildet bezüglich des Logarithmus zur Basis 2). Ist $M \subseteq \{1,\dots,n\}^3$, so setzen wir ausserdem

$$H_\theta(M) := \max_P H_\theta(P) \ ,$$

wobei das Maximum über alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen P auf M genommen wird. Ferner sei $\max(M)$ die Menge der maximalen Punkte von M bezüglich der Produktordnung der natürlichen Ordnung auf $\{1,\dots,n\}$.

Unter dem logarithmischen unteren Trägerfunktional zu $\theta \in \Theta$ verstehen wir die folgende Abbildung

$$\rho_\theta : K^{n\times n\times n}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \rho_\theta(t) := \max_{g\in G} H_\theta(\max(\operatorname{supp} gt)) \ .$$

Man überlegt sich leicht, dass ρ_θ endlich viele, konstruktible Fasern hat. Daraus folgt unmittelbar, dass Zariski-fast alle Tensoren den gleichen Wert unter ρ_θ haben. Ziel ist es im folgenden, das asymptotische Verhalten dieses typischen Wertes in Abhängigkeit von n zu bestimmen.

Eine untere Schranke für ρ_θ findet man mühelos:

2.1 Lemma *Es gibt eine offene, dichte Teilmenge U_n von $K^{n\times n\times n}\setminus\{0\}$ mit*

$$\forall\theta\in\Theta\ \forall t\in U_n \quad (1-\min_i \theta_i)\log n \leq \rho_\theta(t) \ .$$

Beweis: Es bezeichne U_n die Menge der von Null verschiedenen Tensoren t in $K^{n\times n\times n}$ mit der Eigenschaft, dass jede der Matrizen $[t_{ijn}]_{ij}$, $[t_{inj}]_{ij}$, $[t_{nij}]_{ij}$ paarweise verschiedene Eigenwerte ungleich Null hat. Offenbar ist U_n offen und dicht in $K^{n\times n\times n}$. Es sei $t \in U_n$ und $\theta\in\Theta$, Œ $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$. Dann gibt es $a,b \in \mathrm{Gl}_n$ mit

$$[a[t_{ijn}]b^T]_{\ell r} \neq 0 \Longleftrightarrow \ell + r = n+1 \ .$$

Daraus erhalten wir

$$(\theta_1+\theta_2)\log n = H_\theta(\{(i,j,n) : i+j = n+1\}) \leq H_\theta(\max(\operatorname{supp}\,(a,b,\mathrm{id})t)) \ ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Für die Bestimmung einer oberen Schranke stellen wir zunächst folgendes fest:

$$\exists U_n \subseteq K^{n\times n\times n} \text{ offen, dicht mit } \forall t\in U_n\ \forall g\in G \quad |\operatorname{supp} gt| \geq n^3 - 3n^2 \ .$$

(Begründung: Wir setzen $V := \{t \colon \exists g\in G\ |\operatorname{supp} gt| < n^3-3n^2\}$. Dann folgt $V = \bigcup G\{t : \operatorname{supp} t = T\}$, wobei die Vereinigung über alle Teilmengen T von $\{1,\dots,n\}^3$ der Kardinalität $|T| < n^3 - 3n^2$ genommen wird. Ein Dimensionsvergleich liefert

$\dim \overline{V} \leq \max_T(\dim G + |T|) < n^3$. Die Menge $U_n := K^{n\times n\times n} \setminus \overline{V}$ erfüllt dann die verlangten Bedingungen.)

Andererseits gilt für alle $T \subseteq \{1,\ldots,n\}^3$ mit $|T| \geq n^3 - 3n^2$, dass

$$\max(T) \subseteq \big\{(i,j,\ell) \in \{1,\ldots,n\}^3 : (n-i+1)(n-j+1)(n-\ell+1) \leq 3n^2+1\big\} \ .$$

Mit der Bezeichnung $D_n := \{(i,j,\ell) \in \{1,\ldots,n\}^3 : ij\ell \leq n^2\}$ erhalten wir für alle $t \in U_n$

$$\rho_\theta(t) \leq H_\theta\big(\{(i,j,\ell) \in \{1,\ldots,n\}^3 : (n-i+1)(n-j+1)(n-\ell+1) \leq 3n^2+1\}\big) \ .$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, den Wert $H_\theta(D_n)$ näherungsweise zu berechnen. Es erweist sich jetzt als vorteilhaft, anstatt diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf D_n beschränkte, messbare Wahrscheinlichkeitsdichten auf

$$S_n := \big\{(x,y,z) \in [1,n]^3 : xyz \leq n^2\big\}$$

zu untersuchen. Sei zunächst $p : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ eine beschränkte (messbare) Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Intervall $[a,b]$. Deren Entropie ist definiert als

$$H(p) := -\int_a^b p(x)\log p(x)dx \ .$$

Das nächste Lemma fasst einige bekannte und wichtige Eigenschaften des Entropiefunktionals zusammen (vgl. [2]).

2.2 Lemma *Seien $p,q\colon [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichten.*

(1) Wir setzen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \epsilon \longmapsto H(\epsilon p + (1-\epsilon)q)$. Die Funktion f ist stetig, konkav, $f \in C^2(0,1)$ und

$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad f'(\epsilon) = -\int_a^b (p-q)\log(\epsilon p + (1-\epsilon)q)dx \ .$$

(2) Es existiert $\lim_{\epsilon\to 0} f'(\epsilon)$ als uneigentlicher Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und hat den Wert $\int_a^b p(-\log q)dx - H(q)$.

2.3 Korollar *Sei $p\colon [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte.*

(1) Sei $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_t = b$. Wir definieren die Wahrscheinlichkeitsdichte $\overline{p}$ durch lokale Mittelung von p auf den Teilintervallen (a_{j-1}, a_j) :

$$\overline{p}(x) := \begin{cases} (a_j - a_{j-1})^{-1}\int_{a_{j-1}}^{a_j} p(y)dy & \text{, falls } a_{j-1} < x < a_j \text{ für ein } j, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $H(p) \leq H(\overline{p})$.

(2) $H(p) \leq \log(b-a)$.

Beweis: (1) Wir setzen $f(\epsilon) = H(\epsilon p + (1-\epsilon)\overline{p})$ und verwenden Lemma 2.2. Dann ist $\lim_{\epsilon\to 0} f'(\epsilon) = \sum_j \int_{a_{j-1}}^{a_j}(p-\overline{p})(-\log\overline{p})dx = 0$. Weil f konkav und stetig in 0 ist, folgt $H(p) = f(1) \leq f(0) = H(\overline{p})$. Die Aussage (2) ist klar. □

Sei nun eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte $p\colon [a,b]^3 \longrightarrow [0,\infty)$ auf dem Kubus $[a,b]^3$ gegeben. Wir betrachten auch hier Marginalien p_i, z.B. ist

$$p_1(x) = \int_{[a,b]^2} p(x,y,z)dydz \quad .$$

In Analogie zum diskreten Fall definieren wir $H_\theta(p) := \sum_i \theta_i H(p_i)$ für $\theta \in \Theta$ und für eine messbare Teilmenge $M \subseteq [a,b]^3$ setzen wir $\hat{H}_\theta(M) := \sup H_\theta(p)$, wobei das Supremum über alle beschränkten Dichten genommen wird, die ausserhalb von M verschwinden. Nun vergleichen wir $H_\theta(D_n)$ mit $\hat{H}_\theta(S_n)$.

2.4 Lemma *Es gilt* $\hat{H}_\theta(S_n) \leq H_\theta(D_n) \leq \hat{H}_\theta(S_{3n})$.

Beweis: Sei $P\colon \{1,\ldots,n\}^3 \longrightarrow [0,\infty)$ eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wir ordnen P eine Dichte $p\colon [1,n+1]^3 \longrightarrow [0,\infty)$ folgendermassen zu: Gilt $i < x < i+1$, $j < y < j+1$, $\ell < z < \ell+1$ für ein $(i,j,\ell) \in \{1,\ldots,n\}^3$, so setzen wir $p(x,y,z) := P(i,j,\ell)$. Andernfalls sei $p(x,y,z) := 0$. Offenbar gilt $H_\theta(p) = H_\theta(P)$. Durch grobe Abschätzung bekommen wir $H_\theta(D_n) \leq \hat{H}_\theta(S_{3n})$.

Sei $p\colon [1,n]^3 \longrightarrow [0,\infty)$ gegeben. Wir definieren durch lokale Mittelung eine Dichte $\overline{p}$ auf $[1,n]^3$ durch

$$\overline{p}(x,y,z) := \int_{[i,i+1]\times[j,j+1]\times[\ell,\ell+1]} p(x_1,y_1,z_1)dx_1dy_1dz_1 \quad ,$$

falls $i < x < i+1$, $j < y < j+1$, $\ell < z < \ell+1$ für ein $(i,j,\ell) \in \{1,\ldots,n\}^3$. Andernfalls sei $\overline{p}(x,y,z) := 0$. Wenn $\overline{(p_i)}$ die lokale Mittelung von p_i bezüglich der Unterteilung $1 < 2 < \cdots < n$ bezeichnet, so gilt $\overline{(p_i)} = (\overline{p})_i$, und mit Korollar 2.3 folgt $H_\theta(p) \leq H_\theta(\overline{p})$. Es gibt eine diskrete Verteilung $P\colon \{1,\ldots,n-1\}^3 \longrightarrow [0,\infty)$ der $\overline{p}$ im Sinne des ersten Teils des Beweises zugeordnet ist, insbesondere $H_\theta(\overline{p}) = H_\theta(P)$. Ferner folgt aus dem Verschwinden von p auf $\{(x,y,z) : xyz > n^2\}$ das Verschwinden von P auf $\{(i,j,\ell) : ij\ell > n^2\}$. Also gilt $\hat{H}_\theta(S_n) \leq H_\theta(D_n)$. $\square$

Als nächstes wird ein Verfahren beschrieben, mit dem man von einer Wahrscheinlichkeitsdichte p zeigen kann, dass sie unter allen Dichten auf $M \subseteq [a,b]^3$ beinahe H_θ-maximierend ist. (Vergleiche hierzu [12, Kapitel 2 und 6].) Sei $p\colon [a,b]^3 \longrightarrow [0,\infty)$ eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte. Wir definieren eine messbare, nach unten beschränkte Funktion

$$h_p : [a,b]^3 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ h_p(x) := \sum_{i=1}^{3} \theta_i(-\log p_i(x_i)) \quad .$$

2.5 Proposition *Sei* $M \subseteq [a,b]^3$ *messbar,* $p\colon M \longrightarrow [0,\infty)$ *eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte und* $\delta > 0$. *Sei* $\sup h_p < +\infty$ *und*

$$\forall x \in M\ \big(p(x) > 0 \Longrightarrow \sup\nolimits_M h_p - \delta \leq h_p(x)\big) \quad .$$

Dann folgt

$$|\hat{H}_\theta(M) - H_\theta(p)| \leq \delta, \quad |\hat{H}_\theta(M) - \sup\nolimits_M h_p| \leq \delta \quad .$$

Beweis: Sei $q\colon M \longrightarrow [0,\infty)$ eine andere beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte. Wir setzen $F\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, F(\epsilon)\colon = H_\theta(\epsilon q + (1-\epsilon)p)$. Mit Lemma 2.2 folgt die

Stetigkeit und Konkavität von F, ausserdem

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} F'(\epsilon) &= \sum_i \theta_i\Big(\int_a^b q_i(x_i)(-\log p_i(x_i))dx_i \;-\; H(p_i)\Big)\\ &= \Big(\sum_i \theta_i \int_{[a,b]^3} q(x)(-\log p_i(x_i))d^3x\Big) \;-\; H_\theta(p)\\ &= \int h_p q\, d^3x \;-\; H_\theta(p) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\ .\end{aligned}$$

Die Voraussetzung impliziert $\sup_M h_p - \delta \le \int h_p p\, d^3x$. Weil $\int h_p p\, d^3x = H_\theta(p)$ ist, folgt $\lim_{\epsilon\to 0} F'(\epsilon) \le \sup h_p - H_\theta(p) \le \delta$. Somit erhalten wir $H_\theta(q) = F(1) \le F(0) + \delta = H_\theta(p) + \delta$. Also

$$\sup_M h_p - \delta \le H_\theta(p) \le \hat{H}_\theta(M) \le H_\theta(p) + \delta \le \sup_M h_p + \delta\ ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Im folgenden, technischen Lemma wird ein Kandidat für eine beinahe H_θ-maximierende Dichte auf S_n vorgeschlagen und wir bestimmen die Grössenordnung des Wachstums seiner Marginalien.

