Zuerst erschienen in: Psychologische Beiträge 14 (1972), 4, pp. 610-625

Zur Bewertung der Faktorenanalyse als psychologische Methode

von WILHELM F. KEMPF, Erlangen

1. Einleitung

Von Verfechtern der Faktorenanalyse wird häufig darauf hingewiesen, daß die Faktorenanalyse eine universell anwendbare Methode und damit neueren testtheoretischen Modellen wie z. B. den Testmodellen von RASCH (1960) überlegen sei. Daß diese Behauptung faktisch nicht stimmt, konnte von KALVERAM (1970a, b) gezeigt werden. Die mathematischen Voraussetzungen, auf welche KALVERAM seine Überlegungen stützt, sind jedoch zum Teil strenger als erforderlich. In der vorliegenden Arbeit sollen sie durch schwächere Voraussetzungen ersetzt werden. Bedingungen der Anwendbarkeit der Faktorenanalyse werden diskutiert. Es stellt sich heraus, daß diese Bedingungen äußerst streng sind, so daß man in der Psychologie kaum damit rechnen kann, daß sie einem Falsifikationsversuch standhalten.

2. Das Modell

Gegeben sei eine n-dimensionale Zufallsvariable (z. B. n Tests) $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Ihre Komponenten denkt man sich in der Faktorenanalyse als Linearkombination der Komponenten einer k-dimensionalen (latenten) Zufallsvariable $F = (F_1, \ldots, F_k)$ zusammengesetzt. Dies wird durch die Grundgleichungen der Faktorenanalyse

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_{11}F_1 + \ldots + a_{1j}F_j + \ldots + a_{1k}F_k \\
&\vdots \\
X_i &= a_{i1}F_1 + \ldots + a_{ij}F_j + \ldots + a_{ik}F_k \qquad (2.1) \\
&\vdots \\
X_n &= a_{n1}F_1 + \ldots + a_{nj}F_j + \ldots + a_{nk}F_k
\end{aligned}
$$

ausgedrückt. Die Gewichtszahl a_{ij} wird als „Ladung der (manifesten) Variable X_i auf dem (latenten) Faktor F_j" bezeichnet. Die Matrix

$$
(2.2)^1 \qquad A =: ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}
$$

1 Das Zeichen „=:" bedeutet: „Gleichheit per definitionem".

Konstanzer Online-Publikations-System (KOPS)
URL: http://www.ub.uni-konstanz.de/kops/volltexte/2008/6022/
URN: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:352-opus-60229

heißt „vollständige Ladungsmatrix". Die Grundgleichungen (2.1) können unter Verwendung der Matrix- und Vektor-Schreibweise zu

(2.3)[2] $X' = AF'$

zusammengefaßt werden.

3. Gemeinsame und spezifische Faktoren

Definition:

Ein Faktor heißt ein „gemeinsamer Faktor", wenn mindestens zwei Komponenten von X von Null verschiedene Ladungen auf ihm haben; er heißt ein – im weiteren Sinne – „spezifischer Faktor", wenn genau eine Komponente von X eine von Null verschiedene Ladung auf ihm hat.

Liegen p gemeinsame und $q=k-p$ spezifische Faktoren vor, dann sei mit $G =: (G_1, \ldots, G_p)$ die p-dimensionale gemeinsame Faktorvariable und mit $H =: (H_1, \ldots, H_q)$ die q-dimensionale spezifische Faktorvariable bezeichnet. O. B. d. A. können wir voraussetzen, daß die Faktoren so angeordnet sind, daß

(3.1) $F = (G_1, \ldots, G_p, H_1, \ldots, H_q) = (G, H).$

Analog kann man die vollständige Ladungsmatrix A aufteilen in die „reduzierte Ladungsmatrix" B mit den Ladungen auf den gemeinsamen Faktoren und in die Matrix C mit den Ladungen auf den spezifischen Faktoren. Die Matrix C enthält in jeder Spalte genau ein von Null verschiedenes Element. Es folgt:

(3.2)
$$A = (B, C),$$
$$X' = AF' = (B, C)(G, H)' = BG' + CH'.$$

Die – im weiteren Sinne – spezifischen Faktoren können in „Fehlerfaktoren" und in „spezifische Faktoren im engeren Sinne" unterteilt werden. Die Unterscheidung erfolgt analog zur Definition der Error-Variablen und der True-Score-Variablen der klassischen Testtheorie:

Definition:

Betrachtet sei eine n-dimensionale Zufallsvariable $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit Ladungen auf den gemeinsamen Faktoren $G_1, \ldots, G_p$. Es gelte

(3.3) $E_i =: X_i - T_i$; $(i = 1, \ldots, n).$

T_i bezeichnet die True-Score-Variable der i-ten Komponente von X, E_i die entsprechende Error-Variable.

2 Der Strich bei X bzw. F deutet die Transponierung an.

T_i sei als operationale True-Score-Variable im Sinne der Definition von NOVIK (1966) verstanden, der die klassische Testtheorie aus folgenden Annahmen herleitet:

a) zu jeder Vp v und jedem Test i gibt es eine Zufallsvariable X_{iv} mit dem Erwartungswert $E(X_{iv})$ und endlicher Varianz $\sigma^2(X_{iv})$. Jede Messung x_{iv} ist eine unabhängige Realisation dieser Zufallsvariable.

b) $t_{iv} =: E(X_{iv})$ heißt der True-Score der Vp v in Test i.

Sei

$$(3.4) \qquad s_i S_i =: T_i - (b_{i1}G_1 + \dots + b_{ip}G_p)\,, \qquad (i = 1,\dots,n)$$

und

$$(3.5) \qquad e_i E_i' =: E_i\,, \qquad (i = 1,\dots,n)$$

dann heißt E_i' der Fehlerfaktor der Variable X_i. S_i heißt der im engeren Sinne spezifische Faktor der Variable X_i.

