Robert Denk Juli 1998

Proseminar Sommersemester 1998
Einige Bemerkungen über gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Was sind Differentialgleichungen?

Die Lösung der Gleichung

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

ist eine (reelle oder komplexe) Zahl. (Welche?) In der linearen Algebra sucht man gewöhnlich als Lösungen ein Zahlentupel, d.h. einen Vektor des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Bei einer *Differentialgleichung* hingegen sucht man nicht nach einer Zahl oder einem Vektor, sondern nach einer Funktion, die eine bestimmte Gleichung erfüllt. Das einfachste Beispiel einer Differentialgleichung ist wohl

$$(1) \quad y'(t) = y(t)\,.$$

Gesucht ist hier also nach einer Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder einer Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die einmal differenzierbar ist und die für alle Werte $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung (1) erfüllt. Wer sich ein wenig an die Analysis erinnert, wird wissen, daß die Funktion

$$y(t) = e^t$$

beide Bedingungen erfüllt. Es gilt nämlich $y'(t) = e^t = y(t)$. Aber dies ist nicht die einzige Lösung. Auch die Funktion $y(t) = 2e^t$ erfüllt dieselbe Differentialgleichung (1). Somit ist dies hier eine Differentialgleichung, die lösbar ist, deren Lösung aber nicht eindeutig ist.

Versieht man jedoch die Gleichung (1) mit der *Anfangsbedingung*

$$(2) \quad y(0) = 2\,,$$

so sieht man, daß jetzt genau eine Lösung existiert, die sowohl die Gleichung (1) als auch die Bedingung (2) erfüllt (nämlich $y(t) = 2e^t$). Man sagt dann, daß das *Anfangswertproblem* (1)–(2) eindeutig lösbar ist.

Weitere Beispiele von Differentialgleichungen sind etwa

$$y''(t) = \sqrt{y'(t)}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

mit reellen Konstanten a, b und c und einer Funktion f. Viele weitere Beispiele kann man im nächsten Abschnitt finden.

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung schaut folgendermaßen aus:

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall. Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung der Form

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0\,, \tag{3}$$

wobei $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist. Dabei ist eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ gesucht, die die Gleichung (3) für alle $t \in I$ erfüllt. (Das heißt vor allem auch, daß $y(t)$ differenzierbar sein muß bis zur Ordnung n.) Die Differentialgleichung (3) heißt eine *Differentialgleichung n-ter Ordnung*, da Ableitungen von $y(t)$ bis zur n-ten Ableitung auftauchen.

Bemerkung. In der obigen Definition wurde die Funktion F und die Lösung y mit Werten in $\mathbb{R}$ betrachtet. In vielen Fällen (auch oft bei unserem Proseminar) ist es günstig, auch komplexwertige Funktionen und Konstanten zuzulassen. So z.B. ist die Funktion $y(t) = e^{it}$ (dabei ist $i^2 = -1$) eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + y(t) = 0\,.$$

Es ist daher auch nicht schlecht (soll heißen notwendig), sich an einige wichtige Eigenschaften der komplexen Zahlen zu erinnern. Insbesondere werden wir im Verlauf des Proseminars öfter mal die Formel

$$e^{it} = \cos t + i\,\sin t$$

brauchen.

2. Klassifizierung von Differentialgleichungen

In der allgemeinen Form (3) kommt eine Differentialgleichung selten vor. Da es keinen allgemeinen Lösungsansatz für Differentialgleichungen gibt, ist es wichtig, die Differentialgleichungen in Klassen einzuteilen. Man unterscheidet die folgenden Typen:

(i) *Explizit nach $y^{(n)}(t)$ aufgelöste Differentialgleichungen:* Hier ist die Gleichung (3) nach der höchsten vorkommenden Ableitungen von $y(t)$ aufgelöst, hat also die Form

$$y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), \ldots, y^{n-1}(t))\,. \tag{4}$$

Wir werden nur solche Differentialgleichungen betrachten.

(ii) *Lineare Differentialgleichungen:* Hier ist die Funktion f in (4) linear in $y(t)$ und ihren Ableitungen. So sind z.B. die Differentialgleichungen

$$y'(t) = t^2\, y(t) \quad \text{und} \quad y''(t) = \sqrt{t}\, y'(t) - y(t)$$

linear, die Differentialgleichungen

$$y'(t) = 3y^2(t) \quad \text{und} \quad y'''(t) = y'(t) + t\sqrt{y(t)}$$

aber nicht. Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung lautet

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = b(t)\,. \tag{5}$$

Dabei heißen die Funktionen $a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$ die *Koeffizienten* der Differentialgleichung.

