Inhalte als Maße

Robert Denk, Marcus Tressl
Universität Regensburg

1 Der Stone-Raum zu einer Algebra

Zu einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge X wird der Stone-Raum $\hat{X}$ als Menge aller Ultrafilter auf $\mathcal{A}$ definiert. Dies ist ein kompakter, total unzusammenhängender Hausdorff-Raum; die σ-Algebra $\mathcal{A}$ und die Menge der Inhalte auf $\mathcal{A}$ lassen sich auf den Stone-Raum übertragen (Satz 1). Der Vorteil dieser Übertragung ist, daß jeder Inhalt über dem Stone-Raum σ-additiv ist. Damit erhält man eine σ-affine Bijektion von der Menge aller Inhalte auf $\mathcal{A}$ auf die Menge aller Maße einer geeignet gewählten σ-Algebra über $\hat{X}$ (Korollar 1).
Somit lassen sich Aussagen über Inhalte auf die entsprechenden Aussagen über Maße zurückführen. Als ein Anwendung dieses Prinzips wird die Menge aller Inhaltsfortsetzungen von einer Algebra $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}$ betrachtet, falls $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{A}_0$ und endlich viele Teilmengen von X erzeugt wird. In diesem Fall ist die Menge der Inhaltsfortsetzungen gleich der σ-konvexen Hülle der extremalen Fortsetzungen. Dieser Satz wurde von Z. Lipecki in [3] bewiesen; für σ-Algebren und Maße wurde dieses Ergebnis bereits in einem Artikel von D. Bierlein und W. Stich gezeigt [1]. Das Ergebnis von Lipecki läßt sich mit Hilfe der oben erwähnten Bijektion unmittelbar aus dem Satz in [1] folgern (Satz 4).

Im folgenden seien eine Menge X eine Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über X gegeben. Der von uns betrachtete Raum $u(\mathcal{A})$ wird folgendermaßen definiert:

Definition 1

(i) $u(\mathcal{A}) := \{\mathcal{U} \subset \mathcal{A} \mid \mathcal{U} \text{ ist Ultrafilter von } \mathcal{A}\}$.

(ii) Für $A \in \mathcal{A}$ sei $\langle A \rangle := \{\mathcal{U} \in u(\mathcal{A}) | A \in \mathcal{U}\} \subset u(\mathcal{A})$.

(iii) $\mathcal{S}(u(\mathcal{A})) := \{\langle A \rangle | A \in \mathcal{A}\}$.

Der folgende Satz faßt die wichtigsten Eigenschaften von $u(\mathcal{A})$ zusammen:

Satz 1

a) $\mathcal{S}(u(\mathcal{A}))$ ist eine Mengenalgebra auf $u(\mathcal{A})$, und

$$\langle \quad \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{S}(u(\mathcal{A}))$$

ist ein Isomorphismus von Mengenalgebren, d.h. eine Bijektion mit $\langle X \backslash A \rangle = u(\mathcal{A}) \backslash \langle A \rangle$ und $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$.

b) $\mathcal{S}(u(\mathcal{A}))$ ist Basis einer kompakten, total unzusammenhängenden hausdorffschen Topologie auf $u(\mathcal{A})$. Ist $M \subset u(\mathcal{A})$, so ist $M \in \mathcal{S}(u(\mathcal{A}))$ genau dann, wenn M offen und abgeschlossen ist.

c) Sei Y eine weitere Menge und $\mathcal{B}$ eine Mengenalgebra über Y. $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei ein Homomorphismus von Mengenalgebren. Die Abbildung $u(\varphi) : u(\mathcal{B}) \to u(\mathcal{A})$ werde durch $u(\varphi)(\mathcal{V}) := \varphi^{-1}(\mathcal{V})$ definiert. Dann gilt:

(i) $u(\varphi)$ ist stetig, und zu jeder stetigen Funktion $f : u(\mathcal{B}) \to u(\mathcal{A})$ gibt es genau einen Homomorphismus von Mengenalgebren $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mit $f = u(\varphi)$.

