Universität Konstanz

Spezialisierung und Degeneration von Tensoren

Verena Tobler

Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik
Nr. 47, November 1997

ISSN 1430–3558

Spezialisierung und Degeneration [1]

Verena Tobler

Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Konstanz

[1] Dissertation, Universität Konstanz, Juni 1991

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der algebraischen Komplexitätstheorie wird unter anderem das Problem untersucht, mit wievielen nichtskalaren Multiplikationen/Divisionen eine bilineare Abbildung f zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen berechnet werden kann. Ein bekanntes Beispiel ist die Multiplikation quadratischer Matrizen. Hier, wie auch in vielen weiteren Beispielen, hängt f von einem Parameter n, der Anzahl Reihen der Matrix, ab und man untersucht häufig das asymptotische Verhalten von f für $n \to \infty$. An Stelle von bilinearen Abbildungen kann man genausogut Tensoren $t \in U \otimes V \otimes W$ betrachten, wobei U, V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper k sind. Diese Tensoren bilden eine Kategorie, die wir $\underline{\text{ten}}\ k$ nennen.

Die in dieser Arbeit behandelten Fragestellungen haben ihren Ursprung haupstsächlich in drei Studien von Strassen ([12], [13], [14]). In diesen wird, ausgehend von dem Problem der bilinearen Komplexität und durch systematische Untersuchungen zur Degeneration von Tensoren, das asymptotische Spektrum von Tensoren eingeführt und behandelt. Schliesslich wird auch eine Methode angegeben, um asymptotische Spektren abzuschätzen, die in einigen Fällen sogar die genaue Bestimmung des asymptotischen Spektrums erlaubt. Wir werden im folgenden versuchen, die Definitionen und Resultate dieser Arbeiten, soweit sie hier gebraucht werden, zusammenzufassen. Für ein besseres Verständnis wird aber wohl die Lektüre von [12], [13] und [14] ratsam sein.

Vorerst führen wir einige Notationen ein. Für eine natürliche Zahl n, sei $\underline{n}$ die Menge aller natürlichen Zahlen kleiner als n einschliesslich der Null. E_n bezeichne die n-dimensionale Einheitsmatrix. Θ sei das Standard-Zweisimplex, d.h.

$$\Theta := \{\theta \in \mathbb{R}^3 : \theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq 0,\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1\}.$$

Sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem kartesischen Produkt endlicher Mengen $I \times J \times L$. Mit P_r bezeichnen wir die r-te Marginalverteilung von P, also ist etwa $P_1(i) = \sum_{j \in J, \ell \in L} P(i,j,\ell)$. Der Träger von P, supp P, ist definiert als die Menge aller Tripel (i,j,ℓ), auf denen P nicht verschwindet. Ist allgemein P_1 eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer endlichen Menge I, so ist der Träger von P_1 analog definiert. Mit $H(P_1)$ bezeichnen wir die Entropiefunktion, d.h.

$$H(P_1) = \sum_{i \in \text{supp } P_1} P_1(i) \log \frac{1}{P_1(i)}.$$

Die relative Entropiefunktion von P_1 bezüglich einer Funktion $x: I \to \mathbb{R}^+$ wird folgendermassen definiert:

$$H(P_1|x) = \sum_{i \in \text{supp } P_1} P_1(i) \log \frac{x(i)}{P_1(i)} \in [-\infty, \infty).$$

Logarithmen werden hier und im folgenden immer zur Basis 2 genommen.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. In der Kategorie $\underline{\text{ten}}\ k$ werden auf die übliche Weise direkte Summe, Tensorprodukt und Isomorphie ($\cong$) von Tensoren definiert. Tensoren s und t heissen *äquivalent* ($\sim$), wenn es Nulltensoren s_1 und t_1 gibt, so dass $s \oplus s_1 \cong t \oplus t_1$ ist. Ein Tensor $t \in U \otimes V \otimes W$, hat das *Format* (m,n,p), falls m,n beziehungsweise p die Dimensionen von U, V beziehungsweise W sind. t heisst *bündig*, wenn er unter allen zu ihm äquivalenten Tensoren minimales Format hat, dieses Format ist eindeutig bestimmt. Sind $s \in U \otimes V \otimes W$ und $t \in U' \otimes V' \otimes W'$, so heisst s *Restriktion* von t ($s \leq t$), falls es ein Tripel linearer Abbildungen $\alpha: U \to U'$, $\beta: V \to V'$ und $\gamma: W \to W'$ gibt, für das $(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)t = s$ gilt. $s \in U \otimes V \otimes W$ heisst *Degeneration* von t ($s \trianglelefteq t$), falls s im Zariski-Abschluss der Menge aller Restriktionen von t liegt, d.h. $s \in \overline{\{s' \in U \otimes V \otimes W : s' \leq t\}}$. Der Rang beziehungsweise der Grenzrang von Tensoren kann mit Restriktion beziehungsweise Degeneration ausgedrückt werden, genauer gilt:

$$R(t) = \min\{r \in \mathbb{N} : t \leq \langle r \rangle\},$$
$$\underline{R}(t) = \min\{r \in \mathbb{N} : t \trianglelefteq \langle r \rangle\},$$

wobei $\langle r \rangle$ den Strukturtensor der Algebra k^r bezeichnet.

$\mathcal{B}^+(k)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von Tensoren über k, ihre Elemente nennen wir *Tensorklassen.* Ist $t \in \underline{\text{ten}}\ k$, so bezeichnen wir die Tensorklasse von t mit $[t]$. $\mathcal{B}^+(k)$ ist der positive Kegel eines kommutativen Ringes $\mathcal{B}(k)$, dessen Ringoperationen durch die direkte Summe und das Tensorprodukt von Tensoren festgelegt werden. Restriktion und Degeneration induzieren partielle Ordnungen $\leq$ und $\trianglelefteq$ auf $\mathcal{B}^+(k)$. Sie können zu einer Präordnung, der *asymptotischen Ordnung* $\lesssim$ auf $\mathcal{B}^+(k)$ verfeinert werden, die sich auf $\mathcal{B}(k)$ ringverträglich fortsetzen lässt. Das Hauptresultat in [12] besagt, dass jeder Familie X von Tensorklassen ein, im wesentlichen eindeutig bestimmter, kompakter Raum $\triangle$ und ein Ringhomomorphismus

$$\varphi : \quad \mathbb{Z}[X] \to C(\triangle, \mathbb{R})$$

zugeordnet werden kann, so dass $\varphi(X)$ die Punkte von $\triangle$ trennt und für alle $a, b \in \mathbb{N}[X]$ gilt:

$$a \lesssim b \iff (\varphi(a) \leq \varphi(b) \text{ punktweise}).$$

Das Paar $(\triangle, \varphi)$ heisst *asymptotisches Spektrum* von X. Die Kenntnis des asymptotischen Spektrums gibt uns unter anderem notwendige Bedingungen für Degenerationen. Eine konkretere Version des asymptotischen Spektrums ist oft zweckmässig:

$$\triangle(X) := \{\xi \in \mathbb{R}^X : \forall a, b \in \mathbb{N}[X]\ (a \leq b \Rightarrow a(\xi) \leq b(\xi))\}, \ \ \varphi(a) = a|\triangle(X).$$

$\triangle(X)$ heisst *das asymptotische Spektrum* von X, φ wird meistens nicht explizit notiert. Oft schreiben wir $\triangle(t)$ an Stelle von $\triangle([t])$ für das asymptotische Spektrum der Klasse eines einzelnen Tensors.

Seien t ein Element aus $U \otimes V \otimes W$, C ein Tripel von Basen für U, V und W und $(t_{ij\ell})_{i,j,\ell}$ der Koordinatentensor von t bezüglich der Basis C. Der *Träger* von t bezüglich C, $\text{supp}_C t$, ist die Menge aller Tripel (i, j, ℓ), für die $t_{ij\ell}$ nicht Null ist. Sind $\Phi \subseteq \underline{m} \times \underline{n} \times \underline{p}$ und $\theta \in \Theta$, so sei

$$H_\theta(\Phi) = \max_P H_\theta(P),$$

wo P Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Φ bezeichnet und

$$H_\theta(P) = \sum_{\kappa=1}^{3} \theta_\kappa H(P_\kappa)$$

gesetzt wurde. Das *obere Trägerfunktional* ist nun folgendermassen definiert:

$$\zeta^\theta(t) = \begin{cases} 2^{\min_C H_\theta(\mathrm{supp}_C t)} & \text{falls } t \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} ,$$

wobei das Minimum über alle Basistripel für U, V, W genommen wird.

$\max \mathrm{supp}_C t$ sei die Menge aller maximalen Punkte von $\mathrm{supp}_C t$ bezüglich der Produktpartialordnung der natürlichen Ordnungen auf $\underline{\dim U}, \underline{\dim V}$, und $\underline{\dim W}$. Das *untere Trägerfunktional* ζ_θ wird dann folgendermassen definiert:

$$\zeta_\theta(t) = \begin{cases} 2^{\max_C H_\theta(\max \mathrm{supp}_C t)} & \text{falls } t \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass das untere Trägerfunktional kleinergleich dem oberen Trägerfunktional ist.

Oberes und unteres Trägerfunktional sind konstant auf Äquivalenzklassen von Tensoren. Man erhält also Funktionale auf $\mathcal{B}^+(k)$, die ebenfalls mit ζ^θ und ζ_θ bezeichnet werden. Das obere Trägerfunktional ist additiv, submultiplikativ und monoton bezüglich der Restriktionsordnung, das untere Trägerfunktional ist superadditiv, supermultiplikativ und monoton bezüglich der Restriktionsordnung. Falls für einen Tensor t oberes und unteres Trägerfunktional übereinstimmen, so heisst t beziehungsweise $[t]$ θ-robust. Ist X eine Familie von Tensorklassen, so dass alle $x \in X$ θ-robust sind, so ist $(\zeta^\theta(x))_{x\in X}$ ein Punkt des asymptotischen Spektrums $\triangle(X)$. Tensoren, für die oberes und unteres Trägerfunktional für alle $\theta \in \Theta$ übereinstimmen, werden *robust* genannt. Sei X eine Menge robuster Tensoren. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \zeta: & \Theta & \to & \triangle(X) \\ & \theta & \mapsto & (\zeta^\theta(x))_{x\in X} \end{array}$$

ist stetig und heisst *Trägersimplex* von $\triangle(X)$ oder X. Die Robustheit eines Tensors direkt durch Berechnen der oberen und unteren Trägerfunktionale nachzuprüfen, scheint schwierig zu sein. *Schräge* Tensoren, das heisst solche, deren Träger bezüglich einer Basis eine Antikette ist, sind robust. Gibt es für eine Menge $\Phi \subseteq \underline{m} \times \underline{n} \times \underline{p}$ ganzzahlige injektive Abbildungen $\alpha: \underline{m} \to \mathbb{Z}$, $\beta: \underline{n} \to \mathbb{Z}$ und $\gamma: \underline{p} \to \mathbb{Z}$, so dass $\alpha(i)+\beta(j)+\gamma(\ell)$ auf Φ Null ist, so ist Φ offensichtlich bis auf Koordinatenpermutationen eine Antikette. Tensoren, deren Träger bezüglich einer Basis diese Eigenschaft haben, heissen *straff*, sie sind natürlich schräg. In [14] wird eine Methode eingeführt, mit der das Trägersimplex schräger Tensoren berechnet werden kann. Für straffe Tensoren stimmen die minimalen Punkte des Trägersimplexes und des asymptotischen Spektrums bezüglich der Produktpartialordnung auf $\mathbb{R}^X$ überein.

Danken möchte ich Herrn Professor V. Strassen, der durch seine freundliche Betreuung und viele fruchtbare Diskussionen zum Werden dieser Arbeit beigetragen hat und durch dessen Vorlesungen über Komplexitätstheorie mein Interesse an diesem Gebiet geweckt wurde. Ebenfalls danken möchte ich Herrn Professor W. Baur für seine Gesprächsbereitschaft und anregenden Bemerkungen.

2 Zusammenfassung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Unter einer Spezialisierung φ von k versteht man einen Ringhomomorphismus von einem Bewertungsring R von k in einen algebraisch abgeschlossenen Körper Ω, dessen Kern das maximale Ideal von R ist. Wir nennen nun eine Tensorklasse $c \in \mathcal{B}^+(\Omega)$ Spezialisierung einer Tensorklasse $a \in \mathcal{B}^+(k)$ $(c \prec_\varphi a)$, wenn ein Koordinatentensor $(t_{ij\ell})$, der a repräsentiert, mit Koeffizienten aus R existiert, so dass c die Tensorklasse der zu $(\varphi t_{ij\ell})$ äquivalenten Tensoren ist. In 3.2 untersuchen wir Zusammenhänge zwischen Spezialisierung und Degeneration und erhalten insbesondere eine Art Transitivität, nämlich:

$$\begin{gathered} c_1 \prec_\varphi a_1 \trianglelefteq a_2 \Rightarrow c_1 \prec_\varphi a_2 \\ c_1 \trianglelefteq c_2 \prec_\varphi a_1 \Rightarrow c_1 \prec_\varphi a_1. \end{gathered}$$

Zum Beweis dieser Aussage verwenden wir einen tieferliegenden Satz (über die Abgeschlossenheit von Spezialisierungsabbildungen projektiver Räume) aus der klassischen algebraischen Geometrie. In 3.1 gehen wir auf diesen Satz näher ein. Der Wert des oberen Trägerfunktionals wird durch Spezialisierung höchstens kleiner. Diese Aussage beweisen wir in 3.3. In 3.4 wenden wir sie auf gewisse Klassen von Tensoren, nämlich auf generische Tensoren mit bequemem Format, an und erhalten für diese Tensoren einen dem Trägersimplex bei robusten Tensoren analogen Teil des asymptotischen Spektrums.

Im zweiten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns mit Zweischeibentensoren. In 4.2 zeigen wir, dass das asymptotische Spektrum fast aller Zweischeibentensoren t das abgeschlossene Intervall $[2, \underline{R}(t)]$ ist. In 4.3 charakterisieren wir mit Hilfe der Kronecker-Normalform, die wir in 4.1 vorstellen, zumindest teilweise die schrägen Zweischeibentensoren und wenden auf diese die Methode aus [14] zur Berechnung ihres Trägersimplexes an. In 4.4 bestimmen wir die Kronecker-Normalform generischer Zweischeibentensoren und die bequemen Formate $(m, n, 2)$, so dass wir die Resultate aus 3.4 anwenden können. Ausserdem berechnen wir den typischen Wert des oberen Trägerfunktionals für reguläre Zweischeibentensoren.

3 Spezialisierung von Tensoren

3.1 Spezialisierung

Seien k und Ω algebraisch abgeschlossene Körper. Eine Spezialisierung von k ist eine partielle Abbildung $\varphi : k \to\!\!\!\!+ \Omega$ deren Definitionsbereich ein Bewertungsring [2] von k ist und so, dass $\varphi|\mathrm{def}\varphi$ ein Ringhomomorphismus ist, der als Kern das maximale Ideal [3] des Bewertungsringes def φ hat.

Sind $S \subseteq k$ ein Unterring und $\tilde{\varphi} : S \to \Omega$ ein Ringhomomorphismus, dann kann $\tilde{\varphi}$ erweitert werden zu einer Spezialisierung von k. (vgl [1], Kapitel 5).

Von jetzt an sei im ganzen Kapitel 3 $\varphi : k \to\!\!\!\!+ \Omega$ eine Spezialisierung von k, dabei sei $R := \mathrm{def}\varphi \neq k$ der zugehörige Bewertungsring und $\mathcal{M}$ dessen maximales Ideal. Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist auch $R/\mathcal{M}$ und damit auch das Bild von φ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Einige Bezeichnungen: Für $z = (z_1, ..., z_n) \in R^n$ sei $\varphi(z) := (\varphi z_1, ..., \varphi z_n)$. Für Polynome $F \in R[T_1, ..., T_n]$ bezeichne $\varphi(F)$ das Polynom in $\Omega[T_1, ..., T_n]$, das wir durch Anwenden von φ auf die Koeffizienten von F erhalten. Ist $Z \subseteq k^n$, so sei $Z_R := Z \cap R^n$ und ist $\mathcal{A}$ ein Ideal in $R[T_1, \ldots, T_n]$, so sei $\varphi(\mathcal{A})$ das Ideal in $\Omega[T_1, \ldots, T_n]$, das man durch Anwenden von φ auf die Elemente von $\mathcal{A}$ erhält. Ist $\mathcal{A} \subseteq k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, so sei $\mathcal{A}_R := \mathcal{A} \cap R[T_1, \ldots, T_n]$. Für $\mathcal{C} \subseteq k[T_1, \ldots, T_n]$, bezeichne $V(\mathcal{C}) \subseteq k^n$ die Nullstellenmenge von $\mathcal{C}$.

Bemerkung 3.1.1 *Sei $\mathcal{A} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal, $Z := V(\mathcal{A})$. Dann ist*

$$\varphi(Z_R) \subseteq V(\varphi(\mathcal{A}_R)).$$

Beweis: Sei $G \in \varphi(\mathcal{A}_R)$, etwa $G = \varphi F$, sei weiter $x \in \varphi(Z_R)$, etwa $x = \varphi(z)$. Dann $G(x) = \varphi F(\varphi(z)) = \varphi(F(z)) = \varphi(0) = 0$. □

Bemerkung 3.1.2 *Seien $x_1, \ldots, x_m \in R^n$. Dann gilt*

$$\textit{rang } (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)) \leq \textit{rang } (x_1, \ldots, x_m).$$

Beweis: Der Rang von $(x_1, \ldots, x_m)$ ist genau dann $\leq r$, wenn jede $r+1 \times r+1$-Unterdeterminante verschwindet. Man verwende, dass φ ein Ringhomomorphismus ist. □

[2] $R \subseteq k$ heisst Bewertungsring von k, falls R ein Ring ist und $\forall x \in k \;\; x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.

[3] Bewertungsringe sind lokal

φ induziert eine Abbildung $\rho : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(\Omega)$ des n-dimensionalen projektiven Raumes über k in den n-dimensionalen projektiven Raum über Ω, vermöge $\rho(z_0 : ... : z_n) = (\varphi(az_0) : ... : \varphi(az_n))$, wo $a \in k$ so gewählt wird, dass $(az_0, ..., az_n) \in R^{n+1} \setminus \mathcal{M}^{n+1}$. a ist bis auf Einheiten in R eindeutig bestimmt, ρ damit also wohldefiniert [4]. Folgenden wichtigen Satz, der besagt, dass ρ eine abgeschlossene Abbildung ist, werden wir verwenden.

Satz 3.1.3 *Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen, $Z = V(\mathcal{A}), \mathcal{A} \subseteq k[T_0, \dots, T_n]$ homogenes Radikalideal. Dann ist*

$$\rho(Z) = V(\varphi(\mathcal{A}_R)).$$

Insbesondere ist ρ abgeschlossen.

Einen Beweis findet man in [10], Kapitel 2.Paragraph 8. Der Beweis wird in Mumford unter Benutzung von Schemata geführt. Wir wollen hier einen elementaren, ausführlichen Beweis angeben. Die folgenden zwei Bemerkungen fassen einige Aussagen über die Beziehungen zwischen Primidealen in $k[T_1, \dots, T_n]$, $R[T_1, \dots, T_n]$, und $\Omega[T_1, \dots, T_n]$ sowie über Dehomogenisierung und Homogenisierung von Primidealen zusammen, die wir später brauchen werden.