Für Funktionen $f,\, g\colon \mathbb{N} \longrightarrow (0,\infty)$ verwenden wir die Symbole

$$\begin{array}{llll} f(n) \asymp g(n) & (n\to\infty) & \text{für} & \exists\, 0 < K_1 < K_2\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ K_1 \le f(n)/g(n) \le K_2\\ f(n) \sim g(n) & (n\to\infty) & \text{für} & \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1\ . \end{array}$$

Es sei $T_n := \{(x,y,z) \in [1,n]^3 : n^2/2 \le xyz \le n^2\}$. Für feste $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$ definieren wir eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p^{(n)}$ auf T_n durch

$$p^{(n)} : T_n \longrightarrow [0,\infty),\ (x,y,z) \longmapsto C_n x^\alpha y^\beta z^\gamma\ .$$

(C_n sei gerade so gewählt, dass $\int p^{(n)} dxdydz = 1$ ist.)

2.6 Lemma

(1a) Wenn $\alpha \ne \gamma$ ist, gilt

$$p_2^{(n)}(y) \asymp C_n n^{\alpha+\gamma+2} y^{\beta-\min\{\alpha,\gamma\}-1} \qquad (n\to\infty)$$

gleichmässig bezüglich $y \in [1,n]$.

(1b) Wenn $\alpha = \gamma$ ist, gilt

$$p_2^{(n)}(y) \asymp C_n n^{\alpha+\gamma+2} y^{\beta-\gamma-1} \log 2y \qquad (n\to\infty)$$

gleichmässig bezüglich $y \in [1,n]$.

Analoges gilt für $p_1^{(n)}$ und $p_3^{(n)}$.

(2) Sei $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. Dann gilt für $n \to \infty$

$$C_n \asymp \begin{cases} n^{-(\alpha+\beta+2)} & \text{, falls } \alpha \ge \beta > \gamma,\\ n^{-(\alpha+\beta+2)}(\log n)^{-1} & \text{, falls } \alpha > \beta = \gamma,\\ n^{-(\alpha+\beta+2)}(\log n)^{-2} & \text{, falls } \alpha = \beta = \gamma. \end{cases}$$

Beweis: Wir definieren eine Abbildung $q\colon [1,\infty)^3 \longrightarrow [1,\infty), (x,y,z) \longmapsto x^\alpha y^\beta z^\gamma$ und setzen für $y \in [1,\infty)$, $a \in [1,n^2]$

$$M^{(n)}(y,a) := \int_{\{(x,z)\in[1,n]^2 : xz\le a\}} q(x,y,z)dxdz \quad .$$

Dann gilt

$$\forall n\ \forall y \in [1,n] \quad p_2^n(y) = C_n\Big(M^{(n)}(y,\frac{n^2}{y}) - M^{(n)}(y,\frac{n^2}{2y})\Big) \quad . \tag{2.1}$$

Bei der Berechnung von M^n unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $1 \le a \le n$

Es ist $M^{(n)}(y,a) = \int_1^a(\int_1^{ax^{-1}} q(x,y,z)dz)dx$. Eine triviale Rechnung liefert das Ergebnis

$$M^n(y,a) = \frac{y^\beta}{\gamma+1}\Big(\Big(\frac{1}{\alpha-\gamma} - \frac{1}{\alpha+1}\Big)a^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha-\gamma}a^{\gamma+1} + \frac{1}{\alpha+1}\Big) \quad , \tag{2.2}$$

falls $\alpha \neq \gamma$, und

$$M^n(y,a) = \frac{y^\beta}{\gamma+1}\Big(a^{\alpha+1}(\log e)^{-1}\log a - \frac{1}{\alpha+1}a^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}\Big) \quad , \tag{2.3}$$

falls $\alpha = \gamma$.

2. Fall: $n \le a \le n^2$

Wir haben $M^{(n)}(y,a) = \int_{an^{-1}}^n \Big(\int_1^{ax^{-1}} q(x,y,z)dz\Big)\, dx + \int_1^{an^{-1}} \big(\int_1^n q(x,y,z)dz\big)\, dx$. Einige Zeilen Rechnung ergeben

$$\begin{aligned} M^n(y,a) = \frac{y^\beta}{\gamma+1}\Big(&\frac{1}{\alpha-\gamma}a^{\gamma+1}n^{\alpha-\gamma} + \Big(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha-\gamma}\Big)a^{\alpha+1}n^{\gamma-\alpha} \\ &- \frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}n^{\gamma+1} + \frac{1}{\alpha+1}\Big) \quad , \end{aligned} \tag{2.4}$$

falls $\alpha \neq \gamma$, und

$$\begin{aligned} M^n(y,a) = \frac{y^\beta}{\gamma+1}\Big(&a^{\gamma+1}(\log e)^{-1}\log\frac{n^2}{a} - \frac{2}{\alpha+1}n^{\alpha+1} \\ &+ \frac{1}{\alpha+1}a^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}\Big) \quad , \end{aligned} \tag{2.5}$$

falls $\alpha = \gamma$.

Nun bestimmen wir $p_2^n(y)$ mit Hilfe von (2.1). Sei zuerst $y \in [1, \frac{n}{2}]$. Dann ist $n \le n^2(2y)^{-1} \le n^2y^{-1}$, und wir erhalten durch Ersetzen von a durch n^2y^{-1} beziehungsweise $n^2(2y)^{-1}$ in den Ergebnissen (2.2), (2.3) des zweiten Falles folgendes:

Falls $\alpha > \gamma$, so gilt

$$p_2^{(n)}(y) = C_n n^{\alpha+\gamma+2}y^{\beta-\gamma-1}(K_0 + K_1y^{\gamma-\alpha}) \quad , \tag{2.6}$$

wobei

$$K_0 := \frac{1}{(\gamma+1)(\alpha-\gamma)}(a - 2^{-\gamma-1}) > 0, \quad K_1 \in \mathbb{R} \quad .$$

Es gilt ausserdem $\inf_{y\ge1}(K_0+K_1y^{\gamma-\alpha}) > 0$. (Beachte $p_2^{(n)}(y) > 0$ für alle $y \in [1,n]$.)

Falls $\alpha = \gamma$, so gilt

$$p_2^{(n)}(y) = C_n n^{\alpha+\gamma+2} y^{\beta-\gamma-1}(K_2 \log y + K_3) \ , \tag{2.7}$$

wobei $K_2 := (\gamma+1)^{-1}(1-2^{-\gamma-1})(\log e)^{-1} > 0,\ K_3 \in \mathbb{R}$.

Sei jetzt $y \in [n/2, n]$. Wir setzen $\xi := yn^{-1} \in [1/2, 1]$. Dann ist $n^2y^{-1} = n\xi^{-1} \geq n$ und $n^2(2y)^{-1} = n(2\xi)^{-1} \leq n$. Durch Einsetzen in (2.2)–(2.5) bekommen wir nach kleiner Rechnung folgendes:

Falls $\alpha > \gamma$, so gilt

$$p_2^{(n)}(y) = C_n n^{\alpha+\beta+1}(F(\xi) + n^{\gamma-\alpha}A(\xi)) \ , \tag{2.8}$$

wobei $A\colon [1, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, und

$$F(\xi) = \frac{\xi^\beta}{\gamma+1}\left[\frac{1}{\alpha-\gamma}\xi^{-\gamma-1}(1-2^{-\alpha-1}\xi^{\gamma-\alpha}) - \frac{1}{\alpha+1}(1-(2\xi)^{-\alpha-1})\right] \ .$$

Wir bemerken, dass $F(\xi) > 0$ für alle $\xi \in [1/2, 1]$. (Denn: Bei fixiertem ξ ist $F(\xi)$ eine monoton wachsende Funktion von γ. Für $\gamma = 0$ ist die Behauptung jedoch klar.)

Falls $\alpha = \gamma$, so gilt

$$p_2^{(n)}(y) = C_n n^{\alpha+\beta+1}\left(\frac{1}{\gamma+1}(1-2^{-\alpha-1})(\log e)^{-1}\xi^{\beta-\alpha-1}\log n + B(\xi)\right) \ , \tag{2.9}$$

wobei $B\colon [1/2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Aus (2.6)–(2.9) folgen die Behauptungen (1a) und (1b) nun leicht.

Die Aussage über die Grössenordnung des Wachstums von C_n ergibt sich sofort aus (1a), (1b) und der Beziehung

$$\int_1^n p_2^{(n)}(y)dy = 1.$$

(Beachte, dass $\frac{1}{2}(\log y)^2(\log e)^{-1}$ Stammfunktion von $y^{-1}\log y$ ist.) $\square$

Endlich erhalten wir die gewünschte Aussage über die Grössenordnung des Wachstums von $H_\theta(D_n)$.

2.7 Satz *Sei $\theta \in \Theta$ fest gewählt. Dann gilt für $n \to \infty$*

$$\hat{H}_\theta(S_n) \sim (1 - \min_i \theta_i)\log n, \quad H_\theta(D_n) \sim \hat{H}_\theta(S_n) \ .$$

Beweis: Seien die θ_i zuerst paarweise verschieden und ungleich Null. Œ $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > 0$. Wir setzen

$$\gamma := 0,\ \beta := \frac{\theta_2 - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3},\ \alpha := 1 - \frac{2\theta_2\theta_3}{\theta_1(\theta_2+\theta_3)} \ .$$

Dann ist $\alpha > \beta > \gamma$ und wir haben

$$\theta_1(\alpha - \gamma - 1) = \theta_2(\beta - \gamma - 1) = \theta_3(\gamma - \beta - 1) = -\frac{2\theta_2\theta_3}{\theta_2+\theta_3} < 0 \ .$$

Wir betrachten $p^{(n)}\colon T_n \longrightarrow [0, \infty)$, $p^{(n)}(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ und setzen $g := 2^{-h_p(n)}$. Dann ist aufgrund von Lemma 2.6 für $n \to \infty$

$$g(x, y, z) = p_1(x)^{\theta_1}p_2(y)^{\theta_2}p_3(z)^{\theta_3} \asymp n^{-2\theta_2(\beta-\gamma-1)-(1-\theta_3)}(xyz)^{\theta_2(\beta-\gamma-1)}$$

gleichmässig bezüglich $(x,y,z) \in [1,n]^3$. Daraus folgt für $n \to \infty$

$$\min_{S_n} g \asymp n^{-(1-\theta_3)}, \quad \min_{S_n} g \,\Big/ \max_{T_n} g \asymp 1 \ .$$

Für $h_{p(n)}$ bedeutet dies für genügend grosse n

$$|\max_{S_n} h_{p(n)} - (1-\theta_3)\log n| \le \delta, \quad |\max_{S_n} h_{p(n)} - \min_{T_n} h_{p(n)}| \le \delta$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $\delta > 0$. Proposition 2.5 liefert uns

$$|\hat{H}_\theta(S_n) - (1-\theta_3)\log n| \le 2\delta$$

und damit eine Verschärfung des 1. Teils der Behauptung.

