

Neue Formeln für den Test auf Aufwärtsplanarität

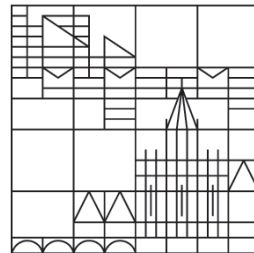
Bachelorarbeit

vorgelegt von

Sorg, Dagmar
Matrikel-Nr. 01/782875

an der

Universität
Konstanz



Mathematisch-Naturwissenschaftliche Sektion

Fachbereich Informatik und Informationswissenschaft

1. Gutachter: Prof. Dr. Ulrik Brandes
2. Gutachter: Dr. rer. nat. Sabine Cornelsen

Konstanz, 2015

*Dagmar Sorg
Kreuzstraße 4
88696 Owingen
01/782875
dagmar.sorg@uni-konstanz.de
Neue Formeln für den Test auf Aufwärtsplanarität
Bachelorarbeit
Universität Konstanz, 2015.*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Definitionen	2
	2.1 Graphentheorie	2
	2.2 Aussagenlogik	4
3	Vorhandene Arbeiten	5
	3.1 Theoretische Studie für den Test auf Aufwärtsplanarität	5
	3.2 Präziser Ansatz zur aufwärtsgerichteten Kreuzungsminimierung	6
	3.3 Test auf Aufwärtsplanarität mittels Reduktion auf SAT	7
4	Neue Formeln	12
	4.1 Idee zu den neuen Formeln und Partitionierung des Graphen	12
	4.2 Definition und Erklärung der neuen Regeln	14
	4.3 Beispiele	17
5	Äquivalenz	24
	5.1 Zurück: Von den Ohren-Regeln zu Mühlbergs Regeln	25
	5.2 Vorwärts: Von Mühlbergs Regeln zu den Ohren-Regeln	32
6	Implementation und Formelmenge	34
	6.1 Berechnung der Ohrengruppen	34
	6.2 Größenordnung der Formelmenge	39
7	Weiterführender Ansatz: Superohren	40
	7.1 Regeldefinition	40
	7.2 Beispiele	42
8	Abschluss	45

1 Einleitung

In der theoretischen Informationsverarbeitung spielen Graphen eine wichtige Rolle. Graphen werden hier als Objekte und deren Beziehung untereinander verstanden. So finden sie beispielsweise Anwendung in der Darstellung von Liniennetz-Plänen von öffentlichen Verkehrsmitteln. Damit solche Pläne gut lesbar sind, sollen sich Linien, welche die Verkehrslinien darstellen, möglichst nur an Stellen kreuzen, an denen sie sich eine Haltestelle teilen. Dieses Problem ist als Kreuzungsminimierung in der Graphentheorie bekannt.

Eine weitere Anwendung findet sich auch in der Darstellung von Hierarchien in Unternehmen. In diesem Fall soll ein Pfeil von Mitarbeiter A zu Mitarbeiter B beispielsweise anzeigen, dass B Vorgesetzter von A ist. Hier ist es zur Präsentation dieser Hierarchie von Vorteil, wenn der oberste Vorgesetzte ganz oben zu finden ist. Insgesamt sollen alle Pfeile möglichst nach oben zeigen.

Im Falle der Unternehmenshierarchie ist es auch von Vorteil, wenn sich die Hierarchie-Pfeile nicht kreuzen, da dadurch auch eine bessere Lesbarkeit entsteht.

Die Frage, ob sich keine Linien oder auch Pfeile kreuzen, ist in der Graphentheorie als die Frage nach Planarität bekannt. Ob ein Graph aufwärts gezeichnet werden kann, entspricht der Frage, ob die Unternehmenshierarchie so dargestellt werden kann, dass alle Vorgesetzten oberhalb ihrer Mitarbeiter stehen.

Jedes dieser Probleme einzeln ist relativ einfach und schnell zu lösen. Kombiniert man sie jedoch, erhöht sich die Komplexität sehr.

In dieser Arbeit werden zunächst bisher bekannte Publikationen zur Thematik der Aufwärtsplanarität vorgestellt. Hierbei wird hauptsächlich auf einen speziellen Ansatz mit Formeln eingegangen und im 4. Kapitel mit neuen Formeln und Variablen ergänzt bzw. durch das Verwenden einer neuen Aufteilung des Graphen verbessert. Weiterhin wird im 5. Kapitel gezeigt, dass diese neuen Regeln auch weiterhin eine korrekte Lösung für den Test auf Aufwärtsplanarität liefern.

Im nachfolgenden Kapitel wird die genaue Berechnung der neuen Partitionierung des Graphen erklärt und in Kapitel 7 wird ein weiterer Ansatz zur Verbesserung der Regeln vorgestellt.

2 Definitionen

Im Folgenden werden nur grundlegenden Definitionen eingeführt, welche für diese Arbeit von belang sind.

Für eine detailreichere Einführung in die Graphentheorie ist beispielsweise das Buch von Reinhard Diestel [3] heranzuziehen.

2.1 Graphentheorie

Definition 1 (Kartesisches Produkt). Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist definiert als die Menge aller Tupel (a, b) für die $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Definition 2 (Graph). Ein (gerichteter) Graph $G = (V_G, E_G)$ ist ein Tupel mit den beiden Komponenten

$V_G =$ Menge aller Knoten im Graphen G

$E_G =$ Menge aller Kanten im Graphen G , wobei eine Kante $e \in E_G$ aus zwei Knoten $v_1, v_2 \in V_G$ besteht. Alternativ kann E_G wie folgt definiert werden: $E_G \subseteq V \times V$

Ist die Anzahl der Elemente in V_G bzw. in E_G endlich, so wird $|V_G| = n$, mit n ist endlich, als die Anzahl der Elemente in der Menge V_G bezeichnet. Für E_G analog mit $|E_G| = m$.

Ein Graph ist gerichtet, falls jede Kante e in E_G ein Tupel ist, wobei die erste Komponente von e die Quelle und die zweite Komponenten die Senke von e bezeichnet.

Definition 3 (Adjazenz, Inzidenz, Grad). Sei $G = (V_G, E_G)$ ein gerichteter Graph. Zwei Knoten $u, v \in V_G$ sind adjazent, falls entweder (u, v) oder (v, u) in der Kantenmenge E_G liegt.

Zwei Kanten $e, f \in E_G$ sind adjazent, falls $e \cap f \neq \emptyset$.

Ein Knoten w ist inzident zu einer Kante e , falls w entweder Quelle oder Senke von e ist.

Die ausgehende Nachbarschaft eines Knotens v ist wie folgt definiert

$$N_G^-(v) =_{\text{def}} \{w \in V_G \mid (v, w) \in E_G\}$$

Die eingehende Nachbarschaft eines Knotens v ist wie folgt definiert

$$N_G^+(v) =_{\text{def}} \{w \in V_G \mid (w, v) \in E_G\}$$

Der Ausgangsgrad eines Knotens v ist definiert als $\text{deg}^-(v) = |N_G^-(v)|$.

Der Eingangsgrad eines Knotens v ist definiert als $\text{deg}^+(v) = |N_G^+(v)|$.

Der Grad eines Knotens v ist definiert als $\text{deg}(v) = \text{deg}^+(v) + \text{deg}^-(v)$.

Definition 4 (Standartrepräsentation). Ein gerichteter Graph $G = (V_G, E_G)$ wird, soweit nicht anderes angegeben, als Pfeile und Punkte dargestellt, wobei die Pfeile für Kanten und die Punkte für Knoten stehen.

Ein Pfeil existiert somit genau dann zwischen zwei Punkten (Knoten) u, v , falls für die Kante $e = (u, v) \in E_G$ gilt.

Jeder Knoten hat x- und y-Koordinaten.

Definition 5 (Pfad, Abstand, Kreis). Sei $G = (V_G, E_G)$ ein gerichteter Graph. Ein (gerichteter) Pfad p ist eine Abfolge von Knoten, wobei jeweils eine Kante zwischen dem i -ten und dem $i + 1$ -ten Element in p in E_G enthalten sein muss. p_i bezeichnet den i -ten Knoten in p .

Die Länge eines Pfades p ist die Anzahl der Knoten in p und wird mit $|p|$ bezeichnet. Der Abstand zwischen zwei Knoten v, w ($d_G(v, w)$) ist der kürzeste Pfad zwischen v und w in G .

Ein Kreis in G ist ein Pfad der Länge n mit $p_1 = p_{n+1}$.

Der Knoten p^s bezeichnet den Anfangsknoten von p , der Knoten p^t den Endknoten von p .

G ist azyklisch, falls G keinen Kreis enthält.

Ein gerichteter azyklischer Graph wird als DAG („**d**irected **a**cycl**i**c **g**raph“) bezeichnet.

Definition 6 (Innerer Knoten eines Pfades). Sei $p = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ ein Pfad. Dann sind v_2, \dots, v_{n-1} innere Knoten von p .

2.2 Aussagenlogik

In der Aussagenlogik gibt es verschiedene logische Verknüpfungen. Die für diese Arbeit notwendigen sind im Folgenden aufgelistet.

Verknüpfung	Bedeutung	umgangssprachlicher Ausdruck
\neg	Negation	„nicht“
\wedge	Konjunktion	„und“
\vee	Disjunktion	„oder“
\rightarrow	Implikation	„wenn, dann“
\leftrightarrow	Bikonditional	„genau dann, wenn“

Definition 7 (Werte der Verknüpfungen). Sind w und f Abkürzungen für „wahr“ und „falsch“, so sind die Werte für die Verknüpfungen wie folgt durch die Wertetabellen definiert:

\neg	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
w f	w w f	w w w	w w f	w w f
f w	f f f	f w f	f w w	f f w

Definition 8 (Boolesche Formel). Eine boolesche Formel ist eine aussagenlogische Formel, ausschließlich bestehend aus \neg , \wedge und \vee .

Variablen x_1, \dots, x_n werden boolesche Variablen genannt und falls $x_i \in \{0, 1\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Seien y_1, \dots, y_k boolesche Variablen. Dann ist $(y_1 \vee \dots \vee y_k)$ eine Klausel (vom Grad k).

Seien nun c_1, \dots, c_l Klauseln. Dann ist $c_1 \wedge \dots \wedge c_l$ eine boolesche Formel (in konjunktiver Normalform).

„w“ wird der Wert 1 und „f“ der Wert 0 zugeordnet.

Definition 9 (Zuweisung). Eine Zuweisung der booleschen Variablen x_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ ist eine Funktion $F : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit der folgenden Definition:

$$F(y) = \begin{cases} F(x_i) & , \text{ falls } y = x_i \\ 1 - F(x_i) & , \text{ falls } y = \neg x_i \end{cases}$$

$$F(y_1 \vee \dots \vee y_k) = \max_{1 \leq i \leq k} F(y_i)$$

$$F(c_1 \wedge \dots \wedge c_l) = \min_{1 \leq i \leq l} F(c_i)$$

Definition 10 (SAT, erfüllbar). Sei ϕ eine boolesche Formel in konjunktiver Normalform. ϕ ist erfüllbar, falls es eine Belegung der Variablen gibt, sodass $F(\phi) = 1$ gilt.

Das Problem, ob eine gegebene boolesche Formel erfüllbar ist, ist als SAT-Problem bekannt.

3 Vorhandene Arbeiten

Es werden in diesem Kapitel drei verschiedene Publikationen vorgestellt, welche Lösungsmöglichkeiten für den Test auf Aufwärtsplanarität behandeln. Der Ansatz aus Kapitel 3.3 wird im weiteren Verlauf für den Äquivalenzbeweis der neuen Regeln als Referenz herangezogen.

3.1 Theoretische Studie für den Test auf Aufwärtsplanarität (2013)

Die ersten historischen Algorithmen für den Test auf Aufwärtsplanarität waren *FPT*-Algorithmen (*fixed-parameter tractable*), welche im Bezug auf Aufwärtsplanarität von Healy und Lynch in [4] genauer erklärt sind.

Chimani und Zeranski zeigten in dieser Studie [1], dass das Problem im speziellen Fall von *SP*-Graphen schneller gelöst werden kann.

Ebenso ist es möglich das Problem in polynomieller Zeit zu lösen, wenn der *DAG* nur eine Quelle besitzt. Da dies jedoch nur selten der Fall ist, wurde ein weiterer Ansatz gewählt: Die Aufwärts-Anforderung wird abgeschwächt und das Optimierungsproblem betrachtet, das die Anzahl der Kanten minimieren soll, welche die Anforderung nicht erfüllen. Diesen Ansatz nennt man *Quasi-Aufwärtsplanarität*.

Ein weiterer Ansatz ist *Embedding Enumeration (EE)*, bei der für jede einzelne Einbettung geprüft wird, ob diese aufwärtsplanar ist oder nicht. Hierfür muss eine möglichst optimale Nummerierung der Einbettungen vorgenommen werden, damit der Rechenaufwand möglichst gering gehalten werden kann. Da die Anzahl der Einbettungen jedoch normalerweise in der Größe des Graphen exponentiell groß ist, ist dies selbst bei guter Nummerierung ein naiver Ansatz.

Ebenfalls wurde die Reduktion auf SAT vorgestellt, auf die im Folgenden genauer eingegangen wird.

Definition 11 (Dominanz). Sei $G = (V_G, E_G)$ ein gerichteter, kreisfreier Graph. Eine Kante e dominiert eine Kante f , falls es einen Pfad p mit $p^s = e^t$ und $p^t = f^s$ gibt.

Dominiert weder e die Kante f noch andersherum, so ist das Kantenpaar $\{e, f\}$ nicht-dominant.

Im Folgenden wird die Menge $\mathcal{N}(G)$ als die Menge aller nicht-dominierenden Kantenpaare bezeichnet.

Für die *SAT*-Formulierung werden noch folgende boolesche Variablen benötigt:

Tau-Variablen („unten“)

$\tau(u, v) \quad \forall u, v \in V_G, u \neq v$ mit *wahr* bedeutet, u liegt unterhalb von v
falsch bedeutet, u liegt oberhalb von v

$\tau(u, v) = \neg\tau(v, u)$ logische Schlussfolgerung

Sigma-Variablen („links“)

$\sigma(e, f) \quad \forall \{e, f\} \in \mathcal{N}(G)$ mit *wahr* bedeutet, e liegt links von f
falsch bedeutet, e liegt rechts von f
(falls $e \cap f \neq \emptyset$)

$\sigma(e, f) = \neg\sigma(f, e)$ logische Schlussfolgerung

Die Aufteilung der Regeln der *SAT*-Formulierung geschieht in vier Gruppen:

Aufwärtsregeln: (Für alle $(u, v) \in E_G$)

$$(1) \quad \boxed{\tau(u, v)} \quad [\mathbf{R}^u]$$

Knotentransitivität: (Für alle $u, v, w \in V_G$, paarweise verschieden)

$$(2) \quad \boxed{\tau(u, v) \wedge \tau(v, w) \rightarrow \tau(u, w)} \quad [\mathbf{R}_\tau^t]$$

Kantentransitivität: (Für alle $\{e, f\}, \{f, g\}, \{e, g\} \in \mathcal{N}(G)$)

$$(3) \quad \boxed{\sigma(e, f) \wedge \sigma(f, g) \rightarrow \sigma(e, g)} \quad [\mathbf{R}_\sigma^t]$$

Planaritätsregeln: (Für alle $\{e, f\}, \{f, g\} \in \mathcal{N}(G)$
mit $e \cap f = u \notin g = (x, y)$)

$$(4) \quad \boxed{[\tau(x, u) \wedge \tau(u, y)] \rightarrow [\sigma(e, g) \leftrightarrow \sigma(f, g)]} \quad [\mathbf{R}^p]$$

3.2 Präziser Ansatz zur aufwärtsgerichteten Kreuzungsminimierung (2014)

In dieser Publikation geht es mehr darum eine explizite aufwärtsgerichtete kreuzungsfreie Einbettung eines Graphen zu finden, als nur zu testen, ob es eine solche Einbettung gibt. Hierfür finden Planaritäts-Heuristiken häufig Lösungen, die nah am Optimum sind, oder sogar eine exakte Lösung. Die bisher stärkste Heuristik ist *grid-sifting*. Hier wird die Lösung iterativ verbessert durch das Verschieben von Knoten auf horizontaler Ebene und zwischen den *Lagen* des Sugiyama-Frameworks [6].