Bemerkung 3.1.4 *i) Die Primideale in $k[T_1, \dots, T_n]$ stehen in Bijektion zu den Primidealen in $R[T_1, \dots, T_n]$, die disjunkt sind zu $S := R \setminus \{0\}$, vermöge $S^{-1}\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{P}$.*

ii) Die Primideale in $\Omega[T_1, \dots, T_n]$ stehen vermöge φ in Bijektion zu den Primidealen in $R[T_1, \dots, T_n]$, die $\mathcal{M}$ enthalten.

Beweis: i) Siehe [1], Kapitel 3.

ii) Die Abbildung $\varphi : R[T_1, \dots, T_n] \to \Omega[T_1, \dots, T_n]$ ist surjektiv und ihr Kern $\mathcal{M}[T_1, \dots, T_n]$ wird erzeugt von $\mathcal{M}$. $\square$

Bemerkung 3.1.5 *Sei S ein kommutativer Ring. $\mathcal{P} \subseteq S[T_0, \dots, T_n]$ sei ein homogenes Ideal, das T_0 nicht enthält. $\mathcal{P}_d := \{F(1, T_1, \dots, T_n) : F \in \mathcal{P}\} \subseteq S[T_1, \dots, T_n]$ heisst Dehomogenisierung von $\mathcal{P}$. $\mathcal{Q} \subseteq S[T_1, \dots, T_n]$ sei ein Ideal. $\mathcal{Q}_h := (\{T_0^{\deg f} f(\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}) : f \in \mathcal{Q}\}) \subseteq S[T_0, \dots, T_n]$ heisst Homogenisierung von $\mathcal{Q}$. Es gelten*

i) Ist $\mathcal{P}$ ein Primideal, so ist $(\mathcal{P}_d)_h = \mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_d$ ist auch ein Primideal.

ii) Ist $\mathcal{Q}$ ein Primideal, so ist $(\mathcal{Q}_h)_d = \mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}_h$ ist ein Primideal, das T_0 nicht enthält.

---

[4] Ist $(x_1, ..., x_n) \in k^n$, so existiert ein bis auf Einheiten in R eindeutig bestimmtes $\lambda \in k$, so dass $(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \in R^n \setminus \mathcal{M}^n$.

Wir erhalten also eine Bijektion zwischen der Menge aller homogenen Primideale in $S[T_0, \ldots, T_n]$, die T_0 nicht enthalten und der Menge aller Primideale in $S[T_1, \ldots, T_n]$.

Zum Beweis von Satz 3.1.3 benötigen wir einen zur Noether-Normalisierung analogen Satz über R.

Satz 3.1.6 (Noether-Normalisierung über R) *Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen, irreduzibel der Dimension r, $Z = V(\mathcal{A}), \mathcal{A} \subseteq k[T_0, \ldots, T_n]$ homogenes Primideal. Dann existieren $r+1$ Linearformen $L_0, \ldots, L_r$ mit Koeffizienten in R so dass $\varphi L_0, \ldots, \varphi L_r$ linear unabhängig über Ω sind und $R[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{A}_R$ ganz über $R[L_0, \ldots, L_r]$ ist.*

Beweis: i) Wir zeigen zunächst: Es genügt zu zeigen, dass $r+1$ Linearformen $L_0, \ldots, L_r$ mit Koeffizienten in R existieren, so dass

$$\begin{gathered} \bigcap_{\substack{\mathcal{P} \supseteq (\mathcal{A}_R + (L_0, \ldots, L_r)) \\ \text{homogenes Primideal}}} \mathcal{P} = (T_0, \ldots, T_n) \\ \text{und} \\ \varphi L_0, \ldots, \varphi L_r \text{ linear unabhängig über } \Omega. \end{gathered} \tag{1}$$

Der Durchschnitt aller Primideale, die $(\mathcal{A}_R + (L_0, \ldots, L_r))$ enthalten ist das Radikal von $(\mathcal{A}_R + (L_0, \ldots, L_r))$. ([1], Proposition 1.14) Da $(\mathcal{A}_R + (L_0, \ldots, L_r))$ homogen ist, kann analog gezeigt werden, dass der Durchschnitt aller homogenen Primideale die über $(\mathcal{A}_R + (L_0, \ldots, L_r))$ liegen, ebenfalls das Radikal von $(\mathcal{A}_R + (L_0, \ldots, L_r))$ ist. Somit gilt

$$\forall 0 \leq j \leq n \ \exists d(j) \in \mathbb{N}' \text{ so dass } T_j^{d(j)} \in ((L_0, \ldots, L_r) + \mathcal{A}_R).$$

Also etwa

$$T_j^{d(j)} = \sum_{i=0}^{r} H_{ji} L_i + F_j,$$

wo $F_j \in \mathcal{A}_R,\ \deg F_j = d(j),\ \ H_{ji} \in R[T_0, \ldots, T_n],\ \deg H_{ji} = d(j) - 1.$
Sei $t := \max_{0 \leq j \leq n} d(j)$. Die Monome

$$\prod_{j=0}^{n} T_j^{a_j} \ , \quad 0 \leq a_j \leq t,$$

bilden eine Modulbasis von $R[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{A}_R$ über$R[L_0, \ldots, L_r]$, somit ist $R[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{A}_R$ ganz über $R[L_0, \ldots, L_r]$.

ii) Sei s minimal, so dass $L_0, \ldots, L_s$ mit (1) existieren. Da $T_0, \ldots, T_n$ linear unabhängig über Ω sind, folgt $s \leq n$. Wegen $Z \cap V(L_0, \ldots, L_s) = \emptyset$,

ist $\dim V(L_0,\ldots,L_s) = n-s-1 < n-r$ also $s \geq r$.
Annahme: $s > r$.

$$\begin{array}{rrcl} \tau: & \mathbb{P}^n(k) \supseteq Z & \to & \mathbb{P}^s(k) \\ & (\alpha_0:\ldots:\alpha_n) & \mapsto & (L_0(\alpha):\ldots:L_s(\alpha)) \end{array}$$

ist ein Morphismus projektiver Varietäten. $\tau(Z) \subseteq \mathbb{P}^s(k)$ ist eine echte abgeschlossene Untervarietät. Also gibt es ein homogenes Polynom $F \in R[X_0,\ldots,X_s] \setminus \mathcal{M}[X_0,\ldots,X_s]$ mit $\tau(Z) \subseteq V(F)$.

Sei Œ $(1:\bar{\alpha}_1:\ldots:\bar{\alpha}_s) \in \mathbb{P}^s(\Omega) \setminus V(\varphi F)$ und seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \in R$ mit $\varphi(\alpha_i) = \bar{\alpha}_i$ für alle i.

Sei $\mathcal{Q} \supseteq ((L_1 - \alpha_1 L_0,\ldots,L_s - \alpha_s L_0) + \mathcal{A}_R)$ ein homogenes Primideal. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{Q} \supseteq (T_0,\ldots,T_n)$, was einen Widerspruch zur Minimalität von s ergibt.

Da $\varphi L_0,\ldots,\varphi L_s$ linear unabhängige Linearformen über Ω sind, sind sie auch algebraisch unabhängig. Somit ist $i : R[L_0,\ldots,L_s] \to R[X_0,\ldots,X_s]$ definiert durch $i(L_j) = X_j$ für alle $0 \leq j \leq s$ ein Ringisomomorphismus. Wir setzen $\tilde{\mathcal{Q}} := i(\mathcal{Q} \cap R[L_0,\ldots,L_s])$. $\tilde{\mathcal{Q}}$ ist ein homogenes Primideal. Da $F(L_0,\ldots,L_s)$ in $\mathcal{A}_R$ ist und $i(F(L_0,\ldots,L_s)) = F$, ist F ein Element von $\tilde{\mathcal{Q}}$. Zu zeigen ist $\tilde{\mathcal{Q}} \supseteq (X_0,\ldots,X_s)$, denn daraus folgt $\mathcal{Q} \supseteq (L_0,\ldots,L_s) + \mathcal{A}_R$, also $\mathcal{Q} \supseteq (T_0,\ldots,T_n)$.

Wir können Œ annehmen, dass $\mathcal{M} \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}$.
(Um das einzusehen, konstruieren wir für den Fall, wo das Ideal $(X_0,\ldots,X_s)$ nicht in $\tilde{\mathcal{Q}}$ enthalten ist, ein homogenes Primideal $\tilde{\mathcal{P}}$, welches $\tilde{\mathcal{Q}}$ und $\mathcal{M}$, nicht aber $(X_0,\ldots,X_s)$ enthält. Sei etwa $X_0 \notin \tilde{\mathcal{Q}}$. $\tilde{\mathcal{Q}}_d$ sei wie in Bemerkung 3.1.5 die Dehomogenisierung von $\tilde{\mathcal{Q}}$. $\tilde{\mathcal{Q}}_d$ ist ein echtes Primideal in $R[T_1,\ldots,T_s]$. Sei $\mathcal{P}$ ein maximales Oberideal von $\tilde{\mathcal{Q}}_d$. Da $\varphi(\mathcal{P})$ ein maximales Ideal und damit insbesondere prim ist, enthält $\mathcal{P}$ das Ideal $\mathcal{M}$ (Bemerkung 3.1.4). Dann ist die Homogenisierung $\tilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P}_h \subset R[X_0,\ldots,X_s]$ von $\mathcal{P}$ ein homogenes Primideal, $X_0 \notin \tilde{\mathcal{P}}$, $\tilde{\mathcal{Q}} \subseteq \tilde{\mathcal{P}}$ und $\mathcal{M} \subseteq \tilde{\mathcal{P}}$.)

Für das homogene Primideal $\varphi(\tilde{\mathcal{Q}}) \subseteq \Omega[X_0,\ldots,X_s]$ gilt:

$$(X_1 - \bar{\alpha}_1 X_0,\ldots,X_s - \bar{\alpha}_s X_0) \subseteq \varphi(\tilde{\mathcal{Q}}) \text{ und } \varphi F \in \varphi(\tilde{\mathcal{Q}}).$$

Aber $\varphi F(1,\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_s) \neq 0$, also ist $\varphi(\tilde{\mathcal{Q}}) = (X_0,\ldots,X_s)$. Also existieren für alle $0 \leq j \leq s$ Elemente $m_0^j,\ldots,m_{j-1}^j,m_{j+1}^j,\ldots,m_s^j$ aus $\mathcal{M}$, so dass

$$X_j + m_0^j X_0 + \ldots + m_{j-1}^j X_{j-1} + m_{j+1}^j X_{j+1} + \ldots + m_s^j X_s \in \tilde{\mathcal{Q}}.$$

Da die Determinante des zugehörigen linearen Gleichungssystems eine Einheit in R ist, ist $(X_0,\ldots,X_s) \in \tilde{\mathcal{Q}}$. □
Wir kommen nun zum Beweis von Satz 3.1.3.

Beweis: i) In einem ersten Schritt zeigen wir, dass es genügt, die Behauptung für irreduzible Z zu zeigen:

Sei $Z_1 \cup \ldots \cup Z_m$ die Komponentenzerlegung von Z, $Z_i = V(\mathcal{P}_i)$, $\mathcal{P}_i$ Primideal. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{P}_m$. Wir nehmen an, wir hätten den Satz für irreduzible Z bereits gezeigt. Dann

$$\begin{aligned} \rho(Z) &= \textstyle\bigcup_{i=1}^m \rho(Z_i) = \bigcup_{i=1}^m V(\varphi((\mathcal{P}_i)_R)) \\ &= V(\textstyle\bigcap_{i=1}^m \varphi((\mathcal{P}_i)_R)) = V(\varphi(\bigcap_{i=1}^m (\mathcal{P}_i)_R)) = V(\varphi(\mathcal{A}_R)). \end{aligned}$$

(zweitletztes „=“: $\subseteq$ klar. Sei $\forall 1 \leq i \leq m$ $F + G_i \in (\mathcal{P}_i)_R$, $F \in R[T_0, \ldots, T_n]$, $G_i \in \mathcal{M}[T_0, \ldots, T_n]$. Also ist $\varphi(F^m) \in \varphi(\mathcal{A}_R)$ und daher ist $\varphi F(x) = 0$ für alle x aus $V(\varphi(\mathcal{A}_R))$.)

Sei von nun an Z irreduzibel und $\mathcal{A}$ ein Primideal.

ii) Wir zeigen, dass wir Œ annehmen können, dass $R[T_0, \ldots, T_N]/\mathcal{A}_R$ ganz über $R[T_0, \ldots, T_r]$ ist:
Angenommen die Behauptung wäre unter dieser Voraussetzung bereits gezeigt. Seien $L_0, \ldots, L_r$ wie in 3.1.6 und seien Œ $\varphi L_0, \ldots, \varphi L_r, T_{r+1}, \ldots, T_n$ linear unabhängig über Ω. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \psi: & R[X_0, \ldots, X_r, T_{r+1}, \ldots, T_n] & \to & R[T_0, \ldots, T_n] \\ & X_i & \mapsto & L_i \\ & T_j & \mapsto & T_j \end{array}$$

ein Ringisomorphismus. (Die Determinante von ψ ist eine Einheit in R.) Also

$$R[X_0, \ldots, X_r, T_{r+1}, \ldots, T_n]/\psi^{-1}(\mathcal{A}_R) \cong R[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{A}_R$$

und daher ist $R[X_0, \ldots, X_r, T_{r+1}, \ldots, T_n]/\psi^{-1}(\mathcal{A}_R)$ ganz über $R[X_0, \ldots, X_r]$. Ausserdem ist $\psi^{-1}(\mathcal{A}_R)$ ein zu $R\backslash\{0\}$ disjunktes Primideal und somit ist das von ihm erzeugte Ideal über k durchschnitten mit $R[X_0, \ldots, X_r, T_{r+1}, \ldots, T_n]$ wieder $\psi^{-1}(\mathcal{A}_R)$. Nach Annahme ist also $\rho(V(\psi^{-1}(\mathcal{A}_R))) = V(\varphi(\psi^{-1}(\mathcal{A}_R)))$. Weiter sind

$$\begin{array}{rccc} \chi: & \mathbb{P}^n(k) & \to & \mathbb{P}^n(k) \\ & (\alpha_0 : \ldots : \alpha_n) & \mapsto & (L_0(\alpha) : \ldots : L_r(\alpha) : \alpha_{r+1} : \ldots : \alpha_n) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \bar{\chi}: & \mathbb{P}^n(\Omega) & \to & \mathbb{P}^n(\Omega) \\ & (\bar{\alpha}_0 : \ldots : \bar{\alpha}_n) & \mapsto & (\varphi L_0(\bar{\alpha}) : \ldots : \varphi L_r(\bar{\alpha}) : \bar{\alpha}_{r+1} : \ldots : \bar{\alpha}_n) \end{array}$$

Isomorphismen und es gilt:

$$\begin{gathered} (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in R^{n+1} \setminus \mathcal{M}^{n+1} \Rightarrow \\ (L_0(\alpha), \ldots, L_r(\alpha), \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in R^{n+1} \setminus \mathcal{M}^{n+1}. \end{gathered}$$

Also ist

$$\rho(\chi(Z)) = \bar{\chi}(\rho(Z)).$$

Wie man leicht nachprüft gilt ausserdem $\chi(Z) = V(\psi^{-1}(\mathcal{A}_R))$, woraus die Behauptung folgt.

iii) Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\alpha \in \mathbb{P}^n(K)$. Wir bezeichnen mit $I(\alpha)$ das Verschwindungsideal von α.

$$I(\alpha) := \{H \in K[T_0, \ldots, T_n] : H(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = 0, \text{ wo } \alpha = (\alpha_0 : \ldots : \alpha_n)\}.$$

Wir nennen die homogenen Ideale in $K[T_0, \ldots, T_n]$ die maximal sind unter allen homogenen Idealen $\neq (T_0, \ldots, T_n)$ *homogen-maximal.* Die Punkte des $\mathbb{P}^n(K)$ stehen vermöge $\alpha \to I(\alpha)$ in Bijektion zu der Menge der homogen-maximalen Ideale.

Wir zeigen nun,dass für alle $\alpha \in \mathbb{P}^n(k)$ gilt:

$$\varphi(I(\alpha)_R) = I(\rho(\alpha)).$$

Sei Œ $\alpha = (1 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n), \ \forall 1 \leq i \leq n \ \ \alpha_i \in R$. Offensichtlich gelten

$$I(\rho(\alpha)) = (T_1 - \varphi(\alpha_1)T_0, \ldots, T_n - \varphi(\alpha_n)T_0),$$
$$I(\alpha)_R = \{F \in R[T_0, \ldots, T_n] : \forall \lambda \in k \ F(\lambda, \lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n) = 0\}.$$

Sei nun $G \in \varphi(I(\alpha)_R)$, etwa $G = \varphi F$, mit $F \in I(\alpha)_R$. Dann ist $G(\rho(\alpha)) = (\varphi F)(1, \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)) = \varphi(F(\alpha)) = 0$. Umgekehrt genügt es zu zeigen, dass $\forall 1 \leq i \leq n \ \ T_i - \varphi(\alpha_i)T_0 \in \varphi(I(\alpha)_R)$ ist, aber das ist klar.

iv) Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis. Sei $\bar{\alpha} \in V(\varphi(\mathcal{A}_R))$. Zu zeigen ist, dass ein $\alpha \in Z$ existiert, mit $\rho(\alpha) = \bar{\alpha}$.

Sei $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_0 : \ldots : \bar{\alpha}_n)$. Dann existiert ein $0 \leq \ell \leq r$ so dass $\bar{\alpha}_\ell \neq 0$. (Denn, $\forall j > r \ \exists m_j \in \mathbb{N}' \ f_{j1}, \ldots f_{jm_j} \in R[T_0, \ldots, T_r]$ homogen mit $\deg f_{jh} = h$ oder $f_{jh} = 0$ so dass

$$F_j := T_j^{m_j} + f_{j1}T_j^{m_j-1} + \ldots + f_{jm_j} \in \mathcal{A}_R. \tag{2}$$

Wäre $\bar{\alpha}_0 = \ldots = \bar{\alpha}_r = 0, \ \bar{\alpha}_j \neq 0$, so $0 = (\varphi F_j)(\bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_n) = \bar{\alpha}_j^{m_j}$. Widerspruch.)

Sei Œ $\bar{\alpha} = (1 : \bar{\alpha}_1 : \ldots : \bar{\alpha}_n)$. Wegen iii) genügt es, ein homogen-maximales Ideal $\mathcal{D} \subseteq k[T_0, \ldots, T_n]$ zu finden, mit

$$\mathcal{A}_R \subset \mathcal{D} \text{ und } \varphi(\mathcal{D}_R) = I(\bar{\alpha}).$$

Der gesuchte Punkt α ist dann die Nullstelle von $\mathcal{D}$. Ist $\mathcal{C} \subseteq \Omega[T_0, \ldots, T_n]$, so sei $\varphi^{-1}(\mathcal{C}) := \{F \in R[T_0, \ldots, T_n] : \varphi F \in \mathcal{C}\}$.

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in R$ so dass $\forall 1 \leq i \leq r \ \varphi(\alpha_i) = \bar{\alpha}_i$.