(iii) *Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:* Hier ist die Differentialgleichung linear, und zusätzlich hängen die Koeffizienten der Differentialgleichung nicht von t ab. Beispiele sind

$$y''(t) - 3y'(t) = 0 \quad \text{und} \quad y''(t) - 4y'(t) + y(t) = e^t\,.$$

(iv) *Homogene Differentialgleichungen:* Das sind lineare Differentialgleichungen, bei denen kein Term auftaucht, der nicht bei einem $y(t)$, $y'(t)$ oder einer höheren Ableitung steht („mit 0 auf der rechten Seite"). Beispiele:

$$y''(t) + ty(t) = 0\,, \quad y'(t) = 5y(t)\,.$$

Beispiele für inhomogene Differentialgleichungen sind

$$y''(t) + t = 0 \qquad y''(t) + 3y(t) = 5\sqrt{t}\,.$$

(v) *Differentialgleichungen mit getrennten Variablen:* Hier läßt sich die rechte Seite von (4) in der Form
$f_1(t) \cdot f_2(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ schreiben. Beispiele dafür sind

$$y''(t) = \frac{y^2(t)}{t} \quad \text{und} \quad y''(t) = e^t y'(t)y(t)\,.$$

Dabei ist im ersten Beispiel $f_1(t) = \frac{1}{t}$, $f_2(y) = y^2$ und im zweiten Beispiel $f_1(t) = e^t$ und $f_2(y, y') = y' \cdot y$.

3. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Im ersten Abschnitt war ein Beispiel für ein eindeutig lösbares Anfangswertproblem angegeben. Wie das Beispiel dort zeigt, treten bei Differentialgleichungen zwei fundamentale Fragen auf:

- Ist die Differentialgleichung (mit den entsprechenden Anfangsbedingungen) überhaupt *lösbar*?
- Ist die Lösung der Differentialgleichung durch die Anfangsbedingungen *eindeutig* festgelegt?

Für viele wichtige Fälle gibt der folgende Satz eine Antwort auf die beiden Fragen (es gibt aber auch wichtige Differentialgleichungen, wo dieser Satz nicht anwendbar ist).

Satz 1. (Existenz- und Eindeutigkeitssatz) *Falls die rechte Seite f der Differentialgleichung* (4) *stetig ist und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt* (*d.h. es gibt zu jedem Punkt $t_0 \in I$ eine Umgebung $U \subset I$, so daß für alle $t \in U$ die Ungleichung*

$$|f(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) - f(t, z_0, \ldots, z_{n-1})| \leq C(|y_0 - z_0| + \ldots + |y_{n-1} - z_{n-1}|)$$

mit einer Konstanten $C = C(U)$ gilt), *so hat die Differentialgleichung* (4) *eine Lösung $y(t)$, die den Anfangsbedingungen*

$$y(t_0) = c_0,\ y'(t_0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

genügt. Diese Lösung ist in einer Umgebung von t_0 definiert und durch die Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt.

In der hier angegebenen Form ist dieser Existenz- und Eindeutigkeitssatz zugegebenermaßen kompliziert. Es gibt aber ein wichtiges und einfaches Kriterium, wann die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind:

Satz 2. *Die Funktion $f(t, y_0, \ldots, y_{n-1})$ sei bzgl. der Variablen $y_0, \ldots, y_{n-1}$ stetig partiell differenzierbar. Dann genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.*

Wem das auch noch zu kompliziert ist, der kann für das Proseminar auch nur die Tatsache verwenden, daß der Satz für lineare Differentialgleichungen (mit stetigen Koeffizienten) gilt.

4. Elementar lösbare Differentialgleichungen

In einigen einfachen (und für das Staatsexamen wichtigen) Fällen kann man die Lösung einer Differentialgleichung direkt angeben. Die erste Methode funktioniert für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen (Punkt (v) in der obigen Liste). Sie geht so:

Satz 3 (Lösung für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen)**.** *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$(6) \qquad y'(t) = f_1(t) f_2(y)\,.$$

Man wähle Stammfunktionen $F_1(t)$ von $f(t)$ und $F_2(y)$ von $\frac{1}{f_2(y)}$, d.h. es gelte für ein t_0 und ein y_0

$$F_1(t) = \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\, d\tau \quad \textit{und } F_2(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f_2(z)}\, dz\,.$$

Dann löse man die Gleichung

$$F_2(y) = F_1(t) + C$$

nach y auf (dabei ist C eine durch die Anfangsbedingung zu bestimmende Konstante). Die damit erhaltene Funktion $y(t)$ ist eine Lösung von (6).