Da *SAT* nur Entscheidungsprobleme lösen kann, entwickelten Chimani und Zeranski eine Generalisierung für Optimierungsprobleme [2] - eine *pseudo boolean satisfiability*, kurz *PBS*. Diese beinhaltet eine aussagenlogische Formel und eine *lineare Zielfunktion*, welche die booleschen Variablen binär interpretiert.

3.3 Test auf Aufwärtsplanarität mittels Reduktion auf SAT (2013)

Volker Mühlberg verwendet in seiner Diplomarbeit [5] als Grundlage die Regeln aus der Publikation von Chimani und Zeranski zur Theoretischen Studie [1].

Da der Ansatz von Chimani und Zeranski jedoch einen sehr großen Formelaufwand hat, reduziert Mühlberg die Anzahl der Regeln, indem er die Regeln auf Pfaden und nicht mehr auf Kanten definiert.

3.3.1 Vorverarbeitung des Graphen

Vor der Berechnung der Pfade führt Mühlberg eine Vorverarbeitung auf dem Graphen aus. Durch diese kann die Anzahl an Kanten und Knoten auf eine Menge reduziert werden, die kleiner und dennoch ausreichend ist, um auf Aufwärtsplanarität zu testen, und weiterhin das korrekte Ergebnis für den unbearbeiteten Graphen liefert. In jedem Vorverarbeitungsschritt wird genau eine der nachfolgenden Aktionen ausgeführt.

1. Löschen eines Knotens v mit $\deg^+(v) = 0$ und $\deg^-(v) = 1$
2. Löschen eines Knotens v mit $\deg^+(v) = 1$ und $\deg^-(v) = 0$
3. Ersetzen eines Kantenzuges (v, v_1, \dots, v_k, w) durch die Kante (v, w) , falls für alle v_i mit $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt, dass $\deg^+(v_i) = \deg^-(v_i) = 1$

Der Algorithmus terminiert, sobald keiner der Schritte 1 bis 3 mehr ausgeführt werden kann.

3.3.2 Formeln

Zur Aufstellung der Regeln können nicht beliebige Pfade gewählt werden. Hierfür ist eine spezielle Zusammenstellung der Pfade notwendig.

Definition 12 (Unabhängige Pfade). *Zwei Pfade p_i, p_j sind unabhängig, falls sie weder innere Knoten noch eine Kante gemeinsam haben.*

Für den Test auf Aufwärtsplanarität wird eine Partition \mathcal{K} der Kanten von G in maximale unabhängige Pfade betrachtet. Somit ist \mathcal{K} eine Partition von Kanten mit den Eigenschaften:

P1 Ein Knoten v kann nur innerer Knoten eines unabhängigen Pfades sein. Somit dürfen sich zwei unabhängige Pfade p_i, p_j keine inneren Knoten teilen.

$$(V(p_i) \setminus \{p_i^s, p_i^t\}) \cap (V(p_j) \setminus \{p_j^s, p_j^t\}) = \emptyset$$

P2 \mathcal{K} ist eine Kantenpartition von G . Es muss somit jede Kante in genau einem Pfad liegen.

P3 Alle unabhängigen Pfade sind maximal im Bezug auf **P1**. Dies bedeutet, dass alle inneren Knoten v genau $\deg(v) - 1$ inzidente unabhängige Pfade haben.

Definition 13 (Minimale Partition von unabhängigen Pfaden). *Sei \mathcal{K} eine Kantenpartition von G und erfüllt die Eigenschaften P1, P2 sowie P3, so ist \mathcal{K} eine minimale Partition von unabhängigen Pfaden.*

Der Dominanzbegriff für Kanten aus Kapitel 3.1 kann nun auf eine Vergleichbarkeit von Pfaden erweitert werden.

Definition 14 (Horizontale Vergleichbarkeit von Pfaden). *Sei \mathcal{K} eine minimale Partition von unabhängigen Pfaden und seien $p_i, p_j \in \mathcal{K}$. p_i und p_j sind horizontal vergleichbar, falls es zwei Kanten $e \in p_i$ und $f \in p_j$ mit $e, f \in \mathcal{N}(G)$ gibt. Die Menge $\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$ wird als die Menge aller horizontal vergleichbaren Pfad-Paare bezeichnet.*

Die Variablen, welche nachfolgend aufgelistet sind, werden im Verlauf zur Regeldefinition benötigt.

Oben-Variablen

$o(u, v) \quad \forall u, v \in V_G, u \neq v$ mit *wahr* bedeutet, u liegt oberhalb von v
falsch bedeutet, u liegt unterhalb von v

$o(u, v) = \neg o(v, u)$ logische Schlussfolgerung

Links-Variablen

$\ell(p_i, p_j) \quad \forall p_i, p_j \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$ mit *wahr* bedeutet, p_i liegt links von p_j
falsch bedeutet, p_i liegt rechts von p_j

$\ell(p_i, p_j) = \neg \ell(p_j, p_i)$ logische Schlussfolgerung

Mühlberg verwendet die κ -Variablen, welche äquivalent zu den ℓ -Variablen sind, sowie die τ -Variablen von Chimani und Zeranski aus [1], welche hier durch die o -Variablen ersetzt werden, bei denen jedoch eine Antisymmetrie vorherrscht. So gilt für zwei Knoten $v, w \in V_G$

$$o(v, w) \leftrightarrow \neg \tau(v, w)$$

Zur Übersichtlichkeit der Formeln werden nachfolgend die Bezeichnungen der Start- und Endknoten aus der Diplomarbeit von Mühlberg eines Pfades p_l ersetzt. Es gilt nun

- $s^{(l)}$.*source* bezeichnet den Startknoten der ersten Kante von p_l , im weiteren Verlauf als p_l^s bezeichnet.
- $e^{(l)}$.*target* bezeichnet den Endknoten der letzten Kante von p_l , im weiteren Verlauf als p_l^t bezeichnet.

Ebenso werden die κ -Variablen durch die ℓ -Variablen, sowie die τ -Variablen durch die o -Variablen ersetzt. Zur besseren Unterscheidung der Regelmengen wird jedoch die Notation der Regelmengen von Mühlberg mit κ und τ beibehalten.

Nachfolgend befindet sich die genaue Regeldefinition von Mühlberg.

Aufwärtsregeln: (Für alle $(u, v) \in E_G$)

$$(1) \boxed{o(v, u)} \quad [\mathbf{R}^u]$$

Knotentransitivität: (Für alle $u, v, w \in V_G$, paarweise verschieden)

$$(2) \boxed{o(u, v) \wedge o(v, w) \rightarrow o(u, w)} \quad [\mathbf{R}_\tau^t]$$

Kantentransitivität: (Für alle $\{p_i, p_j\}, \{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_K(G)$)

$$(3) \boxed{\ell(p_i, p_j) \wedge \ell(p_j, p_l) \rightarrow \ell(p_i, p_l)} \quad [\mathbf{R}_\kappa^t]$$

Planaritätsregeln:

(Für alle $\{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_K(G)$, $i \neq j$
mit $V(p_i) \cap V(p_j) = U \neq \emptyset$ gibt es für jedes $u \in U$
für das die Kanten $e \in p_i$, $f \in p_j$ und $g = (x, y) \in p_l$ existieren
mit $e \cap f = u \notin g$ und $\{f, g\}, \{e, g\} \in \mathcal{N}(G)$
ohne, dass es einen (u, x) - oder (y, u) -Pfad in G gibt)

$$(4) \boxed{[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]} \quad [\mathbf{R}^P]$$

3.3.3 Berechnung der unabhängigen Pfade

Mühlberg hat einen Algorithmus, basierend auf einer Tiefensuche im Graphen, entwickelt, der eine Partition von unabhängigen Pfaden berechnet.

Der Algorithmus beginnt bei jeder Quelle im Graphen und berechnet von dort aus alle erreichbaren Pfade. Hierfür wird eine beliebige (unmarkierte) ausgehende Kante des betrachteten Knoten gewählt und geprüft, ob der Endknoten dieser Kante markiert ist oder nicht.

Der betrachtete Knoten ist markiert. Somit wurde er schon besucht und es darf von hier aus nicht weiter gegangen werden, da sich ansonsten zwei Pfade einen inneren Knoten teilen würden. Es handelt sich hiermit um das Ende eines Pfades der Partition.

Der betrachtete Knoten ist nicht markiert. Der Algorithmus wählt erneut eine unmarkierte Kante und merkt sich den Vorgänger (den alten Knoten).

Ist der betrachtete Knoten eine Senke, so gibt es hier keine weiteren ausgehenden Kanten. Es handelt sich wiederum um das Ende eines Pfades der Partition. Selbiges gilt für Knoten, welche keine unmarkierten ausgehenden Kanten mehr besitzen.

Ist es nicht mehr möglich weiter nach vorne zu gehen, weil der betrachtete Knoten keine weiteren ausgehenden Kanten besitzt, so muss soweit auf dem gemerkten Pfad zurück gegangen werden, bis wieder ein Knoten mit ausgehenden Kanten gefunden wird.

Beispiel 1. Abbildung 1 ist eine grafische Veranschaulichung des Algorithmus zur Berechnung der unabhängigen Pfade. Ist ein Knoten oder eine Kante gefärbt, so ist dieses Element markiert. Befindet sich links oder rechts eines Knotens ein Pfeil, so

steht der Algorithmus gerade an eben diesem Knoten.

Nach Abbildung 1(o) wandert der Algorithmus noch bis zu Knoten a zurück. Da der Knoten a keine weiteren Nachbarn mehr hat, terminiert der Algorithmus.

Der Algorithmus speichert jede betrachtete Kante in einer geordneten Liste und weiterhin jede Endkante eines gefundenen unabhängigen Pfades in eine andere geordnete Liste. Aus diesem Grunde können im Nachhinein alle unabhängigen Pfade durch Kombination beider Listen ausgelesen werden.

Allerdings arbeitet der Algorithmus von Mühlberg mit Farben, um die Pfade zu unterscheiden und speichert die Pfade nicht automatisch in ein Array. Algorithmus 1 konstruiert gerade ein solches Array von Pfaden.

Dieser erhält als Eingabe die Färbung der Kanten, sowie das Array mit den Kanten der unabhängigen Pfaden in der umgekehrten Reihenfolge, wie sie gefunden wurden. Zunächst wird der größtmögliche Pfadindex der unabhängigen Pfade gespeichert. Dieser steht an der letzten Stelle im Farb-Array. Hier steht der größte Farbindex der Kanten und somit auch die Anzahl an unabhängigen Pfaden im Graphen. Nun durchläuft der Algorithmus alle Pfade und prüft, ob die Farbe der betrachteten Kante weiterhin der aktuellen Farbe entspricht. Ist dies der Fall, wird diese Kante an den Anfang des aktuellen Pfades gespeichert. Ist dies nicht der Fall, wird die Kante in die vorherige Stelle im Pfad-Array \mathcal{K} gespeichert.

Diese Berechnung wird solange durchgeführt, bis es keine Kante mehr gibt, welche noch nicht betrachtet wurde.

Algorithmus 1 : CALCULATEPATHS

Input : Array mit Färbung der Kanten COLORS , Array mit Kanten in umgekehrter Reihenfolge wie abgearbeitet von unabhängigen Pfaden INDEPENDENTPATHS

Result : Array von unabhängigen Pfaden \mathcal{K}
 // $\mathcal{K}[0]$ enthält den ersten betrachteten Pfad

```

1 begin
2    $index \leftarrow \text{COLORS}[\text{COLORS.length} - 1] - 1$ 
3    $i \leftarrow 0$ 
4    $col \leftarrow 1$ 
5   while  $i < \text{INDEPENDENTPATHS.length}$  do
6     while  $\text{COLORS}[i] == col$  do
7        $\mathcal{K}[index].addFirst(\text{INDEPENDENTPATH}[i])$ 
8        $i \leftarrow i + 1$ 
9      $index \leftarrow index - 1$ 
10     $col \leftarrow col + 1$ 
11  return  $\mathcal{K}$ 

```

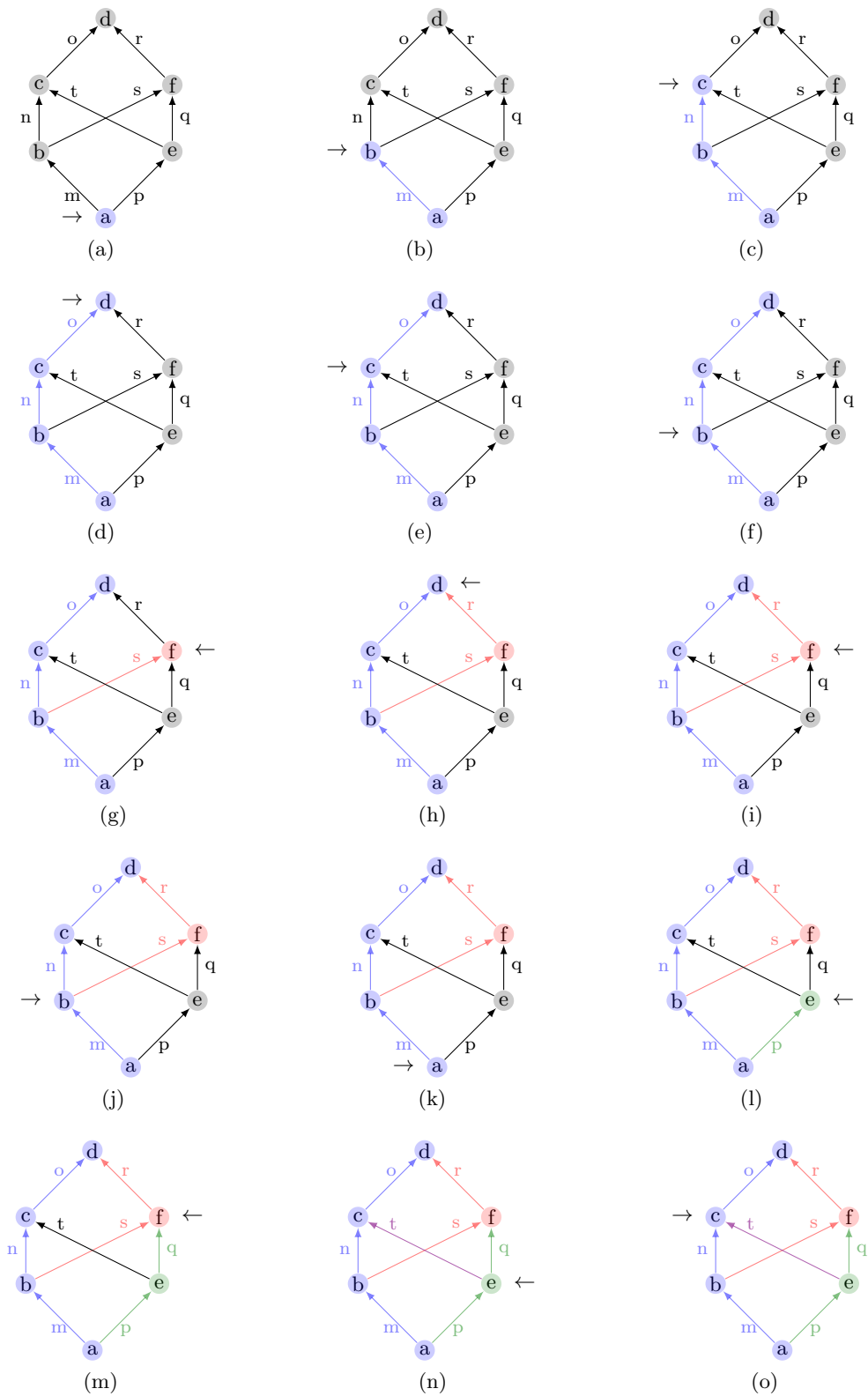


Abb. 1. Grafisches Beispiel zur Berechnung von unabhängigen Pfaden

4 Neue Formeln

Nachfolgend werden neue Formeln aufgestellt, welche jedoch auf den Regeln von Volker Mühlberg in [5] basieren. Auch hier werden Pfade statt, wie ursprünglich, Kanten verglichen.