Weiter sei π die Projektion von $R[T_0,\ldots,T_n]$ auf $R[T_0,\ldots,T_n]/\mathcal{A}_R$. Offensichtlich ist $k[T_0,\ldots,T_n]/\mathcal{A}$ ganz über $k[T_0,\ldots,T_r]$ und der Transzendenzgrad von $k[T_0,\ldots,T_n]/\mathcal{A}$ über k ist bekanntlich $r+1$. Also ist $\pi|R[T_0,\ldots,T_r]$ injektiv. π_1 sei die Projektion von $R[T_1,\ldots,T_n]$ auf $R[T_1,\ldots,T_n]/(\mathcal{A}_R)_d$, wobei $(A_R)_d$ definiert ist wie in Bemerkung 3.1.5 . $R[T_1,\ldots,T_n]/(\mathcal{A}_R)_d$ ist ganz über $R[T_1,\ldots,T_r]$ und $\pi_1|R[T_1,\ldots,T_r]$ ist eine Injektion. Wir identifizieren von jetzt an $R[T_0,\ldots,T_r]$ mit $\pi(R[T_0,\ldots,T_r])$ und $R[T_1,\ldots,T_r]$ mit $\pi_1(R[T_1,\ldots,T_r])$. Nun definieren wir

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{P}_1 := \varphi^{-1}(T_1-\bar{\alpha}_1T_0,\ldots,T_r-\bar{\alpha}_rT_0) & \subset R[T_0,\ldots,T_r],\\
\mathcal{P}_2 := \{F\in R[T_0,\ldots,T_r] : \forall\lambda\in k\ F(\lambda,\lambda\alpha_1,\ldots,\lambda\alpha_r)=0\} & \subset R[T_0,\ldots,T_r],\\
\mathcal{Q}_1 := \varphi^{-1}(T_1-\bar{\alpha}_1T_0,\ldots,T_n-\bar{\alpha}_nT_0) & \subset R[T_0,\ldots,T_n].
\end{array}$$

Es gelten

$$\begin{array}{l}
i)\mathcal{P}_1\supseteq\mathcal{P}_2\\
ii)\mathcal{Q}_1\cap R[T_0,\ldots,T_r]=\mathcal{P}_1\\
iii)\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2 \text{ und } \pi(\mathcal{Q}_1) \text{ sind homogene Primideale.}
\end{array}$$

Wir wollen $\mathcal{D}$ mit Hilfe des Going-Down Theorems (siehe [1], Kapitel 5) konstruieren. $R[T_1,\ldots,T_n]/(\mathcal{A}_R)_d$ ist ganz über $R[T_1,\ldots,T_r]$. Wir dehomogenisieren die Primideale $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ und $\mathcal{Q}_1$ und erhalten die Primideale $(\mathcal{P}_1)_d,(\mathcal{P}_2)_d\subset R[T_1,\ldots,T_r]$ sowie $(\mathcal{Q}_1)_d\subset R[T_1,\ldots,T_n]$. (Vgl. 3.1.5). Da $(\mathcal{A}_R)_d\subseteq(\mathcal{Q}_1)_d$ ist $\pi_1(\mathcal{Q}_1)_d\subseteq R[T_1,\ldots,T_n](\mathcal{A}_R)_d$ ein Primideal. Es gilt:

$$(\mathcal{P}_1)_d\supseteq(\mathcal{P}_2)_d \text{ und } \pi_1((\mathcal{Q}_1)_d)\cap R[T_1,\ldots,T_r]=(\mathcal{P}_1)_d.$$

Also können wir das Going-Down Theorem anwenden und erhalten ein Primideal $\bar{\mathcal{Q}}_2\subset R[T_1,\ldots,T_n]/(\mathcal{A}_R)_d$, das in $\pi_1((\mathcal{Q}_1)_d)$ enthalten ist und dessen Schnitt mit $R[T_1,\ldots,T_r]$ gerade $(\mathcal{P}_2)_d$ ist. Wir setzen $\tilde{\mathcal{Q}}_2:=\pi_1^{-1}(\bar{\mathcal{Q}}_2)$. $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ ist ein Primideal in $R[T_1,\ldots,T_n]$ mit

$$(\mathcal{A}_R)_d\subseteq\tilde{\mathcal{Q}}_2,\ \ \tilde{\mathcal{Q}}_2\subseteq(\mathcal{Q}_1)_d,\ \ \tilde{\mathcal{Q}}_2\cap R[T_1,\ldots,T_r]=(\mathcal{P}_2)_d.$$

Sei $\mathcal{Q}_2:=(\tilde{\mathcal{Q}}_2)_h$ die Homogenisierung von $\tilde{\mathcal{Q}}_2$. $\mathcal{Q}_2$ ist ein homogenes Primideal für das gilt:

$$\mathcal{A}_R\subseteq\mathcal{Q}_2,\ \ \mathcal{Q}_2\subseteq\mathcal{Q}_1,\ \ \mathcal{Q}_2\cap R[T_0,\ldots,T_r]=\mathcal{P}_2.$$

Sei $\mathcal{D}$ das von $\mathcal{Q}_2$ in $k[T_0,\ldots,T_n]$ erzeugte Ideal. Da $\mathcal{Q}_2\cap\mathcal{M}=\mathcal{P}_2\cap\mathcal{M}=\emptyset$, ist $\mathcal{D}$ ein echtes homogenes Primideal und $\mathcal{D}_R=\mathcal{Q}_2$ (Bemerkung 3.1.4).

Da $k[T_0,\ldots,T_n]/\mathcal{A}$ ganz ist über $k[T_0,\ldots,T_r]$ und $\mathcal{D}\cap k[T_0,\ldots,T_r]=S^{-1}\mathcal{Q}_2\cap S^{-1}R[T_0,\ldots,T_r]=S^{-1}(\mathcal{Q}_2\cap R[T_0,\ldots,T_r])=S^{-1}\mathcal{P}_2=I((1:\alpha_1:\ldots:\alpha_r))$, wo $S:=R\setminus\{0\}$, ist $V(\mathcal{D})$ endlich. Weil $\mathcal{D}$ prim ist, ist somit $\mathcal{D}$

homogen-maximal. Somit ist $V(\mathcal{D}) = \{(1 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n)\}$ für bestimmte $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \in k$. Seien $r+1 \leq j \leq n$, und F_j wie in (2). Da $F_j(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Null ist, müssen $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ Elemente von R sein.

Also folgt

$$I(\varphi(\alpha)) = \varphi(\mathcal{D}_R) = \varphi(\mathcal{Q}_2) \subseteq \varphi(\mathcal{Q}_1) = I(\bar{\alpha}).$$

□

3.2 Spezialisierung von Tensoren und Degeneration

Wir wollen vermöge φ eine Relation zwischen $\mathcal{B}^+(k)$ und $\mathcal{B}^+(\Omega)$ herstellen. Dazu wählen wir als Repräsentanten der Tensorklassen von $\mathcal{B}^+(k)$ Koordinatentensoren, deren Koeffizienten in R liegen. Die Klasse der Tensoren $s \in U \otimes V \otimes W$, wo U, V und W endlich dimensionale freie R-Moduln sind, bezeichnen wir mit $\underline{\text{ten}}\ R$. Ist $s \in R^m \otimes R^n \otimes R^p$, für natürliche Zahlen n, m und p, so bezeichnen wir mit $s_{ij\ell}$ die Koordinaten von s bezüglich der kanonischen Basis von $R^m \otimes R^n \otimes R^p$ und nennen s einen Koordinatentensor. Für ein $s \in \underline{\text{ten}}\ R$ sei s^k die Skalarerweiterung von s in $\underline{\text{ten}}\ k$. Tensoren $s \in U \otimes V \otimes W$ und $s' \in U' \otimes V' \otimes W'$ heissen *isomorph über R* ($\cong_R$), wenn es R-Modulisomorphismen $\alpha : U \to U', \beta : V \to V'$ und $\gamma : W \to W'$ gibt, so dass $s' = (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)s$ ist. s und s' heissen *äquivalent über R* ($\sim_R$), wenn Nulltensoren s_1 und s'_1 existieren, so dass $s \oplus s_1 \cong_R s' \oplus s'_1$ ist.

Bemerkung 3.2.1 *Zu $t \in \underline{\text{ten}}\ k$ gibt es ein $s \in \underline{\text{ten}}\ R$, so dass $t \cong s$.*

Bemerkung 3.2.2 *Sei $s \in \underline{\text{ten}}\ R$ ein Koordinatentensor. Dann gibt es einen als Koordinatentensor über k bündigen Tensor $s' \in \underline{\text{ten}}\ R$, so dass $s \sim_R s'$.*

Beweis: Da R ein Bewertungsring von k ist, sind Vektoren mit Koeffizienten aus R genau dann linear unabhängig über R, wenn sie linear unabhängig über k sind.

Es existieren $m, n, p \in \mathbb{N}$ und ein $s' \in R^m \otimes R^n \otimes R^p$ so dass $s \sim_R s'$ und die Matrizen $(s'_{1j\ell})_{j,\ell}, \ldots, (s'_{mj\ell})_{j,\ell}$ und $(s'_{i1\ell})_{i,\ell}, \ldots, (s'_{in\ell})_{i,\ell}$ sowie $(s'_{ij1})_{i,j}, \ldots, (s'_{ij1})_{i,j}$ je linear unabhängig über R sind. Also ist s' bündig über k. □

Bemerkung 3.2.3 *Seien $s, s' \in \underline{\text{ten}}\ R$ Koordinatentensoren. Dann gilt*

$$s \sim_R s' \Rightarrow \varphi(s) \sim \varphi(s').$$

Bemerkung 3.2.4 *Sei $s \in \underline{\text{ten}}\ R$ Koordinatentensor und $\varphi(s)$ sei bündig. Dann ist auch s bündig.*

Dies folgt direkt aus 3.1.2.

Definition 3.2.5 *Seien $a \in \mathcal{B}^+(k),\ c \in \mathcal{B}^+(\Omega)$*

c ist Spezialisierung von a (Bezeichnung: $c \prec_\varphi a$) genau wenn ein Koordinatentensor $s \in \underline{\text{ten}}\ R$ existiert mit $a = [s^k]$ und $[\varphi(s)] = c$.

Bemerkung 3.2.6 $\forall a \in \mathcal{B}^+(k) \quad 0 \prec_\varphi a$.

Bemerkung 3.2.7 $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{B}^+(k),\ c_1, c_2 \in \mathcal{B}^+(\Omega)$

$$c_1 \prec_\varphi a_1 \text{ und } c_2 \prec_\varphi a_2 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \prec_\varphi a_1 + a_2 \\ \quad c_1 c_2 \prec_\varphi a_1 a_2. \end{cases}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Degeneration und Spezialisierung miteinander verträglich sind. Vorbereitend zeigen wir dies für Restriktion und Spezialisierung:

Lemma 3.2.8 *Für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{B}^+(k),\ c_1, c_2 \in \mathcal{B}^+(\Omega)$ gilt:*

$$\begin{array}{lcl} c_1 \prec_\varphi a_1 \leq a_2 & \Rightarrow & c_1 \prec_\varphi a_2 \\ c_1 \leq c_2 \prec_\varphi a_1 & \Rightarrow & c_1 \prec_\varphi a_1. \end{array}$$

Beweis: i) Sei $c_1 = [\varphi(s)], s \in R^{m \times n \times p}$ ein über k bündiger Koordinatentensor und $[s^k] = a_1$. (Die Bemerkungen 3.2.2 und 3.2.3 zeigen, dass so ein s existiert.) Sei weiter $t \in \underline{\text{ten}}\ k$ mit $a_2 = [t]$. Da $s^k \leq t$ ist, existiert eine Basis für t, so dass für den zugehörigen Koordinatentensor gilt:

$$\begin{array}{ll} t_{ij\ell} = s_{ij\ell} & \text{für } i \leq m,\ j \leq n,\ \ell \leq p \\ t_{ij\ell} \in \mathcal{M} & \qquad\text{sonst.} \end{array}$$

Also $c_1 = [\varphi(t)] \prec_\varphi a_2$.

ii) Seien $c_1 = [u],\ c_2 = [v],\ a_1 = [s],\ u, v \in \Omega^{m \times n \times p}$ Koordinatentensoren, $s \in R^{m \times n \times p}$ Koordinatentensor, so dass $\varphi(s) = v$. Es existieren $\alpha \in \text{End}\ (\Omega^m),\ \beta \in \text{End}\ (\Omega^n),\ \gamma \in \text{End}\ (\Omega^p)$, mit

$$\forall (i,j,\ell) \in \underline{m} \times \underline{n} \times \underline{p} \quad u_{ij\ell} = \sum_{i'j'\ell'} \alpha_{ii'} \beta_{jj'} \gamma_{\ell\ell'} v_{i'j'\ell'}.$$

Wir wählen für alle $i, i', j, j', \ell, \ell'$ Elemente $\tilde{\alpha}_{ii'} \in \varphi^{-1}(\alpha_{ii'}),\ \tilde{\beta}_{jj'} \in \varphi^{-1}(\beta_{jj'})$, $\tilde{\gamma}_{\ell\ell'} \in \varphi^{-1}(\gamma_{\ell\ell'})$. Dann sind $\tilde{\alpha} \in \text{End}\ (R^m),\ \tilde{\beta} \in \text{End}\ (R^n),\ \tilde{\gamma} \in \text{End}\ (R^p)$ und

$$u_{ij\ell} = \varphi\,\underbrace{\Big(\sum_{i'j'\ell'} \tilde{\alpha}_{ii'} \tilde{\beta}_{jj'} \tilde{\gamma}_{\ell\ell'} s_{i'j'\ell'}\Big)}_{=:\ \tilde{s}_{ij\ell}}.$$

Also ist $c_1 \prec_\varphi [\tilde{s}] \leq a_1$, woraus zusammen mit i) die Behauptung folgt. $\square$

Satz 3.2.9 *Für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{B}^+(k)$, $c_1, c_2 \in \mathcal{B}^+(\Omega)$ gilt:*

$$\begin{array}{rl} i) & c_1 \prec_\varphi a_1 \trianglelefteq a_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 \prec_\varphi a_2 \\ ii) & c_1 \trianglelefteq c_2 \prec_\varphi a_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 \prec_\varphi a_1. \end{array}$$

Beweis: i) Seien etwa $a_1 = [t_1],\ a_2 = [t_2],\ t_1 = s_1^k$ mit $s_1 \in R^m \otimes R^n \otimes R^p$ und $c_1 = [\varphi(s_1)]$.

$$\begin{array}{rl} t_1 \trianglelefteq t_2 & \iff \exists q \in \mathbb{N}'\ t_1 \trianglelefteq_q t_2 \ (\ [12],\ \text{Theorem 5.8}) \\ & \iff \exists t \in k[\varepsilon]^m \otimes k[\varepsilon]^n \otimes k[\varepsilon]^p \quad \varepsilon^{q-1} t_1^{k[\varepsilon]} + \varepsilon^q t \leq t_2^{k[\varepsilon]} \\ & \Rightarrow \forall \theta \in k \setminus \{0\} \ \ \theta^{q-1} t_1 + \theta^q t(\theta) \leq t_2 \\ & (\qquad \text{Skalarerweiterung } k[\varepsilon] \to k,\ \varepsilon \mapsto \theta). \end{array}$$

Dann

$$\exists \theta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\},\ \text{so dass } \forall (i,j,\ell) \ \ \theta_0 t_{ij\ell}(\theta_0) \in \mathcal{M}.$$

Also gilt mit Lemma 3.2.8:

$$c_1 = [\varphi(s_1 + \theta_0(t(\theta_0)))] \prec_\varphi a_2.$$

ii) Sei $s \in R^m \otimes R^n \otimes R^p$ ein Koordinatentensor mit $[s^k] = a_1$ und $[\varphi(s)] = c_2$. Weiter seien

$$\begin{array}{l} X := \{u \in \Omega^m \otimes \Omega^n \otimes \Omega^p : u \leq \varphi(s)\} \\ Y := \{\varphi(\tilde{s}) : \tilde{s} \in R^m \otimes R^n \otimes R^p,\ \tilde{s}^k \trianglelefteq s^k\} \end{array}$$

Ist $z \in \Omega^n \setminus \{0\}$, so bezeichne $[z]_p \in \mathbb{P}^{n-1}(\Omega)$ den zugehörigen projektiven Punkt. ρ sei die in 3.1 definierte Abbildung.

$$\mathbb{P}(Y) := \{[y]_p : y \in Y \setminus \{0\}\} = \rho\{[t]_p : t \in k^m \otimes k^n \otimes k^p \setminus \{0\} : t \trianglelefteq s^k\}.$$

Aus Lemma 3.2.8 folgt, dass X eine Teilmenge von Y ist. Da $\{t : t \trianglelefteq s^k\}$ ein abgeschlossener Kegel und ρ abgeschlossen ist (Satz 3.1.3), ist $\mathbb{P}(Y)$ abgeschlossen, damit ist auch Y abgeschlossen und $\overline{X} = \{u \in \Omega^m \otimes \Omega^n \otimes \Omega^p : u \trianglelefteq \varphi(s)\} \subseteq Y$. Es gibt also ein $\tilde{s} \in R^m \otimes R^n \otimes R^p$ mit $c_1 \prec_\varphi [\tilde{s}^k] \trianglelefteq a_1$ und daraus folgt mit i) die Behauptung. $\square$

Seien $M \subset \mathcal{B}^+,\ a \in \mathcal{B}^+$. Wir schreiben :

$$M \trianglelefteq a :\iff \forall a' \in M \ \ a' \trianglelefteq a.$$

Bekanntlich operiert die Gruppe Gl $(k^m) \times$ Gl $(k^n) \times$ Gl (k^p) auf $k^m \otimes k^n \otimes k^p$ vermöge $((\alpha, \beta, \gamma), t) \mapsto (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)t$. Wir schreiben abkürzend $G_k t$ für Gl $(k^m) \times$ Gl $(k^n) \times$ Gl $(k^p)t$.

Für jeden Körper K existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to K$. Für $t \in \underline{\text{ten}}\ \mathbb{Z}$ sei $t^K \in \underline{\text{ten}}\ K$ die Skalarerweiterung bezüglich dieses Ringhomomorphismus. Wir können also denselben Koordinatentensor $t \in \underline{\text{ten}}\ \mathbb{Z}$ als Repräsentanten von Tensorklassen über k und über Ω betrachten. Es stellt sich heraus, dass für den Fall, wo die Charakteristik dieser beiden Körper gleich ist, Spezialisierungen von $[t^k]$ Degenerationen von $[t^\Omega]$ entsprechen.

Satz 3.2.10 *Seien char k = char Ω, $t \in \underline{\text{ten}}\ \mathbb{Z}$ Koordinstentensor, $a := [t^k] \in \mathcal{B}^+(k)$, $d := [t^\Omega] \in \mathcal{B}^+(\Omega)$. Dann gilt*

$$\forall c \in \mathcal{B}^+(\Omega) : \ c \trianglelefteq d \iff c \prec_\varphi a.$$

Beweis: Sei $c \trianglelefteq d$. Da $d \prec_\varphi a$ folgt $c \prec_\varphi a$ direkt aus Satz 3.2.9 ii).

Sei umgekehrt $c \prec_\varphi a$. Wir müssen zeigen, dass $\varphi((G_k t^k)_R) \trianglelefteq t^\Omega$ ist.
Sei P der Primkörper von k und Ω.

$$\begin{array}{rccc} \delta_k : & k^{m\times m} \times k^{n\times n} \times k^{p\times p} & \to & k^m \otimes k^n \otimes k^p \\ & (a, b, c) & \mapsto & (a \otimes b \otimes c)t^k \end{array}$$

ist definiert über P, (d.h. $\delta_k(P^{m\times m} \times P^{n\times n} \times P^{p\times p}) \subset P^m \otimes P^n \otimes P^p$) ebenso ist das analog definierte δ_Ω über P definiert.
Daraus folgt, dass der Abschluss des Bildes von δ_k bzw. δ_Ω über P definiert ist, d.h.

$$\begin{array}{lll} \overline{G_k t^k} = & \overline{\text{im } \delta_k} = & V_k\{G \in P[T_{111}, \ldots, T_{mnp}] : G \circ \delta_k = 0\} \\ \overline{G_\Omega t^\Omega} = & \overline{\text{im } \delta_\Omega} = & V_\Omega\{G \in P[T_{111}, \ldots, T_{mnp}] : G \circ \delta_\Omega = 0\}. \end{array}$$

(Siehe [4] Kapitel AG, 14.5 .)

Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi((\overline{G_k t^k})_R) \subset \overline{G_\Omega t^\Omega}$. $G \circ \delta_k$ und $G \circ \delta_\Omega$ sind polynomiale Abbildungen. Deshalb gilt

$$G \circ \delta_k = 0 \iff G \circ \delta_k | \bar{P}^{m\times m} \times \bar{P}^{n\times n} \times \bar{P}^{p\times p} = 0 \iff G \circ \delta_\Omega = 0.$$

Also folgt aus Bemerkung 3.1.1: $\varphi((\overline{G_k t^k})_R) \subset \overline{G_\Omega t^\Omega}$. □

Zusammen mit Satz 3.2.9 erhalten wir

Korollar 3.2.11 *Seien char k = char Ω, $b \in \mathcal{B}^+(k)$. Dann*

$$\forall c \in B^+(\Omega) \ \ (c \prec_\varphi b \Rightarrow \underline{R}(c) \leq \underline{R}(b)).$$

Dies gilt, wie das folgende Beispiel zeigt, nicht für den Rang!
Seien $k = \Omega = \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}$ transzendent und φ so, dass $\varphi(\alpha) = 0$ ist.

$$t := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 1 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{C}^{2\times 2\times 2},$$

$a := [t],\ c := [\varphi t]$, also $c \prec_\varphi a$. Aber aus den Resultaten von Grigoriev und Ja'Ja' [6], [8] (vgl. auch [9]) folgt: $R(a) = 2$ und $R(c) = 3$.

Satz 3.2.10 gilt nicht für char $k \neq$ char Ω, auch dann nicht, wenn man nur Koordinatentensoren $t \in \underline{\text{ten}}\ \mathbb{Z}$ mit Koeffizienten 0 oder 1 zulässt. Beispiel: char $k \neq$ char Ω, also char $k = 0$, char $\Omega = p > 0$. Sei $t \in \{0,1\}^{n\times n}$ mit det $t = p$. Dann ist $[E_n] \prec_\varphi [t^k]$ aber $[t^\Omega] \trianglelefteq [E_{n-1}]$, also kann $[E_n]$ nicht Degeneration von $[t^\Omega]$ sein. Dies ist allerdings kein Gegenbeispiel für Korollar 3.2.11.

3.3 Spezialisierung und oberes Trägerfunktional

Wir zeigen, (unter Benutzung von Notizen von V.Strassen) dass der Wert des oberen Eichfunktionals durch Spezialisierung höchstens kleiner wird. Diese Aussage wird uns im nächsten Paragraphen helfen, für gewisse Klassen nicht schräger Tensoren einen Teil des Spektrums zu bestimmen. Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und d ein Element von $\mathbb{N}$. Die Menge Grass (d, V) aller d-dimensionalen Unterräume von V wird vermöge der Plücker-Einbettung

$$\begin{array}{rlcll} \psi: & \text{Grass}\ (d,V) & \to & \mathbb{P}(\Lambda^d(V)) & \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1} \\ & D & \mapsto & \mathbb{P}(\Lambda^d(D)) & \end{array}$$

zu einer projektiven, algebraischen Varietät, der Grassmannvarietät.

Seien $n, d \in \mathbb{N},\ n \geq d$. $\binom{n}{d}_<$ soll die Menge aller geordneten d-Tupel natürlicher Zahlen kleiner als n bezeichnen, m.a.W. $\binom{n}{d}_< := \{(i_1, \ldots, i_d) : 0 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n-1\}$. Ist $\underline{i} \in \binom{n}{d}_<$, so sei $\underline{i}^c := (i_1^c, \ldots, i_{n-d}^c) \in \binom{n}{n-d}_<$, wobei $\{i_1^c, \ldots, i_{n-d}^c\} = \underline{n} \setminus \{i_1, \ldots, i_d\}$.

Lemma 3.3.1 *Seien $d, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq d \leq n$. Dann existieren ein $t \in \mathbb{N}$ und homogene Polynome $H_1, \ldots, H_t$ über $\mathbb{Z}$, so dass für alle algebraisch abgeschlossenen Körper k und mit Basis versehenen n-dimensionalen k-Vektorräume V gilt:*

$$\psi(\mathit{Grass}\ (d,V)) = V(H_1, \ldots, H_t) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}.$$

Ist char $k = p > 0$, so fassen wir die Polynome H_i vermöge des Restklassenmorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ angewandt auf ihre Koeffizienten auf als Polynome über $\mathbb{Z}_p$.

Die Beweise dieses und der folgenden zwei Lemmata sind für einen fest gewählten algebraisch abgeschlossenen Körper k in verschiedenen Lehrbüchern über algebraische Geometrie, (die ersten beiden Lemmata etwa in [7], das dritte in [11]) mit konstruktiven Beweisen enthalten. Wir müssen jeweils verifizieren, dass die konstruierten Polynome unabhängig von der Wahl von k sind. Exemplarisch führen wir deshalb den Beweis dieses ersten Lemmas aus.

Beweis: Sei $(e_i)_{i\in\underline{n}}$ eine Basis von V. Dann ist $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} : \underline{i} \in \binom{n}{d}_<)$ eine Basis von $\Lambda^d(V)$. $U_{\underline{i}}$ sei die affine Karte von $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$, die aus allen Punkten besteht, deren $\underline{i}$-te Koordinate nicht 0 ist. $D_{\underline{i}}$ sei der von $e_{i_1}, \ldots, e_{i_d}$ erzeugte Unterraum von V.

Sei $D \in \text{Grass }(d, V)$, etwa $D = \text{lin}(\sum_{j=0}^{n-1} h_{1j}e_j, \ldots, \sum_{j=0}^{n-1} h_{dj}e_j)$. Dann

$$\begin{array}{ll} & \psi(D) \in U_{\underline{i}} \\ \iff & \det(h_{ki_\ell})_{1\le k,\ell\le d} \neq 0 \\ \iff & D \cap D_{\underline{i}^c} = 0 \\ \iff & \exists a \in \text{Hom}_k(D_{\underline{i}}, D_{\underline{i}^c}),\ D = \text{graph } a \\ \iff & \exists a \in k^{d\times(n-d)}\ \ D = D_{\underline{i}}(a) := \\ & \text{lin }\{e_{i_1} + \sum_{\ell=1}^{n-d} a_{1\ell}e_{i^c_\ell}, \ldots, e_{i_d} + \sum_{\ell=1}^{n-d} a_{d\ell}e_{i^c_\ell}\}. \end{array}$$

Also ist (in affinen Koordinaten und nach Koordinatenpermutationen):

$$\text{im } \psi \cap U_{\underline{i}} = \{(a_{11}, \ldots a_{dn-d}, \ldots, f_h(a_{ij})_{i,j}, \ldots) \in k^{\binom{n}{d}-1}\} : a \in k^{d\times(n-d)}\}$$

wobei die f_h Polynome in den a_{ij} mit Koeffizienten 1 oder -1 sind. Also ist im $\psi \cap U_{\underline{i}}$ das Nullstellengebilde von Polynomen über $\mathbb{Z}$, die unabhängig sind von der Wahl von k und der Basis von V. $\square$

V sei immer noch ein n-dimensionaler k-Vektorraum. Flag $(V) := \{(D_0, \ldots, D_n) \in \text{Grass }(0, V) \times \ldots \times \text{Grass }(n, V) : D_0 \subset \ldots \subset D_n\}$ wird vermöge ψ und der Segre-Einbettung zu einer projektiven algebraischen Varietät. Wir bezeichnen die so entstehende Einbettung von Flag V in den projektiven Raum wiederum mit ψ.

Lemma 3.3.2 *Sei $n \in \mathbb{N}'$. Dann existieren $t \in \mathbb{N}'$ und homogene Polynome $H_1, \ldots, H_t$ über $\mathbb{Z}$, so dass für alle algebraisch abgeschlossenen Körper k und mit Basis versehenen n-dimensionalen k-Vektorräume V gilt:*

$$\psi(\mathit{Flag}\ (V)) = V(H_1, \ldots, H_t).$$

Lemma 3.3.3 (Vollstängigkeit projektiver Varietäten) *Seien* $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}[T_0, \dots, T_n]$ *ein homogenes Ideal,* $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}[S_1, \dots, S_m]$ *ein Ideal und* $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{Z}[T_0, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]$ *ein in den* T *homogenes Ideal mit* $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathcal{H}$.
Dann existieren $F_1, \dots, F_t \in \mathbb{Z}[S_1, \dots, S_m]$, *so dass für alle algebraisch abgeschlossenen Körper* k *für die Projektion*

$$\pi : \quad V(\mathcal{I}) \times V(\mathcal{J}) \to V(\mathcal{J})$$

gilt:

$$\pi(V(\mathcal{H})) = V(F_1, \dots, F_t) \subset k^m.$$

Ist $x \neq 0$ ein Punkt eines Vektorraumes X, so bezeichnen wir wieder mit $[x]_p$ den zugehörigen projektiven Punkt in $\mathbb{P}(X)$. ϕ bezeichne im folgenden Segre-Einbettungen.

Lemma 3.3.4 *Seien* $m, n, p \in \mathbb{N}$. *Dann existieren homogene Polynome* $H_1, \dots, H_t$ *über* $\mathbb{Z}$ *so dass für alle algebraisch abgeschlossenen Körper* k *gilt:*

$$\begin{gathered}\{\phi((\psi(D), \psi(D'), \psi(D''), [f]_p)) : (D, D', D'', f) \in \\ \mathit{Flag}\ (U) \times \mathit{Flag}\ (V) \times \mathit{Flag}\ (W) \times \mathit{Bil}\ (U, V; W), \\ f \neq 0, \quad f(D_\alpha \times D'_\beta)\} \subset D''_\gamma\} = V(H_1, \dots, H_t),\end{gathered}$$

wo $\alpha \in \underline{m}, \beta \in \underline{n}, \gamma \in \underline{p}$ *und* U, V, W *mit Basen versehene* k*-Vektorräume der Dimensionen* m, n, p *sind.*

Beweis: i) Wir zeigen zunächst, dass es Polynome $G_1, \dots, G_s$ mit Koeffizienten über $\mathbb{Z}$ gibt, so dass für alle algebraisch abgeschlossenen Körper k gilt:

$$\begin{gathered}X := \{\phi((\psi(D), \psi(D'), \psi(D''), [f]_p)) : (D, D', D'', f) \in \\ \text{Grass}\ (\alpha, U) \times \text{Grass}\ (\beta, V) \times \text{Grass}\ (\gamma, W) \times \text{Bil}\ (U, V; W), \\ f \neq 0, \quad f(D \times D') \subset D''\} = V(G_1, \dots, G_s).\end{gathered}$$

Seien $(e_i)_{i \in \underline{m}}, (f_j)_{j \in \underline{n}}, (g_\ell)_{\ell \in \underline{p}}$ Basen von U, V, W, $\underline{i} \in \binom{m}{\alpha}_<, \underline{j} \in \binom{n}{\beta}_<, \underline{\ell} \in \binom{p}{\gamma}_<$, $U_{\underline{i}}, U_{\underline{j}}, U_{\underline{\ell}}$ wie in Beweis 3.3.1 und F sei eine affine Karte von $\mathbb{P}(\text{Bil}\ (U, V; W))$. Sei $\phi((\psi(D), \psi(D')\psi(D''), [f]_p)) \in X \cap \phi(U_{\underline{i}} \times U_{\underline{j}} \times U_{\underline{\ell}} \times F)$, etwa

$$\begin{gathered}D = D_{\underline{i}}(a) = \text{lin}\ \{u_0, \dots, u_{\alpha-1}\}, \quad D' = D_{\underline{j}}(b) = \text{lin}\ \{v_0, \dots, v_{\beta-1}\}, \\ f(e_i, f_j) = \textstyle\sum_{\ell=0}^{p-1} f_{ij\ell} g_\ell.\end{gathered}$$

Dabei sind $a \in k^{\alpha \times m-\alpha}$, $b \in k^{\beta \times n-\beta}$, analog wie in Beweis 3.3.1. Weiter sei

$$D'' = D_{\underline{\ell}}(c) = \text{lin}\ \{\underbrace{g_{\ell_1} + \sum_{t=1}^{n-\gamma} c_{1t} g_{\ell_t^c}}_{w_0}, \dots, \underbrace{g_{\ell_\gamma} + \sum_{t=1}^{n-\gamma} c_{\gamma t} g_{\ell_t^c}}_{w_{\gamma-1}}\}$$

für ein $c \in k^{\gamma \times p-\gamma}$. Dann ist

$$f(u_i, v_j) = \sum_{r=0}^{p-1} H_{ijr} g_r,$$

wobei die $H_{ij\ell}$ Polynome in den $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{f}$ über $\mathbb{Z}$ sind. Weiter seien $\pi_r,\ r \in \underline{p}$ die kanonischen Projektionen von W auf k. Nun

$$\begin{array}{rcl} f(D \times D') \subset D'' & \Longleftrightarrow & \forall i,j\ f(u_i, v_j) \in D'' \\ & \Longleftrightarrow & \forall i,j,s \in \underline{\alpha} \times \underline{\beta} \times \underline{\gamma}\ \exists \lambda_{ijs} \in k \text{ mit} \\ & & f(u_i, v_j) = \sum_{s=0}^{\gamma-1} \lambda_{ijs} w_s \\ & \Longleftrightarrow & \forall i,j,s \in \underline{\alpha} \times \underline{\beta} \times \underline{\gamma}\ \exists \lambda_{ijs} \in k \text{ so dass} \\ & & \forall r \in \underline{p}\ \sum_{s=0}^{\gamma-1} \lambda_{ijs} \pi_r(w_s) = H_{ijr} \\ & \Longleftrightarrow & \forall r \in \underline{p}\ \sum_{s=0}^{\gamma-1} H_{ij\ell_{s+1}} \pi_r(w_s) = H_{ijr} \\ & & (\text{setze } r = \ell_h). \end{array}$$

Diese letzten Bedingungen lassen sich offensichtlich als Polynomgleichungen über $\mathbb{Z}$ in $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ und $\underline{f}$ ausdrücken, wobei die Koeffizienten nicht von k abhängen.

ii) Wir nennen die zu untersuchende Menge zur Abkürzung Z und definieren für einen n-dimensionalen k-Vektorraum V $\text{Uflag}_{\alpha}(V) := \{(D_0, \ldots, D_{\alpha-1}, D_{\alpha+1}, \ldots, D_n) \in \text{Grass}\,(0,V) \times, \ldots, \times \text{Grass}\,(\alpha-1, V) \times \text{Grass}\,(\alpha+1, V) \times \ldots \times \text{Grass}\,(n, V) : D_0 \subset \ldots \subset D_{\alpha-1} \subset D_{\alpha+1} \subset \ldots \subset D_n\}$. Auch $\text{Uflag}_{\alpha}(V)$ wird vermöge ψ und der Segre-Einbettung zu einer projektiven algebraischen Varietät, die wir mit $\psi(\text{Uflag}_{\alpha}(V))$ bezeichnen und es gilt eine zu Lemma 3.3.2 analoge Aussage. Aber

$$\begin{array}{l} Z = \phi(X \times \psi(\text{Uflag}_{\alpha}(U)) \times \psi(\text{Uflag}_{\beta}(V)) \times \psi(\text{Uflag}_{\gamma}(W))) \quad \cap \\ \phi(\psi(\text{Flag}\,(U)) \times \psi(\text{Flag}\,(V)) \times \psi(\text{Flag}\,(W)) \times \mathbb{P}(\text{Bil}\,(U,V;W))). \end{array}$$

□

Lemma 3.3.5 *Gegeben seien $m, n, p \in \mathbb{N}',\ r \in \mathbb{R},\ \theta \in \Theta$. Dann gibt es homogene Polynome $F_1, \ldots, F_t$ über $\mathbb{Z}$, so dass für alle algebraisch abgeschlossenen Körper k*

$$\{f \in \mathit{Bil}\,(U,V;W) : \zeta^{\theta}(f) \leq r\} = V(F_1, \ldots, F_t) \subset k^{mnp}.$$

Dabei sind U, V, W mit Basen versehene k-Vektorräume der Dimensionen m, n, p.

Beweis: Œ$f \neq 0$. Es gilt (vgl. [14]) $\zeta^{\theta}(f) = \min\limits_{F \in \mathcal{F}} \max\limits_{P \text{ auf } \text{supp}_F f} 2^{H_{\theta}(P)}$, wobei $\mathcal{F} := \text{Flag}\,(U) \times \text{Flag}\,(V) \times \text{Flag}\,(W)$, $\text{supp}_F f := \{(\alpha, \beta, \gamma) : f(U_{m-\alpha} \times V_{n-\beta}) \not\subset W_{\gamma}\}$ für $F = (U_0, \ldots, U_m, V_0, \ldots, V_n, W_0, \ldots, W_p)$.

Sei $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_t\} := \{\Psi \subset \underline{m} \times \underline{n} \times \underline{p} : \max\limits_{P \text{ auf } \Psi} 2^{H_\theta(P)} \leq r\}$. Dann

$$\begin{aligned}\zeta^\theta(f) \leq r \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \tau \in \{1, \ldots, t\},\ F \in \mathcal{F}(f) \text{ mit } \operatorname{supp}_F f \subset \Psi_\tau \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \tau \in \{1, \ldots, t\}, F \in \mathcal{F}(f) \text{ so dass} \\ &\qquad\quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \notin \Psi_\tau \quad f(U_{m-\alpha} \times V_{n-\beta}) \subset W_\gamma.\end{aligned}$$

Sei

$$\pi : \quad \phi(\psi(\mathcal{F}) \times \mathbb{P}(\mathrm{Bil}\ (U, V; W))) \quad \to \quad \mathbb{P}(\mathrm{Bil}\ (U, V; W)) \ \ \text{Projektion},$$

wobei ψ analog definiert ist wie früher und sei

$$Z := \bigcup_{\tau=1}^{t} \bigcap_{(\alpha,\beta,\gamma)\notin\psi_\tau} \{\phi((\psi(F), [f]_p)) : (F, f) \in \mathcal{F} \times \mathrm{Bil}\ (U, V; W), \\ f \neq 0, \quad f(U_{m-\alpha} \times V_{n-\beta} \subset W_\gamma)\}.$$

Dann ist $\pi(Z) = \{[f]_p :\ f \in \mathrm{Bil}\ (U, V; W),\ f \neq 0,\ \zeta^\theta(f) \leq r\}$ und mit den Lemmata 3.3.3 und 3.3.4 folgt die Behauptung. □

Zusammen mit Bemerkung 3.1.1 folgt aus obigem Lemma nun direkt

Satz 3.3.6 *Sei $a \in \mathcal{B}^+(k)$. Dann gilt für alle $c \in \mathcal{B}^+(\Omega)$ mit $c \prec_\varphi a$:*

$$\zeta^\theta(c) \leq \zeta^\theta(a).$$

3.4 Anwendung auf generische Tensoren

Eine Familie $(t^\kappa)_{\kappa \in I}$, wo $t^\kappa \in U_\kappa \otimes V_\kappa \otimes W_\kappa$ ist und $U_\kappa, V_\kappa, W_\kappa$ endlich dimensionale k- Vektorräume sind, heisse *generisch auf* $(\Psi_\kappa)_{\kappa \in I}$, $\Psi_\kappa \subset \underline{\dim U_\kappa} \times \underline{\dim V_\kappa} \times \underline{\dim W_\kappa}$, wenn für geeignete Basen alle Koordinaten $t^\kappa_{ij\ell}$, für die (i, j, ℓ) nicht in Ψ_κ liegt, Null sind und die Familie der restlichen Koordinaten aller Tensoren algebraisch unabhängig über dem Primkörper von k ist. Falls für alle $\kappa \in I$ $\Psi_\kappa = \underline{\dim U_\kappa} \times \underline{\dim V_\kappa} \times \underline{\dim W_\kappa}$, so heisse die Familie *generisch*.

