Bewertungshalbgruppen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors der Naturwissenschaften an der Universität Konstanz, Fachbereich Mathematik und Statistik, vorgelegt von

Holger Merkel

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Oktober 2009
Referent/in: Prof. Dr. Alexander Prestel
Referent/in: Prof. Dr. Eberhard Becker

Zusammenfassung

Eine Teilmenge T eines Körpers K, die die Bedingungen

$$K = (T \setminus \{0\})^{-1} \cup T, \quad T \cdot T \subseteq T, \quad T + T \subseteq 2 \cdot T, \quad 2 \notin T$$

erfüllt, nennen wir *Bewertungshalbgruppe* von K. Die gewöhnliche komplexe Einheitsscheibe ist ein Beispiel einer Bewertungshalbgruppe. Wir untersuchen die Struktur der Bewertungshalbgruppen und erweitern die obigen Bedingungen zu einem vollständigen Axiomensystem für die Einheitsscheibe.

Für meine Eltern, und für Sherin und Manuel

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Alexander Prestel, bei dem ich mich jederzeit gut aufgehoben gefühlt habe und ohne dessen Unterstützung und Hilfe diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Er hatte stets ein offenes Ohr für meine Fragen und führte mich mit seinen Ratschlägen immer wieder auf den rechten Weg zurück, wenn ich mich in wenig hilfreiche oder gar unlösbare Problemstellungen verirrt hatte.

Danken möchte ich auch Dr. Markus Schweighofer für die netten Plaudereien über mein Thema.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Einheitsscheibe $T = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant 1\}$ des Körpers $K = \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen erfüllt die Gesetze:

$$K = (T \setminus \{0\})^{-1} \cup T$$

$$T \cdot T \subseteq T$$

$$T + T \subseteq 2 \cdot T$$

Diese Gesetze sind den Axiomen des Begriffs "Bewertungsring" sehr ähnlich und unterstreichen damit die Analogie der Bewertungstheorie zur Theorie der Absolutbeträge.

Bekanntlich gelang es Abraham Robinson die Vollständigkeit der Theorie der nicht-trivial bewerteten, algebraisch abgeschlossenen Körper mit fester Charakteristik sowie fester Charakteristik des Restklassenkörpers zu beweisen. Er legte damit den Grundstein für die aufsehenerregenden modelltheoretischen Arbeiten von Ax-Kochen und Ershov aus den 60'er Jahren. Daher bietet es sich an nun zu untersuchen, in welcher Weise eine analoge vollständige Theorie der Einheitsscheibe auf der Basis der obigen drei Gesetze entwickelt werden kann.

Diese Ausgangslage führt uns auf den Begriff der "Bewertungshalbgruppe", der die obigen drei Gesetze um die Forderung $2 \notin T$ ergänzt. Damit werden Bewertungsringe von der Betrachtung ausgeschlossen. Wir führen zunächst grundlegende Strukturuntersuchungen zu Bewertungshalbgruppen durch, die später in zwei Fortsetzungskapiteln ergänzt werden. Insgesamt werden dabei folgende Klassen von Körpern betrachtet:

- der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen
- quadratisch abgeschlossene Körper
- der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen

- Körper, die über $\mathbb{Q}$ algebraisch sind
- rationale Funktionenkörper $K(X)$
- Körper formaler Potenzreihen $\overline{K}((\Gamma))$, sowie maximal bewertete Körper
- angeordnete Körper

Unser wichtigstes Werkzeug wird hierbei eine grundlegende Arbeit von Wolfgang Krull aus dem Jahre 1961 sein, deren für uns relevante Ergebnisse das nächste Kapitel im einzelnen vorstellen soll.

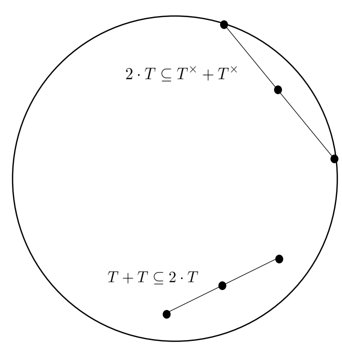
Im Laufe unserer Strukturuntersuchungen wird schnell klar werden, daß die vier Axiome des Begriffs "Bewertungshalbgruppe" alleine keine vollständige Theorie der Einheitsscheibe liefern können. Daher werden wir unser Hauptaugenmerk auf diejenigen Bewertungshalbgruppen legen, die zusätzlich die folgende (von der Geometrie der komplexen Einheitsscheibe motivierte) Bedingung erfüllen:

$$2 \cdot T \subseteq T^{\times} + T^{\times}$$

$$(T^{\times} := \{t \in T \setminus \{0\} \mid 1/t \in T\})$$

"Jeder Punkt der Scheibe ist Mittelpunkt zweier Randpunkte."

(Diese wird übrigens auch von allen Bewertungsringen erfüllt, wie man sich leicht überlegt.) Bewertungshalbgruppen, die diese Bedingung erfüllen, werden wir "Zirkelhalbgruppen" nennen (da man sozusagen mit Zirkel und Lineal alle ihre Punkte aus dem Rand heraus konstruieren kann).

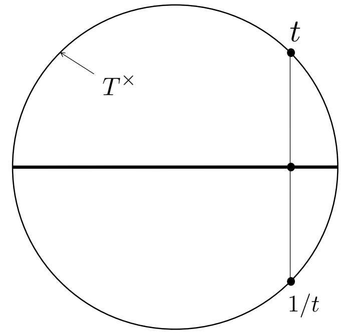


Wir befassen uns ferner mit der Frage der Fortsetzbarkeit von Körpern mit Bewertungshalbgruppen, analog zur Theorie der Fortsetzbarkeit von Körpern mit Bewertungsringen. Wir untersuchen, wann ein Tupel (K, T) eine Fortsetzung besitzt und in welcher Beziehung diese Fortsetzungen zueinander stehen.

Wir werden dann ausgehend vom Begriff der "Zirkelhalbgruppe" vollständige

Axiomensysteme für die Theorie der Einheitsscheibe bei algebraisch abgeschlossenen Körpern entwickeln. Wir verfolgen dabei das Ziel eine möglichst große Analogie zur Theorie der bewerteten Körper zu erreichen und vor allem solche Axiome zu entwerfen, die einen starken Bezug zur Geometrie der Einheitsscheibe haben. Genauer bedeutet letzteres folgendes: Ein vollständiges Axiomensystem kann eigentlich leicht entwickelt werden, wenn man mit Axiomen auf ganz direkte, unmittelbare Weise fordert, daß die Elemente der Menge

$$\{\frac{1}{2} \cdot (t + \frac{1}{t}) \mid t \in T^{\times}\}$$



zusammen mit ihren multiplikativen Inversen einen Unterkörper vom Ko-Grad 2 im zugrundeliegenden algebraisch abgeschlossenen Körper bilden sollen (der nach einem bekannten Satz von Artin-Schreier dann reell abgeschlossen sein muß). Aber diese Axiome haben einen schwachen Bezug zur Geometrie der Einheitsscheibe; sie entsprechen eher der Einführung eines Koordinatensystems im zugrundeliegenden Körper. Dies schränkt jedoch die Anwendbarkeit des Axiomensystems stark ein. Obgleich die oben aufgeführte Menge bei vielen beweistechnischen Überlegungen eine wichtige Rolle in dieser Arbeit spielt, besteht die eigentliche Zielsetzung darin, ein Axiomensystem zu entwickeln, das möglichst wenig über diese Menge "redet"; vielmehr soll es Bedingungen enthalten, die anschaulich eine große Nähe zu einfachen geometrischen Aussagen der Einheitsscheibe und des Einheitskreises besitzen (wie z.B. die Aussage $T \cap (T+2) = \{1\}$).

Zu einer Bewertungshalbgruppe T eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K gehört stets ein eindeutig bestimmter kleinster Bewertungsring O von K, der T noch enthält. In dem Falle, daß (K, O) ein maximal bewerteter Körper ist, sollen Bedingungen für T entwickelt werden, die (K, T) zu einem Modell der Theorie der Einheitsscheibe machen. Wir werden ferner erkennen, daß diese maximal bewerteten Körper sich als einfache formale Potenzreihenkörper mit trivialem Faktorensystem formulieren lassen können.

Obgleich im Fokus dieser Arbeit die euklidische Ebene mit ihrer Einheitsscheibe liegt, sollen zum Schluß auch noch Bewertungshalbgruppen von angeordneten Körpern betrachtet werden.

Kapitel 2

Grundlagen, Krull's Theorie der totalen Halbgruppen

Im Jahre 1961 veröffentlichte Wolfgang Krull einen Artikel mit dem Titel "Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern" (siehe [11]). Er untersuchte darin die multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen T eines Körpers K, die die Eigenschaft $K = (T \setminus \{0\})^{-1} \cup T$ besitzen, und zeigte einen engen Zusammenhang zwischen diesen und Bewertungsringen sowie archimedischen Absolutbeträgen auf. In diesem Kapitel sollen seine für uns relevanten Ergebnisse zusammengestellt werden. (Dabei verwenden wir jedoch teilweise eigene Definitionen, die Krull in seiner Arbeit nicht benutzt hat.)

Vereinbarung: Wenn in dieser Arbeit die Begriffe und Symbole "kleiner", "größer", "$\leqslant$", "$\geqslant$", "beschränkt", "liegt dicht in" oder "$|\ |$" ohne weitere Erläuterungen verwendet werden, so beziehen sie sich stets auf die Standardanordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. den Standardabsolutbetrag der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Für eine Teilmenge M eines Körper K und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet M^n nicht das n-fache kartesische Produkt von M, sondern die Menge $\{y^n \mid y \in M\}$. (Wir setzen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.)

Die folgenden Begriffe stehen im Zentrum dieser Arbeit.

Definitionen 2.1. Es sei K ein Körper, und es sei T eine Teilmenge von K.

- T heißt eine *Halbgruppe* von K, wenn $T \cdot T \subseteq T$ gilt. Es sei ferner $T^\times := \{t \in T \setminus \{0\} \mid 1/t \in T\}$ die Menge der *Einheiten* von T.

- Gilt zudem $K = (T \setminus \{0\})^{-1} \cup T$, so heißt T eine *totale Halbgruppe* von K.

- Gelten zudem auch noch $T + T \subseteq 2 \cdot T$ und $2 \notin T$, so nennen wir T eine *Bewertungshalbgruppe* von K.

- Eine Bewertungshalbgruppe T heißt *Zirkelhalbgruppe*, wenn sie die Bedingung $2 \cdot T \subseteq T^\times + T^\times$ erfüllt.

Beispiele 2.2.

- Ist $(K, \leqslant)$ ein angeordneter Körper (wie etwa $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$), so ist offenbar $\{x \in K \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ eine Bewertungshalbgruppe von K.
- Die komplexe Einheitsscheibe $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant 1\}$ ist eine Zirkelhalbgruppe von $\mathbb{C}$.
- Für jede Körpereinbettung $\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist die Urbildmenge
$$T := \tau^{-1}(\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant 1\})$$
offensichtlich immer eine Bewertungshalbgruppe von K. So besitzt etwa der Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$ neben der Inklusion "$\subseteq$" noch die Einbettung:
$$\tau(a + b\sqrt{2}) := a - b\sqrt{2} \qquad a, b \in \mathbb{Q}$$
Und deshalb enthält $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ die beiden verschiedenen Bewertungshalbgruppen:
$$\{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$$
und
$$\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ -1 \leqslant a - b\sqrt{2} \leqslant 1\}$$
- Der Körper $\mathbb{C}$ besitzt unendlich viele Unterkörper R mit $[\mathbb{C} : R] = 2$ und $R \neq \mathbb{R}$. Darunter gibt es solche, die isomorph zu $\mathbb{R}$ sind, und solche, für die das nicht gilt. Jeder derartige Unterkörper R ist reell abgeschlossen und besitzt eine eindeutig bestimmte Anordnung "$\leqslant$". Sie definiert eine "Scheibe"
$$\{x + iy \mid x, y \in R,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
die sich als Zirkelhalbgruppe von $\mathbb{C}$ erweist. (Dabei sei $i^2 = -1$.) Bezüglich der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie auf $\mathbb{C}$ liegt diese dicht in $\mathbb{C}$.
- Es sei O ein nicht-trivialer konvexer Bewertungsring eines angeordneten Körpers $(K, \leqslant)$. Und es sei $\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$ der zugehörige Restklassenhomomorphismus. Dann induziert der Bewertungsring auf dem Restklassenkörper $\overline{K}$ eine Anordnung "$\leqslant$" dergestalt, daß φ eine monoton wachsende Abbildung ist. (Siehe etwa Kap. 2.2.2 in [3] zum Thema "konvexe Bewertungsringe".) Und dann ist offenbar
$$T := \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid x^2 \leqslant 1\})$$
eine Bewertungshalbgruppe von K. Das eindeutig bestimmte maximale Ideal $\mathfrak{m} = O \setminus O^\times$ von O ist eine Teilmenge von T, die aus unendlich vielen infitisimal kleinen Elementen besteht. Setzen wir
$$[-1, 1] := \{y \in K \mid y^2 \leqslant 1\},$$

so gilt offensichtlich:

$$T^\times = \{-1, 1\} + \mathfrak{m}, \quad T = [-1, 1] \cup T^\times$$

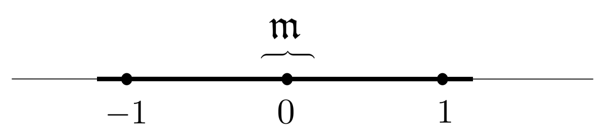
Insbesondere besitzt T unendlich viele Einheiten. Man beachte, daß für

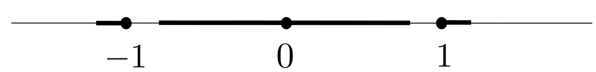
$$\mathfrak{m}_+ := \{y \in \mathfrak{m} \mid y > 0\}$$

auch die Menge

$$T \setminus ((-1 + \mathfrak{m}_+) \cup (1 - \mathfrak{m}_+))$$

eine Bewertungshalbgruppe von K ist, obwohl sie zwei "kleine Lücken" hat. Sie besitzt nur die Einheiten -1 und 1.-





Es sei T eine totale Halbgruppe eines Körpers K. Dann folgt offensichtlich $\{-1, 0, 1\} \subseteq T$. Und es ergibt sich $-T = (-1) \cdot T \subseteq T \cdot T \subseteq T$. Weiter gilt für alle $a, b \in K$:

$$ab \in T \Rightarrow a \in T \vee b \in T$$

Denn ist etwa $a \notin T$, so ist $a \neq 0$, $1/a \in T$ und damit:

$$b = (ab)\frac{1}{a} \in T \cdot T \subseteq T$$

Insbesondere folgt daraus für alle $a \in K$, daß $a^2 \in T$ stets $a \in T$ nach sich zieht. Besteht in K eine Beziehung $i^2 = -1$, so gilt deshalb immer $i \in T$.-

Krull's Hauptinteresse gilt folgendem Begriff.

Definition 2.3. Es sei O ein Bewertungsring eines Körpers K, und es sei

$$\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K} := O/(O \smallsetminus O^{\times})$$

sein Restklassenhomomorphismus. Der Restklassenkörper $\overline{K}$ sei dergestalt, daß er einen archimedischen Absolutbetrag $|\;|' : \overline{K} \to \mathbb{R}$ besitzt. Dann ist

$$T := \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |x|' \leqslant 1\})$$

offenbar eine totale Halbgruppe von K. Wir nennen T die *Krull-Halbgruppe* von O und $|\;|'$.

Nach einem bekannten Satz von Ostrowski (siehe etwa [14] für einen elementaren Beweis) kann jeder Körper mit einem archimedischen Absolutbetrag als Unterkörper der komplexen Zahlen aufgefaßt werden: Besitzt $\overline{K}$ einen archimedischen Absolutbetrag $|\;|'$, so gibt es eine Körpereinbettung $\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$, so daß

$$\forall x \in \overline{K} \quad |x|' = |\tau(x)|^{\varepsilon}$$

gilt.-

Krull führt bei der Untersuchung von totalen Halbgruppen folgende Begriffe ein: Ist T eine totale Halbgruppe eines Körpers K, so heißt jede Menge H mit $\emptyset \subset H \subset T$ und $H \cdot T \subseteq H$ ein *Semi-Ideal* von T. Man erkennt leicht, daß die Semi-Ideale durch "$\subseteq$" total geordnet werden. Ein Semi-Ideal H heißt *Semi-Primideal*, wenn zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall\, x, y \in T \quad xy \in H \Rightarrow x \in H \vee y \in H$$

Ein Semi-Ideal H heißt *Ideal*, wenn $H + H \subseteq H$ gilt. Und ein Semi-Primideal, das ein Ideal ist, heißt *Primideal*. Die Menge $M := T \smallsetminus T^{\times}$ ist offenbar ein Semi-Primideal und zugleich das größte Semi-Ideal von T. Mit dem Lemma von Zorn folgt leicht, daß T ferner ein eindeutig bestimmtes größtes Primideal M^{+} besitzt. (Krull beweist, daß M^{+} sogar das größte Ideal von T sein muß.) Für jedes Semi-Primideal P von T ist

$$T_P := \{\frac{x}{y} \mid x, y \in T,\, y \notin P\}$$

ebenfalls eine totale Halbgruppe von K. Offenbar ist $T_P \smallsetminus T_P^{\times} = P$. Und offenbar sind die Semi-Primideale von T_P genau die Semi-Primideale von T, die P umfassen. Krull bemerkt, daß T_{M^+} ein Bewertungsring von K ist; er ist der kleinste Bewertungsring von K, der T umfaßt; sein eindeutig bestimmtes maximales Ideal ist M^{+}. Im folgenden sprechen wir von ihm als der *von T induzierten Bewertung*. (Anm.: Beim letzten Beispiel von 2.2 muß O nicht notwendig mit T_{M^+} übereinstimmen.) Für Krull's Untersuchungen spielt ferner die Teilmenge

$$S := \{x \in K \mid x \cdot (T + T) \subseteq T\}$$

von T eine zentrale Rolle. Im Falle $S \neq T$ ist sie offenbar ein Semi-Ideal von T. Die daraus abgeleitete Menge

$$\sqrt{S} := \{x \in K \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad x^n \in S\}$$

heißt das *Radikal* von T. Krull beweist, daß es im Falle $S \neq T$ gerade das kleinste Semi-Primideal von T ist, das S umfaßt. Im Falle $S \neq T$ gilt:

$$M^+ \subseteq S \subseteq \sqrt{S} \subseteq M$$

Krull's zentrales Ergebnis ist der folgende für uns grundlegende Satz.

Satz 2.4. *Es sei T eine totale Halbgruppe eines Körpers K mit $T + T \neq T$. Dann gilt: $T_{\sqrt{S}} = K \Leftrightarrow S = \{0\}$. Im Falle $S \neq \{0\}$ gilt folgendes:*

- *Ist $M^+ = S$, so ist $T_{\sqrt{S}}$ ein Bewertungsring von K.*
- *Ist $M^+ \neq S$, so ist $T_{\sqrt{S}}$ eine Krull-Halbgruppe. Genauer gilt: Ist $O := T_{M^+}$ der von T induzierte Bewertungsring und $\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$ sein Restklassenhomomorphismus, so besitzt der Restklassenkörper $\overline{K}$ einen archimedischen Absolutbetrag $|\ |'$ mit:*

$$T_{\sqrt{S}} = \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |x|' \leqslant 1\})$$

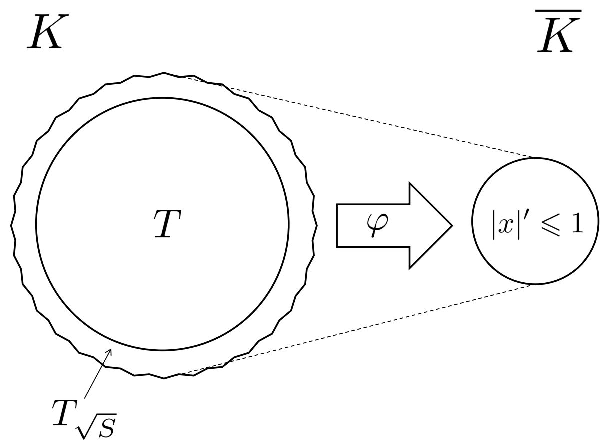
(Krull *beweist* diesen Satz, indem er einerseits zeigt, daß eine totale Halbgruppe T im Falle $S \neq T$ keine Semi-Primideale besitzen kann, die echt zwischen M^+ und $\sqrt{S}$ liegen, und indem er sich andererseits eine von Emil Artin bewiesene Tatsache zunutze macht, die grob besagt, daß es zu einer Funktion $\|\ \|$, die alle Axiome eines Absolutbetrages bis auf die Dreiecksungleichung erfüllt, stets eine reelle, positive Zahl ε gibt, so daß $\|\ \|^\varepsilon$ ein Absolutbetrag ist (siehe Lemma 1 in [10]).)

Wir können Krull's Satz auf Bewertungshalbgruppen anwenden: Ist T eine Bewertungshalbgruppe eines Körpers K, so gilt $S \neq \{0\}$ wegen $\frac{1}{2} \in S$. Und aus $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \notin T$ folgt $\frac{1}{2} \notin M^+$ und damit auch $M^+ \neq S$. Also ist $T_{\sqrt{S}}$ eine Krull-Halbgruppe. Bezeichnen wieder $O = T_{M^+}$ den von T induzierten Bewertungsring und $\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$ seinen Restklassenhomomorphismus, so muß es also gemäß Krull und Ostrowski eine Körpereinbettung $\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$T \subseteq T_{\sqrt{S}} = \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\})$$

geben (denn für $\varepsilon > 0$ gilt ja $|\tau(x)|^\varepsilon \leqslant 1 \Longleftrightarrow |\tau(x)| \leqslant 1$). Insbesondere folgt:

$$\varphi(T) \subseteq \{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\}$$



Wir dürfen also bei dem Absolutbetrag $|\ |'$ aus Definition 2.3 o.B.d.A. immer voraussetzen, daß $|n|' = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wegen $char\overline{K} = 0$ ist ferner $\varphi|_{\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$.

Aus dem Satz von Krull folgt sofort, daß ein Körper K nur dann eine Bewertungshalbgruppe T besitzen kann, wenn $char K = 0$ ist. Diese Tatsache kann man auch leicht direkt zeigen:

Aus $0 \in T$ und $2 \notin T$ ergibt sich zunächst $2 \neq 0$.

Aus $\dfrac{1}{2}(1+3) = \dfrac{1}{2}(0+4) = 2 \notin T$ folgt $3, 4 \notin T$ und damit $3, 4 \neq 0$.

Aus $\dfrac{1}{2}(1+5) = \dfrac{1}{2}(0+6) = 3 \notin T$ folgt $5, 6 \notin T$ und damit $5, 6 \neq 0$.

Aus $\dfrac{1}{2}(1+7) = \dfrac{1}{2}(0+8) = 4 \notin T$ folgt $7, 8 \notin T$ und damit $7, 8 \neq 0$.

usw.-

Insbesondere ergibt sich $T \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$.

Untersuchungen zu Körpern mit einer Charakteristik ungleich Null werden daher in dieser Arbeit nicht durchgeführt.-

Ferner bemerken wir folgendes:

Es sei $y \in T^{\times}_{\sqrt{S}}$. Dann ist $y \in O^{\times}$, $|\tau(\varphi(y))| \leqslant 1$. Es folgt

$$\frac{1}{|\tau(\varphi(y))|} = |\tau(\varphi(1/y))| \leqslant 1$$

und damit:

$$|\tau(\varphi(y))| = 1$$

Nun sei $x \in \overline{K}$ mit $|\tau(x)| < 1$. Für ein Element $y \in T_{\sqrt{S}}$ mit $\varphi(y) = x$ folgt dann aus der vorherigen Überlegung, daß es keine Einheit von $T_{\sqrt{S}}$ sein kann. Daher ergibt sich:

$$y \in T_{\sqrt{S}} \setminus T^{\times}_{\sqrt{S}} = \sqrt{S} \subseteq T$$

Dies zeigt:

$$T \supseteq \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| < 1\})$$

Insbesondere ist:

$$\varphi(T) \supseteq \{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| < 1\}$$

Es sei jetzt T sogar als Zirkelhalbgruppe von K vorausgesetzt. Und es sei $x \in \overline{K}$ mit $|\tau(x)| = 1$. Angenommen, es gilt:

$$x \notin \varphi(T)$$

Für $y \in O$ mit $\varphi(y) = x$ folgt dann $y \notin T$ und daher $1/y \in T$, $y \in O^{\times}$. Es gibt jetzt Einheiten $e, t \in T^{\times}$ mit:

$$1/y = \frac{1}{2}(e + t)$$

Und nun ergibt sich:

$$1 = 1/|\tau(x)| = |\tau(1/x)| = |\tau(\varphi(1/y))| = \frac{1}{2}|\tau(\varphi(e)) + \tau(\varphi(t))|$$

Wegen $|\tau(\varphi(e))| = |\tau(\varphi(t))| = 1$ kann dies nur dann möglich sein, wenn

$$\tau(\varphi(e)) = \tau(\varphi(t))$$

gilt, denn $\tau(\varphi(e))$ und $\tau(\varphi(t))$ sind zwei Punkte auf dem Einheitskreis von $\mathbb{C}$, deren Verbindungsstrecke das Innere der Einheitsscheibe nicht berührt. Somit ist $\varphi(e) = \varphi(t)$. Aber das liefert das Ergebnis:

$$1/x = \varphi(1/y) = \frac{1}{2}(\varphi(t) + \varphi(t)) = \varphi(t),$$

$$x = \varphi(1/t) \in \varphi(T)$$

Widerspruch!

Für Zirkelhalbgruppen T von K gilt also sogar:

$$\varphi(T) = \{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\}$$

Wir notieren nun einige einfache Folgerungen aus den Definitionen.