Es folgt:

$$(3.6) \qquad X_i = \underbrace{b_{i1}G_1 + \dots + b_{ip}G_p + s_iS_i}_{T_i} + \underbrace{e_iE_i'}_{E_i}\,; \qquad (i = 1,\dots,n).$$

Definition:

Faßt man die Linearkombination

$$(3.7) \qquad u_i U_i =: s_i S_i + e_i E_i' \qquad u_i \neq 0, \; (i = 1,\dots,n)$$

der Faktoren S_i und E_i' zusammen, dann heißt U_i der „Einzigartigkeitsfaktor" der Variable X_i. Mehr als n solche Einzigartigkeitsfaktoren sind nicht möglich.

Folgerung:

Zur Beschreibung der Daten reichen stets $q \leq n$ – im weiteren Sinne – spezifische Faktoren

$$(3.8) \qquad U_i = \frac{X_i - (b_{i1}G_1 + \dots + b_{ip}G_p)}{u_i}\,, \qquad (i = 1,\dots,n),$$

aus. Diese sind dann als Einzigartigkeitsfaktoren zu interpretieren. O.B.d.A. können wir daher $q = n$ spezifische Faktoren $H_1,\dots,H_q$ voraussetzen, wobei H_i den Einzigartigkeitsfaktor der i-ten Komponente von X bezeichnet. Dann ist die Matrix C eine Diagonalmatrix. Besitzt eine Komponente von X keinen spezifischen Faktor, dann wird das entsprechende Hauptdiagonalelement von C gleich Null gesetzt.

Die oben getroffene Voraussetzung steht nur scheinbar in Widerspruch zu KALVERAM (1970a, S. 94), der auch mehr als n spezifische Faktoren zuläßt. Durch KALVERAMS Definition der Faktorenstruktur wird die Möglichkeit, daß die Anzahl der spezifischen Faktoren n übersteigt, implizit wieder ausgeschlossen.

4. Die Faktorenstruktur

Seien X_i und X_j eindimensionale Zufallsvariable, dann definieren wir in Anschluß an KALVERAM (1970a, S. 95) eine Operation „o" derart, daß

$$X_i o X_j =: E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j)))$$

die Kovarianz $\sigma(X_i, X_j)$ der Variablen X_i und X_j bezeichnet. Im Falle $X_j = X_i$ erhält man dann die Varianz $X_i o X_i = \sigma^2(X_i)$ von X_i. Seien $X = (X_1, \ldots, X_k)$ und $Y = (Y_1, \ldots, Y_q)$ mehrdimensionale Zufallsvariable, dann sei definiert:

$$X' o Y =: \begin{pmatrix} X_1 o Y_1 & X_1 o Y_2 & \ldots & X_1 o Y_q \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ X_k o Y_1 & X_k o Y_2 & \ldots & X_k o Y_q \end{pmatrix}$$

$X' o Y$ ist demnach eine Matrix mit k Zeilen und q Spalten.

Definition:

Betrachtet sei eine n-dimensionale Zufallsvariable $X = (X_1, \ldots, X_n)$, eine k-dimensionale Faktorvariable $F = (G, H)$ und eine vollständige Ladungsmatrix $A = (B, C)$. Es gelte

(4.1) $X' = AF'$, (Grundgleichung).

Dann heißt das geordnete Triple (A, F, V), worin $V =: F' o F$ „Faktorenstruktur von X" genau dann, wenn

a) der Rang der reduzierten Ladungsmatrix B gleich p (also maximal) ist, und
b) der Rang der Kovarianzmatrix V von F gleich k (also ebenfalls maximal) ist.

Voraussetzung (a) soll verhindern, daß man durch Linearkombination vor gemeinsamen Faktoren eine kleinere Anzahl gemeinsamer Faktoren $\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_h$, $h < p$, bilden kann, welche dasselbe leisten.

Begründung:

Mit $B_j = (b_{1j}, \ldots, b_{nj})'$, $(j = 1, \ldots, p)$, sei die j-te Spalte der reduzierten Ladungsmatrix B bezeichnet. Angenommen, der Rang von B ist nicht maximal, dann gibt es mindestens eine Spalte von B, o.B.d.A. sei dies die Spalte B_p, die als Linearkombination der anderen

$$B_p = \sum_{j=1}^{p-1} d_j B_j , \quad d_j \in R$$

dargestellt werden kann. Folglich können die Grundgleichungen (2.1) in der Form

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{j=1}^{p-1} b_{ij} G_j + \sum_{j=1}^{p-1} d_j b_{ij} G_p + \sum_{s=1}^{q} c_{is} H_s \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} b_{ij}(G_j + d_j G_p) + \sum_{s=1}^{q} c_{is} H_s \, ; \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

angeschrieben werden. Also reichen zur Beschreibung der Daten die p–1 gemeinsamen Faktoren $\bar{G}_j =: G_j + d_j G_p$, $(j=1,\ldots,p-1)$ aus. Ist dagegen der Rang der reduzierten Ladungsmatrix B gleich p, dann kann keine der Spalten von B als Linearkombination der anderen dargestellt werden.