Sei $\theta \in \Theta$. Wir nennen eine Menge $\Psi \subset \underline{m} \times \underline{n} \times \underline{p}$ *θ-gut*, wenn eine Teilmenge Φ von Ψ existiert, so dass Φ eine Antikette (bezüglich der Produktpartialordnung von Ordnungen auf $\underline{m}, \underline{n}$ und $\underline{p}$) ist und so dass $H_\theta(\Phi) = H_\theta(\Psi)$ ist. Wir nennen Ψ bequem, wenn ein $\Phi \subset \Psi$ und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf Φ existieren, so dass Φ wie oben eine Antikette ist und P gleichverteilte Marginalverteilungen hat. Bequeme Ψ sind offensichtlich θ-gut für alle $\theta \in \Theta$, das Umgekehrte gilt aber nicht. (Man wähle etwa für Ψ eine Antikette, auf der keine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit gleichverteilten Marginalverteilungen existiert.) Ein Format

(m, n, p) heisst bequem, falls $\underline{m} \times \underline{n} \times \underline{p}$ bequem ist. Beispielsweise ist (n, n, n) bequem.

Für generische Tensoren mit bequemen Trägern lässt sich das obere Eichfunktional leicht bestimmen und wir können zeigen, dass es auf dem von diesen Tensoren erzeugten positiven Kegel in $\underline{\text{ten}}\ k$ multiplikativ ist.

Satz 3.4.1 *Sei $\theta \in \Theta$. Weiter sei $(t^\kappa)_{\kappa \in I}$ generisch auf $(\Psi_\kappa)_{\kappa \in I}$ und Ψ_κ sei θ-gut für alle $\kappa \in I$. Dann ist*

$$\zeta(\theta) := (\zeta^\theta(t^\kappa))_{\kappa \in I} \in \triangle((t^\kappa)_{\kappa \in I}).$$

Insbesondere gilt, falls Ψ_κ bequem ist für alle $\kappa \in I$ und die t^κ vom Format $(m_\kappa, n_\kappa, p_\kappa)$ sind für alle $\theta \in \Theta$

$$\zeta(\theta) = (m_\kappa^{\theta_1} n_\kappa^{\theta_2} p_\kappa^{\theta_3})_{\kappa \in I} \in \triangle((t^\kappa)_{\kappa \in I}).$$

Beweis: Sei $X := ([t^\kappa])_{\kappa \in I}$ die Familie der von den t^κ erzeugten Tensorklassen. Nach [13] Theorem 3.2 (vgl. die Einführung von $\triangle(X)$ in der Einleitung) müssen wir zeigen, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}[X]$ gilt:

$$a \leq b \Longrightarrow a(\zeta(\theta)) \leq b(\zeta(\theta)).$$

Da ζ^θ auf $\underline{\text{ten}}\ k$ additiv, submultiplikativ und monoton bezüglich der Restriktionsordnung ist, genügt es zu zeigen, dass ζ^θ auf dem von den t^κ erzeugten positiven Kegel in $\underline{\text{ten}}\ k$ supermultiplikativ ist.

Sei $\theta \in \Theta$ und sei $\forall \kappa \in I\ \Phi_\kappa \subset \Psi_\kappa$ eine Antikette, mit $H_\theta(\Phi_\kappa) = H_\theta(\Psi_\kappa)$. Die t^κ seien Koordinatentensoren, deren Koeffizienten $t^\kappa_{ij\ell}$ Null sind, genau wenn $(i, j, \ell) \notin \Psi_\kappa$ ist und so, dass die Familie der übrigen Koeffizienten aller Tensoren t^κ algebraisch unabhängig über dem Primkörper P von k ist. Wir definieren einen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}:\ P[t^\kappa_{ij\ell}]_{(i,j,\ell) \in \Psi_\kappa,\ \kappa \in I} \ \rightarrow\ k$$

vermöge

$$\tilde{\varphi}(t^\kappa_{ij\ell}) := \begin{cases} t^\kappa_{ij\ell} & (i,j,\ell) \in \Phi_\kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

$\varphi :\ k \rightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow k$ sei eine Spezialisierung die $\tilde{\varphi}$ erweitert.

$$\begin{array}{lll} \forall \lambda, \mu \in I & \zeta^\theta(t^\lambda \otimes t^\mu) \geq \zeta^\theta(\varphi(t^\lambda \otimes t^\mu)) & \text{(Satz 3.3.6)} \\ & = \zeta^\theta(\varphi(t^\lambda) \otimes \varphi(t^\mu)) & \\ & = \zeta^\theta(\varphi(t^\lambda))\zeta^\theta(\varphi(t^\mu)) & (\varphi(t^\lambda), \varphi(t^\mu) \text{ sind schräg }) \\ & = \zeta^\theta(t^\lambda)\zeta^\theta(t^\mu). & \end{array}$$

(zur letzten Gleichheit: $\zeta^\theta(t^\lambda) \geq \zeta^\theta(\varphi(t^\lambda))$ gilt nach Satz 3.3.6. Da $\varphi(t^\lambda)$ schräg ist, gilt

$$\zeta^\theta(\varphi(t^\lambda)) = \zeta_\theta(\varphi(t^\lambda)) \geq 2^{H_\theta(\Phi_\lambda)} = 2^{H_\theta(\Psi_\lambda)} \geq \zeta^\theta(t^\lambda).\ )$$

Ebenso sieht man, dass $\zeta^\theta(t^{\kappa_1} \otimes \ldots \otimes t^{\kappa_r}) \geq \zeta^\theta(t^{\kappa_1}) \cdot \ldots \cdot \zeta^\theta(t^{\kappa_r})$ ist für $r \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Additivität von ζ^θ folgt daraus die Supermultiplikativität von ζ^θ auf dem von den t^κ erzeugten positiven Kegel in $\underline{\mathrm{ten}}\ k$.

Ist Ψ_κ bequem, so gilt

$$m_\kappa^{\theta_1} n_\kappa^{\theta_2} p_\kappa^{\theta_3} \geq \zeta^\theta(t^\kappa) \geq \zeta^\theta(\varphi(t^\kappa)) = m_\kappa^{\theta_1} n_\kappa^{\theta_2} p_\kappa^{\theta_3},$$

also $\zeta^\theta(t^\kappa) = m_\kappa^{\theta_1} n_\kappa^{\theta_2} p_\kappa^{\theta_3}$. □

Seien char $k = 0$, $q \in \mathbb{N}$ prim und $\theta \in \Theta$. Eine Familie $(t^\kappa)_{\kappa \in I}$, wo $t^\kappa \in U_\kappa \otimes V_\kappa \otimes W_\kappa$ ist und $U_\kappa, V_\kappa, W_\kappa$ endlich dimensionale k- Vektorräume sind, heisse *θ-stabil* (bezüglich q) auf $(\Psi_\kappa)_{\kappa \in I}$, $\Psi_\kappa \subset \underline{\dim U_\kappa} \times \underline{\dim V_\kappa} \times \underline{\dim W_\kappa}$, wenn

i) für alle $\kappa \in I$ eine Antikette $\Phi_\kappa \subseteq \Psi_\kappa$ existiert, so dass $H_\theta(\Phi_\kappa) = H_\theta(\Psi_\kappa)$ ist und

ii) für geeignete Basen alle Koordinaten $t^\kappa_{ij\ell}$ aller Tensoren t^κ aus $\mathbb{Z}$ sind und für diese Koordinaten gilt:

$$t^\kappa_{ij\ell} = 0 \quad \text{falls } (i,j,\ell) \notin \Psi_\kappa \quad t^\kappa_{ij\ell} \not\equiv 0 \bmod q \iff (i,j,\ell) \in \Phi_\kappa.$$

Falls $(t^\kappa)_{\kappa \in I}$ θ-stabil (bezüglich q) ist für alle $\theta \in \Theta$ und für alle $\kappa \in I$ $\Psi_\kappa = \underline{\dim U_\kappa} \times \underline{\dim V_\kappa} \times \underline{\dim W_\kappa}$ ist, so heisse die Familie *stabil* (bezüglich q).

Satz 3.4.2 *Sei $\theta \in \Theta$. $(t^\kappa)_{\kappa \in I}$ sei θ-stabil (bezüglich q) auf $(\Psi_\kappa)_{\kappa \in I}$. Dann ist*

$$\zeta(\theta) := (\zeta^\theta(t^\kappa))_{\kappa \in I} \in \triangle((t^\kappa)_{\kappa \in I}).$$

Insbesondere gilt, falls Ψ_κ bequem ist für alle $\kappa \in I$ und die t^κ vom Format $(m_\kappa, n_\kappa, p_\kappa)$ sind

$$\zeta(\theta) = (m_\kappa^{\theta_1} n_\kappa^{\theta_2} p_\kappa^{\theta_3})_{\kappa \in I} \in \triangle((t^\kappa)_{\kappa \in I}).$$

Dieser Satz kann analog wie Satz 3.4.1 bewiesen werden. Als Spezialisierung wähle man $\varphi : k \to\!\!\!\!\!+ \Omega$ mit $\varphi(q) = 0$.

Beispiel 1: Sei $m \in \mathbb{N}'$, $t \in k^{2m} \otimes k^{3m} \otimes k^{4m}$ generisch. Dann ist

$$[2m, 4m] \subseteq \triangle(t).$$

Beweis: Sei

$$\Phi := \{(i,i,i) : i < 2m\} \cup \{(i, i+m, i+2m) : i < 2m\}.$$

Φ ist straff (setze $\alpha = \gamma = id, \beta = -2id$), also eine Antikette bezüglich geeigneter Ordnungen auf $\underline{2m}, \underline{3m}, \underline{4m}$. Sei P die Gleichverteilung auf Φ. Dann ist für alle $\theta = (\theta_1, 0, \theta_3) \in \Theta$ $H_\theta(P) = (2m)^{\theta_1}(4m)^{\theta_3}$. Also ist für solche θ $H_\theta(\Phi) = H_\theta(\text{supp } t) = (2m)^{\theta_1}(4m)^{\theta_3}$. □

Beispiel 1a: Seien $q \in \mathbb{N}$ prim, Φ wie oben und $t \in \mathbb{Z}^{2m} \otimes \mathbb{Z}^{3m} \otimes \mathbb{Z}^{4m}$, $m \in \mathbb{N}'$ so, dass

$$q | t_{ij\ell} \iff (i, j, \ell) \notin \Phi.$$

Dann ist t θ-stabil, für alle $\theta \in \{(\theta_1, 0, \theta_3) \in \Theta\}$ und somit

$$[2m, 4m] \subseteq \triangle(t).$$

Beispiel 2: Sei $t \in U \otimes V \otimes W$ nicht der Nulltensor. Mit $\mathcal{D}(t)$ bezeichnen wir die Menge aller Tripel direkter Summenzerlegungen der k-Vektorräume U, V, W d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) = \{D = ((U(\eta)), (V(\iota)), (W(\lambda))) :\\ U = \textstyle\bigoplus_{\eta \in I} U(\eta),\ V = \bigoplus_{\iota \in J} V(\iota),\ W = \bigoplus_{\lambda \in L}(W(\lambda)),\\ \forall \eta \in I,\ \iota \in J,\ \lambda \in L\ \dim U(\eta) > 0, \dim V(\iota) > 0, \dim W(\lambda) > 0\}. \end{aligned}$$

(vgl. [14], Paragraph 4.)

Mit $t(\eta, \iota, \lambda)$ bezeichnen wir den auf $U(\eta) \otimes V(\iota) \otimes W(\lambda)$ eingeschränkten Tensor, mit $\text{supp}_D t$ die Menge aller $(\eta, \iota, \lambda) \in I \times J \times L$, für die $t(\eta, \iota, \lambda)$ nicht ein Nulltensor ist.

Sei nun C ein Tripel von Basen für U, V, W und $D \in \mathcal{D}(t)$ mit C verträglich, das heisst so, dass alle direkten Summanden die in D auftreten, durch Basisvektoren von C aufgespannt werden. Wir setzen für das folgende voraus, dass für alle $(\eta, \iota, \lambda) \in \text{supp}_D t$ der Träger supp $t(\eta, \iota, \lambda)$ bequem ist. Dabei ist supp $t(\eta, \iota, \lambda)$ der Träger bezüglich dem von C in offensichtlicher Weise induzierten Basistripel für $U(\eta) \otimes V(\iota) \otimes W(\lambda)$.Wir können durch geeignete Indexierung dieser Basiselemente erreichen, dass $\text{supp}_C t = \bigcup_{(\eta,\iota,\lambda) \in I \times J \times L} \text{supp } t(\eta, \iota, \lambda)$ ist.

Seien $x : I \to \mathbb{N}$, $y : J \to \mathbb{N}$ und $z : L \to \mathbb{N}$ gegeben durch $x(\eta) = \dim U(\eta)$, $y(\iota) = \dim V(\iota)$ und $z(\lambda) = \dim W(\lambda)$. Dann gilt (siehe [14],(6.2))

$$H_\theta(\text{supp}_C t) = H_\theta[\text{supp}_D t] \tag{3}$$

wo $H_\theta[\text{supp}_D t]$ definiert ist als das Maximum über alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen P auf $\text{supp}_D t$ von $H_\theta[P] := \theta_1 H(P_1|x) + \theta_2 H(P_2|y) + \theta_3 H(P_3|z)$. Weiter sei die Familie $(t(\eta, \iota, \lambda))_{(\eta,\iota,\lambda) \in \text{supp}_D t}$ generisch oder stabil und $\text{supp}_D t$ sei eine Antikette. Dann ist t generisch oder stabil auf supp $_C t$ und $\text{supp}_C t$ ist θ-gut für alle $\theta \in \Theta$. (Denn für alle $(\eta, \iota, \lambda) \in \text{supp}_D t$

gibt es eine Antikette $\Phi_{(\eta,\iota,\lambda)} \subseteq \operatorname{supp} t(\eta,\iota,\lambda) \subseteq \operatorname{supp}_C t$, auf der eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit gleichverteilten Marginalverteilungen existiert, wir wählen für Φ die Vereinigung aller dieser Antiketten.) Damit sind die Voraussetzungen der Sätze 3.4.1 beziehungsweise 3.4.2 erfüllt und wir erhalten für alle $\theta \in \Theta$

$$\zeta(\theta) = (\zeta^\theta(t)) \in \triangle(t).$$

Als konkretes Beispiel wollen wir einen Tensor $t \in \mathbb{C}^{mn} \otimes \mathbb{C}^{mn} \otimes \mathbb{C}^{mn}$ betrachten, für den bezüglich eines geeigneten Basistripels $C = ((u_i),(v_j),(w_\ell))$ und bezüglich

$$D = \left(\left(\bigoplus_{i=0}^{m-1} u_{\eta m+i} \right)_{\eta \in \underline{n}}, \left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} v_{\iota m+j} \right)_{\iota \in \underline{n}}, \left(\bigoplus_{\ell=0}^{m-1} u_{\lambda m+\ell} \right)_{\lambda \in \underline{n}} \right) \in \mathcal{D}(t)$$

gelten:

i) $\operatorname{supp}_D t = \operatorname{supp} s$, wo $s \in k^n \otimes k^n \otimes k^n$ der zu der Multiplikation in $k[T]/(T^n)$ gehörige Koordinatentensor bezüglich dem Tripel der natürliche Basen ist.

ii) $t(\eta,\iota,\lambda)_{(\eta,\iota,\lambda)\in supp_D t}$ ist generisch.

Für genügend grosse m ist t nicht schräg. Offensichtlich ist der Träger von $t(\eta,\iota,\lambda)$ bequem für alle $(\eta,\iota,\lambda) \in \operatorname{supp}_D t$. Da x, y und z konstant gleich m sind, gilt für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\operatorname{supp}_D t$

$$H_\theta[P] = H_\theta(P) + \log m.$$

Das Trägersimplex von s (supp s ist straff) ist

$$\zeta(\Theta) = [z(n), n] \qquad \text{([14] Theorem 6.7).}$$

Dabei ist $z(n) = \frac{\gamma^n - 1}{\gamma - 1}\gamma^{\frac{-2(n-1)}{3}}$ wobei γ die eindeutig bestimmte positive Lösung von $\frac{1}{\gamma-1} - \frac{n}{\gamma^n-1} = \frac{n-1}{3}$ ist. Wir erhalten somit für das Trägersimplex $\zeta(\Theta)$ von t

$$\zeta(\Theta) = [mz(n), mn].$$

4 Zweischeibentensoren

Wir betrachten im folgenden meist Tensoren in $k^m \otimes k^n \otimes k^2$ mit $n \geq m$. Selbstverständlich gelten jeweils analoge Aussagen auch für Tensoren aus $k^{m'} \otimes k^{n'} \otimes k^{p'}$, wo (m', n', p') eine Permutation von $(m, n, 2)$ ist. Auch in diesem Kapitel ist k immer ein algebraisch abgeschlossener Körper.

4.1 Die Kronecker Normalform

Wir nennen einen Tensor $t \in k^m \otimes k^n \otimes k^p$ p-Scheibentensor. Koordinatentensoren $t \in k^m \otimes k^n \otimes k^p$ beschreiben wir häufig als p-Tupel von Matrizen vom Format $m \times n$, also $t = (T_0, \dots, T_{p-1}) \in k^{m \times n \times p}$. So ein t nennen wir auch p-schichtige Matrix. Sind $t \in k^{m \times n \times p}$ und $t' \in k^{m' \times n' \times p'}$, so bezeichne $t \oplus_3 t'$ die p-schichtige Matrix mit den Schichten $\begin{pmatrix} T_i & 0 \\ 0 & T'_i \end{pmatrix}$. t^T bezeichne die p-schichtige Matrix mit den transponierten Schichten T_i^T. p-schichtige Matrizen $t, t' \in k^{m \times n \times p}$ heissen streng isomorph ($\equiv$), wenn es reguläre Matrizen $G \in k^{m \times m}$ und $H \in k^{n \times n}$ gibt, mit $GtH := (GT_0H, \dots, GT_{p-1}H) = t'$, sie heissen isomorph ($\cong$), wenn sie als k-Tensoren isomorph sind.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir werden folgende abkürzende Schreibweisen verwenden:

$$L_m \in k^{m \times m+1 \times 2} : \; L_m(i,j,\ell) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ und } \ell = 0 \\ & \text{oder } i = j-1 \text{ und } \ell = 1 \\ 0 & \text{sonst ;} \end{cases}$$

$N_{m,\varepsilon} \in k^{m \times m \times 2} : \; N_{m,\varepsilon} = (E_m, J_{m,\varepsilon})$

wo E_m die Einheitsmatrix und $J_{m,\varepsilon}$ ein Jordanblock mit Eigenwert ε ist.