Bemerkung 2.5. *Es sei T eine Krull-Halbgruppe. Weiter sei φ der Restklassenhomomorphismus des von T induzierten Bewertungsringes. Dann gilt:*

$$T^\times = \varphi^{-1}(\varphi(T)^\times)$$

Beweis. Man erkennt sofort, daß $T^\times \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(T)^\times)$ gilt.-

Aus der Definition der Krull-Halbgruppe folgt $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Es sei $t \in O$ mit $\varphi(t) \in \varphi(T)^\times$. Dann ergibt sich zunächst $t \in T$. Ferner ist $\varphi(t) \neq 0$, also $t \in O^\times$, und es gilt:

$$\varphi(\frac{1}{t}) = \frac{1}{\varphi(t)} \in \varphi(T)$$

Und nun folgt auch $\frac{1}{t} \in T$. Also ist $t \in T^\times$. Dies zeigt $T^\times \supseteq \varphi^{-1}(\varphi(T)^\times)$.- $\square$

Proposition 2.6. *Es sei T eine totale Halbgruppe eines Körpers K einer Charakteristik ungleich 2. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $T \cap (T+2) = \{1\}$
2. $\forall\, e, t \in T\ (\ \frac{1}{2}(e+t) \in T^\times \implies e = t\ )$

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Es seien $e, t \in T$ mit $f := \frac{1}{2}(e+t) \in T^\times$. Dann folgt:

$$2 + (-\frac{e}{f}) = \frac{t}{f}$$

Es folgt $\frac{t}{f} = 1$ und damit:

$$t = f,\ e = f$$

2. $\Rightarrow$ 1.: Es seien $e, t \in T$ mit $e = 2 + t$. Dann folgt:

$$\frac{1}{2}(e + (-t)) = 1 \in T^\times$$

Nun ergibt sich $e = -t$, und daraus folgt:

$$e = 1$$

$\square$

Anmerkung: Aus der Bedingung $T \cap (T+2) = \{1\}$ folgt offenbar die formal stärkere Bedingung:

$$\forall\, t \in T^\times \quad T \cap (T + 2t) = \{t\}$$

Proposition 2.7. *Es sei T eine Bewertungshalbgruppe eines Körpers K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $T \cap (T+2) = \{1\}$

2. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *gilt:*

$$\forall\, t_1, ..., t_n \in T \;(\; t_1 + ... + t_n = n \implies t_1 = ... = t_n = 1 \;)$$

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Wir beweisen die Aussage zunächst für alle $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$ durch Induktion über m. Für $m = 0$ ist nichts zu zeigen. Nun sei $m > 0$ und die Aussage für alle kleineren Exponenten bereits bewiesen. Es seien

$$t_1, ..., t_{2^m} \in T \;\text{ mit }\; t_1 + ... + t_{2^m} = 2^m.$$

Dann folgt:

$$\frac{1}{2}(t_1 + t_2) + ... + \frac{1}{2}(t_{2^m-1} + t_{2^m}) = 2^{m-1}$$

Da T eine Bewertungshalbgruppe ist, gehören alle linksstehenden Summanden ebenfalls zu T, und aus der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\frac{1}{2}(t_1 + t_2) = ... = \frac{1}{2}(t_{2^m-1} + t_{2^m}) = 1$$

Wegen der Voraussetzung folgt daraus schließlich:

$$t_1 = t_2 = ... = t_{2^m-1} = t_{2^m} = 1$$

Damit ist die Induktion gelungen.-

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und es seien weiter

$$t_1, ..., t_n \in T \;\text{ mit }\; t_1 + ... + t_n = n$$

vorgegeben. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so daß $n + j$ eine 2er-Potenz ist. Es gilt:

$$t_1 + ... + t_n + \underbrace{1 + ... + 1}_{j \text{ mal}} = n + j$$

Aus dem bereits bewiesenen folgt nun:

$$t_1 = ... = t_n = 1$$

2. $\Rightarrow$ 1.: Es seien $e, t \in T$ mit $e = 2 + t$. Dann folgt

$$e + (-t) = 2$$

und damit:

$$e = -t = 1$$

$\square$

Zirkelhalbgruppen T mit der Eigenschaft $T \cap (T+2) = \{1\}$ sind maximal in dem folgenden Sinne.

Proposition 2.8. *Eine totale Halbgruppe T mit der Eigenschaft*

$$T \cap (T+2) = \{1\}$$

kann niemals eine Zirkelhalbgruppe als echte Teilmenge enthalten.

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, in dem der zugrunde liegende Körper die Charakteristik Null hat. Es sei Z eine Zirkelhalbgruppe mit $Z \subseteq T$. Angenommen, es gibt ein Element $x \in T \setminus Z$. Dann folgt:

$$\frac{1}{x} \in Z \subseteq T \text{ und damit } \frac{1}{x} \in T^{\times}$$

Es gibt nun Einheiten $e, t \in Z^{\times}$ mit:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}(e+t)$$

Gemäß Proposition 2.6 folgt $e = t$. Aber nun ergibt sich:

$$x = \frac{1}{e} \in Z$$

Widerspruch! Es muß also $Z = T$ sein. □

Proposition 2.9. *Es sei T eine Krull-Halbgruppe. Weiter sei φ der Restklassenhomomorphismus des von T induzierten Bewertungsringes. Dann ist T genau dann eine Zirkelhalbgruppe des zugrundeliegenden Körpers, wenn $\varphi(T)$ eine Zirkelhalbgruppe des Restklassenkörpers ist.*

Beweis. Es sei also T eine Krull-Halbgruppe eines Körpers K, und es sei O der von T induzierte Bewertungsring von K. Bezeichnet

$$\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$$

den Restklassenhomomorphismus von O, so gibt es eine Körpereinbettung

$$\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

mit:

$$T = \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\})$$

Es sei nun T eine Zirkelhalbgruppe. Zu einem Element $y \in T$ gibt es dann Einheiten $e, t \in T^{\times}$ mit:

$$y = \frac{1}{2}(e+t)$$

Offenbar gilt $\varphi(e), \varphi(t) \in \varphi(T)^{\times}$. Die Gleichung

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}(\varphi(e) + \varphi(t))$$

zeigt daher, daß auch $\varphi(T)$ eine Zirkelhalbgruppe ist.-

Jetzt setzen wir umgekehrt $\varphi(T)$ als Zirkelhalbgruppe voraus. Es sei $y \in T$. Dann gibt es Elemente $e, t \in T$ mit $\varphi(e), \varphi(t) \in \varphi(T)^{\times}$ und

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}(\varphi(e) + \varphi(t)) \ .$$

Es folgt:

$$\varepsilon := y - \frac{1}{2}(e + t) \in O \smallsetminus O^{\times}$$

Aus $\varphi(e + \varepsilon), \varphi(t + \varepsilon) \in \varphi(T)^{\times}$ folgt $e + \varepsilon$, $t + \varepsilon \in T^{\times}$, gemäß 2.5. Und aus

$$y = \frac{1}{2}(e + \varepsilon + t + \varepsilon)$$

folgt dann schließlich, daß auch T eine Zirkelhalbgruppe ist.- □

Die maximalen Bewertungshalbgruppen sind genau die Krull-Halbgruppen. Denn gemäß den Überlegungen im Anschluß an den Satz 2.4 von Krull ist jede Bewertungshalbgruppe in einer Krull-Halbgruppe enthalten. Und daß es keine weitere echt größere Bewertungshalbgruppe als diese geben kann, folgt aus der untenstehenden Proposition.

Proposition 2.10. *Eine Krull-Halbgruppe kann eine andere Krull-Halbgruppe niemals als echte Teilmenge enthalten.*

Beweis. Es seien H, T zwei Krull-Halbgruppen des Körpers K mit $H \subsetneq T$. Weiter sei O der von T induzierte Bewertungsring von K. Bezeichnet

$$\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$$

den Restklassenhomomorphismus von O, so gibt es eine Körpereinbettung

$$\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

mit:

$$T = \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\})$$

Weiter seien P^{+}, M^{+} die größten Primideale von H bzw. T. Insbesondere gilt dann:

$$O = T_{M^{+}} \ \text{ und } \ O \smallsetminus O^{\times} = M^{+}$$

Es sei $y \in M^+$. Angenommen, es ist $y \notin H$. Dann folgt $\frac{1}{y} \in H \subseteq T \subseteq O$. Widerspruch! Also gilt:

$$M^+ \subseteq H$$

Offenbar ist M^+ dann auch ein Primideal von H. Daher folgt:

$$M^+ \subseteq P^+$$

Nun seien $y \in P^+$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann folgt der Reihe nach:

$$ny \in P^+ \subseteq H \subseteq T,$$

$$n|\tau(\varphi(y))| = |\tau(\varphi(ny))| \leqslant 1,$$

$$|\tau(\varphi(y))| \leqslant \frac{1}{n}$$

Daraus folgt $\varphi(y) = 0$, also $y \in O \setminus O^\times = M^+$. Somit gilt auch die umgekehrte Inklusion $P^+ \subseteq M^+$, und wir erhalten schließlich:

$$P^+ = M^+$$

Der von H induzierte Bewertungsring ist ein Unterring von O, der also das selbe maximale Ideal wie O besitzt. Daher muß er mit O übereinstimmen; die Krull-Halbgruppen H, T induzieren somit beide den selben Bewertungsring.

Aufgrund der Voraussetzungen gibt es jetzt eine weitere Körpereinbettung

$$\gamma : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

mit:

$$H = \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |\gamma(x)| \leqslant 1\})$$

Für $x \in \overline{K}$ definieren

$$|x|_1 := |\gamma(x)|, \quad |x|_2 := |\tau(x)|$$

zwei archimedische Absolutbeträge auf $\overline{K}$. Ist $|x|_1 < 1$, so gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit:

$$(1 + \frac{1}{n}) \cdot |x|_1 \leqslant 1$$

Für $y \in O$ mit $\varphi(y) = x$ folgt dann der Reihe nach:

$$(1 + \frac{1}{n}) \cdot |\gamma(\varphi(y))| \leqslant 1,$$

$$|\gamma(\varphi((1 + \frac{1}{n}) \cdot y))| \leqslant 1,$$

$$(1 + \frac{1}{n}) \cdot y \in H \subseteq T,$$

$$|\tau(\varphi((1+\frac{1}{n})\cdot y))| \leqslant 1,$$
$$(1+\frac{1}{n})\cdot|\tau(\varphi(y))| \leqslant 1,$$
$$(1+\frac{1}{n})\cdot|x|_2 \leqslant 1$$

Daraus folgt schließlich $|x|_2 < 1$. Diese Überlegung zeigt, daß die beiden Absolutbeträge zueinander äquivalent sind. Es gibt daher (siehe etwa Proposition 1.1.2. in [3]) eine reelle Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ und

$$\forall x \in \overline{K} \quad |x|_2 = |x|_1^{\varepsilon}\ .$$

Daraus folgt nun leicht $H = T$. □

Proposition 2.11. *Zu jeder Bewertungshalbgruppe gibt es jeweils genau eine Krull-Halbgruppe, die die Bewertungshalbgruppe als Teilmenge enthält.*

Beweis. Es sei T eine Bewertungshalbgruppe eines Körpers K. Dann ist T in der Krull-Habgruppe $T_{\sqrt{S}}$ enthalten. Dabei ist:

$$S = \{y \in K \mid y\cdot(T+T) \subseteq T\},\ \sqrt{S} = \{y \in K \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \quad y^n \in S\},$$
$$T_{\sqrt{S}} = \{t/e \mid t \in T,\ e \in T \setminus \sqrt{S}\} = \{1/e \mid e \in T \setminus \sqrt{S}\} \cup T$$

Nun sei E eine Krull-Halbgruppe von K mit $T \subseteq E$. Weiter sei O der von E induzierte Bewertungsring von K. Bezeichnet

$$\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$$

den Restklassenhomomorphismus von O, so gibt es eine Körpereinbettung

$$\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

mit:

$$E = \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\})$$

Zu $y \in \sqrt{S}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $y^n \in S$. Daraus folgt der Reihe nach:

$$2\cdot y^n = y^n\cdot(1+1) \in y^n\cdot(T+T) \subseteq T \subseteq E,$$
$$2\cdot|\tau(\varphi(y))|^n = |\tau(\varphi(2\cdot y^n))| \leqslant 1,$$
$$|\tau(\varphi(y))|^n \leqslant 1/2,$$
$$|\tau(\varphi(y))| < 1$$

Aus $e \in T \setminus \sqrt{S}$ kann daher nur $|\tau(\varphi(e))| = 1$ und damit $e \in E^{\times}$ folgen. Somit erkennen wir, daß

$$T_{\sqrt{S}} \subseteq E$$

gilt. Mit der Proposition 2.10 ergibt sich schließlich die Behauptung:

$$T_{\sqrt{S}} = E$$

□

Desweiteren führen wir noch folgendes auf.

Proposition 2.12. *Es sei O ein Bewertungsring eines Körpers K, und es sei $\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$ sein Restklassenhomomorphismus. Dann definiert die Zuordnung $T \mapsto \varphi(T)$ eine Bijektion zwischen den Krull-Halbgruppen von K, die in O enthalten sind, und den Krull-Halbgruppen von $\overline{K}$.*

Beweis. Besitzt K eine Krull-Halbgruppe T, die in O enthalten ist, so induziert sie auf K einen Bewertungsring O_T mit $O_T \subseteq O$. Und dann ist $\overline{O} := \varphi(O_T)$ ein Bewertungsring von $\overline{K}$. Es sei

$$\overline{\varphi} : \overline{O} \twoheadrightarrow \overline{\overline{K}}$$

sein Restklassenhomomorphismus. Die Abbildung $\overline{\varphi} \circ (\varphi|_{O_T})$ entspricht nun dem Restklassenhomomorphismus des Bewertungsringes O_T, und $\overline{\overline{K}}$ entspricht seinem Restklassenkörper (siehe dazu etwa Kapitel A.5 in [18]). Dieser besitzt einen archimedischen Absolutbetrag $| \ |$ mit:

$$T = (\overline{\varphi} \circ (\varphi|_{O_T}))^{-1}(\{x \in \overline{\overline{K}} \mid |x| \leqslant 1\})$$

(Insbesondere folgt dann $char \overline{\overline{K}} = char \overline{K} = char K = 0$.)

Es sei $\overline{T} := \varphi(T)$. Für $x \in \overline{T}$ gilt dann:

$$|\overline{\varphi}(x)| \leqslant 1$$

Nun sei umgekehrt $x \in \overline{O}$ mit $|\overline{\varphi}(x)| \leqslant 1$. Dann gibt es zunächst ein $y \in O_T$ mit $x = \varphi(y)$. Aus $|\overline{\varphi}(\varphi(y))| \leqslant 1$ folgt:

$$y \in T, \, x \in \overline{T}$$

Also gilt $\overline{T} = \overline{\varphi}^{-1}(\{x \in \overline{\overline{K}} \mid |x| \leqslant 1\})$, und damit erweist sich $\overline{T}$ als Krull-Halbgruppe von $\overline{K}$.

Es sei $y \in O$ mit $\varphi(y) \in \overline{T}$. Dann gibt es ein $t \in T$ mit $\varphi(y) = \varphi(t)$. Es folgt:

$$\varphi(y - t) = 0, \, y - t \in \mathfrak{m} := O \smallsetminus O^{\times} \subseteq \mathfrak{m}_T := O_T \smallsetminus O_T^{\times}$$

Also ist $y \in t + \mathfrak{m}_T \subseteq O_T$. Aus $|\overline{\varphi}(\varphi(y))| = |\overline{\varphi}(\varphi(t))| \leqslant 1$ folgt schließlich $y \in T$. Wir haben somit auch

$$T = \varphi^{-1}(\overline{T})$$

bewiesen. Dies zeigt, daß die von uns betrachtete Zuordnung $T \mapsto \overline{T}$ injektiv ist.-

Besitzt umgekehrt $\overline{K}$ eine Krull-Halbgruppe $\overline{T}$, so induziert diese einen Bewertungsring $\overline{O}$ von $\overline{K}$. Es sei

$$\overline{\varphi} : \overline{O} \twoheadrightarrow \overline{\overline{K}}$$

sein Restklassenhomomorphismus. Der Körper $\overline{\overline{K}}$ hat einen archimedischen Absolutbetrag $|\ |$ mit:

$$\overline{T} = \overline{\varphi}^{-1}(\{x \in \overline{\overline{K}} \mid |x| \leqslant 1\})$$

(Insbesondere folgt erneut $char\overline{\overline{K}} = char\overline{K} = charK = 0$.) Das Urbild

$$O_T := \varphi^{-1}(\overline{O})$$

ist ein Bewertungsring von K, der in O enthalten ist. Die Abbildung $\overline{\varphi} \circ (\varphi|_{O_T})$ entspricht seinem Restklassenhomomorphismus. Es sei nun:

$$T := \varphi^{-1}(\overline{T})$$

Für jedes Element $y \in O_T$ gilt dann:

$$\begin{aligned} y \in T &\iff \varphi(y) \in \overline{T} \\ &\iff |\overline{\varphi}(\varphi(y))| \leqslant 1 \\ &\iff y \in (\overline{\varphi} \circ (\varphi|_{O_T}))^{-1}(\{x \in \overline{\overline{K}} \mid |x| \leqslant 1\}) \end{aligned}$$

Also ist T eine Krull-Halbgruppe von K, die ein Urbild von $\overline{T}$ bezüglich unserer betrachteten Zuordnung ist. Daher ist diese auch surjektiv.- $\square$

Kapitel 3

Strukturen von Bewertungshalbgruppen (Teil I)

3.1 Bewertungshalbgruppen von $\mathbb{C}$

Die Einheitsscheibe $E := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant 1\}$ ist bei weitem nicht die einzigste Bewertungshalbgruppe der komplexen Zahlen. Erstaunlicherweise gibt es sogar Bewertungshalbgruppen T von $\mathbb{C}$ mit $T \subset E$. Eine Übersicht liefert der folgende Satz.

Satz 3.1.1. *Es sei k ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Zur Abkürzung sei weiter:*

$$V := \{r \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i r} \in k\} \;\; (i := \sqrt{-1})$$

Dann entsprechen die beschränkten totalen Halbgruppen von k umkehrbar eindeutig den Paaren $(A, \leqslant)$, für die gilt: A ist eine $\mathbb{Z}$ umfassende Untergruppe der (additiven) Gruppe V, für die die Faktorgruppe V/A mindestens eine Anordnung besitzt, und "$\leqslant$" ist eine solche Anordnung dieser Faktorgruppe.

Genauer entspricht dabei dem Paar $(A, \leqslant)$ die totale Halbgruppe:

$$\{e^{2\pi i r} \mid r \in V,\ r + A \leqslant 0\} \cup \{x \in k \mid |x| < 1\}$$

Beweis. Es sei T eine beschränkte totale Halbgruppe von k. Dann gilt:

$$T^{\times} \subseteq \{x \in k \mid |x| = 1\}$$

Wir setzen:

$$A := \{r \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i r} \in T^{\times}\} \subseteq V$$

Offenbar ist A eine Untergruppe der additiven Gruppe V. Wegen $e^{2\pi ij} = 1 \in T^\times$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, ist $\mathbb{Z} \subseteq A$. Es sei

$$\eta : V \twoheadrightarrow V/A$$

der Restklassenhomomorphismus. Sind $r, s, r', s' \in V$ Elemente mit

$$e^{2\pi i(r-s)} \in T,\ \ \eta(r) = \eta(r'),\ \ \eta(s) = \eta(s')\ ,$$

so folgt:

$$e^{2\pi i(r-r')} \in T^\times,\ e^{2\pi i(s-s')} \in T^\times\ ,$$

$$e^{2\pi i(r'-s')} = e^{2\pi i(r-s+s-s'-(r-r'))} = e^{2\pi i(r-s)} \frac{e^{2\pi i(s-s')}}{e^{2\pi i(r-r')}} \in T \cdot \frac{T^\times}{T^\times} \subseteq T$$

Daher wird durch

$$\eta(r) \leqslant \eta(s) :\Longleftrightarrow e^{2\pi i(r-s)} \in T$$

eine wohldefinierte Relation auf der Gruppe V/A eingeführt. Man kann leicht überprüfen, daß "$\leqslant$" sogar eine Anordnung dieser Gruppe ist.

Offensichtlich gilt:

$$T = \{e^{2\pi ir} \mid r \in V,\ \eta(r) \leqslant 0\} \cup \{x \in k \mid |x| < 1\}$$

Ist umgekehrt A eine Untergruppe von V dergestalt, daß die Restklassengruppe V/A eine Anordnung "$\leqslant$" besitzt, so ist offenbar

$$T := \{e^{2\pi ir} \mid r \in V,\ \eta(r) \leqslant 0\} \cup \{x \in k \mid |x| < 1\}$$

eine totale Halbgruppe von k.

Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt dabei:

$$e^{2\pi ir} \in T \Longleftrightarrow \exists\, r' \in \mathbb{R} : r - r' \in \mathbb{Z},\ \eta(r') \leqslant 0$$

Ist nun noch die Voraussetzung $\mathbb{Z} \subseteq A$ erfüllt, so ist $\eta(j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, und die obige Bedingung vereinfacht sich zu:

$$e^{2\pi ir} \in T \Longleftrightarrow \eta(r) \leqslant 0$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} e^{2\pi ir} \in T^\times &\Longleftrightarrow e^{2\pi ir} \in T,\ e^{2\pi i(-r)} \in T \\ &\Longleftrightarrow \eta(r) \leqslant 0,\ \eta(r) \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \eta(r) = 0 \\ &\Longleftrightarrow r \in A \end{aligned}$$

Das Paar $(A, \leqslant)$ wird nun durch T eindeutig bestimmt. $\square$

Zwei Beispiele sollen diesen Satz illustrieren:

Ist etwa $k = \mathbb{R}$, so ist $V = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Nur die beiden Untergruppen $\mathbb{Z}$ und $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ von V umfassen alle ganzen Zahlen. Aber die Wahl $A = \mathbb{Z}$ ist im Sinne des Satzes nicht zulässig, denn die Faktorgruppe V/A kann als zweielementige Gruppe keine Anordnung besitzen! Es bleibt nur die Wahl $A = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ übrig, die auf die einzige beschränkte totale Halbgruppe $[-1, 1]$ führt.

Ein zweites einfaches, aber nicht-triviales Beispiel, ist das folgende:

Ist etwa $k = \mathbb{C}$, so ist $V = \mathbb{R}$. Als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ besitzt $\mathbb{R}$ eine Basis $H \subseteq \mathbb{R}$ (eine sogenannte *Hamel-Basis*). Bezeichnet $\mathcal{F}$ die Menge der Funktionen

$$f : H \to \mathbb{Q}$$

mit

$$|\{h \in H \mid f(h) \neq 0\}| < \infty \ ,$$

so entspricht jede reelle Zahl umkehrbar eindeutig einer Funktion aus $\mathcal{F}$. Wenn wir nun aus H zwei beliebige Elemente $h', h'' \in H$ mit $h' \neq h''$ auswählen, so können wir die Untergruppe

$$A := \{\sum_{h \in H} f(h) \cdot h \mid f \in \mathcal{F},\ f(h') = f(h'') = 0\}$$

von $V = \mathbb{R}$ bilden. Bezeichnet wieder $\eta : V \twoheadrightarrow V/A$ den Restklassenhomomorphismus, so vermittelt offenbar die Zuordnung

$$a + ib \mapsto \eta(ah' + bh'') \ , \ a, b \in \mathbb{Q}$$

einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Q}(i) \cong V/A$. Die Gruppe $\mathbb{Q}(i)$ besitzt unendlich viele Anordnungen. Eine davon ist z.B. die lexikographische Anordnung. Interessantere Anordnungen entstehen wie folgt durch eine Aufteilung der komplexen Ebene in zwei Halbebenen:

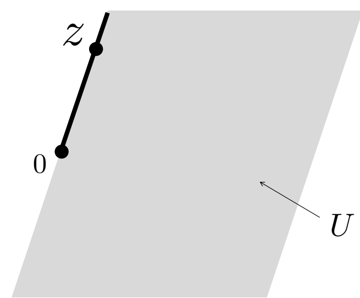
Wir wählen einen beliebigen Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, etwa $z := 1 + i\pi$. Die Gerade $G := \{rz \mid r \in \mathbb{R}\}$ teilt $\mathbb{C}$ in zwei Halbebenen auf; wir entscheiden uns für eine dieser beiden, etwa für:

$$U := \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0} G + \varepsilon \ = \ \{r + ir'\pi \mid r, r' \in \mathbb{R},\ r > r'\}$$

Die Menge $P := U \cup \{rz \mid r \in \mathbb{R},\ r \geqslant 0\}$ definiert dann mittels

$$x \leqslant y :\Longleftrightarrow y - x \in P,\ x, y \in \mathbb{Q}(i)$$

eine Anordnung der Gruppe $\mathbb{Q}(i)$, wie man sich leicht überlegt. (Die Gerade G hat übrigens mit $\mathbb{Q}(i)$ außer dem Nullpunkt keinen weiteren Punkt gemeinsam.)



Das Paar $(A, \leqslant)$ liefert nun gemäß dem obigen Satz eine beschränkte totale Halbgruppe von $\mathbb{C}$. Diese stimmt mit der Einheitsscheibe $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant 1\}$ nicht überein; der Punkt $e^{2\pi i(h'+h'')}$ ist z.B. nicht in ihr enthalten.

Alle totalen Halbgruppen, von denen der Satz 3.1.1 handelt, sind offenbar auch Bewertungshalbgruppen. Das letzte Beispiel zeigt, daß es echte Teilmengen der komplexen Einheitsscheibe gibt, die selbst schon Bewertungshalbgruppen von $\mathbb{C}$ sind. Diese sind dann allerdings keine Zirkelhalbgruppen, denn es gibt Punkte im reellen Intervall $]-1,1[$, die nicht als arithmetisches Mittel zweier Einheiten dargestellt werden können.

Neben den beschränkten totalen Halbgruppen besitzen die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ noch unendlich viele unbeschränkte totale Halbgruppen, die man etwa wie folgt konstruieren kann: Da π über $\mathbb{Q}$ transzendent ist, besitzt der Körper $\mathbb{Q}(\pi)$ auch nicht-archimedische Anordnungen "$\preceq$", für die

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} :\ 0 \preceq \pi \preceq 1/n$$

gilt. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $(\mathbb{Q}(\pi), \preceq)$ in $\mathbb{C}$ einen maximalen angeordneten Oberkörper $(R, \preceq)$. Man zeigt leicht (mit einem bekannten Satz von Artin-Schreier), daß R ein reell abgeschlossener Körper mit $R(i) = \mathbb{C}$ ist. (Da R nicht-archimedisch angeordnet ist, gilt jedoch $R \not\cong \mathbb{R}$.) Man kann sich nun leicht überlegen, daß

$$T := \{x + iy \mid x, y \in R,\ x^2 + y^2 \preceq 1\}$$

eine Zirkelhalbgruppe von $\mathbb{C}$ ist. Wegen $\pi \in T$ ist T nicht beschränkt. Ferner ist $T \cap \mathbb{R}$ eine nicht-beschränkte Bewertungshalbgruppe von $\mathbb{R}$.