Zur Erläuterung vielleicht ein Beispiel: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(7) \quad y'(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

mit der Anfangsbedingung

$$(8) \quad y(1) = 1\,.$$

Hier ist $f_1(t) = -t$ und $f_2(y) = \frac{1}{y}$. Als Stammfunktionen erhält man somit

$$F_1(t) = -\frac{t^2}{2} \quad \text{und } F_2(y) = \frac{y^2}{2}\,.$$

Man erhält die Gleichung

$$\frac{y(t)^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C\,,$$

und aus der Anfangsbedingung (8) ergibt sich sofort $C = 1$. Jetzt muß man noch nach $y(t)$ auflösen. Dabei kommt in

$$y(t) = \pm\sqrt{2 - t^2}$$

wegen $y(1) = 1$ nur das obere Vorzeichen in Frage. Eine Lösung des Anfangswertproblems (7)–(8) wird also gegeben durch $y(t) = \sqrt{2 - t^2}$.

An diesem Beispiel sieht man, daß das Auflösen nach $y(t)$ schwierig sein kann; in manchen Fällen ist es auch gar nicht möglich, und man muß mit der impliziten Form der Lösung arbeiten. Außerdem sieht man, daß die Lösung hier nur lokal definiert ist, d.h. nicht für alle Werte von t.

Weitere einfache Lösungsmethoden gibt es für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und für eine Reihe spezieller Differentialgleichungen. Außerdem gibt es das *Prinzip der Variation der Konstanten*: Damit kann man die Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung finden, wenn man schon vorher alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bestimmt hat. Ein paar Ideen zu Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten stehen im nächsten Abschnitt, für die genauen Formulierungen sei auf die Literatur verwiesen.

5. Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen (vgl. Abschnitt 2) haben einige besonders schöne Eigenschaften. Genauso wie in der linearen Algebra, gilt auch hier: Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung wird gebildet, indem eine spezielle (partikuläre) Lösung zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung addiert wird.

Betrachtet man die homogene lineare Differentialgleichung (5), so hat diese Gleichung (ohne Anfangsbedingungen) unendlich viele Lösungen. Man kann sich leicht überlegen, daß die Menge der Lösungen einen *Vektorraum* bildet, und zwar bei einer Gleichung n-ter Ordnung einen Vektorraum der Dimension n (einen Untervektorraum des Vektorraums aller stetigen Funktionen). Man spricht vom *Lösungsvektorraum* dieser Gleichung. Eine Basis des Lösungsvektorraums heißt ein *Fundamentalsystem* der (homogenen) Differentialgleichung.

Es gibt ein einfaches Kriterium für Fundamentalsysteme: Seien $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (5). Dann handelt es sich genau dann um ein Fundamentalsystem, wenn

$$W[y_1, \ldots, y_n](t) := \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

für einen Wert von t gilt. Die Determinante $W[y_1, \ldots, y_n]$ heißt *Wronski-Determinante.* Falls sie für ein t nicht Null ist, ist sie auch für alle t von Null verschieden.

Nun betrachten wir lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h. Gleichungen der Form

$$(9) \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t)\,,$$

wobei $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ und $b(t)$ eine Funktion von t ist. Zur Lösung dieser Gleichung verwendet man den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, die noch zu bestimmen ist. Wegen $\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ erhält man für die Lösung der homogenen Gleichung die Bedingung

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Das Polynom $P(\lambda)$ heißt *charakteristisches Polynom* der Gleichung (9). Wenn alle Nullstellen dieses Polynoms einfach sind, erhält man mit obigem Ansatz n verschiedene Lösungen der Form $y_j(t) = e^{\lambda_j t}$, und mit Hilfe der Wronski-Determinante sieht man, daß es sich um ein Fundamentalsystem handelt. Wenn mehrfache Nullstellen auftreten, muß man den Ansatz etwas abändern.