Können $\theta_i' s$ zusammenfallen oder Null werden, so erhalten wir mit Lemma 2.6

$$|\max_{S_n} h_{p(n)} - (1-\theta_3)\log n| \le r_n, \quad |\max_{S_n} h_{p(n)} - \min_{T_n} h_{p(n)}| \le r_n$$

mit einer Folge $r_n = o(\log n)$.

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich sofort aus Lemma 2.4. $\square$

Wir haben bewiesen

2.8 Satz *Der typische Wert des logarithmischen unteren Trägerfunktionals ρ_θ verhält sich asymptotisch wie $(1-\min_i \theta_i)\log n$ für $n \to \infty$.*

3 Das untere Trägerfunktional ist nicht additiv

Unter dem unteren Trägerfunktional verstehen wir die Abbildung

$$\zeta_\theta : K^{n\times n\times n} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \zeta_\theta(t) = \begin{cases} 2^{\varrho_\theta(t)} & \text{, falls } t \neq 0, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Sind $t, s \in K^{n\times n\times n}$, so bezeichne $t \oplus s$ das Element in $K^{2n\times 2n\times 2n}$ mit

$$(t \oplus s)_{ij\ell} = \begin{cases} t_{ij\ell} & \text{, falls } 1 \leq i, j, \ell \leq n, \\ s_{i-n\, j-n\, \ell-n} & \text{, falls } n < i, j, \ell \leq 2n, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

In [12] wird für ζ_θ Superadditivität nachgewiesen, d.h.

$$\forall t, s \in K^{n\times n\times n} \quad \zeta_\theta(t \oplus s) \geq \zeta_\theta(t) + \zeta_\theta(s) \ .$$

Für das Gegenstück zu ζ_θ, das sogenannte obere Trägerfunktional ζ^θ, wird dort sogar Additivität bewiesen. Wir werden im folgenden sehen, dass ζ_θ diese Eigenschaft mit ζ^θ nicht teilt.

3.1 Satz *Seien alle $\theta_i \neq 0$. Dann ist das untere Trägerfunktional nicht additiv.*

Beweis: Sei $\theta_i \neq 0$ für alle i. Aus Satz 2.8 folgt die Existenz einer offenen, dichten Teilmenge U_n von $K^{n\times n\times n}$ und einer Folge $(r_n) = o(1)$ mit

$$\forall n\ \forall t \in U_n \quad \zeta_\theta(t) \leq n^{1-\min\theta_i + r_n} \ .$$

Der Tensor $d^{(n)} \in K^{n\times n\times n}$ sei definiert durch

$$d^{(n)}_{ij\ell} := \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j,\ i + \ell = n + 1, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Wählt man die Gleichverteilung auf dem Träger von $d^{(n)}$, so findet man sofort

$$\forall n \quad \zeta_\theta(d^{(n)}) \geq n \ .$$

Zum Tensor $t \in K^{2n\times 2n\times 2n}$ definieren wir die 8 Blöcke u^{pqr} durch

$$(u^{pqr})_{ij\ell} := t_{np+i, nq+j, nr+\ell} \quad (1 \leq i, j, \ell \leq n,\ 0 \leq p, q, r \leq 1) \ .$$

In analoger Weise ordnen wir einer Matrix $\alpha \in K^{2n\times 2n}$ die vier Matrizen $\alpha^{pq} \in K^{n\times n}$ zu. Nun wählen wir $g = (\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathrm{Gl}^3_{2n}$ mit $\alpha^{00} = \alpha^{10} = \alpha^{11} = I_n$, $\alpha^{01} = 0$. Dann gilt $(g(t \oplus s))^{111} = t + s$ für alle $t, s \in K^{n\times n\times n}$. Insbesondere folgt

$$\forall t \in K^{n\times n\times n} \quad \zeta_\theta(t \oplus (-t + d^{(n)})) \geq \zeta_\theta(d^{(n)}) \geq n \ .$$

Offenbar ist für alle n der Durchschnitt von U_n mit $(d^{(n)} - U_n)$ nicht leer, es existieren also $t^{(n)} \in U_n$ mit $s^{(n)} := -t^{(n)} + d^{(n)} \in U_n$. Wir erhalten somit für alle n

$$\zeta_\theta(t^{(n)}) + \zeta_\theta(s^{(n)}) \leq 2\, n^{1-\min_i\theta_i + r_n}, \quad \zeta_\theta(t^{(n)} \oplus s^n) \geq n \ ,$$

woraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_\theta(t^{(n)} \oplus s^n)}{\zeta_\theta(t^{(n)}) + \zeta_\theta(s^{(n)})} = \infty$$

folgt. □

4 Die Degeneration lässt sich nicht ausdehnen

In [10, Abschnitt 3] wird gezeigt, dass sich die auf dem positiven Kegel $\mathcal{B}^+$ der Tensorklassen definierte Restriktionsordnung $\leq$ nicht in mit den Ringoperationen verträglicher Weise auf den ganzen Ring $\mathcal{B}$ der verallgemeinerten Tensorklassen ausdehnen lässt. Überraschenderweise erlaubt die asymptotische Präordnung $\lesssim$ eine solche Ausdehnung, und dies ist der Schlüssel zur Theorie der asymptotischen Spektren von Tensoren (siehe [11]). Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass die Degenerationsordnung $\trianglelefteq$ keine solche Ausdehnung erlaubt.

Sei im folgenden $\operatorname{char} K = 0$. Wir betrachten die rationale Operation von $G := \mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ auf $U \otimes V \otimes W$ vermöge $((\alpha, \beta, \gamma), t) \longmapsto (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)t$. Sei $t \in U \otimes V \otimes W$, $\varphi_t \colon G \longrightarrow U \otimes V \otimes W, g \longmapsto gt$ der zugehörige Bahnmorphismus und $\mathrm{Stab}(t) := \varphi_t^{-1}\{t\}$ der Stabilisator von t. Dann ist bekanntlich der Tangentialraum von $\mathrm{Stab}(t)$ bei 1 gleich dem Kern des Differentials $d_1\varphi_t$ an der Stelle 1 (cf. [5, Kap. 2, §2.2]). Insbesondere gilt $\dim \mathrm{Stab}(t) = \dim \ker d_1\varphi_t$. Durch leichte Rechnung erhält man

$$\begin{aligned}\ker d_1\varphi_t = \{&(X, Y, Z) \in \mathrm{End}(U) \times \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(W) : \\ &(X \otimes \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_U \otimes Y \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_V \otimes Z)t = 0\} \ .\end{aligned}$$

Ist $U = K^m, V = K^n, W = K^p$, so liegt $(X, Y, Z) \in K^{m\times m} \times K^{n\times n} \times K^{p\times p}$ genau dann in $\ker d_1\varphi_t$, wenn

$$\text{(4.1)} \qquad \forall i \leq m, j \leq n, \ell \leq p \quad \sum_{\rho=1}^{m} X_{i\rho} t_{\rho j \ell} + \sum_{\rho=1}^{n} Y_{j\rho} t_{i \rho \ell} + \sum_{\rho=1}^{p} Z_{\ell\rho} t_{ij\rho} = 0 \ .$$

Den Koordinatentensor der Matrixmultiplikation $K^{e\times h} \times K^{h\times \ell} \longrightarrow K^{e\times \ell}$ bezeichnen wir wie üblich mit $\langle e, h, \ell\rangle \in K^{e\times h} \otimes K^{h\times \ell} \otimes K^{\ell\times e}$. Wir definieren nun eine Abbildung $\sigma \colon \mathcal{B}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ durch $\sigma(b) := \dim \mathrm{Stab}(t)$, wo (U, V, W, t) bündiger Repräsentant von b ist. Offenbar ist σ wohldefiniert.

4.1 Bemerkung *Seien $a, b \in \mathcal{B}^+$ von gleichem Format und $a \trianglelefteq b$. Dann ist $\sigma(a) \geq \sigma(b)$.*

Beweis: Seien etwa $a = [t]$, $b = [s]$ mit bündigen $t, s \in U \otimes V \otimes W$. $a \trianglelefteq b$ bedeutet $\overline{Gt} \subseteq \overline{Gs}$, also ist $\dim \overline{Gt} \leq \dim \overline{Gs}$. Andererseits gilt allgemein (cf. [5, Kap. 2, §2.5]

$$\dim \mathrm{Stab}(t) + \dim \overline{Gt} = \dim G \ .$$

Hieraus erhalten wir $\sigma(a) \geq \sigma(b)$. $\square$

4.2 Lemma *(Vergleiche mit [3].)*

(i) σ ist additiv.

(ii) $\forall e, h, \ell \geq 1 \quad \sigma(\langle e, h, \ell\rangle) = e^2 + h^2 + \ell^2 - 1$.

Beweis: (i) Seien $t^i \in K^{m_i} \otimes K^{n_i} \otimes K^{p_i}$ bündig $(i = 1, 2)$. Eine leichte Rechnung unter Verwendung von (4.1) zeigt: Für alle $(X, Y, Z) \in K^{(m_1+m_2)\times(m_1+m_2)} \times K^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)} \times K^{(p_1+p_2)\times(p_1+p_2)}$ gilt

$$(X, Y, Z) \in \ker d_1\varphi_{t^1 \oplus t^2} \iff \begin{cases} \forall i, j \in \{1, 2\} & (i \neq j \Rightarrow X_{ij} = Y_{ij} = Z_{ij} = 0) \ , \\ \forall i \in \{1, 2\} & (X_{ii}, Y_{ii}, Z_{ii}) \in \ker d_1\varphi_{t^i} \ . \end{cases}$$

(Wir unterteilen hier die auftretenden Matrizen in naheliegender Weise in vier Blöcke.) Hieraus folgt

$$\ker d_1\varphi_{t^1\oplus t^2} \simeq \ker d_1\varphi_{t^1} \oplus \ker d_1\varphi_{t^2} \ ,$$

womit Teil (i) des Lemmas bewiesen ist.