3.2 Euklidische Zirkelhalbgruppen

Es sei T eine totale Halbgruppe eines Körpers K mit $char K = 0$. Für eine Einheit $t \in T^{\times}$ definieren wir:

$$Re(t) := \frac{1}{2} \cdot (t + \frac{1}{t})$$

Weiter sei:

$$R_0 := Re(T^{\times}) = \{Re(t) \mid t \in T^{\times}\}$$

Wir untersuchen im folgenden den kleinsten Unterkörper $R := \mathbb{Q}(R_0)$ von K, der R_0 enthält. Wir nennen R die *Achse* von T. Wir setzen dazu noch voraus, daß der Körper K ein Element $i \in K$ mit $i^2 = -1$ besitzt. Dann können wir für $t \in T^{\times}$ den Begriff

$$Im(t) := Re(-it) = i \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{t} - t)$$

einführen. Wir bemerken nun zunächst folgendes:

Für jede Einheit $t \in T^{\times}$ gilt:

$$Re(t) + i \cdot Im(t) = \frac{1}{2} \cdot (t + \frac{1}{t}) - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{t} - t) = t$$

Gilt zudem noch $2 \cdot T \subseteq T^{\times} + T^{\times}$, so gibt es zu jedem Element $x \in T$ zwei Einheiten $e, t \in T^{\times}$ mit:

$$x = \frac{1}{2}(e + t) \tag{3.1}$$

Also ergibt sich die Gleichung:

$$x = \frac{1}{2} \cdot (Re(e) + Re(t)) + i \cdot \frac{1}{2} \cdot (Im(e) + Im(t)) \tag{3.2}$$

Es ist $Re(e), Re(t) \in R_0$, und da $-ie, -it \in T^{\times}$ gilt, ist auch $Im(e), Im(t) \in R_0$. Aus der letzten Gleichung folgt daher $x \in R + i \cdot R$. Und da T eine totale Halbgruppe von K und R ein Körper ist, zeigt uns dies:

$$R(i) = K,\ [K : R] \leqslant 2$$

Für alle $e, t \in T^{\times}$ gilt weiter:

$$\begin{aligned}
Re(e) \cdot Re(t) &= \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) \cdot \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \\
&= \frac{1}{4} \cdot (et + \frac{1}{et} + \frac{e}{t} + \frac{t}{e}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}(et + \frac{1}{et}) + \frac{1}{2}(\frac{e}{t} + \frac{t}{e})) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (Re(et) + Re(e/t))
\end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$R_0 \cdot R_0 \subseteq \frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \tag{3.3}$$

Daraus folgt offenbar, daß die Menge

$$L := \{\frac{r_0 + ... + r_n}{s_0 + ... + s_m} \mid n, m \in \mathbb{N},\ r_\nu, s_\mu \in R_0,\ s_0 + ... + s_m \neq 0\}$$

additiv und multiplikativ abgeschlossen ist. Und natürlich ist L auch abgeschlossen gegenüber der Inversenbildung. Da $1, 0, -1 \in R_0$ ist, erkennt man nun, daß L ein Körper ist, der R_0 enthält. Und umgekehrt beinhaltet jeder Körper, der R_0 enthält, natürlich auch L. Also gilt:

$$R = L \tag{3.4}$$

Betrachten wir die Einheiten $T^\times$ einer Bewertungshalbgruppe T als ihren "Rand", so stellen wir fest, daß Krull-Halbgruppen eher einen "dicken" Rand haben. Denn das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ der von ihr induzierten Bewertung kann man sich als "kleine Scheibe" um den Ursprung vorstellen, und für jede Einheit $t \in T^\times$ gilt $t + \mathfrak{m} \subseteq T^\times$. Daher liefert der Begriff der Krull-Halbgruppe sicher nicht den richtigen Ansatz, um sich axiomatisch der gewöhnlichen komplexen Einheitsscheibe anzunähern. Dagegen zeigt das folgende Lemma, daß Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse die Anschauung eines "dünnen" Randes viel besser erfüllen.

Lemma 3.2.1. *Es sei T eine Zirkelhalbgruppe eines Körpers K, der ein Element $i \in K$ mit $i^2 = -1$ besitze. Weiter sei die Menge R_0 wie oben angegeben definiert, und es sei $R = \mathbb{Q}(R_0)$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

1. *R ist reell.*
2. *Es gelten die Beziehungen:*

$$T \cap (T + 2) = \{1\} \quad \textit{und} \quad \frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$$

3. *R ist euklidisch.*

Ist R reell (mit der Anordnung "$\leqslant$"), so gelten zudem noch die Aussagen:

$$T = \{x + i \cdot y \mid x, y \in R,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}\,,$$

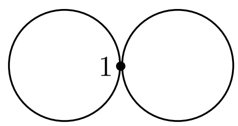
$$R_0 = \{x \in R \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} = T \cap R\,,$$

$$R = \{\frac{r}{s} \mid r, s \in R_0,\ s \neq 0\}\,,$$

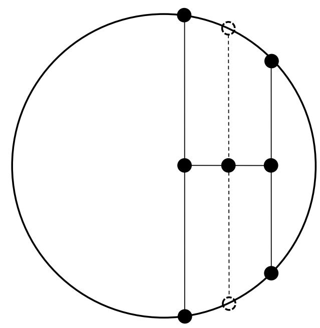
$$\forall\, e, t, x, y \in T^\times\ (e + t = x + y \neq 0 \Rightarrow \{e, t\} = \{x, y\})\,,$$

$$K \textit{ ist quadratisch abgeschlossen}$$

$$T \cap (T+2) = \{1\}$$



$$\frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$$



Beweis. Zunächst bemerken wir folgendes: Für alle Einheiten $t \in T^{\times}$ gilt:

$$Re(t)^2 + Im(t)^2 = \frac{1}{4} \cdot (t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}) - \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{t^2} - 2 + t^2) = 1$$

Also gilt für alle Einheiten $e, t \in T^{\times}$:

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{2} \cdot (Re(e) + Re(t)))^2 + (\frac{1}{2} \cdot (Im(e) + Im(t)))^2 + \\
&(\frac{1}{2} \cdot (Re(e) - Re(t)))^2 + (\frac{1}{2} \cdot (Im(e) - Im(t)))^2 \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Zu 1. $\Rightarrow$ 2.: Der Körper R besitzt eine Anordnung "$\leqslant$". Wir können daher die Menge

$$T_R := \{x + i \cdot y \mid x, y \in R,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

einführen. Für ein beliebiges Element $x \in T$ folgt aus den Gleichungen 3.1, 3.2 und 3.5 sofort $x \in T_R$. Also gilt:

$$T \subseteq T_R$$

Auch T_R ist eine totale Halbgruppe von K; wegen $(x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2$ gilt:

$$T_R^{\times} = \{x + i \cdot y \mid x, y \in R,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Wir nehmen jetzt an, daß ein Element

$$y \in T_R \setminus T$$

existiert. Für $x := 1/y$ gilt dann:

$$x \in T \subseteq T_R$$

Also gibt es Einheiten $e, t \in T^\times$ mit:

$$x = \frac{1}{2}(e+t)$$

Aus $x \in T_R^\times$ und den Gleichungen 3.2 und 3.5 folgt nun:

$$(\frac{1}{2} \cdot (Re(e) - Re(t)))^2 + (\frac{1}{2} \cdot (Im(e) - Im(t)))^2 = 0$$

Da R ein reeller Körper ist, kann dies nur dann richtig sein, wenn

$$Re(e) = Re(t),\ Im(e) = Im(t)$$

gilt. Aus diesen beiden Gleichungen folgt leicht:

$$e = t$$

Aber nun ergibt sich:

$$x = \frac{1}{2} \cdot (t+t) = t \in T^\times,\ y = 1/x \in T$$

Widerspruch! Es kann also kein solches Element y geben. Wir erhalten schließlich das Ergebnis:

$$T = T_R$$

Sind $a, b, c, d \in R$ mit

$$a + ib,\ c + id \in T, \quad a + ib = 2 + (c + id),$$

so folgt insbesondere:

$$c^2 \leqslant 1,\ (2+c)^2 \leqslant 1$$

Daraus folgt $c = -1$, und dies erzwingt $a + ib = 1$. Diese Überlegung beweist:

$$T \cap (T+2) = \{1\}$$

Ist $x \in R$ mit $-1 \leqslant x \leqslant 1$, so folgt aus $x^2 + 0^2 \leqslant 1$:

$$x = x + i \cdot 0 \in T_R = T$$

Also gibt es Einheiten $e, t \in T^\times$ mit:

$$x = \frac{1}{2}(e+t)$$

Es gibt Elemente $a, b, c, d \in R$ mit:

$$e = a + ib, \quad t = c + id, \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$$

Wegen $0 = \frac{1}{2} i(b+d)$ gilt dabei:

$$b = -d, \quad b^2 = d^2$$

Also folgt:

$$a^2 = c^2, \quad a = c \ \text{ oder } \ a = -c$$

Im ersten Fall ist $e = \dfrac{1}{t}$, und im zweiten Fall gilt $e = -t$. Aus jedem Fall folgt:

$$x \in R_0$$

Nun sei umgekehrt $x \in R_0$ vorausgesetzt. Dann ist $x \in R \cap T = R \cap T_R$ und es folgt:

$$x^2 \leqslant 1$$

Also gilt:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

Wir haben somit

$$\{x \in R \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} = R_0$$

bewiesen. Da die rechte Seite dieser Gleichung von der Anordnung "$\leqslant$" gar nicht abhängt, kann R überhaupt nur eine einzige Anordnung besitzen. Ferner folgt aus der Gleichung schließlich auch noch $\dfrac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$.

Zu 2. $\Rightarrow$ 1.: Wir beweisen zunächst die folgende Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: Sind $r_1, ..., r_n \in R_0$ Elemente mit $r_1^2 + ... + r_n^2 = 0$, so folgt $r_1 = ... = r_n = 0$.

Beweis der Behauptung: Es seien $t_1, ..., t_n \in T^\times$ Einheiten mit:

$$r_j = \frac{1}{2}(t_j + \frac{1}{t_j}),\ j = 1, ..., n \ \text{ und } \ (\frac{1}{2}(t_1 + \frac{1}{t_1}))^2 + ... + (\frac{1}{2}(t_n + \frac{1}{t_n}))^2 = 0$$

Daraus folgt der Reihe nach:

$$\frac{1}{4}(t_1^2 + 2 + \frac{1}{t_1^2}) + ... + \frac{1}{4}(t_n^2 + 2 + \frac{1}{t_n^2}) = 0,$$

$$\frac{1}{2}(t_1^2 + \frac{1}{t_1^2}) + ... + \frac{1}{2}(t_n^2 + \frac{1}{t_n^2}) = -n,$$

$$(-\frac{1}{2}(t_1^2 + \frac{1}{t_1^2})) + ... + (-\frac{1}{2}(t_n^2 + \frac{1}{t_n^2})) = n$$

Wegen $T \cap (T+2) = \{1\}$ können wir nun Proposition 2.7 anwenden und erhalten:

$$-\frac{1}{2}(t_1^2 + \frac{1}{t_1^2}) = ... = -\frac{1}{2}(t_n^2 + \frac{1}{t_n^2}) = 1$$

Und daraus folgt sofort:

$$r_1 = ... = r_n = 0$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.-

Offenbar kann die Gleichung 3.4 wegen $\frac{1}{2} \cdot (R_0 + R_0) \subseteq R_0$ nun in die viel einfachere Gestalt

$$R = \{\frac{r}{s} \mid r, s \in R_0,\ s \neq 0\}$$

überführt werden. Aus der Inklusion 3.3 folgt zudem, daß R_0 multiplikativ abgeschlossen ist. Sind $r_0, ..., r_n \in R_0,\ s_0, ..., s_n \in R_0 \setminus \{0\}$ Elemente mit

$$(\frac{r_0}{s_0})^2 + ... + (\frac{r_n}{s_n})^2 = 0,$$

so liefert die Multiplikation mit $(s_0 ... s_n)^2$ die Gleichung:

$$(r_0 s_1 ... s_n)^2 + (r_1 s_0 s_2 ... s_n)^2 + ... + (r_n s_0 ... s_{n-1})^2 = 0$$

Wir können jetzt unsere oben bewiesene Behauptung anwenden und erhalten

$$r_0 s_1 ... s_n = r_1 s_0 s_2 ... s_n = ... = r_n s_0 ... s_{n-1} = 0,$$

was letztlich $r_0 = ... = r_n = 0$ ergibt. Diese Überlegung zeigt, daß R reell ist.

Zu 1. $\Rightarrow$ 3.: Wir können uns die bereits bewiesene Äquivalenz der Aussagen 1. und 2. sowie die übrigen bereits gezeigten Aussagen zunutze machen.

Es sei nun $r \in R$ ein Element mit $r > 1$. (Die folgende Argumentation ist der klassischen Konstruktion von Quadratwurzeln mit Zirkel und Lineal entlehnt.) Dann gilt:

$$\frac{r-1}{r+1} \in R \ \text{ mit } \ 0 < \frac{r-1}{r+1} < 1$$

Also ist $\frac{r-1}{r+1} \in R_0$ und es gibt ein $t \in T^\times$ mit:

$$\frac{r-1}{r+1} = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$$

Daraus folgt:

$$0 = t^2 - 2t\frac{r-1}{r+1} + 1$$

Also gilt:

$$t = \frac{r-1}{r+1} \pm \sqrt{(\frac{r-1}{r+1})^2 - 1}$$

Für den Ausdruck unter der Wurzel gilt:

$$(\frac{r-1}{r+1})^2 - 1 = \frac{r^2 - 2r + 1}{r^2 + 2r + 1} - 1 = \frac{-4r}{r^2 + 2r + 1} = -(\frac{2\sqrt{r}}{r+1})^2$$

Es folgt:

$$t = \frac{r-1}{r+1} \pm i\frac{2\sqrt{r}}{r+1}$$

Und daraus ergibt sich sofort:

$$\sqrt{r} \in K, \quad R(\sqrt{r}) \subseteq K$$

Gemäß den Sätzen der Theorie der reellen Körper kann die Anordnung von R auf den Körper $R(\sqrt{r})$ fortgesetzt werden. Wegen $R(i) = K$ kann dies nur richtig sein, wenn $\sqrt{r} \in R$ gilt. Und nun erkennen wir: Jedes positive Element von R ist ein Quadrat. Also ist R ein euklidischer Körper.

Zu 3. $\Rightarrow$ 1.: Dies ist trivial.

Daß $K = R(i)$ quadratisch abgeschlossen ist, gilt gemäß Satz 3 im Artikel [1].

Ist R reell, so hatten wir uns schon überlegt, daß für alle Einheiten $e, t \in T^\times$ aus $\frac{1}{2}(e+t) \in R_0 \setminus \{0\}$ stets $e = \frac{1}{t}$ folgen muß. Und sind $e, x \in T^\times$ Einheiten mit $e + \frac{1}{e} = x + \frac{1}{x}$, so führt dies auf die quadratische Gleichung

$$0 = x^2 - x(e + \frac{1}{e}) + 1\,,$$

die offenbar nur die Lösungen $x = e$ und $x = \frac{1}{e}$ zuläßt. Für alle Einheiten $e, t, x \in T^\times$ folgt aus

$$e + t = x + \frac{1}{x} \neq 0$$

also stets $\{e, t\} = \{x, \frac{1}{x}\}$. Nun seien $e, t, x, y \in T^\times$ Einheiten mit:

$$e + t = x + y \neq 0$$

Es gibt ein Element $a \in K$ mit $a^2 = \frac{1}{xy}$, da K quadratisch abgeschlossen ist. Es folgt $a \in T^\times$, sowie:

$$ae + at = ax + ay = ax + \frac{1}{ax} \neq 0$$

Und nun ergibt sich:

$$\{ae, at\} = \{ax, \frac{1}{ax}\} = \{ax, ay\}$$

Also ist $\{e, t\} = \{x, y\}$. □

Zum obigen Lemma bemerken wir noch: *Ist R reell, so ist der von T induzierte Bewertungsring O von K konvex bzgl. der Anordnung "$\leqslant$" von R.*

Beweis. Es seien $x, y \in R$ mit $y \in O$ und $0 < x < y$. Dann folgt $0 < x/y < 1$ und damit $x/y \in T \subseteq O$. Also ist $x \in yO \subseteq O$. □

Korollar 3.2.2. *Es sei K ein Körper mit $\sqrt{-1} \in K$. Dann entsprechen die Zirkelhalbgruppen von K mit reeller Achse umkehrbar eindeutig den euklidischen Unterkörpern L von K, für die $L(\sqrt{-1}) = K$ gilt.*

Beweis. Es genügt den Fall $char K = 0$ zu betrachten. Es gibt ein Element $i \in K$ mit $i^2 = -1$.

Ist T eine Zirkelhalbgruppe des Körpers K mit der reellen Achse R, so ist R ein euklidischer Unterkörper von K mit $R(i) = K$, gemäß 3.2.1. Bezeichnet "$\leqslant$" die eindeutig bestimmte Anordnung von R, so gilt:

$$T = \{x + i \cdot y \mid x, y \in R,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

Es sei nun umgekehrt L ein euklidischer Unterkörper von K mit:

$$L(i) = K$$

Bezeichnet "$\leqslant$" die eindeutig bestimmte Anordnung von L, so ist leicht einzusehen, daß

$$Z := \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in L,\ \alpha^2 + \beta^2 \leqslant 1\}$$

eine totale Halbgruppe von K ist.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in L$ Elemente mit

$$\alpha + i\beta,\ \gamma + i\delta \in Z,$$

so folgt aus

$$\begin{aligned} & (\frac{1}{2}(\alpha + \gamma))^2 + (\frac{1}{2}(\beta + \delta))^2 \\ + \quad & (\frac{1}{2}(\alpha - \gamma))^2 + (\frac{1}{2}(\beta - \delta))^2 \\ = \quad & 2 \cdot \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) + 2 \cdot \frac{1}{4}(\gamma^2 + \delta^2) \\ \leqslant \quad & 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

sofort:

$$\frac{1}{2}(\alpha + i\beta + \gamma + i\delta) \in Z$$

Das zeigt, daß Z sogar eine Bewertungshalbgruppe von K ist.

Es seien nun $\alpha, \beta \in L$ Elemente mit:

$$x := \alpha + i\beta \in Z \setminus \{0\}$$

Wir definieren:

$$\omega := \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} - 1}$$

$$e := x(1 + i\omega)$$
$$t := x(1 - i\omega)$$

Da L ein euklidischer Körper ist, gilt $\omega \in L$; wir können $\omega \geqslant 0$ annehmen. Es folgt $e, t \in K$. Wegen

$$1^2 + \omega^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

gilt offenbar sogar $e, t \in Z^\times$. Schließlich zeigt uns

$$\frac{1}{2}(e + t) = x\,,$$

daß Z eine Zirkelhalbgruppe von K ist. Man kann sich ferner leicht klar machen, daß die Gleichung

$$\{\alpha \in L \mid -1 \leqslant \alpha \leqslant 1\} = \{\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \mid t \in Z^\times\}$$

gilt und deshalb auch L aus Z berechnet werden kann. □

Ferner bemerken wir:

Bemerkung 3.2.3. *Es sei T eine Zirkelhalbgruppe eines Körpers K, der ein Element $i \in K$ mit $i^2 = -1$ besitzt. Und es bezeichne φ den Restklassenhomomorphismus der von T auf K induzierten Bewertung. Dann ist $\varphi(T)$ eine Zirkelhalbgruppe des Restklassenkörpers, die eine reelle Achse besitzt.*

Beweis. Man erkennt sofort, daß $\overline{T} := \varphi(T)$ eine Zirkelhalbgruppe des Restklassenkörpers $\overline{K}$ ist. Gemäß den Ausführungen im Anschluß an Satz 2.4 gibt es eine Körpereinbettung $\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit:

$$\overline{T} = \{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\}$$

Ist $x \in \overline{T}^\times$, so ist $|\tau(x)| = 1$. Daraus folgt:

$$\tau(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})) = \frac{1}{2}(\tau(x) + \frac{1}{\tau(x)}) \in \mathbb{R}$$

Dies zeigt, daß $\{\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \mid x \in \overline{T}^\times\}$ in einem reellen Unterkörper von K enthalten ist. Mit Lemma 3.2.1 folgt nun, daß $\overline{T}$ eine reelle Achse besitzt. □

Bemerkung 3.2.4. *Es seien T eine Zirkelhalbgruppe und T' eine Bewertungshalbgruppe eines Körpers K. Weiter seien wieder $R_0 = Re(T^\times)$ und $R_0' = Re(T'^\times)$. Dann gilt $T \subseteq T'$ genau dann, wenn $R_0 \subseteq R_0'$ gilt.*

Beweis. Gilt $T \subseteq T'$, so ist insbesondere $T^\times \subseteq T'^\times$. Und daraus folgt sofort $R_0 \subseteq R'_0$.-

Nun sei umgekehrt $R_0 \subseteq R'_0$ vorausgesetzt. Es sei $t \in T^\times$. Dann gibt es eine Einheit $t' \in T'^\times$ mit:

$$\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) = \frac{1}{2}(t' + \frac{1}{t'})$$

Die Einheit t ist eine Nullstelle des quadratischen Polynoms:

$$X^2 - X(t' + \frac{1}{t'}) + 1$$

Da dieses die Lösungen $t', \frac{1}{t'}$ hat, folgt $t \in \{t', \frac{1}{t'}\}$. Somit ergibt sich $T^\times \subseteq T'^\times$. Und nun folgt:

$$T = \frac{1}{2}(T^\times + T^\times) \subseteq \frac{1}{2}(T'^\times + T'^\times) \subseteq T'$$

□

Das letzte Korollar motiviert die folgende Definition:

Definition 3.2.5. Eine Zirkelhalbgruppe nennen wir *euklidisch*, wenn ihre Achse ein euklidischer Körper ist.

Schließlich bemerken wir noch folgendes: Besitzt ein quadratisch abgeschlossener Körper K der Charakteristik $\neq 2$ einen Unterkörper R mit $1 < [K : R] < \infty$ und $\sqrt{-1} \notin R$, so ist R die reelle Achse einer Zirkelhalbgruppe von K. Denn gemäß Corollary 5.11. auf S. 270 in [13] muß R ein euklidischer Koordinatenkörper von K sein.

3.3 Bewertungshalbgruppen von über $\mathbb{Q}$ algebraischen Körpern

Ist T eine Bewertungshalbgruppe eines Körpers K, so folgt aus den Ergebnissen von Krull (Satz 2.4), daß der Restklassenkörper des von T induzierten Bewertungsringes $O = T_{M^+}$ die Charakteristik Null besitzt. Ist K algebraisch über $\mathbb{Q}$, so folgt aus den Sätzen der Bewertungstheorie, daß O trivial sein muß:

$$O = K$$

Aus den Ergebnissen von Krull folgt weiter, daß es dann eine Körpereinbettung $\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$T \subseteq T_{\sqrt{S}} = \{x \in K \mid |\tau(x)| \leqslant 1\}$$

gibt. Ist T sogar eine Zirkelhalbgruppe, so gilt schließlich:

$$T = T_{\sqrt{S}} = \{x \in K \mid |\tau(x)| \leqslant 1\}$$

Insbesondere gilt dann $\frac{4}{5} \in T$, und es gibt somit Einheiten $e, t \in T^\times$ mit:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}(e+t) = \frac{1}{2}(\tau(e) + \tau(t))$$

Aus $|\tau(e)| = |\tau(t)| = 1$ folgt $\tau(e) = \frac{1}{\tau(t)}$. Also gilt $e = \frac{1}{t}$ und es folgt:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + t),$$

$$0 = t^2 - \frac{8}{5}t + 1,$$

$$t = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{4^2}{5^2} - 1} = \frac{4}{5} \pm \frac{3\sqrt{-1}}{5}$$

Daraus folgt $\sqrt{-1} \in K$. Also besitzt K ein Element $i \in K$ mit $i^2 = -1$.

3.3.1 Bewertungshalbgruppen von $\mathbb{Q}$

Aus Satz 2.4 von Krull folgt sofort, daß $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leqslant 1\}$ die einzige Bewertungshalbgruppe von $\mathbb{Q}$ ist. Es soll nun jedoch ein Beweis dieser Tatsache vorgestellt werden, der rein elementar ist und von diesem Satz keinen Gebrauch macht.

Proposition 3.3.1.1. *Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $Y \subseteq \{0, 1, 2, ..., n\}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

$$\{0, 1, n\} \subseteq Y \quad \textit{und} \quad \forall\, x, y \in Y \;\; x + y \textit{ gerade } \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) \in Y$$

Dann folgt $Y = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Beweis. Wir führen eine Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Daher sei jetzt $n > 1$, und für alle kleineren natürlichen Zahlen sei die Proposition bereits bewiesen worden.

Ist n gerade, so ist:

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2}(0 + n) \in Y$$

Daher erfüllt die Menge

$$Y' := Y \cap \{0, 1, 2, ..., \frac{n}{2}\}$$

offenbar alle Voraussetzungen der Proposition. Es folgt:

$$\{0, 1, 2, ..., \frac{n}{2}\} = Y' \subseteq Y$$

Angenommen, es ist $Y \neq \{0, 1, 2, ..., n\}$. Dann gibt es ein kleinstes

$$j \in \{1, 2, ..., \frac{n}{2} - 1\}$$

mit:

$$\frac{n}{2} + j \notin Y$$

Wegen

$$2j = j + j < \frac{n}{2} + j = \frac{1}{2}(2j + n)$$

folgt jetzt aber:

$$2j \in Y, \quad \frac{n}{2} + j \in Y$$

Widerspruch! Also ist $Y = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Ist n ungerade, so ist:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}(1 + n) \in Y$$

Daher erfüllt die Menge

$$Y'' := Y \cap \{0, 1, 2, ..., \frac{n+1}{2}\}$$

offenbar alle Voraussetzungen der Proposition. Es folgt:

$$\{0, 1, 2, ..., \frac{n+1}{2}\} = Y'' \subseteq Y$$

Angenommen, es ist $Y \neq \{0, 1, 2, ..., n\}$. Dann gibt es ein kleinstes

$$j \in \{1, 2, ..., \frac{n-1}{2} - 1\}$$

mit:

$$\frac{n+1}{2} + j \notin Y$$

Wegen

$$2j + 1 = (j + 1) + j \leqslant \frac{n-1}{2} + j < \frac{n+1}{2} + j = \frac{1}{2}((2j + 1) + n)$$

folgt jetzt aber:

$$2j + 1 \in Y, \quad \frac{n+1}{2} + j \in Y$$

Widerspruch! Also ist $Y = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Die Induktion ist damit gelungen. $\square$

Es sei nun T eine Bewertungshalbgruppe von $\mathbb{Q}$. In den elementaren Ausführungen im Anschluß an Satz 2.4 wurde bereits $T \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$ gezeigt. Ist also $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, so ist $n \notin T$ und daher $1/n \in T$. Wir erkennen, daß die Menge

$$Y := \{j \in \{0, 1, 2, ..., n\} \mid \frac{j}{n} \in T\}$$

alle Voraussetzungen der Proposition 3.3.1.1 erfüllt. Also folgt

$$\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\} \subseteq T$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir haben damit $\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant q \leqslant 1\} \subseteq T$ gezeigt, und aus $-T \subseteq T$ folgt schließlich $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leqslant 1\} \subseteq T$.