4.1 Idee zu den neuen Formeln und Partitionierung des Graphen

Zur Partitionierung des Graphen wird der Algorithmus zur Berechnung der unabhängigen Pfade, wie in Kapitel 3.3.3 vorgestellt, verwendet und eine spezielle Auswahl (im Folgenden genauer erklärt) zu Mengen zusammengeschlossen.

Definition 15 (Element eines Pfades). Sind p_i, p_j Pfade in G und gilt $p_i^s, p_i^t \in p_j$ so schreiben wir $p_i \in p_j$.

Definition 16 (Ohr, Eltern-Ohr, Rückgrat). Sei \mathcal{K} eine Partition von G in unabhängige Pfade. Dann heißen alle Pfade $p_i \in \mathcal{K}$ Ohren. Die Pfade in \mathcal{K} werden so indiziert, dass die Indizierung gerade der Reihenfolge entspricht, wie sie in Algorithmus 1 berechnet wurde.

Das Eltern-Ohr p von p_i , ist das Ohr mit $p_i \in p$ und minimalem Index. Der Index des Eltern-Ohrs ist dann minimal, falls es kein anderes Ohr p' mit $p_i \in p'$ und kleinerem Index als p gibt. Im Folgenden wird das Eltern-Ohr p von p_i als $\mathcal{P}(p_i) = p$ bezeichnet. Ein Ohr p kann nur dann Eltern-Ohr des Ohres p_i sein, falls der Index von p größer ist als der Index von p_i .

Gibt es kein Eltern-Ohr für p_i , so ist p_i ein Rückgrat in G . Ein Ohr heißt trivial, falls $p_i = (p_i^s, p_i^t)$ gilt.

Da ein Eltern-Ohr ebenfalls ein Ohr in G ist, kann auch dieses ein Eltern-Ohr besitzen. Aus diesem Grunde wird die folgende Notation zur rekursiven Verwendung eines Eltern-Ohrs eingeführt.

Für jedes Ohr p gilt somit

- $\mathcal{P}^0(p) = p$
- $\mathcal{P}^1(p) = \mathcal{P}(p)$
- $\mathcal{P}^k(p) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^{k-1}(p))$, soweit $\mathcal{P}^k(p)$ vorhanden ist.

Definition 17 (Nachkomme eines Ohres). Ein Ohr p heißt Nachkomme von p' , falls es ein $k > 0$ gibt mit $p' = \mathcal{P}^k(p)$.

Definition 18 (Ohrengruppe). Sei b ein Rückgrat in G . Dann ist $O(b)$, die Ohrengruppe zu b , definiert als die Menge aller Ohren, welche Nachkommen von b sind. Formal gilt dann

$$O(b) = \{p \mid p \text{ ist Ohr in } G \text{ und es gibt ein } k \geq 0 \text{ mit } \mathcal{P}^k(p) = b\}$$

Somit ist jede Ohrengruppe maximal in dem Sinne, dass es keine weiteren Pfade gibt, welche die Eigenschaften dieser Ohrengruppe erfüllen.

Anmerkung 1 (Ohrenzerlegung). Die Menge aller Ohrengruppen

$$O(G) = \{O(b) \mid b \text{ ist Rückgrat in } G\}$$

wird als Ohrenzerlegung von G bezeichnet.

Jedes Ohr gehört durch die Eltern-Ohr-Beziehung zu genau einer Ohrengruppe. Dies gilt ebenfalls für das Rückgrat jeder Ohrengruppe, da dieses in seiner eigenen Gruppe liegt.

Definition 19 (Verschachtelung von Ohren). Seien p_i, p_j, p_l Ohren mit $\mathcal{P}(p_i) = \mathcal{P}(p_j) = p_l$. Sind die Knoten $p_i^s, p_i^t, p_j^s, p_j^t$ so angeordnet, dass es einen Pfad $p = (p_i^s, \dots, p_j^s, \dots, p_i^t, \dots, p_j^t)$ auf p_l gibt, so sind die Ohren p_i, p_j verschachtelt auf p_l .

4.2 Definition und Erklärung der neuen Regeln

In diesem Kapitel werden die Ohrenregeln hergeleitet und erklärt. Am Ende des Kapitels werden alle Regeln übersichtlich mit allen formalen Voraussetzungen aufgelistet.

4.2.1 Herleitung und Erklärung

Die Regeln für die Knotentransitivität bleiben wie bei Mühlberg bestehen.

Die Regeln zur Kantentransitivität von Mühlberg werden um eine Regel erweitert, indem eine Transitivität auf Ohren eingeführt wird.

Die Aufwärtsregeln werden ebenfalls von Mühlberg übernommen.

Die Planaritätsregeln werden in zwei unterschiedliche Klassen eingeteilt.

(C1) Von den Ohren p_i, p_j, p_l liegen mindestens zwei in unterschiedlichen Ohrengruppen. (Abbildung 2)

(C2) Die Ohren p_i, p_j, p_l liegen in derselben Ohrengruppe und es gilt

$$\mathcal{P}(p_i) = \mathcal{P}(p_l) = p_j \quad (\text{Abbildung 3})$$

Nachfolgend werden die Mengen $R_\ell^p(C1)$ und $R_\ell^p(C2)$ definiert, welche die Regeln für die jeweilige Klasse enthalten.

$R_\ell^p(C1)$: Hier bleiben die Regeln von Mühlberg erhalten. Explizit bedeutet das:

Voraussetzungen: für $\{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\}$ gilt

1. $p_i \in O(b_1), p_j \in O(b_2), p_l \in O(b_3)$
2. mindestens zwei $b_k, b_h \in \{b_1, b_2, b_3\}$ sind unterschiedlich
3. $V(p_i) \cap V(p_j) = U \neq \emptyset$ und für alle $u \in U$ gilt
 - $\exists e \in p_i, f \in p_j, (x, y) = g \in p_l$, sodass $\{e, g\}, \{f, g\} \in \mathcal{N}(G)$ gilt
 - $e \cap f = u \notin g$
 - es gibt keinen (y, u) - oder (u, x) -Pfad in G

Regeln: Regeln aus der Diplomarbeit von Mühlberg [5]

$R_\ell^p(C2)$:

Voraussetzungen: für $\{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\}, \{p_i, p_j\} \in \mathcal{N}_K(G)$ gilt p_i und p_l sind verschachtelt auf p_j

Regeln: Es muss sichergestellt werden, dass zwei Ohren p_i, p_l nicht auf der gleichen Seite von p_j liegen.

4.2.2 Zusammenfassung aller Regeln und explizite Darstellung

Aufwärtsregeln: (Für alle $(u, v) \in E_G$)

$$(1) \boxed{o(v, u)} \quad [\mathbf{R}^u]$$

Knotentransitivität: (Für alle $u, v, w \in V_G$, paarweise verschieden)

$$(2) \boxed{o(u, v) \wedge o(v, w) \rightarrow o(u, w)} \quad [\mathbf{R}_o^t]$$

Kantentransitivität: (Für alle $\{p_i, p_j\}, \{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_K(G)$)

$$(3a) \boxed{\ell(p_i, p_j) \wedge \ell(p_j, p_l) \rightarrow \ell(p_i, p_l)} \quad [\mathbf{R}_\ell^t]$$

Transitivität auf Ohren: (Für alle $\{p_i, p_j\}, \{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_K(G)$
mit $p_j = \mathcal{P}(p_i)$ und entweder $p_l = \mathcal{P}(p_j)$
oder $\mathcal{P}(p_l) = p_j$ und $o(p_i^s, p_l^s)$ und $o(p_l^t, p_i^t)$)

$$(3b) \boxed{\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)} \quad [\mathbf{R}_\ell^t(\mathcal{P})]$$

Planaritätsregeln: (Für alle $\{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_K(G)$, $i \neq j$
mit $p_i \in O(b_1), p_j \in O(b_2), p_l \in O(b_3)$,
es gibt mindestens ein Paar (b_v, b_w)
mit $v, w \in \{1, 2, 3\}$ für das gilt $b_v \neq b_w$,
sowie die Kanten $e \in p_i, f \in p_j$ und $g = (x, y) \in p_l$
mit $e \cap f = u \notin g$ und $\{f, g\}, \{e, g\} \in \mathcal{N}(G)$
und es gibt keinen (u, x) - oder (y, u) -Pfad in G)

$$(4a) \boxed{[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]} \quad [\mathbf{R}_\ell^P(\mathbf{C1})]$$

(Für alle $\{p_i, p_j\}, \{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_K(G)$
mit $\mathcal{P}(p_i) = \mathcal{P}(p_j) = p_l$
und p_i und p_j sind verschachtelt auf p_l)

$$(4b) \boxed{[\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_l, p_j)]} \quad [\mathbf{R}_\ell^P(\mathbf{C2})]$$

Anmerkung 2. R_ℓ^P wird als die Menge aller Regeln $R_\ell^P(\mathbf{C1})$ und $R_\ell^P(\mathbf{C2})$ bezeichnet.

Anmerkung 3 (Abbildungen). In Abbildung 2 können die Knoten p_i^t, p_l^t sowie p_i^s, p_l^s identisch sein. In Abbildung 2(a) ist es möglich p_j^t und p_i^t zu vertauschen. In Abbildung 3 können die Knoten p_i^t, p_l^t sowie p_j^s, p_l^s identisch sein. Ebenso können in Abbildung 3(a) die Knoten p_j^t, p_i^s identisch sein. In Abbildung 3(b) ist dies nicht möglich.

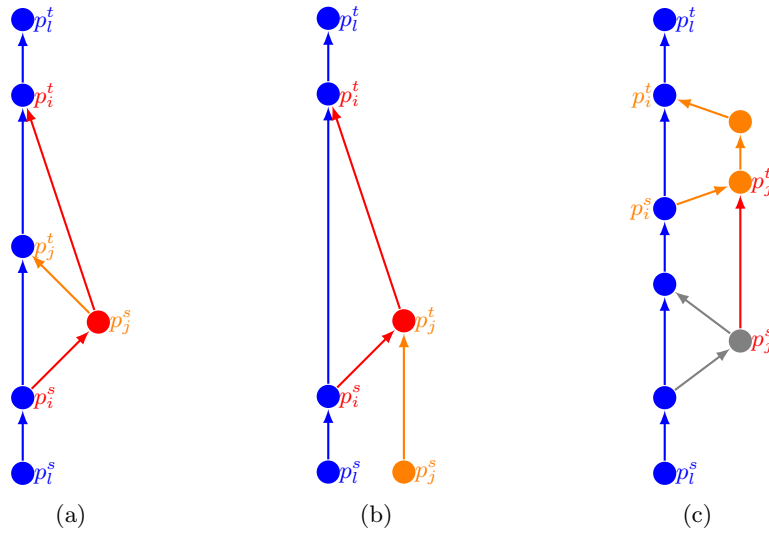


Abb. 2. Beispiele für Klasse C1

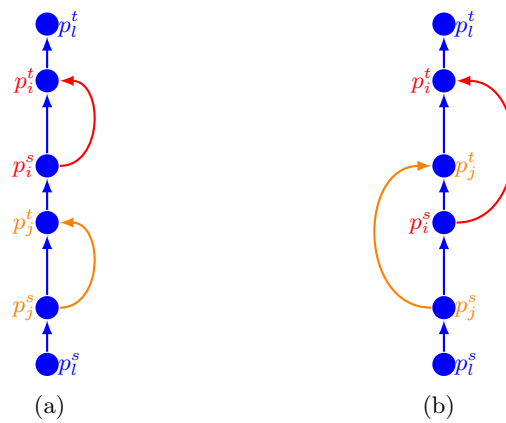


Abb. 3. Beispiele für Klasse C2

4.3 Beispiele

Die Graphen aus Abbildung 4 (nicht aufwärtsplanar zeichenbar) und Abbildung 5 (aufwärtsplanar zeichenbar) stellen zwei Beispiele zur Verdeutlichung der Regeln dar.

Weiterhin seien die Farben grün und rot als bildliche Veranschaulichung belegt, sodass grün einer wahren und rot einer falschen Zuweisung entspricht. Diese Veranschaulichung wird auch in allen weiteren Kapiteln dieser Arbeit verwendet.

4.3.1 Negativbeispiel

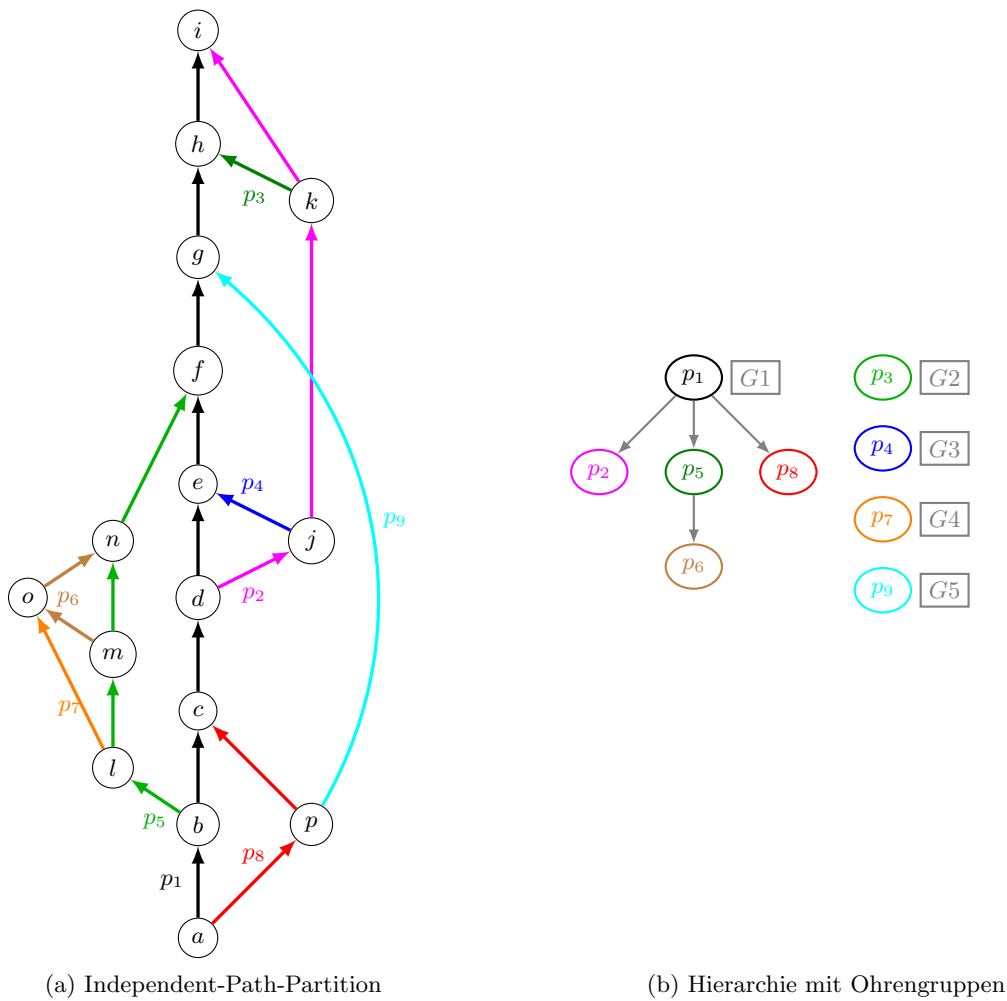


Abb. 4. Graph G1 (Negativbeispiel)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G_1) = & \{ \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_1, p_4\}, \{p_1, p_5\}, \{p_1, p_6\}, \{p_1, p_7\}, \{p_1, p_8\}, \{p_1, p_9\}, \\ & \{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_2, p_5\}, \{p_2, p_6\}, \{p_2, p_7\}, \{p_2, p_9\}, \\ & \{p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\}, \{p_3, p_6\}, \{p_3, p_7\}, \{p_3, p_9\}, \\ & \{p_4, p_5\}, \{p_4, p_6\}, \{p_4, p_7\}, \{p_4, p_9\}, \\ & \{p_5, p_6\}, \{p_5, p_7\}, \{p_5, p_8\}, \{p_5, p_9\}, \\ & \{p_6, p_7\}, \{p_6, p_8\}, \{p_6, p_9\}, \\ & \{p_7, p_8\}, \{p_7, p_9\}, \\ & \{p_8, p_9\} \} \end{aligned}$$

Regeln von Mühlberg Es werden nur die Regeln betrachtet, bei denen die Voraussetzung wahr ist. Da in den Regeln von Mühlberg keine Transitivitätsregeln auf Ohren existieren, werden hier nur die Planaritätsregeln betrachtet.