KALVERAM (1970a, S. 95) geht bei der Definition der Faktorenstruktur von einer anderen Voraussetzung aus und fordert, daß der Rang aller n-zeiligen und p-spaltigen ($p \leq n$) Teilmatrizen der vollständigen Ladungsmatrix A maximal sei. Diese Voraussetzung ist jedoch zu streng. Mit $C_s = (c_{1s},\ldots,c_{ns})'$, $(s=1,\ldots,q)$ sei die s-te Spalte der Diagonalmatrix C bezeichnet. Angenommen, es gibt einen gemeinsamen Faktor, auf dem $h<p$ Komponenten von X von Null verschiedene Ladungen haben. O.B.d.A. seien dies der Faktor G_1 und die Variablen $X_1,\ldots,X_h$. Es sei vorausgesetzt, daß es zu $X_1,\ldots,X_h$ spezifische Faktoren $H_1,\ldots,H_h$ gibt. Wir betrachten eine n-zeilige und p-spaltige Teilmatrix von A, welche (unter anderem) die Spalten B_1 und $C_1,\ldots,C_h$ enthält. Dann kann die Spalte B_1 als Linearkombination der Spalten $C_1,\ldots,C_h$ dargestellt werden; es gilt

$$B_1 = \frac{b_{11}}{c_{11}} C_1 + \ldots + \frac{b_{h1}}{c_{hh}} C_h .$$

Also kann der Rang der betrachteten Teilmatrix nicht maximal sein. Unter den von KALVERAM getroffenen Voraussetzungen sind daher nur solche gemeinsame Faktoren zulässig, auf denen mindestens p Komponenten von X von Null verschiedene Ladungen haben (es sei denn, daß es zu einer oder mehreren dieser Komponenten keine spezifischen Faktoren gibt). Dies steht jedoch in Widerspruch zur oben gegebenen Definition der gemeinsamen Faktoren und bedeutet somit eine starke Einschränkung der Allgemeinheit. Die von KALVERAM (1970a,b) bewiesenen Sätze über Faktorenanalyse behalten ihre Gültigkeit auch dann, wenn man sich bei der Definition der Faktorenstruktur auf die schwächere Voraussetzung beschränkt, daß der Rang der reduzierten Ladungsmatrix maximal sei. Diese Voraussetzung kann o.B.d.A. jederzeit getroffen werden. Ist sie nicht erfüllt, dann bildet man durch Linearkombination von gemeinsamen Faktoren eine kleinere Anzahl gemeinsamer Faktoren. Diese Vorgangsweise hält man solange bei, bis der Rang der reduzierten Ladungsmatrix maximal ist.

Die zweite Voraussetzung (b), welche bei der Definition der Faktorenstruktur getroffen wurde, soll verhindern, daß die Faktoren $F_1,\ldots,F_k$ ihrerseits als Linearkombination einer kleineren Anzahl $m < k$ von sekundären Faktoren $\bar{F}_1,\ldots,\bar{F}_m$ dargestellt werden können.

Begründung:

Angenommen, $F = (F_1,\ldots,F_k)$ kann als Linearkombination der $m<k$ Komponenten einer sekundären Faktorvariable $\bar{F} = (\bar{F}_1,\ldots,\bar{F}_m)$ dargestellt werden. Dann gilt

$$F' = \overline{A}\overline{F}',$$

wobei $\overline{A} = ((\bar{a}_{ij}))\ i=1,...k; j=1,...m$ die k-zeilige und m-spaltige Matrix der Ladungen der Faktoren $F_1,...F_k$ auf den sekundären Faktoren $\overline{F}_1,...,\overline{F}_m$ bezeichnet. O.B.d.A. kann vorausgesetzt werden, daß der Rang der Ladungsmatrix $\overline{A}$ maximal, also gleich m ist. Mit $\overline{V} =: \overline{F}'o\overline{F}$ sei die Kovarianzmatrix von $\overline{F}$ bezeichnet.

Der Rang von $\overline{V}$ sei $r_{\overline{V}}$. Unter Anwendung der Rechenregel[3]

(4.2)[4] $\quad M(X'oY)N = (MX')o(YN)$

auf $V = F'oF$ folgt

$$V = \overline{A}\overline{V}\overline{A}'$$

Aus der SYLVESTERschen Ungleichung[5] erhalten wir für den Rang $r_{\overline{A}\overline{V}}$ der Produktmatrix $\overline{A}\overline{V}$

$$r_{\overline{A}} + r_{\overline{V}} - m \leqslant r_{\overline{A}\overline{V}} \leqslant \min(r_{\overline{A}}, r_{\overline{V}})$$

und für den Rang r_V der Kovarianzmatrix von F

$$2(r_{\overline{A}} - m) + r_{\overline{V}} \leqslant r_V \leqslant \min(r_{\overline{A}}, r_{\overline{V}}).$$

Da aber voraussetzungsgemäß $r_{\overline{A}} = m$ und weil der Rang einer Matrix die kleinere ihrer Reihenzahlen nicht übersteigen kann, erhalten wir schließlich:

$$r_{\overline{V}} = r_V \leqslant m.$$

Ist $r_V = k$ (also maximal), dann folgt $m=k$. Also können die Komponenten der Faktorvariable F nicht als Linearkombination einer kleineren Anzahl $m<k$ von sekundären Faktoren dargestellt werden, wenn der Rang der Kovarianzmatrix von F maximal ist. Wie man leicht einsieht, gilt auch die Umkehrung dieser Behauptung: ist $m<k$, dann folgt unmittelbar $r_V < k$. Wir fassen also zusammen:

Satz (4.3):

Der Rang der Kovarianzmatrix von F ist genau dann maximal, wenn die Komponenten von F nicht als Linearkombination der Komponenten einer sekundären Faktorvariable geringerer Dimensionalität dargestellt werden können.