(ii) φ ist genau dann injektiv, wenn $u(\varphi)$ surjektiv ist. φ ist genau dann surjektiv, wenn $u(\varphi)$ injektiv ist.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [2, 2.21] und [2, 2.29]. Zusammen mit der in b) angegebenen Topologie heißt $u(\mathcal{A})$ *Stone-Raum* zu $\mathcal{A}$.

Die oben angegebene Konstruktion des Stone-Raums erlaubt es, einen gegebenen Inhalt auf der Algebra $\mathcal{A}$ auf die entsprechende Algebra über $u(\mathcal{A})$ zu übertragen. Dazu bezeichne $ba(\mathcal{A})$ die Menge aller signierten Inhalte (d.h. aller additiven Funktionen) mit beschränkter Variation. Die Menge aller Inhalte auf $\mathcal{A}$ ist dann definiert als die Teilmenge $ba(\mathcal{A})_+$ aller Elemente von $ba(\mathcal{A})$ mit Werten in $[0, \infty)$. Wir definieren außerdem $\hat{X} := u(\mathcal{A})\,,\ \hat{\mathcal{A}} := \mathcal{S}(u(\mathcal{A}))$.
Zu $\mu \in ba(\mathcal{A})_+$ sei die Abbildung $\hat{\mu} : \hat{\mathcal{A}} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\hat{\mu}(\langle A \rangle) := \mu(A) \quad (A \in \mathcal{A})\,.$$

Nach Satz 1 ist $\hat{\mu}$ wohldefiniert und ein Inhalt auf $\hat{\mathcal{A}}$.

Satz 2

a) Jeder Inhalt auf $\hat{\mathcal{A}}$ ist σ-additiv.

b) Die Abbildung $\mu \mapsto \hat{\mu}$ ist eine σ-affine Bijektion zwischen $ba(\mathcal{A})_+$ und $ba(\hat{\mathcal{A}})_+$, d.h. sie ist bijektiv, und es gilt für $\mu, \mu_i \in ba(\mathcal{A})_+$ $(i \in \mathbb{N})$ und $\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq 0 \quad (i \in \mathbb{N})$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \hat{\mu}_i\,.$$

Beweis:

a) Es seien $\mu \in ba(\mathcal{A})_+$ und $A_1 \subset A_2 \subset \ldots, A_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle A_i \rangle \in \hat{\mathcal{A}}$ gegeben. Dann existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle A_i \rangle = \langle A \rangle$. Da $\langle A \rangle$ kompakt ist, existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\langle A_{i_0} \rangle = \langle A_{i_0+1} \rangle = \ldots$, also gilt $\lim_i \nu(\langle A_i \rangle) = \nu(\bigcup_i \langle A_i \rangle)$, d.h. ν ist σ-additiv.

b) Zu einem Inhalt $\nu \in ba(\hat{\mathcal{A}})_+$ wird durch $\mu(A) := \nu(\langle A \rangle)$ $(A \in \mathcal{A})$ offenbar ein eindeutiger Inhalt $\mu \in ba(\mathcal{A})_+$ mit $\hat{\mu} = \nu$ definiert. Damit ist die im Satz angegebene Abbildung eine Bijektion; daß diese σ-affin ist, folgt direkt aus der Definition von $\hat{\mathcal{A}}$ und $\hat{\mu}$.

□

Die σ-Additivität jeden Inhaltes auf $\hat{\mathcal{A}}$ erlaubt es, jeden (endlichen) Inhalt auf dieser Algebra eindeutig zu einem Maß auf der von $\hat{\mathcal{A}}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}^\sigma$ erweitern. (Unter einem Maß werde stets ein positives endliches Maß verstanden.) Wir bezeichnen diese Erweiterung eines Inhaltes μ mit μ^σ.
Aus der Eindeutigkeit der Erweiterung folgt, daß die Bijektivität ebenso wie die σ-Affinität der in Satz 2 b) angegebenen Abbildung bei Betrachtung der entsprechenden Maße erhalten bleibt, und somit gilt folgendes Korollar:

Korollar 1
Die Abbildung $\mu \mapsto \mu^\sigma$ ist eine σ-affine Bijektion zwischen $ba(\mathcal{A})_+$ und der Menge aller Maße auf $\mathcal{A}^\sigma$.