(ii) Bekanntlich ist $\langle e,h,\ell\rangle_{(\alpha\beta)(\gamma\epsilon)(\eta\xi)} = \delta_{\beta\gamma}\delta_{\epsilon\eta}\delta_{\xi\alpha}$. Bedingung (4.1) bedeutet hier

$$\forall \alpha,\xi \le e,\ \beta,\gamma \le h,\ \epsilon,\eta \le \ell \quad \delta_{\epsilon\eta}X_{(\alpha\beta)(\xi\gamma)} + \delta_{\alpha\xi}Y_{(\gamma\epsilon)(\beta\eta)} + \delta_{\beta\gamma}Z_{(\eta\xi)(\epsilon\alpha)} = 0 \ .$$

Man sieht leicht, dass die Projektion

$$\ker d_1\varphi_{\langle e,h,\ell\rangle} \longrightarrow K^{h^2-h} \times K^{\ell^2-\ell} \times K^{e^2-e} \times D \ ,$$

welche das Element (X,Y,Z) nach

$$\Big([X_{(1\beta)(1\gamma)}]_{\beta\neq\gamma},\ [Y_{(1\epsilon)(1\eta)}]_{\epsilon\neq\eta},\ [Z_{(1\alpha)(1\xi)}]_{\alpha\neq\xi},\ \big([X_{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}],\ [Y_{(\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon)}],\ [Z_{(\eta\xi)(\eta\xi)}]\big)\Big)$$

abbildet, ein Isomorphismus ist, wenn D die folgende Menge bezeichnet:

$$\Big\{(\lambda,\mu,\upsilon) \in K^{e\times h} \times K^{h\times\ell} \times K^{\ell\times e} : \forall \alpha \le e,\ \beta \le h,\ \epsilon \le \ell \quad \lambda_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\epsilon} + \upsilon_{\epsilon\alpha} = 0\Big\} \ .$$

Auch die lineare Abbildung

$$K^e \times K^h \times K^{\ell-1} \to D,\ ((a_\alpha),(b_\beta),(c_\epsilon)_{\epsilon>1}) \mapsto (\lambda,\mu,\nu)$$

definiert durch

$$\lambda_{\alpha\beta} = -(a_\alpha + b_\beta),\ \mu_{\beta\epsilon} = b_\beta + c_\epsilon,\ \nu_{\epsilon\alpha} = a_\alpha - c_\epsilon$$

ist eine Bijektion (setze $c_1 = 0$). Wir erhalten somit

$$\sigma(\langle e,h,\ell\rangle) = \dim\ker d_1\varphi_{\langle e,h,\ell\rangle} = e^2 + h^2 + \ell^2 - 1 \ ,$$

womit Teil (ii) des Lemmas bewiesen ist. □

Wir verwenden die übliche Bezeichnung $(\zeta_{(1)}(a), \zeta_{(2)}(a), \zeta_{(3)}(a))$ für das Format einer Tensorklasse $a \in \mathcal{B}^+$.

4.3 Bemerkung *Seien $a_i, b_i \in \mathcal{B}^+, a_i \trianglelefteq b_i$ für $i \in \{1,2\}$. Ferner sei*

(4.2) $$\forall j \in \{1,2,3\}\ \exists i \in \{1,2\} \quad \zeta_{(j)}(a_i) = \zeta_{(j)}(b_i)$$

vorausgesetzt. Dann folgt unter der Annahme, dass sich die Degenerationsordnung $\trianglelefteq$ verträglich mit Addition und Multiplikation auf den Ring $\mathcal{B}$ ausdehnen lässt, dass

$$\sigma(a_1b_2) + \sigma(a_2b_1) \ge \sigma(a_1a_2) + \sigma(b_1b_2) \ .$$

Beweis: Unter der Annahme folgt $0 \trianglelefteq b_1 - a_1$, $0 \trianglelefteq b_2 - a_2$ und daraus $0 \trianglelefteq (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$, also $a_1b_2 + a_2b_1 \trianglelefteq a_1a_2 + b_1b_2$. Ferner ist

$$\forall j \in \{1,2,3\} \quad \zeta_{(j)}(a_1b_2 + a_2b_1) = \zeta_{(j)}(a_1a_2 + b_1b_2) \ .$$

(Denn dies ist äquivalent zu $\forall j\ (\zeta_{(j)}(b_1) - \zeta_{(j)}(a_1)(\zeta_{(j)}(b_2) - \zeta_{(j)}(a_2)) = 0$, was gerade durch (4.2) garantiert wird.) Aus der Bemerkung 4.1 und der Additivität von σ folgt die Behauptung. □

4.4 Satz *Die Degenerationsordnung lässt sich nicht verträglich mit Addition und Multiplikation auf den Ring $\mathcal{B}$ ausdehnen.*

Beweis: Wir argumentieren indirekt und verwenden Bemerkung 4.3 mit

$$a_1 = \langle e, 1, 2\rangle + \langle 1, e-1, 1\rangle,\ b_1 = 2e+1,\ a_2 = \langle 1, 2, 1\rangle,\ b_2 = 2\ .$$

Die Tensorklassen a_1, a_2 haben das Format $(2e-1, e+1, 2e+1)$, beziehungsweise $(2,2,1)$. Die Bedingung (4.2) ist also erfüllt, denn $\zeta_{(1)}(a_2) = \zeta_{(1)}(b_2)$, $\zeta_{(2)}(a_2) = \zeta_{(2)}(b_2)$ und $\zeta_{(3)}(a_1) = \zeta_{(3)}(b_1)$. Schönhages Beispiel zur Widerlegung der Additivität des Grenzrangs in [8] zeigt, dass $a_1 \trianglelefteq b_1$. Trivialerweise ist $a_2 \trianglelefteq b_2$. Nun ist $a_1 a_2 = \langle e, 2, 2\rangle + \langle 1, 2(e-1), 1\rangle$, woraus $\sigma(a_1 a_2) + \sigma(b_1 b_2) = 5e^2 + 0(e)$ mit Lemma 4.2 folgt. Andererseits ist $\sigma(a_1 b_2) + \sigma(a_2 b_1) = 4e^2 + 0(e)$. Dies steht im Widerspruch zu dem in Bemerkung 4.3 gezogenen Schluss, wenn e genügend gross gewählt wird. $\square$

5 Eine Rationalitätseigenschaft der Degeneration

Sei G eine lineare algebraische Gruppe (bezüglich des Körpers K) und V ein rationaler G-Modul. Elemente $t, s \in V$ nennen wir isomorph, wenn sie in der gleichen Bahn liegen: $t \simeq s \iff \exists g \in G\ t = gs$. Das Element t heisst Degeneration von s, wenn t im Zariski-Abschluss der Bahn von s liegt: $t \trianglelefteq s :\iff t \in \overline{Gs}$. Offensichtlich ist $\trianglelefteq$ transitiv und mit elementaren algebraisch-geometrischen Überlegungen folgt

$$\forall t, s \in V \quad (t \trianglelefteq s,\ s \trianglelefteq t \Longrightarrow t \simeq s)\ . \tag{5.1}$$

$\trianglelefteq$ definiert also eine Partialordnung auf der Menge der Bahnen.

Im folgenden verallgemeinern wir den Degenerationsbegriff bezüglich nicht notwendig algebraisch abgeschlossener Körper k und untersuchen, ob der Schluss (5.1) weiterhin Gültigkeit hat.

Sei $R \subseteq K$ ein Unterring, V ein K-Vektorraum. Eine R-Struktur auf V ist ein freier R-Untermodul V_R von V, so dass die durch die Inklusion induzierte K-lineare Abbildung $K \otimes_R V \longrightarrow V$ ein Isomorphismus ist. Äquivalent zur letzteren Bedingung ist, dass jede R-Basis von V_R auch K-Basis von V ist. Die Elemente von V_R nennt man die R-rationalen Punkte von V. Ist W ein weiterer K-Vektorraum mit R-Struktur und $\varphi\colon V \longrightarrow W$ K-linear, so heisst φ über R definiert, falls $\varphi(V_R) \subseteq W_R$. Trägt auch der K-Vektorraum U eine R-Struktur, so heisst eine K-bilineare Abbildung $f\colon U \times V \to W$ über R definiert, falls $f(U_R \times V_R) \subseteq W_R$. Ein K-Unterraum V' von V heisst über R definiert, falls $(V')_R := V' \cap V_R$ eine R-Struktur auf V' ist. Äquivalent hierzu ist: $(V')_R$ frei und $V' = \mathrm{lin}_K (V')_R$. Ist R_1 ein R enthaltender Unterring von K, so wird durch $V_{R_1} := \mathrm{lin}_{R_1} V_R$ eine R_1-Struktur auf V definiert.

Sei jetzt k ein Unterkörper von K mit $k \subseteq k((\epsilon)) \subseteq K$, wo $k((\epsilon))$ den Quotientenkörper des Rings der formalen Potenzreihen in der Unbestimmten ϵ bezeichnet. Der Einfachheit halber betrachten wir als Gruppen G nur Produkte von vollen linearen Gruppen: $G = \prod_{i=1}^r \mathrm{Gl}_{m_i}(K)$. Als Untergruppe G_k der "k-rationalen Punkte von G" setzen wir $G_k := \prod_{i=1}^r \mathrm{Gl}_{m_i}(k)$. Sei nun eine rationale Darstellung D von G auf einem Vektorraum V gegeben, der ausserdem eine k-Struktur trägt. Wir nennen D über k definiert, falls die Matrixdarstellung $\tilde{D}\colon G \longrightarrow \mathrm{Gl}_n(K)$ von D bezüglich einer k-Basis von V_k durch rationale Funktionen mit Koeffizienten in k gegeben ist. Wir bekommen so eine Darstellung $D_k\colon G_k \longrightarrow \mathrm{GL}(V_k), g \longmapsto D(g) \restriction V_k$. Mit den Bezeichnungen $R := k[[\epsilon]]$, $L := k((\epsilon))$ sind $V_R := \mathrm{lin}_R V_k$, $V_L := \mathrm{lin}_L V_k$ R-beziehungsweise L-Strukturen auf V und D ist über L definiert. Der Ringmorphismus $R \longrightarrow k$, $\sum_{i \geq 0} \alpha_i \epsilon^i \longmapsto \alpha_0$ liefert via Skalaerweiterung eine k-lineare Abbildung $V_R \longrightarrow V_k$, $t \longmapsto (t)_{\epsilon=0}$, die bezüglich einer Basis (v_i) von V_k folgendermassen wirkt: $\forall (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n\ (\sum \xi_i v_i)_{\epsilon=0} = \sum (\xi_i)_{\epsilon=0} v_i$. Nun sind wir in der Lage den Degenerationsbegriff zu verallgemeinern.

5.1 Definition *Seien $t, s \in V_k$.*

(1) t und s sind k-isomorph ($t \simeq s$), falls $t = gs$ für ein $g \in G_k$.

(2) t ist k-Degeneration von s, in Zeichen $t \trianglelefteq_k s$, falls ein $g \in G_L$ existiert mit $gs \in V_R$ und $(gs)_{\epsilon=0} = t$.

5.2 Satz *Diese Definition ist konsistent mit der früheren, wenn k algebraisch abgeschlossen ist.*

Für einen Beweis verweisen wir auf [5, Kap. 3, §2.3, Lemma 1] und [10, Lemma 5.7].

5.3 Lemma

(1) $\trianglelefteq_k$ *ist transitiv.*

(2) $\forall t, t', s, s' \in V_k \quad (t \simeq_k t',\ s \simeq_k s',\ t \trianglelefteq_k s \Longrightarrow t' \trianglelefteq_k s')$.

(3) $\forall t, s \in V_k \quad (t \trianglelefteq_k s \Longrightarrow t \trianglelefteq s)$.