Sind $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\frac{m}{n} > 2$, so folgt:

$$\frac{2n}{m} < 1,\ \frac{2n}{m} \in T$$

Aus

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{2n}{m} = 2 \notin T$$

folgt daher $\frac{m}{n} \notin T$, wegen $T \cdot T \subseteq T$. Also gilt:

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 2\} \cap T = \emptyset$$

Ist $q \in \mathbb{Q}$ mit $1 < q < 2$, so gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $q^j \geqslant 2$, also $q^j \notin T$. Und damit ist auch $q \notin T$. Somit gilt sogar $\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 1\} \cap T = \emptyset$. Mit $-T \subseteq T$ folgt aus dem bisher gezeigten schließlich:

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leqslant 1\} = T$$

□

3.3.2 Zirkelhalbgruppen von über $\mathbb{Q}$ algebraischen Körpern

Wir werden nun untersuchen, welche Formen von Zirkelhalbgruppen es in über $\mathbb{Q}$ algebraischen Körpern gibt. Zunächst bemerken wir:

Bemerkung 3.3.2.1. *Zirkelhalbgruppen von über $\mathbb{Q}$ algebraischen Körpern besitzen stets eine reelle Achse.*

Beweis. Es sei T eine Zirkelhalbgruppe des über $\mathbb{Q}$ algebraischen Körpers K. Sie induziert die triviale Bewertung auf K, deren Restklassenhomomorphismus die Identität auf K ist. Aus Bemerkung 3.2.3 folgt nun, daß die Zirkelhalbgruppe eine reelle Achse besitzen muß. □

Wir können nun Korollare aus den bekannten Tatsachen über Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse ableiten.

Proposition 3.3.2.2. *Besitzt ein über $\mathbb{Q}$ algebraischer Körper eine Zirkelhalbgruppe, so muß er quadratisch abgeschlossen sein.*

Beweis. Dies folgt aus der Bemerkung 3.3.2.1 und dem Lemma 3.2.1. □

Unmittelbar aus Korollar 3.2.2 folgt:

Korollar 3.3.2.3. *Es sei K ein über $\mathbb{Q}$ algebraischer Körper. Dann entsprechen die Zirkelhalbgruppen von K umkehrbar eindeutig den euklidischen Unterkörpern L von K, für die $K = L(\sqrt{-1})$ gilt.*

An dieser Stelle sei bemerkt, daß nicht jeder quadratisch abgeschlossene Körper der Charakteristik Null eine Zirkelhalbgruppe besitzen muß; die Umkehrung der obigen Proposition 3.3.2.2 ist im allgemeinen nicht richtig. Eberhard Becker stellte dazu in seinem Artikel über euklidische Körper (siehe [1], S. 46) ein Verfahren zur Herleitung geeigneter Beispiele vor. Demgemäß können wir etwa folgende Konstruktion vornehmen: Zunächst wählen wir einen Körper F dergestalt, daß $F/\mathbb{Q}$ eine endliche Galois-Erweiterung vom Grade 3 ist. (Zum Beispiel könnte F der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$ sein.) Nach dem Lemma von Zorn existiert nun ein Körper k, der maximal in bezug auf die folgenden beiden Bedingungen ist:

k ist algebraisch über $\mathbb{Q}$

$k \cap F = \mathbb{Q}$

Dann ist k ein quadratisch abgeschlossener Körper, der die folgende Eigenschaft besitzt: Für jeden reellen Unterkörper R von k gilt:

$$[k : R] = \infty$$

Mit anderen Worten: k besitzt kein "Koordinatensystem". Nach unserem Korollar 3.3.2.3 kann er daher auch keine Zirkelhalbgruppe besitzen.

Zum *Beweis* dieser Aussagen bemerken wir folgendes: Angenommen, es existiert im algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}$ ein Element w mit:

$$w \notin k,\ w^2 \in k$$

Wegen der Maximalität von k folgt dann

$$k(w) \cap F \neq \mathbb{Q}\ ,$$

und es gibt $x, y \in k$ mit:

$$x + wy \in F \setminus \mathbb{Q}$$

Es folgt $y \neq 0$; wegen

$$w \in \frac{1}{y}(F - x)$$

liegt w in der Komposition Fk von F und k.

Andererseits folgt aus den Sätzen der Galois-Theorie die Teilbarkeitsaussage:

$$[Fk : k] \mid [F : \mathbb{Q}] = 3$$

Da w den Grad 2 über k hat, erhalten wir einen Widerspruch! Dies zeigt, daß k in der Tat ein quadratisch abgeschlossener Körper ist.

Wegen $F \subseteq Fk$ ist $Fk \neq k$, und es gilt $[Fk : k] = 3$.

Angenommen, es existiert ein Oberkörper K von Fk mit $[K : Fk] = 2$. Dann gibt es einen Oberkörper N von K dergestalt, daß N/k eine endliche Galois-Erweiterung ist. Da Fk ein Zwischenkörper von N/k ist, gilt $3 \mid [N : k]$. Es gibt daher eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit:

$$3^r \mid [N : k] \quad \text{und} \quad 3^{r+1} \nmid [N : k]$$

Nach den Sätzen von Sylow besitzt die Galois-Gruppe $Gal(N/k)$ eine Untergruppe der Ordnung 3^r. Und dieser Untergruppe entspricht ein Zwischenkörper k' von N/k mit:

$$[N : k'] = 3^r$$

Wegen $[K : Fk] = 2$ ist $[N : k]$ eine gerade Zahl. Also muß $k \neq k'$ sein. Wegen der Maximalität von k folgt:

$$k' \cap F \neq \mathbb{Q}$$

Da $k' \cap F$ ein Zwischenkörper der kubischen Erweiterung $F/\mathbb{Q}$ ist, folgt der Reihe nach:

$$k' \cap F = F,\ F \subseteq k',\ Fk \subseteq k'$$

Doch wegen

$$[N : k] = [N : k'] \cdot [k' : Fk] \cdot [Fk : k] = 3^r \cdot [k' : Fk] \cdot 3$$

folgt jetzt $3^{r+1} \mid [N : k]$. Widerspruch! Also kann es keinen derartigen Körper K geben, und wir erkennen: Auch Fk ist ein quadratisch abgeschlossener Körper.

Angenommen, der Körper k besitzt einen reellen Unterkörper R mit:

$$[k : R] < \infty$$

Nach dem Lemma von Zorn besitzt die Erweiterung k/R einen maximalen reellen Zwischenkörper E. Man zeigt leicht, daß E ein euklidischer Körper ist. (Würde k ein über E transzendentes Element $x \in k$ besitzen, so folgte nach den Sätzen über reelle Körper, daß auch $E(x)$ reell ist, im Widerspruch zur Maximalität von E. Also muß k/E algebraisch sein. Es sei nun "$\leqslant$" eine Anordnung von E. Angenommen, es gibt ein Element $x \in E \setminus E^2$ mit $x > 0$. Da k quadratisch abgeschlossen ist, gilt $\sqrt{x} \in k$. Also ist $k \supseteq E(\sqrt{x}) \supset E$. Aber nach den Sätzen über reelle Körper kann "$\leqslant$" auf $E(\sqrt{x})$ fortgesetzt werden. Widerspruch! Also ist E euklidisch.) Nach den Sätzen der Galois-Theorie gilt die Teilbarkeitsaussage:

$$[FE : E] \mid [F : \mathbb{Q}] = 3$$

Nach den Sätzen über angeordnete Körper folgt, daß auch FE reell ist. Da FE ein Zwischenkörper der endlichen Erweiterung Fk/E ist, gilt ferner:

$$[Fk : FE] < \infty$$

Mit Satz 3 aus dem Artikel [1] folgt nun: FE ist ein euklidischer Körper.

Wegen $E \subseteq k$ ist $E \cap F = \mathbb{Q}$ und daher $FE \neq E$. Also gilt:

$$[FE : E] = 3$$

Offenbar ist FE/E sogar eine Galois-Erweiterung. Es gibt nicht-triviale Automorphismen von FE über E. Aber diese lassen die Anordnungen nicht unverändert; daher muß FE mindestens zwei echt voneinander verschiedene Anordnungen besitzen. (Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es ein Element $x \in FE$ mit $FE = E(x)$. Dieses Element besitzt ein kubisches Minimalpolynom f über E. Im Zerfällungskörper FE von f besitzt das Polynom drei paarweise verschiedene Nullstellen. Ein nicht-trivialer Automorphismus von FE über E permutiert diese Nullstellen und verändert insbesondere deren Reihenfolge bezüglich einer Anordnung von FE. Somit kann der Automorphismus die Anordnung nicht unverändert lassen.) Und daher kann FE nicht euklidisch sein. Widerspruch!

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

3.4 Krull-Halbgruppen von rationalen Funktionenkörpern $K(X)$

Wir studieren in diesem Kapitel die Krull-Halbgruppen auf einem rationalen Funktionenkörper $K(X)$, die auf dem Koeffizientenkörper K die triviale Bewertung induzieren. Zuvor bemerken wir noch folgendes.

Bemerkung 3.4.1. *Gegeben sei ein Körper, der eine Bewertungshalbgruppe T besitzt. Dann induziert sie auf ihm genau dann die triviale Bewertung, wenn die Bedingung*

$$\forall\, t \in T \setminus \{0\} \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \quad nt \notin T$$

erfüllt ist.

Beweis. Es sei $\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$ der Restklassenhomomorphismus der Bewertung ϑ, die T auf dem gegebenen Körper K induziert. Dann besitzt $\overline{K}$ gemäß Satz 2.4 einen archimedischen Absolutbetrag $|\;|$ mit:

$$T \subseteq \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |x| \leqslant 1\})$$

Ist ϑ trivial, so ist $\varphi = id_K$, $K = \overline{K}$. Für ein Element $t \in T \setminus \{0\}$ gilt nun stets $|t| > 0$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $|nt| = n|t| > 1$. Und daraus folgt $nt \notin T$.-

Nun sei ϑ als nicht-trivial vorausgesetzt. Dann existiert ein Element $t \in O \setminus \{0\}$ mit $\varphi(t) = 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt nun $\varphi(nt) = n\varphi(t) = 0$ und damit $nt \in T$.- $\square$

Es seien nun K ein Körper und X eine Unbestimmte. Der Körper $K(X)$ besitze eine Krull-Halbgruppe T. Sie induziert eine Bewertung ϑ; bezeichnen wir mit

$$\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K(X)}$$

ihren Restklassenhomomorphismus, so besitzt $\overline{K(X)}$ gemäß Satz 2.4 einen archimedischen Absolutbetrag $|\ |$ mit:

$$T = \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K(X)} \mid |x| \leqslant 1\})$$

Die Krull-Halbgruppe T sei speziell dergestalt, daß $T \cap K$ auf K die triviale Bewertung induziert. Da $O \cap K$ ein Bewertungsring von K ist, der $T \cap K$ enthält, folgt $O \cap K = K$, $K \subseteq O$. Somit definiert φ eine Körpereinbettung:

$$K \hookrightarrow \overline{K(X)}$$

Wir dürfen K mit seinem φ-Bild identifizieren:

$$\varphi|_K = id_K, \quad K = \varphi(K) \subseteq \overline{K(X)}$$

Somit ist:

$$T \cap K = \{x \in K \mid |x| \leqslant 1\}$$

Gemäß Theorem 2.1.4. (b) in [3] kann die Bewertung ϑ nur zwei mögliche Formen annehmen: Entweder ist sie die Grad-Bewertung

$$\vartheta(f/g) = grad(g) - grad(f), \quad f, g \in K[X],\ g \neq 0,$$

oder sie ist eine p-adische Bewertung, wobei $p \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom ist.

Ist ϑ die Grad-Bewertung, so gilt offenbar für $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$ die Äquivalenz $f/g \in O^\times \Longleftrightarrow grad(f) = grad(g)$. Ist etwa

$$f = a_n X^n + ... + a_0, \quad g = b_n X^n + ... + b_0, \quad a_n, b_n \neq 0,$$

so folgt:

$$\varphi(\frac{f}{g}) = \varphi(\frac{f/X^n}{g/X^n}) = \frac{\varphi(f/X^n)}{\varphi(g/X^n)} = \frac{a_n}{b_n}$$

Insbesondere folgt $\overline{K(X)} = K$. Schließlich ergibt sich:

$$T = \{f/g \mid f, g \in K[X],\ g \neq 0,\ grad(f) = grad(g),\ |a_n| \leqslant |b_n|\}$$

$$\cup \quad \{f/h \mid f,h \in K[X],\, h \neq 0,\, grad(f) < grad(h)\}$$

Nun sei ϑ eine p-adische Bewertung, wobei

$$p = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_0 \in K[X]$$

ein irreduzibles Polynom ist. Es ist $\vartheta(X) \geqslant 0$, und daher folgt:

$$0 = \varphi(p) = \varphi(X)^n + c_{n-1}\varphi(X)^{n-1} + ... + c_0$$

Dies zeigt, daß $\varphi(X)$ algebraisch über K ist; und p ist das Minimalpolynom von $\varphi(X)$ über K. Es seien $f, g \in K[X]$ zwei Polynome; zudem sei $g \neq 0$. Es gilt nun $f/g \in O^\times$ genau dann, wenn f und g von der Gestalt

$$f = p^m f_1,\ g = p^m g_1 \ \text{ mit } \ m \in \mathbb{N},\ f_1, g_1 \in K[X],\ p \nmid f_1,\ p \nmid g_1$$

sind. Und dann gilt:

$$\varphi(\frac{f}{g}) = \varphi(\frac{p^m f_1}{p^m g_1}) = \varphi(\frac{f_1}{g_1}) = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)} \in K(\varphi(X)) = K[\varphi(X)]$$

Damit folgt $\overline{K(X)} = K[\varphi(X)]$. Es gibt nach den Bemerkungen im Anschluß an Satz 2.4 eine Einbettung

$$\tau : K[\varphi(X)] \hookrightarrow \mathbb{C}$$

mit:

$$T = \varphi^{-1}(\{x \in K[\varphi(X)] \mid |\tau(x)| \leqslant 1\})$$

Das Polynom

$$\tau(p) := X^n + \tau(c_{n-1})X^{n-1} + ... + \tau(c_0) \in \tau(K)[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$$

besitzt über $\mathbb{C}$ eine Zerlegung in Linearfaktoren:

$$\tau(p) = (X - \alpha_1)...(X - \alpha_n), \quad \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$$

Die Einbettung τ wird nun eindeutig durch die Einschränkung $\tau|_K$ und die entsprechende Zuordnung $\tau(\varphi(X)) = \alpha_j$ festgelegt. Wir können daher schreiben:

$$\begin{aligned} T = \{f/g \mid f,g \in K[X],\, g \neq 0,\, p \text{ teilt } f \text{ genauso oft} \\ \text{wie } g,\, |\tau(f_1)(\alpha_j)| \leqslant |\tau(g_1)(\alpha_j)|\} \\ \cup \quad \{f/h \mid f,h \in K[X],\, h \neq 0,\, p \text{ teilt } f \text{ öfter als } h\} \end{aligned}$$

Kapitel 4

Fortsetzungen von Bewertungshalbgruppen

Analog zu Bewertungen von Körpern kann man nach den Fortsetzungen von Bewertungshalbgruppen eines Körpers auf einen gegebenen Oberkörper fragen.

Definition 4.1. Es sei L/K eine Körpererweiterung. Eine totale Halbgruppe E von L heißt eine *Fortsetzung* einer totalen Halbgruppe T von K, wenn $E \cap K = T$ gilt.

Die Fortsetzungen einer Krull-Halbgruppe entsprechen den Fortsetzungen der zugehörigen Bewertung und des zugehörigen archimedischen Absolutbetrages.

Satz 4.2. *Es sei L/K eine Körpererweiterung, und es seien E, T Krull-Halbgruppen von L bzw. K. Gemäß der Definition 2.3 sei E die Zusammensetzung eines Bewertungsringes O_E von L und eines archimedischen Absolutbetrages $|\ |_E$ des Restklassenkörpers $\overline{L}$. Und T sei die Zusammensetzung eines Bewertungsringes O_T von K und eines archimedischen Absolutbetrages $|\ |_T$ des Restklassenkörpers $\overline{K}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *E ist eine Fortsetzung von T.*
2. *O_E ist eine Fortsetzung von O_T, und die beiden Beträge $(|\ |_E)|_{\overline{K}}$ und $|\ |_T$ sind zueinander äquivalent.*

Beweis. Zu 1. $\Rightarrow$ 2.: Es seien $\varphi_E : O_E \twoheadrightarrow \overline{L}$, $\varphi_T : O_T \twoheadrightarrow \overline{K}$ die Restklassenhomomorphismen der beteiligten Bewertungsringe. Für $y \in K$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
y \in O_E \smallsetminus O_E^\times &\iff \varphi_E(y) = 0 \\
&\iff \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\varphi_E(ny)|_E = n|\varphi_E(y)|_E \leqslant 1 \\
&\iff \forall\, n \in \mathbb{N} \quad ny \in E \\
&\iff \forall\, n \in \mathbb{N} \quad ny \in T \\
&\iff \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\varphi_T(ny)|_T = n|\varphi_T(y)|_T \leqslant 1 \\
&\iff \varphi_T(y) = 0 \\
&\iff y \in O_T \smallsetminus O_T^\times
\end{aligned}$$

Also gilt $(O_E \smallsetminus O_E^\times) \cap K = O_T \smallsetminus O_T^\times$. Und daraus folgt sofort $O_E \cap K = O_T$. Die Zuordnung

$$\varphi_T(y) \mapsto \varphi_E(y),\ y \in O_T$$

definiert nun eine wohldefinierte Körpereinbettung $\overline{K} \hookrightarrow \overline{E}$. Daher definiert die Zuordnung

$$\varphi_T(y) \mapsto |\varphi_E(y)|_E,\ y \in O_T$$

einen archimedischen Absolutbetrag auf $\overline{K}$, den wir als die Einschränkung von $|\ |_E$ auf $\overline{K}$ auffassen können. Für ein Element $y \in O_T$ gilt nun folgendes:

$$\begin{aligned}
|\varphi_T(y)|_T < 1 &\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \quad (1 + (1/n))|\varphi_T(y)|_T \leqslant 1 \\
&\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \quad |\varphi_T((1 + (1/n))y)|_T \leqslant 1 \\
&\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \quad (1 + (1/n))y \in T \\
&\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \quad (1 + (1/n))y \in E \\
&\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \quad |\varphi_E((1 + (1/n))y)|_E \leqslant 1 \\
&\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \quad (1 + (1/n))|\varphi_E(y)|_E \leqslant 1 \\
&\iff |\varphi_E(y)|_E < 1
\end{aligned}$$

Diese Überlegung zeigt, daß die beiden Absolutbeträge zueinander äquivalent sind (siehe etwa Proposition 1.1.2. in [3]).

Zu 2. $\Rightarrow$ 1.: Ist O_E eine Fortsetzung von O_T, so dürfen wir $\overline{K}$ als Unterkörper von $\overline{L}$ auffassen. Und ist $\varphi_E : O_E \twoheadrightarrow \overline{L}$ der Restklassenhomomorphismus von O_E, so dürfen wir die Einschränkung $(\varphi_E)|_{O_T}$ als den Restklassenhomomorphismus von O_T auffassen. Aus der geforderten Äquivalenz der Beträge folgt insbesondere für alle $x \in \overline{K}$:

$$|x|_T \leqslant 1 \Longleftrightarrow |x|_E \leqslant 1$$

Für $y \in K$ gilt daher:

$$\begin{aligned} y \in E \quad &\Longleftrightarrow \quad y \in O_E,\ |\varphi_E(y)|_E \leqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad y \in O_T,\ |\varphi_E(y)|_T \leqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad y \in T \end{aligned}$$

Das zeigt $E \cap K = T$. □

Die Fortsetzungen einer Krull-Halbgruppe auf eine normale Körpererweiterung sind stets konjugiert zueinander:

Satz 4.3. *Es sei N/K eine algebraische Körpererweiterung, und es sei T eine Krull-Halbgruppe von K. Dann gilt:*

1. *Es gibt stets eine Krull-Halbgruppe T_N von N, die T auf N fortsetzt.*
2. *Ist N/K normal, so sind die Mengen*

$$\sigma(T_N), \quad mit \;\; \sigma \in Gal(N/K),$$

genau die Krull-Halbgruppen von N, die T auf N fortsetzen.

Beweis. Gemäß der Definition 2.3 sei T die Zusammensetzung eines Bewertungsringes O von K und eines archimedischen Absolutbetrages $|\ |$ des Restklassenkörpers $\overline{K}$. Nach dem Satz von Chevalley (siehe A.1.13 in [18]) besitzt O eine Fortsetzung O_N auf N. Der Restklassenkörper $\overline{N}$ dieser Fortsetzung ist eine algebraische Erweiterung von $\overline{K}$. Gemäß Proposition 9.1 auf Seite 167 in [16] (oder Theorem 7.1 in [2]) existiert daher eine Fortsetzung $|\ |_N$ von $|\ |$ auf $\overline{N}$. Gemäß der Definition 2.3 definieren O_N und $|\ |_N$ eine Krull-Halbgruppe T_N. Und nach Satz 4.2 ist dann T_N eine Fortsetzung von T auf N.-

Nun sei N/K normal. Da die Charakteristiken der beteiligten Körper Null sein müssen, ist N/K eine Galois-Erweiterung. Es sei T'_N eine weitere Krull-Halbgruppe von N, die T auf N fortsetzt. Gemäß der Definition 2.3 sei T'_N die Zusammensetzung eines Bewertungsringes O'_N von N und eines archimedischen Absolutbetrages $|\ |'_N$ des Restklassenkörpers $\overline{N}'$. Nach Satz 4.2 ist O'_N eine Fortsetzung von O auf N; wir dürfen weiter $\overline{K} \subseteq \overline{N}'$ annehmen und $|\ |'_N$ als Fortsetzung von $|\ |$ auf $\overline{N}'$ ansehen. Nach den Sätzen der Bewertungstheorie (siehe etwa Theorem A.2.9 in [18]) sind die beiden Bewertungsringe von N konjugiert zueinander. Es gibt also einen Automorphismus $\sigma \in Gal(N/K)$ mit:

$$O'_N = \sigma(O_N)$$

Es seien

$$\varphi_N : O_N \twoheadrightarrow \overline{N}, \quad \varphi'_N : O'_N \twoheadrightarrow \overline{N}'$$

die Restklassenhomomorphismen von O_N bzw. O'_N. Dann definiert die Zuordnung

$$\varphi_N(y) \mapsto \varphi'_N(\sigma(y)), \quad \text{für } y \in O_N$$

einen wohldefinierten Isomorphismus $\lambda : \overline{N} \to \overline{N}'$ über $\overline{K}$. Also definiert

$$\| \, x \, \|_N := |\lambda(x)|'_N, \quad \text{für } x \in \overline{N}$$

einen weiteren archimedischen Absolutbetrag auf $\overline{N}$, der $|\ |$ auf $\overline{N}$ fortsetzt. Da N/K normal ist, ist auch $\overline{N}/\overline{K}$ normal (siehe hierzu etwa Proposition 3.2.16(2) in [3]). Also ist auch $\overline{N}/\overline{K}$ eine Galois-Erweiterung. Fortsetzungen eines archimedischen Absolutbetrages auf eine galois'sche Erweiterung sind gemäß Proposition 9.1 auf Seite 167 in [16] (oder Theorem 7.1 in [2]) stets konjugiert zueinander. Also gibt es einen Automorphismus $\overline{\varrho} \in Gal(\overline{N}/\overline{K})$ mit:

$$\| \, x \, \|_N = |\overline{\varrho}(x)|_N, \quad \text{für alle } x \in \overline{N}$$

Gemäß Proposition 1.3.3. auf Seite 22 in [4] gibt es einen Automorphismus $\varrho \in Gal(N/K)$ mit $\varrho(O_N) = O_N$ und

$$\varphi_N(\varrho(y)) = \overline{\varrho}(\varphi_N(y)), \quad \text{für alle } y \in O_N.$$

Für $y \in O'_N$ gilt nun:

$$\begin{aligned} y \in T'_N \quad &\iff \quad |\varphi'_N(y)|'_N \leqslant 1 \\ &\iff \quad |\lambda(\varphi_N(\sigma^{-1}(y)))|'_N \leqslant 1 \\ &\iff \quad \| \, \varphi_N(\sigma^{-1}(y)) \, \|_N \leqslant 1 \\ &\iff \quad |\overline{\varrho}(\varphi_N(\sigma^{-1}(y)))|_N \leqslant 1 \\ &\iff \quad |\varphi_N(\varrho(\sigma^{-1}(y)))|_N \leqslant 1 \\ &\iff \quad \varrho(\sigma^{-1}(y)) \in T_N \end{aligned}$$

Also ist $T'_N = \sigma(\varrho^{-1}(T_N))$, und wir erkennen, daß die beiden Fortsetzungen von T konjugiert zueinander sind.