Nun soll eine Fortsetzungssituation betrachtet werden, d.h. es seien eine Unter-Algebra $\mathcal{A}_0$ von $\mathcal{A}$ und ein Inhalt $\mu_0 \in ba(\mathcal{A}_0)_+$ gegeben. Wir setzen

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_0 &:= \{\langle A \rangle \subset \hat{X} | A \in \mathcal{A}_0\} , \\ \hat{\mu}_0(\langle A \rangle) &:= \mu_0(A) \quad (A \in \mathcal{A}_0) . \end{aligned}$$

(Man beachte, daß nicht $\hat{\mathcal{A}}_0 = u(\mathcal{A}_0)$ gilt; $\hat{\mathcal{A}}_0$ ist eine Algebra über der Grundmenge $\hat{X} = u(\mathcal{A})$.) $\hat{\mu}_0$ ist ein Inhalt auf $\hat{\mathcal{A}}_0$, und analog zu oben sei $\mathcal{A}_0^\sigma$ die von $\hat{\mathcal{A}}_0$ erzeugte σ-Algebra und μ_0^σ die (eindeutige) Maßerweiterung von $\hat{\mu}_0$ auf die σ-Algebra $\mathcal{A}_0^\sigma$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}(\mu_0, \mathcal{A})$ die Menge aller Inhaltsfortsetzungen von μ_0 auf $\mathcal{A}$, d.h. die Menge aller $\mu \in ba(\mathcal{A})_+$ mit $\mu | \mathcal{A}_0 = \mu_0$. Analog sei $\mathcal{F}_\sigma(\mu_0^\sigma, \mathcal{A}^\sigma)$ die Menge aller Maßfortsetzungen von μ_0^σ auf $\mathcal{A}^\sigma$. $ex\mathcal{F}(\mu_0, \mathcal{A})$ bzw. $ex\mathcal{F}_\sigma(\mu_0^\sigma, \mathcal{A}^\sigma)$ sei die Menge der Extremalpunkte von $\mathcal{F}(\mu_0, \mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{F}_\sigma(\mu_0^\sigma, \mathcal{A}^\sigma)$. Die Fortsetzungssituation läßt sich folgendermaßen übertragen:

Satz 3
Die Abbildung $\mu \mapsto \mu^\sigma$ aus Korollar 1 ist eine Bijektion

(i) von $\mathcal{F}(\mu_0, \mathcal{A})$ auf $\mathcal{F}_\sigma(\mu_0^\sigma, \mathcal{A}^\sigma)$.

(ii) von $ex\mathcal{F}(\mu_0, \mathcal{A})$ auf $ex\mathcal{F}_\sigma(\mu_0^\sigma, \mathcal{A}^\sigma)$.

Beweis:

(i) Ein Inhalt $\mu \in ba(\mathcal{A})_+$ ist genau dann eine Fortsetzung von μ_0, wenn $\mu^\sigma(\langle A \rangle) = \mu_0^\sigma(\langle A \rangle)$ für alle $A \in \mathcal{A}_0$ gilt. Aufgrund der Eindeutigkeit der Maßerweiterung ist dies äquivalent dazu, daß μ^σ eine Fortsetzung von μ_0^σ ist.

(ii) Dies folgt unmittelbar aus (i) und der Affinität der Abbildung $\mu \to \mu^\sigma$.

$\square$

Dieser Satz und das Korollar 1 erlauben es, bekannte Aussagen über Maßfortsetzungen auf die Situation von Inhaltsfortsetzungen zu übertragen. Als Anwendung dieses Prinzips kann nun der Beweis eines Satz von Z. Lipecki [3, Theorem 3] auf die entsprechende Aussage in einem Artikel von D. Bierlein und W. Stich [1, Theorem 3] zurückgeführt werden:

Satz 4 (Z. Lipecki)
Ist $\mathcal{A}$ als Algebra von $\mathcal{A}_0$ und endlich vielen Mengen erzeugt, so gibt es zu jedem $\mu \in \mathcal{F}(\mu_0, \mathcal{A})$ reelle Zahlen $\lambda_i \geq 0$ ($i \in \mathbb{N}$) mit $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$ und Inhalte $\mu_i \in ex\mathcal{F}(\mu_0, \mathcal{A})$ mit

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i \ .$$

Beweis:

Wird $\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}_0$ und den Mengen $A_1, \ldots, A_n$ erzeugt, so wird $\mathcal{A}^\sigma$ als σ-Algebra von $\mathcal{A}_0^\sigma$ und $\langle A_1 \rangle, \ldots, \langle A_n \rangle$ erzeugt. Damit ist Theorem 3 in [1] auf $\mathcal{F}_\sigma(\mu_0^\sigma, \mathcal{A}^\sigma)$ anwendbar. Nach Korollar 1 und Satz 3 folgt die Behauptung.