Beweis:

(1) Seien $t, s, u \in V_k$, $t \trianglelefteq_k s$, $s \trianglelefteq_k u$, etwa $hu = s + \epsilon s_1$, $gs = t + \epsilon t_1$ mit $h, g \in G_L$, $s_1, t_1 \in V_R$. Nun existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\epsilon^N gv \in V_R$ für alle $v \in V_R$. (Wähle N so, dass $\epsilon^N gv_i \in V_R$ für alle Elemente v_i einer k-Basis (v_i) von V_k.) Der Morphismus $R \longrightarrow R$, $\epsilon \longmapsto \epsilon^{N+1}$ liefert $h(\epsilon^{N+1})u = s + \epsilon^{N+1} s_1(\epsilon^{N+1})$ mit naheliegenden Bezeichnungen. Also

$$gh(\epsilon^{N+1})u = t + \epsilon(t_1 + \epsilon^N g s_1(\epsilon^{N+1})),\ t_1 + \epsilon^N g s_1(\epsilon^{N+1}) \in V_R \ ,$$

woraus $t \trianglelefteq_k u$ folgt.

Die Behauptung (2) ist klar.

(3) Sei $gs = t + \epsilon t_1$ mit $g \in G_L, t_1 \in V_R$. Bezüglich einer k-Basis identifizieren wir V_k mit k^n. Nun existiert ein $\tilde{g} \in G_{k(\epsilon)}$ mit $\tilde{g}s - gs \in \epsilon V_R$. (Denn: Die ϵ-adische Bewertung macht L zu einem topologischen Raum, in dem $k(\epsilon)$ dicht liegt. Wir versehen L^n beziehungsweise $G_L \subseteq \prod L^{m_i \times m_i}$ mit der Spurtopologie der Produkttopologie. Dann ist $G_{k(\epsilon)}$ dicht in G_L und die Abbildung $G_L \longrightarrow V_L = L^n, g \longmapsto gs$ ist stetig.) Wir haben also $\tilde{g}s = t + \epsilon \tilde{t}_1$ mit $\tilde{t}_1 \in V_{k(\epsilon)} \cap V_R = (k(\epsilon) \cap R)^n$. Wir fassen jetzt die Elemente $F \in k(\epsilon)^m$ als rationale Funktionen $K \supset \operatorname{def} F \longrightarrow K^m$ auf. Dann ist $0 \in \operatorname{def} \tilde{t}_1$. Wir setzen $\Delta := \{\theta \in K : \theta \in \operatorname{def} \tilde{g} \cap \operatorname{def} \tilde{t}_1, (\det \tilde{g}_1 \cdots \det \tilde{g}_r)(\theta) \neq 0\}$, wobei $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_r)$ mit $\tilde{g}_i \in k(\epsilon)^{m_i \times m_i}$. Δ ist eine offene, dichte Teilmenge von $\operatorname{def} \tilde{t}_1$. Ausserdem gilt $\tilde{g}(\theta) \in G$ und $\tilde{g}(\theta)s = t + \theta \tilde{t}_1(\theta)$ für alle $\theta \in \Delta$. Also ist $(t + \epsilon \tilde{t}_1)(\Delta) \subseteq Gs$ und mit der Stetigkeit rationaler Funktionen folgt $(t + \epsilon \tilde{t}_1)(\operatorname{def} \tilde{t}_1) \subseteq \overline{Gs}$. Insbesondere folgt aus $0 \in \operatorname{def} \tilde{t}_1$ die behauptete Beziehung. □

Wir stellen uns nun die Frage, ob die Aussagen

(PE) $\qquad \forall t, s \in V_k \quad (t \trianglelefteq_k s,\ s \trianglelefteq_k t \Longrightarrow t \simeq_k s)$

beziehungsweise

(SPE) $\qquad \forall t, s \in V_k \quad (t \trianglelefteq_k s,\ t \simeq s \Longrightarrow t \simeq_k s)$

wahr sind? Wegen (5.1) und Lemma 5.3 impliziert (SPE) stets (PE). Wir nennen (PE) die Partialordnungseigenschaft und (SPE) die starke Partialordnungseigenschaft.

Wir zeigen nun, dass (SPE) stets erfüllt ist, wenn die Gruppe G ein Torus ist: $G = (K^\times)^r$. Dazu benötigen wir einige Tatsachen über Tori und deren Darstellungen. Ein Morphismus $\chi \colon G \longrightarrow K^\times$ algebraischer Gruppen heisst Charakter von G. Beispiele sind die Projektionen x_i auf die i-te Koordinate. Die Menge $X(G)$ der Charaktere bildet eine abelsche Gruppe und

$$\mathbb{Z}^r \longrightarrow X(G), (a_1, \ldots, a_r) \longmapsto x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Ist V ein rationaler G-Modul, so definieren wir dessen Gewichtsräume durch $V_\psi := \{t \in V : \forall g \in G\ gt = \psi(g)t\}$ für alle $\psi \in X(G)$ und erhalten die sogenannte Gewichtszerlegung $V = \oplus_\psi V_\psi$. Ein Element $t \in V$ lässt sich also schreiben als $t = \sum t_\psi$, wobei $t_\psi \in V_\psi$ und über alle $\psi \in X(G)$ summiert wird. Wir nennen $\Gamma(t) := \{\psi \in X(G) : t_\psi \neq 0\}$ die Gewichtsmenge von t. Offenbar gilt

$$\forall t, s \in V \quad (t \simeq s \Longrightarrow \Gamma(t) = \Gamma(s)) \ .$$

(Vergleiche hierzu [5, Kap. 3, §1.3].)

5.4 Satz *Sei $G = (K^\times)^r$ ein Torus und D eine über k definierte rationale Darstellung von G auf V. Dann gilt*

(1) $\forall t, s \in V_k \quad (t \trianglelefteq_k s \Rightarrow \Gamma(t) \subseteq \Gamma(s))$,

(2) $\forall t, s \in V_k \quad (t \trianglelefteq_k s, \Gamma(t) = \Gamma(s) \Rightarrow t \simeq_k s)$.

Beweis: Seien Œ $t, s \neq 0$ und $(gs)_{\epsilon=0} = t$ mit $g \in G_L$. Etwa

$$g = (\epsilon^{a_1}(\alpha_1 + \epsilon A_1), \dots, \epsilon^{a_r}(\alpha_r + \epsilon A_r)) \ ,$$

wobei $a_i \in \mathbb{Z}$, $A_i \in R$ und $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in G_k$. Für einen Charakter $\psi = x_1^{\psi_1} \cdots x_r^{\psi} \in X(G)$, $(\psi_1, \dots, \psi_r) \in \mathbb{Z}^r$ gilt $\psi(g) = \epsilon^{\sum a_i \psi_i}(\psi(\alpha) + \epsilon B_\psi)$ mit geeignetem $B_\psi \in R$. Wir setzen

$$p := \min \left\{ \sum a_i \psi_i : \psi \in \Gamma(s) \right\}, \ \Gamma := \left\{ \psi \in \Gamma(s) : \sum a_i \psi_i = p \right\} \ .$$

Sei nun $s = \sum_{\psi \in \Gamma(s)} s_\psi$ mit $s_\psi \in V_\psi$. Dann folgt

$$gs = \sum_{\psi \in \Gamma(s)} \psi(g) s_\psi = \epsilon^p \Big(\sum_{\psi \in \Gamma} \psi(\alpha) s_\psi + \epsilon S \Big)$$

mit geeignetem $S \in V_R$. Also $p = 0$, $t = \sum_{\psi \in \Gamma} \psi(\alpha) s_\psi$ und $\Gamma(t) = \Gamma$. Damit ist (1) gezeigt. Ist ausserdem $\Gamma(t) = \Gamma(s)$, so haben wir $t = \sum_{\psi \in \Gamma(s)} \psi(\alpha) s_\psi = \alpha s$, also $t \simeq_k s$. □

5.5 Korollar *Die starke Partialordnungseigenschaft ist erfüllt, wenn die Gruppe G ein Torus ist.*

Im folgenden werden wir beweisen, dass (SPE) nicht nur für algebraisch abgeschlossene Körper, sondern auch für reell abgeschlossene Körper und die p-adischen Zahlkörper gilt. Wir notieren zunächst einige Fakten über die p-adischen Zahlkörper. Sei p ein Primzahl. $\mathbb{Z}_p$ bezeichne den Ring der ganzen p-adischen Zahlen, $\mathbb{Q}_p$ den Körper der p-adischen Zahlen und $v_p : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die p-adische Bewertung. Die Metrik d mit $d(x, y) := 2^{-v_p(x-y)}$ induziert auf $\mathbb{Q}_p$ die p-adische Topologie. Die Bewertungsteilbarkeit $|$ wird festgelegt durch

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}_p \quad (x \mid y :\Longleftrightarrow v_p(x) \leq v_p(y)) \ .$$

Schliesslich definieren wir noch 1-stellige Relationen P_N für $N \geq 2$ durch

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p \quad (P_N(x) :\Longleftrightarrow \exists y \in \mathbb{Q}_p \ y^N = x) \ .$$

5.6 Lemma *Die Mengen $A = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{Q}_p^2 : \xi \mid \eta\}$ und $B_N = \{\xi \in \mathbb{Q}_p : P_N(\xi)\}$ sind abgeschlossen in der p-adischen Topologie und für deren Komplemente gilt*

$$\mathrm{cl}(A^c) \subseteq A^c \cup \{(0,0)\}, \quad \mathrm{cl}(B_N^c) \subseteq B_N^c \cup \{0\} \ .$$

(cl bezeichnet den Abschluss bezüglich der p-adischen Topologie.)

Beweis: Sei (ξ_n) eine gegen $\xi \neq 0$ konvergierende Folge in $\mathbb{Q}_p$. Dann ist $v_p(\xi_n)$ schliesslich konstant und gleich $v_p(\xi)$. Daraus folgt die Behauptung für A.

Sei $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times$, etwa $\xi = p^m \rho$, wobei $m \in \mathbb{Z}, \rho \in \mathbb{Z}_p^\times$. Dann gilt:

$$P_N(\xi) \Longleftrightarrow N|m, \ P_N(\rho) \ .$$

Um zu beschreiben, wann eine p-adische Einheit ρ N-te Potenz ist, setzen wir $N = p^\ell r$, wo $(p, r) = 1$. Sei $\pi\colon \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p/p^{2\ell+1}\mathbb{Z}_p$. Dann gilt

$$\forall \rho \in \mathbb{Z}_p^\times \quad \left(P_N(\rho) \Longleftrightarrow \pi(\rho) \text{ ist } N\text{-te Potenz in } \mathbb{Z}_p/p^{2\ell+1}\mathbb{Z}_p\right) \ .$$

Begründung: Betrachte das Polynom $F(T) = T^N - \rho \in \mathbb{Z}_p[T]$. Sei $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ mit $F(\gamma) \equiv 0(\operatorname{mod} p^{2\ell+1})$. Dann ist $v_p(F'(\gamma)) = \ell$. Bekanntlich folgt aus diesen Bedingungen die Existenz einer Nullstelle von F in $\mathbb{Z}_p$ (cf. [9, Kap. 2, §2]).

Aus diesen Feststellungen bekommen wir leicht die Behauptung für B_N. □

Wesentlich für uns ist nun die Tatsache, dass die Theorie von $\mathbb{Q}_p$ Quantorenelimination erlaubt. Das bedeutet folgendes: Sei L die formale Sprache mit den 2-stelligen Funktionszeichen $+, *$, dem einstelligen Funktionszeichen $-$, den Konstanten $0, 1$, dem 2-stelligen Relationszeichen $|$ und den 1-stelligen Relationszeichen P_N für $N \geq 2$. $\mathrm{Fml}(L)$ bezeichne die Menge der Formeln über L und $\mathrm{Fr}(\varphi)$ die Menge der freien Variablen einer Formel $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Dann gibt es zu jedem $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ ein quantorenfreies $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$ mit $\mathrm{Fr}(\psi) \subseteq \mathrm{Fr}(\varphi)$ so, dass $\forall(\varphi \leftrightarrow \psi)$ wahr in $\mathbb{Q}_p$ ist. (Vergleiche [7, Kap. 4, §6].)

Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ quantorenfrei mit $\mathrm{Fr}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Wir nennen die Menge $\{\xi \in \mathbb{Q}_p^n : \varphi$ wahr bei Belegung der x_i mit $\xi_i\}$ eine konstruierbare Teilmenge von $\mathbb{Q}_p^n$. Offenbar bilden die konstruierbaren Teilmengen von $\mathbb{Q}_p^n$ gerade die von den Mengen

$$\{\xi \in \mathbb{Q}_p^n : f(\xi) \mid g(\xi)\},\ \{\xi \in \mathbb{Q}_p^n : P_N(h(\xi))\} \quad (f, g, h \in \mathbb{Q}_p[T_1, \dots, T_n], N \geq 2)$$

erzeugte Boolesche Algebra von Teilmengen von $\mathbb{Q}_p^n$. Aus der Quantorenelimination folgt, dass Projektionen konstruierbarer Mengen wieder konstruierbar sind. Liegt eine über $\mathbb{Q}_p$ definierte Darstellung von G auf $V = K^n$ vor, so sind deshalb die Bahnen $G_{\mathbb{Q}_p} t \subseteq V_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Q}_p^n$ über $\mathbb{Q}_p$ rationaler Elemente t konstruierbar.

Bei reell abgeschlossenen Körpern k herrschen analoge Verhältnisse. Die zugrunde liegende formale Sprache hat die Funktionszeichen $+$, $*$, $-$, die Konstanten $0, 1$ und das 2-stellige Relationszeichen $<$. Auch hier ist Quantorenelimination möglich, woraus wieder Konstruierbarkeit der Bahnen $G_k t \subseteq V_k = k^n$ für $t \in V_k$ bei einer über k definierten Darstellung folgt (cf. [7, Kap. 4, §2)]). Offenbar wird die Boolesche Algebra der konstruierbaren Teilmenge von k^n durch die Mengen

$$\{\xi \in k^n : g(\xi) > 0\} \qquad (g \in k[T_1, \dots, T_n])$$

erzeugt.

5.7 Bemerkung *Wird $M \subseteq K^n$ von Polynomen aus $K[T_1, \dots, T_n]$ ausgeschnitten, so ist $M \cap k^n$ Nullstellengebilde von Polynomen aus $k[T_1, \dots, T_n]$.*

Beweis: Œ sei M das Nullstellengebilde nur eines Polynoms $P \in K[T_1, \dots, T_n]$. Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine k-Basis von K. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_1 \subseteq I$ und für alle $i \in I_1$ Polynome $p_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ mit $P = \sum_{i \in I_1} e_i p_i$. Offenbar ist $M \cap k^n = \{\xi \in k^n : P(\xi) = 0\} = \{\xi \in k^n : \forall i \in I_1\ p_i(\xi) = 0\}$. □

5.8 Satz *Die starke Partialordnungseigenschaft ist erfüllt, wenn der Körper k algebraisch abgeschlossen, reell abgeschlossen oder ein p-adischer Zahlkörper ist.*

Beweis: Für algebraisch abgeschlossene Körper ist die Aussage bekannt. Aufgrund des Transferprinzips können wir uns bei den reell abgeschlossenen Körpern auf den Fall $k = \mathbb{R}$ beschränken (siehe [1, Kap. 5]). Wir wählen eine k-Basis von V_k, sei also

Œ $V_k = k^n$. τ bezeichne die euklidische Topologie beziehungsweise die p-adische Topologie auf V_k, je nachdem, ob $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{Q}_p$ ist.

(i) $\forall t, s \in V_k \quad (t \trianglelefteq_k s \Longrightarrow t \in cl_\tau(G_k s))$.

Begründung: Es genügt den Beweis von Lemma 5.3(3) geringfügig zu modifizieren. Wenn k mit der Topologie τ versehen wird, gilt mit den dortigen Bezeichnungen: $t + \epsilon\tilde{t}_1 \colon k \supset k \cap \operatorname{def} \tilde{t}_1 \longrightarrow k^n$ ist stetig, $k \cap \Delta$ ist eine dichte Teilmenge von $k \cap \operatorname{def} \tilde{t}_1$ und $(t + \epsilon\tilde{t}_1)(k \cap \Delta) \subseteq G_k\, s$. Folglich $t \in \mathrm{cl}_\tau(G_k\, s)$.

(ii) Wir haben bereits festgestellt, dass die Bahnen $G_k t \subseteq V_k$ für jedes $t \in V_k$ konstruierbar sind.

(iii) Wir definieren die Dimension einer beliebigen Teilmenge M von V als die Dimension ihres Zariski-Abschlusses in V: $\dim M := \dim \overline{M}$. Man überlegt sich sofort

$$M \subseteq N \Longrightarrow \dim M \leq \dim N,\ \dim(M_1 \cup \ldots \cup M_m) = \max_i \dim M_i \ .$$

(iv) Behauptung: Für alle nichtleeren, konstruierbaren $M \subseteq V_k$ gilt

$$\dim(\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus M) < \dim M \ .$$

Überlegen wir uns zuerst, dass aus der Behauptung der Satz folgt. Seien $t, s \in V_k$, $t \trianglelefteq_k s$, $t \not\simeq_k s$. Dann $G_k\, t \subseteq \mathrm{cl}_\tau(G_k\, s) \setminus G_k\, s$, also $\dim G_k\, t < \dim G_k s$. Wegen $\dim G_k\, t = \dim \overline{G_k\, t} = \dim \overline{G\, t}$ und $\dim G_k\, s = \dim \overline{G\, s}$ ist $t \simeq s$ ausgeschlossen.

Wir führen jetzt den Beweis der Behauptung im Fall $k = \mathbb{Q}_p$, im Fall $k = \mathbb{R}$ verfährt man analog. Wir nennen eine konstruierbare Menge einfach, wenn man sie als endlichen Durchschnitt von Mengen der Form

$$\{\xi \in \mathbb{Q}_p^n : f(\xi) \mid g(\xi)\},\ \{\xi \in \mathbb{Q}_p^n : P_N(h(\xi))\} \quad (f, g, h \in \mathbb{Q}_p[T_1, \ldots, T_n],\ N \geq 2)$$

und deren Komplementen erhält.

(a) M einfach, $M \neq \emptyset$, $\overline{M}$ irreduzibel $\Longrightarrow \dim(\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus M) < \dim M$.

Wegen Lemma 5.6 können wir M in der Form

$$M = \{f_1 \nmid g_1, \ldots, f_\mu \nmid g_\mu, \neg P_{N_1}(h_1), \ldots, \neg P_{N_\nu}(h_\nu)\} \cap A$$

schreiben, wobei A in k^n τ-abgeschlossen ist und $f_j, g_j, h_\ell \in \mathbb{Q}_p[T_1, \ldots, T_n]$ sind. Ebenfalls aus Lemma 5.6 folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_\tau\{f_j \nmid g_j\} \quad &\subseteq \quad \{f_j \nmid g_j\} \cup \{f_j = 0, g_j = 0\} \ , \\ \mathrm{cl}_\tau\{\neg P_{N_\ell}(h_\ell)\} \quad &\subseteq \quad \{\neg P_{N_\ell}(h_\ell)\} \cup \{h_\ell = 0\} \ . \end{aligned}$$

Aufgrund von Bemerkung 5.7 ist $\mathrm{cl}_\tau(M) \subseteq \overline{M}$. Wir erhalten nun

$$\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus M \quad \subseteq \quad \overline{M} \cap \Big(\bigcup_j \{f_j = 0, g_j = 0\} \cup \bigcup_\ell \{h_\ell = 0\}\Big) \subset \overline{M} \ .$$

Die mittlere Menge ist Zariski-abgeschlossen. Weil ausserdem $\overline{M}$ irreduzibel ist, folgt $\dim(\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus M) < \dim M$.

(b) M einfach, $M \neq \emptyset \Longrightarrow \dim(\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus M) < \dim M$.

Sei etwa $\overline{M} = C_1 \cup \ldots \cup C_m$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Wegen $\overline{M} = \bigcup \overline{C_j \cap M}$ und $\overline{C_j \cap M} \subseteq C_j$ bekommen wir $\overline{C_j \cap M} = C_j$ für alle j. Wegen Bemerkung 5.7 sind die $C_j \cap M$ einfach. Also

$$\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus M \quad \subseteq \quad \bigcup_j \Big(\mathrm{cl}_\tau(C_j \cap M) \setminus (C_j \cap M) \Big)$$

und mit (a) folgt $\dim(\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus (M) < \max \dim C_j \cap M = \dim M$.

(c) M konstruierbar, $M \neq \emptyset \Longrightarrow \dim(\mathrm{cl}_\tau(M) \setminus M) < \dim M$.

Wir erhalten dies sofort aus (b) wenn wir beachten, dass jede konstruierbare Menge endliche Vereinigung von einfachen Mengen ist. □

Wir betrachten nun einige Beispiele.

$G = Gl_m(K)$ operiert rational auf $(K^{m \times m})^d$ vermittels Konjugation:

$$g(t_1, \ldots, t_d) := (gt_1g^{-1} \ldots, gt_dg^{-1}) \ .$$

Diese Darstellung ist offensichtlich über dem Primkörper von K und damit über jedem Unterkörper k definiert. In der geometrischen Darstellungstheorie findet sie eine interessante Interpretation.

Sei A eine K-Algebra mit k-Struktur A_k, d.h. A_k ist gleichzeitig k-Vektorraumstruktur und Unterring von A. $\{a_1, \ldots, a_d\}$ sei ein Erzeugendensystem der k-Algebra A_k. Die Menge der A-Modulstrukturen auf K^m können wir identifizieren mit der Menge $\mathrm{mod}^m(A)$ der K-Algebrenmorphismen $\varphi\colon A \longrightarrow K^{m \times m}$. Vermöge der Einbettung $\mathrm{mod}^m A \longrightarrow (K^{m \times m})^d, \varphi \longmapsto (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_d))$ identifizieren wir weiter $\mathrm{mod}^m A$ mit einer Teilmenge von $(K^{m \times m})^d$, von der man leicht zeigt, dass sie Zariski-abgeschlossen und G-stabil ist. Die Menge der A_k-Modulstrukturen auf k^m ist dann gerade $\mathrm{mod}^m A_k = \mathrm{mod}^m A \cap (k^{m \times m})^d$. Die G-Bahnen in $\mathrm{mod}^m A$ repräsentieren die Isomorphieklassen m-dimensionaler A-Moduln, und den G_k-Bahnen in $\mathrm{mod}^m A_k$ entsprechen die Isomorphieklassen m-dimensionaler A_k-Moduln. (Vergleiche hierzu [4], und [5, Kap. 2, ' 2.7].)

5.9 Satz $\forall t, s \in (k^{m \times m})^d \quad (t \simeq s \Longrightarrow t \simeq_k s)$.

Die starke Partialordnungseigenschaft ist hier also trivialerweise erfüllt. Insbesondere gilt sie für k-Degenerationen von Moduln über endlich erzeugten k-Algebren.