Nun sei umgekehrt ein Automorphismus $\delta \in Gal(N/K)$ vorgegeben. Wir definieren:

$$T'_N := \delta(T_N)$$

Die Menge $O'_N := \delta(O_N)$ ist ein Bewertungsring von N, der O auf N fortsetzt. Dieser besitzt einen Restklassenhomomorphismus:

$$\varphi'_N : O'_N \twoheadrightarrow \overline{N}'$$

Wir dürfen $\overline{K} \subseteq \overline{N}'$ annehmen. Wieder definiert die Zuordnung

$$\varphi_N(y) \mapsto \varphi'_N(\delta(y)), \quad \text{für } y \in O_N$$

einen wohldefinierten Isomorphismus $\lambda : \overline{N} \to \overline{N}'$ über $\overline{K}$. Und daher ist

$$|x|'_N := |\lambda^{-1}(x)|_N, \quad \text{für } x \in \overline{N}'$$

ein archimedischer Absolutbetrag auf $\overline{N}'$, der $|\ |$ auf $\overline{N}'$ fortsetzt. Für $y \in O'_N$ gilt nun:

$$\begin{aligned} y \in T'_N &\iff \delta^{-1}(y) \in T_N \\ &\iff |\varphi_N(\delta^{-1}(y))|_N \leqslant 1 \\ &\iff |\lambda^{-1}(\lambda(\varphi_N(\delta^{-1}(y))))|_N \leqslant 1 \\ &\iff |\lambda(\varphi_N(\delta^{-1}(y)))|'_N \leqslant 1 \\ &\iff |\varphi'_N(y)|'_N \leqslant 1 \end{aligned}$$

Also ist T'_N eine Krull-Halbgruppe, die von O'_N und $|\ |'_N$ herrührt. Gemäß Satz 4.2 ist sie eine Fortsetzung von T auf N.- □

Die Fortsetzungen einer euklidischen Zirkelhalbgruppe entsprechen den Fortsetzungen des euklidischen Koordinatenkörpers, der die Achse bildet.

Satz 4.4. *Es sei L/K eine Körpererweiterung mit $\sqrt{-1} \in K$, und es seien E, T Zirkelhalbgruppen von L bzw. K mit reellen Achsen R_E bzw. R_T (gemäß Kapitel 3.2). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *E ist eine Fortsetzung von T.*
2. *$R_E \cap K = R_T$*

Beweis. Gemäß Lemma 3.2.1 sind R_E und R_T euklidische Körper. Ihre eindeutig bestimmten Anordnungen bezeichnen wir beide mit "$\leqslant$".

Zu 1. $\Rightarrow$ 2.: Es sei $x \in R_T$ mit $x^2 \leqslant 1$. Dann gibt es ein $y \in R_T$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Aus Lemma 3.2.1 und der Voraussetzung folgt nun:

$$e := x + iy \in T^\times \subseteq E^\times$$

Und wegen $x = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$ gilt $x \in R_E$. Dies zeigt:

$$R_T \subseteq R_E$$

Nun sei umgekehrt $x \in R_E \cap K$ mit $x^2 \leqslant 1$. Dann gibt es ein $y \in R_E$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Aus Lemma 3.2.1 folgt:

$$t := x + iy \in E^\times$$

Da K quadratisch abgeschlossen ist, folgt aus der Beziehung $y^2 = 1 - x^2 \in K$ sofort $y \in K$. Also ist $t \in E^\times \cap K \subseteq T^\times$ und somit:

$$x = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \in R_T$$

Dies zeigt $R_E \cap K \subseteq R_T$ und damit schließlich:

$$R_E \cap K = R_T$$

Zu 2. $\Rightarrow$ 1.: Ein Element $z \in T$ besitzt gemäß Lemma 3.2.1 die Gestalt:

$$z = x + iy \ \text{ mit } \ x, y \in R_T \ \text{ und } \ x^2 + y^2 \leqslant 1$$

Wegen der Voraussetzung gilt $x, y \in R_E$, und auch im Körper R_E ist die Ungleichung $x^2 + y^2 \leqslant 1$ richtig. Also ist $z \in E$. Dies zeigt:

$$T \subseteq E$$

Es sei nun $z \in E \cap K$. Dann gibt es gemäß Lemma 3.2.1 Elemente $x, y \in R_E$ mit:

$$z = x + iy, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

Wegen $K = R_T(i)$ gibt es auch Elemente $a, b \in R_T$ mit:

$$z = a + ib$$

Aus $R_T \subseteq R_E$ folgt $a = x$, $b = y$ und damit $x, y \in R_T$. Und auch im Körper R_T ist die Ungleichung $x^2 + y^2 \leqslant 1$ richtig. Und mit Lemma 3.2.1 folgt dann $z \in T$. Dies zeigt $E \cap K \subseteq T$ und damit schließlich:

$$E \cap K = T$$

□

Als nächstes behandeln wir die Fortsetzung von Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse auf endliche Körpererweiterungen. Dazu stellen wir zuerst einige bekannte Tatsachen über quadratisch abgeschlossene und euklidische Körper zusammen:

Es sei K/k eine endliche Körpererweiterung. Die beiden Körper mögen dabei die Charakteristik Null besitzen. Weiter sei K quadratisch abgeschlossen. Dann gilt (siehe Corollary 5.11. in Kap. VIII auf S. 270 in [13]):

> Ist $i \in k$, so ist k quadratisch abgeschlossen.
>
> Ist $i \notin k$, so ist k euklidisch.

(Dabei soll wieder $i = \sqrt{-1}$ sein.) Man beachte hierbei, daß der Körper K nicht notwendig mit dem quadratischen Abschluß $\tilde{k}$ von k übereinstimmen muß; es kann der Fall $\tilde{k} \subset K$ eintreten. Gemäß Satz 3. in [1] muß in jedem Fall $\tilde{k} = k(i)$ sein. Es kann auch der Fall eintreten, daß $K/k(i)$ eine nicht-triviale normale Körpererweiterung ist (siehe dazu auch (1.2) Satz. (4) in [19], etwa wenn $i \notin k$ gilt und k ein erblich euklidischer Körper ist). Wir bemerken:

Ist $i \in k$ und K/k normal, so muß $[K : k]$ ungerade sein.

Beweis. Angenommen, $[K : k]$ ist gerade. Dann besitzt die Galois-Gruppe $Gal(K/k)$ eine Untergruppe der Ordnung 2, deren Fixkörper F die Bedingungen

$$k \subseteq F \subset K, \quad [K : F] = 2$$

erfüllt. Es gibt daher ein $y \in K \setminus F$ mit $K = F(y)$ und $y^2 \in F$. Andererseits folgt aber aus $i \in F$, daß F quadratisch abgeschlossen ist. Und das ergibt $y \in F$. Widerspruch! $\square$

Es sei nun $i \notin k$. Dann besitzt die Erweiterung K/k gemäß dem Lemma von Zorn einen maximalen reellen Zwischenkörper E. Dieser Zwischenkörper ist euklidisch. Am Ende von S. 45 in [1] wird bemerkt, daß leider nicht bekannt ist, ob der Fall $2 < [K : E] < \infty$ hierbei überhaupt eintreten kann. Folgendes kann jedoch in jedem Falle bewiesen werden: Ist K/E normal oder besitzt K nur ungerade Erweiterungen, so muß $[K : E] = 2$, $K = E(i)$ sein (siehe Satz 4. b) und c) in Artikel [1]).

Wir formulieren diese Aussagen nun in termini von Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse bzw. leiten daraus einfache Schlüsse für diese ab, indem wir uns Lemma 3.2.1 und Satz 4.4 zunutze machen.

Korollar 4.5. *Es sei K/k eine endliche Körpererweiterung mit $\sqrt{-1} \in k$. Weiter besitze k eine Zirkelhalbgruppe T mit reeller Achse R. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Ist K quadratisch abgeschlossen, so gilt: Gestattet K nur ungerade Erweiterungen, oder ist K/R normal, so besitzt K eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die eine Fortsetzung von T ist.*

2. *Besitzt K eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die eine Fortsetzung von T ist, und ist K/k normal, so muß $[K : k]$ ungerade sein.*

Die Fortsetzungen einer Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse auf eine normale Körpererweiterung sind stets konjugiert zueinander:

Satz 4.6. *Es sei N/K eine normale Körpererweiterung mit $\sqrt{-1} \in K$. Es sei weiter T eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse von K, und es sei T_N eine*

Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse von N, die T auf N fortsetzt. Dann sind die Mengen

$$\sigma(T_N), \quad mit \ \ \sigma \in Gal(N/K),$$

genau die Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse von N, die T auf N fortsetzen.

Beweis. Gemäß Satz 4.4 haben wir die Fortsetzungen euklidischer Koordinatenkörper zu untersuchen. Dabei ist letztlich folgende Problemstellung zu betrachten:

Es seien R, E_1, E_2 drei euklidische Körper mit:

$$R \subseteq E_1 \cap E_2\,,$$

$$E_1(i) = E_2(i) \ \text{ mit } \ i := \sqrt{-1}\,,$$

$$R = R(i) \cap E_1 = R(i) \cap E_2\,,$$

$$E_1(i)/R(i) \text{ ist normal}$$

Können wir dann die Existenz eines Automorphismus $\sigma \in Gal(E_1(i)/R(i))$ mit $\sigma(E_1) = E_2$ nachweisen, so sind wir fertig.

Dazu argumentieren wir wie folgt: Bezeichnen R_1 und R_2 die reellen Abschlüsse von E_1 bzw. E_2, so sind R_1 und R_2 auch reelle Abschlüsse von R. Daher gibt es einen R-Isomorphismus

$$R_1 \to R_2\,,$$

der durch die Vereinbarung $i \mapsto i$ zu einem $R(i)$-Isomorphismus

$$\sigma : R_1(i) \to R_2(i)$$

erweitert werden kann. Da $E_1(i)/R(i)$ normal ist, ergibt sich:

$$\sigma(E_1(i)) \subseteq E_1(i)$$

Also gilt:

$$\sigma(E_1) \subseteq \sigma(E_1(i)) \subseteq E_1(i) = E_2(i)$$

Für die Komposition $\sigma(E_1)E_2$ der Körper $\sigma(E_1)$ und E_2 gilt daher:

$$E_2 \subseteq \sigma(E_1)E_2 \subseteq E_2(i)$$

Wegen $\sigma(E_1)E_2 \subseteq R_2$ ist $\sigma(E_1)E_2$ ein reeller Körper. Also ergibt sich letztlich:

$$E_2 = \sigma(E_1)E_2\,, \quad \sigma(E_1) \subseteq E_2$$

Analog folgt $\sigma^{-1}(E_2) \subseteq E_1$, also $E_2 \subseteq \sigma(E_1)$. Damit erhalten wir schließlich die angestrebte Gleichung

$$\sigma(E_1) = E_2\,,$$

wobei $\sigma|_{E_1(i)} \in Gal(E_1(i)/R(i))$ ist. $\square$

Ist T eine Krull-Halbgruppe eines Körpers K, und ist K_H seine henselsche Hülle bezüglich des von der Halbgruppe induzierten Bewertungsringes (siehe hierzu etwa Kapitel A.3 in [18]), so läßt sich die Krull-Halbgruppe stets als solche auf K_H fortsetzen. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.2 und der Tatsache, daß beim Übergang zur henselschen Hülle der Restklassenkörper unverändert bleibt.

Für Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse gilt die analoge Aussage:

Satz 4.7. *Es sei T eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse eines Körpers K. Zudem gelte $\sqrt{-1} \in K$. Und es sei K_H seine henselsche Hülle bezüglich des von der Halbgruppe induzierten Bewertungsringes. Dann besitzt K_H eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die T fortsetzt.*

Beweis. Es sei O der von T auf K induzierte Bewertungsring. Bezeichnet R die reelle Achse von T, so ist R ein euklidischer Koordinatenkörper von K (siehe Kapitel 3.2). Gemäß Satz 4.4 genügt es R auf K_H fortzusetzen.

Es sei (K_H, O_H) die henselsche Hülle von (K, O). Weiter seien

$$\varphi_H : O_H \twoheadrightarrow \overline{K}$$

der Restklassenhomomorphismus von O_H und

$$\vartheta_H : K_H \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$$

eine zu O_H gehörige Bewertung.

Für eine beliebige Teilmenge $Y \subseteq K_H$ sei zur Abkürzung:

$$\overline{Y} := \varphi_H(O_H \cap Y)$$

Da O konvex bezüglich der Anordnung "$\leqslant$" von R ist (siehe die Bemerkung nach dem Beweis von Lemma 3.2.1), induziert diese auf $\overline{R}$ in kanonischer Weise eine Anordnung "$\leqslant$". Es sei $x \in \overline{R}$ mit $x > 0$. Ist dann $y \in O_H \cap R$ mit $\varphi_H(y) = x$, so muß $y > 0$ sein. Also gibt es ein $y_0 \in R$ mit $y_0^2 = y$. Es folgt $y_0 \in O_H$ und $x = \varphi_H(y_0^2) = \varphi_H(y_0)^2$. Dies beweist: Auch $\overline{R}$ ist ein euklidischer Körper. Aus $[\overline{K} : \overline{R}] \leqslant [K : R] = 2$ folgt zudem $[\overline{K} : \overline{R}] = 2$, $\overline{K} = \overline{R}(i)$.

Da der bewertete Körper (K_H, O_H) henselsch ist, enthält er die henselsche Hülle $(E, O_H \cap E)$ von $(R, O_H \cap R)$. Insbesondere gilt dann $\overline{E} = \overline{R}$ und $\vartheta_H(E^\times) = \vartheta_H(R^\times)$.

Nach dem Satz von Baer-Krull besitzt der Körper E eine Anordnung "$\leqslant$" dergestalt, daß O_H konvex bezüglich dieser ist. Und insbesondere induziert dann "$\leqslant$" in kanonischer Weise die eindeutig bestimmte Anordnung von $\overline{R}$.

Zu jedem Element $e \in E^\times$ gibt es stets ein Element $r \in R^\times$ mit $\vartheta_H(e) = \vartheta_H(r)$.

Wegen $\vartheta_H(-r) = \vartheta_H(r)$ dürfen wir $r > 0$ voraussetzen. Da R euklidisch ist, gibt es ein $r_0 \in R$ mit $r = r_0^2$. Es folgt:

$$\vartheta_H(\frac{e}{r_0^2}) = \vartheta_H(e) - \vartheta_H(r_0^2) = 0, \quad \frac{e}{r_0^2} \in O_H^\times, \quad \varphi_H(\frac{e}{r_0^2}) \neq 0$$

Ist $e > 0$, so ist $\frac{e}{r_0^2} > 0$, und damit gilt auch:

$$\varphi_H(\frac{e}{r_0^2}) > 0$$

Da $\overline{R}$ euklidisch ist, ist $\varphi_H(\frac{e}{r_0^2})$ ein Quadrat in $\overline{R}$. Mit anderen Worten: Das Polynom

$$X^2 - \varphi_H(\frac{e}{r_0^2}) \in \overline{R}[X]$$

besitzt eine einfache Nullstelle in $\overline{R}$. Bei henselschen Körpern kann bekanntlich zu einer einfachen Nullstelle eines Polynoms im Restklassenkörper stets ein Urbild im Bewertungsring gefunden werden, das Nullstelle des Urbilds des Polynoms ist. Das Polynom

$$X^2 - \frac{e}{r_0^2} \in (O_H \cap E)[X]$$

besitzt deshalb eine Nullstelle e_0 in $O_H \cap E$. Es folgt $e = (r_0 e_0)^2$. Wir haben damit gezeigt, daß jedes positive Element von E ein Quadrat ist. Also ist E ein euklidischer Körper.-

Es sei $i := \sqrt{-1}$. Der bewertete Körper $(E(i), E(i) \cap O_H)$ ist als algebraischer Oberkörper von $(E, E \cap O_H)$ ebenfalls henselsch. Wegen

$$\vartheta_H(K^\times) = \vartheta_H(R(i)^\times) \subseteq \vartheta_H(E(i)^\times) \subseteq \vartheta_H(K_H^\times) = \vartheta_H(K^\times)$$

ist:

$$\vartheta_H(E(i)^\times) = \vartheta_H(K_H^\times)$$

Weiter gilt:

$$\overline{E(i)} = \overline{E}(i) = \overline{R}(i) = \overline{K}$$

Also ist

$$(E(i), E(i) \cap O_H) \subseteq (K_H, O_H)$$

eine unmittelbare, algebraische Erweiterung. Da beide Körper henselsch sind und der Restklassenkörper die Charakteristik Null besitzt, muß schließlich

$$E(i) = K_H$$

folgen (siehe Theorem A.3.19 in [18]). Somit ist E ein euklidischer Koordinatenkörper von K_H, der R auf K_H fortsetzt. $\square$

Um die zum letzten Satz analoge Aussage für maximale unmittelbare Erweiterungen zu beweisen, erinnern wir an den Begriff der "pseudo-konvergenten Folge" in einem bewerteten Körper: Es seien (K, ϑ) ein bewerteter Körper und δ eine Limesordinalzahl. Eine Folge $(a_\alpha)_{\alpha<\delta}$ von Elementen $a_\alpha \in K$ heißt *pseudo-konvergent*, wenn für alle Ordinalzahlen $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ die Ungleichung

$$\vartheta(a_\gamma - a_\beta) > \vartheta(a_\beta - a_\alpha)$$

gilt. Ein Element $a \in K$ heißt ein *Limes* der pseudo-konvergenten Folge $(a_\alpha)_{\alpha<\delta}$, wenn für alle Ordinalzahlen $\alpha < \delta$ die Gleichung

$$\vartheta(a - a_\alpha) = \vartheta(a_{\alpha+1} - a_\alpha)$$

gilt. Irving Kaplansky bewies 1942, daß ein Körper genau dann maximal bewertet ist, wenn jede seiner pseudo-konvergenten Folgen auch einen Limes in dem Körper besitzt. (Für eine eingehende Diskussion dieser Begriffe und Ergebnisse betrachte man die Arbeiten [9] oder [20].) Statt $(a_\alpha)_{\alpha<\delta}$ schreiben wir im folgenden kurz (a_α).

Wir führen nun zunächst einige vorbereitende Lemmata auf.

Lemma 4.8. *Es sei E ein angeordneter Körper, und es sei ϑ eine Bewertung von $E(i)$, die bezüglich der Anordnung von E konvex ist. (Dabei ist $i^2 = -1$.) Dann gilt für alle $x, y \in E$:*

$$\vartheta(x + iy) = min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\}$$

Beweis. Es sei O der zu ϑ gehörige Bewertungsring von $E(i)$, und es bezeichne

$$\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$$

seinen Restklassenhomomorphismus. Dann ist $\overline{E} := \varphi(O \cap E)$ ein angeordneter Unterkörper von $\overline{K}$. Insbesondere gilt:

$$i = \varphi(i) \notin \overline{E}$$

Es seien $x, y \in E^\times$ mit $\vartheta(x) \geqslant \vartheta(y)$. Dann ist $\frac{x}{y} \in O \cap E$ und $\varphi(\frac{x}{y}) \in \overline{E}$. Also folgt:

$$\varphi(\frac{x}{y} + i) = \varphi(\frac{x}{y}) + i \neq 0, \quad \vartheta(\frac{x}{y} + i) = 0$$

Eine Addition mit $\vartheta(y)$ ergibt schließlich:

$$\vartheta(x + iy) = \vartheta(y)$$

Im Falle $\vartheta(x) \leqslant \vartheta(y)$ beweist man analog die Gleichung:

$$\vartheta(x + iy) = \vartheta(x)$$

Mehr ist nicht zu zeigen. □

Lemma 4.9. *Es sei E ein angeordneter Körper, und es sei O ein Bewertungsring von $E(i)$ dergestalt, daß O konvex bezüglich der Anordnung von E ist. (Dabei ist $i^2 = -1$.) Dann ist $(E(i), O)$ genau dann ein maximal bewerteter Körper, wenn $(E, O \cap E)$ ein maximal bewerteter Körper ist.*

Beweis. Zunächst sei $(E, O \cap E)$ ein maximal bewerteter Körper. Ferner sei (K, O_1) eine maximale unmittelbare Erweiterung von $(E(i), O)$ (die gemäß [9] stets existiert). Und es sei

$$\vartheta : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$$

eine zu O_1 gehörige Bewertung.

Angenommen, es gibt ein Element $z \in K \setminus (E(i))$. Dann gibt es (gemäß dem Beweis von Theorem 1. in [9]) eine pseudo-konvergente Folge (a_α) in $E(i)$ ohne Limes in $E(i)$, die z als Limes besitzt und für die $(\vartheta(z - a_\alpha))$ konfinal in $\{\vartheta(z - c) \mid c \in E(i)\}$ liegt. Es seien (x_α) und (y_α) die Folgen in E, für die

$$a_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$$

für alle α gilt. Gemäß Lemma 4.8 definiert dann auch

$$b_\alpha := x_\alpha - iy_\alpha$$

eine pseudo-konvergente Folge in $E(i)$. Auch sie hat keinen Limes in $E(i)$, denn sonst würde mit Lemma 4.8 sofort folgen, daß (a_α) doch einen Limes in $E(i)$ hat. Da (K, O_1) maximal bewertet ist, besitzt (b_α) einen Limes z' in K (gemäß Theorem 4. in [9]).-

Die Folge $(\vartheta(z' - b_\alpha))$ liegt konfinal in $\{\vartheta(z' - c) \mid c \in E(i)\}$. Denn andernfalls gäbe es ein $d \in E(i)$ mit

$$\vartheta(z' - b_\alpha) \leqslant \vartheta(z' - d)$$

für alle α. Und da $(\vartheta(z' - b_\alpha))$ streng monoton wachsend ist, würde dies sogar

$$\vartheta(z' - b_\alpha) < \vartheta(z' - d)$$

für alle α bedeuten. Und dies wiederum lieferte die Gleichung

$$\vartheta(d - b_\alpha) = \vartheta(z' - b_\alpha - (z' - d)) = \vartheta(z' - b_\alpha),$$

die aber den Widerspruch ausdrückt, daß d ein Limes von (b_α) ist!-

Angenommen, die Folge $(\vartheta(\frac{1}{2}(z + z') - x_\alpha))$ liegt nicht konfinal in der Menge $\{\vartheta(\frac{1}{2}(z + z') - u) \mid u \in E\}$ und die Folge $(\vartheta(\frac{1}{2i}(z - z') - y_\alpha))$ liegt nicht konfinal in der Menge $\{\vartheta(\frac{1}{2i}(z - z') - u) \mid u \in E\}$. Dann gibt es Elemente $x, y \in E$ mit

$$\vartheta(\frac{1}{2}(z + z') - x_\alpha) \leqslant \vartheta(\frac{1}{2}(z + z') - x) \text{ und}$$

$$\vartheta(\frac{1}{2i}(z-z')-y_\alpha) \leqslant \vartheta(\frac{1}{2i}(z-z')-y)$$

für alle α. Für $a := x+iy$, $b := x-iy$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
& min\{\vartheta(z-a),\, \vartheta(z'-b)\} \\
= \;& min\{\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-x+i(\frac{1}{2i}(z-z')-y)),\, \vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-x-i(\frac{1}{2i}(z-z')-y))\} \\
\geqslant \;& min\{\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-x),\, \vartheta(\frac{1}{2i}(z-z')-y)\} \\
\geqslant \;& min\{\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-x_\alpha),\, \vartheta(\frac{1}{2i}(z-z')-y_\alpha)\} \\
= \;& min\{\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\frac{1}{2}(a_\alpha+b_\alpha)),\, \vartheta(\frac{1}{2i}(z-z')-\frac{1}{2i}(a_\alpha-b_\alpha))\} \\
= \;& min\{\vartheta(z-a_\alpha+z'-b_\alpha),\, \vartheta(z-a_\alpha-(z'-b_\alpha))\} \\
\geqslant \;& min\{\vartheta(z-a_\alpha),\, \vartheta(z'-b_\alpha)\}
\end{aligned}$$

Dies jedoch widerspricht der Konfinalität der Folgen $(\vartheta(z-a_\alpha))$ und $(\vartheta(z'-b_\alpha))$! Also ist die letzte Annahme falsch.-

Daher dürfen wir o.B.d.A. folgern, daß die Folge $(\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-x_\alpha))$ konfinal in der Menge $\{\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-u) \mid u \in E\} =: S$ liegt. Also besitzt (x_α) eine Teilfolge $(\tilde{x}_\alpha)$ dergestalt, daß $(\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\alpha))$ streng monoton wachsend ist und ebenfalls konfinal in S liegt. Für $\alpha < \beta$ folgt:

$$\begin{aligned}
& \vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\alpha) \\
= \;& min\{\vartheta(-(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\beta)),\, \vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\alpha)\} \\
= \;& \vartheta(\tilde{x}_\beta-\tilde{x}_\alpha)
\end{aligned}$$

Und daraus ergibt sich sofort, daß $(\tilde{x}_\alpha)$ pseudo-konvergent ist und $\frac{1}{2}(z+z')$ als Limes besitzt. Da $(E, O \cap E)$ ein maximal bewerteter Körper ist, besitzt $(\tilde{x}_\alpha)$

(gemäß Theorem 4. in [9]) auch einen Limes $e \in E$. Und nun folgt:

$$\begin{aligned}
& \vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-e) \\
= \quad & \vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\alpha-(e-\tilde{x}_\alpha)) \\
\geqslant \quad & min\{\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\alpha),\, \vartheta(e-\tilde{x}_\alpha)\} \\
= \quad & \vartheta(\tilde{x}_{\alpha+1}-\tilde{x}_\alpha) \\
= \quad & \vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\alpha)
\end{aligned}$$

Aber dies widerspricht der Konfinalität der Folge $(\vartheta(\frac{1}{2}(z+z')-\tilde{x}_\alpha))$ in S! Und damit haben wir schließlich einen Widerspruch zur ersten Annahme gefunden. Es gibt daher kein Element $z \in K \setminus (E(i))$; vielmehr ist $E(i) = K$. Somit ist die eine Richtung des Lemmas bewiesen.-

Nun sei umgekehrt $(E(i), O)$ ein maximal bewerteter Körper. Und es sei ϑ eine zu O gehörige Bewertung von $E(i)$. Wir betrachten nun eine pseudo-konvergente Folge (x_α), deren Elemente sämtlich in E liegen. Die Folge besitzt einen Limes $a \in E(i)$, den wir in der Form $a = x + iy$ mit $x, y \in E$ schreiben können. Für alle α ergibt sich nun:

$$\vartheta(x_{\alpha+1}-x_\alpha) = \vartheta(a-x_\alpha) = \vartheta(x-x_\alpha+iy) = min\{\vartheta(x-x_\alpha), \vartheta(y)\}$$

Die Folge $(\vartheta(x_{\alpha+1}-x_\alpha))$ ist streng monoton wachsend. Also muß es ein α_0 dergestalt geben, daß für alle $\beta \geqslant \alpha_0$ die Gleichung

$$\vartheta(x_{\beta+1}-x_\beta) = \vartheta(x-x_\beta)$$

gilt. Natürlich ist auch die Folge $(x-x_\alpha)$ pseudo-konvergent. Gemäß Lemma 1. in [9] muß die Folge $(\vartheta(x-x_\alpha))$ streng monoton wachsend sein. Also gilt für $\beta < \alpha_0$:

$$\vartheta(x_{\beta+1}-x_\beta) = \vartheta(x-x_\beta-(x-x_{\beta+1})) = \vartheta(x-x_\beta)$$

Somit ist auch $x \in E$ ein Limes der Folge (x_α). Jede pseudo-konvergente Folge in E hat also einen Limes in E. Nach Theorem 4. in [9] ist daher $(E, O \cap E)$ ein maximal bewerteter Körper. Damit ist das Lemma bewiesen.- $\square$

Wie oben angekündigt können wir nun beweisen, daß sich Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse stets auf maximale unmittelbare Erweiterungen fortsetzen lassen. (Bem.: Da die Restklassenkörper der in diesem Zusammenhang induzierten Bewertungen immer die Charakteristik Null besitzen, sind die maximalen unmittelbaren Erweiterungen gemäß Theorem 8. in [9] stets bis auf Bewertungsisomorphie eindeutig bestimmt. Wir dürfen daher von *der* maximalen unmittelbaren Erweiterung des jeweils betrachteten bewerteten Körpers sprechen.)