$\square$

2 Funktionalanalytische Beschreibung des Stone-Raums

Der im ersten Abschnitt definierte Stone-Raum läßt sich auch funktionalanalytisch beschreiben: Die Menge aller 0-1-wertigen Inhalte auf der Algebra $\mathcal{A}$, versehen mit der schwach*-Topologie, ist homöomorph zum Stone-Raum $u(\mathcal{A})$. Der Raum der stetigen Funktionen auf diesem Raum läßt sich identifizieren mit dem Abschluß der $\mathcal{A}$-Treppenfunktionen, wie sich mit Hilfe des Satzes von Stone-Weierstraß zeigen läßt (Satz 5).
Dies ermöglicht einen weiteren Beweis für die Existenz einer Bijektion zwischen der Menge aller Inhalte auf einer Algebra und der Menge aller Maße auf einer geeignet gewählten σ-Algebra, nämlich der Baire-σ-Algebra (Satz 6. Dies liefert die funktionalanalytische Beschreibung der in Abschnitt 1 definierten σ-Algebra $\mathcal{A}^\sigma$.

Wie bisher seien eine Menge X und eine Algebra $\mathcal{A}$ über X gegeben. Wir bezeichnen mit $S(\mathcal{A})$ die Menge aller $\mathcal{A}$-Treppenfunktionen, d.h. aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ der Form $f = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{A_i}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$. $B(\mathcal{A})$ sei der Abschluß von $S(\mathcal{A})$ innerhalb des Raums aller beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, der mit der Supremums-Norm versehen werde. Außerdem bezeichne $J := \{\mu \in ba(\mathcal{A})_+ | \mu(X) = 1\}$ die Menge der normierten Inhalte auf $\mathcal{A}$.

Bemerkung 1

a) $ba(\mathcal{A})$ ist isometrisch isomorph zum topologischen Dualraum $B(\mathcal{A})^*$ von $B(\mathcal{A})$. Diese Isomorphie erlaubt es, die schwach*-Topologie auf $ba(\mathcal{A})$ zu definieren. Insbesondere sei ab sofort J stets mit dieser Topologie versehen, auf Teilmengen von J wird die Relativtopologie betrachtet.

b) Es gilt nach einem bekannten Kriterium von D. Plachky [4]: $exJ = \{\mu \in ba(\mathcal{A})_+ | \mu(\mathcal{A}) = \{0,1\}\}$.

Die stetigen Funktionen $C(exJ)$ auf exJ lassen sich einfach beschreiben:

Satz 5
Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : B(\mathcal{A}) &\rightarrow C(exJ) \\ f &\mapsto (\mu \mapsto \int f d\mu) \end{aligned}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen Banach-Algebren.

Beweis:

Die Linearität von T ist offensichtlich.

Für $f \in B(\mathcal{A})$ und $\mu \in exJ$ gilt $|(Tf)(\mu)| \leq \mu(X) \cdot |f| = |f|$; für die andere Richtung sei eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\mathcal{A})$ mit $f_n \rightarrow f$ gegeben. Dann gilt für jedes $x \in X$: $|Tf| = \sup_{\nu \in exJ} |(Tf)(\nu)| \geq |(Tf)(\delta_x)| = |\int f d\delta_x| = |f(x)|$, wobei δ_x das Dirac-Maß im Punkte x bezeichnet. Somit ist T isometrisch und damit insbesondere injektiv.

Nach Bemerkung 1 b) gilt für alle charakteristischen Funktionen und damit für alle Treppenfunktionen $f, g \in S(\mathcal{A})$:

$$\int (f \cdot g) d\nu = \int f d\nu \cdot \int g d\nu \quad (\nu \in exJ).$$

Für $f, g \in B(\mathcal{A})$ folgt $T(fg) = T(f)T(g)$ aus der Stetigkeit des Integrals, d.h. T ist multiplikativ.