3 Vgl. Kalveram (1970a, S. 95).
4 In (4.2) bedeuten M und N Matrizen mit passenden Zeilen und Spaltenzahlen.
5 Seien A eine Matrix vom Rang r_A mit m Zeilen und n Spalten und B eine n-zeilige und p-spaltige Matrix vom Rang r_B, dann gilt für den Rang r_{AB} der Produktmatrix AB die Ungleichung

$$r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant \min(r_A, r_B);$$

(vgl. Gantmacher 1970, S. 62).

Ein analoger Satz gilt für den Rang der Kovarianzmatrix von X. Im Übrigen ist dieses Ergebnis in der Faktorenanalyse so allgemein bekannt, daß auf einen Beweis meist verzichtet wird.

5. Reduzierte und doppelt reduzierte Kovarianzmatrix

Betrachtet seien eine n-dimensionale Zufallsvariable X und eine Faktorenstruktur ((B,C),(G,H),V) von X. Die Kovarianzmatrix von X

(5.1) $$Q =: X'oX = (AF')o(AF')' = (AF')o(FA') = A(F'oF)A' = AVA'$$

kann in mehrere Anteile zerlegt werden (vgl. KALVERAM 1970a, S. 97 ff.):

1. Die Matrix

(5.2) $$P =: B(G'oG)B'$$

enthält jene Anteile an den Varianzen und Kovarianzen der Komponenten von X, welche auf die gemeinsamen Faktoren allein zurückgehen. Die Werte in der Hauptdiagonale von P sind die Kommensurabilitäten der Komponenten von X.

2. Die Matrix

(5.3) $$W =: B(G'oH)G' + G(H'oG)B'$$

enthält jene Anteile an den Varianzen und Kovarianzen der Komponenten von X, welche auf den Korrelationen zwischen den gemeinsamen Faktoren einerseits und den spezifischen Faktoren andererseits beruhen. Sind alle gemeinsamen Faktoren von allen spezifischen Faktoren linear stochastisch unabhängig, so ist W eine Nullmatrix.

Zwei Zufallsvariable X und Y werden als linear stochastisch unabhängig bezeichnet, wenn für alle x aus dem Wertebereich von X und alle y aus dem Wertebereich von Y

$$E(X|y) = E(X) \quad \text{und} \quad E(Y|x) = E(Y) \quad \text{gilt.}$$

3. Die Matrix

(5.4) $$S =: C(H'oH)C'$$

enthält jene Anteile an den Varianzen und Kovarianzen der Komponenten von X, welche auf die spezifischen Faktoren allein zurückgehen. Sind alle spezifischen Faktoren untereinander linear stochastisch unabhängig, so ist S eine Diagonalmatrix.

Es gilt:

(5.5) $$Q = P + W + S .$$

Definition:

Mit D_S sei die Diagonalmatrix von S bezeichnet. Man erhält sie, indem man in S alle Elemente, welche nicht in der Hauptdiagonale stehen, durch Nullen ersetzt. Dann heißt die Matrix

(5.6) $\quad \bar{Q} =: Q - D_S$,

die (um die spezifischen Varianzanteile) „reduzierte Kovarianzmatrix" von X.

Definition:

Die Matrix

(5.7) $\quad \bar{\bar{Q}} =: Q - S - W$

heißt die „doppelt reduzierte Kovarianzmatrix" von X. $\bar{\bar{Q}}$ ist identisch mit der unter (5.2) definierten Matrix P.. Sowohl die reduzierte als auch die doppelt reduzierte Kovarianzmatrix von X ist immer nur in bezug auf eine *vorgegebene* Faktorenstruktur von X definiert.

6. Die Eindeutigkeit der Faktorenstruktur

Faßt man die Grundgleichungen (2.1) der Faktorenanalyse als Definitionsgleichungen für eine abgeleitete Messung auf, dann ergibt sich die Frage nach der Skaleneigenschaft dieser Messung, d. h. nach der Klasse der zulässigen Maßzahltransformationen. Durch sie ist bestimmt, welchen Relationen zwischen den Maßzahlen psychologische Bedeutsamkeit und damit Interpretierbarkeit zukommt. Eine vollständige Beantwortung dieser Frage ist hier nicht möglich. Wir können aber über einige wichtige Teilergebnisse berichten.

Betrachtet seien eine n-dimensionale Zufallsvariable X und die Faktorenstrukturen FS = ((B,C),(G,H),V) und $\overline{FS} = ((\bar{B},\bar{C}),(\bar{G},\bar{H}),\bar{V})$ von X.

Definition:

Die Faktorenstrukturen FS und $\overline{FS}$ heißen gleichwertig, wenn die Faktorvariablen G und $\bar{G}$ gleiche Dimensionalität haben und dieselben Anteile der Komponenten von X durch sie erklärt werden ($BG' = \overline{BG}'$).

Satz (6.1):

Sind FS und $\overline{FS}$ Faktorenstrukturen von X, dann sind sie nicht notwendig auch gleichwertig.

Beweis:

Betrachtet seien eine 3-dimensionale Zufallsvariable $X = (X_1,X_2,X_3)$ und die Faktorenstruktur FS = ((B,C),(G,H),V) von X, worin $G = (G_1,G_2)$

ein zweidimensionaler gemeinsamer Faktor und $H = (H_1, H_2, H_3)$ ein dreidimensionaler spezifischer Faktor ist. Für die vollständige Ladungsmatrix (B,C) gelte

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Faktoren seien untereinander unkorreliert und zur Varianz 1 normiert. Dann ist die Kovarianzmatrix von F eine Einheitsmatrix.