Satz 4.10. *Es sei T eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse eines Körpers K. Zudem gelte $\sqrt{-1} \in K$. Und es sei K_M seine maximale unmittelbare Erweiterung bezüglich des von der Halbgruppe induzierten Bewertungsringes. Dann besitzt K_M eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse, die T fortsetzt.*

Beweis. Der Beweis kann analog zu dem von Satz 4.7 geführt werden:

Es sei O der von T auf K induzierte Bewertungsring. Bezeichnet R die reelle Achse von T, so ist R ein euklidischer Koordinatenkörper von K (siehe Kapitel 3.2). Gemäß Satz 4.4 genügt es R auf K_M fortzusetzen.

Es sei (K_M, O_M) die maximale unmittelbare Erweiterung von (K, O). Sie beinhaltet die maximale unmittelbare Erweiterung $(E, O_M \cap E)$ von $(R, O_M \cap R)$. (Man betrachte dazu auch den Beweis von Satz 19 auf S. 114 in [20].) Da maximal bewertete Körper erst recht henselsch sind, können wir mit der Argumentation, die wir schon im Beweis von Satz 4.7 verwendet hatten, zeigen, daß E ein euklidischer Körper und O_M konvex bezüglich seiner Anordnung ist. Wir wenden nun Lemma 4.9 an: Für $i := \sqrt{-1}$ ist demnach $(E(i), O_M \cap (E(i)))$ ein maximal bewerteter Körper. Da dieser offenbar denselben Restklassenkörper und dieselbe Wertegruppe wie (K_M, O_M) besitzt, muß $K_M = E(i)$ sein. Mehr ist nicht zu zeigen. □

Kapitel 5

Strukturen von Bewertungshalbgruppen (Teil II)

5.1 Bewertungshalbgruppen von Körpern formaler Potenzreihen $\overline{K}((\Gamma))$

Es sei $(\Gamma, \leqslant)$ eine (additiv geschriebene) angeordnete abelsche Gruppe, und es sei $\overline{K}$ ein Körper. Wir bezeichnen dann mit $\overline{K}((\Gamma))$ die Menge aller formalen Summen

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma,$$

für die gilt:

- Für alle $\gamma \in \Gamma$ ist $a_\gamma \in \overline{K}$, und
- die Menge $S := \{\gamma \in \Gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$ ist wohlgeordnet.

Dabei ist t nur ein Symbol. Diese formalen Summen bezeichnet man als *formale Potenzreihen*. Die Menge S wird auch der *Träger* der formalen Potenzreihe genannt. Sind $f = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma$ und $g = \sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma t^\gamma$ zwei formale Potenzreihen, so führt man durch die Vereinbarungen

$$f + g = \sum_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma + b_\gamma)t^\gamma$$

$$f \cdot g = \sum_{\gamma\in\Gamma}(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma \\ \alpha+\beta=\gamma}} a_\alpha b_\beta)t^\gamma$$

eine Addition bzw. Multiplikation auf der Menge $\overline{K}((\Gamma))$ ein. Man kann beweisen, daß diese Vereinbarungen wohldefiniert sind und auf $K := \overline{K}((\Gamma))$ eine

Körperstruktur definieren. (Für eine ausführliche Diskussion von formalen Potenzreihen betrachte man Kap. II, § 5 in [20].)

Ist $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma \in K^\times$, und ist S der Träger von f, so wird durch

$$\vartheta(f) := minS$$

eine Bewertung auf K definiert. Man nennt sie die *kanonische Bewertung* von K. Man kann zeigen, daß (K, ϑ) ein maximal bewerteter Körper ist. Bezeichnet O den Bewertungsring von ϑ, so gilt offenbar $O/(O \setminus O^\times) \cong \overline{K}$. Daher können wir die Abbildung

$$\varphi : O \twoheadrightarrow \overline{K}$$

mit

$$\varphi(f) := a_0$$

als den Restklassenhomomorphismus von ϑ ansehen.

Besitzt $\overline{K}$ eine Anordnung "$\leqslant$", so wird durch

$$f \geqslant 0 \;:\Longleftrightarrow\; a_{\vartheta(f)} \geqslant 0, \quad \text{für} \;\; f \in K^\times$$

eine Anordnung von K definiert, die mit der kanonischen Bewertung verträglich ist.

Wir untersuchen Bewertungshalbgruppen und im besonderen Zirkelhalbgruppen von K. Proposition 2.12 verschafft uns dabei zunächst einmal einen vollständigen Überblick über alle Krull-Halbgruppen von K, die in O enthalten sind: Diese entsprechen umkehrbar eindeutig den Krull-Halbgruppen von $\overline{K}$.-

Eine zentrale Frage im Zusammenhang mit Zirkelhalbgruppen ist, wann zwei gegebene reelle Koordinatenkörper von K übereinstimmen. Das nachfolgende Lemma gibt darauf eine Antwort. Zuvor führen wir noch folgende Definitionen auf:

Für eine gegebene formale Potenzreihe $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma \in K$ heißt jede Reihe der Form $\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma < \delta}} a_\gamma t^\gamma$ (wobei $\delta \in \Gamma$ ist) ein *initialer Abschnitt* von f. Ist ein derartiger Abschnitt von f verschieden, so heißt er *echt*. Eine Teilmenge von K heißt *abgeschlossen gegenüber Abschnitten*, wenn für jedes Element der Teilmenge gilt, daß auch alle seine initialen Abschnitte zu ihr gehören.

(Bem.: In der englischsprachigen Literatur ist für den letzten Begriff der Ausdruck "truncation-closed" geläufig.)

Lemma 5.1.1. *Mit den obigen Begriffen gilt: Ist $\overline{R}$ ein reeller Unterkörper von $\overline{K}$ mit $\overline{K} = \overline{R}(\sqrt{-1})$, und ist F ein Unterkörper von K mit $[K : F] = 2$, so gilt genau dann $\overline{R}((\Gamma)) = F$, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\varphi(F \cap O) \subseteq \overline{R}$

2. $\overline{R} \cup \{t^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq F$

3. F *ist abgeschlossen gegenüber Abschnitten.*

Beweis. Der Körper $\overline{R}((\Gamma))$ erfüllt offensichtlich die angegebenen Bedingungen.-

Es sei also F ein Unterkörper von K, der die angegebenen Bedingungen erfüllt. Wir betrachten ein Element

$$f = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma \in \overline{R}((\Gamma)) \ .$$

Für $\alpha \in \Gamma$ setzen wir:

$$f_\alpha := \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \leqslant \alpha}} a_\gamma t^\gamma$$

Angenommen, es gibt Elemente α mit $f_\alpha \notin F$. Dann besitzt der Träger S von f ein kleinstes Element δ mit $f_\delta \notin F$.

Ist δ überhaupt das kleinste Element von S, so ist $f_\delta = a_\delta t^\delta$. Aber mit der zweiten vorausgesetzten Bedingung folgt jetzt $f_\delta \in F$!

Ist δ eine Nachfolgerzahl in S, so hat sie einen direkten unmittelbaren Vorgänger $\nu \in S$, $\nu < \delta$. Und dann gilt $f_\delta = f_\nu + a_\delta t^\delta$. Aber aus $f_\nu \in F$ und der zweiten vorausgesetzten Bedingung folgt jetzt wieder $f_\delta \in F$!

Schließlich betrachten wir den verbleibenden Fall, in dem δ eine Limeszahl in S ist. Für alle Elemente $\alpha, \beta \in S$ mit $\alpha < \beta$ gilt offenbar:

$$\alpha < \vartheta(f_\beta - f_\alpha) \leqslant \beta$$

Also ist $\mathcal{F} := (f_\alpha)_{\alpha \in S, \alpha < \delta}$ eine pseudo-konvergente Folge, deren Elemente alle in F liegen. Nach dem Satz von Baer-Krull besitzt F eine Anordnung, die mit der kanonischen Bewertung ϑ von K verträglich ist. Aufgrund der Voraussetzungen des Lemmas ist $i := \sqrt{-1} \in \overline{K} \subseteq K$. Also gilt $K = F(i)$. Gemäß Lemma 4.9 ist auch $(F, \vartheta|_F)$ ein maximal bewerteter Körper. Daher besitzt $\mathcal{F}$ einen Limes $l \in F$. Für alle $\alpha, \beta \in S$ mit $\alpha < \beta < \delta$ gilt:

$$\vartheta(l - f_\alpha) = \vartheta(f_\beta - f_\alpha) > \alpha$$

Somit besitzt l die Gestalt

$$l = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma < \delta}} a_\gamma t^\gamma + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \delta \leqslant \gamma}} b_\gamma t^\gamma,$$

mit geeignet gewählten $b_\gamma \in \overline{K}$. Da F abgeschlossen gegenüber Abschnitten ist, folgt:

$$l' := \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma < \delta}} a_\gamma t^\gamma \in F$$

Aber aus $f_\delta = l' + a_\delta t^\delta$ und der zweiten vorausgesetzten Bedingung folgt erneut $f_\delta \in F$!

Wir erkennen nun, daß $f_\alpha \in F$ für alle α gelten muß. Hat S ein größtes Element, so ist klar, daß $f \in F$ gilt. Hat S kein größtes Element, so ist $(f_\alpha)_{\alpha \in S}$ eine pseudo-konvergente Folge. Diese besitzt einen Limes $l^* \in F$. Für alle $\alpha, \beta \in S$ mit $\alpha < \beta$ gilt:

$$\vartheta(l^* - f_\alpha) = \vartheta(f_\beta - f_\alpha) > \alpha$$

Somit besitzt l^* die Gestalt

$$l^* = f + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ S < \gamma}} c_\gamma t^\gamma,$$

mit geeignet gewählten $c_\gamma \in \overline{K}$ (dabei steht $S < \gamma$ für $\forall \mu \in S \quad \mu < \gamma$). Da F abgeschlossen gegenüber Abschnitten ist, folgt schließlich $f \in F$.

Wir haben damit $\overline{R}((\Gamma)) \subseteq F$ bewiesen. Da offenbar $K = \overline{R}((\Gamma))(i)$ ist, folgt die Behauptung $\overline{R}((\Gamma)) = F$. □

Bemerkung 5.1.2. *Mit den obigen Begriffen gilt, falls K algebraisch abgeschlossen ist: Ist $\overline{R}$ ein reeller Unterkörper von $\overline{K}$ mit $\overline{K} = \overline{R}(\sqrt{-1})$, und ist F ein Unterkörper von K mit $[K : F] = 2$ und $\varphi(F \cap O) = \overline{R}$, so gibt es einen bewertungstreuen Automorphismus von K, der F in $\overline{R}((\Gamma))$ überführt. Ist zudem $\overline{R} \subseteq F$, so kann dieser Automorphismus so bestimmt werden, daß er $\overline{K}$ elementweise festläßt.*

Beweis. Gemäß Lemma 4.9 ist F ein maximal bewerteter Körper bezüglich der kanonischen Bewertung ϑ von K. Und gemäß Lemma 4.8 ist $\vartheta(F^\times) = \Gamma$. Ferner ist F ein reell abgeschlossener Körper. Nach Satz 28. auf S. 119 in [20] gibt es daher einen bewertungstreuen Isomorphismus:

$$F \to \overline{R}((\Gamma))$$

Ist $\overline{R} \subseteq F$, so zeigt der Beweis des zitierten Satzes, daß der Isomorphismus den Körper $\overline{R}$ elementweise festläßt. Durch die Vereinbarung $\sqrt{-1} \mapsto \sqrt{-1}$ kann er zu einem bewertungstreuen Automorphismus von K fortgesetzt werden. □

Aus Bemerkung 5.1.2 folgt offenbar: *Ist K algebraisch abgeschlossen, und sind T_1, T_2 zwei Zirkelhalbgruppen mit reeller Achse von K, die beide die kanonische Bewertung induzieren und deren φ-Bild übereinstimmt, so gibt es einen bewertungstreuen Automorphismus von K, der T_1 in T_2 überführt. Ist die Achse des*

φ-Bildes in den Achsen der Zirkelhalbgruppen enthalten, so kann er so bestimmt werden, daß er $\overline{K}$ elementweise festläßt.

Wir untersuchen nun den Fall, daß K eine Zirkelhalbgruppe T besitzt, die die kanonische Bewertung von K induziert. Zudem gelte $\Gamma = 2\Gamma$ und $i := \sqrt{-1} \in K$. Gemäß Bemerkung 3.2.3 ist dann $\varphi(T)$ eine Zirkelhalbgruppe von $\overline{K}$ mit einer reellen Achse $\overline{R}$. Diese Achse ist ein euklidischer Koordinatenkörper des Körpers $\overline{K}$. Setzen wir $R := \overline{R}((\Gamma))$, so liefert Lemma 4.8 wegen $K = R(i)$ noch $\vartheta(R^\times) = \Gamma$. Die eindeutig bestimmte Anordnung "$\leqslant$" von $\overline{R}$ kann in der oben beschriebenen Weise auf R fortgesetzt werden.

Es sei $f \in R$ mit $f > 0$. Dann gibt es ein $g \in R$ mit:

$$\vartheta(f) = 2\vartheta(g) = \vartheta(g^2)$$

Es folgt $f/g^2 \in O^\times$ und $\varphi(f/g^2) \in \overline{R}$ mit $\varphi(f/g^2) > 0$. Da $\overline{R}$ euklidisch ist, ist $\varphi(f/g^2)$ ein Quadrat, d.h. das Polynom

$$X^2 - \varphi(f/g^2) \in \overline{R}[X]$$

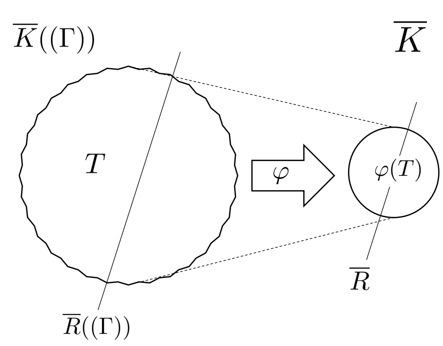
besitzt eine einfache Nullstelle in $\overline{R}$. Da R als maximal bewerteter Körper erst recht henselsch ist, besitzt das Polynom

$$X^2 - f/g^2 \in R[X]$$

eine Nullstelle $h \in R$. Es folgt $f = (hg)^2$. Also ist jedes positive Element von R ein Quadrat und demnach auch R ein euklidischer Körper. Es folgt, daß

$$T_R := \{f + ig \mid f, g \in R,\ f^2 + g^2 \leqslant 1\}$$

eine Zirkelhalbgruppe von K mit reeller Achse R ist.-



Es stellt sich die Frage, wann $T_R \subseteq T$ gilt. Bemerkung 3.2.4 und Lemma 3.2.1 besagen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\{f \in R \mid 1 - f^2 \in R^2\} \subseteq R_0$$

gilt. Im Hinblick darauf führen wir zunächst die folgende Definition ein:

Ein Unterkörper F von K heißt *verträglich mit* T, wenn $\varphi(F \cap O) \subseteq \overline{R}$ und

$$\{f \in F \mid 1 - f^2 \in F^2\} \subseteq R_0$$

gilt.-

Wir betrachten nun die untenstehenden Bedingungen, um Kriterien aufzustellen, mit denen $T_R \subseteq T$ erreicht werden kann:

I. K besitzt mindestens einen mit T verträglichen Unterkörper, der die Menge $\overline{R} \cup \{t^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ enthält und abgeschlossen gegenüber Abschnitten ist.

II. Zu jedem Unterkörper F von K mit $F(i) \neq K$, der die in I. aufgeführten Forderungen erfüllt, existiert stets ein Element $x \in K \setminus F$, dessen echte initiale Abschnitte sämtlich in F liegen und für das auch $F(x)$ verträglich mit T ist.

Sind I. und II. erfüllt, so besitzt K nach dem Lemma von Zorn einen Unterkörper L, der maximal in bezug auf die in I. aufgeführten Forderungen ist.

Angenommen, es ist $L(i) \neq K$. Dann gibt es gemäß II. ein Element $x \in K \setminus L$, dessen echte initiale Abschnitte sämtlich in L liegen und für das auch $L(x)$ verträglich mit T ist. Gemäß Lemma 3.4. in [15] ist jedoch auch $L(x)$ abgeschlossen gegenüber Abschnitten. Somit erfüllt auch $L(x)$ alle in I. aufgeführten Forderungen. Widerspruch! Daher muß $L(i) = K$ sein.

Mit Lemma 5.1.1 folgt nun $L = R$. Die Verträglichkeit mit T liefert schließlich $T_R \subseteq T$.-

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 5.1.3. *Es seien die zu Beginn dieses Abschnitts eingeführten Begriffe vorausgesetzt. Zudem gelte $i := \sqrt{-1} \in K$ und $\Gamma = 2\Gamma$. Dann gilt:*

Besitzt K eine Zirkelhalbgruppe, die die kanonische Bewertung von K induziert, so besitzt K auch eine Zirkelhalbgruppe mit reeller Achse. Genauer gilt:

Ist T eine Zirkelhalbgruppe von K, die die kanonische Bewertung von K induziert, und ist $\overline{R}$ die reelle Achse von $\varphi(T)$, so ist

$$T_R := \{f + ig \mid f, g \in \overline{R}((\Gamma)),\ f^2 + g^2 \leqslant 1\}$$

eine Zirkelhalbgruppe von K mit reeller Achse $\overline{R}((\Gamma))$. Gelten außerdem noch die oben aufgeführten Bedingungen I. und II., so ist $T_R \subseteq T$.

5.2 Einbettung von Zirkelhalbgruppen in Körper formaler Potenzreihen $\overline{K}((\Gamma))$

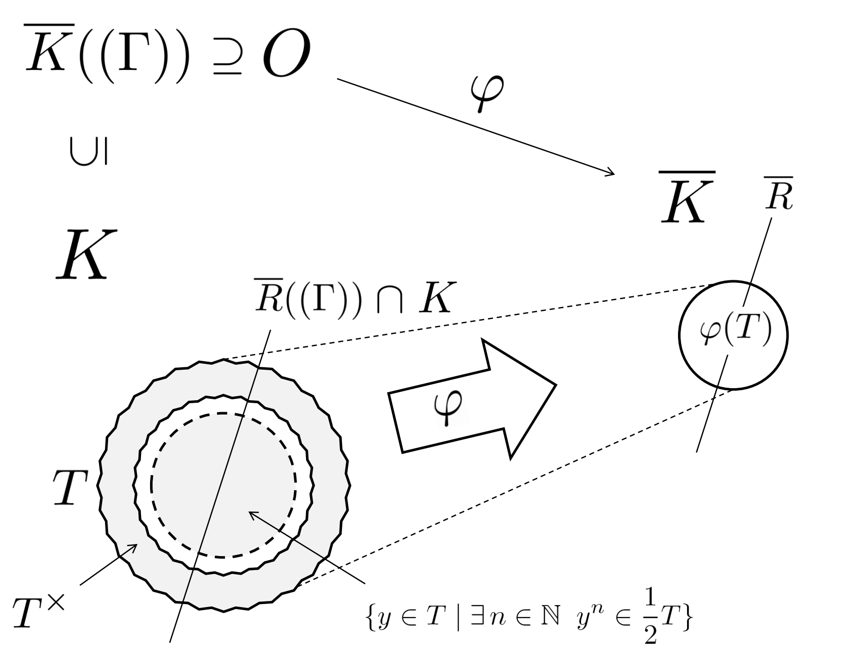
In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie ein Körper mit Zirkelhalbgruppe in einen geeignet gewählten Körper formaler Potenzreihen eingebettet werden kann.

Satz 5.2.1. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, der eine Zirkelhalbgruppe T besitzt. Weiter seien $\overline{K}$ und Γ der Restklassenkörper bzw. die Wertegruppe der Bewertung, die die Halbgruppe induziert. Dann kann K in den Körper $\overline{K}((\Gamma))$ bewertungstreu eingebettet und damit als dessen Unterkörper angesehen werden.*

Zudem gilt: Bezeichnet φ den Restklassenhomomorphismus der kanonischen Bewertung von $\overline{K}((\Gamma))$, und ist $\overline{R}$ die reelle Achse des Bildes $\varphi(T)$, so gilt:

$$\{y \in T \mid \exists n \in \mathbb{N} \;\; y^n \in \frac{1}{2}T\} \subseteq \{f + ig \mid f, g \in \overline{R}((\Gamma)),\; f^2 + g^2 \leqslant 1\}$$

(Dabei ist $i := \sqrt{-1}$ gesetzt, und "$\leqslant$" bezeichnet die von $\overline{R}$ induzierte Anordnung auf $\overline{R}((\Gamma))$.)



Beweis. Die Zirkelhalbgruppe T induziert auf dem Körper K eine Bewertung

$$\vartheta_K : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$$

mit dem Restklassenhomomorphismus:

$$\varphi_K : O_K \twoheadrightarrow \overline{K}$$

Nach den Ergebnissen von Krull (Satz 2.4 und nachfolgenden Bemerkungen) gibt es eine Körpereinbettung $\tau : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit:

$$\overline{T} := \varphi_K(T) = \{x \in \overline{K} \mid |\tau(x)| \leqslant 1\}$$

Gemäß Bemerkung 3.2.3 besitzt $\overline{T}$ eine reelle Achse $\overline{R}$; diese ist ein reell abgeschlossener Unterkörper von $\overline{K}$ mit $[\overline{K} : \overline{R}] = 2$. Da (K, ϑ_K) henselsch ist, dürfen wir

$$\overline{K} \subseteq O_K, \quad \varphi_K|_{\overline{K}} = id_{\overline{K}}$$

annehmen (vgl. etwa A.7.3 in [18]).

Nach dem Lemma von Zorn besitzt die Körpererweiterung $K/\overline{R}$ einen Zwischenkörper F, der maximal bezüglich der Forderung $\varphi_K(O_K \cap F) = \overline{R}$ ist.

Da der Übergang zur henselschen Hülle den Restklassenkörper unverändert läßt, folgt aus der Maximalität von F sofort, daß $(F, \vartheta_K|_F)$ henselsch ist.

Nach dem Satz von Baer-Krull (vgl. etwa 1.4.15 in [18]) kann aus der Anordnung von $\overline{R}$ eine Anordnung "$\leqslant$" von F konstruiert werden, die mit ϑ_K verträglich ist. Es sei $F_1 \subseteq K$ die reell abgeschlossene Hülle von $(F, \leqslant)$. Der Bewertungsring

$$O_1 := \{x \in F_1 \mid \exists\, y \in O_K \cap F \quad -y \leqslant x \leqslant y\}$$

von F_1 ist offenbar konvex bzgl. "$\leqslant$" und eine Fortsetzung von $O_K \cap F$ auf F_1. Da $(F, \vartheta_K|_F)$ henselsch ist, muß $O_1 = O_K \cap F_1$ sein. Also ist auch die Anordnung von F_1 verträglich mit ϑ_K. Daraus folgt, daß $\varphi_K(O_K \cap F_1)$ ein reeller Zwischenkörper von $\overline{K}/\overline{R}$ ist. Schließlich ergeben sich mit der Maximalität von F die Aussagen:

$$\varphi_K(O_K \cap F_1) = \overline{R}, \quad F = F_1, \quad F \text{ ist reell abgeschlossen}$$

Insbesondere ist $\vartheta_K(F^\times)$ divisibel. Wegen Corollary A.6.2 in [18] folgt aus der Maximalität von F die Gleichung $\vartheta_K(F^\times) = \Gamma$.

Die Gruppe Γ kann als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ aufgefaßt werden. Als solcher besitzt sie eine Basis $\mathcal{B} \subseteq \Gamma$. Zu jedem Wert $\beta \in \mathcal{B}$ existiert ein Element:

$$t^\beta \in F^\times \;\text{ mit }\; \vartheta_K(t^\beta) = \beta \;\text{ und }\; t^\beta \geqslant 0$$

Jeder Wert $\gamma \in \Gamma$ besitzt eine Darstellung:

$$\gamma = \frac{m_1}{n_1}\beta_1 + \ldots + \frac{m_n}{n_n}\beta_n$$

mit $m_j \in \mathbb{Z}$, $n_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\beta_j \in \mathcal{B}$ für $j = 1, ..., n$. Da F reell abgeschlossen ist, besitzen die Polynome

$$X^{n_j} - t^{\beta_j}$$

jeweils genau eine positive Nullstelle in F; diese sei jeweils mit $\sqrt[n_j]{t^{\beta_j}}$ bezeichnet. Somit wird durch

$$t^{\gamma} := (\sqrt[n_1]{t^{\beta_1}})^{m_1} ... (\sqrt[n_n]{t^{\beta_n}})^{m_n}$$

in eindeutiger Weise ein Element in F definiert, für das

$$\vartheta_K(t^{\gamma}) = \gamma$$

gilt. Dabei sei $t^0 := 1$. Für $n_j, n_j' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist das Produkt $\sqrt[n_j]{t^{\beta_j}} \cdot \sqrt[n_j']{t^{\beta_j}}$ eine positive Nullstelle des Polynoms

$$X^{n_j n_j'} - (t^{\beta_j})^{n_j' + n_j}$$

im Körper F. Auch das Element

$$(\sqrt[n_j n_j']{t^{\beta_j}})^{n_j' + n_j}$$

ist eine derartige Nullstelle. Da das Polynom in F genau eine positive Nullstelle besitzt, muß

$$(\sqrt[n_j n_j']{t^{\beta_j}})^{n_j' + n_j} = \sqrt[n_j]{t^{\beta_j}} \cdot \sqrt[n_j']{t^{\beta_j}}$$

folgen. Und deshalb gilt auch noch:

$$\forall\, \lambda, \mu \in \Gamma \quad t^{\lambda+\mu} = t^{\lambda} t^{\mu}$$

Der Körper $\overline{K}(\Gamma) := \overline{K}(\{t^{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\})$ ist ein gemeinsamer Unterkörper des Körpers K und des Körpers $\overline{K}((\Gamma))$ aller formalen Potenzreihen $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_{\gamma} t^{\gamma}$ mit $a_{\gamma} \in \overline{K}$. Für die kanonische Bewertung ϑ von $\overline{K}((\Gamma))$ gilt hierbei offenbar $\vartheta|_{\overline{K}(\Gamma)} = \vartheta_K|_{\overline{K}(\Gamma)}$. Beide Körper K und $\overline{K}((\Gamma))$ sind unmittelbare Erweiterungen von $\overline{K}(\Gamma)$; letztere ist maximal. Da nach Kaplansky (Theorem 8. in [9]) maximale unmittelbare Erweiterungen bei Restklassenkörpern der Charakteristik 0 bis auf Bewertungsisomorphie eindeutig bestimmt sind, muß es möglich sein K bewertungstreu in $\overline{K}((\Gamma))$ einzubetten. Wir dürfen daher

$$K \subseteq \overline{K}((\Gamma)), \quad \vartheta|_K = \vartheta_K, \quad \varphi|_K = \varphi_K$$

annehmen.