Planaritätsregeln:

Fall 1: Innerhalb einer Ohrengruppe

$$\begin{aligned} [o(d, b) \wedge o(f, d)] & \rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_2, p_5)] \\ [o(d, p) \wedge o(g, d)] & \rightarrow [\ell(p_1, p_9) \leftrightarrow \ell(p_2, p_9)] \\ [o(b, a) \wedge o(c, b)] & \rightarrow [\ell(p_1, p_8) \leftrightarrow \ell(p_5, p_8)] \\ [o(f, d) \wedge o(i, f)] & \rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_5, p_2)] \\ [o(f, p) \wedge o(g, f)] & \rightarrow [\ell(p_1, p_9) \leftrightarrow \ell(p_5, p_9)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [o(c, b) \wedge o(f, c)] & \rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_8, p_5)] \\ [o(c, p) \wedge o(g, c)] & \rightarrow [\ell(p_1, p_9) \leftrightarrow \ell(p_8, p_9)] \\ [o(m, a) \wedge o(i, m)] & \rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_6, p_1)] \\ [o(m, l) \wedge o(o, m)] & \rightarrow [\ell(p_5, p_7) \leftrightarrow \ell(p_6, p_7)] \\ [o(n, a) \wedge o(i, n)] & \rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_6, p_1)] \end{aligned}$$

Fall 2: Zwischen Ohrengruppen

$$[o(e, b) \wedge o(f, e)] \rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_4, p_5)]$$

$$[o(e, p) \wedge o(g, e)] \rightarrow [\ell(p_1, p_9) \leftrightarrow \ell(p_4, p_9)]$$

$$[o(g, d) \wedge o(i, g)] \rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_9, p_2)]$$

$$[o(k, a) \wedge o(i, k)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_3, p_1)]$$

$$[o(j, a) \wedge o(i, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_4, p_1)]$$

$$[o(j, b) \wedge o(f, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_5) \leftrightarrow \ell(p_4, p_5)]$$

$$[o(j, p) \wedge o(g, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_9) \leftrightarrow \ell(p_4, p_9)]$$

$$[o(l, a) \wedge o(i, l)] \rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)]$$

$$[o(o, a) \wedge o(i, o)] \rightarrow [\ell(p_6, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)]$$

$$[o(o, b) \wedge o(f, o)] \rightarrow [\ell(p_6, p_5) \leftrightarrow \ell(p_7, p_5)]$$

$$[o(p, a) \wedge o(i, p)] \rightarrow [\ell(p_8, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)]$$

Bereits bei der zweiten Äquivalenz im Fall 1 der Planaritätsregeln gibt es einen Widerspruch, der nicht umgangen werden kann.

Insgesamt gibt es hier genau 21 Regeln.

Ohrenregeln Der zweite Teil der Planaritätsregeln von Mühlberg bleibt bestehen. Fall 1 der Planaritätsregeln sind jedoch Regeln innerhalb einer Ohrengruppe. Diese müssen ersetzt werden. Desweiteren müssen die Transitivitätsregeln auf Ohren betrachtet werden.

Transitivitätsregeln auf Ohren:

$$\ell(p_6, p_1) \leftrightarrow \ell(p_5, p_1)$$

Planaritätsregeln:

Fall 1: Innerhalb einer Ohrengruppe

$$\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_1, p_2)$$

$$\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_1, p_8)$$

Fall 2: Zwischen Ohrengruppen

$$[o(e, b) \wedge o(f, e)] \rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_4, p_5)]$$

$$[o(e, p) \wedge o(g, e)] \rightarrow [\ell(p_1, p_9) \leftrightarrow \ell(p_4, p_9)]$$

$$[o(g, d) \wedge o(i, g)] \rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_9, p_2)]$$

$$[o(k, a) \wedge o(i, k)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_3, p_1)]$$

$$[o(j, a) \wedge o(i, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_4, p_1)]$$

$$[o(j, b) \wedge o(f, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_5) \leftrightarrow \ell(p_4, p_5)]$$

$$[o(j, p) \wedge o(g, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_9) \leftrightarrow \ell(p_4, p_9)]$$

$$[o(l, a) \wedge o(i, l)] \rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)]$$

$$[o(o, a) \wedge o(i, o)] \rightarrow [\ell(p_6, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)]$$

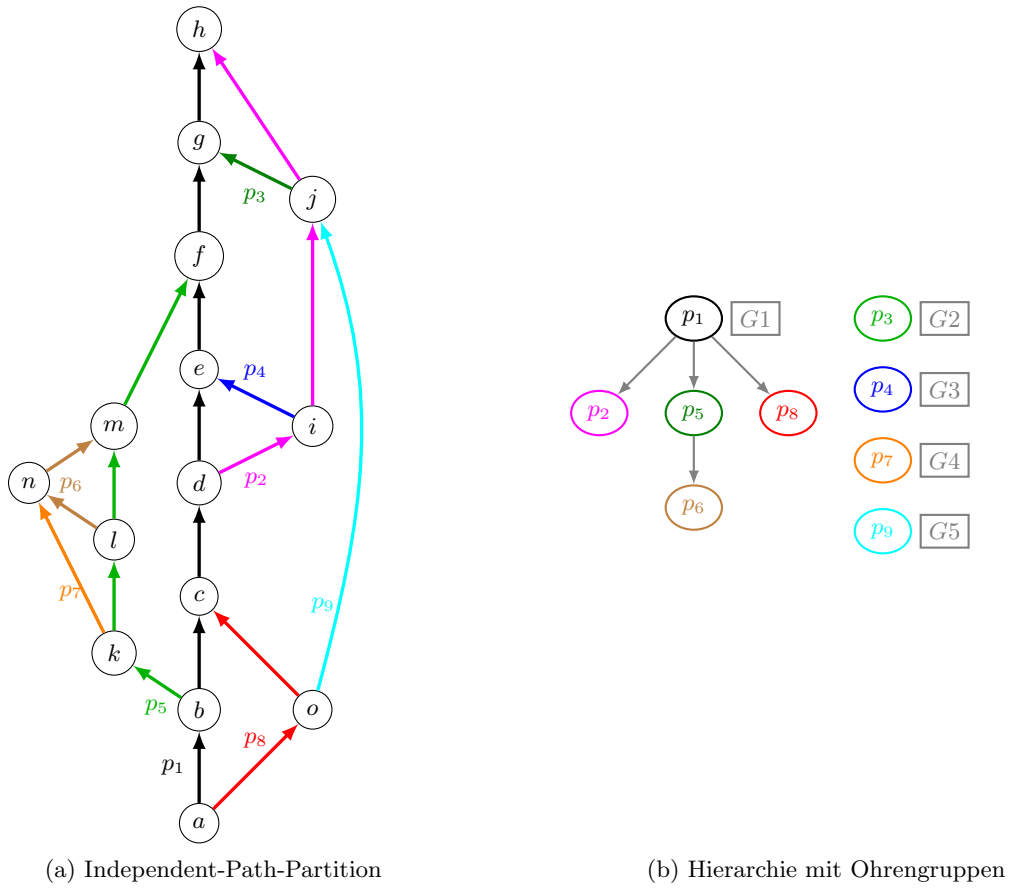
$$[o(o, b) \wedge o(f, o)] \rightarrow [\ell(p_6, p_5) \leftrightarrow \ell(p_7, p_5)]$$

$$[o(p, a) \wedge o(i, p)] \rightarrow [\ell(p_8, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)]$$

In der letzten Äquivalenz von Fall 2 entsteht ein Widerspruch.

Insgesamt gibt es hier jedoch nur 14 Regeln, was eine Ersparnis von 7 Regeln gegenüber den Regeln von Mühlberg entspricht.

4.3.2 Positivbeispiel

Abb. 5. Graph G_2 (Positivbeispiel)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G_2) = & \{ \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_1, p_4\}, \{p_1, p_5\}, \{p_1, p_6\}, \{p_1, p_7\}, \{p_1, p_8\}, \{p_1, p_9\}, \\
& \{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_2, p_5\}, \{p_2, p_6\}, \{p_2, p_7\}, \{p_2, p_9\}, \\
& \{p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\}, \{p_3, p_6\}, \{p_3, p_7\}, \\
& \{p_4, p_5\}, \{p_4, p_6\}, \{p_4, p_7\}, \{p_4, p_9\}, \\
& \{p_5, p_6\}, \{p_5, p_7\}, \{p_5, p_8\}, \{p_5, p_9\}, \\
& \{p_6, p_7\}, \{p_6, p_8\}, \{p_6, p_9\}, \\
& \{p_7, p_8\}, \{p_7, p_9\}, \\
& \{p_8, p_9\} \}
\end{aligned}$$

Regeln von Mühlberg Wiederum werden nur die Regeln mit wahrer Voraussetzung betrachtet. Auch hier existieren keine Transitivitätsregeln auf Ohren.

Planaritätsregeln:

Fall 1: Innerhalb einer Ohrengruppe

$$\begin{aligned}
[o(d, b) \wedge o(f, d)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_2, p_5)] \\
[o(d, o) \wedge o(j, d)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_9) \leftrightarrow \ell(p_2, p_9)] \\
[o(b, a) \wedge o(c, b)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_8) \leftrightarrow \ell(p_5, p_8)] \\
[o(b, d) \wedge o(h, b)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_5, p_2)] \\
[o(c, b) \wedge o(f, c)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_8, p_5)] \\
\\ \\
[o(c, o) \wedge o(j, c)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_9) \leftrightarrow \ell(p_8, p_9)] \\
[o(l, a) \wedge o(h, l)] &\rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_6, p_1)] \\
[o(l, k) \wedge o(n, l)] &\rightarrow [\ell(p_5, p_7) \leftrightarrow \ell(p_6, p_7)] \\
[o(m, a) \wedge o(h, m)] &\rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_6, p_1)]
\end{aligned}$$

Fall 2: Zwischen Ohrengruppen

$$\begin{aligned}
[o(g, d) \wedge o(h, g)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_3, p_2)] \\
[o(e, d) \wedge o(h, e)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_4, p_2)] \\
[o(e, b) \wedge o(f, e)] &\rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_4, p_5)] \\
[o(j, a) \wedge o(h, j)] &\rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_3, p_1)] \\
[o(i, a) \wedge o(h, i)] &\rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_4, p_1)] \\
\\ \\
[o(i, o) \wedge o(j, i)] &\rightarrow [\ell(p_2, p_9) \leftrightarrow \ell(p_4, p_9)] \\
[o(j, a) \wedge o(h, j)] &\rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)] \\
[o(k, a) \wedge o(h, k)] &\rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)] \\
[o(n, a) \wedge o(h, n)] &\rightarrow [\ell(p_6, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)] \\
[o(n, b) \wedge o(f, n)] &\rightarrow [\ell(p_6, p_5) \leftrightarrow \ell(p_7, p_5)] \\
\\ \\
[o(o, a) \wedge o(h, o)] &\rightarrow [\ell(p_8, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)]
\end{aligned}$$

Insgesamt sind es hier 20 Regeln.

Ohrenregeln Wie schon im Negativbeispiel, werden auch hier für Fall 2 die Planaritätsregeln zwischen den Ohrengruppen aus den Regeln von Mühlberg übernommen. Die Planaritätsregeln innerhalb einer Ohrengruppe müssen ersetzt werden. Weiterhin wird die Transitivität auf Ohren betrachtet.

Transitivitätsregeln für Ohren:

$$\ell(p_6, p_1) \leftrightarrow \ell(p_5, p_1)$$

Planaritätsregeln:*Fall 1: Innerhalb einer Ohrengruppe*

$$\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_1, p_8)$$

$$\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_1, p_2)$$

Fall 2: Zwischen Ohrengruppen

$$[o(g, d) \wedge o(h, g)] \rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_3, p_2)]$$

$$[o(e, d) \wedge o(h, e)] \rightarrow [\ell(p_1, p_2) \leftrightarrow \ell(p_4, p_2)]$$

$$[o(e, b) \wedge o(f, e)] \rightarrow [\ell(p_1, p_5) \leftrightarrow \ell(p_4, p_5)]$$

$$[o(j, a) \wedge o(h, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_3, p_1)]$$

$$[o(i, a) \wedge o(h, i)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_4, p_1)]$$

$$[o(i, o) \wedge o(j, i)] \rightarrow [\ell(p_2, p_9) \leftrightarrow \ell(p_4, p_9)]$$

$$[o(j, a) \wedge o(h, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)]$$

$$[o(k, a) \wedge o(h, k)] \rightarrow [\ell(p_5, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)]$$

$$[o(n, a) \wedge o(h, n)] \rightarrow [\ell(p_6, p_1) \leftrightarrow \ell(p_7, p_1)]$$

$$[o(n, b) \wedge o(f, n)] \rightarrow [\ell(p_6, p_5) \leftrightarrow \ell(p_7, p_5)]$$

$$[o(o, a) \wedge o(h, o)] \rightarrow [\ell(p_8, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)]$$

Hier sind es 14 Regeln, was gegenüber den Regeln von Mühlberg eine Verbesserung über 6 Regeln ausmacht.

5 Äquivalenz

Im Folgenden werden zum Beweis die Notationen

- $A(o, \ell)$, falls es eine erfüllbare Zuweisung der Variablen o und ℓ in $R_\ell^p, R_o^t, R^u, R_\ell^t$ und $R_\ell^t(\mathcal{P})$ gibt,
- $A(\tau, \kappa)$, falls es eine erfüllbare Zuweisung der Variablen o und ℓ in $R_\kappa^p, R_\tau^t, R_\kappa^t$ und R^u gibt sowie
- $A(\tau, \sigma)$, falls es eine erfüllbare Zuweisung der Variablen τ und σ in $R^p, R_\sigma^t, R_\tau^t$ und R^u gibt

verwendet.

Variablen besitzen eine erfüllbare Zuweisung, falls die zugehörige Regelmenge mit den gegebenen Variablen erfüllbar ist. Dies ist dann der Fall, wenn es keinen Widerspruch in den Folgerungen der Regeln gibt.

Von Chimani und Zeranski [1] ist bekannt, dass ein Graph genau dann aufwärtsplanar zeichenbar ist, falls $A(\tau, \sigma)$ existiert.

Ebenfalls ist von Mühlberg [5] bekannt, dass auch die Äquivalenz

$$A(\tau, \sigma) \leftrightarrow A(\tau, \kappa)$$

gilt.

Zu zeigen ist nun die Äquivalenz von $A(o, \ell)$ und $A(\tau, \kappa)$.

Durch die Regeldefinitionen ist klar, dass ausschließlich die Äquivalenz der Planaritätsregeln R_ℓ^p sowie der Transitivitätsregeln auf Ohren $R_\ell^t(\mathcal{P})$ gezeigt werden muss, da die Regelmengen R_ℓ^t, R_o^t und R^u nach ihrer Definition äquivalent sind zu den zugehörigen Regelmengen von Mühlberg.

Weiterhin reicht es für den Beweis der Äquivalenz der Regelmenge R_ℓ^p die Äquivalenz der Regeln innerhalb der Ohrengruppen zu beweisen, da alle Regeln zwischen Ohrengruppen gerade den Regeln von Mühlberg [5] entsprechen. Vollständigkeithalber sind diese Regeln trotzdem im Beweis aufgeführt.