Ferner sei $\bar{G} =: G_1$ und $\bar{H} =: ((H_1+G_2),(H_2+G_2),H_3)$. Die Matrizen

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \bar{V} = (\bar{G},\bar{H})'\mathrm{o}(\bar{G},\bar{H}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben maximalen Rang. Es gilt $X' = (B,C)(G,H)' = (\bar{B},C)(\bar{G},\bar{H})'$. Also ist auch $\overline{FS} = ((\bar{B},C),(\bar{G},\bar{H}),\bar{V})$ eine Faktorenstruktur von X. Die Faktorvariablen G und $\bar{G}$ haben aber weder die gleiche Dimensionalität noch ist $BG' = \bar{B}\bar{G}'$ erfüllt.

Folgerung:

Einer gegebenen n-dimensionalen Zufallsvariable $X = (X_1,\ldots,X_n)$ können Faktorenstrukturen mit unterschiedlich vielen gemeinsamen Faktoren zugrunde gelegt werden. Die Anzahl der gemeinsamen Faktoren ist somit durch die Modellstruktur (1.2) nicht eindeutig bestimmt. Typische Anwendungsfälle der Faktorenanalyse, in welchen die Anzahl der extrahierten Faktoren interpretiert wird (vgl. z.B. die Arbeit von Lienert & Croft (1964) zur Differenzierungshypothese der Intelligenz) erweisen sich somit als grundsätzlich nicht gerechtfertigt.

Satz (6.2):

Betrachtet seien eine n-dimensionale Zufallsvariable X und eine Faktorenstruktur $FS = (A=(B,C),F=(G,H),V)$ von X. T sei eine reguläre Transformationsmatrix. Dann ist $\overline{FS} = (\bar{A}=(\bar{B}=BT,C),\bar{F}=(\bar{G}=G(T^{-1})',H),\bar{V}=\bar{F}'\mathrm{o}\bar{F})$ eine gleichwertige Faktorenstruktur von X.

Beweis:

a) $$\bar{A}\bar{F}' = (BT,C)(G(T^{-1})',H)' = BT(G(T^{-1})')' + CH' = \\ = B\underbrace{TT^{-1}}_{E}G' + CH' = BG' + CH' = AF'.$$

b) Da T regulär ist, stimmt der Rang von BT mit dem Rang von B überein, ist also ebenfalls maximal.

c) Sei

$$W =: \begin{pmatrix} (T^{-1})' & 0_1 \\ 0_2 & E \end{pmatrix}$$

E bezeichnet die q-reihige Einheitsmatrix. 0_1 und 0_2 sind Nullmatrizen mit passender Zeilen- und Spaltenzahl. Dann ist W eine k-reihige reguläre Matrix und es gilt

$$(G,H)W = (G(T^{-1})',H) = \bar{F}\,.$$

Folglich hat

$$\begin{aligned} \bar{F}'o\bar{F} &= ((G,H)W)'o((G,H)W) = (W'(G,H)')o((G,H)W) = \\ &= W'((G,H)'o(G,H))W = W'VW \end{aligned}$$

ebenfalls den maximalen Rang k. $\overline{FS}$ ist also eine Faktorenstruktur von X. FS und $\overline{FS}$ sind auch gleichwertig, da G und $\bar{G}$ gleiche Dimensionalität haben und $\bar{B}\bar{G}' = BT(G(T^{-1})')' = BTT^{-1}G' = BG'$.

Folgerung:

Reguläre lineare Transformationen (z. B. Rotationen) der reduzierten Ladungsmatrix B führen zu einer gleichwertigen Faktorenlösung $\bar{B}$.

7. Die praktische Anwendbarkeit der Faktorenanalyse

Bei der praktischen Anwendung der Faktorenanalyse stellt sich das Problem, aus einer Stichprobe von Realisationen einer n-dimensionalen Zufallsvariable X die Matrix der Ladungen der Komponenten von X auf den zugrunde liegenden Faktoren zu erstellen. Dabei wird auf die doppelt reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{Q}$ eine mathematische Prozedur angewendet, welche als Ergebnis eine Matrix M liefert, die $\bar{Q}$ reproduziert.

Definition:

Gegeben sei eine symmetrische Matrix R mit n Zeilen und Spalten und eine Matrix M mit n Zeilen und $m \leq n$ Spalten. Der Rang von M sei gleich m (also maximal). Existiert eine positiv definite Matrix V mit m Zeilen und Spalten, so daß $R = MVM'$ gilt, dann heißt M eine „R reproduzierende Matrix".

Folgerung:

Die reduzierte Ladungsmatrix B reproduziert die doppelt reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{Q}$.

Beweis:

Definitionsgemäß gilt $\bar{Q} = B(G'oG)B'$, wobei B eine Matrix mit n Zeilen und p Spalten ist. Der Rang von B ist gleich p. Als Teilmatrix der positiv definiten Matrix $F'oF$ ist auch $G'oG$ positiv definit.

Hat man erst eine Reproduktionsmatrix gefunden, erhält man daraus durch Anwendung regulärer linearer Transformationen beliebig viele weitere. KALVERAM (1970a, S. 116) beweist, daß bei Vorliegen einer reproduzierenden Matrix *alle* Matrizen, die $\bar{\bar{Q}}$ ebenfalls reproduzieren, mit Hilfe regulärer linearer Transformationen zugänglich werden: seien M und N zwei Matrizen, die beide eine gegebene symmetrische Matrix R reproduzieren, dann gibt es genau eine reguläre lineare Transformation T, so daß $N=MT$ ist. Diese Transformation lautet $T = (M'M)^{-1}M'N$. Da die reduzierte Ladungsmatrix B die doppelt reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{\bar{Q}}$ reproduziert, ist die (prinzipielle) Auffindbarkeit einer vorgegebenen Ladungsmatrix B somit sichergestellt, sofern die zugehörige doppelt reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{\bar{Q}}$ bekannt ist.