$N_{m,\infty} := (J_{m,0}, E_m)$.

Auf Kronecker geht folgende Normalform für 2-schichtige Matrizen zurück (vgl. [5], Kapitel 12 oder [9]):

Satz 4.1.1 (Kronecker-Normalform) *Zu jedem* $t \in k^{m \times n \times 2}$ *existieren* $(a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{N}^q, (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{N}^r$, *beide monoton wachsend, eine endliche Teilmenge* $E \subset k \cup \{\infty\}$ *und* $c : \; E \to \bigcup_{t=1}^{\infty} (\mathbb{N}')^t$ *mit* $\forall \varepsilon \in E \; c(\varepsilon) = (c_{\varepsilon 1}, \dots, c_{\varepsilon t_\varepsilon}) \in (\mathbb{N}')^{t_\varepsilon}$ *monoton wachsend, so dass*

$$t \equiv \bigoplus_{i=1}^{q}{}_3 \; L_{a_i} \oplus_3 \bigoplus_{i=1}^{r}{}_3 \; L_{b_i}^T \oplus_3 \bigoplus_{\varepsilon \in E}{}_3 \; \bigoplus_{i=1}^{t_\varepsilon}{}_3 \; N_{c_{\varepsilon i}, \varepsilon} =: K(a,b,c,E)$$

und diese Darstellung ist bis auf die Anordnung von E eindeutig.

Folgende technische Aussage, die Gantmacher zur Konstruktion der Kronecker-Normalform verwendet, werden wir benutzen:

Lemma 4.1.2 *Seien* $n > m$ *und* $t = (A, B) \in k^{m \times n \times 2}$ *bündig. Für alle* $i \geq 0$ *seien*

$$M_i := \begin{pmatrix} A & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ B & A & & & \cdot \\ 0 & B & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & A \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & B \end{pmatrix} \in k^{(i+2)m \times (i+1)n}.$$

Weiter sei $a := \min\{i: \text{ Rang } (M_i) < (i+1)n\}$. *Dann gilt:*

$$(A, B) \equiv L_a \oplus_3 (\tilde{A}, \tilde{B})$$

wobei $\tilde{A}$ *beziehungsweise* $\tilde{B}$ *durch Streichen von gewissen Zeilen und Spalten aus* A *beziehungsweise* B *entstehen.*

Für einen bündigen Zweischeibentensor ist das im obigen Lemma definierte a offensichtlich grösser als Null. Einen Beweis des Lemmas findet man zum Beispiel in [5], Kapitel 12.

F.Heer [9] zeigte folgenden Satz über die Isomorphie von 2-schichtigen Matrizen und damit über die Isomorphie von Zweischeibentensoren:

Satz 4.1.3 $t, t' \in k^{m\times n\times 2}$ *mit Kronecker-Normalformen* $K(a, b, c, E)$ *beziehungsweise* $K(a', b', c', E')$ *sind genau dann isomorph, wenn* $a = a', b = b'$ *und eine Möbius Transformation* [5] ω *mit* $E' = \omega(E), c'\omega = c$ *existiert.*

Insbesondere ist also jeder bündige Tensor $t \in k^m \otimes k^n \otimes k^2$ isomorph einem $K(a, b, c, E)$ mit $E \subset k$.

Ein Tensor $t \in k^m \otimes k^n \otimes k^2$ heisst *regulär*, falls er isomorph ist zu einem $K(0, 0, c, E)$, andernfalls heisst er *singulär*. Ist t isomorph $K(a, b, c, \emptyset)$, so nennen wir t *rein-singulär.*

Bemerkung 4.1.4 $t = (T_0, T_1) \in k^{m\times n\times 2}$ *ist genau dann regulär, wenn ein* $\alpha \in k$ *existiert, so dass die Matrix* $T_0 + \alpha T_1$ *regulär ist.*

Die Kronecker-Normalform lässt sich für reguläre Tensoren mit Hilfe der Jordan-Normalform bestimmen:

Bemerkung 4.1.5 $t \in k^m \otimes k^m \otimes k^2$ *sei ein regulärer Tensor.* $T_0, T_1 \in k^{m\times m}$ *und* $\alpha \in k$ *seien so, dass* $t \cong (T_0, T_1)$ *und* $T_0 + \alpha T_1$ *regulär ist. Sei weiter* $E := \{\varepsilon : \det(\varepsilon(T_0 + \alpha T_1) - T_1) = 0\}$. *Dann ist* $t \cong K(0, 0, c, E)$ *für ein passendes* c.

Beweis: Seien $H, G \in \mathrm{Gl}_m(k)$, so dass $H(T_0 + \alpha T_1)G = E_m$ ist und sei J die Jordannormalform von HT_1G.

Dann ist $(T_0, T_1) \cong (E_m, J)$ und (E_m, J) ist eine Kronecker-Normalform. Die Eigenwerte von J sind die Nullstellen von $\det\,(xE_n - HT_1G)$. Aber $\det\,(xE_n - HT_1G) = \det\,(H(xH^{-1}G^{-1} - T_1)G) = \det H \det G \det\,(x(T_0 + \alpha T_1) - T_1)$. $\square$

[5]Eine Möbius Transformation ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \omega: & k \cup \{\infty\} & \to & k \cup \{\infty\} \\ & \varepsilon & \mapsto & \frac{\alpha\varepsilon+\beta}{\gamma\varepsilon+\delta}, \end{array}$$

wobei $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(k)$ und $\omega(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}, \omega(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$.

4.2 Das asymptotische Spektrum eines Zweischeibentensors

t sei ein bündiger Zweischeibentensor vom Format $(m,n,2)$ mit $n \geq m$. Dann gelten

$$\begin{array}{rll} & \underline{R}(t) = n & [3] \\ \text{und} & \underline{Q}(t) = 2. & (\text{für } m \geq 2 \text{ und } n \neq 2) \end{array}$$

($\underline{Q} \leq 2$ ist klar. Falls $m = 1$ ist, so gilt $\underline{Q} = 1$. Sei $m \geq 2$. Ist $n > 2$, so gilt, wie man mit Hilfe der Kroneckernormalform leicht sehen kann, $\langle 2 \rangle \leq t$. Ist $n = 2$, so ist t isomorph zu $\langle 2 \rangle$ oder zum Strukturtensor von $k[T]/(T^2)$. Im letzteren Fall gilt nach [14], Theorem 6.7, $\triangle(t) = [3 \cdot 2^{\frac{-2}{3}}, 2]$, also ist dann $\underline{Q}(t) = 1$.) Daraus folgt, dass das asymptotische Spektrum von t falls $2 \neq n \geq m \geq 2$ gilt, im Intervall $[2,n]$ enthalten ist. ([13]) Andererseits sind die Eichpunkte 2,m und n in $\triangle(t)$ enthalten. Es gilt also:

$$\{2, m, n\} \subseteq \triangle(t) \subseteq [2, n].$$

Für generische Zweischeibentensoren bequemen Formates folgt aus Satz 3.4.1, dass $\triangle(t) = [2,n]$ ist. Dies gilt aber für fast alle Zweischeibentensoren, auch dann, wenn der Transzendenzgrad von k über seinem Primkörper Null ist.

$\mathcal{K}$ sei die Menge aller Zweischeibentensoren t, für die gilt:

$$t \cong K(a,b,c,E) \text{ mit } \bigoplus_{\varepsilon \in E}{}_3 \bigoplus_{c_{\varepsilon i}=1}{}_3 N_{c_{\varepsilon i},\varepsilon} \cong (E_h, \operatorname{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{h-1})),$$

wobei $h \in \mathbb{N}$ und $\forall 0 \leq \ell \leq \frac{h-2}{2}$ $\lambda_{2\ell} \neq \lambda_{2\ell+1}$ und falls h ungerade ist zudem $\lambda_{h-2} \neq \lambda_{h-1} \neq \lambda_{h-3}$.

Satz 4.2.1 *Für jeden bündigen Tensor $t \in \mathcal{K}$ vom Format $(m,n,2)$ mit $2 \neq n \geq m \geq 2$ gilt:*

$$\triangle(t) = [2, n].$$

Beweis: Sei $\theta = (0, \theta_1, 1-\theta_1) \in \Theta$. Da

$$\zeta_\theta(t) \leq \zeta^\theta(t) \leq n^{\theta_1} 2^{1-\theta_1}$$

ist, genügt es zu zeigen, dass $\zeta_\theta(t) \geq n^{\theta_1} 2^{1-\theta_1}$ ist für alle $0 \leq \theta_1 \leq 1$. (Dann ist t θ-robust, also $\zeta^\theta(t) \in \triangle(t)$.)

Wir werden zeigen, dass t zu einem Koordinatentensor s isomorph ist, so dass auf den maximalen Punkten des Trägers von s eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P existiert, die gleichverteilte Marginalverteilungen P_2 und

P_3 hat. Unmittelbar mit der Definition von ζ_θ folgt daraus die Behauptung. Œ ist $t \cong K(a,b,c,E)$ mit $\infty \notin E$. Sei

$$(S_0, S_1) := \bigoplus_{i=1}^{q}{}_3\ L_{a_i} \oplus_3 \bigoplus_{i=1}^{r}{}_3\ L_{b_i}^T \in k^{m' \times n' \times 2}.$$

Da $t \in \mathcal{K}$ ist gilt

$$t \cong (S_0, S_1) \oplus_3 (E_s, J) \oplus_3 (E_h, \operatorname{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{h-1}))$$

wobei $s, h \in \mathbb{N}$ sind, J eine Jordanmatrix ist, deren Blöcke alle mindestens das Format 2×2 haben und die Diagonalmatrix diag $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{h-1})$ die gleichen Bedingungen erfüllt wie diejenige in der Definition von $\mathcal{K}$. Aber diese Diagonalmatrix ist einer Matrix D mit

$$D_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } j = i+1 \text{ und } (i \text{ gerade oder } j = h-1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ähnlich. Also ist

$$t \cong (S_0, S_1) \oplus_3 (E_s, J) \oplus_3 (E_h, D) \cong (S_1, S_0) \oplus_3 \bigoplus_{i=1}^{d}{}_3 (A_i, B_i)$$

mit supp $(A_i, B_i) =$ supp $(J_{h_i,\varepsilon}, E_{h_i})$, wobei $J_{h_i,\varepsilon} \in k^{h_i \times h_i}$ eine Jordanblockmatrix mit Eigenwert ε, $h_i \geq 2$ und $d \in \mathbb{N}$ ist.

Wir zeigen nun, dass (S_0, S_1) straff ist. Dazu müssen wir die Existenz injektiver Abbildungen α, β und γ von $\underline{m'}, \underline{n'}$ und $\underline{2}$ nach $\mathbb{Z}$ nachweisen, für die gilt, dass für alle Elemente (i,j,ℓ) des Trägers (S_0, S_1) $\alpha(i) + \beta(j) + \gamma(\ell) = 0$ ist. Sei $\gamma(0) = 1, \gamma(1) = 0$. Es genügt, für L_p und L_p^T injektive Abbildungen $\alpha, \beta:\ \underline{p} \mapsto \mathbb{Z}$ beziehungsweise $\underline{p+1} \mapsto \mathbb{Z}$ zu finden, so dass für alle (i,j,ℓ) in supp L_p und supp L_p^T $\alpha(i) + \beta(j) + \gamma(\ell) = 0$ ist. (Aus diesen Abbildungen können durch Addition von Konstanten für die einzelnen Blöcke L_p und L_p^T geeignete injektive Abbildungen $\alpha:\ \underline{m'} \mapsto \mathbb{Z}$ und $\beta: \underline{n'} \mapsto \mathbb{Z}$ gebildet werden.)

Wir setzen

$$\begin{aligned} &\text{für } L_p: \ \alpha(i) := -i-1, \beta(j) := j, \\ &\text{für } L_p^T: \ \alpha(i) := i, \beta(j) := -j-1. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist also der Träger von (S_1, S_0) nach geeigneten Zeilen- und Spaltenschichtpermutationen eine Antikette.

Ebenfalls nach geeigneten Zeilen- und Spaltenschichtpermutationen bilden die maximalen Punkte des Trägers von $(J_{h,\varepsilon}, E_h)$ die Menge

$$\mathcal{M}(J_{h,\varepsilon}, E_h) := \{(\eta, h-\eta-1, 1) : \eta \in \underline{h-1}\} \cup \{(\eta, h-\eta, 0) : 1 \leq \eta \leq h-1\}.$$

Sei

$$\mathcal{M} := \{(i,j,\ell) \in \text{supp } (S_1,S_0)\} \cup$$
$$\bigcup_{i=1}^d \{(\sum_{j=1}^{i-1} h_j + m' + \eta, \sum_{j=1}^{i-1} h_j + n' + \iota, \lambda) : \ (\eta,\iota,\lambda) \in \mathcal{M}(J_{h_i,\varepsilon}, E_{h_i})\}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\mathcal{M}$ existiert, die gleichverteilte Marginalverteilungen P_2 und P_3 hat. Wir setzen für $(i,j,\ell) \in \text{supp } (S_1, S_0)$

$$P(i,j,\ell) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } \nexists (i',j,\ell') \in \text{supp } (S_0,S_1) \text{ mit } (i',j,\ell') \neq (i,j,\ell) \\ \frac{1}{2n} & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $(i,j,\ell) = (\sum_{j=1}^{i-1} h_j + m' + \eta, \sum_{j=1}^{i-1} h_j + n' + \iota, \lambda)$ mit $(\eta,\iota,\lambda) \in \mathcal{M}(J_{h_i,\varepsilon}, E_{h_i})$

$$P(i,j,\ell) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } (\eta,\iota,\lambda) = (h_i-1,0,1) \\ \frac{h_i-2}{2n(h_i-1)} & \text{falls } \lambda = 1 \text{ und } (\eta,\iota.\lambda) \neq (h_i-1,0,1) \\ \frac{h_i}{2n(h_i-1)} & \text{falls } \lambda = 0. \end{cases}$$

P ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den gewünschten Eigenschaften. □

Die Klasse der Tensoren, für die der obige Satz auf diese Art bewiesen werden kann, kann mit etwas mehr Aufwand vergrössert werden, aber z.B. für $t \cong (E_2, J_{2,0}) \oplus_3 (E_1, 0)$ ist $\zeta^{(0,\theta_1,1-\theta_1)} \neq n^{\theta_1} 2^{1-\theta_1}$.

Damit kennen wir das asymptotische Spektrum fast aller Zweischeibentensoren. Über das asymptotische Spektrum mehrerer Zweischeibentensoren erhalten wir aber aus dem obigen Satz nur wenig Information. Ist $(t^\kappa)_{\kappa\in I}$ eine Familie von Zweischeibentensoren aus $\mathcal{K}$, so ist für alle $\theta = (0,\theta_1, 1-\theta_1) \in \Theta \ \ \zeta(\theta) = \zeta^\theta(t^\kappa)_{\kappa\in I} \in \triangle((t^\kappa)_{\kappa\in I})$. (Wir haben gezeigt, dass t θ-robust ist für alle solchen θ und alle $t \in \mathcal{K}$.) Um mehr Information zu erhalten, betrachten wir in den folgenden Paragraphen schräge Tensoren, von denen wir ja wissen, dass sie robust sind, und generische Tensoren, auf die wir Satz 3.4.1 anwenden können.

4.3 Schräge Zweischeibentensoren

Mit Hilfe der Kronecker-Normalform können wir die schrägen, regulären und zumindest einen Teil der schrägen singulären Zweischeibentensoren bestimmen.

Satz 4.3.1 *Sei $t \in k^m \otimes k^m \otimes k^2$, $t \cong K(0,0,c,E)$. Dann gilt*

$$t \textit{ straff} \iff t \textit{ schräg} \iff \#E \leq 2.$$

Sei $t \in k^m \otimes k^n \otimes k^2$, $t \cong K(a,b,c,E)$. Dann gilt

$$t \text{ straff } \Longleftarrow \#E \leq 2.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst: $\#E \leq 2 \Longrightarrow t$ straff.

Durch Anwenden einer geeigneten Möbius-Transformation auf E können wir erreichen, dass $E \subseteq \{0, \infty\}$. Sei $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$. Es genügt, für $L_p, L_p^T, N_{p,0}$, und $N_{p,\infty}$ injektive Abbildungen $\alpha, \beta : \underline{p} \mapsto \mathbb{Z}$ beziehungsweise $\underline{p+1} \mapsto \mathbb{Z}$ zu finden, so dass für alle (i,j,ℓ) in supp L_p, supp L_p^T, supp $N_{p,0}$ oder supp $N_{p,\infty}$ $\alpha(i) + \beta(j) + \gamma(\ell) = 0$ ist. (Vgl. Beweis von Satz 4.2.1.)

Wir setzen

$$\begin{array}{ll} \text{für } L_p \text{ und } N_{p,0}: & \alpha(i) := i, \beta(j) := -j, \\ \text{für } L_p^T: & \alpha(i) := -i, \beta(j) := j, \\ \text{für } N_{p,\infty}: & \alpha(i) := -i, \beta(j) := j-1. \end{array}$$

Da straffe Tensoren schräg sind, genügt es noch zu zeigen, dass für einen regulären, schrägen Tensor $t \cong K(0,0,c,E)$ gilt: $\#E \leq 2$.

Sei also $t \in k^m \otimes k^m \otimes k^2$ regulär, $t \cong (T_0, T_1)$ so dass supp (T_0, T_1) eine Antikette ist.

Wir zeigen zunächst: Es gibt genau eine vollständige Diagonale [6] in $T_0 + T_1$. Da t regulär ist, gibt es mindestens eine vollständige Diagonale. Wir zeigen mit Induktion nach m: Ist der Träger von (T_0, T_1) eine Antikette, so gibt es höchstens eine vollständige Diagonale in $T_0 + T_1$.

$m = 1$: klar.

$m > 1$:supp (T_0, T_1) Antikette $\Rightarrow$ #supp $(T_0 + T_1) = \#$ supp $(T_0, T_1) \leq 2m - 1$. Also

$$\exists 0 \leq i,j \leq m-1 \text{ mit } (T_0 + T_1)_{ij} \neq 0 \;\forall \ell \neq j \; (T_0 + T_1)_{i\ell} = 0.$$

(i,j) ist Element jeder vollständigen Diagonalen von $T_0 + T_1$. Seien $T_0', T_1' \in k^{m-1 \times m-1}$ die Matrizen, die man aus T_0 beziehungsweise T_1 durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält. supp (T_0', T_1') ist eine Antikette. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass es höchstens eine vollständige Diagonale in $T_0' + T_1'$ gibt. Also gibt es auch höchstens eine vollständige Diagonale in $T_0 + T_1$.

Sei D die vollständige Diagonale in $T_0 + T_1$. Durch Spaltenschicht-Multiplikationen können wir erreichen, dass T_1 nur Koeffizienten 0 und 1 hat. Für $(i,j) \in D$ ist $(x(T_0 + T_1) - T_1)_{ij} \in \{x - 1\} \cup kx$. Also ist für ein $c \in k$ und ein $\ell \in \mathbb{N}$

$$\det(x(T_0 + T_1) - T_1) = cx^\ell (x-1)^{n-\ell}.$$

[6] Eine vollständige Diagonale einer Matrix $A \in k^{m \times m}$ ist eine Menge $\{(i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)\} \subseteq \text{supp } A$ mit $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{j_1, \ldots, j_m\} = \underline{m}$.

Mit Bemerkung 4.1.5 folgt daraus die Behauptung. $\square$
Als nächstes wollen wir nun versuchen, das Trägersimplex regulärer, schräger Zweischeibentensoren zu bestimmen.

