Über die Darstellung positiver Polynome auf semi-algebraischen Kompakta

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors der Naturwissenschaften an der Universität Konstanz, Fakultät für Mathematik und Informatik, vorgelegt von

Thomas Jacobi

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Oktober 1999

1. Referent: Professor Dr. A. Prestel (Konstanz)
2. Referent: Professor Dr. E. Becker (Dortmund)

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit wird für eine Klasse von partiell archimedisch angeordneten kommutativen Ringen ein Darstellungsatz hergeleitet. Dieser erlaubt es, die Elemente des Rings als stetige reellwertige Funktionen auf einem Kompaktum zu interpretieren. Auf der Grundlage dieser Darstellungen werden im zweiten Teil der Arbeit strikte Positivstellensätze gewonnen. Dabei werden archimedisch angeordnete Körper $(K, <)$ und polynomiale Funktionen $f, g_1, \ldots, g_k \in K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A} =: A$ aus der affinen K-Algebra A betrachtet, so daß f auf der semi-algebraischen Menge $S = \{a \in V_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}) \mid g_1(a) \geq 0, \ldots, g_k(a) \geq 0\}$ strikt positiv ist. Es wird vollständig charakterisiert, wann f in der Form $(1 + \tau) \cdot f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_k g_k$ mit $\tau, \sigma_i \in \sum K_+ A^{2m}$ dargestellt werden kann. Falls die durch $g_1, \ldots, g_k$ definerte Menge S kompakt ist, werden diese Darstellungen sogar „nennerfrei“ sein, d.h. es kann $\tau = 0$ gewählt werden.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer PROF. DR. A. PRESTEL Dank aussprechen: Dank für die gehörige Portion Geduld, die vonnöten war, bis mein Entschluß, dieses Projekt in Angriff zu nehmen, schließlich gefaßt war, dafür, daß das Gebiet, auf das er mein Interesse gelenkt hat, meinen mathematischen Geschmack voll und ganz zufriedengestellt hat, und natürlich nicht zuletzt für die vielen wertvollen Impulse und die konstruktive Kritik von seiner Seite. Ich danke DR. THORSTEN WÖRMANN für den Freimut, mit dem er mir in einem frühen Stadium seiner Dissertation Einblick in seine Ergebnisse und in die von ihm verwendeten Methoden gewährt hat. PRIV. DOZ. DR. JOCHEN KOENIGSMANN danke ich für Beistand in bewertungstheoretischen Fragen. Als immer bereit, den wildesten Vermutungen geduldig zu lauschen, sowie nie den Glauben an ihre Realisierbarkeit zu verlieren, hat sich mein Freund und Kollege DR. MIHAI PRUNESCU erwiesen, dem ich hierfür und für jede anderweitige Unterstützung danken möchte. SABINE CORNELSEN und MATTHIAS FRANZ haben dankenswerterweise die Arbeit auf orthographische, stilistische und inhaltliche Mängel hin durchforstet (und selbstverständlich ist jeder noch vorhandene Fehler mir anzulasten). Herzlicher Dank gebührt dem LAND BADEN-WÜRTTEMBERG, das mich in Form eines Stipendiums über einen Zeitraum von zwei Jahren hinweg großzügig finanziell unterstützt hat. Für Unterstützung, die nicht direkt mit dieser Arbeit in Verbindung steht, aber dennoch an ihrem Enstehen nicht unwesentlichen Anteil hatte, danke ich DETLEF WITT, CAROL WILSON, ULRIKE STIER, SABINE SCHNEIDER sowie – last, but not least – vor allem KAREN ROBERTS.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Für einen beliebigen Körper K und ein Ideal $\mathfrak{A} \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ist die Frage nach der Existenz eines K-rationalen Punktes von $\mathfrak{A}$ im allgemeinen schwer zu entscheiden. Ein Kriterium, das dazu herangezogen werden kann, ist das folgende: Betrachten wir die Menge

$$U := \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid \forall\, a \in K^n : \ f(a) \neq 0\}$$

der Polynome ohne Nullstelle im K^n, so ist eine offensichtliche Vorbedingung für die Existenz eines K-rationalen Punktes von $\mathfrak{A}$, daß kein Polynom aus $\mathfrak{A}$ in U liegt. Und tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend, d.h. es gilt

$$V_K(\mathfrak{A}) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \cap U = \emptyset.$$

Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K, z.B. $\mathbb{C}$, besteht U genau aus den von 0 verschiedenen konstanten Polynomen, $U = K^\times$, und wir erhalten somit die Äquivalenz $V_K(\mathfrak{A}) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \cap K^\times = \emptyset \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \neq K[X_1, \dots, X_n]$, die unter dem Namen Hilbertscher Nullstellensatz wohlbekannt ist.

Doch schon, wenn wir den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, der ja nicht weit von der algebraischen Abgeschlossenheit entfernt ist, betrachten, liegt eine genaue Beschreibung der Struktur von U nicht mehr auf der Hand. Immerhin liefert die Anordnung von $\mathbb{R}$ eine erste Annäherung: U zerfällt in die Menge der positiv definiten und die Menge der negativ definiten Polynome, d.h.

$$U = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid \ f > 0\} \cup \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid \ f < 0\}.$$

Vergegenwärtigt man sich die grundlegende Bedeutung des Hilbertschen Nullstellensatzes für die algebraische Geometrie, so ist es daher nicht erstaunlich, daß der Versuch, die geometrische Eigenschaft der positiven Definitheit eines Polynoms algebraisch zu beschreiben, zum Ausgangspunkt der Entwicklung der sogenannten reellen algebraischen Geometrie wurde.

Erste Bemühungen in dieser Hinsicht wurden gegen Ende des letzten Jahrhunderts unternommen. So widerlegte 1888 Hilbert eine von ihm gehegte Vermutung, die sich jedoch letztlich als richtungweisend erwies: Er zeigte, daß sich ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, das positiv semidefinit ist, d.h. $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$, im allgemeinen *nicht* in der Form

$$f = f_1^2 + \cdots + f_r^2$$

mit Polynomen $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ darstellen läßt. An dieser Stelle muß vermerkt werden, daß, auch wenn die vorausgehenden Betrachtungen dies nahelegen, Hilberts Motivation, dieser Fragestellung nachzugehen, anderen Ursprungs war: Interessiert an möglichen Axiomatisierungen der Geometrie ist Hilbert bei dem Bemühen, die Punkte der Ebene zu charakterisieren, die mit Zirkel und Eichmaß aus gegebenen konstruierbar sind, auf diese Fragestellung gestoßen. Interessant ist, daß Hilbert einen unkonstruktiven Beweis geführt hat und erst geraume Zeit später, 1967, Motzkin ein konkretes Polynom gefunden hat, das positiv semidefinit und keine Summe von polynomialen Quadraten ist.

Trotz des anfänglichen Mißerfolges muß Hilbert davon überzeugt gewesen sein, der richtigen Fährte zu folgen. Auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Paris, 1900, hat er das Problem in Form einer Vermutung der mathematischen Öffentlichkeit als eines der dreiundzwanzig seiner Meinung nach für die Entwicklung der Mathematik im zwanzigsten Jahrhundert bedeutenden Probleme vorgestellt. Seitdem als 17. Hilbertsches Problem bekannt, formulierte er die Frage, ob für einen Teilkörper $K \subset \mathbb{R}$ der reellen Zahlen das folgende richtig sei: Läßt sich jedes über $\mathbb{R}$ positiv semidefinite Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ in der Gestalt

$$f = \left(\frac{g_1}{h_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{g_r}{h_r}\right)^2$$

mit $g_i, h_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ darstellen, also als rationale Summe von Quadraten?

Hilberts Einschätzung, sowohl von der Bedeutung des Problems, als auch hinsichtlich seiner Lösung, hat in diesem Fall nicht getrogen. Etwa ein viertel Jahrhundert später haben Artin und Schreier die Theorie der angeordneten, auch formal reell genannten, Körper entwickelt. Im Zuge dieser Entwicklung hat Artin dann 1927 das 17. Hilbertsche Problem vollständig gelöst, bei weitem vollständiger, als die Formulierung des Problems ahnen lies. Er hat gezeigt, daß für jeden angeordneten Körper $(K, <)$[1] mit reellem Abschluß[2] R gilt: Nimmt $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ auf R^n keine negativen Werte an, so gibt es Polynome $g_i, h_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und positive Koeffizienten $a_i \in K$ mit

$$f = a_1 \left(\frac{g_1}{h_1}\right)^2 + \cdots + a_r \left(\frac{g_r}{h_r}\right)^2.$$

Wie so oft, erweist sich auch Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems, bei näherem Hinsehen, als Spezialfall einer allgemeineren Fragestellung: Sei etwa $\mathfrak{A} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal sowie $g_1, \ldots, g_k \in K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A} =: A$. Ist dann $f \in A$ eine Funktion mit der Eigenschaft, daß $f > 0$ auf der Menge

$$S(g_1, \ldots, g_k) := \{a \in V_R(\mathfrak{A}) \mid g_1(a) \geq 0, \ldots, g_k(a) \geq 0\}$$

[1] D.h. $<$ ist eine lineare Ordnung von K mit $0 < 1$ und $a, b > 0 \Rightarrow a + b > 0, a \cdot b > 0$.

[2] D.h. R ist algebraisch über K, $R(\sqrt{-1}) \neq R$ ist algebraisch abgeschlossen ist und für jedes $a \in K$ mit $a > 0$ gilt $\sqrt{a} \in R$.

ist, so liegt die Frage nahe, ob sich diese Eigenschaft von f in einer Darstellung von f niederschlägt, in der neben Summen von Quadraten auch die Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ Eingang finden. Die Antwort auf diese Frage ist bekannt unter dem Namen Positivstellensatz und lautet wie folgt: Unter den beschriebenen Voraussetzungen gibt es polynomiale Funktionen

$$\sigma_e = a_{e1}g_{e1}^2 + \cdots + a_{er}g_{er}^2 \quad \text{und} \quad \tau_e = b_{e1}h_{e1}^2 + \cdots + b_{er}h_{er}^2$$

mit $a_{ei}, b_{ei} \geq 0$ und $g_{ei}, h_{ei} \in A$, so daß gilt

$$\Big(\sum_{e\in\mathbb{N}^k} \tau_e g_1^{e_1}\cdots g_k^{e_k}\Big)\cdot f = 1 + \sum_{e\in\mathbb{N}^k} \sigma_e g_1^{e_1}\cdots g_k^{e_k}.$$

Der Positivstellensatz wurde erstmals 1974 gefunden, und durch unabhängige Zugänge z.B. von Prestel und Stengle bewiesen. Er ist, wie eingangs angedeutet, eng verknüpft mit einer reellen Version des Nullstellensatzes, die leicht aus ihm abgeleitet werden kann, wie dies auch für eine Charakterisierung der auf S nichtnegativen Funktionen der Fall ist.

Überraschend kündigte sich einige Jahre später eine weitere Entwicklung an. Überraschend zum einen hinsichtlich des Ursprungs der Ergebnisse, zum anderen was ihren Inhalt betrifft. 1991 konnte Schmüdgen zeigen, daß sich im Fall $K = \mathbb{R}$ und einer kompakten Menge $S(g_1, \ldots, g_k)$ immer eine nennerfreie Darstellung

$$f = \sum_{e\in\mathbb{N}^k} \sigma_e g_1^{e_1}\cdots g_k^{e_k}$$

gefunden werden kann. Grundlage von Schmüdgens Beweis ist seine Lösung des sogenannten *Momentenproblems* für kompakte semialgebraische Mengen S, der Frage, wann eine reelle Multi-Folge $(m_e)_{e\in\mathbb{N}^k}$ den Momenten eines Borelmaßes μ mit Träger S entspricht, d.h.

$$\int X_1^{e_1}\cdots X_n^{e_n}\, d\mu = m_e$$

für alle $e \in \mathbb{N}^k$ gilt. Diese Lösung wiederum basiert auf einer Kombination des Positivstellensatzes mit funktionalanalytischen Techniken (Existenz von Spektralmaßen selbstadjungierter Operatoren).

Trotz der Eleganz des Resultats waren die reellen Algebraiker nicht glücklich darüber, daß ein Ergebnis, das der Form nach in ihren Aufgabenbereich fällt, in einer Weise zu Tage trat, die den arithmetischen Ursprung des Phänomens im Dunkeln ließ. In der Tat war ja zu vermuten, daß nicht nur der Körper $\mathbb{R}$ derartige Darstellungen erlaubt – aber die analytischen Methoden auf diesen Fall beschränkt. Wörmann war es schließlich, der im Darstellungssatz von Kadison-Dubois den Schlüssel zu einer systematischen Behandlung des Problems erkannt hat. Unter Verwendung dieses Satzes hat er 1998 in seiner Dissertation gezeigt, daß für alle Teilkörper $K \subset \mathbb{R}$ die Kompaktheit von $S(g_1, \ldots, g_k)$ zu nennerfreien Darstellungen führt. Durch Ergebnisse aus der Theorie der Ordnungen höherer Stufe (Positivstellensatz höherer Stufe) konnte er zeigen, daß sich sogar alle in der Darstellung vorkommenden Quadrate durch $2m$-te Potenzen ersetzten lassen, sofern nur m ungerade ist. Es hat sich herausgestellt, daß die Kompaktheit von $S(g_1, \ldots, g_k)$ gerade der Archimedizität der beteiligten Ordnungsstrukturen entspricht, die Voraussetzung für den Satz von Kadison-Dubois ist.

Parallel dazu ist der Ansatz von Schmüdgen weiterentwickelt worden. Durch Verwendung normaler statt selbstadjungierter Operatoren hat Putinar 1993 eine weitere Lösung des Momentenproblems gefunden und damit gleichzeitig den Darstellungsmöglichkeiten eine weitere Facette eröffnet: Er konnte zeigen, daß es unter bestimmten Bedingungen möglich ist, jede Funktion f, die auf $S(g_1, \ldots, g_k)$ strikt positiv ist, schon in der Form

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 \cdot g_1 + \cdots + \sigma_k \cdot g_k$$

darzustellen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der algebraische Rahmen bereitgestellt, der es ermöglicht, dieses Ergebnis zu verstehen und entsprechend der Wörmannschen Ergebnisse zu verallgemeinern. Grundlegend sind dafür eine neue Version des Satzes von Kadison-Dubois und die Theorie der Semiordnungen höherer Stufe, die beide im ersten Kapitel entwickelt werden. In Kapitel 2 werden die Werkzeuge bereitgestellt, die es ermöglichen, die Ergebnisse aus Kapitel 1 zu geometrischen Aussagen zu verarbeiten, was im dritten Kapitel geschieht. Wir beweisen dort die Verallgemeinerungen von Putinars Satz und untersuchen, wann die Voraussetzungen für diese Darstellung erfüllt sind: Im Gegensatz zu den Schmüdgen-Wörmann-Darstellungen sind diese im allgemeinen nicht schon gegeben, wenn $S(g_1, \ldots, g_k)$ kompakt ist. Zunächst beschreiben wir die Verallgemeinerung einer hinreichenden Bedingung von Putinar und zeigen, daß sie nicht weit davon entfernt ist, auch notwendig zu sein. Dann behandeln wir eine Reihe von Randfällen mit guten Darstellungsmöglichkeiten, wie z.B. den Fall einer Kurve, den Fall einer kompakten Varietät und den von linearen Polynomen $g_1, \ldots, g_k$. In einem vierten Kapitel zeigen wir mit den in der Arbeit entwickelten Methoden, daß sich die Anzahl der in den Schmüdgen-Wörmann-Darstellungen vorkommenden Produkte $g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k}$ um etwa die Hälfte reduzieren läßt.

Kapitel 1

Ein Darstellungssatz

Im Rahmen seiner Darstellungstheorie für topologische algebraische Strukturen hat Kadison unter anderem einen Darstellungssatz für partiell archimedisch angeordnete Banachalgebren hergeleitet (siehe [Ka]). Dabei wird die Algebra einschließlich ihrer Ordnungsstruktur als Ring von stetigen Funktionen auf einem Kompaktum interpretiert. Dubois hat in [Du] diesen Satz auf die weit größere Klasse der sogenannten Stone-Ringe verallgemeinert, indem er diese Ringe geeignet topologiesiert, um dann Kadisons Satz darauf anwenden zu können. Beide Sätze sind sogar für nichtassoziative und nichtkommutative Ringe richtig. Für kommutative Ringe haben Becker und Schwartz einen neuen Beweis gefunden, dem, anstatt funktionalanalytischer Methoden, ein Vorgehen zugrundeliegt, das eher charakteristisch für die reelle Algebra ist (siehe [Be-Schw]).

Selbige scheint auch der Bereich zu sein, in dem der Darstellungssatz von Kadison-Dubois am häufigsten Verwendung findet. So ist er z.B. ein wichtiges Hilfsmittel beim Aufbau einer von Becker entwickelten erweiterten Artin-Schreier-Theorie, die ein systematisches Studium der Summen von $2m$-ten Potenzen in angeordneten Körpern erlaubt (siehe etwa [Be1]). Auch für das Verständnis des reellen Holomorphierings eines Körpers ist der Darstellungssatz von großem Nutzen, und erst kürzlich hat Wörmann beobachtet, daß der Satz einen neuen Beweis und Verallgemeinerungen des Positivstellensatzes von Schmüdgen ermöglicht (siehe [Berr-Wö], [Schm], [Wö1], [Wö2]).

Ausgangspunkt dieses Kapitels sind die Ideen und Methoden, die der Arbeit von Becker und Schwartz zugrunde liegen. Darauf aufbauend werden wir eine weitere Version des Darstellungssatzes herleiten, die auf Anwendungen zugeschnitten ist, von denen unklar ist, ob sie mit dem alten Satz zu erhalten sind. Wir wählen prinzipiell dasselbe Vorgehen wie in [Be-Schw], verfeinern jedoch an einigen Stellen die Argumentation und legen außerdem mehr Wert auf eine systematische Darstellung der Theorie der Semiordnungen, die gewissermaßen den natürlichen Rahmen bildet, innerhalb dem sich diese Arbeit bewegt.

Sei im folgenden A stets ein kommutativer Ring mit Eins. Eine Teilmenge $T \subset A$

heißt *Präprimstelle* von A, falls gilt

$$0,1 \in T, \quad -1 \notin T, \quad T+T \subset T, \quad T \cdot T \subset T.$$

Enthält A eine Präprimstelle, so ist insbesondere $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir können ohne Einschränkung $\mathbb{Z} \subset A$ annehmen. Eine Präprimstelle T heiße *erzeugend*, falls gilt

$$\forall\, a \in A\, \exists\, t_1, t_2 \in T,\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\; n \cdot a = t_1 - t_2.$$

Beispiele für erzeugende Präprimstellen sind die Präordnungen 2n-ter Stufe von A: Eine Präprimstelle T heißt *Präordnung $2n$-ter Stufe*, falls gilt $A^{2n} \subset T$. Allgemein sprechen wir von *Präordnung höherer Stufe*. Um allzu umständliche Formulierungen zu vermeiden, bezeichnen wir diese auch kurz als Präordnungen und die klassischen Präordnungen, die der Stufe 2, nennen wir explizit quadratische Präordnungen. Die polynomiale Identität $d!X = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}(X+i)^d$ (siehe [Har-Wr], S. 325) zeigt nun $(2n)! \cdot A = \sum A^{2n} - \sum A^{2n}$, also insbesondere $(2n)!A = T - T$.

Ist T eine Präprimstelle, so nennen wir eine Teilmenge $M \subset A$ einen *T-Modul*, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

$$1 \in M, \quad -1 \notin M, \quad M+M \subset M, \quad T \cdot M \subset M.$$

M heißt zudem *archimedisch*, falls gilt

$$\forall\, a \in A\, \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; n - a \in M.$$

Bezeichnet $\leq_M$ die von M kommende partielle Ordnung[1] auf A, d.h. $a \leq_M b \;\Leftrightarrow\; b-a \in M$, so entspricht die Archimedizität von M genau der üblichen Archimedizität von $\leq_M$: zu allen $a \in A$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $-n \leq_M a \leq_M n$.

Für einen T-Modul M setzen wir

$$\operatorname{Arch}(M) := \{a \in A \mid \forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, k \in \mathbb{N}_+ :\; k(1+na) \in M\}$$

und

$$X(M) := \{\varphi \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{R}) \mid \varphi(M) \subset \mathbb{R}_+\}.$$

(Für einen angeordneten Körper $(K, <)$ bezeichnen wir mit K_+ die Menge der bzgl. $<$ nichtnegativen Elemente.) Wir versehen $X(M)$ mit der *schwachen Topologie* bezüglich der Auswertungsabbildungen

$$\begin{aligned} \widehat{a} : X(M) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi &\longmapsto \varphi(a), \end{aligned}$$

[1] Hierbei handelt es sich um eine sogenannte Vorordnung, d.h. aus $a \leq b$ und $b \leq a$ muß nicht notwendig $a = b$ folgen.

für alle $a \in A$, d.h. der gröbsten Topologie, bezüglich der alle diese Funktionen stetig sind. Dies liefert eine Darstellung von A, d.h. einen Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi_M : A &\longrightarrow \mathcal{C}(X(M), \mathbb{R}), \\ a &\longmapsto \widehat{a}, \end{aligned}$$

in den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf $X(M)$. Die Menge der stetigen Funktionen, die keinen negativen Wert annehmen, kurz $\mathcal{C}^+(X(M), \mathbb{R})$, ist offensichtlich eine Präprimstelle von $\mathcal{C}(X(M), \mathbb{R})$, und es gilt $\Phi_M(M) \subset \mathcal{C}^+(X(M), \mathbb{R})$. Wie nun in [Be-Schw] gezeigt wird (Hauptsatz), läßt diese Darstellung den folgenden Vergleich von (A, M) mit $(\mathcal{C}(X(M), \mathbb{R}), \mathcal{C}^+(X(M), \mathbb{R}))$ zu:

1.1 Satz (Kadison-Dubois) *Ist T eine archimedische Präprimstelle und M ein T-Modul, so ist $X(M)$ ein nichtleerer kompakter Hausdorff-Raum, und es gilt:*

(i) $\Phi_M^{-1}(\mathcal{C}^+(X(M), \mathbb{R})) = \mathrm{Arch}(M)$,

(ii) $\mathrm{Kern}(\Phi_M) = \{a \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}\, \exists\, k \in \mathbb{N}_+ :\ k(1 \pm na) \in M\}$,

(iii) $\mathbb{Q} \cdot \Phi_M(A)$ *liegt dicht in* $\mathcal{C}(X(M), \mathbb{R})$.

Wir werden diesen Satz im folgenden dahingehend verallgemeinern, daß nicht mehr die Archimedizität der Präprimstelle T gefordert wird, sondern nur noch die Archimedizität des Moduls M, wobei wir uns allerdings in der Wahl der möglichen Präprimstelle auf Präordnungen einschränken müssen.

1.1 Semiordnungen

Ist T eine Präprimstelle, so bezeichnen wir einen T-Modul S als T-*Semiordnung* von A, falls gilt $A = S \cup -S$. Ein T-Modul M heiße *maximal*, wenn er in der Menge aller T-Moduln bzgl. „$\subset$" maximal ist, und entsprechend eine T-Semiordnung maximal, wenn sie maximal bzgl. „$\subset$" in der Menge aller T-Semiordnungen ist. Wie zu erwarten, sind die maximalen T-Moduln Kandidaten für T-Semiordnungen:

1.2 Proposition *Sei T eine erzeugende Präprimstelle. Ist S ein maximaler T-Modul, so ist S eine T-Semiordnung. Insbesondere gibt es immer eine (maximale) T-Semiordnung.*

Beweis: Sei $a \notin S \cup -S$. Aufgrund der Maximalität von S ist dann $-1 \in S + Ta$ und $-1 \in S - Ta$. Sei etwa $-1 = s_1 + t_1 a$ und $-1 = s_2 - t_2 a$ mit $s_1, s_2 \in S$ und $t_1, t_2 \in T$. Dann folgt $0 = t_1(t_2 a) + t_2(-t_1 a) = t_1 + t_2 + t_1 s_2 + t_2 s_1$ und somit $-t_1 \in S$. Sei nun $na = p_1 - p_2$ für gewisse $p_1, p_2 \in T$ und ein $n > 0$. Dann ist $-n = n(s_1 + t_1 a) = ns_1 + t_1 p_1 + (-t_1) p_2 \in S$, was im Widerspruch zu $-1 \notin S$ steht.

Die Existenz einer maximalen T-Semiordnung folgt mit dem Lemma von Zorn. $\square$

Für eine T-Semiordnung S setzen wir $S^- := -S \setminus S$, $S^0 := S \cap -S$ und $S^+ := S \setminus -S$. Offensichtlich sind S^-, S^0 und S^+ additiv abgeschlossen. Weitere Eigenschaften von S^0 sind Gegenstand der nächsten Proposition.

1.3 Proposition *Ist T eine erzeugende Präprimstelle und S eine T-Semiordnung, so ist S^0 ein Ideal. Ist T eine Präordnung und S eine maximale T-Semiordnung, so ist S^0 sogar ein Primideal.*

Beweis: Wir verwenden Ideen aus [Berr]. Offensichtlich gilt $T \cdot S^0 \subset S^0$. Sei $a \in A$ und $b \in S^0$. Wir wählen $t_1, t_2 \in T$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so daß $na = t_1 - t_2$. Es folgt $nab = t_1 b + t_2(-b) \in S^0$, und wegen $ab \in S \cup -S$ ist damit auch $ab \in S^0$.

Sei jetzt T eine Präordnung der Stufe $2n$ und S eine maximale T-Semiordnung. Annahme: $ab \in S^0$ und $a, b \notin S^0$. Wir nehmen ohne Einschränkung $b \notin S$ an (anderenfalls betrachten wir $-b$). Da S maximal ist, finden wir $s \in S$ und $t \in T$ mit $-1 = s + tb$. Es folgt

$$-a^{2n} = a^{2n}s + a^{2n-1}t(ab) \in S + S^0 \subset S,$$

also $a^{2n} \in S^0$. Wählen wir $k \in \mathbb{N}$ groß genug, so ist auch $a^{2^k} \in S^0$. Es genügt daher zu zeigen, daß für alle $c \in A$ aus $c^2 \in S^0$ schon $c \in S^0$ folgt. Sei also $c^2 \in S^0$ und $c \notin S^0$. Wir nehmen wieder $c \notin S$ an, und finden $s \in S$ und $t \in T$ mit $-1 = s + tc$. Dann ist $(1+s)^2 = t^2c^2 \in S^0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} s^{2n} &= (1-(1+s))^{2n} = 1 - 2n(1+s) + (1+s)^2 \sum_{i=2}^{2n} \tbinom{2n}{i}(-1)^i(1+s)^{i-2} \\ &\in 1 - 2n(1+s) + S^0. \end{aligned}$$

Es folgt der Widerspruch $1 + ((2n-2) + 2ns + s^{2n}) \in (1+S) \cap S^0 = \emptyset$. □

Vermutlich ist der zweite Teil der Aussage im allgemeinen nicht richtig, wir sind allerdings nicht in der Lage ein Gegenbeispiel anzugeben.

Wir treffen die folgende Konvention: Ist T eine Präordnung der Stufe $2n$, so bezeichnen wir im folgenden als T-Semiordnung nur noch die T-Moduln S, für die gilt $A = S \cup -S$ und für die S^0 ein Primideal ist (diese Inkonsistenz ist in sofern nicht gravierend, da wir bald ausschließlich diesen Fall betrachten). Wir nennen eine solche T-Semiordnung auch *Semiordnung $2n$-ter Stufe*, allgemein *Semiordnung höherer Stufe*. Wie bei Präordnungen sprechen wir auch hier kurz von Semiordnungen und nennen die Semiordnungen der Stufe 2 quadratische Semiordnungen.

Semiordnungen wurden als erstes von Prestel eingeführt. Er hat speziell quadratische Semiordnungen von Körpern zum Studium quadratischer Formen herangezogen (siehe [Pr1]).

1.2 Semireelle Spektren

In Analogie zum *reellen Spektrum* eines Ringes, d.h. der Menge der Anordnungen von A versehen mit der Harrison-Topologie, führen wir nun zu einer Präprimstelle T von A das *T-semireelle Spektrum* ein, indem wir die Menge aller T-Semiordnungen mit einer geeigneten Topologie ausstatten. Erwartungsgemäß zeigt sich, daß dieser Raum quasikompakt[2] ist, und daß beim Übergang zum Teilraum der abgeschlossenen Punkte, die gerade den maximalen Semiordnungen entsprechen, ein kompakter Raum entsteht.

Zur Erinnerung: Eine Präprimstelle P von A heißt *Anordnung*, falls gilt $A = P \cup -P$ und P^0 ein Primideal ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} X &:= X(A) := \{P \subset A \mid P \text{ ist Anordnung}\}, \\ Y^T &:= Y^T(A) := \{S \subset A \mid S \text{ ist } T\text{-Semiordnung}\}, \end{aligned}$$

sowie zu einer Teilmenge $M \subset A$

$$\begin{aligned} X_M &:= \{P \in X \mid M \subset P\}, \\ Y^T_M &:= \{S \in Y^T \mid M \subset S\}. \end{aligned}$$

Da Anordnungen multiplikativ abgeschlossen sind, gilt $X_T \subset Y^T$. Im Fall $T = \sum A^{2n}$, ist sogar $X \subset Y^T$. Ist M ein T-Modul, so ist insbesondere $T \subset M$, also $X_M \subset Y^T_M$.

Zu einer Teilmenge $M \subset A$ setzen wir

$$H_T(M) := \{S \in Y^T \mid M \subset S^+\}.$$

Die *Harrison-Topologie* auf Y^T sei nun die von der Subbasis $(H_T(a) \mid a \in A)$ erzeugte Topologie. Den resultierenden topologischen Raum nennen wir das *T-semireelle Spektrum* von A.

1.4 Satz *Sei T eine Präprimstelle und $M \subset A$ ein T-Modul. Dann ist Y^T_M (mit der von Y^T kommenden Teilraum-Topologie) quasikompakt.*

Beweis: Es ist $Y^T_M = Y^T \setminus \bigcup_{a\in M} H_T(-a)$, also Y^T_M abgeschlossen in Y^T, und daher genügt es zu zeigen, daß Y^T quasikompakt ist.

Wir betrachten die Abbildung

$$\iota : Y^T \to \prod_{a\in A}\{-1,0,1\} \quad \text{mit} \quad \iota(S)_a := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } a \in S^+, \\ 0 & : \text{ falls } a \in S^0, \\ -1 & : \text{ falls } a \in S^-, \end{cases}$$

für alle $S \in Y^T$ und $a \in A$. Die Menge $\{-1,0,1\}$ versehen wir mit der diskreten Topologie. Natürlich erhalten wir so einen quasikompakten Raum, und daher, nach dem Satz von Tychonoff, auch einen quasikompakten Produktraum $Y := \prod_{a\in A}\{-1,0,1\}$. Eine Subbasis der Produkttopologie auf Y wird von den Mengen $H^\delta_b := \{(\varepsilon_a)_{a\in A} \mid \varepsilon_b = \delta\}$ mit $\delta \in \{-1,0,1\}$ und $b \in A$ gebildet. Offensichtlich korrespondieren die Mengen $H^1_b \cap \iota(Y^T)$ unter ι genau mit den Harrison-Mengen $H_T(b)$, d.h. die Topologie von Y induziert mittels ι auf Y^T eine feinere Topologie als die Harrison-Topologie

[2] Unter quasikompakt verstehen wir die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft.

(im Falle des reellen Spektrums nennt man diese die *konstruierbare Topologie*). Um die Quasikompaktheit von Y^T einzusehen, genügt es also die Quasikompaktheit bzgl. dieser feineren Topologie zu zeigen, wofür, da ι injektiv ist, hinreichend ist, $\iota(Y^T)$ als abgeschlossen in Y nachzuweisen.

Wir zeigen, daß $Y \setminus \iota(Y^T)$ offen ist: Sei etwa $\varepsilon = (\varepsilon_a)_{a \in A} \notin \iota(Y^T)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Menge $S_\varepsilon := \{a \mid \varepsilon_a \geq 0\}$ keine T-Semiordnung ist, also mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1.) $1 \notin S_\varepsilon$, 2.) $-1 \in S_\varepsilon$, 3.) $S_\varepsilon + S_\varepsilon \not\subset S_\varepsilon$, 4.) $T \cdot S_\varepsilon \not\subset S_\varepsilon$ oder 5.) $S_\varepsilon \subset -S_\varepsilon \neq A$, sowie im Fall einer Präordnung T noch 6.) $\exists\, a, b \in S_\varepsilon \setminus -S_\varepsilon :\ ab \in S_\varepsilon \cap -S_\varepsilon$. Nun definiert jede dieser Bedingungen in Y eine offene Menge. Wir weisen dies exemplarisch für 4.) nach: Es ist

$$\bigcup_{t \in T,\, b \in A} \{(\varepsilon_a)_{a \in A} \mid \varepsilon_b \geq 0,\ \varepsilon_{tb} = -1\} = \bigcup_{t \in T,\, b \in A} \Big((H_b^1 \cap H_{tb}^{-1}) \cup (H_b^0 \cap H_{tb}^{-1}) \Big)$$

als Vereinigung endlicher Schnitte von Subbasismengen offen, und besteht genau aus den Elementen ε von Y, für die S_ε nicht unter Multiplikation mit Elementen aus T abgeschlossen ist. $\square$

Da sich im weiteren vor allem die maximalen T-Semiordnungen als besonders interessant erweisen, schließen wir noch einige leichte Überlegungen an, die die topologischen Eigenschaften dieser Elemente von Y^T erkennen lassen, aber auch von allgemeinem Interesse sind. Zu $M \subset A$ bezeichnen wir den Teilraum der maximalen T-Semiordnungen von Y_M^T mit $(Y_M^T)^{max}$ und entsprechend die Menge der maximalen Anordnungen in X_M mit X_M^{max}.