Um die inhomogene Gleichung (9) zu lösen, gibt es die Möglichkeit der Variation der Konstanten, die hier nicht beschrieben werden soll. Für bestimmte Funktionen $b(t)$ gibt es jedoch wieder direkte Ansätze mit unbestimmten Konstanten, die zur Lösung führen. So ein Ansatz ist möglich für Funktionen der Form

$$(10) \quad b(t) = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_k t^k)e^{\mu t}\,,$$

also insbesondere, falls $b(t)$ ein Polynom in t ist oder eine Exponentialfunktion. Einzelheiten dazu findet man in der Literatur oder in der Vorlesung Analysis 3.

Man beachte, daß in den obigen Formeln alle Parameter komplex sein können. Vor allem kann auch die Lösung, etwa $e^{\lambda t}$, komplexwertig sein, selbst falls alle Koeffizienten der Differentialgleichung reell sind. In diesem Fall ist man oft an reellen Lösungen interessiert. Diese kann man finden, indem man die Formel

$$e^{(a+ib)t} = e^a \cos t + i \cdot e^a \sin t$$

verwendet. Es gilt nämlich: Sind alle Koeffizienten der Differentialgleichung reell und ist $y(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so sind auch der Realteil von $y(t)$ und der Imaginärteil von $y(t)$ Lösungen der Gleichung. Für $y(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda = a + ib$ ($b \neq 0$) erhält man so die zwei (linear unabhängigen) Lösungen $y_1(t) = e^a \cos bt$ und $y_2(t) = e^a \sin bt$.

Andererseits kann man mit diesem Prinzip etwa auch Inhomogenitäten der Form $b(t) = \sin t$ behandeln. Es ist nämlich $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$. Man löst zuerst die Differentialgleichung mit rechter Seite e^{it} (das ist von der Form (10)) und nimmt von der Lösung dann den Imaginärteil. Dieses Verfahren heißt *Komplexifizierung*.

6. Systeme von Differentialgleichungen

Bis jetzt waren die Lösungen der Differentialgleichungen Funktionen nach $\mathbb{R}$. Jetzt sollen Systeme betrachtet werden; hier sind die Lösungen vektorwertig, d.h. Funktionen nach $\mathbb{R}^n$. Hier beschränken wir uns auf lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese haben die Form

$$(11) \quad z'(t) = Az(t) + g(t)\,,$$

wobei $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, d.h.

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und A eine $n \times n$-Matrix ist. Das homogene System (d.h. falls $g(t) = 0$) hat nun n linear unabhängige Lösungen. Auch hier gibt es den Begriff der Wronski-Determinante: Seien $z^1, \ldots, z^n$ Lösungen (vektorwertig!) von (11). Dann handelt es sich genau dann um ein Fundamentalsystem, falls

$$W[z^1, \ldots, z^n](t) := \det(z^1, \ldots, z^n) = \det \begin{pmatrix} z_1^1(t) & z_1^2(t) & \cdots & z_1^n(t) \\ z_2^1(t) & z_2^2(t) & \cdots & z_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n^1(t) & z_n^2(t) & \cdots & z_n^n(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

für ein t gilt.

Zwischen Systemen der Form (11) und Differentialgleichungen n-ter Ordnung der Form (9) besteht ein enger Zusammenhang. Man kann die Gleichung n-ter Ordnung in folgender Weise in ein System umschreiben:

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Durch dieses Umschreiben sieht man auch, daß die zwei Begriffe der Wronski-Determinante identisch sind.

7. Schlußbemerkung

Die Theorie der Differentialgleichungen mag im ersten Moment sehr unübersichtlich erscheinen, da es keine einheitliche Theorie gibt, die alle auftretenden Formen von Differentialgleichungen behandelt. Im Rahmen der Staatsexamens-Aufgaben kann man jedoch sehr wohl einen Großteil der Aufgaben mit Routine- und Standardmethoden lösen.

In der konkreten Anwendung (etwa in der theoretischen Physik) ist es praktisch unmöglich, eine Differentialgleichung wirklich zu lösen. Daher ist die Theorie der Differentialgleichungen noch lange nicht abgeschlossen und eines der Hauptforschungsgebiete der Mathematik. So wurden etwa nach dem zweiten Weltkrieg Jahren in Fachzeitschriften über 70000 Artikel über gewöhnliche Differentialgleichungen veröffentlicht (und über 95000 Artikel über partielle Differentialgleichungen, aber das ist nochmal was anderes). Dabei geht es unter anderem auch um so einfach aussehende Differentialgleichungen wie die sog. *Mathieusche Differentialgleichung*

$$y''(t) + (\lambda + \gamma \cos t) y(t) = 0$$

(λ, $\gamma \in \mathbb{R}$). Es ist nicht möglich, eine Lösung dieser Differentialgleichung explizit anzugeben.