4.3.1 Schräge reguläre Zweischeibentensoren

Definition 4.3.2 *Seien $\emptyset \neq \Phi \subseteq \underline{m} \times \underline{n} \times \underline{p}$, $\theta \in \Theta$ und $q = (q_0, \ldots, q_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ so dass für alle $\ell \in \underline{p}$ gilt, dass $q_\ell \geq 0$ und $\sum_{\ell=0}^{p-1} q_\ell = 1$ ist. Dann sei*

$$\begin{aligned} H_{\theta_1,\theta_2}(\Phi, q) := \max\{H_\theta(P) : \ & P \text{ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf } \Phi, \\ & \forall \ell \in \underline{p}\ P_3(\ell) = q_\ell\}. \end{aligned}$$

Aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen (siehe [2], Kapitel 4, vgl. auch [14], Proposition 2.1) erhalten wir folgendes

Lemma 4.3.3 *Seien Φ und q wie oben. Weiter sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Φ, so dass für alle $\ell \in \underline{p}$ $P_3(\ell) = q_\ell$ ist und sei f_P die durch*

$$f_P(i,j,\ell) := -\theta_1 \log P_1(i) - \theta_2 \log P_2(j) - \theta_3 \log P_3(\ell)$$

definierte reellwertige Funktion auf Φ. Dann maximiert P $H_{\theta_1\theta_2}(\Phi, q)$ genau, wenn

$$\forall \ell_0 \in \underline{p} \ \ \forall (i,j,\ell_0) \in \operatorname{supp} P \quad f_P(i,j,\ell_0) = \max_{(i,j,\ell_0)\in\Phi} f_P(i,j,\ell_0)$$

und es gilt

$$H_{\theta_1,\theta_2}(\Phi, q) = \sum_{\ell=0}^{p-1} q_\ell \max_{(i,j,\ell)\in\Phi} f_P(i,j,\ell).$$

Sei von nun an immer $\Phi := \operatorname{supp}\,(E_m, J_{m,0}) \subseteq \underline{m} \times \underline{m} \times \underline{2}$. Ausserdem sei $\theta \in \Theta$, $x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1$ und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Φ, welche $H_{\theta_1,\theta_2}(\Phi, (x, 1-x))$ maximiert. Wir versuchen, $H_{\theta_1,\theta_2}(\Phi, (x, 1-x))$ zu bestimmen, dabei gehen wir analog vor, wie Strassen in [14], Kapitel 6.

Wir nehmen an, P sei streng grösser Null auf Φ und setzen:

$$\begin{aligned} S := \ & \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \ \alpha(0) = \beta(0) = 0, \\ & \exists c \in \mathbb{R}\ \forall i \in \underline{m}\ \alpha(i) + \beta(i) = 0,\ \forall i \in \underline{m-1}\ \alpha(i) + \beta(i+1) = c\} \\ = \ & \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \ \exists c \in \mathbb{R}\ \alpha(i) = -ic,\ \beta(j) = jc\} \cong \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.3.3 folgt, dass reelle Zahlen μ und ν existieren, für die

$$(-\theta_1 \log P_1 - \mu, -\theta_2 \log P_2 - \nu) \in S.$$

Also gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{c} \forall i \in \underline{m} \;\; P_1(i) = \dfrac{2^{i\frac{\lambda}{\theta_1}}}{\sum_{h=0}^{m-1} 2^{h\frac{\lambda}{\theta_1}}} \\ \text{und} \\ \forall j \in \underline{m} \;\; P_2(j) = \dfrac{2^{-j\frac{\lambda}{\theta_2}}}{\sum_{h=0}^{m-1} 2^{-h\frac{\lambda}{\theta_2}}}. \end{array} \tag{4}$$

Seien $\alpha, \beta \in S$ so, dass $\alpha(1) = 1$ ist und sei $\gamma := (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Wegen

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} \alpha(i)P_1(i) + \sum_{j=0}^{m-1} \beta(j)P_2(j) + \sum_{\ell=0}^{1} \gamma(\ell)P_3(\ell) \\ = \;& \textstyle\sum_{i,j,\ell\in\Phi}(\alpha(i) + \beta(j) + \gamma(\ell))P(i,j,\ell) = 0 \end{aligned}$$

gilt:

$$\frac{\sum_{i=0}^{m-1} i 2^{i\frac{\lambda}{\theta_1}}}{\sum_{i=0}^{m-1} 2^{i\frac{\lambda}{\theta_1}}} - \frac{\sum_{j=0}^{m-1} j 2^{-j\frac{\lambda}{\theta_2}}}{\sum_{j=0}^{m-1} 2^{-j\frac{\lambda}{\theta_2}}} + (1-x) = 0. \tag{5}$$

Durch (5) wird λ eindeutig bestimmt, denn $F(\lambda) := \theta_1 \log(\sum_{i=0}^{m-1} 2^{\frac{i\lambda}{\theta_1}})+ \theta_2 \log(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{\frac{-j\lambda}{\theta_2}})$ ist streng konvex auf S (siehe [14], Lemma 6.1), also ist die linke Seite von (5) streng monoton wachsend in λ. Unter der Annahme $P > 0$ auf Φ haben wir somit $H_{\theta_1\theta_2}[\Phi, (x, 1-x)]$ bestimmt. Wir wollen nun untersuchen, für welche $x \in [0,1]$ unsere Berechnung korrekt ist. Dies ist dann der Fall, wenn es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\hat{P}$ auf Φ gibt mit Marginalverteilungen (4) und $\hat{P}_3(0) = x$. Durch (4) wird $\hat{P}$ eindeutig festgelegt, nämlich

$$\begin{array}{ll} \forall 0 \le i \le m-2 & \hat{P}(i, i+1, 1) = \sum_{h=0}^{i} \hat{P}_1(h) - \sum_{h=0}^{i} \hat{P}_2(h), \\ \forall 0 \le i \le m-1 & \hat{P}(i,i,0) = \sum_{h=0}^{i} \hat{P}_2(h) - \sum_{h=0}^{i-1} \hat{P}_1(h). \end{array}$$

Es ist zu zeigen, dass $\hat{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, d.h. dass $\hat{P} \ge 0$ ist auf Φ.

Da $\lambda \le 0$ ist, ist $\hat{P}_1$ monoton fallen und $\hat{P}_2$ monoton wachsend und somit ist $\hat{P}(i, i+1, 1) \ge 0$ für alle $0 \le i \le m-2$.

Sei $i \in \underline{m}$, dann

$$\forall \theta \in \Theta \; \hat{P}(i,i,0) \ge 0 \iff \forall a \in]0,1] \; b \in [1, \infty[$$
$$\left(\underbrace{\frac{\sum_{h=0}^{m-1} h a^h}{\sum_{h=0}^{m-1} a^h} - \frac{\sum_{h=0}^{m-1} h b^h}{\sum_{h=0}^{m-1} b^h} + (1-x)}_{=: g(a,b)} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\sum_{h=0}^{i} b^h}{\sum_{h=0}^{m-1} b^h} - \frac{\sum_{h=0}^{i-1} a^h}{\sum_{h=0}^{m-1} a^h}}_{=: f_i(a,b)} \ge 0 \right). \tag{6}$$

Einem Vorschlag von V. Strassen folgend, setzen wir

$$F_i(z) := \frac{(x-1)m\sum_{h=0}^{i-1} z^h - \sum_{h=0}^{m-1} hz^h}{\sum_{h=0}^{m-1} z^h}.$$

Dann gilt (6) falls für alle $i \in \underline{m}$ $\max\limits_{b\geq 1} F_i(b) \leq F_i(1)$ und $\min\limits_{o<a\leq 1} F_i(a) \geq F_i(1)$ ist.

(Denn:

$$\begin{aligned} (x-1)mf_i(a,b)+g(a,b) &= F_{i+1}(b)-F_i(a)+(1-x) \\ \text{und}\qquad & \\ 0=(x-1)mf_i(1,1)+g(1,1) &= F_{i+1}(1)-F_i(1)+(1-x). \end{aligned}$$

Also gilt für alle $a \leq 1$ $b \geq 1$ mit $F_{i+1}(b) \leq F_{i+1}(1)$ und $F_i(a) \geq F_i(1)$, dass $(x-1)mf_i(a,b)+g(a,b) \leq 0$, aber daraus folgt (6).)

Sei $i \in \underline{m}$ fest. Dann ist $F_i(1) = (x-1)i - \frac{m-1}{2}$ und damit gilt für $z \geq 0$

$$F_i(z) - F_i(1) \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{-\sum_{h=0}^{m-1} hz^h - (x-1)m\sum_{h=i}^{m-1} z^h + \sum_{h=0}^{m-1}((x-1)(m-i)+\frac{m-1}{2})z^h}_{=:\,H(x,z)} \geq 0$$

und

$$\frac{dH}{dx} = -m\sum_{h=i}^{m-1} z^h + \sum_{h=0}^{m-1}(m-i)z^h = \frac{-iz^m+mz^i-m+i}{z-1}\begin{cases} \leq 0 & \text{falls } z>1 \\ \geq 0 & \text{falls } 0 \leq z < 1 \end{cases}.$$

Weiter gilt

$$H(\frac{1}{2},z) = \sum_{h=0}^{i-1}(\frac{i-1}{2}-h)z^h + \sum_{h=i}^{m-1}(\frac{m+i-1}{2}-h)z^h \begin{cases} \leq 0 & \text{falls } z \geq 1 \\ \geq 0 & \text{falls } 0 \leq z \leq 1 \end{cases}.$$

Also gilt für alle $x \geq \frac{1}{2}$:

$$H(x,z)\begin{cases} \leq 0 & \text{falls } z \geq 1 \\ \geq 0 & \text{falls } 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

und damit können wir für solche x H_{θ_1,θ_2} berechnen. Unter Verwendung von (4) erhalten wir mit einer einfachen Umformung:

Lemma 4.3.4 *Für alle $1 > x \geq \frac{1}{2}$ und $\theta \in \delta\Theta$ ist*

$$H_{\theta_1,\theta_2}[\Phi,(x,1-x)] = \theta_1\log(\sum_{i=0}^{m-1}\mu^{\frac{i}{\theta_1}}) + \theta_2\log(\sum_{j=0}^{m-1}\mu^{\frac{-j}{\theta_2}}) + \theta_3 H(x) + (1-x)\log\mu$$

wobei μ eindeutig festgelegt wird durch

$$\frac{\sum_{i=0}^{m-1} i\mu^{\frac{i}{\theta_1}}}{\sum_{i=0}^{m-1} \mu^{\frac{i}{\theta_1}}} - \frac{\sum_{j=0}^{m_1} j\mu^{\frac{-j}{\theta_2}}}{\sum_{j=0}^{m-1} \mu^{\frac{-j}{\theta_2}}} + (1-x) = 0.$$

Für $t \cong (E_m, J_{m,0})$ können wir auf diese Art das Trägersimplex berechnen.

Satz 4.3.5 *Das Trägersimplex $\zeta : \Theta \to \triangle(t)$ eines Zweischeibentensors $t \cong (E_m, J_{m,0})$ ist bestimmt durch*

$$\zeta(\theta) = \left(\frac{\mu^{\frac{m}{\theta_1}} - 1}{\mu^{\frac{1}{\theta_1}} - 1}\right)^{\theta_1} \left(\frac{\mu^{\frac{-m}{\theta_2}} - 1}{\mu^{\frac{-1}{\theta_2}} - 1}\right)^{\theta_2} \left(\frac{\mu^{\frac{2}{\theta_3}} - 1}{\mu^{\frac{1}{\theta_3}} - 1}\right)^{\theta_3}$$

wobei μ eindeutig festgelegt wird durch die Gleichung

$$\frac{\sum_{i=0}^{m-1} i\mu^{\frac{i}{\theta_1}}}{\sum_{i=0}^{m-1} \mu^{\frac{i}{\theta_1}}} - \frac{\sum_{j=0}^{m-1} j\mu^{\frac{-j}{\theta_2}}}{\sum_{j=0}^{m-1} \mu^{\frac{-j}{\theta_2}}} + \frac{\mu^{\frac{1}{\theta_3}}}{1+\mu^{\frac{1}{\theta_3}}} = 0,$$

für alle θ aus dem Inneren von Θ und durch

$$\zeta(0,\theta_2,\theta_3) = m^{\theta_2} 2^{\theta_3},\ \zeta(\theta_1, 0, \theta_3) = m^{\theta_1} 2^{\theta_3},\ \zeta(\theta_1,\theta_2,0) = m.$$

Beweis: Da Φ nach Anwenden von Koordinatenpermutationen eine Antikette ist, ist $\zeta(\theta) = 2^{H_\theta(\Phi)}$. Für $\theta \in \delta\Theta$ gilt offensichtlich $2^{H_\theta(\Phi)} = m^{\theta_1+\theta_2} 2^{\theta_3}$. Sei nun θ aus dem Inneren von Θ. Wir setzen

$$\begin{gathered} S := \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^2 : \\ \alpha(0) = \beta(0) = 0, \forall (i,j,\ell) \in \Phi\ \alpha(i) + \beta(j) + \gamma(\ell) = 0\} \end{gathered}$$

und gehen genauso wie bei der Berechnung von $H_{\theta_1,\theta_2}[\Phi,(x,1-x)]$ vor. An Stelle von Lemma 4.3.3 verwenden wir Proposition 2.1 aus [14]. Zusätzlich zu den Gleichungen (4) erhalten wir noch

$$P_3(0) = \frac{1}{1+2^{\frac{\lambda}{\theta_3}}},\ P_3(1) = \frac{2^{\frac{\lambda}{\theta_3}}}{1+2^{\frac{\lambda}{\theta_3}}}.$$

Die Gleichung (5) gilt mit $P_3(0)$ an Stelle von x. Die linke Seite dieser Gleichung ist wieder eine in λ streng monoton wachsende Funktion, die an der Stelle Null positiv ist. Also ist λ kleiner als Null und damit $P_3(0)$ grösser als $\frac{1}{2}$. Also ist $H_\theta(P) = H_\theta(\Phi)$ und wir erhalten die Behauptung. $\square$

Leider gibt es nicht für alle $\Psi = \operatorname{supp} K(a,b,c,E)$ mit $\#E \leq 2$ eine $H_\theta(\Psi)$-maximierende Wahrscheinlichkeitsverteilung P, die auf ganz Ψ grösser Null ist. Betrachten wir zum Beispiel Tensoren die äquivalent sind zu

$$T(n) := (E_3, J_{3,0}) \oplus_3 (E_n, 0).$$

Sei θ ein Element aus dem Inneren von Θ. Dann ist

$$\Psi = \{(i,i,0) : 0 \leq i \leq n+2\} \cup \{(0,1,1),(1,2,1)\}.$$

P^θ maximiere $H_\theta(\Psi)$. Wenn wir θ_3 oder n monoton wachsen lassen, fällt $P^\theta(1,1,0)$ offensichtlich monoton. Wir wollen zeigen, dass $P^\theta(1,1,0)$ für genügend grosse n oder für θ mit genügend grossem θ_3 Null wird.

Sei

$$y := \sum_{i=0}^{2} P^\theta(i,i,0) + \sum_{j=1}^{2} P^\theta(j-1,j,1).$$

P, definiert durch $P(i,j,\ell) = y^{-1}P^\theta(i,j,\ell)$ für alle $(i,j,\ell) \in \operatorname{supp}(E_3, J_{3,0}) =: \Phi$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Φ. Aus (6) und mit den Bezeichnungen von (6) folgt

$$\begin{array}{lllll} P(1,1,0) \geq 0 & \Rightarrow & \forall b \geq 1 & (g(b^{-1},b) = 0 & \Rightarrow \quad f_1(b^{-1},b) \geq 0) \\ & \Rightarrow & \forall b \geq 1 \left(\frac{3+b-b^2}{1+b+b^2} = x\right. & \Rightarrow & \left. b \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \\ & \Rightarrow & x \geq \frac{2}{3+\sqrt{5}}. & & \end{array}$$

Nun ist aber

$$x = P_3(0) = \frac{P_3^\theta(0) - (P^\theta(3,3,0) + \ldots + P^\theta(n+2,n+2,0))}{1 - (P^\theta(3,3,0) + \ldots + P^\theta(n+2,n+2,0)}$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \theta \in \Theta \setminus \delta\Theta \text{ so dass } P_3^\theta(0) < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Ausserdem ist $\forall 3 \leq i \leq n+2 \quad P^\theta(i,i,0) \geq \frac{1}{2(n+3)}$. Also gilt bei geeigneter Wahl von θ

$$x \leq \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{n}{2(n+3)}}{\frac{1}{2} - \varepsilon}.$$

Für genügend grosse n gibt es somit Elemente θ aus dem Inneren von Θ, so dass $P^\theta(1,1,0) = 0$ ist.

4.3.2 Schräge rein-singuläre Zweischeibentensoren

Sei t ein rein singulärer Zweischeibentensor, etwa

$$t = \bigoplus_{i=1}^{r} {}_3 L_{a_i} \oplus_3 \bigoplus_{j=1}^{s} {}_3 L_{b_j}^T \in k^m \otimes k^n \otimes k^2.$$

$(m = \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{j=1}^{s} b_j + s,\ n = \sum_{i=1}^{r} a_i + r + \sum_{j=1}^{s} b_j.)$ t ist straff. Wir wollen $H_\theta(\text{supp } t)$ bestimmen. Die Gleichverteilungen auf supp L_a beziehungsweise supp L_b^T haben gleichverteilte Marginalverteilungen. Wir können deshalb das Problem, $H_\theta(\text{supp } t)$ zu bestimmen, ersetzen durch das Problem kleinerer Grösse, $H_\theta[\Phi]$ zu berechnen, wobei die Elemente von Φ die Kästchen L_{a_i}, $L_{b_j}^T$ für alle i und j repräsentieren und die Funktionen x, y und z die Dimensionen der Kästchen angeben. Seien also

$$\begin{aligned}
&I = J = \{1, \ldots, r+s\}, \quad L = \{1\},\\
&x:\ I \to \mathbb{N}\ \ i \mapsto \begin{cases} a_i: & i \le r \\ b_{i-r}+1: & i \ge r, \end{cases}\\
&y:\ J \to \mathbb{N}\ \ j \mapsto \begin{cases} a_j+1: & j \le r \\ b_{j-r}: & j \ge r, \end{cases}\\
&z:\ L \to \mathbb{N}\ \ 1 \mapsto 2\\
&\text{und}\\
&\Phi := \{(h, h, 1) : 1 \le h \le r+s\} \subseteq I \times J \times L.
\end{aligned}$$

Dann ist (siehe [14],(6.2))

$$H_\theta(\text{supp } t) = H_\theta[\Phi],$$

wobei $H_\theta[\Phi]$ wie in 3.4 definiert ist als das Maximimum über alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen P auf supp (Φ) von $H_\theta[P] := \theta_1 H(P_1|x) + \theta_2 H(P_2|y) + \theta_3 H(P_3|z)$.