1.5 Proposition *Sei T eine Präprimstelle und $S_1, S_2 \in Y^T$. Dann gilt*

$$S_2 \in \overline{\{S_1\}} \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \subset S_2.$$

Insbesondere ist Y^T also ein T_0-Raum [3] *und $(Y^T)^{max}$ besteht genau aus den abgeschlossenen Punkten in Y^T.*

Beweis: Sei $S_1, S_2 \in Y^T$. Wir finden die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
S_2 \in \overline{\{S_1\}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(\forall\, a \in A \ \ S_2 \in H_T(a) \Rightarrow S_1 \in H_T(a) \Big) \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\forall\, a \in A \ \ -a \notin S_2 \Rightarrow -a \notin S_1 \Big) \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\forall\, a \in A \ \ a \notin S_2 \Rightarrow a \notin S_1 \Big) \\
&\Leftrightarrow \quad S_1 \subset S_2.
\end{aligned}$$

Die weiteren Folgerungen sind offensichtlich. $\square$

[3] Ein topologischer Raum X heißt T_0-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ gilt $x \notin \overline{\{y\}}$ oder $y \notin \overline{\{x\}}$.

Die nächste Überlegung zeigt, daß der Übergang zu $(Y^T)^{max}$ den Mangel an Trennungseigenschaften von Y^T beseitigt:

1.6 Proposition *Sei T eine Präprimstelle und $S_1, S_2 \in Y^T$. Dann sind äquivalent:*

(i) $S_1 \not\subset S_2$ *und* $S_2 \not\subset S_1$,

(ii) S_1 *und* S_2 *lassen sich offen trennen, d.h. es gibt offene Mengen* $U, V \subset Y^T$ *mit* $S_1 \in U$, $S_2 \in V$ *und* $U \cap V = \emptyset$.

Insbesondere bildet daher für jedes $S \in Y^T$ der Abschluß $\overline{\{S\}}$ bzgl. $\subset$ eine Kette, es gilt $|\overline{\{S\}} \cap (Y^T)^{max}| = 1$ und $(Y^T)^{max}$ ist ein Hausdorff-Raum.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Seien $S_1, S_2 \in Y^T$ unvergleichbar bzgl. Inklusion, etwa $a \in S_1 \setminus S_2$ und $b \in S_2 \setminus S_1$. Dann ist $S_1 \in H_T(a-b) =: U$, denn mit $a - b \in -S_1$ wäre $b = (b-a) + a \in S_1 + S_1 \subset S_1$. Entsprechend erhalten wir $S_2 \in H_T(b-a) =: V$, offensichtlich ist $U \cap V = \emptyset$.

Die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$, sowie die weiteren Folgerungen ergeben sich dann unmittelbar mit Proposition 1.5. $\square$

1.7 Satz *Sei T eine Präprimstelle und $M \subset A$. Dann ist $(Y_M^T)^{max}$ (mit der von Y^T kommenden Teilraumtopologie) kompakt.*

Beweis: Es genügt, die Quasikompaktheit von $(Y^T)^{max}$ zu zeigen. Da für alle $S \in Y^T$ gilt $\overline{\{S\}} \cap (Y^T)^{max} \neq \emptyset$, ist Y^T die einzige offene Menge die $(Y^T)^{max}$ enthält. Damit ist jede offene Überdeckung von $(Y^T)^{max}$ (in Y^T) schon eine von Y^T. $\square$

1.3 Durchschnittssätze

Wir charakterisieren nun die bzgl. Y_M^T strikt positiven Elemente bzw. die bzgl. $(Y_M^T)^{max}$ positiven Elemente für einen T-Modul M. Zuerst betrachten wir Moduln über erzeugenden Präprimstellen, dann schränken wir uns auf archimedische Moduln ein und zuletzt nehmen wir zusätzlich an, daß T eine Präordnung ist. Ist $Y \subset Y^T$ und $a \in A$, so schreiben wir kurz $a > 0$ (bzw. $a \geq 0$) auf Y, falls gilt $a \in S^+$ (bzw. $a \in S$) für alle $S \in Y$.

1.8 Satz *Sei T eine erzeugende Präprimstelle und M ein T-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) $a > 0$ *auf* Y_M^T,

(ii) $t \cdot a = 1 + m$ *für ein* $t \in T$ *und* $m \in M$,

(iii) $(1+t)a = 1 + m$ *für ein* $t \in T$ *und* $m \in M$.

Außerdem gilt

$$a \geq 0 \textit{ auf } (Y_M^T)^{max} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, p \in T\ \exists\, t \in T \ \ (1+t)(1+(1+p)a) \in M.$$

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Angenommen, es ist $a > 0$ auf Y_M^T und $(1+M) \cap T \cdot a = \emptyset$. Dann ist $M' := M - a \cdot T$ ein T-Modul und mit Zorns Lemma finden wir einen maximalen T-Modul S über M', der nach Proposition 1.2 und im Fall einer Präordnung zudem Proposition 1.3 eine T-Semiordnung ist. Insbesondere folgt $S \in Y_{M'}^T \subset Y_M^T$ und $-a \in S$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $ta = 1 + m$ mit $t \in T$ und $m \in M$, sowie $S \in Y_M^T$. Aus $a \in -S$ folgt $-ta \in S$ und damit der Widerspruch $-1 = -(1+m) + m = -ta + m \in S$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $ta = 1 + m$ mit $t \in T$ und $m \in M$. Wir wählen $t_1, t_2 \in T$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $na = t_1 - t_2$ und folgern

$$\begin{aligned} (1 + ((n-1) + t + t_2 t))a &= na + (1+m) + t_2(1+m) \\ &= 1 + (t_1 + m + t_2 m) \\ &\in 1 + M, \end{aligned}$$

also $(1 + t') \cdot a \in 1 + M$ mit $t' := (n-1) + t + t_2 t \in T$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: ist klar.

„$\Rightarrow$“: Sei $a \geq 0$ auf $(Y_M^T)^{max}$. Für alle $p \in T$ und $S \in Y_M^T$ ist dann $1 + (1+p)a \in S^+$, und aus dem eben gezeigten folgt daher $(1+t)(1+(1+p)a) \in M$ für ein $t \in T$.

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an, daß a die Bedingung auf der rechten Seite erfüllt. Sei $S \in (Y_M^T)^{max}$. Annahme: $a \notin S$. Dann ist $-1 = s + pa$ für gewisse $s \in S$ und $p \in T$. Wir wählen gemäß Voraussetzung ein $t \in T$, so daß $(1+t)(1+(1+p)a) \in M$ und erhalten

$$\begin{aligned} (1+t)a &= (1+t)((1+p) - p)a = (1+t)((1+(1+p)a) - (1+pa)) \\ &= (1+t)(1+(1+p)a) + (1+t)s \\ &\in M + S \subset S. \end{aligned}$$

Nun ist, wegen $a \notin S$, $-ta \in S$ und somit folgt der Widerspruch $a \in S$. □

Im Fall einer Präordnung T können aus dem letzten Satz auch entsprechende Beschreibungen der auf Y_M^T nichtnegativen oder verschwindenden Elemente gewonnen werden. Wir schreiben kurz $a = 0$ auf Y_M^T, falls für alle $S \in Y_M^T$ gilt $a \in S^0$.

1.9 Satz *Sei T eine Präordnung der Stufe $2n$ und M ein T-Modul. Dann sind die Aussagen unter (1) bzw. (2) äquivalent:*

(1):
- *(i)* $a \geq 0$ *auf* Y_M^T,
- *(ii)* $t \cdot a = a^{2nk} + m$ *für ein* $t \in T$, $k \in \mathbb{N}$ *und* $m \in M$,
- *(iii)* $(a^{2nk} + t)a = a^{2nk} + m$ *für ein* $t \in T$, $k \in \mathbb{N}$ *und* $m \in M$.

(2):
- *(i)* $a = 0$ *auf* Y_M^T,
- *(ii)* $-a^{2nk} = m$ *für ein* $k \in \mathbb{N}$ *und* $m \in M$.

Beweis: (1): Falls gilt $-a^{2nk} = m$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $m \in M$, so sind alle unter (1) aufgeführten Punkte erfüllt: (1.i) Es ist $-a^{2nk} = m \in S$ und daher auch $a^{2nk} \in S^0$ für alle $S \in Y_M^T$. S^0 ist ein Primideal und somit $a \in S^0$, d.h. $a = 0$ auf Y_M^T. (1.ii) $0 \cdot a = a^{2nk} + m$. (1.iii) Es seien $t_1, t_2 \in T$ mit $na = t_1 - t_2$. Dann ist

$$\begin{aligned}(a^{2nk} + (n-1)a^{2nk})a &= a^{2nk}(na) + 0 \\ &= a^{2nk}(t_1 - t_2) + (a^{2nk} + m) \\ &= a^{2nk} + (a^{2nk}t_1 + t_2 m + m),\end{aligned}$$

also mit $t = (n-1)a^{2nk} \in T$ und $m' = a^{2nk}t_1 + t_2 m + m \in M$ die Identität $(a^{2nk} + t)a = a^{2nk} + m'$ erfüllt.

Sei im folgenden also $-a^{2nk} \notin M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher insbesondere $0 \notin \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\} =: N$. Wir betrachten den Fraktionsring $B := N^{-1}A$ und setzen

$$\begin{aligned}T' &:= \left\{\frac{t}{a^{2nk}} \mid t \in T,\, k \in \mathbb{N}\right\}, \\ M' &:= T' \cdot M = \left\{\frac{m}{a^{2nk}} \mid m \in M,\, k \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned}$$

T' ist eine Präordnung $2n$-ter Stufe von B und M' ein T'-Modul. Wir begnügen uns damit, $-1 \notin M'$ zu zeigen, da die restlichen nachzuweisenden Eigenschaften direkt aus den Definitionen ersichtlich sind. Sei $-1 = m/a^{2nk}$ für ein $m \in M$ und $k \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $-a^r a^{2nk} = a^r m$. Nach Multiplikation mit a^{2n-r} ergibt sich $-a^{2n(r+k)} = a^{2nr}m \in M$, was wir ausgeschlossen haben.

Des weiteren ist leicht nachzuprüfen, daß der kanonische Ringhomomorphismus $\iota : A \to B$, $\iota(b) = b/1$, durch die Zuordnung $S' \mapsto \iota^{-1}(S')$ eine Abbildung $Y_{M'}^{T'} \to \{S \in Y_M^T \mid a \notin S^0\}$ induziert (die sogar stetig ist, was wir hier aber nicht benötigen).

$(i) \Rightarrow (ii), (iii)$: Mit $a \geq 0$ auf Y_M^T ist dann $a/1 = \iota(a) > 0$ auf $Y_{M'}^{T'}$. Nach Satz 1.8 erhalten wir daher eine Identität

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{t}{a^{2nr}}\right)\frac{a}{1} = \frac{1}{1} + \frac{m}{a^{2ns}}$$

für gewisse $t \in T$, $m \in M$ und $r, s \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt ein $e \in \mathbb{N}$ mit $a^e a^{2ns}(a^{2nr} + t)a = a^e a^{2nr}(a^{2ns} + m)$. Mit $k = e + r + s$, $t' := a^{2n(e+s)}t \in T$ und $m' := a^{2n(e+r)}m \in M$ folgt daraus $(a^{2nk} + t')a = a^{2nk} + m'$, also die Gültigkeit von (ii) und (iii).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Umgekehrt führt $t \cdot a = a^{2nk} + m$ mit $t \in T$ und $m \in M$ zu einer Gleichung $t' \cdot (a/1) = 1 + m'$ in B mit $t' \in T'$ und $m' \in M'$, und nach Satz 1.8 dann zu $a/1 > 0$ auf $Y_{M'}^{T'}$. Dies hat $a \in S$ für alle $S \in Y_M^T$ mit $a \notin S^0$ zur Folge, d.h. $a \geq 0$ auf Y_M^T.

(2): Die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ haben wir zu Beginn des Beweises schon gezeigt. Sei also $a = 0$ auf Y_M^T. Damit ist auch $a^{2n} = 0$ auf Y_M^T, insbesondere also $-a^{2n} \geq 0$ auf Y_M^T. Nach (1) ergibt sich $t(-a^{2n}) = (-a^{2n})^{2nk} + m$ für gewisse $t \in T$, $k \in \mathbb{N}$ und $m \in M$. Setzen wir $k' := 2nk$ und $m' := ta^{2nk} + m \in M$, so gilt $-a^{2nk'} = m'$. □

Wir kehren im nächsten Schritt nochmals zu Präprimstellen T zurück und betrachten den Fall archimedischer T-Moduln. Die vorangegangen Sätze gleichen formal dem für Anordnungen bekannten Positivstellensatz, Nichtnegativstellesatz und Nullstellensatz. Unter der Voraussetzung der Archimedizität von M wird Satz 1.8 nun tatsächlich zu einem Positivstellensatz, d.h. wir können alle vorkommenden T-Semiordnungen durch Anordnungen ersetzen. Dies liegt im wesentlichen daran, daß in dieser Situation die maximalen T-Semiordnungen über M mit den maximalen Anordnungen über M übereinstimmen. Zentral ist dabei der folgende Satz, der in etwas anderer Form in [Be2] (Satz 5) zu finden ist. Wir werden den Beweis fast wörtlich von dort übernehmen.

1.10 Satz *Sei T eine erzeugende Präprimstelle von A und S eine archimedische T-Semiordnung. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(S) \subset \mathbb{R}_+$. Für diesen gilt:*

(i) $\text{Kern}(\varphi) = I(S) := \{a \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \ 1 \pm na \in S\}$,

(ii) $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) = S \cup I(S) = \{a \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \ 1 + na \in S\}$.

Beweis: *Eindeutigkeit von φ*: Sei φ wie im Satz gefordert. Wir setzen für $a \in A$

$$Q_a := \left\{ \frac{r}{s} \mid (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \text{ mit } r - sa \in S \right\}.$$

Aufgrund der Archimedizität von S ist $Q_a \neq \emptyset$. Mit $r - sa \in S$ ($r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) folgt $r - s\varphi(a) \geq 0$ und somit $\varphi(a) \leq \inf Q_a =: \psi(a)$. Wir zeigen $\varphi = \psi$. Angenommen $\varphi(a) < \psi(a)$. Wir wählen $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $\varphi(a) < u/v < \psi(a)$. Dann kann $u - va \in S$ nicht sein. Wegen $A = S \cup -S$ ist somit $va - u \in S$ und die Anwendung von φ führt zum Widerspruch $u/v \leq \varphi(a)$.

Existenz von φ: Der Eindeutigkeitsbeweis legt die Definition $\varphi(a) := \inf Q_a$ für alle $a \in A$ nahe. Wir zeigen:

1.) *Wohldefiniertheit*: Zur Wohldefiniertheit von φ müssen wir noch zeigen, daß Q_a nach unten beschränkt ist. Dazu wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so, daß gilt $n + a \in S$. Ist $r - sa \in S$, so folgt $r + sn = (r - sa) + s(n + a) \in \mathbb{Z} \cap S = \mathbb{N}$ und daher $r/s \geq -n$.

2.) *Additivität*: Die Additivität von φ weisen wir nach, indem wir (α) $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ und (β) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ für alle $a, b \in A$ zeigen. Zu (α): Mit $r - sa \in S$ und $u - vb \in S$ ($r, u \in \mathbb{Z}$, $s, v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) ist

$$(rv + us) - sv(a + b) = v(r - sa) + s(u - vb) \in S,$$

also $\varphi(a + b) \leq r/s + u/v$ und daher $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$. Zu ($\beta$): Sei $r - sa \in S$ und $u - v(-a) \in S$ ($r, u \in \mathbb{Z}$, $s, v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Es folgt

$$rv + su = v(r - sa) + s(u + va) \in \mathbb{Z} \cap S = \mathbb{N},$$

also $rv + su \geq 0$ und somit $-r/s \leq u/v$. Dies liefert $-\varphi(a) \leq \varphi(-a)$. Angenommen $-\varphi(a) < \varphi(-a)$: Wir wählen $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $-\varphi(a) < u/v < \varphi(-a)$. Aus $u/v < \varphi(-a)$ folgt $u + va \notin S$, und aus $-u/v < \varphi(a)$ folgt $-(u+va) \notin S$ im Widerspruch zu $A = S \cup -S$.

3.) $\varphi(1) = 1$: Es ist $1 - 1 = 0 \in S$ und somit $\varphi(1) \leq 1$. Für $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$ ist $r - s \in S$ nur für $r \geq s$ möglich. Daher ist auch $1 \leq \varphi(1)$.

4.) $\varphi(S) \subset \mathbb{R}_+$: Ist $a \in S$ und $r - sa \in S$ ($r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), so folgt $r = (r - sa) + sa \in \mathbb{Z} \cap S = \mathbb{N}$, also $r/s \geq 0$.

5.) *Multiplikativität*: Sei $a \in A$ und $t \in T$. Mit $r - sa \in S$ ($r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) ist $rt - sat \in S$ und nach dem schon Gezeigten gilt dann $0 \leq r\varphi(t) - s\varphi(at)$, also $\varphi(at) \leq (r/s)\varphi(t)$. Wegen $0 \leq \varphi(t)$ ist damit $\varphi(at) \leq \varphi(a)\varphi(t)$. Für $-a$ folgt analog (unter Verwendung von $\varphi(-b) = -\varphi(b)$) $-\varphi(at) \leq -\varphi(a)\varphi(t)$ und somit insgesamt $\varphi(at) = \varphi(a)\varphi(t)$. Zu $b \in A$ wählen wir $t_1, t_2 \in T$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $nb = t_1 - t_2$ und erhalten aus dem eben Gezeigten und der Additivität von φ: $n\varphi(ab) = \varphi(nab) = \varphi(t_1 b) - \varphi(t_2 b) = (\varphi(t_1) - \varphi(t_2))\varphi(b) = \varphi(na)\varphi(b) = n\varphi(a)\varphi(b)$, was $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ impliziert.

Zu (i) und (ii): $\varphi(a) > 0$ kann nur für $a \in S$ gelten, denn sonst wäre $-a \in S$ und damit $\varphi(a) \leq 0$. Mit $a \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ folgt $\varphi(1 \pm na) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach eben Bemerktem hat dies $1 \pm na \in S$, also $a \in I(S)$, zur Folge. Sei $1 \pm na \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $1 \geq n|\varphi(a)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\varphi(a) = 0$.

Offensichtlich ist $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) \subset S \cup I(S) \subset \{a \in A \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + na \in S\}$. Ist $1 + na \in S$ und daher $1 + n\varphi(a) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\varphi(a) \geq 0$. $\square$

Satz 1.10 liefert eine genaue Beschreibung der maximalen T-Semiordnungen, die archimedisch sind:

1.11 Korollar *Sei T eine erzeugende Präprimstelle. Dann sind die maximalen archimedischen T-Semiordnungen genau die maximalen archimedischen Anordnungen in X_T. Diese entsprechen genau den Mengen $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ für $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{R})$ mit $\varphi(T) \subset \mathbb{R}_+$. Ist M ein archimedischer T-Modul, so gilt $(Y_M^T)^{max} = X_M^{max} \neq \emptyset$.*

Beweis: Sei S eine maximale archimedische T-Semiordnung und dazu φ wie in Satz 1.10.

$\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ist eine T-Semiordnung, die über S liegt und sogar unter Multiplikation abgeschlossen ist, d.h. es ist $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) \in X_T$. Da S maximal ist folgt $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) = S$. S ist auch als Anordnung maximal, da jede Anordnung über S ebenfalls eine T-Semiordnung ist.

Analog folgt, daß jede maximale archimedische Anordnung aus X_T auch maximal als T-Semiordnung ist und von der Gestalt $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ist.

Sei nun $P = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ für $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{R})$ mit $\varphi(T) \subset \mathbb{R}_+$. Offensichtlich ist P eine archimedische T-Semiordnung. Wir zeigen, daß P als solche maximal ist. Jede

T-Semiordnung S mit $P \subset S$ ist natürlich archimedisch. Sei ψ dazu wie in Satz 1.10. Dann ist auch $\psi(P) \subset \mathbb{R}_+$, und aufgrund der Eindeutigkeit von φ folgt daher $\varphi = \psi$, also $P \subset S \subset \psi^{-1}(\mathbb{R}_+) = P$.

Die restliche Aussagen folgen aus dem schon gezeigten, da mit M auch jede T-Semiordnung bzw. Anordnung über M archimedisch ist. $\square$

Für Körper liefert dies gerade die bekannte Tatsache, daß jede archimedische Semiordnung $2n$-ter Stufe von K eine Anordnung ist (siehe z.B. [Be1] und [Pr2]).

Als weitere Konsequenz erhalten wir zusammen mit Satz 1.8 den folgenden Positivstellensatz:

1.12 Satz *Sei T eine erzeugende Präprimstelle und M ein archimedischer T-Modul von A. Dann sind äquivalent:*

(i) $a > 0$ *auf* X_M,

(ii) $t \cdot a = 1 + m$ *für ein* $t \in T$ *und* $m \in M$,

(iii) $(1 + t)a = 1 + m$ *für ein* $t \in T$ *und* $m \in M$.

Außerdem gilt

$$a \geq 0 \text{ auf } X_M^{max} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, t \in T \;\; (1 + t)(1 + na) \in M.$$

Beweis: Es ist $a > 0$ auf X_M (bzw. Y_M^T) genau dann, wenn gilt $a > 0$ auf X_M^{max} (bzw. $(Y_M^T)^{max}$). Zusammen mit Korollar 1.11 ergibt sich daher

$$\bigcap_{P \in X_M} P^+ = \bigcap_{P \in X_M^{max}} P^+ = \bigcap_{S \in (Y_M^T)^{max}} S^+ = \bigcap_{S \in Y_M^T} S^+,$$

und die erste Behauptung folgt direkt aus Satz 1.8.

„$\Rightarrow$“: ergibt sich ebenfalls unmittelbar aus Satz 1.8.

„$\Leftarrow$“: Für a gelte die Bedingung auf der rechten Seite. Sei $P \in X_M^{max} = (Y_M^T)^{max}$. Im Fall $a \notin P$ ist $-1 = s + pa$ für ein $s \in P$ und $p \in T$. Da M archimedisch ist finden wir ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $n - p \in 1 + M \subset P^+$, und nach Voraussetzung ein $t \in T$ mit $(1 + t)(1 + na) \in M$. Wir erhalten $(1 + t)(n - p)a = (1 + t)((1 + na) - (1 + pa)) = (1 + t)(1 + na) + (1 + t)s \in P$ und somit den Widerspruch $a \in P$, da P ein Anordnung ist und $(1 + t)(n - p) \in P^+$. $\square$

Um dieses Ergebnis im Fall einer Präordnung T weiter zu verbessern, stellen wir vorneweg noch ein Hilfsmittel bereit:

1.13 Proposition *Seien T_0 eine archimedische Präprimstelle von B und T eine Präprimstelle von $A = B[a_1, \ldots, a_\nu]$ mit $T_0 \subset T$. Dann sind äquivalent:*

(i) T *ist archimedisch,*

(ii) *es existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \pm a_1, \ldots, n \pm a_\nu \in T$.

Beweis: Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist klar. Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $n \pm a_1, \ldots, n \pm a_\nu \in T$. Wir zeigen induktiv über den (totalen) Grad von $f \in B[X_1, \ldots, X_\nu]$, daß ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m - f(a_1, \ldots, a_\nu) \in T$ existiert. Der Induktionsanfang, d.h. $\deg(f) = 0$, ist durch die Archimedizität von T_0 gegeben. Im weiteren genügt es natürlich, nur die Monome $f = bX_1^{e_1} \cdots X_\nu^{e_\nu}$ zu betrachten, und wegen $B = T_0 - T_0$ können wir zudem $b \in \pm T$ annehmen. Sei $|e| := \sum_1^\nu e_i = d > 0$ und ohne Einschränkung $e_1 > 0$. Wir schreiben je nach dem Vorzeichen von b bzgl. T

$$\pm b(n \mp a_1)(n + a_1)^{e_1 - 1} \prod_{i=2}^{\nu} (n + a_i)^{e_i} = \sum_{0 \le |v| < |e|} b_v a_1^{v_1} \cdots a_\nu^{v_\nu} - f(a_1, \ldots, a_\nu)$$

mit gewissen $b_v \in B$. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir ein $k \in \mathbb{N}$, so daß gilt $k - \sum_v b_v a_1^{v_1} \cdots a_\nu^{v_\nu} \in T$ und erhalten

$$k - f(a) = (k - \sum_v b_v a_1^{v_1} \cdots a_\nu^{v_\nu}) \pm b(n \mp a_1)(n + a_1)^{e_1 - 1} \prod_{i=2}^{\nu} (n + a_i)^{e_i} \in T.$$

$\square$

1.14 Satz *Sei T eine Präordnung und M ein archimedischer T-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) $a > 0$ *auf* X_M,

(ii) $k \cdot a = 1 + m$ *für ein* $k \in \mathbb{N}$ *und* $m \in M$.

Zudem gilt

$$a \ge 0 \text{ auf } X_M^{max} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathrm{Arch}(M).$$

Beweis: Wegen $\sum A^{2n} \subset T$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist M auch ein archimedischer $\sum A^{2n}$-Modul, und es genügt daher, die Aussage für $\sum A^{2n}$-Moduln zu zeigen, da uns nur die Anordnungen über M interessieren.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $a > 0$ auf X_M. Es bezeichne

$$\begin{aligned} Q_a &:= \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}_+ \text{ und } sa + r \in M \right\}, \\ M_a &:= M \cap \{ sa + r \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}_+ \}, \\ \mathrm{Stab}(M_a) &:= \{ b \in A \mid b \cdot M_a \subset M \}. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist nun $-\frac{1}{k} \in Q_a$ für ein $k \in \mathbb{N}$, da sich daraus mit einem $d \in \mathbb{N}_+$ dann $(dk)a - d \in M$ ergibt, und somit $(dk)a = 1 + (d-1) + m \in 1 + M$ für ein $m \in M$ folgt.

Angenommen, es existiert ein $\sigma \in \sum A^{2n}$ mit

$$\sigma a \in 1 + M \quad \text{und} \quad (k - \sigma) \in \mathrm{Stab}(M_a)$$

für ein $k \in \mathbb{N}$, so können wir wie folgt argumentieren: Für $r/s \in Q_a$ mit $sa + r \in M$ ist

$$(*) \qquad (sk)a + (rk - s) = (k - \sigma)(sa + r) + s(\sigma a - 1) + r\sigma \in M.$$

Im Fall $1/k \le r/s$ folgt daher

$$\frac{r}{s} - \frac{1}{k} = \frac{rk - s}{sk} \in Q_a.$$

Wählen wir nun $l \in \mathbb{N}$ mit $a + l \in M$ und wenden, beginnend mit $s = 1$ und $r = l$, das eben Gezeigte kl-oft an, so folgt

$$0 = l - kl \cdot \frac{1}{k} \in Q_a.$$

Eine weitere Widerholung liefert dann $-\frac{1}{k} \in Q_a$.

Es ist also noch ein geeignetes σ zu finden. Nach Satz 1.12 existiert ein $\tau \in \sum A^{2n}$ mit $(1 + \tau)a \in 1 + M$. Sei etwa $\tau = \sum_1^\nu a_i^{2n}$. Wir betrachten nun den Ring

$$B = \mathbb{Z}[a, a_1, \ldots, a_\nu].$$

$M_B := M \cap B$ ist ein archimedischer $\sum B^{2n}$-Modul. Wegen $\tau \in \sum B^{2n}$ und aufgrund von $(1 + \tau)a \in 1 + M_B$ ist nach Satz 1.12 angewandt auf den Ring B, $a \in P^+$ für alle Anordnungen P von B über M_B. Es sei $l \in \mathbb{N}$ so, daß gilt

$$l \pm a, l \pm a_1, \ldots, l \pm a_\nu \in 1 + M_B.$$

Setzen wir für $e \in \mathbb{N}^{2\nu+2}$ mit $|e_i| < 2n$

$$g_e := \Big(\prod_{i=1}^{\nu} (l + a_i)^{e_i} (l - a_i)^{e_{\nu+i}} \Big) (l + a)^{e_{2\nu+1}} (l - a)^{e_{2\nu+2}},$$

so folgt auch $g_e,\ g_e a \in P^+$ für alle Anordnungen P von B über M_B. Wieder nach Satz 1.12 gibt es dann $\sigma_{e1}, \sigma_{e2} \in \sum B^{2n}$ mit $(1 + \sigma_{e1})g_e,\ (1 + \sigma_{e2})g_e a \in M_B$. Setzen wir nun

$$\sigma := (1 + \tau) \cdot \prod_e (1 + \sigma_{e1}) \prod_e (1 + \sigma_{e2}) \in \sum B^{2n},$$

so ist offensichtlich die erste Bedingung $\sigma a \in 1 + M$ erfüllt. Weiter sind $\sigma g_e, \sigma g_e a \in M$ und damit

$$\sigma g_e \cdot M_a \subset \mathbb{N} \cdot \sigma g_e a + \mathbb{N} \cdot \sigma g_e \subset M,$$

d.h. $\sigma g_e \in \mathrm{Stab}(M_a)$. Sei nun T die Präprimstelle, die von $l \pm a, l \pm a_1, \ldots, l \pm a_\nu$ und $\sum B^{2n}$ in B erzeugt wird, d.h. die Elemente der Form $\tau_0 + \sum_e \tau_e g_e$ mit $\tau_e \in \sum B^{2n}$. Da $\mathrm{Stab}(M_a)$ ein $\sum A^{2n}$-Modul ist, folgt dann

$$\sigma \cdot T \subset \mathrm{Stab}(M_a).$$

Nach Proposition 1.13 ist T archimedisch in B. Sei etwa $r \in \mathbb{N}$ mit $r - \sigma \in T$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} r^{2n-1}(r-\sigma) &= (r-\sigma+\sigma)^{2n-1}(r-\sigma) \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{2n-1} \tbinom{2n-1}{i}\sigma^i(r-\sigma)^{2n-1-i}\Big)(r-\sigma) \\ &= (r-\sigma)^{2n} + \sigma \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} \tbinom{2n-1}{i}\sigma^{i-1}(r-\sigma)^{2n-i} \\ &\in \sum A^{2n} + \sigma \cdot T \subset \mathrm{Stab}(M_a). \end{aligned}$$

Mit $k := r^{2n}$ folgt $k - \sigma = r^{2n-1}(r-\sigma) + (r^{2n-1}-1)\sigma \in \mathrm{Stab}(M_a)$, und damit ist auch die zweite Bedingung an σ erfüllt.

Die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ ist klar.

„$\Rightarrow$“: Mit $a \geq 0$ auf X_M^{max} ist für $n \in \mathbb{N}$ dann $1 + na > 0$ auf X_M. Also folgt aus dem eben gezeigten $k(1+na) \in M$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $a \in \mathrm{Arch}(M)$ und $P \in X_M^{max} = (Y_M^T)^{max}$. Im Fall $a \notin P$ ist $-1 = s + ta$ für gewisses $s \in P$ und $t \in T$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so, daß gilt $n - t \in 1 + M \subset P^+$. Nach Voraussetzung gibt es $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $k(1+na) \in M$. Es folgt $k(n-t)a = k((1+na) - (1+ta)) = k(1+na) + ks \in P$ und somit der Widerspruch $a \in P$, da P eine Anordnung ist und $k(n-t) \in P^+$. □

Der eben gezeigte Satz entspricht Lemma 2 und Satz 3 in [Be-Schw]. Es ist die einzige Stelle, in der dort tatsächlich die Archimedizität der Präprimstelle eingeht. Die entsprechende Stelle im Beweis von Lemma 1.14 ist mit $(*)$ gekennzeichnet: Um zu zeigen, daß $(k-\sigma)(sa+r)$ in M liegt, müssen wir unter unseren Voraussetzungen einige Umwege in Kauf nehmen.

1.4 Der Darstellungssatz

1.15 Satz (Darstellungssatz) *Sei T eine Präordnung und M ein archimedischer T-Modul. Dann ist $X(M)$ ein nichtleerer kompakter Hausdorff-Raum, und es gilt:*

(i) $\Phi_M^{-1}(\mathcal{C}^+(X(M),\mathbb{R})) = \mathrm{Arch}(M)$,

(ii) $\mathrm{Kern}(\Phi_M) = \{a \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}\, \exists\, k \in \mathbb{N}_+ :\ k(1 \pm na) \in M\}$,

(iii) $\mathbb{Q} \cdot \Phi_M(A)$ *liegt dicht in* $\mathcal{C}(X(M),\mathbb{R})$.