Im Äquivalenzbeweis werden nur die Fälle betrachtet, für welche die Voraussetzung korrekt ist. In den folgenden beiden Kapiteln wird zuerst gezeigt, dass es eine erfüllbare Zuweisung von Variablen in den Regeln auf unabhängigen Pfaden von Mühlberg gibt, wenn es eine erfüllbare Zuweisung von Variablen in den Ohren-Regeln gibt. Im zweiten Teil des Kapitels wird das Gegenstück zum ersten Teil bewiesen; gibt es eine erfüllbare Zuweisung der Variablen in den Regeln auf unabhängigen Pfaden, so gibt es auch eine erfüllbare Zuweisung der Variablen für die Ohren-Regeln.

5.1 Zurück: Von den Ohren-Regeln zu Mühlbergs Regeln

Für diese Richtung ist es hilfreich die Kantenpaare $p_i, \mathcal{P}(p_i)$ zu betrachten. Durch die Definition der Ohren ist klar zu sehen, dass das Kantenpaar von Ohr und Elternohr horizontal vergleichbar ist. Es gilt somit $\{p_i, \mathcal{P}^k(p_i)\} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$ für alle $p_i \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$ und $k \in \mathbb{N}$ für das ein $\mathcal{P}^k(p_i)$ existiert.

Im Folgenden wird angenommen, dass es eine erfüllbare Zuweisung $A(o, \ell)$ gibt. Somit sind alle Ohren-Regeln erfüllbar.

Zu zeigen ist hier, dass nun auch die Regeln von Mühlberg eine erfüllbare Zuweisung der Variablen liefert.

Planaritätsregeln:

(Für alle $\{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$, $i \neq j$
mit $V(p_i) \cap V(p_j) = U \neq \emptyset$ gibt es für jedes $u \in U$
für das die Kanten $e \in p_i$, $f \in p_j$ und $g = (x, y) \in p_l$ existieren
mit $e \cap f = u \notin g$ und $\{f, g\}, \{e, g\} \in \mathcal{N}(G)$
ohne, dass es einen (u, x) - oder (y, u) -Pfad in G gibt)

$$(4) \quad \boxed{[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]} \quad [\mathbf{R}^p]$$

Es gibt vier Möglichkeiten, wie die drei Pfade p_i, p_j, p_l zusammengesetzt sein können:

Fall 1: p_i, p_j und p_l liegen in drei verschiedenen Ohrengruppen

Fall 2: p_i und p_j liegen in derselben Gruppe, p_l liegt in einer anderen Gruppe

Fall 3: O.B.d.A liegt p_i in derselben Gruppe wie p_l , aber in einer anderen als p_j

Fall 4: p_i, p_j und p_l liegen in derselben Ohrengruppe

Im Folgenden seien die Voraussetzungen für die Regel r' aus der Regelmenge R_{κ}^p wahr. Ansonsten würde keine Regel r' existieren.

5.1.1 Fall 1, 2 und 3

In den Ohrengruppen gibt es für diese Fälle ausschließlich Regeln der Klasse C1, da es immer mindestens zwei Pfade gibt, welche in unterschiedlichen Ohrengruppen liegen. Da die Voraussetzung zur Anwendung dieser Regel der Voraussetzung in jedem dieser Fälle entspricht, folgt, dass es eine Regel $r \in R_{\ell}^p(C1)$ mit $r = r' \in R_{\kappa}^p$ gibt.

Somit gibt es in diesen drei Fällen immer eine erfüllbare Zuweisung von Variablen $A(\tau, \kappa)$.

5.1.2 Fall 4

Es gilt

$$\mathcal{P}^{k_l}(p_l) = \mathcal{P}^{k_i}(p_i) = \mathcal{P}^{k_j}(p_j)$$

für geeignete minimale k_i, k_j, k_l . Ebenfalls ist Voraussetzung, dass p_i und p_j mindestens einen gemeinsamen Knoten haben, da sonst keine Regel $r' \in R_{\kappa}^p$ existieren würde.

Die Pfade p'_i, p'_j, p'_l in Abbildung 6 bezeichnen jeweils das Ohr $\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i), \mathcal{P}^{k_j-1}$ sowie $\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l)$ bzw. alle Ohren, die zwischen dem jeweiligen Pfad und deren $\mathcal{P}^k(p)$ liegen, wobei $k \in \{k_i, k_j, k_l\}$ und $p \in \{p_i, p_j, p_l\}$ gilt.

Nachfolgend wird die Konstellation der Pfade in drei unterschiedliche Kategorien eingeteilt.

Kategorie 1: $k_i, k_j \geq 1$ und $k_l = 0$

Kategorie 2: $k_i, k_l \geq 1$ und $k_j = 0$

Kategorie 3: $k_i, k_j, k_l \geq 1$

Der Fall, dass $k_i = 0$ gilt, ist äquivalent zum Fall, dass $k_j = 0$ gilt. Somit kann O.B.d.A. angenommen werden, dass k_i immer größer oder gleich 1 ist.

Für jede Kategorie gibt es mehrere Möglichkeiten, wie die Pfade zueinander stehen.

Kategorie 1: Da $k_l = 0$ kann

- (a) p_i Nachkomme von p_j sein oder
- (b) kein Pfad Nachkomme eines anderen sein.

Kategorie 2: Da $k_j = 0$ kann

- (a) p_i Nachkomme von p_l sein,
- (b) p_l Nachkomme von p_i sein oder
- (c) kein Pfad Nachkomme eines anderen sein.

Kategorie 3: Hier gibt es die folgenden Möglichkeiten:

- (a) p_i ist Nachkomme von p_j ,
- (b) p_j ist Nachkomme von p_l ,
- (c) p_l ist Nachkomme von p_j oder
- (d) kein Pfad ist Nachkomme eines anderen.

Für keine der Kategorien gibt es weitere Möglichkeiten, da ansonsten die gewählten k_i und k_j nicht mehr minimal sind.

Kategorie 1

Zuerst wird **Fall (b)** ausgeschlossen. Hier teilen sich p_i und p_j nur gemeinsame Knoten auf dem Pfad p_l . Somit kann es keine Kante $g \in p_l$ geben, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt.

Für **Fall (a)** wird die Abbildung 6(a) betrachtet. Es ist möglich, dass p_i^s derselbe Knoten ist wie p_j^s . Ebenfalls kann p_j^s auf p_l liegen.

Es liege nun der gemeinsame Knoten u von p_i und p_j nicht auf p_l . Es ergibt sich die Regel aus R_κ^p :

$$[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

In den Ohrenregeln gilt durch die Transitivität auf Ohren

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^k(p_i), p_l), \quad \text{für alle } k \text{ mit } k \leq k_i$$

und somit auch explizit

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$$

womit gezeigt ist, dass in Kategorie 1 aus einer erfüllbaren Belegung der Variablen in R_ℓ^p auch eine erfüllbare Belegung der Variablen in R_κ^p folgt.

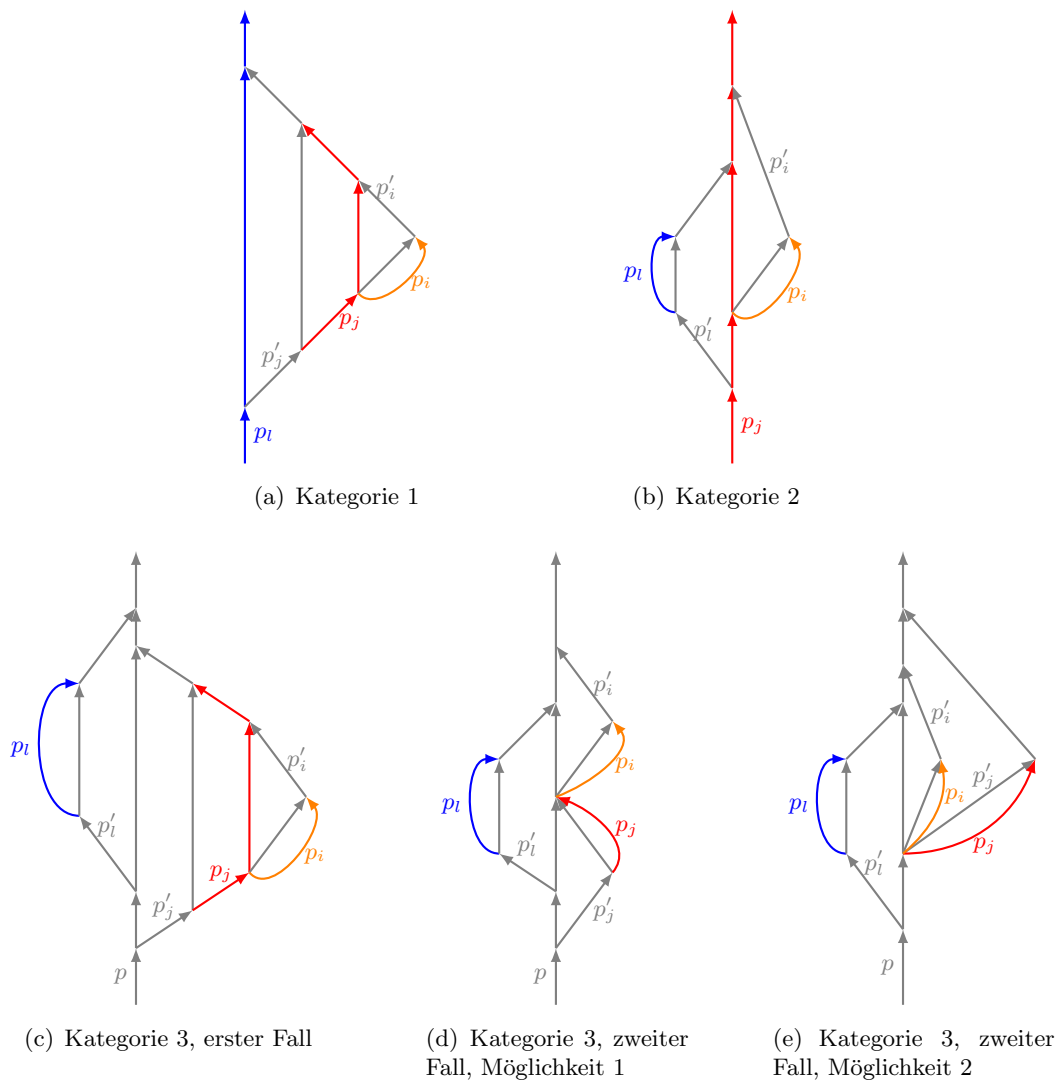


Abb. 6. Fälle für die Kategorien 1 bis 3, Rückrichtung

Kategorie 2

Fall (a) kann ausgeschlossen werden, da hier nur dann ein gemeinsamer Knoten von p_i und p_j existiert, wenn dieser auch auf p_l liegt. **Fall (b)** kann ebenfalls ausgeschlossen werden, da hier ein (u, x) - oder (y, u) -Pfad existiert.

Übrig bleibt **Fall (c)**, wobei Abbildung 6(b) eine der Positionen von p_l darstellt. Es ist möglich, dass p_i^t derselbe Knoten ist wie p_l^t . Der symmetrische Fall, dass p_i^t der gemeinsame Knoten mit p_j ist, ist ebenfalls abgedeckt.

Liegt u nun zwischen $\mathcal{P}^{k_l}(p_l)^s$ und $\mathcal{P}^{k_l}(p_l)^t$, so ergibt sich die folgende Regel aus R_{κ}^p

$$[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

In den Ohrenregeln gibt es für ebendiese Situation die Transitivitätsregeln für Ohren

$$\ell(p_i, p_j) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i), p_j)$$

$$\ell(p_l, p_j) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l), p_j)$$

sowie die Planaritätsregel aus $R_\ell^p(C2)$

$$\ell(\mathcal{P}^{k_i-1}(p_l), p_j) \leftrightarrow \ell(p_j, \mathcal{P}^{k_i-1}(p_i))$$

Durch die Transitivität auf Ohren ergibt sich die Folgerung der Ohrenregeln

$$\ell(p_l, p_j) \leftrightarrow \ell(p_j, p_i)$$

Es muss nun noch gezeigt werden, dass

$$[\ell(p_i, p_j) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

wahr ist.

Es sei die erste Implikation wahr.

Fall 1: Es gilt $\ell(p_i, p_j) \wedge \ell(p_j, p_l)$. Für die zweite Implikation erhalten wir durch die Kantentransitivität

$$\ell(p_i, p_j) \wedge \ell(p_j, p_l) \rightarrow \ell(p_i, p_l)$$

Somit ist auch die zweite Implikation wahr.

Fall 2: Es gilt $\neg\ell(p_i, p_j) \wedge \neg\ell(p_j, p_l)$. Durch Definition der ℓ -Variablen gilt somit $\ell(p_j, p_i) \wedge \ell(p_l, p_j)$. Für die zweite Implikation ergibt sich durch die Kantentransitivität

$$\ell(p_l, p_j) \wedge \ell(p_j, p_i) \rightarrow \ell(p_l, p_i)$$

Da auch in der zweiten Implikation $\ell(p_l, p_j) = \neg\ell(p_j, p_l)$ gilt, ist auch diese wahr.

In natürlicher Sprache kann sogar eine Äquivalenz herausgelesen werden. So sagt die Folgerung aus Mühlbergs Regeln, dass p_i und p_j auf derselben Seite liegen wie p_l und die Ohrenregeln folgern, dass p_i auf einer anderen Seite von p_j liegt als p_l . Dies sind letztendlich nur unterschiedliche Formulierungen für dieselbe Situation.

Gilt nun, dass zusätzlich noch p_l^t oberhalb von $\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i)^s$ liegt, so gibt es keine Planaritätsregel der Klasse C2, sondern eine Transitivitätsregel auf Ohren

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$$

Diese entspricht gerade der Regel aus R_k^p .

Somit folgt aus der ersten Implikation der Ohrenregeln, dass auch die Folgerung der Regeln von Mühlberg wahr ist. Hiermit ist gezeigt, dass in Kategorie 2 aus einer erfüllbaren Belegung der Variablen in R_ℓ^p auch eine erfüllbare Belegung der Variablen in R_k^p folgt.

Kategorie 3:

Vor dem eigentlichen Beweis werden erst die auszuschließenden Fälle betrachtet.

Im **Fall (b)** gibt es nur dann einen gemeinsamen Knoten von p_i und p_j , falls dieser auf p und auch auf p_l liegt. Es gibt somit keine Kante $g \in p_l$, welche die geforderten Eigenschaften erfüllt.

Im **Fall (c)** liegt der gemeinsame Knoten zwar nicht auf p_l , aber durch die Nachkommen-Beziehung von p_l zu p_j gibt es von p_j^s immer einen Pfad zu jeder Kante in p_l

und von jeder Kante in p_l einen Pfad zu p_j^t . Da der gemeinsame Knoten aber gerade p_j^s oder p_j^t sein muss, gibt es keine Kante $g \in p_l$ mit den geforderten Eigenschaften. Der gemeinsame Knoten muss einer der beiden oben genannten sein, da ansonsten k_i, k_j und k_l nicht minimal gewählt gewesen wären.