Gemäß Satz 6., §5, II in [20] ist $\overline{K}((\Gamma))$ algebraisch abgeschlossen. Der Körper $\overline{R}((\Gamma))$ ist ein reell abgeschlossener Koordinatenkörper von $\overline{K}((\Gamma))$, dessen eindeutige Anordnung "$\leqslant$" die eindeutige Anordnung "$\leqslant$" von $\overline{R}$ induziert. Es sei nun $y \in T$. Dann gilt offenbar:

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \quad y^n \in \frac{1}{2} T \quad \Longleftrightarrow \quad |\tau(\varphi(y))| < 1$$

Es gibt Potenzreihen $f, g \in \overline{R}((\Gamma))$ mit $y = f + ig$. Wegen Lemma 4.8 ist $\vartheta(f), \vartheta(g) \geqslant 0$. Nach dem Beweis der Bemerkung 3.2.3 gilt $\tau(\overline{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Ist also $|\tau(\varphi(y))| < 1$, so muß

$$\tau(\varphi(f))^2 + \tau(\varphi(g))^2 < 1$$

sein. Daraus folgt $f^2 + g^2 \leqslant 1$. Und damit ist der Satz bewiesen. □

5.3 Euklidische Zirkelhalbgruppen bei maximal bewerteten Körpern

In diesem Abschnitt stellen wir eine Reihe von Bedingungen für die Existenz reeller Achsen bei Zirkelhalbgruppen auf, die eine maximale Bewertung auf ihrem zugrundeliegenden Körper induzieren.

Ergänzend zu den Ausführungen vor Lemma 4.8 sei noch an folgende bekannte Tatsachen und Begriffe in bezug auf pseudo-konvergente Folgen erinnert: Es sei $(a_\alpha)_{\alpha<\delta}$ eine beliebige pseudo-konvergente Folge von Elementen aus einem bewerteten Körper (K, ϑ). Dann ist die Wertefolge $(\vartheta(a_\alpha))_{\alpha<\delta}$ entweder streng monoton wachsend, oder es gibt eine Ordinalzahl $\beta < \delta$ dergestalt, daß $(\vartheta(a_\alpha))_{\beta\leqslant\alpha<\delta}$ konstant ist (siehe Lemma 1. in [9]). Zu jedem Polynom $f \in K[X] \setminus K$ gibt es ferner stets eine kleinste Ordinalzahl $\alpha_f < \delta$ dergestalt, daß $(f(a_\alpha))_{\alpha_f\leqslant\alpha<\delta}$ eine pseudo-konvergente Folge ist (siehe Lemma 5. in [9]). Es können nun zwei Fälle eintreten:

1. Es existiert ein Polynom $f \in K[X] \setminus K$ dergestalt, daß $(\vartheta(f(a_\alpha)))_{\alpha_f\leqslant\alpha<\delta}$ streng monoton wachsend ist.
2. Zu jedem Polynom $f \in K[X] \setminus K$ gibt es stets eine Ordinalzahl $\beta_f \geqslant \alpha_f$, $\beta_f < \delta$ dergestalt, daß $(\vartheta(f(a_\alpha)))_{\beta_f\leqslant\alpha<\delta}$ konstant ist.

Trifft der erste Fall zu, so heißt $(a_\alpha)_{\alpha<\delta}$ *von algebraischem Typ*. Trifft der zweite Fall zu, so heißt $(a_\alpha)_{\alpha<\delta}$ *von transzendentem Typ*.-

Proposition 5.3.1. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Er besitze eine Zirkelhalbgruppe T, die auf dem Körper eine maximale Bewertung ϑ induziert und zudem die Bedingung $T \cap (T+2) = \{1\}$ erfüllt. Es seien O und φ der Bewertungsring bzw. Restklassenhomomorphismus von ϑ, und es sei $\overline{R}$ die Achse von $\varphi(T)$. Ferner sei $R_0 := \{1/2 \cdot (t + 1/t) \mid t \in T^\times\}$. Dann impliziert die folgende Aussage, daß T eine reelle Achse besitzt:*

- *Es gilt $\mathbb{Q}^2 \cap (1 - \mathbb{Q}^2) \subseteq R_0$, und für jeden Unterkörper L von K mit $\varphi(O \cap L) \subseteq \overline{R}$ und $L^2 \cap (1-L^2) \subseteq R_0$ gelten die folgenden vier Bedingungen:*
  - *Ist $L \subseteq O$, so gibt es zu jedem $x \in \overline{R}$, das transzendent über $\varphi(L)$ ist, stets ein $y \in O$ mit $\varphi(y) = x$ und $L(y)^2 \cap (1 - L(y)^2) \subseteq R_0$.*
  - *Für jede endliche Erweiterung L_1 von L mit $\varphi(O \cap L_1) \subseteq \overline{R}$ gilt $L_1^2 \cap (1 - L_1^2) \subseteq R_0$.*

- *Zu jedem $\gamma \in \vartheta(K^{\times})$ mit $n\gamma \notin \vartheta(L^{\times})$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es stets ein $z \in K$ mit $\vartheta(z) = \gamma$ und $L(z)^2 \cap (1 - L(z)^2) \subseteq R_0$.*
- *Zu jeder pseudo-konvergenten Folge von transzendentem Typ, die nur aus Elementen von L besteht, gibt es stets einen Limes $y \in K$ mit $L(y)^2 \cap (1 - L(y)^2) \subseteq R_0$.*

Beweis. Für den Restklassenkörper $\overline{K}$ von ϑ gilt $[\overline{K} : \overline{R}] = 2$, $\overline{K} = \overline{R}(i)$ (mit $i = \sqrt{-1}$).

Offenbar gibt es nach dem Lemma von Zorn einen Unterkörper $L_0 \subseteq O$, der maximal bezüglich der beiden Forderungen

$$\varphi(L_0) \subseteq \overline{R} \ \text{ und } \ L_0^2 \cap (1 - L_0^2) \subseteq R_0$$

ist.

Angenommen, es gibt ein $x \in \overline{R}$, das transzendent über $\varphi(L_0)$ ist. Dann gibt es gemäß der ersten Bedingung der Proposition ein Element $y \in O$ mit $\varphi(y) = x$ und $L_0(y)^2 \cap (1 - L_0(y)^2) \subseteq R_0$. Da nun $L_0(y) \subseteq O$ und $\varphi(L_0(y)) = \varphi(L_0)(x)$ gemäß Corollary A.6.3 in [18] gilt, erhalten wir so einen Widerspruch zur Maximalität von L_0! Daher gibt es kein derartiges Element x, und $\overline{R}/\varphi(L_0)$ muß eine algebraische Körpererweiterung sein.-

Es sei $L_0^H \subseteq K$ die henselsche Hülle von L_0. Angenommen, es ist $L_0^H \neq L_0$. Dann gibt es ein Element $y \in O \cap (L_0^H \setminus L_0)$. Es folgt nun, daß $L_0(y)$ eine endliche unmittelbare Erweiterung von L_0 ist. Gemäß der zweiten Bedingung der Proposition folgt $L_0(y)^2 \cap (1 - L_0(y)^2) \subseteq R_0$. Da auch $L_0(y) \subseteq O$ gilt, erhalten wir nun jedoch einen Widerspruch zur Maximalität von L_0! Also muß $L_0^H = L_0$ sein; der Körper L_0 ist henselsch.-

Der reell abgeschlossene Körper $\overline{R}$ induziert auf $\varphi(L_0)$ und damit auf L_0 selbst eine Anordnung "$\leqslant$", die mit ϑ verträglich ist. Es sei $L_0^R \subseteq K$ ein reeller Abschluß von $(L_0, \leqslant)$. Dann ist der Bewertungsring

$$O_0^R := \{x \in L_0^R \mid \exists\, y \in L_0 \quad -y \leqslant x \leqslant y\}$$

eine Fortsetzung von $O \cap L_0\,(= L_0)$ auf L_0^R. Da der Körper L_0 henselsch ist, muß die Gleichung $O \cap L_0^R = O_0^R$ gelten. Also ist auch die Anordnung von L_0^R mit ϑ verträglich, und folglich ist $\varphi(O \cap L_0^R)$ ein reeller Abschluß von $\varphi(L_0)$. Da $\overline{R}/\varphi(L_0)$ algebraisch ist, ist auch $\overline{R}$ ein reeller Abschluß von $\varphi(L_0)$. Deshalb gibt es einen Isomorphismus über $\varphi(L_0)$, der $\varphi(O \cap L_0^R)$ in $\overline{R}$ überführt; durch die Vereinbarung $i \mapsto i$ erweitern wir diesen Isomorphismus zu einem Automorphismus:

$$\overline{\sigma} \in Gal(\overline{K}/\varphi(L_0))$$

Wir können jetzt Proposition 1.3.3. auf S. 22 in [4] zur Anwendung bringen. Demnach kann $\overline{\sigma}$ geeignet "hochgehoben" werden, d.h. es gibt einen Automorphismus

$$\sigma \in Gal(L_0^R(i)/L_0)$$

mit $\sigma(O \cap L_0^R(i)) = O \cap L_0^R(i)$ und $\varphi(\sigma(y)) = \overline{\sigma}(\varphi(y))$ für alle $y \in O \cap L_0^R(i)$. Der Körper $\sigma(L_0^R)$ ist nun ein reeller Abschluß von $(L_0, \leqslant)$, für den die Gleichung $\varphi(O \cap \sigma(L_0^R)) = \overline{R}$ gilt. Angenommen, es ist $L_0^R \neq L_0$. Dann gibt es ein Element $y \in O \cap (\sigma(L_0^R) \setminus L_0)$. Gemäß der zweiten Bedingung der Proposition folgt erneut $L_0(y)^2 \cap (1 - L_0(y)^2) \subseteq R_0$. Da auch $L_0(y) \subseteq O$ gilt, erhalten wir wieder einen Widerspruch zur Maximalität von L_0! Also muß $L_0^R = L_0$ sein; der Körper L_0 ist reell abgeschlossen.-

Da L_0 reell abgeschlossen ist, ist auch $\varphi(L_0)$ reell abgeschlossen. Und da $\overline{R}/\varphi(L_0)$ algebraisch ist, folgt schließlich $\varphi(L_0) = \overline{R}$.-

Nach dem Lemma von Zorn besitzt die Körpererweiterung K/L_0 einen Zwischenkörper L, der maximal bezüglich der beiden Folgerungen

$$\varphi(O \cap L) = \overline{R} \ \text{ und } \ L^2 \cap (1 - L^2) \subseteq R_0$$

ist.

Mit einer analogen Argumentation wie oben kann man nun zeigen, daß auch L ein henselscher Körper ist.-

Nach dem Satz von Baer-Krull (vgl. etwa 1.4.15 in [18]) induziert $\overline{R}$ auf L eine mit ϑ verträgliche Anordnung "$\leqslant$". Es sei $L^R \subseteq K$ ein reeller Abschluß von $(L, \leqslant)$. Dann ist der Bewertungsring

$$O^R := \{x \in L^R \mid \exists\, y \in L \quad -y \leqslant x \leqslant y\}$$

eine Fortsetzung von $O \cap L$ auf L^R. Da der Körper L henselsch ist, muß die Gleichung $O \cap L^R = O^R$ gelten. Also ist auch die Anordnung von L^R mit ϑ verträglich, und folglich ist $\varphi(O \cap L^R)$ ein reeller Abschluß von $\varphi(O \cap L)$. Und aus $\varphi(O \cap L) = \overline{R}$ ergibt sich dann $\varphi(O \cap L^R) = \overline{R}$. Mit einer analogen Argumentation wie oben kann man nun die Annahme $L^R \neq L$ zum Widerspruch führen. Also ist der Körper L reell abgeschlossen.-

Angenommen, es gibt einen Wert $\gamma \in \vartheta(K^\times) \setminus \vartheta(L^\times)$. Da L reell abgeschlossen ist, ist $\vartheta(L^\times)$ divisibel, was

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad n\gamma \notin \vartheta(L^\times)$$

zur Folge hat. Gemäß der dritten Bedingung der Proposition gibt es ein Element $z \in K$ dergestalt, daß $\vartheta(z) = \gamma$ und $L(z)^2 \cap (1 - L(z)^2) \subseteq R_0$ gilt. Gemäß Corollary A.6.2 in [18] muß nun $\varphi(O \cap L(z)) = \varphi(O \cap L) = \overline{R}$ gelten. Aber nun erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität von L! Also gibt es keinen derartigen Wert γ; vielmehr gilt $\vartheta(L^\times) = \vartheta(K^\times)$.-

Angenommen, es gibt eine pseudo-konvergente Folge in L ohne Limes in L von transzendentem Typ. Dann besitzt sie gemäß der vierten Bedingung der Proposition einen Limes $y \in K$ mit $L(y)^2 \cap (1 - L(y)^2) \subseteq R_0$. Gemäß Theorem 2. in

[9] ist $L(y)$ dann eine unmittelbare Erweiterung von L. Aber damit erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität von L! Also kann es keine derartige Folge geben.-

Es sei $L^M \subseteq K$ eine maximale unmittelbare Erweiterung von L. Angenommen, es ist $L^M \neq L$. Gemäß Theorem 1. in [9] muß es dann eine pseudo-konvergente Folge in L ohne Limes in L geben (die einen Limes in $L^M \setminus L$ besitzt). Wegen der obigen Überlegung kann diese Folge nur von algebraischem Typ sein. Gemäß Theorem 3. in [9] existiert dann aber eine echte endliche unmittelbare Erweiterung von L. Und dies widerspricht wegen der zweiten Bedingung der Proposition der Maximalität von L (und es widerspricht auch der Tatsache, daß L henselsch ist)! Also muß doch $L^M = L$ sein, und der Körper L erweist sich als maximal bewertet.-

Nach den obigen Ergebnissen bezüglich des Restklassenkörpers und der Wertegruppe von L folgt, daß $K/L(i)$ eine unmittelbare Erweiterung ist. Und mit Lemma 4.9 folgt aus der letzten Überlegung, daß auch $L(i)$ ein maximal bewerteter Körper ist. Also muß $L(i) = K$ sein.-

Der Körper L ist damit reell abgeschlossen und definiert eine Zirkelhalbgruppe T_L von K mit reeller Achse. Das Einheitsintervall seiner eindeutig bestimmten Anordnung liegt in R_0. Mit Lemma 3.2.4 folgt nun $T_L \subseteq T$. Und mit Lemma 2.8 folgt schließlich $T_L = T$; der Körper L erweist sich somit als die reelle Achse von T. □

Durch eine geeignete Abänderung der starken Forderungen, die die obige Proposition an R_0 stellt, können wir Forderungen gewinnen, die sowohl hinreichend als auch notwendig für die Existenz einer reellen Achse von T sind.

Satz 5.3.2. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Er besitze eine Zirkelhalbgruppe T, die auf dem Körper eine maximale Bewertung ϑ induziert und zudem die Bedingung $T \cap (T+2) = \{1\}$ erfüllt. Es seien O und φ der Bewertungsring bzw. Restklassenhomomorphismus von ϑ, und es sei $\overline{R}$ die Achse von $\varphi(T)$. Ferner sei $R_0 := \{1/2 \cdot (t + 1/t) \mid t \in T^\times\}$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gilt $\mathbb{Q}^2 \cap (1-\mathbb{Q}^2) \subseteq R_0$, und es gibt einen Körper $F \subseteq K$ mit $[K : F] = 2$ und $\varphi(O \cap F) \subseteq \overline{R}$ dergestalt, daß für jeden Unterkörper $L \subseteq F$ mit $L^2 \cap (1 - L^2) \subseteq R_0$ die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:*
   - *Ist $L \subseteq O$, so gibt es zu jedem $x \in \overline{R}$, das transzendent über $\varphi(L)$ ist, stets ein $y \in O \cap F$ mit $\varphi(y) = x$ und $L(y)^2 \cap (1 - L(y)^2) \subseteq R_0$.*
   - *Für jede endliche Erweiterung $L_1 \subseteq F$ von L gilt $L_1^2 \cap (1 - L_1^2) \subseteq R_0$.*
   - *Zu jedem $\gamma \in \vartheta(K^\times)$ mit $n\gamma \notin \vartheta(L^\times)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es stets ein $z \in F$ mit $\vartheta(z) = \gamma$ und $L(z)^2 \cap (1 - L(z)^2) \subseteq R_0$.*

- *Zu jeder pseudo-konvergenten Folge von transzendentem Typ, die nur aus Elementen von L besteht, gibt es stets einen Limes $y \in F$ mit $L(y)^2 \cap (1 - L(y)^2) \subseteq R_0$.*

2. *Die Zirkelhalbgruppe T besitzt eine reelle Achse.*

Beweis.

Zu 1. $\Rightarrow$ 2.: Der Körper F ist reell abgeschlossen, und seine eindeutig bestimmte Anordnung ist mit ϑ verträglich. Gemäß Lemma 4.9 ist auch F ein maximal bewerteter Körper. Wir können die Argumentation des Beweises der Proposition 5.3.1 in einer angepaßten Form übernehmen:

Nach dem Lemma von Zorn gibt es einen Unterkörper $L_0 \subseteq O \cap F$, der maximal bezüglich der Bedingung

$$L_0^2 \cap (1 - L_0^2) \subseteq R_0$$

ist.-

Angenommen, es gibt ein $x \in \overline{R}$, das transzendent über $\varphi(L_0)$ ist. Dann gibt es nach der ersten Bedingung des Satzes ein Element $y \in O \cap F$ mit $\varphi(y) = x$ und $L_0(y)^2 \cap (1 - L_0(y)^2) \subseteq R_0$. Aus der Transzendenz von x folgt leicht, daß auch $L_0(y) \subseteq O$ gilt. Doch damit erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität von L_0! Also muß $\overline{R}/\varphi(L_0)$ eine algebraische Körpererweiterung sein.-

Da der Körper F maximal bewertet ist, enthält er auch die henselsche Hülle L_0^H von L_0. Angenommen es ist $L_0^H \neq L_0$. Dann gibt es sicher ein Element $y \in O \cap (L_0^H \setminus L_0)$. Der Körper $L_0(y)$ ist eine endliche (unmittelbare) Erweiterung von L_0. Nach der zweiten Bedingung des Satzes folgt daher $L_0(y)^2 \cap (1 - L_0(y)^2) \subseteq R_0$. Da auch $L_0(y) \subseteq O$ gilt, ergibt sich nun aber ein Widerspruch zur Maximalität von L_0! Also ist L_0 henselsch.-

Der Körper F induziert seine eindeutig bestimmte Anordnung auf L_0 und enthält bezüglich dieser auch die reell abgeschlossene Hülle L_0^R von L_0. Angenommen, es ist $L_0^R \neq L_0$. Dann gibt es sicher ein Element $y \in O \cap (L_0^R \setminus L_0)$. Der Körper $L_0(y)$ ist eine endliche Erweiterung von L_0. Nach der zweiten Bedingung des Satzes folgt daher $L_0(y)^2 \cap (1 - L_0(y)^2) \subseteq R_0$. Da auch $L_0(y) \subseteq O$ gilt, ergibt sich nun aber ein Widerspruch zur Maximalität von L_0! Also ist L_0 reell abgeschlossen.-

Da L_0 reell abgeschlossen ist, gilt dies auch für $\varphi(L_0)$. Und da $\overline{R}/\varphi(L_0)$ algebraisch ist, muß $\varphi(L_0) = \overline{R}$ sein.-

Nach dem Lemma von Zorn gibt es einen Zwischenkörper L von F/L_0, der maximal bezüglich der Bedingung

$$L^2 \cap (1 - L^2) \subseteq R_0$$

ist.-

Mit einer analogen Argumentation wie oben kann man nun zeigen, daß L henselsch und reell abgeschlossen ist. Insbesondere ist $\vartheta(L^\times)$ divisibel.-

Angenommen, es gibt einen Wert $\gamma \in \vartheta(K^\times) \setminus \vartheta(L^\times)$. Da $\vartheta(L^\times)$ divisibel ist, folgt $n\gamma \notin \vartheta(L^\times)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nach der dritten Bedingung des Satzes gibt es ein Element $z \in F$ mit $\vartheta(z) = \gamma$ und $L(z)^2 \cap (1 - L(z)^2) \subseteq R_0$. Aber damit erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität von L! Also muß $\vartheta(L^\times) = \vartheta(K^\times)$ sein.-

Angenommen, es ist $F \neq L$. Da F/L eine unmittelbare Erweiterung ist, gibt es gemäß Theorem 1. in [9] eine pseudo-konvergente Folge in L ohne Limes in L. Wäre diese Folge von transzendentem Typ, so gäbe es nach der vierten Bedingung des Satzes einen Limes $y \in F$ mit $L(y)^2 \cap (1 - L(y)^2) \subseteq R_0$. Aber das ergäbe einen Widerspruch zur Maximalität von L! Also muß die Folge von algebraischem Typ sein. Gemäß Theorem 3. in [9] muß es jetzt eine echte endliche, unmittelbare Erweiterung von L geben. Aber das widerspricht der Tatsache, daß L henselsch ist (siehe Theorem A.3.19 in [18])! Also muß doch $F = L$ sein.-

Der Körper L ist damit reell abgeschlossen und definiert eine Zirkelhalbgruppe T_L von K mit reeller Achse. Das Einheitsintervall seiner eindeutig bestimmten Anordnung liegt in R_0. Mit Lemma 3.2.4 folgt nun $T_L \subseteq T$. Und mit Lemma 2.8 folgt schließlich $T_L = T$; der Körper $L = F$ erweist sich somit als die reelle Achse von T.-

Zu 2. $\Rightarrow$ 1.: Die Zirkelhalbgruppe T besitzt nun eine reelle Achse F. Diese ist ein reell abgeschlossener Körper mit $[K : F] = 2$ und $\varphi(O \cap F) = \overline{R}$, die eine eindeutig bestimmte Anordnung "$\leqslant$" besitzt. Es gilt:

$$F^2 \cap (1 - F^2) = \{y \in F \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

$$\{y \in F \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\} = R_0$$

Für jeden Unterkörper L von F gilt daher:

$$L^2 \cap (1 - L^2) \subseteq \{y \in L \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\} \subseteq R_0$$

Insbesondere gilt dies für $L = \mathbb{Q}$. Man sieht nun sofort, daß die ersten beiden Bedingungen der Aussage 1. erfüllt werden. Aus den Lemmata 4.8 und 4.9 folgt zum einen die Gleichung $\vartheta(F^\times) = \vartheta(K^\times)$ und zum anderen die Tatsache, daß F ebenfalls ein maximal bewerteter Körper ist. Man erkennt nun leicht, daß auch die letzten beiden Bedingungen der Aussage 1. gelten.- $\square$

Kapitel 6

Modelle der Theorie der Einheitsscheibe

In diesem Kapitel sollen modelltheoretische Betrachtungen zu Bewertungshalbgruppen angestellt werden. Dabei legen wir eine formale Sprache

$$\mathscr{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\} \cup \{T\}$$

zugrunde, die zum einen aus der in der mathematischen Modelltheorie üblichen "Sprache der Körper" (mit den zweistelligen Funktionszeichen "+" und "·", dem einstelligen Funktionszeichen "−" und den Konstanten "0" und "1") und zum anderen aus einem einstelligen Relationszeichen "T" bestehen soll. (Siehe [17] für die verwendeten modelltheoretischen Begriffe und Aussagen dieses Kapitels.)

Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen steht die *$\mathscr{L}$-Theorie der Einheitsscheibe*:

$$Th_{\mathscr{L}}(\mathbb{C}, E) = \{\alpha \in Aus(\mathscr{L}) \mid (\mathbb{C}, E) \models \alpha\} \ ,$$

$$\text{mit } E = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leqslant 1\}$$

Dies ist die Menge aller mit der Sprache $\mathscr{L}$ formulierbaren Aussagen der Logik der 1. Stufe, die in der $\mathscr{L}$-Struktur $(\mathbb{C}, E)$ wahr sind.

(Anm.: Der Buchstabe "T" bezeichnet im folgenden sowohl einzelne Halbgruppen von Körpern als auch das neu eingeführte einstellige Relationszeichen; aus dem Zusammenhang wird jeweils klar hervorgehen, was gemeint ist.)

6.1 Generelle Charakterisierung der Modelle

Modelle der Theorie der Einheitsscheibe zeichnen sich dadurch aus, daß sie ein "Koordinatensystem" besitzen. Das folgende Lemma drückt konkret aus, was damit gemeint ist.