Beweis: Nach Korollar 1.11 ist die Abbildung

$$\begin{aligned} X(M) &\to X_M^{max}, \\ \varphi &\mapsto \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

eine Bijektion, insbesondere also $X(M) \neq \emptyset$. Die Punkte (i) und (ii) folgen dann unmittelbar aus Satz 1.10 und der zweiten Äquivalenz in Satz 1.14. Sind die topologischen Aussagen gezeigt, so ist (iii) eine Konsequenz des Satzes von Stone-Weierstrass.

Zur Kompaktheit und Hausdorff-Eigenschaft betrachten wir wie üblich die Einbettung

$$\begin{aligned} \iota : X(M) &\to \prod_{a \in A} [-n_a, n_a], \\ \varphi &\mapsto (\widehat{a}(\varphi))_{a \in A} = (\varphi(a))_{a \in A}, \end{aligned}$$

wobei $n_a \in \mathbb{N}$ unter der Verwendung der Archimedizität von M so gewählt wird, daß gilt $n_a \pm a \in M$. Dann ist $n_a \pm \varphi(a) = \varphi(n_a \pm a) \in \varphi(M) \subset \mathbb{R}_+$, also $-n_a \leq \varphi(a) \leq n_a$, falls $\varphi \in X(M)$. Die Menge rechter Hand versehen wir mit der Produkttopologie, erhalten also nach dem Satz von Tychonoff einen kompakten Raum, der zudem hausdorffsch ist. Da die Produkttopologie gerade die schwache Topologie bzgl. den Projektionen auf die Faktoren ist, erweist sich ι als topologische Einbettung. Es reicht daher aus, die Abgeschlossenheit von $\iota(X(M))$ im Bildbereich zu zeigen. Wir bezeichnen mit π_a die (stetige) Projektion auf den a-ten Faktor und schreiben damit $\iota(X(M))$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen:

$$\begin{aligned} \iota(X(M)) = & \bigcap_{a,b \in A} (\pi_a + \pi_b - \pi_{a+b})^{-1}(0) \cap \bigcap_{a,b \in A} (\pi_a \cdot \pi_b - \pi_{ab})^{-1}(0) \\ & \cap \pi_0^{-1}(0) \cap \pi_1^{-1}(1) \cap \bigcap_{a \in M} \pi_a^{-1}([0, \infty)). \end{aligned}$$

□

Wir halten noch fest, daß im Fall einer $\mathbb{Q}$-Algebra A und $\mathbb{Q}_+ \subset T$, $\mathrm{Arch}(M)$ die folgende Gestalt hat:

$$\mathrm{Arch}(M) = \Big\{ a \in A \mid \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\; \frac{1}{n} + a \in M \Big\}.$$

d.h. M wird um die bzgl. $<_M$ negativen, aber infinitesimal kleinen Elemente ergänzt.

Kapitel 2

Semiordnungen von Körpern

Um die Ergebnisse des ersten Kapitels im geometrischen Kontext verwerten zu können, benötigen wir einige Hilfsmittel, die wir in diesem Kapitel bereitstellen, das dadurch ein wenig den Charakter eines Sammelsuriums bekommt. Wir werden etwas ausholen und Semiordnungen von Körpern studieren. Wie schon bei angeordneten Körpern erweisen sich dabei die reellen Bewertungen als unverzichtbares Instrument. So ist es etwa möglich, Semiordnungen aus den Semiordnungen des Restklassenkörpers zu einer reellen Bewertung zu gewinnen, was z.B. im Fall von Funktionen-Körpern induktive Konstruktionen über den Transzendenzgrad ermöglicht. Die grundlegenden Zusammenhänge sind im ersten Abschnitt zu finden. Wir verallgemeinern dabei im wesentlichen Ergebnisse über quadratische Semiordnungen (siehe [Pr3], §7 und §8) auf T-Semiordnungen über allgemeinen Präordnungen T. Im zweiten Abschnitt gehen wir auf den reellen Holomorphiering eines Körpers ein und im dritten Abschnitt formulieren wir dann ein Lokal-Global-Prinzip für T-Isotropie von Formen über einem Körper, das wir [Be-Ro] entnehmen.

2.1 Semiordnungen und Bewertungen

Sei K ein Körper und $v : \dot{K} \to \Gamma$ eine *Bewertung* von K ($\dot{K} = K \setminus \{0\}$) (d.h. ein Gruppenhomomorphismus der multiplikativen Gruppe von K in die angeordnete abelsche Gruppe Γ, mit der Eigenschaft $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in \dot{K}$ mit $a + b \neq 0$). Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_v := \{a \in \dot{K} \mid v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$ den zugehörigen Bewertungsring, mit $\mathfrak{M}_v := \{a \in K \mid v(a) > 0\} \cup \{0\}$ sein maximales Ideal und mit $K_v := \mathcal{O}_v / \mathfrak{M}_v$ den entsprechenden Restklassenkörper.

Eine Semiordnung S von K heiße *verträglich* mit v (bzw. v verträglich mit S), falls für alle $a, b \in K$ gilt

$$0 <_S a \leq_S b \;\Rightarrow\; v(a) \geq v(b),$$

und *schwach verträglich* mit v, falls gilt $1 + \mathfrak{M}_v \subset S$.

Wir sammeln einige Eigenschaften:

2.1 Proposition *Sei T eine Präordnung der Stufe $2m$, S eine T-Semiordnung von K und $v : \dot{K} \to \Gamma$ eine nichttriviale Bewertung. Es gilt*

(i) Ist S verträglich mit v, so ist S auch schwach verträglich mit v.

(ii) S ist genau dann schwach verträglich mit v, wenn $\overline{T} := (T \cap \mathcal{O}_v)/\mathfrak{M}_v$ eine Präordnung der Stufe $2m$ von K_v ist und $\overline{S} := (S \cap \mathcal{O}_v)/\mathfrak{M}_v$ eine $\overline{T}$-Semiordnung von K_v.

(iii) Ist S verträglich mit v, so ist S nicht archimedisch oder v trivial (d.h. $\Gamma = \{0\}$).

(iv) Eine Anordnung P von K ist genau dann verträglich mit v, wenn sie schwach verträglich mit v ist.

Beweis: *(i)*: Sei S verträglich mit v und $a \in \mathfrak{M}_v$. Mit $1+a \notin S$, also $-a-1 \in S$, wäre $0 <_S 1 \leq_S -a$. Aus der Verträglichkeit und $a \in \mathfrak{M}_v$ würde somit der Widerspruch $0 < v(-a) \leq v(1) = 0$ folgen.

(ii): Sei S schwach verträglich mit v. Offensichtlich ist $\overline{T}$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und enthält K_v^{2m}. Ebenso ist $\overline{S}$ unter Addition und unter Multiplikation mit Elementen aus $\overline{T}$ abgeschlossen. Wegen $\overline{T} \subset \overline{S}$ genügt es somit zu zeigen, daß -1 nicht in $\overline{S}$ liegt. Angenommen, dies wäre der Fall, d.h. es wäre $-1 = s + a$ für gewisse $s \in S$ und $a \in \mathfrak{M}_v$. Dann ist $1 + a = -s \in (1 + \mathfrak{M}_v) \cap -S$ im Widerspruch zur schwachen Verträglichkeit von S mit v.

Ist umgekehrt $\overline{S}$ eine $\overline{T}$-Semiordnung, so gilt $1 + \mathfrak{M}_v \in \overline{S}$ und damit natürlich $1 + \mathfrak{M}_v \subset S$.

(iii): Nach (i) und (ii) ist $\overline{S}$ eine Semiordnung von K_v und daher K_v von Charakteristik 0 (denn sonst wäre $-1 = p - 1 \in \overline{S}$ mit $p = \mathrm{Char}(K_v)$). Insbesondere ist dann $v(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei $a \in K$ mit $v(a) < 0$ und $0 <_S a$. Wäre $a <_S n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so würde aus der Verträglichkeit von S mit v folgen: $0 = v(n) \leq v(a) < 0$.

(iv): Sei $1 + \mathfrak{M}_v \subset P$ und $a, b \in K$ mit $0 <_P a <_P b$. Dann ist $1 <_P b/a$, also $1 - (b/a) \notin P$, und die Voraussetzung impliziert $-b/a \notin \mathfrak{M}_v$. Es folgt $v(b) - v(a) = v(b/a) = v(-b/a) < 0$, d.h. $v(b) < v(a)$. □

Wir bezeichnen mit $X = X(K)$ die Menge aller Anordnungen von K und zu einer Präordnung T von K mit $Y^T = Y^T(K)$ die Menge aller T-Semiordnungen von K. Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} X_v &:= \{P \in X \mid P \text{ verträglich mit } v\}, \\ Y_v^T &:= \{S \in Y^T \mid S \text{ verträglich mit } v\}. \end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle vermerkt, daß für eine Präordnung eines Körpers K die Menge $\dot{T}$ eine multiplikative Untergruppe von $\dot{K}$ bildet: $t^{-1} = (t^{-1})^{2m} t^{2m+1}$. Zu einer Bewertung $v : \dot{K} \to \Gamma$ ist $v(\dot{T})$ also eine Untergruppe von Γ.

Mittels dem folgenden Verfahren, das im wesentlich schon auf Krull zurückgeht, lassen sich alle mit v verträglichen T-Semiordnungen aus den $\overline{T}$-Semiordnungen des

Restklassenkörpers aufbauen: Sei T eine Präordnung von K für die $\overline{T}$ eine Präordnung von K_v ist, und sei $(a_i \mid i \in I)$ ein T-Repräsentantensystem zu v, d.h. $(v(a_i) \mid i \in I)$ ein Repräsentantensystem von $\overline{\Gamma} := \Gamma/v(\dot{T}) =: I$. Dabei sei $a_0 = 1$, also als Repräsentant von $v(\dot{T})$ die 1 gewählt. Zu einer Abbildung $\eta : I \to Y^{\overline{T}}$ und einer „Vorzeichenverteilung“ $\sigma : I \to \{\pm 1\}$ mit $\sigma(0) = 1$ setzen wir

$$S(\eta, \sigma) := \bigcup_{i \in I} T a_i S_i(\eta, \sigma)$$

mit $S_i(\eta, \sigma) := \{u \in \mathcal{O}_v^\times \mid \sigma(i)u + \mathfrak{M}_v \in \eta(i)\}$.

2.2 Satz *Sei $v : \dot{K} \to \Gamma$ eine Bewertung, T eine Präordnung von K und $(a_i \mid i \in I)$ ein T-Repräsentantensystem zu v. Dann gilt:*

(i) Jede mit v verträgliche T-Semiordnung S von K induziert zwei Abbildungen

$$\eta_S : I \to Y^{\overline{T}} \quad \textit{und} \quad \sigma_S : I \to \{\pm 1\},$$

definiert durch $\sigma_S(i) \cdot a_i \in S$ für alle $i \in I$ und

$$u + \mathfrak{M}_v \in \eta_S(i) \;:\Leftrightarrow\; \sigma_S(i) a_i \cdot u \in S$$

für alle $u \in \mathcal{O}_v^\times$. Insbesondere ist $\sigma_S(0) = 1$.

(ii) Sei $\overline{T}$ eine Präordnung von K_v. Für je zwei Abbildungen $\eta : I \to Y^{\overline{T}}$ und $\sigma : I \to \{\pm 1\}$ mit $\sigma(0) = 1$ ist $S(\eta, \sigma)$ eine mit v verträgliche T-Semiordnung.

(iii) Die in (i) und (ii) beschriebenen Konstruktionen vermitteln zueinander inverse Bijektionen

$$\{\eta : I \to Y^{\overline{T}}\} \times \{\sigma : I \to \{\pm 1\} \mid \sigma(0) = 1\} \overset{\approx}{\longleftrightarrow} Y_v^T,$$

d.h. $(\eta_{S(\eta,\sigma)}, \sigma_{S(\eta,\sigma)}) = (\eta, \sigma)$ und $S(\eta_S, \sigma_S) = S$.

Beweis: *(i)*: Sei S eine mit v verträgliche T-Semiordnung. Zu zeigen ist im wesentlichen die Wohldefiniertheit von η_S, der Rest ergibt sich dann offensichtlich aus den Definitionen. Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{O}_v^\times$ mit $u_1 \equiv u_2 \bmod \mathfrak{M}_v$, etwa $u_2 + a = u_1$ mit $a \in \mathfrak{M}_v$. Ist nun $\sigma_S(i) a_i u_1 \in S$, so folgt wegen $v(\sigma_S(i) a_i u_1) = v(a_i) < v(a_i) + v(a) = v(\sigma_S(i) a_i a)$ und aus der Verträglichkeit von S mit v, daß gilt $\sigma_S(i) a_i u_1 \leq_S 0$, was nach Voraussetzung nicht sein kann, oder $\sigma_S(i) a_i a \leq_S \sigma_S(i) a_i u_1$, also $\sigma_S(i) a_i u_2 = \sigma_S(i) a_i (u_1 - a) \in S$.

(ii): Sei $S := S(\eta, \sigma)$. Aus der Definition von $S(\eta, \sigma)$ ergibt sich unmittelbar $1 \in S$ und $T \cdot S \subset S$. Wir halten fest, daß im Fall $t_1 a_i u_1 = t_2 a_j u_2$ mit $t_1, t_2 \in \dot{T}$ und $u_1, u_2 \in \mathcal{O}_v^\times$ wegen $v(t_1) + v(a_i) = v(t_1 a_i u_1) = v(t_2 a_j u_2) = v(t_2) + v(a_j)$ folgt $v(a_i) \equiv v(a_j) \bmod v(\dot{T})$, also $i = j$, und damit auch $v(t_1) = v(t_2)$, d.h. $t_1/t_2 \in$

$T \cap \mathcal{O}_v^\times$. Jedes Element von K kann also höchstens in einer Menge $S_i(\eta, \sigma)$ liegen und die Darstellung ist bis auf Faktoren aus $T \cap \mathcal{O}_v^\times$ eindeutig bestimmt.

$S \cap -S = \{0\}$: Sei $t_1 a_i u_1 = -t_2 a_j u_2$ mit $t_1, t_2 \in \dot{T}$, $u_1 \in S_i(\eta, \sigma)$ und $u_2 \in S_j(\eta, \sigma)$. Wie festgestellt, ist dann $i = j$ und $t_1/t_2 \in T \cap \mathcal{O}_v^\times$, also $\overline{(t_1/t_2)} + \mathfrak{M}_v \in \overline{T}$, woraus sich der Widerspruch $-\sigma(i)u_2 + \mathfrak{M}_v = (t_1/t_2)\sigma(i)u_1 + \mathfrak{M}_v \in \overline{T} \cdot \eta(i) \subset \eta(i)$ ergibt.

$S \cup -S = K$: Sei $a \in K$, etwa $v(a) \equiv v(a_i) \mod v(\dot{T})$, d.h. es gibt ein $t \in \dot{T}$ mit $v(a) = v(a_i) + v(t) = v(a_i t)$. Dann ist $u := a(ta_i)^{-1} \in \mathcal{O}_v^\times$ und $a = ta_i u$. Je nach Vorzeichen von $\sigma(i)u + \mathfrak{M}_v$ bezüglich $\eta(i)$ erhalten wir $a \in S$ oder $-a \in S$.

$S + S \subset S$: Seien $a, b \in S$, etwa $a = t_1 a_i u_1$, $b = t_2 a_j u_2$ mit $t_1, t_2 \in \dot{T}$, $u_1 \in S_i(\eta, \sigma)$ und $u_2 \in S_j(\eta, \sigma)$. Wir unterscheiden:

- $v(a) = v(b)$: Dann ist $v(a_i) \equiv v(a_j) \mod v(\dot{T})$, daher $i = j$ und somit $v(t_1) = v(t_2)$, also $t_2/t_1 \in T \cap \mathcal{O}_v^\times$. Es folgt $\sigma(i)(u_1 + (t_2/t_1)u_2) + \mathfrak{M}_v \in \eta(i) \setminus \{0\}$ und damit insbesondere $u := u_1 + (t_2/t_1)u_2 \in S_i(\eta, \sigma)$. Wir erhalten
$$a + b = t_1 a_i u_1 + t_2 a_j u_2 = t_1 a_i \Big(u_1 + u_2 \frac{t_2}{t_1}\Big) = t_1 a_i u \in S.$$

- $v(a) < v(b)$: Dann ist $v(a \pm b) = v(a)$ und $v(\pm b(t_1 a_i)^{-1}) = v(b) - v(a) > 0$, also mit $u := u_1 \pm b(t_1 a_i)^{-1}$ dann $u + \mathfrak{M}_v = u_1 + \mathfrak{M}_v$ und daher $u \in S_i(\eta, \sigma)$. Somit folgt
$$a \pm b = t_1 a_i u_1 \pm b = t_1 a_i \Big(u_1 \pm \frac{b}{t_1 a_i}\Big) = t_1 a_i u \in S.$$

Analog folgt natürlich $b \pm a \in S$ im Fall $v(b) < v(a)$. Wir haben so, neben der Abgeschlossenheit von S unter Addition, gleich die Verträglichkeit von S mit v mitgezeigt.

(iii): Sei $S \in Y_v^T$. Aus der Definition von η_S, σ_S und $S_i(\eta, \sigma)$ ergeben sich für $u \in \mathcal{O}_v^\times$ die folgenden Äquivalenzen:

$$u \in S_i(\eta_S, \sigma_S) \;\Leftrightarrow\; \sigma_S(i)u + \mathfrak{M}_v \in \eta_S(i) \;\Leftrightarrow\; a_i u = \sigma_S(i)a_i \cdot (\sigma_S(i)u) \in S.$$

Es folgt $a_i S_i(\eta_S, \sigma_S) \subset S$ und damit $S(\eta_S, \sigma_S) \subset S$, was schon die Gleichheit der beiden T-Semiordnungen zur Folge hat.

Seien nun η und σ gegeben. Wir haben für alle $i \in I$

$$\begin{aligned} \sigma_{S(\eta,\sigma)}(i)a_i \in S(\eta, \sigma) \quad &\Rightarrow \quad \sigma_{S(\eta,\sigma)}(i) \in S_i(\eta, \sigma) \\ &\Rightarrow \quad \sigma(i)\sigma_{S(\eta,\sigma)}(i) + \mathfrak{M}_v \in \eta(i) \\ &\Rightarrow \quad \sigma(i)\sigma_{S(\eta,\sigma)}(i) = 1, \end{aligned}$$

und somit $\sigma_{S(\eta,\sigma)}(i) = \sigma(i)$. Damit folgt für $u \in \mathcal{O}_v^\times$

$$u + \mathfrak{M}_v \in \eta_{S(\eta,\sigma)}(i) \;\Leftrightarrow\; \sigma(i)a_i u \in S(\eta, \sigma) \;\Leftrightarrow\; u + \mathfrak{M}_v = \sigma(i)^2 u + \mathfrak{M}_v \in \eta(i),$$

also auch $\eta_{S(\eta,\sigma)} = \eta$. $\square$

In den für uns relevanten Fällen können wir ein etwas eleganteres Verfahren zum Liften von Semiordnungen einsetzen, das zudem zum entsprechenden Vorgehen bei Anordnungen kompatibel ist. Dazu benötigen wir eine weniger willkürliche Verbindung von $\overline{\Gamma}$ und $\dot{K}$, als durch ein T-Repräsentanten-System gegeben ist: Zu einer Präordnung T von K und einer Bewertung $v : \dot{K} \to \Gamma$, bezeichnen wir mit *T-Schnitt* zu v eine Abbildung $s : \Gamma \to K$ mit

$$v \circ s = \mathrm{id}_\Gamma, \quad s(0) = 1, \quad s(v(\dot{T})) \subset \dot{T},$$

und

$$s(\gamma_1 + \gamma_2) \equiv s(\gamma_1) \cdot s(\gamma_2) \bmod \dot{T}$$

für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

Die Eigenschaft $v \circ s = \mathrm{id}_\Gamma$ eines T-Schnittes hat die folgenden Konsequenzen: Für $a \in \dot{K}$ ist $v(as(v(a))^{-1}) = v(a) - v(s(v(a))) = v(a) - v(a) = 0$, also $as(v(a))^{-1} \in \mathcal{O}_v^\times$. Und aus einem Repräsentantensystem $(\gamma_i \mid i \in I)$ von $\Gamma/v(\dot{T})$ erhalten wir durch Anwenden von s ein T-Repräsentantensystem $(s(\gamma_i) \mid i \in I)$.

Das folgende Lemma zeigt nun, daß sich die oben beschriebene Konstruktion von mit v verträglichen Semiordnungen aus den Semiordnungen des Restklassenkörpers entlang eines solchen T-Schnittes durchführen läßt.

2.3 Lemma *Sei T eine Präordnung von K, $v : \dot{K} \to \Gamma$ eine Bewertung und $s : \Gamma \to K$ ein T-Schnitt zu v. Zu einem Repräsentantensystem $(\gamma_i \mid i \in I)$ von $\Gamma/v(\dot{T})$ setzen wir $a_i := s(\gamma_i)$. Wir schreiben im folgenden kurz $\overline{\gamma}$ für $\gamma + v(\dot{T})$.*

(i) Ist $\overline{T}$ eine Präordnung von K_v, so gilt bzgl. des T-Repräsentanten-Systems $(a_i \mid i \in I)$ für je zwei Abbildungen $\eta : I \to Y^{\overline{T}}$ und $\sigma : I \to \{\pm 1\}$ mit $\sigma(0) = 1$

$$a \in S(\eta, \sigma) \;:\Leftrightarrow\; \sigma(\overline{v(a)}) \cdot \frac{a}{s(v(a))} + \mathfrak{M}_v \in \eta(\overline{v(a)}).$$

(ii) Unter den Voraussetzungen in (i) gilt weiter, daß $S(\eta,\sigma)$ genau dann eine Anordnung von K ist, wenn $\eta : I \to X(K_v) \cap Y^{\overline{T}}$ konstant und σ ein Charakter von $\overline{\Gamma}$ ist.

Beweis: *(i)*: „$\Rightarrow$“: Sei $a \in S(\eta,\sigma)$, etwa $a = ta_iu$ mit $t \in T$ und $u \in \mathcal{O}_v^\times$, so daß $\sigma(i)u + \mathfrak{M}_v \in \eta(i)$. Dann ist $v(a) = v(t) + v(a_i)$, also $s(v(a)) \equiv s(v(t))s(v(a_i)) = s(v(t))a_i \bmod \dot{T}$ und wegen $s(v(t)) \in T$ daher $s(v(a)) \equiv a_i \bmod \dot{T}$. Sei etwa $s(v(a)) = t'a_i$ mit $t' \in \dot{T}$. Aus $v(t') + v(a_i) = v(s(v(a))) = v(a) = v(t) + v(a_i)$ folgt $t/t' \in T \cap \mathcal{O}_v^\times$, und unter Beachtung von $\overline{v(a)} = i$ ergibt sich somit

$$\sigma(\overline{v(a)}) \cdot \frac{a}{s(v(a))} + \mathfrak{M}_v = \sigma(i)\Big(\frac{t}{t'}\Big)u + \mathfrak{M}_v \in \eta(i) = \eta(\overline{v(a)}),$$

„$\Leftarrow$“: Sei $\sigma(\overline{v(a)})as(v(a))^{-1} + \mathfrak{M}_v \in \eta(\overline{v(a)})$. Mit $i = \overline{v(a)}$ folgt dann $v(a) \equiv v(a_i) \mod v(\dot{T})$, also $s(v(a)) = ta_i$ für ein $t \in \dot{T}$. Setzen wir $u := as(v(a))^{-1} \in \mathcal{O}_v^\times$, so ist $a = ta_iu$ und $\sigma(i)u + \mathfrak{M}_v \in \eta(i)$, d.h. $u \in S_i(\eta, \sigma)$. Es folgt somit $a \in S(\eta, \sigma)$.

(ii): Sei $\eta(I) = \{P\} \subset X(K_v) \cap Y^{\overline{T}}$ und σ ein Charakter von $\overline{\Gamma}$. Für $a, b \in S(\eta, \sigma)$ gilt nach (i) dann $\sigma(\overline{v(a)})as(v(a))^{-1} + \mathfrak{M}_v \in P$ und $\sigma(\overline{v(b)})bs(v(b))^{-1} + \mathfrak{M}_v \in P$. Es ist $s(v(a))s(v(b)) = s(v(ab))t$ für ein $t \in T \cap \mathcal{O}_v^\times$, und da σ ein Charakter ist folgt

$$\sigma(\overline{v(a)})\sigma(\overline{v(b)}) = \sigma(\overline{v(a) + v(b)}) = \sigma(\overline{v(ab)}).$$

Wegen $t + \mathfrak{M}_v \in P$ und da P eine Anordnung ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma(\overline{v(ab)}) \cdot \frac{ab}{s(v(ab))} + \mathfrak{M}_v &= (t + \mathfrak{M}_v)\Big(\sigma(\overline{v(a)})\sigma(\overline{v(b)}) \cdot \frac{ab}{s(v(a))s(v(b))} + \mathfrak{M}_v\Big) \\ &= (t + \mathfrak{M}_v)\Big(\sigma(\overline{v(a)}) \cdot \frac{a}{s(v(a))} + \mathfrak{M}_v\Big)\Big(\sigma(\overline{v(b)}) \cdot \frac{b}{s(v(b))} + \mathfrak{M}_v\Big) \in P,\end{aligned}$$

also nach (i) $a \cdot b \in S(\eta, \sigma)$.

Sei nun $S(\eta, \sigma) \in X_v$. Beachtet man die Definition von $\sigma = \sigma_{S(\eta,\sigma)}$ und die Äquivalenz in (i), so ergibt sich für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$

$$\begin{aligned}\sigma(\overline{\gamma}_1 + \overline{\gamma}_2) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad s(\gamma_1 + \gamma_2) \in S(\eta, \sigma) \\ &\Leftrightarrow \quad s(\gamma_1) \cdot s(\gamma_2) \in S(\eta, \sigma) \\ &\Leftrightarrow \quad s(\gamma_1), s(\gamma_2) \in S(\eta, \sigma) \quad \text{oder} \quad s(\gamma_1), s(\gamma_2) \notin S(\eta, \sigma) \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma(\overline{\gamma}_1) \cdot \sigma(\overline{\gamma}_2) = 1.\end{aligned}$$

Damit erweist sich σ als Charakter. Wegen $\eta = \eta_{S(\eta,\sigma)}$ ist für $\gamma \in \Gamma$ und $u \in \mathcal{O}_v^\times$

$$u + \mathfrak{M}_v \in \eta(\overline{\gamma}) \;\Leftrightarrow\; \sigma(\overline{\gamma})s(\gamma) \cdot u \in S(\eta, \sigma)$$

also insbesondere

$$u + \mathfrak{M}_v \in \eta(\overline{0}) \;\Leftrightarrow\; u \in S(\eta, \sigma). \quad (*)$$

Da für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt $\sigma(\overline{\gamma})s(\gamma) \in S(\eta, \sigma)$ und $S(\eta, \sigma)$ eine Anordnung ist, ist die rechte Seite der Äquivalenz unabhängig von γ und somit η konstant. Aus $(*)$ folgt zudem, daß $\eta(\overline{0})$ eine Anordnung ist. □

Bevor wir ein Kriterium angeben, das die Existenz eines T-Schnittes garantiert, illustrieren wir das Liften von Semiordnungen anhand eines Beispiels, das zudem in Bezug auf die Fragestellung des nächsten Kapitels ein Negativ-Resultat darstellt.

2.4 Beispiel Wir betrachten die folgende Bewertung auf $\mathbb{R}(X, Y)$:

$$\begin{aligned}v : \mathbb{R}(X, Y)^\times \quad &\longrightarrow \quad \Gamma := \mathbb{Z} \oplus_{\text{lex}} \mathbb{Z} \\ f/g \quad &\longmapsto \quad (m - n, \deg_y(g_m) - \deg_y(f_n)),\end{aligned}$$

für $f = \sum_0^n f_i(Y)X^i, \sum_0^m g_j(Y)X^j \in \mathbb{R}[X,Y]$ mit $f_i, g_j \in \mathbb{R}[Y]$ und $f_n \neq 0 \neq g_m$. Es ist also $v(X) = -(1,0)$ und $v(Y) = -(0,1)$. Wir definieren einen Schnitt s durch $s(n,m) := X^{-n}Y^{-m}$. Wegen $\mathbb{R}(X,Y)_v = \mathbb{R}$, gibt es für η keine Wahl, und es ist nur noch die Vorzeichenverteilung σ zu spezifizieren. Es ist $\Gamma/2\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir setzen

$$\sigma(\overline{(1,0)}) := \sigma(\overline{(0,1)}) := 1 \quad \text{und} \quad \sigma(\overline{(1,1)}) := -1.$$

Betrachtet man die Polynome $g_1 := 1 - XY$, $g_2 := X - 1/2$, $g_3 := Y - 1/2$, $g_4 := n - (X^2 + Y^2)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sigma(\overline{v(g_1)}) \cdot \frac{g_1}{s(v(g_1))} + \mathfrak{M}_v &= (-1) \cdot \Big(\frac{1}{XY} - 1\Big) + \mathfrak{M}_v = 1 + \mathfrak{M}_v, \\
\sigma(\overline{v(g_2)}) \cdot \frac{g_2}{s(v(g_2))} + \mathfrak{M}_v &= 1 \cdot \Big(1 - \frac{1}{2X}\Big) + \mathfrak{M}_v = 1 + \mathfrak{M}_v, \\
\sigma(\overline{v(g_3)}) \cdot \frac{g_3}{s(v(g_3))} + \mathfrak{M}_v &= 1 \cdot \Big(1 - \frac{1}{2Y}\Big) + \mathfrak{M}_v = 1 + \mathfrak{M}_v, \\
\sigma(\overline{v(g_4)}) \cdot \frac{g_4}{s(v(g_4))} + \mathfrak{M}_v &= 1 \cdot \Big(\frac{n - Y^2}{X^2} - 1\Big) + \mathfrak{M}_v = -1 + \mathfrak{M}_v.
\end{aligned}$$

Gemäß der Vorschrift im vorherigen Lemma ist dann $S = S(\eta, \sigma)$ eine quadratische Semiordnung von $\mathbb{R}(X,Y)$ mit $g_1, g_2, g_3 \in S$ und $n - (X^2 + Y^2) \notin S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist der $\sum \mathbb{R}[X,Y]^2$-Modul

$$\sum \mathbb{R}[X,Y]^2 + g_1 \sum \mathbb{R}[X,Y]^2 + g_2 \sum \mathbb{R}[X,Y]^2 + g_3 \sum \mathbb{R}[X,Y]^2$$

nicht archimedisch, während eine leichte Rechnung zeigt, daß die basisabgeschlossene Menge $\{a \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(a) \geq 0,\ i = 1,2,3\}$ kompakt ist. $\square$

Leider sind wir nicht in der Lage, ohne zusätzliche Voraussetzungen die Existenz eines T-Schnittes zu zeigen. Das folgende Lemma garantiert jedoch, daß in den von uns betrachteten Fällen immer ein solcher vorliegt.

2.5 Lemma *Sei T eine Präordnung der Stufe $2m$ von K und $v : \dot{K} \to \Gamma$ eine Bewertung. Ist $v(\dot{T}) = 2m\Gamma$, so existiert ein T-Schnitt zu v.*

Beweis: Wir orientieren uns an den Beweisen zu Lemma 2.3 in [Be1] und Proposition 7.4 in [Pr2]. Zuerst zeigen wir, daß es zu dem von v induzierten Gruppenhomomorphismus $\overline{v} : \dot{K}/\dot{K}^{2m} \to \Gamma/v(\dot{T}) = \Gamma/2m\Gamma$ ein Rechtsinverses $\overline{s}$ gibt und heben $\overline{s}$ dann geeignet hoch.

Für eine abelsche Gruppe G und $m \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung $n = \prod p_i^{e_i}$ induziert die Diagonalabbildung einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned}
G/nG &\longrightarrow G/p_1^{e_1}G \times \cdots \times G/p_r^{e_r}G, \\
g + nG &\longmapsto (g + p_1^{e_1}G, \ldots, g + p_r^{e_r}G).
\end{aligned}$$

Angewandt auf $\dot K/\dot K^{2m}$ und $\Gamma/2m\Gamma$ ergibt sich das nebenstehende kommutative Diagramm. Es genügt somit, für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ ein entsprechendes Rechtsinverses $\overline{s}_j$ von $\overline{v}_j$ zu konstruieren. Dazu zeigen wir, daß für primes p und $e \in \mathbb{N}$ der $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$-Modul $\Gamma/p^e\Gamma$ frei ist: Sei $(\gamma_i + \Gamma/p\Gamma \mid i \in I)$ eine $\mathbb{F}_p$-Basis von $\Gamma/p\Gamma$. Wir folgern induktiv, daß $(\gamma_i + \Gamma/p^e\Gamma \mid i \in I)$ eine $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$-Basis von $\Gamma/p^e\Gamma$ ist:

$$\begin{array}{ccc}
\dot K/\dot K^{2m} & \xrightarrow{\overline{v}} & \Gamma/2m\Gamma \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
\dot K/\dot K^{p_1^{e_1}} & \xrightarrow{\overline{v}_1} & \Gamma/p_1^{e_1}\Gamma \\
\times & & \times \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\times & & \times \\
\dot K/\dot K^{p_r^{e_r}} & \xrightarrow{\overline{v}_r} & \Gamma/p_r^{e_r}\Gamma
\end{array}$$

Unabhängigkeit: Sei $\sum n_i\gamma_i \in p^e\Gamma$ für $n_i \in \mathbb{Z}$ nur endlich oft ungleich 0. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $n_i \equiv 0 \bmod p^{e-1}$, und aufgrund der Torsionsfreiheit von Γ folgt $\sum(n_i/p^{e-1})\gamma_i \in p\Gamma$, was nach Voraussetzung zu $n_i/p^{e-1} \equiv 0 \bmod p$, also $n_i \in p^e\mathbb{Z}$ führt.