In **Fall (a)** wird die Abbildung 6(c) betrachtet. Es gibt hier die Regel aus R_κ^p

$$[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

In den Ohrenregeln gibt es die Regeln der Transitivität auf Ohren

$$\ell(p_i, p) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i), p)$$

$$\ell(p_j, p) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_j-1}(p_j), p)$$

$$\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l), p)$$

sowie explizit

$$\ell(p_i, p) \leftrightarrow \ell(p_j, p)$$

Durch die Planaritätsregeln R_ℓ^p ergibt sich

$$\ell(\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l), p) \leftrightarrow \ell(p, \mathcal{P}^{k_j-1}(p_j))$$

Es folgt durch Einsetzen der Transitivitätsregeln auf Ohren

$$\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_j)$$

Da $\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i) = \mathcal{P}^{k_j-1}(p_j)$ gilt, folgt

$$\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_i)$$

Zu zeigen bleibt die Aussage

$$[(\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_j)) \wedge (\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_i))] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

Es gelte nun $\ell(p_l, p) \wedge \ell(p, p_j) \wedge \ell(p, p_i)$. Durch die Kantentransitivität folgt

$$\ell(p_l, p_j) \wedge \ell(p_l, p_i)$$

Sei nun $\neg\ell(p_l, p) \wedge \neg\ell(p, p_j) \wedge \neg\ell(p, p_i)$, was äquivalent ist zu $\ell(p, p_l) \wedge \ell(p_j, p) \wedge \ell(p_i, p)$. Durch Kantentransitivität folgt

$$\ell(p_j, p_l) \wedge \ell(p_i, p_l)$$

Ebenfalls ist die Äquivalenz $\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$ gleichbedeutend wie

$$[\ell(p_i, p_l) \wedge \ell(p_j, p_l)] \vee [\neg\ell(p_i, p_l) \wedge \neg\ell(p_j, p_l)]$$

Gilt in diesem Fall zusätzlich, dass p_i^s unterhalb von $\mathcal{P}^{k_j-1}(p_j)$ liegt, so existiert keine Planaritätsregel der Klasse C2, sondern die Transitivitätsregel auf Ohren

$$\ell(\mathcal{P}^{k_j-1}(p_j), \mathcal{P}^{k_l-1}(p_l)) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i), \mathcal{P}^{k_l-1}(p_l))$$

Explizit gilt weiterhin durch diese Transitivität

$$\ell(p_j, p_l) \leftrightarrow \ell(p_i, p_l)$$

was gerade der Folgerung aus R_κ^p entspricht.

Somit folgt aus der ersten Implikation der Ohrenregeln, dass auch die Folgerung der Regeln von Mühlberg wahr ist.

Für **Fall (d)** sind die Abbildung 6(d) und (e) relevant. Abbildung 6(e) ergibt dieselbe Regel wie Abbildung 6(d), somit reicht es, einen dieser beiden Fälle zu betrachten. In diesem Beweis wird Abbildung 6(d) betrachtet.

In der Regelmenge R_κ^p gibt es in diesem Fall die Regel

$$[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

In den Ohrenregeln gibt es die folgenden Regeln der Transitivität auf Ohren.

$$\ell(p_i, p) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i), p)$$

$$\ell(p_j, p) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_j-1}(p_j), p)$$

$$\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l), p)$$

In den Ohren-Planaritätsregeln ergeben sich die Regeln

$$\ell(\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l), p) \leftrightarrow \ell(p, \mathcal{P}^{k_j-1}(p_j))$$

$$\ell(\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l), p) \leftrightarrow \ell(p, \mathcal{P}^{k_i-1}(p_i))$$

Es folgen durch die Transitivität auf Ohren die Aussagen

$$\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_j)$$

$$\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_i)$$

Es soll die Aussage

$$[(\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_j)) \wedge (\ell(p_l, p) \leftrightarrow \ell(p, p_i))] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

gezeigt werden.

Diese ist jedoch bereits in **Fall (a)** bewiesen worden.

Liegt $\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l)^s$ unterhalb von $\mathcal{P}^{k_j-1}(p_j)^s$, so geht eine (die für p_j) Ohren-Planaritätsregel der Klasse C2 verloren. Stattdessen folgt durch die Transitivitätsregeln auf Ohren

$$\ell(p_j, p_l) \leftrightarrow \ell(p, p_l)$$

Zu zeigen ist die Aussage

$$[\ell(p_j, p_l) \leftrightarrow \ell(p, p_l) \leftrightarrow \ell(p_i, p)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

Es gelte

$$\ell(p_j, p_l) \wedge \ell(p, p_l) \wedge \ell(p_i, p)$$

Somit folgt durch Transitivität der Kanten auch $\ell(p_i, p_l)$ und weiterhin ist die zweite Äquivalenz korrekt.

Es gelte nun

$$\ell(p_l, p_j) \wedge \ell(p_l, p) \wedge \ell(p, p_i)$$

Es folgt durch Transitivität der Kanten auch $\ell(p_l, p_i)$. Ebenfalls ist die zweite Äquivalenz korrekt.

Liegt $\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l)^s$ unterhalb von $\mathcal{P}^{k_j-1}(p_j)^s$ und $\mathcal{P}^{k_l-1}(p_l)^t$ oberhalb von $\mathcal{P}^{k_i-1}(p_i)^t$, so gibt es keine Regel mehr der Klasse C2, dafür jedoch eine weitere Regel der Transitivität auf Ohren.

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p, p_l)$$

Zu zeigen ist die Aussage

$$[\ell(p_j, p_l) \leftrightarrow \ell(p, p_l) \leftrightarrow \ell(p_i, p)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

Allerdings ist diese, wie im vorherigen Fall, äquivalent mit einer Ohren-Planaritätsregel, welche wir bereits bewiesen haben.

Somit folgt aus der ersten Implikation der Ohrenregeln, dass auch die Folgerung der Regeln von Mühlberg wahr ist.

Es gilt für Kategorie 3, dass aus einer erfüllbaren Belegung der Variablen in R_ℓ^p auch eine erfüllbare Belegung der Variablen in R_κ^p folgt.

Es folgt weiterhin, dass $A(\tau, \kappa)$ gilt, falls $A(o, \ell)$ ebenfalls gilt.

5.2 Vorwärts: Von Mühlbergs Regeln zu den Ohren-Regeln

Zuerst wird bewiesen, dass die Transitivitätsregeln auf Ohren korrekt sind. Weiterhin wird jede Klasse der Ohren-Planaritätsregeln einzeln bewiesen, da diese jeweils unterschiedliche Bedingungen voraussetzen. Es muss dann für jede Klasse einzeln gezeigt werden, dass aus $A(\tau, \kappa)$ auch $A(o, \ell)$ folgt.

Im Folgenden sind nochmals alle für den Beweis notwendigen Ohrenregeln aufgelistet, welche unterschiedlich sind zu den Regeln von Mühlberg.

Transitivität auf Ohren: (Für alle $\{p_i, p_j\}, \{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$ mit $p_j = \mathcal{P}(p_i)$ und entweder $p_l = \mathcal{P}(p_j)$ oder $\mathcal{P}(p_l) = p_j$ und $o(p_i^s, p_l^s)$ und $o(p_l^t, p_i^t)$)

$$\boxed{\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)} \quad [\mathbf{R}_{\ell}^t(\mathcal{P})]$$

Planaritätsregeln: (Für alle $\{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$, $i \neq j$ mit $p_i \in O(b_1), p_j \in O(b_2), p_l \in O(b_3)$, es gibt mindestens ein Paar (b_v, b_w) mit $v, w \in \{1, 2, 3\}$ für das gilt $b_v \neq b_w$, sowie die Kanten $e \in p_i, f \in p_j$ und $g = (x, y) \in p_l$ mit $e \cap f = u \notin g$ und $\{f, g\}, \{e, g\} \in \mathcal{N}(G)$ und es gibt keinen (u, x) - oder (y, u) -Pfad in G)

$$\boxed{[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]} \quad [\mathbf{R}_{\ell}^p(\mathbf{C1})]$$

(Für alle $\{p_i, p_j\}, \{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$ mit $\mathcal{P}(p_i) = \mathcal{P}(p_j) = p_l$ und p_i und p_j sind verschachtelt auf p_l)

$$\boxed{[\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_l, p_j)]} \quad [\mathbf{R}_{\ell}^p(\mathbf{C2})]$$

5.2.1 Transitivität auf Ohren

Es sei $R_{\ell}^p \ni r = \ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$ für $p_j = \mathcal{P}(p_i)$.

Sei $p_l = \mathcal{P}(p_j)$. Da p_i nur dann ein Nachkomme von p_j ist, falls höchstens ein gemeinsamer Knoten von p_i und p_j auf p_l liegt, existiert hier auch die Regel von Mühlberg

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$$

Diese ist äquivalent zur Regel der Transitivität auf Ohren.

Sei $p_j = \mathcal{P}(p_l)$. Hierbei gilt weiterhin $o(p_i^s, p_l^s)$ sowie $o(p_l^t, p_i^t)$. Somit liegen beide gemeinsamen Knoten von p_i und p_j zwischen p_l^s und p_l^t und es gibt folglich eine Regel von Mühlberg

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$$

Diese ist äquivalent zur Regel der Transitivität auf Ohren.

Es folgt somit aus $A(\tau, \kappa)$ auch $A(o, \ell)$ für die Transitivitätsregeln auf Ohren.

5.2.2 Planaritätsregel der Klasse C1

Hierbei handelt es sich um Regeln aus der Regelmengemenge R_κ^p und somit sind diese immer genau dann erfüllbar, falls die zugehörige Regel aus R_κ^p erfüllbar ist. Da allen Variablen der Regeln für unabhängige Pfade eine erfüllbare Belegung zugewiesen wurde, ist auch die Regel der Klasse C1 erfüllbar.

5.2.3 Planaritätsregel der Klasse C2

Es gibt in der Regelmengemenge der Ohrenzerlegung nur dann eine Regel der Klasse C2, falls zwei Ohren p_i, p_j verschachtelt sind, wie auf Abbildung 7 dargestellt. Es gelte O.B.d.A., dass p_i^s oberhalb von p_j^s liegt.

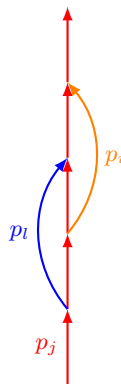


Abb. 7. Verschachtelte Ohren

Sei $R_\ell^p(C2) \ni r = \ell(p_i, p_j) \leftrightarrow \ell(p_j, p_i)$. In der Regelmengemenge R_κ^p gibt es die Regeln:

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$$

$$\ell(p_l, p_i) \leftrightarrow \ell(p_l, p_j)$$

Durch Kombination dieser beiden Regeln folgt

$$\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l) \leftrightarrow \ell(p_i, p_j)$$

Hieraus folgt direkt die gerade betrachtete Regel der Klasse C2.

Somit gilt für die Klasse C2, dass aus $A(\tau, \kappa)$ auch $A(o, \ell)$ folgt und weiterhin, dass die Aussage für alle Regeln in R_ℓ^p gilt.

6 Implementation und Formelmenge

6.1 Berechnung der Ohrengruppen

In diesem Kapitel wird der Algorithmus zur Konstruktion von Ohrengruppen vorgestellt. Weiterhin wird die Korrektheit des Algorithmus gezeigt und ein Beispiel für die Berechnung durchgeführt.

Der Aufruf von *IndependentPaths*(G) berechnet die unabhängigen Pfade nach dem Algorithmus von Mühlberg, welcher schon in Kapitel 3.3.3 vorgestellt wurde. Durch diesen Algorithmus ergeben sich zum einen das Farb-Array und zum anderen das Array mit allen Kanten in umgekehrter Bearbeitungsreihenfolge. Von diesen beiden Arrays wird mittels Algorithmus 1 ein Array \mathcal{K} aller unabhängigen Pfade berechnet.

Algorithmus 2 : Berechnung von Ohrengruppen

```

Input   :  $G = (V, E)$ 
Data   : Independent-Path-Partition  $\mathcal{K}$  von  $G$  (Array),  $O_p(b)$  für alle  $p \in \mathcal{K}$ ,
            $O(b)$  für jedes Rückgrat  $b$  in  $G$ ,  $O(G)$ , Array BACKBONES
Result : Kantenpartition  $O(G)$ 
1 begin
2   IP, COLORS  $\leftarrow$  IndependentPaths( $G$ )
3           // IP, COLORS werden beide im Algorithmus
               IndependentPaths( $G$ ) berechnet
4    $\mathcal{K} \leftarrow$  CALCULATEPATHS(IP, COLORS)
5           // Berechnung mittels Algorithmus 1
6   for  $index = 1$  to  $\mathcal{K}.length$  do
7      $\lfloor$  findEars ( $index$ )
8   findEars ( $index$ )
9     Path  $p \leftarrow \mathcal{K}[index]$ 
10    if  $\mathcal{P}(p) == null$  then
11       $\lfloor$   $O(p) \leftarrow \{p\}$ 
12       $\lfloor$  BACKBONES[ $index$ ]  $\leftarrow p$ 
13    Path  $b \leftarrow$  BACKBONES[ $index$ ]
14    for  $i = index + 1$  to  $\mathcal{K}.length$  do
15      if  $\mathcal{K}[i] \in p$  then
16        if  $\mathcal{P}(\mathcal{K}[i]) == null$  then
17           $\lfloor$   $\mathcal{P}(\mathcal{K}[i]) \leftarrow p$ 
18           $\lfloor$  BACKBONES[ $i$ ]  $\leftarrow b$ 
19           $\lfloor$   $O(b) \leftarrow O(b) \cup \{\mathcal{K}[i]\}$ 
20     $O(G) \leftarrow \{O(b) \mid b \text{ ist Rückgrat in } G\}$ 
21  return  $O(G)$ 

```

6.1.1 Erklärung

Algorithmus 2 konstruiert eine Aufteilung der unabhängigen Pfade, sodass am Ende eine Ohrenzerlegung entsteht. Hierfür wird zuerst eine Partitionierung des Graphen in unabhängige Pfade berechnet und danach für jeden Pfad dieser Partition die zugehörigen Ohren ermittelt.

Hierfür wird nur dann ein Pfad p' zur Ohrengruppe von p hinzugefügt, falls p' bisher zu keiner Gruppe gehörte.

Das Array BACKBONES enthält für jeden Pfad p_i das zugehörige Rückgrat in G . Die Laufzeit des Algorithmus ist quadratisch, da für jeden Pfad jeder weitere mit größerem Index betrachtet wird. Zur Verbesserung der Laufzeit wäre es alternativ möglich, die Menge \mathcal{K} nur einmalig zu durchlaufen und für ein Paar von unabhängigen Pfaden zu prüfen, ob

$$\{\mathcal{K}[i]^s \in \mathcal{K}[j] \mid j < i\} \cap \{\mathcal{K}[i]^t \in \mathcal{K}[j] \mid j < i\}$$

nicht leer ist. Es gehören in diesem Berechnungsansatz all die Ohren $\mathcal{K}[i]$ zur Ohrengruppe von $\mathcal{K}[j]$, welche in der obigen Schnittmenge enthalten sind.

6.1.2 Korrektheit

Für die Korrektheit des Algorithmus müssen die folgenden Aussagen für den Stand der Partition nach Terminierung bewiesen werden:

1. die Aufteilung des Graphen ist eine Ohrenzerlegung
2. jeder Pfad $p \in \mathcal{K}$ liegt in genau einer Ohrengruppe (insbesondere somit auch jedes Rückgrat)

Die Berechnung der Partition in unabhängige Pfade ist nach dem Beweis von Mühlberg [5, Kapitel 6.2] korrekt.

Die Korrektheit des restlichen Algorithmus wird mittels vollständiger Induktion über die Anzahl Pfade in der Partition von unabhängigen Pfaden bewiesen.

Induktionsvoraussetzung:

1. Zu jedem Zeitpunkt liegen in der Menge $O(b)$ nur Ohren, welche Nachkommen von b sind.
2. Jeder Pfad $p_i \in \mathcal{K}$ liegt höchstens in einer Ohrengruppe $O(b)$.

Induktionsanfang ($i = 0$): Alle Mengen $O(b)$ und $O(G)$ sind leer. Somit ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt.

Induktionsschritt ($i \rightarrow i + 1$): Es gelte für alle $O_p(b)$ die Induktionsvoraussetzung.

Für den Pfad $\mathcal{K}[i + 1]$ ist das Rückgrat b entweder gerade der Pfad selbst, falls $\mathcal{K}[i + 1]$ noch in keiner Ohrengruppe liegt, oder unterscheidet sich vom betrachteten Pfad.

Es gilt für alle Pfade $\mathcal{K}[j]$ mit $j > i + 1$.

- $\mathcal{K}[j] \in \mathcal{K}[i + 1]$: Gilt $\mathcal{P}(\mathcal{K}[j]) = \text{null}$, so gehört $\mathcal{K}[j]$ noch zu keiner Ohrengruppe und $\mathcal{K}[j]$ wird zur Menge $O(b)$ hinzugefügt.