Wie KALVERAM (1970b, S. 227) erwähnt, gibt es allerdings keinerlei Entscheidungskriterien dafür, ob eine gegebene Reproduktionsmatrix mit der ursprünglich unterlegten (aber nicht bekannten) Ladungsmatrix B identisch ist oder nicht. Aus (6.2) folgt aber, daß alle Matrizen, welche $\bar{\bar{Q}}$ reproduzieren, zu gleichwertigen Faktorenstrukturen von X gehören. Es gibt daher keinen Grund dafür, eine Reproduktionsmatrix gegenüber den anderen zu bevorzugen. Bei der praktischen Berechnung und Interpretation von Faktorenanalysen geht man jedoch im allgemeinen so vor, daß man zunächst eine erste Reproduktionsmatrix M errechnet und diese anschließend nach einem vorgegebenen Kriterium rotiert. Die rotierten Faktoren werden dann aufgrund der Variablen, welche auf ihnen hoch laden, interpretiert. Eine solche Vorgangsweise erweist sich als grundsätzlich falsch. Sie wäre nur dann gerechtfertigt, wenn die zur Interpretation der Faktoren herangezogenen Relationen zwischen den Faktorenladungen der Komponenten von X gegenüber der Klasse der zulässigen Transformationen von B invariant wären[6]. In diesem Falle könnte man sich übrigens die Rotation der Faktoren ersparen, da dann jede beliebige Reproduktionsmatrix von $\bar{\bar{Q}}$ zur selben Interpretation der Faktoren führen müßte.

Die praktische Berechnung einer Faktorenanalyse scheitert zunächst daran, daß die doppelt reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{\bar{Q}}$ nicht bekannt ist. In vielen Anwendungsfällen der Faktorenanalyse trifft man daher die einschränkende Voraussetzung, daß alle spezifischen Faktoren untereinander und von allen gemeinsamen Faktoren linear stochastisch unabhängig sein sollen. Unter dieser Voraussetzung gilt $\bar{\bar{Q}} = \bar{Q}$, und man kann bei der Berechnung der Faktorenanalyse von der reduzierten Kovarianzmatrix ausgehen, welche mit Ausnahme der Hauptdiagonalelemente mit der vollständigen Kovarianzmatrix Q übereinstimmt. Die Werte in der Hauptdiagonale von $\bar{Q}$ sind die Kommunalitäten der Komponenten von X, welche unter den getroffenen Voraussetzungen mit den Kommensurabilitäten identisch sind. Da diese jedoch zu

6 Die Klasse der zulässigen Transformationen von B ist zwar nicht bekannt, aus (6.2) folgt jedoch, daß reguläre lineare Transformationen von B zulässig sind.

Beginn der Analyse noch unbekannt sind, hilft man sich mit einer Schätzung der Kommunalitäten und verbessert diese Schätzungen iterativ. Ein solches Vorgehen ist nur dann statthaft, wenn das Verfahren gegen die richtigen Werte konvergiert. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Kommunalitäten – wenigstens theoretisch – über die Kovarianzen eindeutig bestimmt sind. KALVERAM (1970a, S. 105 f.) zeigt anhand eines Beispieles, daß dies nicht der Fall ist; zu einer Kovarianzmatrix mit ausgesparter Hauptdiagonale kann man Matrizen finden, die zwar die Kovarianzen richtig reproduzieren, aber zu unterschiedlichen Kommunalitäten führen. Es gibt keine reguläre lineare Transformation, welche solche Reproduktionsmatrizen ineinander überführt. Ob eine vorgegebene Faktorenstruktur unter den getroffenen Voraussetzungen mittels Anwendung der Faktorenanalyse auf die reduzierte Kovarianzmatrix aufgefunden werden kann, hängt somit davon ab, welche Anfangsschätzungen für die Kommunalitäten zufällig gewählt wurden.

Die Anwendung der Faktorenanalyse auf die reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{Q}$ ist aber auch aus anderen Gründen problematisch. Wegen der Unbeobachtbarkeit der Faktoren läßt sich die Annahme der linearen stochastischen Unabhängigkeit der spezifischen Faktoren untereinander und von den gemeinsamen Faktoren nicht überprüfen. KALVERAM (1970b) zeigt jedoch, daß infolge von Selektionen oder analogen Vorgängen die spezifischen Faktoren in der Regel untereinander und mit den gemeinsamen Faktoren korrelieren, und zwar auch dann, wenn in irgendeiner fiktiven Ausgangspopulation deren Unabhängigkeit gegeben sein sollte. Korreliert aber auch nur ein spezifischer Faktor mit einem der übrigen Faktoren, dann stimmen $\bar{Q}$ und $\bar{\bar{Q}}$ nicht mehr überein. Eine Anwendung der Faktorenanalyse auf $\bar{Q}$ ist dann nicht mehr gerechtfertigt.

8. Eingeschränkte Faktorenmodelle

Faßt man die Ergebnisse der Abschnitte 6 und 7 zusammen, dann gelangt man zu der Feststellung, daß sich das allgemeine Faktorenmodell mit $p \leq n$ gemeinsamen und q (im weiteren Sinne) spezifischen Faktoren als unbrauchbar erweist:

1. Durch das allgemeine Faktorenmodell ist nicht einmal die Anzahl der (gemeinsamen) Faktoren, welche zur Beschreibung eines gegebenen Datensatzes erforderlich sind, eindeutig bestimmt.

2. Das allgemeine Modell erlaubt die praktische Berechnung einer Faktorenanalyse nur unter der (empirisch nicht überprüfbaren) Voraussetzung, daß die spezifischen Faktoren untereinander und von den gemeinsamen Faktoren linear stochastisch unabhängig sind. In der Praxis ist aber nicht damit zu rechnen, daß diese Voraussetzung auch erfüllt ist.