Erzeugend: Zu $\gamma \in \Gamma$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_1 \in \Gamma$ mit $\gamma = \sum n_i\gamma_i + p^{e-1}\gamma_1$. Zu γ_1 wählen wir $m_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_2 \in \Gamma$ mit $\gamma_1 = \sum m_i\gamma_i + p\gamma_2$. Kombiniert ergibt sich $\gamma = \sum(n_i + p^{e-1}m_i)\gamma_i + p^e\gamma_2$.

Nun sind $\dot K/\dot K^{p_i^{e_i}}$ und $\Gamma/p_i^{e_i}\Gamma$ $(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})$-Moduln, $\Gamma/p_i^{e_i}\Gamma$ frei, und $\overline{v}_i$ ein surjektiver $(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})$-Modulhomomorphismus. Damit ist die Existenz eines zu $\overline{v}_i$ rechtsinversen $(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})$-Modulhomomorphismus gesichert, der insbesondere ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei jetzt $(\gamma_i \mid i \in I)$ ein Repräsentantensystem von $\Gamma/2m\Gamma$ mit $\gamma_0 = 0$. Zu $i \in I$ wählen wir $a \in \overline{s}(\gamma_i + \Gamma/2m\Gamma)$. Es ist $v(a) \equiv \gamma_i \bmod 2m\Gamma$, etwa $v(a) = \gamma_i + 2mk\gamma$. Wir wählen $b \in K$ mit $v(b) = \gamma$ und setzen $a_i := b^{-2mk}a$. Dann ist $a_i \equiv a \bmod \dot K^{2m}$, also $a_i \in \overline{s}(\gamma_i + 2m\Gamma)$, und es gilt $v(a_i) = \gamma_i$. Natürlich setzen wir $a_0 := 1$. Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ wählen wir nun ein $a_\gamma \in K$ mit $v(a_\gamma) = \gamma$. Leicht zu verifizieren ist dann, daß mit $\gamma = \gamma_i + 2m\gamma'$ die Zuordnung $s(\gamma) := a_i \cdot a_{\gamma'}^{2m}$ einen T-Schnitt zu v definiert. Es gilt sogar $s(v(\dot T)) \subset K^{2m}$ und $s(\gamma_1 + \gamma_2) \equiv s(\gamma_1)s(\gamma_2) \bmod \dot K^{2m}$ für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. $\square$

Um zu zeigen, daß sich Lemma 2.5 in der Situation, die wir im nächsten Kapitel betrachten, anwenden läßt, benötigen wir noch die folgende Proposition:

2.6 Proposition *Sei v eine Bewertung von K und T eine Präordnung, für die $\overline{T}$ eine Präordnung von K_v ist. Dann gilt für alle $t_1, \dots, t_n \in \dot T$*

$$v(t_1 + \dots + t_n) = \min\{v(t_1), \dots, v(t_n)\}.$$

Beweis: Sei ohne Einschränkung $v(t_1) = \min\{v(t_1), \dots, v(t_n)\}$ und $t_1 \neq 0$. Dann ist $v(t_1^{-1}t_i) \geq 0$, also $t_1^{-1}t_i \in T \cap \mathcal{O}_v$, und somit

$$1 + \frac{t_2}{t_1} + \dots + \frac{t_n}{t_1} + \mathfrak{M}_v \in 1 + \overline{T}.$$

Da $\overline{T}$ eine Präordnung ist, d.h. insbesondere $-1 \notin \overline{T}$ gilt, folgt $v(t_1^{-1}\sum_1^n t_i) = 0$, was gerade der Behauptung entspricht. $\square$

Die im dritten Kapitel vorliegende Situation wird durch die folgende Proposition erfaßt:

2.7 Proposition *Sei F/K eine Körpererweiterung und P eine Anordnung von K. Ist $T = \sum PF^{2m}$ und v eine Bewertung von F, die auf K trivial ist und für die $\overline{T}$ eine Präordnung ist, so gilt $v(\dot{T}) = 2m\Gamma$, es gibt also einen T-Schnitt zu v, und es ist $\mathcal{O}_v \cap T = \sum P\mathcal{O}_v^{2m}$, insbesondere also $\overline{T} = \sum PF_v^{2m}$.*

Beweis: Natürlich ist $2m\Gamma = v(\dot{F}^{2m}) \subset v(\dot{T})$. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus der eben gezeigten Proposition: Zu $p_1, \ldots, p_n \in P$ ist

$$v(p_1 a_1^{2m} + \cdots + p_n a_n^{2m}) = 2m \cdot \min\{v(a_1), \ldots, v(a_n)\} \in 2m\Gamma.$$

Aus $t = \sum_1^n p_i a_i^{2m} \in \mathcal{O}_v$ mit $p_1, \ldots, p_n \in P$ folgt $2m \cdot \min\{v(a)_1, \ldots, v(a)_n\} = v(t) \geq 0$, also $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_v$ und damit dann $t \in \sum P\mathcal{O}_v^{2m}$. Die Inklusion „$\supset$“ ist klar. □

Insbesondere haben wir die bekannte Tatsache mitgezeigt, daß es zu jeder reellen[1] Bewertung v von F einen $\sum F^2$-Schnitt gibt (setze $K = \mathbb{Q}$). Nach Lemma 2.3 (ii) gibt es dann mindestens eine mit v verträgliche Anordnung von F, die nach Proposition 2.1 (iii) nicht archimedisch ist.

Abschließend beschreiben wir in diesem Abschnitts noch die mit einer Semiordnung schwach verträglichen Bewertungsringe. Zu einem Teilkörper F von K und einer Teilmenge $M \subset K$ bezeichne

$$\begin{aligned} A(F, M) &:= \{a \in K \mid \exists\, r \in \dot{F} : \; r \pm a \in M\}, \\ I(F, M) &:= \{a \in K \mid \forall\, r \in (\dot{F} \cap M) : \; r \pm a \in M\}, \end{aligned}$$

kurz $A(M)$ bzw. $I(M)$, falls $F = \mathbb{Q}$.

2.8 Satz *Sei S eine Semiordnung des Körpers K. Dann gilt:*

(i) Für jeden Teilkörper F von K ist $A(F, S)$ ein mit S schwach verträglicher Bewertungsring mit maximalem Ideal $I(F, S)$. $(S \cap A(S))/I(S)$ ist eine archimedische Anordnung von $A(S)/I(S)$.

(ii) Jeder mit S schwach verträgliche Bewertungsring $\mathcal{O}$ hat die Form $A(F, S)$ für einen Teilkörper F von K. Genauer: Ist F ein maximaler Teilkörper von $\mathcal{O}$, so gilt $\mathcal{O} = A(F, S)$.

Beweis: Für quadratische Semiordnung ist der Sachverhalt relativ leicht zu überschauen (siehe [Pr3]). Der erste Beweis für Semiordnungen höherer Stufe ist von Becker (siehe [Be3], Theorem 1.2).

Sei S eine Semiordnung der Stufe $2m$ von K.

[1]Eine Bewertung heißt reell, falls der zugehörige Restklassenkörper formal reell ist.

(i): Nach Theorem 3.7 aus [Be2] ist $A := A(\sum K^{2m})$ ein Prüferring[2] von K.

Sei nun B ein Oberring von A, der in $A(S)$ enthalten und maximal mit dieser Eigenschaft ist (Zorn's Lemma). Wir zeigen $A(S) = B$, und beweisen dabei gleich die behaupteten Eigenschaften mit.

$B \cap S$ ist eine archimedische Semiordnung der Stufe $2m$ von B. Gemäß Satz 1.10 gibt es daher einen Ringhomomorphismus $\varphi : B \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(B \cap S) \subset \mathbb{R}_+$, und es gilt $\mathfrak{M} := \text{Kern}(\varphi) = \{b \in B \mid \forall k \in \mathbb{N}_+ : \ 1/k \pm b \in S\}$. Sei nun $b \in B$ und $c \in B \setminus \mathfrak{M}$. Dann ist $\varphi(c^{2m}) = \varphi(c)^{2m} > 0$, und es gibt daher ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(kc^{2m} \pm b) = k\varphi(c^{2m}) \pm \varphi(b) > 0$, also $kc^{2m} \pm b \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+) \subset S$. Somit ist $k \pm bc^{-2m} \in S$, d.h. $bc^{-2m} \in A(S)$. Da sich jedes Element der Lokalisierung $B_{\mathfrak{M}}$ in dieser Form darstellen läßt, folgt $B_{\mathfrak{M}} \subset A(S)$ und aufgrund der Maximalität von B dann $B = B_{\mathfrak{M}}$. Als lokaler Oberring des Prüferrings A ist B also ein Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{M}$.

Sei $a \in A(S) \setminus B$. Ohne Einschränkung nehmen wir $a \in S$ an. $S' := a^{-1}S$ ist eine Semiordnung der Stufe $2m$, und man prüft leicht nach, daß gilt $a \cdot A(S') \subset A(S)$. Wir wählen B' in $A(S')$, wie B in $A(S)$. Angenommen, $a \notin B'$. Dann ist $a^{-1} \in \{b \in B' \mid \forall k \in \mathbb{N}_+ : \ 1/k \pm b \in S'\}$, also $1/k \pm a^{-1} \in a^{-1}S$ für alle $k \in \mathbb{N}_+$, und daher insbesondere $a - k \in S$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was wegen $a \in A(S)$ zu einem Widerspruch führt. Mit $a \in B'$ ist auch $a^m \in B'$ und somit $a^m \in a \cdot A(S') \subset A(S)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen $a \notin B$ gilt $a^{-1} \in \mathfrak{M}$ und damit auch $a^{-2m} \in \mathfrak{M}$. Dies führt zu $1/k \pm a^{-2m} \in S$, also $a^{2m} - k \in S$, für alle $k \in \mathbb{N}_+$. D.h. im Widerspruch zu eben gezeigtem ist $a^{2m} \notin A(S)$, und es folgt $A(S) = B$.

Offensichtlich ergibt sich jetzt $I(S) = \mathfrak{M}$ und daß $\overline{S} = \varphi(S) = \varphi(B) \cap \mathbb{R}_+$ eine archimedische Anordnung des Restklassenkörpers ist.

Sei nun F ein Teilkörper von K. $A(F, S)$ ist natürlich unter „+“ und „−“ abgeschlossen. Wir zeigen die Abgeschlossenheit unter Multiplikation: Da $A(S)$ ein Bewertungsring ist, folgt $F = \text{Quot}(R)$ für $R = F \cap A(S)$. Zu $a_1, a_2 \in A(F, S)$ gibt es daher $b_1, b_2, c \in R$ mit $b_i c^{-2m} \pm a_i \in S$, also $b_i \pm c^{2m} a_i \in S$. Wegen $R \subset A(S)$ finden wir ein $k \in \mathbb{N}$, so daß gilt $k - b_i \in S$ und damit auch $k \pm c^{2m} a_i \in S$, d.h. $c^{2m} a_i \in A(S)$, für $i = 1, 2$. $A(S)$ ist ein Ring, also $c^{4m} a_1 a_2 \in A(S)$, etwa $l \pm c^{4m} a_1 a_2 \in S$ für $r \in \mathbb{N}$. Es folgt $r \pm a_1 a_2 \in S$ mit $r = lc^{-4m} \in \text{Quot}(R) = F$.

Als Oberring von $A(S)$ ist $A(F, S)$ ein Bewertungsring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{M}$ in $I(S)$ enthalten ist, und der F enthält. Bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ mit $I(F, S)$ übereinstimmt. Sei $a \in \mathfrak{M}$. Offensichtlich ist $1 + \mathfrak{M} \subset S$, also $A(F, S)$ schwach verträglich mit S und daher insbesondere $(1 + \mathfrak{M})(F \cap S) \subset S$. Für alle $r \in (\dot{F} \cap S)$ ist $r^{-1}a \in \mathfrak{M}$, also $1 \pm r^{-1}a \in 1 + \mathfrak{M}$ und somit $r \pm a = (1 \pm r^{-1}a)r \in S$, d.h. es folgt $a \in I(F, S)$. Angenommen, es gibt $a \in I(F, S) \setminus \mathfrak{M}$. Ohne Einschränkung sei $a \in S$. Es ist $I(F, S) \subset I(S)$, also $a \in I(S)$ und damit auch $a^n \in I(S)$, d.h. $a^{-n} \notin A(S)$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Insbesondere folgt $a^{-(2m-1)} - 1 \in S$ und daraus dann $a - a^{2m} \in S$, was $a^{2m} \in I(F, S) \setminus \mathfrak{M}$ impliziert. Somit ist $a^{-2m} \in A(F, S)$, d.h. es gibt $r \in F$ mit

[2] Ein Teilring R eines Köpers K heißt Prüferring von K, falls jede Lokalisierung von R nach einem Primideal ein Bewertungsring von K ist.

$r \pm a^{-2m} \in S$. Wegen $F = \sum F^{2m} - \sum F^{2m}$ können wir dabei $r \in \sum F^{2m}$ annehmen. Multiplikation mit a^{2m} und r führt schließlich zu $a^{2m} - r^{-1} \in S$, im Widerspruch zu $a^{2m} \in I(F, S)$.

(ii): Zum Beweis von (ii) kann der entsprechende Beweis für quadratische Semiordnungen aus [Pr3] (Theorem 7.21) mehr oder weniger direkt auf Semiordnungen höherer Stufe übertragen werden. □

2.9 Korollar *Sei T eine Präordnung von K, $F \subset K$ ein Teilkörper und M ein T-Modul. Dann ist*

$$A(F, M) = \bigcap_{S \in Y_M^T} A(F, S) \quad \textit{und} \quad I(F, M) = \bigcap_{S \in Y_M^T} I(F, S),$$

also $A(F, M)$ ein Ring und $I(F, M)$ ein Ideal in diesem Ring.

Beweis: Natürlich ist $A(F, M) \subset A(F, S)$ für alle $S \in Y_M^T$. Sei umgekehrt $a \in A(F, S)$ für alle $S \in Y_M^T$. Wählen wir $r_S \in F$ mit $r_S \pm a \in S$, so erhalten wir durc $\big((H_T(r_S + a) \cap H_T(r_S - a) \mid S \in Y_M^T\big)$ eine offene Überdeckung des quasikompakten Raumes Y_M^T (Satz 1.4). Wir finden also $S_1, \ldots, S_n \in Y_M^T$, so daß

$$Y_M^T = \big(H_T(r_{S_1} + a) \cap H_T(r_{S_1} - a)\big) \cup \cdots \cup \big(H_T(r_{S_n} + a) \cap H_T(r_{S_n} - a)\big).$$

Mit $r := \max\{r_{S_1}, \ldots, r_{S_n}\}$ gilt dann $r \pm a > 0$ auf Y_M^T, d.h. es ist $r \pm a \in \bigcap_{S \in Y_M^T} S = M$. Als Durchschnitt von Ringen ist $A(F, M)$ ebenfalls ein Ring.

Die Identität $I(F, M) = \bigcap_{S \in Y_M^T} I(F, S)$ ist offensichtlich. □

2.2 Zum reellen Holomorphiering

Anschließend einige Überlegungen im Umfeld des *reellen Holomorphierings* eines Körpers. Sei F/K eine Körpererweiterung und P eine archimedische Anordnung von K. $\Omega(F/K, P)$ bezeichne die Menge aller reellen Bewertungen v von F, für die v auf K trivial ist und sich P auf F_v fortsetzen läßt (wir nehmen ohne Einschränkung $K \subset F_v$ an). Es sei

$$H(F/K, P) := \bigcap_{v \in \Omega(F/K, P)} \mathcal{O}_v.$$

$H(F/\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$ ist gerade der *reelle Holomorphiering* $H(F)$ von F, d.h. der Durchschnitt über alle reellen Bewertungsringe von F. Der folgende Satz ist eine leichte Verallgemeinerung von Theorem 3.3 aus [Be4].

2.10 Satz *Sei F/K eine Körpererweiterung und P eine archimedische Anordnung von K. Dann gilt:*

(i) Ist $-1 \notin \sum PF^{2m}$ für ein $m > 0$, so läßt sich P auf F fortsetzen.

Läßt sich P auf F fortsetzen, so gilt

(ii) $H(F/K,P) = A(\sum PF^{2m})$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$,

(iii) $\Big(H(F/K,P)^\times \cap \sum PF^2\Big) \subset \bigcap_{m>0} \sum PF^{2m}$.

Beweis: *(i)*: Sei $-1 \notin \sum PF^{2m}$, also $\sum PF^{2m}$ eine Präordnung von F. Gemäß Theorem 3.7 aus [Be2] ist dann $B_m := A(\sum PF^{2m})$ ein Prüferring von F, indem K aufgrund der Archimedizität von P enthalten ist. Offensichtlich ist $B_m \cap \sum PF^{2m} =: T_m$ eine archimedische Präordnung von B_m, und daher finden wir nach Satz 1.10 einen Ringhomomorphismus $\varphi : B_m \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(T_m) \subset \mathbb{R}_+$. Sei $\mathfrak{M} := \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathcal{O} := (B_m)_\mathfrak{M}$ die Lokalisierung von B_m nach $\mathfrak{M}$, also ein Bewertungsring von F. φ läßt sich durch

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \frac{b}{s} &\longmapsto \frac{\varphi(b)}{\varphi(s)} \end{aligned}$$

für $b, s \in B_m$, $s \notin \mathrm{Kern}(\varphi)$, eindeutig auf $\mathcal{O}$ fortsetzten. Kern(ψ) stimmt genau mit dem maximalen Ideal von $\mathcal{O}$ überein. Für eine zu $\mathcal{O}$ gehörige Bewertung v gilt also Kern$(\psi) = \mathfrak{M}_v$, und wir können somit ψ als Restklassenhomomorphismus $\mathcal{O}_v \twoheadrightarrow F_v$ auffassen. Es ist $\dot{K} \subset \mathcal{O}_v^\times$ und $\psi(P) \subset \mathbb{R}_+$, also $Q := F_v \cap \mathbb{R}_+$ eine Anordnung von F_v mit $\psi(P) \subset Q$. Sei s ein $\sum F^2$-Schnitt zu v, $\sigma : \Gamma_v/2\Gamma_v \to \{\pm 1\}$ ein Charakter und $\eta : \Gamma_v/2\Gamma_v \to X(F_v)$ konstant mit Wert Q. Nach Lemma 2.3 ist dann $S(\eta,\sigma)$ eine Anordnung von F und für $p \in \dot{P}$ gilt

$$\sigma(\overline{v(p)}) \cdot \frac{p}{s(v(p))} + \mathfrak{M}_v = \sigma(0)\psi\Big(\frac{p}{s(0)}\Big) = \psi(p) \in Q,$$

also $p \in S(\eta,\sigma)$.

Wir behalten im weiteren die Notation von (i) bei und setzen nun voraus, daß sich P auf F fortsetzen läßt, d.h. daß $\sum PF^{2m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Präordnung von F ist.

(ii): Zunächst zeigen wir, daß für eine Bewertung v von F mit $K \subset \mathcal{O}_v$ die folgende Äquivalenz gilt:

$$B_m \subset \mathcal{O}_v \iff -1 \notin \sum PF_v^{2m}.$$

„$\Rightarrow$“: Da B_m ein Prüferring ist, entsprechen die Bewertungsringe über B_m genau den Lokalisierungen von B_m nach einem Primideal. Insbesondere enthält daher jeder Bewertungsring $\mathcal{O}_v \supset B_m$ einen minimalen Bewertunsring $\mathcal{O}_w \supset B_m$, der die Lokalisierung von B_m nach einem maximalen Ideal $\mathfrak{M}$ ist. Nach Proposition 2.7 aus [Be2] ist $\mathfrak{M}$ der Kern eines Ringhomomorphismusses $\varphi : B_m \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(T_m) \subset \mathbb{R}_+$. Wie eben können wir nun schließen, daß sich P auf F_w fortsetzen läßt und erhalten so $-1 \notin \sum PF_w^{2m}$. Dies ist äquivalent zu $(-1 + \mathfrak{M}_w) \cap \sum PF^{2m} = \emptyset$, da nach Proposition 2.7 gilt $\mathcal{O}_w \cap \sum PF^{2m} = \sum P\mathcal{O}_w^{2m}$. Mit $\mathcal{O}_w \subset \mathcal{O}_v$ haben wir $\mathfrak{M}_w \supset \mathfrak{M}_v$, somit auch $-1 + \mathfrak{M}_v \cap \sum PF^{2m} = \emptyset$ und daher $-1 \notin \sum PF_v^{2m}$.

„$\Leftarrow$“: Sei nun $-1 \notin \sum PF_v^{2m}$, also wie eben gezeigt $-1 + \mathfrak{M}_v \cap \sum PF^{2m} = \emptyset$. Nach Theorem 3.7 aus [Be2] wird B_m als Ring von den Elementen $(1+t)^{-1}$ mit $t \in \sum PF^{2m}$ erzeugt. Mit $(1+t)^{-1} \notin \mathcal{O}_v^\times$ wäre $1 + t \in \mathfrak{M}_v$, also $t \in -1 + \mathfrak{M}_v$, was wir ausgeschlossen haben. Somit folgt $B_m \subset \mathcal{O}_v$.

Nach (i) und wegen $K \subset B_m$ sind daher die Bewertungen v mit $B_m \subset \mathcal{O}_v$ genau die, die auf K trivial sind und für die sich P auf F_v fortsetzen läßt, d.h. $v \in \Omega(F/K, P)$. Nun ist B_m als Prüferring der Durchschnitt aller Bewertungsringe die über B_m liegen, und daher, entsprechend der Definition von $H(F/K, P)$, dann $B_m = H(F/K, P)$.

(iii): Sei $H := H(F/K, P)$. Wir zeigen zuerst $T_m = H \cap \sum PF^{2m} = \sum PH^{2m}$: Ist $t := \sum_1^k p_i a_i^{2m} \in H$ mit $p_1, \ldots, p_k \in P$, so ist $t \in \mathcal{O}$ für jeden Bewertungsring $\mathcal{O}$ über H, und wie oben gezeigt ergibt sich daraus $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{O}$. Da H der Durchschnitt dieser Bewertungsringe ist, folgt die Behauptung. Unabhängig von m ist somit (siehe Kapitel 1)

$$\begin{aligned} X(T_m) &= \{\varphi \in \operatorname{Hom}(H, \mathbb{R}) \mid \varphi(T_m) \subset \mathbb{R}_+\} \\ &= \Big\{\varphi \in \operatorname{Hom}(H, \mathbb{R}) \mid \varphi\Big(\sum PH^{2m}\Big) \subset \mathbb{R}_+\Big\} \\ &= \{\varphi \in \operatorname{Hom}(H, \mathbb{R}) \mid \varphi(P) \subset \mathbb{R}_+\} \\ &=: X. \end{aligned}$$

Sei nun $u \in H^\times \cap \sum PF^2$. Mit $\widehat{u} := \Phi_{T_1}(u) = \Phi_{T_m}(u)$ ist offensichtlich $\widehat{u} > 0$ auf X. Da X kompakt ist, finden wir daher ein $r \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$ mit $\widehat{u} > r$ auf X. Nach Satz 1.15 ist dann $s + (u - r) \in T_m$ für alle $s \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$ und $m > 0$, also insbesondere auch $u = r + (u - r) \in \sum PF^{2m}$. □

Ein formal reeller Körper K heißt *total archimedisch*, falls jede Anordnung von K archimedisch ist. Wie die Bemerkung nach Proposition 2.6 zeigt, ist dies genau dann der Fall, wenn K keine nicht-triviale reelle Bewertung zuläßt. Offensichtlich sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ total archimedisch. Weiter ist jede formal reelle algebraische Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ ein Beispiel eines total archimedischen Körpers. Denn jede reelle Bewertung von K liefert eingeschränkt auf $\mathbb{Q}$ eine reelle Bewertung von $\mathbb{Q}$, ist damit dann trivial auf $\mathbb{Q}$, und da $K/\mathbb{Q}$ algebraisch ist, folgt, daß sie auch auf K trivial ist.

Satz 2.10 zeigt, daß in einem total archimedischen Körper die Summen $2m$-ter Potenzen für alle $m \in \mathbb{N}$ zusammenfallen und zudem archimedisch sind:

2.11 Korollar *K ist genau dann ein total archimedischer Körper, wenn $\sum K^2$ archimedisch ist. In einem total archimedischen Körper K gilt $\sum K^2 = \sum K^{2m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind dann alle Präordnungen $\sum K^{2m}$ archimedisch.*

Beweis: Klar ist, daß aus der Archimedizität von $\sum K^2$ folgt, daß K total archimedisch ist.

Sei also K nun als total archimedisch vorausgesetzt. X bezeichne den Anordnungsraum von K versehen mit der Harrison-Topologie. Für $a \in K$ wählen wir zu jedem $P \in X$ ein $n_P \in \mathbb{N}$ mit $n_P - a \in P$. Dann ist $(H_K(n_P - a) \mid P \in X)$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es $P_1, \ldots, P_k \in X$ mit $X = H_K(n_{P_1} - a) \cup \cdots \cup H_K(n_{P_k} - a)$. Mit $n := \max\{n_{P_1}, \ldots, n_{P_k}\}$ gilt dann $X = H_K(n - a)$ und damit

$$n - a \in \bigcap_{P \in X} P = \sum K^2.$$

(Die verwendeten Argumente bezüglich Anordnungen findet man z.B. in [Pr3].)

Wir wenden nun Satz 2.10 für $P = \mathbb{Q}_+$ an: Aus (ii) und der Archimedizität von $\sum K^2$ folgt $H(K) = A(\sum K^2) = K$, und mit (iii) ergibt sich daraus dann: $(\sum K^2) \setminus \{0\} = H(K)^\times \cap \sum K^2 \subset \sum K^{2m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3 T-Isotropie

Ein Tupel $\varrho = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ mit $a_1, \ldots, a_k \in \dot{K}$ bezeichnen wir auch als *Form über* K. Zu einer Präordnung T von K nennen wir ϱ T*-anisotrop*, falls $\sum_1^k t_i a_i = 0$ mit $t_1, \ldots, t_k \in T$ nur für $t_1 = \cdots = t_k = 0$ möglich ist. Anderenfalls nennen wir ϱ T*-isotrop*. Im Fall $T = \sum K^2$, der der Ausgangspunkt dieser Begriffsbildung war, spricht man auch von *stark anisotrop* und *schwach isotrop*.

Ist S eine Semiordnung von K, so heißt ϱ *positiv definit* (negativ definit) bzgl. S, falls gilt $0 <_S a_i$ ($a_i <_S 0$) für $i = 1, \ldots, n$. ϱ heißt *definit* bzgl. S, falls ϱ positiv oder negativ definit bzgl. S ist und anderenfalls *indefinit* bzgl. S. Es gilt nun die folgende Äquivalenz:

2.12 Proposition *Für eine Form $\varrho = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ über K sind äquivalent:*

(i) *ϱ ist T-isotrop,*

(ii) *ϱ ist indefinit bzgl. aller T-Semiordnungen von K,*

(iii) *$M_T(\varrho) := a_1 \cdot T + \cdots + a_k \cdot T = K$.*

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Für jede T-Semiordnung S ist $\pm S \setminus \{0\}$ unter Addition abgeschlossen ($S^0 = \{0\}$). Wäre also ϱ definit bzgl. S, etwa positiv definit, so hätten wir $\sum_1^k t_i a_i \in S \setminus \{0\}$ im Falle $t_i \neq 0$ für mindestens ein i.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Angenommen es ist $M_T(\varrho) \neq K$. $M_T(\varrho) \cap -M_T(\varrho)$ ist ein Ideal von K, nach Annahme also $M_T(\varrho) \cap -M_T(\varrho) = \{0\}$. Somit ist entweder $-1 \notin M_T(\varrho)$ oder $-1 \notin -M_T(\varrho)$. Sei ohne Einschränkung $-1 \notin M_T(\varrho)$ (sonst betrachten wir $-\varrho$). Dann ist auch $-1 \notin M := T + M_T(\varrho)$, denn mit $-1 \in t + M_T(\varrho)$ für ein $t \in T$ folgt $-1 \in (1+t)^{-1} M_T(\varrho) \subset M_T(\varrho)$. $1 + t = 0$ kann nicht sein, da sonst $T = K$ gilt und damit auch $M_T(\varrho) = K$. M ist damit ein T-Modul und als solcher in einer T-Semiordnung enthalten (siehe Proposition 1.2), bezüglich der dann aber ϱ definit ist.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Insbesondere ist $-a_1 = \sum_1^k t_i a_i$ für gewisse $t_1, \ldots, t_k \in T$, und daher $(1 + t_1) a_1 + \sum_2^k t_i a_i = 0$. $\square$

Im allgemeinen ist jedoch die Menge aller Semiordnungen eines Körpers ausgesprochen unzugänglich, und um für eine Form zu entscheiden, ob sie T-isotrop ist, bedarf es eines handlicheren Werkzeugs. Als Mittel der Wahl erweist sich ein Lokal-Global-Prinzip, dessen ursprüngliche Form ($T = \sum K^2$) unabhängig von Bröcker und Prestel bewiesen wurde (siehe [Br], [Pr2]) und das von Becker und Bröcker auf beliebige quadratische Präordnungen verallgemeinert wurde (siehe [Be-Br]). Becker hat es später auf $\sum K^{2m}$-Formen erweitert (siehe [Be3]), und schließlich wurde es von Becker und Rosenberg in die allgemeine Form, d.h. für beliebige Präordnungen, gebracht (siehe [Be-Ro]). Wir formulieren hier letztere Version, ändern sie aber für unsere Zwecke ein wenig ab.

Sei T eine Präordnung, $\varrho = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ eine Form von K und $v : \dot{K} \to \Gamma$ eine Bewertung, so daß $\overline{T}$ eine Präordnung von K_v ist. Zu $i \in \Gamma/v(\dot{T}) =: I$ seien $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ die Einträge von ϱ mit $v(a_{i_j}) + v(\dot{T}) = i$. Wir fixieren ein $a \in K$ mit $v(a) + v(\dot{T}) = i$ (z.B. a_{i_1}). Es ist $v(a_{i_j}) \equiv v(a) \bmod v(\dot{T})$, und daher gibt es $t_j \in T$ und $u_j \in \mathcal{O}_v^\times$ mit $a_{i_j}/a = t_j u_j$. Wir setzen

$$\varrho_v^{(i)} := \langle u_1 + \mathfrak{M}_v, \dots, u_r + \mathfrak{M}_v \rangle$$

und bezeichnen diese Form von K_v als *i-te Restklassenform* von ϱ bezüglich v und T. Natürlich hängt diese von den gewählten a und u_j ab. Hinsichtlich ihres $\overline{T}$-Isotropieverhaltens ist sie jedoch eindeutig: Sei etwa $v(a') + v(\dot{T}) = i$ und $a_{i_j}/a' = t'_j u'_j$ mit $t'_j \in T$ und $u'_j \in \mathcal{O}_v^\times$. Es ist $v(a') \equiv v(a) \bmod v(\dot{T})$, also $a'/a = tu$ für ein $t \in T$ und $u \in \mathcal{O}_v^\times$, und somit

$$u_j = \frac{1}{t_j} \cdot \frac{a_{i_j}}{a} = \frac{1}{t_j} \cdot \frac{a'}{a} \cdot \frac{a_{i_j}}{a'} = u\Big(\frac{tt'_j}{t_j}\Big)u'_j.$$

mit $tt'_j t_j^{-1} \in T \cap \mathcal{O}_v^\times$. Die möglichen Einträge von $\varrho_v^{(i)}$ unterscheiden sich also nur um einen von j unabhängigen Faktor $u + \mathfrak{M}_v$, der 1 ist, falls gilt $a = a'$, und um einen Faktor aus $\overline{T} \setminus \{0\}$. Dies heißt aber gerade, daß die beiden Formen das gleiche T-Isotropieverhalten haben.

Ist ein T-Schnitt s zu v gegeben, so kann

$$\varrho_v^{(i)} = \left\langle \frac{a_{i_1}}{s(v(a_{i_1}))} + \mathfrak{M}_v, \dots, \frac{a_{i_r}}{s(v(a_{i_r}))} + \mathfrak{M}_v \right\rangle$$

gewählt werden: Aus $v(a) \equiv v(a_{i_j}) \bmod v(\dot{T})$ folgt $s(v(a)) = t'_j s(v(a_{i_j}))$ für ein $t'_j \in T$ und daher mit $u = a/s(v(a))^{-1} \in \mathcal{O}_v^\times$

$$\frac{a_{i_j}}{s(v(a_{i_j}))} = \frac{a}{s(v(a_{i_j}))} \cdot \frac{a_{i_j}}{a} = \frac{a}{s(v(a))} \cdot t'_j \cdot \frac{a_{i_j}}{a} = u(t'_j t_j) u_j.$$

Insbesondere ist $t'_j t_j \in T \cap \mathcal{O}_v^\times$, d.h. die Einträge der beiden Formen unterscheiden sich wieder um einen von j unabhängigen Faktor und einen Faktor aus $\overline{T}$.