Es folgt, dass Punkt 1 der Induktionsvoraussetzung erfüllt ist.

Gilt $\mathcal{P}(\mathcal{K}[j]) \neq \text{null}$, so gehört $\mathcal{K}[j]$ bereits zu einer anderen Ohrengruppe und wird nicht zur Menge $O(b)$ hinzugefügt. Somit ist auch Punkt 2 der Induktionsvoraussetzung erfüllt.

- $\mathcal{K}[j] \notin \mathcal{K}[i + 1]$: j wird um eins erhöht und die Schleife für $j + 1$ erneut durchlaufen. An der Menge $O(b)$ ändert sich nichts. Somit gilt die Induktionsvoraussetzung weiterhin.

Die Aufteilung des Graphen ist eine maximale Ohrenzerlegung, da ansonsten in Zeile 19 ein Ohr p' nicht zur Ohrengruppe des betrachteten Pfades hinzugefügt wurde. Dies kann allerdings nur passieren, falls das Ohr p' ein Elternohr besitzt. In diesem Fall gehört p' jedoch schon zu einer Ohrengruppe.

Ebenso können keine weiteren Pfade zu einer Ohrengruppe hinzugefügt werden, da ansonsten ein Pfad aus einer anderen Ohrengruppe herausgenommen werden müsste. Durch das Aufrufen des Algorithmus für jeden einzelnen Pfad der Partition von unabhängigen Pfaden gehören am Ende all diejenigen Pfade p' zur Menge $O(b)$, für die p' ein Nachkomme von b ist.

Durch die Konstruktion der unabhängigen Pfade kann kein Ohr p_i auf einem Ohr p_j liegen, falls $i < j$ gilt. Das Ohr p_i wird vor dem Ohr p_j betrachtet, somit müsste der End- bzw. der Anfangspunkt des Pfades p_i auf einem zu diesem Zeitpunkt unmarkierten Knoten enden, was nach dem Algorithmus zur Berechnung der unabhängigen Pfade nicht möglich ist.

Da für jeden Pfad eine Ohrengruppe berechnet wird, liegt auch jeder Pfad bei Terminierung des Algorithmus in einer Ohrengruppe. Ebenfalls folgt bei Terminierung des Algorithmus, dass die Menge $O(G)$ alle Mengen $O(b)$ enthält, da in Zeile 20 alle $O(b)$ in $O(G)$ vereinigt werden.

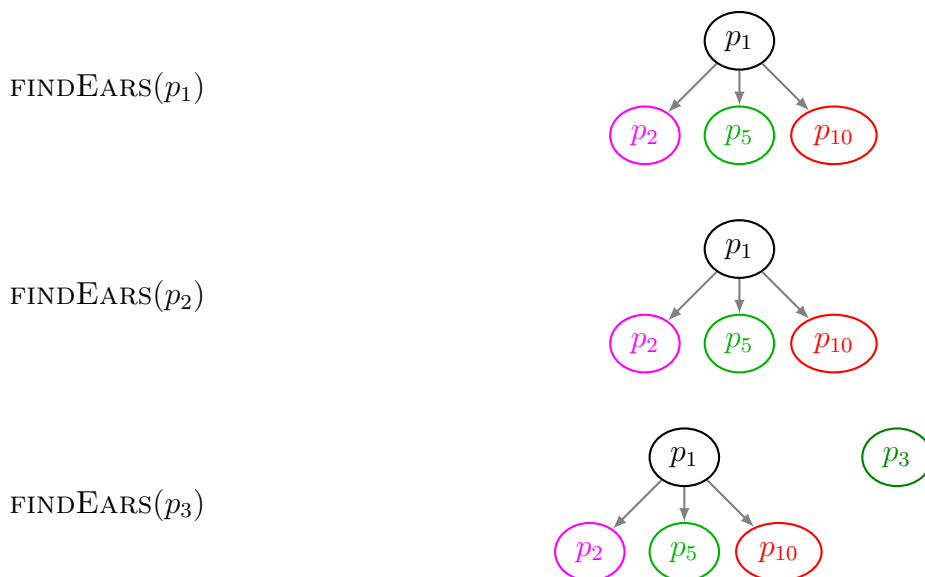
Insgesamt folgt somit, dass der Algorithmus korrekt ist.

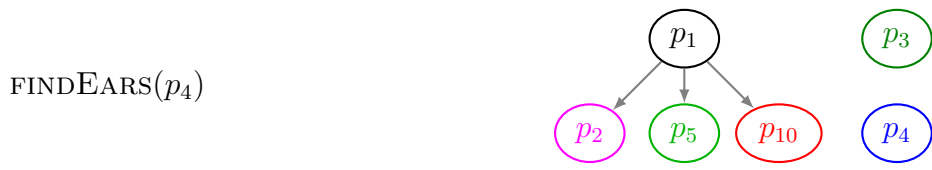
6.1.3 Beispiel

Abbildung 8 stellt ein Beispiel dar, bei dem es zwei Pfade (p_6, p_7) gibt, mit $p_6 \in p_7$ sowie $p_7 \in p_6$ gibt.

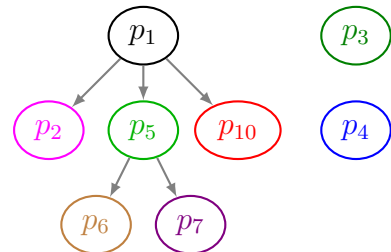
Die Berechnung der Ohrengruppen verläuft grafisch wie folgt.

Aufruf **grafische Darstellung der Ohrengruppen nach Beendigung des Aufrufs**

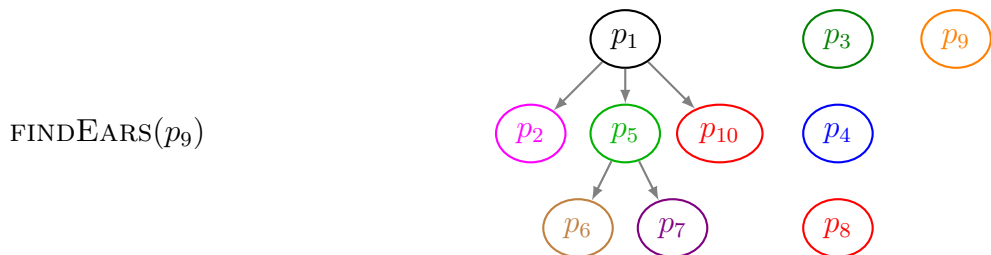
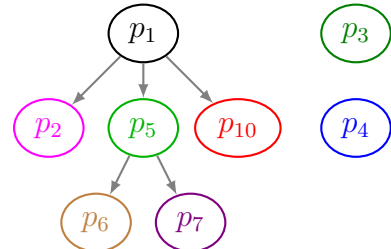




FINDEARS(p_6)
 eigentlich: $\mathcal{P}(p_7) \leftarrow p_6$
 $O(p_6) \cup \{p_7\}$
 es gilt aber: $\mathcal{P}(p_7) = p_5$
 Daher keine Änderung.



FINDEARS(p_7)
 eigentlich: $\mathcal{P}(p_6) \leftarrow p_7$
 $O(p_7) \cup \{p_6\}$
 es gilt aber: $\mathcal{P}(p_6) = p_5$
 Daher keine Änderung.



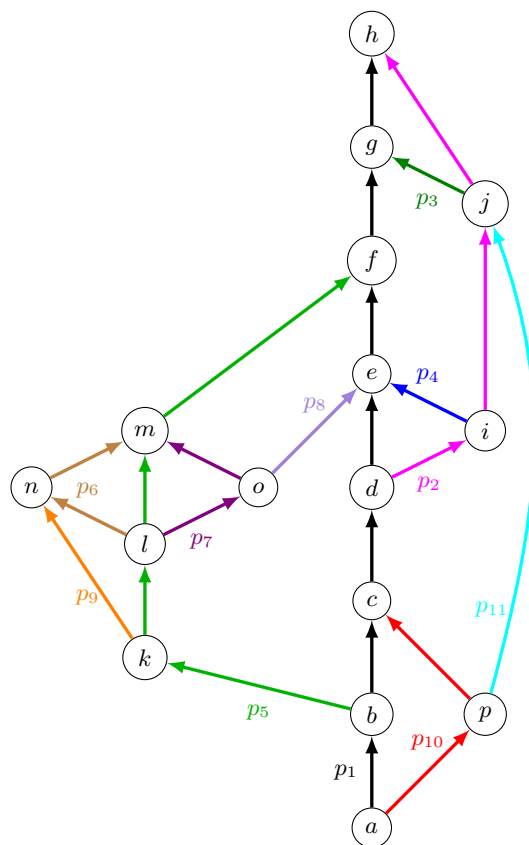
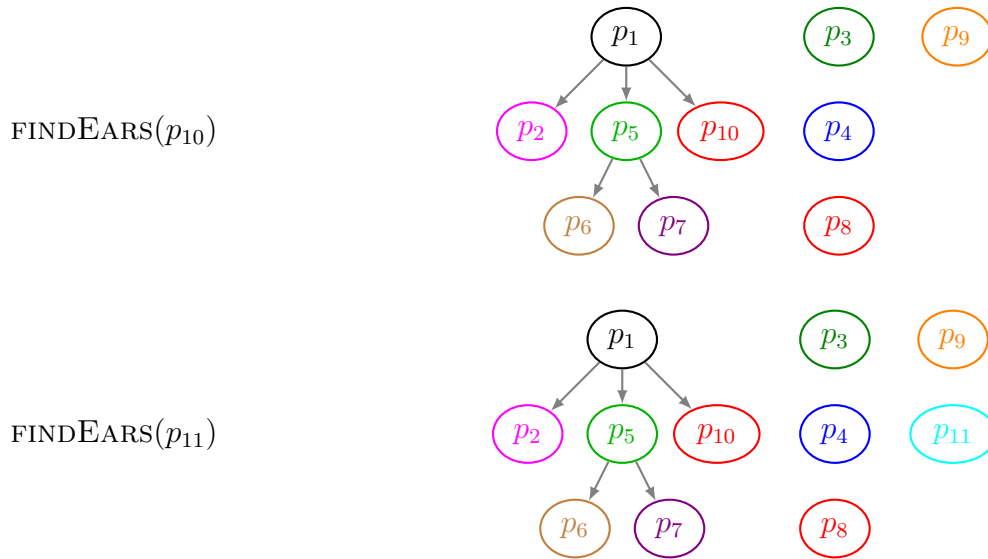


Abb. 8. Beispiel für Algorithmus-Durchführung

6.2 Größenordnung der Formelmenge

In den Beispielen aus Kapitel 4.3 ist die Anzahl der Formeln reduziert worden. Somit liegt die Vermutung nahe, dass sich die Formelmenge durch die Ohrenregeln verringert. Dass die Größenordnung der Ohrenregeln maximal der von Mühlbergs Regeln entspricht, soll dieses Kapitel verdeutlichen.

Im Folgenden wird jeweils eine Regel der drei neuen Regelmengen betrachtet und dafür eine äquivalente Regel von Mühlberg gesucht.

Transitivität auf Ohren: Hier existiert die Regel

$$R_\ell^t(\mathcal{P}) \ni r = \ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$$

Für die Regeln aus der Regelmenge von Mühlberg ist es nicht relevant, ob die erste ($p_l = \mathcal{P}(p_j)$) oder die zweite ($p_j = \mathcal{P}(p_l), o(p_i^s, p_l^s) \wedge o(p_l^t, p_i^t)$) Voraussetzung erfüllt ist. In jedem dieser Fälle existiert die Regel

$$R_\kappa^p \ni r' = [o(u, p_l^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

Somit gibt es eine äquivalente Regel r' von Mühlberg für die Regel r der Ohrenregeln.

Planaritätsregeln Klasse C1: Da für die Regelmenge $R_\ell^p(C1)$ gilt, dass sie eine Teilmenge der Regelmenge R_κ^p ist, gibt es auch hier jeweils eine äquivalente Regel von Mühlberg für jede Ohren-Planaritätsregel der Klasse C1.

Planaritätsregeln Klasse C2: Hier existiert die Regel

$$R_\ell^p(C2) \ni r = \ell(p_i, p_j) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)$$

In der Regelmenge von Mühlberg gibt es in den Planaritätsregeln die folgende Regel:

$$R_\kappa^p \ni r' = [o(u, p_l^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]$$

Wie schon in Kapitel 5.1 erklärt, ist die Folgerung von r' äquivalent zur Regel r . Somit gibt es auch hier eine äquivalente Regel r' für die Regel r .

Insgesamt folgt somit, dass die Menge von Ohrenregeln maximal so groß ist, wie die Menge der Planaritätsregeln von Mühlberg.

Sind zwei Pfade p_i, p_j auf p_l verschachtelt, so gibt es in der Regelmenge R_ℓ^p nur eine Regel der Klasse C2. In der Regelmenge R_κ^p gibt es hier jedoch zwei Regeln.

Somit bewirken die Ohrenregeln sogar eine Reduktion der Menge an Regeln.

7 Weiterführender Ansatz: Superohren

Im Folgenden wird ein Ansatz vorgestellt, der Ohren, welche zwischen einem Ohr p und seinem Eltern-Ohr $\mathcal{P}(p)$ verlaufen, mit in die Ohrengruppe von p integriert. Hierbei macht es keinen Unterschied, in welcher Richtung das Ohr zwischen p und $\mathcal{P}(p)$ verläuft.

Definition 20 (Zwischenohr). *Sei p ein Ohr in G . Gibt es ein Ohr z in G , sodass $z^s \in p$ und $z^t \in \mathcal{P}(p)$ oder $z^t \in p$ und $z^s \in \mathcal{P}(p)$ gilt, so ist z ein Zwischenohr von p .*

Das Ohr p wird als Zwischen-Eltern-Ohr bezeichnet und im Folgenden mittels der Notation $\mathcal{P}_Z(z) = p$ verwendet.

Definition 21 (Superohr). *Sei p ein Ohr in G . Dann bezeichnet*

$$k_p = \{p\} \cup \{z \mid \mathcal{P}_Z(z) = p\}$$

ein Superohr.

Gibt es keine Zwischenohren für p , so ist $k = \{p\}$ ein Superohr.

7.1 Regeldefinition

Zur vereinfachten Darstellung der neuen Regeln, gilt im Folgenden die Notation $w < v$, falls eine Variable $o(v, w)$ existiert.

Ebenso wie für unabhängige Pfade benötigen auch Superohren eine Vergleichbarkeit.

Definition 22 (Horizontale Vergleichbarkeit von Superohren). *Seien k_i, k_j Superohren. k_i und k_j sind horizontal vergleichbar, falls es Pfade $p_i \in k_i$ und $p_j \in k_j$ gibt, mit $\{p_i, p_j\} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(G)$.*

Anmerkung 4.

$$\mathcal{S} =_{\text{def}} \{k \mid k \text{ ist Superohr}\}$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(G) =_{\text{def}} \{\{k_i, k_j\} \mid k_i \text{ und } k_j \text{ sind horizontal vergleichbare Superohren}\}$$

Definition 23 (Verschachtelung von Superohren). *Seien k_i, k_j Superohren in G und es gilt $\mathcal{P}(k_i) = \mathcal{P}(k_j) = k_l$. Dann sind k_i und k_j verschachtelt auf k_l , falls es auf k_l die Knoten $v_i^1, v_i^2 \in k_i$ sowie $v_j^1, v_j^2 \in k_j$ mit $v_i^1 < v_j^1 < v_i^2 < v_j^2$ gibt.*

Zur einfacheren Darstellung der Regeln sei für Superohren k^s der niedrigste Knoten in k und k^t der höchste Knoten in k . k^s ist dann am niedrigsten, wenn es keinen Knoten $v \in k$ gibt mit $v < k^s$. Analog gilt die Aussage für k^t .

Es werden für einen korrekten Test auf Aufwärtsplanarität zwei neue Regelmengen benötigt.