3. Da die Kommunalitäten über die Kovarianzen nicht eindeutig bestimmt sind, ist auch dann nicht einmal die Auffindbarkeit einer *vorgegebenen* Faktorenstruktur gesichert.

KALVERAM (1970a) schlägt vor, Testbatterien, welche einer Faktorenanalyse unterzogen werden sollen, so sorgfältig zu konstruieren, daß die gesamte zuverlässige Varianz gemeinsame Varianz ist. Diese Möglichkeit soll im folgenden genauer untersucht werden:

Betrachtet seien eine n-dimensionale Zufallsvariable X und eine Faktorenstruktur FS = ((B,C),(G,H),V) von X.

Voraussetzungen:

1. Zu jeder Vp v und jedem Test i gibt es eine Zufallsvariable X_{iv} mit dem Erwartungswert $E(X_{iv}) =: t_{iv}$ und endlicher Varianz $\sigma^2(X_{iv})$. Jede Messung x_{iv} ist eine unabhängige Realisation dieser Zufallsvariable.

2. Die Maßzahlvariablen X_{iv} und X_{jv}, $(i \neq j)$, sind für festes v linear stochastisch unabhängig.

3. Die Zufallsvariable $T = (T_1,\dots,T_n)$, deren Realisationen die True-Scores $t_v = (t_{1v},\dots,t_{nv})$ sind, sei durch die p-dimensionale Faktorvariable G vollständig erklärt:

(8.1) $\quad T' = BG'$.

Folgerungen:

1. Die Faktorvariable H enthält ausschließlich Fehlerfaktoren im Sinne der unter (3.5) gegebenen Definition.

2. Die Komponenten von H sind in jeder beliebigen Population von Personen untereinander und von den Komponenten von G linear stochastisch unabhängig[7].

3. Die doppelt reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{\bar{Q}}$ stimmt mit der reduzierten Kovarianzmatrix $\bar{Q}$ überein.

4. Die Werte in der Hauptdiagonale von $\bar{\bar{Q}}$, die Kommensurabilitäten, sind mit den True-Score-Varianzen $T_i o T_i$, $(i=1,\dots,n)$ identisch. Die doppelt reduzierte Kovarianzmatrix $\bar{\bar{Q}}$ ist somit (zumindest theoretisch) unabhängig von der Wahl einer bestimmten Faktorenstruktur eindeutig bestimmt.

5. Aus (5.2) folgt

(8.2) $\quad \bar{\bar{Q}} = B(G'oG)B$.

6. Die Ladungsmatrix B ist bis auf reguläre lineare Transformationen bestimmt. Sind FS = ((B,C),(G,H),V) und $\overline{FS} = ((\bar{B},\bar{C}),(\bar{G},\bar{H}),\bar{V})$ Faktorenstrukturen von X, dann gibt es genau eine lineare Transformation T, so daß $\bar{B} = BT$ ist. Dieses ist die Transformation

(8.3) $\quad T = (B'B)^{-1}B'\bar{B}$.

7 Der Beweis ergibt sich analog zur Argumentation bei Lord u. Novick (1968, S.37).

7. Zur Herleitung der Beziehung (8.2) sind keinerlei Annahmen über die zugrunde liegende Referenzpopulation P erforderlich. (8.2) gilt somit in jeder beliebigen Subpopulation und auch in jeder beliebigen Stichprobe von Personen aus P. Die vieldiskutierte Stichprobenabhängigkeit der Faktorenanalyse (vgl. FISCHER 1968, S. 67) ist somit nicht im Modell begründet[8]. Sie ergibt sich erst dann, wenn die Modellvoraussetzungen nicht erfüllt sind. Sind die True-Score-Varianzen $T_i \circ T_i$, (i=1,...,n) bekannt, so sind aus verschiedenen Personenstichproben gewonnene Faktorenlösungen B und $\overline{\mathrm{B}}$ unter Voraussetzung der Gültigkeit des Modells mit Hilfe von Transformationen der Form (8.3) ineinander überführbar.

8. Wegen der grundsätzlichen Nicht-Beobachtbarkeit der True-Score-Variablen können die True-Score-Varianzen in einer gegebenen Personenstichprobe nicht berechnet, sondern nur geschätzt werden. Die oben hergeleiteten Beziehungen setzen aber voraus, daß die True-Score-Varianzen bekannt sind. Ersetzt man in $\bar{\bar{\mathrm{Q}}}$ die Hauptdiagonalelemente durch Schätzungen der True-Score-Varianzen, dann ist nicht einmal gesichert, daß es überhaupt eine Reproduktionsmatrix gibt. Der Versuch einer iterativen Verbesserung der Schätzungen muß aufgrund der Argumente in Abschnitt 7 abgewiesen werden.

Der von KALVERAM vorgeschlagene Ausweg erweist sich somit als praktisch nicht gangbar.

Eine andere Möglichkeit, das Kommunalitätenproblem zu umgehen, ergibt sich in der Forderung, daß die Gesamtzahl k der zur Beschreibung der Daten erforderlichen Faktoren kleiner oder gleich der Anzahl n der analysierten Variablen sein soll:

Betrachtet seien eine n-dimensionale Zufallsvariable X und eine Faktorenstruktur FS = (A,F,V) von X.

Voraussetzungen:

1. Die Anzahl der Faktoren k sei kleiner oder gleich n.
2. Der Rang von A sei gleich k (also maximal).

Folgerungen:

1. Laut (5.1) gilt

(8.4) $$\mathrm{Q} = \mathrm{AVA}'.$$

Also wird die Kovarianzmatrix von X von der vollständigen Ladungsmatrix A reproduziert.