Beweis: Die lineare Abbildung $\alpha\colon K^{m \times m} \longrightarrow K^d,\ g \longmapsto (t_i g - g s_i)_i$ ist über k definiert. Bekanntlich gilt $\ker \alpha = \mathrm{lin}_K(\ker \alpha \cap k^{m \times m})$. Angenommen, wir haben $t \not\simeq_k s$. Dies bedeutet, dass $\ker \alpha \cap k^{m \times m}$ in $\{g \in K^{m \times m} : \det g = 0\}$ enthalten ist. Daraus folgt wegen $\overline{\ker \alpha \cap k^{m \times m}} = \mathrm{lin}_K(\ker \alpha \cap k^{m \times m})$, dass $\ker \alpha$ in $\{g \in K^{m \times m} : \det g = 0\}$ enthalten ist. Dies wiederum bedeutet $t \not\simeq s$. □

Das nächste Beispiel handelt von quadratischen Formen. Die Gruppe $\mathrm{Gl}_m(K)$ operiert rational auf dem Raum $S(m, K)$ der symmetrischen m-reihigen Matrizen via $gt := gtg^T$. Auch diese Operation ist über dem Primkörper definiert. Bekanntlich gilt

$$\forall t, s \in S(m, K) \quad (t \simeq s \Longleftrightarrow \mathrm{Rg}(t) = \mathrm{Rg}(s)) \ .$$

5.10 Satz *Die starke Partialordnungseigenschaft ist bei quadratischen Formen erfüllt, wenn k ein endlicher Körper oder der Körper der rationalen Zahlen ist.*

Beweis: Sei $k = \mathbb{Q}$ und $t, s \in S(m, \mathbb{Q})$ so, dass $t \trianglelefteq_{\mathbb{Q}} s$ und $t \simeq s$. Sei p eine Primzahl. Wir können annehmen, dass die Situation $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}_p((\epsilon)) \subseteq K$ vorliegt und erhalten $t \trianglelefteq_{\mathbb{Q}_p} s$. Weil (SPE) für p-adische Körper erfüllt ist, folgt $t \simeq_{\mathbb{Q}_p} s$. Analog schliessen wir $t \simeq_{\mathbb{R}} s$. Aus dem Theorem von Hasse-Minkowski folgt nun $t \simeq_{\mathbb{Q}} s$ (cf. [9, Kap. 4, §3]). Dies zeigt die starke Partialordnungseigenschaft für quadratische Formen über $\mathbb{Q}$.

Wir machen nun zwei für beliebige Körper k gültige Überlegungen.

(i) Um den Schluss

$$\forall t, s \in S(m, k) \quad (t \trianglelefteq_k s,\ \mathrm{Rg}(t) = \mathrm{Rg}(s) \Longrightarrow t \simeq_k s)$$

zu zeigen, können wir Œ annehmen, dass $\mathrm{Rg}(t) = \mathrm{Rg}(s)$.
Begründung: Sei $\mathrm{Rg}(t) = \mathrm{Rg}(s) = m_1$. Es gibt $a, b \in S(m, k)$ mit $t \simeq_k b$, $s \simeq_k a$ und $a_{ij} = b_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i > m_1$ oder $j > m_1$. (Jede symmetrische Matrix lässt sich auf Diagonalgestalt transformieren.) Aus $t \trianglelefteq_k s$ folgt $b \trianglelefteq_k a$, etwa $b = (ga)_{\epsilon=0}$ mit $g \in \mathrm{Gl}_m(L)$. Seien $\overline{a}, \overline{b} \in S(m_1, k)$, $\overline{g} \in \mathrm{Gl}_{m_1}(L)$ definiert durch $\overline{a}_{ij} := a_{ij}$, $\overline{b}_{ij} := b_{ij}$, $\overline{g}_{ij} := g_{ij}$ für alle $i, j \leq m_1$. Dann gilt $\mathrm{Rg}(\overline{a}) = \mathrm{Rg}(\overline{b}) = m_1$ und $\overline{b} = (\overline{g}\,\overline{a})_{\epsilon=0}$. Nach Annahme folgt $\overline{b} \simeq_k \overline{a}$, also ist $t \simeq_k s$.

(ii) Es gilt

$$\forall t, s \in S(m, k) \cap \mathrm{Gl}_m(k) \quad \left(t \trianglelefteq_k s \Rightarrow (\det t)(\det s)^{-1} \in (k^\times)^2\right) .$$

Um dies zu beweisen, sei etwa $gsg^T = t + \epsilon t_1$ mit $g \in \mathrm{Gl}_m(L)$, $t_1 \in S(m, R)$. Also $(\det g)^2 \det s = \det t + \epsilon\rho$ mit einem $\rho \in R$. Wir schliessen daraus $\det g \in R$ und $((\det g)^2)_{\epsilon=0} \det s = ((\det g)_{\epsilon=0})^2 \det s = \det t$.

(3) Wenn k endlich ist, so gilt (cf. [9, Kap. 4, §1.7])

$$\forall t, s \in S(m, k) \cap \mathrm{Gl}_m(k) \quad \left(t \simeq_k s \Longleftrightarrow (\det t)(\det s)^{-1} \in (k^\times)^2\right) .$$

Hieraus folgt mit (i) und (ii) die Behauptung für endliche Körper k. □

Schliesslich besprechen wir noch das für die Komplexitätstheorie wichtige Beispiel der bilinearen Abbildungen.

Seien $U = K^m$, $V = K^n$, $W = K^p$, $G = \mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ und $\mathrm{Bil}_K(U, V; W)$ der Raum der K-bilinearen Abbildungen von $U \times V$ nach W. Die über k definierten bilinearen Abbildungen $U \times V \to W$ definieren eine k-Struktur auf $\mathrm{Bil}_K(U, V; W)$, die wir mit $\mathrm{Bil}_k(U_k, V_k; W_k)$ identifizieren können. Die Operation von G auf $\mathrm{Bil}_K(U, V; W)$ vermöge $(\alpha, \beta, \gamma)f := \gamma f(\alpha^{-1}-, \beta^{-1}-)$ ist über dem Primkörper definiert.

Entscheidend für die direkte Konstruktion von Spektralpunkten in [12] ist die Beobachtung, dass die Existenz von Unterräumen $U' \subseteq U$, $V' \subseteq V$, $W' \subseteq W$ gegebener Dimensionen mit $f(U' \times V') \subseteq W'$ eine abgeschlossene Bedingung an f ist. (Dies folgt aus der Vollständigkeit der Grassmannvarietäten.) Erfüllt also f eine solche Bedingung, so auch jede Degeneration d von f (vergleiche [12, §1]). Wir verallgemeinern nun diese Aussage auf nicht notwendig algebraisch abgeschlossene Körper. Für einen L-Unterraum $U \subseteq V_L$ bezeichnen wir mit $(U)_{\epsilon=0}$ das Bild von $U \cap V_R$ unter der Abbildung $V_R \longrightarrow V_k, t \mapsto (t)_{\epsilon=0}$.

5.11 Lemma *Ist $U \subseteq V_L$ ein L-Unterraum, so gilt* $\dim_k(U)_{\epsilon=0} = \dim_L U$.

Beweis:
(i) Wir beweisen mit Induktion nach r die folgende Aussage:

$$\begin{cases} \forall u_1, \ldots, u_r \in V_R \text{ linear unabhängig } \exists v_1, \ldots, v_r \in V_R \text{ mit } \mathrm{lin}_L\{v_1, \ldots, v_r\} = \\ \mathrm{lin}_L\{u_1, \ldots, u_r\} \text{ und } (v_1)_{\epsilon=0}, \ldots, (v_r)_{\epsilon=0} \text{ linear unabhängig.} \end{cases}$$

Der Start $r = 1$ ist trivial. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, wir hätten die $v_1, \ldots, v_{r-1}$ zu den $u_1, \ldots, u_{r-1}$ bereits konstruiert und finden nun v_r algorithmisch. Wir setzen $w := u_r$.

(1) Falls $(w)_{\epsilon=0}$ linear unabhängig von $(v_1)_{\epsilon=0}, \ldots, (v_{r-1})_{\epsilon=0}$ ist, setzen wir $v_r := w$ und brechen den Algorithmus ab.

(2) Andernfalls gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1} \in k$ mit $(w - \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i v_i)_{\epsilon=0} = 0$. Wir ersetzen w durch $\epsilon^{-1}(w - \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i v_i)$ und gehen damit nach (1).

Es genügt zu zeigen, dass der Algorithmus abbricht. Würde er nicht abbrechen, so gäbe es für jedes $i \leq r-1$ Folgen $(\lambda_i^{(0)}, \lambda_i^{(1)}, \ldots)$ in k mit

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists \rho_N \in V_R \quad u_r - \sum_{i=1}^{r-1} (\lambda_i^{(0)} + \epsilon \lambda_i^{(1)} + \ldots + \epsilon^N \lambda_i^{(N)}) v_i = \epsilon^{N+1} \rho_N \ .$$

Mit den Potenzreihen $\mu_i := \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \lambda_i^j$ würde gelten $u_r = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i v_i$, was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $u_1, \ldots, u_r$ steht.

(ii) Sei $u_1, \ldots, u_r$ eine L-Basis des L-Unterraumes U von V_L. Die u_i seien Œ R-rational. Ferner sei $v_1, \ldots, v_r$ den $u_1, \ldots, u_r$ gemäss (i) zugeordnet. Dann bilden die $((v_1)_{\epsilon=0}, \ldots, (v_r)_{\epsilon=0})$ eine k-Basis von $(U)_{\epsilon=0}$. (Beachte hierzu, dass aus $\sum \mu_i v_i \in V_R$ mit $\mu_i \in L$ notwendig $\mu_i \in R$ folgt.) Also $\dim_k(U)_{\epsilon=0} = r = \dim_L U$. □

Ein Tripel $((U_i)_{0 \leq i \leq m_1}, (V_j)_{0 \leq j \leq n_1}, (W_\ell)_{0 \leq \ell \leq p_1})$ von aufsteigende Folgen von K-Unterräumen von U, V beziehungsweise W heisse im folgenden Filtration. Die Filtration heisse über k definiert, falls die auftretenden Unterräume über k definiert sind. Nun können wir die angekündete Verallgemeinerung beweisen.