Lemma 6.1.1. *Es sei K ein Körper mit $charK = 0$, und es sei T_0 eine Teilmenge von K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *(K, T_0) ist ein Modell der $\mathscr{L}$-Theorie der Einheitsscheibe:*

$$(K, T_0) \models Th_{\mathscr{L}}(\mathbb{C}, E)$$

2. *T_0 ist eine Zirkelhalbgruppe von K, deren Achse (siehe Kapitel 3.2) ein reell abgeschlossener Körper ist.*

Beweis. Aus $(K, T_0) \models Th_{\mathscr{L}}(\mathbb{C}, E)$ folgt offensichtlich, daß T_0 eine Zirkelhalbgruppe von K ist, deren Achse ein reell abgeschlossener Körper ist.-

Zum Beweis der umgekehrten Richtung konstruieren wir nun wie folgt eine Abbildung σ, die jede $\mathscr{L}$-Formel in eine Formel in der Sprache der Körper überführt. Es sei Vbl die Menge aller $\mathscr{L}$ zugrunde liegenden Variablen. Wir führen als erstes zwei neue Variablenmengen Vbl_{Re} und Vbl_{Im} mit $Vbl \cap Vbl_{Re} \cap Vbl_{Im} = \emptyset$ ein. Die beiden neuen Mengen seien genauer dergestalt, daß zwei bijektive Abbildungen

$$Re : Vbl \to Vbl_{Re}, \quad Im : Vbl \to Vbl_{Im}$$

existieren. Diese Abbildungen setzen wir auf die Menge aller Terme $Tm(\mathscr{L})$ von $\mathscr{L}$ durch folgende Vereinbarungen fort:

$$Re(0) := 0, \quad Re(1) := 1, \quad Im(0) := 0, \quad Im(1) := 0$$

$$Re(-t) := -Re(t), \quad Im(-t) := -Im(t)$$

$$Re(t + d) := Re(t) + Re(d), \quad Im(t + d) := Im(t) + Im(d)$$

$$Re(t \cdot d) := Re(t) \cdot Re(d) - Im(t) \cdot Im(d)$$

$$Im(t \cdot d) := Re(t) \cdot Im(d) + Im(t) \cdot Re(d)$$

Dabei sind $t, d \in Tm(\mathscr{L})$. Und nun können wir die Abbildung σ durch folgende Vereinbarungen auf der Menge $Fml(\mathscr{L})$ aller Formeln von $\mathscr{L}$ definieren:

$$\sigma(t = d) := Re(t) = Re(d) \wedge Im(t) = Im(d)$$

$$\sigma(T(t)) := \exists\, y \;\; Re(t) \cdot Re(t) + Im(t) \cdot Im(t) + y \cdot y = 1$$

$$\sigma(\neg\, \psi) := \neg\, \sigma(\psi)$$

$$\sigma(\forall\, x \;\; \psi) := \forall\, Re(x), Im(x) \;\; \sigma(\psi)$$

$$\sigma(\psi \wedge \phi) := \sigma(\psi) \wedge \sigma(\phi)$$

Dabei sind $t, d \in Tm(\mathscr{L})$, $\psi, \phi \in Fml(\mathscr{L})$, $x \in Vbl$. Und $y \in Vbl_{Re} \cup Vbl_{Im}$ ist dergestalt, daß y in $Re(t), Im(t)$ nicht vorkommt. Die Abbildung σ überführt alle Formeln der Sprache $\mathscr{L}$ in Formeln der Sprache $\mathscr{L}'$ der Körper über der Variablenmenge $Vbl_{Re} \cup Vbl_{Im}$.

Nun sei T_0 eine Zirkelhalbgruppe von K, deren Achse R ein reell abgeschlossener Körper ist. Dann können wir $K = R \times R$ annehmen. Jeder Variablenbelegung

$$h : Vbl \to K$$

entspricht jetzt umkehrbar eindeutig eine Variablenbelegung:

$$h_R : Vbl_{Re} \cup Vbl_{Im} \to R$$

Man kann nun zum einen die $\mathscr{L}$-Struktur

$$\mathcal{K} :=< K; +^K, \cdot^K, -^K; 0^K, 1^K; T_0 > (= (K, T_0))$$

und zum anderen die $\mathscr{L}'$-Struktur

$$\mathcal{R} :=< R; +^R, \cdot^R, -^R; 0^R, 1^R >$$

betrachten. Für jeden Term $t \in Tm(\mathscr{L})$ gilt dann offenbar:

$$t^{\mathcal{K}}[h] = (Re(t)^{\mathcal{R}}[h_R], Im(t)^{\mathcal{R}}[h_R])$$

Man kann jetzt leicht zeigen, daß für jede Formel $\psi \in Fml(\mathscr{L})$ und jede Variablenbelegung $h : Vbl \to K$ die folgende Äquivalenz gilt:

$$\mathcal{K} \models \psi[h] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R} \models \sigma(\psi)[h_R]$$

Die gewöhnlichen reellen Zahlen bilden ebenfalls eine $\mathscr{L}'$-Struktur:

$$\Re :=< \mathbb{R}; +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}; 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}} >$$

Es sei nun $\psi \in Th_{\mathscr{L}}(\mathbb{C}, E)$. Dann ist leicht einzusehen, daß

$$\Re \models \sigma(\psi)$$

gilt. Nun machen wir uns die Vollständigkeit der Theorie der reell abgeschlossenen Körper zunutze (deren Beweis letztlich auf die Arbeiten von Emil Artin zurückgeht): Eine Aussage, die in der Sprache $\mathscr{L}'$ der Körper formuliert werden kann, ist entweder in *allen* reell abgeschlossenen Körpern wahr oder in *allen* reell abgeschlossenen Körpern falsch (siehe Satz 4.7 in [17]). Also gilt auch:

$$\mathcal{R} \models \sigma(\psi)$$

Es ergibt sich schließlich $\mathcal{K} \models \psi$, und das Lemma ist bewiesen. $\square$

6.2 Vorstellung konkreter Modelle

Für einen Körper K mit $charK \neq 2$ und eine Halbgruppe T von K können wir (wie im Kapitel 3.2) die Menge

$$R_0 = \{ \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \mid t \in T^{\times} \}$$

definieren. Mit der Sprache $\mathscr{L}$ können wir dann offenbar leicht die folgenden Bedingungen als Aussagen formulieren:

K ist ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $char K = 0$.

T ist eine totale Halbgruppe von K.

$2 \cdot T \subseteq T^\times + T^\times$

Für alle natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\forall\, r_0, ..., r_n, s_0, ..., s_m \in R_0 \\ &((r_0 + ... + r_n)^2 + (s_0 + ... + s_m)^2 = 0 \\ &\Rightarrow\ r_0 + ... + r_n = s_0 + ... + s_m = 0) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Die (abzählbar unendliche) Menge dieser Aussagen bildet ein Axiomensystem, das mit dem Symbol Σ bezeichnet werden soll. Für dieses gilt der Satz:

Satz 6.2.1. *Das System Σ ist ein vollständiges Axiomensystem für die $\mathscr{L}$-Theorie der Einheitsscheibe $Th_{\mathscr{L}}(\mathbb{C}, E)$.*

Beweis. Es sei K ein Körper, und es sei T eine Teilmenge von K dergestalt, daß (K, T) ein Modell von Σ ist:

$$(K, T) \models \Sigma$$

Zu Beginn des Kapitels 3.2 hatten wir bereits für die Achse R von T die Ungleichung $[K : R] \leqslant 2$ und die Gleichung 3.4 hergeleitet. Letztere und die Bedingung 6.1 erzwingen offenbar $\sqrt{-1} \notin R$. Also ist $[K : R] = 2$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, folgt aus einem bekannten Satz von Artin-Schreier, daß R ein reell abgeschlossener Körper ist. Insbesondere ist R euklidisch. Aus dem Korollar 3.2.2 folgt dann, daß T eine Zirkelhalbgruppe von K ist. Mit dem Lemma 6.1.1 folgt schließlich die Behauptung. □

Die folgenden Bedingungen liefern ein weiteres vollständiges Axiomensystem für die $\mathscr{L}$-Theorie der Einheitsscheibe:

K ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.

T ist eine Zirkelhalbgruppe von K.

$T \cap (T + 2) = \{1\}$

$R_0 + R_0 \subseteq 2 \cdot R_0$

(Weil K eine Bewertungshalbgruppe enthält, muß $char K = 0$ sein.) Der *Beweis* für die Vollständigkeit ergibt sich direkt aus den Lemmata 3.2.1 und 6.1.1. Damit haben wir ein Axiomensystem für die Theorie der Einheitsscheibe gefunden, das nur "wenig" Bezug auf die Achse R von T nimmt und ein Analogon zu Axiomensystemen für bewertete Körper darstellt.

Das zuletzt vorgestellte Axiomensystem ist im Grunde deshalb ein vollständiges System für die Theorie der Einheitsscheibe, weil es für die Achse R von T die Beziehung $[K:R]=2$ erzwingt. Es sei hier noch angemerkt, daß anstelle der letzten drei Bedingungen auch jede andere Liste von Bedingungen gewählt werden könnte, die die Beziehung $1<[K:R]<\infty$ erzwingt. Dies folgt gemäß einem bekannten Satz von Artin-Schreier über Unterkörper von algebraisch abgeschlossenen Körpern mit endlichem Ko-Grad (siehe etwa Theorem 4.3.5(b) in [3] oder Theorem 2.21., Seite 250, in [13]).

Wir merken noch an, daß sich die Theorie der Krull-Halbgruppen nicht axiomatisieren läßt.

Bemerkung 6.2.2. *Es gibt kein erfüllbares Axiomensystem Σ der Sprache $\mathscr{L}$ dergestalt, daß für alle $\mathscr{L}$-Strukturen (K,T_0) die Äquivalenz*

$$(K,T_0)\models\Sigma \quad\Longleftrightarrow$$

K ist ein algebraisch abgeschlossener Körper,
und T_0 ist eine Krull-Halbgruppe von K

gilt.

Beweis. Angenommen, es existiert doch ein solches Axiomensystem Σ. Dann besitzt es ein $\aleph_1$-saturiertes Modell (K,T_0). Bezeichnet

$$\varphi: O\twoheadrightarrow\overline{K}$$

den Restklassenhomomorphismus der Bewertung, die T_0 induziert, so besitzt $\overline{K}$ gemäß Satz 2.4 einen archimedischen Absolutbetrag $|\ |$ mit:

$$T_0=\varphi^{-1}(\{x\in\overline{K}\mid |x|\leqslant 1\})$$

Es sei $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dann gilt offensichtlich

$$\frac{j}{j+1}\frac{n+1}{n}\in T_0 \quad\text{und}\quad \frac{n+1}{n}\notin T_0$$

für alle $j=1,2,3,...,n$. Mit anderen Worten: Die Belegung $x=(n+1)/n$ erfüllt für alle $j=1,2,3,...,n$ die Formel:

$$\psi_j:=\quad T(\frac{j}{j+1}x)\wedge\neg T(x)$$

Also wird jede endliche Teilmenge der Formelmenge

$$\Psi:=\{\psi_j\mid j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$$

von (K,T_0) erfüllt. Somit ist Ψ ein Typ von (K,T_0). Da (K,T_0) saturiert ist, wird ganz Ψ von diesem Modell erfüllt. Es muß daher ein Element $a\in K\setminus T_0$ mit

$$\forall j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\quad \frac{j}{j+1}\,a\in T_0$$

existieren. Aus der letzten Bedingung folgt aber $a\in O$, $|\varphi(a)|\leqslant 1$. Und daraus folgt nun doch $a\in T_0$. Widerspruch! □

Kapitel 7

Strukturen von Bewertungshalbgruppen (Teil III)

7.1 Bewertungshalbgruppen von angeordneten Körpern

Bei der Frage, in welchem Zusammenhang Bewertungshalbgruppen mit Anordnungen von Körpern stehen, betrachten wir zunächst das folgende einführende Beispiel: Ist σ ein beliebiger Automorphismus von $\mathbb{C}$, so definiert

$$|x|_\sigma := |\sigma(x)|, \quad x \in \mathbb{R}$$

einen archimedischen Absolutbetrag der reellen Zahlen. Dabei kann bei geeignet gewähltem σ der Fall eintreten, daß $|\ |_\sigma$ mit der Anordnung von $\mathbb{R}$ nicht verträglich ist. Wir wählen σ nun so, daß dieser Fall tatsächlich eintritt. Für eine angeordnete und abelsche Gruppe $\Gamma \neq \{0\}$ können wir dann den formalen Potenzreihenkörper $K := \mathbb{R}((\Gamma))$ betrachten. Bezeichnet φ den Restklassenhomomorphismus seiner kanonischen Bewertung ϑ, so ist

$$T := \varphi^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid |x|_\sigma \leqslant 1\})$$

eine Krull-Halbgruppe und eine Bewertungshalbgruppe von K. Die Anordnung von $\mathbb{R}$ induziert in kanonischer Weise eine Anordnung "$\leqslant$" von K, mit der die kanonische Bewertung von K verträglich ist (siehe Abschnitt 5.1). Also induziert T eine mit der Anordnung von K verträgliche Bewertung. Ferner enthält T auch kleine Intervalle von K: Ist $y \in K$ mit $y > 0$ und $\vartheta(y) > 0$, so gilt offenbar:

$$\{a \in K \mid 0 \leqslant a \leqslant y\} \subseteq T$$

Dennoch kann man nicht davon sprechen, daß zwischen T und der Anordnung von K ein enger Zusammenhang besteht; die Bewertungshalbgruppe liegt anschaulich gesprochen stark "verstreut" in K.

Dieses Beispiel zeigt, daß man bei der Betrachtung von Bewertungshalbgruppen in einem angeordneten Körper nicht nur die Verträglichkeit der induzierten Bewertung mit der Anordnung des Körpers berücksichtigen sollte, sondern auch die Verträglichkeit des zugehörigen Absolutbetrages mit der Anordnung des Restklassenkörpers in die Überlegungen miteinbeziehen muß.

(Wir bemerken, daß es bei einem formalen Potenzreihenkörpern $\overline{K}((\Gamma))$ über einem angeordneten Körper $\overline{K}$ generell zwei Bewertungen gibt, die eine ausgezeichnete Rolle spielen und voneinander unterschieden werden müssen: Einerseits gibt es die kanonische Bewertung, die konvex bezüglich der von $\overline{K}$ auf $\overline{K}((\Gamma))$ induzierten Anordnung "$\leqslant$" ist. Andererseits induziert eben diese Anordnung einen Bewertungsring $\{y \in \overline{K}((\Gamma)) \mid \exists n \in \mathbb{N} \ \ -n < y < n\}$; sein Restklassenkörper ist stets archimedisch und muß daher nicht mit $\overline{K}$ übereinstimmen.)

Lemma 7.1.1. *Es sei $(K, \leqslant)$ ein angeordneter Körper, der eine Bewertungshalbgruppe T besitzt. Weiter sei φ der Restklassenhomomorphismus der von T induzierten Bewertung ϑ, und es sei $|\ |$ ein archimedischer Absolutbetrag des Restklassenkörpers $\overline{K}$, für den*

$$T \subseteq \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid |x| \leqslant 1\})$$

gilt (gemäß Satz 2.4 und nachfolgenden Ausführungen). Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. *Die Bewertung ϑ ist äquivalent zu der von der Anordnung von K induzierten Bewertung, und $|\ |$ ist verträglich mit der von ϑ auf $\overline{K}$ induzierten (archimedischen) Anordnung.*

2. *Es gilt $\{a \in K \mid -1/2 < a < 1/2\} \subseteq T$.*

Beweis. Es bezeichne O den Bewertungsring von ϑ. Ist $y \in O \setminus T$, so ist $1/y \in T$, $y \in O^\times$, und es folgt $1/|\varphi(y)| = |\varphi(1/y)| \leqslant 1$, $|\varphi(y)| \geqslant 1$. Aus $y \in O$, $|\varphi(y)| < 1$ folgt daher stets $y \in T$.

Zu 1. $\Rightarrow$ 2.: Wegen $2 \notin T$ ist $\pm 1/2 \in T \subseteq O$, und damit ergibt sich zunächst $\{x \in K \mid -1/2 < x < 1/2\} \subseteq O$. Ist nun $x \in K$ mit $-1/2 < x < 1/2$, so folgt aus $|\varphi(x)| \leqslant 1/2$ sofort $x \in T$.-

Zu 2. $\Rightarrow$ 1.: Es sei $a \in K$ mit $m < a$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ zunächst $2n < a$, $0 < n/a < 1/2$ und damit $n \cdot (1/a) \in T$. Daraus folgt offensichtlich $\varphi(1/a) = 0$, $1/a \in O \setminus O^\times$, $a \notin O$.

Nun sei $a \in K$ mit $0 < a$ und $a \notin O$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ auch die

Aussage $(1/2n)\cdot a \notin O$. Erst recht ist $(1/2n)\cdot a \notin T$ und es folgt $1/2 < (1/2n)\cdot a$. Und daraus folgt $n < a$.

Dies zeigt, daß ϑ äquivalent zu der von der Anordnung von K induzierten Bewertung ist. Somit wird von ihr auf $\overline{K}$ eine archimedische Anordnung "$\leqslant$" induziert.

Es sei nun $y \in O$ mit $-1 < \varphi(y) < 1$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$-1/6 < \varphi(y)^n < 1/6$$

Daraus folgt:

$$-1/3 < \varphi(2y^n) < 1/3, \quad -1/2 < 2y^n < 1/2$$

Und nun ergibt sich $2y^n \in T$, $2|\varphi(y)|^n = |\varphi(2y^n)| \leqslant 1$. Das zeigt $|\varphi(y)| < 1$. Also ist $|\ |$ verträglich mit der induzierten Anordnung von $\overline{K}$. $\square$

Das Lemma motiviert die folgende Definition.

Definition 7.1.2. Es sei T eine Bewertungshalbgruppe eines angeordneten Körpers $(K, \leqslant)$. Dann heißt T *konvex* bezüglich "$\leqslant$" oder *verträglich* mit "$\leqslant$", wenn $\{a \in K \mid -1/2 < a < 1/2\} \subseteq T$ gilt.

Aus dem Satz 2.4 von Krull und Lemma 7.1.1 ergibt sich nun offenbar das folgende Korollar, das uns eine grobe Übersicht über alle konvexen Bewertungshalbgruppen verschafft.

Korollar 7.1.3. *Es sei T eine konvexe Bewertungshalbgruppe eines angeordneten Körpers $(K, \leqslant)$. Dann induziert sie auf K eine konvexe Bewertung, die ihrerseits auf dem Restklassenkörper $\overline{K}$ eine archimedische Anordnung "$\leqslant$" dergestalt induziert, daß*

$$T \subseteq \varphi^{-1}(\{x \in \overline{K} \mid x^2 \leqslant 1\})$$

gilt. Dabei bezeichnet φ den Restklassenhomomorphismus der Bewertung.

Beispiele 7.1.4. Es sei $(K, \leqslant)$ ein nicht-archimedisch angeordneter Körper. Dann ist $U := \{u \in K \mid \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad 0 < u < 1/n\} \neq \emptyset$. Man überlegt sich leicht, daß jede der folgenden drei Mengen eine konvexe Bewertungshalbgruppe ist:

$$T := \{a \in K \mid a^2 \leqslant 1\}$$

$$T' := (1 + U) \cup T \cup -(1 + U)$$

$$T'' := T' \setminus ((1 - U) \cup -(1 - U))$$

T'' hat zwei "kleine Lücken". Diese Mengen repräsentieren jedoch nicht alle möglichen Arten von konvexen Bewertungshalbgruppen. Dies zeigt die folgende modelltheoretische Überlegung (siehe auch Kapitel 6): Es sei

$$\widetilde{\mathscr{L}} := \{+, \cdot, -, 0, 1, \leqslant\} \cup \{T\}$$

die formale Sprache der angeordneten Körper (siehe etwa S. 210 in [17]), die um ein einstelliges Relationssymbol "T" erweitert wurde. In dieser Sprache kann man offenbar die folgenden Bedingungen als Aussagen formulieren:

K ist ein angeordneter Körper.

T ist eine konvexe Bewertungshalbgruppe von K.

Die Aussagen bilden ein Axiomensystem Σ über $\widetilde{\mathscr{L}}$. Man überlegt sich nun leicht, daß das oben aufgeführte Beispiel T'' ein $\widetilde{\mathscr{L}}$-Modell

$$\mathfrak{T} := < K; +^K, \cdot^K, -^K; 0^K, 1^K; \leqslant^K; T'' >$$

von Σ darstellt, das zusätzlich jede endliche Teilmenge der Formelmenge

$$\Phi := \{1 - \frac{1}{j} < x < 1 \wedge T(x) \mid j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

erfüllt. Also ist Φ ein Typ von $\mathfrak{T}$. Nach einem bekannten Satz aus der Modelltheorie (siehe etwa Existenzsatz 2.17 in [17]) gibt es zu $\mathfrak{T}$ eine $\aleph_1$-saturierte elementare Erweiterung:

$$\mathfrak{T}^* = < K^*; +^{K^*}, \cdot^{K^*}, -^{K^*}; 0^{K^*}, 1^{K^*}; \leqslant^{K^*}; T^* >$$

Eine Aussage in der Sprache $\widetilde{\mathscr{L}}$ wird genau dann von $\mathfrak{T}^*$ erfüllt, wenn sie von $\mathfrak{T}$ erfüllt wird. Da das Modell $\mathfrak{T}^*$ saturiert ist, erfüllt es ferner die Formelmenge Φ ganz. Also ist T^* eine konvexe Bewertungshalbgruppe von K^*, zu der es ein Element $a \in T^*$ mit

$$\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad 1 - \frac{1}{j} < a < 1$$

gibt. Andererseits gilt für alle Elemente $b \in K \subseteq K^*$ mit

$$\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad 1 - \frac{1}{j} < b < 1$$

die Aussage $b \notin T''$. Insbesondere erfüllt das Modell $\mathfrak{T}$ die Formelmenge

$$\{1 - \frac{1}{j} < x < 1 \wedge \neg T(x) \mid j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

ganz, und dann gilt dies erst recht für $\mathfrak{T}^*$. Also existiert auch ein Element $a' \in K^*$ mit $a' \notin T^*$ und:

$$\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad 1 - \frac{1}{j} < a' < 1$$

Anschaulich gesprochen gibt es hier also "sehr nahe" an der 1 sowohl Elemente innerhalb als auch außerhalb von T^*. Trotzdem muß

$$T^* \cap (T^* + 2) = \{1\}$$

gelten, da ja auch

$$T'' \cap (T'' + 2) = \{1\}$$

gilt.-

Schließlich bemerken wir noch, daß konvexe Bewertungshalbgruppen offenbar niemals Zirkelhalbgruppen sein können.

Kapitel 8

Schlußwort

Offen geblieben ist leider die Frage, ob bei dem letzten in Abschnitt 6.2 vorgestellten Axiomensystem für die komplexe Einheitsscheibe auch noch auf die Bedingung $R_0 + R_0 \subseteq 2 \cdot R_0$ verzichtet werden kann. Hier bieten sich die Sätze 5.2.1 und 5.3.2 als Ansatzpunkte zur weiteren Klärung dieses Sachverhalts und möglichen Verbesserung des Systems an. Denkbar erscheint jedoch auch die Möglichkeit mit dem zuletzt in 7.1.4 vorgestellten Beispiel einer konvexen Bewertungshalbgruppe T^* auf irgendeine Weise eine Zirkelhalbgruppe T zu konstruieren, die zwar $T \cap (T + 2) = \{1\}$ aber nicht $R_0 + R_0 \subseteq 2 \cdot R_0$ erfüllt. In jedem Fall ist es sinnvoll dem modelltheoretischen Begriff "nimmt keinen Bezug auf die Achse von T" der Axiomensysteme durch eine exakte mathematische Definition eine konkrete Gestalt zu geben und dann zu beweisen/widerlegen, daß der Begriff erfüllbar ist.

Literaturverzeichnis

[1] Eberhard Becker: Euklidische Körper und euklidische Hüllen von Körpern, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 268/269, 1974

[2] Brian Conrad:
Math 676. Some Basics concerning Absolute Values, University of Michigan, http://www.math.lsa.umich.edu/∼bdconrad/676Page/handouts/ostrowski.pdf

[3] Antonio J. Engler, Alexander Prestel: Valued Fields, Springer Verlag, 2005

[4] Y. L. Ershov: Multi-Valued Fields, Kluwer Academic, 2001

[5] Klaus Feustle: Totale Halbgruppen von Körpern, Diplomarbeit an der Universität Konstanz, 1994

[6] Antongiulio Fornasiero: Embedding Henselian fields into power series, Journal of Algebra 304 (2006), 112-156, http://math.usask.ca/fvk/fornemb.pdf

[7] Antongiulio Fornasiero, Franz-Viktor Kuhlmann, Salma Kuhlmann: Towers of complements to valuation rings and truncation closed embeddings of valued fields, Preprint, http://math.usask.ca/∼skuhlman/FORNAC38.pdf

[8] Thomas Ganter: Pythagoreische und euklidische Körper, Diplomarbeit an der technischen Universität München, 1996, http://www.familie-ganter.de/Diplomarbeit.pdf

[9] Irving Kaplansky: Maximal fields with valuations, Duke mathematical Journal, Band 9, 1942

[10] Irving Kaplansky: Topological methods in valuation theory, Duke mathematical Journal, Band 14, 1947

[11] Wolfgang Krull: Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern, Mathematische Zeitschrift, Ausgabe 77, 1961

[12] F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann, M. Marshall, M. Zekavat: Embedding ordered fields in formal power series fields, J. Pure Appl. Algebra 169 (2002), 71-90 MR 2002m:12003, http://math.usask.ca/∼marshall/fvszm.pdf

[13] Tsit Yuen Lam: Introduction to Quadratic Forms over Fields, Graduate Studies in Mathematics, Volume 67, American Mathematical Society, 2004

[14] Karl Mathiak: Reelle Bewertungen, Technische Universität Braunschweig, Institut für Angewandte Mathematik, Abteilung Angewandte Algebra, http://www.algebra.tu-bs.de/mathiak/reellbew.ps

[15] M.H. Mourgues, P. Ressayre: Every real closed field has an integer part, Journal of Symbolic Logic, Volume 58, No. 2, S. 641-647, 1993

[16] Jürgen Neukirch: Algebraic Number Theory, Volume 322, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, 1992

[17] Alexander Prestel: Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie, Vieweg Verlag, 1986

[18] Alexander Prestel, Charles N. Delzell: Positive Polynomials, Springer Verlag, 2001

[19] Alexander Prestel, Martin Ziegler: Erblich euklidische Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 274/275, 1975

[20] S. Prieß-Crampe: Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen, Ergeb. Math. 98, Springer, 1983

[21] Frank Quigley: Maximal subfields of an algebraically closed field not containing a given element, Proc. Amer. Math. Soc. 13, 1962