Statt mit dem in [Be-Ro] verwendeten Konzept der *Signatur* eines Körpers arbeiten wir hier teilweise mit dem dazu in gewissem Sinne äquivalenten und für unseren Kontext angemesseneren Begriff der *Ordnung* eines Körpers. In Kapitel 3 verwenden wir ausschließlich den Ordnungs-Begriff und greifen im vierten Kapitel dann wieder auf Signaturen zurück. Wir führen nun beide Konzepte ein und machen ihren Zusammenhang deutlich.

Unter einer *Ordnung $2m$-ter Stufe P* von K verstehen wir eine Präordnung $2m$-ter Stufe von K, für die zusätzlich gilt, daß $\dot{K}/\dot{P}$ zyklisch ist. Allgemein sprechen wir von Ordnungen höherer Stufe bzw. kurz von Ordnungen. Offensichtlich stimmen die Ordnungen der Stufe 2 genau mit den Anordnungen überein.

Als *Signatur* eines Körpers K bezeichnen wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \dot{K} \longrightarrow \{\zeta \mid \zeta^r = 1 \text{ für ein } r > 0\} \subset \mathbb{C}$$

der multiplikativen Gruppe von K in die Gruppe der Einheitswurzeln von $\mathbb{C}$, dessen Kern additiv abgeschlossen ist, d.h. $\mathrm{Kern}(\chi) + \mathrm{Kern}(\chi) \subset \mathrm{Kern}(\chi)$. Wir halten fest, daß gilt $\chi(-1) = -1$. Denn: Es ist $\chi(-1)^2 = \chi((-1)\cdot(-1)) = \chi(1) = 1$, also $\chi(-1) = \pm 1$. Mit $\chi(-1) = 1$ würde aber aufgrund der additiven Abgeschlossenheit des Kerns $0 = 1 + (-1) \in \mathrm{Kern}(\chi)$ folgen.

Zu einer Präordnung T setzen wir

$$\begin{aligned} Z_T &:= \{P \mid P \text{ Ordnung mit } T \subset P\}, \\ Z_T^* &:= \{\chi \mid \chi \text{ Signatur mit } T \subset \mathrm{Kern}(\chi) \cup \{0\}\}. \end{aligned}$$

Wir stellen nun den Zusammenhang der beiden Begriffe fest:

Sei zunächst $\chi \in Z_T^*$. Offensichtlich ist $P_\chi := \mathrm{Kern}(\chi) \cup \{0\}$ additiv und multiplikativ abgeschlossen, enthält T, und wie oben festgestellt gilt $-1 \notin P_\chi$. D.h. P_χ ist eine Prärdnung, die über T liegt. Daher hat $\dot{K}/\dot{P}$ endliche Ordnung ($\dot{K}^{2m} \subset \dot{P}$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$), ist also nach dem Homomorphiesatz isomorph zu einer endlichen, multiplikativen Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$, die bekanntlich zyklisch sein muß, und wir erhalten $P_\chi \in Z_T$.

Sei nun $P \in Z_T$. Wie gerade bemerkt, ist $\dot{K}/\dot{P}$ endlich, und da $\dot{K}/\dot{P}$ zudem zyklisch ist, erhalten wir somit einen Gruppenhomomorphismus

$$\chi_P : \dot{K} \twoheadrightarrow \dot{K}/\dot{P} \xrightarrow{\cong} \left\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^{\mathrm{ord}(\dot{K}/\dot{P})} = 1\right\}$$

mit Kern $\dot{P}$, d.h. insbesondere ist $P_{\chi_P} = P$.

Es läßt sich also jede Ordnung $P \in Z_T$ in der Form P_χ für ein $\chi \in Z_T^\star$ schreiben, und für jedes $\chi \in Z_T^\star$ ist durch P_χ eine Ordnung aus Z_T gegeben.

Da der zur Konstruktion von χ_P verwendete Homomorphismus im allgemeinen jedoch nicht eindeutig bestimmt ist, vermittelt die beschriebene Korrespondenz nur eine Retraktion

$$\begin{aligned} Z_T^* &\twoheadrightarrow Z_T, \\ \chi &\mapsto P_\chi, \end{aligned}$$

die aber hinsichtlich der von uns betrachteten Phänomene völlig ausreicht.

Wir nennen eine Form $\varrho = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ *definit* bzgl. einer Ordnung P, falls für ein $a \in K$ gilt

$$a_1, \ldots, a_k \in aP,$$

bzw. *definit* bzgl. einer Signatur χ, falls gilt

$$\chi(a_1) = \cdots = \chi(a_k).$$

Anderenfalls nennen wir ϱ *indefinit* bzgl. P bzw. χ.

2.13 Proposition *Sei T eine Präordnung, $\varrho = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ eine Form und $\chi \in Z_T^\star$. Dann gilt*

$$\varrho \textit{ definit bzgl. } \chi \quad \Leftrightarrow \quad \varrho \textit{ definit bzgl. } P_\chi.$$

Insbesondere ist ϱ genau dann indefinit bzgl. aller $P \in Z_T$, wenn ϱ indefinit bzgl. aller $\chi \in Z_T^\star$ ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $\chi(a_1) = \cdots = \chi(a_k)$. Dann ist $1 = \chi(a_1 a_1^{-1}) = \cdots = \chi(a_k a_1^{-1})$, somit $a_2 a_1^{-1}, \ldots, a_k a_1^{-1} \in \mathrm{Kern}(\chi) \subset P_\chi$ und daher $a_1, \ldots, a_k \in a_1 P_\chi$.

„$\Leftarrow$“: Mit $a_1, \ldots, a_k \in a P_\chi$ für ein $a \in K$ ist $\chi(a_1) = \cdots = \chi(a_k) = \chi(a)$.

Die abschließende Behauptung ergibt sich aus dieser Äquivalenz mittels des oben beschriebenen Zusammenhangs von Ordnungen und Signaturen. □

Eine Ordnung P von K heißt *verträglich* mit einer Bewertung v, falls gilt $1 + \mathfrak{M}_v \subset P$. Wie bei Semiordnungen ist dazu äquivalent, daß $\overline{P}$ eine Ordnung von K_v ist. Eine Signatur χ heißt verträglich mit v, falls gilt $1 + \mathfrak{M}_v \subset \mathrm{Kern}(\chi)$. Wir definieren und bemerken

$$\begin{aligned} \Omega(T) &:= \{v \mid v \text{ verträglich mit einem } P \in Z_T\} \\ &= \{v \mid v \text{ verträglich mit einem } \chi \in Z_T^\star\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\overline{T}$ für jede Bewertung $v \in \Omega(T)$ eine Präordnung von K_v. In diesem Fall ist $T^v := (1 + \mathfrak{M}_v) \cdot T$ eine Präordnung von K (siehe [Be-Ro], Lemma 2.4), und es ist nach [Be-Ro], Theorem 2.11, für eine Form ϱ folgendes äquivalent:

(i) ϱ ist T^v-isotrop,

(ii) mindestens eine der Restklassenformen von ϱ ist $\overline{T}$-isotrop.

Auch für eine Ordnug P zeigt sich, daß $A(P)$ ein mit P verträglicher Bewertungsring mit maximalem Ideal $I(P)$ ist (siehe [Be-Ha-Ro], 2.7). v_P bezeichne die zugehörige Bewertung.

Nun zum angekündigten Lokal-Global-Prinzip:

2.14 Satz (Lokal-Global-Prinzip) *Eine Form $\varrho = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ von K ist genau dann T-isotrop, wenn gilt*

(i) ϱ *ist indefinit bzgl. allen Ordnungen $P \in Z_T$ mit $v_P(a_i) \equiv v_P(a_j) \bmod v_P(\dot{T})$ für $i \neq j$, und*

(ii) ϱ *ist T^v-isotrop für alle $v \in \Omega(T)$ mit $v(a_i) \not\equiv v(a_j) \bmod v(\dot{T})$ für mindestens ein Paar $i \neq j$.*

Ein Beweis dieses Satzes ist in [Be-Ro] (Theorem 3.3) zu finden. Wir formulieren noch eine für unsere Zwecke günstigere Variante, die mittels üblicher Abänderungen dieses Beweises erhalten werden kann:

2.15 Satz (Lokal-Global-Prinzip) *Eine Form ϱ von K ist genau dann T-isotrop, wenn gilt*

(i) ϱ *ist indefinit bzgl. allen archimedischen Anordnungen $P \in X_T$, und*

(ii) ϱ *ist T^v-isotrop für alle $v \in \Omega(T)$ (d.h. mindestens eine der Restklassenformen ist $\overline{T}$-isotrop).*

Kapitel 3

Anwendungen in der reellen Geometrie

In diesem Kapitel werden wir die Ergebnisse aus dem ersten Kapitel, insbesondere Satz 1.15, in der geometrischen Situation, d.h. für Koordinatenalgebren affiner Varietäten über formal reellen Grundkörper, verwerten. Ist $(K,<)$ ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß R, so interessieren wir uns für die Restklassenalgebren $A := K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{A}$ zu Idealen $\mathfrak{A} \subset K[X_1,\dots,X_n]$ mit

$$V_R(\mathfrak{A}) := \{a \in R^n \mid \forall\, p \in \mathfrak{A} :\ p(a) = 0\} \neq \emptyset.$$

Zu $g_1,\dots,g_k \in A$ betrachten wir die davon erzeugte *basisabgeschlossene* Menge

$$S_R(g_1,\dots,g_k) := \{a \in V_R(\mathfrak{A}) \mid g_1(a) \geq 0,\dots,g_k(a) \geq 0\},$$

und wollen der Frage nachgehen, wie sich für eine Funktion $f \in A$ die geometrische Eigenschaft $f(a) > 0$ für alle $a \in S_R(g_1,\dots,g_k)$ algebraisch niederschlägt (wobei wir die Elemente von A in der üblichen Art und Weise als R-wertige Funktionen auf $V_R(\mathfrak{A})$ auffassen).

Das erste diesbezügliche Ergebnis ($S = R^n$) ist Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems (siehe [Ar]). Diese wurde später unabhängig von Prestel und Stengle zu sogenannten Positivstellensätzen erweitert, die inzwischen zum klassischen Bestand der reellen Algebra gehören (siehe [Pr2] und [Ste]):

3.1 Satz (Positivstellensatz) *Ist $(K,<)$ ein angeordneter Körper, so gilt für alle Funktionen $f, g_1,\dots,g_k \in A := K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{A}$ die Äquivalenz*

$$f_{|S_R(g_1,\dots,g_k)} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \textit{es gibt } t_1,t_2 \in T^2_<(g_1,\dots,g_k) \textit{ mit } t_1 \cdot f = 1 + t_2.$$

Dabei bezeichnen wir mit $T^{2m}_<(g_1,\dots,g_k)$ die von $g_1,\dots,g_k$ und K_+ erzeugte Präordnung $2m$-ter Stufe von A, d.h.

$$T^{2m}_<(g_1,\dots,g_k) = \sum_{e\in\mathbb{N}^k} \Big(\sum K_+A^{2m}\Big) \cdot g_1^{e_1}\cdots g_k^{e_k},$$

und mit $T^{2m}(g_1,\dots,g_k)$ die Präordnung $2m$-ter Stufe von A, die nur von $g_1,\dots,g_k$ erzeugt wird, d.h.

$$T^{2m}(g_1,\dots,g_k) = \sum_{e\in\mathbb{N}^k} \Big(\sum A^{2m}\Big) \cdot g_1^{e_1}\cdots g_k^{e_k}.$$

Für $\sum K_+A^{2m}$ schreiben wir auch kurz $T_<^{2m}$.

Bei dieser Darstellung kann im allgemeinen nicht auf den „Nenner“ t_1 verzichtet werden, jedoch hat sich in letzter Zeit herauskristallisiert, wie K und $g_1,\dots,g_k$ beschaffen sein müssen, um dies dennoch zu ermöglichen: Schmüdgen hat für $K=\mathbb{R}$ gezeigt, daß die Kompaktheit der Menge $S_\mathbb{R}(g_1,\dots,g_k)$ dazu hinreichend ist (siehe [Schm]). Er erhält dieses Ergebnis als eine Konsequenz seines eigentlichen Anliegens, der Lösung des Momentenproblems für kompakte semialgebraische Mengen. Eine wesentliche Rolle spielen dabei der Positivstellensatz und die Existenz von Spektralmaßen gewisser selbstadjungierter Operatoren.

Wörmann hat erkannt, daß der Satz von Kadison-Dubois und die Theorie der Ordnungen den natürlichen Rahmen bieten, um den Satz von Schmüdgen aus algebraischer Sicht zu verstehen und in sehr viel allgemeinerer Form zu beweisen (siehe [Wö1], [Wö2]). Der topologische Raum $X(T_<^{2m}(g_1,\dots,g_k))$ (siehe Kapitel 1) stimmt in der vorliegenden Situation genau mit der Menge $S_\mathbb{R}(g_1,\dots,g_k)$ überein. Es hat sich gezeigt, daß sich die geometrische Eigenschaft der Kompaktheit von $S_\mathbb{R}(g_1,\dots,g_k)$ auf der algebraischen Seite in der Archimedizität der Präordnungen $T_<^{2m}(g_1,\dots,g_k)$ für ungerades m widerspiegelt und somit der Satz von Kadison-Dubois zum tragen kommt. Wir schreiben ab jetzt kurz $S(\cdot)$ für $S_\mathbb{R}(\cdot)$ und $V(\cdot)$ für $V_\mathbb{R}(\cdot)$.

3.2 Satz (Schmüdgen-Wörmann) *Sei $(K,<)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Ist für $g_1,\dots,g_k \in A := K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{A}$ die Menge $S(g_1,\dots,g_k)$ kompakt, so gilt für alle ungeraden $m\in\mathbb{N}$ und $f\in A$*

$$f_{\big|S(g_1,\dots,g_k)} > 0 \quad\Rightarrow\quad f\in T_<^{2m}(g_1,\dots,g_k).$$

Putinar hat bemerkt, daß sich diese Darstellung im quadratischen Fall unter bestimmten Bedingungen noch wesentlich vereinfachen läßt, nämlich die Präordnung durch den entsprechenden Modul ersetzt werden kann. Er verfeinert den Ansatz von Schmüdgen durch die Verwendung von normalen Operatoren, gibt eine weitere Lösung des Momentenproblems an und zeigt in [Pu] damit den folgenden

3.3 Satz (Putinar) *Es seien $g_1,\dots,g_k\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$. Gibt es ein $g\in M_<^2(g_1,\dots,g_k)$, so daß $S(g)$ kompakt ist, so gilt für alle $f\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$*

$$f_{\big|S(g_1,\dots,g_k)} > 0 \quad\Rightarrow\quad f\in M_<^{2}(g_1,\dots,g_k).$$

Dabei bezeichne $M_<^{2m}(g_1,\dots,g_k)$ den $\sum K_+A^{2m}$-Modul, der von $g_1,\dots,g_k$ erzeugt wird, d.h.

$$M_<^{2m}(g_1,\dots,g_k) = \sum K_+A^{2m} + g_1\cdot\sum K_+A^{2m} + \dots + g_k\cdot\sum K_+A^{2m},$$

und $M^{2m}(g_1, \ldots, g_k)$ den nur von $g_1, \ldots, g_k$ erzeugten $\sum A^{2m}$-Modul, d.h.

$$M^{2m}(g_1, \ldots, g_k) = \sum A^{2m} + g_1 \cdot \sum A^{2m} + \cdots + g_k \cdot \sum A^{2m}.$$

Ferner gibt Putinar noch eine Bedingung an, die die Existenz einer solchen „Schrankenfunktion" g sichert.

Ziel dieses Kapitels ist es nun, die Ergebnisse von Putinar mit algebraischen Methoden zu untersuchen. In Anbetracht des Vorgehens von Wörmann ist es nicht verwunderlich, daß dabei die neue Version des Satzes von Kadison-Dubois in Kombination mit der Theorie der Semiordnungen einen erfolgversprechenden Ansatz darstellen.

Eine Vorbemerkung: In allen Ergebnissen, die wir in diesem und dem nächsten Kapitel herleiten, können bei total archimedischem Koeffizientenkörper K die Moduln $M^{2m}_{<}(\cdot)$ durch $M^{2m}(\cdot)$ ersetzt werden. Dies liegt in Proposition 2.11 begründet, und kann an den entsprechenden Stellen in den Beweisen leicht eingesehen werden.

Als unmittelbare Konsequenz aus Satz 1.15 ergibt sich der folgende zentrale Satz:

3.4 Satz *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper und $A := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$. Ist für $g_1, \ldots, g_k \in A$ der Modul $M^{2m}_{<}(g_1, \ldots, g_k)$ archimedisch, so gilt für alle $f \in A$*

$$f_{\big|S(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in M^{2m}_{<}(g_1, \ldots, g_k).$$

Beweis: Nach Satz 1.10 gibt es genau eine Einbettung $(K, <) \hookrightarrow (\mathbb{R}, <)$. Wir nehmen ohne Einschränkung $(K, <) \subset (\mathbb{R}, <)$ an. Wie schon erwähnt, erhalten wir einen kanonischen Homöomorphismus

$$\begin{array}{rcl} X(M^{2m}_{<}(g_1, \ldots, g_m)) & \overset{\approx}{\to} & S(g_1, \ldots, g_m), \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)), \end{array}$$

wobei wir $x_i := X_i + \mathfrak{A}$ setzen: Für $\varphi \in X(M^{2m}_{<}(g_1, \ldots, g_m))$ ist die Einschränkung auf K die Identität und daher insbesondere $g_i(\varphi(x)) = \varphi(g_i) \geq 0$, also $\varphi(x) \in S := S(g_1, \ldots, g_k)$. φ ist natürlich der zu $\varphi(x)$ gehörige Auswertungshomomorphismus. Umgekehrt, ist der zu einem Punkt $a \in S$ gehörige Auswertungshomomorphismus offensichtlich in $X(M^{2m}_{<}(g_1, \ldots, g_k))$ enthalten.

Da $M := M^{2m}_{<}(g_1, \ldots, g_k)$ archimedisch ist, gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ mit $g := c - \sum_1^m x_i^2 \in M$. Damit folgt $S \subset S(g)$, d.h. S ist beschränkt und somit kompakt. Sei nun $f \in A$ mit $f > 0$ auf S. Aufgrund der Kompaktheit von S finden wir ein $r \in \mathbb{N}$ so, daß gilt $f - 1/r > 0$ auf S. Für $\varphi \in X(M)$ ist dann $\varphi(f - 1/r) = f(\varphi(x)) - 1/r > 0$. Satz 1.15 liefert somit $f - 1/r \in \mathrm{Arch}(M)$, also insbesondere $f = 1/r + (f - 1/r) \in M$. $\square$

Wenn wir die Kompaktheit von $S(g_1, \ldots, g_k)$ voraussetzen, läßt sich für jede Funktion $f \in A$ durch Wahl eines hinreichend großen $c \in \mathbb{N}$ erreichen, daß $c - f > 0$ auf $S(g_1, \ldots, g_k)$ gilt. Wäre die gerade bewiesene Darstellungsmöglichkeit gegeben, so würde daher die Archimedizität von $M^{2m}_{<}(g_1, \ldots, g_k)$ folgen. Nun zeigt aber Beispiel

2.4 aus Kapitel 2, daß – im Gegensatz zu Präordnungen – schon im quadratischen Fall die Kompaktheit von $S(g_1,\dots,g_k)$ im allgemeinen nicht hinreichend für die Archimedizität des Moduls ist. Wir müssen uns also der Frage widmen, woran die Archimedizität eines Moduls zu erkennen ist. Eine mögliche Antwort ist die folgende verallgemeinerte Variante von Putinars Satz:

3.5 Satz *Sei $(K,<)$ ein archimedisch angeordneter Körper, $A := K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{A}$ und $g_1,\dots,g_k \in A$. Gibt es ein $g \in A$ so, daß $S(g)$ kompakt ist und zudem gilt $g^m \in M_<^{2m}(g_1,\dots,g_k)$, so folgt für alle $f \in A$*

$$f_{|S(g_1,\dots,g_k)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in M_<^{2m}(g_1,\dots,g_k).$$

Beweis: Nach dem Satz von Schmüdgen-Wörmann hat die Kompaktheit von $S(g) = S(g^m)$ (beachte $2 \nmid m$) die Archimedizität von $T_<^{2m}(g^m)$ zur Folge. Aus der Voraussetzung $g^m \in M_<^{2m}(g_1,\dots,g_k) =: M$ folgt $T_<^{2m}(g^m) = \sum K_+A^{2m} + (\sum K_+A^{2m})\cdot g^m \subset M$, und damit dann die Archimedizität von M. Die Behauptung ergibt sich somit aus Satz 3.4. $\square$

Allerdings ist dieses Kriterium noch sehr vage, von Interesse ist eher ein geometrisches Kriterium, daß es erlaubt, am Verhalten von $g_1,\dots,g_k$ abzulesen, ob die Archimedizität des Moduls vorliegt oder nicht. Wir werden im Laufe des Kapitels eine solche Bedingung formulieren, die zwar nur eine hinreichende ist, aber nicht weit davon entfernt ist, auch notwendig zu sein.

Neben dieser allgemeinen Fragestellung, werden wir eine Reihe von „Parameterrandlagen“ betrachten, für die die Äquivalenz von Archimedizität und Kompaktheit noch gilt:

- tr.deg$(A/K) = 1$, d.h. A ist die Koordinatenalgebra einer Kurve über K,
- $V(\mathfrak{A})$ ist kompakt,
- $g_1,\dots,g_k \in K[X_1,\dots,X_n]$ sind linear,
- nur zwei Erzeugende g_1, g_2.

Den letzten Punkt erhalten wir aus einer allgemeinen Reduktion der Schmüdgen-Wörmann-Darstellungen, die wir im vierten Kapitel beschreiben.

Die Verallgemeinerung von Putinars Satz folgt auch direkt aus Satz 1.14, wenn man das *Übertragungsprinzip von Tarski* heranzieht. Wir formulieren hier die folgende Variante, die z.B. aus [An-Br-Ru], Theorem 1.5, folgt:

3.6 Satz (Tarski-Prinzip) *Sei $\mathcal{L} = (0,1,+,-,\cdot,<)$ die Sprache der angeordneten Körper und $(K,<)$ ein formal reeller Körper. Dann gilt für je zwei reell abgeschlossene Körpererweiterungen R_i/K mit $K_+ \subset R_i^2$:*

$$R_1 \equiv_{\mathcal{L}(K)} R_2.$$

D.h. für alle $\mathcal{L}$-Aussagen α mit Parametern aus K gilt

$$R_1 \models \alpha \quad \Rightarrow \quad R_2 \models \alpha.$$

Das Tarski-Prinzip bietet oft eine handliche Möglichkeit, geometrische und algebraische Aussagen miteinander zu verbinden. Die nächste Proposition ist eine typische Anwendung. Wir zeigen, daß es hinsichtlich unserer Fragestellung nicht darauf ankommt, welche der beiden Mengen $S_R(g_1, \ldots, g_k)$ und $S_{\mathbb{R}}(g_1, \ldots, g_k)$ wir zugrundelegen.

3.7 Proposition *Sei $(K, <)$ ein angeordneter Körper, $A := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$ und R/K eine reell abgeschlossene Körpererweiterung mit $K_+ \subset R^2$. Für alle $f, g_1, \ldots, g_k \in A$ gilt dann*

$$f_{\big|S_R(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in \bigcap_{P \in X_{M_<^{2m}(g_1,\ldots,g_k)}} P^+.$$

Insbesondere ergibt sich also für jeden archimedisch angeordneten Körper $(K, <)$ mit reellem Abschluß R:

$$f_{\big|S_R(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{\big|S_{\mathbb{R}}(g_1, \ldots, g_k)} > 0.$$

Entsprechendes gilt für „$\geq$“ und „$=$“.

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (p_1, \ldots, p_l)$. Wir setzen $x_i := X_i + \mathfrak{A}$ und wählen zu jedem $p \in A$ ein $\widehat{p} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $p = \widehat{p}(x)$.

„$\Leftarrow$“: Zu $a \in S_R(g_1, \ldots, g_k)$ betrachten wir den Auswertungshomomorphismus $\pi_a : A \to R$, $p \mapsto p(a)$. $P := \pi_a^{-1}(R^2)$ ist eine Anordnung von A mit $g_1, \ldots, g_k \in P$ und $K_+ \subset P$. Nach Voraussetzung folgt daher $f \in P^+$, was gerade $f(a) > 0$ bedeutet.

„$\Rightarrow$“: Sei P eine Anordnung mit $M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) \subset P$. Wir nehmen an, es sei $f \notin P$, d.h. $-f \in P$. Setzen wir $F := \text{Quot}(A/P^0)$ und $\overline{p} := p + P^0$, so ist $Q := F^2 \cdot \{\overline{p} \mid p \in P\}$ eine Anordnung von F mit $-\widehat{f}(\overline{x}), \widehat{g}_1(\overline{x}), \ldots, \widehat{g}_k(\overline{x}) \in Q$ und $K_+ \subset Q$. Nach Übergang zum reellen Abschluß von (F, Q) liefert das Tarski-Prinzip dann

$$(R, <) \equiv_{\mathcal{L}(K)} \widetilde{(F, Q)} \models \exists\, v \left(\widehat{f}(v) \leq 0 \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{k} \widehat{g}_i(v) \geq 0 \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{l} p_j(v) = 0 \right),$$

und damit $f(a) \leq 0$ für ein $a \in S_R(g_1, \ldots, g_k)$. $\square$

Neben der Frage nach Archimedizitätskriterien stellt sich die Frage nach Möglichkeiten der Moduldarstellung bei unbeschränktem $S(g_1, \ldots, g_k)$, wobei hier natürlich Nenner zu erwarten sind. Ein Beispiel dafür ist der folgende Satz, in dem die Existenz von Moduldarstellungen mit besonders schönem Nenner gezeigt wird. Der

Satz geht auf auf Putinar und Vasilescu zurück (siehe [Pu-Va]). Für ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ bezeichne $F \in K[X_0, \ldots, X_n]$ dessen *Homogenisierung*

$$F(X) = X_0^{\deg(f)} f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\Big).$$

3.8 Satz *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gilt für alle Polynome $f, g_1, \ldots, g_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ von geradem Grad:*

$$F > 0 \text{ auf } S(G_1, \ldots, G_k) \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \Big(1 + \sum_{i=1}^{n} X_i^2\Big)^m \cdot f \in M^2(g_1, \ldots, g_k)$$

für ein $m \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A} := (1 - \sum_0^n X_i^2)$, $A := K[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$ und $x_i := X_i + \mathfrak{A}$. $V(\mathfrak{A})$ ist die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ und somit $S(g)$ für alle $g \in A$ kompakt. Es ist $0 \notin V(\mathfrak{A})$, nach Voraussetzung und Satz 3.5, daher

$$F(x) \in M_<^2(G_1(x), \ldots, G_k(x)).$$

Zurück verlagert in den Polynomring ergibt sich daraus

$$F(X) = t_0(X) + t_1(X)G_1(X) + \cdots + t_k(X)G_k(X) + g(X)\Big(1 - \sum_{i=0}^{n} X_i^2\Big) \quad (1)$$

für gewisse $t_i \in \sum K_+ K[X_0, \ldots, X_k]^2$ und ein $g \in K[X_0, \ldots, X_n]$. Wir setzen

$$\|X\| := \sqrt{X_0^2 + \cdots + X_n^2}$$

und erhalten

$$1 - \sum_{i=0}^{n} \Big(\frac{X_i}{\|X\|}\Big)^2 = 1 - \frac{\sum_0^n X_i^2}{\sum_0^n X_i^2} = 0.$$

Ersetzen wir nun in (1) X_i durch $\|X\|^{-1} \cdot X_i$, so folgt mit $2d_i := \deg(G_i)$ und $2d := \deg(G)$ aus der Homogenität von F und den G_i's

$$\frac{F(X)}{\|X\|^{2d}} = t_0 \cdot \frac{X}{\|X\|} + t_1 \cdot \frac{X}{\|X\|} \cdot \frac{G_1(X)}{\|X\|^{2d_1}} + \cdots + t_k \cdot \frac{X}{\|X\|} \cdot \frac{G_k(X)}{\|X\|^{2d_k}} \quad (2).$$

Für $h = \sum_0^r H_i \in K[X_0, \ldots, X_n]$ mit H_i homogen vom Grad i oder $H_i = 0$ gilt

$$\begin{aligned} h\Big(\frac{X}{\|X\|}\Big) &= \frac{1}{\|X\|^r}\Big(\sum_{2|(r-i)} \|X\|^{r-i} H_i + \|X\| \sum_{2\nmid(r-i)} \|X\|^{r-i-1} H_i\Big) \\ &= \frac{1}{\|X\|^r}(h_1 + \|X\| h_2) \end{aligned}$$

mit gewissen $h_1, h_2 \in K[X_0, \dots, X_n]$ und daher

$$h\Big(\frac{X}{\|X\|}\Big)^2 = \frac{1}{\|X\|^{2r}}\Big((h_1^2 + \|X\|^2 h_2^2) + \|X\|(2h_1h_2)\Big).$$

Mit $2r := \max\{\deg(t_0), \dots, \deg(t_k)\}$ ergibt sich somit aus (2)

$$\frac{F(X)}{\|X\|^{2d}} = \frac{t_0'(X)}{\|X\|^{2r}} + \frac{t_1'(X)G_1(X)}{\|X\|^{2(d_1+r)}} + \cdots + \frac{t_k'(X)G_k(X)}{\|X\|^{2(d_k+r)}} + \|X\|\frac{s(X)}{\|X\|^{2r}} \quad (3).$$

für gewisse $t_0', \dots, t_k' \in \sum K_+ K[X_0, \dots, X_k]^2$ und ein $s \in K[X_0, \dots, X_k]$. Nun ist $\|X\|^2 \in K[X_0, \dots, X_n]$ und $\|X\| \notin K(X_0, \dots, X_n)$. Es folgt daher $s = 0$, und die Multiplikation von (3) mit einer geeigneten Potenz von $\|X\|^2 = \sum_0^n X_i^2$ liefert dann schließlich

$$\Big(\sum_{i=0}^n X_i^2\Big)^m F(X) = \tau_0(X) + \tau_1(X)G_1(X) + \cdots + \tau_k(X)G_k(X)$$

für gewisse $\tau_j \in \sum K_+ K[X_0, \dots, X_n]^2$ und ein $m \in \mathbb{N}$. Setzen wir $X_0 = 1$, so folgt die Behauptung. $\square$

Da die Fragen nach der Archimedizität des Moduls und nach der Existenz von Moduldarstellungen mit Nennern eng miteinander verbunden sind, werden wir sie meist parallel bearbeiten. Das nächste Lemma erweist sich dabei als unverzichtbares Bindeglied. Es stellt eine Art Umkehrung von Satz 1.12 dar, und zwar im folgenden Sinne: Wir zeigen, daß die dort aus der Archimedizität des Moduls gefolgerte Beschreibung strikt positiver Funktionen umgekehrt unter gewissen Voraussetzungen die Archimedizität des Moduls liefert.

3.9 Lemma *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper und T eine Präordnung von $A := K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{A}$ mit $K_+ \subset T$. Ist dann $S \subset V(\mathfrak{A})$ kompakt und M ein T-Modul von A, so daß für alle $f \in A$ gilt*

$$f_{|S} > 0 \quad \Rightarrow \quad t \cdot f \in 1 + M \text{ für ein } t \in T,$$

so ist M archimedisch.

Beweis: Wir argumentieren ähnlich wie im Beweis zu Satz 1.14. Sei etwa $A^{2m} \subset T$. Wir setzen $x_i := X_i + \mathfrak{A}$. Da S kompakt ist, gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ mit

$$c \pm x_1, \dots, c \pm x_n > 0$$

auf S. Dann ist auch für alle $e \in \{0, \dots, 2m-1\}^{2n}$

$$g_e := \prod_{i=1}^n (c - x_i)^{e_i}(c + x_j)^{e_{i+n}} > 0$$

auf S, und nach Voraussetzung und Satz 1.8 daher $(1+t_e)g_e \in M$ für ein $t_e \in T$. Mit $1+t = \prod_e (1+t_e)$, $t \in T$, und $T' := T^{2m}_<(c \pm x_1, \dots, c \pm x_n)$ ergibt sich somit

$$(1+t) \cdot T' \subset M.$$

T' ist nach Proposition 1.13 archimedisch, also $l - t \in T'$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
(1+l)^{2m-1}(l-t) &= (1+t+l-t)^{2m-1}(l-t) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{2m-1} \tbinom{2m-1}{i} (1+t)^i (l-t)^{2m-1-i} \Big)(l-t) \\
&= (l-t)^{2m} + (1+t) \cdot \sum_{i=1}^{2m-1} \tbinom{2m-1}{i} (1+t)^{i-1}(l-t)^{2m-i} \\
&\in T + (1+t) \cdot T' \subset M
\end{aligned}$$

und daher $l - t \in M$. Um die Archimedizität von M nachzuweisen, genügt es wegen $A = \sum A^{2m} - \sum A^{2m}$, für alle $\sigma \in \sum A^{2m}$ die Existenz eines $r \in \mathbb{N}$ mit $r - \sigma \in M$ zu zeigen. Es ist $s - \sigma \in T'$ für ein $s \in \mathbb{N}$, also mit $r := s(1+l)$

$$r - \sigma = (1+t)(s-\sigma) + s(l-t) + t\sigma \in M.$$

$\square$

De facto ist die Voraussetzung des Lemmas nur für eine geeignete Funktion nachzuweisen. Wir zeigen dies hier für den quadratischen Fall, und kommen auf den allegemeinen später zurück (siehe Beispiel 3.19).