Wir können nun analog vorgehen wie bei der Bestimmung des Trägersimplexes von $(E_m, J_{m,0})$. P sei eine $H_\theta[P]$ maximierende Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dann ist der Träger von P ganz Φ, denn die Projektionen des Trägers von P auf I, J und L müssen surjektiv sein. Wir setzen

$$\begin{aligned}
S &:= \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J \times \mathbb{R} : \alpha(1) = \beta(1) = 0,\\
&\quad\ \forall (\eta, \iota, \lambda) \in \Phi\ \ \alpha(\eta) + \beta(\iota) + \gamma(\lambda) = 0\}\\
&= \mathbb{R}((1, 2, \ldots, r+1), (-1, -2, \ldots, -(r+1)), 0) \cong \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dann existieren Elemente μ, ν und π, so dass

$$(\theta_1 \log \frac{x}{P_1} - \mu, \theta_2 \log \frac{y}{P_2} - \nu, \theta_3 \log \frac{z}{P_3} - \pi) \in S.$$

Wir können nun wieder die Marginalverteilungen von P und dann $H_\theta[P]$ implizit bestimmen. Wir erhalten

Satz 4.3.6 *Seien $t \in k^m \otimes k^n \otimes k^2$ rein singulär und I, J, L, x, y, z wie oben. Dann ist das obere Trägerfunktional $\zeta : \Theta \to \triangle(t)$ bestimmt durch*

$$\zeta(\theta) = \left(\sum_{\eta \in I} x(\eta) \mu^{\frac{\eta}{\theta_1}}\right)^{\theta_1} \left(\sum_{\iota \in J} y(\iota) \mu^{\frac{-\iota}{\theta_2}}\right)^{\theta_2} 2^{\theta_3},$$

wobei μ eindeutig festgelegt wird durch die Gleichung

$$\frac{\sum_{\eta \in I} \eta x(\eta) \mu^{\frac{\eta}{\theta_1}}}{\sum_{\eta \in I} x(\eta) \mu^{\frac{\eta}{\theta_1}}} - \frac{\sum_{\iota \in J} \iota y(\iota) \mu^{\frac{-\iota}{\theta_2}}}{\sum_{\iota \in J} y(\iota) \mu^{\frac{-\iota}{\theta_2}}} = 0$$

für alle $\theta \in \Theta$ mit $\theta_1, \theta_2 > 0$ und durch

$$\zeta(0, \theta_2, \theta_3) = n^{\theta_2} 2^{\theta_3}, \quad \zeta(\theta_1, 0, \theta_3) = m^{\theta_1} 2^{\theta_3}.$$

4.4 Spezialisierung von Zweischeibentensoren

Um die Resultate aus Paragraph 3.4 anwenden zu können, wollen wir im folgenden die Kronecker-Normalformen generischer Zweischeibentensoren und die bequemen Formate $(m, n, 2)$ bestimmen.

4.4.1 Generische Zweischeibentensoren

Satz 4.4.1 *Ist t generisch und bündig vom Format $(m, n, 2)$, so gilt für $m = n$*

$$t \cong (E_m, diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)), \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in k \text{ algebraisch unabhängig}$$

und für $2m \geq n > m$

$$t \cong \bigoplus_{i=0}^{n-m-1} {}_3\, L_{p_i} \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{rrcl} & p_0 & = & \left\lfloor \frac{m}{n-m} \right\rfloor, \\ \forall i > 0 & p_i & = & \left\lfloor \frac{m - \sum_{j=0}^{i-1} p_j}{n-m-i} \right\rfloor. \end{array}$$

Bündige Tensoren vom Format (m, n, p) mit $n > 2m$ gibt es nicht.

Beweis: $m = n$: $t \cong (E_m, A)$, wobei $A \in k^{m \times m}$ generisch ist, d.h. algebraisch unabhängige Koeffizienten hat. Dann sind die Eigenwerte von A ebenfalls algebraisch unabhängig. Mit Bemerkung 4.1.5 folgt daraus die Behauptung.

$n > 2m$: Wie man mit Hilfe der Kroneckernormalform sieht, kann $t \in k^m \otimes k^n \otimes k^2$ nicht bündig sein.

$2m \geq n > m$: Sei $t \cong (A, B) \in k^{m \times n \times 2}$, so dass das System der Koeffizienten von A und B algebraisch unabhängig über dem Primkörper von k ist.

Wir zeigen: $(A, B) \cong L_{p_0} \oplus_3 (\tilde{A}, \tilde{B})$, wobei $(\tilde{A}, \tilde{B})$ generisch ist. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar mit Induktion. Sei

$$M_i := \begin{pmatrix} A & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ B & A & & & \cdot \\ 0 & B & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & A \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & B \end{pmatrix} \in k^{(i+2)m \times (i+1)n}.$$

Nach Lemma 4.1.2 genügt es

$$\text{Rang } (M_i) \quad \begin{cases} < (i+1)n & \text{falls} \quad i = p_0 \\ \geq (i+1)n & \text{falls} \quad i < p_0 \end{cases}$$

zu zeigen.

Es gilt:

$$(i+1)n \leq (i+2)m \iff i+1 \leq \frac{m}{n-m} \iff i \leq p_0 - 1.$$

Also ist Rang $(M_{p_0}) < (i+1)n$ und es genügt zu zeigen, dass für alle $i < p_0$ Rang $(M_i) = (i+1)n$ ist.

Seien $i < p_0$ und $\tilde{M}_i$ die Matrix, die wir aus M_i durch Streichen der letzten $(i+2)m - (i+1)n$ Zeilen erhalten. Es genügt zu zeigen, dass diese Matrix regulär ist.

Wir zeigen zunächst, dass die in der Diagonale von $\tilde{M}_i$ stehenden Elemente alle ungleich Null sind. Seien $h, s \in \underline{(i+1)n}$, dann

$$(\tilde{M}_i)_{hs} = 0 \iff \begin{cases} h \geq (t+1)m \text{ und } s < tn \text{ für ein } t \in \mathbb{N}, t \leq i+1 \\ \text{oder} \\ h < tm \text{ und } s \geq tn \text{ für ein } t \in \mathbb{N}, t \leq i+1. \end{cases}$$

Also

$$(\tilde{M}_i)_{rr} = 0 \iff \exists t \leq i+1 \quad (tn > r \geq (t+1)m \text{ oder } tm > r \geq tn).$$

Jede dieser beiden Bedingungen ist aber unerfüllbar.

Sei $\mathcal{M} := \{A_{\ell j} : \ell \in \underline{m}, j \in \underline{n}\} \cup \{B_{\ell j} : \ell \in \underline{m}, j \in \underline{n}\}$ die Menge der Koeffizienten von A und B. Wir definieren eine Abbildung $\mathcal{S} : \mathcal{M} \to k$ durch:

$$A_{\ell j} \mapsto \begin{cases} A_{\ell j} & \text{falls } \ell = j + h(n-m) \text{ für ein } h \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$B_{\ell j} \mapsto \begin{cases} B_{\ell j} & \text{falls } j = \ell + m - h(n-m) \text{ für ein } h \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gelten also:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A_{\ell j}) \neq 0 &\iff \exists r \in \underline{(i+1)n} \text{ mit } A_{\ell j} = (\tilde{M}_i)_{rr} \\ \mathcal{S}(B_{\ell j}) \neq 0 &\iff \exists r \in \underline{(i+1)n} \text{ mit } B_{\ell j} = (\tilde{M}_i)_{rr}. \end{aligned}$$

Wir wenden nun $\mathcal{S}$ auf die Koeffizienten von $\tilde{M}_i$ an und erhalten eine gestreifte Matrix $\mathcal{S}(\tilde{M}_i)$, deren Determinante als Polynom in den Variablen $A_{\ell j}, B_{\ell j}$ den Term $T := \prod_{\mathcal{S}(A_{\ell j}) \neq 0} A_{\ell j} \prod_{\mathcal{S}(B_{\ell j}) \neq 0} B_{\ell j}$ enthält. (Um das einzusehen, definieren wir für $h \in \underline{i+1}$

$$T_h := \prod_{j=0}^{m-h(n-m)-1} A_{j+h(n-m),j} \prod_{\ell=0}^{n-m+h(n-m)-1} B_{\ell,\ell+m-h(n-m)}.$$

Dann ist $T = \prod_{h=0}^{i} T_h$.

Seien S_h die Matrizen, die wir durch Streichen der ersten hn Zeilen und Spalten aus $\mathcal{S}(\tilde{M}_i)$ erhalten. S_h^t seien die Matrizen, die wir aus den S_h erhalten, wenn wir alle $A_{\ell j}, B_{\ell j}$ die in dem Term $\prod_{s=0}^{t} T_s$ vorkommen, Null setzen. Dann gelten

$$\begin{aligned} & \det S_0 = T_0 \det S_1 \\ \forall h \in \underline{i} \quad & \det S_h^{h-1} = T_h \det S_{h+1}^{h-1} \\ & \det S_i^{i-1} = T_i. \end{aligned}$$

Also enthält die Determinante von S_0 den Term T, aber $S_0 = \mathcal{S}(\tilde{M}_i)$.) Also ist die Determinante von $\mathcal{S}(\tilde{M}_i)$ nicht Null. Aber dann ist auch die Determinante von $\tilde{M}_i$ nicht Null. $\square$

Insbesondere sind also generische Zweischeibentensoren nicht-quadratischen Formates schräg. Generische Zweischeibentensoren quadratischen Formates sind für $m > 2$ nicht schräg. Wir wollen im folgenden ihr oberes Trägerfunktional bestimmen.

Lemma 4.4.2 *Seien $t \cong (E_m, diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) \in k^m \otimes k^m \otimes k^2$, die λ_i paarweise verschieden. Dann ist*

$$\zeta^\theta(t) = m^{\theta_1+\theta_2} 2^{\theta_3}.$$

Beweis: Sei $t = (T_0, T_1) \in k^{m\times m\times 2}$. Es gibt $\lambda, \mu \in k$, für die $T_0 + \lambda T_1$ und $\mu T_0 + T_1$ regulär sind. Aus Bemerkung 4.1.5 folgt, dass x^2 das Polynom $\det(x(T_0 + \lambda T_1) - T_1)$ nicht teilt und genauso, dass x^2 auch $\det(x(\mu T_0 + T_1) - T_0)$ nicht teilt. Also gibt es Mengen $D^0, D^1 \subseteq \operatorname{supp} t$ mit

$$\begin{aligned} &\#D^\ell = m,\ \pi_1(D^\ell) = \pi_2(D^\ell) = \underline{m}, \\ \text{und}\quad &\#(D^\ell \cap \underline{m} \times \underline{m} \times \{\ell\}) \geq m-1 \text{ für } \ell \in \{0,1\}, \end{aligned}$$

wobei π_ℓ die Projektion auf die ℓ-te Koordinate ist. Sei $D := D^0 \cup D^1$. Wir zeigen mit Fallunterscheidungen nach $\#D$, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\operatorname{supp} t$ mit gleichverteilten Marginalverteilungen existiert, woraus die Behauptung folgt.

Fall 1 : $\#D = 2m$.

Falls $\#(D \cap \underline{m} \times \underline{m} \times \{0\}) = m$, so setzen wir

$$P(i,j,\ell) = \begin{cases} \frac{1}{2m} & \text{falls } (i,j,\ell) \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sonst sei Œ $\#(D \cap \underline{m} \times \underline{m} \times \{0\}) = m-1$. Dann ist $D \cap \underline{m} \times \underline{m} \times \{0\} = D^0 \cap \underline{m} \times \underline{m} \times \{0\}$. Wir setzen

$$P(i,j,\ell) = \begin{cases} \frac{m-2}{2m(m-1)} & \text{falls } (i,j,\ell) \in D^1 \\ \frac{1}{2(m-1)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fall 2: $\#D = 2m-1$.

Sei Œ $\#\{D \cap \underline{m} \times \underline{m} \times \{0\}\} = m-1$. Sei $\{(i_0, j_0, 1)\} := D^0 \cap \underline{m} \times \underline{m} \times \{1\}$. Falls $(i_0, j_0, 1) \in D^1$, so setzen wir

$$P(i,j,\ell) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } (i,j,\ell) = (i_0, j_0, 1) \\ \frac{1}{2(m-1)} & \text{falls } \ell = 0 \\ \frac{m-2}{2m(m-1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

sonst setzen wir

$$P(i,j,\ell) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } \ell = 0 \text{ und } (i,j,\ell) \in D^1 \\ \frac{1}{2m} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fall 3: $\#D = 2m-2$.

Sei $\{(i_0, j_0, 0), (i_1, j_1, 1)\} := D^0 \cap D^1$. Wir setzen

$$P(i,j,\ell) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } (i,j,\ell) \in \{(i_0, j_0, 0), (i_1, j_1, 1)\} \\ \frac{1}{2m} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

4.4.2 Bequeme Formate $(m, n, 2)$

Satz 4.4.3 *Seien $m, n \in \mathbb{N}'$. Dann*

$$(m,n,p) \text{ bequem} \iff \begin{cases} m \neq n \text{ und } (n-m)|m \\ \text{oder} \\ m = n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Beweis: „$\Leftarrow$“: Fall 1: $m = n =: 2\ell$.

$$\Psi := \{(i, n-i-1, 0) : i \in \underline{\ell}\} \cup \{(i, n-i-1, 1) : i \in \underline{n} \setminus \underline{\ell}\}$$

ist eine Antikette und die Gleichverteilung auf Ψ hat gleichverteilte Marginalverteilungen.

Fall 2: $n > m$.

Sei $\ell := \frac{m}{n-m}$, also $\frac{\ell+1}{\ell} = \frac{n}{m}$. Wir setzen

$$\forall 0 \leq j < n-m \quad \Psi_j := \begin{array}{l} \{(j\ell+i, n-j(\ell+1)-i-1, 0) : i \in \underline{\ell}\} \\ \cup\{(j\ell+i, n-j(\ell+1)-i-2, 1) : i \in \underline{\ell}\} \end{array}$$

und definieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\Psi := \bigcup_{j=0}^{n-m-1} \Psi_j$ durch

$$\begin{array}{l} P((j\ell+i, n-j(\ell+1)-i-1, 0)) = \left(\frac{i+1}{\ell+1} - \frac{i}{\ell}\right)\frac{1}{n-m} \\ P(j\ell+i, n-j(\ell+1)-i-2, 1) = \left(\frac{i+1}{\ell} - \frac{i+1}{\ell+1}\right)\frac{1}{n-m} \end{array}$$

für alle j. P hat gleichverteilte Marginalverteilungen.

„$\Rightarrow$“: Œ $n \geq m$. Sei $\Psi \subseteq \underline{m} \times \underline{n} \times \underline{2}$ eine Antikette und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ψ mit gleichverteilten Marginalverteilungen.

Fall 1: $m = n$.

Da $\#\Psi \leq 2n-1$ und P_2 die Gleichverteilung ist, gibt es ein $(i_0, j_0, \ell_0) \in \Psi$ mit $P(i_0, j_0, \ell_0) = \frac{1}{n}$, dann ist aber $\operatorname{supp} P \setminus \{(i_0, j_0, \ell_0)\} \subseteq (\underline{n} \setminus \{i_0\}) \times (\underline{n} \setminus \{j_0\}) \times \underline{2}$. Wir erhalten so iterativ eine Folge

$$(i_0, j_0, \ell_0), \ldots, (i_{n-1}, j_{n-1}, \ell_{n-1})$$

von Elementen aus Ψ, die alle Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ haben und so dass $\{i_0, \ldots, i_{n-1}\} = \{j_0, \ldots, j_{n-1}\} = \underline{n}$ gilt. Da P_3 die Gleichverteilung ist, muss n gerade sein.

Fall 2: $m \neq n$.

Sei Œ $n > m$. Da $\#\Psi \leq 2m \leq 2n-1$ und P_2 die Gleichverteilung ist, gibt es ein $(i_0, j_0, \ell_0) \in \Psi$ mit $P(i_0, j_0, \ell_0) = \frac{1}{n}$. Wir führen den Fall $\ell_0 = 0$

durch, $\ell_0 = 1$ geht analog. Da P_1 und P_2 Gleichverteilungen sind, existiert eine Folge

$$(i_0, j_0, 0), (i_0, j_1, 1), (i_1, j_1, 0), (i_1, j_2, 1), \ldots, (i_{s-1}, j_s, 1) \in \Psi,$$

die $i_0, \ldots i_{s-1}$ und $j_0, \ldots, j_s$ je paarweise verschieden, mit

$$\begin{array}{ll} \forall 0 \leq \ell \leq s-1 & P(i_\ell, j_\ell, 0) = \frac{\ell+1}{n} - \frac{\ell}{m} \\ \forall 1 \leq \ell \leq s & P(i_{\ell-1}, j_\ell, 1) = \frac{\ell}{m} - \frac{\ell}{n} \\ & P(i_{s-1}, j_s, 1) = \frac{1}{n}. \end{array}$$

(Die dritte Koordinate der Folgenglieder ist festgelegt, da Ψ eine Antikette ist.) Daraus folgt aber insbesondere:

$$\frac{s}{m} - \frac{s}{n} = \frac{1}{n}.$$

Also ist $s = \frac{m}{n-m}$. □

Aus obigem Lemma und aus Lemma 4.4.2 folgt, dass generische Zweischeibentensoren quadratischen Formates $(m, m, 2)$, m ungerade, nicht robust sind.

Wir können nun die Sätze 3.4.1 und 3.4.2 auf Zweischeibentensoren anwenden. Zusammenfassend erhalten wir

Satz 4.4.4 *Sei $(t^\kappa)_{\kappa \in I}$ eine Familie generischer oder stabiler (bezüglich $q \in \mathbb{N}$, q prim) Zweischeibentensoren. Für alle $\kappa \in I$ sei dabei $t^\kappa \in k^{m_\kappa} \otimes k^{n_\kappa} \otimes k^2$, und es gelte $m_\kappa = n_\kappa$ gerade oder $(n_\kappa - m_\kappa) | n_\kappa$. Dann ist*

$$\zeta(\Theta) = ((m_\kappa^{\theta_1} n_\kappa^{\theta_2} 2^{\theta_3})_{\kappa \in I}) \subseteq \triangle((t^\kappa)_{\kappa \in I}).$$

Wenn die Familie $(t^\kappa)_{\kappa \in I}$ ausschliesslich aus generischen singulären Zweischeibentensoren besteht, haben wir das Trägersimplex $\zeta(\Theta)$ in Satz 4.3.6 bereits bestimmt. Dieses Resultat hier stimmt dann offensichtlich mit jenem überein.

Literatur

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald: *Introduction to commutative Algebra* Addison-Wesley 1969.

[2] Bazaraa-Shetty: *Nonlinear Programming* John Wiley & Sons 1979.

[3] D. Bini: *Border rank of a $p \times q \times 2$ tensor and the optimal approximation of a pair of bilinear forms* Lecture Notes on Computer Science 85 1980.

[4] A. Borel: *Linear Algebraic Groups* Benjamin 1969.

[5] F.R. Gantmacher: *Matrizentheorie* Springer 1986.

[6] D.Yu. Grigoriev: *Some new bounds on tensor rank* LOMI preprints E-2-1978. Leningrad 1978.

[7] J.E. Humphreys: *Linear algebraic groups* Springer 1981

[8] J. Ja'Ja': *Optimal evaluation of pairs of bilinear forms* SIAM J. Comput. 8 (1979), 443-462.

[9] F. Heer: *Der Rang eines zweischichtigen Tensors* Diplomarbeit, Universität Zürich 1983/84.

[10] D. Mumford: *The red book of varieties and schemes* Springer 1988, LNM 1358.

[11] I.R. Schafarewitsch: *Grundzüge der algebraischen Geometrie* Vieweg 1972.

[12] V. Strassen: *Relative bilinear complexity and matrix multiplication* J. reine angewandte Math. 375/376 (1987) 406-443.

[13] V. Strassen: *The asymptotic spectrum of tensors* J. reine angewandte Math. 384 (1989) 102-152.

[14] V. Strassen: *Degeneration and complexity of bilinear maps* erscheint in J. reine angewandte Math.