8. Literatur

Es gibt jede Menge Bücher über gewöhnliche Differentialgleichungen (nämlich mehr als 2400). Ich möchte vielleicht die beiden folgenden empfehlen:

[F] O. Forster: Analysis 2. Vieweg-Verlag Braunschweig, 5. Auflage 1984.

[H] H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Teubner Stuttgart 1989.

Speziell für das Proseminar werden wir auch noch etwas aus den folgenden Büchern brauchen:

[B] M. Braun: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer-Verlag Berlin etc., 1. Auflage 1979.

[GF] H. Grauert, W. Fischer: Differential- und Integralrechnung II. Springer-Verlag Berlin, 1968.

9. Prüfungsaufgaben aus dem Staatsexamen

Herbst 90, Thema 3, Aufgabe 4. Gegeben seien die Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g_1(t) &:= e^{-t}(\sin t + \cos t)\,, \\ g_2(t) &:= e^{-t}(\sin t - \cos t)\,, \end{aligned}$$

sowie eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = g_1(t),\ y(t) = g_2(t),\ 0 \le t \le T \qquad \text{mit } T \in \mathbb{R}^+ := \{t > 0\}$$

und ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\text{(S)} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Man zeige: Das Paar $(g_1(t), g_2(t))$ ist eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems (S).

b) Man bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (S). Wie verhält sich diese für $t \to +\infty$?

c) Man berechne die Bogenlänge von C. Strebt diese einem Grenzwert für $T \to +\infty$ zu, gegebenenfalls welchem?

Herbst 93, Thema 1, Aufgabe 5. Bestimmen Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$f(x) + \int_0^x f(t)\,dt = \frac{x^2}{2}$$

erfüllt.

Frühjahr 96, Thema 1, Aufgabe 4. Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &(1) \qquad x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2(x^3 + x^2)\frac{dy}{dx} + y &= e^{\frac{1}{x}}\,,\ x > 0 \\ &(2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dz}{dt} + z &= e^t\,,\ t > 0\,. \end{aligned}$$

a) Man zeige, daß sich die Differentialgleichung (1) durch Substitution auf die Differentialgleichung (2) zurückführen läßt.

b) Man berechne die allgemeine Lösung von (2).

Frühjahr 96, Thema 2, Aufgabe 5. Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ einer Lipschitz-Bedingung genüge (d.h.: Zu jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (z.B. sei K ein abgeschlossenes, beschränktes Rechteck) gibt es ein $L_K \geq 0$ mit $|f(x,y) - f(x,y')| \leq L_K|y-y'|$ für alle Punkte $(x,y),(x,y') \in K$). Weiter gelte

$$f(-x,y) = -f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Ist φ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x,y)$$

auf einem Intervall $[-a,a]$ mit $a > 0$, d.h. $\varphi : [-a,a] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \quad (x \in [-a,a]),$$

so gilt

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

für alle $x \in [-a,a]$.
Hinweis: Zu einer Lösung φ betrachte man die Funktion

$$\psi(x) := \varphi(-x)\,,\ x \in [-a,a]\,.$$

Herbst 96, Thema 3, Aufgabe 7. Bestimmen Sie jene Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) = t + e^{-5t}\,,$$

die der Bedingung $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ genügt ($\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}$, analog $\ddot{x}(t)$).

Frühjahr 97, Thema 1, Aufgabe 6. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = \exp(2x - y(x))\,.$$

a) Lösen Sie die Differentialgleichung und geben Sie für jede Lösung den maximalen Definitionsbereich an.

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung y_1 mit $y_1(0) = 0$.

c) Berechnen Sie den Grenzwert von $y_1(x)$ für $x \to -\infty$.

d) Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung eine spezielle Lösung y_2 der Gestalt

$$y_2(x) = m \cdot x + t$$

hat.

e) Zeigen Sie: $\lim_{x\to\infty}\{y_1(x) - y_2(x)\} = 0$.

f) Skizzieren Sie die Funktionen y_1 und y_2.

Herbst 97, Thema 1, Aufgabe 6. Gegeben sei das System von zwei Differentialgleichungen

$$\text{(D)} \qquad \varphi'(x) = A \cdot \varphi(x) \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (D) mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems (D), die auf $[0, \infty[$ beschränkt sind.