3.10 Bemerkung *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.9 gilt: Ist T eine quadratische Präordnung, so ist M archimedisch, falls für ein $c \in K_+$ und $t \in T$ gilt:*

$$t \cdot (c - x_1^2 - \cdots - x_n^2) \in 1 + M.$$

Beweis: Sei $f = c - x_1^2 - \cdots - x_n^2$ für $c \in K_+$. Wir zeigen zuerst, daß $M^2_<(f)$ archimedisch ist: Es sind $c - x_i^2 = f + \sum_{j \neq i} x_j^2 \in M^2_<(f)$ und mit $k = (1+c)/2$ dann auch

$$k \pm x_i = \frac{1}{2c} \left((c \pm x_i)^2 + (c - x_i^2) \right) \in M^2_<(f).$$

Da $M^2_<(f)$ multiplikativ abgeschlossen ist, folgt daher die Archimedizität von $M^2_<(f)$.

Nach Voraussetzung und Satz 1.8 haben wir $(1+t)f \in M$ für ein geeignetes $t \in T$. Damit ist $f + ct \in M$, und es gilt $(1+t)M^2_<(f) \subset M$. Sei nun $l \in \mathbb{N}$ so, daß gilt $l - t \in M^2_<(f)$ und somit dann $(1+t)(l-t) \in M$. Es folgt

$$l - t = (1+l)^{-1} \left((1+t)(l-t) + (l-t)^2 \right) \in M,$$

daher $c(1+l)-x_1^2-\cdots-x_n^2=(f+ct)+c(l-t)\in M$, und somit ist $M_<^2(cl+f)$ ein archimedischer Untermodul von M. $\square$

Im nächsten Abschnitt geben wir zwei abstrakte Beschreibungen der Situation an, eine von mehr illustrierendem Charakter, die aber für das Verständnis des weiteren Vorgehens sehr hilfreich ist, und eine mehr technische, die wir zur konkreten Arbeit in den folgenden Abschnitten heranziehen.

3.1 Abstrakte Kriterien

Zunächst werden wir die Varietät $V(\mathfrak{A})$ zu einem geeigneten größeren Raum kompaktifizieren, indem wir das passende semireelle Spektrum ein wenig uminterpretieren. Dies geschieht so, daß das Verhalten einer Funktion $f\in A$ an den dabei zu $S(g_1,\ldots,g_k)$ neu hinzukommenden Punkten die für uns relevante Information liefert.

Sei also $(K,<)$ ein archimedisch angeordneter Körper, von dem wir wieder ohne Einschränkung $(K,<)\subset(\mathbb{R},<)$ annehmen. Zu einer $T_<^{2m}$-Semiordnung S sei $F_S=\mathrm{Quot}(A/S^0)$. Wir setzen $\overline{a}:=a+S^0$ und definieren

$$\begin{aligned}\overline{T} &:= \left\{\frac{\overline{t_1}}{\overline{t_2}}\mid t_1,t_2\in T_<^{2m},\, t_2\notin S^0\right\}=F_S^{2m}\cdot\{\overline{t}\mid t\in T_<^{2m}\},\\ \overline{S} &:= \left\{\frac{\overline{s}}{\overline{t}}\mid s\in S,\, t\in T_<^{2m}\setminus S^0\right\}=F_S^{2m}\cdot\{\overline{s}\mid s\in S\}.\end{aligned}$$

$\overline{T}$ ist eine Präordnung von F_S und $\overline{S}$ eine $\overline{T}$-Semiordnung. Nach Satz 2.8 ist $A(\overline{S})$ ein Ring mit archimedischer $\sum K_+A(\overline{S})^{2m}$-Semiordnung $\overline{S}\cap A(\overline{S})$. Sei nun $\phi_S:A(\overline{S})\to\mathbb{R}$ der nach Satz 1.10 eindeutig bestimmte Homomorphismus mit $\phi_S(\overline{S}\cap A(\overline{S}))\subset\mathbb{R}_+$. Wir erweitern ϕ_S zu $\phi_S:F_S\to\mathbb{R}\cup\pm\infty$ durch $\phi_S(a):=\pm\infty$, falls $a\in\pm\overline{S}\setminus A(\overline{S})$, und definieren

$$\alpha_S: A\twoheadrightarrow A/S^0\hookrightarrow F_S\xrightarrow{\phi_S}\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}.$$

(ϕ_S ist natürlich im wesentlichen die zum Bewertungsring $A(\overline{S})$ gehörige $\mathbb{R}$-wertige Stelle, die nur an den unendlichen Werten entsprechend modifiziert werden muß.) Es sei nun

$$\widetilde{V}:=\widetilde{V(\mathfrak{A})}^{2m}:=\{\alpha_S\mid S\text{ maximale }T_<^{2m}\text{-Semiordnung}\}.$$

Wir finden $V:=V(\mathfrak{A})$ auf kanonische Weise in $\widetilde{V}$ wieder: Für $a\in V$ sei $\pi_a:A\to\mathbb{R}$ der entsprechende Auswertungshomomorphismus. $S_a:=\pi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ist eine maximale Anordnung über $T_<^{2m}$, für die offensichtlich gilt: $\alpha_{S_a}=\pi_a$. Wir identifizieren im folgenden a mit α_{S_a}.

Der nächste Schritt ist eine geeignete Topologisierung von $\widetilde{V}$. Zunächst kompaktifizieren wir $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, indem wir $-\infty$ als „Boden“ und $+\infty$ als „Deckel“

auffassen. Eine Basis der offenen Mengen von $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ sind also gerade die offenen Mengen von $\mathbb{R}$ zusammen mit den halboffenen Intervallen $[-\infty, a)$ und $(a, +\infty]$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$, wobei diese Schreibweise hier nicht symbolisch gemeint ist. Anders interpretiert, richten wir die Topologie von $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ so ein, daß die Bijektion $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \xrightarrow{\approx} [-1, 1]$, $a \mapsto a(1 + |a|^{-1})^{-1}$, falls $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 \mapsto 0$, $-\infty \mapsto -1$ und $+\infty \mapsto 1$ zu einem Homöomorphismus wird. Jedes $f \in A$ kann durch

$$\begin{aligned} f : \widetilde{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \\ \alpha_S &\longmapsto \alpha_S(f), \end{aligned}$$

auf $\widetilde{V}$ fortgesetzt werden. Die Topologie von $\widetilde{V}$ sei nun die gröbste Topologie bezüglich der alle Abbildungen f, $f \in A$, stetig sind.

Zu $g_1, \ldots, g_k \in A$ sei

$$\widetilde{S}(g_1, \ldots, g_k) := \{\alpha \in \widetilde{V} \mid 0 \leq g_1(\alpha), \ldots, 0 \leq g_k(\alpha)\},$$

wobei wir $-\infty < \mathbb{R} < +\infty$ setzen. Gemäß unserer Identifikation haben wir natürlich $S(g_1, \ldots, g_k) \subset \widetilde{S}(g_1, \ldots, g_k)$.

3.11 Satz *Seien $(K, <)$, $\mathfrak{A}$ und A wie gehabt und dazu $\widetilde{V} := \widetilde{V_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A})}^{2m}$ wie eben definiert. Dann ist $\widetilde{V}$ ein kompakter Hausdorff-Raum, die Teilraumtopologie von $V := V(\mathfrak{A}) \subset \widetilde{V}$ stimmt mit der üblichen Topologie von $V \subset \mathbb{R}^n$ überein, und V ist offen in $\widetilde{V}$. Für alle f, $g_1, \ldots, g_k \in A$ gilt die folgende Äquivalenz:*

$$f_{\big|\widetilde{S}(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \cdot f \in 1 + M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) \ \text{ für ein } \ t \in T_<^{2m}.$$

Ist $S(g_1, \ldots, g_k)$ kompakt, so gilt:

$$M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) \ \text{ ist archimedisch} \quad \Leftrightarrow \quad S(g_1, \ldots, g_k) = \widetilde{S}(g_1, \ldots, g_k).$$

Beweis: Nach Definition der Topologie auf $\widetilde{V}$ ist die Inklusion

$$\begin{aligned} \widetilde{V} &\hookrightarrow \prod_{f \in A} (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}), \\ \alpha &\mapsto (f(\alpha))_{f \in A}, \end{aligned}$$

eine topologische Einbettung. Als Teilraum eines Hausdorff-Raumes ist somit auch $\widetilde{V}$ ein Hausdorff-Raum.

Sei $T := T_<^{2m}$ und $M := M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varrho : (Y^T)^{max} &\twoheadrightarrow \widetilde{V}, \\ S &\mapsto \alpha_S, \end{aligned}$$

ist nach Definition von $\widetilde{V}$ surjektiv. Wir zeigen, daß ϱ stetig ist, und erhalten damit, daß $\widetilde{V}$ als stetiges Bild eines quasikompakten Raumes auch quasikompakt ist. Zu prüfen ist dazu, ob für jedes $f \in A$ die Abbildung $f \circ \varrho$ stetig ist. Hierfür ist es ausreichend, zu zeigen, daß für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Urbilder $(f \circ \varrho)^{-1}((\lambda, \infty])$ und $(f \circ \varrho)^{-1}([-\infty, \lambda))$ offen sind. Es ist

$$\begin{aligned}
(f \circ \varrho)^{-1}((\lambda, \infty]) &= \varrho^{-1}\Big(\{\alpha_S \mid \alpha_S(f) \in (\lambda, \infty]\}\Big) \\
&= \varrho^{-1}\Big(\{\alpha_S \mid \exists\, r \in \mathbb{Q},\, r > \lambda :\ \alpha_S(f) \in (r, \infty]\}\Big) \\
&= \varrho^{-1}\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q},\, r > \lambda} \{\alpha_S \mid \alpha_S(f) \in (r, \infty]\}\Big) \\
&= \varrho^{-1}\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q},\, r > \lambda} \{\alpha_S \mid f - r \in S^+\}\Big) \\
&= \bigcup_{r \in \mathbb{Q},\, r > \lambda} H_T(f - r)
\end{aligned}$$

eine Vereinigung offener Mengen, also selber offen. Für $(f \circ \varrho)^{-1}([-\infty, \lambda))$ gilt entsprechendes.

Die Teilraumtopologie auf V ist die schwache Topologie bezüglich den Einschränkungen der Funktionen $f \in A$ auf V. Das sind gerade die polynomialen Funktionen auf V, die auf diese Weise offensichtlich die Standardtopologie auf $V \subset \mathbb{R}^n$ erzeugen.

Weiter ist $V = x_1^{-1}(\mathbb{R}) \cap \cdots \cap x_n^{-1}(\mathbb{R})$, als endlicher Durchschnitt offener Mengen somit selbst offen: V ist im Durchschnitt auf der rechten Seite enthalten, da natürlich für alle $a \in V$ das Bild von π_a in $\mathbb{R}$ liegt. Ist umgekehrt $\alpha = \alpha_S$ mit $\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n) \in \mathbb{R}$ gegeben, so sind $x_1, \ldots, x_n \in A(\overline{S})$, also auch $A/S^0 \subset A(\overline{S})$ und somit $\alpha_S(A) \subset \mathbb{R}$. d.h. α ist ein Homomorphismus und entspricht daher einem Punkt von V.

Die erste Äquivalenz ergibt sich direkt aus Lemma 1.8, da definitionsgemäß gilt

$$f_{|\widetilde{S}(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in S^+ \text{ für alle } S \in (Y_M^T)^{max}.$$

Gilt $S(g_1, \ldots, g_k) = \widetilde{S}(g_1, \ldots, g_k)$, so folgt die Archimedizität von M aus der eben begründeten Äquivalenz und Lemma 3.9. Wenn M archimedisch ist, dann gilt $A/S^0 \subset A(\overline{S})$ und somit $\alpha_S \in S(g_1, \ldots, g_k)$ für alle $S \in Y_M^T$, was der behaupteten Identität entspricht. □

Die heiklen Punkte sind also genau die, die in $\widetilde{S}(g_1, \ldots, g_k) \setminus S(g_1, \ldots, g_k)$ liegen. Wenn der Modul archimedisch ist, gibt es keine solchen, und nur die affinen Gegebenheiten sind relevant. Im allgemeinen Fall wird man versuchen, die geometrische Bedeutung dieser Punkte zu erkennen.

Um das zweite Kriterium zu formulieren, zunächst noch einige Vorüberlegungen und Definitionen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{RI}_< := \mathfrak{RI}(A)_<$ die Menge aller reellen Ideale $\mathfrak{B}$ von A, die an einer Anordnung P mit $K_+ \subset P$ *zentriert* sind, d.h. für die $\mathfrak{B} = P^0$ gilt. Zu einem solchen Ideal $\mathfrak{B}$, das per Definition ein Primideal ist, sei $F_{\mathfrak{B}} :=$

Quot$(A/\mathfrak{B})$ und in $F_\mathfrak{B}$ sei $T(\mathfrak{B})^{2m}_< := \sum K_+ F^{2m}_\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B}$ an einer Anordnung P mit $K_+ \subset P$ zentriert ist, folgt, daß $T(\mathfrak{B})^{2m}_<$ eine Präordnung ist. Für jedes $S \in Y^{T^{2m}_<}$ ist nun durch $T(S^0)^{2m}_<$ eine Präordnung von $F_S = F_{S^0}$ gegeben (vgl. die Definitionen zu Beginn des Abschnitts). Nach Satz 2.10 existiert daher auf F_{S^0} eine Anordnung P mit $K_+ \subset P$, was äquivalent dazu ist, daß S^0 in $\mathfrak{RI}_<$ liegt. Es gilt also $\mathfrak{RI}_< = \{S^0 \mid S \in Y^{T^{2m}_<}\}$.

Zu $\mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_<$ erhalten wir die folgenden, zueinander inversen Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} Y^{T(\mathfrak{B})^{2m}_<}(F_\mathfrak{B}) & \stackrel{\approx}{\longleftrightarrow} & \left\{S \in Y^{T^{2m}_<} \mid S^0 = \mathfrak{B}\right\}, \\ S' & \mapsto & \{a \in A \mid \overline{a} \in S'\}, \\ \overline{S} & \leftarrow\!\shortmid & S, \end{array}$$

wobei wir $\overline{a} := a + \mathfrak{B}$ setzen. Für $f, g_1, \ldots, g_k \in A$ können wir daher die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) aus Lemma 1.8 wie folgt fortsetzen:

$$\begin{array}{ccl} \begin{array}{c} t \cdot f \in 1 + M^{2m}_<(g_1, \ldots, g_k) \\ \text{für ein } t \in T^{2m}_< \end{array} & \stackrel{1.7}{\Longleftrightarrow} & \forall\, S \in Y^{T^{2m}_<}_{M^{2m}_<(g_1,\ldots,g_k)} :\ f \in S^+ \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_<\ \forall\, S \in Y^{T^{2m}_<},\ S^0 = \mathfrak{B} : \\ g_1, \ldots, g_k \in S\ \Rightarrow\ -f \notin S \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_<\ \forall\, S \in Y^{T(\mathfrak{B})^{2m}_<} : \\ \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \in S\ \Rightarrow\ -\overline{f} \notin S \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_< :\ \langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle\ \text{ ist} \\ \text{indefinit bzgl. aller } T(\mathfrak{B})^{2m}_<\text{-Semi-} \\ \text{ordnungen von } F_\mathfrak{B} \end{array} \right. \\ & \stackrel{2.10}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_< :\ \langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle\ \text{ ist} \\ T(\mathfrak{B})^{2m}_<\text{-isotrop} \end{array} \right. \end{array}$$

Dabei soll $\langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle$ den *regulären Anteil* der Form bezeichnen, d.h. nur die von 0 verschiedenen Einträge beinhalten. Setzen wir

$$\begin{array}{rcl} X^{\text{arch}}_< := X(A)^{\text{arch}}_< & := & \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_<} \{P \in X_{T(\mathfrak{B})} \mid P \text{ archimedisch}\}, \\ \Omega^{2m}_< := \Omega(A)^{2m}_< & := & \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_<} \Omega(T(\mathfrak{B})^{2m}_<), \end{array}$$

so folgt schließlich aus dem Lokal-Global-Prinzip 2.15:

$$\begin{array}{c} t \cdot f \in 1 + M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) \\ \text{für ein } t \in T_<^{2m}. \end{array} \quad \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall\, P \in X_<^{\text{arch}} : \ \langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle \ \text{ ist} \\ \text{indefinit bzgl. } P \\ \text{und} \\ \forall\, v \in \Omega_<^{2m} : \ \langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle \ \text{ ist} \\ (T_<^{2m})^v\text{-isotrop} \end{cases}$$

Bevor wir das Kriterium formulieren, noch eine Definition: Wir zerlegen $\Omega_<^{2m}$ in zwei Teile, zum einen in die Menge

$$\Omega_<^{2m,\infty} := \bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_<} \left\{ v \in \Omega(T(\mathfrak{B})_<^{2m}) \mid \exists\, i : \ \overline{x}_i \notin \mathcal{O}_v \right\}$$

der *unendlichen* Bewertungen aus $\Omega_<^{2m}$ ($x_i := X_i + \mathfrak{A}$), d.h. der Bewertungen, die mindestens einer Koordinatenfunktion $\overline{x}_i$ den Wert ∞ zuweisen, und ihr Komplement, die Menge $\Omega_<^{2m,e} := \Omega_<^{2m} \setminus \Omega_<^{2m,\infty}$ der *endlichen* Bewertungen.

3.12 Satz *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper und $A := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$. Dann gelten für alle $f, g_1, \ldots, g_k \in A$ die folgenden Äquivalenzen:*

$$f_{|S(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} \forall\, P \in X_<^{\text{arch}} : \ \langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle \\ \textit{ist indefinit bzgl. } P \end{array}$$

und

$$\left.\begin{array}{c} f_{|S(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \\ \textit{und} \\ \forall\, v \in \Omega_<^{2m,\infty} : \ \langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle \\ \textit{ist } (T_<^{2m})^v\textit{-istrop} \end{array}\right\} \quad \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} t \cdot f \in 1 + M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) \\ \textit{für ein } t \in T_<^{2m} \end{array}$$

Ist $S(g_1, \ldots, g_k)$ kompakt, so gilt:

$$M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) \ \textit{ist archimedisch} \quad \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} \forall\, v \in \Omega_<^{2m,\infty} : \ \langle 1, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle \\ \textit{ist } (T_<^{2m})^v\textit{-istrop} \end{array}$$

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (p_1, \ldots, p_l)$, $x := (X_1 + \mathfrak{A}, \ldots, X_n + \mathfrak{A})$, und sei für alle $p \in A$ ein $\widehat{p} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $p = \widehat{p}(x)$ fixiert.

(1): Die Implikation „$\Leftarrow$“ wird offensichtlich, wenn man die Voraussetzung auf die Kerne der Auswertungshomomorphismen $\varphi(x) := a$ für $a \in S(g_1, \ldots, g_k)$ anwendet.

„$\Rightarrow$“: Sei $f > 0$ auf $S(g_1, \ldots, g_k)$. Angenommen, $\langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle$ ist definit bezüglich der archimedischen Anordnung $P \in X_{T(\mathfrak{B})}$. Diese liefert eine Einbettung

$(F_{\mathfrak{B}}, Q) \hookrightarrow (\mathbb{R}, <)$ und damit einen Homomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{R}$, für den wegen $K_+ \subset P$ gilt $\varphi_{|K} = \mathrm{id}_K$. Die Definitheit der Form führt zu $a := \varphi(x) \in S(g_1, \dots, g_k)$ und $f(a) \leq 0$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

(2): Die Implikation „$\Leftarrow$" folgt aus der Äquivalenz $(*)$ und dem eben Bewiesenen.

„$\Rightarrow$": Wir zeigen, daß für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{R}\mathfrak{I}_<$ die Form $\langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_k \rangle$ $T(\mathfrak{B})^{2m}_<$-isotrop ist. In Anbetracht von $(*)$, (1) und der Voraussetzung ist noch die $(T(\mathfrak{B})^{2m}_<)^v$-Isotropie für alle $v \in \Omega^{2m,e}_<$ zu zeigen. Wir schließen dazu induktiv über den Transzendenzgrad von $F_{\mathfrak{B}}/K$.

Vorab zwei Bemerkungen: Jede Bewertung $v \in \Omega^{2m}_<$ ist verträglich mit einer Ordnung $P \in Z_{T(\mathfrak{B})^{2m}_<}$, d.h. es gilt $1 + \mathfrak{M}_v \subset P$, bzw. $\overline{P}$ ist eine Ordnung von $(F_{\mathfrak{B}})_v$, also auch $\overline{T(\mathfrak{B})^{2m}_<}$ eine Präordnung von $(F_{\mathfrak{B}})_v$. Nun ist $K_+ = K \cap P$ und daher die Einschränkung von v auf K verträglich mit $<$, was aufgrund der Archimedizität von $<$ zur Folge hat, daß v trivial auf K ist. Zum einen gibt es also gemäß Proposition 2.7 einen $T^{2m}_<(\mathfrak{B})$-Schnitt zu v, und es ist $\overline{T^{2m}_<(\mathfrak{B})} = \sum K_+(F_{\mathfrak{B}})^{2m}$, und gemäß Satz 2.10 läßt sich $<$ zu einer Anordnung von $(F_{\mathfrak{B}})_v$ fortsetzen.

tr.deg$(F_{\mathfrak{B}}/K) = 0$: Dann ist jede auf K triviale Bewertung auch auf $F_{\mathfrak{B}}$ trivial, und somit nichts zu prüfen.

tr.deg$(F_{\mathfrak{B}}/K) > 0$: Da v endlich ist, gilt $A/\mathfrak{B} \subset \mathcal{O}_v$. Sei $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{B}$ die Projektion auf den Quotienten. Wir setzen $\mathfrak{C} := \pi^{-1}(A/\mathfrak{B} \cap \mathfrak{M}_v)$ und identifizieren $F_{\mathfrak{C}} = \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{C})$ als Teilkörper von $(F_{\mathfrak{B}})_v$. Es ist $\mathfrak{C} \in \mathfrak{R}\mathfrak{I}_<$, da sich, wie eingangs bemerkt, $<$ insbesondere zu einer Anordnung von $F_{\mathfrak{C}}$ fortsetzen läßt. Nach [Bou], §10.3, Corollary 4, ist nun

$$\text{tr.deg}(F_{\mathfrak{C}}/K) \leq \text{tr.deg}((K_{\mathfrak{B}})_v/K) < \text{tr.deg}(F_{\mathfrak{B}}/K),$$

also $\mathfrak{C}$ eines der Ideale, die wir schon überprüft haben. D.h. mit $y_i := \overline{x}_i + \mathfrak{M}_v$ ist der reguläre Anteil der Form $\langle 1, -\widehat{f}(y), \widehat{g_1}(y), \dots, \widehat{g_k}(y) \rangle$ dann $T(\mathfrak{C})^{2m}_<$-isotrop und wegen $T(\mathfrak{C})^{2m}_< \subset \overline{T(\mathfrak{B})^{2m}_<}$ somit auch $\overline{T(\mathfrak{B})^{2m}_<}$-isotrop. Für ein Polynom $p \in K[X_1, \dots, X_n]$ gilt nun wegen $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n \in \mathcal{O}_v$:

$$v(p(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(y_1, \dots, y_n) \neq 0.$$

Ist s ein $T(\mathfrak{B})^{2m}_<$-Schnitt zu v und $p(y) \neq 0$, so folgt daher

$$\frac{p(\overline{x})}{s(v(p(\overline{x})))} + \mathfrak{M}_v = \frac{p(\overline{x})}{s(0)} + \mathfrak{M}_v = p(\overline{x}) + \mathfrak{M}_v = p(y).$$

Dies zeigt, daß der reguläre Anteil von $\langle 1, -\widehat{f}(y), \widehat{g_1}(y), \dots, \widehat{g_k}(y) \rangle$ eine Teilform der 0-ten Restklassenform von $\langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_k \rangle$ ist, die sich somit ebenfalls als $\overline{T(\mathfrak{B})^{2m}_<}$-isotrop erweist.

(3): „$\Rightarrow$": Sei $c \in K$, so daß $f := c - \sum_1^n x_i^{2m}$ strikt positiv auf $S(g_1, \dots, g_n)$ ist. Nach Satz 1.12 ist dann die rechte Seite von (2) erfüllt, also $\langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_k \rangle$ $(T(\mathfrak{B})^{2m}_<)^v$-isotrop für alle $v \in \Omega^{2m,\infty}_<$. Wir zeigen, daß dabei der Eintrag $-\overline{f}$ keine

Rolle spielt: Sei $v \in \Omega(T(\mathfrak{B})^{2m}_<)$ eine unendliche Bewertung und s ein $T(\mathfrak{B})^{2m}_<$-Schnitt. Ohne Einschränkung sei $v(\overline{x}_1) = \min\{v(\overline{x}_1), \dots, v(\overline{x}_n)\}$, nach Proposition 2.6 also $v(\overline{x}_1^{2m} + \dots + \overline{x}_n^{2m}) = 2mv(\overline{x}_1) < 0$. Es folgt $s(v(-\overline{f})) = s(v(\sum_1^n \overline{x}_i^{2m})) = s(2mv(\overline{x}_1)) = ts(v(\overline{x}_1))^{2m}$ für ein $t \in T(\mathfrak{B})^{2m}_< \cap \mathcal{O}_v^\times$ und damit

$$\frac{-\overline{f}}{s(v(-\overline{f}))} + \mathfrak{M}_v = \underbrace{\frac{1}{t} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\overline{x}_i}{s(v(\overline{x}_1))}\right)^{2m}}_{\in T(\mathfrak{B})^{2m}_<} - \underbrace{\frac{1}{t} \cdot \frac{c}{s(v(\overline{x}_1))}}_{\in \mathfrak{M}_v} + \mathfrak{M}_v \in \overline{T(\mathfrak{B})^{2m}_<}.$$

Somit trägt $-\overline{f}$ zur 0-ten Restklassenform nur einen Eintrag bei, der hinsichtlich der betrachteten Isotropie irrelevant ist.

„$\Leftarrow$“: Folgt aus Lemma 3.9, da für $f \in A$ mit $f > 0$ auf $S(g_1, \dots, g_k)$ die linke Seite von (2) gegeben ist. Denn mit $\langle 1, \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_k\rangle$ ist natürlich insbesondere auch $\langle 1, -\overline{f}, \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_k\rangle$ $(T(\mathfrak{B})^{2m}_<)^v$-isotrop. $\square$

3.2 Allgemeiner Fall

In diesem Abschnitt werden wir die eben beschriebenen Kriterien mit Leben füllen, indem wir untersuchen, welche geometrischen Phänomene sich hinter ihnen verbergen. Es wird sich zeigen, daß die Möglichkeit einer Moduldarstellung neben dem „endlichen“ (affinen) Verhalten der beteiligten Funktionen weitgehend durch das gemeinsame Verhalten im „Unendlichen“, d.h. durch deren asymptotisches Verhalten, bestimmt ist. Selbiges wiederum hängt im Fall von Polynomen, abgesehen von einer Zariski-abgeschlossenen Ausnahmemenge, von den homogenen Anteilen höchsten Grades ab. Daß diese von Bedeutung sind, hat schon Putinar erkannt und eine diesbezügliche hinreichende Bedingung für die nennerfreie Moduldarstellung angegeben, falls alle g_i’s einen geraden Grad haben (siehe [Pu], Theorem 1.4). Zu Beginn leiten wir dieses Ergebnis in allgemeinerer Form aus Satz 3.8 her, da es für das folgende die Richtung weist.

Zu $p \in K[X_1, \dots, X_m]$ bezeichne

$$p^h := P(0, X_1, \dots, X_n)$$

den homogenen Anteil höchsten Grades von p.

3.13 Satz *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gelten für alle Polynome $f, g_1, \dots, g_k \in K[X_1, \dots, X_n]$ von geradem Grad*

$$\left.\begin{array}{c} f_{\big|S(g_1,\ldots,g_k)} > 0 \\ \textit{und} \\ f^h_{\big|S(g_1^h,\ldots,g_k^h)\setminus\{0\}} > 0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} t\cdot f \in 1 + M^2_<(g_1,\ldots,g_k) \\ \textit{für ein } t \in T^2_<, \end{array}$$

und

$$S(g_1^h,\ldots,g_k^h) = \{0\} \quad\Rightarrow\quad M^2_A(g_1,\ldots,g_k) \textit{ ist archimedisch.}$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt direkt aus Satz 3.8, da, wie man durch Einsetzen von 0 und 1 für die Variable X_0 leicht erkennt, die Voraussetzung auf der linken Seite der Implikation genau dann erfüllt ist, wenn gilt $F > 0$ auf $S(G_1,\ldots,G_k)\setminus\{0\}$.

Zum Beweis der zweiten Implikation greifen wir vorweg: Proposition 3.14 zeigt, daß $S(g_1^h,\ldots,g_k^h) = \{0\}$ die Kompaktheit von $S(g_1,\ldots,g_k)$ zur Folge hat. Zusammen mit der schon bewiesenen Implikation liefert dann Bemerkung 3.10 die Behauptung, da $c - \sum_1^n X_i^2$ geraden Grad hat. $\square$

Putinar beweist diesen Satz unter Verwendung von Satz 3.5, indem er mit analytischen Methoden (Partition der Eins, Satz von Stone-Weierstrass) die Existenz eines Polynoms $g \in M^2_<(g_1,\ldots,g_k)$ mit kompakter Menge $S(g)$ zeigt. Allerdings formuliert er eine stärkere Fassung, in der nur gefordert wird, daß $g_1^h,\ldots,g_k^h$ keine nicht-triviale gemeinsame Nullstelle haben. Der Beweis benötigt jedoch die, wie wir später sehen werden, weitreichendere Bedingung, die wir hier verwenden.

Wir werden nun diesen Satz verallgemeinern (allerdings ohne die genaue Angabe des Nenners). Leider schaffen wir es nicht vollständig, eine hinreichend und notwendige Bedingung für die Archimedizität des Moduls anzugeben. Wir zeigen aber, daß wir immerhin in vielen Fällen eine durchaus passable Annäherung an eine solche gefunden haben.

Der übersichtlicheren Darstellung wegen arbeiten wir in diesem Abschnitt nicht mit Elementen der Koordinatenalgebren $K[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{A}$, sondern gehen direkt vom Polynomring aus. Weiter nehmen wir im folgenden ohne Einschränkung an, daß zu $m \in \mathbb{N}$, die Polynome $g_1,\ldots,g_k$ so sortiert sind, daß für gewisse $1 = r_0 \le r_1 \le \cdots \le r_{2m-1} \le r_{2m} = k+1$ und $0 \le i < 2m$ gilt

$$\deg(g_{r_i}) \equiv \deg(g_{r_i+1}) \equiv \cdots \equiv \deg(g_{r_{i+1}-1}) \equiv i \bmod 2m.$$

Zu $p_1,\ldots,p_l,f,g_1,\ldots,g_k \in K[X_1,\ldots,X_n]$ setzen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_i^{2m}(\vec{p},\vec{g})(f) \quad &:\Leftrightarrow \quad f^h > 0 \text{ auf } \Big(S(g^h_{r_i},\ldots,g^h_{r_{i+1}-1}) \cap V(p_1^h,\ldots,p_l^h)\Big)\setminus\{0\}, \\ \mathfrak{p}_i^{2m}(\vec{p},\vec{g}) \quad &:\Leftrightarrow \quad \Big(S(g^h_{r_i},\ldots,g^h_{r_{i+1}-1}) \cap V(p_1^h,\ldots,p_l^h)\Big)\setminus\{0\} = \emptyset, \end{aligned}$$

falls $i = 0$ oder i ungerade ist, sowie

$$\mathfrak{p}_i^{2m}(\vec{p},\vec{g})(f) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f^h > 0 \text{ auf } \Big(S(g^h_{r_i},\dots,g^h_{r_{i+1}-1}) \cap V(p^h_1,\dots,p^h_l)\Big) \setminus \{0\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{und} \\ f^h < 0 \text{ auf } \Big(S(-g^h_{r_i},\dots,-g^h_{r_{i+1}-1}) \cap V(p^h_1,\dots,p^h_l)\Big) \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{p}_i^{2m}(\vec{p},\vec{g}) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Big(S(g^h_{r_i},\dots,g^h_{r_{i+1}-1}) \cap V(p^h_1,\dots,p^h_l)\Big) \setminus \{0\} = \emptyset \\ \qquad\qquad\qquad \text{und} \\ \Big(S(-g^h_{r_i},\dots,-g^h_{r_{i+1}-1}) \cap V(p^h_1,\dots,p^h_l)\Big) \setminus \{0\} = \emptyset \end{cases}$$

falls $i > 0$ gerade ist. Schließlich sei

$$\mathfrak{p}^{2m}(\vec{p},\vec{g})(f) \quad :\Leftrightarrow \quad \deg(f) \equiv i \text{ mod } 2m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i^{2m}(\vec{p},\vec{g})(f)$$

und

$$\mathfrak{p}^{2m}(\vec{p},\vec{g}) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, 0 \le i < 2m : \ \mathfrak{p}_i^{2m}(\vec{p},\vec{g}).$$

Diese Bedingungen sind die Verallgemeinerung der Prämissen in Satz 3.13 auf höhere Stufen und auf Koordinatenalgebren. Die Quotientenbildung nach dem Ideal $\mathfrak{A}$ schlägt sich darin nieder, daß im allgemeinen weniger Punkte zu testen sind. Im Fall des Polynomrings, d.h. $\mathfrak{A} = (0)$, sind nach wie vor alle Punkte zu berücksichtigen. Die Sonderrolle von $i = 0$ kommt daher, daß wir zu den Polynomen, deren Grad kongruent 0 modulo $2m$ ist, eigentlich noch das Polynom 1 hinzufügen, das per se im Modul zu Verfügung steht. Die vermeintliche Asymmetrie zwischen geradem und ungeradem i ist bei näherem Hinsehen keine, da bei ungeradem i aufgrund der Homogenität der Polynome die eine Hälfte der Bedingung automatisch die andere erzwingt (der Übergang von a zu $-a$ ändert das Vorzeichen).