2. Die Anzahl der Faktoren k stimmt mit dem Rang der Kovarianzmatrix von X überein.

8 Dasselbe gilt übrigens auch für die Beziehung (5.2) im allgemeinen Modell.

3. Da die Kovarianzmatrix von X unabhängig von der Wahl einer bestimmten Faktorenstruktur eindeutig bestimmt ist, ist die Faktorenstruktur von X bis auf reguläre lineare Transformationen der Ladungsmatrix A bestimmt. Sind FS = (A,F,V) und $\overline{FS} = (\bar{A},\bar{F},\bar{V})$ Faktorenstrukturen von X, dann gibt es genau eine lineare Transformation T, so daß $\bar{A} = AT$ ist. Dieses ist die Transformation

(8.5) $\quad T = (A'A)^{-1}A'\bar{A}$.

4. Reproduzierende Matrizen, welche aus verschiedenen Stichproben gewonnen wurden, sind mit Hilfe von Transformationen der Form (8.5) ineinander überführbar. Stichprobenabhängigkeit der Ergebnisse ergibt sich erst dann, wenn die Modellvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

5. Indem vorausgesetzt wird, daß die Anzahl der Faktoren n nicht übersteigt, ist das Modell 1 ein zumindest teilweise deterministisches Modell. Andernfalls wäre schon allein die Annahme von n spezifischen (Fehler-)Faktoren erforderlich.

6. Wird die Anzahl der spezifischen Faktoren zu Null angenommen, so ergibt sich ein Spezialfall des Modells, in dem A = B und F = G und daher $\bar{\bar{Q}} = Q = Q$. Es ist daher unverständlich, wie Kalveram (1970a, S. 106) behaupten kann, das Kommunalitätenproblem sei selbst dann nicht gelöst.

9. Diskussion

1. Eine wesentliche Eigenschaft des zuletzt diskutierten eingeschränkten Faktorenmodells ist die Stichprobenunabhängigkeit der Ergebnisse. Sie kann zur Prüfung der Modellvoraussetzungen herangezogen werden. Die Gültigkeit der Modellstruktur kann so lange beibehalten werden, als aus unterschiedlichen Personenstichproben gewonnene Ladungsmatrizen durch reguläre lineare Transformationen der Form (8.5) ineinander überführbar sind. Dabei handelt es sich um eine *deterministische* Gesetzmäßigkeit und somit um ein äußerst strenges Erfordernis. In der psychologischen Praxis ist kaum damit zu rechnen, daß es auch erfüllt ist.

2. Sind die Modellvoraussetzungen erfüllt, so ist die vollständige Ladungsmatrix bis auf reguläre lineare Transformationen bestimmt. Es können daher nur solche Relationen zwischen den Faktorenladungen interpretiert werden, welche gegenüber regulären linearen Transformationen invariant bleiben. Insbesondere ist die Anzahl der Faktoren durch das eingeschränkte Faktorenmodell eindeutig bestimmt. Im allgemeinen Faktorenmodell mit $p \leq n$ gemeinsamen und q (im weiteren Sinne) spezifischen Faktoren ist nicht einmal das der Fall.

3. Sind die Modellvoraussetzungen erfüllt, so ist die (prinzipielle) Auffindbarkeit einer vorgegebenen Ladungsmatrix stets gewährleistet. Im allgemeinen Faktorenmodell ist auch dies nicht gesichert.

Zusammenfassung

Das allgemeine Faktorenmodell mit $p < n$ gemeinsamen und q spezifischen Faktoren erweist sich als theoretisch wie praktisch unbrauchbar: durch das Modell ist weder die Anzahl der (gemeinsamen) Faktoren eindeutig bestimmt noch die Auffindbarkeit einer vorgegebenen Ladungsmatrix sichergestellt. Darüber hinaus erlaubt das Modell die praktische Berechnung einer Faktorenanalyse nur unter empirisch *nicht* überprüfbaren Voraussetzungen, mit deren Gültigkeit zudem im allgemeinen nicht gerechnet werden kann.

Eingeschränkte Faktorenmodelle, in welchen diese Probleme eliminiert sind, sind an äußerst strenge Voraussetzungen geknüpft. In der Praxis ist daher kaum damit zu rechnen, daß sie einem Falsifikationsversuch standhalten.

Literatur

FISCHER, G. H.: Neue Entwicklungen in der psychologischen Testtheorie. In: FISCHER, G. H. (Hrsg.), Psychologische Testtheorie. Bern: Huber 1968.

GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung I. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 3. Auflage 1970.

KALVERAM, K. Th.: Über Faktorenanalyse. Kritik eines theoretischen Konzepts und seine mathematische Neuformulierung. Arch. Psychol. 122 (1970a), 92–118.

KALVERAM, K. Th.: Probleme der Selektion in der Faktorenanalyse III. Die „Invarianz" von Faktorenlösungen unter Selektion. Arch. Psychol. 122 (1970b), 223–230.

LIENERT, G. A., & H. W. CROFT: Studies on the factor structure of intelligence in children, adolescents, and adults. Vita humana 7 (1964), 147–163.

LORD, F. M., & M. R. NOVICK: Statistical theories of mental test scores. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1968.

NOVICK, M. R.: The axioms and principal results of classical test theory. J. Math. Psychol. 3 (1966), 1–18.

RASCH, G.: Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Copenhagen: Danmarks Paedogogiske Institut 1960.

Anschrift des Verfassers
Dr. Wilhelm Kempf
Psychologisches Institut der Universität Erlangen/Nürnberg
Abteilung Experimentelle Psychologie
8520 Erlangen
Bismarckstraße 6/II