Wie schon für einfache Ohren benötigen auch Superohren eine erweiterte Transitivitätsbedingung (Regelmenge $R_{\ell}^t(\mathcal{S})$).

Ebenso werden weitere Planaritätsregeln für die Zwischenohren benötigt (Regelmenge $R_\ell^p(\mathcal{S}1)$ und $R_\ell^p(\mathcal{S}1)$).

Die Planaritätsbedingungen auf Ohren, welche nicht in derselben Ohrengruppe liegen, bleiben erhalten ($R_\ell^p(\mathcal{P})$).

Kantentransitivität: (Für alle $\{k_i, k_j\}, \{k_i, k_l\}, \{k_j, k_l\} \in \mathcal{N}_S(G)$)

$$(3a) \quad \boxed{\ell(k_i, k_j) \wedge \ell(k_j, k_l) \rightarrow \ell(k_i, k_l)} \quad [\mathbf{R}_\ell^t]$$

Transitivität auf Superohren: (Für alle $\{k_i, k_j\}, \{k_i, k_l\}, \{k_j, k_l\} \in \mathcal{N}_S(G)$
mit $k_j = \mathcal{P}(k_i)$ und entweder $k_l = \mathcal{P}(k_j)$
oder $\mathcal{P}(k_l) = k_j$ und $o(k_i^s, k_l^s)$ und $o(k_l^t, k_i^t)$)

$$(3b) \quad \boxed{\ell(k_i, k_l) \leftrightarrow \ell(k_j, k_l)} \quad [\mathbf{R}_\ell^t(\mathcal{S})]$$

Planaritätsregeln: (Für alle $\{p_i, p_l\}, \{p_j, p_l\} \in \mathcal{N}_K(G)$, $i \neq j$
mit $p_i \in O(b_1), p_j \in O(b_2), p_l \in O(b_3)$,
es gibt mindestens ein Paar (b_v, b_w)
mit $v, w \in \{1, 2, 3\}$ für das gilt $b_v \neq b_w$,
sowie die Kanten $e \in p_i, f \in p_j$ und $g = (x, y) \in p_l$
mit $e \cap f = u \notin g$ und $\{f, g\}, \{e, g\} \in \mathcal{N}(G)$
und es gibt keinen (u, x) - oder (y, u) -Pfad in G)

$$(4a) \quad \boxed{[o(u, p_i^s) \wedge o(p_l^t, u)] \rightarrow [\ell(p_i, p_l) \leftrightarrow \ell(p_j, p_l)]} \quad [\mathbf{R}_\ell^p(\mathcal{P})]$$

(Für alle $\{k_i, k_j\}, \{k_i, k_l\}, \{k_j, k_l\} \in \mathcal{N}_S(G)$
mit $\mathcal{P}(k_i) = \mathcal{P}(k_j) = k_l$
und k_i und k_j sind verschachtelt auf k_l)

$$(4b) \quad \boxed{[\ell(k_i, k_l) \leftrightarrow \ell(k_l, k_j)]} \quad [\mathbf{R}_\ell^p(\mathcal{S}1)]$$

(Für alle $\{p, z\}, \{\mathcal{P}(p), z\} \in \mathcal{N}_K(G)$ mit $\mathcal{P}_Z(z) = p$)

$$(4c) \quad \boxed{[o(z^t, p^s) \wedge o(p^t, z^t)] \rightarrow [\ell(z, p) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}(p), p)]}$$

$$\boxed{[o(z^t, p^t) \vee o(p^s, z^s)] \rightarrow [\ell(p, z) \leftrightarrow \ell(\mathcal{P}(p), p)]} \quad [\mathbf{R}_\ell^t(\mathcal{S}2)]$$

Es gilt zusätzlich

$$\ell(k_i, k_j) \rightarrow \ell(p_i, p_j) \text{ für alle } p_i \in k_i, p_j \in k_j$$

Diese Folgerung ist jedoch schon impliziert und muss aus diesem Grunde nicht extra aufgeführt werden.

7.2 Beispiele

In den folgenden Beispielen werden jeweils die folgenden Voraussetzungen angenommen:

- Die Färbung der Kanten ist eine Partition in unabhängige Pfade des Graphen.
- Die gestrichelten Linien in der Hierarchie-Darstellung der Pfade geben die Nachkommen-Beziehung der Zwischenohren an.
- Es werden nur Regeln betrachtet, deren Voraussetzungen wahr sind.

7.2.1 Negativbeispiel

Für dieses Beispiel wird erneut Abbildung 4(a) herangezogen. In Kapitel 4.3 wurden an dem gegebenen Graphen die Regeln ohne Zwischenohren schon angewendet. Im Folgenden werden zunächst die Menge der Superohren sowie die Menge aller horizontal vergleichbaren Superohren definiert.

$$\mathcal{S} = \left\{ \underbrace{\{p_1\}}_{k_1}, \underbrace{\{p_2, p_3, p_4\}}_{k_2}, \underbrace{\{p_5\}}_{k_3}, \underbrace{\{p_6, p_7\}}_{k_4}, \underbrace{\{p_8, p_9\}}_{k_5} \right\}$$

$$\mathcal{N}_S(G) = \left\{ \{k_1, k_2\}, \{k_1, k_3\}, \{k_1, k_4\}, \{k_1, k_5\}, \right. \\ \left. \{k_2, k_3\}, \{k_2, k_4\}, \{k_3, k_4\}, \{k_3, k_5\}, \{k_4, k_5\} \right\}$$

Somit liegen alle Superohren in derselben Ohrengruppe, wie auch in Abbildung 9 zu sehen ist.

Die neuen Regeln zu den Superohren sehen im Detail dann wie folgt aus:

Transitivität auf Superohren:

$$\begin{aligned} \ell(k_3, k_1) &\leftrightarrow \ell(k_4, k_1) \\ \ell(k_3, k_1) &\leftrightarrow \ell(k_5, k_1) \end{aligned}$$

Planaritätsregeln:

Regeln aus $R_\ell^p(\mathcal{P})$: Hier gibt es keine Regeln, da es keine zwei unterschiedlichen Ohrengruppen gibt (siehe Abbildung 9).

Regeln aus $R_\ell^p(\mathcal{S1})$:

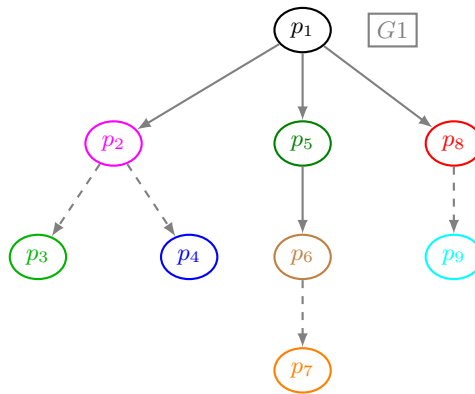
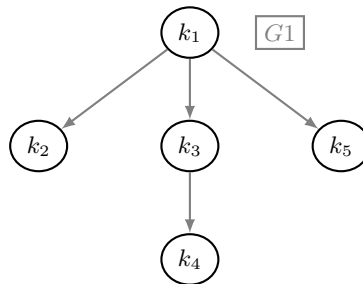
$$\begin{aligned} \ell(k_2, k_1) &\leftrightarrow \ell(k_1, k_3) \\ \ell(k_3, k_1) &\leftrightarrow \ell(k_1, k_5) \\ \ell(k_2, k_1) &\leftrightarrow \ell(k_1, k_5) \end{aligned}$$

Regeln aus $R_\ell^p(\mathcal{S2})$:

$$\begin{aligned} [o(h, d) \wedge o(i, h)] &\rightarrow [\ell(p_3, p_2) \leftrightarrow \ell(p_1, p_2)] \\ [o(e, d) \wedge o(i, e)] &\rightarrow [\ell(p_4, p_2) \leftrightarrow \ell(p_1, p_2)] \\ [o(o, n) \vee o(m, l)] &\rightarrow [\ell(p_6, p_7) \leftrightarrow \ell(p_5, p_6)] \\ [o(g, c) \vee o(a, p)] &\rightarrow [\ell(p_8, p_9) \leftrightarrow \ell(p_1, p_8)] \end{aligned}$$

Es gibt einen Widerspruch in der zweiten Regel der Menge $R_\ell^p(\mathcal{S1})$.

Insgesamt haben wir 9 Regeln. Ohne die Betrachtung der Zwischenohren waren es hier noch 14 Regeln (Beispiel 4.3.1).

Abb. 9. Hierarchie der Ohren mit Zwischenohren im Graph $G1$ Abb. 10. Hierarchie der Superohren im Graph $G1$

7.2.2 Positivbeispiel

Für dieses Beispiel wird erneut Abbildung 5(a) herangezogen. Im Folgenden werden zunächst die Menge der Superohren sowie die Menge aller horizontal vergleichbaren Superohren definiert.

$$\mathcal{S} = \{ \underbrace{\{p_1\}}_{k_1}, \underbrace{\{p_2, p_3, p_4\}}_{k_2}, \underbrace{\{p_5\}}_{k_3}, \underbrace{\{p_6, p_7\}}_{k_4}, \underbrace{\{p_8\}}_{k_5}, \underbrace{\{p_9\}}_{k_6} \}$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}}(G) = \{ \{k_1, k_2\}, \{k_1, k_3\}, \{k_1, k_4\}, \{k_1, k_5\}, \{k_1, k_6\}, \\ \{k_2, k_3\}, \{k_2, k_4\}, \{k_2, k_6\}, \{k_3, k_4\}, \{k_3, k_5\}, \{k_3, k_6\}, \\ \{k_4, k_5\}, \{k_4, k_6\}, \{k_5, k_6\} \}$$

Die Hierarchie der Superohren und implikativ die Aufteilung der Ohrengruppen sind in Abbildung 11 dargestellt.

Die neuen Regeln zu den Superohren sehen im Detail wie folgt aus:

Transitivität auf Superohren:

$$\ell(k_3, k_1) \leftrightarrow \ell(k_4, k_1)$$

Planaritätsregeln:

Regeln aus $R_{\ell}^p(\mathcal{P})$:

$$[o(i, o) \wedge o(j, i)] \rightarrow [\ell(p_2, p_9) \leftrightarrow \ell(p_4, p_9)]$$

$$[o(j, a) \wedge o(h, j)] \rightarrow [\ell(p_2, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)]$$

$$[o(o, a) \wedge o(h, o)] \rightarrow [\ell(p_8, p_1) \leftrightarrow \ell(p_9, p_1)]$$

Regeln aus $R_\ell^p(\mathcal{S}1)$:

$$\ell(k_2, k_1) \leftrightarrow \ell(k_1, k_3)$$

$$\ell(k_3, k_1) \leftrightarrow \ell(k_1, k_5)$$

Regeln aus $R_\ell^p(\mathcal{S}2)$:

$$[o(g, d) \wedge o(h, g)] \rightarrow [\ell(p_3, p_2) \leftrightarrow \ell(p_1, p_2)]$$

$$[o(e, d) \wedge o(h, e)] \rightarrow [\ell(p_4, p_2) \leftrightarrow \ell(p_1, p_2)]$$

$$[o(n, m) \vee o(l, k)] \rightarrow [\ell(p_6, p_7) \leftrightarrow \ell(p_5, p_6)]$$

Insgesamt sind es 9 Regeln. Im Beispiel 4.3.2 ohne Zwischenohren waren es noch 14 Regeln.

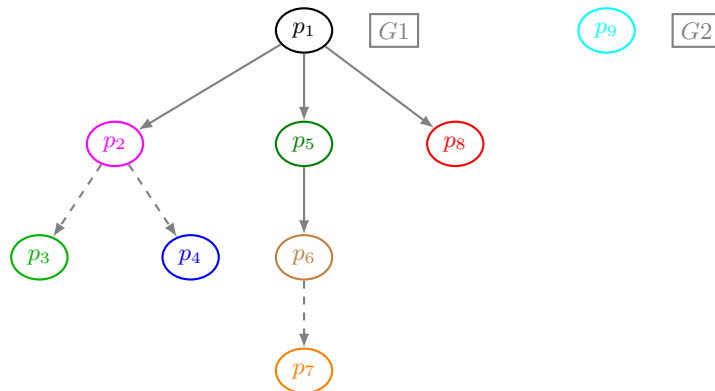


Abb. 11. Hierarchie der Ohren mit Zwischenohren im Graph **G1**

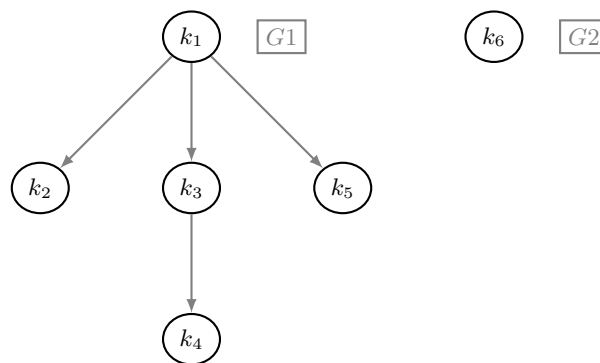


Abb. 12. Hierarchie der Superohren im Graph **G1**

8 Abschluss

Es wurde gezeigt, dass die vorhandenen Arbeiten zwar bereits gute Ansätze für den Test auf Aufwärtsplanarität geliefert haben, jedoch zum Teil eine hohe Komplexität bei der Durchführung aufweisen. Mühlberg hatte bisher die beste Verbesserung mittels der Reduktion auf SAT und konnte bereits die Komplexität stark reduzieren.

Die Regeln für Ohren bringen noch eine weitere Verbesserung der Komplexität durch das Verwenden der Ohrengruppen. Zwar gibt es mehr Regelmengen, dafür ist die Anzahl der Regeln selbst reduziert worden. Diese Reduktion entsteht dadurch, dass mehrere unabhängige Pfade zu einer Gruppe zusammengeschlossen werden und aufgrund dessen weniger Regeln innerhalb dieser Gruppen notwendig sind. Somit gibt es weniger Pfade außerhalb dieser Gruppen, wodurch automatisch einige Regeln von Mühlberg zusammengefasst werden.

Existiert nur eine Ohrengruppe, so gibt es sogar eine Reduktion der Variablen, da ausschließlich die Linksbeziehung zum Eltern-Ohr jedes Ohres betrachtet werden muss.

Diese Ohren liefern eine Grundlage zur Konstruktion der Superohren, wodurch weiterhin eine Reduktion der Regeln entsteht, da noch mehr Pfade zu einer Ohrengruppe hinzugenommen werden.

Zusammenfassend ist der Ansatz der Superohren sehr vielversprechend, um eine weitere Reduktion von Variablen und Regeln zu erhalten, wobei der Ansatz mit einfachen Ohren auch schon eine gute Verbesserung gegenüber Mühlberg bewirkt.

Literatur

1. Markus Chimani and Robert Zeranski. Upward planarity testing: A computational study. In Stephen Wismath and Alexander Wolff, editors, *Graph Drawing*, volume 8242 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 13–24. Springer International Publishing, 2013.
2. Markus Chimani and Robert Zeranski. An exact approach to upward crossing minimization. In *Proceedings of the Meeting on Algorithm Engineering & Experiments*, pages 73–85, Philadelphia, PA, USA, 2014. Society for Industrial and Applied Mathematics.
3. Prof. Reinhard Diestel. *Graph Theory: Graduate Text in Mathematics*, volume 173. Springer-Verlag, Heidelberg, 4th edition, 2010.
4. Patrick Healy and Karol Lynch. Fixed-parameter tractable algorithms for testing upward planarity. In Peter Vojtáš, Mária Bieliková, Bernadette Charron-Bost, and Ondrej Sýkora, editors, *SOFSEM 2005: Theory and Practice of Computer Science*, volume 3381 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 199–208. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
5. Volker Mühlberg. Upward planarity testing via reduction to sat. Diplomarbeit, Universität Konstanz, 2013.
6. Kozo Sugiyama, Shojiro Tagawa, and Mitsuhiro Toda. Methods for visual understanding of hierarchical system structures. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 11(2):109–125, Feb 1981.