$\mathfrak{p}^{2n}(\vec{p},\vec{g})$ garantiert schon die Kompaktheit von $S(g_1,\dots,g_k) \cap V(\mathfrak{A})$, wie die folgende Proposition, angewandt auf $g_{r_i},\dots,g_{r_{i+1}-1},\pm p_1,\dots,\pm p_l$, zeigt.

3.14 Proposition *Gilt für* $g_1,\dots,g_k \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$

$$\mathbb{R}^m \setminus \{0\} = \{a \in \mathbb{R}^m \mid g_1^h(a) < 0 \vee \cdots \vee g_k^h(a) < 0\},$$

so ist $S(g_1,\dots,g_k)$ *kompakt.*

Beweis: Es sei $S^{n-1} := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\| := (\sum_1^n a_i^2)^{1/2} = 1\}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen zunächst, daß es kompakte Mengen $K_i \subset S^{n-1}$ gibt, so daß gilt $g_i < 0$ auf K_i und $S^{n-1} = K_1 \cup \cdots \cup K_k$. Die Mengen $U_i^m := \{\omega \in S^{n-1} \mid g_i^h(\omega) < -1/m\}$ ($m \ge 1$) sind offene Teilmengen von S^{n-1}, und es ist nach Voraussetzung

$$S^{n-1} = \bigcup_{i=1}^k \{\omega \in S^{n-1} \mid g_i^h(\omega) < 0\} = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{n=1}^\infty U_i^m.$$

Da S^{n-1} kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, und wegen $U_i^k \subset U_i^m$ für $k < m$ können wir diese in der Form $U_1^m, \ldots, U_k^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ wählen. Die Mengen $K_i := \{\omega \in S^{n-1} \mid g_i^h(\omega) \leq -1/(2m)\}$ genügen dann den Anforderungen.

Es sei nun $g \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\deg(g) = d$ und $K \subset S^{n-1}$ kompakt mit $g < 0$ auf K. Weiter seien $q_1, \ldots, q_{d-1} \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ homogen mit $\deg(q_i) = i$ so, daß gilt $g = \sum_1^{d-1} q_i + g^h$. Aufgrund der Kompaktheit von K und der Stetigkeit der q_i's und g^h's gibt es eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$ mit $\max\{|q_i(\omega)| \mid \omega \in K\} \leq c_1$ für $1 \leq i \leq d-1$, und es ist $c_2 := \max\{g^h(\omega) \mid \omega \in K\} < 0$. Für $t \in [2dc_1|c_2|^{-1}, \infty) \cap [1, \infty)$ und $\omega \in K$ ist dann

$$t^{-d} g(t \cdot \omega) = g^h(\omega) + \sum_{i=0}^{d-1} q_i(\omega) t^{i-d} \leq c_2 + dc_1 \cdot t^{-1} \leq c_2 + \frac{1}{2}|c_2| < 0,$$

und somit auch $g(t \cdot \omega) < 0$.

Zusammengefaßt liefern diese beiden Überlegungen die Existenz einer Konstante $c > 0$ mit der Eigenschaft: für alle $\omega \in S^{n-1}$, $t > c$ und $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist $g_i(t \cdot \omega) < 0$. Es folgt $S(p_1, \ldots, p_k) \subset \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\| \leq c\}$. $\square$

Wir zeigen nun:

3.15 Satz *Sei* $(K, <)$ *ein archimedisch angeordneter Körper und* $\mathfrak{A} := (p_1, \ldots, p_l) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$. *Dann gilt für alle* $f, g_1, \ldots, g_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$*:*

(i) Ist $\mathfrak{P}^{2m}(\vec{p}, \vec{g})(f)$ *erfüllt, so gilt*

$$f_{|S(g_1, \ldots, g_k) \,\cap\, V(\mathfrak{A})} > 0 \quad \Rightarrow \quad t \cdot f \in M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) + \mathfrak{A}$$

für ein $t \in T_<^{2m}$*.*

(ii) Ist $\mathfrak{P}^{2m}(\vec{p}, \vec{g})$ *erfüllt, so ist* $M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k)$ *archimedisch.*

Beweis: Es ist

$$S(g_1, \ldots, g_k, \pm p_1, \ldots, \pm p_l) = S(g_1, \ldots, g_k) \cap V(\mathfrak{A})$$

und aufgrund von $K[X_1, \ldots, X_n] = T_<^{2m} - T_<^{2m}$

$$M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k, \pm p_1, \ldots, \pm p_l) = M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k) + \mathfrak{A}.$$

Damit läßt sich Satz 3.12 auf die vorliegende Situation anwenden.

(i): Es sei $\deg(f) \equiv i \mod 2m$ für $0 \leq i < 2m$. Wir verwenden das entsprechende Kriterium in Satz 3.12, müssen also noch die $(T(\mathfrak{B})_<^{2m})^v$-Isotropie für alle $v \in \Omega_<^{2m,\infty}$ nachweisen. Dazu zeigen wir zunächst, daß für alle Körpererweiterungen F/K mit tr.deg$(K/\mathbb{R}) < \infty$, auf die sich K_+ fortsetzen läßt und für alle $a \in F^m \setminus \{0\}$ die Form

$$\varrho(a) := \begin{cases} \text{reg}\left\langle 1, -f^h(a),\ g_1^h(a), \ldots, g_{r_1-1}^h(a), \pm p_1^h(a), \ldots, \pm p_l^h(a) \right\rangle \text{ für } i = 0 \\ \text{bzw.} \\ \text{reg}\left\langle -f^h(a),\ g_{r_i}^h(a), \ldots, g_{r_{i+1}-1}^h(a), \pm p_1^h(a), \ldots, \pm p_l^h(a) \right\rangle \text{ sonst} \end{cases}$$

$\sum K_+F^{2m}$-isotrop ist. (reg$(\dots)$ bezeichne den regulären Anteil der Form.) Wir führen eine Induktion über den Transzendenzgrad von F über K:

tr.deg$(F/K) = 0$: Da sich K_+ auf F fortsetzen läßt, ist F formal reell, somit $F \subset \mathbb{R}$ und die Behauptung dann aufgrund der Voraussetzungen klar.

tr.deg$(F/K) > 0$: Wir prüfen die Bedingungen des Lokal-Global-Prinzips 2.15 nach. Sei $T := \sum K_+F^{2m}$.

Die Indefinitheit von $\varrho(a)$ bezüglich allen archimedischen Anordnungen $P \in X_T$ folgt wie im Beweis von Satz 3.12: Angenommen, $\varrho(a)$ ist definit bezüglich P, dann findet sich wieder ein Homomorphismus $\varphi : F \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_{|K} = \mathrm{id}_K$, so daß mit $b := \varphi(a)$ gilt

$$f^h(b) \leq 0, \quad 0 \leq g_1^h(b), \dots, 0 \leq g_{r_1-1}^h(b), \quad p_1^h(b) = \cdots = p_l(b) = 0$$

für $i = 0$ bzw.

$$f^h(b) \leq 0, \quad 0 \leq g_{r_i}^h(b), \dots, 0 \leq g_{r_{i+1}-1}^h(b), \quad p_1^h(b) = \cdots = p_l(b) = 0$$

oder

$$0 \leq f^h(b), \quad g_{r_i}^h(b) \geq 0, \dots, g_{r_{i+1}-1}^h(b) \geq 0, \quad p_1^h(b) = \cdots = p_l(b) = 0$$

für $i > 0$, was im Widerspruch zur Gültigkeit von $\mathfrak{P}_i^{2m}(\vec{p}, \vec{g})(f)$ steht.

Sei nun $v \in \Omega(T)$ und s ein T-Schnitt zu v. Für $a \in K$ sei $a^* := s(v(a))^{-1} \cdot a + \mathfrak{M}_v$. Wir betrachten die Restklassenformen bzgl. s: Sei ohne Einschränkung $v(a_n) = \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$. Mit $b := (a_1/a_n, \dots, a_{n-1}/a_n, 1)$ ist dann $K[b_1, \dots, b_n] \subset \mathcal{O}_v$ und $\overline{b} := (b_1 + \mathfrak{M}_v, \dots, b_{m-1} + \mathfrak{M}_v, 1) \neq 0$, wegen tr.deg$(F_v/K) <$ tr.deg(F/K) daher die Form $\varrho(\overline{b})$ nach Induktionsvoraussetzung $\overline{T}$-isotrop. Die Induktionsvoraussetzung kann angewendet werden, da $v \in \Omega(T)$ gerade dazu führt, daß v auf K trivial ist und sich K_+ auf F_v fortsetzen läßt sowie $\sum K_+F_v^{2m} = \overline{T}$ gilt (siehe die Bemerkungen im Beweis von Satz 3.12).

Für $h \in K[X_1, \dots, X_n]$ ist $v(h(b)) = 0$ äquivalent zu $h(\overline{b}) \neq 0$ (siehe ebenfalls Beweis von Satz 3.12). Ist $h \in K[X_1, \dots, X_n]$ homogen vom Grad d, so gilt $a_n^{-d} \cdot h(a) = h(b)$. Falls nun $h(\overline{b}) \neq 0$ und damit $v(h(b)) = 0$ ist, folgt $v(a_n^d) = v(h(a))$ und daher

$$\frac{h(a)}{s(v(h(a)))} = \frac{a_n^d}{s(v(h(a)))} \cdot \frac{h(a)}{a_n^d} = \frac{a_n^d}{s(v(a_n^d))} \cdot h(b)$$

Also ist $h(a)^* = \alpha \cdot h(\overline{a_n^d})$ mit $\alpha = a_n^d/s(v(h(a))) + \mathfrak{M}_v \in F_v \setminus \{0\}$. Ist ein $p_j^h(\overline{b}) \neq 0$, so hat mit entsprechendem α eine Restklassenform von $\varrho(a)$ die von 0 verschiedenen Einträge $\alpha \cdot p_j^h(\overline{b})$ und $-\alpha \cdot p_j^h(\overline{b})$ und ist damit dann natürlich $\overline{T}$-isotrop. Sind alle $p_j^h(\overline{b}) = 0$, so schließen wir wie folgt: Gilt für den Grad von h nun zudem $d \equiv i \bmod 2m$, etwa $d = i + 2mr$ mit $r \in \mathbb{N}$, so schreiben wir unter Verwendung der

T-Schnitteigenschaften:

$$\begin{aligned}\frac{h(a)}{s(v(h(a)))} &= \frac{a_n^d}{s(v(h(a)))}\cdot\frac{h(a)}{a_n^d} = \frac{a_n^i\cdot a_n^{2mr}}{s(v(a_n^i)+2mv(a_n^r))}\cdot h(b)\\ &\equiv \frac{a_n^i}{s(v(a_n^i))}\cdot\frac{a_n^{2mr}}{s(2mv(a_n^r))}\cdot h(b) \mod \dot{T}\\ &\equiv \frac{a_n^i}{s(v(a_n^i))}\cdot\Big(\frac{a_n^r}{s(v(a_n^r))}\Big)^{2m}\cdot h(b) \mod \dot{T}.\end{aligned}$$

d.h. wir finden $\alpha\in\dot{F}_v$ und $\theta\in\overline{T}\setminus\{0\}$ mit $h(a)^*=\alpha\theta\cdot h(\bar{b})$, wobei α nur von i abhängt. Da alle $p_j^h(\bar{b})=0$ sind, gilt daher für gewisse $\theta_i\in\overline{T}\setminus\{0\}$, daß die Form

$$\begin{gathered}\alpha\cdot\text{reg}\Big\langle\, 1,-\theta_0 f^h(\bar{b}),\,\theta_1 g_1^h(\bar{b}),\ldots,\theta_{r_2-1}g_{r_2-1}^h(\bar{b})\,\Big\rangle \text{ für } i=0\\ \text{bzw.}\\ \alpha\cdot\text{reg}\Big\langle\, -\theta_0 f^h(\bar{b}),\,\theta_{r_i}g_{r_i}^h(\bar{b}),\ldots,\theta_{r_{i+1}-1}^{2m}g_{r_{i+1}-1}^h(\bar{b})\,\Big\rangle \text{ sonst}\end{gathered}$$

eine Teilform der Restklassenform von $\varrho(a)$ ist, die zur Restklasse von $v(a_n^i)$ modulo $v(\dot{T})$ gehört. Mit $\varrho(\bar{b})$ ist dann auch diese Form $\overline{T}$-isotrop und somit letztlich auch die genannte Restklassenform. Damit ist die Induktion vollständig.

Sei jetzt $\mathfrak{B}\in\mathfrak{R}\mathfrak{I}(K[X_1,\ldots,X_n])_<$, $v\in\Omega(T(\mathfrak{B})_<^{2m})$ eine unendliche Bewertung und s ein $T(\mathfrak{B})_<^{2m}$-Schnitt zu v. Wir setzen $x_i:=X_i+\mathfrak{B}$. Ohne Einschränkung sei $v(x_n)=\min\{v(x_1),\ldots,v(x_n)\}<0$. Wir betrachten $a:=(x_1/x_n,\ldots,x_{n-1}/x_n,1)$. Schreiben wir $q\in K[X_1,\ldots,X_n]$ in der Form $\sum_0^{d-1}q_j+q^h$, $d=\deg(q)$, mit q_i homogen vom Grad i oder $q_i=0$, so ist

$$\frac{q(x)}{x_n^d}=\underbrace{\Big(\frac{q_0(a)}{x_n^d}+\frac{q_1(a)}{x_n^{d-1}}+\cdots+\frac{q_{d-1}(a)}{x_n^1}\Big)}_{\in\,\mathfrak{M}_v}+q^h(a),$$

und dabei $v(x_n^{j-d}q_j(a))>0$ für $j<n$. Im Fall $q^h(\bar{a})\neq 0$, also $v(q^h(a))=0$, folgt daraus $v(x_n^{-d}\cdot q(x))=0$ und somit $v(q(x))=v(x_n^d)$. Wir erhalten

$$\frac{q(x)}{s(v(q(x)))} = \frac{x_n^d}{s(v(q(x)))}\cdot\frac{q(x)}{x_n^d}\equiv\frac{x_n^d}{s(v(x_n^d))}\cdot q^h(a) \mod \mathfrak{M}_v,$$

woraus sich für $d\equiv i \mod 2m$ wie oben

$$\frac{q(x)}{s(v(q(s)))}+\mathfrak{M}_v=\alpha\theta\Big(q^h(a)+\mathfrak{M}_v\Big)$$

für ein nur von i abhängiges $\alpha\in(F_{\mathfrak{B}})_v\setminus\{0\}$ und ein $\theta\in\overline{T(\mathfrak{B})_<^{2m}}\setminus\{0\}$ ergibt. Jetzt können wir wie eben schließen, daß eine der Restklassenformen von

$$\text{reg}\Big(\langle 1,-f(x),g_1(x),\ldots,g_k(x),\pm p_1(x),\ldots,\pm p_l(x)\rangle\Big)$$

$(\overline{T(\mathfrak{B})^{2m}_{<}})$-isotrop ist, wobei wir auf die schon gezeigte $\sum K_+(F_{\mathfrak{B}})^{2m}_v$-Isotropie der oben betrachteten Form zurückgreifen.

(ii): Unter Voraussetzung von $\mathfrak{p}^{2m}(\vec{p},\vec{g})$, kann der Beweis zu (i) für entsprechende Formen ohne den zu $-f$ gehörigen Eintrag analog geführt werden. Aus Satz 3.12 (3) folgt dann die Behauptung. $\square$

$\mathfrak{p}^{2m}(\vec{p},\vec{g})$ ist allerdings keine notwendige Voraussetzung für die Archimedizität, wie das folgende Beispiel zeigt:

3.16 Beispiel Es seien $g_1 := 1+Y^2-X^2$, $g_2 := 1+X+X^2-Y^2$, $g_3 := 1-X+X^2-Y^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ und damit $g_1^h = Y^2-X^2$, $g_2^h = g_3^h = X^2-Y^2$. $\mathfrak{p}_0^2(g_1,g_2,g_3)$ ist nicht erfüllt, da für alle $a \in \mathbb{R}$ und $i = 1,2,3$ gilt $g_i^h(a,a) = 0$, und $\mathfrak{p}_1^2(g_1,g_2,g_3)$ ist offensichtlich nicht erfüllt, da alle g_i den Grad 2 haben. Nun ist $g_1+g_2 = 2+X$ und $g_1+g_3 = 2-X$, woraus folgt

$$4-X^2 = \frac{1}{4}\Big((2-X)^2(2+X)+(2+X)^2(2-X)\Big) \in M^2(g_1,g_2,g_3)$$

und damit

$$9-X^2-Y^2 = 2(4-X^2)+\frac{1}{2}(g_2+g_3) \in M^2(g_1,g_2,g_3).$$

Also ist $M^2(g_1,g_2,g_3)$ nach Bemerkung 3.10 archimedisch.

Wenn wir $\neg\,\mathfrak{p}^{2m}$ jedoch dahingehend verschärfen, daß das im Beispiel auftretende Phänomen gemeinsamer Nullstellen der g_i^h's nicht mehr vorkommt, so erhalten wir in vielen Fälle eine notwendige Bedingung:

3.17 Bemerkung *Sei $(K,<)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Es seien $g_1,\dots,g_k \in K[X_1,\dots,X_n]$. Gilt für $i=0$ und alle ungeraden i*

$$S(g_{r_i}^h,\dots,g_{r_{i+1}-1}^h)\setminus V(g_{r_i}^h,\dots,g_{r_{i+1}-1}^h) \neq \emptyset$$

und für alle geraden i

$$\begin{aligned} S(g_{r_i}^h,\dots,g_{r_{i+1}-1}^h)\setminus V(g_{r_i}^h,\dots,g_{r_{i+1}-1}^h) &\neq \emptyset \\ &\textit{oder} \\ S(-g_{r_i}^h,\dots,-g_{r_{i+1}-1}^h)\setminus V(-g_{r_i}^h,\dots,-g_{r_{i+1}-1}^h) &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

falls $r_i \neq r_{i+1}$ (d.h. tatsächlich auch Polynome mit entsprechendem Grad vorhanden sind), dann ist $c-\sum_1^n X_i^{2m} \notin M_<^{2m}(g_1,\dots,g_k)$ für alle $c \in K$.

Beweis: Seien $a^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ gemäß den Voraussetzungen gewählt, d.h. entweder $a^{(i)} \in S(g_{r_i}^h,\dots,g_{r_{i+1}-1}^h)$ oder $a^{(i)} \in S(-g_{r_i}^h,\dots,-g_{r_{i+1}-1}^h)$. Dabei können wir aufgrund der Stetigkeit der g_j^h's ohne Einschränkung $a_n^{(i)} \neq 0$ voraussetzen und aufgrund deren

Homogenität dann auch $a_n^{(i)} = 1$. Sei $v_1\colon F := K(X_1, \ldots, X_n, Y) \to \mathbb{Z}$ die auf $K(X_1, \ldots, X_n)$ triviale Bewertung mit $v_1(Y) = 1$. Mittels der Einbettung

$$\begin{array}{rcl} \tau : K(X_1, \ldots, X_n) & \to & K(X_1, \ldots, X_n, Y), \\ X_i & \mapsto & X_i Y^{-1}, \end{array}$$

definieren wir $v := v_1 \circ \tau$ und erhalten eine Bewertung von F mit $v(X_i) = -1$ für $1 \leq i \leq n$. Mit $T_i := X_i X_n^{-1} + \mathfrak{M}_v$ ist $F_v = K(T_1, \ldots, T_{n-1})$, wobei die $T_1, \ldots, T_{n-1}$ über K algebraisch unabhängig sind. Sei nun s der durch $s(1) := X_n^{-1}$ definierte Schnitt zu v. Nach Voraussetzung ist mit $d_j := \deg(g_j)$ dann $X_n^{-d_j} g_j(X_1, \ldots, X_n) + \mathfrak{M}_v = g_j^h(T_1, \ldots, T_{n-1}, 1) \neq 0$, also $v(g_j) = -d_j$ und

$$\frac{g_j}{s(v(g_j))} + \mathfrak{M}_v = \frac{g_j}{X_n^{d_j}} + \mathfrak{M}_v = g_j^h(T_1, \ldots, T_{n-1}, 1).$$

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $a^{(i)}$ eine Anordnung P_i von $K(T_1, \ldots, T_{n-1})$ mit $g_{r_i}^h(T,1), \ldots, g_{r_{i+1}-1}^h(T,1) \in P_i$ bzw. $g_{r_i}^h(T,1), \ldots, g_{r_{i+1}-1}^h(T,1) \notin P_i$, wobei für $i = 0$ der erste Fall eintritt. Das Liften dieser Anordnungen entlang s unter der Vorzeichenverteilung $\sigma(i\mathbb{Z}) = \operatorname{sign}_{P_i}(g_{r_i}^h(T,1))$ liefert eine $\sum K_+ F^{2m}$-Semiordnung S von F mit $g_1, \ldots, g_k \in S$. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{c - \sum_1^n X_i^{2m}}{s(v(c - \sum_1^n X_i^{2m}))} + \mathfrak{M}_v &= \frac{c}{X_n^{2m}} - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{X_i}{X_n}\right)^{2m} + \mathfrak{M}_v \\ &= -1 - \sum_{i=1}^{n-1} T_i^{2m} \notin P_0, \end{aligned}$$

ist $c - \sum_1^n X_i^{2m} \notin S$, also insbesondere auch $c - \sum_1^n X_i^{2m} \notin M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k)$. □

Unübersichtlich wird die Situation also, wenn in den entsprechenden Graden die g_i^h's gemeinsame Nullstellen haben. In diesem Fall müssen die homogen Anteile niedrigeren Grades mit in Betracht gezogen werden, die allerdings bei weitem keine so offensichtliche Rolle spielen, wie dies bei den höchsten Graden der Fall ist.

Aus Satz 3.15 erhalten wir das folgende

3.18 Korollar *Sei $(K,<)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Sind dann $g_1, \ldots, g_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ linear und ist $S(g_1, \ldots, g_k) \neq \emptyset$ und kompakt, so ist $M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k)$ archimedisch, und es gilt für alle $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$*

$$f_{\big| S(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in M_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k).$$

Beweis: Sei ohne Einschränkung $0 \in S(g_1, \ldots, g_k)$. Wir zeigen, daß die Bedingung $\mathfrak{p}_1^{2m}(g_1, \ldots, g_k)$ erfüllt ist. Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann gibt es ein $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $0 \leq g_1^h(b), \ldots, 0 \leq g_k^h(b)$. Dann ist $g_i(\lambda b) = g_i(0) + \lambda g_i^h(b) \geq 0$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und daher $\{\lambda b \mid \lambda \in K_+\} \subset S(g_1, \ldots, g_k)$, was im Widerspruch zur Kompaktheit von $S(g_1, \ldots, g_k)$ steht. $\square$

Zum Abschluß dieses Abschnitts geben wir anhand einfacher geometrischer Gebilde einige Beispiele für mögliche Moduldarstellungen. Im folgenden sei $(K, <)$ stets ein archimedisch angeordneter Körper.

3.19 Beispiel Ist $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ strikt positiv auf der n-dimensionalen *Einheitskugel* der $2m$-Norm

$$D_n^{2m} = \Big\{a \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i^{2m} = 1\Big\},$$

so gibt es g_i, $h_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und $a_i, b_i \in K_+$ mit

$$f = \sum a_i g_i^{2m} + \Big(1 - \sum_{i=1}^n X_i^{2m}\Big) \cdot \sum b_i h_i^{2m}.$$

Denn: Offensichtlich ist Bedingung $\mathfrak{p}_0^{2m}(1 - \sum_1^n X_i^{2m})$ erfüllt.

Insbesondere ist $M_<^{2m}(c - \sum_1^n X_i^{2m})$ archimedisch. Damit kann Bemerkung 3.10 wie angegeben verallgemeinert werden.

3.20 Beispiel Ist $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ strikt positiv auf dem n-dimensionalen *Einheitswürfel*

$$W_n := \Big\{a \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i \;\; 0 \le a_i \le 1\Big\},$$

so gibt es g_{ij}, $h_{ij} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und $a_{ij}, b_{ij} \in K_+$ mit

$$\begin{aligned} f = \sum a_{0j} g_{0j}^{2m} + X_1 \cdot \sum a_{1j} g_{1j}^{2m} + \cdots + X_n \cdot \sum a_{nj} g_{nj}^{2m} + \\ + (1 - X_1) \cdot \sum b_{1j} h_{1j}^{2m} + \cdots + (1 - X_n) \cdot \sum b_{nj} h_{nj}^{2m}. \end{aligned}$$

Falls m ungerade ist, finden wir auch $f_{ij} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und $a_{ij} \in K_+$ mit

$$f = \sum f_{0j}^{2m} + X_1^m(1 - X_1^m) \cdot \sum a_{1j} f_{1j}^{2m} + \cdots + X_n^m(1 - X_n^m) \cdot \sum a_{nj} f_{nj}^{2m}.$$

Denn: Im ersten Fall ist die Voraussetzung von Korollar 3.18 gegeben, und im zweiten Fall ist $\mathfrak{p}_0^{2m}(X_1^m(1 - X_1^m), \ldots, X_n^m(1 - X_n^m))$ erfüllt (und in beiden Fällen ist W_n die von den entsprechenden Polynomen erzeugte basisabgeschlossene Menge).

3.21 Beispiel Ist $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ strikt positiv auf dem $(n-1)$-dimensionalen *Standardsimplex*

$$\Delta_{n-1} := \Big\{a \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i \;\; 0 \le a_i \text{ und } \sum_{i=1}^n a_i = 1\Big\},$$

so gibt es $f_{ij}, h_j \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und $a_{ij}, b_j \in K_+$ mit

$$f = \sum a_{0j} f_{0j}^{2m} + \\ + X_1 \cdot \sum a_{1j} f_{1j}^{2m} + \cdots + X_n \cdot \sum a_{nj} f_{nj}^{2m} + (1 - \sum_{i=1}^{m} X_i) \cdot \sum b_j h_j^{2m}$$

Denn: Die Voraussetzung von Korollar 3.18 ist gegeben.

3.3 Spezialfälle

3.3.1 Kurven

Ist tr.deg$(A/K) = 1$, d.h. $V(\mathfrak{A})$ eine Kurve, so erhalten wir für eine spezielle Klasse von Koeffizientenkörpern, den sogenannten erblich euklidischen Körpern, im quadratischen Fall gute Darstellungsmöglichkeiten. Ein Körper K heißt *euklidisch*, wenn K^2 (die Quadrate in K) eine Anordnung von K bilden (die dann natürlich die einzige Anordnung von K ist). K heißt *erblich euklidisch*, wenn er selbst euklidisch ist und zudem jede formal reelle algebraische Erweiterung von K auch euklidisch ist. Zum Beispiel sind alle reell abgeschlossenen Körper erblich euklidisch, da dort jedes positive Element ein Quadrat ist und es keine echten algebraischen formal reellen Erweiterungen gibt.

Für uns zentral ist die folgende Eigenschaft dieser Körper: Ist F ein Funktionenkörper in einer Variablen über einem erblich euklidischen Körper K, so ist F ein SAP-Körper. Daß F die *SAP-Eigenschaft (Strong Aproximation Property)* hat, besagt, daß jede quadratische Semiordnung von F schon eine Anordnung ist. In der Tat gilt hier sogar Äquivalenz im folgenden Sinne: Ist F ein Funktionenkörper in einer Variablen über K, so ist K erblich euklidisch, falls F ein SAP-Körper ist. Mit Funktionenkörper in einer Variablen über K meinen wir endlich erzeugt über K und vom Transzendenzgrad 1 über K. Die beschriebenen Ergebnisse sind in [Pr3], §9, zu finden.

Dies ist jedoch eine für den quadratischen Fall spezifische Situation: Für $m > 1$ existieren, wie in [Be3] (Theorem 4.5) gezeigt wird, im allgemeinen Semiordnungen $2m$-ter Stufe von F, die keine Anordnungen sind, auch wenn K ein erblich euklidischer Körper ist. (Um dies auszuschließen, müßte zudem $\sum F^2 = \sum F^{2m}$ gelten.)

3.22 Satz *Sei K ein erblich euklidischer Körper und $A = K[X_1, \ldots, X_m]/\mathfrak{A}$ vom Transzendenzgrad 1 über K. Dann gilt für alle $f, g_1, \ldots, g_k \in A$*

$$f_{|S(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \cdot f \in 1 + M^2(g_1, \ldots, g_k) \quad \textit{für ein } \sigma \in \sum A^2.$$

Ist zudem $K \subset \mathbb{R}$ und $S(g_1, \ldots, g_k)$ kompakt, so ist $M^2(g_1, \ldots, g_k)$ archimedisch, d.h. es gilt

$$f_{|S(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in M^2(g_1, \ldots, g_k).$$

Beweis: Die zweite Behauptung folgt mit Lemma 3.9 aus der ersten. Zu dieser zeigen wir, daß jede maximale quadratische Semiordnung S von A schon eine Anordnung ist, und erhalten daraus dann mittels des Tarski-Prinzips wie im Beweis von Satz 1.12

$$\left\{f \in A \mid f_{|S(g_1,\ldots,g_k)} > 0\right\} = \bigcap_{P \in X_M} P^+ = \bigcap_{P \in X_M^{max}} P^+ = \bigcap_{S \in (Y_M^T)^{max}} S^+ = \bigcap_{S \in Y_M^T} S^+$$

für $T := \sum A^2$.

Sei also $S \in (Y^T)^{max}$. Wir setzen $B := A/S^0$, $F := \text{Quot}(B)$ sowie $\overline{p} := p + S^0$ für $p \in A$ Dann ist $\overline{S} := F^2 \cdot \{\overline{s} \mid s \in S\}$ eine quadratische Semiordnung von F. F/K ist eine formal reelle, endlich erzeugte Erweiterung mit $\text{tr.deg}(F/K) \leq 1$. Ist die Erweiterung algebraisch, so ist F euklidisch und damit $\overline{S} = F^2$ eine Anordnung. Mit $\text{tr.deg}(F/K) = 1$, also F ein Funktionenkörper in einer Variablen über K, ist nach dem eingangs Erwähnten $\overline{S}$ ebenfalls schon eine Anordnung von K. Da S maximal ist, folgt $S = \{p \mid \overline{p} \in \overline{S}\}$ und somit auch, daß S eine Anordnung von A ist. $\square$

3.23 Beispiel Zur Illustration von Satz 3.22 betrachten wir die Situation im Polynomring $\mathbb{R}[X]$. Es seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k$. Ist $f \in \mathbb{R}[X]$ strikt positiv auf den Intervallen $[a_i, b_i]$, so folgt mit Satz 3.22

$$f \in \sum \mathbb{R}[X]^2 + (X - a_i) \sum \mathbb{R}[X]^2 + (b_i - X) \sum \mathbb{R}[X]^2.$$

Mittelt man diese Darstellungen, so findet man f_j, g_{ij}, $h_{ij} \in \mathbb{R}[X]$ mit

$$\begin{aligned} f = \sum f_j^2 + (X - a_1) \sum g_{1j}^2 + \cdots + (X - a_k) \sum g_{kj}^2 + \\ + (b_1 - X) \sum h_{1j}^2 + \cdots + (b_k - X) \sum h_{kj}^2. \end{aligned}$$

Ähnliches läßt sich sogar für unbeschränkte Intervalle zeigen: Sei f strikt positiv auf $[0, \infty)$. Wir zerlegen f über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren:

$$f = a \prod_1^n (X + \alpha_j) \prod_1^m (X + c_j)(X + \overline{c}_j)$$

mit $a, \alpha_j \in \mathbb{R}$ und $c_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Schreiben wir $\prod_1^m (X + c_j) = p + iq$ mit $p, q \in \mathbb{R}[X]$, so erhalten wir $\prod_1^m (X + c_j)(X + \overline{c}_j) = p^2 + q^2$. Wegen $f > 0$ auf $[0, \infty)$ haben wir $0 < \alpha_j$ und $0 < a$, somit also $a \prod_1^n (X + \alpha_j) = \sum_0^n a_j X^j$ mit $0 < a_j$. Es folgt

$$f = (p^2 + q^2)\Big(\sum_{2|j} a_j X^j + X \cdot \sum_{2\nmid j} a_j X^{j-1}\Big) \in \sum \mathbb{R}[X]^2 + X \sum \mathbb{R}[X]^2.$$

Durch geeignete Substitution ergibt sich $f \in \sum \mathbb{R}[X]^2 + (X - a) \sum \mathbb{R}[X]^2$ für $f > 0$ auf $[a, \infty)$ und $f \in \sum \mathbb{R}[X]^2 + (b - X) \sum \mathbb{R}[X]^2$ für $f > 0$ auf $(-\infty, b]$.