5.12 Satz *Seien $f, d\colon U \times V \longrightarrow W$ über k definierte bilineare Abbildungen, sei d k-Degeneration von f und $((U_i)_{0 \leq i \leq m_1}, (V_j)_{0 \leq j \leq n_1}, (W_\ell)_{0 \leq \ell \leq p_1})$ eine über k definierte Filtration. Dann gibt es eine Filtration $((U_i')_{0 \leq i \leq m_1}, (V_j')_{0 \leq j \leq n_1}, (W_\ell')_{0 \leq \ell \leq p_1})$, welche über k definiert ist, mit*

$$\forall i, j, \ell \quad \left(\dim U_i = \dim U_i',\ \dim V_j = \dim V_j',\ \dim W_\ell = \dim W_\ell'\right)$$

und

$$\forall i, j, \ell \quad \left(f(U_i \times V_j) \subseteq W_\ell \Longrightarrow d(U_i' \times V_j') \subseteq W_\ell'\right) \ .$$

Beweis: Sei etwa $gf = d + \epsilon d_1$, wobei $g \in G_L$ und $d_1 : U \times V \to W$ über R definiert ist. Offenbar gibt es eine über L definierte Filtration $((U_i''), (V_j''), (W_\ell''))$ mit

$$\forall i, j, \ell \quad \left(\dim U_i = \dim U_i'',\ \dim V_j = \dim V_j'',\ \dim W_\ell = \dim W_\ell''\right)$$

und

$$\forall i, j, \ell \quad \left(f(U_i \times V_j) \subseteq W_\ell \Longrightarrow (gf)(U_i'' \times V_j'') \subseteq W_\ell''\right) \ .$$

Aus $(d+\epsilon d_1)(U_i'' \times V_j'') \subseteq W_\ell''$ folgt $(d+\epsilon d_1)((U_i'' \cap U_R) \times (V_j'') \cap V_R)) \subseteq W_\ell'' \cap W_R$ und daraus $d((U_i'')_{\epsilon=0} \times (V_j'')_{\epsilon=0}) \subseteq (W_\ell'')_{\epsilon=0}$. Wir setzen nun $U_i' := \mathrm{lin}_K(U_i'')_{\epsilon=0}$, $V_j' := \mathrm{lin}_K(V_j'')_{\epsilon=0}$ und $W_l' := \mathrm{lin}_K(W_\ell'')_{\epsilon=0}$. Mit Lemma 5.11 erhalten wir

$$\dim_K U_i = \dim_K U_i'' = \dim_L(U_i'' \cap U_L) = \dim_k(U_i'')_{\epsilon=0} = \dim_K U_i'$$

und analog $\dim_K V_j = \dim_K V_j'$, $\dim_K W_\ell = \dim_K W_\ell'$. Also ist $((U_i'), (V_j'), (W_\ell'))$ eine der Behauptung genügende Filtration. $\square$

Wir betrachten jetzt spezielle über k definierte bilineare Abbildungen, nämlich Algebrenstrukturen (assoziativ, mit 1) auf $U = V = W$, die wir mit A, B bezeichnen. A, B sind als Algebren genau dann isomorph, wenn sie als bilineare Abbildungen isomorph sind. Ausserdem gilt: $A_k \simeq B_k$ als k-Algebren $\iff A \simeq_k B$. (Vergleiche [3], und [10, §2].)

5.13 Korollar *Seien A, B über k definierte Algebrenstrukturen, B sei k-Degeneration von A und $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_N \subseteq A_k$ eine aufsteigende Folge von Linksidealen von A_k. Dann gibt es eine aufsteigende Folge $L_1' \subseteq L_2' \subseteq \ldots \subseteq L_N' \subseteq B_k$ von Linksidealen von B_k mit $\dim_k L_j' = \dim_k L_j$ für alle j.*

Beweis: f, d seien die Multiplikationen der Algebren A beziehungsweise B. Wir betrachten die über k definierte Filtration $((U), (V_j)_{j=1,\ldots,N}, (V_j)_{j=1,\ldots,N})$, wobei $V_j := \mathrm{lin}_K L_j$. Weil die L_j Linksideale in A_k sind, folgt $f(U \times V_j) \subseteq V_j$ für alle j. Wegen Satz 5.12 existiert eine Filtration $((U), (V_j')_{j=1,\ldots,N}, (W_j')_{j=1,\ldots,N})$, welche über k definiert ist so, dass

$$\forall j \quad \left(\dim V_j' = \dim W_j' = \dim V_j, \quad d(U \times V_j') \subseteq W_j'\right) \ .$$

Weil die Algebra B eine Eins enthält, folgt $V_j' \subseteq W_j'$ und damit $V_j' = W_j'$. Wir setzen nun $L_j' := V_j' \cap U_k$. Offenbar ist $L_1' \subseteq L_2' \subseteq \ldots \subseteq L_N'$ eine aufsteigende Folge von Linksidealen von B_k, und $\dim L_j' = \dim V_j' = \dim V_j = \dim L_j$ für alle j. $\square$

Die Skalarerweiterung einer k-Algebra C bezüglich der Körpererweiterung $k \subseteq K$ bezeichnen wir mit C^K. Bekanntlich vertauscht der Skalarerweiterungsfunktor mit direkter Summe und Tensorprodukt. Wir können nun folgendes, allerdings sehr spezielles Teilresultat zur starken Partialordnungseigenschaft bei bilinearen Abbildungen beweisen.

5.14 Satz *Seien A, B über k definierte Algebrenstrukturen, B sei k-Degeneration von A und $B \simeq A$. In den folgenden beiden Fällen kann man k-Isomorphie von A und B schliessen.*

(1) $A_k \simeq \oplus_{i=1}^{\mu} k^{m_i \times m_i}$.

(2) $B_k \simeq \oplus_{j=1}^{\nu} E_j^{n_j \times n_j}$ mit E_j k-Divisionsalgebra, n_j paarweise verschieden und k endlich.

Beweis:
(1) $A \simeq (A_k)^K \simeq \oplus_{i=1}^{\mu} K^{m_i \times m_i}$. A ist also halbeinfach. Unter Verwendung von $\mathrm{rad}\, B_k \subseteq \mathrm{rad}\, B$ folgt, dass B_k halbeinfach ist. Mit Hilfe des Struktursatzes von Wedderburn erhalten wir die Darstellung $B_k \simeq \oplus_{j=1}^{\nu}(E_j \otimes_k k^{n_j \times n_j})$, wobei die E_j k-Divisionsalgebren bezeichnen. Skalarerweiterung liefert

$$B \simeq (B_k)^K \simeq \oplus_{j=1}^{\nu}(E_j^K \otimes_K K^{n_j \times n_j}) \ .$$

Unter Beachtung von $(\operatorname{rad} E_j^K) \otimes_K K^{n_j \times n_j} \subseteq \operatorname{rad}(E_j^K) \otimes_K K^{n_j \times n_j})$ schliessen wir, dass die K-Algebren E_j^K halbeinfach sind. Weil K algebraisch abgeschlossen ist, bekommen wir

$$E_j^K \simeq \bigoplus_{\beta=1}^{e_j} K^{r_{j\beta} \times r_{j\beta}} \quad .$$

Daraus schliessen wir

$$B \simeq \bigoplus_{j=1}^{\nu} \bigoplus_{\beta=1}^{e_j} K^{n_j r_{j\beta} \times n_j r_{j\beta}} \quad .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Wedderburndarstellung müssen die Folgen $(m_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ und $(n_j r_{j\beta})_{1 \leq j \leq \nu, 1 \leq \beta \leq e_j}$ durch eine Permutation auseinander hervorgehen. Insbesondere gilt $\sum_{i=1}^{\mu} m_i = \sum_{j=1}^{\nu} (\sum_{\beta=1}^{e_j} r_{j\beta}) n_j$. Aus Korollar 5.13 folgt nun aber, dass die Anzahl der Summanden bei einer Zerlegung in minimale Linksideale bei B_k mindestens so gross ist wie bei A_k. Also $\sum_{j=1}^{\nu} n_j \geq \sum_{i=1}^{\mu} m_i$. Wir erhalten zusammenfassend $e_j = 1, r_{j1} = 1, E_j = k$ für alle j, ausserdem ist $\mu = \nu$ und die Folgen $(m_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ und $(n_j)_{1 \leq j \leq \mu}$ gehen durch Permutation auseinander hervor. Also ist in der Tat $A_k \simeq B_k$.

(2) Wir verwenden den für perfekte Körper gültigen Schluss (cf. [6, §10.7]):

C halbeinfache k-Algebra, $k \subseteq F$ Körpererweiterung $\Longrightarrow C^F$ halbeinfach.

Bekanntlich sind endliche Körper perfekt. Weil B_k halbeinfach ist, muss deshalb B und damit auch A_k halbeinfach sein.

Sei etwa $A_k \simeq \oplus_{i=1}^{\mu} (D_i \otimes_k k^{m_i \times m_i})$ mit d_i-dimensionalen k-Divisionsalgebren D_i. Nach einem bekannten Satz von Wedderburn sind endlichdimensionale Divisionsalgebren über einem endlichen Körper k immer kommutativ. Weil D_i^K, E_j^K halbeinfache K-Algebren sind, folgt deshalb $D_i^K \simeq K^{d_i}, E_j^K \simeq K^{e_j}$ mit geeigneten $d_i, e_j \in \mathbb{N}'$. Durch Skalarerweiterung erhalten wir

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^{\mu} \bigoplus_{d_i\text{-mal}} K^{m_i \times m_i}, \qquad B \simeq \bigoplus_{j=1}^{\nu} \bigoplus_{e_j\text{-mal}} K^{n_j \times n_j} \quad .$$

Die mit den Multiplizitäten d_i beziehungsweise e_j gezählten Folgen (m_i), (n_j) müssen durch eine Permutation auseinander hervorgehen. Seien Œ $m_1, \ldots, m_{\mu_1}$ die verschiedenen Elemente der Folge (m_i). Weil die n_j paarweise verschieden sind, gilt $\sum_{j=1}^{\nu} n_j = \sum_{i=1}^{\mu_1} m_i$. Andererseits impliziert Korollar 5.13 auch hier, dass $\sum_{j=1}^{\nu} n_j \geq \sum_{i=1}^{\mu} m_i$. Deshalb ist $\mu_1 = \mu = \nu$ und es gibt eine Permutation $\pi \in S_\mu$ mit $d_i = e_{\pi i}$, $m_i = n_{\pi i}$ für alle i. Weil der Isomorphietyp endlichdimensionaler k-Divisionsalgebren bei einem endlichen Körper k durch deren Dimension festgelegt wird, erhalten wir schliesslich $A_k \simeq B_k$. $\square$

Abschliessend heben wir hervor, dass uns kein Beispiel bekannt ist, wo die starke Partialordnungseigenschaft verletzt wäre. Es ist deshalb durchaus denkbar, dass sie bei beliebigem Grundkörper k und bei einer beliebigen über k definierten rationalen Darstellung einer Gruppe $G = \prod \mathrm{Gl}_{mi}(K)$ erfüllt ist.

Literaturverzeichnis

[1] J. Bochnak, M. Coste und M.-F. Roy. *Géométrie algébrique réelle*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Folge 3, Bd. 12, Springer-Verlag, 1987.

[2] A. Feinstein. *Foundations of Information Theory*. Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London, 1958.

[3] H.F. de Groote. On varieties of optimal algorithms for the computation of bilinear mappings. *Theoret. Comput. Sci.* 7:1–24, 1978.

[4] H. Kraft. Geometric methods in representation theory. In: *Representations of Algebras*, Workshop Proc., Puebla, Mexico 1980, LNM 944, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[5] H. Kraft. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*. Aspekte der Mathematik, Bd. D1, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1984.

[6] R.S. Pierce. *Associative Algebras*. Graduate Texts in Mathematics, Bd. 88, Springer-Verlag, 1982.

[7] A. Prestel. *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*. Vieweg-Studium, Bd. 60, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1986.

[8] A. Schönhage. Partial and total matrix multiplikation. *SIAM J. Comput.* 10:434–455, 1981.

[9] J.P. Serre. *A course in Arithmetic*. Graduate Texts in Mathematics, Bd. 7, Springer-Verlag, 1973.

[10] V. Strassen. Relative bilinear complexitiy and matrix multiplication. *J. reine angew. Math.* 375/376:406–443, 1987.

[11] V. Strassen. The asymptotic spectrum of tensors. *J. reine angew. Math.* 384:102–152.

[12] V. Strassen. Degeneration and complexity of bilinear maps: some asymptotic spectra. *J. reine angew. Math.* 413:127–180.