Das Bild ImT ist als Bild eines Banachraumes unter einem isometrischen Isomorphismus abgeschlossen in $C(exJ)$. Wegen der Linearität und Multiplikativität von T ist ImT eine Unteralgebra. ImT trennt die Punkte von $C(exJ)$, da zu $\nu, \nu' \in exJ$ mit $\nu \neq \nu'$ eine Menge $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\nu(A) \neq \nu'(A)$. Für $f := 1_A$ folgt somit $(Tf)(\nu) \neq (Tf)(\nu')$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist T damit surjektiv.

$\square$

Korollar 2
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} T^* : C(exJ)^* & \to & ba(\mathcal{A}) \\ \varphi & \mapsto & \nu_\varphi \end{array}$$

mit $\nu_\varphi(A) := \varphi(T(1_A))$ ist ein isometrischer Banachraum-Isomorphismus.

Satz 6
Es existiert eine affine Bijektion zwischen $ba(\mathcal{A})_+$ und der Menge der Maße auf der Baire-σ-Algebra $\mathcal{B}_0(exJ)$.

Beweis:

> Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert eine affine Bijektion zwischen $C(exJ)^*_+$ und der Menge der Maße auf $\mathcal{B}_0(exJ)$, womit die Behauptung aus Korollar 2 folgt. $\square$

Bemerkung 2
Versieht man $ba(\mathcal{A})_+$ und die Menge der Maße auf $\mathcal{B}_0(exJ)$ mit der schwach*-Topologie, so ist die durch Korollar 2 angegebene Bijektion ein Homöomorphismus (da nach Satz 5 diese beiden Räume Dualräume von zueinander isometrisch isomorphen Räumen sind).

Die in Satz 6 auftretende σ-Algebra $\mathcal{B}_0(exJ)$ läßt sich in einfacher Weise beschreiben:

Lemma 1
$\mathcal{B}_0(exJ)$ ist die kleinste σ-Algebra auf exJ, so daß alle Abbildungen $\nu \mapsto \nu(A) \quad (A \in \mathcal{A})$ meßbar sind.

Beweis:

> Es bezeichne $\sigma(exJ)$ die kleinste σ-Algebra auf exJ, so daß alle oben angegebenen Abbildungen meßbar sind. Da die Abbildung $\nu \mapsto \nu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ stetig ist, gilt $\sigma(exJ) \subset \mathcal{B}_0(exJ)$. Andererseits ist aufgrund der Definition von $\sigma(exJ)$ jedes $f \in S(\mathcal{A})$ $\sigma(exJ)$-meßbar und damit auch jede Funktion $f \in B(\mathcal{A})$ als gleichmäßiger Limes von $\sigma(exJ)$-meßbaren Funktionen. $\square$

Bemerkung 3 (Zusammenhang zu $u(\mathcal{A})$)
Durch $\nu \mapsto \{A \in \mathcal{A} | \nu(A) = 1\}$ ist offensichtlich eine Bijektion von exJ auf den Stone-Raum $u(\mathcal{A})$ gegeben. Wie der Beweis von Lemma 1 zeigt, ist dies sogar ein Homöomorphismus. Insbesondere identifiziert sich die σ-Algebra $\mathcal{A}^\sigma$ auf $u(\mathcal{A})$ mit $\sigma(exJ) = \mathcal{B}_0(exJ)$. Damit wird eine funktionalanalytische Beschreibung des Stone-Raums gegeben, und Satz 6 liefert einen weiteren Beweis von Satz 3.

Literatur

[1] D. Bierlein , W. Stich: *On the extremality of measure extensions*, Manuscripta Math. 63, 89 - 97 (1989)

[2] W. W. Comfort, S. Negrepontis: *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin 1974

[3] Z. Lipecki: *On extreme extensions of quasi-measures*, Arch. Math. 58, 288 - 293 (1992)

[4] D. Plachky: *Extremal und monogenic additive set functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 54, 193 - 196 (1976)

Skript, 1993