3.24 Beispiel Wie schon angedeutet, läßt sich Satz 3.22 nicht auf $m > 1$ verallgemeinern. Wir machen dies an einem einfachen Beispiel deutlich: Sei $A = \mathbb{R}[X]$ und $g := 1-X^2$, $f := 2 - X^4$. $S(g) = [-1, 1]$ ist kompakt, und $f > 0$ auf $S(g)$, aber es ist $f \notin M^6(g)$. Wir betrachten dazu die Gradbewertung

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}(X) &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ p/q &\longmapsto \deg(q) - \deg(p) \end{aligned}$$

für $p, q \in \mathbb{R}[X]$, den Schnitt $s(1) = X^{-1}$ zu v und den Restklassenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{O}_v &\longrightarrow K_v = \mathbb{R}, \\ h &\longmapsto \lim_{a\to\infty} h(a). \end{aligned}$$

Sei $\sigma : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ eine Vorzeichenverteilung mit $\sigma(\overline{2}) = -1$ und $\sigma(\overline{4}) = 1$. Für η gibt es keine Wahl. Es ist $v(g) = -2$ und $v(f) = -4$, somit $\pi(g\cdot(s(v(g))^{-1}) = \pi(f \cdot (s(v(f))^{-1}) = -1$ und daher $g \in S(\eta, \sigma)$ und $f \notin S(\eta, \sigma)$. Wegen $M^6(g) \subset S(\eta, \sigma)$ folgt die Behauptung.

3.3.2 Kompakte Varietäten

Wörmann hat in [Wö2] gezeigt, daß im Falle einer kompakten Varietät $V(\mathfrak{A})$ schon für alle $m \in \mathbb{N}$ die Präordnung $T^{2m}_<$ archimedisch ist. Er argumentiert trickreich mit von ihm gezeigten, sogenannten verallgemeinerten Hilbertschen Identitäten. Wir werden hier einen alternativen Beweis führen, der auf Satz 2.10 basiert.

3.25 Satz *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper und $A = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$. Dann ist $V(\mathfrak{A})$ genau dann kompakt, wenn $T^{2m}_<$ für alle $m \in \mathbb{N}$ archimedisch ist. Insbesondere gilt für alle $f, g_1, \ldots, g_k \in A$*

$$f_{\big|S(g_1,\ldots,g_k)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} M^{2m}_<(g_1, \ldots, g_k).$$

Beweis: Wir setzten $x_i := X_i + \mathfrak{A}$.

Aus der Archimedizität von $T^{2m}_<$ folgt offensichtlich die Kompaktheit von $V(\mathfrak{A})$: Denn ist $c - \sum_1^n x_i^2 \in T^{2m}_<$ für ein $c \in \mathbb{N}$, so ist $c - \sum_1^n a_i^2 \geq 0$ für alle $a \in V(\mathfrak{A})$, was sich nur mit der Kompaktheit von $V(\mathfrak{A})$ verträgt.

Um umgekehrt aus der Kompaktheit die Archimedizität von $T^{2m}_<$ zu folgern, weisen wir wieder die Bedingung in Lemma 3.9 für $g = 1$, also $S(g) = V(\mathfrak{A})$, nach. Sei $f \in A$ mit $f > 0$ auf $V(\mathfrak{A})$. Angenommen, es ist $f \notin S^+$ für ein $S \in Y^{T^{2m}_<}$. Wir setzen $B := A/S^0$, $F := \mathrm{Quot}(B)$, $\overline{p} := p + S^0$ für $p \in A$ und $\overline{S} := F^{2m} \cdot \{\overline{s} \mid s \in S\}$. $\overline{S}$ ist eine $\sum K_+F^{2m}$-Semiordnung, die $-\overline{f}$ enthält. Nach Satz 2.10 gibt es somit insbesondere eine Anordnung P von F, die K_+ fortsetzt. Sei nun $\mathfrak{B} = (p_1, \ldots, p_r)$ der Kern der Projektion $K[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow B$, $X_i \mapsto \overline{x}_i$, also $B = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{B}$. Wir erhalten

$$(\mathbb{R}, <) \equiv_{\mathcal{L}(K)} \widetilde{(F, P)} \models \exists\, v\ (\, p_1(v) = 0 \wedge \cdots \wedge p_r(v) = 0\,),$$

d.h. die Varietät $V(\mathfrak{B})$ ist nicht leer. Natürlich ist $V(\mathfrak{B}) \subset V(\mathfrak{A})$, und damit dann $\overline{f} > 0$ auf $V(\mathfrak{B})$ (insbesondere ist $\overline{f} \neq 0$) und $V(\mathfrak{B})$ ebenfalls kompakt. Es gibt daher ein $c \in \mathbb{N}$ mit $c^{-1} < \overline{f} < c$ auf $V(\mathfrak{B})$. Mit dem Positivstellensatz ($T = \sum K_+B^2$) folgt $t \cdot \overline{f}, t(c \pm \overline{f}), t(\overline{f} \pm c^{-1}) \in \sum K_+B^2$ für ein $t \in \sum K_+B^2$, also

$$\overline{f}, c \pm \overline{f}, \overline{f} \pm c^{-1} \in \frac{1}{t} \cdot \sum K_+B^2 \subset \sum K_+F^2,$$

und damit schließlich auch

$$c \pm \overline{f}^{-1} = c\overline{f}^{-1} \cdot (\overline{f} \pm c^{-1}) \in \sum K_+F^2.$$

Aus Satz 2.10 (ii) und (iii) folgt dann

$$\overline{f} \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \sum K_+F^{2m},$$

im Widerspruch zu $\overline{f} \notin \overline{S}$. Wir haben also $f \in S^+$ für alle $S \in Y^{T^{2m}_<}$. Nach Lemma 1.8 sind daher die Voraussetzungen für Satz 3.9 gegeben.

Mit $T^{2m}_<$ sind natürlich auch alle $T^{2m}_<$-Moduln archimedisch. Die zweite Behauptung folgt somit aus Satz 3.4. $\square$

Kapitel 4

Reduktionen der Schmüdgen-Wörmann-Darstellungen

In diesem abschließenden Kapitel zeigen wir, daß die Anzahl der in den Darstellungen von Schmüdgen und Wörmann vorkommenden Produkte $g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k}$, also die Anteile der Darstellung, die zusätzlich zu den entsprechenden Modulelementen benötigt werden, um etwa die Hälfte reduziert werden kann. Die Reduktion kann allerdings nicht willkürlich durchgeführt werden, sondern bedarf einer gewissen Ausgewogenheit, d.h. alle Funktionen g_i müssen gleichmäßig berücksichtigt werden.

Dieses Ergebnis ist in Zusammenarbeit mit Professor Prestel entstanden. Der Autor hat zuerst, basierend auf einer Beobachtung von Bröcker[1], gezeigt, daß im Fall von zwei Funktionen g_1, g_2 bei Kompaktheit von $S(g_1, g_2)$ immer die Moduldarstellung möglich ist. Professor Prestel hat bemerkt, daß dieses Phänomen nur der Anfang einer allgemeineren Gesetzmäßigkeit ist, die zu der Reduktion führt, die wir hier entwickeln. Der Autor hat diese dann präzisiert und auf den höherstufigen Fall übertragen.

Zunächst müssen wir einige Begriffe und Ergebnisse in unseren Kontext übertragen. Sei im folgenden F ein Körper und T eine Präordnung von F.

Zu zwei Formen $\varrho_1 := \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ und $\varrho_2 := \langle b_1, \ldots, b_l \rangle$ definieren wir ihre *(orthogonale) Summe* $\varrho_1 \perp \varrho_2$ und ihr *Produkt* $\varrho_1 \otimes \varrho_2$ wie üblich durch

$$\begin{aligned} \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \perp \langle b_1, \ldots, b_l \rangle &:= \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \rangle, \\ \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \otimes \langle b_1, \ldots, b_l \rangle &:= \langle a_1 b_1, \ldots, a_i b_j, \ldots, a_k b_l \rangle. \end{aligned}$$

Jeder Form $\varrho := \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ ordnen wir ihre *Signaturabbildung* $\widehat{\varrho}$ zu:

$$\begin{aligned} \widehat{\varrho} : Z_T^\star &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \chi &\longmapsto \operatorname{sign}_\chi(\varrho) := \sum_{i=1}^{k} \chi(a_i). \end{aligned}$$

[1] In [Br], Folgerung 2.13 wird gezeigt, daß eine dreielementige Form, die bzgl. einer Semiordnung definit ist, auch bzgl. einer Anordnung definit ist.

Offensichtlich gelten

$$\widehat{\varrho_1 \perp \varrho_2} = \widehat{\varrho}_1 + \widehat{\varrho}_2 \quad \text{und} \quad \widehat{\varrho_1 \otimes \varrho_2} = \widehat{\varrho}_1 \cdot \widehat{\varrho}_2.$$

Ist $\widehat{\varrho} = 0$, so nennen wir ϱ *T-hyperbolisch*. Natürlich ist für $a_1, \ldots, a_k \in \dot{F}$ die Form $\langle a_1, -a_1, a_2, -a_2, \ldots, a_k, -a_k \rangle$ T-hyperbolisch.

Wir nennen ϱ_1 und ϱ_2 *T-isometrisch*, in Zeichen $\varrho_1 \cong_T \varrho_2$, falls sie die gleiche Länge haben und die gleiche Signaturabbildung induzieren, d.h. $k = l$ und $\widehat{\varrho_1} = \widehat{\varrho_2}$ gilt.

Formen der Gestalt

$$\langle 1, a_1, a_1^2, \ldots, a_1^{2m-1} \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_k, a_k^2, \ldots, a_k^{2m-1} \rangle =: \langle\!\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\!\rangle^m$$

bezeichnen wir als *m-stufige Pfisterformen*. Die erststufigen Pfisterformen stimmen mit den üblichen Pfisterformen überein. Wir verallgemeinern nun ein für diese bekanntes Ergebnis:

4.1 Proposition *Sei T eine Präordnung der Stufe $2m$ und ϱ eine m-stufige Pfisterform. Dann gilt:*

$$\varrho \textit{ ist } T\textit{-isotrop} \quad \Rightarrow \quad \varrho \textit{ ist } T\textit{-hyperbolisch.}$$

Beweis: Ist $\varrho := \langle\!\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\!\rangle^m$ T-isotrop, so gibt es $t_e \in T$, $e \in \{0, \ldots, 2m-1\}^k$, mit $\sum_e t_e \prod_1^k a_i^{e_i} = 0$, wobei für mindestens ein e' gilt $t_{e'} \neq 0$. Sei $\chi \in Z_T^*$. Aufgrund von $T \subset P_\chi$ ist P_χ eine Ordnung der Stufe $2m$. Daher folgt $a_i \notin P_\chi$ für mindestens ein i, denn sonst wäre gemäß der vorausgesetzten Identität

$$-1 = \frac{-a_1^{e'_1} \cdots a_k^{e'_k}}{a_1^{e'_1} \cdots a_k^{e'_k}} = \frac{\sum_{e \neq e'} t_e \prod_1^k a_i^{e_i}}{a_1^{e'_1} \cdots a_k^{e'_k}} \in P_\chi.$$

Ohne Einschränkung sei $a_1 \notin P_\chi$. Dann gilt $\chi(a_1) \neq 1$, und wegen $T \subset \mathrm{Kern}(\chi)$ folgt $\chi(a_1)^{2m} = \chi(a_1^{2m}) = 1$, d.h. $\chi(a_1)$ ist eine $2m$-te Einheitswurzel. Setzen wir $\varrho_1 := \langle\!\langle a_2, \ldots, a_k \rangle\!\rangle^m$, so ergibt sich aus der Multiplikativität von $\widehat{\cdot}$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varrho}(\chi) &= \widehat{\langle\!\langle a_1 \rangle\!\rangle}(\chi) \cdot \widehat{\varrho_1}(\chi) = \left(\sum_{i=0}^{2m-1} \chi(a_1^i) \right) \cdot \widehat{\varrho_1}(\chi) = \left(\sum_{i=0}^{2m-1} \chi(a_1)^i \right) \cdot \widehat{\varrho_1}(\chi) \\
&= \frac{\chi(a_1)^{2m} - 1}{\chi(a_1) - 1} \cdot \widehat{\varrho_1}(\chi) = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Wir zitieren Theorem 4.10 aus [Be-Ro]:

4.2 Satz *Sind ϱ_1 und ϱ_2 Formen, so gilt*

$$\varrho_1 \cong_T \varrho_2 \quad \Rightarrow \quad M_T(\varrho_1) = M_T(\varrho_2).$$

Als Korollar erhalten wir:

4.3 Korollar *Sind ϱ_1 und ϱ_2 Formen, so gilt*

$$\varrho_1 \cong_T \varrho_2 \text{ und } \varrho_1 \ T\text{-isotrop} \quad \Rightarrow \quad \varrho_2 \ T\text{-isotrop.}$$

Beweis: Ist ϱ_1 T-isotrop, so folgt aus Proposition 2.12 $M_T(\varrho_1) = F$. Die T-Isometrie von ϱ_1 und ϱ_2 führt nach dem zitierten Satz zu $M_T(\varrho_2) = F$. Wiederum Proposition 2.12 liefert dann die T-Isotropie von ϱ_2. □

Das folgende Lemma beinhaltet den für die Reduktion wesentlichen Schritt:

4.4 Lemma *Sei T eine Präordnung der Stufe $2m$ und $a_1, \ldots, a_k \in \dot{F}$. Dann gilt für alle Teilmengen $E \subset \{0, \ldots, 2m-1\}^k$ mit $|E| \geq 2^{k-1}m^k + 1$ und $0 \in E$:*

$$\langle\!\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\!\rangle^m \text{ ist } T\text{-isotrop} \quad \Rightarrow \quad \langle a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E \rangle \text{ ist } T\text{-isotrop.}$$

Beweis: Es genügt, den Fall $|E| = 2^{k-1}m^k + 1$ zu behandeln. Wir setzen $E^c := \{0, \ldots, 2m-1\}^k \setminus E$. Dann ist $|E^c| = (2m)^k - (2^{k-1}m^k + 1) = 2^{k-1}m^k - 1$. Sei nun $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\!\rangle^m$ T-isotrop, nach Proposition 4.1 somit T-hyperbolisch. Dann ist

$$\langle\!\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\!\rangle^m \cong_T \langle 1, -1, a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k}, -a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E^c \rangle,$$

da die entsprechenden Signaturabbildungen beide verschwinden und die Länge der Formen gleich ist ($2|E^c| + 2 = 2(2^{k-1}m^k - 1) + 2 = (2m)^k$). Setzen wir $\varrho := \langle a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E \rangle$, so ist

$$\langle a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E \rangle \perp \varrho \cong_T \langle 1, -1, -a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E^c \rangle \perp \varrho,$$

und da $\widehat{\cdot}$ additiv ist, können wir „kürzen“, erhalten also

$$\langle a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E \rangle \cong_T \langle 1, -1, -a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E^c \rangle.$$

Die Form auf der rechten Seite ist offensichtlich T-isotrop, und nach Korollar 4.3 damit dann auch $\langle a_1^{e_1} \cdots a_k^{e_k} \mid e \in E \rangle$. □

Wir wollen nun dieses Lemma auf die in Kapitel 3 betrachtete Situation anwenden. D.h. wir haben zu einem archimedisch angeordneten Körper $(K, <)$ Funktionen $g_1, \ldots, g_k \in A = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{A}$ mit kompakter Menge $S(g_1, \ldots, g_k)$ vorliegen. Nach den Ergebnissen von Schmüdgen-Wörmann wissen wir, daß bei ungeradem m die Präordnung $T_<^{2m}(g_1, \ldots, g_k)$ archimedisch ist. Umständlich ausgedrückt, heißt dies gerade, daß der $T_<^{2m}$-Modul

$$M_<^{2m}(g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k} \mid e \in \{0, \ldots, 2m-1\}^k)$$

archimedisch ist. Nach Satz 3.9 (3) ist dazu äquivalent, daß für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{RI}_<$ und $v \in \Omega(T(\mathfrak{B}))_<^{2m,\infty}$ die Form $\operatorname{reg}(\langle\!\langle \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle\!\rangle^m)$ $(T(\mathfrak{B})_<^{2m})^v$-isotrop ist. Auf diese Formen wollen wir die Reduktion aus Lemma 4.4 anwenden und dann wieder rückwärts auf die Archimedizität des verkleinerten Moduls schließen. Um dabei keine Probleme zu kriegen, darf die Menge $E \subset \{0, \ldots, 2m-1\}^k$ der Exponenten, die zu Produkten gehören, die wir behalten wollen, nicht zu „einseitig" gewählt werden. Zum einen benötigen wir ja die Kompaktheit der zugehörigen Menge

$$S(g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k} \mid e \in E).$$

Diese sichern wir ab, indem wir $g_1, \ldots, g_k$ auf jeden Fall behalten. Auch die 1 brauchen wir. Das nächste Problem entsteht dadurch, daß die Form $\operatorname{reg}(\langle\!\langle \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle\!\rangle^m)$ tatsächlich kleiner werden kann, d.h. gewisse $\overline{g}_i$'s verschwinden. Sind etwa $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_r \in \dot{F}_{\mathfrak{B}}$ und $\overline{g}_{r+1} = \cdots = \overline{g}_k = 0$, so ist $\operatorname{reg}(\langle\!\langle \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k \rangle\!\rangle^m) = \langle\!\langle \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_r \rangle\!\rangle^m$, also wieder eine m-stufige Pfisterform. Aber haben wir E ungünstig gewählt, wollen z.B. viele Produkte entfernen, in denen nur die ersten r Funktionen vorkommen, so könnte es im Extremfall dazu kommen, daß wir aus der $(T(\mathfrak{B})^{2m}_<)^v$-Isotropie von $\langle\!\langle \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_r \rangle\!\rangle^m$ auf die $(T(\mathfrak{B})^{2m}_<)^v$-Isotropie von $\langle 1, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_r \rangle$ schließen müssten, was aber im allgemeinen durch Lemma 4.4 nicht abgedeckt wird. Um die Mengen zu erfassen, bei denen dieses Problem nicht auftritt, führen wir eine ad-hoc-Bezeichnung ein.

Sei also $E \subset \{0, \ldots, 2m-1\}^k$ mit $0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \notin E$ (ε_i bezeichne den i-ten Einheitsvektor). Wir definieren rekursiv, wann wir ein solches E *ausgewogen* nennen: Im Fall $k = 1$ heiße E ausgewogen, falls gilt $|E| \geq m-1$. Im Fall $k > 1$ heiße E ausgewogen, falls gilt $|E| \geq 2^{k-1}m^k - k$ und für $i = 1, \ldots, k$ die Mengen

$$E_i \;:=\; \Big\{ e \in \{0, \ldots, 2m-1\}^{k-1} \mid (e_1, \ldots, e_r, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{0}, e_{r+1}, \ldots, e_k) \in E \Big\}$$

ausgewogen sind.

Nach Konstruktion sind für eine ausgewogene Menge E alle Mengen

$$E_{i_1 i_2 \cdots i_l} := (\cdots((E_{i_1})_{i_2})_{i_3} \cdots)_{i_l} \subset \{0, \ldots, 2m-1\}^{k-l}$$

mit $i_j \in \{1, \ldots, k-j\}$ ausgewogen.

4.5 Satz *Sei $(K, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper und $A := K[X_1, \ldots, X_n]$. Sind $g_1, \ldots, g_k \in A \setminus \{0\}$, so daß $S(g_1, \ldots, g_k)$ kompakt ist, dann gilt für alle ausgewogenen Mengen $E \subset \{0, \ldots, 2m-1\}^k$ die Äquivalenz*

$$M^{2m}_<(g_1, \ldots, g_k, g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k} \mid e \in E) \text{ archimedisch}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$T^{2m}_<(g_1, \ldots, g_k) \text{ archimedisch.}$$

Insbesondere ist für ungerades m der Modul $M^{2m}_<(g_1, \ldots, g_k, g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k} \mid e \in E)$ archimedisch, und es gilt für alle $f \in A$

$$f_{|S(g_1, \ldots, g_k)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in M^{2m}_<(g_1, \ldots, g_k, g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k} \mid e \in E).$$

Beweis: Wir schliessen an die Überlegungen von oben an, die ja gerade die Archimedizität von $T_<^{2m}(g_1,\dots,g_k)$ als Ausgangspunkt haben. Seinen also $\overline{g}_1,\dots,\overline{g}_r\in\dot{F}_{\mathfrak{B}}$, $\overline{g}_{r+1}=\dots=\overline{g}_k=0$ und $\langle\!\langle\,\overline{g}_1,\dots,\overline{g}_r\rangle\!\rangle^m$ $(T(\mathfrak{B})_<^{2m})^v$-isotrop. Nach Voraussetzung ist $E':=E_{k(k-1)\cdots(k-r+1)}\subset\{0,\dots,2m-1\}^r$ ausgewogen, damit also $|E'|\geq 2^{r-1}m^r-r$ und so

$$|E'\cup\{1,\overline{g}_1,\dots,\overline{g}_r\}|\geq(2^{r-1}m^r-r)+(r+1)=2^{r-1}m^r+1.$$

Mit Lemma 4.4 folgt, daß

$$\operatorname{reg}\bigl(\langle 1,\overline{g}_1,\dots,\overline{g}_k,\overline{g}_1^{e_1}\cdots\overline{g}_k^{e_k}\mid e\in E\,\rangle\bigr)=\langle 1,\overline{g}_1,\dots,\overline{g}_r,\overline{g}_1^{e_1'}\cdots\overline{g}_r^{e_r'}\mid e'\in E'\,\rangle$$

$(T(\mathfrak{B})_<^{2m})^v$-isotrop ist. Nach Satz 3.12 (3) ist der Modul $M_<^{2m}(g_1,\dots,g_k,g_1^{e_1}\cdots g_k^{e_k}\mid e\in E\,)$ daher archimedisch. □

Das nächste Beispiel zeigt, daß es immer „vernüftige“, d.h. kleine, ausgewogene Mengen gibt. Im Anschluß daran geben wir noch einige explizite Beispiele.

4.6 Beispiel Zu $m,k\geq 1$ sei

$$E(m,k):=\begin{cases}\bigl\{e\in\{0,\dots,2m-1\}^k\mid 2\leq|e|:=\sum_i e_i\leq\frac{k}{2}(2m-1)\bigr\} & : \ 2\mid k,\\ \bigl\{e\in\{0,\dots,2m-1\}^k\mid 2\leq|e|\leq\frac{1}{2}(k(2m-1)-1)\bigr\} & : \ 2\nmid k.\end{cases}$$

Einige elementare Überlegungen zeigen

$$|E(m,k)|=\begin{cases}(2^{k-1}m^k-k)+\bigl(\frac{1}{2}\cdot\bigl|\{e\mid|e|=\frac{k}{2}(2m-1)\}\bigr|-1\bigr) & : \ 2\mid k,\\ (2^{k-1}m^k-k)-1 & : \ 2\nmid k.\end{cases}$$

Aufgrund von $\frac{k}{2}(2m-1)=\frac{1}{2}((k-1)(2m-1)-1)+m$ und $\frac{1}{2}(k(2m-1)-1)=\frac{k-1}{2}(2m-1)+(m-1)$ gilt daher für $k>1$ und $i=1,\dots,k$

$$E(m,k)_i\subset E(m,k-1).$$

Es folgt induktiv, daß für $2\nmid k$ jede Obermenge $E(m,k)\subsetneqq E\subset\{0,\dots,2m-1\}^k$ ausgewogen ist und für $2\mid k$ schon $E(m,k)$. Im Fall von ungeradem k haben wir also die Existenz $(2^{k-1}m^k-k)$-elementiger ausgewogener Mengen gezeigt, da jede jede echte Vereingung $E(m,k)\cup\{e'\}$ von dieser Kardinalität ist. Für gerades $k>2$ ist schon $|E(m,k)|>2^{k-1}m^k-k$, also $E(m,k)$ nicht optimal. Allerdings kann $E(m,k)$ in diesem Fall noch geeignet verkleinert werden, ohne daß die Ausgewogenheit verloren geht. Wir verzichten jedoch darauf, dies hier auszuführen.

4.7 Beispiel Im quadratischen Fall ($m = 1$) erhalten wir $2^{k-1}m^k - k = 0, 1, 4$, falls $k = 2, 3, 4$, also aus der Kompaktheit von $S(g_1, \dots, g_k)$ die Archimedizität der Moduln

$$\begin{gathered}
M^2_<(g_1, g_2), \\
M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_1g_2), \\
M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_1g_3), \\
M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_2g_3), \\
M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_1g_2g_3), \\
M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, g_2g_3, g_3g_4, g_1g_4), \\
M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, g_2g_3, g_3g_4, g_1g_2g_3g_4), \\
M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2g_3, g_1g_2g_4, g_1g_3g_4, g_2g_3g_4), \\
\vdots
\end{gathered}$$

Dagegen erhält man z.B. *nicht* die Archimedizität von

$$M^2_<(g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, g_1g_3, g_1g_4, g_1g_3g_4).$$

Zwar ist die Anzahl der Produkte hinreichend, aber die Menge E_1 leer, und um den Satz anzuwenden zu können, müßte sie mindestens ein Element enthalten.

Für $m = 3$, dem ersten höherstufigen Fall, ist $2^{k-1}m^k - k = 2, 16$, falls $k = 1, 2$. Die Kompaktheit von $S(g_1, \dots, g_k)$ führt also z.B. zur Archimedizität der Moduln

$$\begin{gathered}
M^6_<(g_1, g_1^2, g_1^3), \\
M^6_<(g_1, g_2, g_1^2, g_2^2, g_1^3, g_2^3, g_1^4, g_2^4, g_1^5, g_2^5, g_2g_1^2, g_1g_2^2, g_2g_1^3, g_1g_2^3, g_2g_1^4, g_1g_2^4, g_2g_1^5, g_1g_2^5), \\
\vdots
\end{gathered}$$

Man könnte angesichts von Satz 4.5 vermuten, daß durch die Kompaktheit von $S(g_1, \dots, g_k)$ erzwungen wird, daß der Modul $M^2_<(g_1, \dots, g_k, g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k} \mid e \in E)$ schon mit der Präordnung $T^2_<(g_1, \dots, g_k)$ übereinstimmt, d.h. daß gilt $g_1^{e_1} \cdots g_k^{e_k} \in M^2_<(g_1, \dots, g_k)$ für alle $e \in E$. Daß dem im allgemeinen nicht so ist, zeigt das folgende Beispiel:

4.8 Beispiel Es seien $g_1 := Y(1-Y)(3+X)$, $g_2 := 1 - X^2 \in \mathbb{R}[X, Y] = A$. Dann ist $S(g_1, g_2) = [-1, 1] \times [0, 1]$ beschränkt. Wir betrachten die Bewertung

$$\begin{aligned}
v : \mathbb{R}(X, Y)^\times &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\
Y^e \cdot f/g &\longmapsto e,
\end{aligned}$$

für $f, g \in \mathbb{R}[X, Y]$ mit $Y \nmid fg$, und den Schnitt s zu v mit $s(1) = Y$. Es ist $\mathbb{R}(X, Y)_v = \mathbb{R}(T)$ mit über $\mathbb{R}$ transzendentem $T := X + \mathfrak{M}_v$. Wir haben $v(g_1) = 1$ und $v(g_2) = 0$, also $v(g_1 \cdot g_2) = 1$. Mit $g_i^* := g_i s(v(g_i))^{-1} + \mathfrak{M}_v$ ergibt sich $g_1^* = 3 + T$, $g_2^* = 1 - T^2$ und $(g_1 \cdot g_2)^* = (3+T)(1-T^2)$. Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$P_{a+} := \left\{ (T-a)^k \cdot \frac{f}{g} \mid k \in \mathbb{Z},\ f, g \in \mathbb{R}[T],\ (T-a) \nmid fg \text{ und } \frac{f(a)}{g(a)} > 0 \right\}$$

eine Anordnung von $\mathbb{R}(T)$. Wir wählen als Vorzeichenverteilung $\sigma(\overline{0}) = \sigma(\overline{1}) := 1$ und setzen $\eta(\overline{0}) := P_{0+}$ und $\eta(\overline{1}) := P_{2+}$. Dann ist $g_1^*(2) = 5 > 0$, $g_2^*(0) = 1 > 0$ und $(g_1 \cdot g_2)^*(2) = -3 < 0$, d. h. $g_1, g_2 \in S(\eta, \sigma)$, aber $g_1 \cdot g_2 \notin S(\eta, \sigma)$. Insbesondere gilt daher $g_1 \cdot g_2 \notin M^2(g_1, g_2)$.

Literatur

[An-Br-Ru] C. ANDRADAS, L. BRÖCKER und J. M. RUIZ: *Constructible Sets in Real Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 33 (1996), Springer

[Ar] E. ARTIN: *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5 (1927), 100–115

[Be1] E. BECKER: *Summen n-ter Potenzen in Körpern*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 307/308 (1979), 8–30

[Be2] E. BECKER: *Partial orders on a field and valuation rings*, Communications in Algebra 7 (1979), 1933–1976

[Be3] E. BECKER: *Local Global Theorems for Diagonal Forms of Higher Degree*, Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 318 (1980)

[Be4] E. BECKER: *Valuations and real places in the theroy of formally real fields* in *Géométrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques, Proceedings Rennes 1981*, Lecture Notes in Mathematics 959 (1982), Springer, 1–40

[Be-Br] E. BECKER und L. BRÖCKER: *On the Description of the Reduced Wittring*, Journal of Algebra 52 (1978), 328–346

[Be-Ha-Ro] E. BECKER, J. HARMAN und A. ROSENBERG: *Signatures of fields and extension theory*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 330 (1982), 53–75

[Be-Ro] E. BECKER und A. ROSENBERG: *Reduced Forms and Reduced Witt Rings of Higher Level*, Journal of Algebra 92 (1985), 477–503

[Be-Schw] E. BECKER und N.SCHWARTZ: *Zum Darstellungssatz von Kadison-Dubois*, Archiv der Mathematik Vol 40 (1983), 421–428

[Berr] R. BERR: *The Intersection Theorem for Orderings of Higher Level*, Manuscripta Math. 75 (1992), 273–277

[Berr-Wö] R. BERR und T. WÖRMANN: *Positive polynomials and tame preorderings*, Preprint (1998)

[Bou] N. BOURBAKI: *Elements de Mathematique, Algebre Commutative*, Hermann, Paris (1964)

[Br] L. BRÖCKER: *Zur Theorie der quadratischen Formen über formal reellen Körpern*, Mathematische Annalen 210 (1974), 233–256

[Du] D. W. DUBOIS: *A note on David Harrisons theory of preprimes*, Pacific Journal of Mathematics Vol 21 (1967), 15–19

[Har-Wr] G. H. HARDY und E. W. WRIGHT: *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1960

[Ka] R. V. KADISON: *A representation theory for commutative topological algebra*, Memoirs of the American Mathematical Society No. 7 (1951)

[Kne-Sch] M. KNEBUSCH und C. SCHEIDERER: *Einführung in die reelle Algebra*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg (1989)

[Pr1] A. PRESTEL: *Quadratische Semi-Ordnungen und quadratische Formen*, Mathematische Zeitschrift 133 (1973), 196–205

[Pr2] A. PRESTEL: *A Local-Global Principle for Quadratic Forms*, Mathematische Zeitschrift 142 (1975), 91–95

[Pr3] A. PRESTEL: *Lectures on Formally Real Fields*, Lecture Notes in Mathematics 1093 (1984), Springer, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo

[Pu] M. PUTINAR: *Positive Polynomials on Compact Semi-Algebraic Sets*, Indiana University Mathematics Journal 42/3 (1993), 969–984

[Pu-Va] M. PUTINAR and F.-H. VASILESCU: *Solving Moment Problems by Dimensional Extension*, Preprint (1999)

[Schm] K. SCHMÜDGEN: *The K-Moment Problem for Compact Semi-Algebraic Sets*, Mathematische Annalen 289 (1991), 203–206

[Ste] G. STENGLE: *A Nullstellensatz and a Postivstellensatz in Semialgebraic Geometry*, Mathematische Annalen 207 (1974), 87–97

[Wö1] T. WÖRMANN: *Short Algebraic Proofs of the Theorems of Schmuedgen and Pólya*, Preprint (1996)

[Wö2] T. WÖRMANN: *Strikt positive Polynome in der semialgebraischen Geometrie*, Dissertation an der Universität Dortmund (1998)

Symbole

Stichworte